АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

В. А. Марченко

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКОВА ДУМКА»
КИЕВ — 1972

УДК 517.9 2 | 6
530.1
М30

Монография посвящена построению спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка с помощью операторов преобразования. Такой подход позволил единым способом и достаточно просто получить все основные результаты спектральной теории как в самосопряженном, так и в несамосопряженном случае. Особое внимание уделено новым разделам теории (обратным задачам, асимптотическим формулам для спектральных функций и др.), для которых аппарат операторов преобразования оказался наиболее сильным и естественным орудием исследования. В каждом параграфе приведены задачи, содержащие обобщения и уточнения излагаемого материала.

Книга рассчитана на научных работников—математиков и физиков, аспирантов и студентов старших курсов математических и физических факультетов университетов.

Редакция физико-математической литературы

Зав. редакцией И. В. Евсеенко-Мисюренко

КИЕВСКИЙ ПОЛИГРАФИЧЕСКИЙ КОМБИНАТ

$\frac{2-2-3}{115-71\ \text{М}}$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Оператором Штурма — Лиувилля называется оператор $\mathbf{L}$ вида

$$\mathbf{L}[y] = -\frac{d^2}{dx^2} y(x) + q(x)\, y(x), \tag{1}$$

заданный на конечном или бесконечном интервале. Начало изучению таких операторов положили известные работы Д. Бернулли, Ж.-Л. Даламбера и Л. Эйлера, насчитывающие более чем двухсотлетнюю давность. Почти одновременно Даламбер и Бернулли предложили два различных метода для решения уравнения колебаний струны. Из идеи, лежащей в основе метода Бернулли и получившей дальнейшее развитие в трудах Ж.-Б. Фурье, возникла спектральная теория линейных дифференциальных операторов. Предметом изучения этой теории являются краевые задачи математической физики, а основным методом — метод собственных функций. Центральное место в этом методе занимает теорема о полноте системы собственных функций. Для самосопряженных краевых задач, порождаемых операторами Штурма — Лиувилля на конечном интервале, ее впервые, в 1896 г., строго доказал В. А. Стеклов.

Новые глубокие идеи внес в спектральную теорию Д. Гильберт в своих фундаментальных работах по теории интегральных уравнений. В 1910 г. Г. Вейль, опираясь на теорию интегральных уравнений, построил спектральную теорию операторов Штурма—Лиувилля, заданных на бесконечном интервале.

Особенно важное значение приобрела спектральная теория после возникновения квантовой механики. Она стала не только методом решения задач, но и языком квантовой механики. В свою очередь квантовая механика стимулировала развитие спектральной теории абстрактных самосопряженных операторов, в том числе и неограниченных. Такая теория на уровне физической строгости была построена П.-А. Дираком, а строгая, включающая также теорию самосопряженных расширений,— Дж. Фон-Нейманом. Теория Г. Вейля, классическая проблема моментов и работы Т. Карлемана по интегральным уравнениям послужили основными ориентирами при построении общей спектральной теории. Правда, в общей теории долгое время не удавалось получить формулы разложения по собственным функциям в привычном виде, хотя в нестрогом формализме Дирака такие разложения постоянно использовались.

Такой разрыв был ликвидирован в 1955, 1956 гг. И. М. Гельфандом, А. Г. Костюченко и Ю. М. Березанским, привлекшим для этого теорию обобщенных функций. Еще раньше М. Г. Крейн разработал метод направляющих функционалов и с его помощью получил формулы разложения для обыкновенных дифференциальных операторов.

В настоящее время основные теоремы спектрального анализа конкретных симметрических операторов естественно вытекают из общей теории, методы которой успешно могут быть использованы и в более специальных задачах, например при исследовании природы спектра. Однако при изучении конкретных операторов, и в первую очередь дифференциальных, возникает ряд важных вопросов, на которые общая теория не может дать ответа. К ним относится изучение асимптотического поведения собственных значений, собственных функций, спектрального ядра и спектральной функции, исследование характера сходимости разложений по собственным функциям, обратные задачи спектрального анализа, в которых требуется восстановить оператор по тем или иным его спектральным характеристикам, и др. Кроме того, не укладываются в общую теорию теоремы о разложении по собственным и присоединенным функциям произвольных несамосопряженных операторов.

Все эти задачи были успешно решены для операторов Штурма — Лиувилля в течение 50—60-х годов XX в., и основную роль при этом сыграли операторы преобразования. Они тесно связаны с теорией операторов обобщенного сдвига, созданной Ж. Дельсартом и Б. М. Левитаном [1].

Важнейшим примером операторов обобщенного сдвига являются операторы $\mathbf{T}^y$ (y — параметр), определяемые формулой

$$\mathbf{T}^y[f] = u(x, y; f),$$

где $u(x, y; f)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\left.\begin{aligned} u''_{xx} - q_1(x)\,u &= u''_{yy} - q_2(y)\,u, \\ u(x, 0) = f(x), \quad & u'_y(x, 0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Если, следуя А. Я. Повзнеру [2], применить метод Римана для интегрирования уравнения (2), то его решение $\mathbf{T}^y[f]$ будет иметь вид

$$\mathbf{T}^y[f] = \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} + \int\limits_{x-y}^{x+y} T(x, y, t)\,f(t)\,dt, \tag{3}$$

откуда вытекает следующее тождество:

$$\omega_1(\lambda, x)\,\omega_2(\lambda, y) = \frac{\omega_1(\lambda, x+y) + \omega_1(\lambda, x-y)}{2} + \\ + \int\limits_{x-y}^{x+y} T(x, y, t)\,\omega_1(\lambda, t)\,dt, \tag{4}$$

в котором через $\omega_j(\lambda, x)$ $(j = 1, 2)$ обозначены решения уравнений

$$y''(x) - q_j(x) y(x) + \lambda^2 y(x) = 0$$

при начальных данных $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. В частности, если функции $q_j(x)$, а следовательно и решения $\omega_j(\lambda, x)$, четны, то, полагая в формуле (4) $x = 0$, получаем

$$\omega_2(\lambda, y) = \omega_1(\lambda, y) + \int_{-y}^{y} T(0, y, t)\, \omega_1(\lambda, t)\, dt. \qquad (5)$$

Стоящий справа оператор преобразует решения $\omega_1(\lambda, y)$ одного уравнения Штурма — Лиувилля в решения $\omega_2(\lambda, y)$ другого и называется оператором преобразования. Частные случаи операторов преобразования встречались еще у Ж. Дельсарта, а общая формула (5) получена А. Я. Повзнером.

Интегральное представление операторов обобщенного сдвига (3) и операторы преобразования (5) А. Я. Повзнер [2] применил для вывода основной теоремы Вейля (в том частном случае, когда $|q(x)| \leqslant C(1 + |x|)^{-3-\varepsilon}$). Это, по-видимому, была первая работа, в которой операторы преобразования применены в спектральной теории.

Вскоре с помощью операторов преобразования были получены асимптотические формулы для спектральных функций симметрических операторов Штурма — Лиувилля, заданных на полуоси [3], доказаны единственность оператора Штурма — Лиувилля с заданной спектральной функцией и единственность решения ряда других обратных задач спектрального анализа [4, 5]. В полученном И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [6] полном решении обратной задачи восстановления оператора Штурма — Лиувилля по его спектральной функции $\rho(\lambda)$ существенно используются операторы преобразования, интерпретация которых как операторов, ортогонализующих $\cos \lambda x$ по мере $d\rho(\lambda)$, составляет идейную основу этой работы. Другой подход к исследованию обратных задач развит М. Г. Крейном. Б. М. Левитан [7] применил операторы обобщенного сдвига и операторы преобразования для доказательства общей теоремы о равносходимости разложений по собственным функциям самосопряженных операторов Штурма — Лиувилля.

В 1955 г. Б. Я. Левин [8] ввел новый вид операторов преобразования, которые, преобразуя решения одного уравнения Штурма — Лиувилля в решения другого, сохраняют их асимптотическое поведение при $x \to +\infty$ (при этом предполагается, разумеется, что соответствующие функции $q(x)$ при $x \to +\infty$ убывают достаточно быстро). Эти операторы были использованы для решения обратной задачи теории рассеяния [9, 10].

Наконец, в работах [11, 12] с помощью операторов преобразования получено обобщение теории Г. Вейля на произвольные несамосопряженные операторы Штурма — Лиувилля, заданные на полуоси, и на операторные уравнения Штурма — Лиувилля.

Таким образом, во многих основных вопросах спектральной теории операторов Штурма — Лиувилля операторы преобразования оказались естественным и сильным орудием исследования. В настоящей монографии спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля полностью строится с помощью операторов преобразования. При таком подходе можно сразу охватить несамосопряженный случай и полнее осветить возможности операторов преобразования.

В основу книги положен спецкурс, прочитанный мною студентам III и IV курсов Харьковского университета. Третья глава, посвященная обратной задаче теории рассеяния, написана так, что ее можно читать независимо от предыдущих. В каждом параграфе даны задачи, содержащие обобщения и уточнения излагаемого материала. Как правило, они снабжены указаниями, достаточными для восстановления полных доказательств. При подборе задач были использованы результаты И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [13], Л. Д. Фаддеева [14], В. С. Буслаева [15] и М. И. Ломоносова [16] (формулы следов), Ф. С. Рофе-Бекетова [12] (операторные уравнения Штурма — Лиувилля), М. Г. Гасымова [17], Б. М. Левитана и И. С. Саргсяна [18] (системы уравнений Дирака), М. Крама [19], М. Г. Крейна [20] и В. Ф. Коропа [21] (вырожденные операторы преобразования и уравнения с особенностью), Д. Ш. Лундиной [22], С. А. Маркина [23] и К. В. Маслова [24] (устойчивость обратных задач).

Пользуюсь случаем, чтобы выразить искреннюю благодарность К. В. Маслову, прочитавшему рукопись, за полезные замечания.

В. А. Марченко

Глава 1

УРАВНЕНИЕ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ И ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. ФОРМУЛА РИМАНА

Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$ $(-\infty < x < \infty;\ 0 \leqslant y < \infty)$ является решением следующей задачи Коши:

$$u''_{xx}(x, y) - q_1(x)\, u(x, y) = u''_{yy}(x, y) - q_2(y)\, u(x, y), \quad (1.1.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_y(x, 0) = \psi(x). \quad (1.1.1')$$

Значение функции $u(x, y)$ в точке (x_0, y_0) можно считать значением некоторого линейного функционала $\mathbf{T}_{x_0}^{y_0}$ на вектор-функции $(\varphi(x), \psi(x))$:

$$u(x_0, y_0) = \mathbf{T}_{x_0}^{y_0}[\varphi(x), \psi(x)]. \quad (1.1.2)$$

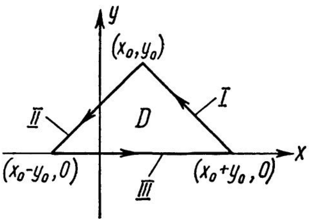

Рис. 1.

Вид этого функционала впервые был найден Б. Риманом следующим способом. Обозначим через $R(x, y; x_0, y_0)$ дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения

$$R''_{xx} - q_1(x) R = R''_{yy} - q_2(y) R \quad (1.1.3)$$

в области D (рис. 1), обращающееся в единицу на характеристиках $x - x_0 = \pm(y - y_0)$ этого уравнения. Умножив уравнение (1.1.1) на R, уравнение (1.1.3) — на u и вычтя затем одно из другого, получим справедливое в области D тождество

$$u''_{xx}R - uR''_{xx} = u''_{yy}R - uR''_{yy}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}(u'_x R - uR'_x) - \frac{\partial}{\partial y}(u'_y R - uR'_y) = 0.$$

Поэтому

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(u'_x R - uR'_x) - \frac{\partial}{\partial y}(u'_y R - uR'_y)\right] dxdy = 0,$$

откуда согласно формуле Грина следует

$$\int_\Gamma (u'_x R - uR'_x)\, dy + (u'_y R - uR'_y)\, dx = 0, \qquad (1.1.4)$$

где Γ — ориентированная граница области D, состоящая из трех направленных отрезков I, II, III (см. рис. 1), так что

$$\int_\Gamma = \int_{\mathrm{I}} + \int_{\mathrm{II}} + \int_{\mathrm{III}}. \qquad (1.1.5)$$

На участке I $y = y_0 - (x - x_0)$, $dy = -dx$ и, следовательно,

$$\int_{\mathrm{I}} = \int_{x_0+y_0}^{x_0} \{-u'_x R + uR'_x + u'_y R - uR'_y\}\, dx =$$

$$= -\int_{x_0+y_0}^{x_0} \{(u'_x - u'_y)R + (R'_x - R'_y)u - 2u(R'_x - R'_y)\}\, dx, \qquad (1.1.6)$$

причем в подынтегральную функцию вместо y нужно подставить $y_0 - (x - x_0)$. Для любой дифференцируемой функции $F(x, y)$

$$\frac{d}{dx} F(x, y_0 - (x - x_0)) = (F'_x - F'_y)\big|_{y=y_0-(x-x_0)},$$

поэтому

$$(u'_x - u'_y)R + (R'_x - R'_y)u\big|_{y=y_0-(x-x_0)} = \frac{d}{dx}\left(uR\big|_{y=y_0-(x-x_0)}\right)$$

и

$$(R'_x - R'_y)\big|_{y=y_0-(x-x_0)} = \frac{d}{dx} R(x, y_0 - (x - x_0);\ x_0, y_0) = 0,$$

ибо на прямой $y = y_0 - (x - x_0)$ функция R тождественно равна единице по условию. Из этих равенств и формулы (1.1.6) следует

$$\int_{\mathrm{I}} = -\int_{x_0+y_0}^{x_0} \frac{d}{dx}\{uR\big|_{y=y_0-(x-x_0)}\}\, dx =$$

$$= -\int_{x_0+y_0}^{x_0} \frac{d}{dx} u(x, y_0 - (x - x_0))\, dx =$$

$$= -u(x, y_0 - (x - x_0))\Big|_{x_0+y_0}^{x_0} = -u(x_0, y_0) +$$
$$+ u(x_0 + y_0, 0) = -u(x_0, y_0) + \varphi(x_0 + y_0).$$

Вычислив аналогичным образом интеграл по участку II, получим

$$\int\limits_{\mathrm{II}} = \varphi(x_0 - y_0) - u(x_0, y_0).$$

На отрезке III $dy = 0$, а $u(x, y) = \varphi(x)$; $u'_x(x, y) = \psi(x)$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathrm{III}} = \int\limits_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \{\psi(x) R(x, 0;\ x_0, y_0) - \varphi(x) R'_y(x, 0;\ x_0, y_0)\}\, dx.$$

Подставляя найденные выражения в формулу (1.1.5), получаем

$$0 = -2u(x_0, y_0) + \varphi(x_0 + y_0) + \varphi(x_0 - y_0) +$$
$$+ \int\limits_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \{\psi(x) R(x, 0;\ x_0, y_0) - \varphi(x) R'_y(x, 0;\ x_0, y_0)\}\, dx$$

или

$$u(x_0, y_0) = \frac{\varphi(x_0 + y_0) + \varphi(x_0 - y_0)}{2} +$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \{\psi(x) R(x, 0;\ x_0, y_0) - \varphi(x) R'_y(x, 0;\ x_0, y_0)\}\, dx. \quad (1.1.7)$$

Функция $R(x, y;\ x_0, y_0)$ называется функцией Римана, а формула (1.1.7) — вид функционала $\mathbf{T}_{x_0}^{y_0}$ — формулой Римана. Для строгого обоснования формулы Римана нам еще нужно доказать, что функция Римана, обладающая перечисленными выше свойствами, существует. Переходя в уравнении (1.1.3) к новым переменным

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y \quad (\xi_0 = x_0 + y_0; \quad \eta_0 = x_0 - y_0)$$

и полагая

$$r(\xi, \eta;\ \xi_0, \eta_0) = R\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \ \frac{\xi - \eta}{2};\ x_0, y_0\right),$$

получаем для функции $r(\xi, \eta) = r(\xi, \eta;\ \xi_0, \eta_0)$ в области D' $(\eta_0 \leqslant \eta \leqslant \xi \leqslant \xi_0)$ уравнение

$$4r''_{\xi\eta} - \left\{q_1\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) - q_2\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right)\right\} r = 0 \qquad (1.1.8)$$

и следующие условия на характеристиках:

$$r(\xi_0, \eta) = r(\xi, \eta_0) = 1. \qquad (1.1.8')$$

Непосредственно устанавливается, что если $r(\xi, \eta)$ — дважды непрерывно дифференцируемое решение задачи (1.1.8), (1.1.8′) (она называется задачей Гурса), то функция $r(x+y;\ x-y)$ обладает всеми свойствами функции Римана. Таким образом, функция Римана существует, если задача (1.1.8), (1.1.8′) имеет в области D' дважды непрерывно дифференцируемое решение. Будем считать, что функции $q_1(x)$, $q_2(y)$ непрерывны, так что функция

$$s(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\left\{q_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) - q_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right\} \tag{1.1.9}$$

непрерывна в области D'. Задача (1.1.8), (1.1.8′), очевидно, эквивалентна интегральному уравнению

$$r(\xi, \eta) = 1 - \int_{\xi}^{\xi_0} d\alpha \int_{\eta_0}^{\eta} s(\alpha, \beta)\, r(\alpha, \beta)\, d\beta. \tag{1.1.10}$$

Это уравнение имеет единственное непрерывное решение, которое можно получить методом последовательных приближений. Действительно, положим

$$r_0(\xi, \eta) = 1, \quad r_n(\xi, \eta) = -\int_{\xi}^{\xi_0} d\alpha \int_{\eta_0}^{\eta} s(\alpha, \beta)\, r_{n-1}(\alpha, \beta)\, d\beta$$

и обозначим через M наибольшее значение функции $|s(\alpha, \beta)|$ в области D'. Тогда равномерно в области D'

$$|r_0(\xi, \eta)| \leqslant 1, \quad |r_1(\xi, \eta)| \leqslant M(\xi_0-\xi)(\eta-\eta_0),$$

$$|r_2(\xi, \eta)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\xi}^{\xi_0} d\alpha \int_{\eta_0}^{\eta} |s(\alpha, \beta)|\, |r_1(\alpha, \beta)|\, d\beta \leqslant \frac{M^2(\xi_0-\xi)^2(\eta-\eta_0)^2}{(2!)^2}$$

и по индукции

$$|r_n(\xi, \eta)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\xi}^{\xi_0} d\alpha \int_{\eta_0}^{\eta} |s(\alpha, \beta)|\, |r_{n-1}(\alpha, \beta)|\, d\beta \leqslant \frac{M^n(\xi_0-\xi)^n(\eta-\eta_0)^n}{(n!)^2}.$$

Полученные оценки показывают, что ряд

$$r(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(\xi, \eta)$$

непрерывных в области D' функций сходится абсолютно и равномерно в этой области, а его сумма удовлетворяет уравнению (1.1.10).

Из уравнения (1.1.10) в силу непрерывности функции $s(\alpha, \beta)\, r(\alpha, \beta)$ следует, что функция $r(\xi, \eta)$ непрерывно дифференцируема в области D', причем

$$r'_{\xi}(\xi, \eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} s(\xi, \beta)\, r(\xi, \beta)\, d\beta,$$

$$r'_{\eta}(\xi, \eta) = -\int_{\xi}^{\xi_0} s(\alpha, \eta)\, r(\alpha, \eta)\, d\alpha. \qquad (1.1.11)$$

Поэтому, если функции $q_1(x)$, $q_2(y)$ (а следовательно, и функция $s(\alpha, \beta)$) непрерывно дифференцируемы, то функция $r(\xi, \eta)$ дважды непрерывно дифференцируема. Таким образом, мы доказали существование функции Римана в случае, когда функции $q_1(x)$ и $q_2(y)$ непрерывно дифференцируемы, причем

$$R(x, y;\ x_0, y_0) = r(x + y;\ x - y), \qquad (1.1.12)$$

где $r(\xi, \eta)$ — решение интегрального уравнения (1.1.10).

В случае просто непрерывных функций $q_1(x)$ и $q_2(y)$ под функцией Римана мы будем понимать функцию, получающуюся из решения интегрального уравнения (1.1.10) по формуле (1.1.12). Согласно предыдущему определенная таким образом функция обязательно непрерывно дифференцируема, причем ее производные находятся по формулам (1.1.11). Пусть последовательность непрерывно дифференцируемых функций $q_1^{(n)}(x)$, $q_2^{(n)}(y)$ при $n \to \infty$ равномерно сходится к функциям $q_1(x)$, $q_2(y)$ в рассматриваемой области изменения переменных. Из уравнения (1.1.10) следует, что соответствующие функции Римана $R^{(n)}(x, y; x_0, y_0)$ будут сходиться равномерно в области D к функции Римана $R(x, y; x_0, y_0)$, соответствующей функциям $q_1(x)$, $q_2(y)$. При этом согласно формулам (1.1.11) и первые частные производные $\frac{\partial}{\partial x} R^{(n)}(x, y; x_0, y_0)$, $\frac{\partial}{\partial y} R^{(n)}(x, y; x_0, y_0)$ тоже равномерно в области D будут сходиться к $\frac{\partial}{\partial x} R(x, y; x_0, y_0)$ и $\frac{\partial}{\partial y} R(x, y;\ x_0, y_0)$.

Функции $R^{(n)}(x, y; x_0, y_0)$ дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} R^{(n)} - q_1^{(n)}(x)\, R^{(n)} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} R^{(n)} - q_2^{(n)}(y)\, R^{(n)}. \qquad (1.1.13)$$

Поступая с уравнениями (1.1.1) и (1.1.13) совершенно так же, как это было сделано с уравнениями (1.1.1) и (1.1.3), вместо формулы (1.1.7) получаем

$$u(x_0, y_0) = \frac{\varphi(x_0+y_0)+\varphi(x_0-y_0)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x_0-y_0}^{x_0+y_0}\{\psi(x)R^{(n)}(x,0;x_0,y_0)-\varphi(x)R_y^{(n)\prime}(x,0;x_0,y_0)\}\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{D}\{q_1^{(n)}(x)-q_1(x)+q_2^{(n)}(y)-$$

$$-q_2(y)\}\,R^{(n)}(x,y;x_0,y_0)\,dxdy.$$

Согласно предыдущему в этой формуле можно совершить предельный переход при $n\to\infty$ под знаками интегралов. В результате получим формулу (1.1.7) и для случая, когда функции $q_1(x)$ и $q_2(y)$ только непрерывны.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1.1. *Если функции $q_1(x)$ и $q_2(y)$ непрерывны, то любое дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(x,y)$ задачи Коши (1.1.1), (1.1.1′) представимо формулой (1.1.7), где $R(x,y;x_0,y_0)$ — непрерывно дифференцируемая функция, получающаяся из решения интегрального уравнения (1.1.10) по формуле (1.1.12).*

Замечание 1. Для справедливости этой теоремы достаточно, чтобы функции $q_1(x)$, $q_2(y)$ и $u(x,y)$ удовлетворяли перечисленным в теореме условиям только в области D, так как при выводе формулы (1.1.7) мы нигде не выходили за ее пределы.

Замечание 2. При выводе теоремы предполагалось, что $y>0$. Легко понять, что это несущественно. Теорема верна для всех значений y, если только функции $q_1(x)$, $q_2(y)$ и $u(x,y)$ удовлетворяют нужным условиям в области D, ограниченной прямыми $x-x_0=\pm(y-y_0)$ и осью абсцисс $y=0$.

В следующем параграфе нам понадобится частный случай формулы (1.1.7), когда $\psi(x)=\varphi'(x)$. Так как функция Римана непрерывно дифференцируема, то слагаемое в формуле (1.1.7), содержащее $\psi(x)=\varphi'(x)$, можно проинтегрировать один раз по частям. Проделав это, мы получим следующее представление для дважды непрерывно дифференцируемых решений $u(x, y)$ задачи Коши (1.1.1), (1.1.1′) с $\psi(x) = \varphi'(x)$:

$$u(x_0, y_0) = \varphi(x_0 + y_0) - \frac{1}{2} \int\limits_{x_0 - y_0}^{x_0 + y_0} \{R'_x(x, 0;\ x_0, y_0) + R'_y(x, 0;\ x_0, y_0)\} \varphi(x)\, dx. \qquad (1.1.14)$$

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что уравнение (1.1.10) имеет непрерывно дифференцируемое решение и в том случае, когда функции $q_1(x)$ и $q_2(y)$ локально суммируемые.

2. Обобщить теорему (1.1.1) на случай локально суммируемых функций $q_1(x)$ и $q_2(y)$.

§ 2. ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим на интервале $(-a, a)$ $(a \leqslant \infty)$ дифференциальное уравнение Штурма — Лиувилля

$$y'' - q(x)\, y + \lambda^2 y = 0, \qquad (1.2.1)$$

где $q(x)$ — непрерывная на этом интервале комплексно-значная функция, а λ — комплексный параметр. Обозначим через $e_0(\lambda, x)$ решение уравнения (1.2.1) при начальных данных

$$e_0(\lambda, 0) = 1, \quad e'_0(\lambda, 0) = i\lambda \qquad (1.2.2)$$

(здесь индекс «0» означает, что начальные данные задаются в точке 0, а буква e напоминает, что они такие же, как у функции $e^{i\lambda x}$, с которой совпадает $e_0(\lambda, x)$, если $q(x) \equiv 0$). Очевидно, что функция

$$u(x, y) = e^{i\lambda x} e_0(\lambda, y)$$

дважды непрерывно дифференцируема при $-\infty < x < \infty$, $-a < y < a$ и является решением задачи Коши

$$\left.\begin{aligned} u''_{xx} &= u''_{yy} - q(y)\, u, \\ u(x, 0) &= e^{i\lambda x}, \quad u'_y(x, 0) = i\lambda e^{i\lambda x} = (e^{i\lambda x})'. \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.3)$$

Поэтому для нее справедлива формула (1.1.14) и

$$e^{i\lambda x_0} e_0(\lambda, y_0) = e^{i\lambda(x_0 + y_0)} - \frac{1}{2} \int\limits_{x_0 - y_0}^{x_0 + y_0} \{R'_x(x, 0;\ x_0, y_0) + R'_y(x, 0;\ x_0, y_0)\} e^{i\lambda x} dx.$$

Полагая здесь $x_0 = 0$ и

$$K(y_0, x) = -\frac{1}{2}\{R'_x(x, 0;\ 0, y_0) + R'_y(x, 0;\ 0, y_0)\}, \quad (1.2.4)$$

получаем

$$e_0(\lambda, y_0) = e^{i\lambda y_0} + \int_{-y_0}^{y_0} K(y_0, x)\, e^{i\lambda x} dx.$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1.2.1. *Решение $e_0(\lambda, x)$ уравнения (1.2.1) при начальных данных (1.2.2) представимо в виде*

$$e_0(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_{-x}^{x} K(x, t)\, e^{i\lambda t} dt, \quad (1.2.5)$$

где $K(x, t)$ — непрерывная функция, выражающаяся через функцию Римана уравнения (1.2.3) по формуле (1.2.4).

Интегральный оператор $\mathbf{I} + \mathbf{K}$, определенный формулой

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K}) f = f(x) + \int_{-x}^{x} K(x, t)\, f(t)\, dt,$$

называется оператором преобразования, сохраняющим условия в точке $x = 0$. Он переводит функции $e^{i\lambda x}$ (решения простейшего уравнения вида (1.2.1) при начальных данных (1.2.2)) в решения уравнения (1.2.1) при тех же начальных данных. Поскольку функции $e^{i\lambda x}$ и $e^{-i\lambda x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' + \lambda^2 y = 0$, оператор $\mathbf{I} + \mathbf{K}$ преобразует любое решение этого уравнения в решение уравнения (1.2.1) при тех же начальных данных в точке 0. Поэтому решение $\omega(\lambda, x;\ h)$ уравнения (1.2.1) при начальных данных

$$\omega(\lambda, 0;\ h) = 1, \quad \omega'_x(\lambda, 0;\ h) = h \quad (1.2.6)$$

можно представить в таком виде:

$$\omega(\lambda, x;\ h) = \cos\lambda x + h\frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_{-x}^{x} K(x, t)\left\{\cos\lambda t + \right.$$

$$\left. + h\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\right\} dt = \cos\lambda x + \int_{0}^{x} \{h + K(x, t) +$$

$$+ K(x, -t)\} \cos \lambda t dt + h \int_0^x \{K(x, t) -$$

$$- K(x, -t)\} \int_0^t \cos \lambda \xi d\xi dt = \cos \lambda x + \int_0^x K(x, t; h) \cos \lambda t dt,$$

где

$$K(x, t; h) = h + K(x, t) + K(x, -t) +$$

$$+ h \int_t^x \{K(x, \xi) - K(x, -\xi)\} d\xi. \qquad (1.2.7)$$

Аналогично решение $\omega(\lambda, x; \infty)$ уравнения (1.2.1) при начальных данных

$$\omega(\lambda, 0; \infty) = 0; \quad \omega_x'(\lambda, 0; \infty) = 1 \qquad (1.2.8)$$

можно представить в виде

$$\omega(\lambda, x; \infty) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \int_0^x K(x, t; \infty) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt,$$

где

$$K(x, t; \infty) = K(x, t) - K(x, -t). \qquad (1.2.9)$$

Таким образом, из теоремы (1.2.1) вытекает такое следствие.

Следствие. *Решения* $\omega(\lambda, x; h)$, $\omega(\lambda, x; \infty)$ *уравнения (1.2.1) при начальных данных (1.2.6), (1.2.8) можно представить в виде*

$$\omega(\lambda, x; h) = \cos \lambda x + \int_0^x K(x, t; h) \cos \lambda t dt, \qquad (1.2.10)$$

$$\omega(\lambda, x; \infty) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \int_0^x K(x, t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt, \quad (1.2.11)$$

где непрерывные функции $K(x, t; h)$, $K(x, t; \infty)$ *выражаются через ядро* $K(x, t)$ *оператора (1.2.5) по формулам (1.2.7), (1.2.9).*

Операторы $\mathbf{I} + \mathbf{K}_h$, $\mathbf{I} + \mathbf{K}_\infty$, определяемые правыми частями равенств (1.2.10), (1.2.11), будем называть операторами преобразования на полуинтервале $[0, a)$ в отличие от оператора $\mathbf{I} + \mathbf{K}$, который рассматривается на интервале $(-a, a)$. Так как $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_h$, $\mathbf{K}_\infty$ являются вольтерровскими интегральными операторами, то операторы $\mathbf{I} + \mathbf{K}$, $\mathbf{I} + \mathbf{K}_h$,

$\mathbf{I}+\mathbf{K}_\infty$ имеют обратные того же вида, которые мы обозначим соответственно через $\mathbf{I}+\mathbf{L}$, $\mathbf{I}+\mathbf{L}_h$, $\mathbf{I}+\mathbf{L}_\infty$. Поэтому наряду с формулами (1.2.5), (1.2.10), (1.2.11) справедливы равенства

$$e^{i\lambda x} = e_0(\lambda, x) + \int_{-x}^{x} L(x, t)\, e_0(\lambda, t)\, dt, \qquad (1.2.5')$$

$$\cos \lambda x = \omega(\lambda, x;\ h) + \int_0^x L(x, t;\ h)\, \omega(\lambda, t;\ h)\, dt, \quad (1.2.10')$$

$$\frac{\sin \lambda x}{\lambda} = \omega(\lambda, x;\ \infty) + \int_0^x L(x, t;\ \infty)\, \omega(\lambda, t;\ \infty)\, dt, \quad (1.2.11')$$

причем ядра $L(x, t)$, $L(x, t;\ h)$ и $L(x, t;\ \infty)$ являются непрерывными решениями соответствующих интегральных уравнений Вольтерра.

Операторы преобразования $\mathbf{I}+\mathbf{K}$, $\mathbf{I}+\mathbf{K}_h$, $\mathbf{I}+\mathbf{K}_\infty$ и им обратные $\mathbf{I}+\mathbf{L}$, $\mathbf{I}+\mathbf{L}_h$, $\mathbf{I}+\mathbf{L}_\infty$ играют очень важную роль в спектральной теории уравнений Штурма — Лиувилля. Для решения многих основных вопросов этой теории достаточно одного факта их существования. Но иногда желательно знать более детально свойства операторов, например, иметь оценки для ядер операторов или их производных. В связи с этим мы выведем удобные для исследования интегральные уравнения, из которых могут быть найдены ядра операторов преобразования. Заметим, что поскольку нигде не будут использоваться полученные выше результаты, то тем самым будет дано и новое доказательство теоремы (1.2.1), т. е. существования операторов преобразования.

Переписав уравнение (1.2.1) в виде

$$y'' + \lambda^2 y = q(x)\, y$$

и считая правую часть известной, можно для отыскания решения $e_0(\lambda, x)$ этого уравнения применить метод вариации произвольных постоянных. В результате придем к равенству

$$e_0(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_0^x \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda}\, q(t)\, e_0(\lambda, t)\, dt, \quad (1.2.12)$$

эквивалентному задаче (1.2.1), (1.2.2). Это равенство является интегральным уравнением для функции $e_0(\lambda, x)$ (интегральное уравнение Штурма — Лиувилля). Будем искать решение этого уравнения в виде (1.2.5). Для того чтобы функция такого вида удовлетворяла уравнению (1.2.12), должно выполняться равенство

$$\int\limits_{-x}^{x} K(x, t)\, e^{i\lambda t} dt = \int\limits_{0}^{x} \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} q(t)\, e^{i\lambda t} dt + $$
$$+ \int\limits_{0}^{x} \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} q(t) \int\limits_{-t}^{t} K(t, \xi)\, e^{i\lambda \xi} d\xi dt, \qquad (1.2.13)$$

и, наоборот, если функция $K(x, t)$ удовлетворяет этому равенству, то функция $e_0(\lambda, x)$ удовлетворяет уравнению (1.2.12), т. е. является решением уравнения (1.2.1) при начальных данных (1.2.2).

Преобразуем правую часть равенства (1.2.13) так, чтобы она имела вид преобразования Фурье некоторой функции. Так как

$$\frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} e^{i\lambda \xi} = \frac{1}{2} \int\limits_{\xi-(x-t)}^{\xi+(x-t)} e^{i\lambda u} du, \qquad (1.2.14)$$

то

$$\int\limits_{0}^{x} \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} q(t)\, e^{i\lambda t} dt = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{x} q(t) \left\{ \int\limits_{2t-x}^{x} e^{i\lambda u} du \right\} dt =$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-x}^{x} e^{i\lambda u} \left\{ \int\limits_{0}^{\frac{x+u}{2}} q(t)\, dt \right\} du.$$

Меняя в последнем равенстве обозначения для переменных интегрирования, получаем

$$\int\limits_{0}^{x} \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} q(t)\, e^{i\lambda t} dt = \int\limits_{-x}^{x} \frac{1}{2} \left\{ \int\limits_{0}^{\frac{x+t}{2}} q(\xi)\, d\xi \right\} e^{i\lambda t} dt. \qquad (1.2.15)$$

Снова используя формулу (1.2.14), находим

$$\int\limits_{0}^{x} \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} q(t) \int\limits_{-t}^{t} K(t, \xi)\, e^{i\lambda \xi} d\xi dt =$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{x} q(t) \left\{ \int\limits_{-t}^{t} K(t, \xi) \int\limits_{\xi-(x-t)}^{\xi+(x-t)} e^{i\lambda u} du d\xi \right\} dt.$$

Продолжая функцию $K(t, \xi)$ нулем при $|\xi| > |t|$, при всех $t \in (-x, x)$ получаем

$$\int_{-t}^{t} K(t, \xi) \int_{\xi-(x-t)}^{\xi+(x-t)} e^{i\lambda u} du d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, \xi) \int_{\xi-(x-t)}^{\xi+(x-t)} e^{i\lambda u} du d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda u} \int_{u-(x-t)}^{u+(x-t)} K(t, \xi) d\xi du = \int_{-x}^{x} e^{i\lambda u} \int_{u-(x-t)}^{u+(x-t)} K(t, \xi) d\xi du.$$

Поэтому

$$\int_{0}^{x} q(t) \left\{ \int_{-t}^{t} K(t, \xi) \int_{\xi-(x-t)}^{\xi+(x-t)} e^{i\lambda u} du d\xi \right\} dt =$$

$$= \int_{-x}^{x} e^{i\lambda u} \left\{ \int_{0}^{x} q(t) \int_{u-(x-t)}^{u+(x-t)} K(t, \xi) d\xi dt \right\} du,$$

откуда, меняя обозначения для переменных интегрирования, получаем

$$\int_{0}^{x} \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} q(t) \int_{-t}^{t} K(t, \xi) e^{i\lambda\xi} d\xi dt =$$

$$= \int_{-x}^{x} e^{i\lambda t} \frac{1}{2} \left\{ \int_{0}^{x} q(u) \int_{t-(x-u)}^{t+(x+u)} K(u, \xi) d\xi du \right\} dt. \qquad (1.2.16)$$

Из формул (1.2.15), (1.2.16) вытекает, что равенство (1.2.13) эквивалентно равенству

$$\int_{-x}^{x} \left\{ K(x, t) - \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{x+t}{2}} q(u) du - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int_{0}^{x} q(u) \int_{t-(x-u)}^{t+(x-u)} K(u, \xi) d\xi du \right\} e^{i\lambda t} dt = 0.$$

Следовательно, если функция $K(x, t)$ равна нулю при $|t| > |x|$ и удовлетворяет уравнению

$$K(x, t) = \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{x+t}{2}} q(u) du + \frac{1}{2} \int_{0}^{x} q(u) \int_{t-(x-u)}^{t+(x-u)} K(u, \xi) d\xi du, \qquad (1.2.17)$$

то функции $e_0(\lambda, x)$, построенные по формуле (1.2.5), являются решениями уравнения (1.2.12) при всех значениях λ и наоборот.

На рис. 2 изображена область интегрирования в двойном интеграле, стоящем в правой части формулы (1.2.17). Она состоит из трех частей (*1*, *2*, *3*). В частях *1* и *2* $|\xi| > |u|$, поэтому в них $K(u, \xi) \equiv 0$ и поэтому фактически в уравнении (1.2.17) двойной интеграл нужно брать только по прямоугольнику *3*. Совершая в этом интеграле замену переменных

$$u + \xi = 2\alpha, \quad u - \xi = 2\beta,$$

приходим к уравнению

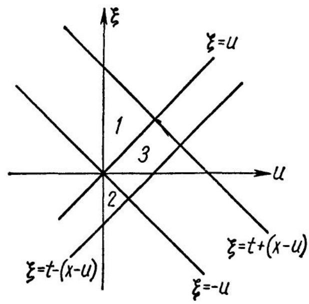

Рис. 2.

$$K(x, t) = \\ = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{x+t}{2}} q(y)\,dy + \int_0^{\frac{x+t}{2}} d\alpha \int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\alpha+\beta) K(\alpha+\beta, \alpha-\beta)\,d\beta, \tag{1.2.18}$$

в котором уже автоматически учтено, что $K(x, t) \equiv 0$ при $|t| > |x|$.

Таким образом, если решения $e_0(\lambda, x)$ уравнения (1.2.1) при начальных данных (1.2.2) могут быть представлены при всех значениях λ формулой (1.2.5), то ядро $K(x, t)$ должно удовлетворять уравнению (1.2.18), и, наоборот, если функция $K(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1.2.18), то формула (1.2.5) при всех значениях λ дает решения $e_0(\lambda, x)$ уравнения (1.2.1) при начальных данных (1.2.2).

Положим

$$H(\alpha, \beta) = K(\alpha+\beta, \alpha-\beta), \tag{1.2.19}$$

$$x + t = 2u, \quad x - t = 2v.$$

Тогда уравнение (1.2.18) запишется в таком виде:

$$H(u, v) = \frac{1}{2}\int_0^u q(y)\,dy + \int_0^u d\alpha \int_0^v q(\alpha+\beta) H(\alpha, \beta)\,d\beta. \tag{1.2.18$'$}$$

Теорема 1.2.2. *Уравнение (1.2.18), или, что то же, (1.2.18′), имеет единственное решение. Это решение* *непрерывно и удовлетворяет неравенству*

$$|K(x, t)| \leqslant \frac{1}{2} w\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \sigma_1\left(\frac{x-t}{2}\right)\right\}, \qquad (1.2.20)$$

где

$$\left.\begin{aligned} w(u) = \max_{0 \leqslant \xi \leqslant u} \left| \int_0^{\xi} q(y)\, dy \right|, \quad \sigma_0(x) = \int_0^x |q(t)|\, dt, \\ \sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t)\, dt. \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.21)$$

Если функция $q(x)$ имеет $n \geqslant 0$ непрерывных производных, то ядро $K(x, t)$ имеет $n+1$ непрерывную производную по обеим переменным.

Доказательство. Будем решать уравнение (1.2.18′) методом последовательных приближений, положив

$$H_0(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^u q(y)\, dy,$$

$$H_n(u, v) = \int_0^u d\alpha \int_0^v q(\alpha+\beta) H_{n-1}(\alpha, \beta)\, d\beta.$$

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} H_n(u, v)$ сходится равномерно в некотором квадрате $0 \leqslant u \leqslant a$, $0 \leqslant v \leqslant a$, то его сумма будет, очевидно, непрерывным решением уравнения (1.2.18′) в этом квадрате. Для доказательства равномерной сходимости этого ряда покажем, что

$$|H_n(u, v)| \leqslant \frac{1}{2} w(u) \frac{\{\sigma_1(u+v) - \sigma_1(u) - \sigma_1(v)\}^n}{n!}. \qquad (1.2.22)$$

Из определения функции $w(x)$ следует

$$|H_0(u, v)| = \frac{1}{2} \left| \int_0^u q(y)\, dy \right| \leqslant \frac{1}{2} w(u),$$

так что оценка (1.2.22) верна для $n = 0$. Но если она верна для $n-1$, то она верна и для n, так как тогда

$$|H_n(u, v)| \leqslant \frac{1}{2} \left| \int_0^u d\alpha \int_0^v |q(\alpha+\beta)|\, w(\alpha) \times \right.$$

$$\times \frac{\{\sigma_1(\alpha+\beta)-\sigma_1(\alpha)-\sigma_1(\beta)\}^{n-1}}{(n-1)!}\, d\beta \Bigg| \leqslant \frac{1}{2} w(u) \times$$

$$\times \int_0^u \left[\frac{\{\sigma_1(v+\alpha)-\sigma_1(\alpha)-\sigma_1(v)\}^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^v |q(\alpha+\beta)|\, d\beta \right] d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} w(u) \int_0^u \frac{\{\sigma_1(v+\alpha)-\sigma_1(\alpha)-\sigma_1(v)\}^{n-1}}{(n-1)!} \times$$

$$\times \{\sigma_0(v+\alpha)-\sigma_0(\alpha)\}\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} w(u) \frac{\{\sigma_1(v+u)-\sigma_1(u)-\sigma_1(v)\}^n}{n!}$$

(при этом мы учли, что функции $w(u)$ и $\{\sigma_1(u+v) - \sigma_1(u) - \sigma_1(v)\}$ являются неубывающими функциями аргументов u и v).

Из справедливости оценок (1.2.22) вытекает, что уравнение (1.2.18′) имеет непрерывное решение $H(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u, v)$, причем

$$|H(u, v)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |H_n(u, v)| \leqslant \frac{1}{2} w(u) \exp\{\sigma_1(u+v) - \sigma_1(u) - \sigma_1(v)\}. \quad (1.2.23)$$

Тем самым существование непрерывного решения у уравнения (1.2.18′), а следовательно и (1.2.18), доказано, причем согласно (1.2.23) функция $K(x, t)$ удовлетворяет неравенству (1.2.20). Единственность решения устанавливается обычным способом.

Теорема 1.2.2 содержит новое доказательство существования операторов преобразования и оценку для их ядер. Остановимся подробнее на уравнении (1.2.18′). Так как функции $q(y)$ и $H(\alpha, \beta)$ непрерывны, то функция $H(u, v)$ непрерывно дифференцируема и

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H(u, v)}{\partial u} &= \frac{1}{2} q(u) + \int_0^v q(u+\beta) H(u, \beta)\, d\beta, \\ \frac{dH(u, v)}{\partial v} &= \int_0^u q(\alpha+v) H(\alpha, v)\, d\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (1.2.24)$$

Из этих равенств следует, что функция $H(u, v)$ имеет непрерывную смешанную производную, причем

$$\frac{\partial^2 H(u, v)}{\partial u \partial v} = q(u+v) H(u, v). \tag{1.2.25}$$

Кроме того, непосредственно из уравнения (1.2.18′) следует

$$H(u, 0) = \frac{1}{2} \int_0^u q(y)\, dy, \quad H(0, v) = 0. \tag{1.2.26}$$

Таким образом, для того чтобы функция $K(x, t)$ была ядром оператора преобразования (1.2.5), необходимо и достаточно, чтобы функция $H(u, v) = K(u+v, u-v)$ была решением задачи Гурса (1.2.25), (1.2.26).

Далее, из формул (1.2.24) следует, что функция $H(u, v)$, а следовательно и $K(x, t)$, имеет $n+1$ непрерывную производную, если функция $q(x)$ имеет n непрерывных производных. Поэтому, если функция $q(x)$ непрерывно дифференцируема, то в уравнении (1.2.25) можно вернуться к переменным $x = u + v$, $t = u - v$. При этом задача (1.2.25), (1.2.26) преобразуется:

$$\frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} = q(x) K(x, t), \tag{1.2.27}$$

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(\xi)\, d\xi, \quad K(x, -x) = 0. \tag{1.2.28}$$

(Формулы (1.2.28) справедливы, конечно, при любых непрерывных функциях $q(x)$, но уравнение (1.2.27) можно записать только для дифференцируемых функций $q(x)$, если не вводить понятия обобщенных производных.)

Ядра других операторов преобразования тоже удовлетворяют уравнениям, аналогичным уравнению (1.2.27), причем их можно вывести более прямым путем. Проиллюстрируем это на примере ядра $L(x, t) = L(x, t; h)$ оператора, преобразующего решения $\omega(\lambda, x) = \omega(\lambda, x; h)$ в $\cos \lambda x$. Положим

$$z(x) = \omega(\lambda, x) + \int_0^x L(x, t)\, \omega(\lambda, t)\, dt \tag{1.2.29}$$

и выясним, какие условия нужно наложить на дважды непрерывно дифференцируемую функцию $L(x, t)$ для того, чтобы $z(x) \equiv \cos \lambda x$. Дифференцируя обе части равенства (1.2.29) два раза по x, получаем

$$z''(x) = \omega''(\lambda, x) + [L(x, x)\,\omega(\lambda, x)]' + L'_x(x, t)\,\omega(\lambda, t)\big|_{t=x} + \\ + \int_0^x L''_{xx}(x, t)\,\omega(\lambda, t)\,dt,$$

откуда следует, что

$$z''(x) + \lambda^2 z(x) = \omega''(\lambda, x) + \lambda^2\omega(\lambda, x) + [L(x, x)\,\omega(\lambda, x)]' + \\ + L'_x(x, t)\,\omega(\lambda, t)\big|_{t=x} + \int_0^x L''_{xx}(x, t)\,\omega(\lambda, t)\,dt + \\ + \lambda^2 \int_0^x L(x, t)\,\omega(\lambda, t)\,dt.$$

Используя уравнение $y'' - q(x)\,y + \lambda^2 y = 0$, которому удовлетворяет функция $\omega(\lambda, x)$, и интегрируя два раза по частям, находим

$$\lambda^2 \int_0^x L(x, t)\,\omega(\lambda, t)\,dt = -\int_0^x L(x, t)\,\{\omega''(\lambda, t) - \\ - q(t)\,\omega(\lambda, t)\}\,dt = -L(x, x)\,\omega'(\lambda, x) + L(x, 0)\,\omega'(\lambda, 0) + \\ + L'_t(x, t)\,\omega(\lambda, t)\big|_{t=x} - L'_t(x, t)\,\omega(\lambda, t)\big|_{t=0} - \\ - \int_0^x \{L''_{tt}(x, t) - q(t)\,L(x, t)\}\,\omega(\lambda, t)\,dt.$$

Поэтому

$$z''(x) + \lambda^2 z(x) = q(x)\,\omega(\lambda, x) + L'(x, x)\,\omega(\lambda, x) + \\ + L(x, x)\,\omega'(\lambda, x) + L'_x(x, t)\,\omega(\lambda, t)\big|_{t=x} - L(x, x)\,\omega'(\lambda, x) + \\ + L(x, 0)\,h + L'_t(x, t)\,\omega(\lambda, t)\big|_{t=x} - L'_t(x, 0) + \\ + \int_0^x \{L''_{xx}(x, t) - L''_{tt}(x, t) + q(t)\,L(x, t)\}\,\omega(\lambda, t)\,dt,$$

откуда следует, что, для того чтобы функция $z(x)$ была решением уравнения $z'' + \lambda^2 z = 0$ при начальных данных $z(0) = 1$, $z'(0) = 0$ (т. е. чтобы $z(x) \equiv \cos \lambda x$), достаточно, чтобы ядро $L(x, t)$ удовлетворяло уравнению

$$L''_{xx}(x, t) = L''_{tt}(x, t) - q(t)\,L(x, t) \tag{1.2.30}$$

и условиям

$$L(x, x) = -h - \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt, \quad L(x, 0)\,h - L_t'(x, 0) = 0. \tag{1.2.31}$$

Если функция $q(t)$ дифференцируема, то уравнение (1.2.30) имеет решение, удовлетворяющее условиям (1.2.31).

Действительно, переходя к переменным $u = x + t$, $v = x - t$, для функции

$$A(u, v) = L\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

получаем уравнение

$$4\frac{\partial^2 A(u, v)}{\partial u \partial v} = -q\left(\frac{u+v}{2}\right) A(u, v) \tag{1.2.32}$$

и условия

$$\left.\begin{aligned} &A(u, 0) = -h - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{u}{2}} q(t)\,dt, \\ &\{A(u,v)\,h + A_v'(u, v) - A_u'(u, v)\}\big|_{u=v} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.2.33}$$

Отсюда последовательным интегрированием находим

$$A_u'(u, v) = -\frac{1}{4}\int_0^v q\left(\frac{u-\xi}{2}\right) A(u, \xi)\,d\xi - \frac{1}{4} q\left(\frac{u}{2}\right),$$

$$A(u, v) =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_v^u q\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi - \frac{1}{4}\int_v^u d\eta \int_0^v q\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right) A(\eta, \xi)\,d\xi + A(v, v),$$

$$2A_u'(u, v)\big|_{u=v} = \{A(u, v)\,h + A_v'(u, v) + A_u'(u, v)\}\big|_{u=v} =$$

$$= -\frac{1}{2} q\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_0^v q\left(\frac{v-\xi}{2}\right) A(v, \xi)\,d\xi.$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$\{e^{hv} A(v, v)\}' = -\frac{1}{2} e^{hv}\left\{q\left(\frac{v}{2}\right) + \int_0^v q\left(\frac{v-\xi}{2}\right) A(v, \xi)\,d\xi\right\}$$

и, следовательно,

$$A(v, v) =$$
$$= -he^{-hv} - \frac{1}{2} e^{-hv} \int_0^v e^{h\eta} \left\{ q\left(\frac{\eta}{2}\right) + \int_0^\eta q\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right) \times \right.$$
$$\left. \times A(\eta, \xi)\, d\xi \right\} d\eta.$$

Таким образом, функция $A(u, v)$ должна удовлетворять такому интегральному уравнению:

$$A(u, v) = -he^{-hv} - \frac{1}{4}\int_v^u q\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi - \frac{e^{-hv}}{2}\int_0^v e^{h\eta} q\left(\frac{\eta}{2}\right) d\eta -$$
$$- \frac{e^{-hv}}{2}\int_0^v e^{h\eta}\int_0^\eta q\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right) A(\eta, \xi)\, d\xi d\eta -$$
$$- \frac{1}{4}\int_v^u d\eta \int_0^v q\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right) A(\eta, \xi)\, d\xi. \qquad (1.2.34)$$

Наоборот, если функция $A(u, v)$ удовлетворяет этому уравнению, причем функция $q(x)$ дифференцируема, то, возвращаясь к функции $L(x, t)$, с помощью непосредственной проверки убеждаемся, что она является решением уравнения (1.2.30) при условиях (1.2.31) и, значит, ядром искомого оператора преобразования.

Существование решения у интегрального уравнения (1.2.34) доказывается методом последовательных приближений, так же как в теореме 1.2.2. При этом автоматически получаются оценки для решения и его первых производных. В случае $\operatorname{Re} h < 0$ технически удобнее перейти к новой неизвестной функции $B(u, v) = e^{hv} A(u, v)$, чтобы излишне не огрублять оценки.

Приведем окончательные результаты сразу для ядра $L(x, t; h)$:

$$L(0, 0; h) = -h,$$

$$|L(x, t; h)| \leqslant \left\{|h| + \sigma_0\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\} e^{2\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)} \chi\left(\frac{x+t}{2}; h\right),$$

$$|L'_x(x, 0; h)| \leqslant \frac{1}{2}\left|q\left(\frac{x}{2}\right)\right| +$$
$$+ \left\{|h| + \sigma_0\left(\frac{x}{2}\right)\right\} e^{2\sigma_1\left(\frac{x}{2}\right)} \chi\left(\frac{x}{2}; h\right),$$

где

$$\chi(z;\ h) = \begin{cases} |e^{-hz}|, & \text{если } \operatorname{Re} h < 0, \\ 1, & \text{если } \operatorname{Re} h \geqslant 0. \end{cases}$$

Предположение о дифференцируемости функции $q(x)$ несущественно. От него можно избавиться, аппроксимируя $q(x)$ гладкими функциями и совершая затем предельный переход.

ЗАДАЧИ

1. Установить, что доказательство теоремы 1.2.2 проводится без изменений и для локально суммируемых функций $q(x)$.

2. Доказать, что для решения $K(x, t)$ уравнения (1.2.18) справедлива оценка

$$|K(x, t)| \leqslant \frac{1}{2} w\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{2\int_0^x w(\xi)\, d\xi\right\}, \tag{1.2.35}$$

где

$$w(x) = \max_{0 \leqslant \eta \leqslant x} \left|\int_0^\eta q(t)\, dt\right| \tag{1.2.35'}$$

(для знакопеременных $q(x)$ эта оценка лучше, чем (1.2.20)).

Указание. Перейти к уравнению (1.2.18′) и найти его решение в виде суммы $H_1(u, v) + H_2(u, v)$ функций, удовлетворяющих уравнениям

$$H_1(u, v) = \frac{1}{2}\int_0^u q(\xi)\, d\xi + \int_0^u \int_0^v q(\alpha+\beta) H_2(\alpha, \beta)\, d\beta d\alpha,$$

$$H_2(u, v) = \int_0^u \int_0^v q(\alpha+\beta) H_1(\alpha, \beta)\, d\beta d\alpha.$$

Дифференцируя первое из них по v, а второе — по u, после интегрирования по частям получаем систему уравнений

$$A(u, v) = \int_0^u [Q(u+v) - Q(\alpha+v)] B(\alpha, v)\, d\alpha,$$

$$B(u, v) = \frac{1}{2} Q(u) [Q(u+v) - Q(u)] + \int_0^v [Q(u+v) - Q(u+\beta)] A(u, \beta)\, d\beta,$$

где

$$A(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} H_1(u, v), \qquad B(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} H_2(u, v),$$

$$Q(u) = \int_0^u q(t)\, dt.$$

Используя метод последовательных приближений, показать, что

$$|B(u, v)| \leqslant w(u) w(u+v) \operatorname{ch}\left\{2 \int_0^{u+v} w(\xi)\, d\xi\right\},$$

$$|A(u, v)| \leqslant w(u) w(u+v) \operatorname{sh}\left\{2 \int_0^{u+v} w(\xi)\, d\xi\right\},$$

откуда, возвращаясь к функциям $H_1(u, v)$, $H_2(u, v)$, получить для $H(u, v) = H_1(u, v) + H_2(u, v)$ оценку, эквивалентную (1.2.35).

3. Опираясь на результат предыдущей задачи, доказать, что если последовательность $\int_0^x q_n(t)\, dt$ сходится к $Q(x)$ равномерно в каждом конечном интервале, то соответствующая последовательность ядер $K_n(x, y)$ операторов преобразования сходится к некоторой функции $K(x, y)$ равномерно в каждой ограниченной области. Привести примеры последовательностей функций $q_n(x)$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{-\infty<x<\infty} \int_x^{x+1} |q_n(t)|\, dt = \infty,$$

но равномерно по $\lambda \in (-\infty, \infty)$ и x, изменяющемуся в любом конечном интервале,

$$\lim_{n\to\infty} e_0^{(n)}(\lambda, x) = e^{i\lambda x},$$

где $e_0^{(n)}(\lambda, x)$ — решение уравнения $y''(x) - q_n(x) y(x) + \lambda^2 y(x) = 0$ с начальными данными $y(0) = 1$, $y'(0) = i\lambda$.

4. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, OH — множество всех ограниченных операторов, действующих в H, и $|f|$ — норма оператора $f \in OH$. Операторным уравнением Штурма — Лиувилля называется уравнение

$$-y''(x) + q(x) y(x) = \lambda^2 y(x), \tag{1.2.36}$$

где $q(x) \in OH$ при каждом x и непрерывно зависит от x. Под решением задачи Коши для этого уравнения понимается операторнозначная функция $y(x) \in OH$ при каждом x, которая удовлетворяет уравнению (1.2.36) и начальным данным

$$y(0) = A, \quad y'(0) = B,$$

где A и B принадлежат OH. Обобщить все результаты настоящего параграфа (включая задачи 2, 3) на операторные уравнения Штурма — Лиувилля.

5. Операторное уравнение

$$By'(x) + \Omega(x) y(x) = \lambda y(x) \tag{1.2.37}$$

($\Omega(x) \in OH$ и непрерывна, постоянный оператор $B \in OH$) называется уравнением Дирака, если

$$B^2 = -I, \qquad B\Omega(x) + \Omega(x) B = 0,$$

где I — единичный оператор. Введем операторы

$$D = B\frac{d}{dx} + \Omega(x) \quad \text{(Дирака)},$$

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \quad \text{(Штурма—Лиувилля)}.$$

Если операторная функция $\Omega(x)$ непрерывно дифференцируема и $q(x) = B\Omega'(x) + \Omega^2(x)$, то, как легко проверить, $D^2 = L$. Поэтому в этом случае решение операторного уравнения (1.2.37) при начальных данных $y(0) = A$ является также решением уравнения (1.2.36) (с $q(x) = B\Omega'(x) + \Omega^2(x)$) при начальных данных $y(0) = A$, $y'(0) = (B\Omega(0) - \lambda B)A$. Отсюда согласно аналогу теоремы 1.2.1 для операторных уравнений Штурма — Лиувилля следует, что

$$y(x) = \left\{u_0(\lambda, x) + \int_{-x}^{x} K(x, t)\, U_0(\lambda, t)\, dt\right\} A, \qquad (1.2.38)$$

где

$$u_0(\lambda, x) = \cos\lambda x I + \frac{\sin\lambda x}{\lambda}(B\Omega(0) - \lambda B).$$

Доказать, что формула (1.2.38) справедлива и в том случае, когда операторная функция $\Omega(x)$ только непрерывна, причем

$$|K(x, t)| \leqslant \frac{1}{2}\, w\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{2\int_0^x w(\xi)\, d\xi\right\},$$

где

$$w(x) = \sup_{0 \leqslant \xi \leqslant x} \left| B(\Omega(x) - \Omega(0)) + \int_0^{\xi} \Omega^2(t)\, dt \right|$$

(здесь $|\ \ |$ означает норму соответствующего оператора из OH).

Указание. Можно аппроксимировать операторную функцию $\Omega(x)$ непрерывно дифференцируемыми функциями

$$\Omega_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \Omega(t)\, dt$$

и совершить затем предельный переход при $h \to 0$, опираясь на результаты задач 2 и 3.

6. Формулу (1.2.38) можно записать так:

$$y(x) = \left[\cos\lambda x I + \int_0^x K(x, t;\ B\Omega(0)) \cos\lambda t\, dt\right] A -$$

$$- \left[\sin\lambda x I + \int_0^x K(x, t;\ \infty) \sin\lambda t\, dt\right] BA. \qquad (1.2.38')$$

Пусть проекционный оператор P таков, что

$$BP + PB = B.$$

Обозначим решение уравнения (1.2.37) при начальных данных $y(0) = P$ через $\omega(\lambda, x; P)$, а решение уравнения (1.2. 37) с $\Omega(x) \equiv 0$ при тех же начальных данных — через $\omega_0(\lambda, x; P)$, т. е.

$$\omega_0(\lambda, x; P) = \cos \lambda x P - \sin \lambda x BP.$$

Тогда из формулы (1.2.38) следует

$$\omega(\lambda, x; P) = \omega_0(\lambda, x; P) + \int_0^x K_p(x, t)\, \omega_0(\lambda, t; P)\, dt, \qquad (1.2.39)$$

где

$$K_p(x, t) = K(x; t; B\Omega(0)) P + K(x, t; \infty)(I - P).$$

Решая уравнение (1.2.39) относительно $\omega_0(\lambda, x; P)$, получаем также

$$\omega_0(\lambda, x; P) = \omega(\lambda, x; P) + \int_0^x L_p(x, t)\, \omega(\lambda, t; P)\, dt. \qquad (1.2.39')$$

Предполагая операторнозначную функцию $\Omega(x)$ непрерывно дифференцируемой, доказать, что ядро $L_p(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$B \frac{\partial}{\partial x} L_p(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} L_p(x, t) B - L_p(x, t)\Omega(t) = 0 \qquad (1.2.40)$$

и условиям

$$BL_p(x, x) - L_p(x, x) B = \Omega(x), \qquad (1.2.40')$$

$$L_p(x, 0) P = L_p(x, 0). \qquad (1.2.40'')$$

7. Обозначим через $\omega(\lambda, x)$ и $\tilde{\omega}(\lambda, x)$ решения операторных уравнений Штурма — Лиувилля

$$\omega'' - q(x)\omega + \lambda^2\omega = 0, \quad \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega} q(x) + \lambda^2\tilde{\omega} = 0 \qquad (0 \leqslant x < \infty)$$

при начальных данных

$$\omega(\lambda, 0) = \tilde{\omega}(\lambda, 0) = I, \quad \omega_x'(\lambda, 0) = \tilde{\omega}_x'(\lambda, 0) = h.$$

Из существования операторов преобразования следует, что

$$\cos \lambda x I = \omega(\lambda, x) + \int_0^x L(x, t)\, \omega(\lambda, t)\, dt = \tilde{\omega}(\lambda, x) + $$

$$+ \int_0^x \tilde{\omega}(\lambda, t)\, \tilde{L}(x, t)\, dt.$$

Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} L(x, y) + \displaystyle\int_0^y L(x, t)\, \tilde{L}(y, t)\, dt & (x \geqslant y), \\ \tilde{L}(y, x) + \displaystyle\int_0^x L(x, t)\, \tilde{L}(y, t)\, dt & (x \leqslant y). \end{cases} \qquad (1.2.41)$$

Доказать, что

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2}[L(x+y;\ 0) + L(|x-y|;\ 0)], \\ f(x, y) &= \frac{1}{2}[\tilde{L}(x+y;\ 0) + \tilde{L}(|x-y|;\ 0)]. \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.42)$$

Указание. Рассмотреть сначала случай непрерывно дифференцируемых $q(x)$ и, используя аналоги уравнения (1.2.30), доказать, что $f''_{xx}(x, y) = f''_{yy}(x, y)$ при $x \neq y$. Отсюда следует справедливость первого из равенств (1.2.42) при $0 < y < x$ и второго при $0 < x < y$. Их сравнение при $x = y$ приводит к тождеству $L(x, 0) = \tilde{L}(x, 0)$, из которого видно, что доказываемые формулы верны при всех неотрицательных значениях x, y. В общем случае можно аппроксимировать $q(x)$ непрерывно дифференцируемыми функциями $q_\delta(x) = \delta^{-1}\int\limits_x^{x+\delta} q(t)\,dt$.

