АКАДЕМИЯ НАУК
УКРАИНСКОЙ ССР

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

КИЕВ «НАУКОВА ДУМКА» 1977

В. А. МАРЧЕНКО

ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

КИЕВ «НАУКОВА ДУМКА» 1977

УДК 517. 9+517. 4

Рецензенты *Ю. И. Любич, Е. Я. Хруслов*

Редакция физико-математической литературы

М $\frac{20204-470}{М221(04)-77}$ 146-77

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

В развитии многих важных направлений математики и физики большую роль сыграли понятия и методы, зародившиеся в процессе изучения таких простых объектов, как уравнение Штурма — Лиувилля $-y'' + q(x)\,y = zy$ и связанный с ним оператор Штурма — Лиувилля $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ (в последнее время его часто называют также одномерным оператором Шредингера, а функцию $q(x)$ — потенциалом). Они были постоянным источником новых идей и задач для спектральной теории операторов и смежных разделов анализа. Этот источник не нссякает вот уж более 200 лет, с тех пор, как появились первые работы Д. Бернулли и Л. Эйлера, посвященные решению уравнения колебаний струны. Подтверждением этому могут служить недавно обнаруженные Г. Гарднером, Дж. Грином, М. Крускалом и Р. Миура [27] неожиданные связи спектральной теории операторов Штурма — Лиувилля с некоторыми нелинейными эволюционными уравнениями в частных производных.

Методы, используемые (а зачастую и зарождающиеся) в процессе изучения уравнений Штурма — Лиувилля, непрерывно обогащаются. В 40-х годах арсенал таких методов пополнился новым аппаратом исследования — операторами преобразования. Этот аппарат возник в теории операторов обобщенного сдвига, созданной Ж. Дельсартом и Б. М. Левитаном (см. [15]). Для произвольных уравнений Штурма — Лиувилля операторы преобразования построил А. Я. Повзнер [23]. Он применил их для вывода формул разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лнувилля с убывающим потенциалом. (Эта работа была, по-видимому, первой, в которой операторы преобразования применены в спектральной теории.) В. А. Марченко привлек операторы преобразования для исследования обратных задач спектрального аналнза [16] и асимптотического поведения спектральной функции сингулярного оператора Штурма — Лиувилля [17].

Роль операторов преобразования в спектральной теории значительно возросла после того, как И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан [3] нашли с их помощью исчерпывающее решение обратной задачи о восстановлении уравнения Штурма — Лиувилля по его спектральной функции, Б. М. Левитан [14] доказал в общем виде теорему о равносходимости, Б. Я. Левин [13] ввел новый вид операторов преобразования, сохраняющих асимптотику решений на бесконечности, а В. А. Марченко [18] использовал их для решения обратной задачи теории рассеяния.

Цель настоящей монографии состоит главным образом в том, чтобы показать, чего можно достичь с помощью операторов преобразования как в спектральной теории, так и в недавно обнаруженных ее нетрадиционных приложениях. Такая попытка была предпринята в книге, написанной на основе лекций, прочитанных автором в Харьковском университете, и изданной в 1972 г. [19]. За последние годы сфера применения операторов преобразования расширилась, в связи с чем возникла потребность в более полном изложении полученных в этой области результатов. В настоящей книге кроме традиционных вопросов, изложенных в основном так же, как в предыдущей монографии, рассмотрены новые приложения операторов преобразования и задачи, связанные с применением спектральной теории к нелинейным уравнениям.

В первой главе с помощью операторов преобразования изучается краевая задача, порождаемая на конечном интервале оператором Штурма — Лиувилля и произвольными невырожденными граничными условиями. Доказана полнота системы собственных и присоединенных функций, получены асимптотические формулы для решений уравнения Штурма — Лиувилля при $\lambda \to \infty$, на основе которых выведены асимптотические формулы для собственных значений рассматриваемых краевых задач. Все эти формулы известны давно, но с помощью операторов преобразования оказалось возможным выразить главные части их остаточных членов непосредственно через коэффициенты Фурье потенциала $q(x)$, что позволило, например, установить точную зависимость между степенью гладкости периодического потенциала и скоростью убывания лакун в спектре оператора Хилла. Заключительная часть главы посвящена выводу формулы следов Гельфанда — Левитана [4], приобретающей в последнее время все большее значение.

Во второй главе рассмотрены сингулярные краевые задачи, порождаемые на полуоси $0 \leqslant x < \infty$ оператором Штурма — Лиувилля с произвольным комплексным потенциалом $q(x)$ и граничными условиями $y'(0) - hy(0) = 0$. Для таких краевых задач введено понятие обобщенной спектральной функции и доказано ее существование. Из теоремы Рисса о виде позитивного линейного функционала следует, что обобщенная спектральная функция является мерой, если $q(x)$ и h вещественны. В этом случае формулы разложения по собственным функциям и равенство Парсеваля, порождаемые обобщенной спектральной функцией, приводят к классическим результатам Г. Вейля. В § 3 выведено интегральное уравнение Гельфанда — Левитана [3], позволяющее по обобщенной спектральной функции восстановить оператор, и найдены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять обобщенная функция для того, чтобы она была спектральной функцией некоторого оператора Штурма — Лиувилля. В последнем параграфе для спектральных функций симметрических краевых задач получена асимптотическая формула Марченко [17] (в уточненном Б. М. Левитаном [14] виде) и доказана теорема о равносходимости Левитана [14].

Третья глава посвящена обратным задачам теории рассеяния и обратнозадаче для уравнения Хилла. Введены операторы преобразования Левина [13] и с их помощью изучаются свойства решений уравнения Штурма — Лиувилля, потенциал которого удовлетворяет неравенству $\int_0^\infty x \mid q(x) \mid dx < \infty$. Получено интегральное уравнение Марченко [18], позволяющее восстановить потенциал по данным рассеяния, и установлены характеристические свойства данных рассеяния. Изложены результаты работы В. А. Марченко и И. В. Островского [21]: найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданная последовательность интервалов совпадала с множеством зон устойчивости некоторого уравнения Хилла, и доказана плотность множества потенциалов с конечным числом зон устойчивости (конечнозонных) Доказана также теорема Гасымова — Левитана [2], содержащая полное решение обратной задачи в постановке Г. Борга [26]. Последний параграф этой главы посвящен обратной задаче теории рассеяния для операторов Штурма — Лиувилля, рассматриваемых на всей вещественной оси. В нем доказана теорема Фаддеева [25] о характеристических свойствах данных рассеяния.

В последней главе рассмотрено применение спектральной теории для интегрирования нелинейных уравнений в частных производных, открытое Г. Гарднером, Дж. Грином, М. Крускалом и Р. Миура [27]. После опубликования исследования П. Лакса [12] и основанной на его идеях работы В. Е. Захарова и А. Б. Шабата [8] стало ясно, что этот новый метод можно использовать для интегрирования многих нелинейных уравнений математической физики (см. обзорную статью [5]). В книге подробно рассмотрено только уравнение Кортевега — де Фриса $\dot{v} = 6vv' - v'''$, пути возможных обобщений намечены в задачах. В § 1 главы дана общая схема метода, несколько отличающаяся от схемы П. Лакса и позволяющая рассматривать вспомогательные линейные операторы, произвольно зависящие от z. Далее приведено решение задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриса в классе быстроубывающих функций методом, развитым в работе [27]. Периодическая задача для этого уравнения впервые была исследована разными методами в работах С. П. Новикова [22], П. Лакса [28] и В. А. Марченко [20], опубликованных в 1974 г. В § 3 изложен метод, развитый в работе [20], в задачах 2, 3 доказаны две теоремы Новикова [22], чем установлена некоторая связь между этими методами. Подробное изложение результатов, полученных на пути, проложенном работой [22], можно найти в обзоре [5].

В 1961 г. Н. И. Ахиезер [1] установил связь между обратными задачами для некоторых операторов Штурма — Лиувилля с конечным числом лакун в спектре и проблемой обращения Якоби абелевых интегралов. Развивая идею Н. И. Ахиезера, А. Р. Итс и В. Б. Матвеев [10] нашли явную формулу для конечнозонных потенциалов, выразив их через θ-функцию Римана. Сопоставление этой формулы с результатами Б. А. Дубровина и С. П. Новикова [6] позволило получить простое выражение для конечнозонных периодических и почти периодических решений уравнения Кортевега — де Фриса. Выводу этой формулы посвящен последний параграф главы.

Приведенные в монографии задачи снабжены указаниями, достаточными для восстановления полных доказательств. Это позволило, не слишком увеличивая объем книги, дать представление о возможных уточнениях и обобщениях излагаемого материала. Они, в частности, содержат результаты М. Крама, М. Г. Крейна и В. Ф. Коропа (вырожденные операторы преобразования и уравнения с особенностями), М. Г. Гасымова, Б. М. Левитана и И. С. Саргсяна (системы уравнений Дирака), Ф. С. Рофе-Бекетова (операторные уравнения Штурма — Лиувилля), В. С. Буслаева, М. И. Ломоносова и Л. Д. Фаддеева (континуальный аналог формулы следов).

Автор не ставил перед собой задачу охватить все разделы и методы спектральной теории, поэтому в книге не отражены многие ее аспекты. В частности, не затронуты вопросы, связанные с понятием индекса дефекта, с исследованием характера спектра, с теорией расширения операторов. Не включены в нее основополагающие результаты Г. Вейля, Е. Титчмарша, М. В. Келдыша, М. Г. Крейна, М. А. Наймарка, большинство из которых изложено в известных монографиях по спектральной теории операторов. Опущено также исследование устойчивости обратных задач спектрального анализа. Этот круг вопросов подробно освещен в монографии [19].

В. А. Марченко

ГЛАВА 1 УРАВНЕНИЕ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ И ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1 Формула Римана

Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$ $(-\infty < x < \infty;\ 0 \leqslant y < \infty)$ является решением следующей задачи Коши:

$$u''_{xx}(x, y) - q_1(x)\,u(x, y) = u''_{yy}(x, y) - q_2(y)\,u(x, y), \tag{1.1.1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_y(x, 0) = \psi(x). \tag{1.1.1$'$}$$

Значение функции $u(x, y)$ в точке (x_0, y_0) можно считать значением некоторого линейного функционала $\mathrm{T}_{x_0}^{y_0}$ на вектор-функции $(\varphi(x), \psi(x))$:

$$u(x_0, y_0) = \mathrm{T}_{x_0}^{y_0}[\varphi(x), \psi(x)]. \tag{1.1.2}$$

Вид этого функционала впервые был найден Б. Риманом следующим способом. Обозначим через $R(x, y; x_0, y_0)$ дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения

$$R''_{xx} - q_1(x)\,R = R''_{yy} - q_2(y)\,R \tag{1.1.3}$$

в области D (рис. 1), обращающееся в единицу на характеристиках $x - x_0 = \pm(y - y_0)$ этого уравнения. Умножив уравнение (1.1.1) на R, уравнение (1.1.3) — на u и вычтя затем одно из другого, получим справедливое в области D тождество

$$u''_{xx}R - uR''_{xx} = u''_{yy}R - uR''_{yy}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}(u'_xR - uR'_x) - \frac{\partial}{\partial y}(u'_yR - uR'_y) = 0.$$

Поэтому

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(u'_xR - uR'_x) - \frac{\partial}{\partial y}(u'_yR - uR'_y)\right] dxdy = 0,$$

откуда согласно формуле Грина следует

$$\int\limits_\Gamma (u'_xR - uR'_x)\,dy + (u'_yR - uR'_y)\,dx = 0, \tag{1.1.4}$$

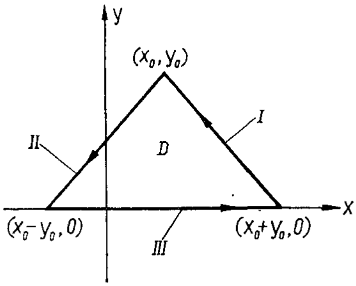

Рис. 1.

где Г — ориентированная граница области D, состоящая из трех направленных отрезков I, II, III (см. рис. 1), так что

$$\int\limits_{\Gamma} = \int\limits_{\mathrm{I}} + \int\limits_{\mathrm{II}} + \int\limits_{\mathrm{III}}. \tag{1.1.5}$$

На участке I $y = y_0 - (x - x_0)$, $dy = -dx$ и, следовательно,

$$\int\limits_{\mathrm{I}} = \int\limits_{x_0+y_0}^{x_0} \{-u_x'R + uR_x' + u_y'R - uR_y'\}\, dx =$$

$$= -\int\limits_{x_0+y_0}^{x_0} \{(u_x' - u_y')R + (R_x' - R_y')u - 2u(R_x' - R_y')\}\, dx, \tag{1.1.6}$$

причем в подынтегральную функцию вместо y нужно подставить $y_0 - (x - x_0)$. Для любой дифференцируемой функции $F(x, y)$

$$\frac{d}{dx} F(x, y_0 - (x - x_0)) = (F_x' - F_y')\,|_{y=y_0-(x-x_0)},$$

поэтому

$$(u_x' - u_y')R + (R_x' - R_y')u\,|_{y=y_0-(x-x_0)} = \frac{d}{dx}(uR\,|_{y=y_0-(x-x_0)}),$$

$$(R_x' - R_y')\,|_{y=y_0-(x-x_0)} = \frac{d}{dx} R(x, y_0 - (x - x_0); x_0, y_0) = 0,$$

ибо на прямой $y = y_0 - (x - x_0)$ функция R тождественно равна единице по условию. Из этих равенств и формулы (1.1.6) следует

$$\int\limits_{\mathrm{I}} = -\int\limits_{x_0+y_0}^{x_0} \frac{d}{dx}\{uR\,|_{y=y_0-(x-x_0)}\}\, dx =$$

$$= -\int\limits_{x_0+y_0}^{x_0} \frac{d}{dx} u(x, y_0 - (x - x_0))\, dx = -u(x, y_0 - (x - x_0))\Big|_{x_0+y_0}^{x_0} =$$

$$= -u(x_0, y_0) + u(x_0 + y_0, 0) = -u(x_0, y_0) + \varphi(x_0 + y_0).$$

Вычислив аналогичным образом интеграл по участку II, получим $\int\limits_{\text{II}} = \varphi(x_0 - y_0) - u(x_0, y_0)$. На отрезке III $dy = 0$, а $u(x, y) = \varphi(x)$; $u'_y(x, y) = \psi(x)$. Поэтому

$$\int\limits_{\text{III}} = \int\limits_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \{\psi(x) R(x, 0;\ x_0, y_0) - \varphi(x) R'_y(x, 0;\ x_0, y_0)\}\, dx.$$

Подставляя найденные выражения в формулу (1.1.5), получаем

$$0 = -2u(x_0, y_0) + \varphi(x_0 + y_0) + \varphi(x_0 - y_0) +$$
$$+ \int\limits_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \{\psi(x) R(x, 0;\ x_0, y_0) - \varphi(x) R'_y(x, 0;\ x_0, y_0)\}\, dx$$

или

$$u(x_0, y_0) = \frac{\varphi(x_0 + y_0) + \varphi(x_0 - y_0)}{2} +$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \{\psi(x) R(x, 0;\ x_0, y_0) - \varphi(x) R'_y(x, 0;\ x_0, y_0)\}\, dx. \qquad (1.1.7)$$

Функция $R(x, y;\ x_0, y_0)$ называется функцией Римана, а формула (1.1.7) — вид функционала $\mathrm{T}_{x_0}^{y_0}$ — формулой Римана. Для строгого обоснования формулы Римана нам еще нужно доказать, что функция Римана, обладающая перечисленными выше свойствами, существует. Переходя в уравнении (1.1.3) к новым переменным $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ ($\xi_0 = x_0 + y_0$, $\eta_0 = x_0 - y_0$) и полагая

$$r(\xi, \eta;\ \xi_0, \eta_0) = R\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2};\ x_0, y_0\right),$$

получаем для функции $r(\xi, \eta) = r(\xi, \eta;\ \xi_0, \eta_0)$ в области D' ($\eta_0 \leqslant \eta \leqslant \xi \leqslant \xi_0$) уравнение

$$4r''_{\xi\eta} - \left\{q_1\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) - q_2\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right)\right\} r = 0 \qquad (1.1.8)$$

и следующие условия на характеристиках:

$$r(\xi_0, \eta) = r(\xi, \eta_0) = 1. \qquad (1.1.8')$$

Непосредственно устанавливается, что если $r(\xi, \eta)$ — дважды непрерывно дифференцируемое решение задачи (1.1.8), (1.1.8′) (она называется задачей Гурса), то функция $r(x + y;\ x - y)$ обладает всеми свойствами функции Римана. Таким образом, функция Римана существует, если задача (1.1.8), (1.1.8′) имеет в области D' дважды непрерывно дифференцируемое решение. Будем считать, что функции $q_1(x)$, $q_2(y)$ непрерывны, так что функция

$$s(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\left\{q_1,\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) - q_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right\} \tag{1.1.9}$$

непрерывна в области D'. Задача (1.1.8), (1.1.8′), очевидно, эквивалентна интегральному уравнению

$$r(\xi, \eta) = 1 - \int_{\xi}^{\xi_0} d\alpha \int_{\eta_0}^{\eta} s(\alpha, \beta)\, r(\alpha, \beta)\, d\beta. \tag{1.1.10}$$

Это уравнение имеет единственное непрерывное решение, которое можно получить методом последовательных приближений. Действительно, положим

$$r_0(\xi, \eta) = 1, \quad r_n(\xi, \eta) = -\int_{\xi}^{\xi_0} d\alpha \int_{\eta_0}^{\eta} s(\alpha, \beta)\, r_{n-1}(\alpha, \beta)\, d\beta$$

и обозначим через M наибольшее значение функции $|s(\alpha, \beta)|$ в области D'. Тогда равномерно в области D'

$$|r_0(\xi, \eta)| \leqslant 1, \quad |r_1(\xi, \eta)| \leqslant M(\xi_0 - \xi)(\eta - \eta_0),$$

$$|r_2(\xi, \eta)| \leqslant \int_{\xi}^{\xi_0} d\alpha \int_{\eta_0}^{\eta} |s(\alpha, \beta)|\,|r_1(\alpha, \beta)|\, d\beta \leqslant \frac{M^2(\xi_0 - \xi)^2(\eta - \eta_0)^2}{(2!)^2}$$

и по индукции

$$|r_n(\xi, \eta)| \leqslant \int_{\xi}^{\xi_0} d\alpha \int_{\eta_0}^{\eta} |s(\alpha, \beta)|\,|r_{n-1}(\alpha, \beta)|\, d\beta \leqslant \frac{M^n(\xi_0 - \xi)^n(\eta - \eta_0)^n}{(n!)^2}.$$

Полученные оценки показывают, что ряд $r(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(\xi, \eta)$ непрерывных в области D' функций сходится абсолютно и равномерно в этой области, а его сумма удовлетворяет уравнению (1.1.10).

Из уравнения (1.1.10) в силу непрерывности функции $s(\alpha, \beta) \times r(\alpha, \beta)$ следует, что функция $r(\xi, \eta)$ непрерывно дифференцируема в области D', причем

$$\left.\begin{aligned} r'_\xi(\xi, \eta) &= \int_{\eta_0}^{\eta} s(\xi, \beta)\, r(\xi, \beta)\, d\beta, \\ r'_\eta(\xi, \eta) &= -\int_{\xi}^{\xi_0} s(\alpha, \eta)\, r(\alpha, \eta)\, d\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1.1.11}$$

Поэтому, если функции $q_1(x)$, $q_2(y)$ (а следовательно, и функция $s(\alpha, \beta)$) непрерывно дифференцируемы, то функция $r(\xi, \eta)$ дважды непрерывно дифференцируема. Таким образом, мы доказали существование функции Римана в случае, когда функции $q_1(x)$ и

$q_2(y)$ непрерывно дифференцируемы, причем

$$R(x, y;\ x_0, y_0) = r(x+y, x-y), \qquad (1.1.12)$$

где $r(\xi, \eta)$ — решение интегрального уравнения (1.1.10).

В случае просто непрерывных функций $q_1(x)$ и $q_2(y)$ под функцией Римана мы будем понимать функцию, получающуюся из решения интегрального уравнения (1.1.10) по формуле (1.1.12). Согласно предыдущему определенная таким образом функция обязательно непрерывно дифференцируема, причем ее производные находятся по формулам (1.1.11). Пусть последовательность непрерывно дифференцируемых функций $q_1^{(n)}(x)$, $q_2^{(n)}(y)$ при $n \to \infty$ равномерно сходится к функциям $q_1(x)$, $q_2(y)$ в рассматриваемой области изменения переменных. Из уравнения (1.1.10) следует, что соответствующие функции Римана $R^{(n)}(x, y;\ x_0, y_0)$ будут сходиться равномерно в области D к функции Римана $R(x, y;\ x_0, y_0)$, соответствующей функциям $q_1(x)$, $q_2(y)$. При этом согласно формулам (1.1.11) и первые частные производные $\frac{\partial}{\partial x} R^{(n)}(x, y;$ $x_0, y_0)$, $\frac{\partial}{\partial y} R^{(n)}(x, y;\ x_0, y_0)$ тоже равномерно в области D будут сходиться к $\frac{\partial}{\partial x} R(x, y;\ x_0, y_0)$ и $\frac{\partial}{\partial y} R(x, y;\ x_0, y_0)$.

Функции $R^{(n)}(x, y;\ x_0, y_0)$ дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} R^{(n)} - q_1^{(n)}(x) R^{(n)} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} R^{(n)} - q_2^{(n)}(y) R^{(n)}. \qquad (1.1.13)$$

Поступая с уравнениями (1.1.1) и (1.1.13) совершенно так же, как это было сделано с уравнениями (1.1.1) и (1.1.3), вместо формулы (1.1.7) получаем

$$u(x_0, y_0) = \frac{\varphi(x_0+y_0)+\varphi(x_0-y_0)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \{\psi(x) R^{(n)}(x, 0;\ x_0, y_0) - \varphi(x) R_y^{(n)\prime}(x, 0;\ x_0, y_0)\} \, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \iint\limits_D \{q_1^{(n)}(x) - q_1(x) + q_2^{(n)}(y) - q_2(y)\} R^{(n)}(x, y;\ x_0, y_0) \, dx dy.$$

Согласно предыдущему в этой формуле можно совершить предельный переход при $n \to \infty$ под знаками интегралов. В результате получим формулу (1.1.7) и для случая, когда функции $q_1(x)$ и $q_2(y)$ только непрерывны.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1.1. *Если функции $q_1(x)$ и $q_2(y)$ непрерывны, то любое дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(x, y)$ задачи Коши (1.1.1), (1.1.1') представимо формулой (1.1.7), где*

$R(x, y;\ x_0, y_0)$ — *непрерывно дифференцируемая функция, получающаяся из решения интегрального уравнения (1.1.10) по формуле (1.1.12).*

Замечание 1. Для справедливости этой теоремы достаточно, чтобы функции $q_1(x)$, $q_2(y)$ и $u(x, y)$ удовлетворяли перечисленным в теореме условиям только в области D, так как при выводе формулы (1.1.7) мы нигде не выходили за ее пределы.

Замечание 2. При выводе теоремы предполагалось, что $y > 0$. Легко понять, что это несущественно. Теорема верна для всех значений y, если только функции $q_1(x)$, $q_2(y)$ и $u(x, y)$ удовлетворяют нужным условиям в области D, ограниченной прямыми $x - x_0 = \pm(y - y_0)$ и осью абсцисс $y = 0$.

В следующем параграфе нам понадобится частный случай формулы (1.1.7), когда $\psi(x) = \varphi'(x)$. Так как функция Римана непрерывно дифференцируема, то слагаемое в формуле (1.1.7), содержащее $\psi(x) = \varphi'(x)$, можно проинтегрировать один раз по частям. Проделав это, мы получим следующее представление для дважды непрерывно дифференцируемых решений $u(x, y)$ задачи Коши (1.1.1), (1.1.1′) с $\psi(x) = \varphi'(x)$:

$$u(x_0, y_0) = \varphi(x_0 + y_0) - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \{R'_x(x, 0;\ x_0, y_0) + R'_y(x, 0;\ x_0, y_0)\}\,\varphi(x)\,dx. \tag{1.1.14}$$

Задачи

1. Доказать, что уравнение (1.1.10) имеет дифференцируемое решение и в том случае, когда функции $q_1(x)$ и $q_2(y)$ локально суммируемые.
2. Обобщить теорему (1.1.1) на случай локально суммируемых функций $q_1(x)$ и $q_2(y)$.

§ 2. Операторы преобразования

Рассмотрим на интервале $(-a, a)$ $(a \leqslant \infty)$ дифференциальное уравнение Штурма — Лиувилля

$$y'' - q(x)y + \lambda^2 y = 0, \tag{1.2.1}$$

где $q(x)$ — непрерывная на этом интервале комплекснозначная функция, а λ — комплексный параметр. В дальнейшем функцию $q(x)$ будем называть потенциалом этого уравнения или соответствующего оператора Штурма — Лиувилля $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$. Обозначим через $e_0(\lambda, x)$ решение уравнения (1.2.1) при начальных данных

$$e_0(\lambda, 0) = 1, \quad e_0'(\lambda, 0) = i\lambda \tag{1.2.2}$$

(здесь индекс «0» означает, что начальные данные задаются в точке 0, а буква e напоминает, что они такие же, как у функции $e^{i\lambda x}$, с которой совпадает $e_0(\lambda, x)$, если $q(x) \equiv 0$). Очевидно, что функция $u(x, y) = e^{i\lambda x} e_0(\lambda, y)$ дважды непрерывно дифференцируема при $-\infty < x < \infty$, $-a < y < a$ и является решением задачи Коши

$$\left.\begin{aligned} &u''_{xx} = u''_{yy} - q(y)\,u, \\ &u(x, 0) = e^{i\lambda x}, \quad u'_y(x, 0) = i\lambda e^{i\lambda x} = (e^{i\lambda x})'. \end{aligned}\right\} \tag{1.2.3}$$

Поэтому для нее справедлива формула (1.1.14) и

$$e^{i\lambda x_0} e_0(\lambda, y_0) = e^{i\lambda(x_0+y_0)} - \\ -\frac{1}{2}\int\limits_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \{R'_x(x, 0;\ x_0, y_0) + R'_y(x, 0;\ x_0, y_0)\}\, e^{i\lambda x} dx.$$

Полагая здесь $x_0 = 0$ и

$$K(y_0, x) = -\frac{1}{2}\{R'_x(x, 0;\ 0, y_0) + R'_y(x, 0;\ 0, y_0)\}, \tag{1.2.4}$$

получаем

$$e_0(\lambda, y_0) = e^{i\lambda y_0} + \int\limits_{-y_0}^{y_0} K(y_0, x)\, e^{i\lambda x} dx.$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1.2.1. *Решение $e_0(\lambda, x)$ уравнения (1.2.1) при начальных данных (1.2.2) представимо в виде*

$$e_0(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int\limits_{-x}^{x} K(x, t)\, e^{i\lambda t} dt, \tag{1.2.5}$$

где $K(x, t)$ — непрерывная функция, выражающаяся через функцию Римана уравнения (1.2.3) по формуле (1.2.4).

Интегральный оператор $\mathbf{I} + \mathbf{K}$, определенный формулой

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K}) f = f(x) + \int\limits_{-x}^{x} K(x, t) f(t)\, dt,$$

называется оператором преобразования, сохраняющим начальные условия в точке $x=0$. Он переводит функции $e^{i\lambda x}$ (решения простейшего уравнения вида (1.2.1) при начальных данных (1.2.2)) в решения уравнения (1.2.1) при тех же начальных данных. Поскольку функции $e^{i\lambda x}$ и $e^{-i\lambda x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' + \lambda^2 y = 0$, оператор $\mathbf{I} + \mathbf{K}$ преобразует любое решение этого уравнения в решение уравнения (1.2.1) при тех же начальных данных в точке 0. Поэтому решение $\omega(\lambda, x;\ h)$ уравнения (1.2.1) при начальных данных

$$\omega(\lambda, 0;\ h) = 1, \quad \omega'_x(\lambda, 0;\ h) = h \tag{1.2.6}$$

можно представить в таком виде:

$$\omega(\lambda, x;\ h) = \cos\lambda x + h\frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_{-x}^{x} K(x, t)\left\{\cos\lambda t + h\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\right\} dt =$$

$$= \cos\lambda x + \int_0^x \{h + K(x, t) + K(x, -t)\}\cos\lambda t dt +$$

$$+ h\int_0^x \left[\{K(x, t) - K(x, -t)\}\int_0^t \cos\lambda\xi d\xi\right] dt =$$

$$= \cos\lambda x + \int_0^x K(x, t;\ h)\cos\lambda t dt,$$

где

$$K(x, t;\ h) = h + K(x, t) + K(x, -t) + h\int_t^x \{K(x, \xi) - K(x, -\xi)\}\, d\xi. \tag{1.2.7}$$

Аналогично решение $\omega(\lambda, x;\ \infty)$ уравнения (1.2.1) при начальных данных

$$\omega(\lambda, 0;\ \infty) = 0, \quad \omega'_x(\lambda, 0;\ \infty) = 1 \tag{1.2.8}$$

можно представить в виде

$$\omega(\lambda, x;\ \infty) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_0^x K(x, t;\ \infty)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\, dt,$$

где

$$K(x, t;\ \infty) = K(x, t) - K(x, -t). \tag{1.2.9}$$

Таким образом, из теоремы 1.2.1 вытекает такое следствие.

Следствие. *Решения $\omega(\lambda, x;\ h)$, $\omega(\lambda, x;\ \infty)$ уравнения (1.2.1) при начальных данных (1.2.6), (1.2.8) можно представить в виде*

$$\omega(\lambda, x;\ h) = \cos\lambda x + \int_0^x K(x, t;\ h)\cos\lambda t dt, \tag{1.2.10}$$

$$\omega(\lambda, x;\ \infty) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_0^x K(x, t;\ \infty)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\, dt, \tag{1.2.11}$$

где непрерывные функции $K(x, t;\ h)$, $K(x, t;\ \infty)$ выражаются через ядро $K(x, t)$ оператора (1.2.5) по формулам (1.2.7), (1.2.9).

Операторы $\mathbf{I} + \mathbf{K}$, $\mathbf{I} + \mathbf{K}_h$, $\mathbf{I} + \mathbf{K}_\infty$, определяемые правыми частями равенств (1.2.5), (1.2.10), (1.2.11), будем называть операторами преобразования, привязанными к точке 0. Очевидно, вмесго нуля можно взять любую точку a. При этом формула (1.2.5) примет вид

$$e_a(\lambda, x) = e^{i\lambda(x-a)} + \int_{-x+2a}^{x} K_a(x, t)\, e^{i\lambda(t-a)} dt, \tag{1.2.5'}$$

а формулы (1.2.10), (1.2.11) —

$$\omega_a(\lambda, x; h) = \cos\lambda(x-a) + \int_a^x K_a(x, t; h)\cos\lambda(t-a)\, dt, \tag{1.2.10'}$$

$$\omega_a(\lambda, x; \infty) = \frac{\sin\lambda(x-a)}{\lambda} + \int_a^x K_a(x, t; \infty)\frac{\sin\lambda(t-a)}{\lambda}\, dt, \tag{1.2.11'}$$

где через $e_a(\lambda, x)$, $\omega_a(\lambda, x; h)$, $\omega_a(\lambda, x; \infty)$ обозначены решения уравнения (1.2.1), удовлетворяющие следующим начальным данным в точке a: $e_a(\lambda, a) = 1$, $e_a'(\lambda, a) = i\lambda$; $\omega_a(\lambda, a; h) = 1$, $\omega_a'(\lambda, a; h) = h$; $\omega_a(\lambda, a; \infty) = 0$, $\omega_a'(\lambda, a; \infty) = 1$.

Операторы, определенные правыми частями равенств (1.2.5'), (1.2.10'), (1.2.11'), называются операторами преобразования, привязанными к точке a. Так как $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_h$, $\mathbf{K}_\infty$ являются вольтерровскими интегральными операторами, то операторы $\mathbf{I}+\mathbf{K}$, $\mathbf{I}+\mathbf{K}_h$, $\mathbf{I}+\mathbf{K}_\infty$ имеют обратные того же вида, которые мы обозначим соответственно через $\mathbf{I}+\mathbf{L}$, $\mathbf{I}+\mathbf{L}_h$, $\mathbf{I}+\mathbf{L}_\infty$. Поэтому наряду с формулами (1.2.5), (1.2.10), (1.2.11) справедливы равенства

$$e^{i\lambda x} = e_0(\lambda, x) + \int_{-x}^{x} L(x, t)\, e_0(\lambda, t)\, dt, \tag{1.2.5''}$$

$$\cos\lambda x = \omega(\lambda, x; h) + \int_0^x L(x, t; h)\,\omega(\lambda, t; h)\, dt, \tag{1.2.10''}$$

$$\frac{\sin\lambda x}{\lambda} = \omega(\lambda, x; \infty) + \int_0^x L(x, t; \infty)\,\omega(\lambda, t; \infty)\, dt, \tag{1.2.11''}$$

причем ядра $L(x, t)$, $L(x, t; h)$, $L(x, t; \infty)$ являются непрерывными решениями соответствующих интегральных уравнений Вольтерра.

Операторы преобразования $\mathbf{I}+\mathbf{K}$, $\mathbf{I}+\mathbf{K}_h$, $\mathbf{I}+\mathbf{K}_\infty$ и им обратные $\mathbf{I}+\mathbf{L}$, $\mathbf{I}+\mathbf{L}_h$, $\mathbf{I}+\mathbf{L}_\infty$ играют очень важную роль в спектральной теории уравнений Штурма — Лиувилля. Для решения многих основных вопросов этой теории достаточно одного факта их существования. Но иногда желательно знать более детально свойства операторов, например, иметь оценки для ядер операторов или их производных. В связи с этим выведем удобные для исследования интегральные уравнения, из которых могут быть найдены ядра операторов преобразования. Заметим, что так как нигде не будут использоваться полученные выше результаты, то будет дано и новое доказательство теоремы 1.2.1, т. е. существования операторов преобразования.

Переписав уравнение (1.2.1) в виде

$$y'' + \lambda^2 y = q(x)\, y$$

и считая правую часть известной, для отыскания решения $e_0(\lambda, x)$ этого уравнения можно применить метод вариации произвольных постоянных. В результате придем к равенству

$$e_0(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\, q(t)\, e_0(\lambda, t)\, dt, \tag{1.2.12}$$

эквивалентному задаче (1.2.1), (1.2.2). Это равенство является интегральным уравнением для функции $e_0(\lambda, x)$ (интегральное уравнение Штурма — Лиувилля). Будем искать решение этого уравнения в виде (1.2.5). Для того чтобы функция такого вида удовлетворяла уравнению (1.2.12), должно выполняться равенство

$$\int_{-x}^{x} K(x, t)\, e^{i\lambda t} dt = \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\, q(t)\, e^{i\lambda t} dt + \\ + \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\, q(t) \int_{-t}^{t} K(t, \xi)\, e^{i\lambda\xi} d\xi\, dt, \tag{1.2.13}$$

и, наоборот, если функция $K(x, t)$ удовлетворяет этому равенству, то функция $e_0(\lambda, x)$ удовлетворяет уравнению (1.2.12), т. е. является решением уравнения (1.2.1) при начальных данных (1.2.2).

Преобразуем правую часть равенства (1.2.13) так, чтобы она имела вид преобразования Фурье некоторой функции. Так как

$$\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\, e^{i\lambda\xi} = \frac{1}{2} \int_{\xi-(x-t)}^{\xi+(x-t)} e^{i\lambda u} du, \tag{1.2.14}$$

то

$$\int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\, q(t)\, e^{i\lambda t} dt = \frac{1}{2} \int_0^x q(t) \left\{ \int_{2t-x}^{x} e^{i\lambda u} du \right\} dt = \\ = \frac{1}{2} \int_{-x}^{x} e^{i\lambda u} \left\{ \int_0^{\frac{x+u}{2}} q(t)\, dt \right\} du.$$

Меняя в последнем равенстве обозначения для переменных интегрирования, получаем

$$\int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} q(t)\, e^{i\lambda t}dt = \int_{-x}^{x} \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi)\, d\xi\right\} e^{i\lambda t}dt. \tag{1.2.15}$$

Снова используя формулу (1.2.14), находим

$$\int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} q(t) \int_{-t}^{t} K(t,\xi)\, e^{i\lambda\xi}d\xi dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\left\{\int_{-t}^{t} K(t,\xi)\int_{\xi-(x-t)}^{\xi+(x-t)} e^{i\lambda u}dud\xi\right\} dt.$$

Продолжая функцию $K(t, \xi)$ нулем при $|\xi| > |t|$, при всех $t \in (-x, x)$ получаем

$$\int_{-t}^{t} K(t,\xi)\int_{\xi-(x-t)}^{\xi+(x-t)} e^{i\lambda u}dud\xi = \int_{-\infty}^{\infty} K(t,\xi)\int_{\xi-(x-t)}^{\xi+(x-t)} e^{i\lambda u}dud\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda u}\int_{u-(x-t)}^{u+(x-t)} K(t,\xi)\, d\xi du = \int_{-x}^{x} e^{i\lambda u}\int_{u-(x-t)}^{u+(x-t)} K(t,\xi)\, d\xi du.$$

Поэтому

$$\int_0^x q(t)\left\{\int_{-t}^{t} K(t,\xi)\int_{\xi-(x-t)}^{\xi+(x-t)} e^{i\lambda u}dud\xi\right\} dt =$$

$$= \int_{-x}^{x} e^{i\lambda u}\left\{\int_0^x q(t)\int_{u-(x-t)}^{u+(x-t)} K(t,\xi)\, d\xi dt\right\} du,$$

откуда, меняя обозначения для переменных интегрирования, получаем

$$\int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} q(t) \int_{-t}^{t} K(t,\xi)\, e^{i\lambda\xi}d\xi dt =$$

$$= \int_{-x}^{x} e^{i\lambda t}\, \frac{1}{2}\left\{\int_0^x q(u)\int_{t-(x-u)}^{t+(x-u)} K(u,\xi)\, d\xi du\right\} dt. \tag{1.2.16}$$

Из формул (1.2.15), (1.2.16) вытекает, что равенство (1.2.13) эквивалентно равенству

$$\int_{-x}^{x} K(x,t)\, e^{i\lambda t}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left\{\int_0^{\frac{x+t}{2}} q(u)\, du + \int_0^x q(u)\int_{t-(x-u)}^{t+(x-u)} K(u,\xi)\, d\xi du\right\} e^{i\lambda t}dt.$$

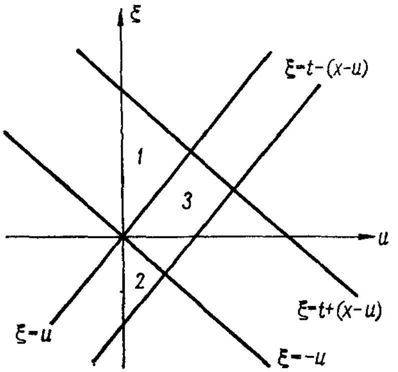

Рис. 2.

Следовательно, если функция $K(x, t)$ равна нулю при $|t| > |x$ и удовлетворяет уравнению

$$K(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x+t}{2}} q(u)\,du + \frac{1}{2} \int_0^x q(u) \int_{t-(x-u)}^{t+(x-u)} K(u, \xi)\,d\xi\,du, \tag{1.2.17}$$

то функции $e_0(\lambda, x)$, построенные по формуле (1.2.5), являются решениями уравнения (1.2.12) при всех значениях λ и наоборот.

На рис. 2 изображена область интегрирования в двойном интеграле, стоящем в правой части формулы (1.2.17). Она состоит из трех частей: *1*, *2*, *3*. В частях *1* и *2* $|\xi| > |u|$, поэтому в них $K(u, \xi) \equiv 0$ и поэтому фактически в уравнении (1.2.17) двойной интеграл нужно брать только по прямоугольнику *3*. Совершая в этом интеграле замену переменных $u + \xi = 2\alpha$, $u - \xi = 2\beta$, приходим к уравнению

$$K(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x+t}{2}} q(y)\,dy + \int_0^{\frac{x+t}{2}} d\alpha \int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\alpha+\beta) K(\alpha+\beta, \alpha-\beta)\,d\beta, \tag{1.2.18}$$

в котором уже автоматически учтено, что $K(x, t) \equiv 0$ при $|t| > > |x|$.

Таким образом, если решения $e_0(\lambda, x)$ уравнения (1.2.1) при начальных данных (1.2.2) могут быть представлены при всех значениях λ формулой (1.2.5), то ядро $K(x, t)$ должно удовлетворять уравнению (1.2.18), и, наоборот, если функция $K(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1.2.18), то правая часть формулы (1.2.5) при всех значениях λ является решением $e_0(\lambda, x)$ уравнения (1.2.1) при начальных данных (1.2.2).

Положим

$$\left.\begin{aligned} &H(\alpha, \beta) = K(\alpha+\beta, \alpha-\beta), \\ &x+t = 2u, \quad x-t = 2v. \end{aligned}\right\} \tag{1.2.19}$$

Тогда уравнение (1.2.18) запишется в таком виде:

$$H(u, v) = \frac{1}{2}\int_0^u q(y)\,dy + \int_0^u d\alpha \int_0^v q(\alpha+\beta) H(\alpha, \beta)\,d\beta. \tag{1.2.18'}$$

Теорема 1.2.2. *Уравнение (1.2.18), или, что то же, (1.2.18′), имеет единственное решение. Это решение непрерывно и удовлетворяет неравенству*

$$|K(t, x)| \leqslant \frac{1}{2} w\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right) - \sigma_1\left(\frac{x-t}{2}\right)\right\}, \tag{1.2.20}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &w(u) = \max_{0\leqslant\xi\leqslant u}\left|\int_0^\xi q(y)\,dy\right|, \quad \sigma_0(x) = \int_0^x |q(t)|\,dt, \\ &\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t)\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{1.2.21}$$

Если функция $q(x)$ имеет $n \geqslant 0$ непрерывных производных, то ядро $K(x, t)$ имеет $n+1$ непрерывную производную по обеим переменным.

Доказательство. Будем решать уравнение (1.2.18′) методом последовательных приближений, положив

$$H_0(u, v) = \frac{1}{2}\int_0^u q(y)\,dy,$$

$$H_n(u, v) = \int_0^u d\alpha \int_0^v q(\alpha+\beta) H_{n-1}(\alpha, \beta)\,d\beta.$$

Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} H_n(u, v)$ сходится равномерно в некотором квадрате $0 \leqslant u \leqslant a$, $0 \leqslant v \leqslant a$, то его сумма будет, очевидно, непрерывным решением уравнения (1.2.18′) в этом квадрате. Для доказательства равномерной сходимости этого ряда покажем, что

$$|H_n(u, v)| \leqslant \frac{1}{2} w(u) \frac{\{\sigma_1(u+v) - \sigma_1(u) - \sigma_1(v)\}^n}{n!}. \tag{1.2.22}$$

Из определения функции $w(x)$ следует

$$|H_0(u, v)| = \frac{1}{2}\left|\int_0^u q(y)\,dy\right| \leqslant \frac{1}{2} w(u),$$

так что оценка (1.2.22) верна для $n = 0$. Но если она верна для $n - 1$, то она верна и для n, так как тогда

$$|H_n(u, v)| \leqslant \frac{1}{2}\left|\int_0^u d\alpha \int_0^v |q(\alpha+\beta)|\, w(\alpha) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\{\sigma_1(\alpha+\beta) - \sigma_1(\alpha) - \sigma_1(\beta)\}^{n-1}}{(n-1)!}\, d\beta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} w(u) \int_0^u \left[\frac{\{\sigma_1(v+\alpha) - \sigma_1(\alpha) - \sigma_1(v)\}^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^v |q(\alpha+\beta)|\, d\beta\right] d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} w(u) \int_0^u \frac{\{\sigma_1(v+\alpha) - \sigma_1(\alpha) - \sigma_1(v)\}^{n-1}}{(n-1)!} \{\sigma_0(v+\alpha) - \sigma_0(\alpha)\}\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} w(u) \frac{\{\sigma_1(v+u) - \sigma_1(u) - \sigma_1(v)\}^n}{n!}$$

(при этом мы учли, что функции $w(u)$ и $\{\sigma_1(u+v) - \sigma_1(u) - \sigma_1(v)\}$ являются неубывающими функциями аргументов u и v).

Из справедливости оценок (1.2.22) вытекает, что уравнение (1.2.18′) имеет непрерывное решение $H(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u, v)$, причем

$$|H(u, v)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |H_n(u, v)| \leqslant \frac{1}{2} w(u) \exp\{\sigma_1(u+v) - \sigma_1(u) - \sigma_1(v)\}. \tag{1.2.23}$$

Тем самым существование непрерывного решения уравнения (1.2.18′), а следовательно и (1.2.18), доказано, причем согласно (1.2.23) функция $K(x, t)$ удовлетворяет неравенству (1.2.20). Единственность решения устанавливается обычным способом.

Теорема 1.2.2 содержит новое доказательство существования операторов преобразования и оценку для их ядер. Остановимся подробнее на уравнении (1.2.18′). Так как функции $q(y)$ и $H(\alpha, \beta)$ непрерывны, то функция $H(u, v)$ непрерывно дифференцируема и

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H(u, v)}{\partial u} &= \frac{1}{2} q(u) + \int_0^v q(u+\beta) H(u, \beta)\, d\beta, \\ \frac{\partial H(u, v)}{\partial v} &= \int_0^u q(\alpha+v) H(\alpha, v)\, d\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1.2.24}$$

Из этих равенств следует, что функция $H(u, v)$ имеет непрерывную смешанную производную, причем

$$\frac{\partial^2 H(u, v)}{\partial u\, \partial v} = q(u+v) H(u, v). \tag{1.2.25}$$

Кроме того, непосредственно из уравнения (1.2.18′) следует

$$H(u, 0) = \frac{1}{2}\int_0^u q(y)\,dy, \quad H(0, v) = 0. \tag{1.2.26}$$

Таким образом, для того чтобы функция $K(x, t)$ была ядром оператора преобразования (1.2.5), необходимо и достаточно, чтобы функция $H(u, v) = K(u+v, u-v)$ была решением задачи Гурса (1.2.25), (1.2.26).

Далее, из формул (1.2.24) следует, что функция $H(u, v)$, а следовательно и $K(x, t)$, имеет $n+1$ непрерывную производную, если функция $q(x)$ имеет n непрерывных производных. Поэтому, если функция $q(x)$ непрерывно дифференцируема, то в уравнении (1.2.25) можно вернуться к переменным $x = u+v$, $t = u-v$. При этом задача (1.2.25), (1.2.26) преобразуется:

$$\frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} = q(x)\,K(x, t), \tag{1.2.27}$$

$$K(x, x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(\xi)\,d\xi, \quad K(x, -x) = 0. \tag{1.2.28}$$

(Формулы (1.2.28) справедливы, конечно, при любых непрерывных функциях $q(x)$, но уравнение (1.2.27) можно записать только для дифференцируемых функций $q(x)$, если не вводить понятия обобщенных производных.)

Ядра других операторов преобразования тоже удовлетворяют уравнениям, аналогичным уравнению (1.2.27), причем их можно вывести более прямым путем. Проиллюстрируем это на примере ядра $L(x, t) = L(x, t; h)$ оператора, преобразующего решения $\omega(\lambda, x) = \omega(\lambda, x; h)$ в $\cos\lambda x$. Положим

$$z(x) = \omega(\lambda, x) + \int_0^x L(x, t)\,\omega(\lambda, t)\,dt \tag{1.2.29}$$

и выясним, какие условия нужно наложить на дважды непрерывно дифференцируемую функцию $L(x, t)$ для того, чтобы $z(x) \equiv \cos\lambda x$. Дифференцируя обе части равенства (1.2.29) два раза по x, получаем

$$z''(x) = \omega''(\lambda, x) + [L(x, x)\,\omega(\lambda, x)]' + L'_x(x, t)\,\omega(\lambda, t)\big|_{t=x} + \int_0^x L''_{xx}(x, t)\,\omega(\lambda, t)\,dt,$$

откуда следует, что

$$z''(x) + \lambda^2 z(x) = \omega''(\lambda, x) + \lambda^2\omega(\lambda, x) + [L(x, x)\,\omega(\lambda, x)]' +$$
$$+ L'_x(x, t)\,\omega(\lambda, t)\,|_{t=x} + \int_0^x L''_{xx}(x, t)\,\omega(\lambda, t)\,dt +$$
$$+ \lambda^2 \int_0^x L(x, t)\,\omega(\lambda, t)\,dt.$$

Используя уравнение $y'' - q(x)\,y + \lambda^2 y = 0$, которому удовлетворяет функция $\omega(\lambda, x)$, и интегрируя два раза по частям, находим

$$\lambda^2 \int_0^x L(x, t)\,\omega(\lambda, t)\,dt = -\int_0^x L(x, t)\,\{\omega''(\lambda, t) - q(t)\,\omega(\lambda, t)\}\,dt =$$
$$= -L(x, x)\,\omega'(\lambda, x) + L(x, 0)\,\omega'(\lambda, 0) + L'_t(x, t)\,\omega(\lambda, t)\,|_{t=x} -$$
$$- L'_t(x, t)\,\omega(\lambda, t)\,|_{t=0} - \int_0^x \{L''_{tt}(x, t) - q(t)\,L(x, t)\}\,\omega(\lambda, t)\,dt.$$

Поэтому

$$z''(x) + \lambda^2 z(x) = q(x)\,\omega(\lambda, x) + L'(x, x)\,\omega(\lambda, x) + L(x, x)\,\omega'(\lambda, x) +$$
$$+ L'_x(x, t)\,\omega(\lambda, t)\,|_{t=x} - L(x, x)\,\omega'(\lambda, x) + L(x, 0)\,h +$$
$$+ L'_t(x, t)\,\omega(\lambda, t)\,|_{t=x} - L'_t(x, 0) +$$
$$+ \int_0^x \{L''_{xx}(x, t) - L''_{tt}(x, t) + q(t)\,L(x, t)\}\,\omega(\lambda, t)\,dt,$$

откуда следует, что, для того чтобы функция $z(x)$ была решением уравнения $z'' + \lambda^2 z = 0$ при начальных данных $z(0) = 1$, $z'(0) = 0$ (т. е. чтобы $z(x) \equiv \cos\lambda x$), достаточно, чтобы ядро $L(x, t)$ удовлетворяло уравнению

$$L''_{xx}(x, t) = L''_{tt} - q(t)\,L(x, t) \tag{1.2.30}$$

и условиям

$$L(x, x) = -h - \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt, \quad L(x, 0)\,h - L'_t(x, 0) = 0. \tag{1.2.31}$$

Если функция $q(t)$ дифференцируема, то уравнение (1.2.30) имеет решение, удовлетворяющее условиям (1.2.31).

Действительно, переходя к переменным $u = x + t$, $v = x - t$, для функции

$$A(u, v) = L\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

получаем уравнение

$$4\,\frac{\partial^2 A(u, v)}{\partial u\,\partial v} = -q\left(\frac{u+v}{2}\right) A(u, v) \tag{1.2.32}$$

и условия

$$\left.\begin{aligned} &A(u, 0) = -h - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{u}{2}} q(t)\,dt, \\ &\{A(u, v)\,h + A'_v(u, v) - A'_u(u, v)\}\,|_{u=v} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.2.33}$$

Отсюда последовательным интегрированием находим

$$A'_u(u, v) = -\frac{1}{4}\int_0^v q\left(\frac{u-\xi}{2}\right) A(u, \xi)\,d\xi - \frac{1}{4}\,q\left(\frac{u}{2}\right),$$

$$A(u, v) = -\frac{1}{4}\int_v^u q\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi - \frac{1}{4}\int_v^u d\eta \int_0^v q\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right) A(\eta, \xi)\,d\xi + A(v, v),$$

$$2A'_u(u, v)\,|_{u=v} = \{A(u, v)\,h + A'_v(u, v) + A'_u(u, v)\}\,|_{u=v} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,q\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_0^v q\left(\frac{v-\xi}{2}\right) A(v, \xi)\,d\xi.$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$\{e^{hv} A(v, v)\}' = -\frac{1}{2}\,e^{hv}\left\{q\left(\frac{v}{2}\right) + \int_0^v q\left(\frac{v-\xi}{2}\right) A(v, \xi)\,d\xi\right\}$$

и, следовательно,

$$A(v, v) = -he^{-hv} - \frac{1}{2}\,e^{-hv}\int_0^v e^{h\eta}\left\{q\left(\frac{\eta}{2}\right) + \int_0^\eta q\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right) A(\eta, \xi)\,d\xi\right\} d\eta.$$

Таким образом, функция $A(u, v)$ должна удовлетворять такому интегральному уравнению:

$$A(u, v) = -he^{-hv} - \frac{1}{4}\int_v^u q\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi - \frac{e^{-hv}}{2}\int_0^v e^{h\eta} q\left(\frac{\eta}{2}\right) d\eta -$$

$$-\frac{e^{-hv}}{2}\int_0^v e^{h\eta}\int_0^\eta q\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right) A(\eta, \xi)\,d\xi\,d\eta - \frac{1}{4}\int_v^u d\eta\int_0^v q\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right) A(\eta, \xi)\,d\xi. \tag{1.2.34}$$

Наоборот, если функция $A(u, v)$ удовлетворяет этому уравнению, причем функция $q(x)$ дифференцируема, то, возвращаясь к функции $L(x, t)$, с помощью непосредственной проверки убеждаемся, что она является решением уравнения (1.2.30) при условиях (1.2.31) и, значит, ядром искомого оператора преобразования.

Существование решения интегрального уравнения (1.2.34) доказывается методом последовательных приближений, так же как в теореме 1.2.2. При этом автоматически получаются оценки для решения и его первых производных. В случае $\operatorname{Re} h < 0$ технически удобнее перейти к новой неизвестной функции $B(u, v) = e^{hv} A(u, v)$, чтобы излишне не огрублять оценки.

Приведем окончательные результаты для ядра $L(x, t; h)$:

$$L(0, 0; h) = -h,$$

$$|L(x, t; h)| \leqslant \left\{|h| + \sigma_0\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\} e^{2\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)} \chi\left(\frac{x+t}{2}; h\right),$$

$$|L'_x(x, 0; h)| \leqslant \frac{1}{2}\left|q\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left\{|h| + \sigma_0\left(\frac{x}{2}\right)\right\} e^{2\sigma_1\left(\frac{x}{2}\right)} \chi\left(\frac{x}{2}; h\right),$$

где

$$\chi(z; h) = \begin{cases} |e^{-hz}|, & \text{если} \quad \operatorname{Re} h < 0, \\ 1, & \text{если} \quad \operatorname{Re} h \geqslant 0. \end{cases}$$

Предположение о дифференцируемости функции $q(x)$ несущественно. От него можно избавиться, аппроксимируя $q(x)$ гладкими функциями и совершая затем предельный переход.

Задачи

1. Установить, что доказательство теоремы 1.2.2 проводится без изменений и для локально суммируемых функций $q(x)$.

2. Доказать, что для решения $K(x, t)$ уравнения (1.2.18) справедлива оценка

$$|K(x, t)| \leqslant \frac{1}{2} w\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{2\int_0^x w(\xi)\, d\xi\right\}, \tag{1.2.35}$$

где

$$w(x) = \max_{0 \leqslant \eta \leqslant x} \left|\int_0^\eta q(t)\, dt\right| \tag{1.2.35'}$$

(для знакопеременных $q(x)$ эта оценка лучше, чем (1.2.20)).

Указание. Переходим к уравнению (1.2.18') и находим его решение в виде суммы $H_1(u, v) + H_2(u, v)$ функций, удовлетворяющих уравнениям

$$H_1(u, v) = \frac{1}{2}\int_0^u q(\xi)\, d\xi + \int_0^u \int_0^v q(\alpha + \beta) H_2(\alpha, \beta)\, d\beta\, d\alpha,$$

$$H_2(u, v) = \int_0^u \int_0^v q(\alpha + \beta) H_1(\alpha, \beta)\, d\beta\, d\alpha.$$

Дифференцируя первое из них по v, а второе — по u, после интегрирования по частям получаем систему уравнений

$$A(u, v) = \int_0^u [Q(u+v) - Q(\alpha+v)]\, B(\alpha, v)\, d\alpha,$$

$$B(u, v) = \frac{1}{2} Q(u)[Q(u+v) - Q(u)] + \int_0^v [Q(u+v) - Q(u+\beta)]\, A(u, \beta)\, d\beta,$$

где

$$A(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} H_1(u, v), \quad B(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} H_2(u, v),$$

$$Q(u) = \int_0^u q(t)\, dt.$$

Используя метод последовательных приближений, находим

$$|B(u, v)| \leqslant w(u)\, w(u+v)\, \mathrm{ch}\left\{2 \int_0^{u+v} w(\xi)\, d\xi\right\},$$

$$|A(u, v)| \leqslant w(u)\, w(u+v)\, \mathrm{sh}\left\{2 \int_0^{u+v} w(\xi)\, d\xi\right\},$$

откуда, возвращаясь к функциям $H_1(u, v)$, $H_2(u, v)$, получаем для $H(u, v) = H_1(u, v) + H_2(u, v)$ оценку, эквивалентную (1.2.35).

3. Опираясь на результат предыдущей задачи, доказать, что если последовательность $\int_0^x q_n(t)\, dt$ сходится к $Q(x)$ равномерно в каждом конечном интервале, то соответствующая последовательность ядер $K_n(x, y)$ операторов преобразования сходится к некоторой функции $K(x, y)$ равномерно в каждой ограниченной области. Привести примеры последовательностей функций $q_n(x)$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{-\infty<x<\infty} \int_x^{x+1} |q_n(t)|\, dt = \infty,$$

но равномерно по $\lambda \in (-\infty, \infty)$ и x, изменяющемуся в любом конечном интервале, $\lim\limits_{n\to\infty} e_0^{(n)}(\lambda, x) = e^{i\lambda x}$, где $e_0^{(n)}(\lambda, x)$ — решение уравнения $y''(x) - q_n(x)\, y(x) + \lambda^2 y(x) = 0$, с начальными данными $y(0) = 1$, $y'(0) = i\lambda$.

4. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, OH — множество всех ограниченных операторов, действующих в H, и $|f|$ — норма оператора $f \in OH$. Операторным уравнением Штурма — Лиувилля называется уравнение

$$-y''(x) + q(x)\, y(x) = \lambda^2 y(x), \tag{1.2.36}$$

где $q(x) \in OH$ при каждом x и непрерывно зависит от x. Под решением задачи Коши для этого уравнения понимается операторнозначная функция $y(x) \in OH$ при каждом x, которая удовлетворяет уравнению (1.2.36) и начальным данным $y(0) = A$, $y'(0) = B$, где A и B принадлежат OH. Обобщить все результаты настоящего параграфа (включая задачи 2, 3) на операторные уравнения Штурма — Лиувилля.

5. Операторное уравнение

$$By'(x) + \Omega(x) y(x) = \lambda y(x) \tag{1.2.37}$$

($\Omega(x) \in OH$ и непрерывна, постоянный оператор $B \in OH$) называется уравнением Дирака, если $B^2 = -I$, $B\Omega(x) + \Omega(x) B \equiv 0$, где I — единичный оператор. Доказать, что решение $e(\lambda, x)$ уравнения (1.2.37) при начальных данных $e(\lambda, 0) = I$ представимо в виде

$$e(\lambda, x) = e^{-B\lambda x} + \int_{-x}^{x} K(x, t) e^{-B\lambda t} dt, \tag{1.2.38}$$

где $K(x, t) \in OH$, $1 + \int_{-x}^{x} |K(x, t)| dt \leqslant \exp \int_{0}^{|x|} |\Omega(t)| dt$.

Указание. Полагая $e(\lambda, x) = e^{-B\lambda x} u(\lambda, x)$ и замечая, что $e^{-B\lambda x}\Omega(x) \equiv$ $\equiv \Omega(x) e^{+B\lambda x}$, получаем для $u(\lambda, x)$ дифференциальное уравнение

$$u'(\lambda, x) = e^{2B\lambda x} B\Omega(x) u(\lambda, x),$$

эквивалентное следующему интегральному уравнению:

$$u(\lambda, x) = I + \int_0^x e^{2B\lambda t} B\Omega(t) u(\lambda, t) dt.$$

Если искать решение этого интегрального уравнения в виде

$$u(\lambda, x) = I + \int_0^x e^{2B\lambda t} Q(x, t) dt,$$

то для $Q(x, t)$ получим уравнение

$$Q(x, t) = B\Omega(t) + B \int_0^{x-t} \Omega(t+\xi) Q(t+\xi, \xi) d\xi,$$

разрешимость которого доказывается методом последовательных приближений. Полагая

$$K(x, t) = \frac{1}{4}\left[Q_+\left(x, \frac{x+t}{2}\right) + Q_-\left(x, \frac{x-t}{2}\right)\right],$$

где $Q_+ = Q + BQB$, $Q_- = Q - BQB$, приходим к формуле (1.2.38), если учесть, что $BQ_+ + Q_+ B = 0$, $BQ_- - Q_- B = 0$.

6. Так как $e^{-B\lambda x} = I\cos\lambda x - B\sin\lambda x$, то из формулы (1.2.38) следует, что решение уравнения (1.2.37) при начальных данных $y(0) = A$ представимо в виде

$$y(x) = \left[\cos\lambda x I + \int_0^x K(x, t; 0)\cos\lambda t dt\right] A -$$

$$- \left[\sin\lambda x I + \int_0^x K(x, t; \infty)\sin\lambda t dt\right] BA. \tag{1.2.38'}$$

Пусть проекционный оператор P таков, что $BP + PB = B$. Обозначим решение уравнения (1.2.37) при начальных данных $y(0) = P$ через $\omega(\lambda, x; P)$, а решение уравнения (1.2.37) с $\Omega(x) \equiv 0$ при этих же начальных данных — через $\omega_0(\lambda, x; P)$, т. е.

$$\omega_0(\lambda, x; P) = \cos\lambda x P - \sin\lambda x BP.$$

Тогда из формулы (1.2.38′) следует

$$\omega(\lambda, x; P) = \omega_0(\lambda, x; P) + \int_0^x K_P(x, t)\,\omega_0(\lambda, t; P)\,dt, \tag{1.2.39}$$

где $K_P(x, t) = K(x, t; 0)P + K(x, t; \infty)(I - P)$. Решив уравнение (1.2.39) относительно $\omega_0(\lambda, x; P)$, получим также

$$\omega_0(\lambda, x; P) = \omega(\lambda, x; P) + \int_0^x L_P(x, t)\,\omega(\lambda, t; P)\,dt. \tag{1.2.39′}$$

Предположив, что операторнозначная функция $\Omega(x)$ непрерывно дифференцируема, доказать, что ядро $L_P(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$B\frac{\partial}{\partial x}L_P(x, t) + \frac{\partial}{\partial t}L_P(x, t)B - L_P(x, t)\,\Omega(t) = 0 \tag{1.2.40}$$

и условиям

$$BL_P(x, x) - L_P(x, x)B = \Omega(x), \tag{1.2.40′}$$

$$L_P(x, 0)P = L_P(x, 0). \tag{1.2.40″}$$

7. Обозначим через $\omega(\lambda, x)$ и $\tilde\omega(\lambda, x)$ решения операторных уравнений Штурма — Лиувилля

$$\omega'' - q(x)\,\omega + \lambda^2\omega = 0,\quad \tilde\omega'' - \tilde\omega q(x) + \lambda^2\tilde\omega = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty)$$

при начальных данных $\omega(\lambda, 0) = \tilde\omega(\lambda, 0) = I$, $\omega'_x(\lambda, 0) = \tilde\omega'_x(\lambda, 0) = h$. Из существования операторов преобразования следует, что

$$\cos\lambda x I = \omega(\lambda, x) + \int_0^x L(x, t)\,\omega(\lambda, t)dt = \tilde\omega(\lambda, x) + \int_0^x \tilde\omega(\lambda, t)\,\tilde L(x, t)\,dt.$$

Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} L(x, y) + \int_0^y L(x, t)\,\tilde L(y, t)\,dt & (x \geqslant y), \\ \tilde L(y, x) + \int_0^x L(x, t)\,\tilde L(y, t)\,dt & (x \leqslant y). \end{cases} \tag{1.2.41}$$

Доказать, что

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2}[L(x + y, 0) + L(|x - y|, 0)], \\ f(x, y) &= \frac{1}{2}[\tilde L(x + y, 0) + \tilde L(|x - y|, 0)]. \end{aligned}\right\} \tag{1.2.42}$$

Указание. Рассматриваем сначала случай непрерывно дифференцируемых $q(x)$ и, используя аналоги уравнения (1.2.30), доказываем, что $f''_{xx}(x, y) = f''_{yy}(x, y)$ при $x \neq y$. Отсюда следует справедливость первого из равенств (1.2.42) при $0 < y < x$ и второго при $0 < x < y$. Сравнение их при $x = y$ приводит к тождеству $L(x, 0) = \tilde{L}(x, 0)$, из которого видно, что доказываемые формулы верны при всех неотрицательных значениях x, y. В общем случае можно аппроксимировать $q(x)$ непрерывно дифференцируемыми функциями $q_\delta(x) = \delta^{-1} \int_x^{x+\delta} q(t)dt$.

8. Доказать, что единственным решением операторного уравнения

$$Bu'_x(x, y) + u'_y(x, y) B = 0 \qquad (0 \leqslant y \leqslant x < \infty)$$

при гладких начальных данных $u(x, 0) = f(x)$ является операторнозначная функция

$$u(x, y) = \frac{1}{2}[f(x+y) + f(|x-y|) + B\{f(x+y) - f(|x-y|)\} B]. \qquad (1.2.43)$$

9. Наряду с введенными в задаче 6 операторнозначными функциями $\omega(\lambda, x; P)$, $\omega_0(\lambda, x; P)$ рассмотрим операторнозначные функции $\tilde{\omega}(\lambda, x; P)$, $\tilde{\omega}_0(\lambda, x; P)$, являющиеся решениями уравнений

$$-\tilde{\omega}'_x B + \tilde{\omega}\Omega(x) = \lambda\tilde{\omega}, \qquad -\tilde{\omega}'_{0x} B = \lambda\tilde{\omega}_0$$

при начальных данных $\tilde{\omega}(\lambda, 0; P) = \tilde{\omega}_0(\lambda, 0; P) = P$ (заметим, что $\tilde{\omega}_0(\lambda, x; P) = P\cos\lambda x + BP\sin\lambda x$). Для них справедлива формула, аналогичная формуле (1.2.39):

$$\tilde{\omega}_0(\lambda, x; P) = \tilde{\omega}(\lambda, x; P) + \int_0^x \tilde{\omega}(\lambda, t; P)\tilde{L}_P(x, t)\,dt. \qquad (1.2.44)$$

Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} L_P(x, y) + \int_0^y L_P(x, t)\tilde{L}_P(y, t)\,dt & (x \geqslant y), \\ \tilde{L}_P(y, x) + \int_0^x L_P(x, t)\tilde{L}_P(y, t)\,dt & (x \leqslant y). \end{cases} \qquad (1.2.45)$$

Доказать, что при всех неотрицательных значениях x, y справедливы равенства

$$f(x, y) = \frac{1}{2}[L_P(x+y, 0) + L_P(|x-y|, 0) + B\{L_P(x+y, 0) - L_P(|x-y|, 0)\} B] =$$

$$= \frac{1}{2}[\tilde{L}_P(x+y, 0) + \tilde{L}_P(|x-y|, 0) + B\{\tilde{L}_P(x+y, 0) - \tilde{L}_P(|x-y|, 0)\} B], \qquad (1.2.46)$$

из которых следует, что

$$L_P(x, 0) + BL_P(x, 0)B = \tilde{L}_P(x, 0) + B\tilde{L}_P(x, 0)B. \qquad (1.2.47)$$

§ 3. Краевая задача Штурма — Лиувилля на конечном интервале

Рассмотрим краевую задачу, порождаемую на интервале $(0, \pi)$ уравнением Штурма — Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \tag{1.3.1}$$

и двумя ($i = 1, 2$) граничными условиями

$$\Gamma_i(y) = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(\pi) + a_{i4}y'(\pi) = 0, \tag{1.3.2}$$

где $q(x)$ — суммируемая комплекснозначная функция, a_{ik} — произвольные комплексные числа.

Значения параметра $\mu = \lambda^2$, при которых эта краевая задача имеет ненулевые решения, называются собственными значениями, а соответствующие решения — собственными функциями. В дальнейшем фундаментальную систему решений уравнения (1.3.1), определяемую начальными данными $c(\lambda, 0) = s'(\lambda, 0) = 1$, $c'(\lambda, 0) = s(\lambda, 0) = 0$, будем обозначать через $c(\lambda, x)$, $s(\lambda, x)$ (таким образом, $c(\lambda, x) = \omega(\lambda, x, 0)$, $s(\lambda, x) = \omega(\lambda, x; \infty)$ в обозначениях предыдущего параграфа). Так как общее решение $z(\lambda, x)$ уравнения (1.3.1) является линейной комбинацией функций $c(\lambda, x)$, $s(\lambda, x)$: $z(\lambda, x) = A_1c(\lambda, x) + A_2s(\lambda, x)$, то

$$\Gamma_i(z) = A_1[a_{i1} + a_{i3}c(\lambda, \pi) + a_{i4}c'(\lambda, \pi)] + \\ + A_2[a_{i2} + a_{i3}s(\lambda, \pi) + a_{i4}s'(\lambda, \pi)], \tag{1.3.3}$$

откуда следует, что краевая задача (1.3.1), (1.3.2) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$A_1[a_{11} + a_{13}c(\lambda, \pi) + a_{14}c'(\lambda, \pi)] + \\ + A_2[a_{12} + a_{13}s(\lambda, \pi) + a_{14}s'(\lambda, \pi)] = 0,$$
$$A_1[a_{21} + a_{23}c(\lambda, \pi) + a_{24}c'(\lambda, \pi)] + \\ + A_2[a_{22} + a_{23}s(\lambda, \pi) + a_{24}s'(\lambda, \pi)] = 0$$

относительно коэффициентов A_1, A_2 имеет ненулевое решение. Поэтому собственные значения рассматриваемой задачи совпадают с квадратами корней ее характеристической функции

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{13}c(\lambda, \pi) + a_{14}c'(\lambda, \pi) & a_{12} + a_{13}s(\lambda, \pi) + a_{14}s'(\lambda, \pi) \\ a_{21} + a_{23}c(\lambda, \pi) + a_{24}c'(\lambda, \pi) & a_{22} + a_{23}s(\lambda, \pi) + a_{24}s'(\lambda, \pi) \end{vmatrix}. \tag{1.3.4}$$

Раскрывая этот определитель и замечая, что вронскиан $W(c, s) = c(\lambda, x)s'(\lambda, x) - c'(\lambda, x)s(\lambda, x)$ тождественно равен единице, находим

$$\chi(\lambda) = \mathcal{J}_{12} + \mathcal{J}_{34} + \mathcal{J}_{13}s(\lambda, \pi) + \mathcal{J}_{14}s'(\lambda, \pi) + \mathcal{J}_{32}c(\lambda, \pi) + \mathcal{J}_{42}c'(\lambda, \pi), \tag{1.3.4'}$$

где $\mathfrak{I}_{\alpha\beta} = a_{1\alpha}a_{2\beta} - a_{2\alpha}a_{1\beta}$ — определитель, составленный из α- и β-го, столбцов матрицы коэффициентов граничных условий

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\chi_{ik} = \chi_{ik}(\lambda)$ элементы определителя (1.3.4) и построим такие решения уравнения (1.3.1):

$$\omega_i(\lambda, x) = \chi_{i2}c(\lambda, x) - \chi_{i1}s(\lambda, x). \tag{1.3.5}$$

Из формулы (1.3.3) следует, что тождественно относительно λ

$$\Gamma_1(\omega_1) = \Gamma_2(\omega_2) = 0,$$

$$\Gamma_1(\omega_2) = -\Gamma_2(\omega_1) = \chi_{11}(\lambda)\chi_{22}(\lambda) - \chi_{12}(\lambda)\chi_{21}(\lambda) = \chi(\lambda).$$

Собственное значение μ_n краевой задачи (1.3.1), (1.3.2) называется p-кратным, если μ_n является корнем кратности p функции $\chi(\sqrt{\mu})$. Так как

$$\frac{\partial^k}{\partial\mu^k}\Gamma_i(\omega_j) = \Gamma_i\left(\frac{\partial^k}{\partial\mu^k}\omega_j\right) \quad (\mu = \lambda^2),$$

то функции

$$\omega_{i,k}(x) = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\mu^k}\omega_i(\lambda, x) \quad (\mu = \lambda^2) \tag{1.3.6}$$

при $\lambda^2 = \mu_n$ удовлетворяют обоим граничным условиям (1.3.2) если $0 \leqslant k \leqslant p - 1$. Функции $\omega_{i,0}(x), \ldots, \omega_{i,p-1}(x)$ $(i = 1, 2)$ образуют цепочку, в которой первая отличная от нуля функция $\omega_{i,l_i}(x)$ является собственной, а следующие — присоединенными к ней функциями. Дифференцируя уравнение (1.3.1) k раз по $\mu = \lambda^2$, заключаем, что собственная и присоединенные функции цепочки удовлетворяют уравнениям

$$-\omega''_{i,k}(x) + q(x)\omega_{i,k}(x) = \mu_n\omega_{i,k}(x) - \omega_{i,k-1}(x)$$

и граничным условиям (1.3.2). Во избежание недоразумений подчеркиваем, что обе цепочки, $\omega_{1,0}(x), \ldots, \omega_{1,p-1}(x)$ и $\omega_{2,0}(x) \ldots$ $\ldots, \omega_{2,p-1}(x)$, могут состоять из одних и тех же функций. Для нас существенно лишь, что кроме собственных и присоединенных функций в состав цепочек могут входить только функции, тождественно равные нулю.

Центральное место в спектральной теории краевых задач (1.3.1), (1.3.2) занимает теорема о полноте в пространстве $L_2(0, \pi)$ системы собственных и присоединенных функций, соответствующих всевозможным собственным значениям. Как известно, для полноты какой-нибудь системы векторов гильбертова пространства необходимо и достаточно, чтобы любой вектор, ортогональный всем векторам этой системы, был равен нулю. Пусть M — спектр, т. е.

множество всех собственных значений μ_n краевой задачи (1.3.1) (1.3.2), p_n — их кратности. Согласно предыдущему функции

$$\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\mu^k}\omega_i(\sqrt{\mu}, x)\Big|_{\mu=\mu_n} \quad (0\leqslant k\leqslant p_n-1, \quad \mu_n\in M, \quad i=1,\ 2)$$

либо тождественно равны нулю, либо являются собственными или присоединенными функциями этой краевой задачи. Следовательно, для доказательства полноты системы собственных и присоединенных функций достаточно показать, что если $f(x)\in L_2(0, \pi)$ и

$$\int_0^\pi \frac{\partial^k}{\partial\mu^k}\omega_i(\sqrt{\mu}, x)f(x)\,dx\Big|_{\mu=\mu_n}=0 \tag{1.3.7}$$

при всех $\mu_n\in M$, $k=0, 1, \ldots, p_n-1$, $i=1, 2$, то $f(x)=0$ почти всюду. Характеристическая функция $\chi(\sqrt{\mu})$ и функции

$$\omega_i(\sqrt{\mu}, f)=\int_0^\pi \omega_i(\sqrt{\mu}, x)f(x)\,dx \quad (i=1,\ 2) \tag{1.3.7'}$$

являются целыми функциями μ. Если выполняются равенства (1.3.7), то каждый p_n-кратный корень μ_n функции $\chi(\sqrt{\mu})$ будет также корнем не меньшей кратности обеих функций $\omega_i(\sqrt{\mu}, f)$ $(i=1, 2)$. Поэтому равенства (1.3.7) выполняются тогда и только тогда, когда функции $\omega_i(\sqrt{\mu}, f)\ [\chi(\sqrt{\mu})]^{-1}$ $(i=1, 2)$, а вместе с ними и функции $\omega_i(\lambda, f)\ [\chi(\lambda)]^{-1}$ целые. Следовательно, для доказательства полноты системы собственных и присоединенных функций краевой задачи (1.3.1), (1.3.2) достаточно показать, что функции $\omega_i(\lambda, f)\ [\chi(\lambda)]^{-1}$ $(i=1, 2)$ могут быть целыми только тогда, когда $f(x)=0$ почти всюду.

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на граничные условия (1.3.2). Заметим теперь, что при $q(x)\equiv 0$ характеристическая функция $\chi_0(\lambda)$ краевой задачи (1.3.1), (1.3.2) имеет вид

$$\chi_0(\lambda)=(\mathcal{J}_{12}+\mathcal{J}_{34})+\mathcal{J}_{13}\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}+(\mathcal{J}_{14}+\mathcal{J}_{32})\cos\lambda\pi-\mathcal{J}_{42}\lambda\sin\lambda\pi$$

и в этом простейшем случае вопрос о полноте системы собственных и присоединенных функций имеет смысл ставить только для тех граничных условий, при которых функция $\chi_0(\lambda)$ отлична от константы. Это, очевидно, может выполняться лишь в следующих трех случаях:

$$1)\ \mathcal{J}_{42}\neq 0,\quad 2)\ \mathcal{J}_{42}=0,\ \mathcal{J}_{14}+\mathcal{J}_{32}\neq 0;\quad 3)\ \mathcal{J}_{42}=\mathcal{J}_{14}+\mathcal{J}_{32}=0,\ \mathcal{J}_{13}\neq 0. \tag{1.3.8}$$

Граничные условия, удовлетворяющие одному из этих соотношений, называются невырожденными. Докажем, что система собственных и присоединенных функций произвольной краевой задачи (1.3.1), (1.3.2) с невырожденными граничными условиями полна в пространстве $L_2(0, \pi)$.

Лемма 1.3.1. *Для всех функций* $f(x) \in L_1(0, \pi)$ *справедливы равенства*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda\pi|} \int_0^\pi f(x)\cos\lambda x dx = \lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda\pi|} \int_0^\pi f(x)\sin\lambda x dx = 0.$$

Доказательство. Множество $C^1(0, \pi)$ непрерывно дифференцируемых на сегменте $[0, \pi]$ функций плотно в пространстве $L_1(0, \pi)$, т. е. для любой функции $f(x) \in L_1(0, \pi)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $g_\varepsilon(x) \in C^1(0, \pi)$, что

$$\int_0^\pi |f(x) - g_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Так как

$$\int_0^\pi f(x)\cos\lambda x dx = \int_0^\pi \{f(x) - g_\varepsilon(x)\}\cos\lambda x dx + \int_0^\pi g_\varepsilon(x)\cos\lambda x dx =$$

$$= \int_0^\pi \{f(x) - g_\varepsilon(x)\}\cos\lambda x dx + \lambda^{-1}\left\{g_\varepsilon(\pi)\sin\lambda\pi - \int_0^\pi g_\varepsilon'(x)\sin\lambda x dx\right\}$$

и при всех $x \in [0, \pi]$ $|\cos\lambda x| \leqslant e^{|\mathrm{Im}\,\lambda\pi|}$, $|\sin\lambda x| \leqslant e^{|\mathrm{Im}\,\lambda\pi|}$, то

$$\left|\int_0^\pi f(x)\cos\lambda x dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{|\mathrm{Im}\,\lambda\pi|}\left[\int_0^\pi |f(x) - g_\varepsilon(x)|\,dx + |\lambda|^{-1}\left\{|g_\varepsilon(\pi)| + \int_0^\pi |g_\varepsilon(x)|\,dx\right\}\right].$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}}\, e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda\pi|}\left|\int_0^\pi f(x)\cos\lambda x dx\right| \leqslant \int_0^\pi |f(x) - g_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon,$$

откуда ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ и следует лемма.

Обозначим через $c_\pi(\lambda, x)$, $s_\pi(\lambda, x)$ решения уравнения (1.3.1) при начальных данных $c_\pi(\lambda, \pi) = s_\pi'(\lambda, \pi) = 1$, $c_\pi'(\lambda, \pi) = s_\pi(\lambda, \pi) = 0$.

Следствие 1. *Для всех функций* $f(x) \in L_1(0, \pi)$ *справедливы равенства*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda\pi|} \int_0^\pi f(x)\, c(\lambda, x) = \lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda\pi|} \int_0^\pi f(x)\, c_\pi(\lambda, x)\,dx = 0,$$

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda\pi|} \int_0^\pi f(x)\,\lambda s(\lambda, x)\,dx = \lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda\pi|} \int_0^\pi f(x)\,\lambda s_\pi(\lambda, x)\,dx = 0.$$

Действительно, согласно формуле (1.2.11′)

$$\lambda s_\pi(\lambda, x) = \sin\lambda(x-\pi) + \int_\pi^x K_\pi(x, t;\ \infty)\sin\lambda(t-\pi)\,dt$$

и

$$\int_0^\pi f(x)\,\lambda s_\pi(\lambda, x)\,dx =$$

$$= \int_0^\pi f(x)\left\{\sin\lambda(x-\pi) + \int_\pi^x K_\pi(x, t;\ \infty)\sin\lambda(t-\pi)\,dt\right\}dx =$$

$$= \int_0^\pi \sin\lambda t\left\{-f(\pi-t) + \int_0^{\pi-t} f(x)\,K_\pi(x, \pi-t;\ \infty)\,dx\right\}dt.$$

Функция

$$\hat f(t) = -f(\pi-t) + \int_0^{\pi-t} f(x)\,K_\pi(x, \pi-t;\ \infty)\,dx,$$

очевидно, принадлежит пространству $L_1(0, \pi)$, и последнее из сформулированных равенств является прямым следствием леммы 1.3.1. Три других равенства доказываются совершенно аналогично с помощью формул (1.2.10), (1.2.11), (1.2.10′).

Следствие 2. *Для всех функций* $f(x) \in L_1(0, \pi)$ *справедливы равенства*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im}\lambda\pi|}\,\omega_i(\lambda, f) = 0 \quad (i = 1,\ 2).$$

Действительно, из формулы (1.3.6) и определения функций $\chi_{i1}(\lambda)$, $\chi_{i2}(\lambda)$ следует, что

$$\begin{aligned}\omega_i(\lambda, x) &= [a_{i2} + a_{i3}s(\lambda, \pi) + a_{i4}s'(\lambda, \pi)]\,c(\lambda, x) -\\ &- [a_{i1} + a_{i3}c(\lambda, \pi) + a_{i4}c'(\lambda, \pi)]\,s(\lambda, x) =\\ &= a_{i2}c(\lambda, x) - a_{i1}s(\lambda, x) - a_{i3}s_\pi(\lambda, x) + a_{i4}c_\pi(\lambda, x),\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

где функции

$$c_\pi(\lambda, x) = s'(\lambda, \pi)\,c(\lambda, x) - c'(\lambda, \pi)\,s(\lambda, x),$$

$$s_\pi(\lambda, x) = c(\lambda, \pi)\,s(\lambda, x) - s(\lambda, \pi)\,c(\lambda, x)$$

удовлетворяют уравнению (1.3.1) и начальным условиям $c_\pi(\lambda, \pi) = s'_\pi(\lambda, \pi) = 1$, $c'_\pi(\lambda, \pi) = s_\pi(\lambda, \pi) = 0$. Таким образом, сформулированный результат непосредственно вытекает из предыдущего следствия.

Лемма 1.3.2. *Если граничные условия в краевой задаче (1.3.1), (1.3.2) не вырождены, то существуют константа* $C > 0$ *и такая* *последовательность неограниченно расширяющихся контуров K_n, на которых выполняются неравенства*

$$|\chi(\lambda)| > |\lambda|^{-1} C \exp|\operatorname{Im}\lambda\pi|. \tag{1.3.10}$$

Доказательство. Используя представления (1.2.10) (1.2.11) и замечая, что ядра $K(x, t; 0)$, $K(x, t; \infty)$ всегда имеют одну суммируемую производную, находим

$$\left.\begin{aligned}
c(\lambda, \pi) &= \cos\lambda\pi + \int_0^\pi K(\pi, t;\ 0)\cos\lambda t dt = \\
&= \cos\lambda\pi + K(\pi, \pi;\ 0)\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda} - \int_0^\pi K_t'(\pi, t;\ 0)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\,dt, \\
c'(\lambda, \pi) &= -\lambda\sin\lambda\pi + K(\pi, \pi;\ 0)\cos\lambda\pi + \\
&+ \int_0^\pi K_x'(\pi, t; 0)\cos\lambda t dt, \\
s(\lambda, \pi) &= \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda} + \int_0^\pi K(\pi, t;\ \infty)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\,dt, \\
s'(\lambda, \pi) &= \cos\lambda\pi + K(\pi, \pi;\ \infty)\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda} + \int_0^\pi K_x'(\pi, t;\ \infty)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\,dt,
\end{aligned}\right\} \tag{1.3.11}$$

причем

$$K(\pi, \pi;\ 0) = K(\pi, \pi;\ \infty) = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt.$$

Из этих равенств, формулы (1.3.4′) и леммы 1.3.1 следует, что в зависимости от того, какой из трех случаев (1.3.8) рассматривается, характеристическая функция представима в виде

1) $\chi(\lambda) = \mathfrak{I}_{42}\{-\lambda\sin\lambda\pi\} + \lambda e^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|}\varepsilon_1(\lambda)$,

2) $\chi(\lambda) = (\mathfrak{I}_{14} + \mathfrak{I}_{32})[\cos\lambda\pi + L_2] + e^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|}\varepsilon_2(\lambda)$,

3) $\chi(\lambda) = \mathfrak{I}_{13}[\lambda^{-1}\sin\lambda\pi + L_3] + \lambda^{-1}e^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|}\varepsilon_3(\lambda)$,

где $L_2 = (\mathfrak{I}_{12} + \mathfrak{I}_{34})(\mathfrak{I}_{14} + \mathfrak{I}_{32})^{-1}$, $L_3 = (\mathfrak{I}_{12} + \mathfrak{I}_{34})\mathfrak{I}_{13}^{-1}$, $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}\varepsilon_i(\lambda) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Функции $\chi^{(0)}(\lambda)$,

1) $\chi^{(0)}(\lambda) = -\lambda\sin\lambda\pi$; 2) $\chi^{(0)}(\lambda) = \cos\lambda\pi + L_2$;

3) $\chi^{(0)}(\lambda) = \lambda^{-1}\sin\lambda\pi + L_3$,

называемые главными частями соответствующей характеристической функции, в существенном определяют ее поведение при $|\lambda| \to \infty$.

Назовем последовательности неограниченно расширяющихся контуров $K_n(1)$, $K_n(2)$, $K_n(3)$ допустимыми, если при некотором $C > 0$ на них выполняются такие неравенства:

$$|\sin z\pi| \geqslant C \exp|\operatorname{Im} z\pi|, \qquad z \in K_n(1),$$
$$|\cos z\pi + L_2| \geqslant C \exp|\operatorname{Im} z\pi|, \qquad z \in K_n(2),$$
$$|\sin z\pi + zL_3| \geqslant C \exp|\operatorname{Im} z\pi|, \qquad z \in K_n(3).$$

Очевидно, на допустимой последовательности контуров характеристическая функция соответствующей краевой задачи начиная с некоторого n удовлетворяет неравенству 1) $|\chi(z)| \geqslant C_1 |z| \times \exp|\operatorname{Im} z\pi|$ или 2) $|\chi(z)| \geqslant C_1 \exp|\operatorname{Im} z\pi|$, или 3) $|\chi(z)| \geqslant C_1 |z|^{-1} \times \exp|\operatorname{Im} z\pi|$ и для доказательства леммы достаточно установить существование допустимых последовательностей контуров.

Обозначим через Z_ρ (ρ — сколь угодно малое положительное число) область, получающуюся после удаления из комплексной плоскости кружков радиуса ρ с центрами в нулях функции $\sin z\pi$, т. е. в точках $0, \ \pm 1, \pm 2, \ldots$ Покажем, что

$$\sup_{z \in Z_\rho} |\sin z\pi|^{-1} \exp|\operatorname{Im} z\pi| = C_\rho < \infty.$$

Так как функция $|\sin z\pi| \exp|\operatorname{Im} z\pi|$ четная и периодическая с периодом 2, то

$$C_\rho = \sup_{z \in Z_\rho} |\sin z\pi|^{-1} \exp|\operatorname{Im} z\pi| = \sup_{z \in Z_\rho \cap \Pi^+} |\sin z\pi| \exp|\operatorname{Im} z\pi| =$$
$$= \sup_{z \in Z_\rho \cap \Pi^+} |(\sin z\pi)^{-1} e^{-iz\pi}|,$$

где через Π^+ обозначена полуполоса $0 < \operatorname{Re} z < 2$, $\operatorname{Im} z > 0$.

Функция $(\sin z\pi)^{-1} e^{-iz\pi}$ голоморфна в области $Z_\rho \cap \Pi^+$ и стремится к $(-2i)^{-1}$ при $\operatorname{Im} z \to +\infty$, а на границе этой области она непрерывна. Отсюда согласно теореме о максимуме модуля голоморфной функции следует, что верхняя граница ее модуля конечна. Поэтому $C_\rho < \infty$ и в области Z_ρ справедливо неравенство $|\sin z\pi| \geqslant (C_\rho)^{-1} \exp|\operatorname{Im} z\pi|$, показывающее, что в первом случае в качестве допустимой последовательности $K_n(1)$ можно взять любую расширяющуюся последовательность контуров, лежащих в области Z_ρ.

Совершенно аналогично доказывается, что во втором случае в качестве допустимой последовательности $K_n(2)$ можно взять любую последовательность расширяющихся контуров, расстояния от которых до нулей функции $\cos z\pi + L_2$ (т. е. до множества точек $\pm\theta_2, \pm(2+\theta_2), \pm(2-\theta_2), \ldots; \ \theta_2 = \pi^{-1} \arccos(-L_2)$) ограничены снизу каким-нибудь положительным числом ρ.

В третьем случае при $L_3 = 0$ допустимыми являются, очевидно, те же последовательности, что и в первом. Пусть теперь $L_3 = |L_3| e^{i\gamma\pi} \neq 0$, где $-1 \leqslant \gamma < 1$. Тогда при всех z

$$|\sin z\pi + L_3 z| \geqslant \frac{1}{2} \exp|\operatorname{Im} z\pi| \{1 - (2|zL_3| + 1)\exp(-|\operatorname{Im} z\pi|)\},$$

при $\operatorname{Im} z = 0$

$$|\sin z\pi + L_3 z| \geqslant |zL_3| - 1$$

и при $\beta(z) = \operatorname{sign} \operatorname{Im} z = \pm 1$ на полупрямых $\operatorname{Re} z = \alpha_n = 2n + \frac{n}{2|n|} - \gamma\beta(z)$,

$$|\sin z\pi + L_3 z| = \frac{1}{2} |e^{i\alpha_n\pi} e^{-\operatorname{Im} z\pi} - e^{-i\alpha_n\pi} e^{\operatorname{Im} z\pi} + 2iz|L_3| e^{i\gamma\pi}| =$$

$$= \frac{1}{2} |-ie^{i(\alpha_n-\gamma)\pi - \operatorname{Im} z\pi} + ie^{-i(\alpha_n+\gamma)\pi + \operatorname{Im} z\pi} + 2z|L_3|| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{e^{-i\gamma(1+\beta(z))\pi - \operatorname{Im} z\pi} + e^{-i\gamma(1-\beta(z))\pi + \operatorname{Im} z\pi} + 2\frac{n}{|n|} zL_3\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \{e^{|\operatorname{Im} z\pi|} + (4|n| - 1)|L_3| - e^{-|\operatorname{Im} z\pi|}\}.$$

Из этих неравенств следует, что на контурах $K_n(3)$, ограничивающих объединение прямоугольников $|\operatorname{Re} z + \gamma| \leqslant 2n + \frac{1}{2}$, $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2n$, $|\operatorname{Re} z - \gamma| \leqslant 2n + \frac{1}{2}$, $0 \geqslant \operatorname{Im} z \geqslant -2n$, начиная с некоторого значения n выполняется неравенство $|\sin z\pi + zL_3| \geqslant \frac{1}{3} \exp|\operatorname{Im} z\pi|$.

Итак, во всех трех случаях допустимые последовательности контуров существуют, и лемма доказана.

Построим в заключение конкретные последовательности допустимых контуров. Пусть $C(l)$ — контур, ограничивающий квадрат $|\operatorname{Re} z| \leqslant l$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant l$. Согласно предыдущему в первом случае допустимой является последовательность $C\left(n + \frac{1}{2}\right)$; во втором — $C(n)$, если $\theta_2 \neq 0, 1$, $C(2n+1)$, если $\theta_2 = 0$, и $C(2n)$, если $\theta_2 = 1$; в третьем — $C\left(n + \frac{1}{2}\right)$, если $L_3 = 0$, и построенная выше последовательность $K_n(3)$, если $L_3 \neq 0$.

Замечание. Неравенства, полученные в процессе доказательства леммы, показывают, что при $n \to \infty$ оценки

$$\left.\begin{aligned} &1)\ |\chi(z) - \mathfrak{I}_{42}\chi^{(0)}(z)| = o|\chi^{(0)}(z)|, \\ &2)\ |\chi(z) - (\mathfrak{I}_{14} + \mathfrak{I}_{32})\chi^{(0)}(z)| = o|\chi^{(0)}(z)|, \\ &3)\ |\chi(z) - \mathfrak{I}_{13}\chi^{(0)}(z)| = o|\chi^{(0)}(z)| \end{aligned}\right\} \qquad (1.3.10')$$

в первом случае выполняются — на границе области $\Pi_n(1) = \left\{z : |\operatorname{Re} z| < 2n + \frac{1}{2}\right\}$, во втором — на границе области $\Pi_n(2) = \{z : |\operatorname{Re} z| < 2n\}$, если $\theta_2 \neq 0$, и области $\tilde{\Pi}_n(2) = \{z : |\operatorname{Re} s| < < 2n + 1\}$, если $\theta_2 = 0$; в третьем — на границе области $\Pi_n(1)$, если $L_3 = 0$, и на границе области $\Pi_n(3) = \left\{z : |\operatorname{Re} z + \gamma| < 2n + \frac{1}{2},\right.$ $\left.\operatorname{Im} z \geqslant 0\right\} \cap \left\{z : |\operatorname{Re} z - \gamma| < 2n + \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im} z \leqslant 0\right\}$, если $L_3 \neq 0$.

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы настоящего параграфа.

Теорема 1.3.1. *Система собственных и присоединенных функций краевой задачи (1.3.1) (1.3.2) с невырожденными граничными условиями полна в пространстве* $L_2(0, \pi)$.

Доказательство. Выше было показано, что для доказательства этой теоремы достаточно установить, что функции $\omega_i(\lambda, f)\,[\chi(\lambda)]^{-1}$ $(i = 1, 2)$ могут быть целыми лишь в том случае, когда $f(x) = 0$ почти всюду. Пусть $f(x) \in L_2(0, \pi)$ и функции $\omega_i(\lambda, f)\,[\chi(\lambda)]^{-1}$ $(i = 1, 2)$ целые. Согласно лемме 1.3.2 существует константа C и последовательность неограниченно расширяющихся контуров K_n такие, что при $\lambda \in K_n$

$$|\omega_i(\lambda, f)\,[\chi(\lambda)]^{-1}| \leqslant C\,|\lambda|\,|\omega_i(\lambda, f)|\exp(-|\operatorname{Im} \lambda\pi|).$$

Из этой оценки и следствия 2 вытекают равенства

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\lambda \in K_n} |\omega_i(\lambda, f)\,[\chi(\lambda)\lambda]^{-1}| = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

показывающие, что целые функции $\omega_i(\lambda, f)\,[\chi(\lambda)]^{-1}$ при $|\lambda| \to \infty$ растут медленнее первой степени $|\lambda|$, т. е. тождественно равны некоторым константам f_i. Поэтому $\omega_i(\lambda, f) \equiv f_i\,\chi(\lambda)$, откуда, учитывая определение (1.3.6) функций $\omega_i(\lambda, f)$, получаем

$$\chi_{12}(\lambda)\, c(\lambda, f) - \chi_{11}(\lambda)\, s(\lambda, f) \equiv f_1 \chi(\lambda),$$

$$\chi_{22}(\lambda)\, c(\lambda, f) - \chi_{21}(\lambda)\, s(\lambda, f) \equiv f_2 \chi(\lambda),$$

где $c(\lambda, f) = \int\limits_0^\pi f(x)\, c(\lambda, x)\, dx, \quad s(\lambda, f) = \int\limits_0^\pi f(x)\, s(\lambda, x)\, dx$. Следовательно,

$$\{\chi_{11}(\lambda)\,\chi_{22}(\lambda) - \chi_{21}(\lambda)\,\chi_{12}(\lambda)\}\, s(\lambda, f) \equiv \chi(\lambda)\,\{f_2\chi_{12}(\lambda) - f_1\chi_{22}(\lambda)\}$$

и так как $\chi_{11}(\lambda)\,\chi_{22}(\lambda) - \chi_{21}(\lambda)\,\chi_{12}(\lambda) \equiv \chi(\lambda)$, то

$$s(\lambda, f) \equiv f_2\chi_{12}(\lambda) - f_1\chi_{22}(\lambda) \equiv (f_2 a_{12} - f_1 a_{22}) +$$
$$+ (f_2 a_{13} - f_1 a_{23})\, s(\lambda, \pi) + (f_2 a_{14} - f_1 a_{24})\, s'(\lambda, \pi).$$

Рассмотрим это тождество при вещественных значениях $\lambda \to \pm\infty$. Используя следствие 1 и формулы (1.3.11), можем представить его в таком виде:

$$\lambda^{-1}\delta(\lambda) \equiv (f_2 a_{12} - f_1 a_{22}) + (f_2 a_{13} - f_1 a_{23})\lambda^{-1}(\sin\lambda\pi + \varepsilon_1(\lambda)) + $$
$$+ (f_2 a_{14} - f_1 a_{24})(\cos\lambda\pi + \varepsilon_2(\lambda)),$$

где функции $\delta(\lambda)$, $\varepsilon_1(\lambda)$, $\varepsilon_2(\lambda)$ стремятся к нулю при $\lambda \to \pm\infty$. Это, очевидно, возможно тогда и только тогда, когда $f_2 a_{12} - f_1 a_{22} = f_2 a_{13} - f_1 a_{23} = f_2 a_{14} - f_1 a_{24} = 0$. Следовательно, $s(\lambda, f) \equiv 0$, откуда, используя представление решения $s(\lambda, x)$ через оператор преобразования (1.2.11), находим

$$\int_0^\pi f(x)\left\{\frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_0^x K(x, t;\ \infty)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\,dt\right\} =$$
$$= \int_0^\pi \left\{f(t) + \int_t^\pi f(x) K(x, t;\ \infty)\,dx\right\}\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\,dt \equiv 0.$$

Таким образом, синус-преобразование Фурье функции

$$f(t) + \int_t^\pi f(x) K(x, t;\ \infty)\,dx \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi)$$

тождественно равно нулю и в силу теоремы единственности для преобразований Фурье

$$f(t) + \int_t^\pi f(x) K(x, t;\ \infty)\,dx = 0$$

почти всюду на сегменте $[0, \pi]$. Поскольку однородное интегральное уравнение Вольтерра с непрерывным ядром $K(x, t;\ \infty)$ имеет лишь тривиальное решение, то $f(x) = 0$ почти для всех $x \in [0, \pi]$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим подробнее краевые задачи с разделенными граничными условиями

$$\Gamma_1(y) = hy(0) - y'(0) = 0, \quad \Gamma_2(y) = h_1 y(\pi) + y'(\pi) = 0, \tag{1.3.12}$$

которые получаются при

$$a_{11} = h, \quad a_{12} = -1, \quad a_{23} = h_1, \quad a_{24} = 1, \quad a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = 0. \tag{1.3.12$'$}$$

Так как в данном случае $\mathfrak{I}_{42} = 1$, то эти граничные условия не вырождены, а система собственных и присоединенных функций полна в пространстве $L_2(0, \pi)$. Покажем, что на самом деле собственные и присоединенные функции краевой задачи (1.3.1), (1.3.12) образуют базис в пространстве $L_2(0, \pi)$, и найдем вид разложений по этому базису. Подставляя (1.3.12′) в формулы (1.3.4′), (1.3.5), видим, что в рассматриваемом случае

$$\left.\begin{aligned}\chi(\lambda) &= hh_1 s(\lambda, \pi) + hs'(\lambda, \pi) + h_1 c(\lambda, \pi) + c'(\lambda, \pi) = \\ &= (hs'(\lambda, \pi) + c'(\lambda, \pi)) + h_1 (hs(\lambda, \pi) + c(\lambda, \pi)) = \\ &= \omega'(\lambda, \pi;\ h) + h_1 \omega(\lambda, \pi;\ h), \\ \omega_1(\lambda, x) &= -c(\lambda, x) - hs(\lambda, x) = -\omega(\lambda, x;\ h), \\ \omega_2(\lambda, x) &= -h_1 s_\pi(\lambda, x) + c_\pi(\lambda, x) = \omega_\pi(\lambda, x;\ -h_1),\end{aligned}\right\} \quad (1.3.13)$$

где через $\omega(\lambda, x;\ h)$, $\omega_\pi(\lambda, x;\ -h_1)$ обозначены решения уравнения (1.3.1) при начальных данных $\omega(\lambda, 0;\ h) = 1$, $\omega'(\lambda, 0;\ h) = h$; $\omega_\pi(\lambda, \pi;\ -h_1) = 1$, $\omega'_\pi(\lambda, \pi;\ -h_1) = -h_1$. Легко установить, что линейные оболочки собственных и присоединенных функций, получающихся по формулам (1.3.6) из решений $\omega(\lambda, x, h)$ и $\omega_\pi(\lambda, x;\ -h_1)$, совпадают. Поэтому достаточно рассмотреть собственные и присоединенные функции, получающиеся только из одного решения $\omega(\lambda, x;\ h)$.

Лемма 1.3.3. *Краевая задача (1.3.1), (1.3.12) может иметь только конечное число кратных собственных значений, и большие по модулю собственные значения равны* $\left(n + \frac{a_n}{n}\right)^2$, *где* $\sup|a_n| < \infty$.

Доказательство. Так как $\chi(\lambda)$ — четная целая функция, то ее нули (с учетом их кратности) можно расположить в последовательность $\ldots, -\lambda_n, -\lambda_{n-1}, \ldots, -\lambda_1, -\lambda_0;\ \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \ldots$, где $|\lambda_i| \leqslant |\lambda_{i+1}|$ и $\operatorname{Re}\lambda_i \geqslant 0$ при $i \geqslant 0$. Подсчитаем число нулей функции $\chi(\lambda)$, лежащих в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant n + \frac{1}{2}$. На границе этой полосы $|\lambda \sin \lambda\pi| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda| \exp|\operatorname{Im}\lambda\pi|$ и, согласно (1.3.13), (1.3.11), существует такая константа C_2, что при всех значениях λ

$$|\chi(\lambda) + \lambda \sin \lambda\pi| < C_2 \exp|\operatorname{Im}\lambda\pi|. \quad (1.3.14)$$

Из этих неравенств и формулы

$$\chi(\lambda) = -\lambda \sin \lambda\pi + (\chi(\lambda) + \lambda \sin \lambda\pi), \quad (1.3.15)$$

согласно теореме Руше, следует, что в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant n + \frac{1}{2}$ при $n > 2C_2$ лежит одинаковое число нулей функций $\chi(\lambda)$ и $\lambda \sin \lambda\pi$, т. е. $2(n+1)$ нулей. Поэтому при больших n нуль λ_n простой и лежит в полосе $|Re\,\lambda - n| < \frac{1}{2}$. Таким образом, краевая задача (1.3.1), (1.3.12) может иметь лишь конечное число кратных собственных значений.

Легко установить, что, каково бы ни было $\rho < \frac{1}{2}$, при всех значениях λ из полосы $|\operatorname{Re}\lambda - n| < \frac{1}{2}$, лежащих вне кружка

$|\lambda - n| < \rho$, выполняется неравенство $|\sin \lambda\pi| > C\rho \exp |\operatorname{Im} \lambda\pi|$, где C — некоторая положительная константа, не зависящая от n и ρ. Поэтому, если $|n| > 2C^{-1}(C_2 + 1) + \frac{1}{2}$, то в полосе $|\operatorname{Re} \lambda - n| \leqslant \frac{1}{2}$ вне кружка

$$|\lambda - n| \leqslant \frac{2(C_2+1)}{C(2|n|-1)} \tag{1.3.16}$$

выполняется неравенство $|\lambda \sin \lambda\pi| > (C_2 + 1) \exp |\operatorname{Im} \lambda\pi|$, откуда согласно (1.3.14) следует, что $|\lambda \sin \lambda\pi| > |\chi(\lambda) + \lambda \sin \lambda\pi|$ при тех же значениях λ. Из формулы (1.3.15) и этого неравенства, согласно теореме Руше, следует, что корень λ_n лежит в кружке (1.3.16), т. е. $\lambda_n = n + \frac{a_n}{n}$, где $|a_n| < \frac{C_2+1}{C} \frac{2|n|}{2|n|-1}$. Так как собственные значения совпадают с квадратами корней λ_n, то большие по модулю собственные значения равны $\left(n + \frac{a_n}{n}\right)^2$, где $\sup |a_n| < \infty$. Тем самым оба утверждения леммы полностью доказаны.

Замечание. Из доказанной леммы следует, что различные собственные значения краевой задачи (1.3.1), (1.3.12) можно занумеровать так, чтобы они образовали ряд $\mu_{n_0}, \mu_{n_0+1}, \ldots, \mu_n, \ldots$, где $\mu_n = \left(n + \frac{a_n}{n}\right)^2$, $\sup |a_n| < \infty$, $n_0 = \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} (p_k - 1)$ и p_k — кратность собственного значения μ_k.

Функцию $\frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \mu^k} \omega(\sqrt{\mu}, x; h)$, рассматриваемую как элемент пространства $L_2(0, \pi)$, обозначим через $\omega_k(\mu)$ (здесь μ — не обязательно собственное значение). Введем в пространстве $L_2(0, \pi)$ псевдоскалярное произведение $\langle f, g \rangle$, положив $\langle f, g \rangle = \int\limits_0^{\pi} f(x) g(x)\, dx$, и вычислим $\langle \omega_k(\mu), \omega_r(\nu) \rangle$. Из уравнений, которым удовлетворяют функции $\omega(\sqrt{\mu}, x; h)$, следует равенство

$$\omega''(\sqrt{\mu}, x; h)\, \omega(\sqrt{\nu}, x; h) - \omega(\sqrt{\mu}, x; h)\, \omega''(\sqrt{\nu}, x; h) =$$
$$= (\nu - \mu)\, \omega(\sqrt{\mu}, x; h)\, \omega(\sqrt{\nu}, x; h);$$

интегрируя его, получаем

$$(\nu - \mu) \langle \omega_0(\mu), \omega_0(\nu) \rangle =$$
$$= \{\omega'(\sqrt{\mu}, x; h)\, \omega(\sqrt{\nu}, x, h) - \omega(\sqrt{\mu}, x; h)\, \omega'(\sqrt{\nu}, x; h)\}\Big|_0^{\pi} =$$
$$= \omega'(\sqrt{\mu}, \pi; h)\, \omega(\sqrt{\nu}, \pi; h) - \omega(\sqrt{\mu}, \pi; h)\, \omega'(\sqrt{\nu}, \pi; h).$$

Вспоминая определение характеристической функции $\chi(\sqrt{\mu})$, можно преобразовать это равенство к такому виду:

$$(\nu-\mu)\langle\omega_0(\mu),\ \omega_0(\nu)\rangle=\chi(\sqrt{\mu})\,\omega(\sqrt{\nu},\pi;\ h)-\chi(\sqrt{\nu})\,\omega(\sqrt{\mu},\pi;\ h). \tag{1.3.17}$$

Лемма 1.3.4. *Если μ_n — собственное значение краевой задачи (1.3.1), (1.3.12) кратности p_n, то*

$$\langle\omega_k(\mu_n),\ \omega_r(\mu_n)\rangle=a_{k+r}\qquad(0\leqslant k\leqslant p_n-1;\quad 0\leqslant r\leqslant p_n-1),$$

причем $a_{k+r}=0$, если $k+r<p_n-1$ и $a_{p_n-1}\neq 0$.

Если μ_m — другое собственное значение этой же краевой задачи кратности p_m, то

$$\langle\omega_k(\mu_n),\ \omega_s(\mu_m)\rangle=0\qquad(0\leqslant k\leqslant p_n-1,\quad 0\leqslant s\leqslant p_m-1).$$

Доказательство. По условию μ_n является корнем функции $\chi(\sqrt{\mu})$ кратности p_n. Поэтому, полагая в формуле (1.3.17) $\mu=\mu_n$, получаем

$$(\nu-\mu_n)\langle\omega_0(\mu_n),\ \omega_0(\nu)\rangle=-\chi(\sqrt{\nu})\,\omega(\sqrt{\mu_n},\pi;\ h),$$

причем $\omega(\sqrt{\mu_n},\pi;\ h)\neq 0$, так как функции $\chi(\sqrt{\lambda})=\omega'(\sqrt{\lambda},\pi;\ h)+h_1\omega(\sqrt{\lambda},\pi;\ h)$ и $\omega(\sqrt{\lambda},\pi;\ h)$ одновременно не могут обратиться в нуль. Следовательно, разложение правой части этого равенства в ряд по степеням $\nu-\mu_n$ имеет такой вид:

$$-\chi(\sqrt{\nu})\,\omega(\sqrt{\mu_n},\pi;\ h)=(\nu-\mu_n)^{p_n}(c_0+(\nu-\mu_n)c_1+\cdots),$$

$$\langle\omega_0(\mu_n),\ \omega_0(\nu)\rangle=(\nu-\mu_n)^{p_n-1}(c_0+(\nu-\mu_n)c_1+\cdots),$$

где $c_0\neq 0$. Дифференцируя k раз последнее равенство по ν и вспоминая определение функций $\omega_k(\mu_n)$, получаем

$$\langle\omega_0(\mu_n),\ \omega_k(\mu_n)\rangle=0\qquad(0\leqslant k<p_n-1), \tag{1.3.18}$$

$$\langle\omega_0(\mu_n),\ \omega_{p_n-1}(\mu_n)\rangle=(-1)^{p_n-1}c_0\neq 0. \tag{1.3.19}$$

Применим теперь к обеим частям формулы (1.3.17) операцию $\dfrac{(-1)^{k+r+1}}{k!\,(r+1)!}\dfrac{\partial^{k+r+1}}{\partial\mu^k\partial\nu^{r+1}}$ $(0\leqslant k\leqslant p_n-1;\ 0\leqslant r+1\leqslant p_n-1)$ и положим $\mu=\nu=\mu_n$. В результате получим

$$\langle\omega_k(\mu_n),\ \omega_r(\mu_n)\rangle-\langle\omega_{k-1}(\mu_n),\ \omega_{r+1}(\mu_n)\rangle=0.$$

Эта формула показывает, что величина $\langle\omega_k(\mu_n),\ \omega_r(\mu_n)\rangle$ зависит только от суммы индексов $k+r$, а не от каждого из них в отдельности. Следовательно,

$$\langle\omega_k(\mu_n),\ \omega_r(\mu_n)\rangle=a_{r+k},$$

причем согласно (1.3.18), (1.3.19) $a_{r+k}=0$, если $r+k<p_n-1$, и $a_{r+k}\neq 0$ при $r+k=p_n-1$. Разделив обе части формулы (1.3.17)

на $(\nu-\mu)$, применим к полученному равенству операцию $\frac{(-1)^{k+s}}{k!s!}\times$ $\times\frac{\partial^{k+s}}{\partial\mu^k\partial\nu^s}$ и положим $\mu=\mu_n$, $\nu=\mu_m$. Так как μ_n (μ_m) является корнем функции $\chi(\sqrt{z})$ кратности p_n (p_m), то при $0\leqslant k\leqslant p_n-1$, $0\leqslant s\leqslant p_m-1$ правая часть обратится в нуль. Следовательно,
$\langle\omega_k(\mu_n),\ \omega_s(\mu_m)\rangle=0,$
и лемма доказана полностью.

Пусть μ_{n_0}, μ_{n_1}, ..., $\mu_n=\left(n+\frac{a_n}{n}\right)^2$ — различные собственные значения краевой задачи (1.3.1), (1.3.12) и p_n — их кратности. Предположим, что функция $f(x)\in L_2(0,\pi)$ разлагается в ряд по собственным и присоединенным функциям этой задачи, сходящийся в метрике пространства $L_2(0,\pi)$:

$$f(x)=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{n=n_0}^{N}\left\{\sum_{k=0}^{p_n-1}\omega_k(\mu_n,f)\,\omega_k(\mu_n)\right\}. \tag{1.3.20}$$

Тогда коэффициенты $\omega_k(\mu_n,f)$ этого ряда могут быть найдены по формулам, аналогичным классическим формулам Эйлера для коэффициентов Фурье. Действительно, умножив обе части равенства (1.3.20) на $\omega_s(\mu_m)$ и проинтегрировав их по интервалу $(0,\pi)$, получим

$$\langle f,\omega_s(\mu_m)\rangle=\sum_{k=0}^{p_m-1}\omega_k(\mu_m,f)\,\langle\omega_k(\mu_m),\ \omega_s(\mu_m)\rangle, \tag{1.3.21}$$

так как согласно предыдущей лемме $\langle\omega_k(\mu_n),\ \omega_s(\mu_m)\rangle=0$, если $\mu_n\neq\mu_m$. Следовательно, для определения коэффициентов ряда (1.3.20) нужно решить систему линейных уравнений (1.3.21) при каждом μ_m относительно $\omega_k(\mu_m,f)$. Поэтому, если μ_m — простое собственное значение $(p_m=1)$, то

$$\omega_0(\mu_m,f)=\frac{\langle f,\omega_0(\mu_m)\rangle}{\langle\omega_0(\mu_m),\ \omega_0(\mu_m)\rangle}, \tag{1.3.22}$$

если же $p_m\neq1$, то

$$\omega_k(\mu_m,f)=\sum_{j=0}^{p_m-1}b_{k,j}\langle f,\omega_j(\mu_m)\rangle, \tag{1.3.23}$$

где $b_{k,j}$ — элементы матрицы, обратной матрице с элементами $a_{k,s}=\langle\omega_k(\mu_m),\ \omega_s(\mu_m)\rangle$.

Найдем вид матрицы $\|b_{k,j}\|$. Согласно лемме 1.3.4

$$\left.\begin{aligned}&a_{k,s}=\langle\omega_k(\mu_m),\ \omega_s(\mu_m)\rangle=a_{k+s},\\&a_{k+s}=0\quad\text{при}\quad k+s<p_m-1,\quad a_{p_m-1}\neq0.\end{aligned}\right\} \tag{1.3.24}$$

Покажем, что

$$b_{k,j}=\begin{cases} b_{k+j}, & k+j\leqslant p_m-1,\\ 0, & k+j>p_m-1,\end{cases} \tag{1.3.25}$$

где числа $b_0, b_1, \ldots, b_{p_m-1}$ находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &b_{p_m-1}a_{p_m-1}=1,\\ &b_{p_m-1}a_{p_m}+b_{p_m-2}a_{p_m-1}=0,\\ &\vdots\\ &b_{p_m-1}a_{2p_m-2}+\cdots+b_0a_{p_m-1}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.3.26}$$

которая, очевидно, имеет единственное решение. Действительно, при таком определении $b_{k,j}$ элементы матрицы $\|b_{k,j}\|\cdot\|a_{k,j}\|$ имеют вид

$$c_{k,j}=\sum_{i=0}^{p_m-1}b_{k,i}a_{i,j}=\sum_{i=0}^{p_m-1-k}b_{k+i}a_{i+j}=\sum_{s=k}^{p_m-1}b_sa_{s-k+j},$$

т. е. согласно (1.3.24) и (1.3.26)

$$c_{k,j}=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j.\end{cases}$$

Из формул (1.3.23) и (1.3.25) следует, что

$$\sum_{k=0}^{p_m-1}\omega_k(\mu_m,f)\,\omega_k(\mu_m)=\sum_{k=0}^{p_m-1}\omega_k(\mu_m)\sum_{j=0}^{p_m-1-k}b_{k+j}\langle f,\ \omega\ (\mu_m)\rangle=$$
$$\sum_{s=0}^{p_m-1}b_s\sum_{j=0}^{s}\langle f,\omega_j(\mu_m)\rangle\,\omega_{s-j}(\mu_m),$$

откуда, используя определение функций $\omega_k(\mu_m)$, получаем

$$\sum_{k=0}^{p_m-1}\omega_k(\mu_m,f)\,\omega_k(\mu_m)=$$
$$\sum_{s=0}^{p_m-1}\frac{(-1)^sb_s}{s!}\sum_{j=0}^{s}\frac{s!}{j!\,(s-j)!}\,\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\langle f,\omega_0(\lambda)\rangle\,\frac{\partial^{s-j}}{\partial\lambda^{s-j}}\,\omega_0\ (\lambda)\Big|_{\lambda=\mu_m}$$

или

$$\sum_{k=0}^{p_m-1}\omega_k(\mu_m,f)\,\omega_k(\mu_m)=\sum_{s=0}^{p_m-1}r_s(\mu_m)\,\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\,\{\langle f,\omega_0(\lambda)\rangle\,\omega_0(\lambda)\}\Big|_{\lambda=\mu_m},$$

где $r_s(\mu_m)=\dfrac{(-1)^s b_s}{s!}$. Таким образом, если функция $f(x)\in L_2(0,\pi)$

разлагается в ряд по собственным и присоединенным функциям, то это разложение имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=n_0}^{\infty}\left[\sum_{s=0}^{p_n-1} r_s(\mu_n)\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\{\langle f,\omega_0(\lambda)\rangle\,\omega_0(\lambda)\}\Big|_{\lambda=\mu_n}\right], \tag{1.3.27}$$

где коэффициенты $r_s(\mu_n)$ не зависят от функции $f(x)$, причем $p_n=1$ и $r_0(\mu_n)=[\langle\omega_0(\mu_n),\omega_0(\mu_n)\rangle]^{-1}$ начиная с некоторого значения n. Наоборот, если ряд, стоящий в правой части формулы (1.3.27), сходится, то его сумма $\varphi(x)$ удовлетворяет равенствам

$$\langle\varphi,\omega_k(\mu_m)\rangle=\langle f,\omega_k(\mu_m)\rangle \quad (0\leqslant k\leqslant p_m-1)$$

при всех значениях μ_m, т. е.

$$\langle\varphi-f,\omega_k(\mu_m)\rangle=0,$$

откуда, вследствие полноты системы собственных и присоединенных функций, $\varphi(x)=f(x)$. Поэтому, чтобы доказать, что любая функция $f(x)\in L_2(0,\pi)$ разлагается в ряд (1.3.27), нам достаточно убедиться, что этот ряд сходится в метрике пространства $L_2(0,\pi)$. Согласно предыдущему при больших значениях n общий член этого ряда равен

$$\frac{\langle f,\omega_0(\mu_n)\rangle\,\omega_0(\mu_n)}{\langle\omega_0(\mu_n),\omega_0(\mu_n)\rangle},$$

где $\mu_n=\left(n+\frac{a_n}{n}\right)^2$, $\sup|a_n|<\infty$,

$$\omega_0(\mu_n)=\cos\left(n+\frac{a_n}{n}\right)x+\int_0^x K(x,t;h)\cos\left(n+\frac{a_n}{n}\right)t\,dt.$$

Так как

$$\cos\left(n+\frac{a_n}{n}\right)x=\cos nx-\frac{a_nx}{n}\sin nx+\frac{\beta_n(x)}{n^2},$$

причем функции $\beta_n(x)$ непрерывны и последовательность $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\pi}|\beta_n(x)|$ ограничена, то

$$\omega_0(\mu_n)=\cos nx-\frac{a_nx}{n}\sin nx+\frac{\beta_n(x)}{n^2}+$$
$$+\int_0^x K(x,t;h)\left\{\cos nt-\frac{a_nt}{n}\sin nt+\frac{\beta_n(t)}{n^2}\right\}dt$$

или

$$\omega_0(\mu_n)=\cos nx+\frac{K(x,x;h)-a_nx}{n}\sin nx+\gamma_n(x), \tag{1.3.28}$$

где функции

$$\gamma_n(x) = \frac{\beta_n(x)}{n^2} + \frac{1}{n^2}\int_0^x K(x, t; h)\,\beta_n(t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{n}\int_0^x \{K_t'(x, t; h) + a_n K(x, t; h)\}\sin nt\,dt$$

тоже непрерывны. Используя неравенство Бесселя для синус-коэффициентов Фурье, неравенство Буняковского и ограниченность последовательностей $|a_n|$ и $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\pi}|\beta_n(x)|$, находим

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}\sum_{n=N}^{\infty}|\gamma_n(x)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{N}}, \tag{1.3.29}$$

где константа C не зависит от N. Из формул (1.3.28) и (1.3.29) следует, что

$$\langle f, \omega_0(\mu_n)\rangle = \langle f, \cos nx\rangle + \varepsilon_n^{(1)},$$

$$[\langle\omega_0(\mu_n), \omega_0(\mu_n)\rangle]^{-1} = \frac{2}{\pi} + \varepsilon_n^{(2)},$$

причем

$$\sum_{n=N}^{\infty}\{|\varepsilon_n^{(1)}| + |\varepsilon_n^{(2)}|\} < \infty.$$

Поэтому при больших n общий член ряда (1.3.27) равен $\frac{2}{\pi}\langle f, \cos nx\rangle\cos nx + \varepsilon_n(x)$, где функции $\varepsilon_n(x)$ непрерывны,

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}\sum_{n=N}^{\infty}|\varepsilon_n(x)| < \frac{C'}{\sqrt{N}}, \tag{1.3.30}$$

и константа C' не зависит от N. Так как по теореме Фишера—Рисса ряд Фурье $\sum\limits_{n=0}^{\infty}{}' \frac{2}{\pi}\langle f, \cos nx\rangle\cos nx$ всегда сходится в метрике пространства $L_2(0, \pi)$, то и ряд (1.3.27) сходится в метрике этого пространства. Более того, из непрерывности функций $\varepsilon_n(x)$ и неравенства (1.3.30) следует, что разность частных сумм ряда (1.3.27) и ряда Фурье $\sum\limits_{n=0}^{\infty}{}' \frac{2}{\pi}\langle f, \cos nx\rangle\cos nx$ равномерно по x сходится к некоторой непрерывной функции. А так как в среднем квадратичном оба эти ряда сходятся к одной и той же функции $f(x)$, то эта непрерывная функция должна быть тождественно равна нулю. Следовательно, в каждой данной точке x ряд (1.3.27) сходится к $f(x)$ тогда и только тогда, когда в этой точке сходится ряд Фурье по косинусам к $f(x)$, и сходимость к $f(x)$ равномерна в каком-нибудь интервале (α, β), если в этом интервале ряд Фурье по косинусам сходится равномерно.

Суммируя полученные результаты, приходим к следующей теореме.

Теорема 1.3.2. *Система собственных и присоединенных функций краевой задачи (1.3.1), (1.3.12) полна в пространстве $L_2(0, \pi)$ и образует в нем базис: каждая функция $f(x) \in L_2(0, \pi)$ единственным образом разлагается в ряд (1.3.27) по собственным и присоединенным функциям, сходящийся в метрике этого пространства.*

Ряд (1.3.27) является равномерно равносходящимся с рядом Фурье функции $f(x)$ по $\cos nx$, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant\pi} |\sigma_N(x) - s_N(x)| = 0,$$

где $\sigma_N(x)$ и $s_N(x)$ — частные суммы ряда (1.3.27) и ряда Фурье соответственно.

Задачи

1. Пусть $f(x) \in L_1(0, \pi)$ и

$$F(\lambda) = \int_0^\pi f(x)\,\omega_1(\lambda, x;\ h_1)\,\omega_2(\lambda, x;\ h_2)\,dx,$$

где $\omega_1(\lambda, x;\ h_1)$, $\omega_2(\lambda, x;\ h_2)$ — решения двух уравнений Штурма — Лиувилля с потенциалами $q_1(x)$, $q_2(x)$. Доказать, что тождество $F(\lambda) \equiv \mathrm{const}$ выполняется тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ почти всюду.

Указание. Из существования операторов преобразования (1.2.10) следует, что

$$2\omega_1(\lambda, x;\ h_1)\,\omega_2(\lambda, x;\ h_2) = 2\cos^2\lambda x + \int_0^x [K_1(x, t;\ h_1) + K_2(x, t;\ h_2)] \times$$

$$\times\, 2\cos\lambda x\cos\lambda t\,dt + \int_0^x\int_0^x K_1(x, t;\ h_1)\,K_2(x, \xi;\ h_2)\,2\cos\lambda t\cos\lambda\xi\,dt\,d\xi$$

или

$$2\omega_1(\lambda, x;\ h_1)\,\omega_2(\lambda, x;\ h_2) = 1 + \cos 2\lambda x + \int_0^x M(x, t)\cos 2\lambda t\,dt, \tag{1.3.31}$$

где

$$M(x, t) = 2\{K_1(x, 2t - x;\ h_1) + K_2(x, 2t - x;\ h_2) + K_1(x, x - 2t;\ h_1) +$$

$$+ K_2(x, x - 2t;\ h_2)\} + 2\int_0^x \{K_1(x, 2t - u;\ h_1) + K_1(x, 2t + u;\ h_1)\}\,K_2(x, u;\ h_2)\,du$$

функции $K_i(x, y; h_i)$ полагаем равными нулю при $y \notin [0, x]$). Поэтому

$$\pi F(\lambda) = \int_0^\pi f(x)\,dx + \int_0^\pi \left\{ f(x) + \int_x^\pi M(\xi, x) f(\xi)\,d\xi \right\} \cos 2\lambda x dx$$

и, если $F(\lambda) \equiv \text{const}$,

$$\int_0^\pi \left\{ f(x) + \int_x^\pi M(\xi, x) f(\xi)\,d\xi \right\} \cos 2\lambda x dx \equiv \text{const},$$

откуда в силу леммы Римана — Лебега и теоремы единственности для преобразований Фурье следует, что

$$f(x) + \int_x^\pi M(\xi, x) f(\xi)\,d\xi = 0$$

почти всюду. Поскольку однородное уравнение Вольтерра с ограниченным ядром $M(\xi, x)$ имеет лишь тривиальное решение, то $f(x) = 0$ почти всюду на сегменте $[0, \pi]$.

2. Пусть $\{q(x), h, H\}$ — краевая задача $-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$, $y'(0) - hy(0) = 0$, $y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$, и $S\{q(x), h, H\}$ — множество ее собственных значений с учетом их кратности. Доказать следующую теорему единственности Г. Борга: если

$$S\{q_1(x), h_1, H_1\} = S\{q_2(x), h_2, H_2\},$$

$$S\{q_1(x), h_1, \widetilde{H}_1\} = S\{q_2(x), h_2, \widetilde{H}_2\},$$

причем $H_1 \neq \widetilde{H}_1$, то почти всюду $q_1(x) = q_2(x)$ и $h_1 = h_2$, $H_1 = H_2$, $\widetilde{H}_1 = \widetilde{H}_2$.

Указание. Согласно (1.3.13)

$$\chi_i(\lambda, H) = \omega_i'(\lambda, \pi) + H\omega_i(\lambda, \pi), \tag{1.3.32}$$

где $\chi_i(\lambda, H)$ — характеристическая функция краевой задачи $\{q_i(x), h_i, H\}$, а $\omega_i(\lambda, x)$ — решение уравнения

$$\omega_i'' + q_i(x)\,\omega_i = \lambda^2 \omega_i \tag{1.3.33}$$

при начальных данных $\omega_i(\lambda, 0) = 1$, $\omega_i'(\lambda, 0) = h_i$. Так как собственные значения являются квадратами нулей характеристических функций, то из условия задачи следует, что отношения

$$\chi_1(\lambda, H_1)[\chi_2(\lambda, H_2)]^{-1}, \quad \chi_1(\lambda, \widetilde{H}_1)[\chi_2(\lambda, \widetilde{H}_2)]^{-1}$$

являются целыми функциями. Далее, главные части всех рассматриваемых характеристических функций равны — $\lambda \sin \lambda\pi$, и, согласно (1.3.10′), существует последовательность неограниченно расширяющихся контуров K_n таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \chi_1(\lambda, H_1)[\chi_2(\lambda, H_2)]^{-1}\Big|_{\lambda \in K_n} = \lim_{n\to\infty} \chi_1(\lambda, \widetilde{H}_1)[\chi_2(\lambda, \widetilde{H}_2)]^{-1}\Big|_{\lambda \in K_n} = 1.$$

Поэтому

$$\chi_1(\lambda, H_1) \equiv \chi_2(\lambda, H_2), \quad \chi_1(\lambda, \widetilde{H}_1) \equiv \chi_2(\lambda, \widetilde{H}_2), \tag{1.3.34}$$

откуда согласно (1.3.32) находим

$$(H_1 - \widetilde{H}_1)\,\omega_1(\lambda, \pi) = \chi_1(\lambda, H_1) - \chi_1(\lambda, \widetilde{H}_1) = \chi_2(\lambda, H_2) - \chi_2(\lambda, \widetilde{H}_2) =$$
$$= (H_2 - \widetilde{H}_2)\,\omega_2(\lambda, \pi),$$

и так как при $\lambda \to +\infty$ $\omega_i(\lambda, \pi) = \cos\lambda\pi + o(1)$, то

$$H_1 - \widetilde{H}_1 = H_2 - \widetilde{H}_2, \quad \omega_1(\lambda, \pi) = \omega_2(\lambda, \pi). \tag{1.3.35}$$

Умножая первое из уравнений (1.3.33) на $\omega_2(\lambda, x)$, второе — на $\omega_1(\lambda, x)$ и интегрируя разность этих произведений, получаем равенство

$$-\omega_1'(\lambda, \pi)\,\omega_2(\lambda, \pi) + \omega_1(\lambda, \pi)\,\omega_2'(\lambda, \pi) + h_1 - h_2 +$$
$$+ \int_0^\pi [q_1(x) - q_2(x)]\,\omega_1(\lambda, x)\,\omega_2(\lambda, x)\,dx = 0,$$

которое в силу (1.3.32), (1.3.34), (1.3.35) можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$\int_0^\pi [q_1(x) - q_2(x)]\,\omega_1(\lambda, x)\,\omega_2(\lambda, x)\,dx + h_1 - h_2 = (\widetilde{H}_1 - H_1)\,[\omega_1(\lambda, \pi)]^2.$$

Из формулы (1.3.31) и леммы Римана — Лебега следует, что при $\lambda \to +\infty$ левая часть этого равенства стремится к $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi [q_1(x) - q_2(x)]\,dx + h_1 - h_2$, а правая часть равна $(\widetilde{H}_1 - H_1)\,[\cos^2\lambda\pi + o(1)]$, что возможно лишь при $\widetilde{H}_1 = H_1$. Следовательно, $H_1 = \widetilde{H}_1$, $H_2 = \widetilde{H}_2$,

$$\int_0^\pi [q_1(x) - q_2(x)]\,\omega_1(\lambda, x)\,\omega_2(\lambda, x)\,dx = h_2 - h_1 = \mathrm{const}$$

и согласно предыдущей задаче $q_1(x) = q_2(x)$ почти всюду, а $h_1 = h_2$.

3. Доказать аналог теоремы 1.3.1 для краевых задач, порождаемых уравнением Дирака

$$By'(x) + \Omega(x)\,y(x) = \lambda y(x) \quad (0 < x < \pi) \tag{1.3.36}$$

и граничными условиями

$$\Gamma(y) = A_0 y(0) + A_1 y(\pi) = 0,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & r(x) \\ r(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

$p(x)$, $r(x)$ — суммируемые комплекснозначные функции, a_{ik} — комплексные числа.

Указание. Общее решение уравнения (1.3.36) равно $e(\lambda, x)\,C$, где $e(\lambda, x)$ — фундаментальное решение, нормированное условием $e(\lambda, 0) = I$, а C — произвольная постоянная матрица. Поэтому собственные значения рассматриваемой задачи совпадают с корнями характеристической функции $\chi(\lambda) = \mathrm{Det}\,(A_0 + A_1 e(\lambda, \pi))$. Раскрывая этот определитель, находим

$$\chi(\lambda) = \mathfrak{J}_{12} + \mathfrak{J}_{34} + \mathfrak{J}_{32}e_{11} + \mathfrak{J}_{13}e_{12} + \mathfrak{J}_{42}e_{21} + \mathfrak{J}_{14}e_{22}, \tag{1.3.37}$$

где $e_{ik} = e_{ik}(\lambda, \pi)$ — элементы матрицы $e(\lambda, \pi)$ и $\mathfrak{J}_{\alpha\beta} = a_{1\alpha}a_{2\beta} - a_{2\alpha}a_{1\beta}$ (при этом нужно учесть, что $\operatorname{Det} e(\lambda, x) \equiv 1$).

Пусть $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{A}_0$, $\tilde{A}_1$ — матрицы, составленные из алгебраических дополнений элементов матриц $\Gamma = A_0 + A_1 e(\lambda, \pi)$, A_0, A_1 и $\omega(\lambda, x) = e(\lambda, x)\tilde{\Gamma}$. Легко видеть, что

$$\omega(\lambda, x) = e(\lambda, x)\tilde{A}_0 + e_\pi(\lambda, x)\tilde{A}_1, \quad A_0\omega(\lambda, 0) + A_1\omega(\lambda, \pi) = \chi(\lambda) I, \tag{1.3.38}$$

где $e_\pi(\lambda, x) = e(\lambda, x)[e(\lambda, \pi)]^{-1}$. Если λ_n — корень функции $\chi(\lambda)$ кратности p, то матрицы

$$\omega_k(x) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\omega(\lambda, x)\Big|_{\lambda=\lambda_n} \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1)$$

удовлетворяют граничным условиям $A_0\omega_k(0) + A_1\omega_k(\pi) = 0$ и уравнениям $B\omega_k' + \Omega(x)\omega_k = \lambda_n\omega_k + \omega_{k-1}$, т. е. образуют цепочку из собственной $(\omega_0(x))$ и присоединенных матриц. Следовательно, для доказательства полноты множества собственных и присоединенных матриц достаточно доказать, что матрица $[\chi(\lambda)]^{-1}\int\limits_0^\pi f(x)\omega(x, \lambda)\,dx$ не может быть целой функцией от λ, если матрица $f(x)$ не почти всюду равна нулю.

Используя построенные в задаче 5 § 2 настоящей главы операторы преобразования и лемму 1.3.1, устанавливаем, что при $|\lambda| \to \infty$

$$|\chi(\lambda) - \chi_0(\lambda)| = o(\exp|\operatorname{Im}\lambda\pi|),$$

где $\chi_0(\lambda) = \mathfrak{J}_{12} + \mathfrak{J}_{34} + (\mathfrak{J}_{14} + \mathfrak{J}_{32})\cos\lambda\pi + (\mathfrak{J}_{13} + \mathfrak{J}_{42})\sin\lambda\pi$ – характеристическая функция задачи с $\Omega(x) \equiv 0$. Если

$$(\mathfrak{J}_{14} + \mathfrak{J}_{32})^2 + (\mathfrak{J}_{13} + \mathfrak{J}_{42})^2 \neq 0, \tag{1.3.39}$$

то существует последовательность неограниченно расширяющихся контуров, на которых $|\chi_0(\lambda)|$, а значит и $|\chi(\lambda)|$, больше $C\exp|\operatorname{Im}\lambda\pi|$. Используя формулу (1.3.38) и операторы преобразования указанной задачи 5, привязанные к нулю и к точке π, можно доказать полноту собственных и присоединенных матриц так же, как в теореме 1.3.1. Если условие (1.3.39) не выполнено, то полноты нет уже при $\Omega(x) \equiv 0$.

4. Обобщить теорему 1.3.1 на случай, когда коэффициенты a_{ij} в граничных условиях (1.3.2) являются целыми функциями от λ (в частности, полиномами).

§ 4. *Асимптотические формулы для решений уравнения Штурма — Лиувилля*

При доказательстве теорем предыдущего параграфа мы опирались на весьма грубые оценки решений $\omega(\lambda, x; h)$ уравнения (1.3.1). На самом деле для решений этого уравнения существуют асимптотические разложения по степеням λ^{-1} тем более точные, чем больше производных имеет функция $q(x)$. Действительно, если функция $q(x)$ имеет n непрерывных производных, то по теореме 1.2.2 ядро $K(x, t)$, а значит и $K(x, t; h)$, имеет $n+1$ непрерывную производную. Поэтому можно проинтегрировать $n+1$ раз по частям правую часть равенства (1.3.10) и в результате получить разложение решения $\omega(\lambda, x; h)$ по степеням λ^{-1} с остаточным членом порядка $o(\lambda^{-n-1})$. Однако явный вид коэффициентов и остаточного члена в этом разложении найти трудно. Много проще подобные асимптотические разложения выводятся непосредственно из уравнения (1.3.1).

Обозначим через $W_n^2[a, b]$ пространство Соболева, состоящее из заданных на сегменте $[a, b]$ комплекснозначных функций, которые имеют $n-1$ абсолютно непрерывных производных и производную n-го порядка, суммируемую с квадратом на сегменте $[a, b]$.Рассмотрим оператор Штурма — Лиувилля $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$, у которого $q(x) \in W_2^n[0, a]$, и будем искать решения уравнения

$$L[y] = \lambda^2 y \quad (0 \leqslant x \leqslant a) \tag{1.4.1}$$

в следующем виде:

$$y = y(\lambda, x) = e^{i\lambda x}\left[u_0(x) + \frac{u_1(x)}{2i\lambda} + \cdots + \frac{u_n(x)}{(2i\lambda)^n} + \frac{u_{n+1}(\lambda, x)}{(2i\lambda)^{n+1}}\right]. \tag{1.4.2}$$

Лемма 1.4.1. *Если $q(x) \in W_2^n[0, a]$, то уравнение (1.4.1) имеет решения $y(\lambda, x)$ вида (1.4.2), где*

$$u_0(x) = 1, \quad u_k(x) = \int_0^x L[u_{k-1}(\xi)]\, d\xi,$$

а функция $u_{n+1}(\lambda, x)$ и ее производная допускают представления

$$u_{n+1}(\lambda, x) = u_{n+1}(x) + \frac{1}{2i\lambda}\int_0^x q(t)\, u_{n+1}(t)\, dt -$$

$$-\int_0^x \left\{u'_{n+1}(x-\xi) + \frac{1}{2i\lambda} K_{n+1}^{(0)}(x, \xi)\right\} e^{-2i\lambda\xi} d\xi,$$

$$u'_{n+1}(\lambda, x) = 2i\lambda \int_0^x \left\{u'_{n+1}(x-\xi) + \frac{1}{2i\lambda} K_{n+1}^{(1)}(x, \xi)\right\} e^{-2i\lambda\xi}\, d\xi,$$

в которых ядра $K_{n+1}^{(0)}(x, \xi)$, $K_{n+1}^{(1)}(x, \xi)$, $u'_{n+1}(x-\xi)$ суммируемы с квадратом по переменной ξ при каждом $x \in [0, a]$.

Доказательство. Подставляя правую часть формулы (1.4.2) в уравнение (1.4.1) и приравнивая нулю коэффициенты при

$(2i\lambda)^{-k}$ $(k = -1, 0, 1, \ldots, n-1)$, приходим к системе уравнений

$$u_0'(x) = 0, \quad u_k'(x) = L[u_{k-1}(x)] \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$L[u_{n+1}(\lambda, x)] - 2i\lambda u_{n+1}'(\lambda, x) + 2i\lambda L[u_n(x)] = 0, \tag{1.4.3}$$

последнее из которых удобно преобразовать к такому виду:

$$L[e^{i\lambda x}u_{n+1}(\lambda, x)] - \lambda^2[e^{i\lambda x}u_{n+1}(\lambda, x)] = -2i\lambda e^{i\lambda x}L[u_n(x)].$$

Следовательно, функция (1.4.2) является решением уравнения (1.4.1), если положить

$$u_0(x) = 1, \quad u_k(x) = \int_0^x L[u_{k-1}(\xi)]\,d\xi \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.4.4}$$

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x L[u_n(\xi)]\,d\xi, \quad u_{n+1}(\lambda, x) = e^{-i\lambda x}v_{n+1}(\lambda, x),$$

где $v_{n+1}(\lambda, x)$ — решение уравнения

$$L[v_{n+1}] - \lambda^2 v_{n+1} = -2i\lambda e^{i\lambda x}u_{n+1}'(x) \tag{1.4.3'}$$

при начальных данных $v_{n+1}(\lambda, 0) = v_{n+1}'(\lambda, 0) = 0$. Из формул (1.4.4) по индукции следует, что

$$u_k(x) + (-1)^k q^{(k-2)}(x) \in W_2^{n+3-k}[0, a], \tag{1.4.5}$$

если $q(x) \in W_2^n[0, a]$. Поэтому функции $u_k(x)$ определены формулами (1.4.4) корректно при всех $k = 1, 2, \ldots, n, n+1$, причем функция $u_{n+1}(x)$ имеет суммируемую с квадратом производную.

Обозначим через $c(\lambda, x)$, $s(\lambda, x)$ фундаментальную систему решений уравнения (1.4.1) при начальных данных $c(\lambda, 0) = s'(\lambda, 0) = 1$, $c'(\lambda, 0) = s(\lambda, 0) = 0$ и введем функцию

$$w(x, t, \lambda) = s(\lambda, x)c(\lambda, t) - s(\lambda, t)c(\lambda, x).$$

Метод вариации произвольных постоянных приводит к следующему представлению решения $v_{n+1}(\lambda, x)$ уравнения (1.4.3'):

$$v_{n+1}(\lambda, x) = 2i\lambda\int_0^x w(x, \xi, \lambda)\,e^{i\lambda\xi}u_{n+1}'(\xi)\,d\xi =$$

$$= 2i\lambda\int_0^x w(x, x-t, \lambda)\,e^{i\lambda(x-t)}u_{n+1}'(x-t)\,dt,$$

откуда для функции $u_{n+1}(\lambda, x)$ вытекает формула

$$u_{n+1}(\lambda, x) = 2i\lambda\int_0^x w(x, x-t, \lambda)\,e^{-i\lambda t}u_{n+1}'(x-t)\,dt.$$

Поскольку функция $\omega(\lambda, t) = w(x, x-t, \lambda)$ удовлетворяет уравнению $\omega''_{tt} - q(x-t)\,\omega + \lambda^2\omega = 0$, согласно следствию теоремы 1.2.1

$$\omega(\lambda, t) = w(x, x-t, \lambda) = \frac{\sin\lambda t}{\lambda} + \int_0^t K(x;\ t, \xi)\,\frac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\,d\xi,$$

где x играет роль параметра. Поэтому

$$u_{n+1}(\lambda, x) = 2i\int_0^x \left\{\sin\lambda t + \int_0^t K(x;\ t, \xi)\sin\lambda\xi\,d\xi\right\} e^{-i\lambda t}u'_{n+1}(x-t)\,dt =$$

$$= u_{n+1}(x) + \int_0^x K_{n+1}(x, t)\,e^{-2i\lambda t}\,dt, \tag{1.4.6}$$

где $K_{n+1}(x, t) = -u'_{n+1}(x-t) + 2\int_t^x \frac{\xi - 2t}{|\xi - 2t|}K(x;\ \xi, |\xi - 2t|)\,\times$

$\times\, u'_{n+1}(x-\xi)\,d\xi$.

С другой стороны, из (1.4.3′) следует интегральное уравнение

$$v_{n+1}(\lambda, x) = \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\left\{2i\lambda e^{i\lambda t}u'_{n+1}(t) + q(t)\,v_{n+1}(\lambda, t)\right\}dt$$

и

$$u_{n+1}(\lambda, x) = \int_0^x \left\{1 - e^{-2i\lambda(x-t)}\right\}\left\{u'_{n+1}(t) + \frac{1}{2i\lambda}q(t)\,u_{n+1}(\lambda, t)\right\}dt. \tag{1.4.7}$$

Подставив в правую часть последнего равенства вместо функции $u_{n+1}(\lambda, t)$ ее представление (1.4.6), получим

$$u_{n+1}(\lambda, t) = \int_0^x \left\{1 - e^{-2i\lambda(x-t)}\right\}\left\{u'_{n+1}(t) + \frac{1}{2i\lambda}q(t)\,u_{n+1}(t)\right\}dt +$$

$$+\frac{1}{2i\lambda}\int_0^x \left\{1 - e^{-2i\lambda(x-t)}\right\}q(t)\int_0^t K_{n+1}(t, \xi)\,e^{-2i\lambda\xi}\,d\xi\,dt,$$

откуда после несложных преобразований следует

$$u_{n+1}(\lambda, x) = u_{n+1}(x) + \frac{1}{2i\lambda}\int_0^x q(t)\,u_{n+1}(t)\,dt -$$

$$-\left\{\int_0^x e^{-2i\lambda\xi}u'_{n+1}(x-\xi)\,d\xi + \frac{1}{2i\lambda}\int_0^x K^{(0)}_{n+1}(x, \xi)\,e^{-2i\lambda\xi}\,d\xi\right\}, \tag{1.4.8}$$

где

$$K_{n+1}^{(0)}(x, \xi) = q(x-\xi)\, u_{n+1}(x-\xi) - \int_{\xi}^{x} q(t)\, K_{n+1}(t, \xi)\, dt +$$

$$+ \int_{x-\xi}^{x} q(t)\, K_{n+1}(t, \xi - x + t)\, dt.$$

Дифференцируя равенство (1.4.7) один раз по x, получаем

$$u'_{n+1}(\lambda, x) = 2i\lambda \left\{ \int_0^x e^{-2i\lambda(x-t)} u'_{n+1}(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2i\lambda} \int_0^x e^{-2i\lambda(x-t)} q(t)\, u_{n+1}(\lambda, t)\, dt \right\},$$

откуда согласно (1.4.8) находим

$$u'_{n+1}(\lambda, x) = 2i\lambda \int_0^x u'_{n+1}(x-\xi)\, e^{-2i\lambda\xi}\, d\xi + \int_0^x K_{n+1}^{(1)}(x, \xi)\, e^{-2i\lambda\xi} d\xi, \quad (1.4.9)$$

где

$$K_{n+1}^{(1)}(x, \xi) = K_{n+1}^{(0)}(x, \xi) + \int_{\xi}^{x} q(t)\, K_{n+1}(t, \xi)\, dt.$$

Все утверждения леммы являются прямыми следствиями формул (1.4.3), (1.4.8) и (1.4.9).

Рекуррентные формулы (1.4.4), по которым находятся функции $u_k(x)$, содержат нежелательные операции интегрирования. От них можно избавиться следующим образом. Полагая

$$\sigma(\lambda, x) = \frac{d}{dx} \ln \left[1 + \frac{u_1(x)}{2i\lambda} + \cdots + \frac{u_n(x)}{(2i\lambda)^n} + \frac{u_{n+1}(\lambda, x)}{(2i\lambda)^{n+1}} \right], \quad (1.4.10)$$

получаем для решения (1.4.2) представление

$$y(\lambda, x) = \exp \left\{ i\lambda x + \int_0^x \sigma(\lambda, t)\, dt \right\}, \quad (1.4.11)$$

из которого следует равенство

$$y'(\lambda, x) = \{ i\lambda + \sigma(\lambda, x) \}\, y(\lambda, x) \quad (1.4.11')$$

и уравнение для функции $\sigma(\lambda, x)$

$$\sigma'(\lambda, x) + 2i\lambda\sigma(\lambda, x) + \sigma^2(\lambda, x) - q(x) = 0. \quad (1.4.12)$$

Вводим для краткости обозначения

$$\left.\begin{aligned} P_n(\lambda, x) &= 1 + \frac{u_1(x)}{2i\lambda} + \cdots + \frac{u_n(x)}{(2i\lambda)^n}, \\ Q_n(\lambda, x) &= P_n(\lambda, x) + \frac{u_{n+1}(\lambda, x)}{(2i\lambda)^{n+1}}, \end{aligned}\right\} \tag{1.4.13}$$

в которых формулы (1.4.2) и (1.4.10) принимают вид

$$y(\lambda, x) = e^{i\lambda x} Q_n(\lambda, x),$$

$$\sigma(\lambda, x) = \frac{P_n'(\lambda, x)}{P_n(\lambda, x)} + \frac{u_{n+1}'(\lambda, x) P_n(\lambda, x) - u_{n+1}(\lambda, x) P_n'(\lambda, x)}{(2i\lambda)^{n+1} P_n(\lambda, x) Q_n(\lambda, x)}.$$

Функция $P_n'(\lambda, x)[P_n(\lambda, x)]^{-1}$ в окрестности бесконечно удаленной точки λ-плоскости разлагается в ряд по степеням $(2i\lambda)^{-1}$. Выделяя в нем первые n членов, получаем

$$\frac{P_n'(\lambda, x)}{P_n(\lambda, x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k(x)}{(2i\lambda)^k} + \frac{1}{(2i\lambda)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{(2i\lambda)^k} \tag{1.4.14}$$

и

$$\sigma(\lambda, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k(x)}{(2i\lambda)^k} + \frac{\sigma_n(\lambda, x)}{(2i\lambda)^n}, \tag{1.4.15}$$

где

$$\sigma_n(\lambda, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{(2i\lambda)^k} + \frac{u_{n+1}'(\lambda, x) P_n(\lambda, x) - u_{n+1}(\lambda, x) P_n'(\lambda, x)}{2i\lambda P_n(\lambda, x) Q_n(\lambda, x)}. \tag{1.4.16}$$

Так как $u_1(0) = u_2(0) = \cdots = u_n(0) = u_{n+1}(\lambda, 0) = u_{n+1}'(\lambda, 0) = 0$, то

$$\frac{P_n'(\lambda, 0)}{P_n(\lambda, 0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k'(0)}{(2i\lambda)^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k(0)}{(2i\lambda)^k} + \frac{1}{(2i\lambda)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(0)}{(2i\lambda)^k}$$

и, следовательно, $u_k'(0) = \sigma_k(0)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, $\varphi_k(0) = 0$ $(1 \leqslant k < \infty)$, $\sigma_n(\lambda, 0) = 0$. Условимся писать $f(\lambda) = o(\lambda^m)$ $(O(\lambda^m))$, если в любой полосе $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant C < \infty$

$$\varlimsup_{|\lambda|\to\infty} \sup_{|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant C} |\lambda^{-m} f(\lambda)| = 0 \quad (< \infty).$$

Например, из формул (1.4.8), (1.4.9), уравнения (1.4.3′) и леммы Римана — Лебега о стремлении к нулю преобразования Фурье суммируемой функции следует, что

$$u_{n+1}(\lambda, x) - u_{n+1}(x) = o(1), \quad u_{n+1}'(\lambda, x) = o(\lambda), \tag{1.4.17}$$

$$(2i\lambda)^{-1} u_{n+1}''(\lambda, x) + u_{n+1}'(\lambda, x) - u_{n+1}'(x) = o(1). \tag{1.4.18}$$

Подставляя правую часть формулы (1.4.15) в уравнение (1.4.12) и учитывая при этом равенства $\sigma(\lambda, x) = o(1)$, $\sigma'(\lambda, x) = o(\lambda)$, вытекающие из (1.4.16) и (1.4.17), (1.4.18), находим

$$\sigma_1(x) = q(x), \quad \sigma_k'(x) + \sigma_{k+1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \sigma_{k-j}(x)\,\sigma_j(x) = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

и

$$\sigma_n'(\lambda, x) + 2i\lambda\sigma_n(\lambda, x) + \sigma_n'(x) + \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{n-j}(x)\,\sigma_j(x) =$$

$$= -\sum_{p=1}^{n}\sum_{j=p}^{n} \frac{\sigma_{n+p-j}(x)\,\sigma_j(x)}{(2i\lambda)^p} - \frac{\sigma_n^2(\lambda, x)}{(2i\lambda)^n} - 2\sigma_n(\lambda, x)\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k(x)}{(2i\lambda)^k}\,.$$

Поэтому функции $\sigma_k(x)$ определяются рекуррентными формулами

$$\sigma_1(x) = q(x), \quad \sigma_2(x) = -q'(x), \quad \sigma_3(x) = q''(x) - q(x)^2,$$

$$\sigma_{k+1}(x) = -\sigma_k'(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \sigma_{k-j}(x)\,\sigma_j(x) \quad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

не содержащими операций интегрирования, откуда, в частности, следует

$$\sigma_{k+1}(x) = (-1)^k q^{(k)}(x) + S_{k-2}(x),$$

где $S_{k-2}(x)$ — полином от $q(x)$, $q'(x)$, ..., $q^{(k-2)}(x)$.

Далее, из равенства (1.4.13) следует

$$\sigma_n'(\lambda, x) + 2i\lambda\sigma_n(\lambda, x) = \sigma_{n+1}(x) + o(1),$$

а из формул (1.4.16) и (1.4.17), (1.4.18) —

$$\sigma_n'(\lambda, x) + 2i\lambda\sigma_n(\lambda, x) = \varphi_1(x) + u_{n+1}'(x) + o(1).$$

Поэтому

$$u_{n+1}'(x) = \sigma_{n+1}(x) - \varphi_1(x),$$

и

$$\int_0^x u_{n+1}'(x-\xi)\,e^{-2i\lambda\xi}d\xi = \int_0^x \sigma_{n+1}(x-\xi)\,e^{-2i\lambda\xi}d\xi - \frac{\varphi_1(x)}{2i\lambda} +$$

$$+ \frac{1}{2i\lambda}\int_0^x \varphi_1'(x-\xi)\,e^{-2i\lambda\xi}d\xi,$$

так как $\varphi_1(x) \in W_2^2[0, a]$, $\varphi_1(0) = 0$. Это позволяет заменить равенства (1.4.8), (1.4.9) такими:

$$u_{n+1}(\lambda, x) = \int_0^x \{\sigma_{n+1}(\xi) - \varphi_1(\xi)\}\, d\xi + \frac{1}{2i\lambda}\left\{\varphi_1(x) + \int_0^x q(t)\, u_{n+1}(t)\, dt\right\} -$$

$$- \left\{\int_0^x \sigma_{n+1}(x-\xi)\, e^{-2i\lambda\xi} d\xi + \frac{1}{2i\lambda}\int_0^x \widetilde{K}_{n+1}^{(0)}(x, \xi)\, e^{-2i\lambda\xi} d\xi\right\}, \qquad (1.4.8')$$

$$u'_{n+1}(\lambda, x) = 2i\lambda \int_0^x \sigma_{n+1}(x-\xi)\, e^{-2i\lambda\xi} d\xi - \varphi_1(x) + \int_0^x \widetilde{K}_{n+1}^{(1)}(x, \xi)\, e^{-2i\lambda\xi} d\xi, \qquad (1.4.9')$$

где ядра $\widetilde{K}_{n+1}^{(s)}(x, \xi) = K_{n+1}^{(s)}(x, \xi) + \varphi_1'(x-\xi)$ $(s = 0, 1)$ тоже суммируемы с квадратом по переменной ξ.

Наконец, сопоставляя равенства (1.4.16), (1.4.9′) с оценками (1.4.17), (1.4.18), получаем

$$\sigma_n(\lambda, x) = \frac{2i\lambda \int_0^x \sigma_{n+1}(x-\xi)\, e^{-2i\lambda\xi} d\xi + \int_0^x \widetilde{K}_{n+1}^{(1)}(x, \xi)\, e^{-2i\lambda\xi} d\xi}{2i\lambda Q_n(\lambda, x)} + O(\lambda^{-2}). \qquad (1.4.19)$$

Таким образом, справедлива также следующая лемма.

Лемма 1.4.2. *Если выполнены условия леммы 1.4.1, то*

1) решение (1.4.2) представимо в виде (1.4.11), (1.4.15);

2) функции $\sigma_k(t)$ $(1 \leqslant k \leqslant n+1)$ определяются рекуррентными формулами

$$\sigma_1(t) = q(t), \quad \sigma_{k+1}(t) = -\sigma_k'(t) - \sum_{j=1}^{k-1} \sigma_{k-j}(t)\, \sigma_j(t), \qquad (1.4.20)$$

из которых следует

$$\sigma_{k+1}(t) = (-1)^k q^{(k)}(t) + S_{k-2}(t), \qquad (1.4.20')$$

где $S_{k-2}(t)$ — полином от $q(t)$, $q'(t)$, .., $q^{(k-2)}(t)$;

3) функция $\sigma_n(\lambda, x)$ определяется формулой (1.4.16), из которой следует удобное для оценок равенство (1.4.19).

Заметим, что с помощью формулы (1.4.2) при $\lambda \neq 0$ можно получить два решения, $y(\lambda, x)$ и $y(-\lambda, x)$, уравнения (1.4.1). Согласно (1.4.11) вронскиан

$$W[y(\lambda, x), y(-\lambda, x)] = y'(\lambda, x)\, y(-\lambda, x) - y(\lambda, x)\, y'(-\lambda, x)$$

этих решений имеет вид

$$W[y(\lambda, x), y(-\lambda, x)] = y(\lambda, x)\, y(-\lambda, x)\,[2i\lambda + \sigma(\lambda, x) - \sigma(-\lambda, x)].$$

Поскольку вронскиан двух решений уравнения Штурма — Лиувилля не зависит от x и $y(\lambda, 0) = y(-\lambda, 0) = 1$,

$$y(\lambda, x)\, y(-\lambda, x)\,[2i\lambda + \sigma(\lambda, x) - \sigma(-\lambda, x)] =$$
$$= 2i\lambda + \sigma(\lambda, 0) - \sigma(-\lambda, 0),$$

откуда вытекают следующие формулы:

$$y(\lambda, x)\, y(-\lambda, x) = \frac{\omega(\lambda, 0)}{\omega(\lambda, x)}, \tag{1.4.21}$$

$$W[y(\lambda, x),\ y(-\lambda, x)] = \omega(\lambda, 0), \tag{1.4.22}$$

где

$$\omega(\lambda, x) = 2i\lambda + \sigma(\lambda, x) - \sigma(-\lambda, x). \tag{1.4.23}$$

В частности, решения $y(\lambda, x)$ и $y(-\lambda, x)$ линейно независимы при всех значениях λ, отличных от корней полинома $\lambda^n\,\omega(\lambda, 0)$. Легко убедиться, что введенные ранее решения $c(\lambda, x)$ $s(\lambda, x)$ уравнения (1.4.1) выражаются через $y(\lambda, x)$, $y(-\lambda, x)$:

$$s(\lambda, x) = \frac{y(\lambda, x) - y(-\lambda, x)}{\omega(\lambda, 0)}, \tag{1.4.24}$$

$$c(\lambda, x) = \frac{y(\lambda, x)\,[i\lambda - \sigma(-\lambda, 0)] + y(-\lambda, x)\,[i\lambda + \sigma(\lambda, 0)]}{\omega(\lambda, 0)}. \tag{1.4.24'}$$

В ряде вопросов существенную роль играют оценки функций $\sigma_n(\lambda, x)$, $u_{n+1}(\lambda, x)$ и их производных, вытекающие из леммы 1.3.1. При $\lambda = k + a + O(k^{-1})$ эти оценки можно получить с помощью следующей простой леммы.

Лемма 1.4.3. *Пусть числовая последовательность* $a_k = k + a + h_k$ *при* $k \to \pm\infty$ *удовлетворяет условию* $h_k = O(k^{-1})$, $f(x) \in L_2(0, \pi)$ *и* $\tilde f(\lambda) = \int\limits_0^\pi f(x)\, e^{-2i\lambda x} dx$. *Тогда*

$$\tilde f(a_k) = \tilde f(k + a) + k^{-1} g(k),$$

причем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde f(k + a)|^2 < \infty, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(k)|^2 < \infty.$$

Доказательство. Из равенства

$$\tilde f(a_k) = \int\limits_0^\pi f(x)\, e^{-2i(k+a)x} e^{-2ih_k x} dx =$$
$$= \int\limits_0^\pi f(x)\, e^{-2i(k+a)x}\,[1 - 2ih_k x + O(h_k^2)]\, dx$$

следует

$$\tilde f(a_k) = \tilde f(k+a) + h_k \tilde f'(k+a) + O(h_k^2) = \tilde f(k+a) + k^{-1} g(k),$$

где $g(k) = kh_k \tilde f'(k+a) + k^{-1} O(k^2 h_k^2)$. Так как последовательности

$$\tilde f(k+a) = \int_0^\pi f(x)\, e^{-2iax} e^{-2ikx} dx,$$

$$\tilde f'(k+a) = -2i \int_0^\pi f(x)\, x e^{-2iax} e^{-2ikx} dx$$

состоят из коэффициентов Фурье функций $f(x)\, e^{-2iax}$, $-2if(x)\, xe^{-2iax}$, принадлежащих пространству $L_2(0, \pi)$, то согласно неравенству Бесселя $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde f(k+a)|^2 < \infty$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde f'(k+a)|^2 < \infty$, а следовательно, и $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |g(k)|^2 < \infty$, поскольку $\sup |kh_k| < \infty$ по условию.

Лемма 1.4.4. *Пусть* $q(x) \in W_2^n[0, \pi]$ *и числовая последовательность* $a_k = k + a + h_k$ *удовлетворяет условию* $h_k = O(k^{-1})$. *Тогда*

$$\sigma_n(a_k, \pi) = \tilde\sigma_{n+1}(k+a) + k^{-1} g_1(k),$$

$$\int_0^\pi \sigma(a_k, x)\, dx = \sum_{j=1}^{n+2} c_j (2ia_k)^{-j} - (2ik)^{-n-1} \tilde\sigma_{n+1}(k+a) + k^{-n-2} g_2(k),$$

где

$$\tilde\sigma_{n+1}(\lambda) = \int_0^\pi \sigma_{n+1}(\pi - x)\, e^{-2i\lambda x} dx, \tag{1.4.25}$$

коэффициенты $c_j = \int\limits_0^\pi \sigma_j(x)\, dx$ $(j = 1, 2, \ldots, n, n+1)$ *не зависят от* n *и* k, *коэффициент* c_{n+2} *не зависит от* k *и равен нулю, если* $n = 0$. *Кроме того,*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_1(k)|^2 < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_2(k)|^2 < \infty.$$

Доказательство. Справедливость сформулированного утверждения для последовательности $\sigma_n(a_k, \pi)$ непосредственно вытекает из предыдущей леммы, формулы (1.4.19) и очевидных оценок $Q_n(\lambda, \pi) = 1 + O(\lambda^{-1})$, $a_k^{-1} = k^{-1} + O(k^{-2})$. Для доказательства утверждения, относящегося к последовательности $\int\limits_0^\pi \sigma(a_k, x)\, dx$, воспользуемся равенствами (1.4.10) и (1.4.14), из которых следует, что

$$\int_0^\pi \sigma(\lambda, x)\,dx = \ln\left[1 + \frac{u_1(\pi)}{2i\lambda} + \cdots + \frac{u_n(\pi)}{(2i\lambda)^n} + \frac{u_{n+1}(\lambda, \pi)}{(2i\lambda)^{n+1}}\right] =$$

$$\ln P_n(\lambda, \pi) + \ln\left[1 + \{(2i\lambda)^{n+1} P_n(\lambda, \pi)\}^{-1} u_{n+1}(\lambda, \pi)\right], \qquad (1.4.26)$$

$$\ln P_n(\lambda, \pi) = \sum_{j=1}^{n} c_j (2i\lambda)^{-j} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j (2i\lambda)^{-n-j},$$

где $c_j = \int_\pi^\pi \sigma_j(x)\,dx, \quad b_j = \int_0^\pi \varphi_j(x)\,dx$. Рассмотрим отдельно два возможных случая: $n = 0$ и $n \geqslant 1$.

В первом случае $P_0(\lambda, x) \equiv 1$, $\varphi_k(x) \equiv 0$ и

$$\int_0^\pi \sigma(\lambda, x)\,dx = \ln\left[1 + (2i\lambda)^{-1} u_1(\lambda, \pi)\right].$$

Далее, из формулы (1.4.8′), так как $\sigma_1(x) = q(x)$,

$$u_1(x) = \int_0^x q(t)\,dt = \int_0^x \sigma_1(t)\,dt, \quad \int_0^\pi q(t)\,u_1(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^\pi \sigma_1(x)\,dx\right]^2 = \frac{c_1^2}{2},$$

находим

$$u_1(\lambda, \pi) = c_1 + (4i\lambda)^{-1} c_1^2 - \tilde{\sigma}_1(\lambda) - (2i\lambda)^{-1} \int_0^\pi \tilde{K}_1^{(0)}(\pi, \xi)\, e^{-2i\lambda\xi} d\xi,$$

откуда согласно лемме 1.4.3 получаем

$$1 + (2ia_k)^{-1} u_1(a_k, \pi) = 1 + c_1 (2ia_k)^{-1} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[c_1 (2ia_k)^{-1}\right]^2 - (2ik)^{-1} \tilde{\sigma}_1(k + a) + k^{-2}\delta_1(k) =$$

$$= \left[1 + c_1 (2ia_k)^{-1} + \frac{1}{2}\{c_1 (2ia_k)^{-1}\}^2\right]\left[1 - (2ik)^{-1}\tilde{\sigma}_1(k + a) + k^{-2}\delta_2(k)\right],$$

где последовательности $\delta_1(k)$ и $\delta_2(k)$ принадлежат l_2. Поэтому

$$\int_0^\pi \sigma(a_k, x)\,dx = \ln\left[1 + c_1 (2ia_k)^{-1} + \frac{1}{2}\{c_1 (2ia_k)^{-1}\}^2\right] +$$

$$+ \ln\left[1 - (2ik)^{-1} \tilde{\sigma}_1(k + a) + k^{-2}\delta_2(k)\right] =$$

$$= c_1 (2ia_k)^{-1} - (2ik)^{-1} \tilde{\sigma}_1(k + a) + k^{-2} g_2(k), \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_2(k)|^2 < \infty.$$

(Здесь использованы равенства $\ln(1 + x) = x + O(x^2)$, $\ln\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) = x + O(x^3)$, справедливые при $x \to 0$.)

Пусть теперь $n \geqslant 1$. В этом случае $P_n(\lambda, \pi) = 1 + (2i\lambda)^{-1} u_1(\pi) + O(\lambda^{-2})$ и

$$\{(2i\lambda)^{n+1} P_n(\lambda, \pi)\}^{-1} u_{n+1}(\lambda, \pi) = (2i\lambda)^{-n-1} u_{n+1}(\lambda, \pi) \times \times [1 - (2i\lambda)^{-1} u_1(\pi)] + O(\lambda^{-n-3}),$$

откуда, используя формулу (1.4.8′) и лемму 1.4.3, находим

$$\{(2ia_k)^{n+1} P_n(a_k, \pi)\}^{-1} u_{n+1}(a_k, \pi) = (2ia_k)^{-n-1}(c_{n+1} - b_1) + + (2ia_k)^{-n-2} d + (2ik)^{-n-1} \tilde{\sigma}_{n+1}(k+a) + (2ik)^{-n-2} \delta(k),$$

где $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\delta(k)|^2 < \infty$, $d = \varphi_1(\pi) + \int\limits_0^{\pi} q(t) u_{n+1}(t)\, dt - (c_{n+1} - b_1) \times \times u_1(\pi)$. Подставляя это выражение в формулу (1.4.26), после элементарных преобразований, так же как в предыдущем случае, получаем

$$\int\limits_0^{\pi} \sigma(a_k, x)\, dx = \sum_{j=1}^{n+2} c_j (2ia_k)^{-j} - (2ik)^{-n-1} \tilde{\sigma}_{n+1}(k+a) + k^{-n-2} g_2(k),$$

где $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |g_2(k)|^2 < \infty$, $c_{n+2} = b_2 + \varphi_1(\pi) + \int\limits_0^{\pi} q(t) u_{n+1}(t)\, dt - (c_{n+1} - - b_1) u_1(\pi)$, что и требовалось доказать.

Задачи

1. Доказать аналог леммы 1.4.1: уравнение Дирака (1.2.37) с $n \geqslant 0$ раз непрерывно дифференцируемым потенциалом $\Omega(x)$ имеет решения вида

$$y_1(\lambda, x) = e^{i\lambda x}\{(I + iB) u_1(\lambda, x) + (I - iB) u_2(\lambda, x)\},$$

$$y_2(\lambda, x) = e^{-i\lambda x}\{(I - iB) u_1(-\lambda, x) - (I + iB) u_2(-\lambda, x)\},$$

где

$$u_1(\lambda, x) = I + \sum_{k=1}^{n} b_k(x)(2i\lambda)^{-k} + b_n(\lambda, x)(2i\lambda)^{-n}, \tag{1.4.27}$$

$$u_2(\lambda, x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)(2i\lambda)^{-k} + a_n(\lambda, x)(2i\lambda)^{-n}, \tag{1.4.27′}$$

$$\left.\begin{aligned} &a_1(x) = i\Omega(x),\ a_{k+1}(x) = -a_k'(x) + i\Omega(x) b_k(x), \\ &b_k(x) = -i\int\limits_0^x \Omega(t) a_k(t)\, dt, \end{aligned}\right\} \tag{1.4.27″}$$

$$a_n(\lambda, x) = \int\limits_0^x A(x, t) e^{-2i\lambda t} dt, \quad b_n(\lambda, x) = -i\int\limits_0^x \left\{\int\limits_t^x \Omega(\xi) A(\xi, t)\, d\xi\right\} e^{-2i\lambda t} dt,$$

причем $Bu_1(\lambda, x) - u_1(\lambda, x) B = 0$, $Bu_2(\lambda, x) + u_2(\lambda, x) B = 0$.

Указание. Непосредственно проверяем, удовлетворяют ли операторнозначные функции $y_1(\lambda, x)$, $y_2(\lambda, x)$ уравнению (1.2.27), если $u_1(\lambda, x)$, $u_2(\lambda, x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$u_2'(\lambda, x) + 2i\lambda u_2(\lambda, x) - i\Omega(x)\,u_1(\lambda, x) = 0, \quad u_1'(\lambda, x) + i\Omega(x)\,u_2(\lambda, x) = 0.$$

Подставляя в эту систему правые части равенств (1.4.27), (1.4.27′) и учитывая рекуррентные формулы (1.4.27″), получаем для $a_n(\lambda, x)$, $b_n(\lambda, x)$ систему дифференциальных уравнений

$$b_n'(\lambda, x) = -i\Omega(x)\,a_n(\lambda, x), \quad a_n'(\lambda, x) + 2i\lambda a_n(\lambda, x) = a_{n+1}(x) + i\Omega(x)\,b_n(\lambda, x),$$

которая сводится к равенству

$$b_n(\lambda, x) = -i\int_0^x \Omega(t)\,a_n(\lambda, t)\,dt$$

и интегральному уравнению

$$a_n(\lambda, x) = \int_0^x a_{n+1}(t)\,e^{-2i\lambda(x-t)}\,dt + \int_0^x e^{-2i\lambda(x-t)}\,\Omega(t)\int_0^t \Omega(\xi)\,a_n(\lambda, \xi)\,d\xi dt.$$

Полагая $a_n(\lambda, x) = \int_0^x A(x, t)\,e^{-2i\lambda t}dt$, приходим к уравнению

$$A(x, t) = a_{n+1}(x-t) + \int_0^t \Omega(x-u)\int_{t-u}^{x-u} \Omega(\xi)\,A(\xi, t-u)\,d\xi du,$$

разрешимость которого вместе с оценками и свойствами ядра $A(x, t)$ доказывается методом последовательных приближений.

2. Доказать аналог леммы 1.4.2: если $n \geqslant 1$, то операторнозначная функция $v(\lambda, x) = u_2(\lambda, x)\,[u_1(\lambda, x)]^{-1}$ представима в виде

$$v(\lambda, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{v_k(x)}{(2i\lambda)^k} + \frac{v_n(\lambda, x)}{(2i\lambda)^n},$$

где

$$v_1(x) = i\Omega(x), \quad v_{k+1}(x) = -v_k'(x) - i\sum_{j=1}^{k-1} v_{k-j}(x)\,\Omega(x)\,v_j(x),$$

$$v_n(\lambda, x) = \int_0^x v_{n+1}(x-t)\,e^{-2i\lambda t}\,dt + (2i\lambda)^{-1}\int_0^x B(x, t)\,e^{-4i\lambda t}dt + O(\lambda^{-2}).$$

Указание. Из системы уравнений, которой удовлетворяют операторнозначные функции $u_1(\lambda, x)$, $u_2(\lambda, x)$, вытекает такое уравнение для $v(\lambda, x)$:

$$v'(\lambda, x) + 2i\lambda v(\lambda, x) - iv(\lambda, x)\,\Omega(x)\,v(\lambda, x) - i\Omega(x) = 0.$$

Следует сопоставить это уравнение и формулы (1.4.27), (1.4.27′) так же, как при доказательстве леммы 1.4.2.

3. Доказать, что рассмотренное в задаче 3 § 3 настоящей главы уравнение Дирака (1.3.36), в котором функции $p(x)$, $r(x)$ принадлежат пространству

$W_2^n[0, \pi]$, имеет решение вида

$$y(\lambda, x) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda x} f^+(\lambda, x) & e^{-i\lambda x} g^-(-\lambda, x) \\ e^{i\lambda x} g^+(\lambda, x) & e^{-i\lambda x} f^-(-\lambda, x) \end{pmatrix}, \tag{1.4.28}$$

где

$$f^\pm(\lambda, x) = u_1^\pm(\lambda, x) + u_2^\mp(\lambda, x), \quad g^\pm(\lambda, x) = -i\{u_1^\pm(\lambda, x) - u_2^\mp(\lambda, x)\},$$

$$u_1^\pm(\lambda, x) = 1 + \sum_{k=1}^n b_k^\pm(x)(2i\lambda)^{-k} + b_n^\pm(\lambda, x)(2i\lambda)^{-n},$$

$$u_2^\pm(\lambda, x) = \sum_{k=1}^n a_k^\pm(x)(2i\lambda)^{-k} + a_n^\pm(\lambda, x)(2i\lambda)^{-n},$$

$$a_1^\pm(x) = iq^\pm(x), \quad a_k^\pm(x) = -a_{k-1}^\pm(x)' + iq^\pm(x)\, b_k^\mp(x),$$

$$b_k^\mp(x) = -i\int_0^x q^\mp(t)\, a_k^\pm(t)\, dt,$$

$$q^\pm(x) = p(x) \pm ir(x),$$

$$a_n^\pm(\lambda, x) = \int_0^x A^\pm(x, t)\, e^{-2i\lambda t} dt, \quad b_n^\mp(\lambda, x) = -i\int_0^x \left\{\int_t^x q^\mp(\xi)\, A^\pm(\xi, t)\, d\xi\right\} e^{-2i\lambda t} dt.$$

Если $n \geqslant 1$, то

$$u_2^\pm(\lambda, x)[u_1^\mp(\lambda, x)]^{-1} = \sigma^\pm(\lambda, x) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^\pm(x)(2i\lambda)^{-k} + \sigma_n^\pm(\lambda, x)(2i\lambda)^{-n},$$

$$\sigma_1^\pm(x) = iq^\pm(x), \quad \sigma_k^\pm(x) = -\sigma_{k-1}^\pm(x)' + iq^\mp(x)\sum_{j=1}^{k-2} \sigma_{k-j-1}^\pm(x)\, \sigma_j^\pm(x),$$

$$\sigma_n^\pm(\lambda, x) = \int_0^x \sigma_{n+1}^\pm(x - t)\, e^{-2i\lambda t}\, dt + (2i\lambda)^{-1}\int_0^x B^\pm(x, t)\, e^{-4i\lambda t}\, dt + O(\lambda^{-2}).$$

Указание. Подставляя (1.4.28) в уравнение (1.3.36), получаем следующие системы дифференциальных уравнений для функций $u_1^\pm(\lambda, x)$, $u_2^\pm(\lambda, x)$:

$$u_2^\pm(\lambda, x)' + 2i\lambda u_2^\pm(\lambda, x) - iq^\pm(x)\, u_1^\mp(\lambda, x) = 0,$$

$$u_1^\mp(\lambda, x)' + iq^\mp(x)\, u_2^\pm(\lambda, x) = 0.$$

В дальнейшем доказательство аналогично доказательствам лемм 1.4.1 и 1.4.2.

4. Выразить элементы $e_{ik}(\lambda, x)$ фундаментального решения $e(\lambda, x)$ $(e(\lambda, 0) = I)$ уравнения (1.3.36) через функции $u_1^\pm(\lambda, x)$, $\sigma^\pm(\lambda, x)$.