8. Доказать, что единственным решением операторного уравнения

$$Bu'_x(x, y) + u'_y(x, y)B = 0 \qquad (0 \leqslant y \leqslant x < \infty)$$

при гладких начальных данных

$$u(x, 0) = f(x)$$

является операторнозначная функция

$$u(x, y) = \frac{1}{2}[f(x+y) + f(|x-y|) + B\{f(x+y) - f(|x-y|)\}B]. \tag{1.2.43}$$

9. Наряду с введенными в задаче 6 операторнозначными функциями $\omega(\lambda, x;\ P)$, $\omega_0(\lambda, x;\ P)$ рассмотрим операторнозначные функции $\tilde{\omega}(\lambda, x;\ P)$, $\tilde{\omega}_0(\lambda, x;\ P)$, являющиеся решениями уравнений

$$-\tilde{\omega}'_x(\lambda, x;\ P)B + \tilde{\omega}(\lambda, x;\ P)\Omega(x) = \lambda\tilde{\omega}(\lambda, x;\ P),$$

$$-\tilde{\omega}'_{0x}(\lambda, x;\ P)B = \lambda\tilde{\omega}_0(\lambda, x;\ P)$$

при начальных данных $\tilde{\omega}(\lambda, 0;\ P) = \tilde{\omega}_0(\lambda, 0;\ P) = P$. (Заметим, что $\tilde{\omega}_0(\lambda, x;\ P) = P\cos\lambda x + BP\sin\lambda x$.) Для них справедлива формула, аналогичная формуле (1.2.39):

$$\tilde{\omega}_0(\lambda, x;\ P) = \tilde{\omega}(\lambda, x;\ P) + \int\limits_0^x \tilde{\omega}(\lambda, t;\ P)\,\tilde{L}_p(x, t)\,dt. \tag{1.2.44}$$

Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} L_p(x, y) + \int\limits_0^y L_p(x, t)\,\tilde{L}_p(y, t)\,dt & (x \geqslant y), \\ \tilde{L}_p(y, x) + \int\limits_0^x L_p(x, t)\,\tilde{L}_p(y, t)\,dt & (x \leqslant y). \end{cases} \tag{1.2.45}$$

Доказать, что при всех неотрицательных значениях x, y справедливы равенства

$$f(x, y) = \frac{1}{2}[L_p(x+y;\ 0) + L_p(|x-y|;\ 0) + B\{L_p(x+y;\ 0) - L_p(|x-y|;\ 0)\}B] = \frac{1}{2}[\tilde{L}_p(x+y;\ 0) + \tilde{L}_p(|x-y|;\ 0) + B\{\tilde{L}_p(x+y;\ 0) - \tilde{L}_p(|x-y|;\ 0)\}B], \tag{1.2.46}$$

из которых следует, что

$$L_p(x, 0) + BL_p(x, 0)B = \tilde{L}_p(x, 0) + B\tilde{L}_p(x, 0)B. \tag{1.2.47}$$

§ 3. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Рассмотрим краевую задачу Штурма — Лиувилля на интервале $(0, \pi)$ с разделенными граничными условиями

$$y'' - q(x)y + \lambda^2 y = 0, \tag{1.3.1}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + h_1 y(\pi) = 0, \tag{1.3.2}$$

где $q(x)$ — непрерывная комплекснозначная функция, h и h_1 — произвольные комплексные числа. Мы не исключаем значений $h = \infty$ или $h_1 = \infty$, при которых краевые условия (1.3.2) следует понимать так: $y(0) = 0$ или $y(\pi) = 0$.

Значения параметра $\mu = \lambda^2$, при которых краевая задача (1.3.1), (1.3.2) имеет ненулевые решения, называются собственными значениями, а соответствующие решения — собственными функциями. Так как любое решение уравнения (1.3.1), удовлетворяющее только первому краевому условию $y'(0) - hy(0) = 0$, может отличаться от функции $\omega(\lambda, x; h)$ лишь постоянным множителем, то каждому собственному значению соответствует единственная линейно независимая собственная функция, а сами собственные значения совпадают с квадратами корней уравнения

$$\omega'(\lambda, \pi; h) + h_1\omega(\lambda, \pi; h) = 0. \tag{1.3.3}$$

Уравнение (1.3.3) называется характеристическим, а функция $\chi(\lambda) = \omega'(\lambda, \pi; h) + h_1\omega(\lambda, \pi; h)$ — характеристической функцией краевой задачи (1.3.1), (1.3.2). Используя оператор преобразования $\mathbf{I} + \mathbf{K}_h$ и помня, что его ядро один раз непрерывно дифференцируемо, можно записать характеристическую функцию в таком виде:

$$\chi(\lambda) = -\lambda \sin \lambda\pi + K(\pi, \pi; h) \cos \lambda\pi +$$

$$+ \int_0^\pi K'_x(\pi, t; h) \cos \lambda t dt + h_1 \left(\cos \lambda\pi + \int_0^\pi K(\pi, t; h) \cos \lambda t dt \right), \quad (1.3.4)$$

откуда следует, что характеристическая функция является целой четной функцией от λ. Поэтому собственные значения краевой задачи (1.3.1), (1.3.2) совпадают с корнями целой функции $\chi(\sqrt{\mu})$.

Собственное значение μ_n краевой задачи (1.3.1), (1.3.2) называется p-кратным, если μ_n является корнем кратности p функции $\chi(\sqrt{\mu})$. Очевидно, что если μ_n — собственное значение кратности p, то функции

$$\omega_0(\lambda, x; h), \quad \omega_k(x) = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \mu^k} \omega(\lambda, x; h) \ (\mu = \lambda^2) \quad (1.3.5)$$

при $\lambda^2 = \mu_n$ удовлетворяют краевым условиям (1.3.2), если $k \leqslant p - 1$.

Функции $\omega_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$ называются присоединенными функциями к собственной функции $\omega_0(x)$. Дифференцируя уравнение (1.3.1) по λ^2 k раз, заключаем, что присоединенные функции являются решениями уравнений

$$\omega_k''(x) - q(x)\omega_k(x) + \lambda^2\omega_k(x) = \omega_{k-1}(x), \quad (1.3.6)$$

удовлетворяющими граничным условиям (1.3.2).

Центральное место в спектральной теории краевых задач вида (1.3.1), (1.3.2) занимает теорема о полноте системы собственных и присоединенных функций такой задачи в пространстве $L^2(0, \pi)$. Операторы преобразования позволяют дать простое доказательство этой теоремы. Существенную роль при этом играет следующее элементарное соображение. Пусть $\{x_n\}$ — множество векторов какого-нибудь банахова пространства B, $\mathbf{V}$ — ограниченный линейный оператор, отображающий B на B и $y_n = \mathbf{V}x_n$. Если оператор $\mathbf{V}$ имеет обратный, то множества $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ одновременно полны или неполны в пространстве B. Действительно, пусть, например, множество $\{x_n\}$ образует полную систему, т. е.

замыкание линейной оболочки X этого множества совпадает с B. Тогда для любого вектора $f \in B$ найдется такая последовательность $z_k \in X$, что $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = \mathbf{V}^{-1} f$ и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{V}z_k = f$. Так как векторы $\mathbf{V}z_k$ принадлежат, очевидно, линейной оболочке множества $\{y_n\}$, а f — произвольный вектор из B, то система $\{y_n\}$ тоже полна в B.

Выше отмечалось, что все операторы преобразования имеют обратные. Поэтому операторы преобразования переводят полную систему функций в полную (если, разумеется, на сегменте, где рассматриваются эти функции, функция $q(x)$ непрерывна и, следовательно, операторы преобразования и им обратные ограничены).

Пусть $\{\mu_n\}$ — множество собственных значений краевой задачи (1.3.1), (1.3.2), $\{p_n\}$ — их кратности. Так как

$$\omega(\lambda, x; h) = \cos \lambda x + \int_0^x K(x, t; h) \cos \lambda t dt,$$

то из формулы (1.3.5) следует, что собственные и присоединенные функции этой краевой задачи получатся, если к системе функций

$$\cos \sqrt{\mu} x, \quad \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \mu^k} \cos \sqrt{\mu} x \Big|_{\mu=\mu_n} \tag{1.3.7}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p_n - 1)$$

применить оператор преобразования $\mathbf{I} + \mathbf{K}_h$. Поэтому для доказательства полноты системы собственных и присоединенных функций краевой задачи (1.3.1), (1.3.2) достаточно установить полноту системы функций (1.3.7).

Как известно, для полноты какой-нибудь системы векторов гильбертова пространства необходимо и достаточно, чтобы любой вектор, ортогональный всем векторам этой системы, был равен нулю. Следовательно, для доказательства полноты системы (1.3.7) в пространстве $L^2(0, \pi)$ нужно показать, что если $f(x) \in L^2(0, \pi)$ и

$$\int_0^\pi f(x) \frac{\partial^k}{\partial \mu^k} \cos \sqrt{\mu} x dx \Big|_{\mu=\mu_n} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, p_n - 1), \tag{1.3.8}$$

когда μ_n пробегает множество всех собственных значений краевой задачи (1.3.1), (1.3.2), то $f(x) = 0$ почти всюду.

Рассмотрим функцию

$$C(\lambda, f) = \int_0^{\pi} f(x) \cos \lambda x dx. \tag{1.3.9}$$

Если выполняются равенства (1.3.8), то для всех собственных значений μ_n

$$\frac{\partial^k}{\partial \mu^k} C(\sqrt{\mu}, f)\big|_{\mu=\mu_n} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, p_n - 1),$$

т. е. каждый нуль функции $\chi(\sqrt{\mu})$ является нулем не меньшей кратности функции $C(\sqrt{\mu}, f)$. Так как функции $C(\sqrt{\mu}, f)$ и $\chi(\sqrt{\mu})$ целые, то отсюда следует, что функция

$$F(\lambda) = \frac{C(\lambda, f)}{\chi(\lambda)} \tag{1.3.10}$$

тоже целая. Оценим ее модуль.

Из неравенства $|\cos z| \leqslant e^{|\operatorname{Im} z|}$ и формулы (1.3.9) следует, что

$$|C(\lambda, f)| \leqslant C_1 e^{\pi |\operatorname{Im} \lambda|}, \tag{1.3.11}$$

а из формулы (1.3.4) —

$$|\chi(\lambda) + \lambda \sin \pi\lambda| \leqslant C_2 e^{\pi |\operatorname{Im} \lambda|} \tag{1.3.11$'$}$$

и, значит,

$$|\chi(\lambda)| \geqslant |\lambda \sin \pi\lambda| - C_2 e^{\pi |\operatorname{Im} \lambda|}, \tag{1.3.12}$$

где C_1 и C_2 — некоторые константы. Но

$$|\lambda \sin \pi\lambda| = \frac{|\lambda|}{2} e^{|\operatorname{Im} \pi\lambda|} \left| 1 - e^{-2|\operatorname{Im} \pi\lambda|} e^{2i \operatorname{Re} \pi\lambda} \right|, \tag{1.3.13}$$

откуда согласно (1.3.12)

$$|\chi(\lambda)| \geqslant \frac{|\lambda|}{2} e^{\pi |\operatorname{Im} \lambda|} \left(1 - e^{-2\pi |\operatorname{Im} \lambda|} - \frac{2C_2}{|\lambda|}\right). \tag{1.3.14}$$

Далее, если $\operatorname{Re} \lambda = n + \frac{1}{2}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то $|\sin \pi\lambda| > \frac{1}{2} e^{|\operatorname{Im} \pi\lambda|}$, откуда согласно (1.3.12)

$$|\chi(\lambda)| \geqslant \frac{|\lambda|}{2} e^{\pi |\operatorname{Im} \lambda|} \left(1 - \frac{2C_2}{|\lambda|}\right) \qquad \left(\operatorname{Re} \lambda = n + \frac{1}{2}\right). \tag{1.3.14$'$}$$

Оценки (1.3.14), (1.3.14′) показывают, что на последовательности контуров L_n, ограничивающих квадраты $|\operatorname{Re} \lambda| \leqslant n + \frac{1}{2}$ $|\operatorname{Im} \lambda| \leqslant n + \frac{1}{2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, выполняется неравенство

$$|\chi(\lambda)| \geqslant \frac{|\lambda|}{2} e^{\pi |\operatorname{Im}\lambda|}\left(1 - \frac{C_3}{|\lambda|}\right)$$

(C_3 — некоторая константа), из которого согласно (1.3.11) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\lambda \in L_n} \left| \frac{C(\lambda, f)}{\chi(\lambda)} \right| = 0.$$

Отсюда согласно теореме Лиувилля заключаем, что целая функция $C(\lambda, f)[\chi(\lambda)]^{-1}$ равна нулю тождественно. Следовательно, и $C(\lambda, f) \equiv 0$, откуда согласно теореме единственности для обычных рядов Фурье вытекает, что $f(x) = 0$ почти всюду. Этим доказательство полноты системы собственных и присоединенных функций краевой задачи (1.3.1), (1.3.2) при $h, h_1 \neq \infty$ закончено. Доказательства при $h = \infty$ или $h_1 = \infty$ проводятся совершенно аналогично.

Покажем теперь, что система собственных и присоединенных функций образует базис в пространстве $L^2(0, \pi)$ и найдем вид разложений по этому базису.

Лемма 1.3.1. *Краевая задача (1.3.1), (1.3.2) может иметь только конечное число кратных собственных значений, и большие по модулю собственные значения равны* $\left(n + \frac{a_n}{n}\right)^2$, *где* $\sup |a_n| < \infty$.

Доказательство. Так как $\chi(\lambda)$ — четная целая функция, то ее нули (с учетом их кратности) можно расположить в последовательность $\ldots, -\lambda_n, -\lambda_{n-1}, \ldots, -\lambda_1, -\lambda_0; \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \ldots$, где $|\lambda_i| \leqslant |\lambda_{i+1}|$ и $\operatorname{Re}\lambda_i \geqslant 0$ при $i \geqslant 0$. Подсчитаем число нулей функции $\chi(\lambda)$, лежащих в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant n + \frac{1}{2}$. Из формулы

$$\chi(\lambda) = -\lambda \sin \lambda\pi + \{\chi(\lambda) + \lambda \sin \lambda\pi\} \qquad (1.3.15)$$

и неравенств (1.3.11′), (1.3.13) согласно теореме Руше следует, что в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant n + \frac{1}{2}$ при $n > 2C_2$ лежит одинаковое число нулей функций $\chi(\lambda)$ и $\lambda \sin \lambda\pi$, т. е. лежит $2(n+1)$ нулей. Поэтому при больших n нуль λ_n лежит в полосе $|\operatorname{Re}\lambda - n| < \frac{1}{2}$ и является простым. Таким образом, краевая задача (1.3.1), (1.3.2) может иметь лишь конечное число кратных собственных значений.

Легко проверить, что, каково бы ни было $\rho < 0{,}5$, для всех значений λ из полосы $|\operatorname{Re}\lambda - n| < 0{,}5$, лежащих вне кружка $|\lambda - n| < \rho$, выполняется неравенство

$$|\sin \lambda\pi| > C\rho e^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|},$$

где C — некоторая положительная константа, не зависящая от n и ρ. Поэтому, если $|n| > 2C^{-1}(C_2 + 1) + \frac{1}{2}$, то в полосе $|\operatorname{Re}\lambda - n| \leqslant \frac{1}{2}$ вне кружка

$$|\lambda - n| \leqslant \frac{2(C_2+1)}{C(2|n|-1)} \tag{1.3.16}$$

выполняется неравенство

$$|\lambda \sin \lambda\pi| > (C_2 + 1)e^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|},$$

откуда согласно (1.3.11′) следует, что

$$|\lambda \sin \lambda\pi| > |\chi(\lambda) + \lambda \sin \lambda\pi|$$

при тех же значениях λ. Из формулы (1.3.15) и этого неравенства согласно теореме Руше следует, что корень λ_n лежит в кружке (1.3.16), т. е. $\lambda_n = n + \frac{a_n}{n}$, где $|a_n| < \frac{C_2+1}{C} \times \times \frac{2|n|}{2|n|-1}$. Так как собственные значения совпадают с квадратами корней λ_n, то большие по модулю собственные значения равны $\left(n + \frac{a_n}{n}\right)^2$, где $\sup|a_n| < \infty$. Тем самым оба утверждения леммы полностью доказаны.

Замечание. Из доказанной леммы следует, что различные собственные значения краевой задачи (1.3.1), (1.3.2) можно занумеровать так, что они образуют ряд $\mu_{n_0}, \mu_{n_0+1}, \ldots$ $\ldots, \mu_n$, где $\mu_n = \left(n + \frac{a_n}{n}\right)^2$, $\sup|a_n| < \infty$, $n_0 = \sum\limits_{k=n_0}^{\infty}(p_k - 1)$ и p_k — кратность собственного значения μ_k.

Функцию $\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\mu^k}\omega(\sqrt{\mu}, x; h)$, рассматриваемую как элемент пространства $L^2(0, \pi)$, обозначим через $\omega_k(\mu)$ (здесь μ — не обязательно собственное значение). Введем в пространстве $L^2(0, \pi)$ псевдоскалярное произведение $\langle f, g\rangle$, положив

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_0^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx,$$

и вычислим $\langle \omega_k(\mu), \omega_r(\nu) \rangle$. Из уравнений, которым удовлетворяют функции $\omega(\sqrt{\mu}, x; h)$, следует равенство

$$\omega''(\sqrt{\mu}, x; h)\,\omega(\sqrt{\nu}, x; h) - \omega(\sqrt{\mu}, x; h)\,\omega''(\sqrt{\nu}, x; h) =$$
$$= (\nu - \mu)\,\omega(\sqrt{\mu}, x; h)\,\omega(\sqrt{\nu}, x; h);$$

интегрируя его, получаем

$$(\nu - \mu)\langle \omega_0(\mu), \omega_0(\nu)\rangle = \{\omega'(\sqrt{\mu}, x; h)\,\omega(\sqrt{\nu}, x; h) -$$
$$- \omega(\sqrt{\mu}, x; h)\,\omega'(\sqrt{\nu}, x; h)\}\Big|_0^{\pi} = \omega'(\sqrt{\mu}, \pi; h)\,\omega(\sqrt{\nu}, \pi; h) -$$
$$- \omega(\sqrt{\mu}, \pi; h)\,\omega'(\sqrt{\nu}, \pi; h).$$

Вспоминая определение характеристической функции $\chi(\sqrt{\mu})$, мы можем это равенство преобразовать к такому виду:

$$(\nu - \mu)\langle \omega_0(\mu), \omega_0(\nu)\rangle = \chi(\sqrt{\mu})\,\omega(\sqrt{\nu}, \pi; h) -$$
$$- \chi(\sqrt{\nu})\,\omega(\sqrt{\mu}, \pi; h). \tag{1.3.17}$$

Лемма 1.3.2. *Если μ_n — собственное значение краевой задачи (1.3.1), (1.3.2) кратности p_n, то*

$$\langle \omega_k(\mu_n), \omega_r(\mu_n)\rangle = a_{k+r}$$
$$(0 \leqslant k \leqslant p_n - 1;\ 0 \leqslant r \leqslant p_n - 1),$$

причем $a_{k+r} = 0$, если $k + r < p_n - 1$ и $a_{p_n - 1} \neq 0$.

Если μ_m — другое собственное значение этой же краевой задачи кратности p_m, то

$$\langle \omega_k(\mu_n), \omega_s(\mu_m)\rangle = 0 \qquad (0 \leqslant k \leqslant p_n - 1; \quad 0 \leqslant s \leqslant p_m - 1)$$

Доказательство. По условию μ_n является корнем функции $\chi(\sqrt{\mu})$ кратности p_n. Поэтому, полагая в формуле (1.3.17) $\mu = \mu_n$, получаем

$$(\nu - \mu_n)\langle \omega_0(\mu_n), \omega_0(\nu)\rangle = -\chi(\sqrt{\nu})\,\omega(\sqrt{\mu_n}, \pi; h),$$

причем $\omega(\sqrt{\mu_n}, \pi; h) \neq 0$, так как функции $\chi(\sqrt{\lambda}) = \omega'(\sqrt{\lambda}, \pi; h) + h_1\omega(\sqrt{\lambda}, \pi; h)$ и $\omega(\sqrt{\lambda}, \pi; h)$ одновременно не могут обратиться в нуль. Следовательно, разложение правой части этого равенства в ряд по степеням $\nu - \mu_n$ имеет такой вид:

$$-\chi(\sqrt{\nu})\,\omega(\sqrt{\mu_n}, \pi; h) =$$
$$= (\nu - \mu_n)^{p_n}(C_0 + (\nu - \mu_n)C_1 + \cdots),$$
$$\langle \omega_0(\mu_n), \omega_0(\nu)\rangle = (\nu - \mu_n)^{p_n - 1}(C_0 + (\nu - \mu_n)C_1 + \cdots),$$

где $C_0 \neq 0$. Дифференцируя k раз последнее равенство по ν и вспоминая определение функций $\omega_k(\mu_n)$, получаем

$$\langle \omega_0(\mu_n), \omega_k(\mu_n)\rangle = 0 \qquad (0 \leqslant k < p_n - 1), \quad (1.3.18)$$

$$\langle \omega_0(\mu_n), \omega_{p_n-1}(\mu_n)\rangle = (-1)^{p_n-1} C_0 \neq 0. \quad (1.3.19)$$

Применим теперь к обеим частям формулы (1.3.17) операцию $\frac{(-1)^{k+r+1}}{k!\,(r+1)!}\,\frac{\partial^{k+r+1}}{\partial\mu^k\,\partial\nu^{r+1}}$ $(0 \leqslant k \leqslant p_n - 1;\ 0 \leqslant r+1 \leqslant \leqslant p_n - 1)$ и положим $\mu = \nu = \mu_n$. В результате получим

$$\langle \omega_{k-1}(\mu_n), \omega_{r+1}(\mu_n)\rangle - \langle \omega_k(\mu_n), \omega_r(\mu_n)\rangle = 0.$$

Эта формула показывает, что величина $\langle \omega_k(\mu_n), \omega_r(\mu_n)\rangle$ зависит только от суммы индексов $k + r$, а не от каждого из них в отдельности. Следовательно,

$$\langle \omega_k(\mu_n), \omega_r(\mu_n)\rangle = a_{r+k},$$

причем согласно (1.3.18), (1.3.19) $a_{r+k} = 0$, если $r + k < < p_n - 1$ и $a_{r+k} \neq 0$ при $r + k = p_n - 1$. Разделив обе части формулы (1.3.17) на $(\nu - \mu)$, применим к полученному равенству операцию $\frac{(-1)^{k+s}}{k!\,s!}\,\frac{\partial^{k+s}}{\partial\mu^k\partial\nu^s}$ и положим $\mu = = \mu_n$, $\nu = \mu_m$. Так как μ_n (μ_m) является корнем функции $\chi(\sqrt{z})$ кратности p_n (p_m), то при $0 \leqslant k \leqslant p_n - 1$, $0 \leqslant s \leqslant \leqslant p_m - 1$ правая часть обратится в нуль. Следовательно,

$$\langle \omega_k(\mu_n), \omega_s(\mu_m)\rangle = 0,$$

и лемма доказана полностью.

Пусть $\mu_{n_0}, \mu_{n_1}, \ldots, \mu_n = \left(n + \frac{a_n}{n}\right)^2, \ldots$ — различные собственные значения краевой задачи (1.3.1), (1.3.2) и p_n — их кратности. Предположим, что функция $f(x) \in L^2(0, \pi)$ разлагается в ряд по собственным и присоединенным функциям этой задачи, сходящийся в метрике пространства $L^2(0, \pi)$:

$$f(x) = \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \sum_{n=n_0}^{N} \left\{\sum_{k=0}^{p_n-1} \omega_k(\mu_n, f)\,\omega_k(\mu_n)\right\}. \quad (1.3.20)$$

Тогда коэффициенты $\omega_k(\mu_n, f)$ этого ряда могут быть найдены по формулам, аналогичным классическим формулам Эйлера для коэффициентов Фурье. Действительно, умножив обе части равенства (1.3.20) на $\omega_s(\mu_m)$ и проинтегрировав их по интервалу $(0, \pi)$, получим

$$\langle f, \omega_s(\mu_m)\rangle = \sum_{k=0}^{p_m-1} \omega_k(\mu_m, f)\langle \omega_k(\mu_m), \omega_s(\mu_m)\rangle, \qquad (1.3.21)$$

так как согласно предыдущей лемме $\langle \omega_k(\mu_n), \omega_s(\mu_m)\rangle = 0$, если $\mu_n \neq \mu_m$. Следовательно, для определения коэффициентов ряда (1.3.20) нужно решить систему линейных уравнений (1.3.21) при каждом μ_m относительно $\omega_k(\mu_m, f)$. Поэтому, если μ_m — простое собственное значение ($p_m = 1$), то

$$\omega_0(\mu_m, f) = \frac{\langle f, \omega_0(\mu_m)\rangle}{\langle \omega_0(\mu_m), \omega_0(\mu_m)\rangle}, \qquad (1.3.22)$$

если же $p_m \neq 1$, то

$$\omega_k(\mu_m, f) = \sum_{j=0}^{p_m-1} b_{k,j}\langle f, \omega_j(\mu_m)\rangle, \qquad (1.3.23)$$

где $b_{k,j}$ — элементы матрицы обратной матрице с элементами $a_{k,s} = \langle \omega_k(\mu_m), \omega_s(\mu_m)\rangle$.

Найдем вид матрицы $\|b_{k,j}\|$. Согласно лемме 1.3.2

$$\left.\begin{aligned} a_{k,s} = \langle \omega_k(\mu_m), \omega_s(\mu_m)\rangle = a_{k+s},\\ a_{k+s} = 0 \text{ при } k+s < p_m - 1,\ a_{p_m-1} \neq 0.\end{aligned}\right\} \qquad (1.3.24)$$

Покажем, что

$$b_{k,j} = \begin{cases} b_{k+j}, & k+j \leqslant p_m - 1,\\ 0, & k+j > p_m - 1,\end{cases} \qquad (1.3.25)$$

где числа $b_0, b_1, \ldots, b_{p_m-1}$ находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &b_{p_m-1}a_{p_m-1} = 1,\\ &b_{p_m-1}a_{p_m} + b_{p_m-2}a_{p_m-1} = 0,\\ &\cdot\\ &\cdot\\ &\cdot\\ &b_{p_m-1}a_0 + \cdots + b_0 a_{p_m-1} = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (1.3.26)$$

которая, очевидно, имеет единственное решение. Действительно, при таком определении $b_{k,j}$ элементы матрицы $\|b_{k,j}\| \cdot \|a_{k,j}\|$ равны

$$C_{k,j} = \sum_{i=0}^{p_m-1} b_{k,i}a_{i,j} = \sum_{i=0}^{p_m-1-k} b_{k+i}a_{i+j} = \sum_{s=k}^{p_m-1} b_s a_{s-k+j},$$

т. е. согласно (1.3.24) и (1.3.26)

$$C_{k,j} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Из формул (1.3.23) и (1.3.25) следует, что

$$\sum_{k=0}^{p_m-1} \omega_k(\mu_m, f)\,\omega_k(\mu_m) = \sum_{k=0}^{p_m-1} \omega_k(\mu_m) \sum_{j=0}^{p_m-1-k} b_{k+j}\langle f, \omega_j(\mu_m)\rangle =$$

$$= \sum_{s=0}^{p_m-1} b_s \sum_{j=0}^{s} \langle f, \omega_j(\mu_m)\rangle\, \omega_{s-j}(\mu_m),$$

откуда, используя определение функций $\omega_k(\mu_m)$, получаем

$$\sum_{k=0}^{p_m-1} \omega_k(\mu_m, f)\,\omega_k(\mu_m) =$$

$$= \sum_{s=0}^{p_m-1} \frac{(-1)^s b_s}{s!} \sum_{j=0}^{s} \frac{s!}{j!\,(s-j)!} \frac{\partial^j}{\partial\lambda^j} \langle f, \omega_0(\lambda)\rangle \frac{\partial^{s-j}}{\partial\lambda^{s-j}} \omega_0(\lambda)\Big|_{\lambda=\mu_m}$$

или

$$\sum_{k=0}^{p_m-1} \omega_k(\mu_m, f)\,\omega_k(\mu_m) =$$

$$= \sum_{s=0}^{p_m-1} r_s(\mu_m) \frac{\partial^s}{\partial\lambda^s} \{\langle f, \omega_0(\lambda)\rangle\, \omega_0(\lambda)\}\Big|_{\lambda=\mu_m},$$

где $r_s(\mu_m) = \dfrac{(-1)^s b_s}{s!}$. Таким образом, если функция $f(x) \in L^2(0, \pi)$ разлагается в ряд по собственным и присоединенным функциям, то это разложение имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{p_n-1} r_s(\mu_n) \frac{\partial^s}{\partial\lambda^s} [\langle f, \omega_0(\lambda)\rangle\, \omega_0(\lambda)]\Big|_{\lambda=\mu_n} \right\}, \qquad (1.3.27)$$

где коэффициенты $r_s(\mu_n)$ не зависят от функции $f(x)$, причем начиная с некоторого значения n $p_n = 1$ и $r_0(\mu_n) = [\langle \omega_0(\mu_n), \omega_0(\mu_n)\rangle]^{-1}$. Наоборот, если ряд, стоящий в правой части формулы (1.3.27), сходится, то его сумма $\varphi(x)$ удовлетворяет равенствам

$$\langle \varphi, \omega_k(\mu_m)\rangle = \langle f, \omega_k(\mu_m)\rangle \qquad (0 \leqslant k \leqslant p_m - 1)$$

при всех значениях μ_m, т. е.

$$\langle \varphi - f, \omega_k(\mu_m)\rangle = 0,$$

откуда вследствие полноты системы собственных и присоединенных функций $\varphi(x) = f(x)$. Поэтому для доказательства того, что любая функция $f(x) \in L^2(0, \pi)$ разлагается в ряд (1.3.27), нам достаточно убедиться, что этот ряд сходится в метрике пространства $L^2(0, \pi)$. Согласно предыдущему при больших значениях n общий член этого ряда равен

$$\frac{\langle f, \omega_0(\mu_n)\rangle \, \omega_0(\mu_n)}{\langle \omega_0(\mu_n), \omega_0(\mu_n)\rangle},$$

где

$$\mu_n = \left(n + \frac{a_n}{n}\right)^2, \quad \sup |a_n| < \infty,$$

$$\omega_0(\mu_n) = \cos\left(n + \frac{a_n}{n}\right)x + \int_0^x K(x, t; h)\cos\left(n + \frac{a_n}{n}\right)t\,dt.$$

Так как

$$\cos\left(n + \frac{a_n}{n}\right)x = \cos nx - \frac{a_n x}{n}\sin nx + \frac{\beta_n(x)}{n^2},$$

причем функции $\beta_n(x)$ непрерывны и последовательность $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \pi} |\beta_n(x)|$ ограничена, то

$$\omega_0(\mu_n) = \cos nx - \frac{a_n x}{n}\sin nx + \frac{\beta_n(x)}{n^2} +$$

$$+ \int_0^x K(x, t; h)\left\{\cos nt - \frac{a_n t}{n}\sin nt + \frac{\beta_n(t)}{n^2}\right\}dt$$

или

$$\omega_0(\mu_n) = \cos nx + \frac{K(x, x; h) - a_n x}{n}\sin nx + \gamma_n(x), \tag{1.3.28}$$

где функции

$$\gamma_n(x) = \frac{\beta_n(x)}{n^2} + \frac{1}{n^2}\int_0^x K(x, t; h)\,\beta_n(t)\,dt -$$

$$- \frac{1}{n}\int_0^x \{K_t'(x, t; h) + a_n K(x, t; h)\}\sin nt\,dt$$

тоже непрерывны. Используя неравенство Бесселя для синус-коэффициентов Фурье, неравенство Буняковского и ограниченность последовательностей $|a_n|$ и $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \pi} |\beta_n(x)|$, находим

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant \pi} \sum_{n=N}^{\infty} |\gamma_n(x)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{N}}, \tag{1.3.29}$$

где константа C не зависит от N. Из формул (1.3.28) и (1.3.29) следует, что

$$\langle f, \omega_0(\mu_n)\rangle = \langle f, \cos nx\rangle + \varepsilon_n^{(1)},$$
$$[\langle \omega_0(\mu_n), \omega_0(\mu_n)\rangle]^{-1} = \frac{2}{\pi} + \varepsilon_n^{(2)},$$

причем

$$\sum_{n=N}^{\infty} \{|\varepsilon_n^{(1)}| + |\varepsilon_n^{(2)}|\} < \infty.$$

Поэтому при больших n общий член ряда (1.3.27) равен $\frac{2}{\pi}\langle f, \cos nx\rangle \cos nx + \varepsilon_n(x)$, где функции $\varepsilon_n(x)$ непрерывны,

$$\max_{0\leqslant x\leqslant \pi} \sum_{n=N}^{\infty} |\varepsilon_n(x)| < \frac{C'}{\sqrt{N}} \tag{1.3.30}$$

и константа C' не зависит от N.

Так как по теореме Фишера — Рисса ряд Фурье $\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{2}{\pi}\langle f, \cos nx\rangle \cos nx$ всегда сходится в метрике пространства $L^2(0, \pi)$, то и ряд (1.3.27) сходится в метрике этого пространства. Более того, из непрерывности функций $\varepsilon_n(x)$ и неравенства (1.3.30) следует, что разность между частными суммами ряда (1.3.27) и ряда Фурье $\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{2}{\pi}\langle f, \cos nx\rangle \cos nx$ равномерно по x сходится к некоторой непрерывной функции. А так как в среднем квадратичном оба эти ряда сходятся к одной и той же функции $f(x)$, то эта непрерывная функция должна быть тождественно равна нулю. Следовательно, в каждой данной точке x ряд (1.3.27) сходится к $f(x)$ тогда и только тогда, когда в этой точке сходится ряд Фурье по косинусам к $f(x)$, и сходимость к $f(x)$ будет равномерна в каком-нибудь интервале (α, β), если в этом интервале ряд Фурье по косинусам сходится равномерно.

Суммируя все результаты настоящего параграфа, приходим к следующей теореме.

Теорема 1.3.1. *Система собственных и присоединенных функций краевой задачи (1.3.1), (1.3.2) полна в пространстве* $L^2(0, \pi)$ *и образует в нем базис: каждая функция* $f(x) \in L^2(0, \pi)$ *единственным образом разлагается в ряд (1.3.27)* *по собственным и присоединенным функциям, сходящийся в метрике этого пространства.*

Ряд (1.3.27) является равномерно равносходящимся с рядом Фурье функции $f(x)$ по $\cos nx$, т. е.

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{0\leqslant x\leqslant\pi}|\sigma_N(x)-s_N(x)|=0,$$

где $\sigma_N(x)$ и $s_N(x)$ — частные суммы ряда (1.3.27) и ряда Фурье соответственно.

ЗАДАЧИ

Пусть функция $q(x)$ имеет n непрерывных производных. Тогда согласно теореме 1.2.2 ядро $K(x, t)$, а значит и $K(x, t; h)$, имеет $n+1$ непрерывную производную. Поэтому в формуле

$$\omega(\lambda, x; h)=\cos\lambda x+\int_0^x K(x, t; h)\cos\lambda t\,dt$$

можно провести $n+1$ раз интегрирование по частям. Отсюда следует асимптотическое разложение функции $\omega(\lambda, x; h)$ по степеням λ^{-1} с остаточным членом порядка $o(\lambda^{-n-1})$. Однако явный вид коэффициентов в этом разложении найти трудно. В приведенных задачах указан другой путь получения асимптотических разложений и некоторые их приложения.

1. Если функция $q(x)$ имеет n непрерывных производных, то уравнение $y''-q(x)y+\lambda^2y=0$ имеет фундаментальную систему решений $y(\lambda, x)$, $y(-\lambda, x)$ вида

$$y(\lambda, x)=e^{i\lambda x}\left[1+\frac{u_1(x)}{i\lambda}+\cdots+\frac{u_n(x)}{(i\lambda)^n}\right]+\frac{v_n(\lambda, x)}{(i\lambda)^{n+1}}, \qquad (1.3.31)$$

где

$$u_1(x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt,$$

$$u_k(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x\{u''_{k-1}(t)-q(t)u_{k-1}(t)\}\,dt, \qquad (1.3.32)$$

$$v_n(\lambda, 0)=v'_n(\lambda, 0)=0, \qquad (1.3.33)$$

$$v_n(\lambda, x)=e^{i\lambda x}u_{n+1}(x)+\varepsilon_n(\lambda, x), \qquad (1.3.34)$$

причем

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}|\varepsilon_n(\lambda, x)|e^{-|\operatorname{Im}\lambda x|}=\lim_{|\lambda|\to\infty}\left|\frac{d}{d\lambda}\varepsilon_n(\lambda, x)\right|e^{-|\operatorname{Im}\lambda x|}=0. \qquad (1.3.35)$$

Указание. Подставить правую часть формулы (1.3.31) в уравнение и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях λ. В результате получится система равенств

$$2u_1'(x) - q(x) = 0, \ \dots, \ 2u_k'(x) + L[u_{k-1}(x)] = 0 \qquad (2 \leqslant k \leqslant n),$$

$$L[v_n(\lambda, x)] + \lambda^2 v_n(\lambda, x) = -i\lambda e^{i\lambda x} L[u_n(x)],$$

которая выполняется, если определить $u_k(x)$ по формулам (1.3.32), а в качестве $v_n(\lambda, x)$ взять решение интегрального уравнения

$$v_n(\lambda, x) =$$

$$= -i \int_0^x \sin\lambda(x-t)\, e^{i\lambda t} L[u_n(t)]\, dt + \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} q(t)\, v_n(\lambda, t)\, dt,$$

где $L \equiv \dfrac{d^2}{dx^2} - q(x)$. При этом равенства (1.3.33) выполняются автоматически, а формулы (1.3.34), (1.3.35) вытекают из этого интегрального уравнения, если заметить, что

$$\int_0^x e^{i\lambda t} \varphi(t)\, dt \to 0 \quad \text{при } |\lambda| \to \infty \ \text{ и } \ \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0.$$

2. Обозначим через μ_k собственные значения краевой задачи

$$y'' - q(x)\, y + \mu y = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi),$$

$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

занумерованные с учетом кратности в порядке возрастания $|\mu_k|$. Пусть функция $q(x)$ имеет $2m$ непрерывных производных и функции $u_k(x)$ строятся по формулам (1.3.32). Доказать, что при $s = 1, 2, \dots, m$ справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^s - \nu_k^s) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^s, \tag{1.3.36}$$

где ν_k — нули функции $z_m(\sqrt{\nu})$:

$$z_m(\lambda) = \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}\left[1 + \frac{u_2(\pi)}{(i\lambda)^2} + \dots + \frac{u_{2m}(\pi)}{(i\lambda)^{2m}}\right] +$$

$$+ \cos\lambda\pi \left[\frac{u_1(\pi)}{(i\lambda)^2} + \dots + \frac{u_{2m-1}(\pi)}{(i\lambda)^{2m}}\right], \tag{1.3.37}$$

занумерованные с учетом кратности в порядке возрастания $|\nu_k|$, и α_k — нули полинома

$$A_m(\mu) = \mu^m + u_1'(0)\,\mu^{m-1} + \dots + u_{2m-1}'(0) =$$

$$= \mu^m + \frac{q(0)\,\mu^{m-1}}{2} + \dots + \frac{q^{(2m-2)}(0)}{2^{2m-1}}. \tag{1.3.38}$$

В частности, если $u_1(\pi) = u_3(\pi) = \cdots = u_{2m-1}(\pi) = 0$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^s - k^{2s}) = \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k^s - \beta_k^s) \qquad (s = 1, 2, \ldots, m), \tag{1.3.39}$$

где β_k — нули полинома

$$B_m(\mu) = \mu^m + u_2(\pi)\mu^{m-1} + \cdots + u_{2m}(\pi). \tag{1.3.40}$$

Например, если $\int\limits_0^{\pi} q(t)\,dt = 0$, то $u_1(0) = 0$, $u_2(\pi) = -\frac{1}{2}(q(\pi) - q(0))$ и из равенства (1.3.39) при $s = m = 1$ вытекает формула следов И. М. Гельфанда — Б. М. Левитана

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k - k^2) = -\frac{q(\pi) + q(0)}{4}.$$

Указание. Так как μ_k являются квадратами корней функции $\omega(\lambda, \pi; \infty)$, то

$$2\sum_{k=1}^{n} \mu_k^s = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} \lambda^{2s} \frac{\dot{\omega}(\lambda, \pi; \infty)}{\omega(\lambda, \pi; \infty)}\,d\lambda, \tag{1.3.41}$$

где точка означает дифференцирование по λ, C_n — граница квадрата, $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant n + \frac{1}{2}$, $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant n + \frac{1}{2}$.

Совершенно аналогично получаем

$$2\sum_{k=1}^{n} \nu_k^s = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} \lambda^{2s} \frac{\dot{z}_m(\lambda)}{z_m(\lambda)}\,d\lambda. \tag{1.3.42}$$

Из решений $y(\lambda, x)$, $y(-\lambda, x)$, построенных в предыдущей задаче, составим функцию

$$z(\lambda, x) = \frac{1}{2i\lambda}\{y(\lambda, x) - y(-\lambda, x)\},$$

которая обращается в нуль при $x = 0$ и удовлетворяет тому же уравнению, что и $\omega(\lambda, x; \infty)$. Поэтому

$$z(\lambda, x) = \omega(\lambda, x; \infty)\, z'(\lambda, 0) = \omega(\lambda, x; \infty)(-\lambda^2)^{-m} A_m(-\lambda^2),$$

откуда согласно (1.3.41) следует

$$2\sum_{k=1}^{n} \mu_k^s = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} \lambda^{2s} \frac{\dot{z}(\lambda, \pi)}{z(\lambda, \pi)}\,d\lambda + 2\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^s.$$

Сопоставляя это равенство с равенством (1.3.42), замечаем, что для справедливости формулы (1.3.36) нужно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{C_n} \lambda^{2s}\left[\frac{\dot{z}(\lambda, \pi)}{z(\lambda, \pi)} - \frac{\dot{z}_m(\lambda)}{z_m(\lambda)}\right]d\lambda = 0. \tag{1.3.43}$$

Но формулы (1.3.34) и (1.3.35) позволяют установить, что на контурах C_n при $n \to \infty$

$$\lambda^{2s}\left[\frac{\dot z(\lambda,\pi)}{z(\lambda,\pi)}-\frac{\dot z_m(\lambda)}{z_m(\lambda)}\right]=\lambda^{2s}\left[-\frac{\pi u_{2m+1}(\pi)}{(i\lambda)^{2m+1}\sin^2\lambda\pi}+\frac{o(1)}{(i\lambda)^{2m+1}}\right],$$

откуда при $s = 1, 2, \ldots, m$ вытекает справедливость равенства (1.3.43).

3. Обобщить формулы предыдущей задачи на другие граничные условия.

4. Доказать, что при любом $s = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^s - k^{2s}) = (-1)^s[(A+N^2)^s - N^{2s}],$$

где μ_k — собственные значения задачи

$$y''(x) - 2Ae^{2iNx}y(x) + \mu y(x) = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi),$$
$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

$N \neq 0$ — целое число.

Указание. В данном случае $u_1(x) = \dfrac{A}{2iN}(e^{2iNx} - 1)$, откуда по индукции следует, что $u_k(x) = \sum\limits_{s=1}^{k} a_s^{(k)}(e^{2iNsx} - 1)$. Поэтому $u_k(\pi) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и можно пользоваться формулой (1.3.39), причем здесь $B_m(\mu) = \mu^m$, так что $\beta_k = 0$. Далее,

$$A_m(\mu) = \mu^m + A\left\{\mu^{m-1} + \left(\frac{2iN}{2}\right)^2\mu^{m-2} + \cdots + \left(\frac{2iN}{2}\right)^{2(m-1)}\right\} =$$
$$= \mu^m + A(-N^2)^{m-1}\left\{\left(-\frac{\mu}{N^2}\right)^{m-1} + \left(-\frac{\mu}{N^2}\right)^{m-2} + \cdots + 1\right\} =$$
$$= -\frac{\mu^{m+1} + \mu^m(N^2 + A) - A(-N^2)^m}{(\mu + N^2)}.$$

Поэтому

$$\frac{A_m'(\mu)}{A_m(\mu)} = -\frac{1}{\mu + N^2} + \frac{(m+1)\mu^m + m\mu^{m-1}(N^2 + A)}{\mu^m(\mu + N^2 + A)(1 + o(\mu^{-m-1}))} =$$
$$= -\frac{1}{\mu + N^2} + \frac{m+1}{\mu + N^2 + A} + \frac{m(N^2 + A)}{\mu(\mu + N^2 + A)} + o(\mu^{-m-2})$$
$$(|\mu| \to \infty)$$

и при $s \leqslant m$

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^s = \lim_{|R|\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=R}\frac{A_m'(\mu)}{A_m(\mu)}\mu^s d\mu = -(-N^2)^s +$$
$$+ (m+1)(-N^2 - A)^s - m(-N^2 - A)^s =$$
$$= (-1)^s[(A + N^2)^s - N^{2s}].$$

Глава 2

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ

§ 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

Функция $f(x)$, заданная на полуоси $0 \leqslant x < \infty$, называется финитной, если она равна нулю вне некоторого конечного сегмента. Обозначим множество всех финитных функций с суммируемым квадратом через K^2, множество всех функций из K^2, равных нулю при $x > \sigma$,— через $K^2(\sigma)$, косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$ — через

$$C(\lambda, f) = \int_0^\infty f(x) \cos \lambda x dx, \tag{2.1.1}$$

а множество косинус-преобразований Фурье функций из $K^2(\sigma)$ — через $CK^2(\sigma)$. Нетрудно дать внутреннюю характеристику множества $CK^2(\sigma)$: оно совпадает с множеством четных целых функций $g(\lambda)$ с суммируемым квадратом на вещественной оси, которые при всех комплексных значениях λ удовлетворяют неравенству

$$|g(\lambda)| \leqslant C \exp\{\sigma |\operatorname{Im} \lambda|\}, \tag{2.1.2}$$

где C — некоторая константа, своя для каждой функции.

Действительно, если $g(\lambda) \in CK^2(\sigma)$, то $g(\lambda) = C(\lambda, f)$, где $f(x) \in K^2(\sigma)$, и непосредственно из формулы (2.1.1) видно, что функция $g(\lambda) = C(\lambda, f)$ является целой четной функцией, удовлетворяет неравенству (2.1.2) с $C = \int_0^\sigma |f(x)| dx$ и согласно теореме Планшереля $g(\lambda) \in L^2(-\infty, \infty)$. Наоборот, если функция $g(\lambda)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, то согласно лемме Жордана

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \frac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda} e^{i\lambda x} d\lambda = 0$$

при $|x| > \sigma + \varepsilon$. Поэтому

$$g(\lambda)\frac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda} = \int_{-\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon} f_\varepsilon(x)\, e^{-i\lambda x}dx = \int_0^{\sigma+\varepsilon} 2f_\varepsilon(x)\cos\lambda x dx,$$

и так как при $\varepsilon \to 0$ $g(\lambda)\frac{\sin\varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda}$ сходится в метрике пространства $L^2(-\infty, \infty)$ к $g(\lambda)$, то в метрике пространства $L^2(0, \infty)$ существует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 2f_\varepsilon(x) = f(x)$, причем очевидно, что $f(x) = 0$ при $x > \sigma$. Следовательно, $f(x) \in K^2(\sigma)$ и

$$g(\lambda) = \int_0^\sigma f(x)\cos\lambda x dx,$$

так что

$$g(\lambda) = C(\lambda, f) \in CK^2(\sigma).$$

Заметим, что согласно теореме Пэли — Винера условие (2.1.2) можно заменить более слабым

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{r}\ln\{\max_{|z|=r}|g(z)|\} = \sigma_g \leqslant \sigma.$$

Целые функции, удовлетворяющие этому условию, называются функциями экспоненциального типа σ_g. Таким образом, множество $CK^2(\sigma)$ есть множество всех четных целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ, с суммируемым квадратом на вещественной оси. (Впрочем, это ослабление условия (2.1.2) нам нигде в дальнейшем не понадобится.)

Обозначим через $Z(\sigma)$ линейное нормированное пространство, состоящее из суммируемых на вещественной оси четных целых функций $f(\lambda)$, удовлетворяющих неравенству (2.1.2), с обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа и нормой

$$\|f(\lambda)\| = \int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|d\lambda.$$

Пространства $Z(\sigma)$ являются, очевидно, подпространствами пространства $L^1(-\infty, \infty)$, причем $Z(\sigma) \subset Z(\sigma')$, если $\sigma < \sigma'$. Обозначим через Z объединение всех пространств $Z(\sigma)$. Ясно, что Z есть линейное многообразие в пространстве $L^1(-\infty, \infty)$. Введем в Z следующее определение сходимости: последовательность $f_n(\lambda)$ сходится к $f(\lambda)$, если существует такое σ, что все функции $f_n(\lambda)$ принадлежат $Z(\sigma)$ и сходятся к $f(\lambda)$ в метрике этого пространства. Линейное многообразие Z с таким определением сходимости примем за пространство основных функций.

Определение 1. *Пространство основных функций Z есть множество всех суммируемых на вещественной оси четных целых функций $f(\lambda)$, удовлетворяющих неравенствам (2.1.2) (константы σ и C, свои для каждой функции $f(\lambda)$) с обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа. Последовательность $f_n(\lambda) \in Z$ сходится к $f(\lambda)$, если*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(\lambda) - f(\lambda)|\, d\lambda = 0$$

и типы σ_n функций $f(\lambda)$ ограничены в совокупности, $\sup \sigma_n < \infty$.

Отметим некоторые свойства пространства Z. Пусть CK^2 есть множество косинус-преобразований Фурье функций из множества K^2, т. е. $CK^2 = \bigcup_{\sigma} CK^2(\sigma)$. Тогда $CK^2 \supset Z$. Действительно, если $f(\lambda) \in Z$, то $f(\lambda) \in Z(\sigma)$ и, значит, $\sup\limits_{-\infty<\lambda<\infty} |f(\lambda)| < \infty$. Но тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\lambda \leqslant \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |f(\lambda)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|\, d\lambda < \infty$$

и, следовательно, $f(\lambda) \in CK^2(\sigma) \subset CK^2$. Очевидно также, что произведение любых двух функций из CK^2 принадлежит Z и множество таких произведений всюду плотно в Z, так как если $f(\lambda) \in Z$, то $f(\lambda) \in CK^2$ и функции $f_\varepsilon(\lambda) = f(\lambda) \dfrac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda}$ при $\varepsilon \to 0$ сходятся в пространстве Z к $f(\lambda)$. Основные функции пространства Z можно умножать на любые целые четные функции $\varphi(\lambda)$, удовлетворяющие неравенствам (2.1.2), так как такое произведение, очевидно, тоже принадлежит Z. Функции $\varphi(\lambda)$ называются мультипликаторами в пространстве Z.

Определение 2. *Аддитивные, однородные и непрерывные функционалы*

$$R[f(\lambda)] = (f(\lambda), R),$$

определенные на основном пространстве Z, называются обобщенными функциями. Множество всех обобщенных функций обозначается через Z'.

Из этого определения и определения сходимости в пространстве Z следует, что обобщенные функции из Z' — это такие аддитивные и однородные функционалы, определенные в пространстве Z, сужения которых на пространства $Z(\sigma)$ являются линейными функционалами в этих нормированных пространствах.

Последовательность обобщенных функций $R_n \in Z'$ сходится к $R \in Z'$, если

$$\lim_{n\to\infty} (f(\lambda), R_n) = (f(\lambda), R) \tag{2.1.3}$$

на всех основных функциях $f(\lambda) \in Z$. Заметим, что условие $R \in Z'$ здесь несущественно, так как если существует предел в левой части этого равенства, какова бы ни была $f(\lambda) \in \in Z$, то сужения R_n на любое пространство $Z(\sigma)$ слабо сходятся и согласно известной теореме Банаха их пределы являются линейными функционалами в пространстве $Z(\sigma)$. Следовательно функционал, определенный левой частью равенства (2.1.3), является обобщенной функцией, т. е. функционал R автоматически принадлежит пространству Z'.

Обобщенная функция $R \in Z'$ называется регулярной, если она задается формулой

$$(f(\lambda), R) = \int_0^\infty f(\lambda)\, R(\lambda)\, d\lambda,$$

где $R(\lambda)$ — произвольная измеримая и ограниченная на полуоси $0 \leqslant \lambda < \infty$ функция. Иными словами, R регулярна, если она порождает непрерывный в метрике пространства $L^1(-\infty, \infty)$ функционал.

Обобщенные функции $R \in Z'$ можно умножать на мультипликаторы $\varphi(\lambda)$ пространства Z, полагая, по определению,

$$(f(\lambda), R\cdot\varphi(\lambda)) = (f(\lambda)\,\varphi(\lambda), R).$$

Если функция $A(x)$ суммируема на полуоси $0 \leqslant x < \infty$, то ее косинус-преобразование Фурье $C(\lambda, A)$ является ограниченной непрерывной функцией. Следовательно, его можно отождествить с регулярной обобщенной функцией $C(A)$, действующей по формуле

$$(f(\lambda), C(A)) = \int_0^\infty f(\lambda)\, C(\lambda, A)\, d\lambda.$$

Используя определение косинус-преобразования Фурье, можно эту формулу переписать так:

$$(f(\lambda), C(A)) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(\lambda)\cos\lambda x d\lambda\right] A(x)\,dx. \qquad (2.1.4)$$

Заметим, что правая часть этой формулы имеет смысл для любой локально суммируемой (т. е. суммируемой на каждом конечном сегменте $[0, \sigma]$) функции $A(x)$, так как $f(\lambda) \in Z \subset CK^2$ и, следовательно, $\int_0^\infty f(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda$ есть непрерывная и финитная функция. Легко проверить, что локальной суммируемости функции $A(x)$ достаточно для того, чтобы определеяемый правой частью формулы (2.1.4) функционал на пространстве Z был непрерывен, т. е. являлся обобщенной функцией. Это позволяет ввести следующее определение косинус-преобразования Фурье для всех локально суммируемых функций.

Определение 3. *Косинус-преобразованием Фурье локально суммируемой функции $A(x)$ называется обобщенная функция $C(A) \in Z'$, действующая в пространстве основных функций Z по формуле (2.1.4).*

Приведем без доказательства некоторые легко проверяемые свойства косинус-преобразований Фурье. При этом будем писать $R \sim B(x)$, если обобщенная функция $R \in Z'$ есть косинус-преобразование Фурье локально суммируемой функции $B(x)$.

1. Если последовательность локально суммируемых функций $A_n(x)$ сходится в среднем в каждом конечном интервале полуоси к функции $A(x)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} C(A_n) = C(A)$ в смысле сходимости обобщенных функций. В частности, всегда

$$C(A) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n A(x)\cos\lambda x dx,$$

где регулярные функции $\int_0^n A(x)\cos\lambda x\,dx$ сходятся к $C(A)$ в смысле сходимости обобщенных функций.

2. Если $C(A) \sim A(x)$, то

$$\cos\lambda a\, C(A) \sim \frac{1}{2}\{A(|x+a|) + A(|x-a|)\}.$$

3. Если $C(A) \sim A(x)$ и $\varphi(\lambda) = \int\limits_0^\infty g(\xi)\cos\lambda\xi d\xi$, где $g(\xi)$ — финитная суммируемая функция, то

$$\varphi(\lambda) C(A) \sim \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty g(\xi)[A(x+\xi) + A(|x-\xi|)]\, d\xi.$$

4. Если $C(A) \sim A(x)$, то

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2}, C(A)\right) = \int\limits_0^x (x-t)A(t)\,dt.$$

Обобщенная функция $R \in Z'$ называется позитивной, если $(f(\lambda), R) \geqslant 0$ на всех основных функциях $f(\lambda) \in Z$, удовлетворяющих неравенству $f(\sqrt{\mu}) \geqslant 0$ $(-\infty < \mu < \infty)$.

Теорема 2.1.1. *Каждой позитивной обобщенной функции $R \in Z'$ соответствует неубывающая функция $\rho(\mu)$ $(-\infty < \mu < \infty)$ такая, что*

$$(f(\lambda)g(\lambda), R) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{\mu})\, g(\sqrt{\mu})\, d\rho(\mu),$$

каковы бы ни были функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ из множества CK^2. Интеграл Стильтьеса, стоящий в правой части этой формулы, сходится абсолютно.

Доказательство этой теоремы основано на методе расширения позитивных функционалов, принадлежащем М. Риссу. Поэтому мы сначала изложим этот метод.

Рассмотрим произвольное линейное многообразие $\mathfrak{A}$ непрерывных вещественных функций $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, обладающее тем свойством, что для любого вещественного числа r в этом многообразии найдется неотрицательная функция $r(x)$, удовлетворяющая при всех $x \leqslant r$ неравенству $r(x) \geqslant 1$. Заданный на этом многообразии функционал R называется позитивным, если $R[f(x)] \geqslant 0$, какова бы ни была неотрицательная функция $f(x) \in \mathfrak{A}$. Назовем функцию $f(x) \in \mathfrak{A}$ мажорируемой, если существует такая неотрицательная функция $g(x) \in \mathfrak{A}$, что

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0.$$

Теорема (М. Рисс). *Пусть R — аддитивный, однородный и позитивный функционал, заданный на множестве $\mathfrak{A}$.*

Тогда существует такая неубывающая функция $\rho(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, *что на всех мажорируемых функциях*

$$R[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d\rho(t).$$

Доказательство. Занумеруем все рациональные вещественные числа $r_1, r_2, \ldots$ и введем функции

$$h(x; r_k) = \begin{cases} 1, & x \leqslant r_k, \\ 0, & x > r_k. \end{cases}$$

Обозначим через M и N множества всех тех функций из $\mathfrak{A}$, которые удовлетворяют неравенствам

$$f(x) \leqslant h(x; r_1) \leqslant g(x) \qquad (f(x) \in M, \quad g(x) \in N).$$

Множества M и N не пусты, так как функция $f(x) \equiv 0$ всегда принадлежит M, а множество N не пусто по условию. В силу позитивности функционала

$$0 \leqslant \sup_{f(x)\in M} R[f(x)] \leqslant \inf_{g(x)\in N} R[g(x)] < \infty.$$

Поэтому существует неотрицательное число γ_1, удовлетворяющее неравенству

$$\sup_{f(x)\in M} R[f(x)] \leqslant \gamma_1 \leqslant \inf_{g(x)\in N} R[g(x)].$$

Расширим функционал R на линейное многообразие $\mathfrak{A}_1$ всех функций вида $f(x) + \alpha h(x; r_1)$, где $f(x) \in \mathfrak{A}$ и α — произвольное вещественное число, по формуле

$$R[f(x) + \alpha h(x; r_1)] = R[f(x)] + \alpha\gamma_1.$$

Легко проверить, что определенный этой формулой функционал R тоже аддитивен, однороден и позитивен на всем множестве $\mathfrak{A}_1$.

Эту конструкцию можно, очевидно, повторить для множества $\mathfrak{A}_1$ и функции $h(x; r_2)$. В результате мы продолжим функционал на множество $\mathfrak{A}_2$ всех функций вида $f(x) + \alpha_1 h(x; r_1) + \alpha_2 h(x; r_2)$ ($f(x) \in \mathfrak{A}$, α_1 и α_2 — произвольные вещественные числа) и т. д. Продолжая таким образом, расширим функционал R на множество всех функций вида $f(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h(x; r_k)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, причем на этом множестве функционал R тоже будет аддитивен, однороден и позитивен.

Положим

$$\rho(t) = \sup_{r_k \leqslant t} R[h(x; r_k)]. \tag{2.1.5}$$

Если $r_k > r_{k'}$, то $h(x; r_k) \geqslant h(x; r_{k'}) \geqslant 0$ $(-\infty < x < \infty)$, откуда в силу позитивности функционала R следует, что функция $\rho(t)$ не убывает и в рациональных точках r_m совпадает со значением функционала R на $h(x; r_m)$:

$$\rho(r_m) = R[h(x; r_m)].$$

Пусть функция $f(x) \in \mathfrak{A}$ имеет мажоранту $g(x) \in \mathfrak{A}$, так что $g(x) \geqslant 0$ и

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0. \tag{2.1.6}$$

Возьмем произвольные целые положительные числа n, N и построим ступенчатую функцию

$$\varphi(x) = \sum_{k=-N+1}^{N} f\left(\frac{nk}{N}\right)\left[h\left(x; \frac{nk}{N}\right) - h\left(x; \frac{n(k-1)}{N}\right)\right]. \tag{2.1.7}$$

Эта функция равна нулю вне полуинтервала $(-n, n]$, а на полуинтервалах $\left(\frac{n(k-1)}{N}, \frac{nk}{N}\right]$ равна $f\left(\frac{nk}{N}\right)$ $(k = -N+1, -N+2, \ldots, 0, \ldots, N-1, N)$. Поэтому при $x \notin (-n, n]$

$$|f(x) - \varphi(x)| = |f(x)| \leqslant \delta_n g(x), \tag{2.1.8}$$

где

$$\delta_n = \sup_{x \notin (-n, n]} \frac{|f(x)|}{g(x)},$$

а при $x \in (-n, n]$

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant \omega\left(\frac{n}{N}\right) = \omega\left(\frac{n}{N}\right) h(x; n), \tag{2.1.9}$$

где

$$\omega(h) = \sup_{|x| \leqslant n} \sup_{|t| < h} |f(x+t) - f(x)|,$$

причем согласно (2.1.6) $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$ и в силу непрерывности функции $f(x)$ $\lim\limits_{h \to 0} \omega(h) = 0$. Из неравенств (2.1.8) и (2.1.9) следует, что при всех значениях x

$$-\omega\left(\frac{n}{N}\right) h(x; n) - \delta_n g(x) \leqslant f(x) - \varphi(x) \leqslant$$

$$\leqslant \omega\left(\frac{n}{N}\right) h(x; n) + \delta_n g(x),$$

откуда в силу позитивности функционала R вытекает неравенство

$$|R[f(x)] - R[\varphi(x)]| \leqslant \omega\left(\frac{n}{N}\right) R[h(x; n)] + \delta_n R[g(x)].$$

Согласно определениям (2.1.5) и (2.1.7) функций $\rho(t)$ и $\varphi(x)$

$$R[\varphi(x)] = \sum_{k=-N+1}^{N} f\left(\frac{nk}{N}\right)\left[\rho\left(\frac{nk}{N}\right) - \rho\left(\frac{n(k-1)}{N}\right)\right],$$

так что

$$\left|R[f(x)] - \sum_{k=-N+1}^{N} f\left(\frac{nk}{N}\right)\left[\rho\left(\frac{nk}{N}\right) - \rho\left(\frac{n(k-1)}{N}\right)\right]\right| \leqslant$$
$$\leqslant \omega\left(\frac{n}{N}\right) R[h(x; n)] + \delta_n R[g(x)].$$

Устремляя в этом неравенстве сначала N, а затем n к бесконечности, получаем

$$R[f(x)] - \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)\, d\rho(x) = 0,$$

т. е.

$$R[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\rho(x),$$

что и требовалось доказать.

Теперь мы можем найти вид позитивных обобщенных функций $R \in Z'$. Действительно, возьмем в качестве множества $\mathfrak{A}$ все вещественные функции переменной μ $(-\infty < \mu < < \infty)$ вида $f(\mu) = \hat{f}(\sqrt{\mu})$, где $\hat{f}(\lambda)$ — произвольная функция из Z, принимающая вещественные значения при вещественных и чисто мнимых значениях λ. Множество $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям, при которых была доказана теорема Рисса, так как функции $2\left(\frac{\sin \varepsilon\sqrt{\mu}}{\varepsilon\sqrt{\mu}}\right)^2$ принадлежат этому множеству и неравенство

$$2\left(\frac{\sin \varepsilon\sqrt{\mu}}{\varepsilon\sqrt{\mu}}\right)^2 \geqslant 1$$

выполняется для всех $\mu \leqslant r$, если только ε достаточно мало́. Позитивная обобщенная функция $R \in Z'$ индуцирует на этом множестве аддитивный, однородный и позитивный функционал $R[f(\mu)] = (\widehat{f}(\lambda), R)$, откуда согласно теореме Рисса следует существование такой неубывающей функции $\rho(\mu)$, что

$$(\widehat{f}(\lambda), R) = R[f(\mu)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)\, d\rho(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\sqrt{\mu})\, d\rho(\mu)$$

на всех мажорируемых функциях множества $\mathfrak{A}$.

Пусть $\widehat{f}(\lambda) \in Z$ и $\widehat{f}(\sqrt{\mu}) \geqslant 0$ $(-\infty < \mu < \infty)$. Тогда функция

$$\widehat{f}(\lambda)\left(\frac{\sin \lambda h}{\lambda h}\right)^8$$

тоже принадлежит Z, а функция

$$\widehat{f}(\sqrt{\mu})\left(\frac{\sin \sqrt{\mu} h}{\sqrt{\mu} h}\right)^8$$

принадлежит $\mathfrak{A}$ и имеет в этом множестве мажоранту

$$\widehat{f}(\sqrt{\mu})\left(\frac{\sin \sqrt{\mu} h}{\sqrt{\mu} h}\right)^8 (1+\mu^2).$$

Поэтому

$$\left(\widehat{f}(\lambda)\left(\frac{\sin \lambda h}{\lambda h}\right)^8, R\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\sqrt{\mu})\left(\frac{\sin \sqrt{\mu} h}{\sqrt{\mu} h}\right)^8 d\rho(\mu),$$

откуда при $h \to 0$, учитывая, что в смысле сходимости в пространстве Z $\lim\limits_{h\to\infty} \widehat{f}(\lambda)\left(\frac{\sin \lambda h}{\lambda h}\right)^8 = \widehat{f}(\lambda)$, получаем

$$(\widehat{f}(\lambda), R) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\sqrt{\mu})\, d\rho(\mu),$$

если $\widehat{f}(\lambda) \in Z$ и $\widehat{f}(\sqrt{\mu}) \geqslant 0$ $(-\infty < \mu < \infty)$.

Функцию $f(\lambda)\, g(\lambda)$, где $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ принадлежат CK^2 и принимают вещественные значения при вещественных и чисто мнимых значениях λ, можно представить в виде

$$f(\lambda)\, g(\lambda) = \frac{1}{4}\{[f(\lambda) + g(\lambda)]^2 - [f(\lambda) - g(\lambda)]^2\}.$$

Поэтому

$$(f(\lambda)g(\lambda), R) = \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[f(\sqrt{\mu}) + g(\sqrt{\mu})]^2\,d\rho(\mu) -$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[f(\sqrt{\mu}) - g(\sqrt{\mu})]^2\,d\rho(\mu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{\mu})\,g(\sqrt{\mu})\,d\rho(\mu),$$

и теорема доказана для функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$, принимающих вещественные значения при вещественных и чисто мнимых значениях λ. Общий случай легко сводится к рассмотренному.

Для проверки позитивности обобщенных функций $R \in Z'$ полезной оказывается следующая лемма.

Лемма 2.1.1. *Для того чтобы обобщенная функция $R \in Z'$ была позитивной, необходимо и достаточно, чтобы неравенство $(f(\lambda)\overline{f(\bar{\lambda})}, R) \geqslant 0$ выполнялось при всех $f(\lambda) \in CK^2$.*

Доказательство. Пусть $g(\lambda) \in Z$ и $g(\sqrt{\mu}) \geqslant 0$ при всех $\mu \in (-\infty, \infty)$. Тогда существуют такие константы C и σ, что

$$|g(\lambda)| \leqslant C\exp\{\sigma|\operatorname{Im}\lambda|\}. \tag{2.1.10}$$

Построим вспомогательную функцию

$$g_\varepsilon(\lambda) = g(\lambda)\left(\frac{\sin\varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda}\right)^8 + \left(\frac{\varepsilon\sin\sigma_1\lambda}{\lambda}\right)^2,$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно, а $\sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma + 4\varepsilon$. Непосредственная проверка показывает, что $g_\varepsilon(0) > 0$, $g_\varepsilon(\sqrt{\mu}) \geqslant 0$ при всех $\mu \in (-\infty, \infty)$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(\lambda) = g(\lambda)$ в смысле сходимости в пространстве Z. Поэтому

$$(g(\lambda), R) = \lim_{\varepsilon\to 0}(g_\varepsilon(\lambda), R)$$

и для доказательства леммы достаточно убедиться, что при любом $\varepsilon > 0$ функцию $g_\varepsilon(\lambda)$ можно представить в виде произведения $f_\varepsilon(\lambda)\overline{f_\varepsilon(\bar{\lambda})}$, сомножители которого принадлежат CK^2. В силу неравенства (2.1.10)

$$\left|g(\lambda)\left(\frac{\sin\varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda}\right)^8\right| \leqslant C|\varepsilon\lambda|^{-8}\exp(2\sigma_1|\operatorname{Im}\lambda|), \tag{2.1.11}$$

откуда, используя очевидное равенство

$$\left|\frac{\varepsilon \sin \sigma_1 \lambda}{\lambda}\right|^2 = \frac{\varepsilon^2}{4\,|\,\lambda\,|^2}\, e^{2\sigma_1 |\operatorname{Im}\lambda|} \left| 1 - e^{2i\sigma_1 |\operatorname{Re}\lambda| - 2\sigma_1 |\operatorname{Im}\lambda|}\right|^2 \qquad (2.1.12)$$

и теорему Руше, устанавливаем, что при достаточно большом целом n_1 в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant \frac{\pi}{\sigma_1}\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)$ функция $g_\varepsilon(\lambda)$ имеет ровно $4n_1$ нулей, а при целых $n > n_1$ в каждой полосе $\left|\operatorname{Re}\lambda - \frac{\pi n}{\sigma_1}\right| \leqslant \frac{\pi}{2\sigma_1}$ ровно два нуля и оба они отстоят от точки $\frac{\pi n}{\sigma_1}$ не более чем на An^{-3}, где константа A не зависит от n. Так как функция $g_\varepsilon(\lambda)$ четна и неотрицательна при вещественных и чисто мнимых значениях λ, то отсюда следует, что ее нули можно расположить в такой последовательности:

$$\alpha_1, \bar{\alpha}_1, -\alpha_1, -\bar{\alpha}_1; \quad \alpha_2, \bar{\alpha}_2, -\alpha_2, -\bar{\alpha}_2; \ \ldots,$$

причем все $\alpha_n \neq 0$ и

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{\sigma_1} + \delta_n, \quad \sup_n |\,n^3 \delta_n\,| = A < \infty. \qquad (2.1.13)$$

Построим функции

$$f_\varepsilon(\lambda) = \sqrt{g_\varepsilon(0)} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_k^2}\right), \quad \overline{f_\varepsilon(\bar{\lambda})} = \sqrt{g_\varepsilon(0)} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\bar{\alpha}_k^2}\right)$$

и покажем, что

$$g_\varepsilon(\lambda) = f_\varepsilon(\lambda)\,\overline{f_\varepsilon(\bar{\lambda})}. \qquad (2.1.14)$$

Из определения функций $f_\varepsilon(\lambda)$ и $\overline{f_\varepsilon(\bar{\lambda})}$ следует, что функция

$$\frac{f_\varepsilon(\lambda)\,\overline{f_\varepsilon(\bar{\lambda})}}{g_\varepsilon(\lambda)} \qquad (2.1.15)$$

целая и равна единице при $\lambda = 0$. Поэтому для доказательства тождества (2.1.14) в силу теоремы Лиувилля достаточно установить наличие последовательности неограниченно расширяющихся замкнутых контуров, на которых модуль функции (2.1.15) остается ограниченным. В качестве такой последовательности выберем границы L_n квадратов $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant \frac{\pi}{\sigma_1}\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \frac{\pi}{\sigma_1}\left(n + \frac{1}{2}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Согласно (2.1.11) и (2.1.12) на контурах L_n при достаточно больших n будет выполняться неравенство

$$|g_\varepsilon(\lambda)| > \frac{\varepsilon^2}{8|\lambda|^2}\exp\{2\sigma_1|\operatorname{Im}\lambda|\}. \qquad (2.1.16)$$

С другой стороны, если $\lambda \in L_n$, то

$$\left|\lambda^2 - \frac{k^2\pi^2}{\sigma_1^2}\right| \geqslant \frac{\pi^2}{2\sigma_1^2}(|n|+|k|) \geqslant \frac{\pi^2|k|}{2\sigma_1^2}$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{f_\varepsilon(\lambda)\lambda}{\sin\sigma_1\lambda}\right| = \sqrt{g_\varepsilon(0)}\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1-\dfrac{\lambda^2}{\alpha_k^2}}{1-\dfrac{\lambda^2\sigma_1^2}{k^2\pi^2}}\right| =$$

$$= \sqrt{g_\varepsilon(0)}\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{k\pi}{\alpha_k\sigma_1}\right|^2\left|1+\frac{\sigma_1^2\alpha_k^2-k^2\pi^2}{k^2\pi^2-\sigma_1^2\lambda^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{g_\varepsilon(0)}\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{k\pi}{\alpha_k\sigma_1}\right|^2\left(1+\frac{2|\delta_k|\sigma_1(2k\pi+\sigma_1|\delta_k|)}{\pi^2 k}\right) = M,$$

где согласно (2.1.13) константа $M < \infty$. Поэтому на контурах L_n выполняются неравенства

$$|f_\varepsilon(\lambda)| \leqslant M|\lambda|^{-1}|\sin\sigma_1\lambda| \leqslant M|\lambda|^{-1}\exp\{\sigma_1|\operatorname{Im}\lambda|\}, \qquad (2.1.17)$$

$$|\overline{f_\varepsilon(\bar\lambda)}| \leqslant M|\lambda|^{-1}|\overline{\sin\sigma_1\bar\lambda}| \leqslant M|\lambda|^{-1}\exp\{\sigma_1|\operatorname{Im}\lambda|\}, \qquad (2.1.18)$$

из которых согласно (2.1.16) следует, что при всех достаточно больших значениях n

$$\max_{\lambda\in L_n}\left|\frac{f_\varepsilon(\lambda)\overline{f_\varepsilon(\bar\lambda)}}{g_\varepsilon(\lambda)}\right| \leqslant 8M\varepsilon^{-2}.$$

Тем самым тождество (2.1.14) установлено, и для доказательства достаточности условий леммы остается убедиться, что функции $f_\varepsilon(\lambda)$, $\overline{f_\varepsilon(\bar\lambda)}$ принадлежат CK^2. Рассматривая тождество (2.1.14) при вещественных значениях λ, убеждаемся, что функции $f_\varepsilon(\lambda)$, $\overline{f_\varepsilon(\bar\lambda)}$ квадратично суммируемы на вещественной оси. А так как это целые четные функции, удовлетворяющие неравенствам (2.1.17), (2.1.18), то они принадлежат множеству $CK^2(\sigma_1) \subset CK^2$, что и требовалось доказать. Необходимость условий леммы очевидна.

Замечание. Нетрудно установить существование $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(\lambda) = f(\lambda) \in CK^2$. Таким образом, любая функция $g(\lambda) \in Z$, удовлетворяющая условию $g(\sqrt{\mu}) \geqslant 0$ $(-\infty < \mu < \infty)$, представима в виде $g(\lambda) = f(\lambda)\overline{f(\bar{\lambda})}$, где $f(\lambda) \in CK^2$.

ЗАДАЧИ

1. Пусть обобщенная функция $R \in Z'$ принимает неотрицательные значения $(g(\lambda), R) \geqslant 0$ на всех основных функциях $g(\lambda) \in Z$, удовлетворяющих условию

$$g(\lambda) \geqslant 0 \qquad (-\infty < \lambda < \infty). \tag{2.1.19}$$

Доказать, что тогда существует такая неубывающая функция $\rho(\mu)$, что

$$(f_1(\lambda) f_2(\lambda), R) = \int\limits_0^\infty f_1(\sqrt{\mu}) f_2(\sqrt{\mu})\, d\rho(\mu),$$

где $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ — произвольные функции из CK^2.

2. Доказать, что любая функция $g(\lambda) \in Z$, удовлетворяющая условию (2.1.19), представима в виде

$$g(\lambda) = g_1(\lambda) + \lambda^2 g_2(\lambda),$$

где $g_i(\lambda) \in Z$ и $g_i(\sqrt{\mu}) \geqslant 0$ при всех $\mu \in (-\infty, \infty)$ $(i = 1, 2)$.

3. Доказать, что обобщенная функция $R \in Z'$ удовлетворяет условиям задачи 1, если неравенства

$$(f(\lambda)\overline{f(\bar{\lambda})}, R) \geqslant 0, \quad (\lambda^2 f(\lambda)\overline{f(\bar{\lambda})}, R) \geqslant 0$$

выполняются на всех функциях $f(\lambda)$, принадлежащих множеству CK^2 вместе с $\lambda^2 f(\lambda)$.

4. Обозначим через OH пространство ограниченных линейных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а через $OH[0, \infty)$ — множество непрерывных, финитных операторнозначных функций $f(x)$ ($f(x) \in OH$ при всех $x \in [0, \infty)$). Для косинус- и синус-преобразований Фурье функций $f(x) \in OH[0, \infty)$, определяемых равенствами

$$C(\lambda, f) = \int\limits_0^\infty f(x)\cos\lambda x dx, \qquad S(\lambda, f) = \int\limits_0^\infty f(x)\sin\lambda x dx,$$

справедливы формулы обращения и равенство Парсеваля.

Определим ω_0 и $\tilde{\omega}_0$ преобразования Фурье, положив

$$\omega_0(\lambda, f; P) = \int\limits_0^\infty f(x)\,\omega_0(\lambda, x; P)\, dx,$$

$$\tilde{\omega}_0(\lambda, f; P) = \int\limits_0^\infty \tilde{\omega}_0(\lambda, x; P) f(x)\, dx,$$

где $\omega_0(\lambda, x; P) = \cos\lambda x\, P - \sin\lambda x\, BP$ и $\tilde{\omega}_0(\lambda, x; P) = P\cos\lambda x + BP\sin\lambda x$ (см. задачи 6 и 9 § 2 гл. 1). Доказать справедливость равенства Парсеваля

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\lambda, f; P)\, \tilde{\omega}_0(\lambda, g; P)\, d\lambda$$

и формул обращения

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\lambda, f; P)\, \tilde{\omega}_0(\lambda, x; P) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\lambda, x; P)\, \tilde{\omega}_0(\lambda, f; P)\, d\lambda.$$

Приведем основные обозначения и определения, используемые при рассмотрении операторных краевых задач.

$K^2(-\infty, \infty)$ и $\tilde{K}^2(-\infty, \infty)$ — множества финитных функций с суммируемым квадратом и их преобразований Фурье.

$Z(-\infty, \infty)$ — основное пространство, состоящее из суммируемых на вещественной оси функций экспоненциального типа $f(\lambda)$ со следующим определением сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\lambda) = f(\lambda)$, если типы σ_n функций $f_n(\lambda)$ ограничены в совокупности и

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(\lambda) - f(\lambda)|\, d\lambda = 0.$$

Множество обобщенных функций над $Z(-\infty, \infty)$ обозначается через $Z'(-\infty, \infty)$, а множество обобщенных операторнозначных функций, являющихся по определению однородными, аддитивными и непрерывными отображениями $(f(\lambda), R)$ основного пространства $Z(-\infty, \infty)$ в OH, обозначается через $OHZ'(-\infty, \infty)$. Аналогично определяется множество OHZ'.

Косинус- и синус-преобразования Фурье произвольной операторнозначной непрерывной функции $L(x)$ принадлежат $OHZ'(-\infty, \infty)$ и определяются равенствами

$$(f(\lambda), C(L)) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [L(x) + L(-x)]\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda dx,$$

$$(f(\lambda), S(L)) = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} [L(x) - L(-x)]\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda dx.$$

Обобщенная операторнозначная функция $C(L)$ принадлежит также множеству OHZ' и действует по формуле

$$(C(\lambda, f), C(L)) = \int_0^\infty [L(x) + L(-x)]\int_0^\infty C(\lambda, f) \cos\lambda x d\lambda dx.$$

Часто бывает удобной координатная форма записи. Пусть $e_1, e_2, \ldots$ ... — ортонормированный базис пространства H. Матрица оператора A в этом базисе обозначается через $[A_{ij}]$, а матрица обобщенной операторнозначной функции $R \in OHZ'$ ($R \in OHZ'(-\infty, \infty)$) — через $[R_{ij}]$. По определению она состоит из обобщенных функций $R_{ij} \in Z'$ ($R_{ij} \in Z'(-\infty, \infty)$), действующих по формулам

$$(f(\lambda), R_{ij}) = (f(\lambda), R)_{ij}.$$

(A, R) — оператор с матрицей $[C_{ij}]$, где

$$C_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} (A_{i\alpha}, R_{\alpha j}),$$

а (A, R, B) — оператор с матрицей $[d_{ij}]$, где

$$d_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} (A_{i\alpha} B_{\beta j}, R_{\alpha\beta}).$$

Предполагается, что в первом случае $A_{i\alpha}$, а во втором — $A_{i\alpha} B_{\beta j}$ принадлежат тому основному пространству, над которым определена обобщенная функция R.

5. Обобщенная операторнозначная функция $R \in OHZ'(-\infty, \infty)$ называется позитивной, если из неотрицательности функции $f(\lambda) \in Z(-\infty, \infty)$ при всех вещественных значениях λ следует неотрицательность оператора $(f(\lambda), R)$. Доказать, что неотрицательным функциям $R \in OHZ'(-\infty, \infty)$ соответствуют операторные меры $\rho(\lambda)$ такие, что

$$(f(\lambda) g(\lambda), R) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) g(\lambda)\, d\rho(\lambda)$$

для всех $f(\lambda), g(\lambda) \in \tilde{K}^2(-\infty, \infty)$. Здесь $\rho(\lambda) \in OH$ при каждом $\lambda \in (-\infty, \infty)$ и операторы $\rho(\lambda') - \rho(\lambda)$ неотрицательны, если $\lambda' > \lambda$.

Указание. Занумеровав все рациональные числа $r_1, r_2, \ldots$, положим

$$h(\lambda, r_k) = \begin{cases} 1 - (1 + e^{\lambda})^{-1}, & \lambda \leqslant r_k, \\ 0, & \lambda > r_k. \end{cases}$$

Важной деталью доказательства является следующее легко проверяемое утверждение: если функция $\psi(\lambda)$ непрерывна в точке r_k и

$$\frac{c_1}{1+\lambda^2} > \psi(\lambda) > h(\lambda, r_k) + \frac{c_2}{1+\lambda^2} \qquad (c_1, c_2 > 0),$$

то найдется функция $f(\lambda) \in Z(-\infty, \infty)$ такая, что

$$\psi(\lambda) > f(\lambda) > h(\lambda, r_k).$$

Пусть M и N — множества всех тех функций из $Z(-\infty, \infty)$, которые удовлетворяют неравенствам

$$f(\lambda) \leqslant h(\lambda_1, r_1) \leqslant g(\lambda) \qquad (f(\lambda) \in M;\ g(\lambda) \in N),$$

$a_1, a_2, \ldots$ — счетное всюду плотное множество единичной сферы пространства H,

$$\gamma_k = \inf_{g \in N} ((g(\lambda), R)\, a_k, a_k)$$

и $g_{k,m} = g_{k,m}(\lambda) \in N$ — функции, на которых выполняются неравенства

$$\gamma_k > ((g_{k,m}, R)\, a_k, a_k) - \frac{1}{2m}.$$

Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ на функциях

$$g'_{k,m} = (g_{k,m}(\lambda) + \varepsilon^2) \frac{\operatorname{ch} 1 - \cos \varepsilon\lambda}{(1 + \varepsilon^2\lambda^2)(\operatorname{ch} 1 - 1)}$$

будут выполняться неравенства

$$\gamma_k > ((g'_{k,m}, R)\, a_k, a_k) - \frac{1}{m}.$$

Согласно сформулированному выше утверждению найдется такая функция $f_N(\lambda) \in Z(-\infty, \infty)$, что

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant n} g'_{k,N}(\lambda) > f_N(\lambda) > h(\lambda, r_1)$$

и, следовательно,

$$\gamma_k > ((f_N, R)\, a_k, a_k) - \frac{1}{N} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Поскольку операторы (f_N, R) ограничены, а множество a_k всюду плотно на единичной сфере, то последовательность квадратичных форм $((f_N, R)\, a, a)$ при $N \to \infty$ сходится к неотрицательной форме, порождаемой некоторым неотрицательным оператором γ, причем

$$((g(\lambda), R)\, a, a) \geqslant (\gamma a, a) \geqslant ((f(\lambda), R)\, a, a) \qquad (f \in M,\ g \in N).$$

Это позволяет расширить обобщенную операторнозначную функцию R с сохранением позитивности на множество функций вида $f(\lambda) + ch(\lambda, r_1)$, положив

$$(f(\lambda) + ch(\lambda, r_1), R) = (f(\lambda), R) + c\gamma.$$

Дальше доказательство проводится так же, как и в скалярном случае.

6. Пусть $R \in OHZ'$ такова, что операторы $(f(\lambda), R)$ неотрицательны, если функция $f(\lambda) \in Z$ неотрицательна при всех вещественных значениях λ. Тогда существует операторная мера $\rho(\mu)$ такая, что

$$(f(\lambda)\, g(\lambda), R) = \int_0^\infty f(\sqrt{\mu})\, g(\sqrt{\mu})\, d\rho(\mu),$$

где $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ — произвольные функции из CK^2, $\rho(\mu) \in OH$ при всех $\mu \in [0, \infty)$ и операторы $\rho(\mu') - \rho(\mu)$ неотрицательны, если $\mu' > \mu$.

Указание. См. предыдущую задачу.

§ 2. ОБОБЩЕННАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Рассмотрим краевую задачу, порождаемую на полуоси $0 \leqslant x < \infty$ дифференциальным уравнением

$$y''(x) - q(x)\, y(x) + \lambda^2 y(x) = 0 \qquad (2.2.1)$$

и граничным условием

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{2.2.2}$$

где $q(x)$ — произвольная непрерывная комплекснозначная функция, а h — произвольное комплексное число. Поскольку всюду в этом параграфе число h предполагается одним и тем же, в используемых обозначениях § 2 гл. 1 будем для краткости опускать его. Так, вместо $\omega(\lambda, x; h)$ (решение уравнения (2.2.1) при начальных данных $\omega(\lambda, 0; h) = 1$, $\omega'(\lambda, 0; h) = h$) будем писать $\omega(\lambda, x)$, вместо $K(x, t; h)$ и $L(x, t; h)$ — соответственно $K(x, t)$ и $L(x, t)$ и т. д.

Для всех функций $f(x) \in K^2$ косинус-преобразование Фурье $C(\lambda, f)$ и ω-преобразование Фурье $\omega(\lambda, f)$ определяются формулами

$$C(\lambda, f) = \int_0^\infty f(x) \cos \lambda x dx, \quad \omega(\lambda, f) = \int_0^\infty f(x)\, \omega(\lambda, x)\, dx.$$

Из существования операторов преобразования следует, что

$$\int_0^\infty f(x)\, \omega(\lambda, x)\, dx = \int_0^\infty \left[f(x) + \int_x^\infty f(\xi) K(\xi, x)\, d\xi \right] \cos \lambda x dx, \tag{2.2.3}$$

$$\int_0^\infty g(x) \cos \lambda x dx = \int_0^\infty \left[g(x) + \int_x^\infty g(\xi) L(\xi, x)\, d\xi \right] \omega(\lambda, x)\, dx, \tag{2.2.4}$$

где все интегралы фактически берутся по конечным интервалам, так как функции $f(x)$ и $g(x)$ финитны. Поэтому между ω-преобразованиями Фурье и косинус-преобразованиями Фурье функции $f(x)$ и $g(x)$ из $K^2(\sigma)$ справедливы следующие зависимости:

$$\omega(\lambda, f) = C(\lambda, \hat{f}), \quad C(\lambda, g) = \omega(\lambda, \check{g}),$$

где функции $\hat{f}(x)$ и $\check{g}(x)$ тоже принадлежат $K^2(\sigma)$ и определяются равенствами

$$\hat{f}(x) = f(x) + \int_x^\infty f(\xi) K(\xi, x)\, d\xi,$$

$$\check{g}(x) = g(x) + \int_x^\infty g(\xi) L(\xi, x)\, d\xi.$$

Следовательно, множество $CK^2(\sigma)$ совпадает как с множеством косинус-преобразований Фурье всех функций из $K^2(\sigma)$, так и с множеством ω-преобразований Фурье всех функций из $K^2(\sigma)$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные функции из K^2, а $\omega(\lambda, f)$ и $\omega(\lambda, g)$ — их ω-преобразования Фурье. Сопоставим каждой паре функций $\omega(\lambda, f)$, $\omega(\lambda, g)$ число

$$R[\omega(\lambda, f), \omega(\lambda, g)] = \int_0^\infty f(x) g(x)\, dx.$$

Эта формула определяет некоторый функционал, зависящий от двух «аргументов» $\omega(\lambda, f)$, $\omega(\lambda, g)$, каждый из которых пробегает все множество CK^2. Однако на самом деле этот функционал зависит только от произведения $\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, g)$. Более того, мы докажем сейчас, что существует такая обобщенная функция $R \in Z'$, что

$$(\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, g), R) = R[\omega(\lambda, f), \omega(\lambda, g)] = \int_0^\infty f(x) g(x)\, dx.$$

Наметим сначала общую схему доказательства.

Допустим, что нам удалось построить такие суммируемые на полуоси $0 \leqslant \lambda < \infty$ функции $R_n^\sigma(\lambda)$, что последовательность

$$U_n^\sigma(x, y) = \int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\, \omega(\lambda, x)\, \omega(\lambda, y)\, d\lambda$$

при $n \to \infty$ сходится в области $0 < x < \sigma$, $0 < y < \sigma$ к δ-функции Дирака $\delta(x - y)$. Тогда, умножая обе части этого равенства на произвольные функции $f(x)$ и $g(y)$ из множества $K^2(\sigma)$ и интегрируя по обеим переменным, получаем

$$\int_0^\sigma \int_0^\sigma U_n^\sigma(x, y) f(x) g(y)\, dx dy = \int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\, \omega(\lambda, f)\, \omega(\lambda, g)\, d\lambda,$$

откуда при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\, \omega(\lambda, f)\, \omega(\lambda, g)\, d\lambda =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\sigma \int_0^\sigma U_n^\sigma(x, y) f(x) g(y)\, dx dy =$$

$$= \int_0^\sigma \int_0^\sigma \delta(x-y) f(x) g(y)\,dx dy = \int_0^\infty f(x) g(x)\,dx,$$

т. е.

$$R[\omega(\lambda, f),\ \omega(\lambda, g)] = \int_0^\infty f(x) g(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, g)\,d\lambda.$$

Функции $R_n^\sigma(\lambda)$ являются, очевидно, регулярными обобщенными функциями из Z', и если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^\sigma(\lambda)$ существует в смысле сходимости обобщенных функций, то, обозначая его через R^σ, получаем

$$(\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, g),\ R^\sigma) = \int_0^\infty f(x) g(x)\,dx,$$

каковы бы ни были функции $f(x)$ и $g(x)$ из множества $K^2(\sigma)$. Если, наконец, существует $\lim\limits_{\sigma\to\infty} R^\sigma = R \in Z'$, то уже для всех функций $f(x)$ и $g(x)$ из множества K^2

$$(\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, g),\ R) = \int_0^\infty f(x) g(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Покажем теперь, как можно построить нужную нам последовательность $R_n^\sigma(\lambda)$. Заметим прежде всего, что нам необходимо, в частности, чтобы выполнялось равенство

$$U_n^\sigma(x, 0) = \int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda, x)\,d\lambda = \delta_n(x) \to \delta(x) \quad (0 < x < \sigma).$$

Применяя к этому равенству оператор преобразования, переводящий $\omega(\lambda, x)$ в $\cos \lambda x$, получаем

$$\int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda) \cos \lambda x\,d\lambda = \delta_n(x) + \int_0^x L(x, t)\,\delta_n(t)\,dt \quad (0 < x < \sigma),$$

откуда следует, что функция $\frac{\pi}{2} R_n^\sigma(\lambda)$ должна быть косинус-преобразованием Фурье функции, совпадающей на интервале $0 < x < \sigma$ с функцией

$$\delta_n(x) + \int_0^x L(x, t)\,\delta_n(t)\,dt,$$

где $\delta_n(x) \to \delta(x)$ при $n \to \infty$. Поэтому мы поступим следующим образом: выберем две достаточно гладкие функции $\delta_n(x)$ и $\gamma_\sigma(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^\infty \delta_n(t)\,dt = 1,$$

$\delta_n(x) = 0$ при $x = 0$ и $x \geqslant \frac{1}{n}$, $\delta_n(x) \geqslant 0$ при $0 < x < \frac{1}{n}$; $\gamma_\sigma(x) = 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 2\sigma$, $\gamma_\sigma(x) = 0$ при $x \geqslant 2\sigma + 1$, и положим

$$\frac{\pi}{2} R_n^\sigma(\lambda) = \int_0^\infty \left[\delta_n(x) + \int_0^x L(x, t)\,\delta_n(t)\,dt\right] \gamma_\sigma(x) \cos\lambda x\,dx. \tag{2.2.5}$$

Так как функция

$$\left[\delta_n(x) + \int_0^x L(x, t)\,\delta_n(t)\,dt\right] \gamma_\sigma(x)$$

финитна и непрерывно дифференцируема, то функция $R_n^\sigma(\lambda)$ ограничена и суммируема на полуоси $0 \leqslant \lambda < \infty$. Поэтому абсолютно сходится интеграл

$$\int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda) \cos\lambda x\,d\lambda = \left[\delta_n(x) + \int_0^x L(x, t)\,\delta_n(t)\,dt\right] \gamma_\sigma(x).$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор преобразования, переводящий $\cos\lambda x$ в $\omega(\lambda, x)$, и замечая, что $\gamma_\sigma(x) = 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 2\sigma$, получаем

$$\int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda, x)\,d\lambda = \delta_n(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\sigma).$$

Пусть теперь

$$U_n^\sigma(x, y) = \int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda, x)\,\omega(\lambda, y)\,d\lambda. \tag{2.2.6}$$

Так как функции $\int_0^N R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda, x)\,\omega(\lambda, y)\,d\lambda$ дважды непрерывно дифференцируемы, удовлетворяют уравнению

$$v''_{xx} - q(x)\,v = v''_{yy} - q(y)\,v$$

и начальным данным

$$v(x, 0) = \int_0^N R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda, x)\,d\lambda = \delta_n^N(x),$$

$$v_y'(x, 0) = h\int_0^N R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda, x)\,d\lambda = h\delta_n^N(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\sigma),$$

причем $\lim\limits_{N\to\infty} \delta_n^N(x) = \delta_n(x)$, то согласно формуле Римана (1.1.7) при $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \sigma$

$$\int_0^N R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda, x)\,\omega(\lambda, y)\,d\lambda =$$

$$= \frac{\delta_n^N(x+y) + \delta_n^N(x-y)}{2} + \int_{x-y}^{x+y} W(x, y, t)\,\delta_n^N(t)\,dt,$$

где $W(x, y, t)$ — некоторая непрерывная функция. Отсюда при $N \to \infty$ получаем

$$U_n^\sigma(x, y) =$$

$$= \frac{1}{2}[\delta_n(x+y) + \delta_n(x-y)] + \int_{x-y}^{x+y} W(x, y, t)\,\delta_n(t)\,dt,$$

если $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \sigma$. Из определения (2.2.6) функции $u_n^\sigma(x, y)$ следует, что $u_n^\sigma(x, y) = u_n^\sigma(y, x)$. Поэтому во всей области $0 \leqslant x \leqslant \sigma$, $0 \leqslant y \leqslant \sigma$

$$U_n^\sigma(x, y) = \frac{1}{2}[\delta_n(x+y) + \delta_n(|x-y|)] + \theta_n(x, y),$$

где симметричная относительно переменных x, y функция $\theta_n(x, y)$ определена при $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \sigma$ равенством

$$\theta_n(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} W(x, y, t)\,\delta_n(t)\,dt.$$

Функция $W(x, y, t)$ ограничена в каждой конечной области. Следовательно, существует такая зависящая только от σ константа $C(\sigma)$, что

$$|W(x, y, t)| \leqslant C(\sigma) \qquad (0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \sigma, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\sigma),$$

$$|\theta_n(x, y)| \leqslant C(\sigma)\int_0^\infty \delta_n(t)\,dt = C(\sigma) \qquad (0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 2\sigma).$$

Кроме того, так как $\delta_n(t) = 0$ при $t > \frac{1}{n}$, то $\theta_n(x, y) = 0$ при $|x - y| > \frac{1}{n}$. Из этих оценок следует, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат $K^2(\sigma)$, то

$$\int_0^\infty \int_0^\infty U_n^\sigma(x, y) f(x) g(y)\, dxdy =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{\frac{1}{2}[\delta_n(x+y) + \delta_n(|x-y|)] + \theta_n(x, y)\right\} f(x) g(y)\, dxdy,$$

причем

$$\left|\int_0^\infty \int_0^\infty \theta_n(x, y) f(x) g(y)\, dxdy\right| \leqslant C(\sigma) \iint_{D_n} |f(x) g(y)|\, dxdy,$$

где область D_n определяется неравенствами

$$|x - y| \leqslant \frac{1}{n}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \sigma, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sigma.$$

Так как мера области D_n стремится к нулю при $n \to \infty$ а функция $|f(x) g(y)|$ суммируема, то

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_0^\infty \int_0^\infty \theta_n(x, y) f(x) g(y)\, dxdy\right| = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\, \omega(\lambda, f)\, \omega(\lambda, g)\, d\lambda =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \int_0^\infty U_n^\sigma(x, y) f(x) g(y)\, dxdy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{2}[\delta_n(x+y) + \delta_n(|x-y|)] f(x) g(y)\, dxdy =$$

$$= \int_0^\infty f(x) g(x)\, dx,$$

т. е.

$$\int_0^\infty f(x) g(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\, \omega(\lambda, f)\, \omega(\lambda, g)\, d\lambda, \quad (2.2.$$

каковы бы ни были функции $f(x)$ и $g(x)$ из $K^2(\sigma)$.

Из определения (2.2.5) функции $R_n^\sigma(\lambda)$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} R_n^\sigma(\lambda) = \frac{2}{\pi}(1 + C(\lambda, \gamma_\sigma L)) = R^\sigma,$$

где $C(\lambda, \gamma_\sigma L)$ есть косинус-преобразование Фурье функции $\gamma_\sigma(x)\, L(x, 0)$. Так как $\gamma_\sigma(x)\, L(x, 0)$ при $\sigma \to \infty$ стремится к $L(x, 0)$ равномерно в каждом конечном интервале, то согласно свойству 1 преобразований Фурье (см. § 1) $C(\lambda, \gamma_\sigma L)$ при $\sigma \to \infty$ стремится в смысле сходимости обобщенных функций к косинус-преобразованию Фурье $C(L)$ функции $L(x, 0)$. Итак,

$$\lim_{\sigma\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty} R_n^\sigma(\lambda)\right\} = \frac{2}{\pi}(1 + C(L)) = R \in Z',$$

где оба предела существуют в смысле сходимости обобщенных функций. Отсюда согласно формуле (2.2.7) следует, что

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = (\omega(\lambda, f)\, \omega(\lambda, g),\ R)$$

уже для всех функций $f(x)$ и $g(x)$ из множества K^2.

Таким образом, мы доказали следующую основную теорему.

Теорема 2.2.1. *Каждой краевой задаче (2.2.1), (2.2.2) соответствует обобщенная функция $R \in Z'$ такая, что*

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = (\omega(\lambda, f)\, \omega(\lambda, g),\ R), \tag{2.2.8}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные финитные функции из $L^2(0, \infty)$, а $\omega(\lambda, f)$ и $\omega(\lambda, g)$ — их ω-преобразования Фурье.

Функция R связана с ядром $L(x, t)$ оператора преобразования, переводящего $\omega(\lambda, x)$ в $\cos \lambda x$, формулой

$$R = \frac{2}{\pi}(1 + C(L)), \tag{2.2.9}$$

где $C(L)$ — косинус-преобразование Фурье функции $L(x, 0)$.

Равенство (2.2.8) является аналогом равенства Парсеваля. Поэтому порождающую его функцию $R \in Z'$ будем называть обобщенной спектральной функцией краевой задачи (2.2.1), (2.2.2).

Покажем теперь, как из этой теоремы выводится аналог формулы разложения по собственным функциям краевой задачи (2.2.1), (2.2.2). Согласно (2.2.8)

$$\frac{1}{\delta}\int_{x}^{x+\delta} f(t)\,dt = \left(\omega(\lambda, f)\frac{1}{\delta}\int_{x}^{x+\delta}\omega(\lambda, t)\,dt,\ R\right), \qquad (2.2.10)$$

какова бы ни была функция $f(x) \in K^2$. Если ω-преобразование Фурье $\omega(\lambda, f)$ функции $f(x)$ принадлежит пространству Z (т. е. суммируемо на вещественной оси), то при $\delta \to 0$ произведение $\omega(\lambda, f)\frac{1}{\delta}\int_{x}^{x+\delta}\omega(\lambda, t)\,dt$ сходится в пространстве Z к функции $\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, x)$. Поэтому

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\omega(\lambda, f)\frac{1}{\delta}\int_{x}^{x+\delta}\omega(\lambda, t)\,dt,\ R\right) = (\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, x),\ R). \qquad (2.2.11)$$

С другой стороны, согласно (2.2.3) $\omega(\lambda, f)$ есть косинус-преобразование Фурье функции $f(x) + \int_{x}^{\infty} f(\xi)K(\xi, x)\,d\xi$, так что

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\omega(\lambda, f)\cos\lambda x\,d\lambda = f(x) + \int_{x}^{\infty} f(\xi)K(\xi, x)\,d\xi.$$

Из этого равенства и суммируемости на вещественной оси функции $\omega(\lambda, f)$ следует, что функция $f(x) + \int_{x}^{\infty} f(\xi)K(\xi, x)\,d\xi$, а вместе с ней и функция $f(x)$ — непрерывны. Поэтому

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_{x}^{x+\delta} f(t)\,dt = f(x),$$

откуда согласно (2.2.10) и (2.2.11) следует, что

$$f(x) = (\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, x),\ R). \qquad (2.2.12)$$

Таким образом, из теоремы 2.2.1 вытекает такое следствие:

формула (2.2.12) справедлива для всех функций $f(x) \in K^2$, у которых ω-преобразования Фурье $\omega(\lambda, f)$ принадлежат пространству Z (т. е. суммируемы на вещественной оси).

Наиболее важной является хорошо изученная краевая задача (2.2.1), (2.2.2) с вещественной функцией $q(x)$ и вещественным значением h. С точки зрения теории операторов, действующих в гильбертовом пространстве, это случай, когда краевая задача порождается симметрическим оператором, допускающим самосопряженные расширения (возможно, не единственные). Будем называть такие задачи симметрическими.

В симметрическом случае функции $\omega(\lambda, x)$ принимают сопряженные значения при сопряженных значениях параметра λ. Поэтому если функция $f(\lambda) \in CK^2$ есть ω-преобразование Фурье функции $g(x)$, то функция

$$\overline{f(\bar{\lambda})} = \int_0^\infty \overline{g(x)\,\omega(\bar{\lambda}, x)}\,dx = \int_0^\infty \overline{g(x)}\,\omega(\lambda, x)\,dx$$

является ω-преобразованием Фурье функции $\overline{g(x)}$ и согласно (2.2.8)

$$(f(\lambda)\overline{f(\bar{\lambda})}, R) = \int_0^\infty g(x)\,\overline{g(x)}\,dx \geqslant 0,$$

какова бы ни была функция $f(\lambda) \in K^2$. Отсюда, используя лемму 2.1.1. и теорему 2.1.1, заключаем, что существует такая неубывающая функция $\rho(\mu)$ $(-\infty < \mu < \infty)$, что

$$(f(\lambda)\,g(\lambda), R) = \int_{-\infty}^\infty f(\sqrt{\mu})\,g(\sqrt{\mu})\,d\rho(\mu).$$

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.2. *Если краевая задача (2.2.1), (2.2.2) симметрическая (т. е. $q(x)$ и h вещественны), то существует такая неубывающая функция* $\rho(\mu)$ $(-\infty < \mu < \infty)$, *что*

$$\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty \omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, g)\,d\rho(\mu), \qquad (2.2.13)$$

каковы бы ни были функции $f(x)$ и $g(x)$ из K^2.

Для любой функции $f(x) \in L^2[0, \infty)$ положим

$$\omega_n(\lambda, f) = \int_0^n f(x)\,\omega(\lambda, x)\,dx.$$

Согласно только что доказанной теореме

$$\int_{-\infty}^\infty |\omega_n(\sqrt{\mu}, f) - \omega_m(\sqrt{\mu}, f)|^2\,d\rho(\mu) = \int_n^m |f(x)|^2\,dx$$

и, следовательно, при $n \to \infty$ функции $\omega_n(\sqrt{\mu}, f)$ сходятся в метрике пространства $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ к некоторой функции $\omega(\sqrt{\mu}, f)$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega(\sqrt{\mu}, f)|^2 \, d\rho(\mu) = \int_0^{\infty} |f(x)|^2 \, dx.$$

Таким образом, формула (2.2.13) верна для всех функций $f(x)$ и $g(x)$ из пространства $L^2[0, \infty)$. Пусть

$$f_N(x) = \int_{-N}^{N} \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, x) \, d\rho(\mu).$$

Тогда для любой функции $g(x) \in K^2$

$$\left| \int_0^{\infty} (f_N(x) - f(x))\, g(x) \, dx \right| = \left| \int_{-N}^{N} \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, g) \, d\rho(\mu) - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, g) \, d\rho(\mu) \right| =$$

$$= \left| \int_{|\mu| > N} \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, g) \, d\rho(\mu) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\omega(\sqrt{\mu}, g)|^2 d\rho(\mu) \cdot \int_{|\mu| > N} |\omega(\sqrt{\mu}, f)|^2 d\rho(\mu) \right]^{\frac{1}{2}},$$

и, значит, при

$$g(x) = \begin{cases} \overline{f_N(x) - f(x)}, & 0 \leqslant x \leqslant n, \\ 0, & x > n, \end{cases}$$

получим

$$\int_0^n |f_N(x) - f(x)|^2 \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_0^n |f_N(x) - f(x)|^2 \, dx \cdot \int_{|\mu| > N} |\omega(\sqrt{\mu}, f)|^2 d\rho(\mu) \right]^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\int_0^n |f_N(x) - f(x)|^2 \, dx \leqslant \int_{|\mu| > N} |\omega(\sqrt{\mu}, f)|^2 \, d\rho(\mu).$$

Устремив здесь n к бесконечности, найдем

$$\int_0^\infty |f_N(x) - f(x)|^2 \, dx \leqslant \int_{|\mu|>N} |\omega(\sqrt{\mu}, f)|^2 d\rho(\mu).$$

Поэтому $f_N(x) \in L^2[0, \infty)$ и

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\infty |f_N(x) - f(x)|^2 \, dx = 0.$$

Отсюда следует классическая теорема Вейля.

Теорема 2.2.3. *Каждой симметрической краевой задаче (2.2.1), (2.2.2) соответствует по крайней мере одна неубывающая функция* $\rho(\mu)$ $(-\infty < \mu < \infty)$ *такая, что для всех функций* $f(x) \in L^2[0, \infty)$ *справедливы формулы обращения*

$$\omega(\sqrt{\mu}, f) = \int_0^\infty f(x)\, \omega(\sqrt{\mu}, x)\, dx,$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, x)\, d\rho(\mu),$$

(*интегралы сходятся в метриках пространств* $L^2_\rho(-\infty, \infty)$, $L^2[0, \infty)$ *соответственно*) *и равенство Парсеваля*

$$\int_0^\infty f(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \int_{-\infty}^\infty \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \overline{\omega(\sqrt{\mu}, g)}\, d\rho(\mu).$$

ЗАДАЧИ

1. Доказать существование обобщенной спектральной функции у краевой задачи

$$y'' - q(x)\, y + \lambda^2 y = 0 \qquad (0 \leqslant x < \infty), \quad y(0) = 0. \qquad (2.2.14)$$

Указание. Вместо (2.2.6) рассмотреть последовательность

$$u_n^\sigma(x, y) = \int_0^\infty \lambda^2 R_n^\sigma(\lambda)\, \omega(\lambda, x; \infty)\, \omega(\lambda, y; \infty)\, d\lambda,$$

в которой функции $R_n^\sigma(\lambda)$ выбираются из условия

$$\int_0^\infty \lambda^2 R_n^\sigma(\lambda) \frac{\sin \lambda x}{\lambda}\, d\lambda =$$

$$= -\frac{d}{dx}\left\{\gamma_\sigma(x)\left[\delta_n(x) + \int_0^x d\xi \int_0^\infty L(\xi, t; \infty)\, \delta_n'(t)\, dt\right]\right\}.$$

При $n \to \infty$, $\sigma \to \infty$ регулярные обобщенные функции R_n^σ сходятся в пространстве Z' и

$$\lim_{\sigma\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty} R_n^\sigma\right\} = R = \frac{2}{\pi}\,[1 + C(M)],$$

где $C(M)$ — косинус-преобразование Фурье функции

$$M(x) = -\int_0^x L_t'(\xi, 0; \infty)\,d\xi.$$

При этом

$$\int_0^\infty f_1(x)\,f_2(x)\,dx = (\lambda^2\omega(\lambda, f_1; \infty)\,\omega(\lambda, f_2; \infty), R) =$$

$$= (\omega(\lambda, f_1; \infty)\,\omega(\lambda, f_2; \infty), \lambda^2 R),$$

если $f_i(x) \in K^2$ и

$$\omega(\lambda, f; \infty) = \int_0^\infty f(x)\,\omega(\lambda, x; \infty)\,dx.$$

Поэтому $\lambda^2 R$ — обобщенная спектральная функция краевой задачи (2.2.14).

2. Обобщить теорему 2.2.3 на симметрические краевые задачи с граничным условием $y(0) = 0$.

3. Доказать, что у симметрических краевых задач (2. 2.1), (2.2.2), удовлетворяющих условию $16q(x) \geqslant 9(|h| - h)^2$, обобщенные спектральные функции R порождаются мерами $d\rho(\mu)$, сосредоточенными на положительной полуоси:

$$(\omega(\lambda, f; h)\,\omega(\lambda, g; h), R) = \int_0^\infty \omega(\sqrt{\mu}, f; h)\,\omega(\sqrt{\mu}, g; h)\,d\rho(\mu).$$

Указание. Непосредственной проверкой убедиться, что если $f(\lambda) \in Z$ и $\lambda^2 f(\lambda) \in Z$, то финитная функция $y(x) = (f(\lambda)\,\omega(\lambda, x; h), R)$ дважды непрерывно дифференцируема, $y'(0) - hy(0) = 0$ и

$$y''(x) - q(x)\,y(x) = -(\lambda^2 f(\lambda)\,\omega(\lambda, x; h), R).$$

Поэтому

$$(\lambda^2 f(\lambda)\,\overline{f(\bar\lambda)}, R) = -\int_0^\infty \{y''(x) - q(x)\,y(x)\}\,\overline{y(x)}\,dx =$$

$$= h\,|y(0)|^2 + \int_0^\infty |y'(x)|^2\,dx + \int_0^\infty q(x)\,|y(x)|^2\,dx \geqslant$$

$$\geqslant h\,|y(0)|^2 + \int_0^\infty |y'(x)|^2\,dx + \frac{9}{16}(|h| - h)^2 \int_0^\infty |y(x)|^2\,dx,$$

так что $(\lambda^2 f(\lambda)\,\overline{f(\bar\lambda)}, R) \geqslant 0$, если $h \geqslant 0$. Если же $h < 0$, то

$$(\lambda^2 f(\lambda)\overline{f(\bar{\lambda})}, R) \geqslant -|h|\,|y(0)|^2 + \int_0^\infty |y'(x)|^2\,dx +$$

$$+\frac{9}{4}|h|^2 \int_0^\infty |y(x)|^2\,dx,$$

откуда, используя неравенство

$$|y(x)| \geqslant |y(0)| - \int_0^x |y'(t)|\,dt \geqslant |y(0)| - \left[\int_0^\infty |y'(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{x},$$

видим, что и в этом случае

$$(\lambda^2 f(\lambda)\overline{f(\bar{\lambda})}, R) \geqslant -|h|\,|y(0)|^2 + \int_0^\infty |y'(x)|^2\,dx +$$

$$+\frac{|hy(0)|^2\,|y(0)|^2}{4\int_0^\infty |y'(x)|^2\,dx} \geqslant 0.$$

Дальше можно использовать результаты задач 1, 3 § 1.

4. Доказать, что краевая задача Штурма — Лиувилля на всей вещественной оси

$$y'' - q(x)\,y + \lambda^2 y = 0 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

имеет обобщенную спектральную матрицу

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \quad (R_{11},\ R_{12},\ R_{21} \in Z';\ R_{22} = \lambda^2 R'_{22};\ R'_{22} \in Z')$$

такую, что для любых функций $f_1(x),\ f_2(x) \in K^2(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,f_2(x)\,dx = \vec{\omega}(\lambda, f_1)\,R\vec{\omega}(\lambda, f_2),$$

где вектор $\vec{\omega}(\lambda, f) = \{\omega(\lambda, f; 0), \omega(\lambda, f; \infty)\}$ слева понимается как однострочная матрица, а справа — как однострочный столбец:

$$\vec{\omega}(\lambda, f_1)\,R\vec{\omega}(\lambda, f_2) = (\omega(\lambda, f_1; 0)\,\omega(\lambda, f_2; 0), R_{11}) +$$
$$+ (\omega(\lambda, f_1; 0)\,\omega(\lambda, f_2; \infty), R_{12}) + (\omega(\lambda, f_1, \infty)\,\omega(\lambda, f_2; 0), R_{21}) +$$
$$+ (\omega(\lambda, f_1; \infty)\,\omega(\lambda, f_2; \infty), R_{22}).$$

Обобщенные функции R_{ik} связаны с ядром $L(x, t)$ оператора преобразования, переводящего $e_0(\lambda, x)$ в $e^{i\lambda x}$, формулами

$$R_{11} = \frac{2}{\pi}(1 + C(L)),\quad R_{21} = \frac{2}{\pi}C(L'_x),\quad R_{12} = \frac{2}{\pi}C(L'_t),$$

$$R'_{22} = \frac{2}{\pi}(1 + C(M)),$$

где

$$L = L(x, 0), \quad L'_x = L'_x(x, 0), \quad L'_t = L'_t(x, 0), \quad M = -\int_0^x L'_t(\xi, 0)\, d\xi.$$

5. Доказать, что операторная задача Штурма — Лиувилля имеет обобщенную спектральную матрицу $R = [R_{ik}]$ с элементами $R_{ik} \in Z'$ такую, что

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = [\omega(\lambda, f; h)\, R\tilde{\omega}(\lambda, g; h)],$$

где $f(x), g(x) \in OH(0, \infty)$ и по определению

$$[F(\lambda)\, RG(\lambda)] = \left[\sum_{j,l=1}^{\infty} (F_{ij}(\lambda)\, G_{lk}(\lambda), R_{jl})\right].$$

Спектральная матрица связана с ядром $L(x, t)$ ($\tilde{L}(x, t)$) оператора преобразования, переводящего $\omega(\lambda, x; h)$ в $I\cos\lambda x$, формулой

$$R = \frac{2}{\pi}\{I + C(L)\} = \frac{2}{\pi}\{I + C(\tilde{L})\}.$$

Указание дано в следующей задаче.

6. Доказать, что операторная задача Дирака имеет обобщенную спектральную матрицу $R = [R_{ik}]$ такую, что $PRP = R$, $R_{ik} \in Z'(-\infty, \infty)$ и

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = [\omega(\lambda, f; p)\, PRP\, \tilde{\omega}(\lambda, g; P)],$$

причем

$$R = \frac{1}{\pi}(P + \tilde{\omega}_0(L; P)) = \frac{1}{\pi}(P + \omega_0(\tilde{L}; P)).$$

Указание. Из существования операторов преобразования (1.2.39′) вытекает, что

$$\omega(\lambda, f; P) = \omega_0(\lambda, F; P), \quad \tilde{\omega}(\lambda, g; P) = \tilde{\omega}_0(\lambda, G; P),$$

если

$$f(x) = F(x) + \int_x^\infty F(t)\, L_p(t, x)\, dt, \quad g(x) = G(x) + \int_x^\infty \tilde{L}_p(t, x)\, G(t)\, dt.$$

Далее,

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \int_0^\infty F(x)\, G(x)\, dx +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty F(x)\left[L_p(x, y) + \tilde{L}_p(y, x) + \int_0^\infty L_p(x, \xi)\, \tilde{L}_p(y, \xi)\, d\xi\right] G(y)\, dxdy$$

и согласно результатам задачи 9 § 2 гл. 1

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \int_0^\infty F(x)\, G(x)\, dx + \int_0^\infty \int_0^\infty F(x)\, f(x, y)\, G(y)\, dx dy,$$

где операторнозначная функция $f(x, y)$ определена равенством (1.2.46). Непосредственная проверка показывает, что, если операторнозначные финитные функции $\varphi(x)$ и $\tilde{\varphi}(x)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi(x) P = \varphi(x), \quad P\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x),$$

$$\varphi(x) + B\varphi(x) B = \tilde{\varphi}(x) + B\tilde{\varphi}(x) B,$$

то

$$P\tilde{\omega}_0(\lambda, \varphi; P) = \omega_0(\lambda, \tilde{\varphi}; P) P.$$

Из формулы (1.2.47) видно, что всем этим условиям удовлетворяют функции

$$\varphi_\sigma(x) = \gamma_\sigma(x) L_p(x, 0), \quad \tilde{\varphi}_\sigma(x) = \gamma_\sigma(x) \tilde{L}_p(x, 0).$$

Следовательно, операторнозначная функция

$$f_\sigma(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\lambda, x; P)\, \tilde{\omega}_0(\lambda, \varphi_\sigma; P)\, \tilde{\omega}_0(\lambda, y; P)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\lambda, x; P)\, \omega_0(\lambda; \tilde{\varphi}_\sigma; P)\, \tilde{\omega}_0(\lambda, y; P)\, d\lambda$$

при всех положительных значениях x, y удовлетворяет уравнению $Bu'_x + u'_y B = 0$ и условиям

$$u(x, 0) = \gamma_\sigma(x) L_p(x, 0), \quad u(0, y) = \gamma_\sigma(y) \tilde{L}_p(y, 0)$$

(см. задачу 4 § 1).

Значит, в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \sigma$, $0 \leqslant y \leqslant \sigma$ выполняется тождество $f_\sigma(x, y) \equiv f(x, y)$ и

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\lambda, F; P) \{I + \tilde{\omega}_0(\lambda, \varphi_\sigma; P)\}\, \tilde{\omega}_0(\lambda, G; P)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda, f; P) \{P + \omega_0(\lambda, \tilde{\varphi}_\sigma; P)\}\, \tilde{\omega}(\lambda, g; P)\, d\lambda,$$

если $f(x) = g(x) = 0$ при $x > \sigma$. Устремляя здесь σ к бесконечности, получаем нужный результат.

7. Пусть h — ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, и h_1 — точная нижняя граница значений квадратичной формы (hf, f) на единичном шаре этого пространства. Доказать, что у симметрических $(q(x) = q^*(x);\ h = h^*)$

операторных краевых задач Штурма — Лиувилля, удовлетворяющих условию $16(q(x)\ f,\ f)-9(|h_1|-h_1)^2(f,f)\geqslant 0$, обобщенная спектральная матрица R такова, что

$$(f(\lambda)\ IRI\overline{f(\bar{\lambda})})\geqslant 0,\quad (\lambda^2 g(\lambda)\ IRI\overline{g(\bar{\lambda})})\geqslant 0$$

(предполагается, конечно, что функции $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ и $\lambda^2 g(\lambda)$ принадлежат CK^2).

8. Доказать, что обобщенные спектральные матрицы R симметрических операторных краевых задач Штурма — Лиувилля порождаются операторными мерами $d\rho(\mu)$:

$$(\omega(\lambda, f)\ R\tilde{\omega}(\lambda, g))=\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx=\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\sqrt{\mu}, f)\, d\rho(\mu)\, \tilde{\omega}(\sqrt{\mu}, g),$$

где $\rho(\mu)=\rho^*(\mu)\in OH$ при каждом μ и оператор $\rho(\mu')-\rho(\mu)$ неотрицателен, если $\mu'>\mu$.

Указание. Сначала, предполагая выполненными условия предыдущей задачи и используя результаты задач 1, 3, 6 § 1, доказать, что в этом случае

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx=\int_0^\infty(\omega\sqrt{\mu}, f)\, d\rho(\mu)\, \tilde{\omega}(\sqrt{\mu}, g).$$

Замена переменной $\mu=\mu'+a^2$ в этом равенстве показывает, что

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx=\int_{-a^2}^{\infty}\omega(\sqrt{\mu}, f)\, d\rho(\mu)\, \tilde{\omega}(\sqrt{\mu}, g),$$

если

$$16(q(x)\, f, f)-9(|h_1|-h_1)^2(f, f)\geqslant -a^2(f, f). \qquad (2.2.15)$$

В общем случае можно аппроксимировать $q(x)$ операторнозначными функциями, удовлетворяющими условиям (2.2.15), и затем устремить a к бесконечности.

9. Доказать, что у симметрической ($q(x)$ вещественна) краевой задачи Штурма — Лиувилля на всей оси спектральная матрица порождается матричной мерой $d\rho(\mu)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{\omega}(\sqrt{\mu}, f)\, d\rho(\mu)\, \vec{\omega}(\sqrt{\mu}, g)$$

(матрицы $\rho(\mu')-\rho(\mu)$ неотрицательны, если $\mu'>\mu$).

10. Доказать, что у симметрической ($\Omega(x)=\Omega^*(x)$, $B=-B^*$) операторной краевой задачи Дирака обобщенная спектральная матрица R порождается операторной мерой:

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx=\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\lambda, f;\ P)\, d\rho(\lambda)\, \tilde{\omega}(\lambda, g;\ P)$$

(операторы $\rho(\lambda')-\rho(\lambda)$ неотрицательны, если $\lambda'>\lambda$, и $P\rho(\lambda)P=\rho(\lambda)$).

Указание. Если $F(\lambda) \geqslant 0$ и принадлежит $Z(-\infty, \infty)$, то $F(\lambda) = G(\lambda)\overline{G(\lambda)}$, где

$$G(\lambda) = \int_0^\infty G(x)\, e^{-i\lambda x} dx = C(\lambda, G) - iS(\lambda, G),$$

$$\overline{G(\lambda)} = \int_0^\infty \overline{G(x)}\, e^{i\lambda x} dx = C(\lambda, \overline{G}) + iS(\lambda, \overline{G}),$$

$$(F(\lambda), R) = (C(\lambda, G)\, C(\lambda, \overline{G}), R) - i\,(S(\lambda, G)\, C(\lambda, \overline{G}), R) + \\ + i\,(S(\lambda, \overline{G})\, C(\lambda, G), R) + (S(\lambda, G)\, S(\lambda, \overline{G}), R).$$

С другой стороны, оператор

$$A = (\omega_0(\lambda, G; P)\, R\, \widetilde{\omega}_0(\lambda, \overline{G}; P)) = \int_0^\infty g(x)\, g^*(x)\, dx$$

неотрицателен. Из равенства

$$A = (\omega_0(\lambda, G; P) \quad R\, \widetilde{\omega}_0(\lambda, \overline{G}; P)) = \\ = ([C(\lambda, G)\, P - S(\lambda, G)\, BP]\, R\, [PC(\lambda, \overline{G}) + PBS(\lambda, \overline{G})]) = \\ = (C(\lambda, G)\, C(\lambda, \overline{G}), R) - B\,(S(\lambda, G)\, C(\lambda, \overline{G}), R) + \\ + (S(\lambda, \overline{G})\, C(\lambda, G), R)\, B + B\,(S(\lambda, G)\, S(\lambda, \overline{G}), R)\, B,$$

замечая, что $PRP = R$ и $PBP = 0$, находим

$$PAP = (C(\lambda, G)\, C(\lambda, \overline{G}), R), \qquad (I - P)\, AP = -B\,(S(\lambda, G)\, C(\lambda, \overline{G}), R)$$

$$PA\,(I - P) = (S(\lambda, \overline{G})\, C(\lambda, G), R),$$

$$(I - P)\, A\,(I - P) = B\,(S(\lambda, G)\, S(\lambda, \overline{G}), R)\, B,$$

откуда следует, что

$$(F(\lambda), R) = PAP - iB\,(I - P)\, AP - iPA\,(I - P)\, B + \\ + B\,(I - P)\, A\,(I - P)\, B = P\,(A - iBA - iAB + BAB)\, P = \\ = P\,(I - iB)\, A\,(I - iB)\, P.$$

Поэтому оператор $(F(\lambda), R)$ неотрицателен, если $F(\lambda) \geqslant 0$. Теперь можно использовать результаты задачи 5 § 1.

§ 3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Вопросы, рассмотренные в предыдущем параграфе, относятся к прямым задачам спектрального анализа: в них для данной краевой задачи отыскивалась ее спектральная функция, порождающая формулы разложения. Обратными задачами спектрального анализа называются задачи, в которых по каким-либо спектральным данным нужно восстановить свойства исходного оператора или весь оператор. В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о восстановлении краевой задачи вида (2.2.1), (2.2.2) по ее спектральной функции. Выясним прежде всего, каким условиям должна удовлетворять обобщенная спектральная функция R такой краевой задачи.

Лемма 2.3.1. *Спектральная функция R краевой задачи (2.2.1), (2.2.2) обладает следующими свойствами:*

1) *если функция $f(\lambda) \in CK^2(\sigma)$ и $(f(\lambda)\, y(\lambda), R) = 0$ при всех $y(\lambda) \in CK^2(\sigma)$, то $f(\lambda) \equiv 0$;*

2) *функция*

$$\Phi(x) = \left(\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2},\ R\right) \qquad (0 < x < \infty)$$

трижды непрерывно дифференцируема, причем

$$\Phi'(+0) = 1, \qquad \Phi''(+0) = -h.$$

При этом если $q(x)$ имеет $n \geqslant 0$ непрерывных производных, то функция $\Phi(x)$ имеет $n+3$ непрерывных производных.

Доказательство. Пусть $\widehat{f}(x)$ и $\widehat{y}(x)$ — функции из $K^2(\sigma)$, ω-преобразования Фурье которых равны соответственно $f(\lambda)$ и $y(\lambda)$. Тогда

$$(f(\lambda)\, y(\lambda),\ R) = \int_0^\infty \widehat{f}(x)\, \widehat{y}(x)\, dx,$$

причем $\widehat{y}(x)$ пробегает все множество $K^2(\sigma)$, когда $y(\lambda)$ пробегает множество $CK^2(\sigma)$. Отсюда, очевидно, следует, что равенство $(f(\lambda)\, y(\lambda),\ R) = 0$ может выполняться при всех $y(\lambda) \in CK^2(\sigma)$ лишь в том случае, когда $\widehat{f}(x)$, а значит и $f(\lambda)$, тождественно равна нулю, т. е. первое утверждение леммы действительно справедливо. Как известно, $\lambda^{-2}(1-\cos\lambda x)$ есть косинус-преобразование Фурье функции

$$\varphi(t) = \begin{cases} x-t, & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ 0, & t \geqslant x. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Поэтому

$$\Phi(x) = \left(\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2},\ R\right) = \left(\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2},\ \frac{2}{\pi}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2},\ R - \frac{2}{\pi}\right) = \varphi(0) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2},\ C(L)\right),$$

откуда согласно (2.1.4) и (2.3.1)

$$\Phi(x) = x + \int_0^x (x-t)\, L(t, 0)\, dt \qquad (0 \leqslant x < \infty). \qquad (2.3.2)$$

Так как функция $L(t, 0)$ непрерывно дифференцируема, то $\Phi(x)$ трижды непрерывно дифференцируема, причем

$$\Phi'(+0) = 1 + \lim_{x\to 0} \int_0^x L(t, 0)\, dt = 1,$$

$$\Phi''(+0) = \lim_{x\to 0} L(x, 0) = L(0, 0) = -h.$$

Если функция $g(x)$ имеет $n \geqslant 0$ непрерывных производных, то $L(x, 0)$ имеет $n+1$ непрерывную производную и, значит, функция $\Phi(x)$ имеет $n+3$ непрерывных производных.