Указание. Из тождества $e(\lambda, x) = y(\lambda, x)[y(\lambda, 0)]^{-1}$ (решение $y(\lambda, x)$ определено формулой (1.4.28)) и равенств $u_1^\pm(\lambda, 0) = 1$, $f^\pm(\lambda, x) = u_1^\pm(\lambda, x) \times \{1 + \sigma^\mp(\lambda, x)\}$, $g^\pm(\lambda, x) = -iu_1^\pm(\lambda, x)\{1 - \sigma^\mp(\lambda, x)\}$, $\Delta = \operatorname{Det} y(\lambda, 0) = 2\{1 + \sigma^+(-\lambda, 0)\, \sigma^-(\lambda, 0)\}$ следует, что $e_{ik}(\lambda, x) = \hat{e}_{ik}\Delta^{-1}$, где

$$\hat{e}_{11} = e^{i\lambda x}u_1^+(\lambda, x)[1+\sigma^-(\lambda, x)][1+\sigma^+(-\lambda, 0)] +$$

$$+ e^{-i\lambda x}u_1^-(-\lambda, x)[1-\sigma^+(-\lambda, x)][1-\sigma^-(\lambda, 0)],$$

$$i\hat{e}_{12} = e^{i\lambda x}u_1^+(\lambda, x)[1+\sigma^-(\lambda, x)][1-\sigma^+(-\lambda, 0)] -$$

$$- e^{-i\lambda x}u_1^-(\lambda, x)[1-\sigma^+(-\lambda, x)][1+\sigma^-(\lambda, 0)],$$

$$i\hat{e}_{21} = -e^{i\lambda x}u_1^+(\lambda, x)[1-\sigma^-(\lambda, x)][1+\sigma^+(-\lambda, 0)] +$$

$$+ e^{-i\lambda x}u_1^-(-\lambda, x)[1+\sigma^+(-\lambda, x)][1-\sigma^-(\lambda, 0)],$$

$$\hat{e}_{22} = e^{i\lambda x}u_1^+(\lambda, x)[1-\sigma^-(\lambda, x)][1-\sigma^+(-\lambda, 0)] +$$

$$+ e^{-i\lambda x}u_1^-(-\lambda, x)[1+\sigma^+(-\lambda, x)][1+\sigma^-(\lambda, 0)].$$

5. Пусть числовая последовательность $a_k = k + a + h_k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ удовлетворяет условию $\sup|h_k| = h < \infty$, $f(x) \in L_2(0, \pi)$ и $\tilde{f}(\lambda) = \int_0^\pi f(x) \times \times e^{-2i\lambda x}\,dx$. Доказать, что при любом $n = 0, 1, \ldots$ справедливы равенства

$$\tilde{f}(a_k) = \sum_{p=0}^{n} \tilde{f}^{(p)}(k+a)\,h_k^p\,(p!)^{-1} + h_k^{n+1}g_n(k),$$

где $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{f}^{(p)}(k+a)|^2 < \infty$ $(p = 0, 1, \ldots)$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_n(k)|^2 < \infty$.

Указание. Так же как при доказательстве леммы 1.4.3, находим

$$\tilde{f}(a_k) = \sum_{p=0}^{n} \tilde{f}^{(p)}(k+a)\,h_k^p\,(p!)^{-1} + h_k^{n+1}g_n(k),$$

где $g_n(k) = \sum_{q=n+1}^{\infty} h_k^{q-n-1}(q!)^{-1}\int_0^\pi f(x)(-2ix)^q e^{-2iax}e^{-2ikx}\,dx$. Согласно неравенству Коши — Буняковского

$$|g_n(k)|^2 \leqslant \left[\sum_{q=n+1}^{\infty} |h_k|^{2(q-n-1)}(q!)^{-1}\right] \times$$

$$\times \left[\sum_{q=n+1}^{\infty} (q!)^{-1}\left|\int_0^\pi f(x)(-2ix)^q e^{-2iax}e^{-2ikx}\,dx\right|^2\right],$$

а в силу равенства Парсеваля

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\int_0^\pi f(x)(-2ix)^q e^{-2iax}e^{-2ikx}\,dx\right|^2 = \pi\int_0^\pi |f(x)\,e^{-2iax}(-2ix)^q|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2q}\pi^{2q+1}\int_0^\pi |f(x)\,e^{-2iax}|^2\,dx,$$

откуда следует, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_n(k)|^2 \leqslant \left[\sum_{q=n+1}^{\infty} h^{2(q-n-1)}(q!)^{-1}\right] \times$$

$$\times \left[\sum_{q=n+1}^{\infty} (2\pi)^{2q}(q!)^{-1}\,\pi\int_0^\pi |f(x)\,e^{-2iax}|^2\,dx\right] = \pi C_n(h)\int_0^\pi |f(x)\,e^{-2iax}|^2\,dx < \infty.$$

§ 5. *Асимптотические формулы для собственных значений и формулы следов*

Рассмотрим краевую задачу (1.3.1), (1.3.2) с произвольным невырожденным граничным условием и комплекснозначным потенциалом $q(x) \in W_2^n[0, \pi]$. Точно так же, как при доказательстве леммы 1.3.3, с помощью теоремы Руше и оценок (1.3.10′), полученных в лемме 1.3.2, доказывается, что начиная с некоторого n в области Π_n характеристическая функция $\chi(z)$ и ее главная часть $\chi^{(0)}(z)$ имеют одинаковое число корней, причем расстояния между корнями этих функций, лежащими в областях $\Pi_{n+1} \setminus \Pi_n$, стремятся к нулю при $n \to \infty$. В зависимости от того, какой из трех случаев (1.3.8) рассматривается, 1) $\chi^{(0)}(z) = -z\sin z\pi$; 2) $\chi^{(0)}(z) = \cos z\pi + L_2$; 3) $\chi^{(0)}(z) = z^{-1}\sin z\pi + L_3$, и главная часть характеристической функции имеет соответственно корни 1) $\pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k, \ldots$; 2) $\pm\theta_2, \pm(2+\theta_2), \pm(2-\theta_2), \ldots$ $\ldots, \pm(2k+\theta_2), \pm(2k-\theta_2), \ldots, (\pi\theta_2 = \arccos(-L_2))$; 3) ± 1, $\pm 2, \ldots, \pm k$, если $L_3 = 0$, и $\pm\left(k + \frac{1}{2} + (-1)^k(i\pi)^{-1}\ln 2kL_3 + o(1)\right)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, если $L_3 \neq 0$. Следовательно, собственные значения краевых задач (они равны квадратам корней характеристической функции) образуют такие последовательности: 1) $(k + o(1))^2$; 2) $(2k \pm \theta_2 + o(1))^2$; 3) $(k + o(1))^2$, если $L_3 = 0$, и $\left(k + \frac{1}{2} + (-1)^k(i\pi)^{-1}\ln 2kL_3 + o(1)\right)^2$, если $L_3 \neq 0$.

Результаты предыдущего параграфа позволяют получить для собственных значений асимптотические формулы, точно учитывающие степень гладкости потенциала. Выразим для этого характеристическую функцию через решения уравнения (1.3.1) $y(\lambda, x)$, $y(-\lambda, x)$, введенные в лемме 1.4.1. Подставляя в правую часть равенства (1.3.4′) вместо $c(z, x)$, $s(z, x)$ их выражения (1.4.24), (1.4.24') через $y(z, x)$, $y(-z, x)$, получаем

$$\chi(z) = 2C + A(z) + A(-z), \quad 2C = \mathfrak{I}_{12} + \mathfrak{I}_{34}, \tag{1.5.1}$$

$$A(z) = \frac{y'(z, \pi)[\mathfrak{I}_{14} - \mathfrak{I}_{42}y'(-z, 0)] + y(z, \pi)[\mathfrak{I}_{13} - \mathfrak{I}_{32}y'(-z, 0)]}{y'(z, 0) - y'(-z, 0)}. \tag{1.5.1'}$$

Отсюда, используя равенства (1.4.11'), (1.4.22), приводим характеристическое уравнение $\chi(z) = 0$ к такому виду:

$$y(z, \pi)\frac{G(z)}{\omega(z, 0)} - y(-z, \pi)\frac{G(-z)}{\omega(z, 0)} + 2C = 0,$$

где

$$G(z) = [iz + \sigma(z, \pi)][\mathfrak{I}_{14} - \mathfrak{I}_{42}\{-iz + \sigma(-z, 0)\}] + \\ + \mathfrak{I}_{13} - \mathfrak{I}_{32}[-iz + \sigma(-z, 0)]. \tag{1.5.2}$$

Умножая это уравнение на $y(z, \pi)$ и замечая, что согласно (1.4.21) $y(z, \pi)\, y(-z, \pi) = \omega(z, 0)[\omega(z, \pi)]^{-1}$, получаем

$$y^2(z, \pi)\frac{G(z)}{\omega(z, 0)} + 2Cy(z, \pi) - \frac{G(-z)}{\omega(z, \pi)} = 0,$$

$$y(z, \pi) = \frac{\omega(z, 0)}{G(z)}\left[-C \pm \sqrt{C^2 + \frac{G(z)\,G(-z)}{\omega(z, 0)\,\omega(z, \pi)}}\right].$$

Формулы (1.4.11), (1.4.21) позволяют последнее уравнение записать в следующей более симметричной форме:

$$\exp\left\{iz\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi [\sigma(z, t) - \sigma(-z, t)]\,dt\right\} = \\ \frac{\omega(z, 0)}{G(z)}\sqrt{\frac{\omega(z, \pi)}{\omega(z, 0)}}\left[-C \pm \sqrt{C^2 + \frac{G(z)\,G(-z)}{\omega(z, 0)\,\omega(z, \pi)}}\right]. \tag{1.5.3}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением разделенных граничных условий вида

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{1.5.4}$$

$$y(0) = y'(\pi) = 0, \tag{1.5.5}$$

а также периодических —

$$y(0) - y(\pi) = y'(0) - y'(\pi) = 0 \tag{1.5.6}$$

и антипериодических —

$$y(0) + y(\pi) = y'(0) + y'(\pi) = 0 \tag{1.5.7}$$

граничных условий.

Асимптотические формулы для любых других невырожденных граничных условий выводятся аналогично. Из грубых асимптотических формул следует, что квадратные корни из собственных значений рассматриваемых краевых задач образуют такие последовательности:

$$\pm\sqrt{\lambda_1},\ \pm\sqrt{\lambda_2},\ \ldots,\ \pm\sqrt{\lambda_k},\ \ldots;\quad \sqrt{\lambda_k}=k+\theta(k), \tag{1.5.4'}$$

$$\pm\sqrt{\nu_1},\ \pm\sqrt{\nu_2},\ \ldots,\ \pm\sqrt{\nu_k},\ \ldots;\quad \sqrt{\nu_k}=k-\frac{1}{2}+\delta(k), \tag{1.5.5'}$$

$$\pm\sqrt{\mu_0},\ \pm\sqrt{\mu_2^-},\ \pm\sqrt{\mu_2^+},\ \ldots,\ \pm\sqrt{\mu_{2k}^-},\ \pm\sqrt{\mu_{2k}^+},\ \ldots;$$

$$\sqrt{\mu_{2k}^{\pm}}=2k+\varepsilon^{\pm}(2k), \tag{1.5.6'}$$

$$\pm\sqrt{\mu_1^-},\ \pm\sqrt{\mu_1^+},\ \ldots,\ \pm\sqrt{\mu_{2k+1}^-},\ \pm\sqrt{\mu_{2k+1}^+},\ \ldots;$$

$$\sqrt{\mu_{2k+1}^{\pm}}=2k+1+\varepsilon^{\pm}(2k+1), \tag{1.5.7'}$$

где величины $\theta(k)$, $\delta(k)$, $\varepsilon^{\pm}(2k)$, $\varepsilon^{\pm}(2k+1)$ стремятся к нулю при $k\to\infty$ (собственные значения периодической задачи занумерованы четными номерами, а антипериодической — нечетными для того, чтобы при всех $k\to\infty$ выполнялось асимптотическое равенство $\sqrt{\mu_k^{\pm}}=k+o(1)$).

Вычисляя по формулам (1.5.1), (1.5.2) константу C и функцию $G(z)$, убеждаемся, что для рассматриваемых краевых задач

$$C=0,\quad G(z)=1, \tag{1.5.4''}$$

$$C=0,\quad G(z)=iz+\sigma(z,\pi), \tag{1.5.5''}$$

$$C=1,\quad G(z)=-\omega(z,0)\,[1+\Delta(z)], \tag{1.5.6''}$$

$$C=1,\quad G(z)=\omega(z,0)\,[1+\Delta(z)], \tag{1.5.7''}$$

где

$$\Delta(z)=\frac{\sigma(z,\pi)-\sigma(z,0)}{\omega(z,0)}. \tag{1.5.8}$$

Подставив найденные выражения для C и $G(z)$ в уравнение (1.5.3), которому удовлетворяют квадратные корни из собственных значений, получим следующие уравнения для величин $\theta(k)$, $\delta(k)$, $\varepsilon^{\pm}(k)$:

$$i\theta(k)\pi=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\sigma(z,t)-\sigma(-z,t)]\,dt\,\Big|_{z=k+\theta(k)}, \tag{1.5.9}$$

$$i\delta(k)\pi=\left\{-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\sigma(z,t)-\sigma(-z,t)]\,dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\ln\frac{1+(-iz)^{-1}\sigma(-z,\pi)}{1+(iz)^{-1}\sigma(z,\pi)}\right\}\Bigg|_{z=k-\frac{1}{2}+\delta(k)}, \tag{1.5.10}$$

$$i\varepsilon^{\pm}(k)\pi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\sigma(z, t) - \sigma(-z, t)]\,dt\,\Big|_{z=k+\varepsilon^{\pm}(k)} =$$

$$= \Big\{\frac{1}{2}\ln(1 + \Delta(z) + \Delta(-z)) - \ln(1 + \Delta(z)) +$$

$$+ \ln\Big[1 \pm i\sqrt{\frac{\Delta(z)\,\Delta(-z)}{1 + \Delta(z) + \Delta(-z)}}\Big]\Big\}\Big|_{z=k+\varepsilon^{\pm}(k)}. \tag{1.5.11}$$

Во избежание недоразумений отметим, что, во-первых, эти уравнения выполняются начиная с некоторого достаточно большого значения k, во-вторых, здесь берется та ветвь $\ln(1 + w)$, которая обращается в нуль при $w = 0$, и, в-третьих, в уравнениях (1.5.11) четным значениям k соответствуют периодические, а нечетным — антипериодические граничные условия.

Из формул (1.4.26), (1.4.15), (1.5.8), (1.4.22) следует, что при $k \to \infty$ правые части уравнений (1.5.9) — (1.5.11) убывают как k^{-1}. Поэтому при $k \to \infty$ справедливы оценки $\theta(k) = O(k^{-1})$, $\delta(k) = O(k^{-1})$, $\varepsilon^{\pm}(k) = O(k^{-1})$, позволяющие в дальнейшем использовать лемму 1.4.4.

Теорема 1.5.1. *Если* $q(x) \in W_2^n[0, \pi]$, *то собственные значения* λ_k *и* ν_k *краевых задач (1.3.1), (1.5.4) и (1.3.1), (1.5.5) удовлетворяют равенствам*

$$\sqrt{\lambda_k} = k + \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+2} a_{2j+1}(2k)^{-2j-1} +$$

$$+ \frac{1}{2}(-1)^n s_n(2k)(2k)^{-n-1} + k^{-n-2}\alpha_k,$$

$$\sqrt{\nu_k} = k - \frac{1}{2} + \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+2} b_{2j+1}(2k-1)^{-2j-1} -$$

$$-\frac{1}{2}(-1)^n s_n(2k-1)(2k-1)^{-n-1} + k^{-n-2}\beta_k,$$

где a_{2j+1}, b_{2j+1} *— не зависящие от* k *числа,*

$$a_1 = b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} q(t)\,dt,$$

$$s_n(p) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} q^{(n)}(t)\sin\Big[pt - \frac{\pi}{2}(n+1)\Big]dt,$$

и $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2 < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k|^2 < \infty$.

Доказательство. Согласно лемме 1.4.4

$$\int_0^\pi [\sigma(z,t)-\sigma(-z,t)]\,dt\,\Big|_{z=k+a+h_k} =$$

$$= 2\sum_{1\leqslant 2j+1\leqslant n+2} c_{2j+1}(2iz)^{-2j-1}\Big|_{z=k+a+h_k} -$$

$$-(2ik)^{-n-1}\left[\tilde{\sigma}_{n+1}(k+a)-(-1)^{n+1}\tilde{\sigma}_{n+1}(-k-a)\right]+k^{-n-2}\gamma_k, \tag{1.5.12}$$

причем $\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|^2<\infty$, если $h_k=O(k^{-1})$ при $k\to\infty$. Используя это равенство и вводя для удобства функцию

$$F_1(w)=\frac{1}{\pi}\sum_{1\leqslant 2j+1\leqslant n+2}(-1)^j c_{2j+1}w^{2j+1}, \tag{1.5.13}$$

уравнение (1.5.9) можно записать в такой форме:

$$\theta(k)-F_1(w)\,\Big|_{w=(2k+2\theta(k))^{-1}}=\frac{\tilde{\sigma}_{n+1}(k)-(-1)^{n+1}\tilde{\sigma}_{n+1}(-k)}{2\pi i\,(2ik)^{n+1}}+\frac{\alpha_k^{(1)}}{k^{n+2}}, \tag{1.5.14}$$

где $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k^{(1)}|^2<\infty$. Далее, из равенства

$$\ln\left[1+(iz)^{-1}\sigma(z,\pi)\right]=\ln\left[1+2\sum_{j=1}^{n}\sigma_j(\pi)(2iz)^{-j-1}+\right.$$

$$\left.+2\sigma_n(z,\pi)(2iz)^{-n-1}\right]=\ln\left[1+2\sum_{j=1}^{n}\sigma_j(\pi)(2iz)^{-j-1}\right]\times$$

$$\times\left[1+2\sigma_n(z,\pi)(2iz)^{-n-1}\{1+O(z^{-2})\}\right]=$$

$$=\ln\left[1+2\sum_{j=1}^{n}\sigma_j(\pi)(2iz)^{-j-1}\right]+$$

$$+2\sigma_n(z,\pi)(2iz)^{-n-1}\left[1-\sigma_n(z,\pi)(2iz)^{-n-1}\right]+O(z^{-n-3})$$

и леммы 1.4.4 следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1+(-iz)^{-1}\sigma(-z,\pi)}{1+(iz)^{-1}\sigma(z,\pi)}\Bigg|_{z=k-\frac{1}{2}+\delta(k)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1+2\sum_{j=1}^{n}\sigma_j(\pi)(-2iz)^{-j-1}}{1+2\sum_{j=1}^{n}\sigma_j(\pi)(2iz)^{-j-1}}\Bigg|_{z=k-\frac{1}{2}+\delta(k)}-$$

$$2\frac{\tilde{\sigma}_{n+1}\left(k-\frac{1}{2}\right)-(-1)^{n+1}\tilde{\sigma}_{n+1}\left(-k+\frac{1}{2}\right)}{2\pi i\,[i\,(2k-1)]^{n+1}}+\frac{\beta_k^{(0)}}{k^{n+2}},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\beta_k^{(0)}|^2<\infty$. Это равенство и формулы (1.5.12), (1.5.13) позволяют записать уравнение (1.5.10) в таком виде:

$$\delta(k)-F_2(w)\big|_{w=[2k-1+2\delta(k)]^{-1}}=$$

$$-\frac{\tilde{\sigma}_{n+1}\left(k-\frac{1}{2}\right)-(-1)^{n+1}\tilde{\sigma}_{n+1}\left(-k+\frac{1}{2}\right)}{2\pi i\,[i\,(2k-1)]^{n+1}}+\frac{\beta_k^{(1)}}{k^{n+2}}, \qquad (1.5.15)$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\beta_k^{(1)}|^2<\infty$, а функция

$$F_2(w)=F_1(w)+\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1+2\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_j(\pi)(-iw)^{j+1}}{1+2\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_j(\pi)(iw)^{j+1}}$$

голоморфна в окрестности нуля, нечетна и

$$F_2'(0)=F_1'(0)=\frac{c_1}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}q(t)\,dt.$$

Исследование уравнений (1.5.14) и (1.5.15) проводится аналогично. Рассмотрим, например, уравнение (1.5.14). Согласно известным теоремам о неявных функциях, определяемых аналитическими уравнениями, найдется такое число $r>0$, что в круге $|y|<r$ существует единственная аналитическая функция $\theta_1(y)$ $(\theta_1(0)=0)$, удовлетворяющая уравнению

$$\theta_1-F_1\left(\frac{y}{1+2y\theta_1}\right)=0. \qquad (1.5.16)$$

Из нечетности функции $F_1(w)$ следует, что аналитическая функция $-\theta_1(-y)$ тоже удовлетворяет этому уравнению, и в силу единственности решения $\theta_1(y)=-\theta_1(-y)$. Поэтому функция $\theta_1(y)$ нечетна, $\theta_1(y)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_{2j+1}y^{2j+1}$ $(|y|<r)$, причем $a_1=\theta_1'(0)=F_1'(0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}q(t)\,dt$. Полагая в уравнении (1.5.16) $y=(2k)^{-1}$ $((2k)^{-1}<r)$ и затем вычитая его из (1.5.14), получаем равенство

$$\theta(k)-\theta_1([2k]^{-1})-F_1([2k+2\theta(k)]^{-1})+F_1([2k+\theta_1([2k]^{-1})]^{-1})=$$

$$\frac{\tilde{\sigma}_{n+1}(k)-(-1)^{n+1}\tilde{\sigma}_{n+1}(-k)}{2\pi i\,(2ik)^{n+1}}+\frac{\alpha_k^{(1)}}{k^{n+2}},$$

из которого видно, что

$$\theta(k)-\theta_1([2k]^{-1})=\left\{\frac{\tilde{\sigma}_{n+1}(k)-(-1)^{n+1}\tilde{\sigma}_{n+1}(-k)}{2\pi i\,(2ik)^{n+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_k^{(1)}}{k^{n+2}}\right\}(1+O(k^{-2})), \tag{1.5.17}$$

так как

$$F_1([2k+2\theta(k)]^{-1})-F_1([2k+\theta_1([2k]^{-1})]^{-1})=$$
$$=\{\theta(k)-\theta_1([2k]^{-1})\}\,O(k^{-2}).$$

Далее, согласно (1.4.25), (1.4.20′)

$$\tilde{\sigma}_{n+1}(k)=\int_0^\pi \sigma_{n+1}(\pi-t)\,e^{-2ikt}dt=\int_0^\pi \sigma_{n+1}(x)\,e^{2ikx}dx=$$

$$=(-1)^n\int_0^\pi q^{(n)}(x)\,e^{2ikx}dx+\int_0^\pi S_{n-2}(x)\,e^{2ikx}dx=$$

$$=(-1)^n\int_0^\pi q^{(n)}(x)\,e^{2ikx}dx+\frac{S_{n-2}(\pi)-S_{n-2}(0)}{2ik}-$$

$$-\frac{1}{2ik}\int_0^\pi S'_{n-2}(x)\,e^{2ikx}dx=$$

$$=(-1)^n\int_0^\pi q^{(n)}(x)\,e^{2ikx}dx+\frac{S_{n-2}(\pi)-S_{n-2}(0)}{2ik}-\frac{p(k)}{k}, \tag{1.5.18}$$

где $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|p(k)|^2<\infty$, поскольку функция $S_{n-2}(x)$, являясь полиномом от $q(x)$, $q'(x), \ldots, q^{(n-2)}(x)$, имеет суммируемую с квадратом производную. Следовательно,

$$\tilde{\sigma}_{n+1}(k)-(-1)^{n+1}\tilde{\sigma}_{n+1}(-k)=$$

$$=(-1)^n\int_0^\pi q^{(n)}(x)\,[e^{2ikx}-(-1)^{n+1}e^{-2ikx}]\,dx+$$

$$+\frac{S_{n-2}(\pi)-S_{n-2}(0)}{2ik}(1+(-1)^{n+1})-\frac{p(k)+(-1)^{n+1}p(-k)}{k}=$$

$$=(i)^{n+2}(-1)^n\pi s_n(2k)+\frac{S_{n-2}(\pi)-S_{n-2}(0)}{2ik}(1+(-1)^{n+1})+\frac{p^{(1)}(k)}{k},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |p^{(1)}(k)|^2 < \infty$ и

$$s_n(2k) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} q^{(n)}(x)\sin\left[2kx - \frac{\pi}{2}(n+1)\right]dx.$$

Подставив это выражение в равенство (1.5.17), получим

$$\theta(k) - \theta_1([2k]^{-1}) = \frac{(-1)^n}{2}\frac{s_n(2k)}{(2k)^{n+1}} +$$

$$+ \frac{S_{n-2}(\pi) - S_{n-2}(0)}{2\pi i(2ik)^{n+2}}(1 + (-1)^{n+1}) + \frac{\alpha_k^{(2)}}{k^{n+2}},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^{(2)}|^2 < \infty$. Отсюда, замечая, что $\theta_1([2k]^{-1}) = \sum\limits_{1\leqslant 2j+1\leqslant n+2} a_{2j+1}(2k)^{-2j-1} + O(k^{-n-3})$, приходим к окончательной формуле

$$\sqrt{\lambda_k} = k + \theta(k) = k + \sum_{1\leqslant 2j+1\leqslant n+2} a_{2j+1}(2k)^{-2j-1} +$$

$$+ \hat{a}_{n+2}(2k)^{-n-2} + \frac{(-1)^n}{2}\frac{s_n(2k)}{(2k)^{n+1}} + \frac{\alpha_k}{k^{n+2}},$$

в которой $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$, $\hat{a}_{n+2} = 0$, если $n+2$ четно, и $\hat{a}_{n+2} = \pi^{-1}(i)^{-n-3}[S_{n-2}(\pi) - S_{n-2}(0)]$, если $n+2$ нечетно.

Асимптотическая формула для $\sqrt{\nu_k}$ доказывается аналогично, исходя из равенства (1.5.15).

Следствие. *Для того чтобы комплекснозначная функция $q(x) \in L_2(0, \pi)$ принадлежала пространству $W_2^n[0, \pi]$, необходимо и достаточно, чтобы собственные значения λ_k и ν_k краевых задач (1.3.1), (1.5.4) и (1.3.1), (1.5.5) удовлетворяли асимптотическим равенствам*

$$\sqrt{\lambda_k} = k + \sum_{1\leqslant 2j+1\leqslant n+2} \tilde{a}_{2j+1}(2k)^{-2j-1} + \tilde{\alpha}_k k^{-n-1},$$

$$\sqrt{\nu_k} = k - \frac{1}{2} + \sum_{1\leqslant 2j+1\leqslant n+2} \tilde{b}_{2j+1}(2k-1)^{-2j-1} + \tilde{\beta}_k k^{-n-1},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \{|\tilde{\alpha}_k|^2 + |\tilde{\beta}_k|^2\} < \infty$.

Доказательство. Необходимость этих условий является прямым следствием теоремы 1.5.1. Достаточность доказывается от противного. Предположим, что $q(x) \in W_2^m[0, \pi]$, но

$q(x) \notin W_2^{m+1}[0, \pi]$, где $m < n$. Тогда по теореме 1.5.1

$$\sqrt{\lambda_k} = k + \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant m+2} a_{2j+1}(2k)^{-2j-1} + \frac{(-1)^m}{2} \frac{s_m(2k)}{(2k)^{m+1}} + \frac{\alpha_k}{k^{m+2}},$$

$$\sqrt{\nu_k} = k - \frac{1}{2} + \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant m+2} b_{2j+1}(2k-1)^{-2j-1} -$$

$$- \frac{(-1)^m}{2} \frac{s_m(2k-1)}{(2k-1)^{m+1}} + \frac{\beta_k}{k^{m+2}},$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} \{ |\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 \} < \infty$. Сравнение этих равенств с данными в условии показывает, что $a_{2j+1} = \tilde{a}_{2j+1}$, $b_{2j+1} = \tilde{b}_{2j+1}$ при $2j + 1 \leqslant \leqslant m + 1$ и, следовательно,

$$(-1)^m s_m(p) = \begin{cases} p^{-1}\varepsilon_p, & m = 2l, \\ p^{-1}[\tilde{a}_{m+2}(1 + (-1)^p) - \tilde{b}_{m+2}(1 - (-1)^p) + \delta_p], & m = 2l - 1, \end{cases}$$

причем $\sum_{p=1}^{\infty} |\varepsilon_p|^2 < \infty$, $\sum_{p=1}^{\infty} |\delta_p|^2 < \infty$. Заметим теперь, что числа $s_m(p)$ являются коэффициентами Фурье функции $q^{(m)}(x)$ по ортогональной системе $\sin\left[px - \frac{\pi}{2}(m+1)\right]$. Поэтому при четных m функция $(-1)^{(m)} q^{(m)}(x)$ разлагается в ряд Фурье

$$\text{const} + (-1)^{l+1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_p}{p} \cos px,$$

а при нечетных m — в ряд

$$(-1)^l \left\{ \tilde{a}_{m+2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin 2px}{p} - 2\tilde{b}_{m+2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(2p-1)x}{2p-1} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\delta_p}{p} \sin px \right\}.$$

Так как при $0 < x < \pi$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin 2px}{p} = \frac{\pi}{2} - x, \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(2p-1)x}{2p-1} = \frac{\pi}{4}$$

и $\sum_{p=1}^{\infty} |\varepsilon_p|^2 < \infty$, $\sum_{p=1}^{\infty} |\delta_p|^2 < \infty$, то из этих разложений вытекает, что в обоих случаях функция $q^{(m)}(x)$ имеет суммируемую с квадратом производную. Следовательно, $q(x) \in W_2^{m+1}[0, \pi]$, что противоречит предположению.

Обозначим через $\widetilde{W}_2^n [0, \pi]$ подпространство пространства $W_2^n [0, \pi]$, состоящее из функций $f(x) \in W_2^n [0, \pi]$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(\pi)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Заметим, что $W_2^0 [0, \pi] = \widetilde{W}_2^0 [0, \pi] = L_2(0, \pi)$.

Теорема 1.5.2. *Если $q(x) \in \widetilde{W}_2^n [0, \pi]$ и $\operatorname{Im} q(x) = 0$, то собственные значения $\mu_{2k}^\pm$ периодической и собственные значения $\mu_{2k+1}^\pm$ антипериодической краевых задач (1.3.1), (1.5.6) и (1.3.1), (1.5.7) удовлетворяют равенствам*

$$\sqrt{\mu_k^\pm} = k + \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+2} a_{2j+1} (2k)^{-2j-1} \pm | e_n(2k) | (2k)^{-n-1} + \gamma_k^\pm k^{-n-2},$$

в которых числа a_{2j+1} те же, что в теореме 1.5.1,

$$e_n(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q^{(n)}(x) e^{-ipx}\, dx$$

и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} | \gamma_k^\pm |^2 < \infty$.

Доказательство. Принадлежность потенциала $q(x)$ подпространству $\widetilde{W}_2^n [0, \pi]$ влечет за собой равенства $\sigma_k(0) = \sigma_k(\pi)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, поскольку функции $\sigma_k(x)$ являются полиномами от $q(x), \ldots, q^{(k-1)}(x)$. Поэтому

$$\sigma(z, \pi) - \sigma(z, 0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k(\pi) - \sigma_k(0)}{(2iz)^k} + \frac{\sigma_n(z, \pi)}{(2iz)^n} = \frac{\sigma_n(z, \pi)}{(2iz)^n}$$

и согласно (1.5.8), (1.4.23)

$$\Lambda(z) = \frac{\sigma_n(z, \pi)}{(2iz)^{n+1}} \left[1 + \frac{\sigma(z, 0) - \sigma(-z, 0)}{2iz} \right]^{-1} = \frac{\sigma_n(z, \pi)}{(2iz)^{n+1}} [1 + O(z^{-2})].$$

Используя эту формулу, оценку $\varepsilon^\pm(k) = O(k^{-1})$, разложения $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$, $\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2} x + O(x^2)$ $(x \to 0)$ и лемму 1.4.4, устанавливаем, что правая часть уравнений (1.5.11) равна

$$\frac{\tilde{\sigma}_{n+1}(k) - (-1)^{n+1} \tilde{\sigma}_{n+1}(-k)}{2(2ik)^{n+1}} \pm$$

$$\pm i \frac{\sqrt{\sigma_n(z, \pi) \sigma_n(-z, \pi)}}{(2k)^{n+1}} \Bigg|_{z = k + \varepsilon^\pm(k)} + \frac{\gamma_k^{(0)\pm}}{k^{n+2}},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} | \gamma_k^{(0)\pm} |^2 < \infty$. А из равенств (1.5.12), (1.5.18) видно, что левая часть уравнений (1.5.11) равна

$$i\pi\varepsilon^{\pm}(k) - i\pi F_1(w)\Big|_{w=[2k+2\varepsilon^{\pm}(k)]^{-1}} -$$
$$- \frac{\tilde{\sigma}_{n+1}(k) - (-1)^{n+1}\tilde{\sigma}_{n+1}(-k)}{2(2ik)^{n+1}} + \frac{\gamma_k^{(1)\pm}}{k^{n+2}},$$

где $\sum\limits_{k=0}^{\infty} | \gamma_k^{(1)\pm} |^2 < \infty$. Поэтому числа $\varepsilon^{\pm}(k)$ удовлетворяют уравнениям

$$\varepsilon^{\pm}(k) - F_1(w)\Big|_{w=[2k+2\varepsilon^{\pm}(k)]^{-1}} =$$
$$= \pm \frac{\sqrt{\sigma_n(z, \pi)\sigma_n(-z, \pi)}}{\pi(2k)^{n+1}}\Bigg|_{z=k+\varepsilon^{\pm}(k)} + \frac{\gamma_k^{(0)\pm} - \gamma_k^{(1)\pm}}{k^{n+2}},$$

отличающимся от уравнений (1.5.14) только правой частью. Отсюда, так же как при доказательстве теоремы 1.5.1, вытекает, что числа $\varepsilon^{\pm}(k)$ удовлетворяют равенствам

$$\varepsilon^{\pm}(k) =$$
$$= \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+2} a_{2j+1}(2k)^{-2j-1} \pm \frac{\sqrt{\sigma_n(z, \pi)\sigma_n(-z, \pi)}}{\pi(2k)^{n+1}}\Bigg|_{z=k+\varepsilon^{\pm}(k)} + \frac{\gamma_k^{(2)\pm}}{k^{n+2}}, \tag{1.5.19}$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} | \gamma_k^{(2)\pm} |^2 < \infty$. До сих пор мы нигде не использовали вещественность потенциала $q(x)$. Заметим теперь, что периодическая и антипериодическая краевые задачи с вещественным потенциалом самосопряженны, их собственные значения $\mu_k^{\pm} = [k + \varepsilon^{\pm}(k)]^2$ вещественны и $\sigma_n(z, \pi) = \overline{\sigma_n(-z, \pi)}$ при вещественных значениях z. Поэтому при больших значениях k

$$\sqrt{\sigma_n(z, \pi)\sigma_n(-z, \pi)}\Big|_{z=k+\varepsilon^{\pm}(k)} = |\sigma_n(k + \varepsilon^{\pm}(k), \pi)|,$$

откуда, используя лемму 1.4.4 и равенство (1.5.18), находим

$$\sqrt{\sigma_n(z, \pi)\sigma_n(-z, \pi)}\Big|_{z=k+\varepsilon^{\pm}(k)} = \left|\int_0^{\pi} q^{(n)}(x)\, e^{-2ikx} dx\right| + \frac{\gamma_k^{(3)\pm}}{k},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} | \gamma_k^{(3)\pm} |^2 < \infty$. (При этом нужно учесть равенство $S_{n-2}(\pi) - S_{n-2}(0) = 0$, вытекающее из принадлежности потенциала $q(x)$ подпространству $\tilde{W}_2^n[0, \pi]$.) Подставив это выражение в правую часть равенства (1.5.19), окончательно получим $\sqrt{\mu_k^\pm} = k + \varepsilon^\pm(k) = k + \sum_{1\leqslant 2j+1\leqslant n+2} a_{2j+1}(2k)^{-2j-1} \pm |e_n(2k)|(2k)^{-n-1} + \gamma_k^\pm k^{-n-2}$, где

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k^\pm|^2 < \infty \quad \text{и}$$

$$e_n(2k) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q^{(n)}(x)\, e^{-2ikx}dx,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Для того чтобы вещественная функция $q(x) \in L_2[0, \pi]$ *принадлежала пространству* $\widetilde{W}_2^n[0, \pi]$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2(n+1)} \left|\sqrt{\mu_k^+} - \sqrt{\mu_k^-}\right|^2 < \infty, \tag{1.5.20}$$

где $\mu_k^\pm$ *— собственные значения периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых уравнением (1.3.1).*

Доказательство. Необходимость очевидна из теоремы 1.5.2. Достаточность доказывается от противного. Предположим, что $q(x) \in \widetilde{W}_2^m[0, \pi]$, но $q(x) \notin \widetilde{W}_2^{m+1}[0, \pi]$, где $m < n$. Тогда по теореме 1.5.2

$$\sqrt{\mu_k^+} - \sqrt{\mu_k^-} = \frac{2|e_m(2k)|}{(2k)^{m+1}} + \frac{\gamma_k^+ - \gamma_k^-}{k^{m+2}},$$

$$4k|e_m(2k)| = 2^{m+2}(\gamma_k^- - \gamma_k^+) + \left(\sqrt{\mu_k^+} - \sqrt{\mu_k^-}\right)(2k)^{n+1}(2k)^{m+1-n},$$

причем $m + 1 - n \leqslant 0$. Поэтому из условия (1.5.20) следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} |2ke_m(2k)|^2 < \infty$, и так как числа $e_m(2k)$ являются коэффициентами Фурье функции $q^{(m)}(x)$ по ортогональной системе e^{2ikx}, то $q^{(m)}(0) = q^{(m)}(\pi)$, а функция $q^{(m)}(x)$ имеет суммируемую с квадратом производную. Следовательно, $q(x) \in \widetilde{W}_2^{m+1}[0, \pi]$ вопреки предположению.

Отметим в заключение, что в случае, когда потенциал $q(x)$ бесконечно дифференцируем, собственные значения краевых задач разлагаются при $k \to \infty$ в асимптотические ряды. Например, из теоремы 1.5.1 следует, что в этом случае для собственных значений краевых задач (1.3.1), (1.5.4) и (1.3.1), (1.5.5) справедливы такие асимптотические разложения:

$$\sqrt{\lambda_k} \simeq k + \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1}(2k)^{-2j-1}, \quad \sqrt{\nu_k} \simeq k - \frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} b_{2j+1}(2k-1)^{-2j-1}.$$

Подобные разложения можно получить при любых невырожденных граничных условиях, исходя из уравнения (1.5.3) и вытекающих из него аналогов вспомогательных уравнений (1.5.16). При этом в общем случае собственные значения краевой задачи разбиваются на две серии, для каждой из которых получается свой асимптотический ряд. Это обусловлено тем, что в уравнении (1.5.3) перед радикалом стоит два знака, каждому из которых соответствует свое вспомогательное уравнение типа (1.5.16).

Из грубых асимптотических формул, приведенных в начале этого параграфа, видно, что начиная с некоторого значения $k = k_0$ в каждой области $\Pi_k \setminus \Pi_{k-1}$ лежат четыре корня характеристической функции, симметрично расположенные относительно нуля в силу ее четности. Пару этих корней с положительной вещественной частью обозначим через α_k^-, α_k^+ ($\operatorname{Re}\alpha_k^- \leqslant \operatorname{Re}\alpha_k^+$), а соответствующие им собственные значения $(\alpha_k^-)^2$, $(\alpha_k^+)^2$ — через μ_k^-, μ_k^+. Пронумеруем все другие собственные значения так, чтобы неравенства $0 \leqslant \operatorname{Re}\sqrt{\mu_k^-} \leqslant \operatorname{Re}\sqrt{\mu_k^+} \leqslant \operatorname{Re}\sqrt{\mu_{k+1}^-}$ сохранились и при $k < k_0$. Занумерованные собственные значения образуют последовательность, обозначим ее через μ. Из грубых асимптотических формул видно, что в зависимости от типа граничных условий нумерация начинается с нуля или с единицы.

Не останавливаясь на доказательствах, в существенном повторяющих первую часть доказательства теоремы 1.5.1, приведем асимптотические ряды для $\sqrt{\mu_k^-}$, $\sqrt{\mu_k^+}$:

1) $\mathcal{J}_{42} \neq 0, \quad \mu = \{\mu_0^+, \mu_1^-, \mu_1^+, \mu_2^-, \mu_2^+, \ldots\}$,

$$\sqrt{\mu_k^-} \simeq (2k-1) + \sum_{j=0}^{\infty} c_{2j+1}^- (2k-1)^{-2j-1},$$

$$\sqrt{\mu_k^+} \simeq 2k + \sum_{j=0}^{\infty} c_{2j+1}^+ (2k)^{-2j-1};$$

2) $\mathcal{J}_{42} = 0, \quad \mathcal{J}_{14} + \mathcal{J}_{32} \neq 0, \quad L_2 = (\mathcal{J}_{12} + \mathcal{J}_{34})(\mathcal{J}_{14} + \mathcal{J}_{32})^{-1}$,
$\theta_2 = \pi^{-1}\arccos(-L_2)$.

При $\theta_2 \neq 0$
$\mu = \{\mu_1^-, \mu_1^+, \mu_2^-, \mu_2^+, \ldots\}$,

$$\sqrt{\mu_k^-} \simeq 2k - 2 + \theta_2 + \sum_{j=0}^{\infty} d_{2j+1}(2k-2+\theta_2)^{-2j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} d_{2j}(2k-2+\theta_2)^{-2j},$$

$$\sqrt{\mu_k^+} \simeq 2k - \theta_2 + \sum_{j=0}^{\infty} d_{2j+1}(2k-\theta_2)^{-2j-1} - \sum_{j=1}^{\infty} d_{2j}(2k-\theta_2)^{-2j}.$$

При $\theta_2 = 0$

$$\mu = \{\mu_0^+, \mu_1^-, \mu_1^+, \mu_2^-, \mu_2^+, \ldots\},$$

$$\sqrt{\mu_k^-} \simeq 2k + \sum_{j=0}^{\infty} l_{2j+1}(2k)^{-2j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} l_{2j}(2k)^{-2j},$$

$$\sqrt{\mu_k^+} \simeq 2k + \sum_{j=0}^{\infty} l_{2j+1}(2k)^{-2j-1} - \sum_{j=1}^{\infty} l_{2j}(2k)^{-2j};$$

3°) $\mathcal{J}_{42} = 0, \quad \mathcal{J}_{14} + \mathcal{J}_{32} = \mathcal{J}_{12} + \mathcal{J}_{34} = 0, \quad \mathcal{J}_{13} \neq 0,$

$$\mu = \{\mu_1^-, \mu_1^+, \mu_2^-, \mu_2^+, \ldots\},$$

$$\sqrt{\mu_k^-} \simeq (2k-1) + \sum_{j=0}^{\infty} p_{2j+1}(2k-1)^{-2j-1},$$

$$\sqrt{\mu_k^+} \simeq 2k + \sum_{j=0}^{\infty} p_{2j+1}(2k)^{-2j-1}.$$

Коэффициенты этих асимптотических рядов выражаются через потенциал $q(x)$ и определители $\mathcal{J}_{\alpha\beta}$, составленные из столбцов матрицы граничных условий. Фактическое вычисление их удобно производить с помощью рекуррентных формул. Если потенциал $q(x)$ имеет лишь конечное число n производных, то в рядах сохраняются члены, убывающие при $k \to \infty$ не быстрее чем k^{-n}, а остаток имеет порядок $o(k^{-n})$ и, вообще говоря, не может быть разложен в асимптотический ряд. Возведя эти асимптотические разложения в четную степень $2m$, получим такие равенства:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ (\mu_k^{\pm})^m = M_{2m}^{\pm}(k) + O(k^{-2}),\\ &2)\ (\mu_k^{\pm})^m = M_{2m}^{\pm}(k) \pm \frac{\gamma_{2m}}{2k} + O(k^{-2}),\\ &3^\circ)\ (\mu_k^{\pm})^m = M_{2m}^{\pm}(k) + O(k^{-2}), \end{aligned}\right\} \tag{1.5.21}$$

где $M_{2m}^{\pm}(x)$ — некоторые полиномы степени $2m$. Из этих равенств видно, что всегда

$$(\mu_k^+)^m - M_{2m}^+(k) + (\mu_k^-)^m - M_{2m}^-(k) = O(k^{-2}),$$

так что ряды

$$s_m = \sum_k{}' \left[(\mu_k^+)^m - M_{2m}^+(k) + (\mu_k^-)^m - M_{2m}^-(k)\right]$$

абсолютно сходятся. Здесь штрих означает, что слагаемое с $k = 0$ отсутствует, если нумерация членов последовательности μ начинается с единицы, и равно $(\mu_0^+)^m - M_{2m}^m(0)$, если нумерация начинается с нуля. Сумма s_m такого ряда называется регуляризованным следом (m-го порядка), а формулы, выражающие регуляризованный след s_m через потенциал $q(x)$ и определители $\mathfrak{J}_{\alpha,\beta}$, — формулами следов. Так как собственные значения являются квадратами корней характеристической функции $\chi(z) = \chi(-z)$, то по теореме о вычетах

$$2\sum_{k\leqslant l}[(\mu_k^+)^m + (\mu_k^-)^m] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_l} z^{2m} d\ln\chi(z), \tag{1.5.22}$$

где K_l — допустимая для данной краевой задачи последовательность контуров, введенных в лемме 1.3.2 (т. е. в случаях 1, 3° $K_l = C\left(2l+\frac{1}{2}\right)$, а в случае 2 $K_l = C(2l+1)$, если $\theta_2 = 0$, и $K_l = C(2l)$, если $\theta_2 \neq 0$).

Пусть $q(x) \in W_2^n[0, \pi]$. Введем вспомогательную функцию $y_n(z, x) = e^{izx}P_n(z, x) = e^{izx}\left[1 + \frac{u_1(x)}{2iz} + \cdots + \frac{u_n(x)}{(2iz)^n}\right]$ и обозначим через $\chi_n(z)$, $A_n(z)$ функции, которые получаются из правых частей формул (1.5.1), (1.5.1′), если в них всюду заменить $y(z, x)$, $y(-z, x)$ на $y_n(z, x)$, $y_n(-z, x)$:

$$\chi_n(z) = 2C + A_n(z) + A_n(-z), \quad 2C = \mathfrak{J}_{12} + \mathfrak{J}_{34}, \tag{1.5.23}$$

$$\begin{aligned} A_n(z) = e^{iz\pi}\{2iz + P_n'(z, 0) - P_n'(-z, 0)\}^{-1} \times \\ \times \{[izP_n(z, \pi) + P_n'(z, \pi)][\mathfrak{J}_{14} - \mathfrak{J}_{42}\{-iz + P_n'(-z, 0)\}] + \\ + P_n(z, \pi)[\mathfrak{J}_{13} - \mathfrak{J}_{32}(-iz + P_n'(-z, 0))]\}. \end{aligned} \tag{1.5.24}$$

Лемма 1.5.1. *Если $2m \leqslant n$, то для всех краевых задач с невырожденными граничными условиями и потенциалом $q(x) \in W_2^n[0, \pi]$ справедливы равенства*

$$\lim_{l\to\infty}\oint_{K_l} z^{2m} d\{\ln\chi(z) - \ln\chi_n(z)\} = 0,$$

где K_l — любая допустимая для данной краевой задачи последовательность контуров.

Доказательство. Согласно лемме 1.4.1

$$y(z, \pi) - y_n(z, \pi) = e^{iz\pi}u_{n+1}(z, \pi)(2iz)^{-n-1},$$

$$y'(z, \pi) - y_n'(z, \pi) = e^{iz\pi}\{u_{n+1}'(z, \pi)(2iz)^{-1} + 0{,}5u_n(z, \pi)\}(2iz)^{-n}$$

и, кроме того,

$$y'(z, 0) = y_n'(z, 0) = iz + P_n'(z, 0) = iz + \sum_{k=0}^{n}\sigma_k(0)(2iz)^{-k},$$

так как $u_{n+1}(z, 0) = u'_{n+1}(z, 0) = 0$. Из этих равенств, формул (1.4.8), (1.4.9) и леммы 1.3.1 вытекает, что при $|z| \to \infty$

$$\chi_n(z) - \chi(z) = e^{|\operatorname{Im} z\pi|}(2iz)^{-n-1}\{z\mathcal{J}_{42}o(1) + (\mathcal{J}_{32} + \mathcal{J}_{14})O(1) + o(1)\},$$

откуда, используя оценки $|\chi(z)|$ на контурах K_l, полученные при доказательстве леммы 1.3.2, устанавливаем, что

$$\frac{\chi_n(z) - \chi(z)}{\chi(z)} = o(z^{-n})$$

равномерно на контурах K_l начиная с некоторого l. Следовательно, оценка

$$\ln\frac{\chi_n(z)}{\chi(z)} = \ln\left\{1 + \frac{\chi_n(z) - \chi(z)}{\chi(z)}\right\} = o(z^{-n})$$

на этих контурах тоже выполняется равномерно, а функция $\ln\chi_n(z)[\chi(z)]^{-1}$ однозначна и голоморфна на них. Поэтому

$$\oint_{K_l} z^{2m}d\{\ln\chi(z) - \ln\chi_n(z)\} = -\oint_{K_l} z^{2m}d\ln\frac{\chi_n(z)}{\chi(z)} =$$

$$2m\oint_{K_l} z^{2m-1}\ln\frac{\chi_n(z)}{\chi(z)}dz = 2m\oint_{K_l} z^{2m-1-n}o(1)\,dz,$$

откуда при $2m - n \leqslant 0$ вытекает доказываемое равенство, так как модуль z^{2m-1-n} на контуре K_l не превышает C_1l^{-1}, а длина контура не превышает C_2l.

Нам понадобится еще следующая простая лемма.

Лемма 1.5.2. *Пусть* $F(z) = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} g_\alpha(z)P_\alpha(z)$, *где* $g_\alpha(z)$ — *мероморфные периодические с периодом 2 функции,* $P_\alpha(z)$ — *полиномы степени, не большей* m. *Тогда вычеты функции* $F(z)$ *в последовательности точек* $2k + \theta$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ *равны* $R_\theta(2k + \theta)$, *где* $R_\theta(z)$ — *некоторый полином степени, не большей* m.

Доказательство. Так как $g_\alpha(z + 2k) \equiv g_\alpha(z)$, то

$$\operatorname{Res} F(z)|_{z=2k+\theta} = \operatorname{Res} F(w + 2k + \theta)|_{w=0} =$$

$$\operatorname{Res}\sum_{\alpha=1}^{N} g_\alpha(w + 2k + \theta)P_\alpha(w + 2k + \theta)|_{w=0} =$$

$$\operatorname{Res}\sum_{\alpha=1}^{N}\left\{g_\alpha(w + \theta)\sum_{j=0}^{m}\frac{P_\alpha^{(j)}(2k + \theta)}{j!}w^j\right\}\Bigg|_{w=0} = R_\theta(2k + \theta),$$

где $R_\theta(z)_m$ — некоторый полином степени, не большей m,

$$R_\theta(z) = \sum_{j=0}^{m}\frac{P_\alpha^{(j)}(z)}{j!}\left\{\sum_{\alpha=1}^{N}\operatorname{Res} g_\alpha(w + \theta)w^j|_{w=0}\right\},$$

что и требовалось доказать.

Для вывода формулы следов целесообразно преобразовать выражение (1.5.24), выделив в нем множители, определяющие поведение функции $A_n(z)$ при $z \to \infty$. Для этого вынесем функцию $P_n(z, \pi)$ за скобки и воспользуемся затем тождеством (1.4.14). В результате после элементарных преобразований получим

$$A_n(z) = e^{iz\pi} B_n(z), \quad B_n(z) = \frac{P_n(z, \pi)\, H_n(z)}{2Q_n(z)} (1 + z^{-n-1} r_n(z)), \tag{1.5.25}$$

где

$$\left.\begin{aligned} P_n(z, \pi) &= 1 + \sum_{j=1}^{n} u_j(\pi)(2iz)^{-j}, \\ Q_n(z) &= 1 + 2 \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n} \sigma_{2j+1}(0)(2iz)^{-2j-2}, \end{aligned}\right\} \tag{1.5.25$'$}$$

$$\begin{aligned} H_n(z) = {} & iz\mathcal{J}_{42} + (\mathcal{J}_{14} + \mathcal{J}_{32}) + (iz)^{-1}\mathcal{J}_{13} + \\ & + \mathcal{J}_{42}\left[\sum_{j=1}^{n} \{\sigma_j(\pi) - (-1)^j \sigma_j(0)\}(2iz)^{-j} + \sum_{j=2}^{n-1} \gamma_j (2iz)^{-j-1}\right] + \\ & + (iz)^{-1}\left[\mathcal{J}_{14}\sum_{j=1}^{n} \sigma_j(\pi)(2iz)^{-j} - \mathcal{J}_{32}\sum_{j=1}^{n} \sigma_j(0)(-2iz)^{-j}\right], \end{aligned} \tag{1.5.25$''$}$$

$$\gamma_j = 2\sum_{l=1}^{j-1} (-1)^l \sigma_l(0)\sigma_{j-l}(\pi),$$

а функция $r_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} r_n(j) z^{-j}$ голоморфна и ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки.

Теорема 1.5.3. *Если* $q(x) \in W_2^n[0, \pi]$ *и* $2m \leqslant n$, *то справедливы следующие формулы следов:*

1) $\mathcal{J}_{42} \neq 0$; $2s_m = -M_{2m}^{+}(0) + \sum \{p_i^{2m} - q_j^{2m} + h_l^{2m}\}$;

2) $\mathcal{J}_{42} = 0$, $\mathcal{J}_{14} + \mathcal{J}_{32} \neq 0$; $2s_m = \sum \{p_i^{2m} - q_j^{2m} + h_l^{2m}\}$;

3°) $\mathcal{J}_{42} = \mathcal{J}_{14} + \mathcal{J}_{32} = \mathcal{J}_{12} + \mathcal{J}_{34} = 0$, $\mathcal{J}_{13} \neq 0$;

$2s_m = M_{2m}^{+}(0) + \sum \{p_i^{2m} - q_j^{2m} + h_l^{2m}\}$,

где p_i, q_j, h_l — *корни полиномов* $z^n P_n(z, \pi)$, $z^{n+1}Q_n(z)$, $z^{n+1}H_n(z)$.

Доказательство. Из формул (1.5.25), (1.5.25′), (1.5.25″) видно, что в зависимости от того, какой из трех случаев (1, 2, 3°) рассматривается, функция $B_n(z)$ равна

$$1)\ \frac{iz\mathcal{J}_{42}}{2}(1 + b_n(z)), \quad 2)\ \frac{(\mathcal{J}_{14} + \mathcal{J}_{32})}{2}(1 + b_n(z)), \quad 3°)\ \frac{\mathcal{J}_{13}}{2iz}(1 + b_n(z)), \tag{1.5.26}$$

где $b_n(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_n(j) z^{-j}$ — голоморфные в окрестности бесконечно удаленной точки функции. Положим

$$\rho(z) = \sqrt{(1 + b_n(z))(1 + b_n(-z))}, \quad \gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1 + b_n(z)}{1 + b_n(-z)},$$

так что

$$1 + b_n(z) = \rho(z) e^{i\pi\gamma(z)}. \tag{1.5.27}$$

Поскольку функция $\rho(z)$ четна, а функция $\gamma(z)$ нечетна и обе они голоморфны в окрестности бесконечно удаленной точки,

$$\rho(z) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{2j} z^{-2j}, \quad \gamma(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{2j+1} z^{-2j-1}.$$

Сопоставляя равенства (1.5.23), (1.5.25) и (1.5.26), (1.5.27), получаем

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \chi_n(z) = -z\mathcal{J}_{42}\rho(z)\left[1 + \frac{\delta_1(z)}{\sin w\pi}\right]\sin w\pi,\\
&2)\ \chi_n(z) = (\mathcal{J}_{14} + \mathcal{J}_{42})\rho(z)\left[1 + \frac{\delta_2(z)}{\cos w\pi + L_2}\right][\cos w\pi + L_2],\\
&3)\ \chi_n(z) = z^{-1}\mathcal{J}_{13}\rho(z)\sin w\pi,
\end{aligned}\right\} \tag{1.5.28}$$

причем функции

$$w = w(z) = z + \gamma(z) = z + \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{2j+1} z^{-2j-1}, \tag{1.5.29}$$

$$\delta_1(z) = \frac{-2C}{z\rho(z)\mathcal{J}_{42}} = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{2j+1}^{(1)} z^{-2j-1}, \tag{1.5.30}$$

$$\delta_2(z) = \frac{2C}{\mathcal{J}_{14} + \mathcal{J}_{32}} \frac{1 - \rho(z)}{\rho(z)} = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{2j}^{(2)} z^{-2j} \tag{1.5.30'}$$

голоморфны в окрестности бесконечно удаленной точки.

Важным свойством функции $w(z)$ является ее однолистность в окрестности бесконечно удаленной точки, вытекающая из неравенства

$$|w(z_1) - w(z_2)| \geqslant |z_1 - z_2| - |\gamma(z_1) - \gamma(z_2)| \geqslant$$
$$\geqslant |z_1 - z_2| \left\{1 - \sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_{2j+1}| R^{-2j-2}(2j+1)\right\} \geqslant \frac{|z_1 - z_2|}{2},$$

справедливого в области $|z| > R$ при достаточно большом R. Однолистность и нечетность функции $w(z)$ гарантирует существование голоморфной и нечетной обратной функции

$$z(w) = w + \sum_{j=0}^{\infty} g_{2j+1} w^{-2j-1}. \tag{1.5.31}$$

Доказательство формулы следов проведем подробно для случая 1. Пусть $K_l = C\left(l + \frac{1}{2}\right)$ — последовательность допустимых для случая 1 контуров. Из равенства (1.5.28) следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_l} z^{2m} d\ln \chi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_l} z^{2m} d\ln z\rho(z) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_l} z^{2m} d\ln \sin w\pi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_l} z^{2m} d\ln\left(1 + \frac{\delta_1(z)}{\sin w\pi}\right) = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3. \tag{1.5.32}$$

Рассмотрим отдельно каждый из интегралов $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$. Так как в данном случае

$$B_n(z) = \frac{iz\mathcal{J}_{42}}{2}(1 + b_n(z)) = \frac{iz\mathcal{J}_{42}}{2}\rho(z)\, e^{i\pi\gamma(z)},$$

то согласно (1.5.25)

$$d\ln z\rho(z) = d\ln B_n(z) - i\pi\gamma'(z)\,dz = d\ln z^n P_n(z, \pi) +$$
$$+ d\ln z^{n+1} H_n(z) - d\ln z^{n+1} Q_n(z) - d\ln z^n -$$
$$- i\pi\gamma'(z)\,dz + d\ln(1 + z^{-n-1} r_n(z)),$$

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_l} z^{2m} d\,[\ln z^n P_n(z, \pi) + \ln z^{n+1} H_n(z) - \ln z^n Q_n(z)] -$$
$$- \frac{n}{2\pi i}\oint_{K_l} z^{2m-1} dz - \frac{1}{2}\oint_{K_l} z^{2m}\gamma'(z)\,dz +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_l} \frac{z^{2m-n-2}\,[z r_n'(z) - (n+1)\, r_n(z)]}{1 + z^{-n-1} r_n(z)}\,dz.$$

Очевидно, начиная с некоторого значения l первое слагаемое равно $\sum\{p_i^{2m} + h_j^{2m} - q_s^{2m}\}$, где p_i, h_j, q_s — корни полиномов $z^n P_n(z, \pi)$, $z^{n+1} H_n(z)$, $z^{n+1} Q_n(z)$. Два следующих слагаемых равны нулю: первое из них — вследствие голоморфности функции z^{2m-1}, а второе — в силу симметрии контуров $K_l = C\left(l + \frac{1}{2}\right)$ относительно нуля и четности функции $z^{2m}\gamma'(z)$. Наконец, учитывая, что $r_n(z) = O(1)$, $r_n'(z) = O(z^{-2})$, $2m \leqslant n$, устанавливаем, что подынтегральное выражение в последнем слагаемом на контуре K_l имеет порядок $O(l^{-2})$, а длина контура K_l — порядок $O(l)$. Поэтому при $l \to \infty$ это слагаемое стремится к нулю как l^{-1}. Следовательно, при $l \to \infty$

$$\mathcal{J}_1 = \sum\{p_i^{2m} + h_j^{2m} - q_s^{2m}\} + O(l^{-1}). \tag{1.5.32'}$$

При больши́х l контур K_l лежит в области однолистности функции $w(z)$, что позволяет во втором интеграле $\mathcal{J}_2$ сделать замену переменной интегрирования на w. В результате получим

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{K_l'} [z(w)]^{2m}\, d \ln \sin w\pi,$$

где контур K_l' получается из контура K_l отображением $w(z) = z + \gamma(z)$, которое стремится к тождественному при $z \to \infty$. Поэтому в области, ограниченной контурами K_l' и K_l, подынтегральная функция не имеет особенностей и можно заменить интегрирование по контуру K_l' интегрированием по контуру K_l, не изменяя величины интеграла $\mathcal{J}_2$. Далее, из равенства (1.5.31) следует, что при $w \to \infty$ $[z(w)]^{2m} = A_{2m}(w) + O(w^{-2})$, где $A_{2m}(w)$ — четный полином степени $2m$. Таким образом,

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{K_l'} [z(w)]^{2m}\, d \ln \sin w\pi = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{K_l} [z(w)]^{2m}\, d \ln \sin w\pi =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{K_l} A_{2m}(w)\, d \ln \sin w\pi + \oint\limits_{K_l} O(w^{-2}) \frac{\cos w\pi}{\sin w\pi}\, dw,$$

откуда, используя теорему о вычетах и замечая, что на контурах $K_l = C\left(l + \frac{1}{2}\right)$ функция $\operatorname{ctg} w\pi$ равномерно ограничена, при $l \to \infty$ находим

$$\mathcal{J}_2 = \sum_{k=-l}^{l} A_{2m}(k) + O(l^{-1}). \tag{1.5.32″}$$

Рассмотрим, наконец, третий интеграл, $\mathcal{J}_3$. Из равенств (1.5.29), (1.5.30) следует, что при больших l на контурах $K_l = C\left(l + \frac{1}{2}\right)$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\delta_1(z)}{\sin w\pi} \right| \leqslant \frac{C_1}{|z|} e^{-|\operatorname{Im} w\pi|} \leqslant \frac{C_2}{|z|} e^{-|\operatorname{Im} z\pi|},$$

из которого вытекает однозначность и голоморфность функции $\ln(1 + \delta_1(z)[\sin w\pi]^{-1})$ в окрестности этих контуров. Поэтому

$$\mathcal{J}_3 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{K_l} z^{2m} d \ln \left(1 + \frac{\delta_1(z)}{\sin w\pi}\right) = \frac{-2m}{2\pi i} \oint\limits_{K_l} z^{2m-1} \ln \left(1 + \frac{\delta_1(z)}{\sin w\pi}\right) dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{K_l} \left\{ \sum_{p=1}^{2m-1} \frac{2m z^{2m-1} [\delta_1(z)]^p (-1)^p}{p [\sin w\pi]^p} + O\left(|z|^{-1} e^{-|\operatorname{Im} z\pi|}\right) \right\} dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{K_l} \sum_{p=1}^{2m-1} \frac{2m z^{2m-1} [\delta_1(z)]^p (-1)^p}{p [\sin w\pi]^p}\, dz + O(l^{-1}),$$

так как при $l \to \infty$

$$\oint\limits_{K_l} O\left(|z|^{-1} e^{-|\operatorname{Im} z\pi|}\right) dz = O(l^{-1}).$$

Заменяя переменную интегрирования на w и деформируя затем контур K_l' в контур K_l (все это, как было показано выше, допустимо при больших l), получаем

$$\mathcal{I}_3 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{K_l} \sum_{p=1}^{2m-1} \frac{2m\,[z(w)]^{2m-1}\,[\delta_1(z(w))]^p\,(-1)^p\, z'(w)}{p\,[\sin w\pi]^p}\, dw + O(l^{-1}).$$

Далее, из равенств (1.5.30), (1.5.31) следует, что при $w \to \infty$

$$2m\,[z(w)]^{2m-1}\,[\delta_1(w)]^p\, z'(w)\, p^{-1}\,(-1)^p = T_{2m-p-1}(w) + O(w^{-1}),$$

где $T_{2m-1-p}(w)$ — полиномы степени $2m - p - 1$, а из леммы 1.5.2 —

$$\operatorname{Res} \sum_{p=1}^{2m-1} T_{2m-1-p}(w)\,[\sin w\pi]^{-p}\Big|_{w=2k+0} = R_0(2k),$$

$$\operatorname{Res} \sum_{p=1}^{2m-1} T_{2m-1-p}(w)\,[\sin w\pi]^{-p}\Big|_{w=2k-1} = R_{-1}(2k-1),$$

где $R_0(w)$, $R_{-1}(w)$ — полиномы, степень которых не выше $2m - 2$. Поэтому

$$\mathcal{I}_3 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{K_l} \sum_{p=1}^{2m-1} \{T_{2m-p-1}(w) + O(w^{-1})\}\,[\sin w\pi]^{-p}\, dw + O(l^{-1}) =$$

$$= \sum_{|2k| \leqslant l} R_0(2k) + \sum_{|2k-1| \leqslant l} R_{-1}(2k-1) + O(l^{-1}), \qquad (1.5.32''')$$

так как при $p \geqslant 1$ и $l \to \infty$

$$\oint\limits_{K_l} O(w^{-1})\,[\sin w\pi]^{-p}\, dw = O(l^{-1}).$$

Сопоставляя равенства (1.5.32), (1.5.32′), (1.5.32″), (1.5.32‴), лемму 1.5.1 и формулу (1.5.22), получаем

$$2\{(\mu_0^+)^m + (\mu_1^+)^m + \cdots + (\mu_{l_1}^+)^m + (\mu_1^-)^m + \cdots + (\mu_{l_2}^-)^m\} =$$

$$= 2\left\{\sum_{k=0}^{l_1} A_{2m}^+(k) + \sum_{k=1}^{l_2} A_{2m}^-(k)\right\} + A_{2m}^+(0) +$$

$$+ \sum \{p_i^{2m} + h_j^{2m} - q_s^{2m}\} + o(1), \qquad (1.5.33)$$

где $l_1 = \left[\frac{l}{2}\right]$, $l_2 = \left[\frac{l+1}{2}\right]$, а

$$A_{2m}^{+}(w) = A_{2m}(2w) + \frac{1}{2}[R_0(2w) + R_0(-2w)],$$

$$A_{2m}^{-}(w) = A_{2m}(2w-1) + \frac{1}{2}[R_{-1}(2w-1) + R_{-1}(-2w+1)].$$

Полагая в этих равенствах $l = 2s+1$, $l = 2s$ ($l = 2s$, $l = 2s-1$) и вычитая затем одно из другого, при $s \to \infty$ находим $(\mu_{s+1}^{-})^m = A_{2m}^{-}(s+1) + O(1)$, $((\mu_s^{+})^m = A_{2m}^{+}(s) + O(1))$. Сравнивая полученные соотношения с формулами (1.5.21), убеждаемся, что $A_{2m}^{-}(w) \equiv M_{2m}^{-}(w)$, $A_{2m}^{+}(w) \equiv M_{2m}^{+}(w)$, откуда, согласно (1.5.33), при $l \to \infty$ следует равенство

$$2\sum_{k=0}^{l_1}[(\mu_k^{+})^m - M_{2m}^{+}(k)] + 2\sum_{k=1}^{l_2}[(\mu_k^{-})^m - M_{2m}^{-}(k)] =$$
$$= -M_{2m}^{+}(0) + \sum\{p_i^{2m} + h_j^{2m} - q_s^{2m}\} + o(1),$$

эквивалентное соответствующей формуле следов.

Доказательства в случаях 3° и 2 при $\theta_2 \neq 0, 1$ проводятся аналогично. При $\theta_2 = 0$ ($\theta_2 = 1$) в случае 2 доказательство нужно несколько изменить лишь в конце. Дело в том, что при этих значениях θ роль $\sin w\pi$ играет функция $\cos w\pi - 1$ ($\cos w\pi + 1$), корни которой лежат в точках $\ldots, -4, -2, 0, 0, 2, 4, \ldots$ ($\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots$), и в соответствии с леммой 1.5.2 правая часть равенства (1.5.32‴) имеет вид

$$\sum_{k=-l}^{l} R(2k) + O(l^{-1}) \quad \left(\sum_{k=-l}^{l-1} R(2k+1) + O(l^{-1})\right),$$

а правая часть равенства (1.5.33) —

$$2\sum_{k=0}^{l} A(k) - A(0) + \sum\{p_i^{2m} + h_j^{2m} - q_s^{2m}\} + o(1)$$
$$\left(2\sum_{k=1}^{l} A(k) + \sum\{p_i^{2m} + h_j^{2m} - q_s^{2m}\} + o(1)\right),$$

где

$$A(k) = 2A_{2m}(2k) + \frac{1}{2}[R(2k) + R(-2k)]$$
$$\left(A(k) = 2A_{2m}(2k-1) + \frac{1}{2}[R(2k-1) + R(-2k+1)]\right).$$

Далее, при рассматриваемых значениях θ соседними допустимыми контурами являются $C\left(2l + \frac{1}{2}\right)$, $C\left(2(l-1) + \frac{1}{2}\right)$ ($C(2l)$, $C(2l-2)$), что позволяет доказать только такое тождество: $M_{2m}^{+}(k) + M_{2m}^{-}(k) \equiv A(k)$.

Этого тождества при $\theta_0 = 1$, очевидно, достаточно для доказательства формулы следов, а при $\theta_2 = 0$ из него следует только, что

$$(\mu_0^+)^m - M_{2m}^+(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \{(\mu_k^+)^m - M_{2m}^+(k) + (\mu_k^-)^m - M_{2m}^-(k)\} =$$

$$= \frac{1}{2}[M_{2m}^-(0) - M_{2m}^+(0)] + \frac{1}{2}\sum \{p_i^{2m} + h_j^{2m} - q_s^{2m}\},$$

и еще нужно доказать равенство $M_{2m}^+(0) = M_{2m}^-(0)$. Последнее равенство при $\theta_2 = 0$ является следствием асимптотических разложений $\sqrt{\mu_k^+}$, $\sqrt{\mu_k^-}$, из которых, как легко видеть, следует, что коэффициенты полиномов $M_{2m}^+(w)$ и $M_{2m}^-(w)$ при четных степенях w совпадают, а при нечетных отличаются только знаком.

Замечание. Для вычисления сумм $\alpha_l = \sum_{i=1}^{n} x_i^l$ одинаковых степеней корней полинома $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ можно использовать формулы Ньютона

$$\alpha_l + a_1\alpha_{l-1} + a_2\alpha_{l-2} + \cdots + a_{l-1}\alpha_1 + la_l = 0 \quad (l \leqslant n),$$

из которых, в частности, следует, что суммы α_l равны полиномам от $a_1, a_2, \ldots, a_l$ с целыми коэффициентами:

$$\alpha_1 = -a_1, \quad \alpha_2 = -2a_2 + a_1^2, \quad \alpha_3 = -3a_3 + 3a_1a_2 - a_1^3, \ \ldots$$

Поэтому правые части в формулах следов являются полиномами от $u_1(\pi), \ldots, u_n(\pi)$, $q^{(k)}(0)$, $q^{(k)}(\pi)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Следствие. *Собственные значения λ_k, $\mu_{2k}^{\pm}$, $\mu_{2k-1}^{\pm}$ краевых задач, порождаемых уравнением (1.3.1) с потенциалом $q(x) \in \in \tilde{W}_2^n[0, \pi]$ и граничными условиями (1.5.4), (1.5.6), (1.5.7), при всех $m = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ удовлетворяют соотношениям*

$$(\mu_0^+)^m + \sum_{k=1}^{\infty} \{(\mu_k^+)^m + (\mu_k^-)^m - 2(\lambda_k)^m\} = \sum q_i^{2m}, \tag{1.5.34}$$

где q_i — корни полинома

$$z^{n+1}Q_n(z) = z^{n+1}\left[1 + 2\sum_{1\leqslant 2j+1\leqslant n} \sigma_{2j+1}(0)(2iz)^{-2j-2}\right].$$

Доказательство. Как отмечалось выше, из принадлежности потенциала пространству $\tilde{W}_2^n[0, \pi]$ следует, что $\sigma_j(0) = \sigma_j(\pi)$ при $j = 1, 2, \ldots, n$, откуда согласно (1.5.25″) устанавливаем, что функции $H_n(z)$ при граничных условиях (1.5.4), (1.5.6), (1.5.7) соответственно равны $(iz)^{-1}$, $-2\left(1 + 2\sum_{1\leqslant 2j+1\leqslant n} \sigma_{2j+1}(0)(2iz)^{-2j-2}\right)$, $2\left(1 + 2\sum_{1\leqslant 2j+1\leqslant n} \sigma_{2j+1}(0)(2iz)^{-2j-2}\right)$. Кроме того, из теорем 1.5.1, 1.5.2 видно, что полиномиальные части у $(\lambda_k)^m$ и $(\mu_k^{\pm})^m$ совпадают при $m = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$. Поэтому для доказательства равенств (1.5.34) достаточно, в силу теоремы 1.5.3, из суммы регуляризованных следов краевых задач с граничными условиями (1.5.6), (1.5.7) вычесть удвоенный регуляризованный след краевой задачи (1.5.4). Отметим в заключение, что в силу формул Ньютона и равенств (1.5.34) величины

$$\Delta_m = (\mu_0^+)^m + \sum_{k=1}^{\infty} [(\mu_k^+)^m + (\mu_k^-)^m - 2(\lambda_k)^m] \tag{1.5.35}$$

удовлетворяют таким рекуррентным формулам:

$$\Delta_m = -2\left[\sum_{j=0}^{m-2} \sigma_{2j+1}(0)(-4)^{-j-1}\Delta_{m-j-1} + 2m\sigma_{2m-1}(0)(-4)^{-m}\right]. \tag{1.5.35'}$$

Задачи

1. Вывести асимптотическую формулу для собственных значений μ_k краевой задачи $\{q(x), h, H\}$, порождаемой уравнением (1.3.1) с потенциалом $q(x) \in W_2^n[0, \pi]$ и граничными условиями $y'(0) - hy(0) = 0, y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$.

Указание. Поступая так же, как при доказательстве теоремы 1.5.1, но пользуясь при этом вместо леммы 1.4.3 разложением $\tilde{f}(a_k) = \tilde{f}(k+a) + h_k\tilde{f}'(k+a) + h_k^2 g_2(k)$, полученным в задаче 5 § 4 настоящей главы, находим

$$\sqrt{\mu_k} = k + \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+3} d_{2j+1}(2k)^{-2j-1} +$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{2}[s_n(2k) + \tilde{s}_n(2k)k^{-1}](2k)^{-n-1} + \delta_k k^{-n-2} + \varepsilon_k(h, H)k^{-n-3},$$

где d_{2j+1} — не зависящие от k числа,

$$d_1 = \frac{2h + 2H + \int_0^\pi q(t)\,dt}{\pi},$$

$$s_n(p) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi q^{(n)}(t)\sin\left\{pt - \frac{\pi}{2}(n+1)\right\}dt,$$

$$\tilde{s}_n(p) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi q^{(n)}(t)[2h - d_1 t]\sin\left\{pt - \frac{\pi}{2}(n+2)\right\}dt,$$

δ_k не зависит от h, H и $\sum_{k=1}^{\infty} |\delta_k|^2 < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k(h, H)|^2 < \infty$.

2. Используя результаты предыдущей задачи, доказать, что для принадлежности потенциала $q(x) \in L_2(0, \pi)$ пространству $W_n^2[0, \pi]$ необходимо и достаточно, чтобы собственные значения $\mu_k(1)$, $\mu_k(2)$ краевых задач $\{q(x), h, H_1\}$, $\{q(x), h, H_2\}$, $(H_1 \neq H_2)$ удовлетворяли таким асимптотическим равенствам:

$$\sqrt{\mu_k(1)} = k + \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+2} d_{2j+1}(2k)^{-2j-1} + \beta_k k^{-n-1},$$

$$\sqrt{\mu_k(1)} - \sqrt{\mu_k(2)} = \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+3} c_{2j+1}(2k)^{-2j-1} + \gamma_k k^{-n-2},$$

где числа d_{2j+1}, c_{2j+1} не зависят от k и $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty$.

3. Вывести асимптотические формулы для собственных значений периодической $(y(0) = y(\pi))$ и антипериодической $(y(0) = -y(\pi))$ краевых задач, порождаемых уравнением Дирака (1.3.36), в котором матрица $\Omega(x)$ имеет вещественные элементы $p(x)$, $r(x)$, принадлежащие пространству $\widetilde{W}_2^n[0, \pi]$ $(n \geqslant 1)$.

Указание. Согласно (1.3.37) характеристические функции рассматриваемых краевых задач имеют вид $\chi(\lambda) = 2 \mp \{e_{11}(\lambda, \pi) + e_{22}(\lambda, \pi)\}$. Из вещественности матрицы $\Omega(x)$ следует самосопряженность этих задач. Поэтому собственные значения периодической $\ldots < \mu_{2k}^- \leqslant \mu_{2k}^+ < \ldots$ и антипериодической $\ldots < \mu_{2k+1}^- \leqslant \mu_{2k+1}^+ < \ldots$ краевых задач вещественны. Далее, вещественность функций $p(x)$, $r(x)$ влечет за собой равенство $q^-(x) = \overline{q^+(x)}$, из которого следует, что при вещественных значениях λ $u_1^+(\lambda, x) = \overline{u_1^-(-\lambda, x)} = u(\lambda, x)$, $u_2^-(\lambda, x) = -\overline{u_2^+(-\lambda, x)}$, $\sigma^-(\lambda, x) = -\overline{\sigma^+(-\lambda, x)} = \sigma(\lambda, x)$. Отсюда, используя формулы, полученные в задаче 4 § 4 настоящей главы, находим

$$e_{11}(\lambda, \pi) + e_{22}(\lambda, \pi) = \frac{2\,\mathrm{Re}\,\{e^{i\lambda\pi} u(\lambda, \pi)[1 - \sigma(\lambda, \pi)\overline{\sigma(\lambda, 0)}]\}}{1 - \sigma(\lambda, 0)\overline{\sigma(\lambda, 0)}},$$

$$\chi(\lambda) = 2 \mp \{e^{i\lambda\pi} u(\lambda, \pi)[1 - \Delta(\lambda)\overline{\sigma(\lambda, 0)}] + e^{-i\lambda\pi}\overline{u(\lambda, \pi)}[1 - \overline{\Delta(\lambda)}\sigma(\lambda, 0)]\},$$

так что числа $\mu_k^{\pm}$ являются корнями уравнения

$$e^{i\lambda\pi} u(\lambda, \pi)[1 - \Delta(\lambda)\overline{\sigma(\lambda, 0)}] + e^{-i\lambda\pi}\overline{u(\lambda, \pi)}[1 - \overline{\Delta(\lambda)}\sigma(\lambda, 0)] - (-1)^k 2 = 0,$$

где $\Delta(\lambda) = [\sigma(\lambda, \pi) - \sigma(\lambda, 0)][1 - \sigma(\lambda, 0)\overline{\sigma(\lambda, 0)}]^{-1}$. Умножая это уравнение на

$$\varphi(\lambda) = e^{i\lambda\pi} u(\lambda, \pi) = \exp i\left\{\lambda\pi - \int_0^{\pi} q(\xi)\,\sigma(\lambda, \xi)\,d\xi\right\}$$

и используя при этом равенство

$$u(\lambda, \pi)\overline{u(\lambda, \pi)} = [1 - \sigma(\lambda, 0)\overline{\sigma(\lambda, 0)}][1 - \sigma(\lambda, \pi)\overline{\sigma(\lambda, \pi)}]^{-1},$$

получаем квадратное уравнение относительно $\varphi(\lambda)$, из которого следует, что

$$\varphi(\lambda) = \exp i \left\{ \lambda\pi - \int_0^\pi q(\xi)\,\sigma(\lambda, \xi)\,d\xi \right\} =$$

$$= (-1)^k [1 \pm i \mid \Delta(\lambda)\, u(\lambda, \pi) \mid]\,[1 - \Delta(\lambda)\,\overline{\sigma(\lambda, 0)}]^{-1}.$$

С помощью этого уравнения, так же как при доказательстве теоремы 1.5.2, приходим к формуле

$$\mu_k^{\pm} = k + \sum_{j=1}^{n+1} c_j (2k)^{-j} \pm \mid e_n(k) \mid (2k)^{-n} + \varepsilon_k^{\pm} k^{-n-1},$$

где числа c_j не зависят от k, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mid \varepsilon_k^{\pm} \mid^2 < \infty$, $e_n(k) = \dfrac{1}{\pi} \int_0^\pi q^{(n)}(t)\, e^{-2ikt} dt$, $q(t) = p(t) + ir(t)$. $\left(\text{При } n = 0 \text{ числа } \mu_k^{\pm} \text{ удовлетворяют равенству } \mu_k^{\pm} = k + \varepsilon_k^{\pm}, \text{ где } \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mid \varepsilon_k^{\pm} \mid^2 < \infty.\right)$

4. Найти явные выражения для полиномов $M_2^{\pm}(k)$ и регуляризованного следа первого порядка s_1. Ответ:

1) $(\mathfrak{J}_{42} \neq 0)$

$$M_2^{\pm}(k) = \left(2k - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi}\left\{c_1 + 2\,\frac{(\mathfrak{J}_{14} + \mathfrak{J}_{32}) \pm (\mathfrak{J}_{12} + \mathfrak{J}_{34})}{\mathfrak{J}_{42}}\right\},$$

$$s_1 = -\frac{1}{2} M_2^{+}(0) + \frac{q(0) + q(\pi)}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{J}_{14} + \mathfrak{J}_{32}}{\mathfrak{J}_{42}}\right)^2 + \frac{\mathfrak{J}_{13}}{\mathfrak{J}_{42}};$$

2) $(\mathfrak{J}_{42} = 0,\ \mathfrak{J}_{14} + \mathfrak{J}_{32} \neq 0,\ \theta_2 = \arccos[-(\mathfrak{J}_{12} + \mathfrak{J}_{34})(\mathfrak{J}_{14} + \mathfrak{J}_{32})^{-1}],$
$0 < \operatorname{Re}\theta_2 \leqslant 1)$

$$M_2^{\pm}(k) = [2k - 1 \pm (1 - \theta_2)]^2 + \frac{1}{\pi}\left\{c_1 + \frac{2\mathfrak{J}_{13}}{\mathfrak{J}_{14} + \mathfrak{J}_{32}}\right\},$$

$$s_1 = \frac{\mathfrak{J}_{14} - \mathfrak{J}_{32}}{4(\mathfrak{J}_{14} + \mathfrak{J}_{32})}[q(\pi) - q(0)] - \frac{\mathfrak{J}_{13}^2}{2(\mathfrak{J}_{14} + \mathfrak{J}_{32})^2};$$

3°) $(\mathfrak{J}_{42} = \mathfrak{J}_{14} + \mathfrak{J}_{32} = \mathfrak{J}_{12} + \mathfrak{J}_{34} = 0,\ \mathfrak{J}_{13} \neq 0)$

$$M_2^{\pm}(k) = \left[2k - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{1}{\pi}\left\{c_1 + \frac{\mathfrak{J}_{14}}{\mathfrak{J}_{13}}[q(\pi) - q(0)]\right\},$$

$$s_1 = \frac{1}{2} M_2^{+}(0) - \frac{q(0) + q(\pi)}{4} + \frac{\mathfrak{J}_{14}^2}{8\mathfrak{J}_{13}^2}[q(\pi) - q(0)] - \frac{\mathfrak{J}_{14}}{4\mathfrak{J}_{13}}[q'(\pi) + q'(0)].$$

$$\left(\text{Здесь } c_1 = \int_0^\pi q(t)\,dt.\right)$$

5. В теореме 1.5.3 формулы следов m-го порядка доказаны для потенциалов, имеющих по крайней мере $2m$ суммируемых с квадратом производных. На самом деле эти формулы справедливы и для менее гладких потенциалов. Например, формула следа первого порядка для краевой задачи (1.3.1), (1.5.4) справедлива для потенциалов, у которых ряд Фурье сходится в точке $x = 0$.

Указание. Из формулы (1.4.24) и леммы 1.4.1 следует, что при $n = 0$ характеристическая функция $\chi(z) = s(z, \pi)$ рассматриваемой задачи представима в виде

$$\chi(z) = (2iz)^{-1}[y(z, \pi) - y(-z, \pi)],$$

где

$$y(z, \pi) = e^{iz\pi}[1 + (2iz)^{-1} u_1(z, \pi)],$$

$$u_1(z, \pi) = u_1(\pi) + (2iz)^{-1}\int_0^\pi q(t)\, u_1(t)\, dt - \int_0^\pi u_1'(\pi - \xi)\, e^{-2iz\xi} d\xi -$$

$$-(2iz)^{-1}\int_0^\pi K_1^{(1)}(\pi, \xi)\, e^{-2iz\xi} d\xi,$$

$$u_1(x) = \int_0^x q(t)\, dt, \quad \int_0^\pi q(t)\, u_1(t)\, dt = \frac{1}{2} u_1(\pi)^2, \quad u_1'(x) = q(x).$$

Отсюда, на основании леммы 1.3.1, полагая для краткости $\tilde{g}(\lambda) = \int_0^\pi g(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$, при $|z| \to \infty$ легко находим

$$\chi(z) = \frac{\sin z\pi}{z}[1 - (2z)^{-1} u_1(\pi) \operatorname{ctg} z\pi - (8z^2)^{-1} u_1(\pi)^2 +$$

$$+ (4z \sin z\pi)^{-1}\{e^{-iz\pi}\tilde{q}(-2z) + e^{iz\pi}\tilde{q}(2z)\} + (z^2 \sin z\pi)^{-1} e^{|\operatorname{Im} z\pi|} o(1)] =$$

$$= \frac{\sin z\pi}{z}[1 + r(z)].$$

Поскольку на контурах $K_n = C\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ функции $|\operatorname{ctg} z\pi|$ и $|\sin z\pi|^{-1} \times \exp|\operatorname{Im} z\pi|$ ограничены не зависящей от n константой, максимум модуля $r(z)$ на этих контурах стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому, если λ_k — собственные значения задачи (1.3.1) — (1.5.4),

$$2\sum_{k=1}^n \lambda_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_n} z^2\, d \ln \chi(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\oint_{K_n} z^2\, d \ln \frac{\sin z\pi}{z} +\right.$$

$$\left.+ \oint_{K_n} z^2 d \ln(1 + r(z))\right\} = 2\sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_n} 2z \ln(1 + r(z))\, dz =$$

$$= 2\sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_n} 2z[-(2z)^{-1} u_1(\pi) \operatorname{ctg} z\pi - (8z^2)^{-1} u_1^2(\pi) +$$

$$+ (4z \sin z\pi)^{-1}\{e^{-iz\pi}\tilde{q}(-2z) + e^{iz\pi}\tilde{q}(2z)\} - (8z^2)^{-1} u_1^2(\pi) \operatorname{ctg}^2 z\pi + o(z^{-2})]\, dz,$$

откуда, поскольку при $|\operatorname{Im} z| \to \infty$ $1 + \operatorname{ctg}^2 z\pi \to 0$,

$$2\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{u_1(\pi)}{\pi}(2n+1) - \sum_{k=-n}^{n} \frac{\tilde{q}(2k)}{\pi} + o(1),$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} [\lambda_k - k^2 - \pi^{-1} u_1(\pi)] = \frac{u_1(\pi)}{2\pi} - \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} \frac{\tilde{q}(2k)}{\pi} + o(1).$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n} [\lambda_k - k^2 - \pi^{-1} u_1(\pi)] + \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} a_k\right\} = \frac{u_1(\pi)}{2\pi},$$

где $a_k = \pi^{-1}\tilde{q}(2k)$ — коэффициенты Фурье функции $q(x)$. Если этот ряд Фурье сходится в точке $x = 0$, то, обозначая для краткости через $2^{-1}[q(+0) + q(\pi - 0)]$ его сумму, получаем следующее выражение для регуляризованного следа первого порядка:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_k - k^2 - \pi^{-1} u_1(\pi)] = \frac{u_1(\pi)}{2\pi} - \frac{q(+0) + q(\pi - 0)}{4}.$$

6. Пусть $\lambda_k(1)$, $\lambda_k(2)$, $\lambda_k(3)$, $\lambda_k(4)$ — собственные значения краевых задач, порождаемых на интервале $(0, \pi)$ уравнением Дирака (1.3.36) и граничными условиями, матрицы коэффициентов которых соответственно равны

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad 2)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad 3)\ \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix},\quad 4)\ \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$

(см. задачу 3 § 3 настоящей главы). Пусть, далее,..., λ_{2k}^-, λ_{2k}^+, ... и ..., λ_{2k+1}^-, λ_{2k+1}^+,... — собственные значения периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых этим же уравнением, а элементы $p(x)$, $r(x)$ матрицы $\Omega(x)$ принадлежат пространству $\tilde{W}_2^n[0, \pi]$. Доказать, что в этом случае при $1 \leqslant m \leqslant n$ справедливы равенства

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \{(\lambda_k(1))^m - (\lambda_k(2))^m\} = [\lambda^n + C^-(\lambda)]_m + [(-\lambda)^n - C^+(-\lambda)]_m +$$
$$+ [\lambda^n - C^-(\lambda)]_m + [(-\lambda)^n + C^+(-\lambda)]_m,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \{(\lambda_k(1))^m - (\lambda_k(3))^m\} = [\lambda^n + C^-(\lambda)]_m +$$
$$+ [(-\lambda)^n - C^+(-\lambda)]_m - [C^+(-\lambda)]_m,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \{(\lambda_k(1))^m - (\lambda_k(4))^m\} = [\lambda^n + C^-(\lambda)]_m +$$
$$+ [(-\lambda)^n - C^+(-\lambda)]_m - [C^-(\lambda)]_m,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{2(\lambda_k(1))^m-(\lambda_k^-)^m-(\lambda_k^+)^m\}=[\lambda^n+C^-(\lambda)]_m+$$

$$+[(-\lambda)^n-C^+(-\lambda)]_m-[(-1)^n\lambda^{2n}+C^-(\lambda)\,C^+(-\lambda)]_m,$$

где через $[Q(\lambda)]_m$ обозначены суммы m-х степеней корней многочлена $Q(\lambda)$ и $C^{\pm}(\lambda)=\lambda^n\sigma^{\mp}(\lambda,\ 0)=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda^{n-k}\sigma_k^{\mp}(0)\,(2i)^{-k}$.