Выведем теперь линейное интегральное уравнение, которому удовлетворяет при каждом фиксированном x ядро $K(x, y) = K(x, y;\ h)$ оператора преобразования.

Функция $\omega(\lambda, x)$ при каждом фиксированном значении x является четной целой функцией экспоненциального типа, ограниченной на всей вещественной оси. Поэтому $\omega(\lambda, x)$ есть мультипликатор в пространстве Z, и на эту функцию можно умножить любую обобщенную функцию из Z'.

Рассмотрим произведение $\left(R - \frac{2}{\pi}\right) \omega(\lambda, x)$, где R — спектральная функция задачи (2.2.1), (2.2.2). Из формулы

$$\omega(\lambda, x) = \cos \lambda x + \int_0^x K(x, t) \cos \lambda t\, dt$$

следует

$$\left(R - \frac{2}{\pi}\right) \omega(\lambda, x) =$$

$$= \left(R - \frac{2}{\pi}\right) \cos \lambda x + \left(R - \frac{2}{\pi}\right) \int_0^x K(x, t) \cos \lambda t\, dt,$$

откуда, вспоминая, что $R - \frac{2}{\pi}$ есть косинус-преобразование Фурье функции $\frac{2}{\pi} L(y, 0)$, и используя свойства 2 и 3 преобразований Фурье (см. § 1), получаем

$$\left(R - \frac{2}{\pi}\right) \omega(\lambda, x) \sim \frac{1}{\pi} \{L(x+y, 0) + L(|x-y|, 0)\} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^x K(x, t) \{L(t+y, 0) + L(|t-y|, 0)\}\, dt. \quad (2.3.3)$$

Любая функция $F(\lambda) \in Z$ является косинус-преобразованием Фурье некоторой финитной и непрерывной функции $f(x)$:

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(x) \cos \lambda x dx, \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F(\lambda) \cos \lambda x d\lambda. \quad (2.3.4)$$

Выражая здесь $\cos \lambda x$ через $\omega(\lambda, x)$ с помощью оператора преобразования $(\mathbf{I} + \mathbf{L})$, получаем

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \left[f(x) + \int_x^\infty f(y) L(y, x) dy \right] \omega(\lambda, x) dx,$$

так что $F(\lambda)$ является также ω-преобразованием Фурье функции $f(x) + \int_x^\infty f(y) L(y, x) dy$ и согласно следствию теоремы (2.2.1)

$$(F(\lambda), R\omega(\lambda, x)) = (F(\lambda)\omega(\lambda, x), R) =$$
$$= f(x) + \int_x^\infty f(y) L(y, x) dy.$$

Кроме того,

$$\left(F(\lambda), \frac{2}{\pi}\omega(\lambda, x)\right) = \left(F(\lambda)\omega(\lambda, x), \frac{2}{\pi}\right) =$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F(\lambda) \left[\cos \lambda x + \int_0^x K(x, y) \cos \lambda y dy \right] d\lambda =$$
$$= f(x) + \int_0^\infty K(x, y) f(y) dy.$$

Поэтому

$$\left(F(\lambda), \left(R - \frac{2}{\pi}\right)\omega(\lambda, x)\right) = \int_x^\infty f(y) L(y, x) dy -$$
$$- \int_0^x K(x, y) f(y) dy = \int_0^x f(y) \{L(y, x) - K(x, y)\} dy,$$

откуда в силу (2.3.4) и определения косинус-преобразования Фурье локально суммируемой функции следует, что

$$\left(R - \frac{2}{\pi}\right)\omega(\lambda, x) \sim \frac{2}{\pi}\{L(y, x) - K(x, y)\}. \quad (2.3.5)$$

Сравнивая формулы (2.3.3) и (2.3.5), приходим к тождеству

$$L(y, x) - K(x, y) = \frac{1}{2}\{L(x+y, 0) + L(|x-y|, 0)\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^x K(x, t)\{L(t+y, 0) + L(|t-y|, 0)\}\, dt,$$

из которого при $y < x$ вытекает следующее интегральное уравнение для ядра $K(x, y)$:

$$f(x, y) + K(x, y) + \int_0^x K(x, t) f(t, y)\, dt = 0 \qquad (0 \leqslant y \leqslant x), \tag{2.3.6}$$

где

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\{L(x+y, 0) + L(|x-y|, 0)\}. \tag{2.3.7}$$

С другой стороны, согласно формуле (2.3.2)

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\{\Phi''(x+y) + \Phi''(|x-y|)\}, \tag{2.3.8}$$

т. е. ядро и свободный член интегрального уравнения (2.3.6) выражаются непосредственно через спектральную функцию R рассматриваемой краевой задачи. Поэтому, решив уравнение (2.3.6) (ниже будет доказано, что при каждом фиксированном x оно имеет единственное решение), мы восстановим ядро $K(x, y)$, а вместе с ним и краевую задачу по ее спектральной функции. Из единственности решения уравнения (2.3.6) вытекает единственность краевой задачи с данной спектральной функцией.

Лемма 2.3.2. *Пусть обобщенная функция $R \in Z'$ обладает свойствами 1 и 2 леммы 2.3.1. Положим*

$$\Phi(x) = \left(\frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda^2}, R\right),$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\{\Phi''(x+y) + \Phi''(|x-y|)\}$$

и составим интегральное уравнение (2.3.6) относительно неизвестной функции $K(x, y)$. При каждом значении $x \geqslant 0$ это интегральное уравнение имеет единственное решение $K(x, y)$, причем оно непрерывно и имеет по обеим переменным столько непрерывных производных, сколько их имеет функция $\Phi''(x)$, рассматриваемая на полуоси $[0, \infty)$.

Доказательство. Согласно альтернативе Фредгольма разрешимость уравнения (2.3.6) при любом значении $x = a$ будет доказана, если мы покажем, что соответствующее однородное уравнение

$$g(y) + \int_0^a g(t) f(t, y)\, dt = 0 \qquad (0 \leqslant y \leqslant a) \qquad (2.3.9)$$

не имеет ненулевых решений. Возьмем произвольную функцию $g(y) \in K^2(a)$ и вычислим косинус-преобразование Фурье локально суммируемой функции

$$a(y) = g(y) + \int_0^\infty g(t) f(t, y)\, dt \qquad (0 \leqslant y < \infty).$$

Из формул (2.3.8) и свойств 3 и 4 косинус-преобразований Фурье (см. § 1) вытекает, что

$$C(a) = C(\lambda, g) + C(\lambda, g)\left(\frac{\pi}{2} R - \Phi'(+0)\right) = \frac{\pi}{2} C(\lambda, g) R.$$

Поэтому для любой функции $z(y) \in K^2(a)$ справедливо равенство

$$\int_0^\infty a(y) z(y)\, dy = \frac{2}{\pi}\left(C(\lambda, z), \frac{\pi}{2} C(\lambda, g) R\right) =$$
$$= (C(\lambda, g) C(\lambda, a), R).$$

Если функция $g(y)$ удовлетворяет однородному уравнению (2.3.9), то левая часть этого равенства равна нулю, какова бы ни была функция $z(y) \in K^2(a)$, и $(C(\lambda, g)\, y(\lambda), R) = 0$ для всех функций $y(\lambda) \in CK^2(a)$. Отсюда согласно свойству 1, которому по условию удовлетворяет обобщенная функция R, следует, что функция $C(\lambda, g)$, а значит и $g(y)$, тождественно равна нулю. Таким образом, однородное уравнение (2.3.9) не имеет ненулевых решений, а неоднородное уравнение (2.3.6) имеет при каждом фиксированном значении x единственное решение $K(x, y)$.

Исследуем гладкость этого решения. После замены переменных $y = xy'$, $t = xt'$ (2.3.6) преобразуется в уравнение

$$f(x, xy') + K(x, xy') + \int_0^1 K(x, xt') f(xt', xy')\, x\,dt' = 0, \qquad (2.3.10)$$

и мы можем записать его в виде

$$(\mathbf{I} + \mathbf{F}(x)) K + f(x) = 0,$$

где зависящие от параметра x операторы $\mathbf{F}(x)$ действуют в фиксированном пространстве $C[0, 1]$ и $f(x)$ являются непрерывно зависящими от параметра x элементами этого пространства. Доказанная выше однозначная разрешимость уравнения (2.3.6) гарантирует существование обратных операторов $(\mathbf{I} + \mathbf{F}(x))^{-1}$ при всех значениях x. Ядро интегрального оператора $\mathbf{F}(x)$, равное

$$\frac{x}{2}\{\Phi''(x(t' + y')) + \Phi''(x|t' - y'|)\},$$

непрерывно зависит от x и имеет по x $n + 1$ непрерывную производную, если функция $\Phi(x)$ имеет $n + 3$ непрерывные производные. Поэтому обратный оператор $(\mathbf{I} + \mathbf{F}(x))^{-1}$ непрерывно зависит от x и имеет $n + 1$ производную по x. Так как функция $f(x, xy')$ тоже имеет $n + 1$ непрерывную производную по x, то и решение $K(x, xy')$ уравнения (2.3.10) имеет $n + 1$ непрерывную производную по x. Подставляя в равенстве (2.3.10) вместо функции f ее выражение через Φ'', получаем

$$K(x, xy') = \frac{1}{2}\{\Phi''(x(1 + y')) + \Phi''(x(1 - y'))\} + \\ + \frac{x}{2}\int_0^1 K(x, xt')\,\Phi''(x(t' + y'))\,dt' + \\ + \frac{x}{2}\left\{\int_0^{y'} K(x, xt')\,\Phi''(x(y' - t'))\,dt' + \right. \\ \left. + \int_{y'}^1 K(x, xt')\,\Phi''(x(t' - y'))\,dt'\right\}. \qquad (2.3.11)$$

Из этой формулы ясно видно, что функция $K(x, xy')$ будет иметь по переменной y' $n + 1$ непрерывную производную, если функция $\Phi(x)$ имеет $n + 3$ непрерывные производные. Лемма доказана.

Замечание. Из приведенного доказательства следует, что уравнение (2.3.6) и все входящие в него функции можно дифференцировать $n + 1$ раз по x, если функция $\Phi(x)$ имеет $n + 3$ производных. Это уравнение можно дифференцировать $n + 1$ раз и по y, хотя функция $f(t, y)$ может не иметь производных по y такого порядка в точке $y = t$.

Для правильного дифференцирования по y уравнение (2.3.6) нужно записать в форме, аналогичной (2.3.11):

$$f(x, y) + K(x, y) + \frac{1}{2}\int_0^x K(x, t)\,\Phi''(t+y)\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^y K(x, t)\,\Phi''(y-t)\,dt + \frac{1}{2}\int_y^x K(x, t)\,\Phi''(t-y)\,dt = 0.$$

В частности, первые две производные удовлетворяют равенствам

$$f'_y(x, y) + K'_y(x, y) + \int_0^x K(x, t)\,f'_y(t, y)\,dt = 0, \quad (2.3.12)$$

$$f''_{yy}(x, y) + K''_{yy}(x, y) + \int_0^x K(x, t)\,f''_{yy}(t, y)\,dt +$$

$$+ K(x, y)\,\Phi'''(+0) = 0. \quad (2.3.13)$$

Лемма 2.3.3. *Пусть функция* $\Phi(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$ *четырежды непрерывно дифференцируема,*

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\{\Phi''(x+y) + \Phi''(|x-y|)\} \quad (2.3.14)$$

и однородные уравнения (2.3.9) при любом $a \geqslant 0$ *имеют только нулевые решения. Тогда решение* $K(x, y)$ *неоднородного уравнения (2.3.6) удовлетворяет такому уравнению в частных производных:*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}K(x, y) - q(x)\,K(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}K(x, y) \quad (0 \leqslant y \leqslant x < \infty), \quad (2.3.15)$$

причем

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}K(x, x), \quad K'_y(x, 0) = 0. \quad (2.3.15')$$

Доказательство. Согласно предыдущему из условий доказываемой леммы вытекает существование и непрерывность частных производных $K''_{xx}(x, y)$ и $K''_{yy}(x, y)$. Кроме того, из определения (2.3.14) функции $f(x, y)$ следует, что

$$f''_{xx}(x, y) = f''_{yy}(x, y) \ (x \neq y), \quad f'_x(0, y) = f'_y(x, 0) = 0. \quad (2.3.16)$$

Дифференцируя уравнение (2.3.6) один раз по y, получаем равенство (2.3.12), из которого при $y = 0$, согласно (2.3.16), находим

$$K'_y(x, y)\big|_{y=0} = 0. \quad (2.3.17)$$

Двукратное дифференцирование по y уравнения (2.3.6) приводит к равенству (2.3.13). Но

$$\int_0^x K(x, t) f''_{yy}(t, y)\,dt = \int_0^x K(x, t) f''_{tt}(t, y)\,dt =$$

$$= \int_0^y K(x, t) f''_{tt}(t, y)\,dt + \int_y^x K(x, t) f''_{tt}(t, y)\,dt =$$

$$= K(x, t) f'_t(t, y)\Big|_0^y - K'_t(x, t) f(t, y)\Big|_0^y +$$

$$+ \int_0^y K''_{tt}(x, t) f(t, y)\,dt + K(x, t) f'_t(t, y)\Big|_y^x -$$

$$- K'_t(x, t) f(t, y)\Big|_y^x + \int_y^x K''_{tt}(x, t) f(x, y)\,dt,$$

откуда, используя (2.3.14), (2.3.16) и (2.3.17), получаем

$$\int_0^x K(x, t) f''_{yy}(t, y)\,dt = -K(x, y)\,\Phi'''(+0) +$$

$$+ K(x, x) f'_x(x, y) - K'_t(x, t) f(t, y)\Big|_{t=x} + \int_0^x K''_{tt}(x, t) f(t, y)\,dt.$$

Поэтому равенство (2.3.13) можно преобразовать к такому виду:

$$f''_{yy}(x, y) + K''_{yy}(x, y) + \int_0^x K''_{tt}(x, t) f(t, y)\,dt +$$

$$+ K(x, x) f'_x(x, y) - K'_t(x, t) f(t, y)\Big|_{t=x} = 0. \quad (2.3.13')$$

Продифференцируем теперь уравнение (2.3.6) два раза по x:

$$f''_{xx}(x, y) + K''_{xx}(x, y) + \frac{d}{dx}\{K(x, x) f(x, y)\} +$$

$$+ K'_x(x, t) f(t, y)\Big|_{t=x} + \int_0^x K''_{xx}(x, t) f(t, y)\,dt = 0,$$

вычтем (2.3.13′) из полученного равенства:

$$f''_{xx}(x, y) - f''_{yy}(x, y) + K''_{xx}(x, y) - K''_{yy}(x, y) +$$

$$+f(x, y)\frac{d}{dx}K(x, x)+\{K'_x(x, t)+K'_t(x, t)\}f(t,y)|_{t=x}+$$

$$+\int_0^x \{K''_{xx}(x, t)-K''_{tt}(x, t)\}f(t, y)\,dt=0.$$

Так как

$$f''_{xx}(x, y)=f''_{yy}(x, y) \text{ и } \{K'_x(x, t)+K'_t(x, t)\}\,|_{t=x}=\frac{d}{dx}K(x, x),$$

то

$$K''_{xx}(x, y)-K''_{yy}(x, y)+q(x)f(x, y)+$$

$$+\int_0^x \{K''_{xx}(x, t)-K''_{tt}(x, t)\}f(t, y)\,dt=0,$$

где

$$q(x)=2\frac{d}{dx}K(x, x).$$

Вычтем, наконец, из последнего равенства уравнение (2.3.6), умноженное на $q(x)$. В результате получим

$$\{K''_{xx}(x, y)-q(x)K(x, y)-K''_{yy}(x, y)\}+$$

$$+\int_0^x \{K''_{xx}(x, t)-q(x)K(x, t)-K''_{tt}(x, t)\}f(t, y)\,dt=0,$$

следовательно,

$$K''_{xx}(x, y)-q(x)K(x, y)-K''_{yy}(x, y)=0,$$

так как однородное уравнение (2.3.9) имеет по условию лишь нулевые решения. Лемма доказана.

Теорема 2.3.1. *Для того чтобы обобщенная функция $R\in Z'$ была спектральной функцией некоторой краевой задачи вида (2.2.1), (2.2.2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *при любом $\sigma>0$ в множестве $CK^2(\sigma)$ не существует отличной от нуля функции $f(\lambda)$, удовлетворяющей равенству*

$$(f(\lambda)\,y(\lambda), R)=0$$

при всех $y(\lambda)\in CK^2(\sigma)$;

2) *функция*

$$\Phi(x)=\left(\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2},\ R\right)\qquad(0<x<\infty)$$

трижды непрерывно дифференцируема и $\Phi'(+0)=1$. При этом функция $q(x)$ в уравнении (2.2.1) имеет столько же *непрерывных производных, сколько их имеет* $\Phi'''(x)$ $[0 \leqslant x < \infty)$.

Доказательство. Необходимость условий теоремы доказана в лемме 2.3.1. Для доказательства достаточности этих условий построим интегральное уравнение (2.3.6), в котором функция $f(x, y)$ определена формулой (2.3.8). По лемме 2.3.2 это уравнение при любом $x \geqslant 0$ имеет единственное решение $K(x, y)$, и это решение непрерывно дифференцируемо по обеим переменным, так что функция

$$q(x) = 2\frac{d}{dx} K(x, x) \tag{2.3.18}$$

существует и непрерывна. Рассмотрим краевую задачу (2.2.1), (2.2.2), в которой функция $q(x)$ определена формулой (2.3.18), а $h = K(0, 0)$. Покажем, что данная в теореме обобщенная функция R является спектральной функцией этой краевой задачи.

Прежде всего нам нужно доказать, что решение $K(x, y)$ уравнения (2.3.6) является ядром оператора преобразования задачи (2.2.1), (2.2.2), т. е. функции

$$\omega(\lambda, x) = \cos \lambda x + \int_0^x K(x, t) \cos \lambda t dt \tag{2.3.19}$$

удовлетворяют уравнению (2.2.1) и начальным данным

$$\omega(\lambda, 0) = 1, \ \omega'(\lambda, 0) = h = K(0, 0). \tag{2.3.20}$$

Предположим сначала, что функция $\Phi(x)$ имеет четыре непрерывные производные. В лемме 2.3.2 было доказано, что в этом случае $K(x, y)$ удовлетворяет уравнению в частных производных (2.3.15) и условиям (2.3.15'). Поэтому

$$\omega''(\lambda, x) - q(x)\omega(\lambda, x) + \lambda^2\omega(\lambda, x) = -\lambda^2 \cos \lambda x +$$
$$+ \{K(x, x) \cos \lambda x\}' + K'_x(x, t) \cos \lambda t \big|_{t=x} +$$
$$+ \int_0^x \{K''_{xx}(x, t) - q(x) K(x, t)\} \cos \lambda t dt - q(x) \cos \lambda x +$$
$$+ \lambda^2 \cos \lambda x + \lambda^2 \int_0^x K(x, t) \cos \lambda t dt,$$

откуда, интегрируя последнее слагаемое два раза по частям, получаем

$$\omega''_x(\lambda, x) - q(x)\omega(\lambda, x) + \lambda^2\omega(\lambda, x) =$$

$$= \int_0^x \{K''_{xx}(x, t) - q(x) K(x, t) - K''_{tt}(x, t)\} \cos \lambda t dt +$$

$$+ \left\{\frac{d}{dx} K(x, x) + [K'_x(x, t) + K'_t(x, t)]\Big|_{t=x} - q(x)\right\} \cos \lambda x - \\ - K'_t(x, t)\Big|_{t=0}$$

и согласно (2.3.15), (2.3.15′)

$$\omega''(\lambda, x) - q(x)\omega(\lambda, x) + \lambda^2\omega(\lambda, x) = 0.$$

То, что функции $\omega(\lambda, x)$ удовлетворяют начальным данным (2.3.20), проверяется элементарно.

Пусть теперь функция $\Phi(x)$ имеет только три непрерывные производные. Тогда функции

$$\Phi_\delta(x) = \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} \Phi(t) dt$$

имеют четыре непрерывные производные. При $\delta \to 0$ эти функции и их первые три производные будут сходиться к функции $\Phi(x)$ и ее первым трем производным равномерно в каждом конечном интервале. Поэтому при достаточно малом δ уравнения

$$f_\delta(x, y) + K_\delta(x, y) + \int_0^x K_\delta(x, t) f_\delta(t, y) dt = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant x),$$

где

$$f_\delta(x, y) = \frac{1}{2}\{\Phi''_\delta(x + y) + \Phi''_\delta(|x - y|)\},$$

будут иметь единственные решения, причем

$$\lim_{\delta\to 0} K_\delta(x, y) = K(x, y), \qquad \lim_{\delta\to 0} \frac{d}{dx} K_\delta(x, x) = \frac{d}{dx} K(x, x)$$

равномерно в каждой конечной области изменения переменных x, y. Кроме того, согласно предыдущему функции

$$\omega_\delta(\lambda, x) = \cos \lambda x + \int_0^x K_\delta(x, t) \cos \lambda t dt$$

будут удовлетворять уравнениям

$$y'' - q_\delta(x) y + \lambda^2 y = 0, \qquad q_\delta(x) = 2\frac{d}{dx} K_\delta(x, x)$$

и начальным данным

$$\omega_\delta(\lambda, 0) = 1, \qquad \omega'_\delta(\lambda, 0) = K_\delta(0, 0).$$

Совершая в этих формулах предельный переход при $\delta \to 0$, приходим к выводу, что функции (2.3.19) должны удовлетворять уравнению (2.2.1) и начальным данным (2.3.20). Таким образом, и в этом случае решение $K(x, y)$ уравнения (2.3.6) есть ядро оператора преобразования для краевой задачи (2.2.1), (2.2.2).

Обозначим через R_0 спектральную функцию построенной краевой задачи и положим

$$\Phi_0(x) = \left(\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2}, R_0\right),$$

$$f_0(x, y) = \frac{1}{2}\{\Phi_0''(x+y) + \Phi_0''(|x-y|)\}.$$

Как было показано выше, ядро $K(x, y)$ оператора преобразования этой задачи должно удовлетворять уравнению

$$f_0(x, y) + K(x, y) + \int_0^x K(x, t) f_0(t, y)\, dt = 0 \qquad (0 \leqslant y \leqslant x).$$

Вычитая это уравнение из (2.3.6) и полагая затем $y = 0$, получаем

$$f(x, 0) - f_0(x, 0) + \int_0^x K(x, t)\{f(t, 0) - f_0(t, 0)\}\, dt = 0,$$

откуда следует, что $f(x, 0) - f_0(x, 0) \equiv 0$, так как однородное уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) + \int_0^x K(x, t)\varphi(t)\, dt = 0$$

имеет, очевидно, только нулевые решения.

Таким образом, $\Phi''(x) = \Phi_0''(x)$, а так как, кроме того,

$$\Phi(0) = \Phi_0(0) = 0, \qquad \Phi'(+0) = \Phi_0'(+0) = 1,$$

то $\Phi(x) = \Phi_0(x)$ и, следовательно, $R = R_0$.

Заметим, наконец, что, как было установлено в лемме 2.3.2, функция $K(x, y)$ имеет столько непрерывных производных, сколько их имеет $\Phi''(x)$. Следовательно, функция $q(x)$ имеет столько непрерывных производных, сколько их имеет $\Phi'''(x)$.

Теорема доказана.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что обобщенная функция

$$R = \frac{2}{\pi} + \frac{i}{2n!} \delta^{(2n)}(\lambda),$$

действующая в пространстве Z по формуле

$$(F(\lambda), R) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F(\lambda)\, d\lambda + \frac{i}{2n!} \frac{d^{2n}}{d\lambda^{2n}} F(\lambda) \Big|_{\lambda=0},$$

является спектральной для некоторой краевой задачи

$$y'' - q(x)\, y + \lambda^2 y = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty), \qquad y'(0) = 0.$$

Установить, что у этой задачи функция

$$\omega_0(x) = \omega(\lambda, x; 0)\, |_{\lambda=0}$$

и присоединенные к ней функции $\omega_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, определяемые как решения уравнений

$$\omega_k''(x) - q(x)\, \omega_k(x) = \omega_{k-1}(x), \quad \omega_k(0) = \omega_k'(0) = 0,$$

принадлежат пространству $L^2(0, \infty)$. Доказать, что в данном случае равенство Парсеваля можно записать в виде

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \omega(\lambda, f)\, \omega(\lambda, g)\, d\lambda + (-1)^n i \sum_{k=0}^{n} \omega_{n-k}(f)\, \omega_k(g),$$

$$\omega_k(f) = \int_0^\infty f(x)\, \omega_k(x)\, dx, \qquad \omega_k(g) = \int_0^\infty g(x)\, \omega_k(x)\, dx$$

и оно распространяется на все функции $f(x)$, $g(x)$ из пространства $L^2(0, \infty)$.

2. Рассмотрим две краевые задачи Штурма — Лиувилля

$$y'' - q_j(x)\, y + \lambda^2 y = 0, \quad y_j'(0) - h_j y_j(0) = 0 \quad (0 < x < \infty)$$

и соответствующие им операторы преобразования. Оператор $\mathbf{I} + \mathbf{L}_1$ преобразует решения $\omega_1(\lambda, x; h_1)$ первой краевой задачи в $\cos \lambda x$, а оператор $\mathbf{I} + \mathbf{K}_2$ преобразует $\cos \lambda x$ в решения $\omega_2(\lambda, x; h_2)$ второй краевой задачи. Поэтому оператор

$$\mathbf{I} + \mathbf{K}_{2,1} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_2)(\mathbf{I} + \mathbf{L}_1)$$

преобразует $\omega_1(\lambda, x; h_1)$ в $\omega_2(\lambda, x; h_2)$ и является, очевидно, интегральным и вольтерровским. Доказать, что ядро $K_{2,1}(x, y)$ оператора $K_{2,1}$ удовлетворяет уравнению

$$f(x, y) + K_{2,1}(x, y) + \int_0^x K_{2,1}(x, t)\, f(t, y)\, dt = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant x), \tag{2.3.21}$$

аналогичному уравнению (2.3.6). Здесь

$$f(x, y) = F''_{x,y}(x, y), \quad F(x, y) = \left(\int_0^x \omega_1(\lambda, t)\,dt \int_0^y \omega_1(\lambda, t)\,dt,\ R_2 - R_1\right)$$

и R_j $(j = 1, 2)$ — обобщенные спектральные функции рассматриваемых краевых задач.

Указание. Из формулы

$$\omega_1(\lambda, x) = \omega_2(\lambda, x) + \int_0^x K_{1,2}(x, t)\,\omega_2(\lambda, t)\,dt$$

следует

$$\omega_1(\lambda, f) = \omega_2(\lambda, \hat{f}),$$

где

$$\hat{f}(x) = f(x) + \int_x^\infty f(t)\,K_{1,2}(t, x)\,dt.$$

Поэтому

$$(\omega_1(\lambda, f)\,\omega_1(\lambda, g),\ R_2 - R_1) = (\omega_2(\lambda, \hat{f})\,\omega_2(\lambda, \hat{g}),\ R_2) -$$

$$-(\omega_1(\lambda, f)\,\omega_1(\lambda, g),\ R_1) = \int_0^\infty \{\hat{f}(x)\,\hat{g}(x) - f(x)\,g(x)\}\,dx =$$

$$= \int_0^\infty f(x)\left\{K_{1,2}(x, y) + K_{1,2}(y, x) + \int_0^x K_{1,2}(x, t)\,K_{1,2}(y, t)\,dt\right\} g(y)\,dy,$$

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y \left\{K_{1,2}(\xi, \eta) + K_{1,2}(\eta, \xi) + \int_0^\xi K_{1,2}(\xi, t)\,K_{1,2}(\eta, t)\,dt\right\} d\eta\,d\xi.$$

Таким образом,

$$f(x, y) = K_{1,2}(x, y) + K_{1,2}(y, x) + \int_0^x K_{1,2}(x, t)\,K_{1,2}(y, t)\,dt,$$

откуда для соответствующих интегральных операторов получим тождество

$$(\mathbf{I} + \mathbf{f}) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_{1,2})(\mathbf{I} + \mathbf{K}_{1,2}^{+}),$$

где $\mathbf{K}_{1,2}^{+}$ — союзный с $\mathbf{K}_{1,2}$ оператор. Так как $(\mathbf{I} + \mathbf{K}_{2,1}) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_{1,2})^{-1}$, то

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K}_{2,1})(\mathbf{I} + \mathbf{f}) = \mathbf{I} + \mathbf{K}_{1,2}^{+},$$

откуда для соответствующих ядер получается тождество

$$K_{2,1}(x, y) + \int_0^x K_{2,1}(x, t)\,f(t, y)\,dt + f(x, y) = K_{1,2}(y, x),$$

из которого при $y < x$ следует (2.3.21).

3. Пусть R_1 — обобщенная спектральная функция краевой задачи

$$y'' - q_1(x)\, y + \lambda^2 y = 0, \quad y(0)\, h_1 - y'(0) = 0 \tag{2.3.22}$$

и $\omega_1(\lambda, x) = \omega_1(\lambda, x; h_1)$ — соответствующие решения уравнения (2.3.22). Доказать, что обобщенная функция

$$R_2 = R_1 + c\delta(\lambda - \mu)$$

будет спектральной для некоторой краевой задачи такого же вида, если функция

$$1 + c \int_0^x \omega_1(\mu, t)^2\, dt$$

не имеет нулей на положительной полуоси $0 \leqslant x < \infty$, и найти эту краевую задачу.

Указание. Пусть $\omega_2(\lambda, x)$ — решения искомой краевой задачи

$$y'' - q_2(x)\, y + \lambda^2 y = 0, \quad y(0)\, h_2 - y'(0) = 0$$

и $K_{2,1}(x, y)$ — ядро оператора преобразования, переводящего $\omega_1(\lambda, x)$ в $\omega_2(\lambda, x)$. Для отыскания этого ядра можно воспользоваться уравнением (2. 3.21), которое в данном случае вырождено,

$$c\omega_1(\mu, x)\, \omega_1(\mu, y) + K_{2,1}(x, y) + $$

$$+ c \int_0^x K_{2,1}(x, t)\, \omega_1(\mu, t)\, \omega_2(\mu, y)\, dt = 0,$$

и решается в явном виде

$$K_{2,1}(x, y) = -\frac{c\omega_1(\mu, x)\, \omega_1(\mu, y)}{1 + c \int_0^x \omega_1(\mu, t)^2\, dt}.$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} \omega_2(\lambda, x) &= \omega_1(\lambda, x) - \frac{c\omega_1(\mu, x)}{1 + c\int_0^x \omega_1(\mu, t)^2\, dt} \int_0^x \omega_1(\mu, t)\, \omega_1(\lambda, t)\, dt, \\ h_2 &= \omega_2'(\lambda, 0) = h_1 - c, \\ q_2(x) &= q_1(x) - 2c \left\{ \frac{\omega_1(\mu, x)^2}{1 + c\int_0^x \omega_1(\mu, t)^2\, dt} \right\}'. \end{aligned}\right\} \tag{2.3.23}$$

4. Используя вронскиан $W\{u(x), v(x)\} = u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)$, можно преобразовать формулу (2.3.23) к виду

$$\omega_2(\lambda, x) = \omega_1(\lambda, x) + \frac{c\omega_2(\mu, x)\, W\{\omega_1(\mu, x), \omega_1(\lambda, x)\}}{\mu^2 - \lambda^2},$$

подсказывающему интересные обобщения.

Рассмотрим на конечном или бесконечном интервале (a, b) два уравнения Штурма — Лиувилля

$$y_j'' - q_j(x)\, y_j + \lambda^2 y_j = 0 \qquad (j = 1, 2),$$

в которых функции $q_j(x)$ предполагаются непрерывными только во внутренних точках этого интервала. Обозначим через $y_j(x)$ некоторые фиксированные решения этих уравнений с $\lambda = \mu$, а через $\varphi_1(\lambda, x)$ — произвольное решение первого уравнения. Доказать, что функции

$$\left.\begin{aligned} r(\lambda, x) &= (\mu^2 - \lambda^2)^{-1} y_2(x)\, W\{y_1(x), \varphi_1(\lambda, x)\}, \\ \psi(\lambda, x) &= \varphi_1(\lambda, x) + r(\lambda, x) \end{aligned}\right\} \tag{2.3.24}$$

удовлетворяют уравнениям

$$r''(\lambda, x) - q_2(x)\, r(\lambda, x) + \lambda^2 r(\lambda, x) = 2\varphi_1(\lambda, x)\, \{y_2(x)\, y_1(x)\}',$$

$$\psi''(\lambda, x) - q_2(x)\, \psi(\lambda, x) + \lambda^2 \psi(\lambda, x) =$$

$$= \frac{\varphi_1(\lambda, x)}{y_2(x)\, y_1(x)} \{-[y_2(x)\, y_1(x)]^2 - W[y_2(x), y_1(x)]\}'.$$

В частности, если решение $y_1(x)$ не имеет нулей в интервале (a, b), то функции

$$\varphi_2(\lambda, x) = \frac{W\{y_1(x), \varphi_1(\lambda, x)\}}{y_1(x)\,(\mu^2 - \lambda^2)} \tag{2.3.25}$$

удовлетворяют уравнению

$$\varphi_2''(\lambda, x) - q_2(x)\, \varphi_2(\lambda, x) + \lambda^2 \varphi_2(\lambda, x) = 0,$$

где

$$q_2(x) = y_1(x) \left(\frac{1}{y_1(x)}\right)'' + \mu^2 = q_1(x) - 2\, \frac{d}{dx} \left\{\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right\}.$$

Если функция $[y_1(x)]^2$ имеет первообразную $I_1(x)$, не обращающуюся в нуль при $x \in (a, b)$, то функции

$$\varphi_2(\lambda, x) = \varphi_1(\lambda, x) + \frac{y_1(x)}{I_1(x)} \cdot \frac{W\{y_1(x), \varphi_1(\lambda, x)\}}{\mu^2 - \lambda^2} \tag{2.3.26}$$

удовлетворяют уравнению

$$\varphi_2''(\lambda, x) - q_2(x)\, \varphi_2(\lambda, x) + \lambda^2 \varphi_2(\lambda, x) = 0,$$

в котором

$$q_2(x) = q_1(x) - 2\, \frac{d}{dx} \left\{\frac{I_1'(x)}{I_1(x)}\right\}.$$

Таким образом, формулы (2.3.25), (2.3.26) определяют некоторые операторы преобразования. Найти обратные операторы.

5. Обозначим через $K^2(a, b)$ множество финитных на интервале (a, b) функций с интегрируемым квадратом, а через $K_1^2(a, b)$ — его подмножество, состоящее из дифференцируемых функций, производная которых тоже принадлежит $K^2(a, b)$. Пусть $Z(a, b)$ — такое пространство основных функций, которое содержит произведения $\varphi_1(\lambda, f_1)\, \varphi_1(\lambda, f_2)$,

если $f_j(x) \in K^2(a, b)$ и

$$\varphi_1(\lambda, f) = \int_a^b f(x)\,\varphi_1(\lambda, x)\,dx.$$

Пусть, далее, R_1 — такая обобщенная функция, действующая над $Z(a, b)$, что

$$(\varphi_1(\lambda, f_1)\,\varphi_1(\lambda, f_2),\ R_1) = \int_a^b f_1(x)\,f_2(x)\,dx.$$

А. Доказать, что для любой пары функций $f(x)$, $g(x)$ такой, что

$$f(x) \in K^2(a, b), \quad g(x) \in K_1^2(a, b),$$

$$\int_a^b f(x)\,y_2(x)\,dx = 0,$$

выполняется тождество

$$(r(\lambda, f)\,r(\lambda, g)\,(\mu^2 - \lambda^2),\ R_1) = -\int_a^b f(x)\,g(x)\,[y_2(x)\,y_1(x)]^2\,dx,$$

где

$$r(\lambda, f) = \int_a^b f(x)\,r(\lambda, x)\,dx$$

и функции $r(\lambda, x)$ определены формулой (2.3.24). В частности,

$$(\varphi_2(\lambda, f)\,\varphi_2(\lambda, g)\,(\mu^2 - \lambda^2),\ R_1) = -\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx,$$

если функция $r(\lambda, x) = \varphi_2(\lambda, x)$ определена формулой (2.3.25)

Б. Доказать, что тождество

$$(\varphi_2(\lambda, f_1)\,\varphi_2(\lambda, f_2),\ R_1) = \int_a^b f_1(x)\,f_2(x)\,dx$$

выполняется на всех функциях $f_j(x)$, принадлежащих множеству $K^2(a, b)$ и удовлетворяющих условию

$$\int_a^b f_j(x)\,\frac{y_1(x)}{l_1(x)}\,dx = 0,$$

если функции $\varphi_2(\lambda, x)$ определены формулой (2.3.26).

Указание. Пусть выполнены условия задачи А. Тогда

$$r(\lambda, f) = \frac{1}{\mu^2 - \lambda^2}\int_a^b f(x)\,y_2(x)\,W\,\{y_1(x),\ \varphi_1(\lambda, x)\}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\mu^2 - \lambda^2} \int_a^b W\{y_1(x), \varphi_1(\lambda, x)\}\, d\left\{\int_a^x f(t)\, y_2(t)\, dt\right\} =$$

$$= \int_a^b y_1(x)\, \varphi_1(\lambda, x) \left\{\int_a^x f(t)\, y_2(t)\, dt\right\} dx = \varphi_1\left(\lambda, y_1 \int_0^x f(t)\, y_2(t)\, dt\right),$$

$$r(\lambda, g)(\mu^2 - \lambda^2) = \int_a^b g(x)\, y_2(x)\, \{y_1'(x)\, \varphi_1(\lambda, x) - y_1(x)\, \varphi_1'(\lambda, x)\}\, dx =$$

$$= \int_a^b \{g(x)\, y_2(x)\, y_1'(x) + [g(x)\, y_2(x)\, y_1(x)]'\}\, \varphi_1(\lambda, x)\, dx =$$

$$= \int_a^b \frac{[g(x)\, y_2(x)\, y_1^2(x)]'}{y_1(x)}\, \varphi_1(\lambda, x)\, dx = \varphi_1\left(\lambda, \frac{[gy_1^2 y_2]'}{y_1}\right).$$

Поэтому

$$(r(\lambda, f)\, r(\lambda, g)(\mu^2 - \lambda^2), R_1) =$$

$$= \left(\varphi_1\left(\lambda, y_1 \int_0^x f(t)\, y_2(t)\, dt\right) \varphi_1\left(\lambda, \frac{[gy_1^2 y_2]'}{y_1}\right), R_1\right) =$$

$$= \int_a^b [gy_1^2 y_2]' \left\{\int_0^x f(t)\, y_2(t)\, dt\right\} dx = -\int_a^b f(x)\, g(x)\, [y_2(x)\, y_1(x)]^2\, dx.$$

Задача Б решается аналогично, если учесть, что

$$\varphi_2(\lambda, f) = \varphi_1\left(\lambda, f + y_1 \int_0^x f(t)\, y_2(t)\, dt\right).$$

6. Изложенные выше результаты можно использовать для распространения различных теорем на краевые задачи вида

$$y'' - \{q(x) + l(l+1)\, x^{-2}\}\, y + \lambda^2 y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad (2.3.27)$$

где число $l \geqslant 1$ целое, а функция $q(x)$ непрерывна при $0 \leqslant x < a$. Для этого нужно последовательным применением операторов (2.3.25) и (2.3.26) избавиться от особенности $l(l+1)\, x^{-2}$.

А. Доказать существование обобщенных спектральных функций у задач (2.3.27) ($a = \infty$) и обобщить теорему 2.3.1.

Б. Пусть μ_k и ν_k — собственные значения краевых задач

$$y'' - \{q(x) + 2\sin^{-2} x\}\, y + \mu_k y = 0, \qquad y(0) = y(\pi) = 0$$

$$y'' - \left\{q(x) + \left[2\sin^2 \frac{x}{2}\right]^{-1}\right\} y + \nu_k y = 0, \qquad y(0) = y'(\pi) = 0,$$

где функции $q(x)$ непрерывны и дифференцируемы на сегменте $[0, \pi]$.

Доказать тождества

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{\mu_k-(k+1)^2\}=-\frac{3}{4}\{q(0)+q(\pi)\},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{\nu_k-k^2\}=-q(0)+\frac{1}{4}\{q(0)+q(\pi)\}.$$

§ 4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ СИММЕТРИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ТЕОРЕМА О РАВНОСХОДИМОСТИ

Согласно теореме 2.2.2 обобщенные спектральные функции симметрических краевых задач (h и $q(x)$ вещественны) порождаются мерами, т. е. каждой спектральной функции $R\in Z'$ соответствует такая неубывающая функция $\rho(\mu)$ $(-\infty<\mu<\infty)$, возможно не единственная, что

$$(f(\lambda)\,g(\lambda),\,R)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{\mu})\,g(\sqrt{\mu})\,d\rho(\mu),$$

каковы бы ни были функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ из CK^2.

В этом параграфе рассматриваются только симметрические краевые задачи и $\rho(\mu)$ называются их спектральными функциями. Займемся прежде всего выяснением поведения спектральных функций $\rho(\mu)$ при $\mu\to-\infty$. Для этого удобно воспользоваться формулой $R=\frac{2}{\pi}(1+C(L))$ (теорема 2.2.1) и вытекающим из нее равенством

$$\left(\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2},\,R\right)=x+\int_0^x (x-t)\,L(t,0;\,h)\,dt \qquad (0\leqslant x<\infty),$$

которое было получено при доказательстве леммы 2.3.1 (см. формулу (2.3.2)). Поскольку

$$\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2}=2\,\frac{\sin\frac{\lambda x}{2}}{\lambda}\cdot\frac{\sin\frac{\lambda x}{2}}{\lambda}$$

является, очевидно, произведением двух функций из CK^2, из этого равенства для симметрических краевых задач получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\sqrt{\mu}x}{\mu}\,d\rho(\mu)=x+\int_0^x (x-t)\,L(t,0;\,h)\,dt \quad (2.4.1)$$

$$(0\leqslant x<\infty).$$

Отсюда сразу же можно сделать определенное заключение о поведении $\rho(\mu)$ при $\mu \to -\infty$. В самом деле, так как функция $\rho(\mu)$ не убывает и $\mu^{-1}(1 - \cos\sqrt{\mu}x) \geqslant 0$, то

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{+0} \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\mu}x - 1}{|\mu|}\, d\rho(\mu) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+0} \frac{1 - \cos\sqrt{\mu}x}{\mu}\, d\rho(\mu) \leqslant x + \int_0^x (x - t)\, L(t, 0;\ h)\, dt$$

при всех значениях $x \in [0, \infty)$. Из этого неравенства, замечая, что при любом n

$$\lim_{\mu \to -\infty} \frac{|\mu|^n \operatorname{ch}\sqrt{|\mu|}\, x}{\operatorname{ch}\sqrt{|\mu|}\,(x+1) - 1} = 0,$$

заключаем, что интеграл

$$L_1(x) = \int_{-\infty}^{+0} \operatorname{ch}\sqrt{|\mu|}\, x\, d\rho(\mu) = \int_{-\infty}^{+0} \cos\sqrt{\mu}x\, d\rho(\mu) \quad (2.4.2)$$

сходится при всех значениях x и функция $L_1(x)$ бесконечно дифференцируема. Поэтому спектральная функция $\rho(\mu)$ симметрической краевой задачи всегда имеет конечный предел $\rho(-\infty)$, когда $\mu \to -\infty$, причем

$$\lim_{\mu \to -\infty} e^{\sqrt{|\mu|}\, x}\{\rho(\mu) - \rho(-\infty)\} = 0 \qquad (0 \leqslant x < \infty), \quad (2.4.3)$$

так как в противном случае интеграл (2.4.2) не мог бы сходиться при всех значениях x.

Для изучения поведения спектральной функции при $\mu \to +\infty$ преобразуем равенство (2.4.1) к виду

$$\int_{+0}^{\infty} \frac{1 - \cos\sqrt{\mu}x}{\mu}\, d\rho(\mu) = x + \int_0^x (x - t)\{L(t, 0;\ h) - L_1(t)\}\, dt, \quad (2.4.4)$$

что можно сделать, используя очевидное тождество

$$\int_{-\infty}^{+0} \frac{1 - \cos\sqrt{\mu}x}{\mu}\, d\rho(\mu) = \int_0^x (x - t) \int_{-\infty}^{+0} \cos\sqrt{\mu}t\, d\rho(\mu)\, dt =$$

$$= \int_0^x (x - t)\, L_1(t)\, dt.$$

Пусть $f(x)$ — произвольная четная бесконечно дифференцируемая и финитная функция. Умножим обе части равенства (2.4.4) на $f''(x)$ и проинтегрируем по полуоси $[0, \infty)$. В результате получим

$$\int_{+0}^{\infty} C(\sqrt{\mu}, f)\, d\rho(\mu) = f(0) + \int_{0}^{\infty} f(x)\{L(x, 0; h) - L_1(x)\}\, dx.$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1(\lambda) = \frac{\lambda}{\pi}, \quad \sigma_2(\lambda) = \frac{\lambda}{2|\lambda|}\{\rho(\lambda^2) - \rho(+0)\}, \\ &M(x) = L(|x|, 0; h) - L_1(x), \quad \tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx, \end{aligned}\right\} \tag{2.4.5}$$

последнее равенство можем записать так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\, d\sigma_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\, d\sigma_1(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) M(x)\, dx, \tag{2.4.6}$$

причем в силу четности функции $M(x)$ и нечетности функций $\sigma_2(\lambda)$ и $\sigma_1(\lambda)$ оно остается верным для произвольных (не только четных) бесконечно дифференцируемых финитных функций $f(x)$.

Заметим, что функция $M(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию в любой окрестности нуля (она даже абсолютно непрерывна), что вытекает из дифференцируемости функций $L(x, 0; h)$ и $L_1(x)$ на полуоси $[0, \infty)$. Кроме того,

$$M(0) = -h - \rho(+0) + \rho(-\infty), \tag{2.4.7}$$

так как $L(0, 0; h) = -h$ и $L_1(0) = \rho(+0) - \rho(-\infty)$. Если бы функция $M(x)$ была суммируемой на всей вещественной оси, а формула (2.4.6) оставалась верной для всех функций $f(x)$ с суммируемым квадратом на вещественной оси, то, полагая

$$f(x) = \frac{\sin Nx}{\pi x}, \quad \tilde{f}(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| < N, \\ 0, & |\lambda| > N, \end{cases}$$

мы получили бы равенство

$$\sigma_2(N) - \sigma_2(-N) = \sigma_1(N) - \sigma_1(-N) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x} M(x)\, dx,$$

откуда, возвращаясь к функции $\rho(\mu)$ и устремляя N к бесконечности, установили бы, что

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\rho(N^2)-\rho(+0)-\frac{2}{\pi}N\right\}=-h-\rho(+0)+\rho(-\infty),$$

т. е. что при $\mu\to+\infty$

$$\rho(\mu)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\mu}-h+\rho(-\infty)+o(1). \qquad (2.4.8)$$

В действительности все эти операции, конечно, незаконны, но окончательный результат верен. Для его строгого обоснования нам придется сначала доказать одну теорему тауберова типа, которая будет играть существенную роль и в дальнейшем.

Пусть неубывающие и непрерывные слева функции $\sigma_1(\lambda)$ и $\sigma_2(\lambda)$ удовлетворяют следующим условиям.

I. На множестве всех бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$, равных нулю вне интервала $(-b, b)$, справедливо тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\lambda)\,d\sigma_2(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\lambda)\,d\sigma_1(\lambda)+\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,G(x)\,dx, \qquad (2.4.9)$$

где $G(x)$ — некоторая функция, определенная и суммируемая на интервале $(-b, b)$, а $\tilde{f}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$:

$$\tilde{f}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i\lambda x}dx.$$

II. Одна из функций, скажем $\sigma_1(\lambda)$, такова, что

$$\overline{\lim_{|T|\to\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_1(\lambda+T)}{1+\lambda^2}<\infty.$$

Используя эти условия, мы должны будем оценить при больших значениях $|\lambda|$ разность $\sigma_2(\lambda)-\sigma_1(\lambda)$ в зависимости от дифференциальных свойств функции $G(x)$.

Заметим прежде всего, что из условия II следует, что величина

$$\sigma_1^*\left(\frac{1}{p}\right)=\overline{\lim_{|T|\to\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_1(\lambda+T)}{1+p^2\lambda^2}$$

остается конечной при всех значениях $p>0$ и не возрастает с ростом p.

Лемма 2.4.1. *Функция* $\sigma_2(\lambda)$ *тоже удовлетворяет условию II и при всех* $p \in (0, b)$

$$\sigma_2^*\left(\frac{1}{p}\right) \leqslant 5\sigma_1^*\left(\frac{1}{p}\right). \tag{2.4.10}$$

Доказательство. Пусть

$$\tilde{g}(\lambda) = \frac{\operatorname{ch} 1 - \cos\lambda}{1+\lambda^2}, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{2.4.11}$$

Легко убедиться, что функция $g(x)$ равна нулю при $|x| \geqslant 1$. Поэтому функция $\tilde{g}(p(\lambda - T))$ есть преобразование Фурье функции $p^{-1}g(p^{-1}x)\,e^{iTx}$, равной нулю при $|x| \geqslant p$, а функция

$$\tilde{g}_\varepsilon(\lambda) = \tilde{g}(p(\lambda - T))\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin 2^{-k-1}\varepsilon\lambda}{2^{-k-1}\varepsilon\lambda}\right)^2$$

является преобразованием Фурье некоторой бесконечно дифференцируемой функции $g_\varepsilon(x)$, равной нулю при $|x| \geqslant p + \varepsilon$.

Следовательно, если $p + \varepsilon \leqslant b$, то функции $g_\varepsilon(x)$ и $\tilde{g}_\varepsilon(\lambda)$ можно подставить в тождество (2.4.9). Сделаем это и устремим затем ε к нулю. Так как

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{g}_\varepsilon(\lambda) = \tilde{g}(p(\lambda - T)), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(x) = p^{-1}g(p^{-1}x),$$

то, учитывая условия I и II, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}_\varepsilon(\lambda)\,d\sigma_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}(p(\lambda - T))\,d\sigma_1(\lambda) + $$
$$+ p^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} g(p^{-1}x)\,e^{iTx}G(x)\,dx$$

и согласно известным теоремам о переходе к пределу под знаком интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}(\rho(\lambda - T))\,d\sigma_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}(p(\lambda - T))\,d\sigma_1(\lambda) + $$
$$+ p^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} g(p^{-1}x)\,e^{iTx}G(x)\,dx. \tag{2.4.12}$$

Из определения функции $\tilde{g}(\lambda)$ следует, что

$$\frac{\operatorname{ch} 1+1}{1+\lambda^2} \geqslant \tilde{g}(\lambda) \geqslant \frac{\operatorname{ch} 1-1}{1+\lambda^2}.$$

Из этих неравенств и тождества (2.4.12) после замены переменной получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_2(\lambda+T)}{1+p^2\lambda^2} \leqslant \frac{\operatorname{ch} 1+1}{\operatorname{ch} 1-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_1(\lambda+T)}{1+p^2\lambda^2} +$$

$$+\frac{p^{-1}}{\operatorname{ch} 1-1} \int_{-\infty}^{\infty} g(p^{-1}x)\, e^{iTx} G(x)\, dx,$$

откуда, устремляя T к бесконечности и вспоминая, что по теореме Римана — Лебега коэффициенты Фурье суммируемой функции стремятся к нулю, заключаем, что

$$\sigma_2^*\left(\frac{1}{p}\right) \leqslant \frac{\operatorname{ch} 1+1}{\operatorname{ch} 1-1} \sigma_1^*\left(\frac{1}{p}\right) \leqslant 5\sigma_1^*\left(\frac{1}{p}\right).$$

Лемма доказана.

Замечание. Из доказанной леммы следует, что тождество (2.4.9) по непрерывности распространяется на все функции $f(x)$, которые равны нулю при $|x|>b$ и преобразования Фурье которых $\tilde{f}(\lambda)$ удовлетворяют условию

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty} (1+\lambda^2)\,|\tilde{f}(\lambda)| < \infty.$$

Пусть $\varphi(x)$ — произвольная четная функция, имеющая ограниченную вторую производную и удовлетворяющая таким условиям:

$$\varphi(0)=1, \quad \varphi(x)=0 \qquad \text{при } |x| \geqslant 1.$$

В качестве $\varphi(x)$ можно взять, например, функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases}(1-x^2)^2, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1.\end{cases} \tag{2.4.13}$$

Положим

$$f(x)=\frac{\sin Nx}{\pi x}\, \varphi(p^{-1}x)\, e^{iTx} \tag{2.4.14}$$

и найдем преобразование Фурье этой функции:

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x}\,\varphi(p^{-1}x)\,e^{-i(\lambda-T)x}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x}\,e^{-i(\lambda-T)x}dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(p^{-1}x)-1}{x}\sin Nxe^{-i(\lambda-T)x}\,dx = D\left(\frac{\lambda-T}{N}\right) +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)-1}{t}\{e^{-i(\lambda-T-N)pt} - e^{-i(\lambda-T+N)pt}\}\,dt.$$

Отсюда, учитывая четность функции $\varphi(t)$, получаем

$$\tilde{f}(\lambda) = D\left(\frac{\lambda-T}{N}\right) + S_\varphi(p(\lambda-T+N)) - S_\varphi(p(\lambda-T-N)), \tag{2.4.15}$$

где

$$S_\varphi(\mu) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\varphi(t)-1}{t}\sin\mu t dt$$

и $D(\mu)$ — разрывный множитель Дирихле:

$$D(\mu) = \begin{cases} 1, & |\mu| < 1, \\ 0{,}5, & |\mu| = 1, \\ 0, & |\mu| > 1. \end{cases}$$

Так как

$$(1+\mu^2)\,S_\varphi(\mu) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left\{\frac{\varphi(t)-1}{t} - \left[\frac{\varphi(t)-1}{t}\right]''\right\}\sin\mu t dt,$$

то

$$|S_\varphi(\mu)| \leqslant \frac{C_\varphi}{1+\mu^2},$$

где

$$C_\varphi = \sup_{0\leqslant\mu<\infty}\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left\{\frac{\varphi(t)-1}{t} - \left[\frac{\varphi(t)-1}{t}\right]''\right\}\sin\mu t dt\right|.$$

В частности, если функция $\varphi(x)$ определена формулой (2.4.13), то

$$C_\varphi = \sup_{0 \leqslant \mu < \infty} \frac{1}{\pi} \left| -\int_0^1 \{t(2-t^2) - 6t\} \sin \mu t dt - \right.$$

$$\left. -\int_1^\infty \frac{\sin \mu t}{t} dt - 2\int_1^\infty \frac{\sin \mu t}{t^2} dt \right| < 2,$$

так что в этом случае

$$|S_\varphi(\mu)| \leqslant \frac{2}{1+\mu^2}. \tag{2.4.16'}$$

Обозначим через $\widetilde{G}_b(\lambda)$ преобразование Фурье функции $\varphi(b^{-1}x)\, G(x)$ и введем функцию $\tau(\lambda)$, определенную формулой

$$\tau(\lambda) = \sigma_2(\lambda) - \sigma_1(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{0} \widetilde{G}_b(\xi)\, d\xi \tag{2.4.17}$$

в точках непрерывности правой части и равенством

$$\tau(\lambda) = \frac{\tau(\lambda+0) - \tau(\lambda-0)}{2}$$

в точках разрыва.

Лемма 2.4.2. *Если* $A_n > B_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} |A_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |B_n| = \infty$, *то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\tau(A_n) - \tau(B_n)| \leqslant 24\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right).$$

Доказательство. Положим в формуле (2.4.14) $p = b$. Тогда функция $f(x)$, определенная этой формулой, будет равна нулю при $|x| \geqslant b$, а ее преобразование Фурье $\widetilde{f}(\lambda)$ согласно формулам (2.4.15), (2.4.16) будет удовлетворять неравенству $\sup\limits_{-\infty<\lambda<\infty} (1+\lambda^2)|\widetilde{f}(\lambda)| < \infty$. Поэтому для функций $f(x)$ и $\widetilde{f}(\lambda)$ справедливо тождество (2.4.9):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(\lambda)\, d\sigma_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(\lambda)\, d\sigma_1(\lambda) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(b^{-1}x)\, e^{iTx} \frac{\sin Nx}{x} G(x)\, dx,$$

которое, используя формулу (2.4.15) и определение функции $\tau(\lambda)$, можно записать в таком виде:

$$\tau(T+N)-\tau(T-N)=-\sum_{j=1,2}(-1)^j\int_{-\infty}^{\infty}S_\varphi(b\lambda)\times$$
$$\times\, d\{\sigma_j(\lambda+T-N)-\sigma_j(\lambda+T+N)\}. \qquad (2.4.18)$$

Выберем здесь T, N так, чтобы

$$T+N=A_n,\quad T-N=B_n.$$

Тогда на основании неравенства (2.4.16) и леммы (2.4.1) получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\tau(A_n)-\tau(B_n)|\leqslant 2\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{j=1,2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\{\sigma_j(\lambda+A_n)+\sigma_j(\lambda+B_n)\}}{1+b^2\lambda^2}\leqslant$$
$$\leqslant 4\left\{\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right)+\sigma_2^*\left(\frac{1}{b}\right)\right\}\leqslant 24\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right),$$

что и требовалось доказать.

Заметим теперь, что функция $\tau(\lambda)$ вещественна. Действительно, из ее определения (формула (2.4.17)) следует, что $\operatorname{Im}\tau(0)=0$, а из вещественности правой части формулы (2.4.18) — что $\operatorname{Im}\tau(\lambda)=\mathrm{const}$, т. е. $\operatorname{Im}\tau(\lambda)=0$. Поэтому можно ввести величины

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}}\,\tau(\lambda)=M,\quad \underline{\lim_{|\lambda|\to\infty}}\,\tau(\lambda)=m,$$

которые по лемме 2.4.2 конечны и удовлетворяют неравенству

$$M-m\leqslant 24\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right).$$

Из последнего неравенства видно, что все предельные значения при $|\lambda|\to\infty$ функции $\tau(\lambda)$ лежат в сегменте $[m, M]$, длина которого не превышает $24\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right)$. Таким образом, полагая $C=\frac{M+m}{2}$, находим

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}}\,|\tau(\lambda)-C|\leqslant 12\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right). \qquad (2.4.19)$$

Непосредственным следствием этого неравенства является следующая теорема.

Теорема 2.4.1. *Пусть функции* $\sigma_2(\lambda)$, $\sigma_1(\lambda)$ *удовлетворяют условиям* I, II, *а* $\tilde{G}_1(\lambda)$ — *преобразование Фурье* *произвольной функции $G_1(x) \in L^1(-\infty, \infty)$, совпадающей в некоторой окрестности нуля с функцией $G(x)$. Тогда существует такая константа C_1, что*

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}}\left|\sigma_2(\lambda)-\sigma_1(\lambda)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{0}\widetilde{G}_1(\mu)\,d\mu-C_1\right|\leqslant$$

$$\leqslant 12\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right).$$

Доказательство. Если функция $G_1(x)$ совпадает в окрестности нуля с $G(x)$, то функция

$$\frac{G(x)\,\varphi(b^{-1}x)-G_1(x)}{ix}$$

тоже суммируема на всей вещественной оси, и по теореме Римана — Лебега о стремлении к нулю преобразования Фурье суммируемой функции

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{0}\{\widetilde{G}_b(\mu)-\widetilde{G}_1(\mu)\}\,d\mu=$$

$$=\lim_{|\lambda|\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(x)\,\varphi(b^{-1}x)-G_1(x)}{ix}\,(e^{i\lambda x}-1)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(x)\,\varphi(b^{-1}x)-G_1(x)}{ix}\,dx.$$

Отсюда согласно определению (2.4.17) функции $\tau(\lambda)$ и неравенству (2.4.19) следует, что

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}}\left|\sigma_2(\lambda)-\sigma_1(\lambda)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{0}\widetilde{G}_1(\mu)\,d\mu-C_1\right|\leqslant 12\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right),$$

если

$$C_1=C-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(x)\,\varphi(b^{-1}x)-G_1(x)}{ix}\,dx,$$

и теорема доказана.

Следствие. *Пусть функции $\sigma_2(\lambda)$ и $\sigma_1(\lambda)$ удовлетворяют условиям I, II, а функция $G(x)$ удовлетворяет в окрестности нуля условиям, обеспечивающим сходимость ее ряда Фурье в точке $x=0$ к $G(0)$ (например, $G(x)$ непрерывна в нуле* *и имеет ограниченную вариацию в окрестности нуля*). *Тогда*

$$\varlimsup_{\lambda\to+\infty} |\sigma_2(\lambda)-\sigma_2(-\lambda)-\sigma_1(\lambda)+\sigma_1(-\lambda)-G(0)| \leqslant \leqslant 24\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right). \tag{2.4.20}$$

Доказательство. Согласно теореме 2.4.1

$$\varlimsup_{\lambda\to+\infty} \left| \sigma_2(\lambda)-\sigma_2(-\lambda)-\sigma_1(\lambda)+\sigma_1(-\lambda) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \widetilde{G}_1(\mu)\,d\mu \right| \leqslant 24\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right),$$

где в качестве $\widetilde{G}_1(\mu)$ можно взять преобразование Фурье финитной функции $G_1(x)$, совпадающей в некоторой окрестности нуля с $G(x)$. Из условий, которым по предположению удовлетворяет функция $G(x)$, и принципа локализации для интегралов Фурье следует

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda}^{\lambda} \widetilde{G}_1(\mu)\,d\mu = G_1(0) = G(0),$$

что и требовалось доказать.

Теперь можно дать строгое доказательство асимптотической формулы (2.4.8). Действительно, равенство (2.4.6) показывает, что введенные формулами (2.4.5) функции $\sigma_2(\lambda)$ и $\sigma_1(\lambda)$ удовлетворяют условиям I, II при всех значениях b, причем функция $G(x) = M(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию в окрестности нуля, а

$$\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right) = \varlimsup_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_1(\lambda+T)}{1+b^2\lambda^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\lambda}{1+b^2\lambda^2} = \frac{1}{b}.$$

Таким образом, выполнены все условия, при которых было доказано неравенство (2.4.20). Вспоминая формулы (2.4.5) и (2.4.7), устанавливаем, что в данном случае

$$\sigma_2(\lambda)-\sigma_2(-\lambda) = \rho(\lambda^2)-\rho(+0),\quad \sigma_1(\lambda)-\sigma_1(-\lambda) = \frac{2\lambda}{\pi},$$

$$G(0) = M(0) = -h-\rho(+0)+\rho(-\infty)$$

и неравенство (2.4.20) имеет такой вид:

$$\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\left|\rho(\lambda^2)-\frac{2\lambda}{\pi}+h-\rho(-\infty)\right| \leqslant \frac{24}{b},$$

причем $b > 0$ здесь можно брать сколь угодно большим.

Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left|\rho\ (\lambda^2)-\frac{2\lambda}{\pi}+h-\rho(-\infty)\right|=0,$$

что эквивалентно формуле (2.4.8).

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4.2. *Спектральные функции* $\rho(\mu)$ *симметрических краевых задач (2.2.1), (2.2.2.) удовлетворяют следующим условиям:*

$$\lim_{\mu\to\infty} e^{\sqrt{|\mu|}x}(\rho(\mu)-\rho(-\infty))=0 \qquad (0\leqslant x<\infty),$$

$$\lim_{\mu\to+\infty}\left(\rho(\mu)-\rho(-\infty)-\frac{2}{\pi}\sqrt{\mu}\right)=-h.$$

В теореме 2.2.3 было доказано, что любая функция $f(x)\in L^2(0,\infty)$ может быть разложена в интеграл по собственным функциям симметрической краевой задачи, сходящийся в метрике пространства $L^2(0,\infty)$. Теперь докажем теорему о равносходимости таких разложений с разложением той же функции в интеграл Фурье по косинусам.