Указание. Согласно (1.3.37) характеристические функции рассматриваемых задач выражаются через $e_{ik}(\lambda,\pi)$:

$$\chi_1(\lambda)=e_{12}(\lambda,\pi),\quad \chi_2(\lambda)=-e_{21}(\lambda,\pi),$$

$$\chi_3(\lambda)=e_{12}(\lambda,\pi)+e_{21}(\lambda,\pi)-i\{e_{11}(\lambda,\pi)-e_{22}(\lambda,\pi)\},$$

$$\chi_4(\lambda)=e_{12}(\lambda,\pi)+e_{21}(\lambda,\pi)+i\{e_{11}(\lambda,\pi)-e_{22}(\lambda,\pi)\},$$

$$\chi_p(\lambda)=2-\{e_{11}(\lambda,\pi)+e_{22}(\lambda,\pi)\},\quad \chi_a(\lambda)=2+\{e_{11}(\lambda,\pi)+e_{22}(\lambda,\pi)\}.$$

Так как в данном случае $\sigma_k^{\pm}(\pi)=\sigma_k^{\pm}(0)$ $(k=1,2,\ldots,n)$, то из результатов, полученных в задачах 3, 4 § 4 настоящей главы, и леммы 1.3.1 следует, что при $|\lambda|\to\infty$

$$e^{\pm i\lambda\pi}u_1^{\pm}(\lambda,\pi)\,\sigma^{\mp}(\lambda,\pi)=e^{\pm i\lambda\pi}u_1^{\pm}(\lambda,\pi)\,\sigma^{\mp}(\lambda,0)+o(\lambda^{-n}e^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|})$$

и

$$\chi_1(\lambda)=\frac{i(1+\sigma^-(\lambda,0))\,(1-\sigma^+(-\lambda,0))}{2(1+\sigma^-(\lambda,0)\,\sigma^+(-\lambda,0))}F(\lambda)+o(\lambda^{-n}e^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|}),$$

$$\chi_2(\lambda)=-\frac{i(1-\sigma^-(\lambda,0))\,(1+\sigma^+(-\lambda,0))}{2(1+\sigma^-(\lambda,0)\,\sigma^+(-\lambda,0))}F(\lambda)+o(\lambda^{-n}e^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|}),$$

$$\chi_3(\lambda)=-\frac{2i\sigma^+(-\lambda,0)}{1+\sigma^-(\lambda,0)\,\sigma^+(-\lambda,0)}F(\lambda)+o(\lambda^{-n}e^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|}),$$

$$\chi_4(\lambda)=\frac{2i\sigma^-(\lambda,0)}{1+\sigma^-(\lambda,0)\,\sigma^+(-\lambda,0)}F(\lambda)+o(\lambda^{-n}e^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|}),$$

$$\chi_p(\lambda)=2-G(\lambda)+o(\lambda^{-n}e^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|}),\quad \chi_a(\lambda)=2+G(\lambda)+o(\lambda^{-n}e^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|}),$$

где $F(\lambda)=e^{i\lambda\pi}u_1^+(\lambda,\pi)-e^{-i\lambda\pi}u_1^-(-\lambda,\pi)$, $G(\lambda)=e^{i\lambda\pi}u_1^+(\lambda,\pi)+$ $+e^{-i\lambda\pi}u_1^-(-\lambda,\pi)$. Кроме того,

$$u_1^+(\lambda,\pi)\,u_1^-(-\lambda,\pi)=1+o(\lambda^{-n}e^{2|\operatorname{Im}\lambda\pi|}),$$

так что

$$\chi_a(\lambda)\,\chi_p(\lambda)=-F^2(\lambda)+o(\lambda^{-n}e^{2|\operatorname{Im}\lambda\pi|}).$$

Заметим теперь, что при больших N

$$\sum_{k=-N}^{N}\{2(\lambda_k(1))^m-(\lambda_k^-)^m-(\lambda_k^+)^m\}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_N}\lambda^m d\ln\frac{(\chi_1(\lambda))^2}{\chi_p(\lambda)\chi_a(\lambda)},$$

где K_N — контуры, ограничивающие квадраты $|\operatorname{Re}\lambda|\leqslant N+\frac{1}{2}$, $|\operatorname{Im}\lambda|\leqslant\leqslant N+\frac{1}{2}$. На контурах K_N выполняется неравенство $|F(\lambda)|\geqslant Ce^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|}$, в котором константа C не зависит от N. Следовательно, при $\lambda\in K_N$ и $N\to\infty$

$$\frac{(\chi_1(\lambda))^2}{\chi_p(\lambda)\chi_a(\lambda)}=\left[\frac{(1+\sigma^-(\lambda,0))(1-\sigma^+(-\lambda,0))}{2(1+\sigma^-(\lambda,0)\sigma^+(-\lambda,0)}\right]^2(1+o(N^{-n})),$$

а

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_N}\lambda^m d\ln\frac{(\chi_1(\lambda))^2}{\chi_p(\lambda)\chi_a(\lambda)}=$$

$$=\frac{2}{2\pi i}\oint_{K_N}\lambda^m d\ln\frac{(1+\sigma^-(\lambda,0))(1-\sigma^+(-\lambda,0)}{1+\sigma^-(\lambda,0)\sigma^+(-\lambda,0)}+o(N^{m-n}),$$

откуда непосредственно вытекает последнее из доказываемых равенств. Три другие равенства доказываются аналогично. (При доказательстве равенств, содержащих собственные значения третьей и четвертой краевых задач, следует предположить, что $q^{\pm}(0)\neq 0$ и $m<n$.) Правые части всех четырех равенств при $m=1$ имеют вид

1) $-2p(0)$; 2) $-p(0)-i[\ln q^+(x)]'_{x=0}$;

3) $-p(0)+i[\ln q^-(x)]'_{x=0}$; 4) $-p(0)$.

ГЛАВА 2 КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ

§ 1. *Некоторые сведения об обобщенных функциях*

Функция $f(x)$, заданная на полуоси $0 \leqslant x < \infty$, называется финитной, если она равна нулю вне некоторого конечного сегмента. Обозначим множество всех финитных функций с суммируемым квадратом через K^2, множество всех функций из K^2, равных нулю при $x > \sigma$,— через $K^2(\sigma)$, косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$ — через

$$C(\lambda, f) = \int_0^\infty f(x) \cos \lambda x dx, \tag{2.1.1}$$

а множество косинус-преобразований Фурье функций из $K^2(\sigma)$ — через $CK^2(\sigma)$. Нетрудно дать внутреннюю характеристику множества $CK^2(\sigma)$: оно совпадает с множеством четных целых функций $g(\lambda)$, квадрат которых суммируем на вещественной оси и которые при всех комплексных значениях λ удовлетворяют неравенству

$$|g(\lambda)| \leqslant C \exp\{\sigma |\operatorname{Im} \lambda|\}, \tag{2.1.2}$$

где C — некоторая константа, своя для каждой функции.

Действительно, если $g(\lambda) \in CK^2(\sigma)$, то $g(\lambda) = C(\lambda, f)$, где $f(x) \in K^2(\sigma)$, и непосредственно из формулы (2.1.1) видно, что функция $g(\lambda) = C(\lambda, f)$ является целой четной функцией, удовлетворяет неравенству (2.1.2) с $C = \int_0^\sigma |f(x)| dx$ и согласно теореме Планшереля ее квадрат суммируем на вещественной оси. Наоборот, если функция $g(\lambda)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, то согласно лемме Жордана

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \frac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda} e^{i\lambda x} d\lambda = 0$$

при $|x| > \sigma + \varepsilon$. Поэтому

$$g(\lambda) \frac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda} \int_{-\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon} f_\varepsilon(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_0^{\sigma+\varepsilon} 2 f_\varepsilon(x) \cos \lambda x dx,$$

и так как при $\varepsilon \to 0$ $g(\lambda)\dfrac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda}$ сходится в метрике пространства $L_2(-\infty, \infty)$ к $g(\lambda)$, то в метрике пространства $L_2(0, \infty)$ существует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 2f_\varepsilon(x) = f(x)$, причем очевидно, что $f(x) = 0$ при $x > \sigma$. Следовательно, $f(x) \in K^2(\sigma)$ и $g(\lambda) = \int\limits_0^\sigma f(x)\cos\lambda x dx$, так что $g(\lambda) = C(\lambda, f) \in CK^2(\sigma)$.

Заметим, что согласно теореме Пели — Винера условие (2.1.2) можно заменить более слабым

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \ln \{\max_{|z|=r} |g(z)|\} = \sigma_g \leqslant \sigma.$$

Целые функции, удовлетворяющие этому условию, называются функциями экспоненциального типа σ_g. Таким образом, множество $CK^2(\sigma)$ есть множество всех четных целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ, с суммируемым квадратом на вещественной оси. (Впрочем, это ослабление условия (2.1.2) нам нигде в дальнейшем не понадобится.)

Обозначим через $Z(\sigma)$ линейное нормированное пространство, состоящее из суммируемых на вещественной оси четных целых функций $f(\lambda)$, удовлетворяющих неравенству (2.1.2), с обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа и нормой $\|f(\lambda)\| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|\, d\lambda$. Пространства $Z(\sigma)$ являются, очевидно, подпространствами пространства $L_1(-\infty, \infty)$, причем $Z(\sigma) \subset Z(\sigma')$, если $\sigma < \sigma'$. Обозначим через Z объединение всех пространств $Z(\sigma)$. Ясно, что Z есть линейное многообразие в пространстве $L_1(-\infty, \infty)$. Введем в Z следующее определение сходимости: последовательность $f_n(\lambda)$ сходится к $f(\lambda)$, если существует такое σ, что все функции $f_n(\lambda)$ принадлежат $Z(\sigma)$ и сходятся к $f(\lambda)$ в метрике этого пространства. Линейное многообразие Z с таким определением сходимости примем за пространство основных функций.

Определение 2.1.1. *Пространство основных функций Z есть множество всех суммируемых на вещественной оси четных целых функций $f(\lambda)$, удовлетворяющих неравенствам (2.1.2) (константы σ и C свои для каждой функции $f(\lambda)$), с обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа. Последовательность $f_n(\lambda) \in Z$ сходится к $f(\lambda)$, если*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_n(\lambda) - f(\lambda)|\, d\lambda = 0$$

и типы σ_n функций $f_n(\lambda)$ ограничены в совокупности, $\sup \sigma_n < \infty$.

Отметим некоторые свойства пространства Z. Пусть CK^2 есть множество косинус-преобразований Фурье функций из множества K^2, т. е. $CK^2 = \bigcup_{\sigma} CK^2(\sigma)$. Тогда $CK^2 \supset Z$. Действительно, если $f(\lambda) \in Z$, то $f(\lambda) \in Z(\sigma)$ и, значит, $\sup_{-\infty<\lambda<\infty} |f(\lambda)| < \infty$. Но тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\lambda \leqslant \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |f(\lambda)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| d\lambda < \infty$$

и, следовательно, $f(\lambda) \in CK^2(\sigma) \subset CK^2$. Очевидно также, что произведение любых двух функций из CK^2 принадлежит Z и множество таких произведений всюду плотно в Z, так как если $f(\lambda) \in Z$, то $f(\lambda) \in CK^2$ и функции $f_\varepsilon(\lambda) = f(\lambda)\dfrac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda}$ при $\varepsilon \to 0$ сходятся в пространстве Z к $f(\lambda)$. Основные функции пространства Z можно умножать на любые целые четные функции $\varphi(\lambda)$, удовлетворяющие неравенствам (2.1.2), так как такое произведение, очевидно, тоже принадлежит Z. Функции $\varphi(\lambda)$ называются мультипликаторами в пространстве Z.

Определение 2.1.2. *Аддитивные, однородные и непрерывные функционалы $R[f(\lambda)] = (f(\lambda), R)$, определенные на основном пространстве Z, называются обобщенными функциями. Множество всех обобщенных функций обозначается через Z'.*

Из этого определения и определения сходимости в пространстве Z следует, что обобщенные функции из Z' — это такие аддитивные и однородные определенные в пространстве Z функционалы, сужения которых на пространства $Z(\sigma)$ являются линейными функционалами в этих нормированных пространствах.

Последовательность обобщенных функций $R_n \in Z'$ сходится к $R \in Z'$, если

$$\lim_{n\to\infty} (f(\lambda), R_n) = (f(\lambda), R) \tag{2.1.3}$$

на всех основных функциях $f(\lambda) \in Z$. Заметим, что условие $R \in Z'$ здесь несущественно, так как если существует предел в левой части этого равенства, какова бы ни была $f(\lambda) \in Z$, то сужения R_n на любое пространство $Z(\sigma)$ слабо сходятся и согласно известной теореме Банаха их пределы являются линейными функционалами в пространстве $Z(\sigma)$. Следовательно, функционал, определенный левой частью равенства (2.1.3), является обобщенной функцией, т. е. функционал R автоматически принадлежит пространству Z'.

Обобщенная функция $R \in Z'$ называется регулярной, если она задается формулой

$$(f(\lambda), R) = \int_0^{\infty} f(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda,$$

где $R(\lambda)$ — произвольная измеримая и ограниченная на полуоси $0 \leqslant \lambda < \infty$ функция. Иными словами, R регулярна, если она порождает непрерывный в метрике пространства $L_1(-\infty, \infty)$ функционал. Обобщенные функции $R \in Z'$ можно умножать на мультипликаторы $\varphi(\lambda)$ пространства Z, полагая, по определению, $(f(\lambda), R \cdot \varphi(\lambda)) = (f(\lambda)\varphi(\lambda), R)$. Если функция $A(x)$ суммируема на полуоси $0 \leqslant x < \infty$, то ее косинус-преобразование Фурье $C(\lambda, A)$ является ограниченной непрерывной функцией. Следовательно, его можно отождествить с регулярной обобщенной функцией $C(A)$, действующей по формуле

$$(f(\lambda), C(A)) = \int_0^\infty f(\lambda)\, C(\lambda, A)\, d\lambda.$$

Используя определение косинус-преобразования Фурье, эту формулу можно переписать так:

$$(f(\lambda), C(A)) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(\lambda) \cos \lambda x d\lambda\right] A(x)\, dx. \tag{2.1.4}$$

Заметим, что правая часть этой формулы имеет смысл для любой локально суммируемой (т. е. суммируемой на каждом конечном сегменте $[0, \sigma]$) функции $A(x)$, так как $f(\lambda) \in Z \subset CK^2$ и, следовательно, $\int_0^\infty f(\lambda) \cos \lambda x d\lambda$ есть непрерывная и финитная функция. Легко установить, что локальной суммируемости функции $A(x)$ достаточно для того, чтобы определяемый правой частью формулы (2.1.4) функционал на пространстве Z был непрерывен, т. е. являлся обобщенной функцией. Это позволяет ввести следующее определение косинус-преобразования Фурье для всех локально суммируемых функций.

Определение 2.1.3. *Косинус-преобразованием Фурье локально суммируемой функции $A(x)$ называется обобщенная функция $C(A) \in Z'$, действующая в пространстве основных функций Z по формуле (2.1.4).*

Приведем без доказательства некоторые легко проверяемые свойства косинус-преобразований Фурье. При этом будем писать $R \sim B(x)$, если обобщенная функция $R \in Z'$ есть косинус-преобразование Фурье локально суммируемой функции $B(x)$.

1. Если последовательность локально суммируемых функций $A_n(x)$ сходится в среднем в каждом конечном интервале полуоси к функции $A(x)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} C(A_n) = C(A)$ в смысле сходимости обобщенных функций. В частности, всегда

$$C(A) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n A(x) \cos \lambda x dx,$$

где регулярные функции $\int_0^n A(x)\cos\lambda x dx$ сходятся к $C(A)$ в смысле сходимости обобщенных функций.

2. Если $C(A) \sim A(x)$, то

$$\cos\lambda a\, C(A) \sim \frac{1}{2}\{A(|x+a|) + A(|x-a|)\}.$$

3. Если $C(A) \sim A(x)$ и $\varphi(\lambda) = \int_0^\infty g(\xi)\cos\lambda\xi d\xi$, где $g(\xi)$ — финитная суммируемая функция, то

$$\varphi(\lambda)\, C(A) \sim \frac{1}{2}\int_0^\infty g(\xi)\,[A(x+\xi) + A(|x-\xi|)]\,d\xi.$$

4. Если $C(A) \sim A(x)$, то

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2},\; C(A)\right) = \int_0^x (x-t)\,A(t)\,dt.$$

Обобщенная функция $R \in Z'$ называется позитивной, если $(f(\lambda), R) \geqslant 0$ на всех основных функциях $f(\lambda) \in Z$, удовлетворяющих неравенству $f(\sqrt{\mu}) \geqslant 0$ $(-\infty < \mu < \infty)$.

Теорема 2.1.1. *Каждой позитивной обобщенной функции $R \in Z'$ соответствует неубывающая функция $\rho(\mu)$ $(-\infty < \mu < \infty)$ такая, что*

$$(f(\lambda)\,g(\lambda), R) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{\mu})\,g(\sqrt{\mu})\,d\rho(\mu),$$

каковы бы ни были функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ из множества CK^2. Интеграл Стильтьеса, стоящий в правой части этой формулы, сходится абсолютно.

Доказательство этой теоремы основано на методе расширения позитивных функционалов, принадлежащем М. Риссу. Поэтому сначала изложим этот метод.

Рассмотрим произвольное линейное многообразие $\mathfrak{A}$ непрерывных вещественных функций $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, в котором для любого вещественного числа r найдется неотрицательная функция $r(x)$, удовлетворяющая при всех $x \leqslant r$ неравенству $r(x) \geqslant 1$. Заданный на этом многообразии функционал R называется позитивным, если $R[f(x)] \geqslant 0$, какова бы ни была неотрицательная функция $f(x) \in \mathfrak{A}$. Назовем функцию $f(x) \in \mathfrak{A}$ мажорируемой, если существует такая неотрицательная функция $g(x) \in \mathfrak{A}$, что

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0.$$

Теорема (Рисса). *Пусть R — аддитивный, однородный и позитивный функционал, заданный на множестве $\mathfrak{A}$. Тогда существует такая неубывающая функция $\rho(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, что на всех мажорируемых функциях*

$$R[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d\rho(t).$$

Доказательство. Занумеруем все рациональные вещественные числа $r_1, r_2, \ldots$ и введем функции

$$h(x;\ r_k) = \begin{cases} 1, & x \leqslant r_k, \\ 0, & x > r_k. \end{cases}$$

Обозначим через M и N множества всех тех функций из $\mathfrak{A}$, которые удовлетворяют неравенствам

$$f(x) \leqslant h(x;\ r_1) \leqslant g(x) \quad (f(x) \in M,\ g(x) \in N).$$

Множество M не пусто, так как функция $f(x) \equiv 0$ всегда принадлежит M, а множество N не пусто по условию. В силу позитивности функционала

$$0 \leqslant \sup_{f(x) \in M} R[f(x)] \leqslant \inf_{g(x) \in N} R[g(x)] < \infty.$$

Поэтому существует неотрицательное число γ_1, удовлетворяющее неравенству

$$\sup_{f(x) \in M} R[f(x)] \leqslant \gamma_1 \leqslant \inf_{g(x) \in N} R[g(x)].$$

Расширим функционал R на линейное многообразие $\mathfrak{A}_1$ всех функций вида $f(x) + \alpha h(x; r_1)$, где $f(x) \in \mathfrak{A}$ и α — произвольное вещественное число, по формуле $R[f(x) + \alpha h(x; r_1)] = R[f(x)] + \alpha\gamma_1$. Легко убедиться, что определенный этой формулой функционал R тоже аддитивен, однороден и позитивен на всем множестве $\mathfrak{A}_1$.

Эту конструкцию можно, очевидно, повторить для множества $\mathfrak{A}_1$ и функции $h(x; r_2)$. В результате мы продолжим функционал на множество $\mathfrak{A}_2$ всех функций вида $f(x) + \alpha_1 h(x; r_1) + \alpha_2 h(x; r_2)$ ($f(x) \in \mathfrak{A}$, α_1 и α_2 — произвольные вещественные числа) и т. д. Продолжая таким образом, расширим функционал R на множество всех функций вида $f(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h(x;\ r_k)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, причем на этом множестве функционал R тоже будет аддитивен, однороден и позитивен.

Положим

$$\rho(t) = \sup_{r_k \leqslant t} R[h(x;\ r_k)]. \tag{2.1.5}$$

Если $r_k > r_{k'}$, то $h(x; r_k) \geqslant h(x; r_{k'}) \geqslant 0$ $(-\infty < x < \infty)$, откуда в силу позитивности функционала R следует, что функция $\rho(t)$ не убывает и в рациональных точках r_m совпадает со значением функционала R на $h(x; r_m)$: $\rho(r_m) = R[h(x; r_m)]$.

Пусть функция $f(x) \in \mathfrak{A}$ имеет мажоранту $g(x) \in \mathfrak{A}$, так что $g(x) \geqslant 0$ и

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0. \tag{2.1.6}$$

Возьмем произвольные целые положительные числа n, N и построим ступенчатую функцию

$$\varphi(x) = \sum_{k=-N+1}^{N} f\left(\frac{nk}{N}\right)\left[h\left(x; \frac{nk}{N}\right) - h\left(x; \frac{n(k-1)}{N}\right)\right]. \tag{2.1.7}$$

Эта функция равна нулю вне полуинтервала $(-n, n]$, а на полуинтервалах $\left(\frac{n(k-1)}{N}, \frac{nk}{N}\right]$ равна $f\left(\frac{nk}{N}\right)$ $(k = -N+1, -N+2, \ldots, 0, \ldots, N-1, N)$. Поэтому при $x \notin (-n, n]$

$$|f(x) - \varphi(x)| = |f(x)| \leqslant \delta_n g(x), \tag{2.1.8}$$

где $\delta_n = \sup\limits_{|x|>n} \frac{|f(x)|}{g(x)}$, а при $x \in (-n, n]$

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant \omega\left(\frac{n}{N}\right) = \omega\left(\frac{n}{N}\right) h(x; n), \tag{2.1.9}$$

где $\omega(h) = \sup\limits_{|x|\leqslant n} \sup\limits_{|t|\leqslant h} |f(x+t) - f(x)|$, причем согласно (2.1.6) $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ и в силу непрерывности функции $f(x)$ $\lim\limits_{h\to 0} \omega(h) = 0$. Из неравенств (2.1.8) и (2.1.9) следует, что при всех значениях x

$$-\omega\left(\frac{n}{N}\right) h(x; n) - \delta_n g(x) \leqslant f(x) - \varphi(x) \leqslant$$
$$\leqslant \omega\left(\frac{n}{N}\right) h(x; n) + \delta_n g(x),$$

откуда в силу позитивности функционала R вытекает неравенство

$$|R[f(x)] - R[\varphi(x)]| \leqslant \omega\left(\frac{n}{N}\right) R[h(x; n)] + \delta_n R[g(x)].$$

Согласно определениям (2.1.5) и (2.1.7) функций $\rho(t)$ и $\varphi(x)$

$$R[\varphi(x)] = \sum_{k=-N+1}^{N} f\left(\frac{nk}{N}\right)\left[\rho\left(\frac{nk}{N}\right) - \rho\left(\frac{n(k-1)}{N}\right)\right],$$

так что

$$\left| R\,[f\,(x)] - \sum_{k=-N+1}^{N} f\left(\frac{nk}{N}\right)\left[\rho\left(\frac{nk}{N}\right) - \rho\left(\frac{n\,(k-1)}{N}\right)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \omega\left(\frac{n}{N}\right) R\,[h\,(x;\ n)] + \delta_n R\,[g\,(x)].$$

Устремляя в этом неравенстве сначала N, а затем n к бесконечности, получаем

$$R\,[f\,(x)] - \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f\,(x)\,d\rho\,(x) = 0,$$

т. е.

$$R\,[f\,(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(x)\,d\rho\,(x),$$

что и требовалось доказать.

Теперь мы можем найти вид позитивных обобщенных функций $R \in Z'$. Действительно, возьмем в качестве множества $\mathfrak{A}$ все вещественные функции переменной μ $(-\infty < \mu < \infty)$ вида $f\,(\mu) = \hat{f}\,(\sqrt{\mu})$, где $\hat{f}\,(\lambda)$ — произвольная функция из Z, принимающая вещественные значения при вещественных и чисто мнимых значениях λ. Множество $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям, при которых была доказана теорема Рисса, так как функции $2\left(\frac{\sin \varepsilon\sqrt{\mu}}{\varepsilon\sqrt{\mu}}\right)^2$ принадлежат этому множеству и неравенство $2\left(\frac{\sin \varepsilon\sqrt{\mu}}{\varepsilon\sqrt{\mu}}\right)^2 \geqslant 1$ выполняется для всех $\mu \leqslant r$, если только ε достаточно мало́. Позитивная обобщенная функция $R \in Z'$ индуцирует на этом множестве аддитивный, однородный и позитивный функционал $R\,[f\,(\mu)] = (\hat{f}\,(\lambda),\ R)$, откуда согласно теореме Рисса следует существование такой неубывающей функции $\rho\,(\mu)$, что

$$(\hat{f}\,(\lambda),\ R) = R\,[f\,(\mu)] = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(\mu)\,d\rho\,(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\,(\sqrt{\mu})\,d\rho\,(\mu)$$

на всех мажорируемых функциях множества $\mathfrak{A}$.

Пусть $\hat{f}\,(\lambda) \in Z$ и $\hat{f}\,(\sqrt{\mu}) \geqslant 0$ $(-\infty < \mu < \infty)$. Тогда функция $\hat{f}\,(\lambda)\left(\frac{\sin \lambda h}{\lambda h}\right)^8$ тоже принадлежит Z, а функция $\hat{f}\,(\sqrt{\mu})\left(\frac{\sin \sqrt{\mu}\,h}{\sqrt{\mu}\,h}\right)^8$ принадлежит $\mathfrak{A}$ и имеет в этом множестве мажоранту $\hat{f}\,(\sqrt{\mu}) \times$

$\times \left(\frac{\sin \sqrt{\mu}\, h}{\sqrt{\mu}\, h}\right)^8 (1+\mu^2)$. Поэтому

$$\left(\hat{f}(\lambda)\left(\frac{\sin \lambda h}{\lambda h}\right)^8,\ R\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\sqrt{\mu})\left(\frac{\sin \sqrt{\mu}\, h}{\sqrt{\mu}\, h}\right)^8 d\rho(\mu),$$

откуда при $h \to 0$, учитывая, что в смысле сходимости в пространстве Z $\lim\limits_{h\to 0} \hat{f}(\lambda)\left(\frac{\sin \lambda h}{\lambda h}\right)^8 = \hat{f}(\lambda)$, получаем

$$(\hat{f}(\lambda), R) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\sqrt{\mu})\, d\rho(\mu),$$

если $\hat{f}(\lambda) \in Z$ и $\hat{f}(\sqrt{\mu}) \geqslant 0$ $(-\infty < \mu < \infty)$.

Функцию $f(\lambda)\, g(\lambda)$, где $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ принадлежат CK^2 и принимают вещественные значения при вещественных и чисто мнимых значениях λ, можно представить в виде

$$f(\lambda)\, g(\lambda) = \frac{1}{4}\{[f(\lambda)+g(\lambda)]^2 - [f(\lambda)-g(\lambda)]^2\}.$$

Поэтому

$$(f(\lambda)\, g(\lambda), R) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} [f(\sqrt{\mu}) + g(\sqrt{\mu})]^2\, d\rho(\mu) -$$

$$-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} [f(\sqrt{\mu}) - g(\sqrt{\mu})]^2\, d\rho(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{\mu})\, g(\sqrt{\mu})\, d\rho(\mu),$$

и теорема доказана для функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$, принимающих вещественные значения при вещественных и чисто мнимых значениях λ. Общий случай легко сводится к рассмотренному.

Для проверки позитивности обобщенных функций $R \in Z'$ можно использовать следующую лемму.

Лемма 2.1.1. *Для того чтобы обобщенная функция $R \in Z'$ была позитивной, необходимо и достаточно, чтобы неравенство $(f(\lambda)\, \overline{f(\bar{\lambda})}, R) \geqslant 0$ выполнялось при всех $f(\lambda) \in CK^2$.*

Доказательство. Пусть $g(\lambda) \in Z$ и $g(\sqrt{\mu}) \geqslant 0$ при всех $\mu \in (-\infty, \infty)$. Тогда существуют такие константы C и σ, что

$$|g(\lambda)| \leqslant C \exp\{\sigma |\operatorname{Im} \lambda|\}. \tag{2.1.10}$$

Построим вспомогательную функцию

$$g_\varepsilon(\lambda) = g(\lambda)\left(\frac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda}\right)^8 + \left(\frac{\varepsilon \sin \sigma_1 \lambda}{\lambda}\right)^2,$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно, а $\sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma + 4\varepsilon$. Непосредственная проверка показывает, что $g_\varepsilon(0) > 0$, $g_\varepsilon(\sqrt{\mu}) \geqslant 0$ при всех $\mu \in (-\infty, \infty)$ и $\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(\lambda) = g(\lambda)$ в смысле сходимости в пространстве Z. Поэтому $(g(\lambda), R) = \lim_{\varepsilon\to 0}(g_\varepsilon(\lambda), R)$ и для доказательства леммы достаточно убедиться, что при любом $\varepsilon > 0$ функцию $g_\varepsilon(\lambda)$ можно представить в виде произведения $f_\varepsilon(\lambda)\overline{f_\varepsilon(\bar\lambda)}$, сомножители которого принадлежат CK^2. В силу неравенства (2.1.10)

$$\left| g(\lambda)\left(\frac{\sin\varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda}\right)^8 \right| \leqslant C\,|\varepsilon\lambda|^{-8}\exp(2\sigma_1|\operatorname{Im}\lambda|), \tag{2.1.11}$$

откуда, используя очевидное равенство

$$\left|\frac{\varepsilon\sin\sigma_1\lambda}{\lambda}\right|^2 = \frac{\varepsilon^2}{4\lambda^2}\, e^{2\sigma_1|\operatorname{Im}\lambda|}\,|1 - e^{2i\sigma_1|\operatorname{Re}\lambda| - 2\sigma_1|\operatorname{Im}\lambda|}|^2 \tag{2.1.12}$$

и теорему Руше, устанавливаем, что при достаточно большом целом n_1 в полосе $|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant \frac{\pi}{\sigma_1}\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)$ функция $g_\varepsilon(\lambda)$ имеет ровно $4n_1$ нулей, а при целых $n > n_1$ в каждой полосе $\left|\operatorname{Re}\lambda - \frac{\pi n}{\sigma_1}\right| \leqslant \frac{\pi}{2\sigma_1}$ — ровно два нуля и оба они отстоят от точки $\frac{\pi n}{\sigma_1}$ не более чем на An^{-3}, где константа A не зависит от n. Так как функция $g_\varepsilon(\lambda)$ четна и неотрицательна при вещественных и чисто мнимых значениях λ, то отсюда следует, что ее нули можно расположить в такой последовательности: $\alpha_1, \bar\alpha_1, -\alpha_1, -\bar\alpha_1; \alpha_2, \bar\alpha_2, -\alpha_2, -\bar\alpha_2; \ldots$, причем все α_n не равны нулю,

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{\sigma_1} + \delta_n, \quad \sup_n |n^3\delta_n| = A < \infty. \tag{2.1.13}$$

Построим функции

$$f_\varepsilon(\lambda) = \sqrt{g_\varepsilon(0)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_k^2}\right), \quad \overline{f_\varepsilon(\bar\lambda)} = \sqrt{g_\varepsilon(0)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\bar\alpha_k^2}\right)$$

и покажем, что

$$g_\varepsilon(\lambda) = f_\varepsilon(\lambda)\overline{f_\varepsilon(\bar\lambda)}. \tag{2.1.14}$$

Из определения функций $f_\varepsilon(\lambda)$ и $\overline{f_\varepsilon(\bar\lambda)}$ следует, что функция

$$\frac{f_\varepsilon(\lambda)\overline{f_\varepsilon(\bar\lambda)}}{g_\varepsilon(\lambda)} \tag{2.1.15}$$

целая и равна единице при $\lambda = 0$. Поэтому для доказательства тождества (2.1.14) в силу теоремы Лиувилля достаточно установить наличие последовательности неограниченно расширяющихся замкнутых контуров, на которых модуль функции (2.1.15) остается ограниченным. В качестве такой последовательности выберем границы L_n квадратов

$$|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant \frac{\pi}{\sigma_1}\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \frac{\pi}{\sigma_1}\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Согласно (2.1.11) и (2.1.12) на контурах L_n при достаточно больших n выполняется неравенство

$$|g_\varepsilon(\lambda)| > \frac{\varepsilon^2}{8|\lambda^2|} \exp\{2\sigma_1|\operatorname{Im}\lambda|\}. \tag{2.1.16}$$

С другой стороны, если $\lambda \in L_n$, то

$$\left|\lambda^2 - \frac{k^2\pi^2}{\sigma_1^2}\right| \geqslant \frac{\pi^2}{2\sigma_1^2}(|n|+|k|) \geqslant \frac{\pi^2|k|}{2\sigma_1^2}$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{\sigma_1\lambda f_\varepsilon(\lambda)}{\sin\sigma_1\lambda}\right| = \sqrt{g_\varepsilon(0)}\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1-\dfrac{\lambda^2}{\alpha_k^2}}{1-\dfrac{\lambda^2\sigma_1^2}{k^2\pi^2}}\right| =$$

$$= \sqrt{g_\varepsilon(0)}\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{k\pi}{\alpha_k\sigma_1}\right|^2\left|1+\frac{\sigma_1^2\alpha_k^2-k^2\pi^2}{k^2\pi^2-\sigma_1^2\lambda^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{g_\varepsilon(0)}\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{k\pi}{\alpha_k\sigma_1}\right|^2\left(1+\frac{2|\delta_k|\,\sigma_1(2k\pi+\sigma_1|\delta_k|)}{\pi^2 k}\right) = M,$$

где согласно (2.1.13) $M < \infty$. Поэтому на контурах L_n выполняются неравенства

$$|f_\varepsilon(\lambda)| \leqslant M|\sigma_1\lambda|^{-1}|\sin\sigma_1\lambda| \leqslant M|\sigma_1\lambda|^{-1}\exp\{\sigma_1|\operatorname{Im}\lambda|\}, \tag{2.1.17}$$

$$\left|\overline{f_\varepsilon(\bar\lambda)}\right| \leqslant M|\sigma_1\lambda|^{-1}|\sin\sigma_1\bar\lambda| \leqslant M|\sigma_1\lambda|^{-1}\exp\{\sigma_1|\operatorname{Im}\lambda|\}, \tag{2.1.18}$$

из которых согласно (2.1.16) следует, что при всех достаточно больших значениях n

$$\max_{\lambda\in L_n}\left|\frac{f_\varepsilon(\lambda)\overline{f_\varepsilon(\bar\lambda)}}{g_\varepsilon(\lambda)}\right| \leqslant 8M^2(\sigma_1\varepsilon)^{-2}.$$

Тем самым тождество (2.1.14) установлено, и для доказательства достаточности условий леммы остается убедиться, что функции $f_\varepsilon(\lambda)$, $\overline{f_\varepsilon(\bar\lambda)}$ принадлежат CK^2. Рассматривая тождество (2.1.14) при вещественных значениях λ, убеждаемся, что функции $f_\varepsilon(\lambda)$, $\overline{f_\varepsilon(\bar\lambda)}$ квадратично суммируемы на вещественной оси. А так как это целые четные функции, удовлетворяющие неравенствам (2.1.17), (2.1.18), то они принадлежат множеству $CK^2(\sigma_1) \subset CK^2$, что и требовалось доказать. Необходимость условий леммы очевидна.

Замечание. Нетрудно установить существование $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(\lambda) = f(\lambda) \in CK^2$. Таким образом, любая функция $g(\lambda) \in Z$, удовлетворяющая условию $g(\sqrt{\mu}) \geqslant 0$ $(-\infty < \mu < \infty)$, представима в виде $g(\lambda) = f(\lambda)\overline{f(\overline{\lambda})}$, где $f(\lambda) \in CK^2$.

Задачи

1. Пусть обобщенная функция $R \in Z'$ принимает неотрицательные значения $(g(\lambda), R) \geqslant 0$ на всех основных функциях $g(\lambda) \in Z$, удовлетворяющих условию

$$g(\lambda) \geqslant 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty). \tag{2.1.19}$$

Доказать, что тогда существует такая неубывающая функция $\rho(\mu)$, что

$$(f_1(\lambda)f_2(\lambda), R) = \int_0^\infty f_1(\sqrt{\mu})f_2(\sqrt{\mu})\,d\rho(\mu),$$

где $f_1(\lambda)$и $f_2(\lambda)$ — произвольные функции из CK^2.

2. Доказать, что любая функция $g(\lambda) \in Z$, удовлетворяющая условию (2.1.19), представима в виде

$$g(\lambda) = g_1(\lambda) + \lambda^2 g_2(\lambda),$$

где $g_i(\lambda) \in Z$ и $g_i(\sqrt{\mu}) \geqslant 0$ при всех $\mu \in (-\infty, \infty)$ $(i = 1, 2)$.

3. Доказать, что обобщенная функция $R \in Z'$ удовлетворяет условиям задачи 1, если неравенства $(f(\lambda)\overline{f(\overline{\lambda})}, R) \geqslant 0$, $(\lambda^2 f(\lambda)\overline{f(\overline{\lambda})}, R) \geqslant 0$ выполняются на всех функциях $f(\lambda)$, принадлежащих множеству CK^2 вместе с $\lambda^2 f(\lambda)$.

4. Обозначим через OH пространство ограниченных линейных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а через $OH[0, \infty)$ — множество непрерывных, финитных операторнозначных функций $f(x)$ $(f(x) \in OH$ при всех $x \in [0, \infty))$. Для косинус- и синус-преобразований Фурье функций $f(x) \in OH[0, \infty)$, определяемых равенствами

$$C(\lambda, f) = \int_0^\infty f(x)\cos\lambda x\,dx, \quad S(\lambda, f) = \int_0^\infty f(x)\sin\lambda x\,dx,$$

справедливы формулы обращения и равенство Парсеваля. Определим ω_0 и $\tilde{\omega}_0$ преобразования Фурье, положив

$$\omega_0(\lambda, f; P) = \int_0^\infty f(x)\,\omega_0(\lambda, x; P)\,dx,$$

$$\tilde{\omega}_0(\lambda, f; P) = \int_0^\infty \tilde{\omega}_0(\lambda, x; P)\,f(x)\,dx,$$

где $\omega_0(\lambda, x; P) = \cos\lambda x P - \sin\lambda x BP$ и $\tilde{\omega}_0(\lambda, x; P) = P\cos\lambda x + BP\sin\lambda x$ (см. задачи 6 и 9 § 2 гл. 1). Доказать справедливость равенства Парсеваля

$$\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \omega_0(\lambda, f; P)\,\tilde{\omega}_0(\lambda, g; P)\,d\lambda$$

и формул обращения

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_0(\lambda, f;\ P)\,\tilde{\omega}_0(\lambda, x;\ P)\,d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_0(\lambda, x;\ P)\,\tilde{\omega}_0(\lambda, f;\ P)\,d\lambda.$$

Приведем основные обозначения и определения, используемые при рассмотрении операторных краевых задач.

$K^2(-\infty,\infty)$ и $\tilde{K}^2(-\infty,\infty)$ — множества финитных функций с суммируемым квадратом и их преобразований Фурье.

$Z(-\infty,\infty)$ — основное пространство, состоящее из суммируемых на вещественной оси функций экспоненциального типа $f(\lambda)$, со следующим определением сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\lambda)=f(\lambda)$, если типы σ_n функций $f_n(\lambda)$ ограничены в совокупности и $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(\lambda)-f(\lambda)|\,d\lambda=0.$

Множество обобщенных функций над $Z(-\infty,\infty)$ обозначается через $Z'(-\infty,\infty)$, а множество обобщенных операторнозначных функций, являющихся по определению однородными, аддитивными и непрерывными отображениями $(f(\lambda), R)$ основного пространства $Z(-\infty,\infty)$ в OH, — через $OHZ'(-\infty,\infty)$. Аналогично определяется множество OHZ'.

Косинус- и синус-преобразования Фурье произвольной операторнозначной непрерывной функции $L(x)$ принадлежат $OHZ'(-\infty,\infty)$ и определяются равенствами

$$(f(\lambda), C(L))=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[L(x)+L(-x)]\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda dx,$$

$$(f(\lambda), S(L))=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}[L(x)-L(-x)]\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda dx.$$

Обобщенная операторнозначная функция $C(L)$ принадлежит также множеству OHZ' и действует по формуле

$$(C(\lambda, f), C(L))=\int_0^{\infty}[L(x)+L(-x)]\int_0^{\infty}C(\lambda, f)\cos\lambda x\,d\lambda dx.$$

Часто бывает удобной координатная форма записи. Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — ортонормированный базис пространства H. Матрица оператора A в этом базисе обозначается через $[A_{ij}]$, а матрица обобщенной операторнозначной функции $R\in OHZ'$ $(R\in OHZ'(-\infty,\infty))$ — через $[R_{ij}]$. По определению она состоит из обобщенных функций $R_{ij}\in Z'$ $(R_{ij}\in Z'(-\infty,\infty))$, действующих по формулам

$(f(\lambda), R_{ij})=(f(\lambda), R)_{ij}.$

(A, R) — оператор с матрицей $[C_{ij}]$, где $C_{ij}=\sum\limits_{\alpha=1}^{\infty}(A_{i\alpha}, R_{\alpha j})$, а (A, R, B) — оператор с матрицей $[d_{ij}]$, где $d_{ij}=\sum\limits_{\alpha=1}^{\infty}\sum\limits_{\beta=1}^{\infty}(A_{i\alpha}B_{\beta j}, R_{\alpha\beta})$. Предполагается, что в первом случае $A_{i\alpha}$, а во втором — $A_{i\alpha}B_{\beta j}$ принадлежат тому основному пространству, над которым определена обобщенная функция R.

5. Обобщенная операторнозначная функция $R \in OHZ'(-\infty, \infty)$ называется позитивной, если из неотрицательности функции $f(\lambda) \in Z(-\infty, \infty)$ при всех вещественных значениях λ следует неотрицательность оператора $(f(\lambda), R)$. Доказать, что неотрицательным функциям $R \in OHZ'(-\infty, \infty)$ соответствуют операторные меры $\rho(\lambda)$ такие, что

$$(f(\lambda)g(\lambda), R) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)g(\lambda)\,d\rho(\lambda)$$

для всех $f(\lambda)$, $g(\lambda) \in \tilde{K}^2(-\infty, \infty)$. Здесь $\rho(\lambda) \in OH$ при каждом $\lambda \in (-\infty, \infty)$ и операторы $\rho(\lambda') - \rho(\lambda)$ неотрицательны, если $\lambda' > \lambda$.

Указание. Занумеровав все рациональные числа r_1, r_2, ..., положим

$$h(\lambda, r_k) = \begin{cases} 1-(1+e^{\lambda})^{-1}, & \lambda \leqslant r_k \\ 0, & \lambda > r_k. \end{cases}$$

Важной деталью доказательства является следующее легко проверяемое утверждение: если функция $\psi(\lambda)$ непрерывна в точке r_k и

$$\frac{c_1}{1+\lambda^2} > \psi(\lambda) > h(\lambda, r_k) + \frac{c_2}{1+\lambda^2} \quad (c_1, c_2 > 0),$$

то найдется функция $f(\lambda) \in Z(-\infty, \infty)$ такая, что $\psi(\lambda) > f(\lambda) > h(\lambda, r_k)$. Пусть M и N — множества всех тех функций из $Z(-\infty, \infty)$, которые удовлетворяют неравенствам

$$f(\lambda) \leqslant h(\lambda, r_1) \leqslant g(\lambda) \quad (f(\lambda) \in M;\ g(\lambda) \in N),$$

$a_1, a_2, \ldots$ — счетное всюду плотное множество единичной сферы пространства H,

$$\gamma_k = \inf_{g \in N}((g(\lambda), R)\,a_k, a_k)$$

и $g_{k,m} = g_{k,m}(\lambda) \in N$ — функции, на которых выполняются неравенства

$$\gamma_k > ((g_{k,m}, R)\,a_k, a_k) - \frac{1}{2m}.$$

Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ на функциях

$$g'_{k,m} = [g_{k,m}(\lambda) + \varepsilon^2]\,\frac{\operatorname{ch} 1 - \cos \varepsilon\lambda}{(1+\varepsilon^2\lambda^2)(\operatorname{ch} 1 - 1)}$$

выполняются неравенства

$$\gamma_k > ((g'_{k,m}, R)\,a_k, a_k) - \frac{1}{m}.$$

Согласно сформулированному выше утверждению найдется такая функция $f_N(\lambda) \in Z(-\infty, \infty)$, что

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant n} g'_{k,N}(\lambda) > f_N(\lambda) > h(\lambda, r_1)$$

и, следовательно,

$$\gamma_k > ((f_N, R)\,a_k, a_k) - \frac{1}{N} \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Поскольку операторы (f_N, R) ограничены, а множество a_k всюду плотно на единичной сфере, то последовательность квадратичных форм $((f_N, R)\,a, a)$

при $N \to \infty$ сходится к неотрицательной форме, порождаемой некоторым неотрицательным оператором γ, причем

$$((g(\lambda), R)a, a) \geqslant (\gamma a, a) \geqslant ((f(\lambda), R)a, a) \quad (f \in M, g \in N).$$

Это позволяет расширить обобщенную операторнозначную функцию R с сохранением позитивности на множество функций вида $f(\lambda) + c_1 h(\lambda, r_1)$, положив $(f(\lambda) + c_1 h(\lambda, r_1), R) = (f(\lambda), R) + c_1\gamma$. Дальше доказательство проводится так же, как и в скалярном случае.

6. Пусть $R \in OHZ'$ такова, что операторы $(f(\lambda), R)$ неотрицательны, если функция $f(\lambda) \in Z$ неотрицательна при всех вещественных значениях λ. Тогда существует операторная мера $\rho(\mu)$ такая, что

$$(f(\lambda) g(\lambda), R) = \int_0^\infty f(\sqrt{\mu})\, g(\sqrt{\mu})\, d\rho(\mu),$$

где $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ — произвольные функции из CK^2, $\rho(\mu) \in OH$ при всех $\mu \in [0, \infty)$ и операторы $\rho(\mu') - \rho(\mu)$ неотрицательны, если $\mu' > \mu$.

Указание. См. предыдущую задачу.

§ 2. Обобщенная спектральная функция

Рассмотрим краевую задачу, порождаемую на полуоси $0 \leqslant x < \infty$ дифференциальным уравнением

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda^2 y(x) \tag{2.2.1}$$

и граничным условием

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{2.2.2}$$

где $q(x)$ — произвольная непрерывная комплекснозначная функция, а h — произвольное комплексное число. Поскольку всюду в этом параграфе число h предполагается одним и тем же, в используемых обозначениях § 2 гл. 1 будем для краткости опускать его. Так, вместо $\omega(\lambda, x; h)$ (решение уравнения (2.2.1) при начальных данных $\omega(\lambda, 0; h) = 1$, $\omega'(\lambda, 0; h) = h$) будем писать $\omega(\lambda, x)$, вместо $K(x, t; h)$ и $L(x, t; h)$ — соответственно $K(x, t)$ и $L(x, t)$ и т. д.

Для всех функций $f(x) \in K^2$ косинус-преобразование Фурье $C(\lambda, f)$ и ω-преобразование Фурье $\omega(\lambda, f)$ определяются формулами

$$C(\lambda, f) = \int_0^\infty f(x) \cos \lambda x dx, \quad \omega(\lambda, f) = \int_0^\infty f(x)\, \omega(\lambda, x)\, dx.$$

Из существования операторов преобразования следует, что

$$\int_0^\infty f(x)\, \omega(\lambda, x)\, dx = \int_0^\infty \left[f(x) + \int_x^\infty f(\xi) K(\xi, x)\, d\xi\right] \cos \lambda x dx, \tag{2.2.3}$$

$$\int_0^\infty g(x) \cos \lambda x dx = \int_0^\infty \left[g(x) + \int_x^\infty g(\xi) L(\xi, x)\, d\xi\right] \omega(\lambda, x)\, dx, \tag{2.2.4}$$

где все интегралы фактически берутся по конечным интервалам, так как функции $f(x)$ и $g(x)$ финитны. Поэтому между ω-преобразованиями Фурье и косинус-преобразованиями Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ из $K^2(\sigma)$ справедливы следующие зависимости:

$$\omega(\lambda, f) = C(\lambda, \hat{f}), \quad C(\lambda, g) = \omega(\lambda, \check{g}),$$

где функции $\hat{f}(x)$ и $\check{g}(x)$ тоже принадлежат $K^2(\sigma)$ и определяются равенствами

$$\hat{f}(x) = f(x) + \int_x^\infty f(\xi) K(\xi, x)\, d\xi, \quad \check{g}(x) = g(x) + \int_x^\infty g(\xi) L(\xi, x)\, d\xi.$$

Следовательно, множество $CK^2(\sigma)$ совпадает как с множеством косинус-преобразований Фурье всех функций из $K^2(\sigma)$, так и с множеством ω-преобразований Фурье всех функций из $K^2(\sigma)$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные функции из K^2, а $\omega(\lambda, f)$ и $\omega(\lambda, g)$ — их ω-преобразования Фурье. Сопоставим каждой паре функций $\omega(\lambda, f)$, $\omega(\lambda, g)$ число

$$R[\omega(\lambda, f),\ \omega(\lambda, g)] = \int_0^\infty f(x) g(x)\, dx.$$

Эта формула определяет некоторый функционал, зависящий от двух «аргументов» $\omega(\lambda, f)$; $\omega(\lambda, g)$, каждый из которых пробегает все множество CK^2. Однако на самом деле этот функционал зависит только от произведения $\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, g)$. Более того, мы докажем сейчас, что существует такая обобщенная функция $R \in Z'$, что

$$(\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, g),\ R) = R[\omega(\lambda, f),\ \omega(\lambda, g)] = \int_0^\infty f(x) g(x)\, dx.$$

Наметим сначала общую схему доказательства. Допустим, что нам удалось построить такие суммируемые на полуоси $0 \leqslant \lambda < \infty$ функции $R_n^\sigma(\lambda)$, что последовательность

$$U_n^\sigma(x, y) = \int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\, \omega(\lambda, x)\, \omega(\lambda, y)\, d\lambda$$

при $n \to \infty$ сходится в области $0 < x < \sigma$, $0 < y < \sigma$ к δ-функции Дирака $\delta(x - y)$. Тогда, умножая обе части этого равенства на произвольные функции $f(x)$ и $g(y)$ из множества $K^2(\sigma)$ и интегрируя по обеим переменным, получаем

$$\int_0^\sigma \int_0^\sigma U_n^\sigma(x, y) f(x) g(y)\, dx dy = \int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\, \omega(\lambda, f)\, \omega(\lambda, g)\, d\lambda,$$

откуда при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\sigma R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, g)\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_0^\sigma\int_0^\sigma U_n^\sigma(x, y)\,f(x)\,g(y)\,dxdy =$$

$$= \int_0^\sigma\int_0^\sigma \delta(x-y)\,f(x)\,g(y)\,dxdy = \int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx,$$

т. е.

$$R[\omega(\lambda, f),\ \omega(\lambda, g)] = \int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, g)\,d\lambda.$$

Функции $R_n^\sigma(\lambda)$ являются, очевидно, регулярными обобщенными функциями из Z', и если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^\sigma(\lambda)$ существует в смысле сходимости обобщенных функций, то, обозначая его через R^σ, получаем

$$(\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, g),\ R^\sigma) = \int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx,$$

каковы бы ни были функции $f(x)$ и $g(x)$ из множества $K^2(\sigma)$. Если, наконец, существует $\lim\limits_{\sigma\to\infty} R^\sigma = R \in Z'$, то уже для всех функций $f(x)$ и $g(x)$ из множества K^2

$$(\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, g),\ R) = \int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Покажем теперь, как можно построить нужную нам последовательность $R_n^\sigma(\lambda)$. Заметим прежде всего, что нам необходимо, в частности, чтобы выполнялось равенство

$$U_n^\sigma(x, 0) = \int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda, x)\,d\lambda = \delta_n(x) \to \delta(x) \quad (0 < x < \sigma).$$

Применяя к этому равенству оператор преобразования, переводящий $\omega(\lambda, x)$ в $\cos\lambda x$, получаем

$$\int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\cos\lambda x d\lambda = \delta_n(x) + \int_0^x L(x, t)\,\delta_n(t)\,dt \quad (0 < x < \sigma),$$

откуда следует, что функция $\frac{\pi}{2} R_n^\sigma(\lambda)$ должна быть косинус-преобразованием Фурье функции, совпадающей на интервале $0 < x < \sigma$

с функцией $\delta_n(x)+\int\limits_0^x L(x, t)\,\delta_n(t)\,dt$, где $\delta_n(x)\to\delta(x)$ при $n\to\infty$. Поэтому мы поступим следующим образом: выберем две достаточно гладкие функции $\delta_n(x)$ и $\gamma_\sigma(x)$, удовлетворяющие условиям $\int\limits_0^\infty \delta_n(t)\,dt=1$, $\delta_n(x)=0$ при $x=0$ и $x\geqslant\frac{1}{n}$, $\delta_n(x)\geqslant 0$ при $0<x<\frac{1}{n}$, $\gamma_\sigma(x)=1$ при $0\leqslant x\leqslant 2\sigma$, $\gamma_\sigma(x)=0$ при $x\geqslant 2\sigma+1$, и положим

$$\frac{\pi}{2}R_n^\sigma(\lambda)=\int\limits_0^\infty\left[\delta_n(x)+\int\limits_0^x L(x, t)\,\delta_n(t)\,dt\right]\gamma_\sigma(x)\cos\lambda x\,dx. \qquad (2.2.5)$$

Так как функция $\left[\delta_n(x)+\int\limits_0^x L(x, t)\,\delta_n(t)\,dt\right]\gamma_\sigma(x)$ финитна и непрерывно дифференцируема, то функция $R_n^\sigma(\lambda)$ ограничена и суммируема на полуоси $0\leqslant\lambda<\infty$. Поэтому абсолютно сходится интеграл

$$\int\limits_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda=\left[\delta_n(x)+\int\limits_0^x L(x, t)\,\delta_n(t)\,dt\right]\gamma_\sigma(x).$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор преобразования, переводящий $\cos\lambda x$ в $\omega(\lambda, x)$, и замечая, что $\gamma_\sigma(x)=1$ при $0\leqslant x\leqslant 2\sigma$, получаем

$$\int\limits_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda, x)\,d\lambda=\delta_n(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 2\sigma).$$

Пусть теперь

$$U_n^\sigma(x, y)=\int\limits_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda, x)\,\omega(\lambda, y)\,d\lambda. \qquad (2.2.6)$$

Так как функции $\int\limits_0^N R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda, x)\,\omega(\lambda, y)\,d\lambda$ дважды непрерывно дифференцируемы, удовлетворяют уравнению

$$v''_{xx}-q(x)\,v=v''_{yy}-q(y)\,v$$

и начальным данным $(0\leqslant x\leqslant 2\sigma)$

$$v(x, 0)=\int\limits_0^N R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda\ x)\,d\lambda=\delta_n^N(x),$$

$$v'_y(x, 0)=h\int\limits_0^N R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda, x)\,d\lambda=h\delta_n^N(x),$$

причем $\lim\limits_{N\to\infty}\delta_n^N(x)=\delta_n(x)$, то согласно формуле Римана (1.1.7) при $0\leqslant y\leqslant x\leqslant\sigma$

$$\int_0^N R_n^\sigma(\lambda)\,\omega(\lambda,x)\,\omega(\lambda,y)\,d\lambda=$$

$$=\frac{\delta_n^N(x+y)+\delta_n^N(x-y)}{2}+\int_{x-y}^{x+y}W(x,y,t)\,\delta_n^N(t)\,dt,$$

где $W(x, y, t)$ — некоторая непрерывная функция. Отсюда при $N\to\infty$ получаем

$$U_n^\sigma(x,y)=\frac{1}{2}[\delta_n(x+y)+\delta_n(x-y)]+\int_{x-y}^{x+y}W(x,y,t)\,\delta_n(t)\,dt,$$

если $0\leqslant y\leqslant x\leqslant\sigma$. Из определения (2.2.6) функции $U_n^\sigma(x,y)$ следует, что $U_n^\sigma(x,y)=U_n^\sigma(y,x)$. Поэтому во всей области $0\leqslant x\leqslant\sigma$, $0\leqslant y\leqslant\sigma$

$$U_n^\sigma(x,y)=\frac{1}{2}[\delta_n(x+y)+\delta_n(|x-y|)]+\theta_n(x,y),$$

где симметричная относительно переменных x, y функция $\theta_n(x,y)$ определена при $0\leqslant y\leqslant x\leqslant\sigma$ равенством

$$\theta_n(x,y)=\int_{x-y}^{x+y}W(x,y,t)\,\delta_n(t)\,dt.$$

Функция $W(x, y, t)$ ограничена в каждой конечной области. Следовательно, существует такая зависящая только от σ константа $C(\sigma)$, что

$$|W(x,y,t)|\leqslant C(\sigma)\quad(0\leqslant y\leqslant x\leqslant\sigma,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\sigma),$$

$$|\theta_n(x,y)|\leqslant C(\sigma)\int_0^\infty\delta_n(t)\,dt=C(\sigma)\quad(0\leqslant y\leqslant x\leqslant\sigma).$$

Кроме того, так как $\delta_n(t)=0$ при $t>\frac{1}{n}$, то $\theta_n(x,y)=0$ при $|x-y|>\frac{1}{n}$. Из этих оценок следует, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат $K^2(\sigma)$, то

$$\int_0^\infty\int_0^\infty U_n^\sigma(x,y)\,f(x)\,g(y)\,dxdy=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}[\delta_n(x+y)+\delta_n(|x-y|)]+\theta_n(x,y)\right\}f(x)\,g(y)\,dxdy,$$

причем

$$\left|\int_0^\infty\int_0^\infty \theta_n(x, y)\, f(x)\, g(y)\, dxdy\right| \leqslant C(\sigma)\iint_{D_n} |f(x)\, g(y)|\, dxdy,$$

где область D_n определяется неравенствами $|x-y| \leqslant \frac{1}{n}$ $(0 \leqslant x \leqslant \sigma,\ 0 \leqslant y \leqslant \sigma)$. Так как мера области D_n стремится к нулю при $n \to \infty$, а функция $|f(x)\, g(y)|$ суммируема, то

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^\infty\int_0^\infty \theta_n(x, y)\, f(x)\, g(y)\, dxdy\right| = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\, \omega(\lambda, f)\, \omega(\lambda, g)\, d\lambda =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\int_0^\infty U_n^\sigma(x, y)\, f(x)\, g(y)\, dxdy =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{2}\left[\delta_n(x+y) + \delta_n(|x-y|)\right] f(x)\, g(y)\, dxdy =$$

$$= \int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx,$$

т. е.

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty R_n^\sigma(\lambda)\, \omega(\lambda, f)\, \omega(\lambda, g)\, d\lambda, \tag{2.2.7}$$

каковы бы ни были функции $f(x)$ и $g(x)$ из $K^2(\sigma)$.

Из определения (2.2.5) функции $R_n^\sigma(\lambda)$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} R_n^\sigma(\lambda) = \frac{2}{\pi}\left(1 + C(\lambda, \gamma_\sigma L)\right) = R^\sigma,$$

где $C(\lambda, \gamma_\sigma L)$ есть косинус-преобразование Фурье функции $\gamma_\sigma(x)\, L(x, 0)$. Так как $\gamma_\sigma(x)\, L(x, 0)$ при $\sigma \to \infty$ стремится к $L(x, 0)$ равномерно в каждом конечном интервале, то согласно свойству 1 преобразований Фурье (см. § 1) $C(\lambda, \gamma_\sigma L)$ при $\sigma \to \infty$ стремится в смысле сходимости обобщенных функций к косинус-преобразованию Фурье $C(L)$ функции $L(x, 0)$. Итак,

$$\lim_{\sigma\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty} R_n^\sigma(\lambda)\right\} = \frac{2}{\pi}\left(1 + C(L)\right) = R \in Z',$$

где оба предела существуют в смысле сходимости обобщенных функций. Отсюда согласно формуле (2.2.7) следует, что

$$\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx = (\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, g),\ R)$$

уже для всех функций $f(x)$ и $g(x)$ из множества K^2.

Таким образом, мы доказали следующую основную теорему.

Теорема 2.2.1. *Каждой краевой задаче (2.2.1), (2.2.2) соответствует обобщенная функция $R \in Z'$ такая, что*

$$\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx = (\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, g),\ R) \tag{2.2.8}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные финитные функции из $L_2\,[0, \infty)$, а $\omega(\lambda, f)$ и $\omega(\lambda, g)$ — их ω-преобразования Фурье.

Функция R связана с ядром $L(x, t)$ оператора преобразования, переводящего $\omega(\lambda, x)$ в $\cos \lambda x$ формулой

$$R = \frac{2}{\pi}(1 + C(L)), \tag{2.2.9}$$

где $C(L)$ — косинус-преобразование Фурье функции $L(x, 0)$.

Равенство (2.2.8) является аналогом равенства Парсеваля. Поэтому порождающую его функцию $R \in Z'$ будем называть обобщенной спектральной функцией краевой задачи (2.2.1), (2.2.2).

Покажем теперь, как из этой теоремы выводится аналог формулы разложения по собственным функциям краевой задачи (2.2.1), (2.2.2). Согласно (2.2.8)

$$\frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} f(t)\,dt = \left(\omega(\lambda, f)\frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta}\omega(\lambda, t)\,dt,\ R\right), \tag{2.2.10}$$

какова бы ни была функция $f(x) \in K^2$. Если ω-преобразование Фурье $\omega(\lambda, f)$ функции $f(x)$ принадлежит пространству Z (т. е. суммируемо на вещественной оси), то при $\delta \to 0$ произведение $\omega(\lambda, f)\frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta}\omega(\lambda, t)\,dt$ сходится в пространстве Z к функции $\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, x)$. Поэтому

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\omega(\lambda, f)\frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta}\omega(\lambda, t)\,dt,\ R\right) = (\omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, x),\ R). \tag{2.2.11}$$

С другой стороны, согласно (2.2.3) $\omega(\lambda, f)$ есть косинус-преобразование Фурье функции $f(x) + \int\limits_x^\infty f(\xi) K(\xi, x)\, d\xi$, так что

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \omega(\lambda, f) \cos \lambda x d\lambda = f(x) + \int\limits_x^\infty f(\xi) K(\xi, x)\, d\xi.$$

Из этого равенства и суммируемости на вещественной оси функции $\omega(\lambda, f)$ следует, что функция $f(x) + \int\limits_x^\infty f(\xi) K(\xi, x)\, d\xi$, а вместе с ней и функция $f(x)$ непрерывны. Поэтому

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\int\limits_x^{x+\delta} f(t)\, dt = f(x),$$

откуда согласно (2.2.10) и (2.2.11) следует, что

$$f(x) = (\omega(\lambda, f)\, \omega(\lambda, x),\ R). \qquad (2.2.12)$$

Таким образом, из теоремы 2.2.1 вытекает такое следствие.

Следствие. Формула (2.2.12) справедлива для всех функций $f(x) \in K^2$, у которых ω-преобразования Фурье $\omega(\lambda, f)$ принадлежат пространству Z (т. е. суммируемы на вещественной оси).

Наиболее важной является хорошо изученная краевая задача (2.2.1), (2.2.2) с вещественной функцией $q(x)$ и вещественным значением h. С точки зрения теории операторов, действующих в гильбертовом пространстве, это случай, когда краевая задача порождается симметрическим оператором, допускающим самосопряженные расширения (возможно, не единственные). Будем называть такие задачи симметрическими.

В симметрическом случае функции $\omega(\lambda, x)$ принимают сопряженные значения при сопряженных значениях параметра λ. Поэтому если функция $f(\lambda) \in CK^2$ есть ω-преобразование Фурье функции $g(x)$, то функция

$$f(\overline{\lambda}) = \int\limits_0^\infty \overline{g(x)\, \omega(\overline{\lambda}, x)}\, dx = \int\limits_0^\infty \overline{g(x)}\, \omega(\lambda, x)\, dx$$

является ω-преобразованием Фурье функции $\overline{g(x)}$ и согласно (2.2.8)

$$(f(\lambda)\, \overline{f(\overline{\lambda})},\ R) = \int\limits_0^\infty g(x)\, \overline{g(x)}\, dx \geqslant 0,$$

какова бы ни была функция $f(\lambda) \in K^2$. Отсюда, используя лемму 2.1.1. и теорему 2.1.1, заключаем, что существует такая неубывающая функция $\rho(\mu)$ $(-\infty < \mu < \infty)$, что

$$(f(\lambda) g(\lambda),\ R) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{\mu})\, g(\sqrt{\mu})\, d\rho(\mu).$$

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.2. *Если краевая задача (2.2.1), (2.2.2) симметрическая (т. е. $q(x)$ и h вещественны), то существует такая неубывающая функция* $\rho(\mu)$ $(-\infty < \mu < \infty)$, *что*

$$\int_0^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, g)\, d\rho(\mu), \tag{2.2.13}$$

каковы бы ни были функции $f(x)$ и $g(x)$ из K^2.

Для любой функции $f(x) \in L_2[0, \infty)$ положим

$$\omega_n(\lambda, f) = \int_0^n f(x)\, \omega(\lambda, x)\, dx.$$

Согласно только что доказанной теореме

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega_n(\sqrt{\mu}, f) - \omega_m(\sqrt{\mu}, f)|^2\, d\rho(\mu) = \int_n^m |f(x)|^2\, dx$$

и, следовательно, при $n \to \infty$ функции $\omega_n(\sqrt{\mu}, f)$ сходятся в метрике пространства $L_{2,\rho}(-\infty, \infty)$ к некоторой функции $\omega(\sqrt{\mu}, f)$ причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega(\sqrt{\mu}, f)|^2\, d\rho(\mu) = \int_0^{\infty} |f(x)|^2\, dx.$$

Таким образом, формула (2.2.13) верна для всех функций $f(x)$ и $g(x)$ из пространства $L_2[0, \infty)$. Пусть

$$f_N(x) = \int_{-N}^{N} \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, x)\, d\rho(\mu).$$

Тогда для любой функции $g(x) \in K^2$

$$\left| \int_0^{\infty} \{f_N(x) - f(x)\}\, g(x)\, dx \right| = \left| \int_{-N}^{N} \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, g)\, d\rho(\mu) - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, g)\, d\rho(\mu) \right| = \left| \int_{|\mu| > N} \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, g)\, d\rho(\mu) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\omega(\sqrt{\mu}, g)|^2\, d\rho(\mu) \cdot \int_{|\mu| > N} |\omega(\sqrt{\mu}, f)|^2\, d\rho(\mu) \right]^{\frac{1}{2}},$$

и, значит, при

$$g(x) = \begin{cases} \overline{f_N(x) - f(x)}, & 0 \leqslant x \leqslant n, \\ 0, & x > n, \end{cases}$$

получим

$$\int_0^n |f_N(x) - f(x)|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_0^n |f_N(x) - f(x)|^2 dx \cdot \int_{|\mu|>N} |\omega(\sqrt{\mu}, f)|^2 d\rho(\mu)\right]^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\int_0^n |f_N(x) - f(x)|^2 dx \leqslant \int_{|\mu|>N} |\omega(\sqrt{\mu}, f)|^2 d\rho(\mu).$$

Устремив здесь n к бесконечности, найдем

$$\int_0^\infty |f_N(x) - f(x)|^2 dx \leqslant \int_{|\mu|>N} |\omega(\sqrt{\mu}, f)|^2 d\rho(\mu).$$

Поэтому $f_N(x) \in L_2\,[0, \infty)$ и $\lim\limits_{N\to\infty} \int_0^\infty |f_N(x) - f(x)|^2 dx = 0$. Отсюда следует классическая теорема Вейля.

Теорема 2.2.3. *Каждой симметрической краевой задаче (2.2.1), (2.2.2) соответствует по крайней мере одна неубывающая функция* $\rho(\mu)$ $(-\infty < \mu < \infty)$ *такая, что для всех функций* $f(x) \in L_2\,[0, \infty)$ *справедливы формулы обращения*

$$\omega(\sqrt{\mu}, f) = \int_0^\infty f(x)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\,dx,$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\,d\rho(\mu)$$

(интегралы сходятся в метриках пространств $L_{2,\rho}(-\infty, \infty)$, $L_2\,[0, \infty)$ *соответственно) и равенство Парсеваля*

$$\int_0^\infty f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sqrt{\mu}, f)\,\overline{\omega(\sqrt{\mu}, g)}\,d\rho(\mu).$$

Задачи

1. Доказать существование обобщенной спектральной функции у краевой задачи

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda^2 y \quad (0 \leqslant x < \infty), \quad y(0) = 0. \tag{2.2.14}$$

Указание. Вместо (2.2.6) рассматриваем последовательность

$$U_n^\sigma(x, y) = \int_0^\infty \lambda^2 R_n^\sigma(\lambda)\, \omega(\lambda, x; \infty)\, \omega(\lambda, y; \infty)\, d\lambda,$$

в которой функции $R_n^\sigma(\lambda)$ выбираются из условия

$$\int_0^\infty \lambda^2 R_n^\sigma(\lambda) \frac{\sin \lambda x}{\lambda}\, d\lambda =$$

$$= -\frac{d}{dx}\left\{\gamma_\sigma(x)\left[\delta_n(x) + \int_0^x d\xi \int_0^\infty L(\xi, t; \infty)\, \delta_n'(t)\, dt\right]\right\}.$$

При $n \to \infty$, $\sigma \to \infty$ регулярные обобщенные функции R_n^σ сходятся в пространстве Z' и

$$\lim_{\sigma\to\infty} \{\lim_{n\to\infty} R_n^\sigma\} = R = \frac{2}{\pi}[1 + C(M)],$$

где $C(M)$ — косинус-преобразование Фурье функции

$$M(x) = -\int_0^x L_t'(u, 0; \infty)\, du.$$

При этом

$$\int_0^\infty f_1(x) f_2(x)\, dx = (\lambda^2\omega(\lambda, f_1; \infty)\, \omega(\lambda, f_2; \infty), R) = (\omega(\lambda, f_1; \infty)\, \omega(\lambda, f_2; \infty), \lambda^2 R),$$

если $f_i(x) \in K^2$ и $\omega(\lambda, f; \infty) = \int_0^\infty f(x)\, \omega(\lambda, x; \infty)\, dx$. Поэтому $\lambda^2 R$ — обобщенная спектральная функция краевой задачи (2.2.14).

2. Обобщить теорему 2.2.3 на симметрические краевые задачи с граничным условием $y(0) = 0$.

3. Доказать, что у симметрических краевых задач (2.2.1), (2.2.2), удовлетворяющих условию $16q(x) \geqslant 9(|h| - h)^2$, обобщенные спектральные функции R порождаются мерами $d\rho(\mu)$, сосредоточенными на положительной полуоси:

$$(\omega(\lambda, f; h)\, \omega(\lambda, g; h), R) = \int_0^\infty \omega(\sqrt{\mu}, f; h)\, \omega(\sqrt{\mu}, g; h)\, d\rho(\mu).$$

Указание. С помощью непосредственной проверки убеждаемся, что если $f(\lambda) \in Z$ и $\lambda^2 f(\lambda) \in Z$, то финитная функция $y(x) = (f(\lambda)\omega(\lambda\, x;\ h),\ R)$ дважды непрерывно дифференцируема, $y'(0) - hy(0) = 0$ и $-y''(x) + q(x)y(x) = (\lambda^2 f(\lambda)\, \omega(\lambda, x; h), R)$. Поэтому

$$(\lambda^2 f(\lambda)\, \overline{f(\bar\lambda)}, R) = \int_0^\infty \{-y''(x) + q(x)\, y(x)\}\, \overline{y(x)}\, dx =$$

$$h\,|\,y(0)\,|^2+\int\limits_0^\infty |\,y'(x)\,|^2\,dx+\int\limits_0^\infty q(x)\,|\,y(x)\,|^2\,dx \geqslant$$

$$\geqslant h\,|\,y(0)\,|^2+\int\limits_0^\infty |\,y'(x)|^2\,dx+\frac{9}{16}(|\,h\,|-h)^2\int\limits_0^\infty |\,y(x)\,|^2\,dx,$$

так что $(\lambda^2 f(\lambda)\,\overline{f(\overline{\lambda})},\ R)\geqslant 0$, если $h\geqslant 0$. Если же $h<0$, то

$$(\lambda^2 f(\lambda)\,\overline{f(\overline{\lambda})},\ R)\geqslant -|\,h|\ \ |\,y(0)\,|^2+\int\limits_0^\infty |\,y'(x)\,|^2\,dx+\frac{9}{4}\,|\,h\,|^2\int\limits_0^\infty |\,y(x)\,|^2\,dx,$$

откуда, используя неравенство

$$|\,y(x)\,|\geqslant|\,y(0)\,|-\int\limits_0^x |\,y'(t)\,|\,dt\geqslant|\,y(0)\,|-\left[\int\limits_0^\infty |\,y'(t)\,|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}\sqrt{x},$$

видим, что и в этом случае

$$(\lambda^2 f(\lambda)\,\overline{f(\overline{\lambda})},\ R)\geqslant -|\,h\,|\,|\,y(0)\,|^2+\int\limits_0^\infty |\,y'(x)\,|^2\,dx+\frac{|\,hy(0)\,|^2\,|\,y(0)\,|^2}{4\int\limits_0^\infty |\,y'(x)\,|^2\,dx}\geqslant 0.$$

Дальше можно использовать результаты задач 1, 3 § 1.

4. Доказать, что краевая задача Штурма — Лиувилля на всей вещественной оси $-y''+q(x)y=\lambda^2 y$ $(-\infty<x<\infty)$ имеет обобщенную спектральную матрицу

$$R=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{bmatrix}\quad (R_{11},\ R_{12},\ R_{21}\in Z';\ R_{22}=\lambda^2 R_{22}';\ R_{22}'\in Z')$$

такую, что для любых функций $f_1(x),\ f_2(x)\in K^2(-\infty,\infty)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,f_2(x)\,dx=\omega(\lambda,\ f_1)\,R\omega(\lambda,\ f_2),$$

где вектор $\omega(\lambda,\ f)=\{\omega(\lambda,\ f;\ 0),\ \omega(\lambda,\ f;\ \infty)\}$ слева понимается как однострочная матрица, а справа — как однострочный столбец:

$$\omega(\lambda,\ f_1)\,R\omega(\lambda,\ f_2)=(\omega(\lambda,\ f_1;\ 0)\,\omega(\lambda,\ f_2;\ 0),\ R_{11})+$$
$$+(\omega(\lambda,\ f_1;\ 0)\,\omega(\lambda,\ f_2;\ \infty)\ R_{12})+(\omega(\lambda,\ f_1;\ \infty)\,\omega(\lambda,\ f_2;\ 0),\ R_{21})+$$
$$+(\omega(\lambda,\ f_1;\ \infty)\,\omega(\lambda,\ f_2;\ \infty),\ R_{22}).$$

Обобщенные функции R_{ik} связаны с ядром $L(x,\ t)$ оператора преобразования, переводящего $e_0(\lambda,\ x)$ в $e^{i\lambda x}$, формулами

$$R_{11}=\frac{1}{2\pi}(1+C(L)),\quad R_{21}=\frac{1}{2\pi}C(L_x'),$$

$$R_{12}=\frac{1}{2\pi}C(L_t'),\quad R_{22}'=\frac{1}{2\pi}(1+C(M)),$$

где $L=L(x,\ 0)$, $L_x'=L_x'(x,\ 0)$, $L_t'=L_t'(x,\ 0)$, $M=-\int\limits_0^x L_t'(\xi,\ 0)\,d\xi.$

5. Доказать, что операторная задача Штурма — Лиувилля имеет обобщенную спектральную матрицу $R = [R_{ih}]$ с элементами $R_{ik} \in Z'$ такую, что

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = [\omega(\lambda, f;\ h)\, R\tilde{\omega}(\lambda, g;\ h)],$$

где $f(x),\ g(x) \in OH\,(0, \infty)$ и по определению

$$[F(\lambda)\, RG(\lambda)] = \left[\sum_{j,l=1}^{\infty} (F_{ij}(\lambda)\, G_{lk}(\lambda),\ R_{jl})\right].$$

Спектральная матрица связана с ядром $L(x, t)$ ($\tilde{L}(x, t)$) оператора преобразования, переводящего $\omega(\lambda, x;\ h)$ в $I\cos\lambda x$, формулой

$$R = \frac{2}{\pi}\{I + C(L)\} = \frac{2}{\pi}\{I + C(\tilde{L})\}.$$

Указание. См. следующую задачу.

6. Доказать, что операторная задача Дирака имеет обобщенную спектральную матрицу $R = [R_{ik}]$ такую, что $PRP = R$, $R_{ik} \in Z'(-\infty, \infty)$ и

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = [\omega(\lambda, f;\ P)\, PRP\tilde{\omega}(\lambda, g;\ P)],$$

причем

$$R = \frac{1}{\pi}(P + \tilde{\omega}_0(L;\ P)) = \frac{1}{\pi}(P + \omega_0(\tilde{L};\ P)),$$

Указание. Из существования операторов преобразования (1.2.39′) вытекает, что

$$\omega(\lambda, f;\ P) = \omega_0(\lambda, F;\ P),\quad \tilde{\omega}(\lambda, g;\ P) = \tilde{\omega}_0(\lambda, G;\ P),$$

если

$$f(x) = F(x) + \int_x^\infty F(t)\, L_p(t, x)\, dt,\quad g(x) = G(x) + \int_x^\infty \tilde{L}_p(t, x)\, G(t)\, dt.$$

Далее,

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \int_0^\infty F(x)\, G(x)\, dx +$$

$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty F(x)\left[L_p(x, y) + \tilde{L}_p(y, x) + \int_0^\infty L_p(x, \xi)\, \tilde{L}_p(y, \xi)\, d\xi\right] G(y)\, dx dy$$

и согласно результатам задачи 9 § 2 гл. 1

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \int_0^\infty F(x)\, G(x)\, dx + \int_0^\infty\int_0^\infty F(x)\, f(x, y)\, G(y)\, dx dy,$$

где операторнозначная функция $f(x, y)$ определена равенством (1.2.46). Непосредственная проверка показывает, что если операторнозначные финитные функции $\varphi(x)$ и $\tilde{\varphi}(x)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi(x) P = \varphi(x),\ P\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x),\ \varphi(x) + B\varphi(x) B = \tilde{\varphi}(x) + B\tilde{\varphi}(x) B,$$

то $P\tilde{\omega}_0(\lambda, \varphi; P) = \omega_0(\lambda, \tilde{\varphi}; P)\, P$. Из формулы (1.2.47) видно, что всем этим условиям удовлетворяют функции $\varphi_\sigma(x) = \gamma_\sigma(x) L_p(x, 0)$, $\tilde{\varphi}_\sigma(x) = \gamma_\sigma(x) \times \tilde{L}_p(x, 0)$. Следовательно, операторнозначная функция

$$f_\sigma(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\lambda, x; P)\, \tilde{\omega}_0(\lambda, \varphi_\sigma; P)\, \tilde{\omega}_0(\lambda, y; P)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\lambda, x; P)\, \omega_0(\lambda, \tilde{\varphi}_\sigma; P)\, \tilde{\omega}_0(\lambda, y; P)\, d\lambda$$

при всех положительных значениях x, y удовлетворяет уравнению $Bu'_x + u'_y B = 0$ и условиям $u(x, 0) = \gamma_\sigma(x) L_p(x, 0)$, $u(0, y) = \gamma_\sigma(y) \tilde{L}_p(y, 0)$ (см. задачу 4 § 1). Значит, в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \sigma$, $0 \leqslant y \leqslant \sigma$ выполняется тождество $f_\sigma(x, y) \equiv f(x, y)$ и

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\lambda, F; P) \{I + \tilde{\omega}_0(\lambda, \varphi_\sigma; P)\}\, \tilde{\omega}_0(\lambda, G; P)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda, f; P) \{P + \omega_0(\lambda, \tilde{\varphi}_\sigma; P)\}\, \tilde{\omega}(\lambda, g; P)\, d\lambda,$$

если $f(x) = g(x) = 0$ при $x > \sigma$. Устремляя здесь σ к бесконечности, получаем нужный результат.

7. Пусть h — ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, и h_1 — точная нижняя граница значений квадратичной формы (hf, f) на единичном шаре этого пространства. Доказать, что у симметрических ($q(x) = q(x)^*$; $h = h^*$) операторных краевых задач Штурма — Лиувилля, удовлетворяющих условию $16\,(q(x) f, f) - 9\,(|h_1| - h_1)^2 (f, f) \geqslant 0$, обобщенная спектральная матрица R такова, что

$$(f(\lambda)\, IRI\, \overline{f(\bar{\lambda})}) \geqslant 0, \quad (\lambda^2 g(\lambda)\, IRI\, \overline{g(\bar{\lambda})}) \geqslant 0$$

(предполагается, конечно, что функции $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ и $\lambda^2 g(\lambda)$ принадлежат CK^2).

8. Доказать, что обобщенные спектральные матрицы R симметрических операторных краевых задач Штурма — Лиувилля порождаются операторными мерами $d\rho(\mu)$:

$$[\omega(\lambda, f)\, R\tilde{\omega}(\lambda, g)] = \int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sqrt{\mu}, f)\, d\rho(\mu)\, \tilde{\omega}(\sqrt{\mu}, g),$$

где $\rho(\mu) = \rho(\mu)^* \in OH$ при каждом μ и оператор $\rho(\mu') - \rho(\mu)$ неотрицателен, если $\mu' > \mu$.

Указание. Сначала, предполагая выполнеными условия предыдущей задачи и используя результаты задач 1, 3, 6 § 1, доказываем, что в этом случае

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \int_0^\infty \omega(\sqrt{\mu}, f)\, d\rho(\mu)\, \tilde{\omega}(\sqrt{\mu}, g).$$

Замена переменной $\mu = \mu' + a^2$ в этом равенстве показывает, что

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \int_{-a^2}^\infty \omega(\sqrt{\mu}, f)\, d\rho(\mu)\, \tilde{\omega}(\sqrt{\mu}, g),$$

если

$$16\,(q(x) f, f) - 9\,(|h_1| - h_1)^2 (f, f) \geqslant -a^2 (f, f). \tag{2.2.15}$$

В общем случае можно аппроксимировать $q(x)$ операторнозначными функциями, удовлетворяющими условиям (2.2.15), и затем устремить a к бесконечности.

9. Доказать, что у симметрической ($q(x)$ вещественна) краевой задачи Штурма — Лиувилля на всей оси спектральная матрица порождается матричной мерой $d\rho(\mu)$:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \int_{-\infty}^\infty \omega(\sqrt{\mu}, f)\, d\rho(\mu)\, \omega(\sqrt{\mu}, g)$$

(матрицы $\rho(\mu') - \rho(\mu)$ неотрицательны, если $\mu' > \mu$).

10. Доказать, что у симметрической ($\Omega(x) = \Omega(x)^*$, $B^* = -B$) операторной краевой задачи Дирака обобщенная спектральная матрица R порождается операторной мерой $d\rho(\mu)$:

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \int_{-\infty}^\infty \omega(\lambda, f;\ P)\, d\rho(\lambda)\, \tilde{\omega}(\lambda, g;\ P)$$

(операторы $\rho(\lambda') - \rho(\lambda)$ неотрицательны, если $\lambda' > \lambda$ и $P\rho(\lambda) P = \rho(\lambda)$).

Указание. Если $F(\lambda) \geqslant 0$ и $F(\lambda) \in Z(-\infty, \infty)$, то $F(\lambda) = G(\lambda)\, \overline{G(\lambda)}$, где

$$G(\lambda) = \int_0^\infty G(x)\, e^{-i\lambda x} dx = C(\lambda, G) - iS(\lambda, G),$$

$$\overline{G(\lambda)} = \int_0^\infty G(x)\, e^{i\lambda x} dx = C(\lambda, \overline{G}) + iS(\lambda, \overline{G}),$$

$$(F(\lambda), R) = (C(\lambda, G)\, C(\lambda, \overline{G}),\ R) - i\,(S(\lambda, G)\, C(\lambda, \overline{G}),\ R) +$$
$$+ i\,(S(\lambda, \overline{G})\, C(\lambda, G),\ R) + (S(\lambda, G)\, S(\lambda, \overline{G}),\ R).$$

С другой стороны, оператор

$$A = (\omega_0(\lambda, G;\ P)\, R\tilde{\omega}_0(\lambda, \overline{G};\ P)) = \int_0^\infty g(x)\, g(x)^*\, dx$$

неотрицателен. Из равенства

$$A = (\omega_0(\lambda, G;\ P)\, R\tilde{\omega}_0(\lambda, \overline{G};\ P)) =$$

$$= (\{C(\lambda, G)P - S(\lambda, G)BP\} R \{PC(\lambda, \overline{G}) + PBS(\lambda, \overline{G})\}) =$$
$$= (C(\lambda, G)C(\lambda, \overline{G}), R) - B(S(\lambda, G)C(\lambda, \overline{G}), R) +$$
$$+ (S(\lambda, \overline{G})C(\lambda, G), R)B + B(S(\lambda, G)S(\lambda, \overline{G}), R)B,$$

замечая, что $PRP = R$ и $PBP = 0$, находим

$$PAP = (C(\lambda, G)C(\lambda, \overline{G}), R), \quad (I - P)AP = -B(S(\lambda, G)C(\lambda, \overline{G}), R),$$
$$PA(I - P) = (S(\lambda, \overline{G})C(\lambda, G), R),$$
$$(I - P)A(I - P) = B(S(\lambda, G)S(\lambda, \overline{G}), R)B,$$

откуда следует, что

$$(F(\lambda), R) = PAP - iB(I - P)AP - iPA(I - P)B + B(I - P)A(I - P)B =$$
$$= P(A - iBA + iAB + BAB)P = P(I - iB)A(I - iB)P.$$

Поэтому оператор $(F(\lambda), R)$ неотрицателен, если $F(\lambda) \geqslant 0$. Теперь можно использовать результаты задачи 5 § 1.

§ 3. Обратная задача

Вопросы, рассмотренные в предыдущем параграфе, относятся к прямым задачам спектрального анализа: в них для данной краевой задачи отыскивалась ее спектральная функция, порождающая формулы разложения. Обратными задачами спектрального анализа называются задачи, в которых по каким-либо спектральным данным нужно восстановить свойства исходного оператора или весь оператор. В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о восстановлении краевой задачи вида (2.2.1), (2.2.2) по ее спектральной функции. Выясним прежде всего, каким условиям должна удовлетворять обобщенная спектральная функция R такой краевой задачи.