Лемма 2.4.3. *Если* $\rho(\mu)$ — *спектральная функция симметрической краевой задачи и* $F(\mu)\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, *то при любом* $b>0$

$$\lim_{|N|\to\infty}\int_{+0}^{\infty}\frac{|F(\mu^2)|}{1+b^2(\mu-N)^2}\,d\rho(\mu^2)=0.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать это равенство при $N\to+\infty$. Обозначим через $I_1(N)$ сегмент $\left[\frac{N}{2},\frac{3N}{2}\right]$ и через $I_2(N)$ — его дополнение ко всей полуоси $[0,\infty)$. Разбив интересующий нас интеграл на два, взятые по $I_1(N)$ и $I_2(N)$, применим к каждому из них неравенство Коши — Буняковского:

$$\int_{+0}^{\infty}\frac{|F(\mu^2)|}{1+b^2(\mu-N)^2}\,d\rho(\mu^2)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1,2}\left\{\int_{I_k(N)}|F(\mu^2)|^2\,d\rho(\mu^2)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{I_k(N)}\frac{d\rho(\mu^2)}{[1+b^2(\mu-N)^2]^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Так как при $\mu \in I_2(N)$ $1 + b^2(\mu - N)^2 > 1 + \left(\frac{bN}{2}\right)^2$, то тем более

$$\int_{+0}^{\infty} \frac{|F(\mu^2)|}{1 + b^2(\mu - N)^2}\, d\rho(\mu^2) \leqslant \left\{\int_{+0}^{\infty} \frac{d\rho(\mu^2)}{1 + b^2(\mu - N)^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[\left\{\int_{I_1(N)} |F(\mu^2)|^2\, d\rho(\mu^2)\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\frac{4}{4 + b^2N^2}\int_{+0}^{\infty} |F(\mu^2)|^2 d\rho(\mu^2)\right\}^{\frac{1}{2}}\right].$$

Поскольку $F(\mu) \in L^2_\rho(-\infty, \infty)$, оба слагаемых в квадратной скобке стремятся к нулю при $N \to \infty$ и для доказательства леммы достаточно проверить справедливость неравенства

$$\varlimsup_{N \to +\infty} \int_{+0}^{\infty} \frac{d\rho(\mu^2)}{1 + b^2(\mu - N)^2} < \infty$$

Далее,

$$\int_{+0}^{\infty} \frac{d\rho(\mu^2)}{1 + b^2(\mu - N)^2} = \int_{+0}^{\infty} \frac{d\{\rho(\mu^2) - \rho(+0)\}}{1 + b^2(\mu - N)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_2(\mu)}{1 + b^2(\mu - N)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_2(\mu + N)}{1 + b^2\mu^2},$$

где функция $\sigma_2(\mu)$ определена формулой (2.4.5) и связана с функцией $\sigma_1(\mu) = \frac{1}{\pi}\mu$ тождеством (2.4.6). Воспользовавшись леммой 2.4.1, получим

$$\varlimsup_{N \to \infty} \int_{+0}^{\infty} \frac{d\rho(\mu^2)}{1 + b^2(\mu - N)^2} \leqslant \varlimsup_{N \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_2(\mu + N)}{1 + b^2\mu^2} \leqslant$$

$$\leqslant 5\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{5}{b} < \infty,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.4.3. *Пусть* $f(x)$ — *произвольная функция из пространства* $L^2(0, \infty)$ *и*

$$\omega(\sqrt{\mu}, f) = \int_0^{\infty} f(x)\, \omega(\sqrt{\mu}, x)\, dx,$$

$$C(\sqrt{\mu}, f) = \int_0^{\infty} f(x) \cos \sqrt{\mu} x dx$$

(интегралы сходятся в метриках пространств $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ *и* $L^2_{\{\sqrt{\mu}\}}(0, \infty)$ *соответственно).*

При каждом фиксированном $b < \infty$ *интеграл*

$$\int_{-\infty}^{+0} \omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\,d\rho(\mu)$$

сходится абсолютно и равномерно относительно $x \in [0, b]$ *и*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant b} \left| \int_{-\infty}^{N} \omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\,d\rho(\mu) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{N} C(\sqrt{\mu}, f)\cos\sqrt{\mu}x\,d\sqrt{\mu} \right| = 0.$$

Доказательство. Функция

$$u_M(x, t) = \int_{-M}^{M} \omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\,\omega(\sqrt{\mu}, t)\,d\rho(\mu) \qquad (2.4.21)$$

удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$u''_{xx} - q(x)\,u = u''_{tt} - q(t)\,u$$

и начальным данным

$$u(x, 0) = f_M(x), \quad u'_t(x, 0) = hf_M(x),$$

$$f_M(x) = \int_{-M}^{M} \omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\,d\rho(\mu).$$

Поэтому, используя формулу Римана (1.1.7) и замечая, что $u_M(x, t) = u_M(t, x)$, можно представить ее в таком виде:

$$u_M(x, t) = \frac{f_M(x+t) + f_M(|x-t|)}{2} + \int_{|x-t|}^{x+t} W(x, t, u)\,f_M(u)\,du, \qquad (2.4.22)$$

где ядро $W(x, t, u)$ ограничено в каждой конечной области изменения его аргументов.

Применяя к обеим частям равенства (2.4.21) оператор преобразования, переводящий функции $\omega(\sqrt{\mu}, t)$ в $\cos\sqrt{\mu}t$, получаем

$$\int_{-M}^{M} \omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\cos\sqrt{\mu}t\,d\rho(\mu) =$$

$$= u_M(x, t) + \int_{0}^{t} L(t, \xi)\,u_M(x, \xi)\,d\xi,$$

откуда вытекает тождество

$$\int_{-M}^{M} C(\sqrt{\mu}, g)\, \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, x)\, d\rho(\mu) =$$

$$= \int_{0}^{\infty} g(t) \left\{ u_M(x, t) + \int_{0}^{t} L(t, \xi)\, u_M(x, \xi)\, d\xi \right\} dt \qquad (2.4.23)$$

для всех четных, финитных и бесконечно дифференцируемых функций $g(t)$.

Устремим теперь M к бесконечности. По теореме 2.2.3 последовательность $f_M(x)$ сходится в метрике пространства $L^2(0, \infty)$ к функции $f(x)$. Поэтому из равенств (2.4.22), (2.4.23) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\sqrt{\mu}, g)\, \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, x)\, d\rho(\mu) =$$

$$= \int_{0}^{\infty} g(t) \left\{ \frac{f(x+t) + f(|x-t|)}{2} + A_1(x, t) \right\} dt, \qquad (2.4.24)$$

где

$$A_1(x, t) = \int_{|x-t|}^{x+t} W(x, t, u)\, f(u)\, du +$$

$$+ \int_{0}^{t} L(t, \xi) \left\{ \frac{f(x+\xi) + f(|x-\xi|)}{2} + \int_{|x-\xi|}^{x+\xi} W(x, \xi, u)\, f(u)\, du \right\} d\xi.$$

Поскольку функции $W(x, t, u)$ и $L(t, \xi)$ ограничены в каждой конечной области изменения их аргументов, применяя неравенство Коши — Буняковского, находим

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant b} |A_1(x, t)| \leqslant C_1 t^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{0}^{\infty} |f(u)|^2\, du \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (2.4.25)$$

при всех $t \in [0, b]$.

Как было показано выше, интеграл (2.4.2) сходится при всех значениях x, а из существования операторов преобразования вытекает равномерная по $\mu \in (-\infty, 0)$ оценка $\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant b} |\omega(\sqrt{\mu}, x)| \leqslant Ce^{\sqrt{|\mu|}\, b}$. Поэтому интеграл

$$\int_{-\infty}^{+0} \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, x)\, d\rho(\mu)$$

сходится абсолютно и равномерно относительно $x \in [0, b]$ и функция

$$A_2(x, t) = \int_{-\infty}^{+0} \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, x) \{\cos \sqrt{\mu} t - 1\}\, d\rho(\mu) \quad (2.4.26)$$

удовлетворяет неравенству

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant b} |A_2(x, t)| \leqslant C_2 t \quad (2.4.27)$$

при всех $t \in [0, b]$.

Воспользовавшись теоремой о свертке для интегралов Фурье

$$\int_0^\infty g(t) \frac{f(x+t) + f(|x-t|)}{2}\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty C(\sqrt{\mu}, g)\, C(\sqrt{\mu}, f) \cos \sqrt{\mu} x \, d\sqrt{\mu}$$

и формулой (2.4.26), можем записать равенство (2.4.24) в таком виде:

$$\int_{+0}^\infty C(\sqrt{\mu}, g)\, \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, x)\, d\rho(\mu) -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^\infty C(\sqrt{\mu}, g)\, C(\sqrt{\mu}, f) \cos \sqrt{\mu} x \, d\sqrt{\mu} +$$

$$+ C(0, g) \int_{-\infty}^{+0} \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, x)\, d\rho(\mu) =$$

$$= \int_0^\infty g(t) A_3(x, t)\, dt. \quad (2.4.28)$$

Здесь функция $A_3(x, t) = A_1(x, t) - A_2(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant b} |A_3(x, t)| \leqslant C_3 t^{\frac{1}{2}} \qquad (0 \leqslant t \leqslant b), \quad (2.4.29)$$

вытекающему из оценок (2.4.25) и (2.4.27). Если в тождестве (2.4.28) положить

$$g(t) = g_N(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin Nt}{t} \varphi\left(\frac{t}{a}\right) \qquad (0 < a < b),$$

то согласно формуле (2.4.15) получим

$$\int_{-\infty}^{N^2} \omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\,d\rho(\mu) - \frac{2}{\pi}\int_0^{N^2} C(\sqrt{\mu}, f)\cos\sqrt{\mu}x\,d\sqrt{\mu} =$$

$$= (1 - C(0, g_N))\int_{-\infty}^{+0} \omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\,d\rho(\mu) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{a} \frac{\sin Nt}{t}\,\varphi\left(\frac{t}{a}\right) A_3(x, t)\,dt -$$

$$-\int_{+0}^{\infty} \omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\,[S_\varphi\,(a(\sqrt{\mu} + N)) -$$

$$- S_\varphi\,(a(\sqrt{\mu} - N))]\,d\rho(\mu) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} C(\sqrt{\mu}, f)\cos\sqrt{\mu}x \times$$

$$\times [S_\varphi\,(a(\sqrt{\mu} + N)) - S_\varphi\,(a(\sqrt{\mu} - N))]\,d\sqrt{\mu}.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое, стоящее в правой части этого тождества. Так как функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема, $\varphi(0) = 1$ и

$$1 - C(0, g_N) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin Nt}{t}\,dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin Nt}{t}\,\varphi\left(\frac{t}{a}\right) dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1 - \varphi(a^{-1}t)}{t}\sin Nt\,dt,$$

то по теореме Римана — Лебега $\lim\limits_{N\to\infty}(1 - C(0, g_N)) = 0$. Поэтому первое слагаемое при $N \to \infty$ стремится к нулю равномерно относительно $x \in [0, b]$. Второе и третье слагаемые тоже стремятся к нулю равномерно относительно $x \in [0, b]$. Это вытекает из леммы 2.4.2, если заметить, что

$$\sup_{\substack{0\leqslant x\leqslant b\\ 0\leqslant\mu<\infty}} |\omega(\sqrt{\mu}, x)| < \infty, \quad |\cos\sqrt{\mu}x| \leqslant 1$$

и функция $S_\varphi(\lambda)$ удовлетворяет оценке (2.4.16). Четвертое слагаемое можно оценить, используя неравенство (2.4.29):

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant b}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\sin Nt}{t}\varphi(a^{-1}t)A_3(x,t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3}{\pi}\int_0^a t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2C_3\sqrt{a}}{\pi}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\sup_{0\leqslant x\leqslant b}\left|\int_{-\infty}^{N^2}\omega(\sqrt{\mu},f)\,\omega(\sqrt{\mu},x)\,d\rho(\mu)-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}\int_0^{N^2} C(\sqrt{\mu},f)\cos\sqrt{\mu}x\,d\sqrt{\mu}\right|\leqslant\frac{2C_3\sqrt{a}}{\pi}$$

и в силу произвольной малости a

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\sup_{0\leqslant x\leqslant b}\left|\int_{-\infty}^{N^2}\omega(\sqrt{\mu},f)\,\omega(\sqrt{\mu},x)\,d\rho(\mu)-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}\int_0^{N^2} C(\sqrt{\mu},f)\cos\sqrt{\mu}x\,d\sqrt{\mu}\right|=0,$$

что и требовалось доказать.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что неубывающая функция $\rho(\mu)$ $(-\infty<\mu<\infty)$ тогда и только тогда является спектральной для некоторой симметрической краевой задачи вида (2.2.1), (2.2.2), когда функция

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\sqrt{\mu}x}{\mu}\,d\rho(\mu)\qquad(0<x<\infty)$$

трижды непрерывно дифференцируема и $\Phi'(+0)=1$.

Указание. Согласно теореме 2.3.1 достаточно убедиться, что

$$(f(\lambda)\overline{f(\bar\lambda)},R)=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\sqrt{\mu})|^2\,d\rho(\mu)>0,$$

если $f(\lambda)\in CK^2(\sigma)$ и не равна нулю тождественно.

Допустим противное. Тогда

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\sqrt{\mu})|^2\,d\rho(\mu)\geqslant\int_{+0}^{\infty}|f(\sqrt{\mu})|^2\,d\rho(\mu)=\int_{+0}^{\infty}|f(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda^2),$$

что возможно лишь в том случае, когда точки роста функции $\rho(\lambda^2)$ образуют дискретное множество, состоящее из нулей функции $f(\lambda)$.

Поскольку функция $f(\lambda)$ целая экспоненциального типа σ, то $\overline{\lim\limits_{a\to\infty}}\, a^{-1} n(a) < \infty$, где $n(a)$ — число ее нулей, лежащих в интервале $(0, a)$. С другой стороны, если выполнены условия задачи, то в силу теоремы 2.4.1 для функции $\rho(\lambda^2)$ справедлива асимптотическая формула

$$\rho(\lambda^2) = \frac{2}{\pi}\lambda + C + o(1) \qquad (\lambda \to +\infty),$$

из которой следует, что при любом $\delta > 0$ каждый интервал $(b, b+\delta)$ содержит ее точки роста, если b достаточно велико. Поэтому $\lim\limits_{a\to\infty} a^{-1} m(a) = \infty$, где $m(a)$ — число точек роста функции $\rho(\lambda^2)$, лежащих в интервале $(0, a)$, что приводит к противоречию.

2. Доказать, что спектральные функции $\rho(\mu)$ симметрических краевых задач

$$y'' - q(x)\,y + \lambda^2 y = 0 \qquad (0 \leqslant x < a < \infty), \quad y(0)\,h - y'(0) = 0$$

$(\operatorname{Im} q(x) = \operatorname{Im} h = 0$; функция $q(x)$ непрерывна при $0 \leqslant x < a)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{\mu\to-\infty} e^{\sqrt{|\mu|}}\,|\rho(\mu) - \rho(-\infty)| = 0 \qquad (0 \leqslant x < a),$$

$$\overline{\lim_{\mu\to+\infty}}\left|\rho(\mu) - \rho(-\infty) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\mu} + h\right| \leqslant \frac{12}{a}.$$

Указание. Нужный результат вытекает из теоремы 2.4.1 и ее следствия (формула 2.4.20), если учесть, что формула (2.4.1) в данном случае выполняется при всех $x \in [0, 2a)$.

3. Доказать, что спектральные матрицы $\rho(\mu)$ (операторные меры) симметрических операторных краевых задач Штурма — Лиувилля удовлетворяют условиям

$$\lim_{\mu\to-\infty} e^{\sqrt{|\mu|}\,x}\,|\rho(\mu) - \rho(-\infty)| = 0 \qquad (0 \leqslant x < \infty),$$

$$\lim_{\mu\to+\infty}\left|\rho(\mu) - \rho(-\infty) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\mu}I + h\right| = 0.$$

Здесь и дальше $|\mathrm{A}|$ — норма оператора $\mathrm{A} \in H$.

4. Доказать, что спектральные матрицы $\rho(\lambda)$ симметрических краевых задач Дирака удовлетворяют условию

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\left|\rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}P - \frac{P\Omega(0)P}{\pi}\ln|\lambda| + \frac{\lambda}{2|\lambda|}PB\Omega(0)P\right| = 0,$$

если при $x \to 0$

$$|\Omega(x) - \Omega(0)| \leqslant Cx^{\alpha} \qquad (\alpha > 0). \tag{2.4.30}$$

Указание. Из формулы $R = \frac{1}{\pi}(P + \tilde{\omega}_0(L, P))$ следует, что

$$(\omega_0(\lambda, f;\, P), R) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_0(\lambda, f;\, P)\,P\,d\lambda + \int_0^{\infty} f(x)\,L_p(x, 0)\,P\,dx.$$

После элементарных преобразований это равенство приводится к такому виду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 2f(0)\, P + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{P - i\frac{x}{|x|} PB\right\} L_p(|x|, 0)\, P dx,$$

где $f(x)$ — произвольная финитная бесконечно дифференцируемая функция, а $\tilde{f}(\lambda)$ — ее преобразование Фурье. Из равенства

$$L_p(x, 0) + K_p(x, 0) + \int_0^x K_p(x, t)\, L_p(t, 0)\, dt = 0,$$

формул (1.2.7), (1.2.9), (1.2.39′) и оценки (1.2.38′), используя условие (2.4.30), находим

$$|L_p(x, 0) + B\Omega(0)\, P| \leqslant Cx^{\alpha} \qquad (x \to 0).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\, P d\lambda +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, P \left\{M(x) - B\Omega(0) - i\frac{x}{|x|}\Omega(0)\right\} P dx,$$

где $|M(x)| \leqslant C|x|^{\alpha}$ при $x \to 0$. Нужный результат теперь вытекает из теоремы 2.4.1 и признака Дини сходимости ряда Фурье и ему сопряженного.

5. Пусть нечетные функции $\sigma_2(\lambda)$ и $\sigma_1(\lambda) = \lambda$ удовлетворяют условиям I, II при всех $b > 0$, а функция $G(x) = G(-x)$ дважды дифференцируема на полуоси $0 < x < \infty$:

$$G(x) = G(+0) + xG'(+0) + \int_0^x (x - t)\, G''(t)\, dt \qquad (0 < x < \infty),$$

причем

$$M_2(b) = \sup_{0<x<b} |G''(x)| < \infty \qquad (0 < b < \infty).$$

Доказать, что при этих условиях теорема 2.4.1 допускает следующее уточнение:

$$\sup_{\lambda \geqslant N > 0} \left|\sigma_2(\lambda) - \lambda - \frac{1}{2} G(+0)\right| \leqslant \frac{10^3}{b(N)} \left\{1 + \right.$$

$$\left. + \frac{G(+0) + G'(+0)\, b(N)}{N}\right\},$$

где $b(N)$ — корень уравнения

$$b^2 M_2(b) = N. \qquad (2.4.31)$$

Указание. Положить в формуле (2.4.18) $T = 0$ и оценить ее правую часть, непосредственно используя равенство (2.4.12), в котором второе слагаемое в правой части нужно один раз проинтегрировать по частям, введя множитель e^{iTx} под знак дифференциала. Затем оценить разность

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(b^{-1}x)\frac{\sin Nx}{x}G(x)\,dx-G(+0)=$$

$$=-\frac{2}{\pi N}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(b^{-1}x)\frac{G(x)-G(+0)}{x}\,d\cos Nx+$$

$$+G(+0)\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(b^{-1}x)\frac{\sin Nx}{x}\,dx-1\right\},$$

интегрируя первое слагаемое в правой части по частям и используя для оценки второго формулу (2.4.15). Наконец, выбрать b из условия (2.4.31).

6. Воспользоваться результатом предыдущей задачи для оценки величины

$$\rho(\mu)-\frac{2}{\pi}\sqrt{\mu}-\rho(-\infty)+h$$

при $\mu\to+\infty$, где $\rho(\mu)$ — спектральная функция краевой задачи Штурма — Лиувилля с непрерывно дифференцируемой на полуоси $(0, \infty)$ функцией $q(x)$.

Глава 3

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

§ 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

В этой главе детально изучена краевая задача, порождаемая на полуоси $0 \leqslant x < \infty$ дифференциальным уравнением

$$y'' - q(x) y + \lambda^2 y = 0 \tag{3.1.1}$$

и краевым условием

$$y(0) = 0 \tag{3.1.2}$$

в том важном частном случае, когда функция $q(x)$ вещественна и удовлетворяет неравенству

$$\int_0^\infty x |q(x)| \, dx < \infty, \tag{3.1.3}$$

которое везде в дальнейшем считается выполненным.

Из условия (3.1.3) видно, что при $x \to \infty$ уравнение (3.1.1) переходит в простейшее $y'' + \lambda^2 y = 0$. Это позволяет весьма полно исследовать свойства решений уравнения (3.1.1), что и сделано в настоящем параграфе.

Введем следующие обозначения:

$$\sigma(x) = \int_x^\infty |q(t)| \, dt, \quad \sigma_1(x) = \int_x^\infty \sigma(t) \, dt. \tag{3.1.4}$$

Легко убедиться, что условие (3.1.3) эквивалентно суммируемости функции $\sigma(x)$ на всей полуоси $[0, \infty)$, т. е. эквивалентно неравенству $\sigma_1(0) < \infty$.

Лемма 3.1.1. *При всех λ из замкнутой верхней полуплоскости уравнение (3.1.1) имеет решение $e(\lambda, x)$, представимое в виде*

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt, \tag{3.1.5}$$

где ядро $K(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$|K(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\}. \quad (3.1.6)$$

Кроме того,

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty q(t)\,dt. \quad (3.1.6')$$

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} q(t)\, e(\lambda, t)\,dt, \quad (3.1.7)$$

равносильное дифференциальному уравнению (3.1.1) с граничным условием $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-i\lambda x} e(\lambda, x) = 1$, и будем искать его решение в виде (3.1.5).

Подставляя в (3.1.7) вместо $e(\lambda, x)$ его представление в виде (3.1.5), получаем

$$\int_x^\infty K(x,t)\, e^{i\lambda t}dt = \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{i\lambda s} q(s)\,ds +$$

$$+ \int_x^\infty q(s)\left\{\int_s^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{i\lambda u} K(s,u)\,du\right\}ds. \quad (3.1.7')$$

Так как

$$\frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{i\lambda u} = \frac{1}{2}\int_{-s+u+x}^{s+u-x} e^{i\lambda\xi}d\xi, \quad (3.1.8)$$

то

$$\int_x^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{i\lambda s} q(s)\,ds = \frac{1}{2}\int_x^\infty q(s)\left\{\int_x^{2s-x} e^{i\lambda t}dt\right\}ds,$$

откуда, после перемены порядка интегрирования, находим

$$\int_x^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{i\lambda s} q(s)\,ds = \frac{1}{2}\int_x^\infty e^{i\lambda t}\left\{\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty q(s)\,ds\right\}dt. \quad (3.1.9)$$

Снова используя формулу (3.1.8), получаем

$$\int_x^\infty q(s)\left\{\int_s^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{i\lambda u} K(s,u)\,du\right\}ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_x^\infty q(s)\left\{\int_s^\infty K(s,u)\int_{-s+u+x}^{s+u-x} e^{i\lambda t}dt\,du\right\}ds.$$

Продолжая функцию $K(s, u)$ нулем при $u < s$, находим для всех $s \geqslant x$

$$\int_s^\infty K(s,u)\int_{-s+u+x}^{s+u-x} e^{i\lambda t}dt\,du = \int_{-\infty}^\infty K(s,u)\left\{\int_{-s+u+x}^{s+u-x} e^{i\lambda t}dt\right\}du =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda t}\left\{\int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} K(s,u)\,du\right\}dt = \int_x^\infty e^{i\lambda t}\left\{\int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} K(s,u)\,du\right\}dt,$$

так как при $t < x$

$$\int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} K(s,u)\,du = 0.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\int_x^\infty q(s)\left\{\int_s^\infty K(s,u)\int_{-s+u+x}^{s+u-x} e^{i\lambda t}dt\,du\right\}ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_x^\infty e^{i\lambda t}\left\{\int_x^\infty q(s)\int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} K(s,u)\,du\,ds\right\}dt. \qquad (3.1.10)$$

Из формул (3.1.9), (3.1.10) следует, что равенство (3.1.7′) выполняется, если функция $K(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$K(x,t) = \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty q(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_x^\infty q(s)\int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} K(s,u)\,du\,ds \qquad (3.1.11)$$

и условию $K(x, t) = 0$ при $t < x$. На рис. 3 изображена область интегрирования в двойном интеграле, стоящем в правой части формулы (3.1.11). Она состоит из двух частей (*1*, *2*). Но в области *2* $s > u$ и, следовательно, $K(s, u) = 0$. Поэтому фактически в уравнении (3.1.11) двойной интеграл нужно брать только по области 1. Делая в этом интеграле замену переменных

$$u + s = 2\alpha, \quad u - s = 2\beta,$$

приходим к следующему уравнению:

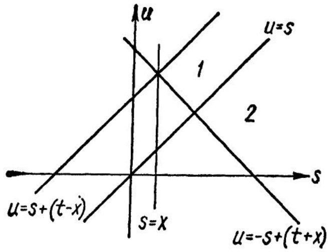

Рис. 3.

$$K(x, t) = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} q(s)\, ds + \int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} d\alpha \int\limits_{0}^{\frac{t-x}{2}} q(\alpha - \beta) K(\alpha - \beta, \alpha + \beta)\, d\beta, \tag{3.1.12}$$

в котором уже автоматически учтено, что $K(x, t) = 0$ при $x > t$. Полагая

$$H(\alpha, \beta) = K(\alpha - \beta, \alpha + \beta), \qquad x + t = 2u, \quad t - x = 2v,$$

полученное уравнение можем переписать в таком виде:

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int\limits_{u}^{\infty} q(s)\, ds + \int\limits_{u}^{\infty} d\alpha \int\limits_{0}^{v} q(\alpha - \beta) H(\alpha, \beta)\, d\beta. \tag{3.1.13}$$

Таким образом, для того чтобы закончить доказательство леммы, нам достаточно показать, что уравнение (3.1.13) имеет решение, удовлетворяющее неравенству

$$|H(u, v)| \leqslant \frac{1}{2} \sigma(u) \exp\{\sigma_1(u - v) - \sigma_1(u)\}. \tag{3.1.14}$$

Положим

$$H_0(u, v) = \frac{1}{2} \int\limits_{u}^{\infty} q(s)\, ds,$$

$$H_n(u, v) = \int\limits_{u}^{\infty} d\alpha \int\limits_{0}^{v} q(\alpha - \beta) H_{n-1}(\alpha, \beta)\, d\beta$$

и покажем, что

$$|H_n(u, v)| \leqslant \frac{1}{2} \sigma(u) \cdot \frac{\{\sigma_1(u - v) - \sigma_1(u)\}^n}{n!}, \tag{3.1.14'}$$

откуда, очевидно, будет следовать, что ряд

$$H(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u, v)$$

сходится, а его сумма $H(u, v)$ удовлетворяет неравенству (3.1.14) и является решением уравнения (3.1.13).

Справедливость оценок (3.1.14) устанавливается по индукции. При $n = 0$ такая оценка, очевидно, верна, и если она верна для $H_n(u, v)$, то, учитывая монотонность функций $\sigma(x)$ и $\sigma_1(x)$, получаем

$$|H_n(u, v)| \leqslant \frac{1}{2}\int_u^\infty d\alpha \int_0^v q(\alpha-\beta)\frac{\sigma(\alpha)\{\sigma_1(\alpha-\beta)-\sigma_1(\alpha)\}^n}{n!}\,d\beta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma(u)}{2\cdot n!}\int_u^\infty \{\sigma_1(\alpha-v)-\sigma_1(\alpha)\}^n\{\sigma(\alpha-v)-\sigma(\alpha)\}\,d\alpha =$$

$$= \frac{\sigma(u)}{2}\cdot\frac{\{\sigma_1(u-v)-\sigma_1(u)\}^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Формула (3.1.6) непосредственно следует из (3.1.11), если положить $t = x$. Лемма доказана.

Оператор $\mathbf{I}+\mathbf{K}$, определенный формулой

$$(\mathbf{I}+\mathbf{K})f = f(x) + \int_x^\infty K(x, t)\, f(t)\,dt,$$

называется оператором преобразования, сохраняющим на бесконечности асимптотику решений. Поскольку в этой главе речь идет только о таких операторах, они называются просто операторами преобразования.

Замечание. Из оценки (3.1.6) следует, что оператор преобразования $\mathbf{I}+\mathbf{K}$ осуществляет взаимно однозначное отображение каждого из пространств $L^i(0, \infty)$ $(i = 1, 2, \infty)$ на себя и обратный оператор $(\mathbf{I}+\mathbf{K})^{-1} = \mathbf{I}+\mathbf{L}$ имеет такой же вид:

$$(\mathbf{I}+\mathbf{L})f = f(x) + \int_x^\infty L(x, t)\, f(t)\,dt.$$

Нетрудно оценить ядро $L(x, t)$, используя уравнение

$$L(x, y) + K(x, y) + \int_x^y L(x, t)\,K(t, y)\,dt = 0.$$

Оказывается, что

$$|L(x, y)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+y}{2}\right)\exp\left\{\sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right)-\sigma_1(y)\right\}.$$

Но эта оценка нам не понадобится.

Лемма 3.1.2. *Функция $K(x, t)$ имеет первые частные производные по обеим переменным, причем*

$$\left|\frac{\partial K(x_1, x_2)}{\partial x_j} + \frac{1}{4} q\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sigma(x_1) \sigma\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \exp\left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right\}. \quad (3.1.15)$$

Доказательство. Учитывая, что $H(u, v) = K(u - v, u + v)$, нам достаточно доказать существование производных у функции $H(u, v)$. Но это непосредственно следует из уравнения (3.1.13) и оценки

$$|H(u, v)| \leqslant \frac{1}{2} \sigma(u) \exp\{\sigma_1(u - v) - \sigma_1(u)\}, \quad (3.1.16)$$

причем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H(u, v)}{\partial u} &= -\frac{1}{2} q(u) - \int_0^v q(u - \beta) H(u, \beta)\, d\beta, \\ \frac{\partial H(u, v)}{\partial v} &= \int_u^\infty q(\alpha - v) H(\alpha, v)\, d\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (3.1.16')$$

Из этих равенств, используя оценку (3.1.14), получаем

$$\left|\frac{\partial H(u, v)}{\partial u} + \frac{1}{2} q(u)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sigma(u) \sigma(u - v) \exp\{\sigma_1(u - v) - \sigma_1(u)\},$$

$$\left|\frac{\partial H(u, v)}{\partial v}\right| \leqslant \frac{1}{2} \sigma(u) \sigma(u - v) \exp\{\sigma_1(u - v) - \sigma_1(u)\}$$

и, следовательно, при $2u = x + t$, $2v = t - x$

$$\left|\frac{\partial K(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{4} q\left(\frac{x + t}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial H(u, v)}{\partial u} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial H(u, v)}{\partial v} + \frac{1}{2} q(u)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sigma(x) \sigma\left(\frac{x + t}{2}\right) \exp\left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x + t}{2}\right)\right\},$$

$$\left|\frac{\partial K(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{4} q\left(\frac{x + t}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial H(u, v)}{\partial u} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial H(u, v)}{\partial v} + \frac{1}{2} q(u)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sigma(x) \sigma\left(\frac{x + t}{2}\right) \exp\left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x + t}{2}\right)\right\}.$$

Замечание. Из равенств (3.1.16') следует, что функция $H(u, v)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 H(u, v)}{\partial u \partial v} = -q(u-v) H(u, v),$$

удовлетворяющим условию

$$\frac{\partial H(u, 0)}{\partial u} = -\frac{1}{2} q(u).$$

При этом, если функция $q(u)$ дифференцируема, то $H(u, v)$ имеет все производные второго порядка. Поэтому ядро $K(x, t)$ дважды дифференцируемо, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} - q(x) K(x, t) = 0 \qquad (3.1.17)$$

и условиям

$$\frac{d}{dx} K(x, x) = -\frac{1}{2} q(x), \qquad (3.1.18)$$

$$\lim_{x+t\to\infty} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} = \lim_{x+t\to\infty} \frac{\partial K(x, t)}{\partial t} = 0, \qquad (3.1.18')$$

которые определяют его однозначно.

Таким образом, в этом случае, для того чтобы функция $K(x, t)$ была ядром оператора преобразования, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (3.1.17), (3.1.18) и (3.1.18').

Лемма 3.1.3. *Решение $e(\lambda, x)$ является аналитической функцией от λ в верхней полуплоскости и непрерывной на вещественной оси. Во всей полуплоскости* $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ *справедливы такие оценки:*

$$|e(\lambda, x)| \leqslant \exp\{-\operatorname{Im}\lambda x + \sigma_1(x)\}, \qquad (3.1.19)$$

$$|e(\lambda, x) - e^{i\lambda x}| \leqslant \left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right\} \times$$
$$\times \exp\{-\operatorname{Im}\lambda x + \sigma_1(x)\}, \qquad (3.1.20)$$

$$|e'(\lambda, x) - i\lambda e^{i\lambda x}| \leqslant \sigma(x) \exp\{-\operatorname{Im}\lambda x + \sigma_1(x)\}. \qquad (3.1.21)$$

При вещественных $\lambda \neq 0$ функции $e(\lambda, x)$ и $e(-\lambda, x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.1.1) *и их вронскиан равен $2i\lambda$:*

$$W\{e(\lambda, x), e(-\lambda, x)\} = e'(\lambda, x) e(-\lambda, x) -$$
$$- e(\lambda, x) e'(-\lambda, x) = 2i\lambda. \qquad (3.1.22)$$

Доказательство. Аналитичность функции $e(\lambda, x)$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ непосредственно следует из формулы (3.1.5) и оценки (3.1.6). Далее,

$$|e(\lambda, x)| = \left| e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t)\, e^{i\lambda t} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\operatorname{Im}\lambda x} \left[1 + \int_x^\infty |K(x, t)|\, dt \right],$$

откуда, используя (3.1.6), получаем

$$|e(\lambda,x)| \leqslant e^{-\operatorname{Im}\lambda x} \left[1 + \frac{1}{2} \int_x^\infty \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\} dt \right] =$$

$$= \exp\{-\operatorname{Im}\lambda x + \sigma_1(x)\}.$$

Таким образом, неравенство (3.1.19) доказано.

Заметим теперь, что функции $e(\lambda, x)$ удовлетворяют уравнению (3.1.7). Используя это уравнение и оценку (3.1.19), находим

$$|e(\lambda, x) - e^{i\lambda x}| \leqslant \int_x^\infty \left| \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} q(t) \right| e^{-\operatorname{Im}\lambda(t-x)} dt \times$$

$$\times \exp\{-\operatorname{Im}\lambda x + \sigma_1(x)\},$$

$$|e'(\lambda, x) - i\lambda e^{i\lambda x}| \leqslant \int_x^\infty |\cos\lambda(t-x)\, q(t)|\, e^{-\operatorname{Im}\lambda(t-x)} dt \times$$

$$\times \exp\{-\operatorname{Im}\lambda x + \sigma_1(x)\}.$$

Для λ, лежащих в замкнутой верхней полуплоскости,

$$\left| \frac{\sin\lambda y}{\lambda} \right| e^{-\operatorname{Im}\lambda y} \leqslant \frac{1}{|\lambda|}, \qquad \left| \frac{\sin\lambda y}{\lambda} \right| e^{-\operatorname{Im}\lambda y} \leqslant y,$$

$$|\cos\lambda y|\, e^{-\operatorname{Im}\lambda y} \leqslant 1$$

при всех $y \geqslant 0$.

Поэтому

$$\int_x^\infty \left| \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} \right| e^{-\operatorname{Im}\lambda(t-x)} |q(t)|\, dt \leqslant \int_x^{x+\frac{1}{|\lambda|}} (t-x)\, |q(t)|\, dt +$$

$$+\frac{1}{|\lambda|}\int\limits_{x+\frac{1}{|\lambda|}}^{\infty}|q(t)|\,dt=-(t-x)\,\sigma(t)\Big|_{x}^{x+\frac{1}{|\lambda|}}+$$

$$+\int\limits_{x}^{x+\frac{1}{|\lambda|}}\sigma(t)\,dt+\frac{1}{|\lambda|}\sigma\left(x+\frac{1}{|\lambda|}\right)=$$

$$=\sigma_1(x)-\sigma_1\left(x+\frac{1}{|\lambda|}\right),$$

$$\int\limits_{x}^{\infty}|\cos\lambda(t-x)|\,e^{-\operatorname{Im}\lambda(t-x)}|q(t)|\,dt\leqslant\sigma(x).$$

Справедливость оценок (3.1.20), (3.1.21) вытекает из этих неравенств. При вещественных $\lambda\neq 0$ обе функции $e(\lambda, x)$ и $e(-\lambda, x)$ определены и удовлетворяют одному и тому же уравнению (3.1.1). Поэтому их вронскиан $W\{e(\lambda, x), e(-\lambda, x)\}$ не зависит от x, а так как согласно (3.1.20), (3.1.21)

$$\lim_{x\to\infty}W\{e(\lambda, x), e(-\lambda, x)\}=2i\lambda,$$

то

$$W\{e(\lambda, x), e(-\lambda, x)\}=2i\lambda$$

и лемма полностью доказана.

Лемма 3.1.4. *При всех значениях λ уравнение (3.1.1) имеет решение $\omega(\lambda, x; \infty)$, удовлетворяющее при $x\to 0$ условиям*

$$\omega(\lambda, x;\ \infty)=x(1+o(1)),\quad \omega'_x(\lambda, x;\ \infty)=1+o(1). \tag{3.1.23}$$

Это решение является целой функцией от λ и при $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$ удовлетворяет неравенству

$$|(\lambda\omega(\lambda, x;\ \infty)-\sin\lambda x)\,e^{i\lambda x}|\leqslant$$
$$\leqslant\left[\sigma_1(0)-\sigma_1\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right]\exp\left\{\int\limits_0^x t\,|q(t)|\,dt\right\}. \tag{3.1.24}$$

Доказательство. Если функция $\omega(\lambda, x;\ \infty)=O(x)$ при $x\to 0$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\omega(\lambda, x;\ \infty)=\frac{\sin\lambda x}{\lambda}+\int\limits_0^x\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}q(t)\,\omega(\lambda, t;\ \infty)\,dt, \tag{3.1.25}$$

то она, очевидно, является решением уравнения (3.1.1). Будем искать решение этого интегрального уравнения при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ в виде $\omega(\lambda, x; \infty) = xe^{-i\lambda x} Z(\lambda, x)$. Тогда для функции $Z(\lambda, x)$ получим уравнение

$$Z(\lambda, x) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda x} e^{i\lambda x} + \int_0^x \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} e^{i\lambda(x-t)} tq(t) Z(\lambda, t)\, dt, \tag{3.1.26}$$

решение которого можно найти методом последовательных приближений, положив

$$Z(\lambda, x) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(\lambda, x), \tag{3.1.27}$$

где

$$Z_0(\lambda, x) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda x} e^{i\lambda x},$$

$$Z_k(\lambda, x) = \int_0^x \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} e^{i\lambda(x-t)} tq(t) Z_{k-1}(\lambda, t)\, dt.$$

Так как при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, $0 \leqslant t < x$,

$$\left| \frac{\sin \lambda x}{\lambda x} e^{i\lambda x} \right| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x e^{2i\lambda\xi} d\xi \right| \leqslant 1,$$

$$\left| \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda x} e^{i\lambda(x-t)} \right| \leqslant 1 - \frac{t}{x} \leqslant 1,$$

то ряд (3.1.27) мажорируется рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k(x),$$

в котором

$$\zeta_0(x) = 1, \qquad \zeta_k(x) = \int_0^x t\,|q(t)|\,\zeta_{k-1}(t)\, dt.$$

Последний заведомо сходится равномерно в каждом конечном интервале полуоси $[0, \infty)$, так как

$$0 \leqslant \zeta_k(x) \leqslant \frac{1}{k!} \left[\int_0^x t\,|q(t)|\, dt \right]^k,$$

что легко доказывается по индукции. Отсюда следует, что ряд (3.1.27) при любом $a > 0$ сходится равномерно в области $0 \leqslant x \leqslant a$, $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$, а его сумма $Z(\lambda, x)$ удовлетворяет уравнению (3.1.26), неравенству

$$|Z(\lambda, x)| \leqslant \exp\left\{\int_0^x t\,|q(t)|\,dt\right\} \tag{3.1.28}$$

и является аналитической функцией от λ при $\operatorname{Im} \lambda > 0$ непрерывной в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$. Но это означает, что функция $\omega(\lambda, x; \infty) = xe^{-i\lambda x} Z(\lambda, x)$ удовлетворяет уравнениям (3.1.25), (3.1.1), неравенству

$$|\omega(\lambda, x; \infty)\, e^{i\lambda x}| \leqslant x \exp\left\{\int_0^x t\,|q(t)|\,dt\right\} \tag{3.1.28$'$}$$

и является аналитической функцией от λ при $\operatorname{Im} \lambda > 0$ непрерывной в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$.

Аналогично доказывается, что уравнение (3.1.25) разрешимо при $\operatorname{Im} \lambda \leqslant 0$ и что его решение $\omega(\lambda, x; \infty)$ регулярно по λ в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda < 0$ и непрерывно при $\operatorname{Im} \lambda \leqslant 0$. Поэтому $\omega(\lambda, x; \infty)$ является решением уравнения (3.1.1), обращающимся в нуль при $x = 0$, причем относительно λ это целая функция.

Из уравнения (3.1.25), уравнения, которое получается из него дифференцированием по x, и оценки (3.1.28$'$) находим

$$\left.\begin{aligned}
&\left|\omega(\lambda, x; \infty) - \frac{\sin \lambda x}{\lambda}\right| \leqslant \\
&\leqslant x \int_0^x t\,|q(t)|\,dt \exp\left\{|\operatorname{Im} \lambda x| + \int_0^x t\,|q(t)|\,dt\right\}, \\
&|\omega'(\lambda, x; \infty) - \cos \lambda x| \leqslant \\
&\leqslant \int_0^x t\,|q(t)|\,dt \exp\left\{|\operatorname{Im} \lambda x| + \int_0^x t\,|q(t)|\,dt\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.28$''$}$$

Следовательно, функция $\omega(\lambda, x; \infty)$ удовлетворяет условиям (3.1.23).

Снова используя уравнение (3.1.25) и оценку (3.1.28$'$), получаем при $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$

$$|\lambda\omega(\lambda, x; \infty)\, e^{i\lambda x} - \sin \lambda x e^{i\lambda x}| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x |\sin\lambda(x-t)\, e^{i\lambda(x-t)}|\, t\, |q(t)\, Z(\lambda, t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x t\,|q(t)| \exp\left\{\int_0^t \xi\,|q(\xi)|\, d\xi\right\} dt = \exp\left\{\int_0^x t\,|q(t)|\, dt\right\} - 1,$$

откуда, в частности, следует, что

$$|\lambda\omega(\lambda, x; \infty)\, e^{i\lambda x} - \sin\lambda x e^{i\lambda x}| \leqslant \int_0^x t\,|q(t)|\, dt \times$$

$$\times \exp\left\{\int_0^x t\,|q(t)|\, dt\right\}, \tag{3.1.29}$$

$$|\lambda\omega(\lambda, x;\ \infty)| \leqslant \exp\left\{\int_0^x t\,|q(t)|\, dt\right\}. \tag{3.1.30}$$

Пусть теперь $\mathrm{Im}\lambda \geqslant 0$ и $\frac{1}{|\lambda|} < x$. Тогда согласно (3.1.25), (3.1.28) и (3.1.30)

$$|\lambda\omega(\lambda, x; \infty)\, e^{i\lambda x} - \sin\lambda x e^{i\lambda x}| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x |\sin\lambda(x-t)\, e^{i\lambda(x-t)} q(t)\, e^{i\lambda t}\omega(\lambda, t;\ \infty)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} t\,|q(t)|\, dt + \frac{1}{|\lambda|}\int_{\frac{1}{|\lambda|}}^x |q(t)|\, dt\right\} \exp\left\{\int_0^x t\,|q(t)|\, dt\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{|\lambda|}\sigma\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) + \int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} \sigma(t)\, dt + \frac{1}{|\lambda|}\left[\sigma\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) - \sigma(x)\right]\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\int_0^x t\,|q(t)|\, dt\right\} \leqslant \left[\sigma_1(0) - \sigma_1\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right] \exp\left\{\int_0^x t\,|q(t)|\, dt\right\}$$

и справедливость неравенства (3.1.24) доказана для $\frac{1}{|\lambda|} < x$. При $\frac{1}{|\lambda|} \geqslant x$ справедливость этого неравенства вытекает из (3.1.29), если заметить, что

$$\int_0^x t\,|q(t)|\,dt = -x\sigma(x) + \int_0^x \sigma(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_1(0) - \sigma_1(x) \leqslant \sigma_1(0) - \sigma_1\left(\frac{1}{|\lambda|}\right).$$

Лемма 3.1.5. *При всех вещественных значениях $\lambda \neq 0$ справедливо тождество*

$$-\frac{2i\lambda\omega(\lambda, x; \infty)}{e(\lambda, 0)} = e(-\lambda, x) - S(\lambda)\,e(\lambda, x), \quad (3.1.31)$$

где

$$S(\lambda) = \frac{e(-\lambda, 0)}{e(\lambda, 0)} = \overline{S(-\lambda)} = [S(-\lambda)]^{-1}. \quad (3.1.32)$$

Доказательство. Так как функции $e(-\lambda, x)$ и $e(\lambda, x)$ при вещественных $\lambda \neq 0$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.1.1), то

$$\omega(\lambda, x; \infty) = A^{-}e(-\lambda, x) + A^{+}e(\lambda, x).$$

Из формулы (3.1.22) вытекает, что

$$W\{\omega(\lambda, x; \infty),\ e(\mp\lambda, x)\} = \pm 2i\lambda A^{\pm}.$$

Устремляя здесь x к нулю и используя при этом оценки (3.1.21) и (3.1.23), получаем

$$e(\mp\lambda, 0) = \pm 2i\lambda A^{\pm},$$

т. е.

$$\omega(\lambda, x; \infty) = -2i\lambda e(\lambda, 0)\,e(-\lambda, x) + 2i\lambda e(-\lambda, 0)\,e(\lambda, x).$$

Из вещественности функции $q(x)$ следует, что

$$e(-\lambda, 0) = \overline{e(\lambda, 0)}.$$

Поэтому при всех вещественных значениях $\lambda \neq 0$ $e(\lambda, 0) \neq \neq 0$ и

$$\frac{-2i\lambda\omega(\lambda, x; \infty)}{e(\lambda, 0)} = e(-\lambda, x) - S(\lambda)\,e(\lambda, x),$$

где

$$S(\lambda) = \frac{e(-\lambda, 0)}{e(\lambda, 0)} = \overline{\left\{\frac{e(\lambda, 0)}{e(-\lambda, 0)}\right\}} = \left[\frac{e(\lambda, 0)}{e(-\lambda, 0)}\right]^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь внимательно левую часть полученного тождества. Она является, очевидно, мероморфной в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ функцией с полюсами, лежащими в нулях функции $e(\lambda, 0)$.

Лемма 3.1.6. *Функция $e(\lambda, 0)$ может иметь в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ только конечное число нулей. Все эти нули простые, лежат на мнимой оси, и функция $\lambda[e(\lambda, 0)]^{-1}$ ограничена в некоторой окрестности нуля.*

Доказательство. Так как при вещественных значениях $\lambda \neq 0$ $e(\lambda, 0) \neq 0$, то единственным вещественным нулем функции $e(\lambda, 0)$ может быть число 0. Из неравенства (3.1.20) следует, что $e(\lambda, 0) \to 1$ при $|\lambda| \to \infty$. Поэтому нули функции $e(\lambda, 0)$ образуют ограниченное и не более чем счетное множество, единственной предельной точкой которого может быть лишь нуль.

Пусть μ ($\operatorname{Im}\mu > 0$ или $\mu = 0$) — какой-нибудь нуль функции $e(\lambda, 0)$. Тогда согласно оценкам (3.1.21) и (3.1.23)

$$W\{\omega(\mu, x; \infty), e(\mu, x)\} = e(\mu, 0) = 0$$

и, следовательно, $e(\mu, x) = c\omega(\mu, x; \infty)$. Поэтому предел $\lim\limits_{x\to 0} e'(\mu, x) = e'(\mu, 0) = c$ существует и

$$e(\mu, x) = e'(\mu, 0)\,\omega(\mu, x; \infty). \tag{3.1.33}$$

Из этой формулы следует, что

$$\lim_{x\to 0} W\{e(\mu_1, x), \overline{e(\mu_2, x)}\} = 0, \tag{3.1.34}$$

если μ_1 и μ_2 — какие-нибудь нули функции $e(\lambda, 0)$.

Из вещественности функции $q(x)$ вытекает, что функция $\overline{e(\mu_2, x)}$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и $e(\mu_1, x)$, если в нем заменить μ_1^2 на $\overline{\mu_2^2}$. Поэтому

$$W\{e(\mu_1, x), \overline{e(\mu_2, x)}\}\Big|_a^b + (\mu_1^2 - \overline{\mu_2^2})\int_a^b e(\mu_1, x)\overline{e(\mu_2, x)}\,dx = 0,$$

откуда согласно (3.1.34) и оценкам (3.1.21), (3.1.19) следует, что

$$(\mu_1^2 - \overline{\mu_2^2})\int_0^\infty e(\mu_1, x)\overline{e(\mu_2, x)}\,dx = 0, \tag{3.1.35}$$

если μ_1, μ_2 — нули функции $e(\lambda, 0)$. В частности, беря здесь $\mu_2 = \mu_1$, заключаем, что $\mu_1^2 - \overline{\mu_1^2} = 0$ и, следовательно, $\mu_1 = i\lambda_1$, где $\lambda_1 \geqslant 0$. Значит, нули функции $e(\lambda, 0)$ могут лежать только на мнимой полуоси. Докажем, что их может быть лишь конечное число. Это очевидно в том случае, когда $e(0, 0) \neq 0$, так как тогда множество нулей не может иметь предельной точки. В общем случае конечность множества нулей функции $e(\lambda, 0)$ вытекает из того, что можно дать оценку снизу для расстояния между двумя ее соседними нулями.

Обозначим через δ точную нижнюю границу расстояний между двумя соседними нулями функции $e(\lambda, 0)$ и покажем, что $\delta > 0$. Предполагая противное, мы смогли бы выделить такие последовательности нулей $\{i\hat{\lambda}_k\}$, $\{i\lambda_k\}$ функции $e(\lambda, 0)$, что $\lim\limits_{k\to\infty}(\hat{\lambda}_k - \lambda_k) = 0$, $\hat{\lambda}_k > \lambda_k \geqslant 0$ и $\max\limits_k \hat{\lambda}_k < M$. Из оценки (3.1.20) следует, что при достаточно большом A равномерно относительно $x \in [A, \infty)$ и $\lambda \in [0, \infty)$ выполняется неравенство $e(i\lambda, x) > \frac{1}{2}e^{-\lambda x}$, так что

$$\int_A^\infty e(i\hat{\lambda}_k, x)\overline{e(i\lambda_k, x)}\,dx > \frac{e^{-A(\hat{\lambda}_k+\lambda_k)}}{4(\hat{\lambda}_k+\lambda_k)} > \frac{e^{-2AM}}{8M}. \tag{3.1.36}$$

С другой стороны, из равенства (3.1.35) получаем

$$0 = \int_0^\infty e(i\hat{\lambda}_k, x)\overline{e(i\lambda_k, x)}\,dx =$$

$$= \int_0^A e(i\hat{\lambda}_k, x)\left[\overline{e(i\lambda_k, x)} - \overline{e(i\hat{\lambda}_k, x)}\right]dx +$$

$$+ \int_0^A e(i\hat{\lambda}_k, x)\overline{e(i\hat{\lambda}_k, x)}\,dx + \int_A^\infty e(i\hat{\lambda}_k, x)\overline{e(i\lambda_k, x)}\,dx,$$

и, переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, находим

$$0 \geqslant \varliminf_{k\to\infty}\int_A^\infty e(i\hat{\lambda}_k, x)\overline{e(i\lambda_k, x)}\,dx, \tag{3.1.36$'$}$$

так как равномерно относительно $x \in [0, A]$

$$\lim_{k\to\infty}[e(i\hat{\lambda}_k, x) - e(i\lambda_k, x)] = 0.$$

Неравенства (3.1.36) и (3.1.36′) приводят, очевидно, к противоречию. Поэтому сделанное предположение неверно, $\delta > 0$, а функция $e(x, 0)$ имеет конечное число нулей.

Условимся точками обозначать дифференцирование по λ, а штрихами — по x:

$$\dot{e}(\lambda, x) = \frac{d}{d\lambda} e(\lambda, x), \quad e'(\lambda, x) = \frac{d}{dx} e(\lambda, x).$$

Дифференцируя уравнение

$$e''(\lambda, x) - q(x) e(\lambda, x) + \lambda^2 e(\lambda, x) = 0$$

по λ, видим, что функция $\dot{e}(\lambda, x)$ удовлетворяет такому уравнению:

$$\dot{e}''(\lambda, x) - q(x)\dot{e}(\lambda, x) + \lambda^2\dot{e}(\lambda, x) + 2\lambda e(\lambda, x) = 0.$$

Следовательно,

$$-W\{e(\lambda, x), \dot{e}(\lambda, x)\}\Big|_a^b + 2\lambda\int_a^b [e(\lambda, x)]^2\,dx = 0.$$

Если $\lambda = i\mu$ $(\mu > 0)$ — нуль функции $e(\lambda, 0)$, то, во-первых, функция $e(i\mu, x)$ вещественна и, во-вторых, согласно формуле (3.1.33) и оценкам (3.1.19), (3.1.21)

$$\lim_{x\to 0} W\{e(i\mu, x), \dot{e}(i\mu, x)\} = e'(i\mu, 0)\,\dot{e}(i\mu, 0),$$

$$\lim_{x\to\infty} W\{e(i\mu, x), \dot{e}(i\mu, x)\} = 0,$$

откуда следует, что

$$e'(i\mu, 0)\,\dot{e}(i\mu, 0) + 2i\mu\int_0^\infty |e(i\mu, x)|^2\,dx = 0. \tag{3.1.37}$$

Поскольку $\int\limits_0^\infty |e(i\mu, x)|^2 dx > 0$, то $\dot{e}(i\mu, 0) \neq 0$ и простота нулей функции $e(\lambda, 0)$ доказана.

Нам осталось еще доказать ограниченность функции $\lambda[e(\lambda, 0)]^{-1}$ в полукруге $D_\rho = \{\lambda : |\lambda| \leqslant \rho, \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0\}$ при достаточно малом ρ. Это очевидно, если $e(0, 0) \neq 0$.

Пусть теперь $e(0, 0) = 0$. Если $\rho < \frac{1}{2}\delta$, то в полукруге D_ρ функция $e(\lambda, 0)$ других нулей не имеет. Поэтому функция

$$\Phi(\lambda, x) = \frac{\lambda\omega(\lambda, x; \infty)}{e(\lambda, 0)}$$

регулярна во внутренних точках D_ρ и ограничена на дуге полуокружности $\{\lambda : |\lambda| = \rho, \operatorname{Im} \lambda \geqslant 0\}$. Она равномерно ограничена также на отрезке $-\rho \leqslant \lambda \leqslant \rho$, что видно из формулы (3.1.31), если заметить, что $|S(\lambda)| = 1$. Однако сразу применить принцип максимума для доказательства ограниченности функции $\Phi(\lambda, x)$ в D_ρ мы не можем, так как ее непрерывность при $\lambda \to 0$ не доказана. Поэтому нам придется рассмотреть семейство уравнений $y'' - q_\beta(x) y + \lambda^2 y = 0$, в которых

$$q_\beta(x) = \begin{cases} q(x), & x < \beta, \\ 0, & x \geqslant \beta, \end{cases}$$

и их решений $e_\beta(\lambda, x)$, $\omega_\beta(\lambda, x; \infty)$. Очевидно, что

$$\omega_\beta(\lambda, x; \infty) = \omega(\lambda, x; \infty),$$

$$\Phi_\beta(\lambda, x) = \frac{\lambda\omega_\beta(\lambda, x; \infty)}{e_\beta(\lambda, 0)} = \frac{\lambda\omega(\lambda, x; \infty)}{e_\beta(\lambda, 0)}$$

при $x < \beta$. Далее, согласно лемме 3.1.1

$$e_\beta(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K_\beta(x, t) e^{i\lambda t} dt,$$

где $K_\beta(x, t) = 0$ при $x + t > 2\beta$, причем $\lim\limits_{\beta\to\infty} K_\beta(x, t) = K(x, t)$ и равномерно по β

$$|K_\beta(x, t)| \leqslant \frac{1}{2} \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\}.$$

Следовательно, по переменной λ функции $e_\beta(\lambda, x)$ являются целыми и равномерно во всей верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$

$$\lim_{\beta\to\infty} e_\beta(\lambda, x) = e(\lambda, x).$$

Пусть δ_β — точная нижняя граница расстояний между соседними нулями функции $e_\beta(\lambda, 0)$. Повторяя проведенное выше доказательство положительности δ_β и замечая, что необходимые оценки выполняются равномерно по β, убеждаемся, что и $\inf\limits_\beta \delta_\beta = \delta_0 > 0$. Поэтому в полукруге D_{ρ_0} $\left(\rho_0 = \frac{1}{2}\delta_0\right)$ функция $e_\beta(\lambda, 0)$ при любом β может иметь не более одного нуля (обозначим его через $i\lambda_\beta$; если нуля нет, то будем считать $\lambda_\beta = 0$).

Рассмотрим теперь функции $\Phi_\beta(\lambda, x)\frac{\lambda - i\lambda_\beta}{\lambda + i\lambda_\beta}$. Из предыдущего следует, что это мероморфные во всей плоскости функции, регулярные во всех внутренних точках D_{ρ_0}. Поскольку в замкнутой верхней полуплоскости $\left|\frac{\lambda - i\lambda_\beta}{\lambda + i\lambda_\beta}\right| \leqslant 1$ и на дуге $\{\lambda : |\lambda| = \rho_0, \ \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0\}$ функция $e_\beta(\lambda, 0)$ не может обратиться в нуль, рассматриваемые функции начиная с некоторого β равномерно ограничены на этой дуге. Из формулы (3.1.31) видно, что они равномерно ограничены и на отрезке $-\rho_0 \leqslant \lambda \leqslant \rho_0$. Следовательно, начиная с некоторого β эти функции регулярны в D_{ρ_0} (включая границу) и

$$\sup_{\lambda \in \partial D_{\rho_0}} \left| \Phi_\beta(\lambda, x)\frac{\lambda - i\lambda_\beta}{\lambda + i\lambda_\beta} \right| = C(x) < \infty,$$

откуда согласно теореме о максимуме модуля регулярной функции заключаем, что

$$\sup_{\lambda \in D_{\rho_0}} \left| \Phi_\beta(\lambda, x)\frac{\lambda - i\lambda_\beta}{\lambda + i\lambda_\beta} \right| = C(x) < \infty.$$

Так как $\lim\limits_{\beta \to \infty} \lambda_\beta = 0$ и $\lim\limits_{\beta \to \infty} \Phi_\beta(\lambda, x) = \Phi(\lambda, x)$, то, переходя в этом неравенстве к пределу, получаем

$$\sup_{\lambda \in D_{\rho_0}} |\Phi(\lambda, x)| \leqslant C(x).$$

Наконец, из неравенства (3.1.28) следует, что при достаточно малом $x = x_0$

$$\inf_{\lambda \in D_{\rho_0}} |\omega(\lambda, x; \infty)| > \frac{1}{2} x_0$$

и, следовательно,

$$\sup_{\lambda \in D_{\rho_0}} \left| \frac{\lambda}{e(\lambda, 0)} \right| \leqslant \frac{2C(x_0)}{x_0} < \infty,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3.1.7. *Функция $1 - S(\lambda)$ является преобразованием Фурье некоторой функции $F_S(x)$, представимой в виде*

$$F_S(x) = F_S^{(1)}(x) + F_S^{(2)}(x),$$

где $F_S^{(1)}(x) \in L^1(-\infty, \infty)$, а $F_S^{(2)}(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ и ограничена.

Доказательство. Как известно, преобразование Фурье свертки

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt$$

двух функций из $L^1(-\infty, \infty)$ равно произведению $\tilde{f}(\lambda)\,\tilde{g}(\lambda)$ их преобразований Фурье, а норма свертки не превышает произведения норм:

$$\|f * g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}.$$

Поэтому, если $\|f\|_{L^1} < 1$, то ряд

$$-f(x) + f * f(x) - f * f * f(x) + \cdots$$

сходится в метрике пространства $L^1(-\infty, \infty)$, его сумма принадлежит этому пространству и преобразование Фурье этой суммы

$$-\tilde{f}(\lambda) + \{\tilde{f}(\lambda)\}^2 - \{\tilde{f}(\lambda)\}^3 + \cdots = \{1 + \tilde{f}(\lambda)\}^{-1} - 1.$$

Заметим теперь, что

$$\tilde{h}(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| < 1, \\ 2 - |\lambda|, & 1 \leqslant |\lambda| \leqslant 2, \\ 0, & 2 > |\lambda| \end{cases}$$

является преобразованием Фурье некоторой функции $h(x) \in L^1(-\infty, \infty)$, а $\tilde{h}(\lambda N^{-1})$ — преобразованием Фурье функции

$$h_N(x) = N h(xN),$$

причем

$$\lim_{N \to \infty} \|f(x) - h_N * f(x)\|_{L^1} = 0 \tag{3.1.38}$$

для всех функций $f(x) \in L^1(-\infty, \infty)$. Так как преобразование Фурье функции $f(x) - h_N * f(x)$ равно $\{1 - \tilde{h}(\lambda N^{-1})\}\,\tilde{f}(\lambda)$, то из (3.1.38), согласно предыдущему, следует, что при достаточно большом N функция $[1 + \{1 - \tilde{h}(\lambda N^{-1})\}\,\tilde{f}(\lambda)]^{-1} - 1$ является преобразованием Фурье некоторой функции из $L^1(-\infty, \infty)$.

Обозначая для краткости $K(0, t) = k(t)$, получаем

$$e(\lambda, 0) = 1 + \int_0^{\infty} K(0, t)\, e^{i\lambda t} dt = 1 + \tilde{k}(-\lambda),$$

$$1 - S(\lambda) = 1 - \frac{1 + \tilde{k}(\lambda)}{1 + \tilde{k}(-\lambda)} = \frac{\tilde{k}(-\lambda) - \tilde{k}(\lambda)}{1 + \tilde{k}(-\lambda)}.$$

Перепишем это равенство в виде

$$1 - S(\lambda) = [\tilde{k}(-\lambda) - \tilde{k}(\lambda)]\,[\{1 + (1 - \tilde{h}(\lambda N^{-1}))\tilde{k}(-\lambda)\}^{-1} - 1] + \\ + [\tilde{k}(-\lambda) - \tilde{k}(\lambda)] - [\tilde{k}(-\lambda) - \tilde{k}(\lambda)] \times \\ \times \left\{ \frac{1}{1 + \{1 - \tilde{h}(\lambda N^{-1})\}\,\tilde{k}(-\lambda)} - \frac{1}{1 + \tilde{k}(-\lambda)} \right\} \quad (3.1.39)$$

и заметим, что функция

$$\{1 + (1 - \tilde{h}(\lambda N^{-1}))\,\tilde{k}(-\lambda)\}^{-1} - 1$$

при достаточно большом N является преобразованием Фурье суммируемой функции. Поэтому сумма первых двух слагаемых правой части формулы (3.1.39) тоже является преобразованием Фурье некоторой суммируемой функции $F_S^{(1)}(x)$. Так как $\tilde{h}(\lambda N^{-1}) = 0$ при $|\lambda| > 2N$, то третье слагаемое в этой формуле тоже равно нулю при $|\lambda| > 2N$ и ограничено. Поэтому оно является преобразованием Фурье некоторой ограниченной функции $F_S^{(2)}(x) \in L^2(-\infty, \infty)$, и лемма доказана.