Лемма 2.3.1. *Спектральная функция R краевой задачи (2.2.1), (2.2.2) обладает следующими свойствами*:

1) *если* $f(\lambda) \in CK^2(\sigma)$ *и* $(f(\lambda)\, y(\lambda), R) = 0$ *при всех* $y(\lambda) \in CK^2(\sigma)$, *то* $f(\lambda) \equiv 0$;

2) *функция*

$$\Phi(x) = \left(\frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda^2}, R\right) \quad (0 < x < \infty)$$

трижды непрерывно дифференцируема, причем $\Phi'(+0) = 1$, $\Phi''(+0) = -h$. *При этом если* $q(x)$ *имеет* $n \geqslant 0$ *непрерывных производных, то функция* $\Phi(x)$ *имеет* $n + 3$ *непрерывных производных.*

Доказательство. Пусть $\hat{f}(x)$ и $\hat{y}(x)$ — функции из $K^2(\sigma)$, ω-преобразования Фурье которых равны соответственно $f(\lambda)$ и $y(\lambda)$. Тогда

$$(f(\lambda)\, y(\lambda), R) = \int_0^\infty \hat{f}(x)\, \hat{y}(x)\, dx,$$

причем $\hat{y}(x)$ пробегает все множество $K^2(\sigma)$, когда $y(\lambda)$ пробегает множество $CK^2(\sigma)$. Отсюда, очевидно, следует, что равенство $(f(\lambda)\,y(\lambda), R) = 0$ может выполняться при всех $y(\lambda) \in CK^2(\sigma)$ лишь в том случае, когда $\hat{f}(x)$, а значит и $f(\lambda)$, тождественно равна нулю, т. е. первое утверждение леммы действительно справедливо. Как известно, $\lambda^{-2}(1 - \cos\lambda x)$ есть косинус-преобразование Фурье функции

$$\varphi(t) = \begin{cases} x - t, & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ 0, & t \geqslant x. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Поэтому

$$\Phi(x) = \left(\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2}, R\right) = \left(\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2}, \frac{2}{\pi}\right) +$$

$$+\left(\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2}, R - \frac{2}{\pi}\right) = \varphi(0) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2}, C(L)\right),$$

откуда согласно (2.1.4) и (2.3.1)

$$\Phi(x) = x + \int_0^x (x-t)\,L(t, 0)\,dt \quad (0 \leqslant x < \infty). \tag{2.3.2}$$

Так как функция $L(t, 0)$ непрерывно дифференцируема, то $\Phi(x)$ трижды непрерывно дифференцируема, причем

$$\Phi'(+0) = 1 + \lim_{x\to 0}\int_0^x L(t, 0)\,dt = 1,$$

$$\Phi''(+0) = \lim_{x\to 0} L(x, 0) = L(0, 0) = -h.$$

Если функция $q(x)$ имеет $n \geqslant 0$ непрерывных производных, то $L(x, 0)$ имеет $n + 1$непрерывную производную и, значит, функция $\Phi(x)$ имеет $n + 3$ непрерывных производных.

Выведем теперь линейное интегральное уравнение, которому удовлетворяет при каждом фиксированном x ядро $K(x, y) = K(x, y; h)$ оператора преобразования.

Функция $\omega(\lambda, x)$ при каждом фиксированном значении x является четной целой функцией экспоненциального типа, ограниченной на всей вещественной оси. Поэтому $\omega(\lambda, x)$ есть мультипликатор в пространстве Z, и на эту функцию можно умножить любую обобщенную функцию из Z'. Рассмотрим произведение $\left(R - \frac{2}{\pi}\right)\omega(\lambda, x)$, где R — спектральная функция задачи (2.2.1), (2.2.2). Из формулы

$$\omega(\lambda, x) = \cos\lambda x + \int_0^x K(x, t)\cos\lambda t\,dt$$

следует

$$\left(R-\frac{2}{\pi}\right)\omega(\lambda, x)=\left(R-\frac{2}{\pi}\right)\cos\lambda x+$$

$$+\left(R-\frac{2}{\pi}\right)\int_0^x K(x, t)\cos\lambda t dt,$$

откуда, вспоминая, что $R-\frac{2}{\pi}$ есть косинус-преобразование Фурье функции $\frac{2}{\pi}L(y, 0)$, и используя свойства 2 и 3 преобразований Фурье (см. § 1), получаем

$$\left(R-\frac{2}{\pi}\right)\omega(\lambda, x)\sim\frac{1}{\pi}\{L(x+y, 0)+L(|x-y|, 0\}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^x K(x, t)\{L(t+y, 0)+L(|t-y|, 0)\}dt. \tag{2.3.3}$$

Любая функция $F(\lambda)\in Z$ является косинус-преобразованием Фурье некоторой финитной и непрерывной функции $f(x)$:

$$F(\lambda)=\int_0^\infty f(x)\cos\lambda x dx, \quad f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\lambda)\cos\lambda x d\lambda. \tag{2.3.4}$$

Выражая здесь $\cos\lambda x$ через $\omega(\lambda, x)$ с помощью оператора преобразования $(\mathbf{I}+\mathbf{L}')$, получаем

$$F(\lambda)=\int_0^\infty\left[f(x)+\int_x^\infty f(y)L(y, x)dy\right]\omega(\lambda, x)dx,$$

так что $F(\lambda)$ является также ω-преобразованием Фурье функции $f(x)+\int_x^\infty f(y)L(y, x)dy$ и согласно следствию теоремы 2.2.1

$$(F(\lambda), R\omega(\lambda, x))=(F(\lambda)\omega(\lambda, x), R)=f(x)+\int_x^\infty f(y)L(y, x)dy.$$

Кроме того,

$$\left(F(\lambda), \frac{2}{\pi}\omega(\lambda, x)\right)=\left(F(\lambda)\omega(\lambda, x), \frac{2}{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\lambda)\left[\cos\lambda x+\int_0^x K(x, y)\cos\lambda y dy\right]d\lambda=$$

$$=f(x)+\int_0^x K(x, y)f(y)dy.$$

Поэтому

$$\left(F(\lambda),\ \left(R-\frac{2}{\pi}\right)\omega(\lambda, x)\right)=\int_x^\infty f(y)\,L(y, x)\,dy-$$

$$-\int_0^x K(x, y)\,f(y)\,dy=\int_0^\infty f(y)\,\{L(y, x)-K(x, y)\}\,dy,$$

откуда в силу (2.3.4) и определения косинус-преобразования Фурье локально суммируемой функции следует, что

$$\left(R-\frac{2}{\pi}\right)\omega(\lambda, x)\sim\frac{2}{\pi}\{L(y, x)-K(x, y)\}. \tag{2.3.5}$$

Сравнивая формулы (2.3.3) и (2.3.5), приходим к тождеству

$$L(y, x)-K(x, y)=\frac{1}{2}\{L(x+y, 0)+L(|x-y|, 0)\}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x K(x, t)\,\{L(t+y, 0)+L(|t-y|, 0)\}\,dt,$$

из которого при $y<x$ вытекает следующее интегральное уравнение для ядра $K(x, y)$:

$$f(x, y)+K(x, y)+\int_0^x K(x, t)\,f(t, y)\,dt=0\quad (0\leqslant y\leqslant x), \tag{2.3.6}$$

где

$$f(x, y)=\frac{1}{2}\{L(x+y, 0)+L(|x-y|, 0)\}. \tag{2.3.7}$$

С другой стороны, согласно формуле (2.3.2)

$$f(x, y)=\frac{1}{2}\{\Phi''(x+y)+\Phi''(|x-y|)\}, \tag{2.3.8}$$

т. е. ядро и свободный член интегрального уравнения (2.3.6) выражаются непосредственно через спектральную функцию R рассматриваемой краевой задачи. Поэтому, решив уравнение (2.3.6) (ниже будет доказано, что при каждом фиксированном x оно имеет единственное решение), мы восстановим ядро $K(x, y)$, а вместе с ним и краевую задачу по ее спектральной функции. Из единственности решения уравнения (2.3.6) вытекает единственность краевой задачи с данной спектральной функцией.

Лемма 2.3.2. *Пусть обобщенная функция $R\in Z'$ обладает свойствами 1 и 2 леммы 2.3.1. Положим*

$$\Phi(x)=\left(\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2},\ R\right),\quad f(x, y)=\frac{1}{2}\{\Phi''(x+y)+\Phi''(|x-y|)\}$$

и составим интегральное уравнение (2.3.6) относительно неизвестной функции $K(x, y)$. При каждом значении $x \geqslant 0$ это интегральное уравнение имеет единственное решение $K(x, y)$, причем оно непрерывно и имеет по обеим переменным столько непрерывных производных, сколько их имеет функция $\Phi''(x)$, рассматриваемая на полуоси $[0, \infty)$.

Доказательство. Согласно альтернативе Фредгольма разрешимость уравнения (2.3.6) при любом значении $x = a$ будет доказана, если мы покажем, что соответствующее однородное уравнение

$$g(y) + \int_0^a g(t) f(t, y)\, dt = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant a) \tag{2.3.9}$$

не имеет ненулевых решений. Возьмем произвольную функцию $g(y) \in K^2(a)$ и вычислим косинус-преобразование Фурье локально суммируемой функции

$$a(y) = g(y) + \int_0^\infty g(t) f(t, y)\, dt \quad (0 \leqslant y < \infty).$$

Из формул (2.3.8) и свойств 3 и 4 косинус-преобразований Фурье (см. § 1) вытекает, что

$$C(a) = C(\lambda, g) + C(\lambda, g)\left(\frac{\pi}{2} R - \Phi'(+0)\right) = \frac{\pi}{2} C(\lambda, g) R.$$

Поэтому для любой функции $z(y) \in K^2(a)$ справедливо равенство

$$\int_0^\infty a(y) z(y)\, dy = \frac{2}{\pi}\left(C(\lambda, z), \quad \frac{\pi}{2} C(\lambda, g) R\right) = (C(\lambda, g) C(\lambda, a), \ R).$$

Если функция $g(y)$ удовлетворяет однородному уравнению (2.3.9), то левая часть этого равенства равна нулю, какова бы ни была функция $z(y) \in K^2(a)$, и $(C(\lambda, g)\, y(\lambda), R) = 0$ для всех функций $y(\lambda) \in CK^2(a)$. Отсюда согласно свойству 1, которому по условию удовлетворяет обобщенная функция R, следует, что функция $C(\lambda, g)$, а значит и $g(y)$, тождественно равна нулю. Таким образом, однородное уравнение (2.3.9) не имеет ненулевых решений, а неоднородное уравнение (2.3.6) имеет при каждом фиксированном значении x единственное решение $K(x, y)$.

Исследуем гладкость этого решения. После замены переменных $y = xy'$, $t = xt'$ (2.3.6) преобразуется в уравнение

$$f(x, xy') + K(x, xy') + \int_0^1 K(x, xt') f(xt', xy')\, x dt' = 0, \tag{2.3.10}$$

и мы можем записать его в виде

$$(\mathbf{I} + \mathbf{F}(x)) K + f(x) = 0,$$

где зависящие от параметра x операторы $\mathbf{F}(x)$ действуют в фиксированном пространстве $C\,[0, 1]$ и $f(x)$ являются непрерывно зависящими от параметра x элементами этого пространства. Доказанная выше однозначная разрешимость уравнения (2.3.6) гарантирует существование обратных операторов $(\mathbf{I}+\mathbf{F}(x))^{-1}$ при всех значениях x. Ядро интегрального оператора $\mathbf{F}(x)$, равное $\frac{x}{2}\{\Phi''(x(t'+y'))+\Phi''(x|t'-y'|)\}$, непрерывно зависит от x и имеет по x $n+1$ непрерывную производную, если функция $\Phi(x)$ имеет $n+3$ непрерывные производные. Поэтому обратный оператор $(\mathbf{I}+\mathbf{F}(x))^{-1}$ непрерывно зависит от x и имеет $n+1$ производную по x. Так как функция $f(x, xy')$ тоже имеет $n+1$ непрерывную производную по x, то и решение $K(x, xy')$ уравнения (2.3.10) имеет $n+1$ непрерывную производную по x. Подставляя в равенстве (2.3.10) вместо функции f ее выражение через Φ'', получаем

$$K(x, xy') = \frac{1}{2}\{\Phi''(x(1+y'))+\Phi''(x(1-y'))\} +$$
$$+\frac{x}{2}\int_0^1 K(x, xt')\,\Phi''(x(t'+y'))\,dt' +$$
$$+\frac{x}{2}\left\{\int_0^{y'} K(x, xt')\,\Phi''(x(y'-t'))\,dt' +\right.$$
$$\left.+\int_{y'}^1 K(x, xt')\,\Phi''(x(t'-y'))\,dt'\right\}. \tag{2.3.11}$$

Из этой формулы видно, что функция $K(x, xy')$ будет иметь по переменной y' $n+1$ непрерывную производную, если функция $\Phi(x)$ имеет $n+3$ непрерывные производные. Лемма доказана.

Замечание. Из приведенного доказательства следует, что уравнение (2.3.6) и все входящие в него функции можно дифференцировать $n+1$ раз по x, если функция $\Phi(x)$ имеет $n+3$ производные. Это уравнение можно дифференцировать $n+1$ раз и по y, хотя функция $f(t, y)$ может не иметь производных по y такого порядка в точке $y=t$. Для правильного дифференцирования по y уравнение (2.3.6) нужно записать в форме, аналогичной (2.3.11):

$$f(x, y)+K(x, y)+\frac{1}{2}\int_0^x K(x, t)\,\Phi''(t+y)\,dt +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^y K(x, t)\,\Phi''(y-t)\,dt+\frac{1}{2}\int_y^x K(x, t)\,\Phi''(t-y)\,dt = 0.$$

В частности, первые две производные удовлетворяют равенствам

$$f'_y(x, y) + K'_y(x, y) + \int_0^x K(x, t) f'_y(t, y)\, dt = 0, \tag{2.3.12}$$

$$f''_{yy}(x, y) + K''_{yy}(x, y) + \int_0^x K(x, t) f''_{yy}(t, y)\, dt + K(x, y)\Phi'''(+0) = 0. \tag{2.3.13}$$

Лемма 2.3.3. *Пусть функция* $\Phi(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant \infty)$ *четырежды непрерывно дифференцируема,*

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\{\Phi''(x + y) + \Phi''(|x - y|)\} \tag{2.3.14}$$

и однородные уравнения (2.3.9) при любом $a \geqslant 0$ *имеют только нулевые решения. Тогда решение* $K(x, y)$ *неоднородного уравнения (2.3.6) удовлетворяет такому уравнению в частных производных:*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y) - q(x) K(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, y) \quad (0 \leqslant y \leqslant x < \infty), \tag{2.3.15}$$

причем

$$q(x) = 2\frac{d}{dx} K(x, x), \quad K'_y(x, 0) = 0. \tag{2.3.15'}$$

Доказательство. Согласно предыдущему из условий доказываемой леммы вытекает существование и непрерывность частных производных $K''_{xx}(x, y)$ и $K''_{yy}(x, y)$. Кроме того, из определения (2.3.14) функции $f(x, y)$ следует, что

$$f''_{xx}(x, y) = f''_{yy}(x, y) \ (x \neq y), \quad f'_x(0, y) = f'_y(x, 0) = 0. \tag{2.3.16}$$

Дифференцируя уравнение (2.3.6) один раз по y, получаем равенство (2.3.12), из которого при $y = 0$ согласно (2.3.16) находим

$$K'_y(x, y)|_{y=0} = 0. \tag{2.3.17}$$

Двукратное дифференцирование по y уравнения (2.3.6) приводит к равенству (2.3.13). Но

$$\int_0^x K(x, t) f''_{yy}(t, y)\, dt = \int_0^x K(x, t) f''_{tt}(t, y)\, dt =$$

$$= \int_0^y K(x, t) f''_{tt}(t, y)\, dt + \int_y^x K(x, t) f''_{tt}(t, y)\, dt =$$

$$= K(x, t) f'_t(t, y)\Big|_0^y - K'_t(x, t) f(t, y)\Big|_0^y +$$

$$+\int_0^y K''_{tt}(x, t) f(t, y)\,dt + K(x, t) f'_t(t, y)\Big|_y^x -$$

$$- K'_t(x, t) f(t, y)\Big|_y^x + \int_y^x K''_{tt}(x, t) f(t, y)\,dt,$$

откуда, используя (2.3.14), (2.3.16) и (2.3.17), получаем

$$\int_0^x K(x, t) f''_{yy}(t, y)\,dt = -K(x, y)\,\Phi'''(+0) + K(x, x) f'_x(x, y) -$$

$$- K'_t(x, t) f(t, y)\big|_{t=x} + \int_0^x K''_{tt}(x, t) f(t, y)\,dt.$$

Поэтому равенство (2.3.13) можно преобразовать к такому виду:

$$f''_{yy}(x, y) + K''_{yy}(x, y) + \int_0^x K''_{tt}(x, t) f(t, y)\,dt +$$

$$+ K(x, x) f'_x(x, y) - K'_t(x, t) f(t, y)\big|_{t=x} = 0. \qquad (2.3.13')$$

Продифференцируем теперь уравнение (2.3.6) два раза по x:

$$f''_{xx}(x, y) + K''_{xx}(x, y) + \frac{d}{dx}\{K(x, x) f(x, y)\} +$$

$$+ K'_x(x, t) f(t, y)\big|_{t=x} + \int_0^x K''_{xx}(x, t) f(t, y)\,dt = 0,$$

и вычтем (2.3.13′) из полученного равенства:

$$f''_{xx}(x, y) - f''_{yy}(x, y) + K''_{xx}(x, y) - K''_{yy}(x, y) +$$

$$+ f(x, y)\frac{d}{dx} K(x, x) + \{K'_x(x, t) + K'_t(x, t)\} f(t, y)\big|_{t=x} +$$

$$+ \int_0^x \{K''_{xx}(x, t) - K''_{tt}(x, t)\} f(t, y)\,dt = 0.$$

Так как

$$f''_{xx}(x, y) = f''_{yy}(x, y), \quad \{K'_x(x, t) + K'_t(x, t)\}\big|_{t=x} = \frac{d}{dx} K(x, x),$$

то

$$K''_{xx}(x, y) - K''_{yy}(x, y) + q(x) f(x, y) +$$

$$+ \int_0^x \{K''_{xx}(x, t) - K''_{tt}(x, t)\} f(t, y)\,dt = 0,$$

где $q(x) = 2\frac{d}{dx} K(x, x)$.

Вычтем, наконец, из последнего равенства уравнение (2.3.6), умноженное на $q(x)$. В результате получим

$$\{K''_{xx}(x, y) - q(x) K(x, y) - K''_{yy}(x, y)\} +$$

$$+ \int_0^x \{K''_{xx}(x, t) - q(x) K(x, t) - K''_{tt}(x, t)\} f(t, y)\, dt = 0,$$

следовательно,

$$K''_{xx}(x, y) - q(x) K(x, y) - K''_{yy}(x, y) = 0,$$

так как однородные уравнения (2.3.9) имеют по условию лишь нулевые решения. Лемма доказана.

Теорема 2.3.1. *Для того чтобы обобщенная функция $R \in Z'$ была спектральной функцией некоторой краевой задачи вида (2.2.1), (2.2.2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *при любом $\sigma > 0$ в множестве $CK^2(\sigma)$ не существует отличной от нуля функции $f(\lambda)$, удовлетворяющей равенству $(f(\lambda) y(\lambda), R) = 0$ при всех $y(\lambda) \in CK^2(\sigma)$;*

2) *функция*

$$\Phi(x) = \left(\frac{1 - \cos \lambda x}{\lambda^2},\ R\right) \quad (0 < x < \infty)$$

трижды непрерывно дифференцируема и $\Phi'(+0) = 1$. При этом функция $q(x)$ в уравнении (2.2.1) имеет столько же непрерывных производных, сколько их имеет $\Phi'''(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$.

Доказательство. Необходимость условий теоремы доказана в лемме 2.3.1. Для доказательства достаточности этих условий построим интегральное уравнение (2.3.6), в котором функция $f(x, y)$ определена формулой (2.3.8). По лемме 2.3.2 это уравнение при любом $x \geqslant 0$ имеет единственное решение $K(x, y)$ и это решение непрерывно дифференцируемо по обеим переменным, так что функция

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x) \tag{2.3.18}$$

существует и непрерывна. Рассмотрим краевую задачу (2.2.1), (2.2.2), в которой функция $q(x)$ определена формулой (2.3.18), а $h = K(0, 0)$. Покажем, что данная в теореме обобщенная функция R является спектральной функцией этой краевой задачи.

Прежде всего нам нужно доказать, что решение $K(x, y)$ уравнения (2.3.6) является ядром оператора преобразования задачи (2.2.1), (2.2.2), т. е. что функции

$$\omega(\lambda, x) = \cos \lambda x + \int_0^x K(x, t) \cos \lambda t\, dt \tag{2.3.19}$$

удовлетворяют уравнению (2.2.1) и начальным данным

$$\omega(\lambda, 0) = 1, \quad \omega'(\lambda, 0) = h = K(0, 0). \tag{2.3.20}$$

Предположим сначала, что функция $\Phi(x)$ имеет четыре непрерывные производные. В лемме 2.3.2 было доказано, что в этом случае $K(x, y)$ удовлетворяет уравнению в частных производных (2.3.15) и условиям (2.3.15′). Поэтому

$$\omega''(\lambda, x) - q(x)\omega(\lambda, x) + \lambda^2\omega(\lambda, x) = -\lambda^2\cos\lambda x +$$
$$+ \{K(x, x)\cos\lambda x\}' + K_x'(x, t)\cos\lambda t\,|_{t=x} +$$
$$+ \int_0^x \{K_{xx}''(x, t) - q(x)K(x, t)\}\cos\lambda t dt - q(x)\cos\lambda x +$$
$$+ \lambda^2\cos\lambda x + \lambda^2\int_0^x K(x, t)\cos\lambda t\,dt,$$

откуда, интегрируя последнее слагаемое два раза по частям, получаем

$$\omega''(\lambda, x) - q(x)\omega(\lambda, x) + \lambda^2\omega(\lambda, x) =$$
$$= \int_0^x \{K_{xx}''(x, t) - q(x)K(x, t) - K_{tt}''(x, t)\}\cos\lambda t dt +$$
$$+ \left\{\frac{d}{dx}K(x, x) + [K_x'(x, t) + K_t'(x, t)]\,|_{t=x} - q(x)\right\}\cos\lambda x -$$
$$- K_t'(x, t)\,|_{t=0}$$

и, согласно (2.3.15), (2.3.15′),

$$\omega''(\lambda, x) - q(x)\omega(\lambda, x) + \lambda^2\omega(\lambda, x) = 0.$$

В том, что функции $\omega(\lambda, x)$ удовлетворяют начальным данным (2.3.20), убедиться нетрудно.

Пусть теперь функция $\Phi(x)$ имеет только три непрерывные производные. Тогда функции

$$\Phi_\delta(x) = \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta}\Phi(t)\,dt$$

имеют четыре непрерывные производные. При $\delta \to 0$ эти функции и их первые три производные сходятся к функции $\Phi(x)$ и ее первым трем производным равномерно в каждом конечном интервале. Поэтому при достаточно малом δ уравнения

$$f_\delta(x, y) + K_\delta(x, y) + \int_0^x K_\delta(x, t)f_\delta(t, y)\,dt = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant x),$$

где

$$f_\delta(x, y) = \frac{1}{2}\{\Phi''_\delta(x+y) + \Phi''_\delta(|x-y|)\},$$

имеют единственные решения, причем

$$\lim_{\delta\to 0} K_\delta(x, y) = K(x, y), \quad \lim_{\delta\to 0} \frac{d}{dx} K_\delta(x, x) = \frac{d}{dx} K(x, x)$$

равномерно в каждой конечной области изменения переменных x, y. Кроме того, согласно предыдущему функции

$$\omega_\delta(\lambda, x) = \cos\lambda x + \int_0^x K_\delta(x, t)\cos\lambda t dt$$

удовлетворяют уравнениям $y'' - q_\delta(x)y + \lambda^2 y = 0$, $q_\delta(x) = 2\frac{d}{dx} K_\delta(x, x)$ и начальным данным $\omega_\delta(\lambda, 0) = 1$, $\omega'_\delta(\lambda, 0) = K_\delta(0, 0)$. Совершая в этих формулах предельный переход при $\delta \to 0$, приходим к выводу, что функции (2.3.19) должны удовлетворять уравнению (2.2.1) и начальным данным (2.3.20). Таким образом, и в этом случае решение $K(x, y)$ уравнения (2.3.6) есть ядро оператора преобразования для краевой задачи (2.2.1), (2.2.2).

Обозначим через R_0 спектральную функцию построенной краевой задачи и положим

$$\Phi_0(x) = \left(\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2}, R_0\right),$$

$$f_0(x, y) = \frac{1}{2}\{\Phi''_0(x+y) + \Phi''_0(|x-y|)\}.$$

Как было показано выше, ядро $K(x, y)$ оператора преобразования этой задачи должно удовлетворять уравнению

$$f_0(x, y) + K(x, y) + \int_0^x K(x, t) f_0(t, y)\,dt = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant x).$$

Вычитая это уравнение из (2.3.6) и полагая затем $y = 0$, получаем

$$f(x, 0) - f_0(x, 0) + \int_0^x K(x, t)\{f(t, 0) - f_0(t, 0)\}\,dt = 0,$$

откуда следует, что $f(x, 0) - f_0(x, 0) \equiv 0$, так как однородное уравнение Вольтерра $\varphi(x) + \int_0^x K(x, t)\varphi(t)\,dt = 0$ имеет, очевидно, только нулевое решение.

Таким образом, $\Phi''(x) = \Phi''_0(x)$, а так как, кроме того, $\Phi(0) = \Phi_0(0) = 0$, $\Phi'(+0) = \Phi'_0(+0) = 1$, то $\Phi(x) = \Phi_0(x)$ и, следовательно, $R = R_0$.

Заметим, наконец, что, как было установлено в лемме 2.3.2, функция $K(x, y)$ имеет столько непрерывных производных, сколько их имеет $\Phi''(x)$. Следовательно, функция $q(x)$ имеет столько непрерывных производных, сколько их имеет $\Phi'''(x)$.

Теорема доказана.

Задачи

1. Доказать, что обобщенная функция $R = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{i}{2n!}\,\delta^{(2n)}(\lambda)$, действующая в пространстве Z по формуле

$$(F(\lambda),\ R) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\lambda)\,d\lambda + \frac{i}{2n!}\,\frac{d^{2n}}{d\lambda^{2n}}\,F(\lambda)\,\big|_{\lambda=0},$$

является спектральной для некоторой краевой задачи

$y'' - q(x)\,y + \lambda^2 y = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty),\ y'(0) = 0.$

Установить, что в этой задаче функция $\omega_0(x) = \omega(\lambda, x; 0)\,|_{\lambda=0}$ и присоединенные к ней функции $\omega_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, определяемые как решения уравнений

$$\omega_k''(x) - q(x)\,\omega_k(x) = \omega_{k-1}(x), \quad \omega_k(0) = \omega_k'(0) = 0,$$

принадлежат пространству $L_2[0, \infty)$. Доказать, что в данном случае равенство Парсеваля можно записать в виде

$$\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \omega(\lambda, f)\,\omega(\lambda, g)\,d\lambda + (-1)^n i \sum_{k=0}^{n} \omega_{n-k}(f)\,\omega_k(g),$$

$$\omega_k(f) = \int_0^\infty f(x)\,\omega_k(x)\,dx, \quad \omega_k(g) = \int_0^\infty g(x)\,\omega_k(x)\,dx$$

и оно распространяется на все функции $f(x)$, $g(x)$ из пространства $L_2[0, \infty)$.

2. Рассмотрим две краевые задачи Штурма — Лиувилля

$$-y'' + q_j(x)\,y = \lambda^2 y, \quad y_j'(0) - h_j y_j(0) = 0 \quad (0 < x < \infty)$$

и соответствующие им операторы преобразования. Оператор $\mathbf{I} + \mathbf{L}_1$ преобразует решения $\omega_1(\lambda, x; h_1)$ первой краевой задачи в $\cos\lambda x$, а оператор $\mathbf{I} + \mathbf{K}_2$ преобразует $\cos\lambda x$ в решения $\omega_2(\lambda, x; h_2)$ второй краевой задачи. Поэтому оператор $\mathbf{I} + \mathbf{K}_{2,1} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_2)(\mathbf{I} + \mathbf{L}_1)$ преобразует $\omega_1(\lambda, x; h_1)$ в $\omega_2(\lambda, x; h_2)$ и является, очевидно, интегральным и вольтерровским. Доказать, что ядро $K_{2,1}(x, y)$ оператора $\mathbf{K}_{2,1}$ удовлетворяет уравнению

$$f(x, y) + K_{2,1}(x, y) + \int_0^x K_{2,1}(x, t)\,f(t, y)\,dt = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant x), \qquad (2.3.21)$$

аналогичному уравнению (2.3.6). Здесь

$$f(x, y) = F''_{x,y}(x, y), \qquad F(x, y) = \left(\int_0^x \omega_1(\lambda, t)\,dt \int_0^y \omega_1(\lambda, t)\,dt,\ \ R_2 - R_1\right)$$

и R_j $(j = 1, 2)$ — обобщенные спектральные функции рассматриваемых краевых задач.

Указание. Из формулы

$$\omega_1(\lambda, x) = \omega_2(\lambda, x) + \int_0^x K_{1,2}(x, t)\,\omega_2(\lambda, t)\,dt$$

следует $\omega_1(\lambda, f) = \omega_2(\lambda, \hat{f})$, где $\hat{f}(x) = f(x) + \int_x^\infty f(t) K_{1,2}(t, x)\,dt$, поэтому

$$(\omega_1(\lambda, f)\,\omega_1(\lambda, g),\ R_2 - R_1) = (\omega_2(\lambda, \hat{f})\,\omega_2(\lambda, \hat{g}),\ R_2) -$$

$$(\omega_1(\lambda, f)\,\omega_1(\lambda, g),\ R_1) = \int_0^\infty \{\hat{f}(x)\,\hat{g}(x) - f(x)\,g(x)\}\,dx =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty f(x)\left\{K_{1,2}(x, y) + K_{1,2}(y, x) + \int_0^x K_{1,2}(x, t)\,K_{1,2}(y, t)\,dt\right\} g(y)\,dx\,dy,$$

$$F(x, y) = \int_0^x\int_0^y \left\{K_{1,2}(\xi, \eta) + K_{1,2}(\eta, \xi) + \int_0^\xi K_{1,2}(\xi, t)\,K_{1,2}(\eta, t)\,dt\right\} d\eta\,d\xi.$$

Таким образом,

$$f(x, y) = K_{1,2}(x, y) + K_{1,2}(y, x) + \int_0^x K_{1,2}(x, t)\,K_{1,2}(y, t)\,dt,$$

откуда для соответствующих интегральных операторов получаем тождество $(\mathbf{I} + \mathbf{f}) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_{1,2})(\mathbf{I} + \mathbf{K}_{1,2}^{+})$, где $\mathbf{K}_{1,2}^{+}$ — союзный с $\mathbf{K}_{1,2}$ оператор. Так как $(\mathbf{I} + \mathbf{K}_{2,1}) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_{1,2})^{-1}$, то $(\mathbf{I} + \mathbf{K}_{2,1})(\mathbf{I} + \mathbf{f}) = \mathbf{I} + \mathbf{K}_{1,2}^{+}$, откуда для соответствующих ядер получаем тождество

$$K_{2,1}(x, y) + \int_0^x K_{2,1}(x, t)\,f(t, y)\,dt + f(x, y) = K_{1,2}(y, x),$$

из которого при $y < x$ следует (2.3.21).

3. Пусть R_1 — обобщенная спектральная функция краевой задачи

$$y'' + q_1(x)\,y = \lambda^2 y, \quad y(0)\,h_1 - y'(0) = 0 \tag{2.3.22}$$

и $\omega_1(\lambda, x) = \omega_1(\lambda, x;\ h_1)$ — соответствующие решения уравнения (2.3.22). Доказать, что обобщенная функция $R_2 = R_1 + c\delta(\lambda - \mu)$ спектральна для некоторой краевой задачи такого же вида, если функция $1 + c\int_0^x \omega_1(\mu, t)^2\,dt$ не имеет нулей на положительной полуоси $0 \leqslant x < \infty$, и найти эту краевую задачу.

Указание. Пусть $\omega_2(\lambda, x)$ — решения искомой краевой задачи

$$y'' + q_2(x)\,y = \lambda^2 y, \quad y(0)\,h_2 - y'(0) = 0$$

и $K_{2,1}(x, y)$ — ядро оператора преобразования, переводящего $\omega_1(\lambda, x)$ в $\omega_2(\lambda, x)$. Для отыскания этого ядра можно воспользоваться уравнением

(2.3.21), которое в данном случае вырождено,

$$c\omega_1(\mu, x)\,\omega_1(\mu, y) + K_{2,1}(x, y) + c\int_0^x K_{2,1}(x, t)\,\omega_1(\mu, t)\,\omega_1(\mu, y)\,dt = 0,$$

и решается в явном виде

$$K_{2,1}(x, y) = -\frac{c\omega_1(\mu, x)\,\omega_1(\mu, y)}{1 + c\int_0^x \omega_1(\mu, t)^2\,dt}.$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} &\omega_2(\lambda, x) = \omega_1(\lambda, x) - \frac{c\omega_1(\mu, x)}{1 + c\int_0^x \omega_1(\mu, t)^2\,dt}\int_0^x \omega_1(\mu, t)\,\omega_1(\lambda, t)\,dt,\\ &h_2 = \omega_2'(\lambda, 0) = h_1 - c,\\ &q_2(x) = q_1(x) - 2c\left\{\frac{\omega_1(\mu, x)^2}{1 + c\int_0^x \omega_1(\mu, t)^2\,dt}\right\}'. \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.23)$$

4. Используя вронскиан $W\{u(x), v(x)\} = u'(x)v(x) - u(x)v'(x)$, можно преобразовать формулу (2.3.23) к виду

$$\omega_2(\lambda, x) = \omega_1(\lambda, x) + \frac{c\omega_2(\mu, x)\,W\{\omega_1(\mu, x), \omega_1(\lambda, x)\}}{\mu^2 - \lambda^2},$$

подсказывающему интересные обобщения.

Пусть на конечном или бесконечном интервале (a, b) даны два уравнения Штурма — Лиувилля

$$-y_j'' + q_j(x)\,y_j = \lambda^2 y_j \qquad (j = 1, 2),$$

в которых функции $q_j(x)$ предполагаются непрерывными только во внутренних точках этого интервала. Обозначим через $y_j(x)$ некоторые фиксированные решения этих уравнений с $\lambda = \mu$, а через $\varphi_1(\lambda, x)$ — произвольное решение первого уравнения. Доказать, что функции

$$\left.\begin{aligned} &r(\lambda, x) = (\mu^2 - \lambda^2)^{-1}\,y_2(x)\,W\{y_1(x), \varphi_1(\lambda, x)\},\\ &\psi(\lambda, x) = \varphi_1(\lambda, x) + r(\lambda, x) \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.24)$$

удовлетворяют уравнениям

$$-r''(\lambda, x) + q_2(x)\,r(\lambda, x) = \lambda^2 r(\lambda, x) - 2\varphi_1(\lambda, x)\,\{y_2(x)\,y_1(x)\}',$$

$$-\psi''(\lambda, x) + q_2(x)\,\psi(\lambda, x) = \lambda^2\psi(\lambda, x) + $$

$$+ \frac{\varphi_1(\lambda, x)}{y_2(x)\,y_1(x)}\,\{[y_2(x)\,y_1(x)]^2 + W\{y_2(x), y_1(x)\}\}'.$$

В частности, если решение $y_1(x)$ не имеет нулей в интервале (a, b), то функция

$$\varphi_2(\lambda, x) = \frac{W\{y_1(x), \varphi_1(\lambda, x)\}}{y_1(x)\,(\mu^2 - \lambda^2)} \qquad (2.3.25)$$

удовлетворяют уравнению

$$\varphi_2(\lambda, x)'' + q_2(x)\,\varphi_2(\lambda, x) = \lambda^2\varphi_2(\lambda, x),$$

где

$$q_2(x) = y_1(x)\left(\frac{1}{y_1(x)}\right)'' + \mu^2 = q_1(x) - 2\frac{d}{dx}\left\{\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right\}.$$

Если функция $[y_1(x)]^2$ имеет первообразную $\mathcal{J}_1(x)$, не обращающуюся в нуль при $x \in (a, b)$, то функции

$$\varphi_2(\lambda, x) = \varphi_1(\lambda, x) + \frac{y_1(x)}{\mathcal{J}_1(x)}\,\frac{W\{y_1(x),\ \varphi_1(\lambda, x)\}}{\mu^2 - \lambda^2} \tag{2.3.26}$$

удовлетворяют уравнению

$$-\varphi_2(\lambda, x)'' + q_2(x)\,\varphi_2(\lambda, x) = \lambda^2\varphi_2(\lambda, x),$$

в котором $q_2(x) = q_1(x) - 2\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{\mathcal{J}_1'(x)}{\mathcal{J}_1(x)}\right\}$. Таким образом, формулы (2.3.25), (2.3.26) определяют некоторые операторы преобразования. Найти обратные операторы.

5. Обозначим через $K^2(a, b)$ множество финитных на интервале (a, b) функций с интегрируемым квадратом, а через $K_1^2(a, b)$ — его подмножество, состоящее из дифференцируемых функций, производная которых тоже принадлежит $K^2(a, b)$. Пусть $Z(a, b)$ — такое пространство основных функций, которое содержит произведения $\varphi_1(\lambda, f_1)\,\varphi_1(\lambda, f_2)$, если $f_j(x) \in K^2(a, b)$ и $\varphi_1(\lambda, f) = \int_a^b f(x)\,\varphi_1(\lambda, x)\,dx$. Пусть, далее, R_1 — такая обобщенная функция, действующая над $Z(a, b)$, что

$$(\varphi_1(\lambda, f_1)\,\varphi_1(\lambda, f_2),\ R_1) = \int_a^b f_1(x)\,f_2(x)\,dx.$$

А. Доказать, что для любой пары функций $f(x)$, $g(x)$ такой, что $f(x) \in K^2(a, b)$, $g(x) \in K_1^2(a, b)$, $\int_a^b f(x)\,y_2(x)\,dx = 0$, выполняется тождество

$$(r(\lambda, f)\,r(\lambda, g)\,(\mu^2 - \lambda^2),\ R_1) = -\int_a^b f(x)\,g(x)\,[y_2(x)\,y_1(x)]^2\,dx,$$

где $r(\lambda, f) = \int_a^b f(x)\,r(\lambda, x)\,dx$ и функции $r(\lambda, x)$ определены формулой (2.3.24). В частности,

$$(\varphi_2(\lambda, f)\,\varphi_2(\lambda, g)\,(\mu^2 - \lambda^2),\ R_1) = -\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx,$$

если функция $r(\lambda, x) = \varphi_2(\lambda, x)$ определена формулой (2.3.25).

Б. Доказать, что тождество

$$(\varphi_2(\lambda, f_1)\,\varphi_2(\lambda, f_2),\ R_1) = \int_a^b f_1(x)\, f_2(x)\, dx$$

выполняется на всех функциях $f_j(x)$, принадлежащих множеству $K^2(a, b)$ и удовлетворяющих условию

$$\int_a^b f_j(x)\, \frac{y_1(x)}{\mathcal{J}_1(x)}\, dx = 0,$$

если функции $\varphi_2(\lambda, x)$ определены формулой (2.3.26).

Указание. Пусть выполнены условия задачи **А.** Тогда

$$r(\lambda, f) = \frac{1}{\mu^2 - \lambda^2} \int_a^b f(x)\, y_2(x)\, W\{y_1(x),\ \varphi_1(\lambda, x)\}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\mu^2 - \lambda^2} \int_a^b W\{y_1(x),\ \varphi_1(\lambda, x)\}\, d\left\{\int_a^x f(t)\, y_2(t)\, dt\right\} =$$

$$= \int_a^b y_1(x)\, \varphi_1(\lambda, x)\left\{\int_a^x f(t)\, y_2(t)\, dt\right\} = \varphi_1\left(\lambda,\ y_1 \int_0^x f(t)\, y_2(t)\, dt\right),$$

$$r(\lambda, g)(\mu^2 - \lambda^2) = \int_a^b g(x)\ y_2(x)\ \{y_1'(x)\, \varphi_1(\lambda, x) - y_1(x)\, \varphi_1'(\lambda, x)\}\, dx =$$

$$= \int_a^b \{g(x)\, y_2(x)\, y_1'(x) + [g(x)\, y_2(x)\, y_1(x)]'\}\, \varphi_1(\lambda, x)\, dx =$$

$$= \int_a^b \frac{[g(x)\, y_2(x)\, y_1^2(x)]'}{y_1(x)}\, \varphi_1(\lambda, x)\, dx = \varphi_1\left(\lambda,\ \frac{[g y_1^2 y_2]'}{y_1}\right).$$

Поэтому

$$(r(\lambda, f)\, r(\lambda, g)\, (\mu^2 - \lambda^2),\ R_1) =$$

$$= \left(\varphi_1\left(\lambda,\ y_1 \int_0^x f(t)\, y_2(t)\, dt\right) \varphi_1\left(\lambda,\ \frac{[g y_1^2 y_2]'}{y_1}\right),\ R_1\right) =$$

$$= \int_a^b [g y_1^2 y_2]' \left\{\int_0^x f(t)\, y_2(t)\, dt\right\} dx = -\int_a^b f(x)\, g(x)\, [y_1(x)\, y_2(x)]^2\, dx.$$

Задача **Б** решается аналогично, если учесть, что

$$\varphi_2(\lambda, f) = \varphi_1\left(\lambda,\ f + y_1 \int_0^x f(t)\, y_2(t)\, dt\right).$$

6. Изложенные выше результаты можно использовать для распространения различных теорем на краевые задачи вида

$$-y'' + \{q(x) + l(l+1)x^{-2}\}\, y = \lambda^2 y, \quad y(0) = 0, \tag{2.3.27}$$

где число $l \geqslant 1$ целое, а функция $q(x)$ непрерывна при $0 \leqslant x < a$. Для этого нужно последовательным применением операторов (2.3.25) и (2.3.26) избавиться от особенности $l(l+1)x^{-2}$.

А. Доказать существование обобщенных спектральных функций у задач (2.3.27) ($a = \infty$) и обобщит· теорему 2.3.1.

Б. Пусть μ_k и ν_k — собственные значения краевых задач

$$-y'' + \{q(x) + 2\sin^{-2}x\}\, y = \mu_k y, \quad y(0) = y(\pi) = 0,$$

$$-y'' + \left\{q(x) + \left[2\sin^2\frac{x}{2}\right]^{-1}\right\} y = \nu_k y, \quad y(0) = y'(\pi) = 0,$$

где функции $q(x)$ непрерывны и дифференцируемы на сегменте $[0, \pi]$. Доказать тождества

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{\mu_k - (k+1)^2\} = -\frac{3}{4}[q(0) + q(\pi)],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{\nu_k - k^2\} = -q(0) + \frac{1}{4}\{q(0) + q(\pi)\}.$$

§ 4. *Асимптотическая формула для спектральных функций симметрических краевых задач и теорема о равносходимости*

Согласно теореме 2.2.2 обобщенные спектральные функции симметрических краевых задач (h и $q(x)$ вещественны) порождаются мерами, т. е. каждой спектральной функции $R \in Z'$ соответствует такая неубывающая функция $\rho(\mu)$ $(-\infty < \mu < \infty)$, возможно не единственная, что

$$(f(\lambda)\, g(\lambda),\ R) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{\mu})\, g(\sqrt{\mu})\, d\rho(\mu),$$

каковы бы ни были функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ из CK^2.

В этом параграфе рассматриваются только симметрические краевые задачи и $\rho(\mu)$ называются их спектральными функциями. Займемся прежде всего выяснением поведения спектральных функций $\rho(\mu)$ при $\mu \to -\infty$. Для этого удобно воспользоваться формулой $R = \frac{2}{\pi}(1 + C(L))$ (теорема 2.2.1) и вытекающим из нее равенством

$$\left(\frac{1 - \cos\lambda x}{\lambda^2},\ R\right) = x + \int_0^x (x - t)\, L(t, 0;\ h)\, dt \quad (0 \leqslant x < \infty),$$

которое было получено при доказательстве леммы 2.3.1 (см. формулу (2.3.2.)). Поскольку

$$\frac{1-\cos\lambda x}{\lambda^2} = 2\,\frac{\sin\dfrac{\lambda x}{2}}{\lambda}\cdot\frac{\sin\dfrac{\lambda x}{2}}{\lambda}$$

является, очевидно, произведением двух функций из CK^2, из этого равенства для симметрических краевых задач при $x \in [0, \infty)$ получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos\sqrt{\mu}x}{\mu}\,d\rho(\mu) = x + \int_0^x (x-t)\,L(t, 0;\ h)\,dt. \tag{2.4.1}$$

Отсюда можно сделать определенное заключение о поведении $\rho(\mu)$ при $\mu \to -\infty$. В самом деле, так как функция $\rho(\mu)$ не убывает и $\mu^{-1}(1-\cos\sqrt{\mu}x) \geqslant 0$, то

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{+0} \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\mu}x - 1}{|\mu|}\,d\rho(\mu) = \int_{-\infty}^{+0} \frac{1-\cos\sqrt{\mu}x}{\mu}\,d\rho(\mu) \leqslant$$

$$\leqslant x + \int_0^x (x-t)\,L(t, 0;\ h)\,dt$$

при всех значениях $x \in [0, \infty)$. Из этого неравенства, замечая, что при любом n

$$\lim_{\mu\to-\infty} \frac{|\mu|^n \operatorname{ch}\sqrt{\mu}x}{\operatorname{ch}\sqrt{\mu}(x+1)-1} = 0,$$

заключаем, что интеграл

$$L_1(x) = \int_{-\infty}^{+0} \operatorname{ch}\sqrt{\mu}x\,d\rho(\mu) = \int_{-\infty}^{+0} \cos\sqrt{\mu}x\,d\rho(\mu) \tag{2.4.2}$$

сходится при всех значениях x и функция $L_1(x)$ бесконечно дифференцируема. Поэтому спектральная функция $\rho(\mu)$ симметрической краевой задачи всегда имеет конечный предел $\rho(-\infty)$, когда $\mu \to -\infty$, причем

$$\lim_{\mu\to-\infty} \exp\sqrt{|\mu|}\,x\,[\rho(\mu)-\rho(-\infty)] = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty), \tag{2.4.3}$$

так как в противном случае интеграл (2.4.2) не мог бы сходиться при всех значениях x.

Для изучения поведения спектральной функции при $\mu \to +\infty$ преобразуем равенство (2.4.1) к виду

$$\int_{+0}^{\infty} \frac{1-\cos\sqrt{\mu}x}{\mu}\,d\rho(\mu) = x + \int_0^x (x-t)\,\{L(t, 0;\ h) - L_1(t)\}\,dt, \tag{2.4.4}$$

что можно сделать, используя очевидное тождество

$$\int_{-\infty}^{+0} \frac{1-\cos\sqrt{\mu}x}{\mu}\,d\rho(\mu) = \int_0^x (x-t) \int_{-\infty}^{+0} \cos\sqrt{\mu}t\,d\rho(\mu)\,dt =$$

$$= \int_0^x (x-t) L_1(t)\,dt.$$

Пусть $f(x)$ — произвольная четная бесконечно дифференцируемая и финитная функция. Умножим обе части равенства (2.4.4) на $f''(x)$ и проинтегрируем по полуоси $[0, \infty)$. В результате получим

$$\int_{+0}^{\infty} C(\sqrt{\mu}, f)\,d\rho(\mu) = f(0) + \int_0^{\infty} f(x)\{L(x, 0;\ h) - L_1(x)\}\,dx.$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1(\lambda) = \frac{\lambda}{\pi}, \quad \sigma_2(\lambda) = \frac{\lambda}{2|\lambda|}\{\rho(\lambda^2) - \rho(+0)\}, \\ &M(x) = L(|x|,\ 0;\ h) - L_1(x), \quad \tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\,dx, \end{aligned}\right\} \tag{2.4.5}$$

последнее равенство можем записать так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\,d\sigma_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\,d\sigma_1(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) M(x)\,dx, \tag{2.4.6}$$

причем в силу четности функции $M(x)$ и нечетности функций $\sigma_2(\lambda)$ и $\sigma_1(\lambda)$ оно остается верным для произвольных (не только четных) бесконечно дифференцируемых финитных функций $f(x)$.

Заметим, что функция $M(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию в любой окрестности нуля (она даже абсолютно непрерывна), что вытекает из дифференцируемости функций $L(x, 0;\ h)$ и $L_1(x)$ на полуоси $[0, \infty)$. Кроме того,

$$M(0) = -h - \rho(+0) + \rho(-\infty), \tag{2.4.7}$$

так как $L(0, 0;\ h) = -h$ и $L_1(0) = \rho(+0) - \rho(-\infty)$. Если бы функция $M(x)$ была суммируемой на всей вещественной оси, а формула (2.4.6) оставалась верной для всех функций $f(x)$ с суммируемым квадратом на вещественной оси, то, полагая

$$f(x) = \frac{\sin Nx}{\pi x}, \quad \tilde{f}(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| < N, \\ 0, & |\lambda| > N, \end{cases}$$

мы получили бы равенство

$$\sigma_2(N) - \sigma_2(-N) = \sigma_1(N) - \sigma_1(-N) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x} M(x)\,dx,$$

откуда, возвращаясь к функции $\rho(\mu)$ и устремляя N к бесконечности, установили бы, что

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\rho(N^2)-\rho(+0)-\frac{2}{\pi}N\right\}=-h-\rho(+0)+\rho(-\infty),$$

т. е. что при $\mu\to+\infty$

$$\rho(\mu)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\mu}-h+\rho(-\infty)+o(1). \qquad (2.4.8)$$

В действительности все эти операции, конечно, незаконны, но окончательный результат верен. Для его строгого обоснования нам придется сначала доказать одну теорему тауберова типа, которая будет играть существенную роль и в дальнейшем.

Пусть неубывающие и непрерывные слева функции $\sigma_1(\lambda)$ и $\sigma_2(\lambda)$ удовлетворяют следующим условиям.

I. На множестве всех бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$, равных нулю вне интервала $(-b, b)$, справедливо тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\lambda)\,d\sigma_2(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\lambda)\,d\sigma_1(\lambda)+\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,G(x)\,dx, \qquad (2.4.9)$$

где $G(x)$ — некоторая функция, определенная и суммируемая на интервале $(-b, b)$, а $\tilde{f}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$:

$$\tilde{f}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i\lambda x}dx.$$

II. Одна из функций, скажем $\sigma_1(\lambda)$, такова, что

$$\varlimsup_{|T|\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_1(\lambda+T)}{1+\lambda^2}<\infty.$$

Используя эти условия, мы должны будем оценить при больших значениях $|\lambda|$ разность $\sigma_2(\lambda)-\sigma_1(\lambda)$ в зависимости от дифференциальных свойств функции $G(x)$. Заметим прежде всего, что из условия II следует, что величина

$$\sigma_1^*\left(\frac{1}{p}\right)=\varlimsup_{|T|\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_1(\lambda+T)}{1+p^2\lambda^2}$$

остается конечной при всех значениях $p>0$ и не возрастает с ростом p.

Лемма 2.4.1. *Функция $\sigma_2(\lambda)$ тоже удовлетворяет условию II и при всех $p\in(0, b)$*

$$\sigma_2^*\left(\frac{1}{p}\right)\leqslant 5\sigma_1^*\left(\frac{1}{p}\right). \qquad (2.4.10)$$

Доказательство. Пусть

$$\tilde{g}(\lambda)=\frac{\operatorname{ch}1-\cos\lambda}{1+\lambda^2},\quad g(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}(\lambda)\,e^{i\lambda x}d\lambda. \tag{2.4.11}$$

Легко убедиться, что функция $g(x)$ равна нулю при $|x|\geqslant 1$. Поэтому функция $\tilde{g}(p(\lambda-T))$ есть преобразование Фурье функции $p^{-1}g(p^{-1}x)\,e^{iTx}$, равной нулю при $|x|\geqslant p$, а функция

$$\tilde{g}_\varepsilon(\lambda)=\tilde{g}(p(\lambda-T))\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin 2^{-k-1}\varepsilon\lambda}{2^{-k-1}\varepsilon\lambda}\right)^2$$

является преобразованием Фурье некоторой бесконечно дифференцируемой функции $g_\varepsilon(x)$, равной нулю при $|x|\geqslant p+\varepsilon$.

Следовательно, если $p+\varepsilon\leqslant b$, то функции $g_\varepsilon(x)$ и $\tilde{g}_\varepsilon(\lambda)$ можно подставить в тождество (2.4.9). Сделаем это и устремим затем ε к нулю. Так как $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\tilde{g}_\varepsilon(\lambda)=\tilde{g}(p(\lambda-T))$, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}g_\varepsilon(x)=p^{-1}\times$ $\times\, g(p^{-1}x)$, то, учитывая условия I и II, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}_\varepsilon(\lambda)\,d\sigma_2(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}(p(\lambda-T))\,d\sigma_1(\lambda)+$$
$$+p^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(p^{-1}x)\,e^{iTx}G(x)\,dx$$

и согласно известным теоремам о переходе к пределу под знаком интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}(p(\lambda-T))\,d\sigma_2(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}(p(\lambda-T))\,d\sigma_1(\lambda)+$$
$$+p^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(p^{-1}x)\,e^{iTx}G(x)\,dx. \tag{2.4.12}$$

Из определения функции $\tilde{g}(\lambda)$ следует, что

$$\frac{\operatorname{ch}1+1}{1+\lambda^2}\geqslant\tilde{g}(\lambda)\geqslant\frac{\operatorname{ch}1-1}{1+\lambda^2}.$$

Из этих неравенств и тождества (2.4.12) после замены переменной получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_2(\lambda+T)}{1+p^2\lambda^2}\leqslant\frac{\operatorname{ch}1+1}{\operatorname{ch}1-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_1(\lambda+T)}{1+p^2\lambda^2}+$$
$$+\frac{p^{-1}}{\operatorname{ch}1-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(p^{-1}x)\,e^{iTx}G(x)\,dx,$$

откуда, устремляя T к бесконечности и вспоминая, что по теореме Римана — Лебега коэффициенты Фурье суммируемой функции стремятся к нулю, заключаем, что

$$\sigma_2^*\left(\frac{1}{p}\right) \leqslant \frac{\operatorname{ch} 1+1}{\operatorname{ch} 1-1}\,\sigma_1^*\left(\frac{1}{p}\right) \leqslant 5\sigma_1^*\left(\frac{1}{p}\right).$$

Лемма доказана.

Замечание. Из доказанной леммы следует, что тождество (2.4.9) по непрерывности распространяется на все функции $f(x)$, которые равны нулю при $|x| > b$ и преобразования Фурье которых $\tilde{f}(\lambda)$ удовлетворяют условию $\sup\limits_{-\infty<\lambda<\infty} (1+\lambda^2)\,|\tilde{f}(\lambda)| < \infty$.

Пусть $\varphi(x)$ — произвольная четная функция, имеющая ограниченную вторую производную и удовлетворяющая таким условиям: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$. В качестве $\varphi(x)$ можно взять, например, функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.4.13}$$

Положим

$$f(x) = \frac{\sin Nx}{\pi x}\,\varphi(p^{-1}x)\,e^{iTx} \tag{2.4.14}$$

и найдем преобразование Фурье этой функции:

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x}\,\varphi(p^{-1}x)\,e^{-i(\lambda-T)x}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x}\,e^{-i(\lambda-T)x}dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(p^{-1}x)-1}{x}\sin Nx e^{-i(\lambda-T)x}dx =$$

$$= D\left(\frac{\lambda-T}{N}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)-1}{t}\left\{e^{-i(\lambda-T-N)pt} - e^{-i(\lambda-T+N)pt}\right\}dt.$$

Отсюда, учитывая четность функции $\varphi(t)$, получаем

$$\tilde{f}(\lambda) = D\left(\frac{\lambda-T}{N}\right) + S_\varphi(p(\lambda-T+N)) - S_\varphi(p(\lambda-T-N)), \tag{2.4.15}$$

где

$$S_\varphi(\mu) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\varphi(t)-1}{t}\sin\mu t\,dt$$

и $D(\mu)$ — разрывный множитель Дирихле:

$$D(\mu) = \begin{cases} 1, & |\mu| < 1, \\ 0{,}5, & |\mu| = 1, \\ 0, & |\mu| > 1. \end{cases}$$

Так как

$$(1+\mu^2) S_\varphi(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\varphi(t)-1}{t} - \left[\frac{\varphi(t)-1}{t} \right]'' \right\} \sin \mu t dt,$$

то

$$|S_\varphi(\mu)| \leqslant \frac{C_\varphi}{1+\mu^2}, \tag{2.4.16}$$

где

$$C_\varphi = \sup_{0 \leqslant \mu < \infty} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\varphi(t)-1}{t} - \left[\frac{\varphi(t)-1}{t} \right]'' \right\} \sin \mu t dt \right|.$$

В частности, если функция $\varphi(x)$ определена формулой (2.4.13), то

$$C_\varphi = \sup_{0 \leqslant \mu < \infty} \frac{1}{\pi} \left| - \int_0^1 \{ t(2-t^2) - 6t \} \sin \mu t dt - \right.$$

$$\left. - \int_1^\infty \frac{\sin \mu t}{t} dt - 2 \int_1^\infty \frac{\sin \mu t}{t^2} dt \right| < 2,$$

так что в этом случае

$$|S_\varphi(\mu)| \leqslant \frac{2}{1+\mu^2}. \tag{2.4.16'}$$

Обозначим через $\tilde{G}_b(\lambda)$ преобразование Фурье функции $\varphi(b^{-1}x) G(x)$ и введем функцию $\tau(\lambda)$, определенную формулой

$$\tau(\lambda) = \sigma_2(\lambda) - \sigma_1(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^0 \tilde{G}_b(\xi) d\xi \tag{2.4.17}$$

в точках непрерывности правой части и равенством

$$\tau(\lambda) = \frac{\tau(\lambda+0) + \tau(\lambda-0)}{2}$$

в точках разрыва.

Лемма 2.4.2. *Если* $A_n > B_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} |A_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |B_n| = \infty$, *то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\tau(A_n) - \tau(B_n)| \leqslant 24\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right).$$

Доказательство. Положим в формуле (2.4.14) $p = b$. Тогда функция $f(x)$, определенная этой формулой, будет равна нулю при $|x| \geqslant b$, а ее преобразование Фурье $\tilde{f}(\lambda)$ согласно формулам (2.4.15), (2.4.16) будет удовлетворять неравенству $\sup\limits_{-\infty<\lambda<\infty} (1+\lambda^2)\,|\tilde{f}(\lambda)| < \infty$. Поэтому для функций $f(x)$ и $\tilde{f}(\lambda)$ справедливо тождество (2.4.9):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\,d\sigma_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\,d\sigma_1(\lambda) + $$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(b^{-1}x)\,e^{iTx}\,\frac{\sin Nx}{x}\,G(x)\,dx,$$

которое, используя формулу (2.4.15) и определение функции $\tau(\lambda)$, можно записать в таком виде:

$$\tau(T+N) - \tau(T-N) = -\sum_{j=1,2} (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} S_\varphi(b\lambda)\,d\{\sigma_j(\lambda+T-N) - $$

$$-\sigma_j(\lambda+T+N)\}. \tag{2.4.18}$$

Выберем здесь T, N так, чтобы $T+N = A_n$, $T-N = B_n$. Тогда на основании неравенства (2.4.16) и леммы 2.4.1 получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |\tau(A_n) - \tau(B_n)| \leqslant 2\,\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{j=1,2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\{\sigma_j(\lambda+A_n) + \sigma_j(\lambda+B_n)\}}{1+b^2\lambda^2} \leqslant$$

$$\leqslant 4\left\{\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right) + \sigma_2^*\left(\frac{1}{b}\right)\right\} \leqslant 24\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right),$$

что и требовалось доказать.

Заметим теперь, что функция $\tau(\lambda)$ вещественна. Действительно, из ее определения (формула (2.4.17)) следует, что $\operatorname{Im}\tau(0) = 0$, а из вещественной правой части формулы (2.4.18) — что $\operatorname{Im}\tau(\lambda) = \text{const}$, т. е. $\operatorname{Im}\tau(\lambda) = 0$. Поэтому можно ввести величины $\overline{\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}}\,\tau(\lambda) = M$, $\underline{\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}}\,\tau(\lambda) = m$, которые по лемме 2.4.2 конечны и удовлетворяют неравенству

$$M - m \leqslant 24\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right).$$

Из последнего неравенства видно, что все предельные значения при $|\lambda| \to \infty$ функции $\tau(\lambda)$ лежат в сегменте $[m, M]$, длина которого не превышает $24\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right)$. Таким образом, полагая $C =$

$= \frac{1}{2}[M + m]$, находим

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} |\tau(\lambda) - C| \leqslant 12\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right). \tag{2.4.19}$$

Непосредственным следствием этого неравенства является следующая теорема.

Теорема 2.4.1. *Пусть функции* $\sigma_2(\lambda)$, $\sigma_1(\lambda)$ *удовлетворяют условиям I, II, а* $\widetilde{G}_1(\lambda)$ *— преобразование Фурье произвольной функции* $G_1(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, *совпадающей в некоторой окрестности нуля с функцией* $G(x)$. *Тогда существует такая константа* C_1, *что*

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} \left|\sigma_2(\lambda) - \sigma_1(\lambda) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{0} \widetilde{G}_1(\mu)\,d\mu - C_1\right| \leqslant 12\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right).$$

Доказательство. Если функция $G_1(x)$ совпадает в окрестности нуля с $G(x)$, то функция $\frac{G(x)\varphi(b^{-1}x) - G_1(x)}{ix}$ тоже суммируема на всей вещественной оси и по теореме Римана — Лебега о стремлении к нулю преобразования Фурье суммируемой функции

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{0} \{\widetilde{G}_b(\mu) - \widetilde{G}_1(\mu)\}\,d\mu =$$

$$= \lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(x)\varphi(b^{-1}x) - G_1(x)}{ix}(e^{i\lambda x} - 1)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(x)\varphi(b^{-1}x) - G_1(x)}{ix}\,dx.$$

Отсюда согласно определению (2.4.17) функции $\tau(\lambda)$ и неравенству (2.4.19) следует, что

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} \left|\sigma_2(\lambda) - \sigma_1(\lambda) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{0} \widetilde{G}_1(\mu)\,d\mu + C_1\right| \leqslant 12\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right),$$

если

$$C_1 = C - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(x)\varphi(b^{-1}x) - G_1(x)}{ix}\,dx,$$

и теорема доказана.

Следствие. Пусть функции $\sigma_2(\lambda)$ *и* $\sigma_1(\lambda)$ *удовлетворяют условиям I, II, а функция* $G(x)$ *удовлетворяет в окрестности нуля условиям, обеспечивающим сходимость ее ряда Фурье в точке*

$x = 0$ *к* $G(0)$ *(например,* $G(x)$ *непрерывна в нуле и имеет ограниченную вариацию в окрестности нуля). Тогда*

$$\varlimsup_{\lambda\to+\infty} |\sigma_2(\lambda) - \sigma_2(-\lambda) - \sigma_1(\lambda) + \sigma_1(-\lambda) - G(0)| \leqslant 24\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right). \tag{2.4.20}$$

Доказательство. Согласно теореме 2.4.1

$$\varlimsup_{\lambda\to+\infty} \left|\sigma_2(\lambda) - \sigma_2(-\lambda) - \sigma_1(\lambda) + \sigma_1(-\lambda) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \tilde{G}_1(\mu)\,d\mu\right| \leqslant$$

$$\leqslant 24\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right),$$

где в качестве $\tilde{G}_1(\mu)$ можно взять преобразование Фурье финитной функции $G_1(x)$, совпадающей в некоторой окрестности нуля с $G(x)$. Из условий, которым по предположению удовлетворяет функция $G(x)$, и принципа локализации для интегралов Фурье следует

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \tilde{G}_1(\mu)\,d\mu = G_1(0) = G(0),$$

что и требовалось доказать.

Теперь можно дать строгое доказательство асимптотической формулы (2.4.8). Действительно, равенство (2.4.6) показывает, что введенные формулами (2.4.5) функции $\sigma_2(\lambda)$ и $\sigma_1(\lambda)$ удовлетворяют условиям I, II при всех значениях b, причем функция $G(x) = M(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию в окрестности нуля, а

$$\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right) = \varlimsup_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_1(\lambda+T)}{1+b^2\lambda^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{1+b^2\lambda^2} = \frac{1}{b}.$$

Таким образом, выполнены все условия, при которых было доказано неравенство (2.4.20). Вспоминая формулы (2.4.5) и (2.4.7), устанавливаем, что в данном случае $\sigma_2(\lambda) - \sigma_2(-\lambda) = \rho(\lambda^2) - \rho(+0)$, $\sigma_1(\lambda) - \sigma_1(-\lambda) = \frac{2\lambda}{\pi}$, $G(0) = M(0) = -h - \rho(+0) + \rho(-\infty)$ и неравенство (2.4.20) имеет такой вид:

$$\varlimsup_{\lambda\to+\infty} \left|\rho(\lambda^2) - \frac{2\lambda}{\pi} + h - \rho(-\infty)\right| \leqslant \frac{24}{b},$$

причем $b > 0$ здесь можно брать сколь угодно большим. Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \left|\rho(\lambda^2) - \frac{2\lambda}{\pi} + h - \rho(-\infty)\right| = 0,$$

что эквивалентно формуле (2.4.8).

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4.2. *Спектральные функции* $\rho(\mu)$ *симметрических краевых задач (2.2.1), (2.2.2) удовлетворяют следующим условиям*:

$$\lim_{\mu\to-\infty} e^{\sqrt{|\mu|}x}(\rho(\mu)-\rho(-\infty))=0 \quad (0\leqslant x<\infty),$$

$$\lim_{\mu\to+\infty}\left\{\rho(\mu)-\rho(-\infty)-\frac{2}{\pi}\sqrt{\mu}\right\}=-h.$$

В теореме 2.2.3 было доказано, что любая функция $f(x)\in L_2[0,\infty)$ может быть разложена в интеграл по собственным функциям симметрической краевой задачи, сходящийся в метрике пространства $L_2[0,\infty)$. Теперь докажем теорему о равносходимости таких разложений с разложением той же функции в интеграл Фурье по косинусам.

Лемма 2.4.3. *Если* $\rho(\mu)$ — *спектральная функция симметрической краевой задачи и* $F(\mu)\in L_{2,\rho}(-\infty,\infty)$, *то при любом* $b>0$

$$\lim_{|N|\to\infty}\int_{+0}^{\infty}\frac{|F(\mu^2)|}{1+b^2(\mu-N)^2}\,d\rho(\mu^2)=0.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать это равенство при $N\to+\infty$. Обозначим через $\mathrm{I}_1(N)$ сегмент $\left[\frac{N}{6},\frac{3N}{2}\right]$ и через $\mathrm{I}_2(N)$ — его дополнение ко всей полуоси $[0,\infty)$. Разбив интересующий нас интеграл на два, взятые по $\mathrm{I}_1(N)$ и $\mathrm{I}_2(N)$, применим к каждому из них неравенство Коши — Буняковского:

$$\int_{+0}^{\infty}\frac{|F((\mu^2)|}{1+b^2(\mu-N)^2}\,d\rho(\mu^2)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1,2}\left\{\int_{I_k(N)}|F(\mu^2)|^2\,d\rho(\mu^2)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{I_k(N)}\frac{d\rho(\mu^2)}{[1+b^2(\mu-N)^2]^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Так как при $\mu\in I_2(N)$ $1+b^2(\mu-N)^2>1+\left(\frac{bN}{2}\right)^2$, то тем более

$$\int_{+0}^{\infty}\frac{|F(\mu^2)|}{1+b^2(\mu-N)^2}\,d\rho(\mu^2)\leqslant\left\{\int_{+0}^{\infty}\frac{d\rho(\mu^2)}{1+b^2(\mu-N)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$+\left[\left\{\int_{I_1(N)}|F(\mu^2)|^2\,d\rho(\mu^2)\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\frac{4}{4+b^2N^2}\int_{+0}^{\infty}|F(\mu^2)|^2\,d\rho(\mu^2)\right\}^{\frac{1}{2}}\right].$$

Поскольку $F(\mu)\in L_{2,\rho}(-\infty,\infty)$, оба слагаемых в квадратной скобке стремятся к нулю при $N\to\infty$ и для доказательства леммы достаточно проверить справедливость неравенства

$$\varlimsup_{N\to+\infty}\int\limits_{+0}^{\infty}\frac{d\sigma_2(\mu)}{1+b^2(\mu-N)^2}<\infty.$$

Далее,

$$\int\limits_{+0}^{\infty}\frac{d\rho(\mu^2)}{1+b_2(\mu-N)^2}=\int\limits_{+0}^{\infty}\frac{d\{\rho(\mu^2)-\rho(+0)\}}{1+b^2(\mu-N)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_2(\mu)}{1+b^2(\mu-N)^2}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_2(\mu+N)}{1+b^2\mu^2},$$

где функция $\sigma_2(\mu)$ определена формулой (2.4.5) и связана с функцией $\sigma_1(\mu)=\frac{\mu}{\pi}$ тождеством (2.4.6). Воспользовавшись леммой 2.4.1, получим

$$\varlimsup_{N\to\infty}\int\limits_{+0}^{\infty}\frac{d\rho(\mu^2)}{1+b^2(\mu-N)^2}\leqslant\varlimsup_{N\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_2(\mu+N)}{1+b^2\mu^2}\leqslant$$

$$\leqslant 5\sigma_1^*\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{5}{b}<\infty,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.4.3. *Пусть $f(x)$ — произвольная функция из пространства $L_2[0,\infty)$ и*

$$\omega(\sqrt{\mu},f)=\int\limits_0^{\infty}f(x)\,\omega(\sqrt{\mu},x)\,dx,\qquad C(\sqrt{\mu},f)=\int\limits_0^{\infty}f(x)\cos\sqrt{\mu}x\,dx$$

(интегралы сходятся в метриках пространств $L_{2,\rho}(-\infty,\infty)$ и $L_{2,\sqrt{\mu}}(0,\infty)$ соответственно).

При каждом фиксированном $b<\infty$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+0}\omega(\sqrt{\mu},f)\times$ $\times\,\omega(\sqrt{\mu},x)\,d\rho(\mu)$ сходится абсолютно и равномерно относительно $x\in[0,b]$ и

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{0\leqslant x\leqslant b}\Bigg|\int\limits_{-\infty}^{N}\omega(\sqrt{\mu},f)\,\omega(\sqrt{\mu},x)\,d\rho(\mu)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^N C(\sqrt{\mu},f)\cos\sqrt{\mu}x\,d\sqrt{\mu}\Bigg|=0.$$

Доказательство. Функция

$$u_M(x, t) = \int_{-M}^{M} \omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\,\omega(\sqrt{\mu}, t)\,d\rho(\mu) \tag{2.4.21}$$

удовлетворяет, очевидно, уравнению $u''_{xx} - q(x)u = u''_{tt} - q(t)u$ и начальным данным $u(x, 0) = f_M(x)$, $u'_t(x, 0) = hf_M(x)$, $f_M(x) = \int_{-M}^{M} \omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\,d\rho(\mu)$. Поэтому, используя формулу Римана (1.1.7) и замечая, что $u_M(x, t) = u_M(t, x)$, можно представить ее в таком виде:

$$u_M(x, t) = \frac{f_M(x+t) + f_M(|x-t|)}{2} + \int_{|x-t|}^{x+t} W(x, t, u) f_M(u)\,du, \tag{2.4.22}$$

где ядро $W(x, t, u)$ ограничено в каждой конечной области изменения его аргументов. Применяя к обеим частям равенства (2.4.21) оператор преобразования, переводящий функции $\omega(\sqrt{\mu}, t)$ в $\cos\sqrt{\mu}t$, получаем

$$\int_{-M}^{M} \omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x) \cos\sqrt{\mu}t\,d\rho(\mu) =$$

$$= u_M(x, t) + \int_0^t L(t, \xi)\,u_M(x, \xi)\,d\xi,$$

откуда вытекает тождество

$$\int_{-M}^{M} C(\sqrt{\mu}, g)\,\omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\,d\rho(\mu) =$$

$$= \int_0^\infty g(t)\left\{u_M(x, t) + \int_0^t L(t, \xi)\,u_M(x, \xi)\,d\xi\right\}dt \tag{2.4.23}$$

для всех четных, финитных и бесконечно дифференцируемых функций $g(t)$.

Устремим теперь M к бесконечности. По теореме 2.2.3 последовательность $f_M(x)$ сходится в метрике пространства $L_2[0, \infty)$ к функции $f(x)$. Поэтому из равенств (2.4.22), (2.4.23) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\sqrt{\mu}, g)\,\omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\,d\rho(\mu) =$$

$$= \int_0^\infty g(t)\left\{\frac{f(x+t) + f(|x-t|)}{2} + A_1(x, t)\right\}dt, \tag{2.4.24}$$

где

$$A_1(x, t) = \int\limits_{|x-t|}^{x+t} W(x, t, \xi) f(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t L(t, \xi) \left\{ \frac{f(x+\xi) + f(|x-\xi|)}{2} + \int\limits_{|x-\xi|}^{x+\xi} W(x, \xi, \eta) f(\eta)\, d\eta \right\} d\xi.$$

Поскольку функции $W(x, t, \xi)$ и $L(t, \xi)$ ограничены в каждой конечной области изменения их аргументов, применяя неравенство Коши — Буняковского, находим

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant b} |A_1(x, t)| \leqslant C_1 t^{\frac{1}{2}} \left\{ \int\limits_0^\infty |f(\xi)|^2\, d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.4.25}$$

при всех $t \in [0, b]$.

Как было показано выше, интеграл (2.4.2) сходится при всех значениях x, а из существования операторов преобразования вытекает равномерная по $\mu \in (-\infty, 0]$ оценка $\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant b} |\omega(\sqrt{\mu}, x)| \leqslant \leqslant C \exp b\sqrt{|\mu|}$. Поэтому интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+0} \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, x)\, d\rho(\mu)$ сходится абсолютно и равномерно относительно $x \in [0, b]$ и функция

$$A_2(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{+0} \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, x) [\cos\sqrt{\mu}t - 1]\, d\rho(\mu) \tag{2.4.26}$$

удовлетворяет неравенству

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant b} |A_2(x, t)| \leqslant C_2 t \tag{2.4.27}$$

при всех $t \in [0, b]$. Воспользовавшись теоремой о свертке для интегралов Фурье

$$\int\limits_0^\infty g(t) \frac{f(x+t) + f(|x-t|)}{2}\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty C(\sqrt{\mu}, g)\, C(\sqrt{\mu}, f) \cos\sqrt{\mu}x\, d\sqrt{\mu}$$

и формулой (2.4.26), можем записать равенство (2.4.24) в таком виде:

$$\int\limits_{+0}^\infty C(\sqrt{\mu}, g)\, \omega(\sqrt{\mu}, f)\, \omega(\sqrt{\mu}, x)\, d\rho(\mu) -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty C(\sqrt{\mu}, g)\, C(\sqrt{\mu}, f)\cos\sqrt{\mu}x\, d\sqrt{\mu}+$$

$$+C(0, g)\int_{-\infty}^{+0}\omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\, d\rho(\mu)=\int_0^\infty g(t)\, A_3(x, t)\, dt. \quad (2.4.28)$$

Здесь функция $A_3(x, t) = A_1(x, t) - A_2(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant b}|A_3(x, t)|\leqslant C_3 t^{\frac{1}{2}} \quad (0\leqslant t\leqslant b), \quad (2.4.29)$$

вытекающему из оценок (2.4.25) и (2.4.27). Если в тождестве (2.4.28) положить

$$g(t)=g_N(t)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin Nt}{t}\varphi\left(\frac{t}{a}\right) \quad (0<a<b),$$

то согласно формуле (2.4.15) получим

$$\int_{-\infty}^{N^2}\omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\, d\rho(\mu)-\frac{2}{\pi}\int_0^{N^2} C(\sqrt{\mu}, f)\cos\sqrt{\mu}x\, d\sqrt{\mu}=$$

$$=(1-C(0, g_N))\int_{-\infty}^{+0}\omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\, d\rho(\mu)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^a\frac{\sin Nt}{t}\varphi\left(\frac{t}{a}\right)A_3(x, t)\, dt-$$

$$-\int_{+0}^\infty\omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\,[S_\varphi(a(\sqrt{\mu}+N))-S_\varphi(a(\sqrt{\mu}-N))]\, d\rho(\mu)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty C(\sqrt{\mu}, f)\cos\sqrt{\mu}x\,[S_\varphi(a(\sqrt{\mu}+N))-S_\varphi(a(\sqrt{\mu}-N))]\, d\sqrt{\mu}.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое, стоящее в правой части этого тождества. Так как функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема, $\varphi(0) = 1$ и

$$1-C(0, g_N)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin Nt}{t}\, dt-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin Nt}{t}\varphi\left(\frac{t}{a}\right)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1-\varphi(a^{-1}t)}{t}\sin Nt\, dt,$$

то по теореме Римана — Лебега $\lim\limits_{N\to\infty}(1 - C(0, g_N)) = 0$. Поэтому первое слагаемое при $N\to\infty$ стремится к нулю равномерно относительно $x\in[0, b]$. Второе и третье слагаемые тоже стремятся к нулю равномерно относительно $x\in[0, b]$. Это вытекает из леммы 2.4.2, если заметить, что

$$\sup_{\substack{0\leqslant x\leqslant b\\ 0\leqslant\mu<\infty}} |\omega(\sqrt{\mu}, x)| < \infty, \quad |\cos\sqrt{\mu}x| \leqslant 1$$

и функция $S_\varphi(\lambda)$ удовлетворяет оценке (2.4.16). Четвертое слагаемое можно оценить, используя неравенство (2.4.29):

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant b}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\sin Nt}{t}\varphi(a^{-1}t) A_3(x, t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3}{\pi}\int_0^a t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2C_3\sqrt{a}}{\pi}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\sup_{0\leqslant x\leqslant b}\left|\int_{-\infty}^{N^2}\omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\,d\rho(\mu) -\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}\int_0^{N^2} C(\sqrt{\mu}, f)\cos\sqrt{\mu}x\,d\sqrt{\mu}\right| \leqslant \frac{2C_3\sqrt{a}}{\pi}$$

и в силу произвольной малости a

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\sup_{0\leqslant x\leqslant b}\left|\int_{-\infty}^{N^2}\omega(\sqrt{\mu}, f)\,\omega(\sqrt{\mu}, x)\,d\rho(\mu) -\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}\int_0^{N^2} C(\sqrt{\mu}, f)\cos\sqrt{\mu}x\,d\sqrt{\mu}\right| = 0,$$

что и требовалось доказать.

Задачи

1. Доказать, что неубывающая функция $\rho(\mu)$ $(-\infty<\mu<\infty)$ тогда и только тогда является спектральной для некоторой симметрической краевой задачи вида (2.2.1), (2.2.2), когда функция

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\sqrt{\mu}x}{\mu}\,d\rho(\mu) \quad (0<x<\infty)$$

трижды непрерывно дифференцируема и $\Phi'(+0) = 1$.

Указание. Согласно теореме 2.3.1 достаточно убедиться, что

$$(f(\lambda)\overline{f(\overline{\lambda})},\ R)=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\sqrt{\mu})|^2\,d\rho(\mu)>0,$$

если $f(\lambda)\in CK^2(\sigma)$ и $f(\lambda)\not\equiv 0$. Допустим противное. Тогда

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\sqrt{\mu})|^2\,d\rho(\mu)\geqslant\int_{+0}^{\infty}|f(\sqrt{\mu})|^2\,d\rho(\mu)=\int_{+0}^{\infty}|f(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda^2),$$

что возможно лишь в том случае, когда точки роста функции $\rho(\lambda^2)$ образуют дискретное множество, состоящее из нулей функции $f(\lambda)$. Поскольку функция $f(\lambda)$ целая экспоненциального типа σ, то $\overline{\lim\limits_{a\to\infty}}\,a^{-1}n(a)<\infty$, где $n(a)$ — число ее нулей, лежащих в интервале $(0,a)$. С другой стороны, если выполнены условия задачи, то в силу теоремы 2.4.1 для функции $\rho(\lambda^2)$ справедлива асимптотическая формула

$$\rho(\lambda^2)=\frac{2}{\pi}\lambda+c+o(1)\quad(\lambda\to+\infty),$$

из которой следует, что при любом $\delta>0$ каждый интервал $(b,\ b+\delta)$ содержит ее точки роста, если b достаточно велико. Поэтому $\lim\limits_{a\to\infty}a^{-1}m(a)=\infty$, где $m(a)$ — число точек роста функции $\rho(\lambda^2)$, лежащих в интервале $(0,a)$, что приводит к противоречию.

2. Доказать, что спектральные функции $\rho(\mu)$ симметрических краевых задач

$$y''+q(x)\,y=\lambda^2y\quad(0\leqslant x<a<\infty),\quad y(0)\,h-y'(0)=0$$

($\operatorname{Im}q(x)=\operatorname{Im}h=0$; функция $q(x)$ непрерывна при $0\leqslant x<a$) удовлетворяют условиям

$$\lim_{\mu\to-\infty}e^{\sqrt{|\mu|}x}\{\rho(\mu)-\rho(-\infty)\}=0\quad(0\leqslant x<2a),$$

$$\overline{\lim_{\mu\to+\infty}}\left|\rho(\mu)-\rho(-\infty)-\frac{2}{\pi}\sqrt{\mu}+h\right|\leqslant\frac{12}{a}.$$

Указание. Искомый результат вытекает из теоремы 2.4.1 и ее следствия (формула (2.4.20)), если учесть, что формула (2.4.1) в данном случае выполняется при всех $x\in[0,2a)$.

3. Доказать, что спектральные матрицы $\rho(\mu)$ (операторные меры) симметрических операторных краевых задач Штурма — Лиувилля удовлетворяют условиям

$$\lim_{\mu\to-\infty}e^{\sqrt{|\mu|}x}|\rho(\mu)-\rho(-\infty)|=0\quad(0\leqslant x<\infty),$$

$$\lim_{\mu\to+\infty}\left|\rho(\mu)-\rho(-\infty)-\frac{2}{\pi}\sqrt{\mu}I+h\right|=0.$$

Здесь и дальше $|A|$ — норма оператора $A\in H$.

4. Доказать, что спектральные матрицы $\rho(\lambda)$ симметрических краевых задач Дирака удовлетворяют условию

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\left|\rho(\lambda)-\frac{\lambda}{\pi}P-\frac{P\Omega(0)P}{\pi}\ln|\lambda|+\frac{\lambda}{2|\lambda|}PB\Omega(0)P\right|=0,$$

если при $x \to 0$

$$|\Omega(x) - \Omega(0)| \leqslant Cx^{\alpha} \quad (\alpha > 0). \tag{2.4.30}$$

Указание. Из формулы $R = \frac{1}{\pi}(P + \tilde{\omega}_0(L, P))$ следует, что

$$(\omega_0(\lambda, f; P), R) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\lambda, f; P)\, P d\lambda + \int_0^{\infty} f(x)\, L_p(x, 0)\, P dx.$$

После элементарных преобразований это равенство приводится к такому виду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 2f(0)\,P + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left\{P - i\frac{x}{|x|}PB\right\} L_p(|x|, 0)\, P dx,$$

где $f(x)$ — произвольная финитная бесконечно дифференцируемая функция, а $\tilde{f}(\lambda)$ — ее преобразование Фурье. Из равенства $L_p(x, 0) + K_p(x, 0) + \int_0^x K_p(x, t)\, L_p(t, 0)\, dt = 0$, формул (1.2.7), (1.2.9), (1.2.39′) и оценки (1.2.38′), используя условие (2.4.30), находим $|L_p(x, 0) + B\Omega(0)P| \leqslant Cx^{\alpha}$ $(x \to 0)$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\, P d\lambda +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, P\left\{M(x) - B\Omega(0) - i\frac{x}{|x|}\Omega(0)\right\} P dx,$$

где $|M(x)| \leqslant Cx^{\alpha}$ при $x \to 0$. Искомый результат теперь вытекает из теоремы 2.4.1 и признака Дини сходимости ряда Фурье и ему сопряженного.

5. Пусть нечетные функции $\sigma_2(\lambda)$ и $\sigma_1(\lambda) = \lambda$ удовлетворяют условиям I, II при всех $b > 0$, а функция $G(x) = G(-x)$ дважды дифференцируема на полуоси $0 < x < \infty$:

$$G(x) = G(+0) + xG'(+0) + \int_0^x (x - t)\, G''(t)\, dt \quad (0 < x < \infty),$$

причем $M_2(b) = \sup\limits_{0<x<b} |G''(x)| < \infty$ $(0 < b < \infty)$. Доказать, что при этих условиях теорема 2.4.1 допускает следующее уточнение:

$$\sup_{\lambda \geqslant N > 0}\left|\sigma_2(\lambda) - \lambda - \frac{1}{2}G(+0)\right| \leqslant \frac{10^3}{b(N)}\left\{1 + \frac{G(+0) + G'(+0)\, b(N)}{N}\right\},$$

где $b(N)$ — корень уравнения $b^2 M_2(b) = N$.

Указание. Полагаем в формуле (2.4.18) $T = 0$ и оцениваем ее правую часть, непосредственно используя равенство (2.4.12), в котором второе слагаемое в правой части нужно один раз проинтегрировать по частям, введя множитель e^{iTx} под знак дифференциала. Затем оцениваем разность

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(b^{-1}x)\,\frac{\sin Nx}{x}\,G(x)\,dx-G(+0)=$$

$$=-\frac{2}{\pi N}\int_{0}^{\infty}\varphi(b^{-1}x)\,\frac{G(x)-G(+0)}{x}\,d\cos Nx+$$

$$+G(+0)\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(b^{-1}x)\,\frac{\sin Nx}{x}\,dx-1\right\},$$

интегрируя первое слагаемое в правой части по частям и используя для оценки второго формулу (2.4.15). Наконец, выбираем b из условия (2.4.31).

6. Воспользоваться результатом предыдущей задачи для оценки величины $\rho(\mu)-\frac{2}{\pi}\sqrt{\mu}-\rho(-\infty)+h$ при $\mu\to+\infty$, где $\rho(\mu)$ — спектральная функция краевой задачи Штурма — Лиувилля с непрерывно дифференцируемой на полуоси $(0,\infty)$ функцией $q(x)$.

ГЛАВА 3 КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

§ 1. Вспомогательные предложения

В этой главе детально изучена краевая задача, порождаемая на полуоси $0 \leqslant x < \infty$ дифференциальным уравнением

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda^2 y \tag{3.1.1}$$

и краевым условием

$$y(0) = 0 \tag{3.1.2}$$

в том важном частном случае, когда функция $q(x)$ вещественна и удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty x\,|q(x)|\,dx < \infty, \tag{3.1.3}$$

которое всюду в дальнейшем считается выполненным. Из неравенства (3.1.3) видно, что при $x \to \infty$ (3.1.1) переходит в простейшее уравнение $-y'' = \lambda^2 y$. Это позволяет весьма полно исследовать свойства решений уравнения (3.1.1), что и сделано в настоящем параграфе.

Введем следующие обозначения:

$$\sigma(x) = \int_x^\infty |q(t)|\,dt, \quad \sigma_1(x) = \int_x^\infty \sigma(t)\,dt. \tag{3.1.4}$$

Легко убедиться, что условие (3.1.3) эквивалентно суммируемости функции $\sigma(x)$ на всей полуоси $[0, \infty)$, т. е. эквивалентно неравенству $\sigma_1(0) < \infty$.

Лемма 3.1.1. *При всех λ из замкнутой верхней полуплоскости уравнение (3.1.1) имеет решение $e(\lambda, x)$, представимое в виде*

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t)\,e^{i\lambda t}\,dt, \tag{3.1.5}$$

где ядро $K(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$|K(x, t)| \leqslant \frac{1}{2}\,\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\}. \tag{3.1.6}$$

Кроме того,

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty q(t)\, dt. \tag{3.1.6'}$$

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} q(t)\, e(\lambda, t)\, dt, \tag{3.1.7}$$

равносильное дифференциальному уравнению (3.1.1) с граничным условием $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-i\lambda x} e(\lambda, x) = 1$, и найдем его решение в виде (3.1.5).

Подставляя в (3.1.7) вместо $e(\lambda, x)$ его представление в виде (3.1.5), получаем

$$\int_x^\infty K(x, t)\, e^{i\lambda t} dt = \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{i\lambda s} q(s)\, ds +$$

$$+ \int_x^\infty q(s) \left\{ \int_s^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{i\lambda u} K(s, u)\, du \right\} ds. \tag{3.1.7'}$$

Так как

$$\frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{i\lambda u} = \frac{1}{2} \int_{-s+u+x}^{s+u-x} e^{i\lambda\xi} d\xi, \tag{3.1.8}$$

то

$$\int_x^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{i\lambda s} q(s)\, ds = \frac{1}{2} \int_x^\infty q(s) \left\{ \int_x^{2s-x} e^{i\lambda t} dt \right\} ds,$$

откуда, после перемены порядка интегрирования, находим

$$\int_x^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{i\lambda s} q(s)\, ds = \frac{1}{2} \int_x^\infty e^{i\lambda t} \left\{ \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty q(s)\, ds \right\} dt. \tag{3.1.9}$$

Снова используя формулу (3.1.8), получаем

$$\int_x^\infty q(s) \left\{ \int_s^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{i\lambda u} K(s, u)\, du \right\} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_x^\infty q(s) \left\{ \int_s^\infty K(s, u) \int_{-s+u+x}^{s+u-x} e^{i\lambda t} dt du \right\} ds.$$

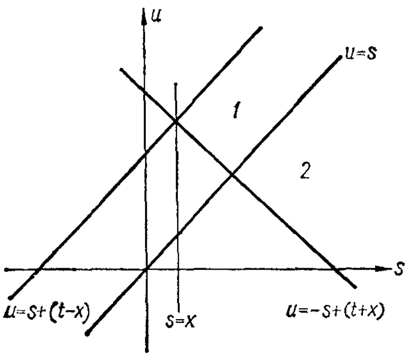

Рис 3.

Продолжая функцию $K(s, u)$ нулем при $u < s$, находим для всех $s \geqslant x$

$$\int_{s}^{\infty} K(s, u) \int_{-s+u+x}^{s+u-x} e^{i\lambda t} dt du = \int_{-\infty}^{\infty} K(s, u) \left\{ \int_{-s+u+x}^{s+u-x} e^{i\lambda t} dt \right\} du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \left\{ \int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} K(s, u)\, du \right\} dt = \int_{0}^{\infty} e^{i\lambda t} \left\{ \int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} K(s, u)\, du \right\} dt,$$

так как при $t < x$

$$\int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} K(s, u)\, du = 0.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2} \int_{x}^{\infty} q(s) \left\{ \int_{s}^{\infty} K(s, u) \int_{-s+u+x}^{s+u-x} e^{i\lambda t} dt du \right\} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x}^{\infty} e^{i\lambda t} \left\{ \int_{x}^{\infty} q(s) \int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} K(s, u)\, du ds \right\} dt. \tag{3.1.10}$$

Из формул (3.1.9), (3.1.10) следует, что равенство (3.1.7) выполняется, если функция $K(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$K(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} q(s)\, ds + \frac{1}{2} \int_{x}^{\infty} q(s) \int_{t-(s-x)}^{t+(s-x)} K(s, u)\, du ds \tag{3.1.11}$$

и условию $K(x, t) = 0$ при $t < x$. На рис. 3 изображена область интегрирования в двойном интеграле, стоящем в правой части формулы (3.1.11). Она состоит из двух частей (*1*, *2*). Но в области *2* $s > u$ и, следовательно, $K(s, u) = 0$. Поэтому фактически в уравнении (3.1.11) двойной интеграл нужно брать только по области *1*. Делая в этом интеграле замену переменных $u+s=2\alpha, u-s=$ $=2\beta$, приходим к следующему уравнению:

$$K(x, t)=\frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} q(s)\,ds+$$

$$+\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} d\alpha \int_{0}^{\frac{t-x}{2}} q(\alpha-\beta) K(\alpha-\beta,\ \alpha+\beta)\,d\beta, \tag{3.1.12}$$

в котором уже автоматически учтено, что $K(x, t)=0$ при $x>t$. Полагая $H(\alpha, \beta)=K(\alpha-\beta, \alpha+\beta)$, $x+t=2u$, $t-x=2v$, полученное уравнение можем переписать в таком виде:

$$H(u, v)=\frac{1}{2}\int_{u}^{\infty} q(s)\,ds+\int_{u}^{\infty} d\alpha \int_{0}^{v} q(\alpha-\beta) H(\alpha, \beta)\,d\beta. \tag{3.1.13}$$

Таким образом, для того чтобы закончить доказательство леммы, достаточно показать, что уравнение (3.1.13) имеет решение, удовлетворяющее неравенству

$$|H(u, v)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma(u) \exp\{\sigma_1(u-v)-\sigma_1(u)\}. \tag{3.1.14}$$

Положим

$$H_0(u, v)=\frac{1}{2}\int_{u}^{\infty} q(s)\,ds,$$

$$H_n(u, v)=\int_{u}^{\infty} d\alpha \int_{0}^{v} q(\alpha-\beta) H_{n-1}(\alpha, \beta)\,d\beta$$

и покажем, что

$$|H_n(u, v)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma(u) \frac{\{\sigma_1(u-v)-\sigma_1(u)\}^n}{n!}, \tag{3.1.14'}$$

откуда, очевидно, будет следовать, что ряд $H(u, v)=\sum_{n=0}^{\infty} H_n(u, v)$ сходится, а его сумма $H(u, v)$ удовлетворяет неравенству (3.1.14) и является решением уравнения (3.1.13).

Справедливость оценок (3.1.14) устанавливается по индукции. При $n=0$ такая оценка, очевидно, верна, и если она верна для $H_n(u, v)$, то, учитывая монотонность функций $\sigma(x)$ и $\sigma_1(x)$, получаем

$$|H_{n+1}(u, v)| \leqslant \frac{1}{2}\int_u^\infty d\alpha \int_0^v |q(\alpha-\beta)| \frac{\sigma(\alpha)\{\sigma_1(\alpha-\beta)-\sigma_1(\alpha)\}^n}{n!}\,d\beta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma(u)}{2\cdot n!}\int_u^\infty \{\sigma_1(\alpha-v)-\sigma_1(\alpha)\}^n\{\sigma(\alpha-v)-\sigma(\alpha)\}\,d\alpha =$$

$$= \frac{\sigma(u)}{2}\,\frac{\{\sigma_1(u-v)-\sigma_1(u)\}^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Формула (3.1.6) непосредственно следует из (3.1.11), если положить $t = x$. Лемма доказана.

Оператор $\mathbf{I}+\mathbf{K}$, определенный формулой

$$(\mathbf{I}+\mathbf{K})f = f(x) + \int_x^\infty K(x, t)f(t)\,dt,$$

называется оператором преобразования, сохраняющим на бесконечности асимптотику решений. Поскольку в этой главе речь идет только о таких операторах, они называются просто операторами преобразования.

Замечание. Из оценки (3.1.6) следует, что оператор преобразования $\mathbf{I}+\mathbf{K}$ осуществляет взаимно однозначное отображение каждого из пространств $L_i(a, \infty)$ $(i = 1, 2, \infty)$ на себя и обратный оператор $(\mathbf{I}+\mathbf{K})^{-1} = \mathbf{I}+\mathbf{L}$ имеет такой же вид:

$$(\mathbf{I}+\mathbf{L})f = f(x) + \int_x^\infty L(x, t)f(t)\,dt.$$

Нетрудно оценить ядро $L(x, t)$, используя уравнение

$$L(x, y) + K(x, y) + \int_x^y L(x, t)K(t, y)\,dt = 0.$$

Оказывается, что

$$|L(x, y)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+y}{2}\right)\exp\left\{\sigma_1\left(\frac{x+y}{2}\right)-\sigma_1(y)\right\}.$$

Но эта оценка нам не понадобится.

Лемма 3.1.2. *Функция $K(x, t)$ имеет первые частные производные по обеим переменным, причем*

$$\left|\frac{\partial K(x_1, x_2)}{\partial x_j} + \frac{1}{4}q\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sigma(x_1)\,\sigma\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\exp\left\{\sigma_1(x_1)-\sigma_1\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right\}. \qquad (3.1.15)$$

Доказательство. Учитывая, что $H(u, v) = K(u-v, u+v)$, достаточно доказать существование производных у функции $H(u, v)$. Но это непосредственно следует из уравнения (3.1.13) и оценки

$$|H(u, v)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma(u)\exp\{\sigma_1(u-v)-\sigma_1(u)\}, \tag{3.1.16}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H(u, v)}{\partial u} &= -\frac{1}{2}q(u) - \int_0^v q(u-\beta)H(u, \beta)\,d\beta, \\ \frac{\partial H(u, v)}{\partial v} &= \int_u^\infty q(\alpha - v)H(\alpha, v)\,d\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{3.1.16$'$}$$

Из этих равенств, используя оценку (3.1.14), получаем

$$\left|\frac{\partial H(u, v)}{\partial u} + \frac{1}{2}q(u)\right| \leqslant \frac{1}{2}\sigma(u)\sigma(u-v)\exp\{\sigma_1(u-v)-\sigma_1(u)\},$$

$$\left|\frac{\partial H(u, v)}{\partial v}\right| \leqslant \frac{1}{2}\sigma(u)\sigma(u-v)\exp\{\sigma_1(u-v)-\sigma_1(u)\}$$

и, следовательно, при $2u = x+t$, $2v = t-x$

$$\left|\frac{\partial K(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{4}q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial H(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial H(u, v)}{\partial u} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}q(u)\right| \leqslant \frac{1}{2}\sigma(x)\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left\{\sigma_1(x)-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\},$$

$$\left|\frac{\partial K(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{4}q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial H(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial H(u, v)}{\partial v} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}q(u)\right| \leqslant \frac{1}{2}\sigma(x)\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left\{\sigma_1(x)-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\}.$$

Замечание. Из равенств (3.1.16$'$) следует, что функция $H(u, v)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 H(u, v)}{\partial u\,\partial v} = -q(u-v)H(u, v),$$

удовлетворяющим условию

$$\frac{\partial H(u, 0)}{\partial u} = -\frac{1}{2}q(u).$$

При этом, если функция $q(u)$ дифференцируема, то $H(u, v)$ имеет все производные второго порядка. Поэтому ядро $K(x, t)$ дважды дифференцируемо и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} = q(x)K(x, t) \tag{3.1.17}$$

и условиям

$$\frac{d}{dx} K(x, x) = -\frac{1}{2} q(x), \tag{3.1.18}$$

$$\lim_{x+t\to\infty} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} = \lim_{x+t\to\infty} \frac{\partial K(x, t)}{\partial t} = 0, \tag{3.1.18'}$$

которые определяют его однозначно.

Таким образом, в этом случае, для того чтобы функция $K(x, t)$ была ядром оператора преобразования, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (3.1.17), (3.1.18) и (3.1.18′).

Лемма 3.1.3. *Решение $e(\lambda, x)$ является аналитической функцией от λ в верхней полуплоскости и непрерывной на вещественной оси. Во всей полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ справедливы такие оценки:*

$$|e(\lambda, x)| \leqslant \exp\{-\operatorname{Im}\lambda x + \sigma_1(x)\}, \tag{3.1.19}$$

$$|e(\lambda, x) - e^{i\lambda x}| \leqslant \left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right\} \times$$

$$\times \exp\{-\operatorname{Im}\lambda x + \sigma_1(x)\}, \tag{3.1.20}$$

$$|e'(\lambda, x) - i\lambda e^{i\lambda x}| \leqslant \sigma(x) \exp\{-\operatorname{Im}\lambda x + \sigma_1(x)\}. \tag{3.1.21}$$

При вещественных $\lambda \neq 0$ функции $e(\lambda, x)$ и $e(-\lambda, x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.1.1) и их вронскиан равен $2i\lambda$:

$$W\{e(\lambda, x),\ e(-\lambda, x)\} = e'(\lambda, x)\, e(-\lambda, x) -$$

$$- e(\lambda, x)\, e'(-\lambda, x) = 2i\lambda. \tag{3.1.22}$$

Доказательство. Аналитичность функции $e(\lambda, x)$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ непосредственно следует из формулы (3.1.5) и оценки (3.1.6). Далее,

$$|e(\lambda, x)| = \left| e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t)\, e^{i\lambda t} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\operatorname{Im}\lambda x} \left[1 + \int_x^\infty |K(x, t)|\, dt\right],$$

откуда, используя (3.1.6), получаем

$$|e(\lambda, x)| \leqslant e^{-\operatorname{Im}\lambda x} \left[1 + \frac{1}{2}\int_x^\infty \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\} dt\right] =$$

$$= \exp\{-\operatorname{Im}\lambda x + \sigma_1(x)\}.$$

Таким образом, неравенство (3.1.19) доказано.

Заметим теперь, что функции $e(\lambda, x)$ удовлетворяют уравнению (3.1.7). Используя это уравнение и оценку (3.1.19), находим

$$|e(\lambda, x) - e^{i\lambda x}| \leqslant \int_x^\infty \left| \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} q(t) \right| e^{-\mathrm{Im}(t-x)} dt \times$$

$$\times \exp\{-\mathrm{Im}\,\lambda x + \sigma_1(x)\},$$

$$|e'(\lambda, x) - i\lambda e^{i\lambda x}| \leqslant \int_x^\infty |\cos\lambda(t-x)\, q(t)|\, e^{-\mathrm{Im}\,(t-x)} dt \times$$

$$\times \exp\{-\mathrm{Im}\,\lambda x + \sigma_1(x)\}.$$

Для λ, лежащих в замкнутой верхней полуплоскости,

$$\left| \frac{\sin\lambda y}{\lambda} \right| e^{-\mathrm{Im}\,\lambda y} \leqslant \frac{1}{|\lambda|}, \quad \left| \frac{\sin\lambda y}{\lambda} \right| e^{-\mathrm{Im}\,\lambda y} \leqslant y,$$

$$|\cos\lambda y|\, e^{-\mathrm{Im}\,\lambda y} \leqslant 1$$

при всех $y \geqslant 0$. Поэтому

$$\int_x^\infty \left| \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} \right| e^{-\mathrm{Im}\,\lambda(t-x)} |q(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_x^{x+\frac{1}{|\lambda|}} (t-x)\,|q(t)|\, dt + \frac{1}{|\lambda|} \int_{x+\frac{1}{|\lambda|}}^\infty |q(t)|\, dt =$$

$$= -(t-x)\,\sigma(t) \Big|_x^{x+\frac{1}{|\lambda|}} + \int_x^{x+\frac{1}{|\lambda|}} \sigma(t)\, dt + \frac{1}{|\lambda|} \sigma\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right) =$$

$$= \sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right),$$

$$\int_x^\infty |\cos\lambda(t-x)|\, e^{-\mathrm{Im}\,\lambda(t-x)} |q(t)|\, dt \leqslant \sigma(x).$$

Справедливость оценок (3.1.20), (3.1.21) вытекает из этих неравенств. При вещественных $\lambda \neq 0$ функции $e(\lambda, x)$ и $e(-\lambda, x)$ определены и удовлетворяют одному и тому же уравнению (3.1.1). Поэтому их вронскиан $W\{e(\lambda, x), e(-\lambda, x)\}$ не зависит от x, а так как согласно (3.1.20), (3.1.21) $\lim\limits_{x\to\infty} W\{e(\lambda, x), e(-\lambda, x)\} = 2i\lambda$, то $W\{e(\lambda, x), e(-\lambda, x)\} = 2i\lambda$ и лемма полностью доказана.

Лемма 3.1.4. *При всех значениях* λ *уравнение (3.1.1) имеет решение* $\omega(\lambda, x; \infty)$, *удовлетворяющее при* $x \to 0$ *условиям*

$$\omega(\lambda, x;\ \infty) = x(1 + o(1)), \quad \omega'_x(\lambda, x;\ \infty) = 1 + o(1). \tag{3.1.23}$$

Это решение является целой функцией от λ *и при* $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ *удовлетворяет неравенству*

$$|(\lambda\omega(\lambda, x; \infty) - \sin\lambda x)\, e^{i\lambda x}| \leqslant$$
$$\leqslant \left[\sigma_1(0) - \sigma_1\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right] \exp\left\{\int_0^x t\,|q(t)|\,dt\right\}. \tag{3.1.24}$$

Доказательство. Если функция $\omega(\lambda, x; \infty) = O(x)$ при $x \to 0$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\omega(\lambda, x; \infty) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\, q(t)\,\omega(\lambda, t; \infty)\,dt, \tag{3.1.25}$$

то она, очевидно, является решением уравнения (3.1.1). Будем искать решение этого интегрального уравнения при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ в виде $\omega(\lambda, x; \infty) = xe^{-i\lambda x}z(\lambda, x)$. Тогда для функции $z(\lambda, x)$ получим уравнение

$$z(\lambda, x) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda x}\, e^{i\lambda x} + \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\, e^{i\lambda(x-t)} t q(t)\, z(\lambda, t)\,dt, \tag{3.1.26}$$

решение которого можно найти методом последовательных приближений, положив

$$z(\lambda, x) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(\lambda, x), \tag{3.1.27}$$

где

$$z_0(\lambda, x) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda x}\, e^{i\lambda x},$$

$$z_k(\lambda, x) = \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}\, e^{i\lambda(t-x)} t q(t)\, z_{k-1}(\lambda, t)\,dt.$$

Так как при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, $0 \leqslant t < x$

$$\left|\frac{\sin\lambda x}{\lambda x}\, e^{i\lambda x}\right| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x e^{2i\lambda\xi}d\xi\right| \leqslant 1,$$

$$\left|\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda x}\, e^{i\lambda(t-x)}\right| \leqslant 1 - \frac{t}{x} \leqslant 1,$$

то ряд (3.1.27) мажорируется рядом $\sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k(x)$, в котором $\zeta_0(x) = 1$, $\zeta_k(x) = \int_0^x t\,|q(t)|\,\zeta_{k-1}(t)\,dt$. Последний заведомо сходится равномерно в каждом конечном интервале полуоси $[0, \infty)$, так как

$$0 \leqslant \zeta_k(x) \leqslant \frac{1}{k!}\left[\int_0^x t\,|q(t)|\,dt\right]^k,$$

что легко доказывается по индукции. Отсюда следует, что ряд (3.1.27) при любом $a > 0$ сходится равномерно в области $0 \leqslant x \leqslant a$, $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, а его сумма $z(\lambda, x)$ удовлетворяет уравнению (3.1.26) и неравенству

$$|z(\lambda, x)| \leqslant \exp\left\{\int_0^x t\,|q(t)|\,dt\right\} \tag{3.1.28}$$

и является аналитической функцией от λ при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, непрерывной в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$. Но это означает, что функция $\omega(\lambda, x; \infty) = xz(\lambda, x)\exp(-i\lambda x)$ удовлетворяет уравнениям (3.1.25), (3.1.1) и неравенству

$$\omega(\lambda, x; \infty)\,e^{i\lambda x}| \leqslant x\exp\left\{\int_0^x t\,|q(t)|\,dt\right\} \tag{3.1.28'}$$

и является аналитической функцией от λ при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, непрерывной в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$.

Аналогично доказывается, что уравнение (3.1.25) разрешимо при $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$ и что его решение $\omega(\lambda, x; \infty)$ регулярно по λ в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda < 0$ и непрерывно при $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$. Поэтому $\omega(\lambda, x; \infty)$ является решением уравнения (3.1.1), обращающимся в нуль при $x = 0$, причем относительно λ это целая функция.

Из уравнения (3.1.25), уравнения, которое получается из него дифференцированием по x, и оценки (3.1.28′) находим

$$\left|\omega(\lambda, x; \infty) - \frac{\sin\lambda x}{\lambda}\right| \leqslant x\int_0^x t\,|q(t)|\,dt\,\exp\left\{|\operatorname{Im}\lambda x| + \int_0^x t\,|q(t)|\,dt\right\},$$

$$|\,\omega'(\lambda, x; \infty) - \cos\lambda x\,| \leqslant \int_0^x t\,|q(t)|\,dt\,\exp\left\{|\operatorname{Im}\lambda x| + \int_0^x t\,|q(t)|\,dt\right\}.$$

Следовательно, функция $\omega(\lambda, x; \infty)$ удовлетворяет условиям (3.1.23). Снова используя уравнение (3.1.25) и оценку (3.1.28′), получаем при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$

$$|\lambda\omega(\lambda, x; \infty)e^{i\lambda x} - \sin\lambda x e^{i\lambda x}| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x |\sin\lambda(x-t)e^{i\lambda(x-t)}\, t q(t) z(\lambda, t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x t|q(t)|\exp\left\{\int_0^t \xi|q(\xi)|\, d\xi\right\} dt = \exp\left\{\int_0^x t|q(t)|\, dt\right\} - 1,$$

откуда, в частности, следует, что

$$|\lambda\omega(\lambda, x; \infty)e^{i\lambda x} - \sin\lambda x e^{i\lambda x}| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x t|q(t)|\, dt \exp\left\{\int_0^x t|q(t)|\, dt\right\}, \tag{3.1.29}$$

$$|\lambda\omega(\lambda, x; \infty)| \leqslant \exp\left\{\int_0^x t|q(t)|\, dt\right\}. \tag{3.1.30}$$

Пусть теперь $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ и $|\lambda|^{-1} < x$. Тогда согласно (3.1.25), (3.1.28) и (3.1.30)

$$|\lambda\omega(\lambda, x; \infty)e^{i\lambda x} - \sin\lambda x e^{i\lambda x}| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x |\sin\lambda(x-t)e^{i\lambda(x-t)}q(t)e^{i\lambda t}\omega(\lambda, t; \infty)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_0^{|\lambda|^{-1}} t|q(t)|\, dt + |\lambda|^{-1}\int_{|\lambda|^{-1}}^x |q(t)|\, dt\right\}\exp\left\{\int_0^x t|q(t)|\, dt\right\} =$$

$$= \left\{-|\lambda|^{-1}\sigma(|\lambda|^{-1}) + \int_0^{|\lambda|^{-1}} \sigma(t)\, dt + |\lambda|^{-1}[\sigma(|\lambda|^{-1}) - \sigma(x)]\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\int_0^x t|q(t)|\, dt\right\} \leqslant [\sigma_1(0) - \sigma_1(|\lambda|^{-1})]\exp\left\{\int_0^x t|q(t)|\, dt\right\}$$

и справедливость неравенства (3.1.24) доказана для $|\lambda|^{-1} < x$. При $|\lambda|^{-1} \geqslant x$ справедливость этого неравенства вытекает из (3.1.29), так как

$$\int_0^x t|q(t)|\, dt = -x\sigma(x) + \int_0^x \sigma(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_1(0) - \sigma_1(x) \leqslant \sigma_1(0) - \sigma_1(|\lambda|^{-1}).$$

Лемма 3.1.5. *При всех вещественных значениях $\lambda \neq 0$ справедливо тождество*

$$-\frac{2i\lambda\omega(\lambda, x; \infty)}{e(\lambda, 0)} = e(-\lambda, x) - S(\lambda)e(\lambda, x), \tag{3.1.31}$$

где

$$S(\lambda)=\frac{e(-\lambda,0)}{e(\lambda,0)}=\overline{S(-\lambda)}=[S(-\lambda)]^{-1}. \tag{3.1.32}$$

Доказательство. Так как функции $e(-\lambda, x)$ и $e(\lambda, x)$ при вещественных $\lambda \neq 0$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.1.1), то $\omega(\lambda, x; \infty)=A^{-}e(-\lambda, x)+A^{+}e(\lambda, x)$. Из формулы (3.1.22) вытекает, что $W\{\omega(\lambda, x; \infty), e(\mp\lambda, x)\}=\pm 2i\lambda A^{\pm}$. Устремляя здесь x к нулю и используя при этом оценки (3.1.21) и (3.1.23), получаем $e(\mp\lambda, 0)=\pm 2i\lambda A^{\pm}$, т. е. $\omega(\lambda, x; \infty)=(2i\lambda)^{-1}[-e(\lambda, 0)e(-\lambda, x)+e(-\lambda, 0)e(\lambda, x)]$. Из вещественности функции $q(x)$ следует, что $e(-\lambda, 0)=\overline{e(\lambda, 0)}$. Поэтому при всех вещественных значениях $\lambda\neq 0$ $e(\lambda, 0)\neq 0$,

$$-\frac{2i\lambda\omega(\lambda, x; \infty)}{e(\lambda,0)}=e(-\lambda, x)-S(\lambda)e(\lambda, x),$$

где

$$S(\lambda)=\frac{e(-\lambda,0)}{e(\lambda,0)}=\overline{\left\{\frac{e(\lambda,0)}{e(-\lambda,0)}\right\}}=\left[\frac{e(\lambda,0)}{e(-\lambda,0)}\right]^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь внимательно левую часть полученного тождества. Она является, очевидно, мероморфной в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$ функцией с полюсами, лежащими в нулях функции $e(\lambda, 0)$.

Лемма 3.1.6. *Функция $e(\lambda, 0)$ может иметь в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$ только конечное число нулей. Все эти нули простые, лежат на мнимой оси, и функция $\lambda[e(\lambda, 0)]^{-1}$ ограничена в некоторой окрестности нуля.*

Доказательство. Так как при вещественных значениях $\lambda\neq 0$ $e(\lambda, 0)\neq 0$, то единственным вещественным нулем функции $e(\lambda, 0)$ может быть число 0. Из неравенства (3.1.20) следует, что $e(\lambda, 0)\to 1$ при $|\lambda|\to\infty$. Поэтому нули функции $e(\lambda, 0)$ образуют ограниченное и не более чем счетное множество, единственной предельной точкой которого может быть лишь нуль.

Пусть μ ($\operatorname{Im}\mu>0$ или $\mu=0$) — какой-нибудь нуль функции $e(\lambda, 0)$. Тогда согласно оценкам (3.1.21) и (3.1.23) $W\{\omega(\mu, x; \infty), e(\mu, x)\}=e(\mu, 0)=0$ и, следовательно, $e(\mu, x)=c\omega(\mu, x; \infty)$. Поэтому предел $\lim\limits_{x\to 0}e'(\mu, x)=e'(\mu, 0)=c$ существует и

$$e(\mu, x)=e'(\mu, 0)\,\omega(\mu, x; \infty). \tag{3.1.33}$$

Из этой формулы следует, что

$$\lim_{x\to 0}W\{e(\mu_1, x), \overline{e(\mu_2, x)}\}=0, \tag{3.1.34}$$

если μ_1 и μ_2 — какие-нибудь нули функции $\overline{e(\lambda, 0)}$. Из вещественности функции $q(x)$ вытекает, что функция $\overline{e(\mu_2, x)}$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и $e(\mu_1, x)$, если в нем заменить μ_1^2 на $\overline{\mu_2^2}$. Поэтому

$$W\{e(\mu_1, x)\overline{e(\mu_2, x)}\}\Big|_a^b + (\mu_1^2 - \overline{\mu_2^2})\int_a^b e(\mu_1, x)\overline{e(\mu_2, x)}\,dx = 0,$$

откуда согласно (3.1.34) и оценкам (3.1.21), (3.1.19) следует, что

$$(\mu_1^2 - \overline{\mu_2^2})\int_0^\infty e(\mu_1, x)\overline{e(\mu_2, x)}\,dx = 0, \tag{3.1.35}$$

если μ_1, μ_2 — нули функции $e(\lambda, 0)$. В частности, полагая здесь $\mu_2 = \mu_1$, заключаем, что $\mu_1^2 - \overline{\mu_1^2} = 0$ и, следовательно, $\mu_1 = i\lambda_1$, где $\lambda_1 \geqslant 0$. Значит, нули функции $e(\lambda, 0)$ могут лежать только на мнимой полуоси. Докажем, что их может быть лишь конечное число. Это очевидно в том случае, когда $e(0, 0) \neq 0$, так как тогда множество нулей не может иметь предельной точки. В общем случае конечность множества нулей функции $e(\lambda, 0)$ вытекает из того, что можно дать оценку снизу для расстояния между ее соседними нулями.

Обозначим через δ точную нижнюю границу расстояний между двумя соседними нулями функции $e(\lambda, 0)$ и покажем, что $\delta > 0$. Предполагая противное, мы смогли бы выделить такие последовательности нулей $\{i\hat{\lambda}_k\}$, $\{i\lambda_k\}$ функции $e(\lambda, 0)$, что $\lim\limits_{k\to\infty}(\hat{\lambda}_k - \lambda_k) = 0$, $\hat{\lambda}_k > \lambda_k \geqslant 0$ и $\max\limits_k \hat{\lambda}_k < M$. Из оценки (3.1.20) следует, что при достаточно большом A равномерно относительно $x \in [A, \infty]$ и $\lambda \in [0, \infty)$ выполняется неравенство $e(i\lambda, x) > 0{,}5\exp(-\lambda x)$, так что

$$\int_A^\infty e(i\hat{\lambda}_k, x)\overline{e(i\lambda_k, x)}\,dx > \frac{e^{-A(\hat{\lambda}_k+\lambda_k)}}{4(\hat{\lambda}_k + \lambda_k)} > \frac{e^{-2AM}}{8M}. \tag{3.1.36}$$

С другой стороны, из равенства (3.1.35) получаем

$$0 = \int_0^\infty e(i\hat{\lambda}_k, x)\overline{e(i\lambda_k, x)}\,dx =$$

$$= \int_0^A e(i\hat{\lambda}_k, x)[\overline{e(i\lambda_k, x)} - \overline{e(i\hat{\lambda}_k, x)}]\,dx +$$

$$+ \int_0^A e(i\hat{\lambda}_k, x)\overline{e(i\hat{\lambda}_k, x)}\,dx + \int_A^\infty e(i\hat{\lambda}_k, x)\overline{e(i\lambda_k, x)}\,dx,$$

и, переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, находим

$$0 \geqslant \varlimsup_{k \to \infty} \int_A^\infty e(i\hat{\lambda}_k, x)\, \overline{e(i\hat{\lambda}_k, x)}\, dx, \tag{3.1.36'}$$

так как равномерно относительно $x \in [0, A]$

$$\lim_{k \to \infty} [e(i\hat{\lambda}_k, x) - e(i\lambda_k, x)] = 0.$$

Неравенства (3.1.36) и (3.1.36′) приводят, очевидно, к противоречию. Поэтому сделанное предположение неверно, $\delta > 0$, а функция $e(\lambda, 0)$ имеет конечное число нулей.

Условимся точками обозначать дифференцирование по λ, а штрихами — по x:

$$\dot{e}(\lambda, x) = \frac{d}{d\lambda} e(\lambda, x), \quad e'(\lambda, x) = \frac{d}{dx} e(\lambda, x).$$

Дифференцируя уравнение

$$-e''(\lambda, x) + q(x)\, e(\lambda, x) = \lambda^2 e(\lambda, x)$$

по λ, видим, что функция $\dot{e}(\lambda, x)$ удовлетворяет такому уравнению:

$$-\dot{e}''(\lambda, x) + q(x)\, \dot{e}(\lambda, x) = \lambda^2 \dot{e}(\lambda, x) + 2\lambda e(\lambda, x).$$

Следовательно,

$$-W\{e(\lambda, x), \dot{e}(\lambda, x)\}\Big|_a^b + 2\lambda \int_a^b [e(\lambda, x)]^2\, dx = 0.$$

Если $\lambda = i\mu$ $(\mu > 0)$ — нуль функции $e(\lambda, 0)$, то, во-первых, функция $e(i\mu, x)$ вещественна и, во-вторых, согласно формуле (3.1.33) и оценкам (3.1.19), (3.1.21)

$$\lim_{x \to 0} W\{e(i\mu, x), \dot{e}(i\mu, x)\} = e'(i\mu, 0)\, \dot{e}(i\mu, 0),$$

$$\lim_{x \to \infty} W\{e(i\mu, x)\, \dot{e}(i\mu, x)\} = 0,$$

откуда следует, что

$$e'(i\mu, 0)\, \dot{e}(i\mu, 0) + 2i\mu \int_0^\infty |e(i\mu, x)|^2\, dx = 0. \tag{3.1.37}$$

Так как $\int_0^\infty |e(i\mu, x)|^2\, dx > 0$, то $\dot{e}(i\mu, 0) \neq 0$ и простота нулей функции $e(\lambda, 0)$ доказана.

Нам осталось еще доказать ограниченность функции $\lambda[e(\lambda, 0)]^{-1}$ в полукруге $D_\rho = \{\lambda : |\lambda| \leqslant \rho, \ \operatorname{Im} \lambda \geqslant 0\}$ при достаточно малом ρ. Это очевидно, если $e(0, 0) \neq 0$.

Пусть теперь $e(0, 0) = 0$. Если $\rho < \frac{1}{2}\delta$, то в полукруге D_ρ функция $e(\lambda, 0)$ других нулей не имеет. Поэтому функция $\Phi(\lambda, x) = \frac{\lambda\omega(\lambda, x; \infty)}{e(\lambda, 0)}$ регулярна во внутренних точках D_ρ и ограничена на дуге полуокружности $\{\lambda : |\lambda| = \rho, \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0\}$. Она равномерно ограничена также на отрезке $-\rho \leqslant \lambda \leqslant \rho$, что видно из формулы (3.1.31), так как $|S(\lambda)| = 1$. Однако сразу применить принцип максимума для доказательства ограниченности функции $\Phi(\lambda, x)$ в D_ρ мы не можем, так как ее непрерывность при $\lambda \to 0$ не доказана. Поэтому нам придется рассмотреть семейство уравнений $-y'' + q_\beta(x)y = \lambda^2 y$, в которых

$$q_\beta(x) = \begin{cases} q(x), & x < \beta, \\ 0, & x \geqslant \beta, \end{cases}$$

и их решений $e_\beta(\lambda, x)$, $\omega_\beta(\lambda, x; \infty)$. Очевидно, что

$$\omega_\beta(\lambda, x; \infty) = \omega(\lambda, x; \infty),$$

$$\Phi_\beta(\lambda, x) = \frac{\lambda\omega_\beta(\lambda, x; \infty)}{e_\beta(\lambda, 0)} = \frac{\lambda\omega(\lambda, x; \infty)}{e_\beta(\lambda, 0)}$$

при $x < \beta$. Далее, согласно лемме 3.1.1

$$e_\beta(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K_\beta(x, t)\, e^{i\lambda t} dt,$$

где $K_\beta(x, t) = 0$ при $x + t > 2\beta$, причем $\lim\limits_{\beta\to\infty} K_\beta(x, t) = K(x, t)$ и равномерно по β

$$|K_\beta(x, t)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\}.$$

Следовательно, по переменной λ функции $e_\beta(\lambda, x)$ целые и равномерно по всей верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ $\lim\limits_{\beta\to\infty} e_\beta(\lambda, x) = e(\lambda, x)$.

Пусть δ_β — точная нижняя граница расстояний между соседними нулями функции $e_\beta(\lambda, 0)$. Повторяя проведенное выше доказательство положительности δ_β и замечая, что необходимые оценки выполняются равномерно по β, убеждаемся, что и $\inf\limits_\beta \delta_\beta = \delta_0 > 0$. Поэтому в полукруге D_{ρ_0} $(\rho_0 = 0{,}5\,\delta_0)$ функция $e_\beta(\lambda, 0)$ при любом β может иметь не более одного нуля (обозначим его через $i\lambda_\beta$; если нуля нет, то будем считать $\lambda_\beta = 0$).

Рассмотрим теперь функции $\Phi_\beta(\lambda, x)\frac{\lambda - i\lambda_\beta}{\lambda + i\lambda_\beta}$. Из предыдущего следует, что это мероморфные во всей плоскости функции, регулярные во всех внутренних точках D_{ρ_0}. Поскольку в замкнутой верхней полуплоскости $|\lambda - i\lambda_\beta||\lambda + i\lambda_\beta|^{-1} \leqslant 1$ и на дуге $\{\lambda: |\lambda| = \rho_0, \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0\}$ функция $e_\beta(\lambda, 0)$ не может обратиться в нуль, рассматриваемые функции начиная с некоторого β равномерно ограничены на этой дуге. Из формулы (3.1.31) видно, что они равномерно ограничены и на отрезке $-\rho_0 \leqslant \lambda \leqslant \rho_0$. Следовательно, начиная с некоторого β эти функции регулярны в D_{ρ_0} (включая границу) и

$$\sup_{\lambda\in\partial D_{\rho_0}} \left| \Phi_\beta(\lambda, x) \frac{\lambda - i\lambda_\beta}{\lambda + i\lambda_\beta} \right| = C(x) < \infty,$$

откуда согласно теореме о максимуме модуля регулярной функции заключаем, что

$$\sup_{\lambda\in D_{\rho_0}} \left| \Phi_\beta(\lambda, x) \frac{\lambda - i\lambda_\beta}{\lambda + i\lambda_\beta} \right| = C(x) < \infty.$$

Так как $\lim\limits_{\beta\to\infty} \lambda_\beta = 0$ и $\lim\limits_{\beta\to\infty} \Phi_\beta(\lambda, x) = \Phi(\lambda, x)$, то, переходя в этом неравенстве к пределу, получаем

$$\sup_{\lambda\in D_{\rho_0}} |\Phi(\lambda, x)| \leqslant C(x).$$

Наконец, из неравенства (3.1.28) следует, что при достаточно малом $x = x_0$

$$\inf_{\lambda\in D_{\rho_0}} |\omega(\lambda, x; \infty)| > \frac{1}{2} x_0$$

и, следовательно,

$$\sup_{\lambda\in D_{\rho_0}} \left| \frac{\lambda}{e(\lambda, 0)} \right| \leqslant \frac{2C(x_0)}{x_0} < \infty,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3.1.7. *Функция* $1 - S(\lambda)$ *является преобразованием Фурье некоторой функции* $F_S(x)$, *представимой в виде*

$F_S(x) = F_S^{(1)}(x) + F_S^{(2)}(x)$, *где* $F_S^{(1)}(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, *а* $F_S^{(2)}(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ *и* $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |F_S^{(2)}(x)| < \infty$.

Доказательство. Как известно, преобразование Фурье свертки

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt$$

двух функций из $L_1(-\infty, \infty)$ равно произведению $\tilde{f}(\lambda)\,\tilde{g}(\lambda)$ их преобразований Фурье, а норма свертки не превышает произведения норм: $\|f*g\|_{L_1} \leqslant \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1}$. Поэтому, если $\|f\|_{L_1} < 1$, то ряд $-f(x) + f*f(x) - f*f*f(x) + \cdots$ сходится в метрике пространства $L_1(-\infty, \infty)$, его сумма принадлежит этому пространству и преобразование Фурье этой суммы $-\tilde{f}(\lambda) + \{\tilde{f}(\lambda)\}^2 - \{\tilde{f}(\lambda)\}^3 + \cdots$ равно $\{1 + \tilde{f}(\lambda)\}^{-1} - 1$.

Заметим теперь, что

$$\tilde{h}(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| < 1, \\ 2 - |\lambda|, & 1 \leqslant |\lambda| \leqslant 2, \\ 0, & 2 < |\lambda|, \end{cases}$$

является преобразованием Фурье некоторой функции $h(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, а $\tilde{h}(\lambda N^{-1})$ — преобразование Фурье функции $h_N(x) = N\, h(xN)$, причем

$$\lim_{N \to \infty} \|f(x) - h_N * f(x)\|_{L_1} = 0 \tag{3.1.38}$$

для всех функций $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$. Так как преобразование Фурье функции $f(x) - h_N * f(x)$ равно $\{1 - \tilde{h}(\lambda N^{-1})\} \tilde{f}(\lambda)$, то из (3.1.38), согласно предыдущему, следует, что при достаточно большом N функция $[1 + \{1 - \tilde{h}(\lambda N^{-1})\} \tilde{f}(\lambda)]^{-1} - 1$ является преобразованием Фурье некоторой функции из $L_1(-\infty, \infty)$.

Обозначая для краткости $K(0, t) = k(t)$, получаем

$$e(\lambda, 0) = 1 + \int_0^\infty K(0, t)\, e^{i\lambda t} dt = 1 + \tilde{k}(-\lambda),$$

$$1 - S(\lambda) = 1 - \frac{1 + \tilde{k}(\lambda)}{1 + \tilde{k}(-\lambda)} = \frac{\tilde{k}(-\lambda) - \tilde{k}(\lambda)}{1 + \tilde{k}(-\lambda)}.$$

Перепишем это равенство в виде

$$\begin{aligned} 1 - S(\lambda) = {} & [\tilde{k}(-\lambda) - \tilde{k}(\lambda)]\, [\{1 + (1 - \tilde{h}(\lambda N^{-1}))\, \tilde{k}(-\lambda)\}^{-1} - 1] + \\ & + [\tilde{k}(-\lambda) - \tilde{k}(\lambda)] - [\tilde{k}(-\lambda) - \tilde{k}(\lambda)] \left\{ \frac{1}{1 + \{1 - \tilde{h}(\lambda N^{-1})\}\, k(-\lambda)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{1 + \tilde{k}(-\lambda)} \right\} \end{aligned} \tag{3.1.39}$$

и заметим, что функция $\{1 + (1 - \tilde{h}(\lambda N^{-1}))\, \tilde{k}(-\lambda)\}^{-1} - 1$ при достаточно большом N является преобразованием Фурье суммируемой функции. Поэтому сумма первых двух слагаемых правой части формулы (3.1.39) тоже является преобразованием Фурье некоторой суммируемой функции $F_S^{(1)}(x)$. Так как $\tilde{h}(\lambda N^{-1}) = 0$ при $|\lambda| > 2N$, то третье слагаемое в этой формуле тоже равно нулю при $|\lambda| > 2N$ и ограничено. Поэтому оно является преобразованием Фурье некоторой ограниченной функции $F_S^{(2)}(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, и лемма доказана.

Задачи

1. Доказать, что операторное уравнение Дирака (1.2.37), в котором $\int\limits_x^\infty |\Omega(t)|\,dt = \sigma_1(x) < \infty$, имеет при всех вещественных значениях λ решение $e(\lambda, x)$, представимое в виде

$$e(\lambda, x) = e^{-B\lambda x} + \int\limits_x^\infty K(x, t)\, e^{-B\lambda t} dt,$$

где $K(x, t) \in OH$, $K(x, t) = K_+(x, t) + K_-(x, t)$, $BK_+(x, t) + K_+(x, t)B \equiv 0$, $BK_-(x, t) - K_-(x, t)B \equiv 0$,

$$\int\limits_x^\infty |K_+(x, t)|\,dt \leqslant \operatorname{sh} \sigma_1(x), \qquad \int\limits_x^\infty |K_-(x, t)|\,dt \leqslant \operatorname{ch} \sigma_1(x) - 1. \tag{3.1.40}$$

При этом $2K_+(x, x) = -B\Omega(x)$ и, если

$$\left[\int\limits_x^\infty |\Omega(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}} = \sigma_2(x) < \infty,$$

то

$$\left.\begin{aligned} &|K_-(x, t)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma_2(x)\,\sigma_2\left(\frac{x+t}{2}\right) \operatorname{ch} \sigma_1(x), \\ &\left|K_+(x, t) + \frac{1}{2} B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\sigma_2(x)\,\sigma_2\left(\frac{x+t}{2}\right) \operatorname{sh} \sigma_1(x). \end{aligned}\right\} \tag{3.1.40'}$$

Указание. Полагая $e(\lambda, x) = e^{-B\lambda x} u(\lambda, x)$, получаем для $u(\lambda, x)$ интегральное уравнение

$$u(\lambda, x) = I - \int\limits_x^\infty B\Omega(t)\, e^{-2B\lambda t} u(\lambda, t)\,dt,$$

решение которого ищем в таком виде:

$$u(\lambda, x) = I + \int\limits_x^\infty e^{B\lambda x} K(x, t)\, e^{-B\lambda t} dt.$$

Тогда

$$\int\limits_x^\infty K(x, t)\, e^{-B\lambda t} dt = -\int\limits_x^\infty B\Omega(t)\, e^{-B\lambda(2t-x)} dt -$$

$$-\int\limits_x^\infty B\Omega(t)\, e^{-B\lambda(t-x)} \int\limits_t^\infty K(t, \xi)\, e^{-B\lambda\xi} d\xi\, dt,$$

откуда для операторных функций

$$K_{\pm}(x, t) = \frac{1}{2}[K(x, t) \pm BK(x, t) B] \quad (K(x, t) = K_{+}(x, t) + K_{-}(x, t))$$

получаем такую систему интегральных уравнений:

$$K_{+}(x, t) = -\frac{1}{2} B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right) - \int_{x}^{\frac{x+t}{2}} B\Omega(\xi) K_{-}(\xi, t+x-\xi)\, d\xi,$$

$$K_{-}(x, t) = -\int_{x}^{\infty} B\Omega(\xi) K_{+}(\xi, t-x+\xi)\, d\xi,$$

если учесть, что операторы $K_{+}(x, t)$ ($K_{-}(x, t)$) антикоммутируют (коммутируют) с оператором B. Разрешимость этой системы и справедливость оценок (3.1.40), (3.1.40′) доказываются методом последовательных приближений.

2. Доказать, что ядро $K(x, t)$ построенного в лемме 3.1.1 оператора преобразования удовлетворяет неравенству

$$|K(x, t)| \leqslant \frac{1}{2} w\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{2\int_{x}^{\infty} w(\xi)\, d\xi\right\}, \tag{3.1.41}$$

где

$$w(x) = \sup_{x \leqslant \eta < \infty} \left| \int_{\eta}^{\infty} q(t)\, dt \right|.$$

Указание. Переходим к уравнению (3.1.13) и находим его решение в виде суммы $H_1(u, v) + H_2(u, v)$ функций, удовлетворяющих системе уравнений

$$H_1(u, v) = \frac{1}{2}\int_{u}^{\infty} q(t)\, dt + \int_{u}^{\infty} d\alpha \int_{0}^{v} q(\alpha-\beta) H_2(\alpha, \beta)\, d\beta,$$

$$H_2(u, v) = \int_{u}^{\infty} d\alpha \int_{0}^{v} q(\alpha-\beta) H_1(\alpha, \beta)\, d\beta$$

(см. гл. 1, § 2, задачу 2).

3. Доказать, что лемма 3.1.1 и оценка (3.1.41) справедливы и для операторных уравнений Штурма — Лиувилля, удовлетворяющих условию, аналогичному (3.1.3).

4. Рассмотрим операторное уравнение Дирака

$$By' + \{mT + \Omega(x)\} y = \lambda y, \tag{3.1.42}$$

в котором постоянные операторы B и T удовлетворяют условиям $-B^2 = T^2 = I$, $BT + TB = 0$, $B\Omega(x) + \Omega(x) B = 0$, а норма $|\Omega(x)|$ интегрируема на полуоси $[0, \infty)$. Общим решением этого уравнения при $\lambda^2 > m^2$ является операторнозначная функция $\{E_1(\lambda, x) + E_2(\lambda, x)\} C$, где C — произвольный постоянный оператор, а частные решения $E_j(\lambda, x)$ удовлетворяют при $x \to \infty$ таким асимптотическим равенствам:

$$E_1(\lambda, x) = e^{ikx}\left(\frac{\lambda+m}{k} I + iB\right)\left(\frac{I+T}{2}\right) + o(1),$$

$$E_2(\lambda, x) = e^{-ikx}\left(\frac{\lambda+m}{k} I - iB\right)\left(\frac{I+T}{2}\right) B + o(1),$$

$$k = \sqrt{\lambda^2 - m^2}.$$

Если операторнозначная функция $\Omega(x)$ непрерывно дифференцируема, то любое решение уравнения (3.1.42) является также решением операторного уравнения Штурма — Лиувилля $-y'' + q(x)y = k^2 y$ $(k^2 = \lambda^2 - m^2)$, где $q(x) = B\Omega'(x) + m[T\Omega(x) + \Omega(x)T] + \Omega^2(x)$. Предположим, что норма $|q(x)|$ удовлетворяет условию (3.1.3). Тогда согласно аналогу леммы 3.1.1 существует оператор преобразования и

$$E_j(\lambda, x) = \left\{e^{ik_j x} + \int_x^\infty K(x, t) e^{ik_j t} dt\right\} A_j(\lambda), \tag{3.1.43}$$

где $k_1 = \sqrt{\lambda^2 - m^2}$, $k_2 = -k_1$,

$$A_1(\lambda) = \left(\frac{\lambda+m}{k} I + iB\right)\left(\frac{I+T}{2}\right),$$

$$A_2(\lambda) = \left(\frac{\lambda+m}{k} I - iB\right)\left(\frac{I+T}{2}\right) B.$$

Доказать, что формула (3.1.43) справедлива и в том случае, когда функции $\sup\limits_{x \leqslant \xi < \infty} |\Omega(\xi)|$ и

$$w(x) = \sup_{x \leqslant \xi < \infty} \left| B\Omega(\xi) + \int_\xi^\infty [\{T\Omega(t) + \Omega(t)T\} m + \Omega^2(t)] dt \right|$$

интегрируемы на полуоси $[0, \infty)$, причем

$$|K(x, t)| \leqslant \frac{1}{2} w\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{2\int_x^\infty w(\xi) d\xi\right\}.$$

Указание. Аппроксимируем $\Omega(x)$ непрерывно дифференцируемой функцией

$$\Omega_\delta(x) = \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} \Omega(t) dt$$

и совершаем затем предельный переход при $\delta \to 0$.

5. Пусть M — точная нижняя граница неотрицательных чисел λ, удовлетворяющих неравенству $\sigma_1(0) - \sigma_1(\lambda^{-1}) \leqslant \frac{1}{2}$. Доказать следующие уточнения леммы 3.1.6:

а) на полуоси $[iM, i\infty)$ нет нулей функции $e(\lambda, 0)$;

б) если $M > 0$, то любой сегмент мнимой полуоси $[0, i\infty)$ длины

$$\Delta = \frac{\exp\{-Mx_0 - \sigma_1(0)\}}{(x_0 + 3t_0)\sqrt{2Mx_0}}$$

содержит не более одного нуля этой функции. Здесь x_0 и t_0 — решения уравнений

$$\sigma_1(x_0) = \frac{1}{3}, \quad \sigma_1(t_0) = \frac{\exp\{-Mx_0 - \sigma_1(0)\}}{\sqrt{2Mx_0}} \frac{t_0}{x_0 + 3t_0}. \tag{3.1.44}$$

Указание. Из уравнения (3.1.7) для функции $m(\lambda, x) = \sup\limits_{x \leqslant t < \infty} |e(\lambda, t)\, e^{-i\lambda t}|$ вытекает неравенство

$$m(\lambda, x) \leqslant 1 + m(\lambda, x) \left\{ \int\limits_x^{x+|\lambda|^{-1}} (t - x)\,|q(t)|\,dt + |\lambda|^{-1} \int\limits_{x+|\lambda|^{-1}}^{\infty} |q(t)|\,dt \right\} =$$

$$= 1 + m(\lambda, x)\{\sigma_1(x) - \sigma_1(x + |\lambda|^{-1})\}.$$

Поэтому, если $\sigma_1(x) - \sigma_1(x + |\lambda|^{-1}) < 1$, то

$$m(\lambda, x) \leqslant [1 - \{\sigma_1(x) - \sigma_1(x + |\lambda|^{-1})\}]^{-1},$$

$$e(i\lambda, x) \geqslant e^{-\lambda x} \left\{ 1 - \frac{\sigma_1(x) - \sigma_1(x + |\lambda|^{-1})}{1 - \{\sigma_1(x) - \sigma_1(x + |\lambda|^{-1})\}} \right\},$$

откуда следует утверждение «а» и оценка $e(i\lambda, x) \geqslant \dfrac{1}{2} e^{-\lambda x}$ $(x \geqslant x_0)$.

Пусть $i\lambda$ и $i\mu = i(\lambda + \delta)$ — два соседних нуля функции $e(\lambda, 0)$. Тогда

$$0 = \int\limits_0^{\infty} e(i\lambda, x)\, e(i\mu, x)\,dx = \frac{1}{4} \int\limits_0^{x_0} [e(i\lambda, x) + e(i\mu, x)]^2\,dx -$$

$$- \frac{1}{4} \int\limits_0^{x_0} [e(i\lambda, x) - e(i\mu, x)]^2\,dx + \int\limits_{x_0}^{\infty} e(i\lambda, x)\, e(i\mu, x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4} \left\{ -x_0 \max_{0 \leqslant x \leqslant x_0} [e(i\lambda, x) - e(i\mu, x)]^2 + \frac{\exp[-x_0(\lambda + \mu)]}{\lambda + \mu} \right\}$$

и, следовательно,

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant x_0} |e(i\lambda, x) - e(i\mu, x)| \geqslant \sqrt{\frac{\exp[-x_0(\lambda + \mu)]}{x_0(\lambda + \mu)}} > \frac{e^{-Mx_0}}{\sqrt{2Mx_0}}. \tag{3.1.45}$$

С другой стороны,

$$|e(i\lambda, x) - e(i\mu, x)| = \left| e^{-\lambda x} - e^{-\mu x} + \int\limits_x^{\infty} K(x, t)\{e^{-\lambda t} - e^{-\mu t}\}\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 1 - e^{-\delta x} + e^{\sigma_1(x)} \int\limits_x^{\infty} \sigma\left(\frac{x + t}{2}\right) e^{-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)} [1 - e^{-\delta t}]\, d\frac{t}{2} =$$

$$= 1 - e^{-\delta x} + e^{\sigma_1(x)} \{-[e^{-\sigma_1(x)} - 1][1 - e^{-\delta x}] -$$

$$- \delta \int\limits_x^{\infty} e^{-\delta t} [e^{-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)} - 1]\,dt \Big\} \leqslant e^{\sigma_1(x)} \Big\{ [1 - e^{-\delta x}] +$$

$$+ 2\delta t_0 + [1 - e^{-\sigma_1(x + t_0)}]\,\delta \int\limits_{x+2t_0}^{\infty} e^{-\delta t}\,dt \Big\} \leqslant e^{\sigma_1(0)} \{\delta x + 2\delta t_0 + \sigma_1(t_0)\},$$

откуда в силу (3.1.45)

$$e^{\sigma_1(0)}\{(x_0+2t_0)\,\delta+\sigma_1(t_0)\}>\frac{e^{-Mx_0}}{\sqrt{2Mx_0}}.$$

Поскольку t_0 удовлетворяет уравнению (3.1.44), из последнего неравенства вытекает

$$\delta>\frac{e^{-Mx_0}}{\sqrt{2Mx_0}}\,\frac{1}{x_0+3t_0}=\Delta.$$

Значит, расстояние между соседними нулями больше Δ, что эквивалентно утверждению «б».

6. Пусть симметрическое ($q(x)=q^*(x)$) операторное уравнение Штурма — Лиувилля удовлетворяет условию (3.1.3) и числа M, x_0, t_0 определены так же, как в предыдущей задаче. Доказать, что

а) операторы $e(\lambda, 0)$ ($\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$) имеют обратные при всех $\lambda\notin[0, iM]$;

б) ортопроекторы P_λ на ядра операторов $e(i\lambda, 0)$ ($\lambda\geqslant 0$) обладают свойством $|P_\lambda P_\mu|\leqslant\theta<1$, если $0<\lambda-\mu\leqslant\Delta$. В частности, если размерность пространства H равна $n<\infty$, то в каждом интервале полуоси $[0, i\infty)$ длины Δ определитель матрицы $e(\lambda, 0)$ может иметь не более n нулей.

7. Лемма 3.1.1 остается верной и для комплексных $q(x)$, удовлетворяющих условию 3.1.3. Пусть $\mathbf{I}+\mathbf{L}=(\mathbf{I}+\mathbf{K})^{-1}$ и $L(x, y)$ — ядро оператора $\mathbf{L}$. Доказать, что функция $\Phi(x, y)$, определенная при всех положительных x, y равенствами

$$\Phi(x, y)=\begin{cases} L(x, y)+\int\limits_y^\infty L(x, t)\,L(y, t)\,dt, & 0\leqslant x\leqslant y,\\ L(y, x)+\int\limits_x^\infty L(x, t)\,L(y, t)\,dt, & x\geqslant y\geqslant 0,\end{cases}$$

зависит только от $x+y$: $\Phi(x, y)=F(x+y)$, где

$$F(x)=L(0, x)+\int\limits_x^\infty L(x, t)\,L(0, t)\,dt. \tag{3.1.46}$$

Как обобщается этот результат на операторные уравнения Штурма — Лиувилля и Дирака?

Указание. См. гл. 1, § 2, указание к задаче 7.

8. Доказать аналог леммы 1.4.1: если в уравнении (3.1.1) потенциал $q(x)$ имеет $n\geqslant 0$ производных, удовлетворяющих неравенствам

$$\int\limits_0^\infty (1+x)\,|q^{(k)}(x)|\,dx<\infty\quad (k=0, 1, \ldots, n),$$

то решение $e(\lambda, x)$ этого уравнения представимо в виде

$$e(\lambda, x)=e^{i\lambda x}\left[1+\frac{u_1(x)}{2i\lambda}+\cdots+\frac{u_n(x)}{(2i\lambda)^n}+\frac{u_{n+1}(\lambda, x)}{(2i\lambda)^{n+1}}\right],$$

где

$$u_1(x) = -\int_x^\infty q(t)\,dt, \quad u_k(x) = -\int_x^\infty [-u''_{k-1}(\xi) + q(\xi)\,u_{k-1}(\xi)]\,d\xi,$$

$$u_{n+1}(\lambda, x) = u_{n+1}(x) - \frac{1}{2i\lambda}\int_x^\infty q(t)\,u_{n+1}(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^\infty \left\{u'_{n+1}(x+\xi) + \frac{1}{2i\lambda} K^{(0)}_{n+1}(x, \xi)\right\} e^{2i\lambda\xi} d\xi,$$

$$u'_{n+1}(\lambda, x) = -2i\lambda \int_0^\infty \left\{u'_{n+1}(x+\xi) + \frac{1}{2i\lambda} K^{(1)}_{n+1}(x, \xi)\right\} e^{2i\lambda\xi} d\xi,$$

причем

$$\int_0^\infty \{\,|u'_{n+1}(x+\xi)| + |K^{(0)}_{n+1}(x, \xi)| + |K^{(1)}_{n+1}(x, \xi)|\,\}\,d\xi < \infty.$$

9. Доказать аналог леммы 1.4.2: если выполнены условия предыдущей задачи, то

$$e(\lambda, x) = \exp\left\{i\lambda x - \int_x^\infty \sigma(\lambda, t)\,dt\right\},$$

где

$$\sigma(\lambda, t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k(t)}{(2i\lambda)^k} + \frac{\sigma_n(\lambda, t)}{(2i\lambda)^n},$$

функции $\sigma_k(x)$ определяются рекуррентными формулами (1.4.20),

$$\sigma_n(\lambda, x) = \int_0^\infty \sigma_{n+1}(x+\xi)\,e^{2i\lambda\xi} d\xi + \frac{1}{2i\lambda}\int_0^\infty \widetilde{K}_{n+1}(x, \xi)\,e^{2i\lambda\xi} d\xi + O(\lambda^{-2}),$$

$$\int_0^\infty \{\,|\widetilde{K}_{n+1}(x, \xi)| + |\sigma_{n+1}(x+\xi)|\,\}\,d\xi < \infty.$$

10. В верхней полуплоскости функция $e(\lambda, 0)$ имеет конечное число нулей, квадраты которых $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ являются дискретными собственными значениями краевой задачи (3.1.1), (3.1.2). Доказать, что если выполнены условия предыдущих задач при $n \geqslant 2m$, то справедлив следующий аналог формулы следов:

$$\lim_{R\to\infty} \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_0^R \lambda^{2m} d\ln S(\lambda) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{c_{2j+1}(2j+1)\,R^{2m-2j-1}}{2\pi(-4)^j(2m-2j-1)}\right\} =$$

$$= \frac{mc_{2m}}{(-4)^m} - \sum_{k=1}^{p} \mu_k^m,$$

где $c_k = \int_0^\infty \sigma_k(t)\,dt$.

Указание. Из аналогов лемм 1.4.1, 1.4.2 (см. задачи 8, 9) следует, что при $|\lambda| \to \infty$ в верхней полуплоскости справедливы такие асимптотические равенства:

$$\frac{d}{d\lambda}\ln e(\lambda, 0) = \frac{d}{d\lambda}\ln\left[1 + \frac{u_1(0)}{2i\lambda} + \cdots + \frac{u_n(0)}{(2i\lambda)^n}\right] + o(\lambda^{-n-1}),$$

$$\frac{d}{d\lambda}\ln\left[1 + \frac{u_1(0)}{2i\lambda} + \cdots + \frac{u_n(0)}{(2i\lambda)^n}\right] =$$

$$= \int_0^\infty \sum_{k=1}^n \frac{k\sigma_k(t)}{(2i)^k\lambda^{k+1}}\,dt + O(\lambda^{-n-2}) = \sum_{k=1}^n \frac{kc_k}{(2i)^k}\lambda^{-k-1} + O(\lambda^{-n-2}).$$

Так как $S(\lambda) = e(-\lambda, 0)\,[e(\lambda, 0)]^{-1}$, то

$$\int_0^R \lambda^{2m} d\ln S(\lambda) = -\int_{-R}^R \lambda^{2m} d\ln e(\lambda, 0) =$$

$$= -2\pi i\sum_{k=1}^p \mu_k^m + \int_{C(R)} \lambda^{2m} d\ln e(\lambda, 0),$$

где $C(R)$ — лежащая в верхней полуплоскости полуокружность радиуса R с центром в нуле. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^R \lambda^{2m} d\ln S(\lambda) = -\sum_{k=1}^p \mu_k^m + \frac{1}{2\pi i}\int_{C(R)} \lambda^{2m} d\ln e(\lambda, 0) =$$

$$= -\sum_{k=1}^p \mu_k^m + \frac{1}{2\pi i}\int_{C(R)}\left\{\sum_{k=1}^n \frac{kc_k}{(2i)^k}\lambda^{2m-k-1} + o(\lambda^{2m-n-1})\right\} d\lambda =$$

$$= -\sum_{k=1}^p \mu_k^m - \frac{2}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(2j+1)\,c_{2j+1}R^{2m-2j-1}}{(2i)^{2j+1}(2m-2j-1)} +$$

$$+ \frac{2mc_{2m}}{2\pi i\,(2i)^{2m}}\int_{C(R)} \lambda^{-1} d\lambda + o(R^{2m-n}) = -\sum_{k=1}^p \mu_k^m +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(2j+1)\,c_{2j+1}}{(-4)^j(2m-2j-1)}R^{2m-2j-1} + \frac{mc_{2m}}{(-4)^m} + o(R^{2m-n}),$$

откуда при $R \to \infty$ вытекает искомый результат.

§ 2. Равенство Парсеваля и основное уравнение

Пусть $i\lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — нули функции $e(\lambda, 0)$ занумерованные в порядке возрастания их модулей $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n)$, а m_k^{-1} — норма функции $e(i\lambda_k, x)$ в пространстве $L_2\,[0, \infty)$

Заметим, что согласно формуле (3.1.37)

$$m_k^{-2}=\int_0^\infty |e(i\lambda_k, x)|^2\,dx=-\frac{e'(i\lambda_k, 0)\,\dot e(i\lambda_k, 0)}{2i\lambda_k}. \tag{3.2.1}$$

Из результатов предыдущего параграфа следует, что функции

$$u(\lambda, x)=e(-\lambda, x)-S(\lambda)\,e(\lambda, x)\quad (\lambda\in(0, \infty)), \tag{3.2.2}$$

$$u(i\lambda_k, x)=m_k e(i\lambda_k, x)\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{3.2.3}$$

являются ограниченными решениями краевой задачи (3.1.1), (3.1.2). Докажем, что они образуют полный набор нормированных собственных функций этой задачи, т. е. что для любых функций $f(x)$, $g(x)$ из пространства $L_2\,[0, \infty)$ справедливо равенство Парсеваля

$$(f,\ g)=\sum_{k=1}^{n} u(i\lambda_k, f)\,\overline{u(i\lambda_k, g)}+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty u(\lambda, f)\,\overline{u(\lambda, g)}\,d\lambda, \tag{3.2.4}$$

где через (f, g) обозначено скалярное произведение в пространстве $L_2\,[0, \infty)$ и $u(\lambda, f)=\int_0^\infty f(x)\,u(\lambda, x)\,dx$.

Из оценки (3.1.6) следует, что оператор преобразования $\mathbf{I}+\mathbf{K}$ и ему сопряженный $\mathbf{I}+\mathbf{K}^*$ ограничены в пространстве $L_2\,[0, \infty)$. Поэтому, если $f(x)\in L_2\,[0, \infty)$, то функция $f^*(x)=(\mathbf{I}+\mathbf{K}^*)\,f$ тоже принадлежит этому пространству и согласно лемме 3.1.1

$$\int_0^\infty f(x)\,e(-\lambda, x)\,dx=\int_0^\infty f(x)\left[e^{-i\lambda x}+\int_x^\infty K(x, t)\,e^{-i\lambda t}dt\right]dx=$$

$$=\int_0^\infty\left[f(x)+\int_0^x f(\xi)\,K(\xi, x)\,d\xi\right]e^{-i\lambda x}dx=\int_x^\infty f^*(x)\,e^{-i\lambda x}dx,$$

т. е.

$$\int_0^\infty f(x)\,e(-\lambda, x)\,dx=\tilde f^*(\lambda),$$

где $\tilde f^*(\lambda)$ — обычное преобразование Фурье функции $f^*(x)$. Следовательно,

$$u(\lambda, f)=\tilde f^*(\lambda)-S(\lambda)\,\tilde f^*(-\lambda),\quad u(i\lambda_k, f)=m_k\int_0^\infty f^*(x)\,e^{-\lambda_k x}dx.$$

Подставим эти выражения в правую часть формулы (3.2.4), которую обозначим для краткости через $\mathcal{J}$. Проводя несложные преобразования и учитывая при этом, что $S(\lambda) = \overline{S(-\lambda)} = [S(-\lambda)]^{-1}$, получаем

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{\sum_{k=1}^n m_k^2 e^{-\lambda_k(x+y)}\right\} f^*(x)\,\overline{g^*(y)}\,dxdy +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(\lambda)\,\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}\,d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda)\,\tilde{f}^*(-\lambda)\,\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}\,d\lambda. \qquad (3.2.5)$$

Согласно равенству Парсеваля для обычных преобразований Фурье

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(\lambda)\,\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(y)\,\overline{g^*(y)}\,dy = (f^*, g^*),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(-\lambda)\,\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(-y)\,\overline{g^*(y)}\,dy = 0,$$

так как $f^*(y) = g^*(y) = 0$ при $y < 0$. Поэтому формулу (3.2.5) можно преобразовать к такому виду:

$$\mathcal{J} = (f^*, g^*) + \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{\sum_{k=1}^n m_k^2 e^{-\lambda_k(x+y)}\right\} f^*(x)\,\overline{g^*(y)}\,dxdy +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - S(\lambda))\,\tilde{f}^*(-\lambda)\,\overline{\tilde{g}^*(\lambda)}\,d\lambda,$$

или

$$\mathcal{J} = (f^*, g^*) + \int_0^\infty \int_0^\infty F(x+y)\,f^*(x)\,\overline{g^*(y)}\,dxdy, \qquad (3.2.6)$$

где существующая согласно лемме 4.1.7 функция

$$F(x) = \sum_{k=1}^n m_k^2 e^{-\lambda_k x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - S(\lambda))\,e^{i\lambda x} d\lambda \qquad (3.2.7)$$

вещественна, так как $S(\lambda) = \overline{S(-\lambda)}$. Определенный формулой $\mathbf{F}[f] = \int_0^\infty F(x+y)\,f(y)\,dy$ оператор $\mathbf{F}$ является, как легко видеть, ограниченным и самосопряженным в пространстве $L_2[0, \infty)$. Используя этот оператор, можно записать формулу (3.2.6) так:

$$\mathcal{J} = (\{\mathbf{I} + \mathbf{F}\}\,f^*, g^*),$$

откуда, вспоминая, что $f^* = (\mathbf{I} + K^*)\,f$, получаем

$$\mathcal{J} = (\{\mathbf{I} + \mathbf{F}\}\,\{\mathbf{I} + \mathbf{K}^*\}\,f,\ \{\mathbf{I} + \mathbf{K}^*\}\,g) =$$

$$= (\{\mathbf{I} + \mathbf{K}\}\,\{\mathbf{I} + \mathbf{F}\}\,\{\mathbf{I} + \mathbf{K}^*\}\,f,\ g).$$

Следовательно, для справедливости равенства Парсеваля (3.2.4) необходимо и достаточно, чтобы операторы **K**, **F** и **K*** были связаны тождеством

$$(\mathbf{I}+\mathbf{K})(\mathbf{I}+\mathbf{F})(\mathbf{I}+\mathbf{K}^*)=\mathbf{I}, \tag{3.2.8}$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{K}+\mathbf{K}^*+\mathbf{K}\mathbf{K}^*+\mathbf{F}+\mathbf{K}\mathbf{F}+\mathbf{F}\mathbf{K}^*+\mathbf{K}\mathbf{F}\mathbf{K}^*=0. \tag{3.2.8$'$}$$

Здесь слева стоит интегральный оператор с ядром

$$\Phi(x, y)=K(x, y)+K(y, x)+F(x+y)+$$
$$+\int_x^\infty K(x, t)F(t+y)\,dt+\int_y^\infty F(x+\xi)K(y, \xi)\,d\xi+$$
$$+\int_0^\infty K(x, \xi)K(y, \xi)\,d\xi+\int_y^\infty\int_x^\infty K(x, t)F(t+\xi)K(y, \xi)\,dt\,d\xi. \tag{3.2.9}$$

Так как $\Phi(x, y)=\Phi(y, x)$, то тождества (3.2.8), (3.2.8$'$) эквивалентны равенству $\Phi(x, y)=0$ при $y>x$.

Введем заданную на полуоси (x, ∞) функцию

$$\varphi_x(y)=K(x, y)+F(x+y)+\int_x^\infty K(x, t)F(y+t)\,dt.$$

Так как $K(y, x)=0$ при $y>x$, то из формулы (3.2.9) при $y>x$ следует

$$\Phi(x, y)=\varphi_x(y)+\int_y^\infty K(y, \xi)\varphi_x(\xi)\,d\xi.$$

Согласно замечанию к лемме 3.1.1 оператор $\mathbf{I}+\mathbf{K}$ имеет обратный. Поэтому тождество $\Phi(x, y)=0$ $(y>x)$, а вместе с ним и тождества (3.2.8), (3.2.8)$'$ эквивалентны равенству

$$\varphi_x(y)=F(x+y)+K(x, y)+\int_x^\infty K(x, t)F(y+t)\,dt=0$$

$(0\leqslant x<y<\infty)$.

Итак, для того чтобы выполнялось тождество (3.2.8), эквивалентное равенству Парсеваля (3.2.4), необходимо и достаточно, чтобы при каждом $x\in[0, \infty)$ ядро $K(x, y)$ оператора преобразования как функция переменной $y\in[x, \infty)$ удовлетворяло интегральному уравнению

$$F(x+y)+K(x, y)+\int_x^\infty K(x, t)F(y+t)\,dt=0, \tag{3.2.10}$$

в котором функция $F(x)$ определена формулой (3.2.7). Это интегральное уравнение назовем основным уравнением.

Для вывода основного уравнения используем полученное в лемме 4.1.5 равенство

$$-\frac{2i\lambda\omega(\lambda, x; \infty)}{e(\lambda, 0)} = e(-\lambda, x) - S(\lambda)\, e(\lambda, x),$$

где

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int\limits_x^\infty K(x, t)\, e^{i\lambda t} dt,$$

так что

$$-\frac{2i\lambda\omega(\lambda, x; \infty)}{e(\lambda, 0)} = e^{-i\lambda x} - e^{i\lambda x} + \{1 - S(\lambda)\} \Big\{e^{i\lambda x} +$$

$$+ \int\limits_x^\infty K(x, t)\, e^{i\lambda t} dt\Big\} + \int\limits_x^\infty K(x, t)\, e^{-i\lambda t} dt - \int\limits_x^\infty K(x, t)\, e^{i\lambda t} dt,$$

$$-2i\lambda\omega(\lambda, x; \infty)\left\{\frac{1}{e(\lambda, 0)} - 1\right\} + 2i\{\sin\lambda x - \lambda\omega(\lambda, x; \infty)\} =$$

$$= \{1 - S(\lambda)\}\Big\{e^{i\lambda x} + \int\limits_x^\infty K(x, t)\, e^{i\lambda t} dt\Big\} +$$

$$+ \int\limits_x^\infty K(x, \xi)\, e^{-i\lambda\xi} d\xi - \int\limits_{-\infty}^{-x} K(x, -\xi)\, e^{-i\lambda\xi} d\xi. \tag{3.2.11}$$

Как было показано в лемме 3.1.7, $1 - S(\lambda)$ является преобразованием Фурье функции

$$F_S(y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty (1 - S(\lambda))\, e^{i\lambda y} d\lambda. \tag{3.2.12}$$

В силу известных теорем о свертке заключаем, что правая (а значит, и левая) часть тождества (3.2.11) является преобразованием Фурье такой функции:

$$F_S(x + y) + \int\limits_{-\infty}^\infty F_S(y - t)\, K(x, -t)\, dt + K(x, y) - K(x, -y). \tag{3.2.13}$$

Следовательно, интеграл от произведения левой части тождества (3.2.11) и $\frac{1}{2\pi} e^{i\lambda y}$, взятый по всей оси $-\infty < \lambda < \infty$, должен быть равен (3.2.13). Покажем, что при $y > x$ этот интеграл сходится и может быть вычислен с помощью контурного интегрирования. Действительно, согласно лемме 3.1.6 первое слагаемое в этом интеграле

$$-\frac{2i\lambda\omega(\lambda, x; \infty)}{2\pi}\left\{\frac{1}{e(\lambda, 0)}-1\right\}$$

регулярно в верхней полуплоскости всюду, кроме конечного числа точек $i\lambda_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), являющихся простыми нулями функции $e(\lambda, 0)$, непрерывно при вещественных $\lambda \neq 0$ и ограничено вблизи $\lambda = 0$ ($\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$). Так как в лемме 3.1.4 было доказано, что функция $\lambda\,\omega(\lambda, x; \infty)\,e^{i\lambda x}$ ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, а согласно лемме 3.1.3 в этой же полуплоскости функция $\frac{1}{e(\lambda, 0)}-1$ равномерно стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$, то, воспользовавшись леммой Жордана, получим при $y > x$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2i\lambda\omega(\lambda, x; \infty)\,e^{i\lambda y}\left\{\frac{1}{e(\lambda, 0)}-1\right\}d\lambda =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2i\lambda_k\omega(i\lambda_k; x; \infty)\,e^{-\lambda_k y}}{\dot e(i\lambda_k, 0)}. \tag{3.2.14}$$

Используя формулы (3.2.1) и (3.1.33), можно преобразовать правую часть этого равенства к такому виду:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2i\lambda_k\omega(i\lambda_k, x: \infty)\,e^{-\lambda_k y}}{\dot e(i\lambda_k, 0)} = -\sum_{k=1}^{n} m_k^2 e(i\lambda_k, x)\,e^{-\lambda_k y} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} m_k^2\left\{e^{-\lambda_k(x+y)} + \int_x^{\infty} K(x, t)\,e^{-\lambda_k(t+y)}dt\right\}. \tag{3.2.15}$$

Второе слагаемое, $2i\,\{\sin\lambda x - \lambda\omega(\lambda, x; \infty)\}$, является целой функцией от λ, а в силу оценки (3.1.24) и леммы Жордана

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2i\,\{\sin\lambda x - \lambda\omega(\lambda, x; \infty)\}\,e^{i\lambda y}d\lambda = 0$$

при $y > x$.

Итак, при $y > x$ интеграл от произведения левой части равенства (3.2.11) и $\frac{1}{2\pi}e^{i\lambda y}$ существует и равен (3.2.15). Поэтому при $y > x$

$$-\sum_{k=1}^{n} m_k^2\left\{e^{-\lambda_k(x+y)} + \int_x^{\infty} K(x, t)\,e^{-\lambda_k(t+y)}dt\right\} =$$

$$= F_S(x+y) + \int_{-\infty}^{\infty} F_S(y+t)\,K(x, -t)\,dt + K(x, y) - K(x, -y)$$

и, так как $K(x, y) = 0$ при $x > y$,

$$-\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \left\{ e^{-\lambda_k(x+y)} + \int_x^\infty K(x, t)\, e^{-\lambda_k(t+y)} dt \right\} =$$

$$= F_S(x+y) + \int_x^\infty K(x, t)\, F_S(y+t)\, dt + K(x, y),$$

откуда окончательно получаем

$$F(x+y) + K(x, y) + \int_x^\infty K(x, t)\, F(t+y)\, dt = 0 \quad (x < y < \infty),$$

где

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k x} + F_S(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - S(\lambda))\, e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.2.1. *При каждом $x \geqslant 0$ ядро $K(x, y)$ оператора преобразования удовлетворяет основному уравнению*

$$F(x+y) + K(x, y) + \int_x^\infty K(x, t)\, F(t+y)\, dt = 0 \quad (x < y < \infty),$$

где

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - S(\lambda))\, e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Из основного уравнения вытекает справедливость тождества $(\mathbf{I} + \mathbf{K})(\mathbf{I} + \mathbf{F})(\mathbf{I} + \mathbf{K}^*) = \mathbf{I}$, *из которого в свою очередь следует равенство Парсеваля (3.2.4).*

Рассмотрим действующий в пространстве $L_2[a, \infty)$ оператор

$$\mathbf{F}_a f = \int_a^\infty F(y+t)\, f(t)\, dt.$$

Из только что доказанной теоремы вытекает такое следствие.

Следствие. *При каждом $a \geqslant 0$ оператор $\mathbf{I} + F_a$ имеет обратный, причем*

$$(\mathbf{I} + \mathbf{F}_a)^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_a^*)(\mathbf{I} + \mathbf{K}_a), \tag{3.2.16}$$

где операторы $\mathbf{K}_a$ *и* $\mathbf{K}_a^*$ *определены формулами*

$$\mathbf{K}_a f = \int_y^\infty K(y, t)\,dt, \quad \mathbf{K}_a^* f = \int_a^y K(t, y) f(t)\,dt. \tag{3.2.16'}$$

Действительно, пусть $f(y) \in L_2[a, \infty)$ и

$$\hat{f}(y) = \begin{cases} f(y), & a \leqslant y < \infty, \\ 0, & 0 \leqslant y < a. \end{cases}$$

Согласно тождеству (3.2.8)

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K})(\mathbf{I} + \mathbf{F})(\mathbf{I} + \mathbf{K}^*)\hat{f} = \hat{f},$$

а так как

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K}^*)\hat{f} = \begin{cases} (\mathbf{I} + \mathbf{K}_a^*) f, & a \leqslant y < \infty, \\ 0, & 0 \leqslant y < a, \end{cases}$$

то при $y \in [a, \infty)$

$$(\mathbf{I} + \mathbf{F})(\mathbf{I} + \mathbf{K}^*)\hat{f} = (\mathbf{I} + \mathbf{F}_a)(\mathbf{I} + \mathbf{K}_a^*) f$$

и, следовательно,

$$\hat{f} = (\mathbf{I} + \mathbf{K})(\mathbf{I} + \mathbf{F})(\mathbf{I} + \mathbf{K}^*)\hat{f} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_a)(\mathbf{I} + \mathbf{F}_a)(\mathbf{I} + \mathbf{K}_a^*) f.$$

Поэтому $(\mathbf{I} + \mathbf{K}_a)(\mathbf{I} + \mathbf{F}_a)(\mathbf{I} + \mathbf{K}_a^*) = \mathbf{I}$, что эквивалентно тождеству (3.2.16). Заметим еще, что оператор, стоящий в правой части этого тождества, и ему обратный ограничены в каждом пространстве $L_i[a, \infty)$ $(i = 1;\ 2, \infty)$. Поэтому тождество (3.2.16) справедливо в каждом пространстве $L_i\ [a, \infty)$ $(i = 1, 2, \infty;\ a \geqslant 0)$.

Воспользуемся теперь основным уравнением для уточнения свойств функции $F(x)$. Заметим прежде всего, что непрерывность ядра $K(x, y)$ влечет за собой непрерывность этой функции при всех $x \in [0, \infty)$ и, следовательно, справедливость основного уравнения при $y = x$. Полагая в основном уравнении $y = x$ и делая затем подстановку $t + x = 2\xi$, получаем

$$F(2x) + K(x, x) + 2\int_x^\infty K(x, 2\xi - x) F(2\xi)\,d\xi = 0.$$

Из этого равенства и оценки (3.1.6) следует

$$|F(2x) + K(x, x)| \leqslant e^{\sigma_1(x)} \int_x^\infty \sigma(\xi) e^{-\sigma_1(\xi)} |F(2\xi)|\,d\xi. \tag{3.2.17}$$

Отсюда для функции

$$z(x) = \int_x^\infty \sigma(\xi) e^{-\sigma_1(\xi)} |F(2\xi)|\,d\xi \tag{3.2.18}$$

вытекает неравенство

$$-z'(x) \leqslant \sigma(x) e^{-\sigma_1(x)} |K(x, x)| + \sigma(x) z(x),$$

которое можно преобразовать к такому виду:

$$-\{z(x) e^{-\sigma_1(x)}\}' \leqslant \sigma(x) |K(x, x)| e^{-2\sigma_1(x)} \leqslant \frac{1}{2} \sigma^2(x) e^{-2\sigma_1(x)}.$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$z(x) e^{-\sigma_1(x)} \leqslant \frac{1}{2} \int_x^\infty \sigma^2(t) e^{-2\sigma_1(t)} dt \leqslant \frac{\sigma(x)}{4} \{1 - e^{-2\sigma_1(x)}\},$$

т. е.

$$z(x) \leqslant \frac{1}{2} \sigma(x) \operatorname{sh} \sigma_1(x),$$

откуда в силу (3.2.17) и (3.2.18)

$$|F(2x) + K(x, x)| \leqslant \frac{1}{2} \sigma(x) e^{\sigma_1(x)} \operatorname{sh} \sigma_1(x) \tag{3.2.19}$$

и тем более

$$|F(2x)| \leqslant \frac{1}{2} \sigma(x) \left\{ \frac{e^{2\sigma_1(x)} - 1}{2} + 1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sigma(x) e^{\sigma_1(x)} \operatorname{ch} \sigma_1(x). \tag{3.2.20}$$

Далее, из дифференцируемости функции $K(x, y)$ и оценки (3.1.15) для $|K'_x(x, y)|$ следует, что при $x > 0$ существует производная $F'(x)$, и основное уравнение можно дифференцировать по x. Поэтому

$$0 = F'(x + y) + K'_x(x, y) - K(x, x) F(x + y) +$$

$$+ \int_x^\infty K'_x(x, t) F(t + y) dt,$$

откуда, полагая $y = x$ и замечая, что согласно (3.1.12)

$$K'_x(x, y)|_{y=x} = -\frac{q(x)}{4} - \frac{1}{2} \int_x^\infty q(t) K(t, t) dt =$$

$$= -\frac{1}{4} q(x) - \frac{1}{8} \left\{ \int_x^\infty q(t) dt \right\}^2,$$

получаем

$$F'(2x) - \frac{q(x)}{4} - \frac{1}{8} \left\{ \int_x^\infty q(t) dt \right\}^2 - K(x, x) F(2x) +$$

$$+ \int_x^\infty K'_x(x, t) F(t + x) dt = 0.$$

Для рационального использования ранее полученных оценок преобразуем это равенство так:

$$F'(2x)-\frac{q(x)}{4}-\frac{1}{8}\left\{\int_x^\infty q(t)\,dt\right\}^2+K^2(x,x)+$$

$$+\frac{1}{4}\int_x^\infty q\left(\frac{x+t}{2}\right)K\left(\frac{x+t}{2},\ \frac{x+t}{2}\right)dt=$$

$$=K(x,x)\{F(2x)+K(x,x)\}-$$

$$-\int_x^\infty\left\{K'_x(x,t)+\frac{1}{4}q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\}F(t+x)\,dt+$$

$$+\frac{1}{4}\int_x^\infty q\left(\frac{x+t}{2}\right)\left\{F(t+x)+K\left(\frac{x+t}{2},\ \frac{x+t}{2}\right)\right\}dt.$$

Из этого равенства, формулы (3.1.6) и оценок (3.2.19), (3.1.15) следует, что

$$\left|F'(2x)-\frac{q(x)}{4}+\frac{1}{4}\left\{\int_x^\infty q(t)\,dt\right\}^2\right|\leqslant\frac{\sigma^2(x)}{4}e^{\sigma_1(x)}\operatorname{sh}\sigma_1(x)+$$

$$+\frac{\sigma^2(x)}{4}e^{\sigma_1(x)}\int_x^\infty\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\operatorname{ch}\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)dt+$$

$$+\frac{\sigma(x)}{8}e^{\sigma_1(x)}\operatorname{sh}\sigma_1(x)\int_x^\infty\left|q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|dt\leqslant\sigma^2(x)\,e^{\sigma_1(x)}\operatorname{sh}\sigma_1(x),$$

т. е.

$$\left|F'(2x)-\frac{q(x)}{4}+\frac{1}{4}\left\{\int_x^\infty q(t)\,dt\right\}^2\right|\leqslant\sigma^2(x)\,e^{\sigma_1(x)}\operatorname{sh}\sigma_1(x). \qquad (3.2.21)$$

Так как функции $x\,|q(x)|$ и $\sigma(x)$ суммируемы на полуоси $[0,\infty)$, а $\sup\limits_{0<x<\infty} x\,\sigma(x)<\infty$, то из неравенства (3.2.21) вытекает, что функция $x\,|F'(x)|$ тоже суммируема на полуоси $[0,\infty)$, а вместе с ней этим же свойством обладает, очевидно, и функция $F_S(x)$. Неравенства (3.2.19), (3.2.21), указывающие на тесную связь между функциями $4F'(2x)$ и $q(x)$, интересны и сами по себе. Но в дальнейшем нам нужен будет только более грубый результат: функция $F_S(x)$ дифференцируема при положительных x и ее производная $F'_S(x)$ удовлетворяет тому же условию $\int_0^\infty x\,|F'_S(x)|\,dx<\infty$, что и $q(x)$.

Докажем еще, что функция $S(\lambda)$ непрерывна при всех вещественных значениях λ и изменение ее логарифма связано с числом n отрицательных собственных значений задачи (3.1.1), (3.1.2) равенством

$$n = \frac{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)}{2\pi i} - \frac{1 - S(0)}{4}. \qquad (3.3.22)$$

Непрерывность функции $S(\lambda) = \frac{e(-\lambda, 0)}{e(\lambda, 0)}$ при всех вещественных $\lambda \neq 0$ непосредственно следует из леммы (3.1.3). Ясно также, что в случае, когда $e(0, 0) \neq 0$, функция $S(\lambda)$ непрерывна и в нуле, причем $S(0) = 1$. Поэтому нам нужно рассмотреть только случай, когда

$$e(0, 0) = 1 + \int_0^\infty K(0, t)\, dt = 0. \qquad (3.2.23)$$

Полагая в основном уравнении $x = 0$ и интегрируя затем его по y от z до бесконечности, получаем

$$\int_z^\infty F(y)\, dy + \int_z^\infty K(0, y)\, dy + \int_0^\infty K(0, t) \int_{t+z}^\infty F(\xi)\, d\xi dt = 0,$$

откуда после интегрирования по частям следует

$$\left\{1 + \int_0^\infty K(0, y)\, dy\right\} \int_z^\infty F(y)\, dy + \int_z^\infty K(0, y)\, dy -$$

$$- \int_0^\infty F(t+z) \int_t^\infty K(0, \xi)\, d\xi dt = 0.$$

Поэтому, если выполнено равенство (3.2.23), то функция

$$K_1(z) = \int_z^\infty K(0, y)\, dy \qquad (3.2.24)$$

является ограниченным решением такого уравнения:

$$K_1(z) - \int_0^\infty K_1(t) F(t+z)\, dt = 0 \quad (0 \leqslant z < \infty).$$

Но любое ограниченное решение этого уравнения автоматически суммируемо на полуоси $[0, \infty)$, так как, переписав его в виде

$$K_1(z) - \int_N^\infty K_1(t) F(t+z)\, dt = f_N(z) \quad (N \leqslant z < \infty), \qquad (3.2.25)$$

где $f_N(z) = \int\limits_0^N K_1(t) F(t+z)\,dt$, мы можем подобрать N настолько большим, чтобы уравнение (3.2.25) можно было решить методом последовательных приближений, которые будут сходиться к решению в метриках пространств $L_1\,[N, \infty)$ и $L_\infty\,[N, \infty)$ одновременно, так что $K_1(z) \in L_1\,[N, \infty)$. Поэтому в рассматриваемом случае

$$e(\lambda, 0) = 1 + \int\limits_0^\infty K(0, t)\, e^{i\lambda t} dt = \left\{1 + \int\limits_0^\infty K(0, t)\,dt\right\} +$$

$$+ i\lambda \int\limits_0^\infty K_1(t)\, e^{i\lambda t} dt = i\lambda \tilde{K}_1(-\lambda), \tag{3.2.26}$$

$$S(\lambda) = -\frac{\tilde{K}_1(\lambda)}{\tilde{K}_1(-\lambda)}, \tag{3.2.27}$$

где $\tilde{K}_1(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $K_1(t)$, равной нулю при $t < 0$ и суммируемой на полуоси $[0, \infty)$. Согласно (3.2.26) и тождеству (3.1.31) $2\omega(\lambda, x; \infty) = \tilde{K}_1(-\lambda)\{e(-\lambda, x) - S(\lambda) \times$ $\times\, e(\lambda, x)\}$, откуда видно, что $\tilde{K}_1(0) \neq 0$ и, следовательно, функция $S(\lambda)$ непрерывна в нуле, причем $S(0) = -1$.