ЗАДАЧИ

1. Если функция $q(x)$ удовлетворяет условию (3.1.3) и имеет $n \geqslant 0$ непрерывных и суммируемых на полуоси $[0, \infty)$ производных, то решение $e(\lambda, x)$ уравнения (3.1.1) представи́мо в виде

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x}\left[1 + \frac{u_1(x)}{i\lambda} + \cdots + \frac{u_n(x)}{(i\lambda)^n} + \frac{v_n(\lambda, x)}{(i\lambda)^{n+1}}\right], \quad (3.1.40)$$

где

$$u_1(x) = -\frac{1}{2}\int_x^\infty q(t)\,dt, \quad u_k(x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty \{u''_{k-1}(t) - q(t)\,u_{k-1}(t)\}\,dt, \quad (3.1.41)$$

а $v_n(\lambda, x)$ — решение интегрального уравнения

$$v_n(\lambda, x) = \int_x^\infty \{e^{2i\lambda(t-x)} - 1\}\,u'_{n+1}(t)\,dt + \\ + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda}\,e^{i\lambda(t-x)}\,q(t)\,v_n(\lambda, t)\,dt.$$

Обозначим через $m(x)$ то решение уравнения $y'' - |q(x)|\,y = 0$, которое стремится к единице при $x \to \infty$, и положим

$$\sigma_n(x) = \int_x^\infty |u'_{n+1}(t)|\,dt.$$

Тогда

$$|v_n(\lambda, x)| \leqslant 2\sigma_n(x)\, m(x) \qquad (\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0), \tag{3.1.42}$$

причем, если функция $\sigma_n(x)$ суммируема на полуоси $[0, \infty)$, то

$$v_n(\lambda, x) = u_{n+1}(x) + \varepsilon_n(\lambda, x) \tag{3.1.43}$$

и равномерно в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} |\varepsilon_n(\lambda, x)| = \lim_{|\lambda|\to\infty} \left|\frac{\partial}{\partial\lambda}\varepsilon_n(\lambda, x)\right| = 0. \tag{3.1.44}$$

Указание. См. задачу 1 из § 3 гл. 1.

2. В верхней полуплоскости функция $e(\lambda, 0)$ может иметь только конечное число нулей, квадраты которых обозначим через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$. Пусть выполнены условия предыдущей задачи при $n = 2m - 1$ и функция $\sigma_n(x)$ суммируема на полуоси $[0, \infty)$. Тогда

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{2}\int_{-N}^{N} \lambda^{2m} d\{\ln S(\lambda)\} - \int_{C(N)} \lambda^{2m}\, d\left\{P_{2m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\}\right] =$$
$$= -\sum_{k=1}^{p} \mu_k^m,$$

где $C(N)$ — лежащая в верхней полуплоскости полуокружность радиуса N, с центром в нуле, а

$$P_{2m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 + \frac{u_1(0)}{i\lambda} + \cdots + \frac{u_{2m}(0)}{(i\lambda)^{2m}}.$$

В частности, при $m = 1$ получаем формулу следов

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{2}\int_{-N}^{N} \lambda^2 d\{\ln S(\lambda)\}\right] - \frac{N}{2\pi}\int_0^\infty q(t)\, dt\right\} =$$
$$= -\frac{q(0)}{4} - \sum_{k=1}^{p} \mu_k.$$

Указание. Воспользоваться равенствами

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-N}^{N} \frac{\dot e(\lambda, 0)}{e(\lambda, 0)}\lambda^{2m} d\lambda + \int_{C(N)} \frac{\dot e(\lambda, 0)}{e(\lambda, 0)}\lambda^{2m} d\lambda\right] = \sum_{k=1}^{p} \mu_k^m,$$
$$\int_{-N}^{N} \frac{\dot e(\lambda, 0)}{e(\lambda, 0)}\lambda^{2m} d\lambda = \frac{1}{2}\int_{-N}^{N} \lambda^{2m} d\{\ln S(-\lambda)\}.$$

3. Доказать, что ядро оператора преобразования $K(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$|K(x, t)| \leqslant \frac{1}{2} w\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{2\int_x^\infty w(\xi)\, d\xi\right\}, \tag{3.1.45}$$

где

$$w(x) = \sup_{x \leqslant \eta < \infty} \left| \int_{\eta}^{\infty} q(t)\,dt \right|.$$

Указание. Перейти к уравнению (3.1.13) и найти его решение в виде суммы $H_1(u, v) + H_2(u, v)$ функций, удовлетворяющих системе уравнений

$$H_1(u, v) = \frac{1}{2} \int_{u}^{\infty} q(t)\,dt + \int_{u}^{\infty} d\alpha \int_{0}^{v} q(\alpha - \beta) H_2(\alpha, \beta)\,d\beta,$$

$$H_2(u, v) = \int_{u}^{\infty} d\alpha \int_{0}^{v} q(\alpha - \beta) H_1(\alpha, \beta)\,d\beta$$

(см. гл. 1, § 2, задачу 2).

4. Доказать, что лемма 3.1.1 и оценка (3.1.45) справедливы и для операторных уравнений Штурма — Лиувилля, удовлетворяющих условию, аналогичному (3.1.3).

5. Рассмотрим операторное уравнение Дирака

$$By'(x) + \{mT + \Omega(x)\}\, y(x) = \lambda y(x), \tag{3.1.46}$$

в котором постоянные операторы B и T удовлетворяют условиям

$$-B^2 = T^2 = I, \quad BT + TB = 0, \quad B\Omega(x) + \Omega(x) B = 0,$$

а норма $|\Omega(x)|$ интегрируема на полуоси $[0, \infty)$. Общим решением этого уравнения при $\lambda^2 > m^2$ является операторнозначная функция

$$\{E_1(\lambda, x) + E_2(\lambda, x)\}\, C,$$

где C — произвольный постоянный оператор, а частные решения $E_j(\lambda, x)$ удовлетворяют при $x \to \infty$ таким асимптотическим равенствам:

$$E_1(\lambda, x) = e^{ikx} \left(\frac{\lambda + m}{k} I + iB \right) \left(\frac{I + T}{2} \right) + o(1),$$

$$E_2(\lambda, x) = e^{-ikx} \left(\frac{\lambda + m}{k} I - iB \right) \left(\frac{I + T}{2} \right) B + o(1),$$

$$k = \sqrt{\lambda^2 - m^2}.$$

Если операторнозначная функция $\Omega(x)$ непрерывно дифференцируема, то любое решение уравнения (3.1.46) является также решением операторного уравнения Штурма — Лиувилля

$$-y'' + q(x)\, y = k^2 y \qquad (k^2 = \lambda^2 - m^2),$$

где

$$q(x) = B\Omega'(x) + m\,[T\Omega(x) + \Omega(x) T] + \Omega^2(x)$$

(см. гл. 1, § 2, задачу 5). Предположим, что норма $|q(x)|$ удовлетворяет условию (3.1.3). Тогда согласно аналогу леммы 3.1.1 существует оператор преобразования и

$$E_j(\lambda, x) = \left\{ e^{ik_j x} + \int_{x}^{\infty} K(x, t)\, e^{ik_j t}\,dt \right\} A_j(\lambda), \tag{3.1.47}$$

где

$$k_1 = \sqrt{\lambda^2 - m^2}, \qquad k_2 = -k_1,$$

$$A_1(\lambda) = \left(\frac{\lambda + m}{k} I + iB\right)\left(\frac{I + T}{2}\right),$$

$$A_2(\lambda) = \left(\frac{\lambda + m}{k} I - iB\right)\left(\frac{I + T}{2}\right) B.$$

Доказать, что формула (3.1.47) справедлива и в том случае, когда функции $\sup\limits_{x \leqslant \xi < \infty} |\Omega(\xi)|$ и

$$w(x) = \sup_{x \leqslant \xi < \infty} \left| B\Omega(\xi) + \int_{\xi}^{\infty} [\{T\Omega(t) + \Omega(t) T\} m + \Omega^2(t)]\, dt \right|$$

интегрируемы на полуоси $(0, \infty)$, причем

$$|K(x, t)| \leqslant \frac{1}{2} w\left(\frac{x + t}{2}\right) \exp\left\{2 \int_{x}^{\infty} w(\xi)\, d\xi\right\}.$$

Указание. Аппроксимировать $\Omega(x)$ непрерывно дифференцируемой функцией

$$\Omega_\delta(x) = \frac{1}{\delta} \int_{x}^{x+\delta} \Omega(t)\, dt$$

и совершить затем предельный переход при $\delta \to 0$.

6. Пусть M — точная нижняя граница неотрицательных чисел λ, удовлетворяющих неравенству

$$\sigma_1(0) - \sigma_1\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Доказать следующие уточнения леммы 3.1.6:

а) на полуоси $[iM, i\infty)$ нет нулей функции $e(\lambda, 0)$;

б) если $M > 0$, то любой сегмент мнимой полуоси $[0, i\infty)$ длины

$$\Delta = \frac{e^{-Mx_0 - \sigma_1(0)}}{\sqrt{2Mx_0}} \cdot \frac{1}{x_0 + 3t_0}$$

содержит не более одного нуля этой функции. Здесь x_0 и t_0 — решения уравнений

$$\sigma_1(x_0) = \frac{1}{3}, \qquad \sigma_1(t_0) = \frac{e^{-Mx_0 - \sigma_1(0)}}{\sqrt{2Mx_0}} \cdot \frac{t_0}{x_0 + 3t_0}. \tag{3.1.48}$$

Указание. Из уравнения (3.1.7) для функции $m(\lambda, x) = \sup\limits_{x \leqslant t < \infty} |e(\lambda, t) e^{-i\lambda t}|$ вытекает неравенство

$$m(\lambda, x) \leqslant 1 + m(\lambda, x) \left\{ \int_{x}^{x + \frac{1}{|\lambda|}} (t - x) |q(t)|\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|\lambda|} \int_{x + \frac{1}{|\lambda|}}^{\infty} |q(t)|\, dt \right\} = 1 + m(\lambda, x) \left\{ \sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right) \right\}.$$

Поэтому, если $\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right) < 1$, то

$$m(\lambda, x) \leqslant \frac{1}{1 - \left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right\}},$$

$$e(i\lambda, x) \geqslant e^{-\lambda x}\left\{1 - \frac{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)}{1 - \left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right\}}\right\},$$

откуда следует утверждение «а» и оценка

$$e(i\lambda, x) \geqslant \frac{1}{2} e^{-\lambda x} \qquad (x \geqslant x_0).$$

Пусть $i\lambda$ и $i\mu = i(\lambda + \delta)$ — два соседних нуля функции $e(\lambda, 0)$. Тогда

$$0 = \int_0^\infty e(i\lambda, x)\, e(i\mu, x)\, dx = \frac{1}{4}\int_0^{x_0} [e(i\lambda, x) + e(i\mu, x)]^2\, dx -$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^{x_0} [e(i\lambda, x) - e(i\mu, x)]^2\, dx + \int_{x_0}^\infty e(i\lambda, x)\, e(i\mu, x)\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\left\{-x_0 \max_{0 \leqslant x \leqslant x_0} |e(i\lambda, x) - e(i\mu, x)|^2 + \frac{e^{-(\lambda+\mu)x_0}}{\lambda + \mu}\right\}$$

и, следовательно,

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant x_0} |e(i\lambda, x) - e(i\mu, x)| \geqslant \sqrt{\frac{e^{-(\lambda+\mu)x_0}}{(\lambda + \mu)x_0}} > \frac{e^{-Mx_0}}{\sqrt{2Mx_0}}. \qquad (3.1.49)$$

С другой стороны,

$$|e(i\lambda, x) - e(i\mu, x)| = \left| e^{-\lambda x} - e^{-\mu x} + \int_x^\infty K(x, t)\{e^{-\lambda t} - e^{-\mu t}\}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 1 - e^{-\delta x} + e^{\sigma_1(x)} \int_x^\infty \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)} [1 - e^{-\delta t}]\, d\frac{t}{2} =$$

$$= 1 - e^{-\delta x} + e^{\sigma_1(x)}\left\{-[e^{-\sigma_1(x)} - 1][1 - e^{-\delta x}] -\right.$$

$$- \delta \int_x^\infty e^{-\delta t} [e^{-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)} - 1]\, dt \Big\} \leqslant e^{\sigma_1(x)} \Big\{ [1 - e^{-\delta x}] + 2\delta t_0 +$$

$$+ [1 - e^{-\sigma_1(x+t_0)}]\, \delta \int_{x+2t_0}^\infty e^{-\delta t} dt \Big\} \leqslant e^{\sigma_1(0)} \{\delta x + 2\delta t_0 + \sigma_1(t_0)\},$$

откуда в силу (3.1.49)

$$e^{\sigma_1(0)} \{(x_0 + 2t_0)\, \delta + \sigma_1(t_0)\} > \frac{e^{-Mx_0}}{\sqrt{2Mx_0}}.$$

Поскольку t_0 удовлетворяет уравнению (3.1.48), из последнего неравенства следует

$$\delta > \frac{e^{-Mx_0}}{\sqrt{2Mx_0}} \cdot \frac{1}{x_0 + 3t_0} = \Delta.$$

Значит, расстояние между соседними нулями больше Δ, что эквивалентно утверждению «б».

7. Пусть симметрическое ($q(x) = q^*(x)$) операторное уравнение Штурма — Лиувилля удовлетворяет условию (3.1.3) и числа M, x_0, t_0, Δ определены так же, как в предыдущей задаче. Доказать, что

а) операторы $e(\lambda, 0)$ ($\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$) имеют обратные при всех $\lambda \notin [0, iM]$;

б) ортопроекторы P_λ на ядра операторов $e(i\lambda, 0)$ ($\lambda \geqslant 0$) обладают свойством

$$\| P_\lambda P_\mu \| \leqslant \theta < 1, \quad \text{если } 0 < \lambda - \mu \leqslant \Delta.$$

В частности, если размерность пространства H равна $n < \infty$, то в каждом интервале полуоси $[0, i\infty)$ длины Δ определитель матрицы $e(\lambda, 0)$ может иметь не более n нулей.

8. Лемма 3.1.1 остается верной и для комплексных $q(x)$, удовлетворяющих условию 3.1.3. Пусть $\mathbf{I} + \mathbf{L} = (\mathbf{I} + \mathbf{K})^{-1}$ и $L(x, y)$ — ядро оператора $\mathbf{L}$. Доказать, что функция $\Phi(x, y)$, определенная при всех положительных x, y равенствами

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} L(x, y) + \int_y^\infty L(x, t)\, L(y, t)\, dt, & 0 \leqslant x \leqslant y, \\ L(y, x) + \int_x^\infty L(x, t)\, L(y, t)\, dt, & x \geqslant y \geqslant 0, \end{cases}$$

зависит только от $x + y$: $\Phi(x, y) = F(x + y)$, где

$$F(x) = L(0, x) + \int_x^\infty L(x, t)\, L(0, t)\, dt. \tag{3.1.50}$$

Как обобщается этот результат на операторные уравнения Штурма — Лиувилля и Дирака?

Указание. См. гл. 1, § 2, указание к задаче 7.

§ 2. РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ И ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть $i\lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — нули функции $e(\lambda, 0)$, занумерованные в порядке возрастания их модулей $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n)$, а m_k^{-1} — норма функции $e(i\lambda_k, x)$ в пространстве $L^2(0, \infty)$. Заметим, что согласно формуле (3.1.37)

$$m_k^{-2} = \int_0^\infty |e(i\lambda_k, x)|^2 dx = -\frac{e'(i\lambda_k, 0)\,\dot{e}(i\lambda_k, 0)}{2i\lambda_k}. \qquad (3.2.1)$$

Из результатов предыдущего параграфа следует, что функции

$$u(\lambda, x) = e(-\lambda, x) - S(\lambda)\,e(\lambda, x) \qquad (\lambda \in [0, \infty)), \qquad (3.2.2)$$

$$u(i\lambda_k, x) = m_k e(i\lambda_k, x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.2.3)$$

являются ограниченными решениями краевой задачи (3.1.1), (3.1.2). Докажем, что они образуют полный набор нормированных собственных функций этой задачи, т. е. что для любых функций $f(x)$, $g(x)$ из пространства $L^2(0, \infty)$ справедливо равенство Парсеваля

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{n} u(i\lambda_k, f)\,\overline{u(i\lambda_k, g)} + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty u(\lambda, f)\,\overline{u(\lambda, g)}\,d\lambda, \qquad (3.2.4)$$

где через (f, g) обозначено скалярное произведение в пространстве $L^2(0, \infty)$ и

$$u(\lambda, f) = \int_0^\infty f(x)\,u(\lambda, x)\,dx.$$

Из оценки (3.1.6) следует, что оператор преобразования $\mathbf{I} + \mathbf{K}$ и ему сопряженный $\mathbf{I} + \mathbf{K}^*$ ограничены в пространстве $L^2(0, \infty)$. Поэтому, если $f(x) \in L^2(0, \infty)$, то функция

$$f^*(x) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}^*)\,f$$

тоже принадлежит этому пространству и согласно лемме 3.1.1

$$\int_0^\infty f(x)\,e(-\lambda, x)dx = \int_0^\infty f(x)\left[e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t)\,e^{-i\lambda t}dt\right]dx =$$

$$= \int_0^\infty \left[f(x) + \int_0^x f(\xi)\,K(\xi, x)\,d\xi\right] e^{-i\lambda x}dx = \int_0^\infty f^*(x)\,e^{-i\lambda x}dx,$$

т. е.

$$\int_0^\infty f(x)\,e(-\lambda, x)\,dx = \tilde{f}^*(\lambda),$$

где $\tilde{f}^*(\lambda)$ — обычное преобразование Фурье функции $f^*(x)$. Следовательно,

$$u(\lambda, f) = \tilde{f}^*(\lambda) - S(\lambda)\,\tilde{f}^*(-\lambda),$$

$$u(i\lambda_k, f) = m_k \int_0^\infty f^*(x)\,e^{-\lambda_k x}\,dx.$$

Подставим эти выражения в правую часть формулы (3.2.4), которую обозначим для краткости через I. Проводя несложные преобразования и учитывая при этом, что $S(\lambda) = \overline{S(-\lambda)} = [S(-\lambda)]^{-1}$, получаем

$$I = \int_0^\infty\int_0^\infty \left\{\sum_{k=1}^n m_k^2 e^{-\lambda_k(x+y)}\right\} f^*(x)\,\overline{g^*(y)}\,dx\,dy +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \tilde{f}^*(\lambda)\,\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}\,d\lambda - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty S(\lambda)\,\tilde{f}^*(-\lambda)\,\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}\,d\lambda. \quad (3.2.5)$$

Согласно равенству Парсеваля для обычных преобразований Фурье

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \tilde{f}^*(\lambda)\,\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}\,d\lambda = \int_{-\infty}^\infty f^*(y)\,\overline{g^*(y)}\,dy = (f^*, g^*),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \tilde{f}^*(-\lambda)\,\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}\,d\lambda = \int_{-\infty}^\infty f^*(-y)\,\overline{g^*(y)}\,dy = 0,$$

так как $f^*(y) = g^*(y) = 0$ при $y < 0$. Поэтому формулу (3.2.5) можно преобразовать к такому виду:

$$I = (f^*, g^*) + \int_0^\infty\int_0^\infty \left\{\sum_{k=1}^n m_k^2 e^{-\lambda_k(x+y)}\right\} f^*(x)\,\overline{g^*(y)}\,dx\,dy +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty (1 - S(\lambda))\,\tilde{f}^*(-\lambda)\,\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}\,d\lambda$$

или

$$I = (f^*, g^*) + \int_0^\infty\int_0^\infty F(x+y)\,f^*(x)\,\overline{g^*(y)}\,dx\,dy, \quad (3.2.6)$$

где существующая согласно лемме 4.1.7 функция

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - S(\lambda)) e^{i\lambda x} d\lambda \qquad (3.2.7)$$

вещественна, так как $S(\lambda) = S(-\lambda)$. Определенный формулой

$$\mathbf{F}[f] = \int_0^{\infty} F(x+y) f(y)\, dy$$

оператор $\mathbf{F}$ является, как легко видеть, ограниченным и самосопряженным в пространстве $L^2(0, \infty)$. Используя этот оператор, можно формулу (3.2.6) записать так:

$$I = (\{\mathbf{I} + \mathbf{F}\} f^*, g^*),$$

откуда, вспоминая, что $f^* = (\mathbf{I} + \mathbf{K}^*) f$, получаем

$$I = (\{\mathbf{I} + \mathbf{F}\}\{\mathbf{I} + \mathbf{K}^*\} f, \quad \{\mathbf{I} + \mathbf{K}^*\} g) =$$
$$= (\{\mathbf{I} + \mathbf{K}\}\{\mathbf{I} + \mathbf{F}\}\{\mathbf{I} + \mathbf{K}^*\} f, g).$$

Следовательно, для справедливости равенства Парсеваля (3.2.4) необходимо и достаточно, чтобы операторы $\mathbf{K}$, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{K}^*$ были связаны между собой тождеством

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K})(\mathbf{I} + \mathbf{F})(\mathbf{I} + \mathbf{K}^*) = \mathbf{I}, \qquad (3.2.8)$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{K} + \mathbf{K}^* + \mathbf{K}\mathbf{K}^* + \mathbf{F} + \mathbf{K}\mathbf{F} + \mathbf{F}\mathbf{K}^* + \mathbf{K}\mathbf{F}\mathbf{K}^* = 0. \qquad (3.2.8')$$

Здесь слева стоит интегральный оператор с ядром

$$\Phi(x, y) = K(x, y) + K(y, x) + F(x+y) +$$
$$+ \int_x^{\infty} K(x, t) F(t+y)\, dt + \int_y^{\infty} F(x+\xi) K(y, \xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_0^{\infty} K(x,\xi) K(y,\xi) d\xi + \int_y^{\infty}\int_x^{\infty} K(x, t) F(t+\xi) K(y, \xi)\, dt d\xi. \qquad (3.2.9)$$

Так как $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$, то тождества (3.2.8), (3.2.8') эквивалентны равенству $\Phi(x, y) = 0$ при $y > x$.

Введем заданную на полуоси (x, ∞) функцию

$$\varphi_x(y) = K(x, y) + F(x+y) + \int_x^{\infty} K(x, t) F(y+t)\, dt.$$

Так как $K(y, x) = 0$ при $y > x$, то из формулы (3.2.9) при $y > x$ следует

$$\Phi(x, y) = \varphi_x(y) + \int_y^\infty K(y, \xi)\, \varphi_x(\xi)\, d\xi.$$

Согласно замечанию к лемме 3.1.1 оператор $\mathbf{I} + \mathbf{K}$ имеет обратный. Поэтому тождество $\Phi(x, y) = 0$ $(y > x)$, а вместе с ним и тождества (3.2.8), (3.2.8′) эквивалентны равенству

$$\varphi_x(y) = F(x + y) + K(x, y) + \int_x^\infty K(x, t)\, F(y + t)\, dt = 0$$

$$(0 \leqslant x < y < \infty).$$

Итак, для того чтобы выполнялось тождество (3.2.8), эквивалентное равенству Парсеваля (3.2.4), необходимо и достаточно, чтобы при каждом $x \in [0, \infty)$ ядро $K(x, y)$ оператора преобразования как функция переменной $y \in [x, \infty)$ удовлетворяло интегральному уравнению

$$F(x + y) + K(x, y) + \int_x^\infty K(x, t)\, F(y + t)\, dt = 0, \quad (3.2.10)$$

в котором функция $F(x)$ определена формулой (3.2.7). Это интегральное уравнение назовем основным уравнением.

Для вывода основного уравнения используем полученное в лемме 4.1.5 равенство

$$-\frac{2i\lambda\omega(\lambda, x; \infty)}{e(\lambda, 0)} = e(-\lambda, x) - S(\lambda)\, e(\lambda, x),$$

где

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t)\, e^{i\lambda t} dt,$$

так что

$$-\frac{2i\lambda\omega(\lambda, x; \infty)}{e(\lambda, 0)} = e^{-i\lambda x} - e^{i\lambda x} + \{1 - S(\lambda)\} \times$$

$$\times \left\{e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t)\, e^{i\lambda x} dt\right\} + \int_x^\infty K(x, t)\, e^{-i\lambda t} dt - \int_x^\infty K(x, t)\, e^{i\lambda t} dt,$$

$$-2i\lambda\omega(\lambda, x; \infty)\left\{\frac{1}{e(\lambda, 0)} - 1\right\} + 2i\,\{\sin\lambda x - \lambda\omega(\lambda, x; \infty)\} =$$

$$= \{1 - S(\lambda)\} \left\{ e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt \right\} +$$

$$+ \int_x^\infty K(x, \xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi - \int_{-\infty}^{-x} K(x, -\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi. \quad (3.2.11)$$

Как было показано в лемме 4.1.7, $1 - S(\lambda)$ является преобразованием Фурье функции

$$F_S(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - S(\lambda)) e^{i\lambda y} d\lambda. \quad (3.2.12)$$

В силу известных теорем о свертке заключаем, что правая (а значит, и левая) часть тождества (3.2.11) является преобразованием Фурье такой функции:

$$F_S(x + y) + \int_{-\infty}^{\infty} F_S(y - t) K(x, -t) dt + K(x, y) -$$
$$- K(x, -y). \quad (3.2.13)$$

Следовательно, интеграл от произведения левой части тождества (3.2.11) и $\frac{1}{2\pi} e^{i\lambda y}$, взятый по всей оси $-\infty < \lambda < \infty$, должен быть равен (3.2.13). Покажем, что при $y > x$ этот интеграл сходится и может быть вычислен с помощью контурного интегрирования. Действительно, согласно лемме 3.1.6 первое слагаемое в этом интеграле

$$- \frac{2i\lambda\omega(\lambda, x; \infty) e^{i\lambda y}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{e(\lambda, 0)} - 1 \right\}$$

регулярно в верхней полуплоскости всюду, кроме конечного числа точек $i\lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, являющихся простыми нулями функции $e(\lambda, 0)$, непрерывно при вещественных $\lambda \neq 0$ и ограничено вблизи $\lambda = 0$ $(\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0)$. Так как в лемме 3.1.4 было доказано, что функция $\lambda\omega(\lambda, x; \infty) e^{i\lambda x}$ ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$, а согласно лемме 3.1.3 в этой же полуплоскости функция $\frac{1}{e(\lambda, 0)} - 1$ равномерно стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$, то, воспользовавшись леммой Жордана, получим при $y > x$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2i\lambda\omega(\lambda, x; \infty) e^{i\lambda y} \left\{ \frac{1}{e(\lambda, 0)} - 1 \right\} d\lambda =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\lambda_k \omega(i\lambda_k, x; \infty) e^{-\lambda_k y}}{\dot{e}(i\lambda_k, 0)}. \quad (3.2.14)$$

Используя формулы (3.2.1) и (3.1.33), можно правую часть этого равенства преобразовать к такому виду:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2i\lambda_k \omega (i\lambda_k, x; \infty) e^{-\lambda_k y}}{\dot{e} (i\lambda_k, 0)} = -\sum_{k=1}^{n} m_k^2 e (i\lambda_k, x) e^{-\lambda_k y} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \left\{ e^{-\lambda_k (x+y)} + \int_x^\infty K (x, t) e^{-\lambda_k (t+y)} dt \right\}. \quad (3.2.15)$$

Второе слагаемое, $2i \{\sin \lambda x - \lambda\omega (\lambda, x; \infty)\}$, является целой функцией от λ, а в силу оценки (3.1.24) и леммы Жордана

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2i \{\sin \lambda x - \lambda\omega (\lambda, x; \infty)\} e^{i\lambda y} d\lambda = 0$$

при $y > x$. Итак, при $y > x$ интеграл от произведения левой части равенства (3.2.11) и $\frac{1}{2\pi} e^{i\lambda y}$ существует и равен (3.2.15). Поэтому при $y > x$

$$-\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \left\{ e^{-\lambda_k (x+y)} + \int_x^\infty K (x, t) e^{-\lambda_k (t+y)} dt \right\} =$$

$$= F_S (x + y) + \int_{-\infty}^{\infty} F_S (y + t) K (x, -t) dt + K (x, y) -$$

$$- K (x, -y)$$

и, так как $K (x, y) = 0$ при $x > y$,

$$-\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \left\{ e^{-\lambda_k (x+y)} + \int_x^\infty K (x, t) e^{-\lambda_k (t+y)} dt \right\} =$$

$$= F_S (x + y) + \int_x^\infty K (x, t) F_S (y + t) dt + K (x, y),$$

откуда окончательно следует, что

$$F (x + y) + K (x, y) + \int_x^\infty K (x, t) F (t + y) dt = 0$$

$$(x < y < \infty),$$

где

$$F(x)=\sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k x}+F_S(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k x}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1-S(\lambda))\,e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.2.1. *При каждом* $x\geqslant 0$ *ядро* $K(x, y)$ *оператора преобразования удовлетворяет основному уравнению*

$$F(x+y)+K(x, y)+\int_{x}^{\infty}K(x, t)\,F(t+y)\,dt=0$$

$$(x<y<\infty),$$

где

$$F(x)=\sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k x}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1-S(\lambda))\,e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Из основного уравнения вытекает справедливость тождества

$$(\mathbf{I}+\mathbf{K})(\mathbf{I}+\mathbf{F})(\mathbf{I}+\mathbf{K}^*)=\mathbf{I},$$

из которого в свою очередь следует равенство Парсеваля (3.2.4).

Рассмотрим действующий в пространстве $L^2(a, \infty)$ оператор

$$\mathbf{F}_a f=\int_{a}^{\infty}F(y+t)\,f(t)\,dt.$$

Из только что доказанной теоремы вытекает такое следствие.

Следствие. *При каждом* $a\geqslant 0$ *оператор* $(\mathbf{I}+\mathbf{F}_a)$ *имеет обратный, причем*

$$(\mathbf{I}+\mathbf{F}_a)^{-1}=(\mathbf{I}+\mathbf{K}_a^*)(\mathbf{I}+\mathbf{K}_a), \tag{3.2.16}$$

где операторы $\mathbf{K}_a$ *и* $\mathbf{K}_a^*$ *определены формулами*

$$\mathbf{K}_a f=\int_{y}^{\infty}K(y, t)\,f(t)\,dt,\quad \mathbf{K}_a^* f=\int_{a}^{y}K(t, y)\,f(t)\,dt. \tag{3.2.16′}$$

Действительно, пусть $f(y)\in L^2(a, \infty)$ и

$$\hat{f}(y)=\begin{cases} f(y), & a\leqslant y<\infty,\\ 0, & 0\leqslant y<a.\end{cases}$$

Согласно тождеству (3.2.8)

$$(\mathbf{I}+\mathbf{K})(\mathbf{I}+\mathbf{F})(\mathbf{I}+\mathbf{K}^*)\hat{f}=\hat{f},$$

а так как

$$(\mathbf{I}+\mathbf{K}^*)\hat{f}=\begin{cases}(\mathbf{I}+\mathbf{K}_a^*)f, & a\leqslant y<\infty,\\ 0, & 0\leqslant y<a,\end{cases}$$

то при $y\in(a,\infty)$

$$(\mathbf{I}+\mathbf{F})(\mathbf{I}+\mathbf{K}^*)\hat{f}=(\mathbf{I}+\mathbf{F}_a)(\mathbf{I}+\mathbf{K}_a^*)f$$

и, следовательно,

$$\hat{f}=(\mathbf{I}+\mathbf{K})(\mathbf{I}+\mathbf{F})(\mathbf{I}+\mathbf{K}^*)\hat{f}=(\mathbf{I}+\mathbf{K}_a)(\mathbf{I}+\mathbf{F}_a)(\mathbf{I}+\mathbf{K}_a^*)f.$$

Поэтому $(\mathbf{I}+\mathbf{K}_a)(\mathbf{I}+\mathbf{F}_a)(\mathbf{I}+\mathbf{K}_a^*)=\mathbf{I}$, что эквивалентно тождеству (3.2.16). Заметим еще, что оператор, стоящий в правой части этого тождества, и ему обратный ограничены в каждом пространстве $L^i(a,\infty)$ $(i=1,2,\infty)$. Поэтому тождество (3.2.16) справедливо в каждом пространстве $L^i(a,\infty)$ $(i=1,2,\infty;\ a\geqslant 0)$.

Воспользуемся теперь основным уравнением для уточнения свойств функции $F(x)$. Заметим прежде всего, что непрерывность ядра $K(x,y)$ влечет за собой непрерывность этой функции при всех $x\in(0,\infty)$ и, следовательно, справедливость основного уравнения при $y=x$. Полагая в основном уравнении $y=x$ и делая затем подстановку $t+x=2\xi$, получаем

$$F(2x)+K(x,x)+2\int_x^\infty K(x,2\xi-x)F(2\xi)\,d\xi=0.$$

Из этого равенства и оценки (3.1.6) следует

$$|F(2x)-K(x,x)|\leqslant e^{\sigma_1(x)}\int_x^\infty \sigma(\xi)e^{-\sigma_1(\xi)}|F(2\xi)|\,d\xi. \qquad (3.2.17)$$

Отсюда для функции

$$z(x)=\int_x^\infty \sigma(\xi)e^{-\sigma_1(\xi)}|F(2\xi)|\,d\xi \qquad (3.2.18)$$

вытекает неравенство

$$-z'(x)\leqslant\sigma(x)e^{-\sigma_1(x)}|K(x,x)|+\sigma(x)z(x),$$

которое можно преобразовать к такому виду:

$$-\{z(x)e^{-\sigma_1(x)}\}'\leqslant\sigma(x)|K(x,x)|e^{-2\sigma_1(x)}\leqslant\frac{1}{2}\sigma^2(x)e^{-2\sigma_1(x)}.$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$z(x)\, e^{-\sigma_1(x)} \leqslant \frac{1}{2} \int_x^\infty \sigma^2(t)\, e^{-2\sigma_1(t)} dt \leqslant \frac{\sigma(x)}{4} \{1 - e^{-2\sigma_1(x)}\},$$

т. е.

$$z(x) \leqslant \frac{1}{2} \sigma(x) \operatorname{sh} \sigma_1(x),$$

откуда в силу (3.2.17) и (3.2.18)

$$|F(2x) + K(x, x)| \leqslant \frac{1}{2} \sigma(x)\, e^{\sigma_1(x)} \operatorname{sh} \sigma_1(x) \qquad (3.2.19)$$

и тем более

$$|F(2x)| \leqslant \frac{1}{2} \sigma(x) \left\{ \frac{e^{2\sigma_1(x)} - 1}{2} + 1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sigma(x)\, e^{\sigma_1(x)} \operatorname{ch} \sigma_1(x). \qquad (3.2.20)$$

Далее, из дифференцируемости функции $K(x, y)$ и оценки (3.1.15) для $|K'_x(x, y)|$ следует, что при $x > 0$ существует производная $F'(x)$ и основное уравнение можно дифференцировать по x. Поэтому

$$0 = F'(x + y) + K'_x(x, y) - K(x, x)\, F(x + y) +$$

$$+ \int_x^\infty K'_x(x, t)\, F(t + y)\, dt,$$

откуда, полагая $y = x$ и замечая, что согласно (3.1.12)

$$K'_x(x, y)\big|_{y=x} = -\frac{q(x)}{4} - \frac{1}{2} \int_x^\infty q(t)\, K(t, t)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{4} q(x) - \frac{1}{8} \left\{ \int_x^\infty q(t)\, dt \right\}^2,$$

получаем

$$F'(2x) - \frac{q(x)}{4} - \frac{1}{8} \left\{ \int_x^\infty q(t)\, dt \right\}^2 - K(x, x)\, F(2x) +$$

$$+ \int_x^\infty K'_x(x, t)\, F(t + x)\, dt = 0.$$

Для рационального использования ранее полученных оценок преобразуем это равенство так:

$$F'(2x)-\frac{q(x)}{4}-\frac{1}{8}\left\{\int_x^\infty q(t)\,dt\right\}^2+K^2(x,x)+$$

$$+\frac{1}{4}\int_x^\infty q\left(\frac{x+t}{2}\right)K\left(\frac{x+t}{2},\frac{x+t}{2}\right)dt=$$

$$=K(x,x)\{F(2x)+K(x,x)\}-$$

$$-\int_x^\infty\left\{K'_x(x,t)+\frac{1}{4}q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\}F(t+x)\,dt+$$

$$+\frac{1}{4}\int_x^\infty q\left(\frac{x+t}{2}\right)\left\{F(t+x)+K\left(\frac{x+t}{2},\frac{x+t}{2}\right)\right\}dt.$$

Из этого равенства, формулы (3.1.6) и оценок (3.2.19), (3.1.15) следует, что

$$\left|F'(2x)-\frac{q(x)}{4}+\frac{1}{4}\left\{\int_x^\infty q(t)\,dt\right\}^2\right|\leqslant\frac{\sigma^2(x)}{4}e^{\sigma_1(x)}\operatorname{sh}\sigma_1(x)+$$

$$+\frac{\sigma^2(x)}{4}e^{\sigma_1(x)}\int_x^\infty\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\operatorname{ch}\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)dt+$$

$$+\frac{\sigma(x)}{8}e^{\sigma_1(x)}\operatorname{sh}\sigma_1(x)\int_x^\infty\left|q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|dt\leqslant\sigma^2(x)\,e^{\sigma_1(x)}\operatorname{sh}\sigma_1(x),$$

т. е.

$$\left|F'(2x)-\frac{q(x)}{4}+\frac{1}{4}\left\{\int_x^\infty q(t)\,dt\right\}^2\right|\leqslant\sigma^2(x)\,e^{\sigma_1(x)}\operatorname{sh}\sigma_1(x). \tag{3.2.21}$$

Так как функции $x\,|q(x)|$ и $\sigma(x)$ суммируемы на полуоси $(0,\infty)$, а $\sup\limits_{0<x<\infty}x\,\sigma(x)<\infty$, то из последнего неравенства вытекает, что функция $x\,|F'(x)|$ тоже суммируема на полуоси $(0,\infty)$, а вместе с ней этим же свойством обладает, очевидно, и функция $F_S(x)$. Неравенства (3.2.19), (3.2.21), указывающие на тесную связь между функциями $4F'(2x)$

и $q(x)$, интересны и сами по себе. Но в дальнейшем нам нужен будет только более грубый результат:

функция $F_S(x)$ дифференцируема при положительных x и ее производная $F_S'(x)$ удовлетворяет тому же условию

$$\int_0^\infty x\,|F_S'(x)|\,dx < \infty,$$

что и $q(x)$.

Докажем еще, что функция $S(\lambda)$ непрерывна при всех вещественных значениях λ и изменение ее логарифма связано с числом n отрицательных собственных значений задачи (3.1.1), (3.1.2) равенством

$$n = \frac{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)}{2\pi i} - \frac{1 - S(0)}{4}. \tag{3.2.22}$$

Непрерывность функции

$$S(\lambda) = \frac{e(-\lambda, 0)}{e(\lambda, 0)}$$

при всех вещественных $\lambda \neq 0$ сразу следует из леммы 3.1.3. Ясно также, что в случае, когда $e(0, 0) \neq 0$, функция $S(\lambda)$ непрерывна и в нуле, причем $S(0) = 1$. Поэтому нам нужно рассмотреть только случай, когда

$$e(0, 0) = 1 + \int_0^\infty K(0, t)\,dt = 0. \tag{3.2.23}$$

Полагая в основном уравнении $x = 0$ и интегрируя затем его по y от z до бесконечности, получаем

$$\int_z^\infty F(y)\,dy + \int_z^\infty K(0, y)\,dy + \int_0^\infty K(0, t) \int_{t+z}^\infty F(\xi)\,d\xi dt = 0,$$

откуда после интегрирования по частям следует

$$\left\{1 + \int_0^\infty K(0, y)\,dy\right\} \int_z^\infty F(y)\,dy + \int_z^\infty K(0, y)\,dy -$$

$$- \int_0^\infty F(t + z) \int_t^\infty K(0, \xi)\,d\xi dt = 0.$$

Поэтому, если выполнено равенство (3.2.23), то функция

$$K_1(z) = \int_z^\infty K(0, y)\,dy \tag{3.2.24}$$

является ограниченным решением такого уравнения:

$$K_1(z) - \int_0^\infty K_1(t) F(t+z)\, dt = 0 \qquad (0 \leqslant z < \infty).$$

Но любое ограниченное решение этого уравнения автоматически суммируемо на полуоси $(0, \infty)$, так как, переписав его в виде

$$K_1(z) - \int_N^\infty K_1(t) F(t+z)\, dt = f_N(z) \qquad (N \leqslant z < \infty), \quad (3.2.25)$$

где

$$f_N(z) = \int_0^N K_1(t) F(t+z)\, dt,$$

мы можем подобрать N настолько большим, чтобы уравнение (3.2.25) можно было решить методом последовательных приближений, которые будут сходиться к решению в метриках пространств $L^\infty(N, \infty)$ и $L^1(N, \infty)$ одновременно, так что $K_1(z) \in L^1(N, \infty)$. Поэтому в рассматриваемом случае

$$e(\lambda, 0) = 1 + \int_0^\infty K(0, t) e^{i\lambda t} dt = \left\{1 + \int_0^\infty K(0, t)\, dt\right\} + \\ + i\lambda \int_0^\infty K_1(t) e^{i\lambda t} dt = i\lambda \tilde{K}_1(-\lambda), \quad (3.2.26)$$

$$S(\lambda) = -\frac{\tilde{K}_1(\lambda)}{\tilde{K}_1(-\lambda)}, \quad (3.2.27)$$

где $\tilde{K}_1(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $K_1(t)$, равной нулю при $t < 0$ и суммируемой на полуоси $(0, \infty)$.

Далее, согласно (3.2.26) и тождеству (3.1.31)

$$2\omega(\lambda, x; \infty) = \tilde{K}_1(-\lambda)\{e(-\lambda, x) - S(\lambda) e(\lambda, x)\},$$

откуда видно, что $\tilde{K}_1(0) \neq 0$ и, следовательно, функция $S(\lambda)$ непрерывна в нуле, причем $S(0) = -1$.

Для доказательства формулы (3.2.22) применим принцип аргумента к функции $e(\lambda, 0)$. Эта функция регулярна в верхней полуплоскости, непрерывна в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$ и равномерно в ней стремится к единице при $|\lambda| \to \infty$. Кроме того, $e(\lambda, 0) = \overline{e(-\lambda, 0)}$ при всех вещественных λ. Поэтому изменение ее аргумента $\eta(\lambda)$ при движении из $-\infty$ в $+\infty$ вдоль вещественной оси с обходом нуля в верхней полуплоскости по полуокружности достаточно малого радиуса ε равно числу ее нулей, лежащих в верхней полуплоскости, умноженному на 2π:

$$2\pi n = \{\eta(-\varepsilon) - \eta(-\infty)\} + \{\eta(+\varepsilon) - \eta(-\varepsilon)\} + \\ + \{\eta(+\infty) - \eta(+\varepsilon)\} = 2\{\eta(+\infty) - \eta(+\varepsilon)\} + \\ + \{\eta(+\varepsilon) - \eta(-\varepsilon)\}.$$

Если $e(0, 0) \neq 0$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \{\eta(+\varepsilon) - \eta(-\varepsilon)\} = 0$. Если же $e(0, 0) = 0$, то согласно (3.2.26) $e(\lambda, 0) = i\lambda \tilde{K}_1(-\lambda)$, где $\tilde{K}_1(0) \neq 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \{\eta(+\varepsilon) - \eta(-\varepsilon)\} = -\pi$. Поэтому

$$\frac{2\{\eta(+\infty) - \eta(+0)\}}{2\pi} = \begin{cases} n, & \text{если } e(0, 0) \neq 0, \\ n + \frac{1}{2}, & \text{если } e(0, 0) = 0. \end{cases}$$

С другой стороны,

$$S(0) = \begin{cases} 1, & \text{если } e(0, 0) \neq 0, \\ -1, & \text{если } e(0, 0) = 0, \end{cases}$$

и так как по формуле (3.1.32)

$$\ln S(\lambda) = -2i \arg e(\lambda, 0) = -2i\,\eta(\lambda),$$

то

$$\frac{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)}{2\pi i} = n + \frac{1 - S(0)}{4},$$

что и требовалось доказать.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что верно следующее усиление леммы 3.1.7: функция $F_S(x)$, имеющая своим преобразованием Фурье $1 - S(\lambda)$, суммируема на всей вещественной оси.

Указание. Поскольку

$$1 - S(\lambda) = \frac{\tilde{k}(-\lambda) - \tilde{k}(\lambda)}{1 + \tilde{k}(-\lambda)}, \quad \tilde{k}(\lambda) = \int\limits_0^\infty K(0, t)\, e^{-i\lambda t} dt$$

и $1 + \tilde{k}(-\lambda) = e(\lambda, 0) \neq 0$ при $\lambda \neq 0$, в случае $1 + \tilde{k}(0) \neq 0$ сформулированный результат непосредственно вытекает из теоремы

Винера — Леви. При $1+\tilde{k}(0)=0$ можно использовать формулу (3.2.27) и вытекающее из нее тождество

$$1-S(\lambda)=(1-S(\lambda))\,\tilde{h}(\lambda N^{-1})+(1-S(\lambda))\,(1-\tilde{h}(\lambda N^{-1}))=$$

$$=\tilde{h}(\lambda N^{-1})+\frac{\tilde{K}_1(\lambda)}{\tilde{K}_1(-\lambda)}\tilde{h}(\lambda N^{-1})+\frac{\tilde{k}(-\lambda)-\tilde{k}(\lambda)}{1+\tilde{k}(-\lambda)}(1-\tilde{h}(\lambda N^{-1}))=$$

$$=\tilde{h}(\lambda N^{-1})+\frac{\tilde{K}_1(\lambda)\,\overline{\tilde{K}_1(-\lambda)}\,\tilde{h}(\lambda N^{-1})}{1-\{1-\tilde{K}_1(-\lambda)\,\overline{\tilde{K}_1(-\lambda)}\}\,\tilde{h}\left(\frac{\lambda N^{-1}}{2}\right)}+$$

$$+\frac{\{\tilde{k}(-\lambda)-\tilde{k}(\lambda)\}\,\{1-\tilde{h}(\lambda N^{-1})\}}{1+\{1-\tilde{h}(2\lambda N^{-1})\}\,\tilde{k}(-\lambda)},$$

где

$$\tilde{h}(\lambda)=\begin{cases}1, & |\lambda|\leqslant 1,\\ 2-|\lambda|, & 1\leqslant|\lambda|\leqslant 2,\\ 0, & |\lambda|\geqslant 2.\end{cases}$$

Поскольку

$$1-\{1-\tilde{K}_1(-\lambda)\,\overline{\tilde{K}_1(-\lambda)}\}\,\tilde{h}\left(\frac{\lambda N^{-1}}{2}\right)>0 \qquad (-\infty<\lambda<\infty)$$

и при достаточно большом

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty}|\tilde{k}(-\lambda)\,\{1-\tilde{h}(2\lambda N^{-1})\}|<1,$$

то нужный результат снова вытекает из теоремы Винера — Леви.

2. Пусть вещественная функция $q(x)$ удовлетворяет условию (3.1.3) и $h(x)$ — произвольно взятое вещественное решение уравнения $y''-q(x)\,y=0$. Распространить результаты предыдущих параграфов на краевую задачу Штурма — Лиувилля

$$y''-q(x)\,y+\lambda^2 y=0 \qquad (0<x<\infty)$$

с краевым условием

$$\lim_{x\to 0}W\{y(x),h(x)\}=\lim_{x\to 0}\{y'(x)\,h(x)-y(x)\,h'(x)\}=0,$$

которое приводится к обычному виду

$$y'(0)-y(0)\,h=0 \qquad \left(h=\frac{h'(0)}{h(0)}\right),$$

когда функция $q(x)$ интегрируема в окрестности нуля.

3. Распространить результаты предыдущих параграфов на краевую задачу Штурма — Лиувилля

$$y''-q(x)\,y+\lambda^2 y=0,\quad y(0)=0 \quad (0<x<\infty),$$

в которой вещественная функция $q(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 x \left| q(x) - \frac{l_0(l_0+1)}{x^2} \right| dx + \int_1^\infty x \left| q(x) - \frac{l_\infty(l_\infty+1)}{x^2} \right| dx < \infty,$$

где l_0 и l_∞ — целые положительные числа. Доказать, в частности, что формула (3.2.22) в данном случае заменяется такой:

$$n = \frac{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)}{2\pi i} + \frac{l_\infty - l_0}{2}.$$

Указание. В последних двух задачах целесообразно использовать операторы преобразования типа (2.3.26), (2.3.35) (см. гл. 2, § 3, задачи 4—6) и с их помощью свести все вопросы к исследованной краевой задаче (3.1.1), (3.1.2) с функцией $q(x)$, удовлетворяющей условию (3.1.3).

Рассмотрим уравнение Штурма — Лиувилля

$$y'' - q(x)\,y + \lambda^2 y = 0 \qquad (0 < x < \infty)$$

с комплекснозначной функцией $q(x)$, удовлетворяющей условию (3.1.3). Пусть $\mathbf{I} + \mathbf{K}$ — оператор преобразования, переводящий $e^{i\lambda x}$ в $e(\lambda, x)$, $\mathbf{I} + \mathbf{L}$ — обратный ему оператор, $\mathbf{K}^+$ и $\mathbf{L}^+$ — операторы союзные $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{K}^+ f = \int_0^x K(t, x) f(t)\,dt, \quad \mathbf{L}^+ f = \int_0^x L(t, x) f(t)\,dt.$$

Определим функцию $F(x)$ равенством

$$F(x) = L(0, x) + \int_x^\infty L(x, t) L(0, t)\,dt \qquad (0 < x < \infty)$$

и обозначим через $\tilde{F}(\lambda)$ ее преобразование Фурье:

$$\tilde{F}(\lambda) = \int_0^\infty F(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

4. Доказать тождество

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K})(\mathbf{I} + \mathbf{F})(\mathbf{I} + \mathbf{K}^+) = \mathbf{I} \qquad \left(\mathbf{F} f = \int_0^\infty F(x+t) f(t)\,dt\right)$$

и установить, что

$$x_+(\lambda) = e(-\lambda, 0) + \tilde{F}(\lambda)\, e(\lambda, 0) - 1$$

есть преобразование Фурье некоторой функции $x(t) \in L^1(-\infty, \infty)$, равной нулю при $t > 0$:

$$x_+(\lambda) = \int_{-\infty}^0 x(t)\, e^{-i\lambda t} dt.$$

Указание. Воспользоваться результатами задачи 8 из § 1.

5. Обозначим через $Q(\lambda)$ произвольную измеримую и ограниченную на вещественной оси функцию, удовлетворяющую условию $Q(\lambda)\,Q(-\lambda)=1$. Пусть

$$u(\lambda, x)=e(-\lambda,x)-Q(\lambda)\,e(\lambda,x)$$

и

$$u(\lambda, f)=\int_0^\infty f(x)\,u(\lambda, x)\,dx, \quad e(\lambda, f)=\int_0^\infty f(x)\,e(\lambda, x)\,dx.$$

Доказать, что для функций $f(x)$, $g(x)$ из пространства $L^2(0, \infty)$ справедливы равенства

$$\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{e(-\lambda, f)+\widetilde{F}(\lambda)\,e(\lambda, f)\}\,e(\lambda, g)\,d\lambda,$$

$$\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty u(\lambda, f)\,u(-\lambda, g)\,d\lambda-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{Q(\lambda)+\widetilde{F}(\lambda)\}\,e(\lambda, f)\,e(\lambda, g)\,d\lambda.$$

В частности, если функция $e(\lambda, 0)$ отлична от нуля при всех вещественных значениях λ, то, полагая $Q(\lambda)=\dfrac{e(-\lambda, 0)}{e(\lambda,0)}$, получаем

$$\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty u(\lambda, f)\,u(-\lambda, g)\,d\lambda-$$

$$-i\sum_{\operatorname{Im}\lambda>0}\operatorname{Res}\left\{\frac{x_+(\lambda)+1}{e(\lambda, 0)}\,e(\lambda, f)\,e(\lambda, g)\right\}.$$

6. Обобщить результаты двух последних параграфов, а также предыдущие задачи на операторные уравнения Штурма — Лиувилля и Дирака. Рассмотреть отдельно случай, когда пространство H конечномерно.

§ 3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

В классической квантовой механике стационарное состояние системы, состоящей из двух частиц с массами m_1, m_2 и энергией $\mathscr{E}$, описывается Ψ-функцией, удовлетворяющей следующему уравнению Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta\Psi+V(x)\,\Psi=\mathscr{E}\Psi, \tag{3.3.1}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $V(x)$ — потенциал взаимодействия, $x = |\vec{x}|$ — расстояние между частицами. Так как потенциал $V(x)$ зависит только от $|\vec{x}|$, то в этом уравнении можно разделить переменные, положив

$$\Psi(\vec{x}) = x^{-1} u_l(\mathcal{E}, x) Y_l^m(\theta, \varphi),$$

где $Y_l^m(\theta, \varphi)$ — сферические функции. При этом функция $u_l(\mathcal{E}, x)$ должна удовлетворять уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\{u_l'' - l(l+1)x^{-2}u_l\} + V(x)u_l = \mathcal{E}u_l$$

и краевому условию $u_l(\mathcal{E}, 0) = 0$. Введя для краткости обозначения

$$q(x) = \frac{2M}{\hbar^2} V(x), \quad \lambda^2 = \frac{2M\mathcal{E}}{\hbar^2}, \quad u_l(\lambda, x) = u_l(\mathcal{E}, x), \tag{3.3.2}$$

приходим к такой краевой задаче:

$$u_l'' - q(x)u_l - l(l+1)x^{-2}u_l + \lambda^2 u_l = 0 \qquad (0 < x < \infty), \tag{3.3.3}$$

$$u_l(\lambda, 0) = 0. \tag{3.3.4}$$

Ограниченные на бесконечности решения этой краевой задачи называются радиальными волновыми функциями.

Будем в дальнейшем считать, что потенциал $V(x)$ удовлетворяет условию (3.1.3). Из результатов предыдущих параграфов следует, что в этом случае краевая задача (3.3.3), (3.3.4) с $l = 0$ имеет ограниченные решения при $\lambda^2 > 0$ и $\lambda = i\lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, причем эти решения удовлетворяют при $x \to \infty$ асимптотическим формулам

$$u_0(\lambda, x) = e^{-i\lambda x} - S(\lambda)e^{i\lambda x} + o(1) \qquad (0 < \lambda^2 < \infty),$$

$$u_0(i\lambda_k, x) = m_k e^{-\lambda_k x}(1 + o(1)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, набор величин $\{S(\lambda)\ (-\infty < \lambda < \infty);\ \lambda_k, m_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)\}$ полностью определяет поведение на бесконечности всех радиальных волновых функций $u_0(\lambda, x)$. Аналогично обстоит дело и при других значениях l.

Для полного описания рассматриваемой системы достаточно знать поведение на бесконечности всех радиальных волновых функций, так как оно позволяет описать все наблюдаемые эффекты. Естественно поэтому возникает вопрос о том, определяет ли поведение Ψ-функций на бесконечности потенциал $V(x)$. Иными словами, можно ли восстановить потенциал $V(x)$ по экспериментальным данным.

Задача о восстановлении потенциала по экспериментальным данным называется обратной задачей квантовой теории рассеяния, так как основную экспериментальную информацию (но не всю) получают в опытах по рассеянию частиц [1]. В соответствии с этой терминологией набор величин $\{S(\lambda)\,(-\infty<\lambda<\infty);\ \lambda_k,\ m_k\,(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\}$, определяющий поведение на бесконечности радиальных волновых функций $u_0(\lambda,\ x)$, будем называть данными рассеяния краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) (т. е. задачи (3.3.3), (3.3.4) с $l=0$).

По данным рассеяния, потенциал $V(x)$ восстанавливается однозначно. Это сразу следует из теоремы 3.2.1. Действительно, зная данные рассеяния, можно построить по формуле (3.2.7) функцию $F(x)$ и написать основное уравнение (3.2.10). Согласно следствию теоремы 3.2.1 основное уравнение имеет единственное решение при каждом $x \geqslant 0$. Решив его, найдем ядро $K(x,\ y)$ оператора преобразования, а значит, и потенциал $q(x)=-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}K(x,\ x)$.

Остается выяснить, какими свойствами должен обладать набор величин $\{S(\lambda)\ (-\infty<\lambda<\infty);\ \lambda_k,\ m_k\,(k=1,2,\ldots$ $\ldots,\ n)\}$ для того, чтобы он был данными рассеяния некоторой краевой задачи вида (3.1.1), (3.1.2) с потенциалом, удовлетворяющим условию (3.1.3). Из результатов предыдущего параграфа следует, что данные рассеяния всегда удовлетворяют таким условиям.

I. Функция $S(\lambda)$ непрерывна на всей оси, $S(\lambda)=\overline{S(-\lambda)}=[S(-\lambda)]^{-1}$, а $1-S(\lambda)$ стремится к нулю при $|\lambda|\to\infty$ и является преобразованием Фурье функции

$$F_S(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1-S(\lambda))\,e^{i\lambda x}d\lambda,$$

представимой в виде суммы двух функций, из которых одна принадлежит пространству $L^1(-\infty,\ \infty)$, а другая ограничена и принадлежит пространству $L^2(-\infty,\ \infty)$. На положи-

[1] Правильнее было бы ее назвать задачей о восстановлении потенциала по асимптотическому поведению всех Ψ-функций на бесконечности.

тельной полуоси функция $F_S(x)$ имеет производную $F'_S(x)$, удовлетворяющую условию

$$\int_0^\infty x\,|F'_S(x)|\,dx < \infty.$$

II. Изменение аргумента функции $S(\lambda)$ связано с числом n отрицательных собственных значений краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) формулой

$$n = \frac{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)}{2\pi i} - \frac{1 - S(0)}{4}.$$

Докажем, что эти условия являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы рассматриваемый набор величин $\{S(\lambda);\ \lambda_k,\ m_k\}$ был данными рассеяния некоторой краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) с потенциалом, удовлетворяющим условию (3.1.3). Предпошлем доказательству этого основного результата несколько вспомогательных лемм.

Пусть функция $S(\lambda)$ удовлетворяет условию I и

$$F_S(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1 - S(\lambda))\,e^{i\lambda x}d\lambda, \tag{3.3.5}$$

$$F(x) = F_S(x) + \sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k x}. \tag{3.3.6}$$

Составим по функции $F(x)$ основное уравнение

$$F(x+y) + K(x, y) + \int_x^\infty K(x, t)\,F(t+y)\,dt = 0, \tag{3.3.7}$$

которое удобнее переписать в таком виде:

$$F(2x+y) + K(x, x+y) + \int_0^\infty K(x, x+t)\,F(t+y+2x)\,dt = 0, \tag{3.3.7'}$$

и будем искать его решение $K(x, x+y)$ при каждом $x \geqslant 0$ в одном и том же пространстве $L^1(0, \infty)$.

Рассмотрим действующие в пространствах $L^i(0, \infty)$ $(i = 1, 2)$ и $L^2(-\infty, 0)$ операторы $\mathbf{F}^{+}_{S,a}$ и $\mathbf{F}^{-}_{S}$:

$$\mathbf{F}^{+}_{S,a}f = \int_0^\infty F_S(t+y+2a)\,f(t)\,dt, \tag{3.3.8}$$

$$\mathbf{F}^{-}_{S}f = \int_{-\infty}^{0} F_S(y+t)\,f(t)\,dt, \tag{3.3.9}$$

а также оператор $\mathbf{F}_a^+$:

$$\mathbf{F}_a^+ f = \int_0^\infty F(t+y+2a) f(t)\,dt, \tag{3.3.10}$$

фигурирующий в основном уравнении.

Лемма 3.3.1. *Операторы* $\mathbf{F}_{S,a}^+$ *и* $\mathbf{F}_a^+$ *вполне непрерывны в каждом из пространств* $L^i(0, \infty)$ $(i = 1, 2)$ *при любом* $a \geqslant 0$. *Оператор* $\mathbf{F}_S^-$ *вполне непрерывен в пространстве* $L^2(-\infty, 0)$.

Доказательство. Из условия I следует, что функция $F_S(y)$ суммируема на положительной полуоси. Поэтому, если $f(y) \in L^1(0, \infty)$ и $\|f\| = 1$, то для функции $g(y) = \mathbf{F}_{S,a}^+ f$ справедливы следующие оценки:

$$\|g\| = \int_0^\infty dy \left| \int_0^\infty f(t) F_S(t+y+2a)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty |f(t)| \int_0^\infty |F_S(t+y+2a)|\,dy dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty |f(t)| \int_{2a}^\infty |F_S(u)|\,du dt \leqslant \int_0^\infty |F_S(u)|\,du,$$

$$\int_0^\infty |g(y+h) - g(y)|\,dy = \int_0^\infty dy \left| \int_0^\infty f(t) \{F_S(t+y+h+2a) - \right.$$

$$\left. - F_S(t+y+2a)\}\,dt \right| \leqslant \int_0^\infty |f(t)| \int_{2a}^\infty |F_S(u+h) -$$

$$- F_S(u)|\,du dt \leqslant \int_0^\infty |F_S(u+h) - F_S(u)|\,du,$$

$$\int_N^\infty |g(y)|\,dy = \int_N^\infty dy \left| \int_0^\infty f(t) F_S(t+y+2a)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty |f(t)| \int_{2a+N}^\infty |F_S(u)|\,du dt \leqslant \int_N^\infty |F_S(u)|\,du.$$

Так как

$$\lim_{h\to 0}\int_0^\infty |F_S(u+h)-F_S(u)|\,du=0,$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_N^\infty |F_S(u)|\,du=0,$$

то из этих оценок вытекает компактность множества, в которое оператор $\mathbf{F}^+_{S,a}$ переводит единичный шар пространства $L^1(0,\infty)$, и, следовательно, полная непрерывность этого оператора.

Для доказательства полной непрерывности оператора $\mathbf{F}^+_{S,a}$ в пространстве $L^2(0,\infty)$ заметим прежде всего, что $S(\lambda)$ является непрерывной функцией. Благодаря этому можно построить последовательность гладких функций $\tilde{\Phi}_k(\lambda)$ такую, что

$$\max_{-\infty<\lambda<\infty}|\tilde{\Phi}_k(\lambda)-(1-S(\lambda)|<\frac{1}{k},$$

$$\int_{-\infty}^\infty \{|\tilde{\Phi}_k(\lambda)|^2+|\tilde{\Phi}_k'(\lambda)|^2\}\,d\lambda<\infty.$$

Пусть

$$\Phi_k(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \tilde{\Phi}_k(\lambda)\,e^{i\lambda y}d\lambda.$$

Так как

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |\Phi_k(t+y+2a)|^2\,dydt=\int_0^\infty dy\int_{2a+y}^\infty |\Phi_k(u)|^2\,du=$$

$$=\int_0^\infty y\,|\Phi_k(y+2a)|^2\,dy\leqslant\int_0^\infty |\Phi_k(y+2a)|^2\,dy+$$

$$+\int_0^\infty (y+2a)^2|\Phi_k(y+2a)|^2\,dy\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\{|\Phi_k(\lambda)|^2+$$

$$+|\Phi_k'(\lambda)|^2\}\,d\lambda<\infty,$$

то операторы $\mathbf{\Phi}_k$,

$$\mathbf{\Phi}_k f=\int_0^\infty f(t)\,\Phi_k(t+y+2a)\,dt,$$

являются операторами Гильберта — Шмидта и, значит, вполне непрерывны. Вполне непрерывные операторы образуют замкнутый идеал в кольце всех ограниченных операторов. Поэтому для доказательства полной непрерывности оператора $\mathbf{F}^{+}_{S,a}$ достаточно убедиться, что последовательность операторов $\mathbf{\Phi}_k$ по норме сходится к $\mathbf{F}^{+}_{S,a}$, когда $k \to \infty$. Так как

$$\{\mathbf{\Phi}_k - \mathbf{F}^{+}_{S,a}\} f = \int_0^\infty f(t) \{\Phi_k(t+y+2a) - F_S(t+y+ 2a)\} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\tilde{\Phi}_k(\lambda) - (1 - S(\lambda))\} \tilde{f}(-\lambda) e^{i\lambda(y+2a)} d\lambda,$$

то

$$\| \{\mathbf{\Phi}_k - \mathbf{F}^{+}_{S,a}\} f \|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\Phi}_k(\lambda) - (1 - S(\lambda))|^2 |\tilde{f}(-\lambda)|^2 d\lambda \leqslant \frac{1}{k^2} \|f\|^2$$

и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \| \mathbf{\Phi}_k - \mathbf{F}^{+}_{S,a} \| = 0$, а оператор $\mathbf{F}^{+}_{S,a}$ вполне непрерывен.