Для доказательства формулы (3.2.22) применим принцип аргумента к функции $e(\lambda, 0)$. Эта функция регулярна в верхней полуплоскости, непрерывна в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ и равномерно в ней стремится к единице при $|\lambda| \to \infty$. Кроме того, $e(\lambda, 0) = \overline{e(-\lambda, 0)}$ при всех вещественных λ. Поэтому изменение ее аргумента $\eta(\lambda)$ при движении из $-\infty$ в $+\infty$ вдоль вещественной оси с обходом нуля в верхней полуплоскости по полуокружности достаточно малого радиуса ε равно числу ее нулей, лежащих в верхней полуплоскости, умноженному на 2π:

$$2\pi n = \{\eta(-\varepsilon) - \eta(-\infty)\} + \{\eta(+\varepsilon) - \eta(-\varepsilon)\} +$$
$$+ \{\eta(+\infty) - \eta(+\varepsilon)\} = 2\{\eta(+\infty) - \eta(+\varepsilon)\} +$$
$$+ \{\eta(+\varepsilon) - \eta(-\varepsilon)\}.$$

Если $e(0, 0) \neq 0$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\{\eta(+\varepsilon) - \eta(-\varepsilon)\} = 0$. Если же $e(0, 0) = 0$, то согласно (3.2.26) $e(\lambda, 0) = i\lambda\tilde{K}_1(-\lambda)$, где $\tilde{K}_1(0) \neq 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\{\eta(+\varepsilon) - \eta(-\varepsilon)\} = -\pi$. Поэтому

$$\frac{2\{\eta(+\infty) - \eta(+0)\}}{2\pi} = \begin{cases} n, & \text{если } e(0, 0) \neq 0, \\ n + \frac{1}{2}, & \text{если } e(0, 0) = 0. \end{cases}$$

С другой стороны,

$$S(0)=\begin{cases}1, & \text{если } e(0,0)\neq 0,\\ -1, & \text{если } e(0,0)=0,\end{cases}$$

и так как по формуле (3.1.32)

$$\ln S(\lambda)=-2i\arg e(\lambda,0)=-2i\eta(\lambda),$$

то

$$\frac{\ln S(+0)-\ln S(+\infty)}{2\pi i}=n+\frac{1-S(0)}{4},$$

что и требовалось доказать.

Задачи

1. Доказать, что верно следующее усиление леммы 3.1.7: функция $F_S(x)$, имеющая своим преобразованием Фурье $1-S(\lambda)$, суммируема на всей вещественной оси.

Указание. Поскольку

$$1-S(\lambda)=\frac{\tilde{k}(-\lambda)-\tilde{k}(\lambda)}{1+\tilde{k}(-\lambda)},\quad \tilde{k}(\lambda)=\int_0^\infty K(0,t)\,e^{-i\lambda t}dt$$

и $1+\tilde{k}(-\lambda)=e(\lambda,0)\neq 0$ при $\lambda\neq 0$, в случае $1+\tilde{k}(0)\neq 0$ сформулированный результат непосредственно вытекает из теоремы Винера — Леви. При $1+\tilde{k}(0)=0$ можно использовать формулу (3.2.27) и вытекающее из нее тождество

$$1-S(\lambda)=(1-S(\lambda))\,\tilde{h}(\lambda N^{-1})+(1-S(\lambda))\,(1-\tilde{h}(\lambda N^{-1}))=$$

$$=\tilde{h}(\lambda N^{-1})+\frac{\tilde{K}_1(\lambda)}{\tilde{K}_1(-\lambda)}\,\tilde{h}(\lambda N^{-1})+\frac{\tilde{k}(-\lambda)-\tilde{k}(\lambda)}{1+k(-\tilde{\lambda})}\,(1-\tilde{h}(\lambda N^{-1}))=$$

$$=\tilde{h}(\lambda N^{-1})+\frac{\tilde{K}_1(\lambda)\,\overline{\tilde{K}_1(-\lambda)}\,\tilde{h}(\lambda N^{-1})}{1-\{1-\tilde{K}_1(-\lambda)\,\overline{\tilde{K}_1(-\lambda)}\}\,\tilde{h}\left(\dfrac{\lambda N^{-1}}{2}\right)}+$$

$$+\frac{\{\tilde{k}(-\lambda)-\tilde{k}(\lambda)\}\,\{1-\tilde{h}(\lambda N^{-1})\}}{1+\{1-\tilde{h}(2\lambda N^{-1})\}\,\tilde{k}(-\lambda)},$$

где

$$\tilde{h}(\lambda)=\begin{cases}1, & |\lambda|\leqslant 1,\\ 2-|\lambda|, & 1\leqslant|\lambda|\leqslant 2,\\ 0, & |\lambda|\geqslant 2.\end{cases}$$

Поскольку

$$1-\{1-\tilde{K}_1(-\lambda)\overline{\tilde{\tilde{K}}_1(-\lambda)}\}\,\tilde{h}\left(\frac{\lambda N^{-1}}{2}\right)>0, \quad -\infty<\lambda<\infty,$$

и при достаточно большом N

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty}|\tilde{\tilde{k}}(-\lambda)\{1-\tilde{h}(2\lambda N^{-1})\}|<1,$$

искомый результат снова вытекает из теоремы Винера — Леви.

2. Пусть вещественная функция $q(x)$ удовлетворяет условию (3.1.3) и $h(x)$ — произвольно взятое вещественное решение уравнения $y''-q(x)y=0$. Распространить результаты предыдущих параграфов на краевую задачу Штурма — Лиувилля

$$-y''+q(x)\,y=\lambda^2 y \quad (0<x<\infty)$$

с краевым условием

$$\lim_{x\to 0} W\{y(x),\ h(x)\}=\lim_{x\to 0}\{y'(x)\,h(x)-y(x)\,h'(x)\}=0,$$

которое приводится к обычному виду

$$y'(0)-y(0)\,h=0 \quad (h=h'(0)\{h(0)\}^{-1}),$$

когда функция $q(x)$ интегрируема в окрестности нуля.

3. Распространить результаты предыдущих параграфов на краевую задачу Штурма — Лиувилля

$$-y''+q(x)\,y=\lambda^2 y, \quad y(0)=0 \quad (0<x<\infty),$$

в которой вещественная функция $q(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 x\left|q(x)-\frac{l_0(l_0+1)}{x^2}\right|dx+\int_1^\infty x\left|q(x)-\frac{l_\infty(l_\infty+1)}{x^2}\right|dx<\infty,$$

где l_0 и l_∞ — целые положительные числа. Доказать, в частности, что формула (3.2.22) в данном случае заменяется такой:

$$n=\frac{\ln S(+0)-\ln S(+\infty)}{2\pi i}+\frac{l_\infty-l_0}{2}.$$

Указание. В последних двух задачах целесообразно использовать операторы преобразования типа (2.3.25), (2.3.26) (см. гл. 2, § 3, задачи 4—6), чтобы свести все вопросы к исследованной краевой задаче (3.1.1), (3.1.2) с функцией $q(x)$, удовлетворяющей условию (3.1.3).

4. Рассмотрим уравнение Штурма — Лиувилля

$$-y''+q(x)\,y=\lambda^2 y \quad (0<x<\infty)$$

с комплекснозначной функцией $q(x)$, удовлетворяющей условию (3.1.3). Пусть $\mathbf{I}+\mathbf{K}$ — оператор преобразования, переводящий $e^{i\lambda x}$ в $e(\lambda, x)$, $\mathbf{I}+\mathbf{L}$ — обратный ему оператор, $\mathbf{K}^+$ и $\mathbf{L}^+$ — операторы, союзные $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{K}^+f=\int_0^x K(t,x)\,f(t)\,dt, \quad \mathbf{L}^+f=\int_0^x L(t,x)\,f(t)\,dt.$$

Определим функцию $F(x)$ равенством

$$F(x)=L(0,x)+\int_x^\infty L(x,t)\,L(0,t)\,dt \quad (0<x<\infty)$$

и обозначим через $F(\lambda)$ ее преобразование Фурье:

$$\tilde{F}(\lambda) = \int_0^\infty F(x)\, e^{-i\lambda x} dx.$$

Доказать тождество

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K})(\mathbf{I} + \mathbf{F})(\mathbf{I} + \mathbf{K}^+) = \mathbf{I} \qquad \left(\mathbf{F}f = \int_0^\infty F(x+t) f(t)\, dt\right)$$

и установить, что

$$x_+(\lambda) = e(-\lambda, 0) + \tilde{F}(\lambda)\, e(\lambda, 0) - 1$$

есть преобразование Фурье некоторой функции $x(t) \in L_1(-\infty, \infty)$, равной нулю при $t > 0$:

$$x_+(\lambda) = \int_{-\infty}^0 x(t)\, e^{-i\lambda t} dt.$$

Указание. Воспользоваться результатами задачи 7 § 1.

5. Обозначим через $Q(\lambda)$ произвольную измеримую и ограниченную на вещественной оси функцию, удовлетворяющую условию $Q(\lambda)\, Q(-\lambda) = 1$. Пусть

$$u(\lambda, x) = e(-\lambda, x) - Q(\lambda)\, e(\lambda, x),$$

$$u(\lambda, f) = \int_0^\infty f(x)\, u(\lambda, x)\, dx, \quad e(\lambda, f) = \int_0^\infty f(x)\, e(\lambda, x)\, dx.$$

Доказать, что для функций $f(x)$, $g(x)$ из пространства $L_2[0, \infty)$ справедливы равенства

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \{e(-\lambda, f) + \tilde{F}(\lambda)\, e(\lambda, f)\}\, e(\lambda, g)\, d\lambda,$$

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u(\lambda, f)\, u(-\lambda, g)\, d\lambda -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \{Q(\lambda) + \tilde{F}(\lambda)\}\, e(\lambda, f)\, e(\lambda, g)\, d\lambda.$$

Заметим, что если функция $e(\lambda, 0)$ отлична от нуля при всех вещественных значениях λ, то из последних равенств при $Q(\lambda) = e(-\lambda, 0)\{e(\lambda, 0)\}^{-1}$ вытекает, что

$$\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u(\lambda, f)\, u(-\lambda, g)\, d\lambda -$$

$$-i \sum_{\operatorname{Im} \lambda > 0} \operatorname{Res} \left\{ \frac{x_+(\lambda) + 1}{e(\lambda, 0)}\, e(\lambda, f)\, e(\lambda, g) \right\}.$$

6. Обобщить результаты и задачи двух последних параграфов на операторные уравнения Штурма — Лиувилля и Дирака. Рассмотреть отдельно случай, когда пространство H конечномерно.

§ 3. Обратная задача квантовой теории рассеяния

В классической квантовой механике стационарное состояние системы, состоящей из двух частиц с массами m_1, m_2 и энергией $\mathscr{E}$, описывается Ψ-функцией, удовлетворяющей следующему уравнению Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta\Psi + V(x)\Psi = \mathscr{E}\Psi, \tag{3.3.1}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, $M = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $V(x)$ — потенциал взаимодействия, $x = |\mathbf{x}|$ — расстояние между частицами. Так как потенциал $V(x)$ зависит только от $|\mathbf{x}|$, то в этом уравнении можно разделить переменные, положив

$$\Psi(\mathbf{x}) = x^{-1} u_l(\mathscr{E}, x)\, Y_l^m(\theta, \varphi),$$

где $Y_l^m(\theta, \varphi)$ — сферические функции. При этом функция $u_l(\mathscr{E}, x)$ должна удовлетворять уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\{u_l'' - l(l+1)x^{-2}u_l\} + V(x)u_l = \mathscr{E}u_l$$

и краевому условию $u_l(\mathscr{E}, 0) = 0$. Введя для краткости обозначения

$$q(x) = \frac{2M}{\hbar^2}V(x), \quad \lambda^2 = \frac{2M\mathscr{E}}{\hbar^2}, \quad u_l(\lambda, x) = u_l(\mathscr{E}, x), \tag{3.3.2}$$

приходим к такой краевой задаче:

$$-u_l'' + q(x)u_l + l(l+1)x^{-2}u_l = \lambda^2 u_l \quad (0 < x < \infty), \tag{3.3.3}$$

$$u_l(\lambda, 0) = 0. \tag{3.3.4}$$

Ограниченные на бесконечности решения этой краевой задачи называются радиальными волновыми функциями.

Будем в дальнейшем считать, что потенциал $V(x)$ удовлетворяет условию (3.1.3). Из результатов предыдущих параграфов следует, что в этом случае краевая задача (3.3.3), (3.3.4) с $l = 0$ имеет ограниченные решения при $\lambda^2 > 0$ и $\lambda = i\lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, причем эти решения удовлетворяют при $x \to \infty$ асимптотическим формулам

$$u_0(\lambda, x) = e^{-i\lambda x} - S(\lambda)e^{i\lambda x} + o(1) \quad (0 < \lambda^2 < \infty),$$

$$u_0(i\lambda_k, x) = m_k e^{-\lambda_k x}(1 + o(1)) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, набор величин $\{S(\lambda)\ (-\infty<\lambda<\infty);\ \lambda_k,\ m_k\ (k=1, 2, \ldots, n)\}$ полностью определяет поведение на бесконечности всех радиальных волновых функций $u_0(\lambda, x)$. Аналогично обстоит дело и при других значениях l.

Для полного описания рассматриваемой системы достаточно знать поведение на бесконечности всех радиальных волновых функций, так как оно позволяет описать все наблюдаемые эффекты. Естественно поэтому возникает вопрос о том, определяет ли поведение Ψ-функций на бесконечности потенциал $V(x)$. Иными словами, можно ли восстановить потенциал $V(x)$ по экспериментальным данным.

Задача о восстановлении потенциала по экспериментальным данным называется обратной задачей квантовой теории рассеяния, так как основную экспериментальную информацию (но не всю) получают в опытах по рассеянию частиц (правильнее было бы называть ее задачей о восстановлении потенциала по асимптотическому поведению всех Ψ-функций на бесконечности). В соответствии с этой терминологией набор величин $\{S(\lambda)\ (-\infty<\lambda<\infty);\ \lambda_k,\ m_k\ (k=1, 2, \ldots, n)\}$, определяющий поведение на бесконечности радиальных волновых функций $u_0(\lambda, x)$, будем называть данными рассеяния краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) (т. е. задачи (3.3.3), (3.3.4) с $l=0$).

По данным рассеяния, потенциал $V(x)$ восстанавливается однозначно. Это непосредственно следует из теоремы 3.2.1. Действительно, зная данные рассеяния, можно построить по формуле (3.2.7) функцию $F(x)$ и написать основное уравнение (3.2.10). Согласно следствию теоремы 3.2.1 основное уравнение имеет единственное решение при каждом $x\geqslant 0$. Решив его, найдем ядро $K(x, y)$ оператора преобразования, а значит, и потенциал $q(x) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}K(x, x)$.

Остается выяснить, какими свойствами должен обладать набор величин $\{S(\lambda)\ (-\infty<\lambda<\infty);\ \lambda_k,\ m_k\ (k=1, 2, \ldots, n)\}$ для того, чтобы он был данными рассеяния некоторой краевой задачи вида (3.1.1), (3.1.2) с потенциалом, удовлетворяющим условию (3.1.3). Из результатов предыдущего параграфа следует, что данные рассеяния всегда удовлетворяют таким условиям.

I. *Функция* $S(\lambda)$ *непрерывна на всей оси,* $S(\lambda)=\overline{S(-\lambda)}=[S(-\lambda)]^{-1}$, *а* $1-S(\lambda)$ *стремится к нулю при* $|\lambda|\to\infty$ *и является преобразованием Фурье функции*

$$F_S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1-S(\lambda))\,e^{i\lambda x}d\lambda,$$

представимой в виде суммы двух функций, из которых одна принадлежит пространству $L_1(-\infty, \infty)$, *а другая ограничена и при-*

надлежит пространству $L_2(-\infty, \infty)$. *На положительной полуоси функция* $F_S(x)$ *имеет производную* $F'_S(x)$, *удовлетворяющую условию* $\int\limits_0^\infty x\,|\,F'_S(x)\,|\,dx < \infty$.

II. *Изменение аргумента функции* $S(\lambda)$ *связано с числом* n *отрицательных собственных значений краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) формулой*

$$n = \frac{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)}{2\pi i} - \frac{1 - S(0)}{4}.$$

Докажем, что эти условия являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы рассматриваемый набор величин $\{S(\lambda);\ \lambda_k,\ m_k\}$ был данными рассеяния некоторой краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) с потенциалом, удовлетворяющим условию (3.1.3). Предпошлем доказательству этого основного результата несколько вспомогательных лемм.

Пусть функция $S(\lambda)$ удовлетворяет условию I и

$$F_S(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1 - S(\lambda))\,e^{i\lambda x}d\lambda, \tag{3.3.5}$$

$$F(x) = F_S(x) + \sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k x}. \tag{3.3.6}$$

Составим по функции $F(x)$ основное уравнение

$$F(x+y) + K(x, y) + \int\limits_x^\infty K(x, t)\,F(t+y)\,dt = 0, \tag{3.3.7}$$

которое удобнее переписать в таком виде:

$$F(2x+y) + K(x, x+y) + \int\limits_0^\infty K(x, x+t)\,F(t+y+2x)\,dt = 0, \tag{3.3.7$'$}$$

и будем искать его решение $K(x, x+y)$ при каждом $x \geqslant 0$ в одном и том же пространстве $L_1[0, \infty)$.

Рассмотрим действующие в пространствах $L_i[0, \infty)$ $(i = 1, 2)$ и $L_2(-\infty, 0]$ операторы $\mathbf{F}^+_{S,a}$ и $\mathbf{F}^-_S$:

$$\mathbf{F}^+_{S,a}f = \int\limits_0^\infty F_S(t+y+2a)\,f(t)\,dt, \tag{3.3.8}$$

$$\mathbf{F}^-_S f = \int\limits_{-\infty}^0 F_S(y+t)\,f(t)\,dt, \tag{3.3.9}$$

а также оператор

$$\mathrm{F}_a^+ f = \int_0^\infty F(t+y+2a) f(t)\,dt, \tag{3.3.10}$$

фигурирующий в основном уравнении.

Лемма 3.3.1. *Операторы* $\mathrm{F}_{S,a}^+$ *и* F_a^+ *вполне непрерывны в каждом из пространств* $L_i\,[0, \infty)$ $(i = 1, 2)$ *при любом* $a \geqslant 0$. *Оператор* F_S^- *вполне непрерывен в пространстве* $L_2\,(-\infty, 0]$.

Доказательство. Из условия I следует, что функция $F_S(y)$ суммируема на положительной полуоси. Поэтому, если $f(y) \in L_1\,[0, \infty)$ и $\| f \| = 1$, то для функции $g(y) = \mathrm{F}_{S,a}^+ f$ справедливы следующие оценки:

$$g\| = \int_0^\infty dy \left| \int_0^\infty f(t) F_S(t+y+2a)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty | f(t) | \int_0^\infty | F_S(t+y+2a | \,dydt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty | f(t) | \int_{2a}^\infty | F_S(u) | \,dudt \leqslant \int_0^\infty | F_S(u) | \,du,$$

$$\int_0^\infty | g(y+h) - g(y) | \,dy =$$

$$= \int_0^\infty dy \left| \int_0^\infty f(t) \{F_S(t+y+h+2a) - F_S(t+y+2a)\}\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty | f(t) | \int_{2a}^\infty | F_S(u+h) - F_S(u) | \,dudt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty | F_S(u+h) - F_S(u) | \,du,$$

$$\int_N^\infty | g(y) | \,dy = \int_N^\infty dy \left| \int_0^\infty f(t) F_S(t+y+2a)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty | f(t) | \int_{2a+N}^\infty | F_S(u) | \,dudt \leqslant \int_N^\infty | F_S(u) | \,du.$$

Так как

$$\lim_{h\to 0} \int_0^\infty | F_S(u+h) - F_S(u) | \,du = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_N^\infty | F_S(u) | \,du = 0,$$

то из этих оценок вытекает компактность множества, в которое оператор $\mathrm{F}^{+}_{S,a}$ переводит единичный шар пространства $L_1[0, \infty)$, и, следовательно, полная непрерывность этого оператора.

Для доказательства полной непрерывности оператора $\mathrm{F}^{+}_{S,a}$ в пространстве $L_2[0, \infty)$ заметим прежде всего, что $S(\lambda)$ является непрерывной функцией. Благодаря этому можно построить последовательность гладких функций $\tilde{\Phi}_k(\lambda)$ такую, что

$$\max_{-\infty<\lambda<\infty} |\tilde{\Phi}_k(\lambda) - (1 - S(\lambda))| < \frac{1}{k},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{|\tilde{\Phi}_k(\lambda)|^2 + |\tilde{\Phi}'_k(\lambda)|^2\} d\lambda < \infty.$$

Пусть

$$\Phi_k(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_k(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda.$$

Так как

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi_k(t+y+2a)|^2 dy dt = \int_0^\infty dy \int_{2a+y}^{\infty} |\Phi_k(u)|^2 du =$$

$$= \int_0^\infty y |\Phi_k(y+2a)|^2 dy \leqslant \int_0^\infty |\Phi_k(y+2a)|^2 dy +$$

$$+ \int_0^\infty (y+2a)^2 |\Phi_k(y+2a)|^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{|\tilde{\Phi}_k(\lambda)|^2 + |\tilde{\Phi}'_k(\lambda)|^2\} d\lambda < \infty,$$

то операторы $\mathbf{\Phi}_k$,

$$\mathbf{\Phi}_k f = \int_0^\infty f(t) \Phi_k(t+y+2a) dt,$$

являются операторами Гильберта — Шмидта и, значит, вполне непрерывны. Вполне непрерывные операторы образуют замкнутый идеал в кольце всех ограниченных операторов. Поэтому для доказательства полной непрерывности оператора $\mathbf{F}^{+}_{S,a}$ достаточно убедиться, что последовательность операторов $\mathbf{\Phi}_k$ по норме сходится к $\mathbf{F}^{+}_{S,a}$, когда $k \to \infty$. Так как

$$\{\mathbf{\Phi}_k - \mathbf{F}^{+}_{S,a}\} f = \int_0^\infty f(t) \{\Phi_k(t+y+2a) - F_S(t+y+2a)\} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\tilde{\Phi}_k(\lambda) - (1 - S(\lambda))\} \tilde{f}(-\lambda) e^{i\lambda(y+2a)} d\lambda,$$

то

$$\|\{\Phi_k - \mathbf{F}^+_{S,a}\} f\|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\Phi}_k(\lambda) - (1 - S(\lambda))|^2 |\tilde{f}(-\lambda)|^2 d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k^2} \|f\|$$

и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \|\Phi_k - \mathbf{F}^+_{S,a}\| = 0$, а оператор $\mathbf{F}^+_{S,a}$ вполне непрерывен.

Полная непрерывность оператора $\mathbf{F}^-_S$ в пространстве $L_2(-\infty, 0]$ доказывается аналогично.

Для того чтобы закончить доказательство леммы, заметим, что оператор $\mathbf{F}^+_a$ получается из $\mathbf{F}^+_{S,a}$ прибавлением конечномерного оператора и поэтому тоже вполне непрерывен.

Из последней леммы следует, что для доказательства разрешимости основного уравнения достаточно убедиться, что однородное уравнение $f + \mathbf{F}^+_a f = 0$ не имеет ненулевых решений в соответствующем пространстве. Заметим, что решения этого уравнения, принадлежащие пространству $L_1[0, \infty)$, ограничены и, следовательно, принадлежат также пространству $L_2[0, \infty)$. Действительно, ядро $F(t + y + 2a)$ оператора $\mathbf{F}^+_a$ можно аппроксимировать ограниченной функцией $\Phi(t + y + 2a)$ так, чтобы

$$\int\limits_0^{\infty} |F(t) - \Phi(t)|\, dt < 1.$$

Переписав уравнение $f + \mathbf{F}^+_a f = 0$ в виде $f - \{\Phi - \mathbf{F}^+_a\} f = -\Phi f$, получим справа ограниченную функцию, и оператор $\Phi - \mathbf{F}^+_a$ будет иметь норму, меньшую единицы. Поэтому

$$f = -\Phi f - \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi - \mathbf{F}^+_a)^n \Phi f,$$

причем этот ряд сходится как в пространстве $L_1[0, \infty)$, так и в пространстве $L_\infty[0, \infty)$. Следовательно,

$$f(y) \in L_1[0, \infty) \cap L_\infty[0, \infty) \subset L_2[0, \infty).$$

Таким образом, однородное уравнение $f + \mathbf{F}^+_a f = 0$ достаточно исследовать в пространстве $L_2[0, \infty)$.

Лемма 3.3.2. *Действующие в пространстве $L_2[0, \infty)$ операторы $\mathbf{I} + \mathbf{F}^+_a$ и $\mathbf{I} + \mathbf{F}^+_{S,a}$ неотрицательны при любом $a \geqslant 0$:*

$$(\{\mathbf{I} + \mathbf{F}^+_a\} f, f) \geqslant 0, \tag{3.3.11}$$

причем равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{f}(\lambda) - S(\lambda)\, e^{2i\lambda a} \tilde{f}(-\lambda) = 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty), \\ &\tilde{f}(-i\lambda_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3.3.12}$$

Действующий в пространстве $L_2(-\infty, 0]$ *оператор* $\mathbf{I}-\mathbf{F}_{\overline{S}}$ *неотрицателен:* $(\{\mathbf{I}-\mathbf{F}_{\overline{S}}\}\ g,\ g) \geqslant 0$, *причем равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда*

$$\tilde{g}(\lambda)+S(\lambda)\tilde{g}(-\lambda)=0 \quad (-\infty<\lambda<\infty). \tag{3.3.13}$$

Доказательство. Из формул (3.3.5), (3.3.6), (3.3.10) и равенства Парсеваля следует, что

$$(\{\mathbf{I}+\mathbf{F}_a^+\}\, f,\, f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(\lambda)|^2\,d\lambda+\sum_{k=1}^{n} m_k^2\,|\tilde{f}(-i\lambda_k)|^2+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1-S(\lambda))\,e^{2i\lambda a}\tilde{f}(-\lambda)\,\overline{\tilde{f}(\lambda)}\,d\lambda.$$

Так как $\tilde{f}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $f(y)$, равной нулю при $y<0$, то $\tilde{f}(-\lambda)\ e^{2i\lambda a}$ есть преобразование Фурье функции $f(-y-2a)$, равной нулю при $y>-2a$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2i\lambda a}\tilde{f}(-\lambda)\,\overline{\tilde{f}(\lambda)}\,d\lambda=\int_{0}^{\infty}f(-y-2a)\,\overline{f(y)}\,dy=0,$$

$$(\{\mathbf{I}+\mathbf{F}_a^+\}\, f,\, f)=\sum_{k=1}^{n} m_k^2\,|\tilde{f}(-i\lambda_k)|^2+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\tilde{f}(\lambda)-S(\lambda)\,e^{2i\lambda a}\tilde{f}(-\lambda)\}\,\overline{\tilde{f}(\lambda)}\,d\lambda. \tag{3.3.14}$$

Поскольку $|S(\lambda)\,e^{2i\lambda a}|=1$, согласно неравенству Коши — Буняковского

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}S(\lambda)\,e^{2i\lambda a}\tilde{f}(-\lambda)\,\overline{\tilde{f}(\lambda)}\,d\lambda\right|^2\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(-\lambda)|^2\,d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(\lambda)|^2\,d\lambda,$$

или

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}S(\lambda)\,e^{2i\lambda a}\tilde{f}(-\lambda)\,\overline{\tilde{f}(\lambda)}\,d\lambda\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(\lambda)|^2\,d\lambda.$$

Следовательно, второе слагаемое в правой части формулы (3.3.14) неотрицательно, первое слагаемое, очевидно, тоже неотрицательно. Поэтому справедливо неравенство (3.3.11), причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда

$$\tilde{f}(-i\lambda_k)=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\{\tilde{f}(\lambda)-S(\lambda)\,e^{2i\lambda a}\tilde{f}(-\lambda)\}\,\overline{\tilde{f}(\lambda)}\,d\lambda=0.$$

Полагая $z(\lambda) = \tilde{f}(\lambda) - S(\lambda)\, e^{2i\lambda a}\tilde{f}(-\lambda)$, видим, что эта функция должна быть ортогональна функции $\tilde{f}(\lambda)$. Но тогда

$$\|\tilde{f}(\lambda)\|^2 = \|S(\lambda)\, e^{2i\lambda 2}\tilde{f}(-\lambda)\|^2 = \|\tilde{f}(\lambda) - z(\lambda)\|^2 = \|\tilde{f}(\lambda)\|^2 + \|z(\lambda)\|^2,$$

что возможно только при $z(\lambda) = 0$. Итак, неравенство (3.3.11) всегда справедливо, причем знак равенства достигается на функциях, преобразования Фурье которых $\tilde{f}(\lambda)$ удовлетворяют условиям (3.3.12).

Аналогичные утверждения для операторов $\mathbf{I} + \mathbf{F}^{+}_{S,a}$ и $\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-}_{S}$ доказываются так же.

Лемма 3.3.3. *Действующие в пространстве $L_2\,[0, \infty)$ операторы $\mathbf{I} + \mathbf{F}^{+}_{a}$ при всех $a > 0$ имеют обратные и*

$$\sup_{\varepsilon \leqslant a < \infty} \|\{\mathbf{I} + \mathbf{F}^{+}_{a}\}^{-1}\| = C(\varepsilon) < \infty, \tag{3.3.15}$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Если оператор $\mathbf{I} + \mathbf{F}^{+}_{a}$ имеет обратный при $a = 0$, то неравенство (3.3.15) остается верным и при $\varepsilon = 0$ ($C(0) < \infty$).

Доказательство. Согласно предыдущему для доказательства существования оператора $\{\mathbf{I} + \mathbf{F}^{+}_{a}\}^{-1}$ достаточно убедиться, что уравнение $f + \mathbf{F}^{+}_{a} f = 0$ имеет в пространстве $L_2\,[0, \infty)$ только нулевые решения. Но по лемме 2 преобразования Фурье $\tilde{f}(\lambda)$ решений этого уравнения удовлетворяют тождеству $\tilde{f}(\lambda) - S(\lambda)\, e^{2i\lambda a}\tilde{f}(-\lambda) = 0$. Поэтому, полагая $\tilde{\varphi}_h(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)\, e^{-i\lambda a}\cos \lambda h$, $0 < h < a$, получаем

$$\tilde{\varphi}_h(\lambda) - S(\lambda)\, \tilde{\varphi}_h(-\lambda) = 0. \tag{3.3.16}$$

Так как $\tilde{\varphi}_h(\lambda)$ является преобразованием Фурье функции

$$\varphi_h(t) = \frac{1}{2}\{f(t - a + h) + f(t - a - h)\},$$

равной нулю при $t < a - h$, то из тождества (3.3.16) следует, что

$$\varphi_h + \mathbf{F}^{+}_{S,0}\varphi_h = 0 \tag{3.3.17}$$

при всех $h \in (0, a)$. Таким образом, если бы уравнение $f + \mathbf{F}^{+}_{a} f = 0$ имело ненулевое решение $f(y)$, то уравнение (3.3.17) имело бы бесконечно много линейно независимых решений $\varphi_h(y)$, что невозможно, так как оператор $\mathbf{F}^{+}_{S,0}$ вполне непрерывен. Значит, $f(y) = 0$ и операторы $\mathbf{I} + \mathbf{F}^{+}_{a}$ обратимы при всех $a > 0$.

Легко убедиться, что норма операторов $\mathbf{I}+\mathbf{F}_a^+$ непрерывно зависит от a и стремится к единице при $a\to\infty$. Поэтому $\|\{\mathbf{I}+\mathbf{F}_a^+\}^{-1}\|$ есть непрерывная функция от $a\in(0,\infty)$, стремящаяся к единице при $a\to\infty$. Следовательно, при любом $\varepsilon>0$

$$\sup_{\varepsilon\leqslant a<\infty}\|\{\mathbf{I}+\mathbf{F}_a^+\}^{-1}\|=C(\varepsilon)<\infty,$$

причем $C(0)<\infty$, если оператор $\mathbf{I}+\mathbf{F}_a^+$ обратим и при $a=0$.

Теорема 3.3.1. *Если выполнено условие I, то основное уравнение (3.3.7) имеет при каждом $x>0$ единственное решение $K(x,y)\in L_1[x,\infty)$, функции*

$$e(\lambda,x)=e^{i\lambda x}+\int_x^\infty K(x,y)e^{i\lambda y}dy\quad(\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0)$$

удовлетворяют уравнению

$$-y''+q(x)y=\lambda^2y,\quad 0<x<\infty,$$

где $q(x)=-2\dfrac{d}{dx}K(x,x)$ *и при всех* $\varepsilon>0$

$$\int_\varepsilon^\infty x\,|q(x)|\,dx<\infty. \tag{3.3.18}$$

Если, кроме того, оператор $\mathbf{I}+\mathbf{F}_a^+$ имеет обратный и при $a=0$, то это неравенство остается верным при $\varepsilon=0$, т. е. функция $q(x)$ удовлетворяет условию (3.1.3).

Доказательство. Разрешимость основного уравнения при всех $x>0$ доказана в лемме 3.3.3. Так как функция $F(x)$ по условию дифференцируема на полуоси $(0,\infty)$ и ее производная принадлежит $L_1[\varepsilon,\infty)$, то, используя обычную технику предельного перехода под знаком интеграла, нетрудно установить существование частных производных первого порядка у функции $K(x,y)$ и возможность почленного дифференцирования равенства (3.3.7).

Для оценки функции $K(x,y)$ и ее производных удобно ввести такие обозначения:

$$\tau(x)=\int_x^\infty|F'(t)|\,dt,\quad \tau_1(x)=\int_x^\infty\tau(t)\,dt. \tag{3.3.19}$$

Заметим, что

$$|F(x)|\leqslant\tau(x) \tag{3.3.19'}$$

и $\tau_1(0)<\infty$ (так как $\int_0^\infty x\,|F'(x)|\,dx<\infty$ по условию). Из уравнения (3.3.7) находим

$$K(x,x+y)=-\{\mathbf{I}+\mathbf{F}_x^+\}^{-1}F(y+2x),$$

откуда согласно неравенству (3.3.15) леммы 3.3.3 следует

$$\int_0^\infty |K(x,\ x+y)|\,dy \leqslant \|\{\mathbf{I}+\mathbf{F}_x^+\}^{-1}\| \int_0^\infty |F(y+2x)|\,dy \leqslant C(x)\,\tau_1(2x).$$

Используя эту оценку, получаем

$$|K(x,\ x+y)| \leqslant |F(y+2x)| + \\ + \int_0^\infty |K(x,\ x+t)|\,|F(t+y+2x)|\,dt \leqslant \\ \leqslant \tau(y+2x)\,\{1+C(x)\,\tau_1(2x)\}.$$

Так как после дифференцирования уравнения (3.3.7′) по x

$$2F'(y+2x) + K_x'(x,\ x+y) + \\ + \int_0^\infty K_x'(x,\ x+t)\,F(t+y+2x)\,dt + \\ + 2\int_0^\infty K(x,\ x+t)\,F'(t+y+2x)\,dt = 0,$$

то

$$\int_0^\infty |K_x'(x,\ x+y)|\,dy \leqslant 2\|\{\mathbf{I}+\mathbf{F}_x^+\}^{+1}\| \int_0^\infty \Big| F'(y+2x) + \\ + \int_0^\infty K(x,\ x+t)\,F'(t+y+2x)\,dt \Big|\,dy \leqslant \\ \leqslant 2C(x)\,\tau(2x)\,\{1+C(x)\,\tau_1(2x)\}.$$

Поэтому

$$|K_x'(x,\ x+y) + 2F'(y+2x)| \leqslant \\ \leqslant \int_0^\infty |K_x'(x,\ x+t)\,F(t+y+2x)|\,dt + \\ + 2\int_0^\infty |K(x,\ x+t)\,F'(t+y+2x)|\,dt \leqslant \\ \leqslant 2\tau(y+2x)\,C(x)\,\tau(2x)\,\{1+C(x)\,\tau_1(2x)\} + \\ + 2\tau(2x)\,\{1+C(x)\,\tau_1(2x)\}\,\tau(y+2x),$$

т. е. функция $q(x) = -2\dfrac{d}{dx}K(x,\ x)$ удовлетворяет неравенству

$$|q(x)| \leqslant 4|F'(2x)| + 8C(x)\,\{1+C(x)\,\tau_1(2x)\}\,\tau^2(2x). \tag{3.3.20}$$

Так как

$$x\tau(x) = x\int_x^\infty |F'(t)|\,dt \leqslant \int_x^\infty t\,|F'(t)|\,dt \leqslant \int_0^\infty t\,|F'(t)|\,dt < \infty,$$

то

$$\int_\varepsilon^\infty x\,|q(x)|\,dx \leqslant 4\int_0^\infty x\,|F'(2x)|\,dx +$$

$$+ 4C(\varepsilon)\{1 + C(\varepsilon)\,\tau_1(0)\}\int_0^\infty t\,|F'(t)|\,dt \int_\varepsilon^\infty \tau(2x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \{1 + 2C(\varepsilon)\,[1 + C(\varepsilon)\,\tau_1(0)]\,\tau_1(0)\}\int_0^\infty t\,|F'(t)|\,dt$$

и неравенство (3.3.18) доказано. Если оператор $\mathbf{I} + \mathbf{F}_a^+$ обратим при $a = 0$, то $C(0) < \infty$ и неравенство (3.3.18) остается верным при $\varepsilon = 0$.

Переходя к доказательству основного утверждения теоремы, предположим сначала, что функция $F(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, причем $F''(x) \in L_1\,[\varepsilon, \infty)$ при любом $\varepsilon > 0$. Тогда решение $K(x, y)$ основного уравнения тоже дважды непрерывно дифференцируемо и его вторые производные суммируемы на полуоси $[\varepsilon, \infty)$ при любом $\varepsilon > 0$. Дифференцируя основное уравнение два раза по y, получаем

$$F''(x + y) + K''_{yy}(x, y) + \int_x^\infty K(x, t)\,F''(t + y)\,dt = 0,$$

откуда после интегрирования по частям

$$F''(x + y) + K''_{yy}(x, y) - K(x, x)\,F'(x + y) +$$

$$+ K'_t(x, t)\,F(t + y)\,|_{t=x} + \int_0^\infty K''_{tt}(x, t)\,F(t + y)\,dt = 0.$$

С другой стороны, при двукратном дифференцировании основного уравнения по x находим

$$F''(x + y) + K''_{xx}(x, y) - \{K(x, x)\,F(x + y)\}'_x -$$

$$- K'_x(x, t)\,F(t + y)\,|_{t=x} + \int_x^\infty K''_{xx}(x, t)\,F(t + y)\,dt = 0.$$

Вычитая из этого равенства предыдущее, получаем

$$K''_{xx}(x, y) - K''_{yy}(x, y) + q(x)\,F(x + y) +$$

$$+ \int_x^\infty \{K''_{xx}(x, t) - K''_{tt}(x, t)\}\,F(t + y)\,dt = 0,$$

где $q(x) = -2\frac{d}{dx} K(x, x)$. Но согласно основному уравнению

$$q(x) F(x+y) = -q(x) K(x, y) - \int_x^\infty q(x) K(x, t) F(t+y)\,dt.$$

Поэтому

$$K''_{xx}(x, y) - K''_{yy}(x, y) - q(x) K(x, y) +$$
$$+ \int_x^\infty \{K''_{xx}(x, t) - K''_{tt}(x, t) - q(x) K(x, t)\} F(t+y)\,dt = 0,$$

т. е. функция

$$\varphi(y) = K''_{xx}(x, y) - K''_{yy}(x, y) - q(x) K(x, y)$$

является суммируемым решением однородного уравнения

$$\varphi(y) + \int_x^\infty \varphi(t) F(t+y)\,dt = 0 \quad (x \leqslant y < \infty).$$

Так как это уравнение согласно лемме 3.3.3 имеет только нулевые решения при всех $x > 0$, то $\varphi(y) = 0$ и, следовательно, функция $K(x, y)$ является решением уравнения

$$K''_{xx}(x, y) - K''_{yy}(x, y) - q(x) K(x, y) = 0,$$

удовлетворяющим условиям

$$q(x) = -2\frac{d}{dx} K(x, x),$$

$$\lim_{x+y\to\infty} K'_x(x, y) = \lim_{x+y\to\infty} K'_y(x, y) = 0.$$

Отсюда согласно замечанию к лемме 3.1.2 заключаем, что функция $K(x, y)$ является ядром оператора преобразования, т. е. функции

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t}\,dt \tag{3.3.21}$$

удовлетворяют уравнению

$$-y'' + q(x) y = \lambda^2 y \quad (0 < y < \infty). \tag{3.3.22}$$

Пусть теперь выполнено только условие I, так что функция $F(x)$ может не иметь второй производной. Построим последовательность дважды непрерывно дифференцируемых функций $F_n(x)$

так, чтобы при каждом $\varepsilon > 0$ выполнялись равенства

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} | F_n(x) - F(x) | \, dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} x \, | F_n'(x) - F'(x) | \, dx = 0.$$

Тогда при достаточно больших n каждое из уравнений

$$F_n(x+y) + K_n(x, y) + \int_x^{\infty} K_n(x, t) F_n(t+y) \, dt = 0$$

будет иметь единственное решение, причем

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\varepsilon \leqslant x < \infty} \int_x^{\infty} | K_n(x, y) - K(x, y) | \, dy = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} | K_n'(x, x) - K'(x, x) | \, dx = 0,$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Кроме того, как было показано выше, функции

$$e_n(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} K_n(x, t) \, e^{i\lambda t} dt$$

будут удовлетворять уравнениям

$$-y'' + q_n(x) \, y = \lambda^2 y \qquad \left(q_n(x) = -2 \frac{d}{dx} K_n(x, x)\right).$$

Совершая в этих формулах предельный переход при $n \to \infty$, приходим к выводу, что функции (3.3.21) должны удовлетворять уравнению (3.3.22), что и требовалось доказать.

Теорема 3.3.2. *Если выполнено условие I и*

а) уравнение $f + \mathbf{F}_{S,0}^{+} f = 0$ *имеет в пространстве* $L_2\,[0, \infty)$ n *линейно независимых решений,*

б) уравнение $g - \mathbf{F}_S^{-} g = 0$ *имеет в пространстве* $L_2\,(-\infty, 0]$ *только нулевые решения, то набор величин* $\{S(\lambda)\ (-\infty < \lambda < \infty);$ $\lambda_k, m_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)\}$ *является данными рассеяния некоторой краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) с потенциалом* $q(x)$, *удовлетворяющим условию (3.1.3).*

Доказательство. Согласно теореме 3.3.1 условие I является достаточным для разрешимости основного уравнения при всех $x > 0$, причем функции (3.3.21) удовлетворяют уравнению (3.3.22). Если основное уравнение разрешимо и при $x = 0$ (т. е. уравнение $f + \mathbf{F}_0^{+} f = 0$ имеет в пространстве $L_2\,[0, \infty)$ только нулевые решения), то потенциал $q(x)$ в уравнении (3.3.22) удовлетворяет условию (3.1.3). Таким образом, для доказательства сформулированной теоремы нужно только показать, что условия «а» и «б» влекут за собой 1) отсутствие ненулевых решений уравнения $f + \mathbf{F}_0^+ f = 0$; 2) равенства $e(i\lambda_k, 0) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; 3) тождество $e(-\lambda, 0) - S(\lambda)\, e(\lambda, 0) = 0$ $(-\infty < \lambda < \infty)$. Докажем последовательно эти утверждения.

1. Если функция $f(y) \in L_2[0, \infty)$ удовлетворяет уравнению $f + \mathbf{F}_0^+ f = 0$, то согласно лемме 3.3.2 ее преобразование Фурье $\tilde{f}(\lambda)$ удовлетворяет равенствам

$$\tilde{f}(-i\lambda_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\tilde{f}(\lambda) - S(\lambda)\tilde{f}(-\lambda) = 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Поэтому функции

$$\tilde{z}_1(\lambda) = \tilde{f}(\lambda), \quad \tilde{z}_{k+1}(\lambda) = (\lambda^2 + \lambda_k^2)^{-1}\tilde{f}(\lambda) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

являются преобразованиями Фурье функций

$$z_p(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{z}_p(\lambda)\, e^{i\lambda y} d\lambda \quad (p = 1, 2, \ldots, n+1),$$

которые, очевидно, равны нулю при $y < 0$ и принадлежат $L_2[0, \infty)$. Кроме того, функции $\tilde{z}_p(\lambda)$ тоже удовлетворяют тождеству

$$\tilde{z}_p(\lambda) - S(\lambda)\,\tilde{z}_p(-\lambda) = 0,$$

откуда следует, что $z_p + \mathbf{F}_{S,0}^+ z_p = 0$ и уравнение $z + \mathbf{F}_{S,0}^+ z = 0$ имеет $n+1$ решение $z_1(y), z_2(y), \ldots, z_{n+1}(y)$. Эти решения линейно независимы, если $\tilde{f}(\lambda) \neq 0$. Но в силу условия «а» это уравнение имеет только n линейно независимых решений. Следовательно, $\tilde{f}(\lambda) \equiv 0$, уравнение $f + \mathbf{F}_0^+ f = 0$ имеет только нулевое решение, а основное уравнение разрешимо и при $x = 0$.

2. Рассмотрим основное уравнение при $x = 0$ и подставим в него вместо функции $F(y)$ ее выражение (3.3.6). В результате получим

$$\sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k y} + F_S(y) + K(0, y) + \sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k y} \times$$
$$\times \int_0^{\infty} K(0, t)\, e^{-\lambda_k t} dt + \int_0^{\infty} K(0, t)\, F_S(t + y)\, dt = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} m_k^2 e(-i\lambda_k,\ 0)\, e^{-\lambda_k y} + F_S(y) + K(0,\ y) +$$

$$+\int_0^{\infty} K(0,\ t)\, F_S(t+y)\, dt = 0. \qquad (3.3.23)$$

Согласно условию «а» уравнение $f = \mathbf{F}_{S,0}^{+} f = 0$ имеет n линейно независимых решений $f_1(y),\ f_2(y),\ \ldots,\ f_n(y)$. Умножая обе части равенства (3.3.23) на $f_j(y)$ и интегрируя, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} m_k^2 e(-i\lambda_k,\ 0)\, \tilde{f}_j(-i\lambda_k) + \int_0^{\infty} F_S(y)\, f_j(y)\, dy = 0.$$

Как было показано в лемме 3.3.2, преобразования Фурье $\tilde{f}_j(\lambda)$ этих решений должны удовлетворять равенству $\tilde{f}_j(\lambda) - S(\lambda) \times \times \tilde{f}_j(-\lambda) = 0$. Поэтому

$$\int_0^{\infty} F_S(y)\, f_j(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - S(\lambda))\, \tilde{f}_j(-\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\tilde{f}_j(-\lambda) - \tilde{f}_j(\lambda)\}\, d\lambda = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k^2 e(-i\lambda_k,\ 0)\, \tilde{f}_j(-i\lambda_k) = 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Таким образом, для доказательства равенств $e(-i\lambda_k,\ 0) = 0$ достаточно убедиться, что детерминант матрицы $\|\tilde{f}_j(-i\lambda_k)\|$ $(j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ отличен от нуля. Если бы он был равен нулю, то нашлись бы не равные нулю одновременно числа c_j такие, что

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \tilde{f}_j(-i\lambda_k) = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Но тогда функция $\tilde{z}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_j \tilde{f}_j(\lambda)$ удовлетворяла бы равенствам (3.3.12) из леммы 3.3.2, т. е. функция $z(y) = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(y)$ была бы ненулевым решением уравнения $z + \mathbf{F}_0^{+} z = 0$, что невозможно, как это было доказано выше. Следовательно,

$$\mathrm{Det}\, \|\tilde{f}_j(-i\lambda_k)\| \neq 0, \quad e(-i\lambda_k,\ 0) = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

3. Так как

$$e(-\lambda, 0) - S(\lambda) e(\lambda, 0) = 1 + \tilde{k}(\lambda) - S(\lambda)[1 + \tilde{k}(-\lambda)] =$$
$$= 1 - S(\lambda) + \tilde{k}(\lambda) - \tilde{k}(-\lambda) + [1 - S(\lambda)]\tilde{k}(-\lambda),$$

где $\tilde{k}(\lambda) = \int\limits_0^\infty K(0, t) e^{-i\lambda t} dt$, то подлежащее доказательству равенство эквивалентно такому:

$$1 - S(\lambda) + \tilde{k}(\lambda) - \tilde{k}(-\lambda) + [1 - S(\lambda)]\tilde{k}(-\lambda) = 0 \quad (-\infty < \lambda < < \infty).$$

Поскольку слева стоит преобразование Фурье функции

$$\Phi(y) = F_S(y) + K(0, y) - K(0, -y) +$$
$$+ \int\limits_0^\infty K(0, t) F_S(t + y) dt, \tag{3.3.24}$$

нужно доказать, что $\Phi(y) \equiv 0$. Рассмотрим сначала эту функцию при $y > 0$. Из уравнения (3.3.23) и доказанных равенств $e(-i\lambda_k, 0) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ вытекает, что при $y > 0$

$$F_S(y) + K(0, y) + \int\limits_0^\infty K(0, t) F_S(t + y) dt = 0,$$

а так как и $K(0, -y) = 0$ то $\Phi(y) \equiv 0$ $(0 < y < \infty)$. Умножая обе части равенства (3.3.24) на $F_S(x + y)$ и интегрируя по y, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^0 \Phi(y) F_S(x + y) dy = \int\limits_{-\infty}^\infty F_S(y) F_S(y + x) dy +$$
$$+ \int\limits_0^\infty K(0, y) F_S(y + x) dy - \int\limits_{-\infty}^0 K(0, -y) F_S(y + x) dy +$$
$$+ \int\limits_0^\infty K(0, t) \int\limits_{-\infty}^\infty F_S(t + y) F_S(y + x) dy dt.$$

Так как преобразование Фурье функции $F_S(y)$ равно $1 - S(\lambda)$, то в силу теоремы о свертке преобразование Фурье функции $\int\limits_{-\infty}^\infty F_S(y) F_S(y + x) dy$ равно

$$\{1 - S(-\lambda)\}\{1 - S(\lambda)\} = 1 - S(-\lambda) - S(\lambda) + 1,$$

вследствие чего

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_S(y) F_S(y+x)\,dy = F_S(-x) + F_S(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_S(t+y) F_S(y+x)\,dy = F_S(t-x) + F_S(x-t).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{0} \Phi(y) F_S(y+x)\,dy = F_S(-x) + F_S(x) +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} K(0,\ y) F_S(y+x)\,dy - \int_{0}^{\infty} K(0,\ \xi) F_S(-\xi+x)\,d\xi +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} K(0,\ t)\{F_S(t-x) + F_S(x-t)\}\,dt =$$

$$= F_S(-x) + K(0,\ -x) - K(0,\ x) + \int_{0}^{\infty} K(0,\ y) F_S(y-x)\,dy +$$

$$+ F_S(x) + K(0,\ x) - K(0,\ -x) + \int_{0}^{\infty} K(0,\ y) F_S(y+x)\,dy =$$

$$= \Phi(-x) + \Phi(x),$$

откуда, замечая, что при $x < 0$ $\Phi(-x) = 0$, получаем

$$\int_{-\infty}^{0} \Phi(y) F_S(y+x)\,dy = \Phi(x) \quad (-\infty < x < 0).$$

Следовательно, функция $\Phi(x)$ является решением однородного уравнения $\Phi - \mathbf{F}_S^- \Phi = 0$. Из формулы (3.3.24) и условия I следует, что функция $\Phi(x)$ представима в виде суммы двух функций, из которых одна суммируема, а другая ограничена и принадлежит $L_2(-\infty, 0]$. Отсюда, используя уже неоднократно применявшийся прием, заключаем, что функция $\Phi(x)$ является решением уравнения $\Phi - \mathbf{F}_S^-\Phi = 0$, принадлежащим $L_2(-\infty, 0]$. Поэтому, если выполнено условие «б», то $\Phi(x) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 3.3.4. *Если функция $S(\lambda)$ удовлетворяет условию I, то при всех $a > 0$ функции*

$$S_1(\lambda) = S(\lambda)\frac{\lambda + ia}{\lambda - ia}$$

тоже удовлетворяют этому условию.

Доказательство. Непрерывность функции $S_1(\lambda)$ и равенства $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} S_1(\lambda) = 1$, $S_1(\lambda) = \overline{S_1(-\lambda)} = [S_1(-\lambda)]^{-1}$ являются очевидными следствиями аналогичных свойств функции $S(\lambda)$. Так как

$$1 - S_1(\lambda) = 1 - S(\lambda) + \frac{2ai}{\lambda - ia}\{1 - S(\lambda)\} - \frac{2ai}{\lambda - ia},$$

$$-\frac{i}{\lambda - ia} = \int_0^\infty e^{-ay} e^{-i\lambda y} dy,$$

то из теоремы о свертке заключаем, что $1 - S_1(\lambda)$ есть преобразование Фурье функции

$$F_{S_1}(y) = \begin{cases} F_S(y) - 2aG(y) + 2ae^{-ay}, & y > 0, \\ F_S(y) - 2aG(y), & y < 0, \end{cases}$$

где

$$G(y) = \int_0^\infty F_S(y - t)\, e^{-at} dt = e^{-ay} \int_{-\infty}^{y} F_S(\xi)\, e^{a\xi} d\xi =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - S(\lambda)}{\lambda - ia} e^{i\lambda y} d\lambda.$$

Из этой формулы и свойств функции $F_S(y)$ непосредственно следует, что $G(y) \in L_2(-\infty, \infty) \cap L_\infty(-\infty, \infty)$, так что остается только проверить справедливость неравенства

$$\int_0^\infty y\, |G'(y)|\, dy < \infty. \qquad (3.3.25)$$

Так как при $y > 0$

$$G'(y) = -ae^{-ay} \int_{-\infty}^{y} F_S(\xi)\, e^{a\xi} d\xi + F_S(y) =$$

$$= -ae^{-ay} A + e^{a(1-y)} F_S(1) + e^{-ay} \int_1^y F'_S(\xi)\, d\xi,$$

где $A = \int\limits_{-\infty}^{1} F_S(\xi)\, e^{a\xi} d\xi$, то неравенство (3,3,25) будет установлено, если мы докажем, что

$$\int_0^\infty y e^{-ay} \left| \int_1^y F_S(\xi)\, e^{a\xi} d\xi \right| dy < \infty.$$

Но

$$\int_1^\infty ye^{-ay}\left|\int_1^y F_S'(\xi)\,e^{a\xi}d\xi\right|dy \leqslant \int_1^\infty\left\{\int_1^y |F_S'(\xi)|\,e^{a\xi}d\xi\right\} d\left\{-\int_y^\infty \xi e^{-a\xi}d\xi\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \int_1^\infty \{a^{-1}ye^{-ay}+a^{-2}e^{-ay}\}\,|F_S'(y)|\,e^{-ay}dy < \infty,$$

поскольку $\int_1^\infty y\,|F_S'(y)|\,dy < \infty$, и аналогично

$$\int_0^1 ye^{-ay}\left|\int_1^y F_S'(\xi)\,e^{a\xi}d\xi\right|dy \leqslant e\int_0^1 dy\int_y^1 |F_S'(\xi)|\,d\xi < \infty.$$

Лемма доказана.

Теорема 3.3.3. *Для того чтобы набор величин* $\{S(\lambda)\ (-\infty < \lambda < \infty);\ \lambda_k,\ m_k\ (k=1, 2, \ldots, n)\}$ *был данными рассеяния некоторой краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) с потенциалом* $q(x)$, *удовлетворяющим условию (3.1.3), необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия I и II.*

Доказательство. Необходимость этих условий была установлена в § 2. В силу теоремы 3.3.2 их достаточность будет установлена, если мы докажем, что выполнение условий I, II влечет за собой выполнение условий I, «а» и «б», т. е. справедливость равенств а) $\varkappa^+ = \varkappa$, б) $\varkappa^- = 0$, где $\varkappa^+$ $(\varkappa^-)$ — число линейно независимых решений уравнения

$$f + \mathbf{F}^+_{S,0}f = 0 \quad (g - \mathbf{F}^-_S g = 0), \text{ а } \varkappa = \frac{1}{2\pi i}\{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)\} - \frac{1-S(0)}{4}.$$

Для доказательства введем функцию

$$S_1(\lambda) = S(\lambda)\left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)^{2\varkappa^-}, \tag{3.3.26}$$

которая согласно лемме 3.3.4 тоже удовлетворяет условию I. Функция $S_1(\lambda)$ удовлетворяет также условию «б», т. е. уравнение $g - \mathbf{F}^-_{S_1}g = 0$ не имеет ненулевых решений в пространстве $L_2(-\infty, 0]$. Действительно, в лемме 3.3.2 было установлено, что преобразование Фурье $\tilde{g}(\lambda)$ решения этого уравнения удовлетворяет тождеству

$$\tilde{g}(\lambda) + S_1(\lambda)\,\tilde{g}(-\lambda) = 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

из которого в силу формулы (3.3.26) следует, что функции

$$\tilde{z}_k(\lambda) = \frac{\tilde{g}(\lambda)}{(\lambda^2+1)^k}\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\varkappa^-} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ \varkappa^-)$$

удовлетворяют тождеству

$$\tilde{z}_k(\lambda) + S(\lambda)\,\tilde{z}_k(-\lambda) = 0. \tag{3.3.27}$$

Так как в верхней полуплоскости функции

$$(\lambda^2+1)^{-k}\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\varkappa^-} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ \varkappa^-)$$

голоморфны и ограничены, то $\tilde{z}_k(\lambda)$ одновременно с $\tilde{g}(\lambda)$ являются преобразованиями Фурье функций $z_k(y) \in L_2(-\infty, 0]$, равных нулю при $y > 0$. Но тогда тождество (3.3.27) означает, что эти функции удовлетворяют уравнению $z_k - \mathbf{F}_S^- z_k = 0$, которое, таким образом, имеет не $\varkappa^-$, а по крайней мере $\varkappa^- + 1$ линейно независимых решений $z_0, z_1, \ldots, z_{\varkappa^-}$, если $\tilde{g}(\lambda) \not\equiv 0$. Следовательно, $\tilde{g}(\lambda) \equiv 0$ и функция $S_1(\lambda)$ удовлетворяет условию «б».

Обозначим через $\varkappa_1^+$ число линейно независимых решений уравнения $f + \mathbf{F}_{S_1}^+ f = 0$. Присоединив к функции $S_1(\lambda)$ набор чисел $\{\lambda_k,\ m_k\ (k = 1, 2, \ldots, \varkappa_1^+)\}$, получим набор величин, удовлетворяющий условиям I, «а» и «б», т. е., согласно теореме 3.3.2, данные рассеяния некоторой краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) с потенциалом, удовлетворяющим условию (3.1.3). Значит,

$$S_1(\lambda) = \frac{e_1(-\lambda,\ 0)}{e_1(\lambda,\ 0)}, \tag{3.3.28}$$

где функция $e_1(\lambda, 0)$ в верхней полуплоскости голоморфна, стремится к единице при $|\lambda| \to \infty$ и имеет $\varkappa_1^+$ нулей $(i\lambda_1, i\lambda_2, \ldots, i\lambda_{\varkappa_1^+})$, причем

$$\varkappa_1^+ = \frac{1}{2\pi i}\{\ln S_1(+0) - \ln S_1(+\infty)\} - \frac{1 - S_1(0)}{4}.$$

Используя это равенство и формулу (3.3.26), находим

$$\varkappa_1^+ = \varkappa + \varkappa^-. \tag{3.3.29}$$

Если $\varkappa^- > 0$, то уравнение $g - \mathbf{F}_S^- g = 0$ имеет линейно независимые решения $g_1, \ldots, g_{\varkappa^-}$, из которых, очевидно, можно построить такое ненулевое решение этого уравнения, $g = \sum c_k g_k$, что его преобразование Фурье $\tilde{g}(\lambda)$ будет иметь в точке i нуль $(\varkappa^- - 1)$-го порядка. Так как функция $\tilde{g}(\lambda)$ должна удовлетворять тождеству

$\tilde{g}(\lambda) + S(\lambda)\tilde{g}(-\lambda) = 0$, то из формул (3.3.26), (3.3.28) следует, что

$$\tilde{g}(\lambda) + \frac{e_1(-\lambda, 0)}{e_1(\lambda, 0)}\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{2\varkappa^-}\tilde{g}(-\lambda) = 0,$$

или

$$e_1(\lambda, 0)(\lambda + i)^2\tilde{g}(\lambda)\left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i}\right)^{\varkappa^- - 1} =$$

$$= -e_1(-\lambda, 0)(-\lambda + i)^2\tilde{g}(-\lambda)\left(\frac{-\lambda + i}{-\lambda - i}\right)^{\varkappa^- - 1}.$$

В этом тождестве слева стоит функция, голоморфная в верхней полуплоскости, а справа — в нижней. Поэтому функция

$$\varphi(\lambda) = (\lambda + i)^2\tilde{g}(\lambda)\left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i}\right)^{\varkappa^- - 1} e_1(\lambda, 0)$$

продолжается на всю комплексную плоскость как целая нечетная функция, причем $|\varphi(\lambda)| = o(|\lambda|^2)$ при $|\lambda| \to \infty$. Но тогда $\varphi(\lambda) = c\lambda$ и, если функция $e_1(\lambda, 0)$ имеет хотя бы один нуль в верхней полуплоскости (т. е. $\varkappa_1^+ > 0$), $\varphi(\lambda) \equiv 0$, а значит, и $\tilde{g}(\lambda) \equiv 0$ вопреки предположению. Поэтому $\varkappa_1^+ = 0$, откуда согласно формуле (3.3.29) заключаем, что $0 = \varkappa + \varkappa^-$ и $\varkappa^- = 0$, так как в силу условия II $\varkappa \geqslant 0$. Следовательно, функция $S(\lambda)$ удовлетворяет условиям I и «б». Присоединив к ней любой набор чисел $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\varkappa^+}, m_1, \ldots, m_{\varkappa^+}\}$, получим, в силу теоремы 3.3.2, данные рассеяния некоторой краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) с потенциалом, удовлетворяющим условию (3.1.3). Значит,

$$\varkappa^+ = \frac{1}{2\pi i}\{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)\} - \frac{1 - S(0)}{4} = \varkappa,$$

т. е. условие «а» тоже выполнено. Теорема доказана полностью.

Заметим, что из теорем 3.3.2 и 3.3.3 вытекает эквивалентность условий I, II условиям I, «а», «б».

Рассмотрим в заключение частный случай теоремы 3.3.3, играющий важную роль при исследовании обратных задач Штурма — Лиувилля на конечном интервале. Нас будут интересовать краевые задачи (3.1.1), (3.1.2), у которых 1) потенциал $q(x)$ равен нулю при $x > T$ и суммируем с квадратом на интервале $(0, T)$; 2) отсутствует дискретный спектр. Данные рассеяния таких краевых задач состоят из одной функции рассеяния $S(\lambda)$, которая, конечно, обладает свойствами I и II с $n = 0$. Кроме того, она обладает следующим свойством:

III. *Функция* $F_S(x)$ *равна нулю при* $x > 2T$ *и* $F'_S(x) \in L_2[0, 2T]$.

Действительно, так как в данном случае $F(x) = F_S(x)$, а функция $\sigma(x)$ ограничена и равна нулю при $x > T$, то из оценок (3.2.20), (3.2.21) следует, что $F_S(2x) = 0$ при $x > T$ и $F'_S(2x) \in L_2[0, T]$. Наоборот, если функция $S(\lambda)$ обладает свойствами I, II с $n = 0$ и III, то она является функцией рассеяния некоторой краевой задачи, удовлетворяющей условиям 1, 2. В самом деле, по теореме 3.3.3 она является функцией рассеяния краевой задачи, у которой дискретный спектр отсутствует, а оценки (3.3.20) показывают, что у этой задачи потенциал $q(x)$ равен нулю при $x > T$ и суммируем с квадратом на интервале $(0, T)$. Таким образом, из теоремы 3.3.3 вытекает такое следствие.

Следствие. *Для того чтобы произвольная функция $S(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ была функцией рассеяния некоторой краевой задачи, удовлетворяющей условиям 1, 2, необходимо и достаточно, чтобы она обладала свойствами I, II с $n = 0$ и III.*

Задачи

1. Если вещественная функция $q(x)$ удовлетворяет условию (3.1.3) и $h(x)$ — вещественное решение уравнения $y'' - q(x)y = 0$, причем $h(0) \neq 0$, то нормированные собственные функции $u(\lambda, x)$ краевой задачи

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad \lim_{x \to 0} W\{y(x), h(x)\} = 0, \tag{3.3.30}$$

порождающие равенство Парсеваля (3.2.4), удовлетворяют при $x \to \infty$ таким асимптотическим формулам:

$$\left.\begin{aligned} &u(\lambda, x) = e^{-i\lambda x} + S_h(\lambda)e^{i\lambda x} + o(1) \quad (-\infty < \lambda < \infty), \\ &u(i\lambda_k, x) = m_k e^{-\lambda_k x}(1 + o(1)) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{3.3.31}$$

(см. § 2, задачу 2). Доказать, что для данного набора величин $\{S(\lambda)\ (-\infty < \lambda < \infty);\ \lambda_k, m_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)\}$ тогда и только тогда существует краевая задача (3.3.30), нормированные собственные функции которой удовлетворяют асимптотическим формулам (3.3.31), когда выполнены условия I и

$$\text{II}' \quad n = \frac{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)}{2\pi i} - \frac{1 - S(0)}{4}.$$

Указание. Если выполнены условия I и II', то набор величин $\{S_1(\lambda);\ \lambda_k, m_k\}$, где

$$S_1(\lambda) = S(\lambda)\frac{\lambda + iA}{\lambda - iA} \quad (A > \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k),$$

удовлетворяет условиям I, II и в силу теоремы 3.3.3 является данными рассеяния некоторой краевой задачи (3.1.1), (3.1.2) с потенциалом $q_1(x)$, удовлетворяющим условию (3.1.3). Оператор

$$u(\lambda, x) = -\frac{W\{e_1(iA, x), u_1(\lambda, x)\}}{e_1(iA, x)(A^2 + \lambda^2)}$$

преобразует нормированные собственные функции $u_1(\lambda, x)$ этой краевой задачи в собственные функции $u(\lambda, x)$ некоторой задачи вида (3.3.30), причем после надлежащей нормировки выполняются асимптотические равенства (3.3.31). Необходимость условий I, II доказывается аналогично.

2. Рассмотрим краевую задачу (3.3.3), (3.3.4) с вещественной функцией $q(x)$, удовлетворяющей условию (3.1.3), и целым положительным l, которое в дальнейшем будем считать фиксированным. Нормированные собственные функции (радиальные волновые функции) $u_l(\lambda, x)$ этой задачи удовлетворяют при $x \to \infty$ асимптотическим равенствам

$$u_l(\lambda, x) = e^{-i\lambda x} + (-1)^l S(\lambda) e^{i\lambda x} + o(1) \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

$$u_l(i\lambda_k, x) = m_k e^{-\lambda_k x}(1 + o(1)) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$u_l(i\lambda_n, x) = m_n x^{-l}(1 + o(1)), \quad \text{если} \quad \lambda_n = 0,$$

и набор величин $\{S(\lambda);\ \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n \geqslant 0;\ m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ называется данными рассеяния. Доказать, что набор величин $\{S(\lambda);\ \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n \geqslant 0;\ m_1, \ldots, m_n\}$ $(m_k > 0)$ является данными рассеяния некоторой краевой задачи вида (3.3.3), (3.3.4) тогда и только тогда, когда $S(0) = 1$ и выполняются условия I, II теоремы 3.3.3.

Указание. Можно воспользоваться операторами преобразования, рассмотренными в задачах 4 и 5 § 3 гл. 2, и свести вопрос к теореме 3.3.3 подобно тому, как это сделано в предыдущей задаче.

3. Найти характеристические свойства данных рассеяния краевой задачи

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad y(0) = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty), \tag{3.3.32}$$

в которой вещественная функция $q(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 x\,|q(x) - l_0(l_0+1)x^{-2}|\,dx + \int_1^\infty x\,|q(x) - l_\infty(l_\infty+1)x^{-2}|\,dx < \infty,$$

где l_0 и l_∞ — целые неотрицательные числа и $l_0 + l_\infty > 0$.

4. Рассмотрим матричную задачу Штурма — Лиувилля (3.3.32), в которой самосопряженная матрица n-го порядка $q(x)$ (потенциальная матрица) удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty x\,|q(x)|\,dx < \infty. \tag{3.3.33}$$

Ограниченные матрицы — решения $u(\lambda, x)$ этой задачи удовлетворяют при $x \to \infty$ асимптотическим формулам

$$u(\lambda, x) = Ie^{-i\lambda x} - S(\lambda) e^{i\lambda x} + o(1) \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

$$u(i\lambda_k, x) = e^{-\lambda_k x}(m_k + o(1)) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $S(\lambda) = S(-\lambda)^*$ — унитарная матрица, а m_k — неотрицательные самосопряженные матрицы. Совокупность $\{S(\lambda);\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ m_1, \ldots, m_n\}$ называется данными рассеяния рассматриваемой задачи. Доказать, что для того чтобы совокупность $\{S(\lambda);\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ m_1, \ldots, m_n\}$, где $S(\lambda) = [S(-\lambda)]^{-1} = S(-\lambda)^*$, $\lambda_k > 0$, m_k — неотрицательные самосопряженные матрицы, была данными рассеяния некоторой краевой задачи (3.3.32) с эрмитовой потенциальной матрицей $q(x)$, удовлетворяющей условию (3.3.33), необходимо и достаточно, чтобы она обладала такими свойствами.

I. Элементы матрицы-функции

$$F_S(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (I - S(\lambda)) e^{i\lambda x} d\lambda$$

суммируемы на всей вещественной оси и дифференцируемы на положительной полуоси, причем

$$\int_0^{\infty} x \,|\, F'_S(x) \,|\, dx < \infty.$$

II. Уравнение

$$f(y) - \int_{-\infty}^{0} f(t) F_S(t + y)\, dt = 0 \quad (-\infty < y \leqslant 0)$$

не имеет ненулевых решений в пространстве $L_2(-\infty, 0]$ (по определению матрица-функция, или вектор-функция, $f(y)$ принадлежит пространству $L_2(-\infty, 0]$, если все ее элементы принадлежат этому пространству).

III. Уравнение

$$f(y) + \int_0^{\infty} f(t) F(t + y)\, dt = 0 \quad (0 \leqslant y < \infty),$$

где $F(x) = F_S(x) + \sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k x}$, не имеет ненулевых решений в пространстве $L_2[0, \infty)$.

IV. Число линейно независимых вектор-функций $g(y)$, удовлетворяющих уравнению

$$g(y) + \int_0^{\infty} g(t) F_S(t + y)\, dt = 0 \quad (0 \leqslant y < \infty)$$

и принадлежащих пространству $L_2[0, \infty)$, равно сумме рангов матриц m_k.

Доказать, что условия I—IV эквивалентны условиям I, IV и равенству

$$r = \frac{\ln \operatorname{Det} S(+0) - \ln \operatorname{Det} S(+\infty)}{2\pi i} - \frac{s}{2},$$

где r — сумма рангов матриц m_k, s — ранг матрицы $I - S(0)$.

§ 4. Обратные задачи Штурма — Лиувилля на конечном интервале

В этом параграфе рассматриваются краевые задачи, порождаемые на интервале $(0, \pi)$ уравнением Штурма — Лиувилля

$$-y'' + q(x) y = \lambda^2 y \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi) \tag{3.4.1}$$

с вещественным потенциалом $q(x) \in L_2[0, \pi]$ и разделенными граничными условиями вида

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \tag{3.4.2}$$

или

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0, \tag{3.4.3}$$

а также периодическими,

$$y(0) - y(\pi) = y'(0) - y'(\pi) = 0, \tag{3.4.4}$$

и антипериодическими,

$$y(0) + y(\pi) = y'(0) + y'(\pi) = 0, \tag{3.4.4'}$$

граничными условиями. Все эти задачи самосопряженны, и их собственные значения вещественны. Сохраняя обозначения § 5 гл. 1, будем обозначать собственные значения рассматриваемых краевых задач соответственно через $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$; $\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots$; $\mu_0 \leqslant \mu_2^- \leqslant \mu_2^+ \leqslant \ldots$; $\mu_1^- \leqslant \mu_1^+ \leqslant \mu_3^- \leqslant \mu_3^+ \leqslant \ldots$ Из теорем 1.5.1, 1.5.2 следует, что при $k \to \infty$ выполняются такие асимптотические равенства:

$$\lambda^k = k^2 + a_1 + \alpha_k, \quad \nu_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + a_1 + \beta_k,$$

$$\mu_k^\pm = k^2 + a_1 + \varepsilon_k^\pm, \tag{3.4.5}$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \{|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 + |\varepsilon_k^\pm|^2\} < \infty$. Далее, из классических осцилляционных теорем для решений уравнения Штурма — Лиувилля с вещественным потенциалом вытекает, что взаимное расположение этих собственных значений таково:

$$-\infty < \nu_1 < \lambda_1 < \nu_2 < \lambda_2 < \nu_3 < \ldots, \tag{3.4.6}$$

$$-\infty < \mu_0 < \mu_1^- \leqslant \lambda_1 \leqslant \mu_1^+ < \mu_2^- \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_2^+ < \ldots \tag{3.4.7}$$

(см. задачи 1, 2 настоящего параграфа).

Рассматриваемые в этом параграфе обратные задачи ставятся следующим образом.

А. Найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять две последовательности вещественных чисел для того, чтобы они были спектрами краевых задач, порождаемых одним и тем же уравнением (3.4.1) с вещественным потенциалом $q(x) \in W_2^n\ [0, \pi]$ и граничными условиями (3.4.2), (3.4.3), а также метод построения этого уравнения.

Б. Найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять две последовательности вещественных чисел для того, чтобы они были спектрами периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых одним и тем же уравнением (3.4.1) с вещественным потенциалом $q(x) \in \tilde{W}_2^n\ [0, \pi]$, и метод построения всех таких уравнений.

Для решения этих обратных задач можно использовать результаты предыдущего параграфа с помощью следующих лемм.

Лемма 3.4.1. *Если в уравнении (3.1.1) потенциал* $q(x)$ *суммируем на интервале* $(0, \pi)$ *и равен нулю при* $x > \pi$, *то*

$$e(\lambda, 0) = e^{i\lambda\pi}[s'(\lambda, \pi) - i\lambda s(\lambda, \pi)].$$

Доказательство. Так как функции $s(\lambda, x)$, $c(\lambda, x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.1.1), то решение $e(\lambda, x)$ этого же уравнения равно их линейной комбинации: $e(\lambda, x) = C_1 s(\lambda, x) + C_2 c(\lambda, x)$. Поскольку потенциал равен нулю при $x > \pi$, то $e(\lambda, x) = e^{i\lambda x}$ при $x \geqslant \pi$ и в точке $x = \pi$ должны выполняться равенства

$$e^{i\lambda\pi} = C_1 s(\lambda, \pi) + C_2 c(\lambda, \pi), \quad i\lambda e^{i\lambda\pi} = C_1 s'(\lambda, \pi) + C_2 c'(\lambda, \pi),$$

из которых определяются коэффициенты C_1 и C_2:

$$C_1 = e^{i\lambda\pi}[i\lambda c(\lambda, \pi) - c'(\lambda, \pi)], \quad C_2 = e^{i\lambda\pi}[s'(\lambda, \pi) - i\lambda s(\lambda, \pi)].$$

Следовательно, в рассматриваемом случае

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda\pi}\{[i\lambda c(\lambda, \pi) - c'(\lambda, \pi)]\, s(\lambda, x) + {}$$
$$+ [s'(\lambda, \pi) - i\lambda s(\lambda, \pi)]\, c(\lambda, x)\},$$
$$e(\lambda, 0) = e^{i\lambda\pi}[s'(\lambda, \pi) - i\lambda s(\lambda, \pi)],$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3.4.2. *Для того чтобы функции* $u(z)$, $v(z)$ *допускали представления*

$$u(z) = \sin \pi z + A\pi \frac{4z}{4z^2 - 1} \cos \pi z + \frac{f(z)}{z}, \tag{3.4.8}$$

$$v(z) = \cos \pi z - B\pi \frac{\sin \pi z}{z} + \frac{g(z)}{z}, \tag{3.4.8'}$$

где

$$f(z) = \int_0^\pi \tilde{f}(t) \cos zt\,dt, \quad \tilde{f}(t) \in L_2[0, \pi], \quad \int_0^\pi \tilde{f}(t)\,dt = 0,$$

$$g(z) = \int_0^\pi \tilde{g}(t) \sin zt\,dt, \quad \tilde{g}(t) \in L_2[0, \pi],$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$u(z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} k^{-2}(u_k^2 - z^2), \quad u_k = k - \frac{A}{k} + \frac{\alpha_k}{k}, \tag{3.4.9}$$

$$v(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2}\right)^{-2} (v_k^2 - z^2), \quad v_k = k - \frac{1}{2} - \frac{B}{k} + \frac{\beta_k}{k}, \tag{3.4.9'}$$

где α_k, β_k — *произвольные числовые последовательности, удовлетворяющие условиям*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 < \infty.$$

Доказательство. Применяя метод, неоднократно использовавшийся в § 5 гл. 1, устанавливаем, что нули функции $u(z)$, представимой в виде (3.4.8), образуют последовательность $\ldots -u_k, -u_{k-1}, \ldots, -u_1, u_0 = 0, u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k, \ldots$, в которой

$$u_k = k - \frac{A}{k} + \frac{\alpha_k}{k},$$

$$\alpha_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\left\{f(k) - \frac{Af'(k)}{k} + \frac{(-1)^{k+1}f(k)f'(k)}{\pi k} + O(k^{-2})\right\},$$

поэтому $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2 < \infty$. Так как $u(z)$ — целая нечетная функция экспоненциального типа, то из этой асимптотической формулы для ее нулей вытекает равенство

$$u(z) = Cz\prod_{k=1}^{\infty}k^{-2}(u_k^2 - z^2).$$

Для определения константы C можно воспользоваться равенством $\lim\limits_{y\to\infty} u(iy)[\sin \pi yi]^{-1} = 1$, из которого следует, что $C = \pi$. Тем самым для функции $u(z)$ необходимость сформулированных условий доказана.

Пусть теперь функция $u(z)$ представима в виде (3.4.9). Построим вспомогательную функцию

$$u_1(z) = \sin \pi z + A\pi\frac{4z}{4z^2 - 1}\cos \pi z + \frac{f_1(z)}{z},$$

где

$$f_1(z) = \varphi(z) + A\frac{\varphi'(z)}{z}, \quad \varphi(z) = \int_0^{\pi}\tilde{\varphi}(t)\cos zt\,dt,$$

$$\tilde{\varphi}(t) = c_1\cos t + 2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\alpha_k\cos kt,$$

а константа c_1 выбрана так, что

$$\int_0^{\pi}t^2\tilde{\varphi}(t)\,dt = -\varphi''(0) = 0.$$

Так как $\sum\limits_{k=2}^{\infty}|\alpha_k|^2 < \infty$, то $\tilde{\varphi}(t) \in L_2[0, \pi]$ и

$$f_1(z) = \int_0^{\pi}\tilde{\varphi}(t)\cos zt\,dt - A\int_0^{\pi}\tilde{\varphi}(t)\,t\frac{\sin zt}{z}\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi}\left[\tilde{\varphi}(t) - A\int_t^{\pi}\tilde{\varphi}(\xi)\,\xi d\xi\right]\cos zt\,dt = \int_0^{\pi}\tilde{f}_1(t)\cos zt\,dt,$$

где

$$\tilde{f}_1(t) = \tilde{\varphi}(t) - A\int_t^\pi \tilde{\varphi}(\xi)\,\xi d\xi \in L_2[0,\ \pi],$$

причем

$$\int_0^\pi \tilde{f}_1(t)\,dt = \int_0^\pi \tilde{\varphi}(t)\,dt - A\int_0^\pi dt\int_t^\pi \tilde{\varphi}(\xi)\,\xi d\xi = \int_0^\pi \tilde{\varphi}(t)\,[1 - At^2]\,dt = 0.$$

Таким образом, функция $u_1(z)$ допускает представление вида (3.4.8) и согласно предыдущему

$$u_1(z) = \pi z \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\left([u_k^{(1)}]^2 - z^2\right), \quad u_k^{(1)} = k - \frac{A}{k} + \frac{\alpha_k^{(1)}}{k}, \tag{3.4.10}$$

где

$$\alpha_k^{(1)} = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\left\{f_1(k) - \frac{A}{k} f_1'(k) + \frac{(-1)^{k+1} f_1(k)\,f_1'(k)}{\pi k} + O\left(k^{-2}\right)\right\}. \tag{3.4.10'}$$

Подставляя в последнее равенство вместо $f_1(k)$, $f_1'(k)$ их выражения через функцию $\varphi(z)$ и учитывая при этом, что $\varphi(k) = \pi(-1)^{k+1}\alpha_k$, получаем

$$\alpha_k^{(1)} = \alpha_k + \frac{f_1(k)\,f_1'(k)}{\pi^2 k} + O\left(k^{-2}\right).$$

Поэтому для разности нулей u_k, $u_k^{(1)}$ функций $u(z)$, $u_1(z)$ справедливо равенство

$$u_k - u_k^{(1)} = -\frac{f_1(k)\,f_1'(k)}{\pi^2 k^2} + O\left(k^{-3}\right),$$

или

$$u_k - u_k^{(1)} = k^{-2}\left[\delta_k + k^{-1} d_k\right], \tag{3.4.11}$$

где $\sup\limits_k |d_k| = d < \infty$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\delta_k| = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} |f_1(k)|\,|f_1'(k)| \leqslant \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{|f_1(k)|^2 + |f_1'(k)|^2\right\} < \infty. \tag{3.4.11'}$$

Так как $u(z) = u_1(z) + z^{-1}\{z[u(z) - u_1(z)]\}$, то для доказательства возможности представления функции $u(z)$ в виде (3.4.8) достаточно показать, что $z[u(z) - u_1(z)] \in CK^2(\pi)$ (см. § 1 гл. 2). Из асимптотических формул (3.4.10), (3.4.10′) видно, что начиная с некоторого $n = n_0$ на окружностях $|z| = n - \frac{1}{2}$ при всех

$k = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства

$$|[u_k^{(1)}]^2 - z^2| \geqslant \frac{|z|}{2}.$$

Поэтому, если $|z| = n - \frac{1}{2}$ и $n \geqslant n_0$, то

$$|z[u(z) - u_1(z)]| = |zu_1(z)| \left| \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{u_k^2 - z^2}{(u_k^{(1)})^2 - z^2} \right) - 1 \right| =$$

$$= |zu_1(z)| \left| \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \varepsilon_k(z)) - 1 \right|,$$

где

$$|\varepsilon_k(z)| = \left| \frac{u_k^2 - [u_k^{(1)}]^2}{[u_k^{(1)}]^2 - z^2} \right| \leqslant \frac{Ck\,|u_k - u_k^{(1)}|}{|z|} \leqslant \frac{C\,\{k^{-1}\,|\delta_k| + k^{-2}\,|d_k|\}}{|z|},$$

откуда следует, что

$$|z[u(z) - u_1(z)]| \leqslant |z|\,|u_1(z)|\,C \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k(z)| \leqslant$$

$$\leqslant C\,|u_1(z)| \sum_{k=1}^{\infty} \{k^{-1}\,|\delta_k| + k^{-2}\,|d_k|\} \leqslant C\,|u_1(z)|$$

(здесь и далее через C обозначаются различные константы, не зависящие от k и z). Из этой оценки и неравенства $\sup\limits_{\operatorname{Im} z \geqslant 0} |e^{iz\pi} u_1(z)| = M < \infty$, очевидного для функций, представимых в виде (3.4.8), вытекает, что на полуокружностях $z = \left(n - \frac{1}{2}\right) e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $n \geqslant n_0$, выполняются неравенства

$$|e^{iz\pi} z\,[u(z) - u_1(z)]| \leqslant C < \infty, \tag{3.4.12}$$

в которых константа C не зависит от n.

Покажем теперь, что на вещественной оси $-\infty < x < \infty$ справедлива оценка

$$|x\,[u(x) - u_1(x)]| \leqslant C\,(1 + |x|)^{-1} \quad (C < \infty), \tag{3.4.13}$$

для чего, очевидно, достаточно доказать неравенство

$$\varlimsup_{x \to +\infty} |x^2\,[u(x) - u_1(x)]| < \infty. \tag{3.4.13'}$$

Пусть $x \in \left[n - \frac{1}{2},\ n + \frac{1}{2}\right]$. Тогда

$$u(x)-u_1(x)=u(x_1)\left\{\prod_{k=1}^{\infty}\frac{u_k^2-x^2}{[u_k^{(1)}]^2-x^2}-1\right\}=$$

$$=\frac{u_1(x)}{u_n^{(1)}-x}\,\frac{u_n^2-[u_n^{(1)}]^2}{u_n^{(1)}+x}(1+\delta_n(x))+u_1(x)\,\delta_n(x),$$

где

$$\delta_n(x)=\prod_{k\neq n}\frac{u_k^2-x^2}{[u_k^{(1)}]^2-x^2}-1=\prod_{k\neq n}(1+\varepsilon_k(x))-1,$$

$$\varepsilon_k(x)=\frac{u_k^2-[u_k^{(1)}]^2}{[u_k^{(1)}]^2-x^2}.$$

Из асимптотических формул (3.4.10), (3.4.11) следует, что

$$[u_k^{(1)}]^2-u_k^2|\leqslant C\{k^{-1}|\delta_k|+k^{-2}d\}$$

и начиная с некоторого $n=n_0$ при всех $x\in\left[n-\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2}\right]$ и $k\neq n$

$$|[u_k^{(1)}]^2-x^2|\geqslant Cx|k-n|,\quad |u_n^{(1)}+x|\geqslant x.$$

Поэтому

$$\left|\frac{u_n^2-[u_n^{(1)}]^2}{u_n^{(1)}+x}\right|\leqslant\frac{C}{x^2},$$

$$|\varepsilon_k(x)|\leqslant\frac{C}{xk\,|k-n|}\{|\delta_k|+k^{-1}d\}=\frac{C}{xn}\left|\frac{1}{k}-\frac{1}{k-n}\right|\times$$

$$\times\{|\delta_k|+k^{-1}d\}\leqslant\frac{C}{x^2}\{|\delta_k|+d[k^{-2}+(k-n)^{-2}]\}\quad(k\neq n),$$

$$\delta_n(x)\leqslant C\sum_{k\neq n}|\varepsilon_k(x)|\leqslant\frac{C}{x^2}\sum_{k\neq n}\{|\delta_k|+d[k^{-2}+(k-n)^{-2}]\}\leqslant\frac{C}{x^2}.$$

Таким образом, если $x\in\left[n-\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2}\right]$ и $n\geqslant n_0$, то

$$|u(x)-u_1(x)|\leqslant\frac{C}{x^2}\left\{\left|\frac{u_1(x)}{u_n^{(1)}-x}\right|+|u_1(x)|\right\},$$

где константа C не зависит от n. Поскольку функции, представимые в виде (3.4.8), и их производные равномерно ограничены в любой полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant b < \infty$,

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left\{\left|\frac{u_1(x)}{u_n^{(1)}-x}\right| + |u_1(x)|\right\} =$$

$$= \sup_{-\infty<x<\infty}\left\{\left|\frac{1}{u_n^{(1)}-x}\int_{u_n^{(1)}}^{x} u_1'(\xi)\,d\xi\right| + |u_1(x)|\right\} \leqslant C < \infty,$$

$$|u(x) - u_1(x)| \leqslant Cx^{-2}\left(x \in \left[n - \frac{1}{2},\ n + \frac{1}{2}\right],\ n \geqslant n_0\right),$$

что эквивалентно неравенству (3.4.13′).

Оценка (3.4.13) показывает, что четная функция $z[u(z) - u_1(z)]$ суммируема с квадратом и ограничена на вещественной оси. Поэтому, учитывая неравенства (3.4.12) и теорему о максимуме модуля аналитической функции, получаем

$$\sup_{\operatorname{Im} z \geqslant 0} |e^{iz\pi} z[u(z) - u_1(z)]| \leqslant C < \infty,$$

$$z[u(z) - u_1(z)] \leqslant C \exp|\operatorname{Im} z\pi|.$$

Как показано в § 1 гл. 2, отсюда следует, что $z[u(z) - u_1(z)] \in CK^2(\pi)$, т. е.

$$z[u(z) - u_1(z)] = \int_0^{\pi} f_2(t)\cos zt\,dt, \quad f_2(t) \in L_2[0, \pi],$$

и функция $u(z)$ представима в виде (3.4.8).