Полная непрерывность оператора $\mathbf{F}_S^{-}$ в пространстве $L^2(-\infty, 0)$ доказывается совершенно аналогично.

Для того чтобы закончить доказательство леммы, заметим, что оператор $\mathbf{F}_a^{+}$ получается из $\mathbf{F}^{+}_{S,a}$ прибавлением конечномерного оператора и поэтому тоже вполне непрерывен.

Из последней леммы следует, что для доказательства разрешимости основного уравнения достаточно убедиться, что однородное уравнение $f + \mathbf{F}_a^{+} f = 0$ не имеет ненулевых решений в соответствующем пространстве. Заметим, что решения этого уравнения, принадлежащие пространству $L^1(0, \infty)$, ограничены и, следовательно, принадлежат также пространству $L^2(0, \infty)$. Действительно, ядро $F(t + y + 2a)$ оператора $\mathbf{F}_a^{+}$ можно аппроксимировать ограниченной функцией $\Phi(t + y + 2a)$ так, чтобы

$$\int_0^\infty |F(t) - \Phi(t)| dt < 1.$$

Переписав уравнение $f + \mathbf{F}_a^{+} f = 0$ в виде

$$f - \{\mathbf{\Phi} - \mathbf{F}_a^{+}\} f = -\mathbf{\Phi} f,$$

получим справа ограниченную функцию, и оператор $\mathbf{\Phi}-\mathbf{F}_a^+$ будет иметь норму меньшую единицы. Поэтому

$$f=-\mathbf{\Phi}f-\sum_{n=1}^{\infty}(\mathbf{\Phi}-\mathbf{F}_a^+)^n\mathbf{\Phi}f,$$

причем этот ряд сходится как в пространстве $L^1(0,\infty)$, так и в пространстве $L^\infty(0,\infty)$. Следовательно,

$$f(y)\in L^1(0,\infty)\cap L^\infty(0,\infty)\subset L^2(0,\infty).$$

Таким образом, однородное уравнение $f+\mathbf{F}_a^+f=0$ достаточно исследовать в пространстве $L^2(0,\infty)$.

Лемма 3.3.2. *Действующие в пространстве* $L^2(0,\infty)$ *операторы* $\mathbf{I}+\mathbf{F}_a^+$ *и* $\mathbf{I}+\mathbf{F}_{S,a}^+$ *неотрицательны при любом* $a\geqslant 0$:

$$(\{\mathbf{I}+\mathbf{F}_a^+\}f,f)\geqslant 0, \tag{3.3.11}$$

причем равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда

$$\left.\begin{aligned}&\tilde f(\lambda)-S(\lambda)e^{2i\lambda a}\tilde f(-\lambda)=0 \qquad (-\infty<\lambda<\infty),\\&\tilde f(-i\lambda_k)=0 \qquad (k=1,2,\ldots,n).\end{aligned}\right\} \tag{3.3.12}$$

Действующий в пространстве $L^2(-\infty,0)$ *оператор* $\mathbf{I}-\mathbf{F}_S^-$ *неотрицателен:*

$$(\{\mathbf{I}-\mathbf{F}_S^-\}g,g)\geqslant 0,$$

причем равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда

$$\tilde g(\lambda)+S(\lambda)\tilde g(-\lambda)=0 \qquad (-\infty<\lambda<\infty). \tag{3.3.13}$$

Доказательство. Из формул (3.3.5), (3.3.6), (3.3.10) и равенства Парсеваля следует, что

$$(\{\mathbf{I}+\mathbf{F}_a^+\}f,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde f(\lambda)|^2\,d\lambda+\sum_{k=1}^{n}m_k^2\,|\tilde f(-i\lambda_k)|^2+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1-S(\lambda))e^{2i\lambda a}\tilde f(-\lambda)\overline{\tilde f(\lambda)}\,d\lambda.$$

Так как $\tilde f(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $f(y)$, равной нулю при $y<0$, то $\tilde f(-\lambda)e^{2i\lambda a}$ есть преобразование Фурье функции $f(-y-2a)$, равной нулю при $y>-2a$.

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\lambda a}\tilde{f}(-\lambda)\overline{\tilde{f}(\lambda)}\,d\lambda = \int_{0}^{\infty} f(-y-2a)\overline{f(y)}\,dy = 0,$$

$$(\{\mathbf{I}+\mathbf{F}_a^+\}f, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k^2 |\tilde{f}(-i\lambda_k)|^2 +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\tilde{f}(\lambda) - S(\lambda)e^{2i\lambda a}\tilde{f}(-\lambda)\}\overline{\tilde{f}(\lambda)}\,d\lambda. \qquad (3.3.14)$$

Поскольку $|S(\lambda)e^{2i\lambda a}| = 1$, то согласно неравенству Коши — Буняковского

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda)e^{2i\lambda a}\tilde{f}(-\lambda)\overline{\tilde{f}(\lambda)}\,d\lambda\right|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(-\lambda)|^2\,d\lambda \int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(\lambda)|^2\,d\lambda$$

или

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda)e^{2i\lambda a}\tilde{f}(-\lambda)\overline{\tilde{f}(\lambda)}\,d\lambda\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(\lambda)|^2\,d\lambda.$$

Следовательно, первое слагаемое в правой части формулы (3.3.14) неотрицательно; второе слагаемое, очевидно, тоже неотрицательно. Поэтому справедливо неравенство (3.3.11), причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда

$$\tilde{f}(-i\lambda_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{\tilde{f}(\lambda) - S(\lambda)e^{2i\lambda a}\tilde{f}(-\lambda)\}\overline{\tilde{f}(\lambda)}\,d\lambda = 0.$$

Полагая

$$z(\lambda) = \tilde{f}(\lambda) - S(\lambda)e^{2i\lambda a}\tilde{f}(-\lambda),$$

видим, что эта функция должна быть ортогональна функции $\tilde{f}(\lambda)$. Но тогда

$$\|\tilde{f}(\lambda)\|^2 = \|S(\lambda)e^{2i\lambda a}\tilde{f}(-\lambda)\|^2 = \|\tilde{f}(\lambda) - z(\lambda)\|^2 =$$

$$= \|\tilde{f}(\lambda)\|^2 + \|z(\lambda)\|^2,$$

что возможно только при $z(\lambda) = 0$. Итак, неравенство (3.3.11) всегда справедливо, причем знак равенства достигается на функциях, преобразования Фурье которых $\tilde{f}(\lambda)$ удовлетворяют условиям (3.3.12).

Аналогичные утверждения для операторов $\mathbf{I} + \mathbf{F}_{S,a}^{+}$ и $\mathbf{I} - \mathbf{F}_{S}^{-}$ доказываются так же.

Лемма 3.3.3. *Действующие в пространстве $L^1(0, \infty)$ операторы $\mathbf{I} + \mathbf{F}_a^{+}$ при всех $a > 0$ имеют обратные и*

$$\sup_{\varepsilon \leqslant a < \infty} \| \{\mathbf{I} + \mathbf{F}_a^{+}\}^{-1} \| = C(\varepsilon) < \infty, \tag{3.3.15}$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Если оператор $\mathbf{I} + \mathbf{F}_a^{+}$ имеет обратный при $a = 0$, то неравенство (3.3.15) остается верным и при $\varepsilon = 0$ ($C(0) < \infty$).

Доказательство. Согласно предыдущему для доказательства существования оператора $\{\mathbf{I} + \mathbf{F}_a^{+}\}^{-1}$ достаточно убедиться, что уравнение $f + \mathbf{F}_a^{+} f = 0$ имеет в пространстве $L^2(0, \infty)$ только нулевые решения. Но по лемме 2 преобразования Фурье $\tilde{f}(\lambda)$ решений этого уравнения удовлетворяют тождеству

$$\tilde{f}(\lambda) - S(\lambda)\, e^{2i\lambda a} \tilde{f}(-\lambda) = 0.$$

Поэтому, полагая

$$\tilde{\varphi}_h(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)\, e^{-i\lambda a} \cos \lambda h, \qquad 0 < h < a,$$

получаем

$$\tilde{\varphi}_h(\lambda) - S(\lambda)\, \tilde{\varphi}_h(-\lambda) = 0. \tag{3.3.16}$$

Так как $\tilde{\varphi}_h(\lambda)$ является преобразованием Фурье функции

$$\varphi_h(t) = \frac{1}{2} \{ f(t - a + h) + f(t - a - h) \},$$

равной нулю при $t < a - h$, то из тождества (3.3.16) следует, что

$$\varphi_h + \mathbf{F}_{S,0}^{+} \varphi_h = 0 \tag{3.3.17}$$

при всех $h \in (0, a)$. Таким образом, если бы уравнение $f + \mathbf{F}_a^{+} f = 0$ имело ненулевое решение $f(y)$, то уравнение (3.3.17) имело бы бесконечно много линейно независимых решений $\varphi_h(y)$, что невозможно, так как оператор $\mathbf{F}_{S,0}^{+}$ вполне непрерывен. Значит, $f(y) = 0$ и операторы $\mathbf{I} + \mathbf{F}_a^+$ обратимы при всех $a > 0$.

Легко убедиться, что норма операторов $\mathbf{I} + \mathbf{F}_a^+$ непрерывно зависит от a и стремится к единице при $a \to \infty$. Поэтому $\|\{\mathbf{I} + \mathbf{F}_a^+\}^{-1}\|$ есть непрерывная функция от $a \in (0, \infty)$, стремящаяся к единице при $a \to \infty$. Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\varepsilon \leqslant a < \infty} \|\{\mathbf{I} + \mathbf{F}_a^+\}^{-1}\| = C(\varepsilon) < \infty,$$

причем $C(0) < \infty$, если оператор $\mathbf{I} + \mathbf{F}_a^+$ обратим и при $a = 0$.

Теорема 3.3.1. *Если выполнено условие I, то основное уравнение (3.3.7) имеет при каждом $x > 0$ единственное решение $K(x, y) \in L^1(x, \infty)$, функции*

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, y)\, e^{i\lambda y} dy \qquad (\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0)$$

удовлетворяют уравнению

$$y'' - q(x)\, y + \lambda^2 y = 0, \qquad 0 < x < \infty,$$

где

$$q(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x)$$

и при всех $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^\infty x\, |q(x)|\, dx < \infty. \tag{3.3.18}$$

Если, кроме того, оператор $\mathbf{I} + \mathbf{F}_a^+$ имеет обратный и при $a = 0$, то это неравенство остается верным при $\varepsilon = 0$, т. е. функция $q(x)$ удовлетворяет условию (3.1.3).

Доказательство. Разрешимость основного уравнения при всех $x > 0$ была доказана в лемме 3.3.3. Так как функция $F(x)$ по условию дифференцируема на полуоси $(0, \infty)$ и ее производная принадлежит $L^1(\varepsilon, \infty)$, то, используя обычную технику предельного перехода под знаком интеграла, нетрудно установить существование частных производных первого порядка у функции $K(x, y)$ и возможность почленного дифференцирования равенства (3.3.7).

Для оценки функции $K(x, y)$ и ее производных удобно ввести такие обозначения:

$$\tau(x) = \int_x^\infty |F'(t)|\, dt, \qquad \tau_1(x) = \int_x^\infty \tau(t)\, dt. \tag{3.3.19}$$

Заметим, что

$$|F(x)| \leqslant \tau(x) \tag{3.3.20}$$

и $\tau_1(0) < \infty$ (так как $\int\limits_0^\infty x|F'(x)|\,dx < \infty$ по условию).

Из уравнения (3.3.7) находим

$$K(x, x+y) = -\{\mathbf{I} + \mathbf{F}_x^+\}^{-1} F(y+2x),$$

откуда согласно неравенству (3.3.15) леммы 3.3.3 следует

$$\int\limits_0^\infty |K(x, x+y)|\,dy \leqslant \|\{\mathbf{I} + \mathbf{F}_x^+\}^{-1}\| \int\limits_0^\infty |F(y+2x)|\,dy \leqslant$$
$$\leqslant C(x)\,\tau_1(2x).$$

Используя эту оценку, получаем

$$|K(x, x+y)| \leqslant |F(y+2x)| + \int\limits_0^\infty |K(x, x+t)| \times$$
$$\times |F(t+y+2x)|\,dt \leqslant \tau(y+2x)\{1 + C(x)\,\tau_1(2x)\}.$$

Продифференцировав уравнение (3.3.7′) по x, будем иметь

$$2F'(y+2x) + K'_x(x, x+y) + \int\limits_0^\infty K'_x(x, x+t) \times$$
$$\times F(t+y+2x)\,dt + 2\int\limits_0^\infty K(x, x+t)\,F'(t+y+2x)\,dt = 0,$$

вследствие чего

$$\int\limits_0^\infty |K'_x(x, x+y)|\,dy \leqslant 2\|\{\mathbf{I} + \mathbf{F}_x^+\}^{-1}\| \int\limits_0^\infty |F'(y+2x) +$$
$$+ \int\limits_0^\infty K(x, x+t)\,F'(t+y+2x)\,dt\,|\,dy \leqslant 2C(x)\,\tau(2x) \times$$
$$\times \{1 + C(x)\,\tau_1(2x)\}.$$

Поэтому

$$|K'_x(x, x+y) + 2F'(y+2x)| \leqslant \int\limits_0^\infty |K'_x(x, x+t) \times$$

$$\times F(t+y+2x)|\,dt + 2\int_0^\infty |K(x, x+t)\,F'(t+y+2x)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\tau(y+2x)\,C(x)\,\tau(2x)\,\{1 + C(x)\,\tau_1(2x)\} +$$
$$+ 2\tau(2x)\,\{1 + C(x)\,\tau_1(2x)\}\,\tau(y+2x),$$

т. е. функция $q(x) = -2\frac{d}{dx}\,K(x, x)$ удовлетворяет неравенству

$$|q(x)| \leqslant 4\,|F'(2x)| + 8C(x)\,\{1 + C(x)\,\tau_1(2x)\}\tau^2(2x).$$

Так как

$$x\tau(x) = x\int_x^\infty |F'(t)|\,dt \leqslant \int_x^\infty t\,|F'(t)|\,dt \leqslant \int_0^\infty t\,|F'(t)|\,dt < \infty,$$

то

$$\int_\varepsilon^\infty x\,|q(x)|\,dx \leqslant 4\int_0^\infty x\,|F'(2x)|\,dx +$$

$$+ 4C(\varepsilon)\,\{1 + C(\varepsilon)\,\tau_1(0)\}\int_0^\infty t\,|F'(t)|\,dt \cdot \int_\varepsilon^\infty \tau(2x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty t\,|F'(t)|\,dt \cdot \{1 + 2C(\varepsilon)\,[1 + C(\varepsilon)\,\tau_1(0)]\,\tau_1(0)\}$$

и неравенство (3.3.18) доказано. При этом, если оператор $\mathbf{I} + \mathbf{F}_a^+$ обратим при $a = 0$, то $C(0) < \infty$ и неравенство (3.3.18) остается верным при $\varepsilon = 0$.

Переходя к доказательству основного утверждения теоремы, предположим сначала, что функция $F(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, причем $F''(x) \in L^1(\varepsilon, \infty)$ при любом $\varepsilon > 0$. Тогда решение $K(x, y)$ основного уравнения тоже дважды непрерывно дифференцируемо, и его вторые производные суммируемы на полуоси (ε, ∞) при любом $\varepsilon > 0$. Дифференцируя основное уравнение два раза по y, получаем

$$F''(x+y) + K''_{yy}(x, y) + \int_x^\infty K(x, t)\,F''(t+y)\,dt = 0,$$

откуда после интегрирования по частям

$$F''(x+y)+K''_{yy}(x, y)-K(x, x)F'(x+y)+$$

$$+K'_t(x, t)F(t+y)\big|_{t=x}+\int\limits_x^\infty K''_{tt}(x, t)F(t+y)\,dt=0.$$

С другой стороны, при двукратном дифференцировании основного уравнения по x находим

$$F''(x+y)+K''_{xx}(x, y)-\{K(x, x)F(x+y)\}'_x-$$

$$-K'_x(x, t)F(t+y)\big|_{t=x}+\int\limits_x^\infty K''_{xx}(x, t)F(t+y)\,dt=0.$$

Вычитая из этого равенства предыдущее, получаем

$$K''_{xx}(x, y)-K''_{yy}(x, y)+q(x)F(x+y)+$$

$$+\int\limits_x^\infty \{K''_{xx}(x, t)-K''_{tt}(x, t)\}F(t+y)\,dt=0,$$

где

$$q(x)=-2\frac{d}{dx}K(x, x).$$

Но согласно основному уравнению

$$q(x)F(x+y)=-q(x)K(x, y)-\int\limits_x^\infty q(x)K(x, t)F(t+y)\,dt.$$

Поэтому

$$K''_{xx}(x, y)-K''_{yy}(x, y)-q(x)K(x, y)+$$

$$+\int\limits_x^\infty \{K''_{xx}(x, t)-K''_{tt}(x, t)-q(x)K(x, t)\}F(t+y)\,dt=0,$$

т. е. функция

$$\varphi(y)=K''_{xx}(x, y)-K''_{yy}(x, y)-q(x)K(x, y)$$

является суммируемым решением однородного уравнения

$$\varphi(y)+\int\limits_x^\infty \varphi(t)F(t+y)\,dt=0\qquad(x\leqslant y<\infty).$$

Так как это уравнение согласно лемме 3.3.3 имеет только нулевые решения при всех $x>0$, то $\varphi(y)=0$ и, следовательно, функция $K(x, y)$ является решением уравнения

$$K''_{xx}(x, y)-K''_{yy}(x, y)-q(x)K(x, y)=0,$$

удовлетворяющим условиям

$$q(x) = -2\frac{d}{dx}K(x, x),$$

$$\lim_{x+y\to\infty} K'_x(x, y) = \lim_{x+y\to\infty} K'_y(x, y) = 0.$$

Отсюда согласно замечанию к лемме 3.1.2 заключаем, что функция $K(x, y)$ является ядром оператора преобразования, т. е. функции

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t)\, e^{i\lambda t} dt \qquad (3.3.21)$$

удовлетворяют уравнению

$$y'' - q(x)\, y + \lambda^2 y = 0 \qquad (0 < x < \infty). \qquad (3.3.22)$$

Пусть теперь выполнено только условие I, так что функция $F(x)$ может не иметь второй производной. Построим последовательность дважды непрерывно дифференцируемых функций $F_n(x)$ так, чтобы при каждом $\varepsilon > 0$ выполнялись равенства

$$\lim_{n\to\infty}\int_\varepsilon^\infty |F_n(x) - F(x)|\, dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\varepsilon^\infty x\,|F'_n(x) - F'(x)|\, dx = 0.$$

Тогда при достаточно больших n каждое из уравнений

$$F_n(x+y) + K_n(x, y) + \int_x^\infty K_n(x, t)\, F_n(t+y)\, dt = 0$$

будет иметь единственное решение, причем

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\varepsilon\leqslant x<\infty}\int_x^\infty |K_n(x, y) - K(x, y)|\, dy = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\varepsilon^\infty |K'_n(x, x) - K'(x, x)|\, dx = 0,$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Кроме того, как было показано выше, функции

$$e_n(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K_n(x, t)\, e^{i\lambda t} dt$$

будут удовлетворять уравнениям

$$y'' - q_n(x)\, y + \lambda^2 y = 0 \qquad \left(q_n(x) = -2\frac{d}{dx} K_n(x, x)\right).$$

Совершая в этих формулах предельный переход при $n \to \infty$, приходим к выводу, что функции (3.3.21) должны удовлетворять уравнению (3.3.22), что и требовалось доказать.

Теорема 3.3.2. *Если выполнено условие I и*

а) *уравнение* $f + \mathbf{F}^{+}_{S,0} f = 0$ *имеет в пространстве* $L^2(0, \infty)$ n *линейно независимых решений,*

б) *уравнение* $g - \mathbf{F}^{-}_{S}\, g = 0$ *имеет в пространстве* $L^2(-\infty, 0)$ *только нулевые решения, то набор величин* $\{S(\lambda)\ (-\infty < \lambda < \infty);\ \lambda_k, m_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)\}$ *является данными рассеяния некоторой краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) с потенциалом* $q(x)$, *удовлетворяющим условию (3.1.3).*

Доказательство. Согласно теореме 3.3.1 условие I является достаточным для разрешимости основного уравнения при всех $x > 0$, причем функции (3.3.21) удовлетворяют уравнению (3.3.22). Если основное уравнение разрешимо и при $x = 0$ (т. е. уравнение $f + \mathbf{F}^{+}_{0} f = 0$ имеет в пространстве $L^2(0, \infty)$ только нулевые решения), то потенциал $q(x)$ в уравнении (3.3.22) удовлетворяет условию (3.1.3). Таким образом, для доказательства сформулированной теоремы нам нужно только показать, что условия «а» и «б» влекут за собой

1. Отсутствие ненулевых решений уравнения $f + \mathbf{F}^{+}_{0} f = 0$.
2. Равенства $e(i\lambda_k, 0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$.
3. Тождество $e(-\lambda, 0) - S(\lambda)\, e(\lambda, 0) = 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty)$.

Докажем последовательно эти утверждения.

1. Если функция $f(y) \in L^2(0, \infty)$ удовлетворяет уравнению $f + \mathbf{F}^{+}_{0} f = 0$, то согласно лемме 3.3.2 ее преобразование Фурье $\tilde{f}(\lambda)$ удовлетворяет равенствам

$$\tilde{f}(-i\lambda_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\tilde{f}(\lambda) - S(\lambda)\tilde{f}(-\lambda) = 0 \qquad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Поэтому функции

$$\tilde{z}_1(\lambda) = \tilde{f}(\lambda), \qquad \tilde{z}_{k+1}(\lambda) = (\lambda^2 + \lambda_k^2)^{-1}\tilde{f}(\lambda)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

являются преобразованиями Фурье функций

$$z_p(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{z}_p(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda \qquad (p = 1, 2, \ldots, n+1),$$

которые, очевидно, равны нулю при $y < 0$ и принадлежат $L^2(0, \infty)$. Кроме того, функции $\tilde{z}_p(\lambda)$ тоже удовлетворяют тождеству

$$\tilde{z}_p(\lambda) - S(\lambda)\tilde{z}_p(-\lambda) = 0,$$

откуда следует, что

$$z_p + \mathbf{F}^+_{S,0} z_p = 0,$$

и уравнение $z + \mathbf{F}^+_{S,0} z = 0$ имеет $n+1$ решений $z_1(y)$, $z_2(y)$, ..., $z_{n+1}(y)$. Эти решения линейно независимы, если $\tilde{f}(\lambda) \not\equiv 0$. Но в силу условия «а» это уравнение имеет только n линейно независимых решений. Следовательно, $\tilde{f}(\lambda) \equiv 0$, уравнение $f + \mathbf{F}^+_0 f = 0$ имеет только нулевые решения, а основное уравнение разрешимо и при $x = 0$.

2. Рассмотрим основное уравнение при $x = 0$ и подставим в него вместо функции $F(y)$ ее выражение (3.3.6). В результате получим

$$\sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k y} + F_S(y) + K(0, y) + \\ + \sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k y} \int_0^{\infty} K(0, t) e^{-\lambda_k t} dt + \\ + \int_0^{\infty} K(0, t) F_S(t + y)\, dt = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} m_k^2 e(-i\lambda_k, 0) e^{-\lambda_k y} + F_S(y) + K(0, y) + \\ + \int_0^{\infty} K(0, t) F_S(t + y)\, dt = 0. \qquad (3.3.23)$$

Согласно условию «а» уравнение $f + \mathbf{F}^+_{S,0} f = 0$ имеет n линейно независимых решений $f_1(y)$, $f_2(y)$, ..., $f_n(y)$. Умножая обе части равенства (3.3.23) на $f_j(y)$ и интегрируя, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} m_k^2 e(-i\lambda_k, 0) f_j(-i\lambda_k) + \int_0^\infty F_S(y) f_j(y)\, dy = 0.$$

Как было показано в лемме 3.3.2, преобразования Фурье $\tilde{f}_j(\lambda)$ этих решений должны удовлетворять равенству

$$\tilde{f}_j(\lambda) - S(\lambda)\tilde{f}_j(-\lambda) = 0.$$

Поэтому

$$\int_0^\infty F_S(y) f_j(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - S(\lambda))\tilde{f}_j(-\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\tilde{f}_j(-\lambda) - \tilde{f}_j(\lambda)\}\, d\lambda = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k^2 e(-i\lambda_k, 0)\tilde{f}_j(-i\lambda_k) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, для доказательства равенств $e(-i\lambda_k, 0) = 0$ достаточно убедиться, что детерминант матрицы $\|\tilde{f}_j(-i\lambda_k)\|$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$ отличен от нуля. Если бы он был равен нулю, то нашлись бы не равные нулю одновременно числа c_j такие, что

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\tilde{f}_j(-i\lambda_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Но тогда функция $\tilde{z}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_j\tilde{f}_j(\lambda)$ удовлетворяла бы равенствам (3.3.12) из леммы 3.3.2, т. е. функция $z(y) = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(y)$ была бы ненулевым решением уравнения $z + \mathbf{F}_0^+ z = 0$, что невозможно, как это было доказано выше. Следовательно,

$$\det\|\tilde{f}_j(-i\lambda_k)\| \neq 0, \qquad e(-i\lambda_k, 0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

3. Так как

$$e(-\lambda, 0) - S(\lambda)e(\lambda, 0) = 1 + \tilde{k}(\lambda) - S(\lambda)[1 + \tilde{k}(-\lambda)] =$$

$$= 1 - S(\lambda) + \tilde{k}(\lambda) - \tilde{k}(-\lambda) + [1 - S(\lambda)]\tilde{k}(-\lambda),$$

где

$$\tilde{k}(\lambda) = \int_0^\infty K(0, t)\, e^{-i\lambda t} dt,$$

то подлежащее доказательству равенство эквивалентно такому:

$$1 - S(\lambda) + \tilde{k}(\lambda) - \tilde{k}(-\lambda) + [1 - S(\lambda)]\, \tilde{k}(-\lambda) = 0$$
$$(-\infty < \lambda < \infty).$$

Поскольку слева стоит преобразование Фурье функции

$$\Phi(y) = F_S(y) + K(0, y) - K(0, -y) + \\ + \int_0^\infty K(0, t)\, F_S(t + y)\, dt, \tag{3.3.24}$$

нам нужно доказать, что $\Phi(y) \equiv 0$. Рассмотрим сначала эту функцию при $y > 0$. Из уравнения (3.3.23) и уже доказанных равенств $e(-i\lambda_k, 0) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ вытекает, что при $y > 0$

$$F_S(y) + K(0, y) + \int_0^\infty K(0, t)\, F_S(t + y)\, dt = 0,$$

а так как и $K(0, -y) = 0$, то

$$\Phi(y) \equiv 0 \qquad (0 < y < \infty).$$

Умножая обе части равенства (3.3.24) на $F_S(x + y)$ и интегрируя по y, получаем

$$\int_{-\infty}^0 \Phi(y)\, F_S(x + y)\, dy = \int_{-\infty}^\infty F_S(y)\, F_S(y + x)\, dy + \\ + \int_0^\infty K(0, y)\, F_S(y + x)\, dy - \int_{-\infty}^0 K(0, -y)\, F_S(y + x)\, dy + \\ + \int_0^\infty K(0, t) \int_{-\infty}^\infty F_S(t + y)\, F_S(y + x)\, dy dt.$$

Так как преобразование Фурье функции $F_S(y)$ равно $1 - S(\lambda)$, то в силу теоремы о свертке преобразование Фурье функции

$$\int_{-\infty}^\infty F_S(y)\, F_S(y + x)\, dy$$

равно

$$\{1-S(-\lambda)\}\{1-S(\lambda)\}=1-S(-\lambda)-S(\lambda)+1,$$

вследствие чего

$$\int_{-\infty}^{\infty} Fs(y)\,Fs(y+x)\,dy=Fs(-x)+Fs(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Fs(t+y)\,Fs(y+x)\,dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} Fs(\xi)\,Fs(\xi-t+x)\,d\xi=Fs(t-x)+Fs(x-t).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{0}\Phi(y)\,Fs(y+x)\,dy=Fs(-x)+Fs(x)+$$

$$+\int_{0}^{\infty}K(0,y)\,Fs(y+x)\,dy-\int_{0}^{\infty}K(0,\xi)\,Fs(-\xi+x)\,d\xi+$$

$$+\int_{0}^{\infty}K(0,t)\,\{Fs(t-x)+Fs(x-t)\}\,dt=$$

$$=Fs(-x)+K(0,-x)-K(0,x)+\int_{0}^{\infty}K(0,y)\,Fs(y-x)\,dy+$$

$$+Fs(x)+K(0,x)-K(0,-x)+$$

$$+\int_{0}^{\infty}K(0,y)\,Fs(y+x)\,dy=\Phi(-x)+\Phi(x),$$

откуда, замечая, что при $x<0$ $\Phi(-x)=0$, получаем

$$\int_{-\infty}^{0}\Phi(y)\,Fs(y+x)\,dy=\Phi(x)\qquad(-\infty<x<0).$$

Следовательно, функция $\Phi(x)$ является решением однородного уравнения $\Phi-\mathbf{F}_S^-\Phi=0$. Из формулы (3.3.24) и условия I следует, что функция $\Phi(x)$ представима в виде суммы двух функций, из которых одна суммируема, а вторая ограничена и принадлежит $L^2(-\infty, 0)$. Отсюда, используя уже неоднократно применявшийся прием, заключаем, что функция $\Phi(x)$ является решением уравнения $\Phi-\mathbf{F}_S^-\Phi=$

$= 0$, принадлежащим $L^2(-\infty, 0)$. Поэтому, если выполнено условие «б», то $\Phi(x) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 3.3.4. *Если функция $S(\lambda)$ удовлетворяет условию I, то при всех $a > 0$ функции*

$$S_1(\lambda) = S(\lambda)\frac{\lambda + ia}{\lambda - ia}$$

тоже удовлетворяют этому условию.

Доказательство. Непрерывность функции $S_1(\lambda)$ и равенства $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} S_1(\lambda) = 1$, $S_1(\lambda) = \overline{S_1(-\lambda)} = [S_1(-\lambda)]^{-1}$ являются очевидными следствиями аналогичных свойств функции $S(\lambda)$. Так как

$$1 - S_1(\lambda) = 1 - S(\lambda) + \frac{2ai}{\lambda - ia}\{1 - S(\lambda)\} - \frac{2ai}{\lambda - ia},$$

$$-\frac{i}{\lambda - ia} = \int\limits_0^\infty e^{-ay}e^{-i\lambda y}dy,$$

то из теоремы о свертке заключаем, что $1 - S_1(\lambda)$ есть преобразование Фурье функции

$$F_{S_1}(y) = \begin{cases} F_S(y) - 2aG(y) + 2ae^{-ay}, & y > 0, \\ F_S(y) - 2aG(y), & y < 0, \end{cases}$$

где

$$G(y) = \int\limits_0^\infty F_S(y - t)\,e^{-at}dt = e^{-ay}\int\limits_{-\infty}^{y} F_S(\xi)\,e^{a\xi}d\xi =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1 - S(\lambda)}{\lambda - ia}\,e^{i\lambda y}d\lambda.$$

Из этой формулы и свойств функции $F_S(y)$ сразу следует, что $G(y) \in L^2(-\infty, \infty) \cap L^\infty(-\infty, \infty)$, так что нам остается только проверить справедливость неравенства

$$\int\limits_0^\infty y\,|G'(y)|\,dy < \infty. \tag{3.3.25}$$

Так как при $y > 0$

$$G'(y) = -ae^{-ay}\int\limits_{-\infty}^{y} F_S(\xi)\,e^{a\xi}d\xi + F_S(y) =$$

$$= -ae^{-ay}A + e^{a(1-y)}F_S(1) + e^{-ay}\int\limits_1^y F'_S(\xi)\,e^{a\xi}d\xi,$$

где $A = \int\limits_{-\infty}^{1} F_S(\xi) e^{a\xi} d\xi$, то неравенство (3.3.25) будет установлено, если мы докажем, что

$$\int\limits_0^\infty y e^{-ay} \left| \int\limits_1^y F_S'(\xi) e^{a\xi} d\xi \right| dy < \infty.$$

Но

$$\int\limits_1^\infty y e^{-ay} \left| \int\limits_1^y F_S'(\xi) e^{a\xi} d\xi \right| dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_1^\infty \left\{ \int\limits_1^y |F_S'(\xi)| e^{a\xi} d\xi \right\} d \left\{ -\int\limits_y^\infty \xi e^{-a\xi} d\xi \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_1^\infty \{a^{-1} y e^{-ay} + a^{-2} e^{-ay}\} |F_S'(y)| e^{ay} dy < \infty,$$

поскольку $\int\limits_1^\infty y \, |F_S'(y)| \, dy < \infty$, и аналогично

$$\int\limits_0^1 y e^{-ay} \left| \int\limits_1^y F_S'(\xi) e^{a\xi} d\xi \right| dy \leqslant e \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 |F_S'(\xi)| \, d\xi < \infty.$$

Лемма доказана.

Теорема 3.3.3. *Для того чтобы набор величин* $\{S(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$; λ_k, m_k $(k = 1, 2, \ldots, n)\}$ *был данными рассеяния некоторой краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) с потенциалом* $q(x)$, *удовлетворяющим условию (3.1.3), необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия I и II.*

Доказательство. Необходимость этих условий была установлена в § 2. В силу теоремы 3.3.2 их достаточность будет установлена, если мы докажем, что выполнение условий I, II влечет за собой выполнение условий I, «а» и «б», т. е. справедливость равенств

$$\text{а) } \varkappa^+ = \varkappa, \qquad \text{б) } \varkappa^- = 0,$$

где $\varkappa^+ (\varkappa^-)$ — число линейно независимых решений уравнения $f + \mathbf{F}_{S,0}^+ f = 0$ $(g - \mathbf{F}_S^- g = 0)$, а

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i} \{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)\} - \frac{1 - S(0)}{4}.$$

Для доказательства введем функцию

$$S_1(\lambda) = S(\lambda)\left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)^{2\varkappa^-}, \tag{3.3.26}$$

которая согласно лемме 3.3.4 тоже удовлетворяет условию I. Функция $S_1(\lambda)$ удовлетворяет также условию «б», т. е. уравнение $g - \mathbf{F}_{S_1}^- g = 0$ не имеет ненулевых решений в пространстве $L^2(-\infty, 0)$. Действительно, в лемме 3.3.2 было установлено, что преобразование Фурье $\tilde{g}(\lambda)$ решения этого уравнения удовлетворяет тождеству

$$\tilde{g}(\lambda) + S_1(\lambda)\tilde{g}(-\lambda) = 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

из которого в силу формулы (3.3.26) следует, что функции

$$\tilde{z}_k(\lambda) = \frac{\tilde{g}(\lambda)}{(\lambda^2+1)^k}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\varkappa^-} \quad (k = 0, 1, \ldots, \varkappa^-)$$

удовлетворяют тождеству

$$\tilde{z}_k(\lambda) + S(\lambda)\tilde{z}_k(-\lambda) = 0. \tag{3.3.27}$$

Так как в верхней полуплоскости функции

$$(\lambda^2+1)^{-k}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\varkappa^-} \quad (k = 0, 1, \ldots, \varkappa^-)$$

голоморфны и ограничены, то $\tilde{z}_k(\lambda)$ одновременно с $\tilde{g}(\lambda)$ являются преобразованиями Фурье функций $z_k(y) \in L^2(-\infty, 0)$, равных нулю при $y > 0$. Но тогда тождество (3.3.27) означает, что эти функции удовлетворяют уравнению $z_k - \mathbf{F}_S^- z_k = 0$, которое, таким образом, имеет не $\varkappa^-$, а по крайней мере $\varkappa^- + 1$ линейно независимых решений $z_0, z_1, \ldots, z_{\varkappa^-}$, если $\tilde{g}(\lambda) \not\equiv 0$. Следовательно, $\tilde{g}(\lambda) \equiv 0$ и функция $S_1(\lambda)$ удовлетворяет условию «б».

Обозначим через $\varkappa_1^+$ число линейно независимых решений уравнения $f + \mathbf{F}_{S_1}^+ f = 0$. Присоединив к функции $S_1(\lambda)$ набор чисел $\{\lambda_k, m_k\ (k = 1, 2, \ldots, \varkappa_1^+)\}$, получим набор величин, удовлетворяющий условиям I, «а» и «б», т. е., согласно теореме 3.3.2, данные рассеяния некоторой краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) с потенциалом, удовлетворяющим условию (3.1.3). Значит,

$$S_1(\lambda) = \frac{e_1(-\lambda, 0)}{e_1(\lambda, 0)}, \tag{3.3.28}$$

где функция $e_1(\lambda, 0)$ в верхней полуплоскости голоморфна, стремится к единице при $|\lambda| \to \infty$ и имеет $\varkappa_1^+$ нулей $(i\lambda_1, i\lambda_2, \ldots, i\lambda_{\varkappa_1^+})$, причем

$$\varkappa_1^+ = \frac{1}{2\pi i}\{\ln S_1(+0) - \ln S_1(+\infty)\} - \frac{1 - S_1(0)}{4}.$$

Используя это равенство и формулу (3.3.26), находим

$$\varkappa_1^+ = \varkappa + \varkappa^-. \tag{3.3.29}$$

Если $\varkappa^- > 0$, то уравнение $g - \mathbf{F}_{\overline{S}}\, g = 0$ имеет линейно независимые решения $g_1, \ldots, g_{\varkappa^-}$, из которых, очевидно, можно построить такое ненулевое решение этого уравнения $g = \Sigma c_k g_k$, что его преобразование Фурье $\tilde{g}(\lambda)$ имеет в точке i нуль $(\varkappa^- - 1)$-го порядка. Так как функция $\tilde{g}(\lambda)$ должна удовлетворять тождеству $\tilde{g}(\lambda) + S(\lambda)\,\tilde{g}(-\lambda) = 0$, то из формул (3.3.26), (3.3.28) следует, что

$$\tilde{g}(\lambda) + \frac{e_1(-\lambda, 0)}{e_1(\lambda, 0)}\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{2\varkappa^-}\tilde{g}(-\lambda) = 0$$

или

$$e_1(\lambda, 0)(\lambda + i)^2\,\tilde{g}(\lambda)\left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i}\right)^{\varkappa^- - 1} =$$

$$= -e_1(-\lambda, 0)(-\lambda + i)^2\,\tilde{g}(-\lambda)\left(\frac{-\lambda + i}{-\lambda - i}\right)^{\varkappa^- - 1}.$$

В этом тождестве слева стоит функция, голоморфная в верхней полуплоскости, а справа — в нижней. Поэтому

$$\varphi(\lambda) = (\lambda + i)^2\,\tilde{g}(\lambda)\left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i}\right)^{\varkappa^- - 1} e_1(\lambda, 0)$$

продолжается на всю комплексную плоскость как целая нечетная функция, причем $|\varphi(\lambda)| = o(|\lambda|^2)$ при $|\lambda| \to \infty$. Но тогда $\varphi(\lambda) \equiv c\lambda$ и, если функция $e_1(\lambda, 0)$ имеет хотя бы один нуль в верхней полуплоскости (т. е. $\varkappa_1^+ > 0$), $\varphi(\lambda) \equiv 0$, а значит, и $\tilde{g}(\lambda) \equiv 0$ вопреки предположению. Поэтому $\varkappa_1^+ = 0$, откуда согласно формуле (3.3.29) заключаем, что $0 = \varkappa + \varkappa^-$ и $\varkappa^- = 0$, так как в силу условия II $\varkappa \geqslant 0$. Следовательно, функция $S(\lambda)$ удовлетворяет условиям I и «б». Присоединив к ней любой набор чисел $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\varkappa^+}, m_1, \ldots, m_{\varkappa^+}\}$, получим, в силу теоремы 3.3.2, данные рассеяния некоторой краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) с потенциалом, удовлетворяющим условию (3.1.3). Значит,

$$\varkappa^{+} = \frac{1}{2\pi i}\{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)\} - \frac{1 - S(0)}{4} = \varkappa,$$

т. е. условие «а» тоже выполнено. Теорема доказана полностью.

Заметим в заключение, что из теорем 3.3.2 и 3.3.3 вытекает эквивалентность условий I, II условиям I, «а», «б».

ЗАДАЧИ

1. Если вещественная функция $q(x)$ удовлетворяет условию (3.1.3) и $h(x)$ — вещественное решение уравнения $y'' - q(x)y = 0$, причем $h(0) \neq 0$, то нормированные собственные функции $u(\lambda, x)$ краевой задачи

$$y'' - q(x)y + \lambda^2 y = 0, \quad \lim_{x\to 0} W\{y(x), h(x)\} = 0, \tag{3.3.30}$$

порождающие равенство Парсеваля (3.2.4), удовлетворяют при $x \to \infty$ таким асимптотическим формулам:

$$\left.\begin{aligned} &u(\lambda, x) = e^{-i\lambda x} + S_h(\lambda)e^{i\lambda x} + o(1) && (-\infty < \lambda < \infty), \\ &u(i\lambda_k, x) = m_k e^{-\lambda_k x}(1 + o(1)) && (k = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{3.3.31}$$

(см. § 2, задачу 2). Доказать, что для данного набора величин $\{S(\lambda)\,(-\infty < \lambda < \infty);\ \lambda_k, m_k\ (k=1, 2, \ldots, n)\}$ тогда и только тогда существует краевая задача (3.3.30), нормированные собственные функции которой удовлетворяют асимптотическим формулам (3.3.31), когда выполнены условия I и

II′ $$n = \frac{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)}{2\pi i} - \frac{1 - S(0)}{4}.$$

Указание. Если выполнены условия I и II′, то набор величин $\{S_1(\lambda);\ \lambda_k, m_k\}$, где

$$S_1(\lambda) = S(\lambda)\,\frac{\lambda + iA}{\lambda - iA} \quad \left(A > \max_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k\right),$$

удовлетворяет условиям I, II и в силу теоремы 3.3.3 является данными рассеяния некоторой краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) с потенциалом $q_1(x)$, удовлетворяющим условию (3.1.3). Оператор

$$u(\lambda, x) = -\frac{W\{e_1(iA, x), u_1(\lambda, x)\}}{e_1(iA, x)(A^2 + \lambda^2)}$$

преобразует нормированные собственные функции $u_1(\lambda, x)$ этой краевой задачи в собственные функции $u(\lambda, x)$ некоторой задачи вида (3.3.30), причем после надлежащей нормировки выполняются асимптотические равенства (3.3.31). Необходимость условий I, II′ доказывается аналогично.

2. Рассмотрим краевую задачу (3.3.3), (3.3.4) с вещественной функцией $q(x)$, удовлетворяющей условию (3.1.3), и целым положительным l,

которое в дальнейшем считаем фиксированным. Нормированные собственные функции (радиальные волновые функции) $u_l(\lambda, x)$ этой задачи удовлетворяют при $x \to \infty$ асимптотическим равенствам

$$u_l(\lambda, x) = e^{-i\lambda x} + (-1)^l S(\lambda) e^{i\lambda x} + o(1) \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

$$u_l(i\lambda_k, x) = m_k e^{-\lambda_k x}(1 + o(1)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$u_l(i\lambda_n, x) = m_n x^{-l}(1 + o(1)), \quad \text{если } \lambda_n = 0,$$

и набор величин $\{S(\lambda); \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n \geqslant 0; m_1, \ldots, m_n\}$ называется данными рассеяния. Доказать, что набор величин $\{S(\lambda); \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots \ldots > \lambda_n \geqslant 0; m_1, \ldots, m_n\}$ $(m_k > 0)$ является данными рассеяния некоторой краевой задачи вида (3.3.3), (3.3.4) тогда и только тогда, когда $S(0) = 1$ и выполняются условия I, II теоремы 3.3.3.

Указание. Можно воспользоваться операторами преобразования, рассмотренными в задачах 4 и 5 § 3 гл. 2, и свести вопрос к теореме 3.3.3 подобно тому, как это сделано в предыдущей задаче.

3. Найти характеристические свойства данных рассеяния краевой задачи

$$y'' - q(x) y + \lambda^2 y = 0, \qquad y(0) = 0 \qquad (0 \leqslant x < \infty), \tag{3.3.32}$$

в которой вещественная функция $q(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 x \, | q(x) - l_0(l_0 + 1) x^{-2} | \, dx + \int_1^\infty x \, | q(x) - l_\infty(l_\infty + 1) x^{-2} | \, dx < \infty,$$

где l_0 и l_∞ — целые неотрицательные числа и $l_0 + l_\infty > 0$.

4. Рассмотрим матричную задачу Штурма — Лиувилля (3.3.32), в которой самосопряженная матрица n-го порядка $q(x)$ (потенциальная матрица) удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty x \, | q(x) | \, dx < \infty. \tag{3.3.33}$$

Ограниченные матрицы — решения $u(\lambda, x)$ этой задачи удовлетворяют при $x \to \infty$ асимптотическим формулам

$$u(\lambda, x) = I e^{-i\lambda x} - S(\lambda) e^{i\lambda x} + o(1) \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

$$u(i\lambda_k, x) = e^{-\lambda_k x}(m_k + o(1)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $S(\lambda) = S(-\lambda)^*$ — унитарная матрица, а m_k — неотрицательные самосопряженные матрицы. Совокупность $\{S(\lambda); \lambda_1, \ldots, \lambda_n; m_1, \ldots, m_n\}$ называется данными рассеяния рассматриваемой задачи. Доказать, что, для того чтобы совокупность $\{S(\lambda); \lambda_1, \ldots, \lambda_n; m_1, \ldots, m_n\}$, где $S(\lambda) = [S(-\lambda)]^{-1} = [S(-\lambda)]^*$, $\lambda_k > 0$, m_k — неотрицательные самосопряженные матрицы, была данными рассеяния некоторой краевой задачи (3.3.32) с эрмитовой потенциальной матрицей $q(x)$, удовлетворяющей условию (3.3.33), необходимо и достаточно, чтобы она обладала такими свойствами.

I. Элементы матрицы-функции

$$F_S(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (I - S(\lambda)) e^{i\lambda x} d\lambda$$

суммируемы на всей вещественной оси и дифференцируемы на положительной полуоси, причем

$$\int_0^{\infty} x \, | F_s'(x) | \, dx < \infty.$$

II. Уравнение

$$f(y) - \int_{-\infty}^{0} f(t) F_S(t+y) \, dt = 0 \qquad (-\infty < y \leqslant 0)$$

не имеет ненулевых решений в пространстве $L^2(-\infty, 0)$ (по определению матрица-функция, или вектор-функция, $f(y)$ принадлежит пространству $L^2(-\infty, 0)$, если все ее элементы принадлежат этому пространству).

III. Уравнение

$$f(y) + \int_0^{\infty} f(t) F(t+y) \, dt = 0 \qquad (0 \leqslant y < \infty),$$

где

$$F(x) = F_S(x) + \sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k x},$$

не имеет ненулевых решений в пространстве $L^2(0, \infty)$.

IV. Число линейно независимых вектор-функций $g(y)$, удовлетворяющих уравнению

$$g(y) + \int_0^{\infty} g(t) F_S(t+y) \, dt = 0 \qquad (0 \leqslant y < \infty)$$

и принадлежащих пространству $L^2(0, \infty)$, равно сумме рангов матриц m_k. Доказать, что условия I—IV эквивалентны условиям I, IV и равенству

$$r = \frac{\ln \det S(+0) - \ln \det S(+\infty)}{2\pi i} - \frac{q}{2},$$

где r — сумма рангов матриц m_k, q — ранг матрицы $I - S(0)$.

Глава 4

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

§ 1. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА И ВЫВОД ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ

В предыдущих главах было показано, что краевая задача Штурма — Лиувилля может быть полностью восстановлена по своей спектральной функции или по данным рассеяния, причем процедуры восстановления весьма эффективны. В частности, они позволили найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять спектральные функции и данные рассеяния рассматриваемых краевых задач. Из этих условий видно, что для однозначного восстановления симметрической краевой задачи необходимо знать ее спектральную функцию $\rho(\mu)$ при всех значениях μ.

Аналогично обстоит дело и в случае восстановления краевой задачи по ее данным рассеяния.

В то же время физический смысл рассматриваемых обратных задач свидетельствует о том, что в них ни спектральная функция, ни данные рассеяния никогда не могут быть полностью известны. Это отчетливо видно на примере обратной задачи квантовой теории рассеяния. Действительно, в этой задаче λ^2 пропорционально энергии системы (формула (3.3.2)), и, для того чтобы данные рассеяния были известны при всех значениях λ, необходимо экспериментировать с частицами неограниченно больших энергий. Однако при достаточно больших, но конечных значениях энергии процесс рассеяния уже не описывается уравнением Шредингера (3.3.1), содержащим потенциал $u(x) = \frac{\hbar^2}{2M} q(x)$. Следовательно, даже допуская мысленно возможность эксперимента с частицами сколь угодно больших энергий, мы будем получать, начиная с некоторой энергии, данные, относящиеся к процессу, наверняка не описываемому уравнением, которое хотим восстановить. Поэтому принципиальное значение имеет вопрос о том, какие сведения о функции $q(x)$ или вообще о краевой задаче можно извлечь, если спектральная функция или данные рассеяния известны (вообще говоря, приближенно) только на конечном интервале изменения спектрального параметра. Для ответа на этот вопрос нужно выяснить, насколько могут отличаться две краевые задачи, если известно, что их спектральные функции или данные рассеяния мало отличаются на некотором конечном интервале изменения параметра λ^2. Ясно, что если об этих задачах априори ничего не известно, то они могут отличаться сколь угодно сильно. Так, любые краевые задачи, у которых $q(x) \geqslant N$, $h \geqslant 0$, имеют спектральные функции, равные нулю при $\mu < N$ и, следовательно, совпадающие на интервале $(-\infty, N)$. Поэтому содержательная и естественная с физической точки зрения постановка вопроса об устойчивости обратных задач спектрального анализа такова: как сильно могут отличаться две краевые задачи, у которых спектральные функции мало отличаются на данном интервале изменения параметра λ_x^2, если для этих задач известны априорные оценки функций $|h| + \int\limits_0^x |q(t)|\,dt$?

Аналогично ставится вопрос об устойчивости обратной задачи квантовой теории рассеяния. Отметим их сходство с типичным для теории аппроксимации вопросом о том, что можно сказать о функции, если известен только конечный отрезок ее ряда Фурье, или, что то же самое, как оценить функцию, у которой первые несколько коэффициентов Фурье равны нулю. Как известно, ответ на этот вопрос (его дает неравенство Бора) тоже можно получить, только предполагая заранее, что интересующая нас функция принадлежит тому или иному классу (например, имеет ограниченную данным числом производную и т. п.).

Введем некоторые определения и обозначения, используемые в этой главе. Обозначим рассматриваемые симметрические краевые задачи вида (2.2.1), (2.2.2) через $\{h, q(x)\}$, краевую задачу (3.1.1), (3.1.2), удовлетворяющую условию (3.1.3), — просто через $\{q(x)\}$. Функции $q(x)$ для краткости будем называть потенциалами.

Пусть $a(x)$ — произвольная неубывающая непрерывная функция, $a(0) = 0$ и A — произвольное неотрицательное число. Множество всех краевых задач $\{h, q(x)\}$, у которых

$$|h| \leqslant A, \quad \int\limits_0^x |q(t)|\,dt \leqslant a(x) \quad (0 \leqslant x < \infty), \quad (4.1.1)$$

обозначается через $V\{A,\ a(x)\}$, множество всех краевых задач $\{q(x)\}$, у которых

$$\int_x^{\infty} |q(t)|\,dt \leqslant \alpha(x) \qquad (0 \leqslant x < \infty), \tag{4.1.2}$$

где $\alpha(x)$ — непрерывная, невозрастающая и суммируемая на полуоси $[0,\ \infty)$ функция,— через $V\{\alpha(x)\}$. Точность восстановления краевой задачи $\{h,\ q(x)\}$ по части ее спектральной функции будем исследовать в множестве $V\{A, a(x)\}$, а точность восстановления задачи $\{q(x)\}$ по части ее данных рассеяния — в множестве $V\{\alpha(x)\}$. При этом нас в первую очередь будет интересовать точность восстановления решений $\omega(\lambda,\ x;\ h)$ $(e(\lambda,\ x))$ соответствующих уравнений, так как они восстанавливаются наиболее устойчиво. В этом параграфе мы выведем формулы, дающие удобные представления для разностей таких решений через разности соответствующих спектральных функций (или данных рассеяния).

Рассмотрим две краевые задачи $\{q_1(x)\}$, $\{q_2(x)\}$ из множества $V\{\alpha(x)\}$. Составим для соответствующих обратных задач основные интегральные уравнения и вычтем затем одно из другого. В результате получим

$$F_1(x+y) - F_2(x+y) + K_1(x,\ y) - K_2(x,\ y) + \\ + \int_x^{\infty} F_1(t+y)\,\{K_1(x,\ t) - K_2(x,\ t)\}\,dt + \\ + \int_x^{\infty} \{F_1(t+y) - F_2(t+y)\}\,K_2(x,\ t)\,dt = 0,$$

где $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ — ядра соответствующих операторов преобразования, а функции $F_1(x)$, $F_2(x)$ строятся по данным рассеяния рассматриваемых задач согласно формулам (3.2.7). Полагая для краткости

$$K_{1,2}(x,\ y) = K_1(x,\ y) - K_2(x,\ y), \qquad F_{1,2}(x) = F_1(x) - F_2(x),$$

полученное равенство можно записать в таком виде:

$$K_{1,2}(x,\ y) + \int_x^{\infty} F_1(t+y)\,K_{1,2}(x,\ t)\,dt = \\ = -\left\{F_{1,2}(x+y) + \int_x^{\infty} F_{1,2}(t+y)\,K_2(x,\ t)\,dt\right\}.$$

При каждом фиксированном $x \geqslant 0$ это равенство является уравнением относительно функции $K_{1,2}(x, y)$, решая которое находим

$$K_{1,2}(x, y) = -(\mathbf{I} + \mathbf{F}_{1x})^{-1} \{F_{1,2}(x+y) + \\ + \int_x^\infty F_{1,2}(t+y) K_2(x, t)\, dt\}, \tag{4.1.3}$$

где согласно (3.2.16)

$$(\mathbf{I} + \mathbf{F}_{1x})^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_{1x}^*)(\mathbf{I} + \mathbf{K}_{1x}) \tag{4.1.4}$$

и операторы $\mathbf{I} + \mathbf{K}_{1x}^*$, $\mathbf{I} + \mathbf{K}_{1x}$ определяются формулами (3.2.16). Пусть $\{S_j(\lambda), \lambda_k, m_k(j)\}$ $(j = 1, 2)$ — данные рассеяния и $e_j(\lambda, x)$ — введенные в лемме 3.1.1 решения рассматриваемых задач. Для краткости мы не ставим при λ_k индекса j, а просто считаем $m_k(j) = 0$, если $i\lambda_k$ не является корнем функции $e_j(\lambda, 0)$. Тогда

$$F_{1,2}(x) = \sum_k e^{-\lambda_k x} \{m_k^2(1) - m_k^2(2)\} + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_2(\lambda) - S_1(\lambda)\} e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Следовательно,

$$F_{1,2}(x+y) + \int_x^\infty K_2(x, t) F_{1,2}(t+y)\, dt = \\ = \sum_k e^{-\lambda_k y} e_2(i\lambda_k, x) \{m_k^2(1) - m_k^2(2)\} + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_2(\lambda) - S_1(\lambda)\} e^{i\lambda y} e_2(\lambda, x)\, d\lambda,$$

$$\varphi(x, y) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_{1x}) \{F_{1,2}(x+y) + \int_x^\infty F_{1,2}(t+y) K_2(x, t)\, dt\} = \\ = \sum_k e_1(i\lambda_k, y) e_2(i\lambda_k, x) \{m_k^2(1) - m_k^2(2)\} + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_2(\lambda) - S_1(\lambda)\} e_1(\lambda, y) e_2(\lambda, x)\, d\lambda. \tag{4.1.5}$$

Из формул (4.1.3), (4.1.4) следует, что

$$K_{1,2}(x, y) = -(\mathbf{I} + \mathbf{K}_{1x}^*) \varphi(x, y) \tag{4.1.3$'$}$$

и, значит, при $\operatorname{Im}\mu > 0$

$$e_1(\mu, x) - e_2(\mu, x) = \int_x^\infty K_{1,2}(x, y)\, e^{i\mu y} dy =$$

$$= -(\{\mathbf{I} + \mathbf{K}^*_{1x}\}\, \varphi(x, y),\, e^{-i\bar{\mu} y})_x =$$

$$= -(\varphi(x, y),\, \{\mathbf{I} + \mathbf{K}_{1x}\}\, e^{-i\bar{\mu} y})_x = -(\varphi(x, y),\, \overline{e_1(\mu, y)})_x,$$

где через $(f, g)_x$ обозначено скалярное произведение

$$(f, g)_x = \int_x^\infty f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$$

в пространстве $L^2(x, \infty)$. Таким образом, мы приходим к формуле

$$e_1(\mu, x) - e_2(\mu, x) = -\int_x^\infty \varphi(x, y)\, e_1(\mu, y)\, dy, \qquad (4.1.6)$$

в которой функция $\varphi(x, y)$ определена правой частью равенства (4.1.5) и $\operatorname{Im}\mu > 0$.

Из уравнений, которым удовлетворяют функции $e_1(\lambda, y)$, вытекает

$$\int_x^\infty e_1(\lambda, y)\, e_1(\mu, y)\, dy = \frac{e_1'(\lambda, x)\, e_1(\mu, x) - e_1(\lambda, x)\, e_1'(\mu, x)}{\lambda^2 - \mu^2}.$$

Используя это равенство и формулу (4.1.5), определяющую функцию $\varphi(x, y)$, находим

$$e_1(\mu, x) - e_2(\mu, x) = \sum_k E_{1,2}(i\lambda_k, \mu, x)\, \{m_k^2(1) - m_k^2(2)\} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \{S_2(\lambda) - S_1(\lambda)\}\, E_{1,2}(\lambda, \mu, x)\, d\lambda, \qquad (4.1.7)$$

где

$$E_{j,l}(\lambda, \mu, x) = \frac{e_l(\lambda, x)\, \{e_j(\lambda, x)\, e_j'(\mu, x) - e_j'(\lambda, x)\, e_j(\mu, x)\}}{\lambda^2 - \mu^2}.$$

Заметим теперь, что индексы 1, 2 играют совершенно равноправную роль. Поэтому наряду с (4.1.7) справедливо и такое равенство:

$$e_2(\mu, x) - e_1(\mu, x) = \sum_k E_{2,1}(i\lambda_k, \mu, x)\, \{m_k^2(2) - m_k^2(1)\} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \{S_1(\lambda) - S_2(\lambda)\}\, E_{2,1}(\lambda, \mu, x)\, d\lambda. \qquad (4.1.7')$$

Умножим обе части равенства (4.1.7) на $e_2(\mu, x)$, обе части равенства (4.1.7′) на $e_1(\mu, x)$, и после этого сложим их. Тогда слева у нас получится $-\{e_1(\mu, x) - e_2(\mu, x)\}^2$. Для того чтобы записать правую часть полученного равенства в удобном для дальнейшего виде, выполним предварительно такие преобразования:

$$(\lambda^2 - \mu^2)\{E_{1,2}(\lambda, \mu, x)\, e_2(\mu, x) - E_{2,1}(\lambda, \mu, x)\, e_1(\mu, x)\} =$$

$$= e_2(\mu, x)\, e_2(\lambda, x)\, e_1(\lambda, x)\, e_1'(\mu, x) - e_2(\mu, x)\, e_2(\lambda, x) \times$$

$$\times e_1'(\lambda, x)\, e_1(\mu, x) - e_1(\mu, x)\, e_1(\lambda, x)\, e_2(\lambda, x)\, e_2'(\mu, x) +$$

$$+ e_1(\mu, x)\, e_1(\lambda, x)\, e_2'(\lambda, x)\, e_2(\mu, x) =$$

$$= e_1(\lambda, x)\, e_2(\lambda, x)\{e_1'(\mu, x)\, e_2(\mu, x) - e_1(\mu, x)\, e_2'(\mu, x)\} -$$

$$- e_1(\mu, x)\, e_2(\mu, x)\{e_1'(\lambda, x)\, e_2(\lambda, x) - e_1(\lambda, x)\, e_2'(\lambda, x)\} =$$

$$= \int_x^\infty \{q_1(t) - q_2(t)\}\{e_1(\mu, x)\, e_2(\mu, x)\, e_1(\lambda, t)\, e_2(\lambda, t) -$$

$$- e_1(\lambda, x)\, e_2(\lambda, x)\, e_1(\mu, t)\, e_2(\mu, t)\}\, dt.$$

При этом мы воспользовались тождествами

$$\int_x^\infty \{q_1(t) - q_2(t)\}\, e_1(\nu, t)\, e_2(\nu, t)\, dt =$$

$$= -\{e_1'(\nu, x)\, e_2(\nu, x) - e_1(\nu, x)\, e_2'(\nu, x)\},$$

получающимися при $\operatorname{Im} \nu \geqslant 0$ из дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют функции $e_1(\nu, x)$ и $e_2(\nu, x)$. Поэтому правая часть интересующего нас равенства может быть записана в виде

$$\int_x^\infty \{q_1(t) - q_2(t)\}\{A_{1,2}(\mu, x, t) - A_{1,2}(\mu, t, x)\}\, dt,$$

где

$$A_{1,2}(\mu, x, t) =$$

$$= e_1(\mu, x)\, e_2(\mu, x) \sum_k \frac{m_k^2(2) - m_k^2(1)}{\lambda_k^2 + \mu^2}\, e_1(i\lambda_k, t)\, e_2(i\lambda_k, t) +$$

$$+ \frac{e_1(\mu, x)\, e_2(\mu, x)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_2(\lambda) - S_1(\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2}\, e_1(\lambda, t)\, e_2(\lambda, t)\, d\lambda. \qquad (4.1.8)$$

Тем самым доказана следующая лемма.

Лемма 4.1.1. *При всех значениях* μ *из открытой верхней полуплоскости, для которых* $\operatorname{Im}\mu^2 \neq 0$, *справедливо тождество*

$$\{e_1(\mu, x) - e_2(\mu, x)\}^2 =$$
$$= \int_x^\infty \{q_1(t) - q_2(t)\}\{A_{1,2}(\mu, t, x) - A_{1,2}(\mu, x, t)\}\, dt, \qquad (4.1.9)$$

в котором функция $A_{1,2}(\mu, x, t)$ *определена правой частью равенства (4.1.8).*

Рассмотрим теперь две краевые задачи $\{h_1, q_1(x)\}$, $\{h_2, q_2(x)\}$ из множества $V\{A, a(x)\}$ и обозначим через $\omega_1(\lambda, x) = \omega_1(\lambda, x; h_1)$, $\omega_2(\lambda, x) = \omega_2(\lambda, x; h_2)$ решения соответствующих дифференциальных уравнений.

Лемма 4.1.2. *При всех значениях* μ, *для которых* $\operatorname{Im}\mu \neq 0$, *справедливо тождество*

$$\{\omega_1(\sqrt{\mu}, x) - \omega_2(\sqrt{\mu}, x)\}^2 =$$
$$= (h_1 - h_2)\{B_{1,2}(\mu, 0, x) - B_{1,2}(\mu, x, 0)\} +$$
$$+ \int_0^x \{q_1(t) - q_2(t)\}\{B_{1,2}(\mu, t, x) - B_{1,2}(\mu, x, t)\}\, dt, \qquad (4.1.10)$$

где

$$B_{1,2}(\mu, x, t) = \omega_1(\sqrt{\mu}, x)\,\omega_2(\sqrt{\mu}, x) \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_1(\sqrt{\mu}, t)\,\omega_2(\sqrt{\mu}, t)}{\lambda - \mu}\, d\{\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda)\}, \qquad (4.1.11)$$

$\rho_j(\lambda)$ $(j = 1, 2)$ — *спектральные функции краевых задач* $\{h_j, q_j(x)\}$.

Доказательство. Искомый результат можно получить, используя уравнения (2.3.6) так же, как были использованы уравнения (3.2.10) в предыдущей лемме. Но мы можем прийти к нему быстрее, используя операторы преобразования

$$\mathbf{I} + \mathbf{K}_j^l = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_{h_l})(\mathbf{I} + \mathbf{L}_{h_j}),$$

переводящие решения $\omega_j(\lambda, x)$ задачи $\{h_j, q_j(x)\}$ в решения $\omega_l(\lambda, x)$ задачи $\{h_l, q_l(x)\}_x$. Для этого рассмотрим интегралы

$$I_j(\mu, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2(\sqrt{\lambda}, x)\, d\rho_j(\lambda) \int_0^x \omega_1(\sqrt{\lambda}, t)\,\omega_1(\sqrt{\mu}, t)\, dt,$$

где $\rho_j(\lambda)$ $(j = 1, 2)$ — спектральные функции рассматриваемых краевых задач. Имеем

$$I_1(\mu, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1(\sqrt{\lambda}, x)\, d\rho_1(\lambda) \int_0^x \omega_1(\sqrt{\lambda}, t)\, \omega_1(\sqrt{\mu}, t)\, dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^x K_1^2(x, t)\, \omega_1(\sqrt{\lambda}, t)\, dt \right\} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^x \omega_1(\sqrt{\lambda}, t)\, \omega_1(\sqrt{\mu}, t)\, dt \right\} d\rho_1(\lambda).$$

По теореме о равносходимости первый интеграл в этом равенстве существует и равен $\frac{1}{2}\, \omega_1(\sqrt{\mu}, x)$. Из равенства Парсеваля находим значение второго слагаемого:

$$\int_0^x K_1^2(x, t)\, \omega_1(\sqrt{\mu}, t)\, dt = \omega_2(\sqrt{\mu}, x) - \omega_1(\sqrt{\mu}, x).$$

Отсюда следует существование $I_1(\mu, x)$ и равенство

$$I_1(\mu, x) = \omega_2(\sqrt{\mu}, x) - \frac{1}{2}\, \omega_1(\sqrt{\mu}, x).$$

Для $I_2(\mu, x)$, снова благодаря теореме о равносходимости, получаем

$$I_2(\mu, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2(\sqrt{\lambda}, x)\, d\rho_2(\lambda) \int_0^x \omega_2(\sqrt{\lambda}, t)\, \omega_1(\sqrt{\mu}, t)\, dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2(\sqrt{\lambda}, x)\, d\rho_2(\lambda) \int_0^x \int_0^t K_2^1(t, \xi)\, \omega_2(\sqrt{\lambda}, \xi)\, \omega_1(\sqrt{\mu}, t)\, d\xi dt =$$

$$= \frac{1}{2}\, \omega_1(\sqrt{\mu}, x) + \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2(\sqrt{\lambda}, x) \times$$

$$\times \left\{ \int_0^x \int_\xi^x K_2^1(t, \xi)\, \omega_1(\sqrt{\mu}, t)\, \omega_2(\sqrt{\lambda}, \xi)\, dt d\xi \right\} d\rho_2(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{2}\, \omega_1(\sqrt{\mu}, x) + \frac{1}{2} \left\{ \int_\xi^x K_2^1(t, \xi)\, \omega_1(\sqrt{\mu}, t)\, dt \right\} \Bigg|_{\xi = x} =$$

$$= \frac{1}{2}\, \omega_1(\sqrt{\mu}, x).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_2(\sqrt{\lambda}, x) \int_0^x \omega_1(\sqrt{\lambda}, t)\, \omega_1(\sqrt{\mu}, t)\, dt d\{\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda)\} =$$

$$= I_1(\mu, x) - I_2(\mu, x) = \omega_2(\sqrt{\mu}, x) - \omega_1(\sqrt{\mu}, x),$$

откуда, используя равенство

$$\int_0^x \omega_1(\sqrt{\lambda}, t)\, \omega_1(\sqrt{\mu}, t)\, dt =$$

$$= -\frac{\omega_1'(\sqrt{\lambda}, x)\, \omega_1(\sqrt{\mu}, x) - \omega_1(\sqrt{\lambda}, x)\, \omega_1'(\sqrt{\mu}, x)}{\lambda - \mu},$$

приходим к формуле

$$\omega_1(\sqrt{\mu}, x) - \omega_2(\sqrt{\mu}, x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_1'(\sqrt{\lambda}, x)\, \omega_1(\sqrt{\mu}, x) - \omega_1(\sqrt{\lambda}, x)\, \omega_1'(\sqrt{\mu}, x)}{\lambda - \mu} \times$$

$$\times\, \omega_2(\sqrt{\lambda}, x)\, d\{\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda)\},$$

аналогичной формуле (4.1.7). При дальнейших преобразованиях используется равноправие индексов 1, 2 и они выполняются совершенно аналогично предыдущим.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что при всех $x \geqslant 0$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_1(\sqrt{\mu}, x)\, \omega_2(\sqrt{\mu}, x)\, d\{\rho_1(\mu) - \rho_2(\mu)\}$$

сходится и

$$h_1 - h_2 + \frac{1}{2}\int_0^x \{q_1(t) - q_2(t)\}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1(\sqrt{\mu}, x)\, \omega_2(\sqrt{\mu}, x) \times$$

$$\times\, d\{\rho_1(\mu) - \rho_2(\mu)\}.$$

2. Доказать, что если краевые задачи $\{q_j(x)\}$ $(j = 1, 2)$ принадлежат множеству $V\{\alpha(x)\}$, то в области, где $2\nu > \alpha(x)$, справедливо неравенство

$$\left| e_1(i\nu, x) - e_2(i\nu, x) - \frac{e^{-\nu x}}{2\nu} \int_x^{\infty} (1 - e^{-2\nu(t-x)})(q_1(t) - q_2(t))\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{-\nu x}\alpha^2(x)}{\nu^2}. \qquad (4.1.12)$$

Указание. Проитерировать один раз уравнение (3.1.7).

3. Рассмотреть краевые задачи $\{h_j,\ q_j(x)\}$ $(j = 1,\ 2)$, принадлежащие множеству $V\{A,\ a(x)\}$, и получить для разности $\omega_1(i\nu,\ x,\ h_1) - \omega_2(i\nu,\ x,\ h_2)$ аналог неравенства (4.1.12).

§ 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Пусть данные рассеяния некоторой краевой задачи $\{q(x)\} \in V\{\alpha(x)\}$ определены с погрешностью δ для всех значений $\lambda^2 < N$. Насколько точно можно восстановить эту краевую задачу? В дальнейшем будем считать $\delta = 0$, так как общий случай исследуется совершенно аналогично, но при этом получаются более громоздкие формулы.

Чтобы ответить на поставленный вопрос, нужно, очевидно, выяснить, насколько сильно могут отличаться две краевые задачи $\{q_j(x)\} \in V\{\alpha(x)\}$ $(j = 1,\ 2)$, данные рассеяния которых $\{S_j(\lambda);\ \lambda_k(j);\ m_k(j)\}$ совпадают при $\lambda^2 \in (-\infty,\ N)$:

$$S_1(\lambda) = S_2(\lambda), \qquad -N < \lambda < N,$$

$$\lambda_k(1) = \lambda_k(2), \qquad m_k(1) = m_k(2) \qquad (k = 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Оценим прежде всего разность $e_1(\mu,\ x) - e_2(\mu,\ x)$ решений соответствующих дифференциальных уравнений.

Теорема 4.2.1. *Если данные рассеяния двух краевых задач $\{q_j(x)\} \in V\{\alpha(x)\}$ $(j = 1,\ 2)$ совпадают при всех значениях $\lambda^2 \in (-\infty,\ N)$, то при всех $\mu^2 \in (-\infty,\ N)$ справедливо неравенство*

$$|e_1(\mu,\ x) - e_2(\mu,\ x)|^2 \leqslant \frac{8\alpha(x)\exp\{4\alpha_1(x)\}}{\pi\sqrt{N}\left(1 - \dfrac{|\mu|^2 + \mu^2}{2N}\right)}, \tag{4.2.1}$$

где

$$\alpha_1(x) = \int_x^\infty \alpha(t)\,dt. \tag{4.2.2}$$

При этом в области, где $\alpha(x) < \sqrt{N}$, справедливо более точное неравенство

$$\frac{\sup\limits_{x \leqslant t < \infty} |e_1(\mu,\ t) - e_2(\mu,\ t)|^2}{\sup\limits_{x \leqslant t < \infty} |e_1(\mu,\ t)\,e_2(\mu,\ t)|} \leqslant \frac{8\alpha(x)}{\pi\sqrt{N}\left(1 - \dfrac{\alpha(x)}{\sqrt{N}}\right)^2\left(1 - \dfrac{|\mu|^2 + \mu^2}{2N}\right)}. \tag{4.2.3}$$

Доказательство. Будем считать сначала, что μ лежит в верхней полуплоскости и $\operatorname{Im}\mu^2 \neq 0$. Тогда можно воспользоваться формулой (4.1.9), причем в данном случае

$$A_{1,2}(\mu, x, t) =$$
$$= \frac{e_1(\mu, x)\, e_2(\mu, x)}{2\pi} \int\limits_{|\lambda| > \sqrt{N}} \frac{S_2(\lambda) - S_1(\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2}\, e_1(\lambda, t)\, e_2(\lambda, t)\, d\lambda, \tag{4.2.4}$$

поскольку данные рассеяния рассматриваемых задач совпадают при всех $\lambda^2 \in (-\infty, N)$. Но формулы (4.1.9) и (4.2.3) остаются верными и при $\mu^2 \in (-\infty, N)$, в чем легко убедиться, совершив в них предельный переход.

Для того чтобы оценить $|A_{1,2}(\mu, x, t)|$, выразим функции $e_j(\nu, x)$ $(\operatorname{Im}\nu \geqslant 0)$ через $e^{i\nu x}$ с помощью операторов преобразования:

$$e_j(\nu, x) = e^{i\nu x} + \int\limits_x^\infty K_j(x, t)\, e^{i\nu t} dt,$$

и заметим, что в силу (3.1.4), (3.1.6) и определения (4.1.2) множества $V\{\alpha(x)\}$

$$|K_j(x, t)| \leqslant \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{\alpha_1(x) - \alpha_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\}.$$

Поэтому

$$|e_j(\nu, x)| \leqslant e^{-\operatorname{Im}\nu x}\left(1 + \int\limits_x^\infty |K_j(x, t)|\, dt\right) \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \int\limits_x^\infty \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{\alpha_1(x) - \alpha_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\} d\,\frac{t}{2} =$$
$$= 1 + e^{\alpha_1(x)}\left\{-e^{-\alpha_1(x)} + 1\right\} = e^{\alpha_1(x)}. \tag{4.2.5}$$

Из этой оценки равенства $|S_j(\lambda)| \equiv 1$ и формулы (4.2.4) при $\mu^2 \in (-\infty, N)$ получаем

$$|A_{1,2}(\mu, x, t)| \leqslant \frac{\exp 2\{\alpha_1(x) + \alpha_1(t)\}}{2\pi} \int\limits_{|\lambda| > \sqrt{N}} \frac{|S_2(\lambda) - S_1(\lambda)|}{\lambda^2 - \mu^2}\, d\lambda \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\exp 2\{\alpha_1(x) + \alpha_1(t)\}}{\pi\sqrt{N}\left(1 - \dfrac{|\mu|^2 + \mu^2}{2N}\right)}.$$

Неравенство (4.2.1) непосредственно вытекает теперь из формулы (4.1.9) и определения множества $V\{\alpha(x)\}$:

$$|e_1(\mu, x) - e_2(\mu, x)|^2 =$$

$$= \left| \int_x^\infty \{q_1(t) - q_2(t)\} \{A_{1,2}(\mu, t, x) - A_{1,2}(\mu, x, t)\} \, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4e^{4\alpha_1(x)}}{\pi \sqrt{N} \left(1 - \frac{|\mu|^2 + \mu^2}{2N}\right)} \int_x^\infty |q_1(t) - q_2(t)| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8\alpha(x) e^{4\alpha_1(x)}}{\pi \sqrt{N} \left(1 - \frac{|\mu|^2 + \mu^2}{2N}\right)}.$$

Заметим, однако, что оценка

$$|e_1(\mu, x) - e_2(\mu, x)|^2 \leqslant 4e^{2\alpha_1(x)}$$

верна для любой пары краевых задач из множества $V\{\alpha(x)\}$, поскольку для них выполняется неравенство (4.2.5). Поэтому оценка (4.2.1) может стать нетривиальной только в области, где $\alpha(x) < \sqrt{N}$. Но как раз в этой области ее можно существенно улучшить. Действительно, из уравнения

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \frac{\sin \lambda(t - x)}{\lambda} q(t) e(\lambda, t) \, dt$$

вытекает неравенство

$$m(\lambda, x) \leqslant 1 + \frac{m(\lambda, x)}{|\lambda|} \int_x^\infty |q(t)| \, dt \leqslant 1 + \frac{m(\lambda, x)\alpha(x)}{|\lambda|}$$

для функции

$$m(\lambda, x) = \sup_{x \leqslant t < \infty} |e(\lambda, t)| \qquad (\lambda^2 \geqslant 0).$$

Поэтому, если $|\lambda| \geqslant \sqrt{N} > \alpha(x)$, то

$$|e(\lambda, t)| \leqslant \left(1 - \frac{\alpha(x)}{\sqrt{N}}\right)^{-1} \qquad (x \leqslant t < \infty)$$

и согласно (4.2.4) находим

$$|A_{1,2}(\mu, x, t) - A_{1,2}(\mu, t, x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi \sqrt{N}} \left(1 - \frac{\alpha(x)}{\sqrt{N}}\right)^{-2} \left(1 - \frac{|\mu|^2 + \mu^2}{2N}\right)^{-1} \times$$

$$\times \sup_{x \leqslant t < \infty} |e_1(\mu, t) e_2(\mu, t)|$$

при $x \leqslant t < \infty$, $\mu \in (-\infty, \sqrt{N})$. Используя это неравенство и формулу (4.1.9), получаем

$$\frac{\sup\limits_{x\leqslant t<\infty} |e_1(\mu, t) - e_2(\mu, t)|^2}{\sup\limits_{x\leqslant t<\infty} |e_1(\mu, t)\, e_2(\mu, t)|} \leqslant \frac{8\alpha(x)}{\pi\sqrt{N}\left(1 - \dfrac{\alpha(x)}{\sqrt{N}}\right)^2\left(1 - \dfrac{|\mu|^2+\mu^2}{2N}\right)},$$

если $\alpha(x) < \sqrt{N}$ и $-\infty < \mu^2 < N$. Теорема доказана.

Перейдем к оценке разности потенциалов $q_1(x) - q_2(x)$ рассматриваемых краевых задач. Для этого обратимся к формуле (4.1.3) и положим в ней $y = x$. Тогда согласно определению оператора $\mathbf{K}_{1,x}^*$ (формула (3.2.16′)) получим

$$K_{1,2}(x, x) = -\varphi(x, x),$$

откуда в силу (4.1.5) и (3.1.6) следует

$$\frac{1}{2}\int\limits_x^\infty \{q_1(t) - q_2(t)\}\, dt = \sum e_1(i\lambda_k, x)\, e_2(i\lambda_k, x) \times$$

$$\times \{m_k^2(2) - m_k^2(1)\} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \{S_1(\lambda) - S_2(\lambda)\}\, e_1(\lambda, x)\, e_2(\lambda, x) d\lambda. \tag{4.2.6}$$

В частности, если выполнены условия теоремы 4.2.1, то

$$\frac{1}{2}\int\limits_x^\infty \{q_1(t) - q_2(t)\}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|>\sqrt{N}} \{S_1(\lambda) - S_2(\lambda)\}\, e_1(\lambda, x)\, e_2(\lambda, x)\, d\lambda. \tag{4.2.7}$$

Непосредственно оценить правую часть здесь не удается. Поэтому поступим так: выберем достаточно гладкую функцию $g(x)$, равную нулю вне интервала $(x_0, x_0 + h)$, умножим обе части равенства (4.2.7) на $g'(x)$ и проинтегрируем. После интегрирования по частям левой части получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} \{q_1(t) - q_2(t)\}\, g(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|>\sqrt{N}} \{S_1(\lambda) - S_2(\lambda)\}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} e_1(\lambda, t)\, e_2(\lambda, t)\, g'(t)\, dt d\lambda. \tag{4.2.8}$$

Следующая лемма поможет подобрать функцию $g(x)$ так, чтобы интеграл от нее был близок к единице, а правая часть формулы (4.2.8) была по возможности мала́.

Лемма 4.2.1. *Пусть краевые задачи* $\{q_j(x)\} \in V\{\alpha(x)\}$, *потенциалы* $q_j(x)$ *ограничены в интервале* (x_0, x_0+h) *и*

$$Q(x) = \int_x^\infty \{q_1(t) + q_2(t)\}\,dt.$$

Тогда для любой непрерывно дифференцируемой функции $g(x)$, *равной нулю вне интервала* (x_0, x_0+h), *справедливо тождество*

$$\int_{x_0}^{x_0+h} e_1(\lambda, t)\, e_2(\lambda, t)\, g'(t)\,dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} \{g'(t) + g(t)\,Q(t)\}\, e^{2i\lambda t} dt + r(\lambda, x_0, h),$$

где

$$|r(\lambda, x_0, h)| \leqslant \frac{\alpha^2(x_0)\, m^2(\lambda, x_0)}{4\lambda^2}\{3\,|\tilde{g}'(-2\lambda)| + |\tilde{g}'(2\lambda)|\} +$$

$$+ \frac{4\alpha(x_0)\, m^2(\lambda, x_0)\, \beta(h, x_0)\, h}{\lambda^2}\int_{x_0}^{x_0+h} |g'(t)|\,dt,$$

$$m(\lambda, x) = \max_{j=1,2}\{\sup_{x \leqslant t < \infty} |e_j(\lambda, t)|\},$$

$$\beta(h, x) = \max_{j=1,2}\{\sup_{x < t < x+h} |q_j(t)|\}.$$

Доказательство. Запишем произведение $e_1(\lambda, x)\, e_2(\lambda, x)$ в виде

$$e_1(\lambda, x)\, e_2(\lambda, x) = e^{2i\lambda x} + e^{i\lambda x}\{e_1(\lambda, x) + e_2(\lambda, x) - 2e^{i\lambda x}\} + \\ + \{e_1(\lambda, x) - e^{i\lambda x}\}\{e_2(\lambda, x) - e^{i\lambda x}\}, \tag{4.2.9}$$

и рассмотрим отдельно все слагаемые его правой части. Из интегральных уравнений

$$e_j(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda}\, q_j(t)\, e_j(\lambda, t)\,dt, \tag{4.2.10}$$

которым удовлетворяют функции $e_j(\lambda, x)$, находим

$$e_j(\lambda, x) - e^{i\lambda x} = \frac{e^{-i\lambda x} A_j(\lambda, x) - e^{i\lambda x} B_j(\lambda, x)}{2i\lambda}, \tag{4.2.11}$$

где

$$A_j(\lambda, x) = \int_x^\infty e^{i\lambda t} q_j(t)\, e_j(\lambda, t)\, dt,$$

$$B_j(\lambda, x) = \int_x^\infty e^{-i\lambda t} q_j(t)\, e_j(\lambda, t)\, dt.$$

При этом

$$|A_j(\lambda, x)| \leqslant \sup_{x \leqslant t < \infty} |e_j(\lambda, t)| \int_x^\infty |q_j(\xi)|\, d\xi \leqslant \alpha(x)\, m(\lambda, x), \quad (4.2.12)$$

$$|A_j'(\lambda, x)| = |e^{i\lambda x} q_j(x)\, e_j(\lambda, x)| \leqslant \beta(h, x)\, m(\lambda, x). \quad (4.2.12')$$

Такие же оценки справедливы для $|B_j(\lambda, x)|$, $|B_j'(\lambda, x)|$. Поэтому

$$\{e_1(\lambda, x) - e^{i\lambda x}\}\{e_2(\lambda, x) - e^{i\lambda x}\} =$$

$$= \frac{p_1(\lambda, x)}{\lambda^2} + \frac{A_1^0 B_2^0 + A_2^0 B_1^0 - e^{-2i\lambda x} A_1^0 A_2^0 - e^{2i\lambda x} B_1^0 B_2^0}{4\lambda^2}, \quad (4.2.13)$$

где

$$A_j^0 = A_j(\lambda, x_0), \quad B_j^0 = B_j(\lambda, x_0),$$

и согласно (4.2.12), (4.2.12′)

$$|p_1(\lambda, x)| \leqslant 2h\alpha(x_0)\, \beta(h, x_0)\, m^2(\lambda, x_0) \quad (4.2.13')$$

$$(x_0 < x < x_0 + h).$$

Снова используя уравнения (4.2.10), получаем

$$e^{i\lambda x}\{e_1(\lambda, x) + e_2(\lambda, x) - 2e^{i\lambda x}\} =$$

$$= e^{i\lambda x} \int_x^\infty \frac{\sin \lambda (t - x)}{\lambda} e^{i\lambda t} \{q_1(t) + q_2(t)\}\, dt +$$

$$+ \frac{D(\lambda, x) - e^{2i\lambda x} C(\lambda, x)}{-4\lambda^2}, \quad (4.2.14)$$

где

$$D(\lambda, x) =$$

$$= 2i\lambda \int_x^\infty e^{i\lambda t} [q_1(t)\{e_1(\lambda, t) - e^{i\lambda t}\} + q_2(t)\{e_2(\lambda, t) - e^{i\lambda t}\}]\, dt,$$

$$C(\lambda, x) =$$

$$= 2i\lambda \int_x^\infty e^{-i\lambda t} [q_1(t)\{e_1(\lambda, t) - e^{i\lambda t}\} + q_2(t)\{e_2(\lambda, t) - e^{i\lambda t}\}]\, dt.$$

Из формулы (4.2.11) и неравенства (4.2.12) видно, что

$$\left.\begin{aligned} &|D(\lambda, x)| \leqslant 2\alpha^2(x)\, m(\lambda, x), \\ &|D'(\lambda, x)| \leqslant 4\beta(h, x_0)\,\alpha(x_0)\, m(\lambda, x_0) \\ &\qquad (x_0 < x < x_0 + h). \end{aligned}\right\} \tag{4.2.14'}$$

Такие же оценки справедливы для $|C(\lambda, x)|$, $|C'(\lambda, x)|$. Используя эти оценки, выделяя во втором слагаемом правой части равенства (4.2.14) значения функций $D(\lambda, x)$, $C(\lambda, x)$ в точке $x = x_0$ и интегрируя по частям первое слагаемое, получаем

$$e^{i\lambda x}\{e_1(\lambda, x) + e_2(\lambda, x) - 2e^{i\lambda x}\} = \int_x^\infty e^{2i\lambda t} Q(t)\, dt + \\ + \frac{p_2(\lambda, x)}{\lambda^2} + \frac{D(\lambda, x_0) - e^{2i\lambda x} C(\lambda, x_0)}{-4\lambda^2}, \tag{4.2.15}$$

где

$$|p_2(\lambda, x)| \leqslant 2h\beta(h, x_0)\,\alpha(x_0)\, m(\lambda, x_0) \tag{4.2.15'}$$

$$(x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h).$$

Чтобы закончить доказательство леммы, нужно умножить обе части тождества (4.2.9) на $g'(x)$ и затем их проинтегрировать. Учитывая при этом формулы (4.2.13), (4.2.14), находим

$$\int_{x_0}^{x_0+h} e_1(\lambda, t)\, e_2(\lambda, t)\, g'(t)\, dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} \left\{ e^{2i\lambda t} + \int_t^\infty e^{2i\lambda\xi} Q(\xi)\, d\xi \right\} g'(t)\, dt +$$

$$+ \frac{\tilde{g}'(-2\lambda)\, C(\lambda, x_0) - \tilde{g}'(2\lambda)\, A_1^0 A_2^0 - \tilde{g}'(-2\lambda)\, B_1^0 B_2^0}{4\lambda^2} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^2} \int_{x_0}^{x_0+h} \{p_1(\lambda, t) + p_2(\lambda, t)\}\, g'(t)\, dt,$$

откуда после интегрирования по частям следует, что

$$\int_{x_0}^{x_0+h} e_1(\lambda, t)\, e_2(\lambda, t)\, g'(t)\, dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} \{g'(t) + g(t)\, Q(t)\}\, e^{2i\lambda t} dt + r(\lambda, x_0, h),$$

где согласно оценкам (4.2.12), (4.2.13′), (4.2.14′) и (4.2.15′)

$$|r(\lambda, x_0, h)| \leqslant \frac{\alpha^2(x_0)\, m^2(\lambda, x_0)}{4\lambda^2}\{3|\tilde{g}'(-2\lambda)| + |\tilde{g}'(2\lambda)|\} +$$

$$+ \frac{4\alpha(x_0)\, m^2(\lambda, x_0)\, \beta(h, x_0)\, h}{\lambda^2}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} |g'(t)|\, dt.$$

Лемма доказана.

Займемся теперь подбором функции $g(x)$. Пусть

$$\delta_0(t) = \frac{n}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right)^n e^{2in\lambda t} d\lambda \qquad (n > 3), \tag{4.2.16}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{h}\delta_0\left(-\frac{1}{2} + \frac{t - x_0}{h}\right). \tag{4.2.16′}$$

Функция $\delta_0(t)$ имеет $n - 2$ непрерывных производных, неотрицательна, четна, не убывает на интервале $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, равна нулю вне интервала $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta_0(t)\, dt = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\delta_0(t)\, dt = 1.$$

В качестве функции $g(x)$ возьмем решение дифференциального уравнения

$$g'(x) + g(x)\, Q(x) = \delta'(x) + c\delta(x), \tag{4.2.17}$$

обращающееся в нуль при $x \leqslant x_0$:

$$g(x) = \int\limits_{x_0}^{x}\{\delta'(t) + c\delta(t)\}\exp\left\{-\int\limits_{t}^{x} Q(\xi)\, d\xi\right\} dt =$$

$$= \delta(x) - \int\limits_{x_0}^{x}\{Q(t) - c\}\exp\left\{-\int\limits_{t}^{x} Q(\xi)\, d\xi\right\}\delta(t)\, dt.$$

Константу c выберем так, чтобы функция $g(x)$ обращалась в нуль и при $x \geqslant x_0 + h$, т. е. определим ее из уравнения

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\{Q(t) + c\}\exp\left\{-\int\limits_{t}^{x} Q(\xi)\, d\xi\right\}\delta(t)\, dt = 0. \tag{4.2.18}$$

По теореме о среднем значении $c = Q(x_1)$, где x_1 — некоторая точка сегмента $[x_0, x_0 + h]$. Поэтому

$$g(x) = \delta(x) - \int_{x_0}^{x} \{Q(t) - Q(x_1)\} \exp\left\{-\int_t^x Q(\xi)\, d\xi\right\} \delta(t)\, dt,$$

$$g'(x) = \delta'(x) - \{Q(x) - Q(x_1)\}\, \delta(x) +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} \{Q(t) - Q(x_1)\}\, Q(x) \exp\left\{-\int_t^x Q(\xi)\, d\xi\right\} \delta(t)\, dt,$$

откуда при $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ получаем такие неравенства:

$$|g(x) - \delta(x)| \leqslant \frac{h\delta(x)\,\omega(h, x_0)}{2} e^{h\alpha(x_0)}, \qquad (4.2.19)$$

$$|g'(x) - \delta'(x)| \leqslant \delta(x)\,\omega(h, x_0)\,\{1 + h\alpha(x_0)\, e^{h\alpha(x_0)}\}, \qquad (4.2.19')$$

где

$$\omega(h, x_0) = \max_{\substack{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h \\ x_0 \leqslant y \leqslant x_0 + h}} |Q(x) - Q(y)|. \qquad (4.2.20)$$

(При выводе этих неравенств нужно учесть, что функция $\delta(x)$ не убывает на интервале $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{h}{2}$ и $|Q(x)| = = \left|\int_x^\infty \{q_1(t) + q_2(t)\}\, dt\right| \leqslant 2\alpha(x)$.)

Далее, из равенства (4.2.18) вытекает, что оценки (4.2.19), (4.2.19') справедливы и при $x_0 + \frac{h}{2} \leqslant x \leqslant x_0 + h$, т. е. они верны при всех значениях x. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g'(x)|\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\delta'(x)|\, dx + \omega(h, x_0)\,\{1 + h\alpha(x_0)\, e^{h\alpha(x_0)}\},$$

$$|\tilde{g}'(\lambda)| \leqslant |\tilde{\delta}'(\lambda)| + \omega(h, x_0)\,\{1 + h\alpha(x_0)\, e^{h\alpha(x_0)}\},$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\delta'(x)|\, dx = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} |\delta_0'(\xi)|\, d\xi = \frac{2}{h} \delta_0(0) =$$

$$= \frac{2n}{\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt < \frac{2n}{h},$$

$$|\tilde{\delta}(\lambda)| = |\tilde{\delta}_0(\lambda h)| \leqslant \left(\frac{n}{h}\right)^n \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-n},$$

$$|\tilde{\delta}'(\lambda)| = |\lambda\tilde{\delta}(\lambda)| \leqslant 2\left(\frac{n}{h}\right)^n \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-n+1}.$$

Эти неравенства вместе с леммой 4.2.1 и уравнением (4.2.17), которому удовлетворяет функция $g(x)$, приводят к оценке

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+h} e_1(\lambda, t)\, e_2(\lambda, t)\, g'(t)\, dt\right| \leqslant 2\left(\frac{n}{h}\right)^n |\lambda|^{-n+1} \times$$

$$\times \{1 + |\lambda|^{-1}\alpha(x_0)\} + \frac{2\alpha^2(x_0)\, m^2(\lambda, x_0)}{\lambda^2}\left(\frac{n}{h}\right)^n |\lambda|^{-n+1} +$$

$$+ \frac{\alpha^2(x_0)\, m^2(\lambda, x_0)\, \omega(h, x_0)}{\lambda^2}\{1 + h\alpha(x_0)\, e^{h\alpha(x_0)}\} +$$

$$+ \frac{4\alpha(x_0)\, \beta(h, x_0)\, m^2(\lambda, x_0)}{\lambda^2}\{2n + h\omega(h, x_0)\, [1 + h\alpha(x_0)\, e^{h\alpha(x_0)}]\}.$$

Из определения (4.2.20) величины $\omega(h, x_0)$ видно, что она может быть оценена двумя способами:

$$\omega(h, x_0) \leqslant 2h\beta(h, x_0), \quad \omega(h, x_0) \leqslant 4\alpha(x_0).$$

Используя оба эти неравенства, получаем

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+h} e_1(\lambda, t)\, e_2(\lambda, t)\, g'(t)\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\frac{n}{h}\right)^n |\lambda|^{-n+1}\left\{1 + \frac{\alpha(x_0)}{|\lambda|} + \frac{\alpha^2(x_0)\, m^2(\lambda, x_0)}{|\lambda|^2}\right\} +$$

$$+ \frac{\alpha(x_0)\, \beta(h, x_0)\, m^2(\lambda, x_0)}{\lambda^2}\{8n + 18\alpha(x_0)\, h\, [1 + \alpha(x_0)\, h e^{h\alpha(x_0)}]\},$$

откуда согласно тождеству (4.2.8) следует, что

$$\left|\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_0+h} \{q_1(t) - q_2(t)\}\, g(t)\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi}\left(\frac{n}{h}\right)^n \frac{N^{-\frac{n-2}{2}}}{n-2}\left\{1 + \frac{\alpha(x_0)}{\sqrt{N}} + \frac{\alpha^2(x_0)\, m_N^2(x_0)}{N}\right\} +$$

$$+ \frac{4\alpha(x_0)\, \beta(h, x_0)\, m_N^2(x_0)}{\pi\sqrt{N}}\{4n + 9h\alpha(x_0)\, [1 + h\alpha(x_0)\, e^{h\alpha(x_0)}]\}, \tag{4.2.21}$$

где

$$m_N(x_0) = \sup_{|\lambda| > \sqrt{N}} m(\lambda, x_0).$$

Кроме того, в силу неравенства (4.2.19)

$$\left| \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+h} \{q_1(t) - q_2(t)\} \{g(t) - \delta(t)\} \, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} h\beta(h, x_0)\, \omega(h, x_0)\, e^{h\alpha(x_0)} \leqslant 2h\beta(h, x_0)\, \alpha(x_0)\, e^{h\alpha(x_0)}. \quad (4.2.22)$$

Теорема 4.2.2. *Если данные рассеяния двух краевых задач $\{q_j(x)\} \in V\{\alpha(x)\}$ $(j = 1, 2)$ совпадают при всех значениях $\lambda^2 \in (-\infty, N)$ и $N \geqslant 1$, то в области, где*

$$\frac{5\{[\ln N] + 1\}}{\sqrt{N}} \alpha(x) < 1,$$

справедливо неравенство

$$|q_1(x) - q_2(x)| \leqslant \frac{10\{[\ln N] + 3\}}{\sqrt{N}} \{9\alpha(x)\beta(h, x) + \gamma(h, x)\} +$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{N}\{3[\ln N] + 1\}}.$$

Здесь

$$h = 5N^{-\frac{1}{2}}\{[\ln N] + 1\},$$

$$\gamma(h, x) = \max_{j=1,2} \{ \sup_{x<t<x+h} |q_j'(t)| \}.$$

Доказательство. Выберем параметры h и n, входящие в неравенства (4.2.21), (4.2.22), следующим образом:

$$n = 3\{[\ln N] + 1\}, \quad h = nN^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2n}}.$$

Тогда

$$h = 3\{[\ln N] + 1\}\; N^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{\ln N}{2[\ln N] + 2}\right\} <$$

$$< 5N^{-\frac{1}{2}}\{[\ln N] + 1\}, \quad (4.2.23)$$

и так как по условию

$$\frac{\alpha(x)}{\sqrt{N}} < \frac{1}{5\{[\ln N] + 1\}} < 1,$$

то

$$m_N(x) \leqslant \left(1 - \frac{\alpha(x)}{\sqrt{N}}\right)^{-1} < \frac{5\{[\ln N]+1\}}{5[\ln N]+4} <$$

$$< 1 + \frac{1}{4\{[\ln N]+1\}}.$$

Из неравенств (4.2.21), (4.2.22), учитывая эти оценки для h и $m_N(x)$, получаем

$$\left| \frac{1}{2} \int_x^{x+h} \{q_1(t) - q_2(t)\}\, \delta(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{45\alpha(x)\,\beta(h,\ x)}{\sqrt{N}} \{[\ln N]+3\} + \frac{2}{\sqrt{N}\,\{3[\ln N]+1\}}.$$

Поскольку при $x < t < x+h$

$$|q_1(x) - q_2(x) - q_1(t) + q_2(t)| \leqslant 2h\gamma(h,\ x),$$

где

$$\gamma(h,\ x) = \max_{j=1,2} \{ \sup_{x<t<x+h} |q_j'(t)| \},$$

из последнего неравенства выводим

$$\frac{1}{2}|q_1(x) - q_2(x)| \leqslant h\gamma(h,\ x) +$$

$$+ \frac{45\alpha(x)\,\beta(h,\ x)}{\sqrt{N}} \{[\ln N]+3\} + \frac{2}{\sqrt{N}\,\{3[\ln N]+1\}}.$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из этого неравенства, если воспользоваться оценкой (4.2.23) для h.

Для выяснения физического смысла доказанных теорем рассмотрим столкновение двух одинаковых частиц с массой m, взаимодействующих по закону $\gamma^2 U(|x_1 - x_2|)$, где γ — константа взаимодействия («заряд»). Их движение в системе центра тяжести описывается уравнением Шредингера (3.3.1) с $2M = m$, $V(x) = \gamma^2 U(x)$ до тех пор, пока энергия системы $\mathcal{E}$ существенно меньше mc^2, так как при $\mathcal{E} > 2mc^2$ уже возможны превращения частиц. Поэтому данные рассеяния для уравнения (3.3.1) в лучшем случае можно получить при энергиях

$$\mathcal{E} \leqslant mc^2\theta \qquad (\theta < 1).$$

Какую информацию несут эти данные? Разделив в уравнении (3.3.1) переменные, получим для радиальной собственной функции S-состояния уравнение

$$y''(x) - q(x)\,y(x) + \lambda^2 y(x) = 0, \quad y(0) = 0 \qquad (0 < x < \infty),$$

где

$$q(x) = \frac{m\gamma^2}{\hbar^2} U(x), \qquad \lambda^2 = \frac{m\mathscr{E}}{\hbar^2}.$$

Из теоремы 3.2.1 вытекает, что радиальные собственные функции S-состояния могут быть найдены с относительной погрешностью, квадрат которой равен

$$\frac{\gamma^2}{\sqrt{\theta}\hbar c} \int_x^\infty |U(t)|\,dt.$$

Таким образом, наблюдения над рассеянием позволяют восстановить картину движения в области, где

$$\frac{\gamma^2}{\hbar c} \int_x^\infty |U(t)|\,dt \ll 1.$$

Согласно теореме 3.2.2 и потенциал $U(x)$ удовлетворительно восстанавливается в этой области изменения x.

ЗАДАЧИ

До сих пор мы нигде не использовали равенство $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} |S_1(\lambda) - S_2(\lambda)| = 0$. Это, конечно, привело к огрублению оценок при $N \to \infty$. Зато все полученные неравенства зависят от поведения функции $\alpha(t)$, а следовательно, и потенциалов $q(t)$ только при $t \geqslant x$. В приведенных ниже задачах показано, как можно учесть априорные предположения о поведении потенциалов в окрестности нуля. При этом существенную роль играет величина

$$m = \sup_{V\{\alpha(x)\}} |e(0, 0)|,$$

которая согласно неравенству (4.2.5) грубо оценивается так:

$$m \leqslant e^{\alpha_1(0)}, \qquad \left(\alpha_1(0) = \int_0^\infty \alpha(t)\,dt\right).$$

1. Доказать, что функция $S(\lambda)$ краевой задачи $\{q(x)\} \in V\{\alpha(x)\}$ удовлетворяет неравенству

$$|S(\lambda) - 1| \leqslant \frac{8m^2}{4-\pi} \{\alpha_1(0) - \alpha_1(|\lambda|^{-1})\} \left\{1 + \frac{\pi\sqrt{N_0}}{2|\lambda|}\right\}.$$

Здесь $\sqrt{N_0} = x_0^{-1}$, где x_0 — корень уравнения

$$\int_0^x \alpha(t)\,dt = \frac{1}{3},$$

и $\sqrt{N_0} = 0$, если $\alpha_1(0) \leqslant \frac{1}{3}$.

Указание. Из интегрального уравнения для функции $e(\lambda, x)$ следует, что

$$|e(\lambda, 0)-1| \leqslant \int_0^\infty \left|\frac{\sin\lambda t}{\lambda} q(t)\, e(\lambda, t)\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant m\left\{\int_0^{|\lambda|^{-1}} t\,|q(t)|\,dt+\frac{1}{|\lambda|}\int_{|\lambda|^{-1}}^\infty |q(t)|\,dt\right\}=$$

$$=m\int_0^{|\lambda|^{-1}}\left\{\int_t^\infty |q(\xi)|\,d\xi\right\}dt \leqslant m\,\{\alpha_1(0)-\alpha_1(|\lambda|^{-1})\}.$$

Поэтому

$$|S(\lambda)-1|=\left|\frac{e(-\lambda, 0)-e(\lambda, 0)}{e(\lambda, 0)}\right| \leqslant \frac{2m\,\{\alpha_1(0)-\alpha_1(|\lambda|^{-1})\}}{|e(\lambda, 0)|}.$$

Из равенства (3.1.31) следует, что при любом x

$$\left|\frac{1}{e(\lambda, 0)}\right|=\frac{|e(-\lambda, x)-S(\lambda)\, e(\lambda, x)|}{|2\lambda\omega(\lambda, x;\ \infty)|} \leqslant \frac{m}{|\lambda x z(\lambda, x)|}, \qquad (4.2.24)$$

а из уравнения (3.1.26) и определения x_0 — что при $x \in [0, x_0]$

$$|z(\lambda, x)| \leqslant \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad |z(\lambda, x)| \geqslant \left|\frac{\sin\lambda x}{\lambda x}\right|-\frac{1}{2}.$$

Если $|\lambda|\, x_0 \geqslant \frac{\pi}{2}$, то, выбирая в (4.2.24) $x=\frac{\pi}{2|\lambda|}$, получаем

$$\left|\frac{1}{e(\lambda, 0)}\right| \leqslant \frac{m}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4m}{4-\pi} \leqslant \frac{4m}{4-\pi}\left(1+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{N_0}}{|\lambda|}\right). \qquad (4.2.25)$$

Если же $|\lambda|\, x_0 < \frac{\pi}{2}$, то, полагая в (4.2.24) $x=x_0$, находим

$$\left|\frac{1}{e(\lambda, 0)}\right| \leqslant \frac{m}{|\lambda|\, x_0\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2\pi m\sqrt{N_0}}{|\lambda|\,(4-\pi)} < \frac{4m}{4-\pi}\left(1+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{N_0}}{|\lambda|}\right).$$

2. Используя результат предыдущей задачи, доказать, что при условиях теоремы 4.2.1 верно неравенство

$$\frac{\sup\limits_{x \leqslant t < \infty} |e_1(\mu, t)-e_2(\mu, t)|^2}{\sup\limits_{x \leqslant t < \infty} |e_1(\mu, t)\, e_2(\mu, t)|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8\alpha(x)\,\{\alpha_1(0)-\alpha_1(N^{-\frac{1}{2}})\}}{\pi\sqrt{N}\left(1-\frac{\alpha(x)}{\sqrt{N}}\right)^2\left(1-\frac{|\mu|^2+\mu^2}{2N}\right)} \cdot \frac{8m^2}{(4-\pi)}\left(1+\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N_0}{N}}\right).$$

3. Обозначим через $V\{\alpha(x);\ \sigma_n\}$ множество всех краевых задач $\{q(x)\}\in V\{\alpha(x)\}$, у которых потенциалы $q(x)$ имеют $n\geqslant 0$ суммируемых на полуоси $(0,\infty)$ производных и функция $u_{n+1}(t)$, определенная так же, как в задаче § 1 гл. 3, удовлетворяет неравенству

$$\int_0^\infty |u'_{n+1}(t)|\,dt\leqslant\sigma_n.$$

Доказать, что если S-функции краевых задач $\{q_j(x)\}\in V\{\alpha(x);\ \sigma_n\}$ совпадают при всех $\lambda\in(-\sqrt{N},\ \sqrt{N})$, то при $\lambda^2>N$

$$|S_1(\lambda)-S_2(\lambda)|\leqslant\frac{8\sigma_n m^2\left(1+\sigma_n N^{-\frac{n+1}{2}}\right)}{|\lambda|\,|e_1(\lambda,0)\,e_2(\lambda,0)|}N^{-\frac{n}{2}}\left(2^{2n+1}+N^{\frac{n}{2}}|\lambda|^{-n}\right).$$

Указание. Так как

$$S_1(\lambda)-S_2(\lambda)=\frac{e_1(-\lambda,0)}{e_1(\lambda,0)}-\frac{e_2(-\lambda,0)}{e_2(\lambda,0)}=$$

$$=\frac{e_1(-\lambda,0)\,e_2(\lambda,0)-e_1(\lambda,0)\,e_2(-\lambda,0)}{e_1(\lambda,0)\,e_2(\lambda,0)},$$

то достаточно оценить при $\lambda^2>N$ функцию

$$\Phi(\lambda)=e_1(-\lambda,0)\,e_2(\lambda,0)-e_1(\lambda,0)\,e_2(-\lambda,0).$$

Согласно (3.1.40)

$$e_j(\lambda,0)=P_n^{(j)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{v_n^{(j)}(\lambda,0)}{(i\lambda)^{n+1}},\quad P_n^{(j)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k^{(j)}(0)}{(i\lambda)^k}$$

и, следовательно,

$$\Phi(\lambda)=(i\lambda)^{-2(n+1)}\{Q_{2n+1}(\lambda)+R_n(\lambda)-R_n(-\lambda)\},\qquad(4.2.26)$$

где

$$Q_{2n+1}(\lambda)=(i\lambda)^{2(n+1)}\left\{P_n^{(1)}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)P_n^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)-P_n^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)P_n^{(2)}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\right\},$$

$$R_n(\lambda)=(i\lambda)^{n+1}\{v_n^{(2)}(\lambda,0)\,e_1(-\lambda,0)-v_n^{(1)}(\lambda)\,e_2(-\lambda,0)\}+$$
$$+(-1)^{n+1}v_n^{(1)}(\lambda,0)\,v_n^{(2)}(-\lambda,0).$$

Воспользовавшись неравенством (3.1.42), получим

$$|R_n(\lambda)|\leqslant 4\sigma_n m^2(|\lambda|^{n+1}+\sigma_n).\qquad(4.2.27)$$

При этом нужно учесть, что из определения функций $m_j(x)$ следует, что $|e_j(\lambda,x)|\leqslant m_j(x)\leqslant m$. Поскольку при $\lambda\in(-\sqrt{N},\ \sqrt{N})$ по условию задачи $\Phi(\lambda)=0$, из формулы (4.2.26) и оценки (4.2.27) вытекает, что многочлен $Q_{2n+1}(\lambda)$ степени $2n+1$ на интервале $(-\sqrt{N},\ \sqrt{N})$ удовлетворяет неравенству

$$|Q_{2n+1}(\lambda)|\leqslant 8\sigma_n m^2\left(N^{\frac{n+1}{2}}+\sigma_n\right).$$

Применяя неравенство С. Н. Бернштейна, получаем

$$|Q_{2n+1}(\lambda)| \leqslant 2^{2n+1} N^{-\frac{2n+1}{2}} |\lambda|^{2n+1} 8\sigma_n m^2 (N^{\frac{n+1}{2}} + \sigma_n)$$

при $|\lambda| > \sqrt{N}$. Отсюда, учитывая (4.2.26) и (4.2.27), заключаем, что при $|\lambda| > \sqrt{N}$

$$|\Phi(\lambda)| \leqslant 8\sigma_n m^2 (1 + \sigma_n N^{-\frac{n+1}{2}}) |\lambda|^{-1} N^{-\frac{n}{2}} (2^{2n+1} + N^{\frac{n}{2}} |\lambda|^{-n}).$$

4. Доказать, что если выполнены условия теоремы 4.2.1 и $\{q_j(x)\} \in V\{\alpha(x); \sigma_n\}$, то

$$\frac{\sup\limits_{x \leqslant t < \infty} |e_1(\mu, t) - e_2(\mu, t)|^2}{\sup\limits_{x \leqslant t < \infty} |e_1(\mu, t)\, e_2(\mu, t)|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8\alpha(x)\sigma_n m^2 C_n(N)}{\pi\sqrt{N}\left(1 - \frac{\alpha(x)}{\sqrt{N}}\right)^2\left(1 - \frac{|\mu^2| + \mu^2}{2N}\right)} \left(\frac{4}{\sqrt{N}}\right)^{n+1},$$

где величина

$$C_n(N) = (1 + \sigma_n N^{-\frac{n+1}{2}})(1 + [2^{2n}(2+n)]^{-1}) \times$$
$$\times \sup_{|\lambda| > \sqrt{N}} \{|e_1(\lambda, 0)\, e_2(\lambda, 0)|^{-1}\}$$

оценивается неравенством

$$C_n(N) \leqslant (1 + \sigma_n N^{-\frac{n+1}{2}})(1 + [2^{2n}(2+n)]^{-1}) \times$$
$$\times \left\{\frac{4m}{4-\pi}\left(1 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{N_0}{N}}\right)\right\}^2.$$

5. Используя результаты первой и второй задач, уточнить теорему 4.2.2 при больших значениях N.

§ 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПО ЕЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Будем нормировать спектральные функции $\rho(\mu)$ симметрических краевых задач $\{h, q(x)\}$ условием $\rho(-\infty) = 0$. В дальнейшем нам потребуется равномерная в множестве $V\{A, a(x)\}$ оценка для этих спектральных функций при $\mu > 0$. Ее можно получить из тождества

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos\sqrt{\mu}x}{\mu}\, d\rho(\mu) = x + \int_0^x (x - t)\, L(t, 0; h)\, dt$$

следующим образом. Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos 2\sqrt{\mu}x}{\mu}\, d\rho(\mu) =$$

$$= 2x^2 \left\{ \int_{-\infty}^{+0} \left(\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\mu}x}{\sqrt{\mu}x}\right)^2 d\rho(\mu) + \int_{+0}^{\infty} \left(\frac{\sin\sqrt{\mu}x}{\sqrt{\mu}x}\right)^2 d\rho(\mu) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant 2x^2 \left\{ \int_{-\infty}^{+0} d\rho(\mu) + \frac{2}{3} \int_{+0}^{x^{-2}} d\rho(\mu) \right\} \geqslant \frac{4x^2}{3}\rho(x^{-2}),$$

то

$$\rho(x^{-2}) \leqslant \frac{3}{2x} \left\{ 1 + \int_0^{2x} |L(t,\ 0;\ h)|\, dt \right\}.$$

Далее, в гл. 1, § 2, была найдена такая оценка для ядра $L(t,\ 0;\ h)$:

$$|L(t,\ 0;\ h)| \leqslant \left\{ |h| + \sigma\left(\frac{t}{2}\right) \right\} \exp\left\{ 2\sigma_1\left(\frac{t}{2}\right) + t|h| \right\}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{2x} |L(t,\ 0;\ h)|\, dt \leqslant \exp\{2\sigma_1(x) + 2x|h|\} - 1,$$

$$\rho(x^{-2}) \leqslant \frac{3}{2x} \exp\{2\sigma_1(x) + 2x|h|\}.$$

Так как для краевых задач $\{h,\ q(x)\}$, принадлежащих множеству $V\{A,\ a(x)\}$,

$$2\sigma_1(x) + 2x|h| \leqslant 2\left\{ \int_0^x a(t)\, dt + Ax \right\} \leqslant 2x\{A + a(x)\},$$

то их спектральные функции удовлетворяют неравенству

$$\rho(x^{-2}) \leqslant \frac{3}{2x} \exp 2x\{A + a(x)\}.$$

Полагая здесь $\mu = x^{-2}$, получаем искомую оценку

$$\rho(\mu) \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{\mu} \exp\{2\mu^{-\frac{1}{2}}[A + a(\mu^{-\frac{1}{2}})]\} \qquad (4.3.1)$$

для спектральных функций краевых задач $\{h,\ q(x)\} \in V\{A,\ a(x)\}$.

Теорема 4.3.1. *Если спектральные функции двух краевых задач* $\{h_j,\ q_j(x)\} \in V\{A,\ a(x)\}$ $(j = 1,2)$ *совпадают при* $\lambda \in (-\infty,\ N]$:

$$\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda) = 0 \qquad (-\infty < \lambda \leqslant N), \quad N > 0,$$

то в области, где

$$\frac{A + a(x)}{\sqrt{N}} < 1, \tag{4.3.2}$$

справедливо неравенство

$$\frac{\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant x} |\omega_1(\sqrt{\mu},\ t) - \omega_2(\sqrt{\mu},\ t)|^2}{\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant x} |\omega_1(\sqrt{\mu},\ t)\,\omega_2(\sqrt{\mu},\ t)|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{24\,\{A + a(x)\} \exp\{2N^{-\frac{1}{2}}(A + a(N^{-\frac{1}{2}}))\}}{\sqrt{N}\left(1 - \dfrac{A + a(x)}{\sqrt{N}}\right)^2 \left(1 - \dfrac{|\operatorname{Re}\mu| + \operatorname{Re}\mu}{2N}\right)}$$

для всех μ *из полуплоскости* $\operatorname{Re}\mu < N$.

Доказательство. При $\operatorname{Re}\mu < N$ из тождества (4.1.10) леммы 4.1.2 следует

$$|\omega_1(\sqrt{\mu},\ x) - \omega_2(\sqrt{\mu},\ x)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\left\{|h_1 - h_2| + \int\limits_0^x |q_1(t) - q_2(t)|\,dt\right\} \max_{\substack{0 \leqslant u \leqslant x \\ 0 \leqslant v \leqslant x}} |B_{1,2}(\mu,\ u,\ v)| \leqslant$$

$$\leqslant 4\,\{A + a(x)\} \max_{\substack{0 \leqslant u \leqslant x \\ 0 \leqslant v \leqslant x}} |B_{1,2}(\mu,\ u,\ v)|, \tag{4.3.3}$$

причем согласно формуле (4.1.11) и условиям теоремы

$$\max_{\substack{0 \leqslant u \leqslant x \\ 0 \leqslant v \leqslant x}} |B_{1,2}(\mu,\ u,\ v)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant u \leqslant x} |\omega_1(\sqrt{\mu},\ u)\,\omega_2(\sqrt{\mu},\ u)| \int\limits_N^\infty \frac{m_1(\sqrt{\lambda},\ x)\, m_2(\sqrt{\lambda},\ x)}{|\lambda - \mu|} \times$$

$$\times\, d\,\{\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda)\}$$

где

$$m_j(\sqrt{\lambda},\ x) = \max_{0 \leqslant v \leqslant x} |\omega_j(\sqrt{\lambda},\ v)|,$$

Поскольку функции $\omega_j(\sqrt{\lambda}, x)$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\omega_j(\sqrt{\lambda}, x) = \cos\sqrt{\lambda}x + h_j \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q_j(t)\,\omega_j(\sqrt{\lambda}, t)\,dt,$$

для величин $m_j(\sqrt{\lambda}, x)$ $(\lambda \geqslant 0)$ выполняются неравенства

$$m_j(\sqrt{\lambda}, x) \leqslant 1 + \frac{|h_j|}{\sqrt{\lambda}} + \frac{m_j(\sqrt{\lambda}, x)}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x |q_j(t)|\,dt \leqslant 1 + \frac{A + a(x)}{\sqrt{\lambda}} m_j(\sqrt{\lambda}, x).$$

Поэтому, если x удовлетворяет условию (4.3.2), а $\lambda > N$, то

$$m_j(\sqrt{\lambda}, x) \leqslant \frac{1}{1 - \frac{A + a(x)}{\sqrt{\lambda}}} \leqslant \left(1 - \frac{A + a(x)}{\sqrt{N}}\right)^{-1},$$

$$\max_{\substack{0 \leqslant u \leqslant x \\ 0 \leqslant v \leqslant x}} |B_{1,2}(\mu, u, v)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max\limits_{0 \leqslant u \leqslant x} |\omega_1(\sqrt{\mu}, u)\,\omega_2(\sqrt{\mu}, u)|}{\left(1 - \frac{A + a(x)}{\sqrt{N}}\right)^2} \int_N^\infty \frac{d\{\rho_1(\lambda) + \rho_2(\lambda)\}}{|\lambda - \mu|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max\limits_{0 \leqslant u \leqslant x} |\omega_1(\sqrt{\mu}, u)\,\omega_2(\sqrt{\mu}, u)|}{\left(1 - \frac{A + a(x)}{\sqrt{N}}\right)^2 \left(1 - \frac{|\operatorname{Re}\mu| + \operatorname{Re}\mu}{2N}\right)} \int_N^\infty \frac{d\{\rho_1(\lambda) + \rho_2(\lambda)\}}{\lambda}. \tag{4.3.4}$$

Далее,

$$\int_N^\infty \frac{d\{\rho_1(\lambda) + \rho_2(\lambda)\}}{\lambda} = -\frac{\rho_1(N) + \rho_2(N)}{N} + \int_N^\infty \frac{\rho_1(\lambda) + \rho_2(\lambda)}{\lambda^2}\,d\lambda,$$

откуда, используя оценку (4.2.1), находим

$$\int_N^\infty \frac{d\{\rho_1(\lambda) + \rho_2(\lambda)\}}{\lambda} \leqslant 3\int_N^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \exp\{2N^{-\frac{1}{2}}(A + a(N^{-\frac{1}{2}}))\} =$$

$$= 6N^{-\frac{1}{2}} \exp\{2N^{-\frac{1}{2}}(A + a(N^{-\frac{1}{2}}))\}. \tag{4.3.5}$$

Теорема доказана, так как ее утверждение является очевидным следствием неравенств (4.3.3) — (4.3.5).

Приведем в заключение без доказательства теорему, характеризующую точность восстановления потенциала $q(x)$ по спектральной функции, известной только при $\lambda \in (-\infty, N)$.

Теорема 4.3.2. *Если спектральные функции двух краевых задач $\{h_j, q_j(x)\} \in V\{A, a(x)\}$ $(j=1,2)$ совпадают при $\lambda \in (-\infty, N)$, $N>1$ и область значений x, в которой выполняется неравенство*

$$\frac{3\{[\ln N]+2\}}{\sqrt{N}}(A+a(x))<1,$$

содержит число $3N^{-\frac{1}{2}}\{[\ln N]+2\}$, то в этой области

$$\left|\int_0^x \{q_1(t)-q_2(t)\}\,dt\right| \leqslant 12a(\delta)+$$

$$+\frac{6\{[\ln N]+2\}}{\sqrt{N}}\left\{30[A+a(x)]^2+\gamma(\delta, x)+\frac{10}{[\ln N]+1}\right\},$$

где

$$\delta = 3N^{-\frac{1}{2}}\{[\ln N]+2\},$$

$$\gamma(\delta, x)=\max_{j=1,2}\{\sup_{x-\delta\leqslant t\leqslant x}|q_j(t)|\}.$$

При этом

$$|h_1-h_2|\leqslant$$

$$\leqslant 2a\left(\frac{\delta}{2}\right)+\frac{18\{[\ln N]+2\}}{\sqrt{N}}\left\{[A+a(\delta)]^2+\frac{2}{[\ln N]+1}\right\}.$$

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что если данные рассеяния двух краевых задач, принадлежащих множеству $V\{\alpha(x)\}$, совпадают при $\lambda^2<N$, то в области, где $\pi\alpha(x)<\sqrt{N}$, выполняется неравенство

$$\left|\int_x^\infty \left(1-e^{-\varepsilon^{-1}\alpha(x)(t-x)}\right)(q_1(t)-q_2(t))\,dt\right| \leqslant 4\alpha(x)\,\varepsilon,$$

$$\varepsilon = 2\left\{\frac{2\alpha(x)}{\pi\sqrt{N}}\right\}^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{\alpha(x)}{\sqrt{N}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Получить аналог этого неравенства для краевых задач, которые принадлежат множеству $V\{A, a(x)\}$ и у которых спектральные функции совпадают на полуоси $(-\infty, N)$.

Указание Использовать задачи 2, 3 § 3 и теоремы 4.2.1 и 4.3.1.

2. Получить безразмерные аналоги неравенств, доказанных в теоремах 4.2.2 и 4.3.2.

Указание. Если в качестве h взять корень уравнения

$$h = nN^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{\alpha(x_0)}{\sqrt{N}}\cdot\frac{\beta(h, x_0)}{N}\right\}^{-\frac{1}{n}},$$

то согласно неравенствам (4.2.21), (4.2.22) получим

$$\left|\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\{q_1(t) - q_2(t)\}\,\delta(t)\,dt\right| \leqslant \frac{4}{\pi}C\frac{\alpha(x_0)}{\sqrt{N}}\beta(h, x_0),$$

где безразмерная величина

$$C = \frac{1}{n-2}\left\{1 + \frac{\alpha(x_0)}{\sqrt{N}} + \frac{\alpha^2(x_0)}{N}m_N^2(x_0)\right\} + m_N^2(x_0)\{4n + 9h\alpha(x_0)\times$$

$$\times[1 + h\alpha(x_0)e^{h\alpha(x_0)}]\} + \frac{\pi}{2}n\left\{\frac{\alpha(x_0)}{\sqrt{N}}\cdot\frac{\beta(h, x_0)}{N}\right\}^{-\frac{1}{n}}e^{h\alpha(x_0)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б. М. Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения. Физматгиз, М., 1962.
2. Повзнер А. Я. О дифференциальных уравнениях типа Штурма — Лиувилля на полуоси.— Мат. сб., 1948, **23 (65)**, 3—52.
3. Марченко В. А. О формулах обращения, порождаемых линейным дифференциальным оператором второго порядка.— ДАН СССР, 1950, **74**, 657—660.
4. Марченко В. А. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка.— ДАН СССР, 1950, **72**, 457—460.
5. Марченко В. А. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I.— Труды Моск. мат. о-ва, 1952, **1**, 327—420.
6. Гельфанд И. М. и Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1951, **15**, 309—360.
7. Левитан Б. М. Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка и о разложении по собственным функциям. I.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1953, **17**, 331—364; II — там же, 1955, **19**, 33—58.
8. Левин Б. Я. Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка.— ДАН СССР, 1956, **106**, 187—190.
9. Марченко В. А. Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн.— ДАН СССР, 1955, **104**, 695—698.
10. Агранович З. С. и Марченко В. А. Обратная задача теории рассеяния. Изд-во Харьк. университета, Харьков, 1960.
11. Марченко В. А. Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка.— Мат. сб., 1960, **52 (94)**, 739—788.
12. Рофе-Бекетов Ф. С. Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях.— Мат. сб., 1960, **51 (93)**, 293—342.
13. Гельфанд И. М. и Левитан Б. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка.— ДАН СССР, 1953, **88**, 593—596.
14. Фаддеев Л. Д. О выражении для следа разности двух сингулярных дифференциальных операторов типа Штурма —Лиувилля.— ДАН СССР, 1957, **115**, 878—881.
15. Буслаев В. С. и Фаддеев Л. Д. О формулах следов для дифференциального сингулярного оператора Штурма — Лиувилля.— ДАН СССР, 1960, **132**, 13—16.

16. Ломоносов М. И. Разность следов одномерных дифференциальных операторов, заданных в бесконечном интервале.— Труды АРТА, 1957, **31**, 26—55.
17. Гасымов М. Г. Обратная задача теории рассеяния для систем уравнений Дирака порядка $2n$.— Труды Моск. мат. о-ва, 1968, **19**, 41—112.
18. Левитан Б. М. и Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). «Наука», М., 1970.
19. Crum M. M. Associated Sturm — Liouville Systems. — The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford (2), 1955, **6**, 2, 121—128.
20. Крейн М. Г. О континуальном аналоге одной формулы Кристоффеля из теории ортогональных многочленов.— ДАН СССР, 1957, **113**, 970—973.
21. Короп В. Ф. Обратная задача рассеяния для уравнений с особенностью.— Сиб. мат. журн., 1961, **2**, 5, 672—693.
22. Лундина Д. Ш. О точности восстановления собственных функций по неполным данным рассеяния.— В кн.: Математическая физика и функциональный анализ, 1. Изд. ФТИНТ УССР, Харьков, 1969, 72—83.
23. Лундина Д. Ш. и Маркин С. А. Устойчивость обратной задачи теории рассеяния в классе гладких потенциалов.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1971, 14.
24. Марченко В. А. и Маслов К. В. Устойчивость задачи восстановления оператора Штурма — Лиувилля по спектральной функции.— Мат. сб., 1970, **81 (123)**, 525—551.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Печатается по постановлению ученого совета Физико-технического института низких температур АН УССР

МАРЧЕНКО ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ
ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Редактор *Е. Л. Орлик.* Художественный редактор *К. Г. Лычаковский.* Оформление художника *М. М. Марущинца.* Технический редактор *Г. Р. Боднер.* Корректор *Р. С. Коган.*

Сдано в набор 9.VII 1971 г. Подписано к печати 29.XI 1971 г. БФ 27757. Зак. № 1-1614. Изд. № 254. Тираж 2400. Бумага № 1, $84\times108^1/_{32}$. Печ. физ. листов 6,875. Усл. печ. листов 11,55. Учетно-изд. листов 11,11. Цена 1 руб. 18 коп

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Киевский полиграфический комбинат Комитета по печати при Совете Министров УССР, ул. Довженко, 3.