Доказательство леммы для функции $v(z)$ проводится аналогично.

Теорема 3.4.1. *Для того чтобы две последовательности вещественных чисел $\{\lambda_k\}$, $\{\nu_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ были спектрами краевых задач, порождаемых одним и тем же уравнением Штурма — Лиувилля $-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ с вещественным потенциалом $q(x) \in L_2[0, \pi]$ и граничными условиями $y(0) = y(\pi) = 0$, $y(0) = y'(\pi) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы они перемежались, $-\infty < \nu_1 < \lambda_1 < \nu_2 < \lambda_2 < \nu_3 < \ldots$, и удовлетворяли асимптотическим формулам*

$$\lambda = k^2 - 2A + \alpha_k, \quad \nu_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - 2A + \beta_k, \tag{3.4.14}$$

где A — произвольное вещественное число и $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2 < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2 < \infty$.

Доказательство. Необходимость этих условий была установлена в начале параграфа. При доказательстве достаточности можно, очевидно, без ограничения общности считать все числа λ_k, ν_k положительными. Очевидно также, что асимптотические формулы (3.4.14) эквивалентны формулам

$$\sqrt{\lambda_k} = k - \frac{A}{k} + \frac{\tilde{\alpha}_k}{k}, \quad \sqrt{\nu_k} = k - \frac{1}{2} - \frac{A}{k} + \frac{\tilde{\beta}_k}{k}, \tag{3.4.14'}$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\tilde{\alpha}_k|^2 < \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\tilde{\beta}_k|^2 < \infty$. Построим по заданным последовательностям $\{\lambda_k\}$, $\{\nu_k\}$ функции

$$zs(z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} k^{-2} (\lambda_k - z^2), \quad s_1(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2}\right)^{-2} (\nu_k - z^2) \tag{3.4.15}$$

и положим

$$e(z) = e^{iz\pi} [s_1(z) - izs(z)]. \tag{3.4.16}$$

Из асимптотических формул (3.4.14′) и леммы 3.4.2 следует, что

$$zs(z) = \sin \pi z + A\pi \frac{4z}{4z^2 - 1} \cos \pi z + \frac{f(z)}{z},$$

$$s_1(z) = \cos \pi z - A\pi \frac{\sin \pi z}{z} + \frac{g(z)}{z},$$

где

$$f(z) = \int_0^{\pi} \tilde{f}(t) \cos zt dt, \quad f(0) = 0, \quad \tilde{f}(t) \in L_2[0, \pi],$$

$$g(z) = \int_0^{\pi} \tilde{g}(t) \sin zt dt, \quad \tilde{g}(t) \in L_2[0, \pi].$$

Поэтому

$$e(z) = 1 - \frac{iA\pi}{z} - \frac{e^{iz\pi}}{z} \left\{ \frac{iA\pi}{4z^2 - 1} \cos \pi z + g(z) - if(z) \right\} \tag{3.4.17}$$

и в силу леммы 1.3.1 в верхней полуплоскости при $|z| \to \infty$ выполняется асимптотическое равенство

$$e(z) = 1 + O(z^{-1}). \tag{3.4.18}$$

Подсчитаем приращение аргумента функции $e(z)$, когда z пробегает вещественную ось. Из перемежаемости корней функций $s_1(x)$, $xs(x)$ и формул (3.4.15) следует, что на сегментах $[-\sqrt{\lambda_k}, -\sqrt{\lambda_{k-1}}]$, $[\sqrt{\lambda_{k-1}}, \sqrt{\lambda_k}]$ аргумент функции $s_1(x) - ixs(x)$ получает приращение, равное $-\pi$. Поэтому, когда x пробегает сегмент $[-\sqrt{\lambda_k}, \sqrt{\lambda_k}]$, аргумент этой функции получает приращение, равное $-2k\pi$, а приращение аргумента функции $e^{iz\pi}$ на этом же сегменте равно, очевидно, $2\sqrt{\lambda_k}\pi$. Таким образом, на сегменте

$[-\sqrt{\lambda_k}, \sqrt{\lambda_k}]$ приращение аргумента функции $e(x)$ равно $2\pi [\sqrt{\lambda_k} - k]$ и стремится к нулю при $k \to \infty$. Отсюда, учитывая равенство $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e(x) = 1$, убеждаемся, что приращение аргумента функции $e(x)$, когда x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, равно нулю:

$$\arg e(+\infty) - \arg e(-\infty) = 0. \tag{3.4.19}$$

В силу принципа аргумента из этого равенства и асимптотического равенства (3.4.18) следует, что функция $e(z)$ не имеет корней в замкнутой верхней полуплоскости.

Покажем теперь, что функция

$$S(\lambda) = \frac{e(-\lambda)}{e(\lambda)} \quad (-\infty < \lambda < \infty) \tag{3.4.20}$$

удовлетворяет условиям I, II с $n = 0$ и III и, значит, является функцией рассеяния некоторой краевой задачи (3.1.1), (3.1.2), обладающей свойствами 1, 2 (см. следствие теоремы 3.3.3). Действительно, она непрерывна, $S(\lambda) = \overline{S(-\lambda)} = [S(-\lambda)]^{-1}$, $S(0) = 1$ и при $\lambda \to \pm\infty$

$$1 - S(\lambda) = -\frac{2iA\pi}{\lambda} + \frac{2i}{\lambda} \operatorname{Im} e^{i\lambda\pi} [g(\lambda) + if(\lambda)] + O(\lambda^{-2}). \tag{3.4.21}$$

Так как функции $g(\lambda)$, $f(\lambda)$ ограничены и принадлежат пространству $L_2(-\infty, \infty)$, то функция $F_S(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 - S(\lambda))\, e^{i\lambda x} d\lambda$ ограничена и принадлежит пространству $L_2(-\infty, \infty)$. Кроме того, из формулы (3.4.21) следует, что

$$1 - S(\lambda) = \frac{-2iA\pi}{\lambda + i} + \frac{\psi(\lambda)}{1 + |\lambda|},$$

где $\psi(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty)$. Поэтому при положительных x

$$F_S(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{-2iA\pi}{\lambda + i} + \frac{\psi|\lambda|}{1 + |\lambda|}\right\} e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{1 + |\lambda|} e^{i\lambda x} d\lambda,$$

откуда видно, что функция $F_S(x)$ абсолютно непрерывна на положительной полуоси $F_S'(x) \in L_2[0, \infty)$. Наконец, так как $e(-z)$, $e(z)$ — целые функции и функция $e(z)$ не имеет корней в замкнутой верхней полуплоскости, то в этой полуплоскости функция $1 - S(z)$ голоморфна, причем согласно (3.4.17), (3.4.20) и лемме 1.3.1

$$|1 - S(z)| \leqslant \frac{C}{|z|} e^{2\pi \operatorname{Im} z} \quad (\operatorname{Im} z \geqslant 0),$$

откуда в силу леммы Жордана следует, что $F_S(x) = 0$ при $x > 2\pi$. Таким образом, функция $S(\lambda)$ удовлетворяет условиям I и III.

Условие II с $n = 0$ тоже выполнено, так как согласно (3.4.20) и (3.4.19)

$$\arg S(0) - \arg S(+\infty) = \arg e(0) - \arg e(-\infty) - \arg e(0) + \\ + \arg e(+\infty) = \arg e(+\infty) - \arg e(-\infty) = 0.$$

Следовательно, существует вещественный потенциал $q(x)$, равный нулю при $x > \pi$, $q(x) \in L_2\ [0, \pi]$, и функция $S(\lambda)$ является функцией рассеяния краевой задачи

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda^2 y, \quad y(0) = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty).$$

Сопоставляя определение функции рассеяния и формулу (3.4.20), получаем

$$\frac{e(-\lambda, 0)}{e(\lambda, 0)} = \frac{e(-\lambda)}{e(\lambda)}, \text{ или } \frac{e(-\lambda, 0)}{e(-\lambda)} = \frac{e(\lambda, 0)}{e(\lambda)}.$$

В правой (левой) части этого равенства стоит функция, голоморфная в замкнутой верхней (нижней) полуплоскости и равномерно стремящаяся в ней к единице при $|\lambda| \to \infty$. Поэтому $e(\lambda) \equiv e(\lambda, 0)$, откуда согласно (3.4.16) и лемме 3.4.1 следует, что

$$s_1(z) - izs(z) = s'(z, \pi) - izs(z, \pi)$$

и, значит,

$$s(z) = s(z, \pi), \quad s_1(z) = s'(z, \pi).$$

Эти равенства показывают, что последовательности $\{\lambda_k\}$, $\{\nu_k\}$ образованы квадратами корней функций $s(z, \pi)$ и $s'(z, \pi)$, т. е. являются спектрами краевых задач, порождаемых уравнением $-y'' + q(x)\,y = \mu y$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ и граничными условиями $y(0) = y(\pi) = 0$, $y(0) = y'(\pi) = 0$, что и требовалось доказать. Приведенное доказательство содержит также метод восстановления потенциала $q(x)$ по спектрам $\{\lambda_k\}$, $\{\nu_k\}$.

Следствие. *Для того чтобы две последовательности вещественных чисел $\{\lambda_k\}$, $\{\nu_k\}$ были спектрами краевых задач, порождаемых одним и тем же уравнением (3.4.1) с вещественным потенциалом $q(x) \in W_2^n\ [0, \pi]$ и граничными условиями (3.4.2), (3.4.4), необходимо и достаточно, чтобы они перемежались и удовлетворяли асимптотическим формулам*

$$\sqrt{\lambda_k} = k + \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+2} a_{2j+1}(2k)^{-2j-1} + k^{-n-1}\alpha_k,$$

$$\sqrt{\nu_k} = k - \frac{1}{2} + \sum_{1 \leqslant 2j+1 \leqslant n+2} b_{2j+1}(2k-1)^{-2j-1} + k^{-n-1}\beta_k,$$

где $a_1 = b_1$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 < \infty$.

Доказательство. Необходимость этих условий вытекает из теоремы 1.5.1 и перемежаемости собственных значений рассматриваемых краевых задач. Наоборот, если эти условия выполнены, то по теореме 3.4.1 последовательности $\{\lambda_k\}$, $\{\nu_k\}$ являются спектрами краевых задач (3.4.1), (3.4.2) и (3.4.1), (3.4.3) с одним и тем же вещественным потенциалом $q(x) \in L_2[0, \pi]$, причем в силу следствия теоремы 1.5.1 $q(x) \in W_2^n[0, \pi]$.

Перейдем теперь к решению задачи Б. Заметим прежде всего, что если последовательность $-\infty < \mu_0 < \mu_1^- \leqslant \mu_1^+ < \mu_2^- \leqslant \mu_2^+ < \mu_3^- \leqslant \leqslant \mu_3^+ < \ldots$ состоит из собственных значений периодической $(\mu_{2k}^\pm)$ и антипериодической $(\mu_{2k+1}^\pm)$ краевых задач, порождаемых уравнением (3.4.1) с вещественным потенциалом $q(x) \in \widetilde{W}_2^n[0, \pi]$, то последовательность $-\infty < 0 < (\mu_1^- - \mu_0) \leqslant (\mu_1^+ - \mu_0) < (\mu_2^- - \mu_0) \leqslant (\mu_2^+ - \mu_0) < \ldots$ состоит из собственных значений периодической $(\mu_{2k}^\pm - \mu_0)$ и антипериодической $(\mu_{2k+1}^\pm - \mu_0)$ краевых задач, порождаемых уравнением $-y'' + [q(x) - \mu_0]\, y = \mu y$ с вещественным потенциалом $q(x) - \mu_0$, тоже принадлежащим пространству $\widetilde{W}_2^n[0, \pi]$. Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности, можно считать $\mu_0 = 0$.

Вычисляя по формуле (1.3.4) характеристические функции $\chi_p(\lambda)$, $\chi_a(\lambda)$ периодической и антипериодической краевых задач, находим

$$\chi_p(\lambda) = 2[1 - u_+(\lambda)], \quad \chi_a(\lambda) = 2[1 + u_+(\lambda)], \tag{3.4.22}$$

где функция Ляпунова

$$u_+(\lambda) = \frac{1}{2}[c(\lambda, \pi) + s'(\lambda, \pi)] \tag{3.4.23}$$

называется также дискриминантом Хилла. Дискриминант Хилла легко восстанавливается по каждой из последовательностей μ_0, μ_2^-, $\mu_2^+, \ldots$ или μ_1^-, μ_1^+, μ_3^-, μ_3^+, $\ldots$ в виде бесконечного произведения, но по нему нельзя однозначно восстановить потенциал, так как, например, уравнения

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda^2 y, \quad -y'' + \tilde{q}(x + c)\, y = \lambda^2 y \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$$

при любом $c \in (-\infty, \infty)$ имеют одинаковые дискриминанты Хилла, если $\tilde{q}(x)$ является периодическим (с периодом π) продолжением функции $q(x)$ на всю вещественную ось. С другой стороны, функции $s(\lambda, \pi)$, $u_+(\lambda)$ и

$$u_-(\lambda) = \frac{1}{2}[c(\lambda, \pi) - s'(\lambda, \pi)] \tag{3.4.24}$$

определяют потенциал однозначно, поскольку $s'(\lambda, \pi) = u_+(\lambda) - u_-(\lambda)$, а знания функций $s(\lambda, \pi)$, $s'(\lambda, \pi)$ согласно теореме 3.4.1 достаточно для восстановления потенциала.

Согласно формулам (3.4.23), (3.4.24) и (1.3.11)

$$u_+(\lambda) = \cos\lambda\pi + \frac{\sin\lambda\pi}{2\lambda}\int\limits_0^\pi q(t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi [K_t'(\pi, t; 0) - K_x'(\pi, t; \infty)]\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\,dt, \qquad (3.4.23')$$

$$u_-(\lambda) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi [K_t'(\pi, t; 0) + K_x'(\pi, t; \infty)]\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\,dt, \qquad (3.4.24')$$

откуда, используя лемму 1.3.1, при $|z| \to \infty$ находим

$$u_-(z) = o(z^{-1}\exp|\operatorname{Im} z\pi|), \qquad (3.4.25)$$

$$u_+(z) = \cos\pi z + O(z^{-1}\exp|\operatorname{Im} z\pi|), \qquad (3.4.26)$$

$$u_+'(z) = -\pi\sin\pi z + O(z^{-1}\exp|\operatorname{Im} z\pi|). \qquad (3.4.26')$$

Из оценки (3.4.25) и неравенства $|s(z, \pi)| \geqslant C|z|^{-1}\exp|\operatorname{Im} z\pi|$, выполняющегося на контурах $K_n = C\left(n + \frac{1}{2}\right)$ (см. лемму 1.3.2), следует, что

$$0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_n}\frac{u_-(\xi)}{s(\xi, \pi)(\xi - z)}\,d\xi =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{u_-(z)}{s(z, \pi)} + \sum_{k=1}^n \frac{2\sqrt{\lambda_k}\,u_-(\sqrt{\lambda_k})}{\dot{s}(\sqrt{\lambda_k}, \pi)(\lambda_k - z^2)}\right\},$$

т. е.

$$u_-(z) = s(z, \pi)\sum_{k=1}^\infty \frac{2\sqrt{\lambda_k}\,u_-(\sqrt{\lambda_k})}{\dot{s}(\sqrt{\lambda_k}, \pi)(z^2 - \lambda_k)},$$

где $\{\lambda_k\}$ — спектр краевой задачи (3.4.1), (3.4.2), совпадающий с квадратами корней ее характеристической функции $s(\lambda, \pi)$, а точка означает дифференцирование по λ. Так как определитель Вронского решений $c(\lambda, x)$, $s(\lambda, x)$ тождественно равен единице, $c(\lambda, \pi)\,s'(\lambda, \pi) - c'(\lambda,\pi)\,s(\lambda, \pi) = 1$, и $c(\lambda, \pi)\,s'(\lambda, \pi) = u_+^2(\lambda) - u_-^2(\lambda)$, то

$$-u_-^2(\lambda) - c'(\lambda, \pi)\,s(\lambda, \pi) = 1 - u_+^2(\lambda). \qquad (3.4.27)$$

Полагая в этом равенстве $\lambda = \sqrt{\lambda_k}$, получаем

$$-u_-^2(\sqrt{\lambda_k}) = 1 - u_+^2(\sqrt{\lambda_k}),$$

$$u_-(\sqrt{\lambda_k}) = [\operatorname{sign} u_-(\sqrt{\lambda_k})]\sqrt{u_+^2(\sqrt{\lambda_k}) - 1}.$$

Поэтому функция $u_-(z)$ однозначно определяется спектром $\{\lambda_k\}$ краевой задачи (3.4.1), (3.4.2), дискриминантом Хилла $u_+(z)$

и последовательностью $\operatorname{sign} u_-(\sqrt{\lambda_k})$ по формуле

$$u_-(z) = s(z, \pi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{\lambda_k}\,[\operatorname{sign} u_-(\sqrt{\lambda_k})]\sqrt{u_+^2(\sqrt{\lambda_k})-1}}{(z^2-\lambda_k)\,\dot{s}(\sqrt{\lambda_k}, \pi)}, \tag{3.4.28}$$

причем функция $s(z, \pi)$ в свою очередь однозначно определяется спектром $\{\lambda_k\}$ по формуле

$$s(z, \pi) = \pi \prod_{k=1}^{\infty} k^{-2}(\lambda_k - z^2). \tag{3.4.28$'$}$$

Таким образом, для однозначного восстановления потенциала достаточно знать спектр периодической (μ_0, μ_2^-, μ_2^+, ...), или антипериодической (μ_1^-, μ_1^+, μ_3^-, μ_3^+, ...), краевой задачи, спектр λ_1, λ_2, λ_3, ... краевой задачи (3.4.1), (3.4.2) и последовательность $\operatorname{sign} u_-(\sqrt{\lambda_1})$, $\operatorname{sign} u_-(\sqrt{\lambda_2})$, $\operatorname{sign} u_-(\sqrt{\lambda_3})$, ...

Для описания характеристических свойств спектров периодической и антипериодической краевых задач нужно изучить свойства дискриминантов Хилла $u_+(z)$. При этом, как отмечалось выше, можно, не ограничивая общности, считать $\mu_0 = 0$.

Из формул (3.4.23′), (3.4.22) видно, что $u_+(z)$ — четная целая функция экспоненциального типа π, принимающая значение, равное $+1$, только в точках

$$\alpha_0 = \sqrt{\mu_0} = 0, \ \alpha_{2k}^{\pm} = \sqrt{\mu_{2k}^{\pm}}, \ \alpha_{-2k}^{\pm} = -\alpha_{2k}^{\mp} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

а значение, равное -1, — только в точках

$$\alpha_{2k-1}^{\pm} = \sqrt{\mu_{2k-1}^{\pm}}, \ \alpha_{-(2k-1)}^{\pm} = -\alpha_{2k-1}^{\mp} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

причем их взаимное расположение согласно (3.4.7) таково: $\ldots -\alpha_2^+ \leqslant -\alpha_2^- < -\alpha_1^+ \leqslant -\alpha_1^- < \alpha_0^- = 0 = \alpha_0^+ < \alpha_1^- \leqslant \alpha_1^+ < \alpha_2^- \leqslant \alpha_2^+ < \ldots$ Поскольку на концах сегментов $[\alpha_k^-, \alpha_k^+]$ функция $u_+(z)$ принимает одинаковые значения, равные $(-1)^k$, в каждом из них лежит корень $\gamma_k = -\gamma_{-k}$ ее производной. Используя оценку (3.4.26′) и теорему Руше, легко установить, что в каждой полосе $|\operatorname{Re} z| \leqslant n + \frac{1}{2}$ при больших n функция $u'_+(z)$ имеет ровно $2n+1$ корень, а из асимптотических формул (3.4.5) видно, что $-\left(n+\frac{1}{2}\right) < \gamma_{-n} < \gamma_{-n+1} < \cdots < \gamma_0 = 0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \left(n+\frac{1}{2}\right)$. Поэтому все корни γ_k простые, других корней у производной $u'_+(z)$ нет, и график функции $u_+(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ имеет вид, изображенный на рис. 4.

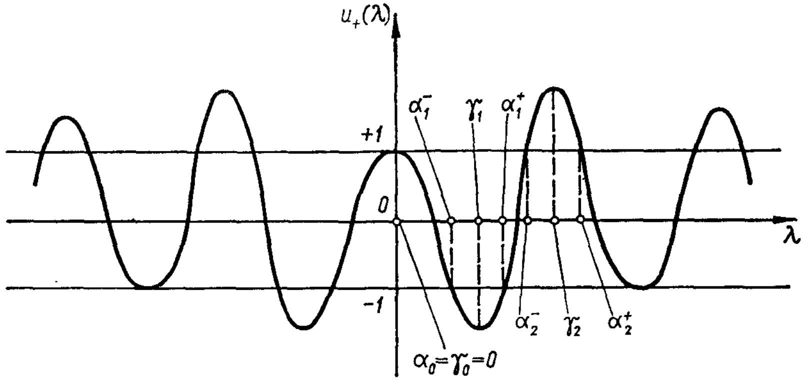

Рис. 4.

Выберем в верхней полуплоскости однозначную ветвь радикала $\sqrt{1-u_+^2(z)}$ так, чтобы он был положителен на интервале $(0, \alpha_1^-)$, и положим

$$\theta(z)=\int_0^z \frac{-u_+'(\xi)}{\sqrt{1-u_+^2(\xi)}}\,d\xi \quad (\operatorname{Im} z>0). \tag{3.4.29}$$

Очевидно,

$$u_+(z)=\cos\theta(z), \tag{3.4.30}$$

причем это равенство выполняется при всех значениях z, если функцию $\theta(z)$ продолжить по непрерывности на границу верхней полуплоскости, а затем аналитически — в нижнюю полуплоскость формулой $\theta(\bar{z})=\overline{\theta(z)}$. Отметим, что при таком продолжении $\theta(z)$ оказывается однозначной голоморфной функцией во всей комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезков $[\alpha_k^-, \alpha_k^+]$ $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$, и определяется в ней так же равенством (3.4.29). Покажем, что функция $\theta(z)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость (рис. 5, *а*) на область $\Theta_+\{h_k\}$ (рис. 5, *б*):

$$\Theta_+\{h_k\}=\{\theta:\operatorname{Im}\theta>0\}\setminus\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\{\theta:\operatorname{Re}\theta=k\pi,\ 0\leqslant\operatorname{Im}\theta\leqslant h_k\}. \tag{3.4.31}$$

Отсюда следует, что ее аналитическое продолжение $(\theta(\bar{z})=\overline{\theta(z)})$ конформно отображает z-плоскость с горизонтальными разрезами $[\alpha_k^-, \alpha_k^+]$ в θ-плоскость с вертикальными разрезами $[k\pi-ih_k, k\pi+ih_k]$.

Лемма 3.4.3. *Определенная формулой (3.4.29) функция $\theta(z)$ осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости*

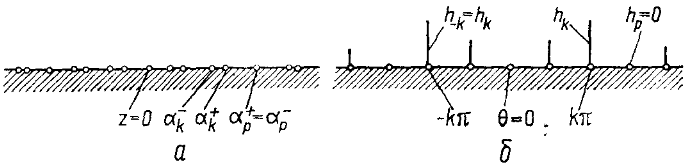

Рис. 5.

на область $\Theta_+\{h_k\}$ *вида (3.4.31), фиксированное условиями*

$$\theta(0)=0,\quad \lim_{y\to+\infty}(iy)^{-1}\theta(y)=\pi.$$

При этом $h_0=0$, $h_k=h_{-k}$ *и, если* $q(x)\in\widetilde{W}_2^n[0,\pi]$, *то*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(k^{n+1}h_k)^2<\infty.$$

Доказательство. При сделанном выборе ветви функции $\sqrt{1-u_+^2(z)}$ она принимает положительные значения на интервалах $(\alpha_{2k}^+, \alpha_{2k+1}^-)$ и отрицательные значения на интервалах $(\alpha_{2k+1}^+, \alpha_{2k+2}^-)$. На интервалах (α_k^-, α_k^+) ее значения чисто мнимые, причем на интервалах $(\alpha_{2k+1}^-, \alpha_{2k+1}^+)$ $\operatorname{Im}\sqrt{1-u_+^2(z)}>0$, а на интервалах $(\alpha_{2k}^-, \alpha_{2k}^+)$ $\operatorname{Im}\sqrt{1-u_+^2(z)}<0$. Так как точки $\gamma_k\in[\alpha_k^-, \alpha_k^+]$ являются простыми корнями производной $u_+'(z)$, то функция $-u_+'(z)$ положительна на интервалах $(\gamma_{2k}, \gamma_{2k+1})$ и отрицательна на интервалах $(\gamma_{2k+1}, \gamma_{2k+2})$. Следовательно, предельные значения подынтегральной функции в формуле (3.4.29) на границе $z=\lambda+i0$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ верхней полуплоскости удовлетворяют таким неравенствам:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{-u_+'(\lambda)}{\sqrt{1-u_+^2(\lambda)}}>0,\quad \alpha_k^+<\lambda<\alpha_{k+1}^-,\\
&\frac{-u_+'(\lambda)}{i\sqrt{1-u_+^2(\lambda)}}>0,\quad \alpha_k^-<\lambda<\gamma_k,\\
&\frac{-u_+'(\lambda)}{i\sqrt{1-u_+^2(\lambda)}}<0,\quad \gamma_k<\lambda<\alpha_k^+.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.4.32)$$

Поэтому, когда λ изменяется от нуля до α_1^-, функция $\theta(\lambda)$ монотонно возрастает от нуля до $\theta(\alpha_1^-)$, и так как при этом $u_+(\lambda)$ монотонно убывает от $+1$ до -1, то $\theta(\alpha_1^-)=\pi$. При дальнейшем изменении λ от α_1^- до γ_1 вещественная часть функции $\theta(\lambda)$ остается равной π, а мнимая часть сначала возрастает от нуля до $h_1 = (i)^{-1}\theta(\gamma_1)$, а затем убывает от h_1 до нуля, так как $\cos\theta(\alpha_1^+) = u_+(\alpha_1^+) = -1$, причем $u_+(\gamma_1) = \cos\theta(\gamma_1) = \cos(\pi + ih_1) = -\operatorname{ch} h_1$. Таким образом, когда λ пробегает в положительном направлении отрезки $[0, \alpha_1^-]$ и $[\alpha_1^-, \alpha_1^+]$, точка $\theta(\lambda)$ пробегает в положительном направлении часть границы области $\Theta_+\{h_k\}$, состоящую из отрезка $[0, \pi]$ и разреза $\operatorname{Re}\theta = \pi$, $0 \leqslant \operatorname{Im}\theta \leqslant h_1$.

Далее, используя неравенства (3.4.32), по индукции устанавливаем, что, когда λ пробегает в положительном направлении отрезки $[\alpha_k^+, \alpha_{k+1}^-]$ и $[\alpha_{k+1}^-, \alpha_{k+1}^+]$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, точка $\theta(\lambda)$ пробегает в положительном направлении часть границы области $\Theta_+\{h_k\}$, состоящую из отрезка $[k\pi, (k+1)\pi]$ и разреза $\operatorname{Re}\theta = (k+1)\pi$, $0 \leqslant \operatorname{Im}\theta \leqslant h_{k+1}$, причем

$$u_+(\gamma_{k+1}) = (-1)^{k+1}\operatorname{ch} h_{k+1}. \tag{3.4.33}$$

Следовательно, функция $\theta(z)$ взаимно однозначно отображает границу верхней полуплоскости на границу области $\Theta_+\{h_k\}$, сохраняя направление обхода. Кроме того, оценки (3.4.26), (3.4.26′) показывают, что на полуокружностях $C_n^+ = \left\{z : z = \left(n + \frac{1}{2}\right)e^{i\varphi},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\right\}$ при больших n подынтегральная функция в (3.4.29) равна $\pi(1 + O(z^{-1}))$ и, значит, они отображаются функцией $\theta(z)$ взаимно однозначно на кривые $\Gamma_n^+ = \left\{\theta : \theta = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right)e^{i\varphi} \times (1 + \varepsilon_n(\varphi)),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\right\}$, $|\varepsilon_n(\varphi)| = O(n^{-1})$, сохраняя направление обхода. Отсюда согласно принципу соответствия границ следует, что функция $\theta(z)$ конформно отображает полукруги $\left\{z : |z| < n + \frac{1}{2},\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$ в подобласти области $\Theta_+\{h_k\}$, ограниченные сверху кривыми Γ_n^+, откуда ввиду произвольности n вытекает, что и вся верхняя полуплоскость отображается функцией $\theta(z)$ конформно на область $\Theta_+\{h_k\}$, причем $\theta(0) = 0$, $\lim\limits_{|z|\to\infty} z^{-1}\theta(z) = \pi$. Равенства $h_0 = 0$, $h_k = h_{-k}$ являются очевидным следствием формул (3.4.33) и четности функции $u_+(z)$.

Для завершения доказательства леммы нужно еще оценить длину h_k разрезов $\operatorname{Re}\theta = k\pi$, $0 \leqslant \operatorname{Im}\theta \leqslant h_k$. Так как $u_+(\alpha_k^\pm) = (-1)^k$ и $u'_+(\gamma_k) = 0$, то по формуле Тейлора $(-1)^k = u_+(\alpha_k^\pm) = u_+(\gamma_k) + \frac{1}{2}(\alpha_k^\pm - \gamma_k)^2 u''_+(\gamma_k^\pm)$, откуда согласно (3.4.33) находим

$$\operatorname{ch} h_k = 1 + \frac{(-1)^k}{2}(\alpha_k^\pm - \gamma_k)^2 u''_+(\gamma_k^\pm),$$

где точки $\gamma_k^\pm$ лежат между $\alpha_k^\pm$ и γ_k. Поэтому

$$1+\frac{1}{2}h_k^2 \leqslant 1+\frac{1}{2}(\alpha_k^\pm-\gamma_k)^2 M_2(k),\quad M_2(k)=\max_{\alpha_k^-\leqslant\lambda\leqslant\alpha_k^+}|u''_+(\lambda)|$$

и

$$h_k \leqslant \frac{1}{2}(\alpha_k^+-\alpha_k^-)\sqrt{M_2(k)},$$

поскольку одно из чисел $|\alpha_k^- - \gamma_k|$, $|\alpha_k^+ - \gamma_k|$ не превосходит $\frac{1}{2}|\alpha_k^+ - \alpha_k^-|$. Согласно неравенству Бернштейна для производных ограниченных целых функций экспоненциального типа

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty}|u''_+(\lambda)| \leqslant \pi^2 M,\quad M=\sup_{-\infty<\lambda<\infty}|u_+(\lambda)|<\infty,$$

так что

$$h_k \leqslant \frac{\pi\sqrt{M}}{2}(\alpha_k^+-\alpha_k^-)=\frac{\pi\sqrt{M}}{2}(\sqrt{\mu_k^+}-\sqrt{\mu_k^-}), \tag{3.4.34}$$

и в силу теоремы 1.5.2

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(k^{n+1}h_k)^2<\infty,$$

если $q(x)\in \widetilde{W}_2^n[0,\pi]$. Лемма доказана.

Замечание. Представление (3.4.30) дискриминанта Хилла $u_+(z)$ через функцию $\theta(z)$ получено для случая, когда $\mu_0=0$. Легко убедиться, что в общем случае ($\mu_0\neq 0$) формулу (3.4.30) следует заменить равенством

$$u_+(z)=\cos\theta\,(\sqrt{z^2-\mu_0}). \tag{3.4.30$'$}$$

Функция $z(\theta)$, обратная функция $\theta(z)$, конформно отображает область $\Theta_+\{h_k\}$ на верхнюю полуплоскость, причем $z(k\pi\pm 0)=$ $=\alpha_k^\pm$, $\lim_{\theta\to+\infty}(i\theta)^{-1}z(\theta)=\pi^{-1}$. Поэтому из леммы 3.4.3 вытекает такое очевидное следствие.

Следствие. Для того чтобы последовательность $-\infty<$ $<\mu_0<\mu_1^-\leqslant\mu_1^+<\mu_2^-\leqslant\mu_2^+<\ldots$ *состояла из спектров периодической* (μ_0, μ_2^-, μ_2^+, …) *и антипериодической* (μ_1^-, μ_1^+, μ_3^-, μ_3^+, …) *краевых задач, порождаемых на интервале* $(0,\pi)$ *одним и тем же уравнением* (3.4.1) *с вещественным потенциалом* $q(x)\in\widetilde{W}_2^n[0,\pi]$, *необходимо, чтобы она задавалась формулой*

$$\mu_k^\pm=\mu_0+z^2(k\pi\pm 0)\quad (k=1,2,\ldots),$$

где $z(\theta)$ — *функция, осуществляющая конформное отображение* *области* $\Theta_+\{h_k\}$ *вида (3.4.31) на верхнюю полуплоскость, фиксированное условиями*

$$z(0)=0,\quad \lim_{\theta\to+\infty}(i\theta)^{-1}z(i\theta)=\pi^{-1}.$$

При этом $h_0=0$, $h_k=h_{-k}$ *и* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(k^{n+1}h_k)^2<\infty$.

На самом деле это условие не только необходимо, но и достаточно. Для доказательства достаточности используем некоторые свойства функций $\theta(z)$, конформно отображающих верхнюю полуплоскость на области $\Theta_+\{h_k\}$ вида (3.4.31).

Лемма 3.4.4. *Пусть функция* $\theta(z)$ *осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости на область* $\Theta_+\{h_k\}$ *вида (3.4.31), фиксированное условиями* $\theta(0)=ih_0$, $\lim\limits_{y\to+\infty}(iy)^{-1}\theta(iy)=\pi$, *причем* $\sup\limits_{-\infty<k<\infty}h_k=H<\infty$. *Тогда*

1) *функция* $u(z)=\cos\theta(z)$ *является целой вещественной функцией экспоненциального типа* π *и*

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|u(x)|=\operatorname{ch}H;$$

2) *прообразы* $\alpha_k^{\pm}$ *точек* $k\pi\pm0$ *удовлетворяют неравенствам*

$$1\geqslant\alpha_k^- -\alpha_{k-1}^+\geqslant 2(\pi\operatorname{ch}H)^{-1},\tag{3.4.35}$$

$$2\pi^{-1}h_k\geqslant\alpha_k^+-\alpha_k^-\geqslant 2(\pi\sqrt{\operatorname{ch}H})^{-1}h_k,\tag{3.4.36}$$

$$2(\pi\operatorname{ch}H)^{-1}k\leqslant|\alpha_{\pm k}^{\pm}|\leqslant k(1+2\pi^{-1}H)+2\pi^{-1}h_0;\tag{3.4.37}$$

3) *функция* $\operatorname{Im}\theta(x)$, *равная, очевидно, нулю на сегментах* $[\alpha_k^+,\alpha_{k+1}^-]$, *на интервалах* (α_k^-,α_k^+) *удовлетворяет неравенствам*

$$0<\operatorname{Im}\theta(x)\leqslant\pi\sqrt{\operatorname{ch}H}\sqrt{(x-\alpha_k^-)(\alpha_k^+-x)}.\tag{3.4.38}$$

Доказательство. Функция $u(z)=\cos\theta(z)$, очевидно, голоморфна в верхней полуплоскости и непрерывна на вещественной оси. Так как $\operatorname{Im}\cos\theta=0$, если $\operatorname{Im}\theta=0$ или $\operatorname{Re}\theta=k\pi$, то она принимает лишь вещественные значения на вещественной оси и в силу принципа симметрии $(u(\bar z)=\overline{u(z)})$ является целой вещественной функцией. Функция $\theta(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости, непрерывна на вещественной оси, $\operatorname{Im}\theta(z)>0$ в полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$ и $\lim\limits_{y\to+\infty}(iy)^{-1}\theta(iy)=\pi$. Поэтому для функции $\theta(z)$ справедлива формула Неванлинны

$$\theta(z)=\pi z+d+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+tz}{t-z}\,\frac{\operatorname{Im}\theta(t)}{1+t^2}\,dt\tag{3.4.39}$$

($\operatorname{Im} d = 0$), из которой вытекает следующее представление для ее мнимой части:

$$\operatorname{Im}\theta(z) = \pi y + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\theta(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dz \quad (z = x + iy).$$

Так как

$$0 \leqslant \operatorname{Im}\theta(x) \leqslant \sup_{-\infty<x<\infty}\operatorname{Im}\theta(x) = \sup_{-\infty<k<\infty} h_k = H,$$

то

$$0 \leqslant \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\theta(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt \leqslant \frac{H}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt = H$$

и

$$\pi\operatorname{Im} z \leqslant \operatorname{Im}\theta(z) \leqslant \pi\operatorname{Im} z + H. \tag{3.4.40}$$

Следовательно,

$$|u(z)| = |\cos\theta(z)| \leqslant \operatorname{ch}|\operatorname{Im}\theta(z)| \leqslant \operatorname{ch}(\pi|\operatorname{Im} z| + H),$$

так что $u(z)$ является функцией экспоненциального типа π, причем

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|u(x)| = \sup_{-\infty<x<\infty}|\cos\theta(x)| = \sup_{-\infty<k<\infty}\operatorname{ch} h_k = \operatorname{ch} H < \infty.$$

Докажем теперь правые части неравенств (3.4.35), (3.4.36). Так как $\theta(\alpha_k^-) = k\pi$, $\theta(\alpha_{k-1}^+) = (k-1)\pi$, то $u(\alpha_k^-) - u(\alpha_{k-1}^+) = \cos\theta(\alpha_k^-) - \cos\theta(\alpha_{k-1}^+) = (-1)^k - (-1)^{k-1} = (-1)^k\, 2$, а по теореме о среднем значении

$$u(\alpha_k^-) - u(\alpha_{k-1}^+) = (\alpha_k^- - \alpha_{k-1}^+)\, u'(\beta_k) \quad (\alpha_{k-1}^+ < \beta_k < \alpha_k^-),$$

причем согласно неравенству Бернштейна

$$|u'(\beta_k)| \leqslant \pi \sup_{-\infty<x<\infty}|u(x)| \leqslant \pi\operatorname{ch} H.$$

Таким образом,

$$2 = |u(\alpha_k^-) - u(\alpha_{k-1}^+)| = (\alpha_k^- - \alpha_{k-1}^+)\,|u'(\beta_k)| \leqslant (\alpha_k^- - \alpha_{k-1}^+)\,\pi\operatorname{ch} H,$$

что эквивалентно правой части неравенства (3.4.35). Правая часть неравенства (3.4.36) доказывается точно так же, как неравенство (3.4.34) в предыдущей лемме.

Для доказательства неравенства (3.4.38) введем функцию

$$f(x) = (-1)^k u(x) - \left[1 + (x - \alpha_k^-)(\alpha_k^+ - x)\frac{\pi^2}{2}\operatorname{ch} H\right].$$

На концах сегмента $[\alpha_k^-, \alpha_k^+]$ эта функция равна нулю:

$$f(\alpha_k^\pm) = (-1)^k u(\alpha_k^\pm) - 1 = (-1)^k\cos\theta(\alpha_k^\pm) - 1 = (-1)^k \times$$
$$\times \cos k\pi - 1 = 0,$$

а ее график обращен выпуклостью вниз, так как

$$f''(x) = (-1)^k u''(x) + \pi^2 \operatorname{ch} H \geqslant 0$$

в силу неравенства Бернштейна. Следовательно, функция $f(x)$ отрицательна на сегменте $[\alpha_k^-, \alpha_k^+]$ и на нем

$$(-1)^k u(x) \leqslant 1 + (x - \alpha_k^-)(\alpha_k^+ - x)\frac{\pi^2}{2}\operatorname{ch} H \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{ch}\left\{\pi\sqrt{\operatorname{ch} H (x - \alpha_k^-)(\alpha_k^+ - x)}\right\}.$$

С другой стороны, при $x \in [\alpha_k^-, \alpha_k^+]$

$$\theta(x) = k\pi + i \operatorname{Im}\theta(x), \quad u(x) = \cos\theta(x) = (-1)^k \operatorname{ch}\operatorname{Im}\theta(x)$$

и

$$\operatorname{ch}\operatorname{Im}\theta(x) \leqslant \operatorname{ch}\left\{\pi\sqrt{\operatorname{ch} H (x - \alpha_k^-)(\alpha_k^+ - x)}\right\},$$

что эквивалентно (3.4.38).

Левые части неравенств (3.4.35), (3.4.36) доказываются с помощью вариационных принципов конформных отображений. Из неравенств (3.4.40) следует, что гармоническая функция $\operatorname{Im}\theta(z) - \pi \operatorname{Im} z$ неотрицательна в верхней полуплоскости и так как она равна нулю на сегменте $[\alpha_{k-1}^+, \alpha_k^-]$, то

$$\frac{\partial}{\partial y}\{\operatorname{Im}\theta(x+iy) - \pi y\}|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im}\theta(x+iy)|_{y=0} - \pi \geqslant 0,$$

откуда, используя уравнения Коши — Римана, находим

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re}\theta(x) = \frac{\partial}{\partial x}\theta(x) \geqslant \pi \quad (\alpha_{k-1}^+ \leqslant x \leqslant \alpha_k^-).$$

Поэтому

$$\pi = \theta(\alpha_k^-) - \theta(\alpha_{k-1}^+) = \int_{\alpha_{k-1}^+}^{\alpha_k^-} \frac{\partial}{\partial x}\theta(x)\,dx \geqslant \pi(\alpha_k^- - \alpha_{k-1}^+),$$

что эквивалентно левой части неравенства (3.4.35).

Для доказательства левой части неравенства (3.4.36) рассмотрим функцию $z(\theta)$, обратную $\theta(z)$, и вспомогательную функцию

$$z_k(\theta) = \pi^{-1}\sqrt{(\theta - k\pi)^2 + h_k^2}, \tag{3.4.41}$$

конформно отображающую область $\Theta_k = \{\theta : \operatorname{Im}\theta > 0\} \setminus \{\theta; \operatorname{Re}\theta = k\pi,\ 0 \leqslant \operatorname{Im}\theta \leqslant h_k\}$ на верхнюю полуплоскость. Очевидно, на всей границе области $\Theta_+\{h_k\}$ выполняется неравенство $\operatorname{Im} z_k(\theta) - \operatorname{Im} z(\theta) \geqslant 0$, а из (3.4.40), (3.4.41) находим $\operatorname{Im} z(\theta) \leqslant \pi^{-1}\operatorname{Im}\theta$, $\operatorname{Im} z_k(\theta) = \pi^{-1}\operatorname{Im}\theta + O(|\theta|^{-1})$ при $|\theta| \to \infty$ $(\theta \in \Theta_+\{h_k\})$ и, значит, $\lim\limits_{|\theta|\to\infty}\{\operatorname{Im} z_k(\theta) - \operatorname{Im} z(\theta)\} \geqslant 0$. Согласно принципу минимума гармонических функций отсюда следует, что неравенство

$$\operatorname{Im} z_k(\theta) - \operatorname{Im} z(\theta) \geqslant 0 \tag{3.4.42}$$

выполняется во всей области $\Theta_+\{h_k\}$. Обозначим через L_k общую часть границы областей $\Theta_+\{h_k\}$, Θ_k, состоящую из двух берегов разреза $\operatorname{Re}\theta = k\pi$, $0 \leqslant \operatorname{Im}\theta \leqslant h_k$, и через n — внутреннюю нормаль к L_k. Так как $\operatorname{Im} z_k(\theta) = \operatorname{Im} z(\theta) = 0$ на L_k, то из неравенства (3.4.42) вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial n}\{\operatorname{Im} z_k(\theta) - \operatorname{Im} z(\theta)\} \geqslant 0, \quad \frac{\partial}{\partial n}\operatorname{Im} z(\theta) \geqslant 0 \quad (\theta \in L_k)$$

и, значит,

$$\left|\frac{\partial \operatorname{Im} z_k(\theta)}{\partial n}\right| \geqslant \left|\frac{\partial \operatorname{Im} z(\theta)}{\partial n}\right| \quad (\theta \in L_k),$$

а согласно уравнениям Коши — Римана

$$\left|\frac{\partial z_k(\theta)}{\partial \theta}\right| = \left|\frac{\partial \operatorname{Im} z_k(\theta)}{\partial n}\right|, \quad \left|\frac{\partial z(\theta)}{\partial \theta}\right| = \left|\frac{\partial \operatorname{Im} z(\theta)}{\partial n}\right| \quad (\theta \in L_k).$$

Поэтому

$$\alpha_k^+ - \alpha_k^- = \int_{L_k}\left|\frac{\partial z(\theta)}{\partial \theta}\right||d\theta| \leqslant \int_{L_k}\left|\frac{\partial z_k(\theta)}{\partial \theta}\right||d\theta| = \frac{2}{\pi}h_k$$

и левая часть неравенства (3.4.36) тоже доказана.

Неравенства (3.4.37) вытекают из доказанных неравенств (3.4.35), (3.4.36) и тождеств

$$\alpha_k^+ = \sum_{j=1}^{k}\{(\alpha_j^+ - \alpha_j^-) + (\alpha_j^- - \alpha_{j-1}^+)\} + \alpha_0^+,$$

$$\alpha_{-k}^- = \sum_{j=-1}^{-k}\{(\alpha_j^- - \alpha_j^+) + (\alpha_j^+ - \alpha_{j+1}^-)\} + \alpha_0^-,$$

так как $\alpha_k^+ \geqslant 0$, $\alpha_{-k}^- \leqslant 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

Лемма 3.4.5. *Если выполнены условия предыдущей леммы и, кроме того,* $h_0 = 0$, $h_k = h_{-k}$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty}(kh_k)^2 < \infty$, *то*

1) функция $u(z) = \cos\theta(z)$ *четная и допускает представление*

$$u(z) = \cos\pi z - z^{-1}d_1\sin\pi z + z^{-1}g(z), \tag{3.4.43}$$

где $g(z) = \int_0^\pi \tilde{g}(t)\sin zt\,dt$, $\tilde{g}(t) \in L_2[0, \pi]$;

2) прообразы $\alpha_k^\pm$ *точек* $k\pi \pm 0$ *удовлетворяют равенствам*

$$\alpha_k^{\pm} = -\alpha_{-k}^{\mp}, \quad \alpha_k^{\pm} = k - \frac{d_1}{\pi k} + \frac{\varepsilon_k^{\pm}}{k},$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k^{\pm}|^2 < \infty$.

Доказательство. В рассматриваемом случае область $\Theta_+\{h_k\}$ симметрична относительно мнимой оси. Поэтому, если продолжить функцию $\theta(z)$ в нижнюю полуплоскость по принципу симметрии $(\theta(\bar z) = \overline{\theta(z)})$, функция $-\theta(-z)$ тоже будет осуществлять конформное отображение верхней полуплоскости на область $\Theta_+\{h_k\}$, фиксированное теми же условиями $-\theta(-0) = 0$, $\lim_{y\to+\infty} (iy)^{-1}\{-\theta(-iy)\} = \lim_{y\to+\infty} \overline{(iy)^{-1}\theta \quad (iy)} = \pi$. Следовательно, $\theta(z) = -\theta(-z)$ и функция $\theta(z)$ нечетна. Нечетность функции $\theta(z)$ влечет за собой четность функции $u(z) = \cos\theta(z)$ и равенства $\alpha_k^{\pm} = -\alpha_{-k}^{\mp}$.

Выведем теперь асимптотическую формулу для функции $\theta(z)$ при $|z| \to \infty$. Так как функция $\theta(z)$ отображает отрезки $[\alpha_k^-, \alpha_k^+]$ в разрезы $\operatorname{Re}\theta = k\pi$, $0 \leqslant \operatorname{Im}\theta(z) \leqslant h_k$, то на этих отрезках $0 \leqslant \operatorname{Im}\theta(t) \leqslant h_k$ и

$$\int_{\alpha_k^-}^{\alpha_k^+} |t|^s \operatorname{Im}\theta(t)\,dt \leqslant (m_k)^s \int_{\alpha_k^-}^{\alpha_k^+} h_k dt = (m_k)^s h_k (\alpha_k^+ - \alpha_k^-),$$

где

$$m_k = \max\{|\alpha_k^+|, |\alpha_k^-|\} = \begin{cases} \alpha_k^+, & k > 0, \\ |\alpha_k^-|, & k < 0, \end{cases}$$

откуда, используя оценки (3.4.36), (3.4.37), находим

$$\int_{\alpha_k^-}^{\alpha_k^+} |t|_s \operatorname{Im}\theta(t)\,dt \leqslant \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{2}{\pi}H\right)^s |k|^s h_k^2.$$

Поэтому, если $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (kh_k)^2 < \infty$, то при $s = 0, 1, 2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s \operatorname{Im}\theta(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha_k^-}^{\alpha_k^+} |t|^s \operatorname{Im}\theta(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{2}{\pi}H\right)^s \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^s h_k^2 = C_s < \infty, \tag{3.4.44}$$

что позволяет преобразовать формулу (3.4.39) к такому виду:

$$\theta(z) = \pi z + d - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{1+t^2}\operatorname{Im}\theta(t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{\pi z}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im}\theta(t)\,dt + \frac{1}{\pi z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{t-z}\operatorname{Im}\theta(t)\,dt.$$

Из нечетности функции $\theta(z) = \overline{\theta(\bar{z})}$ вытекает, что при вещественных значениях t функция $\operatorname{Im}\theta(t) = \operatorname{Im}\theta(t+i0)$ четна и каждое из трех зависящих от z слагаемых в правой части этого равенства является нечетной функцией от z, а не зависящее от z слагаемое равно нулю. Поэтому

$$\theta(z) = \pi z + z^{-1}\{d_1 + \psi(z)\}, \tag{3.4.45}$$

где

$$d_1 = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im}\theta(t)\,dt, \quad \psi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{t-z}\operatorname{Im}\theta(t)\,dt,$$

причем $\psi(z) = \psi(-z)$. Для оценки

$$\max_{\alpha_{n-1}^{+}\leqslant x\leqslant\alpha_n^{-}}|\psi(x)| = \max_{\alpha_{-n}^{+}\leqslant x\leqslant\alpha_{-n+1}^{-}}|\psi(x)|$$

воспользуемся равенством

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{t-x}\operatorname{Im}\theta(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{\alpha_k^-}^{\alpha_k^+}\frac{t}{t-x}\operatorname{Im}\theta(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum{}''\int_{\alpha_k^-}^{\alpha_k^+}\frac{t}{t-x}\operatorname{Im}\theta(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\left\{\int_{\alpha_{n-1}^-}^{\alpha_{n-1}^+}\frac{t}{t-x}\operatorname{Im}\theta(t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\alpha_n^-}^{\alpha_n^+}\frac{t}{t-x}\operatorname{Im}\theta(t)\,dt\right\},$$

в котором штрихи означают, что суммирование ведется по всем $k \neq n-1,\ n$. Согласно (3.4.35) при $x \in [\alpha_{n-1}^{+}\ \alpha_n^{-}]$, $t \in [\alpha_k^-,\ \alpha_k^+]$, $k \neq n-1,\ n$,

$$|t-x| \geqslant 2(\pi \operatorname{ch} H)^{-1}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{\alpha_k^-}^{\alpha_k^+}\frac{t}{t-x}\operatorname{Im}\theta(t)\,dt\right|=\frac{1}{\pi x}\left|\int\limits_{\alpha_k^-}^{\alpha_k^+}\left(\frac{t^2}{t-x}-t\right)\operatorname{Im}\theta(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi x}\int\limits_{\alpha_k^-}^{\alpha_k^+}\left(\frac{t^2}{2}\pi\operatorname{ch}H+|t|\right)\operatorname{Im}\theta(t)\,dt,$$

откуда, используя неравенства (3.4.44), находим

$$\frac{1}{\pi}\left|\sum{}''\right|\leqslant\frac{1}{\pi x}\left(\frac{C_2\pi\operatorname{ch}H}{2}+C_1\right).$$

Далее, согласно неравенствам (3.4.38), (3.4.36), (3.4.37) при $x\in\in[\alpha_{n-1}^+,\ \alpha_n^-]$

$$\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{\alpha_{n-1}^-}^{\alpha_{n-1}^+}\frac{t}{t-x}\operatorname{Im}\theta(t)\,dt+\int\limits_{\alpha_n^-}^{\alpha_n^+}\frac{t}{t-x}\operatorname{Im}\theta(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\operatorname{ch}H}\left\{\alpha_{n-1}^+\int\limits_{\alpha_{n-1}^-}^{\alpha_{n-1}^+}\frac{\sqrt{(t-\alpha_{n-1}^-)(\alpha_n^+-t)}}{\alpha_{n-1}^+-t}\,dt+\right.$$

$$\left.+\alpha_n^+\int\limits_{\alpha_n^-}^{\alpha_n^+}\frac{\sqrt{(t-\alpha_n^-)(\alpha_n^+-t)}}{t-\alpha_n^-}\,dt\right\}=$$

$$=\sqrt{\operatorname{ch}H}\left\{\alpha_{n-1}^+\frac{\alpha_{n-1}^+-\alpha_{n-1}^-}{2}+\alpha_n^+\frac{\alpha_n^+-\alpha_n^-}{2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\operatorname{ch}H}\left(1+\frac{2}{\pi}H\right)[(n-1)h_{n-1}+nh_n].$$

Следовательно, существует такая не зависящая от n константа $B_1<\infty$, что при $x\in[\alpha_{n-1}^+,\ \alpha_n^-]$

$$|\psi(x)|\leqslant B_1[x^{-1}+(n-1)h_{n-1}+nh_n].$$

Для оценки $|\psi(x)|$ при $x\in[\alpha_n^-,\ \alpha_n^+]$ воспользуемся равенством

$$\psi(x)=x[\theta(x)-\pi x-x^{-1}d_1]=x[k\pi+i\operatorname{Im}\theta(x)-\pi x-x^{-1}d_1]=$$
$$=x[\theta(\alpha_n^-)+i\operatorname{Im}\theta(x)-\pi x-x^{-1}d_1]=$$

$$=x[\pi(\alpha_n^--x)+(\alpha_n^-x)^{-1}d_1(x-\alpha_n^-)+(\alpha_n^-)^{-1}\psi(\alpha_n^-)+i\operatorname{Im}\theta(x)],$$

из которого следует, что

$$|\psi(x)| \leqslant 3\alpha_n^+ h_n + (\alpha_n^-)^{-1}\{|d_1| h_n + \alpha_n^+ |\psi(\alpha_n^-)|\},$$

поскольку при рассматриваемых значениях x

$$|\alpha_n^- - x| \leqslant \alpha_n^+ - \alpha_n^- \leqslant 2\pi^{-1} h_n, \quad 0 \leqslant \operatorname{Im}\theta(x) \leqslant h_n.$$

Сопоставляя полученные оценки $|\psi(x)|$ при $x \in [\alpha_{n-1}^+, \alpha_n^-]$ и при $x \in [\alpha_n^-, \alpha_n^+]$ с неравенствами (3.4.37), убеждаемся в существовании такой не зависящей от n константы $B < \infty$, что при всех $x \in [\alpha_{n-1}^+, \alpha_n^+]$

$$|\psi(x)| \leqslant B[x^{-1} + (n-1)h_{n-1} + nh_n],$$

$$\psi_n = \max_{\alpha_{n-1}^+ < x < \alpha_n^+} |\psi(x)| \leqslant B\left[\frac{\pi \operatorname{ch} H}{2(n-1)} + (n-1)h_{n-1} + nh_n\right].$$

Поэтому, если $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (kh_k)^2 < \infty$, то

$$\sum_{k \neq 0} |\psi(\alpha_k^\pm)|^2 < \infty, \quad \sum_{n=2}^{\infty} |\psi_n|^2 < \infty, \quad \lim_{x \to \infty} \psi(x) = 0 \tag{3.4.46}$$

и

$$\int_{-\infty}^{-\alpha_1^+} |\psi(x)|^2 dx = \int_{\alpha_1^+}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \sum_{k=2}^{\infty} \int_{\alpha_{k-1}^+}^{\alpha_k^+} |\psi(x)|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=2}^{\infty} |\psi_k|^2 (\alpha_k^+ - \alpha_{k-1}^+) \leqslant \left(1 + \frac{2}{\pi} H\right) \sum_{k=2}^{\infty} |\psi_k|^2 < \infty.$$

Основные утверждения доказываемой леммы вытекают из этих свойств функции $\psi(x)$. Действительно, в силу теоремы Пели — Винера для доказательства формулы (3.4.43) достаточно установить, что функция $g(x) = x[u(x) - \cos \pi x + x^{-1} d_1 \sin \pi x]$ принадлежит пространству $L_2(-\infty, \infty)$. Но согласно (3.4.45), (3.4.46) при больших значениях $|x|$

$$u(x) = \cos\theta(x) = \cos(\pi x + x^{-1} d_1 + x^{-1}\psi(x)) =$$
$$= \cos \pi x \cos x^{-1}(d_1 + \psi(x)) - \sin \pi x \sin x^{-1}(d_1 + \psi(x)) =$$
$$= \cos \pi x [1 + O(x^{-2})] - \sin \pi x [x^{-1} d_1 + x^{-1}\psi(x) + O(x^{-3})] =$$
$$= \cos \pi x - x^{-1} d_1 \sin \pi x - x^{-1}\psi(x) \sin \pi x + O(x^{-2})$$

и, значит, $g(x) = -\psi(x) \sin \pi x + O(x^{-1})$. Так как функция $g(x)$ непрерывна, а правая часть последнего равенства интегрируема с квадратом на интервалах $(-\infty, -\alpha_1^+)$, (α_1^+, ∞), то $g(x) \in$

$\in L_2(-\infty, \infty)$. Наконец, из равенств $\theta(\alpha_k^{\pm}) = k\pi$ согласно (3.4.45) следует

$$k\pi = \alpha_k^{\pm}\pi + (\alpha_k^{\pm})^{-1}\{d_1 + \psi(\alpha_k^{\pm})\},$$

$$\alpha_k^{\pm} = k - \frac{d_1}{\pi\alpha_k^{\pm}} - \frac{\psi(\alpha_k^{\pm})}{\pi\alpha_k^{\pm}} = k - \frac{d_1}{\pi k} + \frac{\varepsilon_k^{\pm}}{k},$$

где

$$\varepsilon_k^{\pm} = \frac{d_1(\alpha_k^{\pm} - k)}{\pi\alpha_k^{\pm}} - \frac{k\psi(\alpha_k^{\pm})}{\pi\alpha_k^{\pm}} = -\frac{\psi(\alpha_k^{\pm})}{\pi} + O(k^{-2}),$$

откуда, используя первое из неравенств (3.4.46), получаем $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varepsilon_k^{\pm}|^2 < \infty$.

Теорема 3.4.2. *Для того чтобы последовательность* $-\infty < \mu_0 < \mu_1^- \leqslant \mu_1^+ < \mu_2^- \leqslant \mu_2^+ < \ldots$ *состояла из спектров периодической* $(\mu_0, \mu_2^-, \mu_2^+, \ldots)$ *и антипериодической* $(\mu_1^-, \mu_1^+, \mu_3^-, \mu_3^+, \ldots)$ *краевых задач, порождаемых на интервале* $(0, \pi)$ *одним и тем же уравнением (3.4.1) с вещественным потенциалом* $q(x) \in \tilde{W}_2^n[0, \pi]$, *необходимо и достаточно, чтобы она задавалась формулой*

$$\mu_k^{\pm} = \mu_0 + z^2(k\pi \pm 0),$$

где $z(\theta)$ — *функция, осуществляющая конформное отображение области* $\Theta_+\{h_k\}$ *вида (3.4.31) на верхнюю полуплоскость, фиксированное условиями*

$$z(0) = 0, \quad \lim_{\theta \to +\infty} (i\theta)^{-1} z(i\theta) = \pi^{-1}.$$

При этом $h_0 = 0$, $h_k = h_{-k}$ *и*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (k^{n+1}h_k)^2 < \infty. \tag{3.4.47}$$

Доказательство. Необходимость этих условий установлена ранее (лемма 3.4.3 и ее следствие). При доказательстве их достаточности можно, очевидно, не ограничивая общности, считать $\mu_0 = 0$. Обозначим через $\theta(z)$ функцию, обратную функции $z(\theta)$, и положим $u_1(z) = \cos\theta(z)$. Согласно лемме 3.4.5

$$u_1(z) = \cos\pi z - z^{-1}\{d_1 \sin\pi z - g(z)\}, \tag{3.4.48}$$

где $g(z) = \int_0^{\pi} \tilde{g}(t)\sin zt\,dt$, $\tilde{g}(t) \in L_2[0, \pi]$, и последовательности $\mu_0 = 0$, $\pm\sqrt{\mu_2^-}$, $\pm\sqrt{\mu_2^+}$ $\ldots$; $\pm\sqrt{\mu_1^-}$, $\pm\sqrt{\mu_1^+}$, $\pm\sqrt{\mu_3^-}$, $\pm\sqrt{\mu_3^+}$, $\ldots$ корней уравнений $u_1(z) - 1 = 0$, $u_1(z) + 1 = 0$ удовлетворяют асимптотическим формулам

$$\sqrt{\mu_k^\pm} = k - (\pi k)^{-1} d_1 + k^{-1}\varepsilon_k^\pm, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k^\pm)^2 < \infty. \tag{3.4.49}$$

Функция $z(\theta)$ после аналитического продолжения $(z(\bar\theta) = \overline{z(\theta)})$ в нижнюю полуплоскость отображает плоскость переменного θ с вертикальными разрезами $\operatorname{Re}\theta = k\pi$, $-h_k \leqslant \operatorname{Im}\theta \leqslant h_k$ в z-плоскость с горизонтальными разрезами $\sqrt{\mu_k^-} \leqslant z \leqslant \sqrt{\mu_k^+}$, $-\sqrt{\mu_k^+} \leqslant z \leqslant -\sqrt{\mu_k^-}$ на вещественной оси. Выберем на одной из сторон каждого вертикального разреза $\operatorname{Re}\theta = k\pi$, $-h_k \leqslant \operatorname{Im}\theta \leqslant h_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ произвольную точку $\theta_k = k\pi + ih_k'$ $(-h_k \leqslant h_k' \leqslant h_k)$ и положим $\sqrt{\lambda_k} = z(\theta_k)$. Тогда $\sqrt{\mu_k^-} \leqslant \sqrt{\lambda_k} \leqslant \sqrt{\mu_k^+}$ и, значит,

$$\sqrt{\lambda_k} = k - (\pi k)^{-1} d_1 + k^{-1}\delta_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^2 < \infty, \tag{3.4.50}$$

откуда согласно лемме 3.4.2 следует, что функция

$$zs(z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} k^{-2} (\lambda_k - z^2) \tag{3.4.51}$$

может быть представлена в виде

$$zs(z) = \sin \pi z + \frac{4d_1 z}{4z^2 - 1} \cos \pi z + \frac{f(z)}{z}, \tag{3.4.52}$$

где

$$f(z) = \int_0^\pi \tilde f(t) \cos zt\,dt, \quad \tilde f(t) \in L_2[0, \pi], \quad f(0) = \int_0^\pi \tilde f(t)\,dt = 0.$$

Покажем, что $u_1(z)$ и $s(z)$ являются соответственно дискриминантом Хилла и характеристической функцией краевой задачи (3.4.2) одного и того же уравнения (3.4.1) с вещественным потенциалом $q(x) \in \tilde W_2^n[0, \pi]$. Как отмечалось выше, для этого кроме $u_1(z)$ и $s(z)$ нужно еще задать функцию $u_2(z)$ вида

$$u_2(z) = \int_0^\pi k(t) \frac{\sin zt}{z}\,dt, \quad k(t) \in L_2[0, \pi], \tag{3.4.53}$$

которая удовлетворяет условиям $|u_2(\sqrt{\lambda_k})| = \sqrt{u_1(\sqrt{\lambda_k})^2 - 1}$ и должна играть роль функции $u_-(z)$ искомого уравнения. Так как

$$u_1(\sqrt{\lambda_k}) = \cos(k\pi + ih_k') = (-1)^k \operatorname{ch} h_k', \tag{3.4.54}$$

$$\sqrt{u_1(\sqrt{\lambda_k})^2 - 1} = |\operatorname{sh} h_k'|,$$

то потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$u_2(\sqrt{\lambda_k}) = \operatorname{sh} h_k', \tag{3.4.55}$$

определяющие не только $|u_2(\sqrt{\lambda_k})|$, но и $\operatorname{sign} u_2(\sqrt{\lambda_k}) = \operatorname{sign} h_k'$. Таким образом, выбирая произвольно точки $\theta_k = k\pi + ih_k'$ на одной из сторон вертикальных разрезов $\operatorname{Re}\theta = k\pi$, $-h_k \leqslant \operatorname{Im}\theta \leqslant h_k$, мы произвольно задаем как будущие собственные значения $\lambda_k = z^2(\theta_k)$ $(\mu_k^- \leqslant \lambda_k \leqslant \mu_k^+)$, так и последовательности $\operatorname{sign} u_2(\sqrt{\lambda_k})$, откуда согласно сделанному ранее замечанию следует, что таким способом можно найти все уравнения (3.4.1) с заданными спектрами периодической и антипериодической краевых задач, т. е. найти полное решение задачи Б.

В соответствии с формулой (3.4.28) положим

$$u_2(z) = s(z)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{\lambda_k}\operatorname{sh} h_k'}{(z^2-\lambda_k)\dot{s}(\sqrt{\lambda_k})} \tag{3.4.56}$$

и убедимся, что эта функция удовлетворяет равенствам (3.4.55) и допускает представление в виде (3.4.53). Из асимптотической формулы (3.4.50) и неравенства (3.4.47) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{\lambda_k}\operatorname{sh} h_k')^2 \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}(kh_k')^2 \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}(kh_k)^2 < \infty,$$

а из формулы (3.4.52) находим $\lim\limits_{k\to\infty}|\sqrt{\lambda_k}\,\dot{s}(\sqrt{\lambda_k})| = \pi$, и, значит,

$$\max_{1\leqslant k<\infty}|\sqrt{\lambda_k}\,\dot{s}(\sqrt{\lambda_k})|^{-1} = p < \infty, \tag{3.4.57}$$

так как $\dot{s}(\sqrt{\lambda_k}) \neq 0$. Поэтому ряд (3.4.56) равномерно сходится на каждом компакте и его сумма $u_2(z)$ есть целая функция, удовлетворяющая, очевидно, условиям (3.4.55). Кроме того, функция

$$h(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} k\operatorname{sh} h_k' \sin kx$$

принадлежит пространству $L_2[0, \pi]$, а функция

$$\varphi(z) = \int_0^{\pi} h(t)\frac{\sin zt}{z}\,dt$$

разлагается в интерполяционный ряд

$$\varphi(z) = s(z)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{\lambda_k}\,\varphi(\sqrt{\lambda_k})}{(z^2-\lambda_k)\dot{s}(\sqrt{\lambda_k})},$$

что доказывается дословно так же, как формула (3.4.28). Следовательно,

$$z[u_2(z)-\varphi(z)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} h_k' - \varphi(\sqrt{\lambda_k})}{\dot{s}(\sqrt{\lambda_k})} \, \frac{2zs(z)\sqrt{\lambda_k}}{z^2-\lambda_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{2zs(z)\sqrt{\lambda_k}}{z^2-\lambda_k},$$

где

$$c_k = \frac{\operatorname{sh} h_k' - \varphi(\sqrt{\lambda_k})}{\dot{s}(\sqrt{\lambda_k})} = \frac{k\varphi(k) - \sqrt{\lambda_k}\,\varphi(\sqrt{\lambda_k}) + (\sqrt{\lambda_k}-k)\operatorname{sh} h_k'}{\dot{s}(\sqrt{\lambda_k})\,\sqrt{\lambda_k}},$$

поскольку $k\varphi(k) = \int_0^\pi h(t)\sin kt\,dt = k \operatorname{sh} h_k'$. Из оценки (3.4.57), асимптотической формулы (3.4.50) и леммы 1.4.3 следует, что $c_k = k^{-1}\eta_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2 < \infty$, откуда вытекает абсолютная сходимость ряда Σc_k. Далее, по теореме Пели — Винера

$$\frac{2\sqrt{\lambda_k}zs(z)}{z^2-\lambda_k} = \int_0^\pi s_k(t)\sin zt\,dt, \quad s_k(t)\in L_2[0,\ \pi],$$

причем в силу равенства Парсеваля

$$\|s_k\|^2 = \int_0^\pi |s_k(t)|^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_k}xs(x)}{x^2-\lambda_k}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_k}(x+i)s(x+i)}{(x+i)^2-\lambda_k}\right)^2 dx \leqslant \frac{4\lambda_k m^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{|(x+i)^2-\lambda_k|^2} =$$

$$= \frac{4\lambda_k m^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{[(x-\sqrt{\lambda_k})^2+1][(x+\sqrt{\lambda_k})^2+1]} = \frac{2m^2\lambda_k}{\lambda_k+1} < 2m^2,$$

где $m = \sup_{-\infty<x<\infty} |(x+i)s(x+i)| < \infty$. Поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k s_k(t)$ сходится в метрике пространства $L_2[0,\ \pi]$ к некоторой функции $h_1(t)\in L_2[0,\ \pi]$, и

$$z[u_2(z)-\varphi(z)] = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^\pi s_k(t)\sin zt\,dt = \int_0^\pi h_1(t)\sin zt\,dt,$$

так что функция

$$u_2(z) = \varphi(z) + \int_0^\pi h_1(t)\frac{\sin zt}{z}\,dt = \int_0^\pi [h(t)+h_1(t)]\frac{\sin zt}{z}\,dt$$

действительно представима в виде (3.4.53).

Положим, наконец,

$$s_1(z) = u_1(z) - u_2(z). \tag{3.4.58}$$

Из формул (3.4.48), (3.4.53) и леммы 3.4.2 вытекает, что корни $\pm\sqrt{\nu_1}$, $\pm\sqrt{\nu_2}$, ... этой функции удовлетворяют таким асимптотическим равенствам:

$$\sqrt{\nu_k} = k - \frac{1}{2} - (\pi k)^{-1} d_1 + k^{-1}\beta_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 < \infty. \tag{3.4.59}$$

С другой стороны, $\lim\limits_{z\to-\infty} s_1(\sqrt{z}) = +\infty$, а согласно (3.4.54), (3.4.55)

$$s_1(\sqrt{\lambda_k}) = u_1(\sqrt{\lambda_k}) - u_2(\sqrt{\lambda_k}) = (-1)^k \operatorname{ch} h_k' - \operatorname{sh} h_k' =$$
$$= (-1)^k \operatorname{ch} h_k' [1 - (-1)^k \operatorname{th} h_k'],$$

и так как $\operatorname{th} h_k' < 1$, то $\operatorname{sign} s_1(\sqrt{\lambda_k}) = (-1)^k$. Поэтому в каждом интервале $(-\infty, \lambda_1)$, (λ_1, λ_2), (λ_2, λ_3), ... лежит один и в силу асимптотических равенств (3.4.59) только один корень функции $s_1(\sqrt{z})$. Таким образом, корни $\nu_1, \nu_2, \ldots$ функции $s_1(\sqrt{z})$ перемежаются с корнями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ функции $s(\sqrt{z})$, откуда, учитывая асимптотические формулы (3.4.50), (3.4.59), согласно теореме 3.4.1 заключаем, что рассматриваемые последовательности корней являются спектрами краевых задач (3.4.2), (3.4.3), порождаемых на интервале $(0, \pi)$ одним и тем же уравнением (3.4.1) с вещественным потенциалом $q(x) \in L_2[0, \pi]$, и

$$s(\lambda) = s(\lambda, \pi), \quad s_1(\lambda) = s'(\lambda, \pi), \tag{3.4.60}$$

где $s(\lambda, x)$ — решение этого уравнения при начальных данных $s(\lambda, 0) = 0$, $s'(\lambda, 0) = 1$.

Покажем теперь, что для решения $c(\lambda, x)$ $(c(\lambda, 0) = 1, c'(\lambda, 0) = 0)$ этого же уравнения справедливо равенство

$$c(\lambda, \pi) = u_1(\lambda) + u_2(\lambda). \tag{3.4.61}$$

Действительно, из тождества $c(\lambda, \pi) s'(\lambda, \pi) - c'(\lambda, \pi) s(\lambda, \pi) = 1$ и доказанных равенств (3.4.60) следует, что

$$c(\pm\sqrt{\lambda_k}, \pi) = [s'(\pm\sqrt{\lambda_k}, \pi)]^{-1} = [s_1(\pm\sqrt{\lambda_k})]^{-1},$$

а согласно (3.4.54), (3.4.55), (3.4.58)

$$u_1(\pm\sqrt{\lambda_k}) + u_2(\pm\sqrt{\lambda_k}) = [u_1(\pm\sqrt{\lambda_k})^2 - u_2(\pm\sqrt{\lambda_k})^2] \times$$
$$\times [u_1(\pm\sqrt{\lambda_k}) - u_2(\pm\sqrt{\lambda_k})]^{-1} = [\operatorname{ch}^2 h_k' - \operatorname{sh}^2 h_k'] \times$$
$$\times [s_1(\pm\sqrt{\lambda_k})]^{-1} = [s_1(\pm\sqrt{\lambda_k})]^{-1}.$$

Поэтому функция

$$v(z)=c(z,\ \pi)-[u_1(z)+u_2(z)]=c(z,\ \pi)-s'(z,\ \pi)-$$
$$-[u_1(z)+u_2(z)-s_1(z)]=c(z,\ \pi)-s'(z,\ \pi)+2u_2(z)$$

обращается в нуль в корнях $\pm\sqrt{\lambda_k}$ функции $s(z)=s(z,\pi)$ и согласно (3.4.24), (3.4.53) $|v(z)|=|z^{-1}|\exp\{\pi|\operatorname{Im} z|\}\ o(1)$ при $|z|\to\to\infty$. Значит, функция $v(z)[s(z)]^{-1}$ тоже целая, причем на последовательности контуров $K_n=C\left(n+\frac{1}{2}\right)$ она стремится к нулю, откуда согласно теореме Лиувилля вытекает тождество $v(z)\times\times[s(z)]^{-1}\equiv 0$, эквивалентное доказываемому равенству (3.4.61). Используя формулы (3.4.60), (3.4.61), (3.4.58), убеждаемся, что дискриминант Хилла $u_+(z)$ полученного уравнения равен $\frac{1}{2}[c(z,\ \pi)+s'(z,\ \pi)]=\frac{1}{2}[u_1(z)+u_2(z)+u_1(z)-u_2(z)]=u_1(z)$, откуда видим, что последовательность $0=\mu_0<\mu_1^-\leqslant\mu_1^+<\mu_2^-\leqslant\leqslant\mu_2^+<\ldots$ действительно состоит из спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых этим уравнением.

Теперь нужно доказать, что построенный потенциал принадлежит пространству $\tilde{W}_2^n\,[0,\pi]$. Но это вытекает непосредственно из условия (3.4.47), если воспользоваться неравенствами (3.4.36) и следствием теоремы 1.5.2.

Итак, задача Б полностью решена. При этом установлено взаимно однозначное соответствие между множеством вещественных потенциалов $q(x)\in\tilde{W}_2^n\,[0,\pi]$ и множеством всевозможных последовательностей вида

$$\mu_0,\ h_1;\ \theta_1,\ h_2;\ \theta_2,\ \ldots,\ h_k;\ \theta_k,\ \ldots,\tag{3.4.62}$$

где μ_0 — произвольные вещественные числа, h_k — произвольные неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k^{n+1}h_k)^2<<\infty$, и θ_k — произвольная точка на двусторонней границе разреза $\operatorname{Re}\theta=k\pi$, $-h_k\leqslant\operatorname{Im}\theta\leqslant h_k$. Это соответствие полностью определяется следующими соотношениями:

$$\operatorname{ch} h_k=\max_{\alpha_k^-\leqslant x\leqslant\alpha_k^+}|u_+(x)|,\quad \theta_k=\lim_{\varepsilon\to+0}\theta\left(\sqrt{\lambda_k-\mu_0}+i\varepsilon u_-(\sqrt{\lambda_k-\mu_0})\right),\tag{3.4.63}$$

где $\alpha_k^\pm=\sqrt{\mu_k^\pm-\mu_0}$; μ_0, $\mu_k^\pm$ — собственные значения периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых на интервале $(0,\pi)$ уравнением $-y''+q(x)\,y=\mu y$; λ_k — собственные значения краевой задачи, порождаемой этим же уравнением и граничными условиями (3.4.2); функция $\theta(z)$ определена формулой

(3.4.29);

$$u_+(z) = \frac{1}{2}[c(z,\ \pi) + s'(z,\ \pi)], \quad u_-(z) = \frac{1}{2}[c(z,\ \pi) - s'(z,\ \pi)]$$

и $c(z,\ x)$, $s(z,\ x)$ — фундаментальная система решений уравнения $-y'' + (q(x) - \mu_0)\,y = z^2 y$. Элементы последовательностей (3.4.62) являются, очевидно, некоторыми (нелинейными) функционалами от потенциалов $q(x)$:

$$\mu_0 = \mu_0(q), \quad h_k = h_k(q), \quad \theta_k = \theta_k(q). \tag{3.4.62'}$$

Эти функционалы непрерывны в топологии пространства $L_2[0,\ \pi]$. Действительно, если последовательность $q_n(x)$ сходится к $q(x)$ в метрике пространства $L_2[0,\ \pi]$, то решения $c_n(\lambda,\ x)$, $s_n(\lambda,\ x)$ уравнений $-y'' + q_n(x)\,y = \lambda^2 y$ и их первые производные сходятся к решениям уравнения $-y'' + q(x)\,y = \lambda^2 y$ и их первым производным равномерно на каждом компакте $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $|\lambda| \leqslant C$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mu_0(q_n) = \mu_0(q), \quad \lim_{n\to\infty} \mu_k^{\pm}(q_n) = \mu_k^{\pm}(q), \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_k(q_n) = \lambda_k(q),$$

а значит, и

$$\lim_{n\to\infty} u_+(z,\ q_n) = u_+(z,\ q), \quad \lim_{n\to\infty} u_-(z,\ q_n) = u_-(z,\ q),$$

причем сходимость здесь равномерна на каждом компакте $|z| \leqslant C$. Отсюда согласно (3.4.29) следует, что равномерно на каждом компакте $|z| \leqslant C$

$$\lim_{n\to\infty} \theta(z,\ q_n) = \theta(z,\ q).$$

Непрерывность функционалов (3.4.62′) является теперь очевидным следствием равенств (3.4.63).

Полученная в теореме 3.4.2 характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых на интервале $(0,\ \pi)$ уравнением (3.4.1), полностью описывает также области устойчивости уравнений Хилла. Уравнением Хилла называется рассматриваемое на всей оси уравнение

$$-y'' + q(x)\,y = zy \quad (-\infty < x < \infty) \tag{3.4.64}$$

с вещественным периодическим $(q(x + \pi) = q(x))$ потенциалом $q(x) \in \tilde{W}_2^n[0,\ \pi]$. Областью устойчивости этого уравнения называется множество значений параметра z, при которых любое его решение равномерно ограничено на всей вещественной оси. Из формулы

$$(x) = y(0)\,c(\sqrt{z},\ x) + y'(0)\,s(\sqrt{z},\ x),$$

определяющей общее решение уравнения (3.4.64), вытекает равенство

$$\begin{pmatrix} y(\pi) \\ y'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(\sqrt{z},\ \pi) & s(\sqrt{z},\ \pi) \\ c'(\sqrt{z},\ \pi) & s'(\sqrt{z},\ \pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}. \tag{3.4.65}$$

Матрица

$$U(z) = \begin{pmatrix} c(\sqrt{z},\ \pi) & s(\sqrt{z},\ \pi) \\ c'(\sqrt{z},\ \pi) & s'(\sqrt{z},\ \pi) \end{pmatrix}$$

называется матрицей монодромии уравнения Хилла. Собственные значения $\rho_1(z)$, $\rho_2(z)$ матрицы монодромии находятся из уравнения

$$0 = \operatorname{Det}(U(z) - \rho I) = c(\sqrt{z},\ \pi)\, s'(\sqrt{z},\ \pi) - c'(\sqrt{z},\ \pi)\, s(\sqrt{z},\ \pi) -$$
$$- \rho\,(c(\sqrt{z},\ \pi) + s'(\sqrt{z},\ \pi)) + \rho^2 = 1 - 2u_+(\sqrt{z})\,\rho + \rho^2.$$

Следовательно,

$$\rho_1(z) = u_+(\sqrt{z}) + \sqrt{u_+^2(\sqrt{z}) - 1},$$
$$\rho_2(z) = u_+(\sqrt{z}) - \sqrt{u_+^2(\sqrt{z}) - 1},$$

откуда согласно (3.4.30′) находим

$$\rho_1(z) = \exp\{i\theta(\sqrt{z - \mu_0})\}, \quad \rho_2(z) = \exp\{-i\theta(\sqrt{z - \mu_0})\}.$$

Если $u_+^2(\sqrt{z}) - 1 \neq 0$, т. е. z отлично от собственных значений периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых уравнением (3.4.64) на интервале $(0,\ \pi)$, то $\rho_1(z) \neq \rho_2(z)$ и соответствующие им собственные векторы матрицы монодромии $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$ линейно независимы. Поэтому решения $\psi_i(z,\ x)$ $(i = 1,\ 2)$ уравнения Хилла при начальных данных $\psi_i(z,\ 0) = a_i$, $\psi_i'(z,\ 0) = b_i$ линейно независимы, и, согласно (3.4.65), $\psi_i(z,\ \pi) = \rho_i(z) \times \psi_i(z,\ 0)$, $\psi_i'(z,\ \pi) = \rho_i(z)\,\psi_i'(z,\ 0)$, откуда, учитывая периодичность $(q(x+\pi) \equiv q(x))$ потенциала, находим $\psi_i(z,\ x+\pi) \equiv \rho_i(z)\,\psi(z, x)$ или $\varphi_i(z,\ x+\pi) = \varphi_i(z, x)$, где $\varphi_i(z, x) = \psi_i(z, x) \times \exp\{-\pi^{-1}x \ln \rho_i(z)\}$. Таким образом, при рассматриваемых значениях параметра z уравнение Хилла имеет фундаментальную систему решений вида

$$\psi_1(z,\ x) = \varphi_1(z,\ x) \exp\{-\pi^{-1}x\theta(\sqrt{z - \mu_0})\},$$
$$\psi_2(z,\ x) = \varphi_2(z,\ x) \exp\{\pi^{-1}x\theta\ (\sqrt{z - \mu_0})\},$$

где $\varphi_i(z,\ x)$ — непрерывные периодические $(\varphi_i(z,\ x+\pi) \equiv \varphi_i(z,\ x))$ функции. Эти формулы показывают, что решения $\psi_i(z,\ x)$ ограничены на всей вещественной оси тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\theta(\sqrt{z - \mu_0}) = 0$, откуда согласно определению функции

$\theta(\sqrt{z-\mu_0})$ следует, что интервалы (μ_0, μ_1^-), (μ_1^+, μ_2^-), ..., (μ_k^+, μ_{k+1}^-), ... принадлежат области устойчивости уравнения Хилла, а все прочие значения параметра $z \neq \mu_k^\pm$ — области неустойчивости.

Рассмотрим теперь точки $\mu_k^\pm$. Если $\mu_k^- = \mu_k^+$, то функция $u_+^2(\sqrt{z}) - 1$ имеет в этой точке двукратный корень и, так как всегда $\mu_k^- \leqslant \lambda_k \leqslant \mu_k^+$, в этом случае $s(\sqrt{\mu_k^\pm}, \pi) = 0$, откуда согласно (3.4.27) следует, что и $c'(\sqrt{\mu_k^\pm}, \pi) = 0$. Поэтому функций $s(\sqrt{\mu_k^-}, x)$, $c(\sqrt{\mu_k^-}, x)$ являются периодическими $(k = 2m)$ или антипериодическими $(k = 2m + 1)$ решениями уравнения Хилла и, следовательно, ограничены на вещественной оси. Таким образом, кратные корни $\mu_k^- = \mu_k^+$ уравнения $u_+^2(\sqrt{z}) - 1 = 0$ принадлежат области устойчивости и в этом случае интервалы устойчивости (μ_{k-1}^+, μ_k^-), (μ_k^+, μ_{k+1}^-) слипаются в интервал $(\lambda_{k-1}^+, \mu_{k+1}^-)$, все точки которого принадлежат области устойчивости. Если $\mu_k^- < \mu_k^+$, то функция $u_+^2(\sqrt{z}) - 1$ имеет в этих точках простые корни, а уравнение (3.4.64) при $z = \mu_k^-$, $z = \mu_k^+$, как нетрудно проверить, кроме периодических $(k = 2m)$ или антипериодических $(k = 2m + 1)$ решений $\psi(\mu_k^-, x)$, $\psi(\mu_k^+, x)$ — неограниченные решения $y(\mu_k^-, x)$, $y(\mu_k^+, x)$ вида

$$y(\mu_k^\pm, x) = \chi(\mu_k^\pm, x) + x\psi(\mu_k^\pm, x),$$

где $\chi(\mu_k^\pm, x)$ — некоторая периодическая или антипериодическая функция. Значит, простые корни уравнения $u^2(\sqrt{z}) - 1 = 0$ принадлежат области неустойчивости.

Итак, область устойчивости уравнения Хилла состоит из последовательности интервалов $(\mu_0, \mu_{k_1}^-)$, $(\mu_{k_1}^+, \mu_{k_2}^-)$, $(\mu_{k_2}^+, \mu_{k_3}^-)$, ..., концы которых совпадают с последовательностью $\mu_0 < \mu_{k_1}^- < \mu_{k_1}^+ < < \mu_{k_2}^- < \mu_{k_2}^+ < \ldots$ простых корней уравнения $u_+^2(\sqrt{z}) - 1 = 0$. Эти интервалы называются зонами устойчивости, а разделяющие их отрезки $(-\infty, \mu_0)$, $(\mu_{k_1}^-, \mu_{k_1}^+)$, ... — люками или зонами неустойчивости. С этой точки зрения из теоремы 3.4.2 вытекают, очевидно, необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданная последовательность интервалов совпадала с последовательностью зон устойчивости некоторого уравнения Хилла, а также метод построения всех таких уравнений. В частности, с ее помощью нетрудно найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы данная конечная система интервалов (a_0, a_1^-), (a_1^+, a_2^-), ..., (a_{N-1}^+, a_N^-), (a_N^+, ∞) совпадала с областью устойчивости некоторого уравнения Хилла (см. задачу 4). Такие уравнения и соответствующие им потенциалы называются конечнозонными. Конечнозонные потенциалы получаются, очевидно, тогда и только тогда, когда граница области $\Theta_+\{h_k\}$ содержит лишь конечное число вертикальных разрезов, т. е. когда $h_k \neq 0$ лишь для конечного множества значений k. Поэтому они бесконечно дифференцируемы и их множество $V\,[0, \pi]$ (точнее, множество их ограничений на сегмент $[0, \pi]$) содержится в пересечении всех множеств $\widetilde{W}_2^n\,[0, \pi]$:

$$V\,[0, \pi] \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \widetilde{W}_2^n\,[0, \pi] = \widetilde{W}^\infty\,[0, \pi].$$

Теорема 3.4.3. *Любой вещественный потенциал $q(x) \in \widetilde{W}_2^n\,[0, \pi]$ является пределом последовательности конечнозонных потенциалов $q_N(x)$, сходящейся в метрике этого пространства, т. е. множество $V\,[0, \pi]$ всюду плотно в каждом пространстве $\widetilde{W}_2^n\,[0, \pi]$.*

Доказательство. Множество $\widetilde{W}^\infty\,[0, \pi]$, очевидно, плотно в каждом пространстве $\widetilde{W}_2^n\,[0, \pi]$, и теорема будет доказана, если для любого вещественного потенциала $q(x) \in \widetilde{W}^\infty\,[0, \pi]$ будет построена последовательность конечнозонных потенциалов $q_N(x)$, которая при $N \to \infty$ равномерно сходится к $q(x)$ вместе с производными любого порядка. Согласно предыдущему потенциал $q(x) \in \widetilde{W}^\infty\,[0, \pi]$ однозначно определяется своей последовательностью $\{\mu_0(q),\ h_k(q);\ \theta_k(q)\}$, удовлетворяющей при всех значениях $n = 0, 1, 2, \ldots$ неравенствам

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^{n+1}h_k)^2 = A_n < \infty. \tag{3.4.66}$$

Исходя из этой последовательности, построим усеченные последовательности

$$\{\mu_0(q),\ h_1(q);\ \theta_1(q),\ \ldots,\ h_N(q);\ \theta_N(q),\ 0;\ (N+1)\pi,\ 0;\ (N+2)\pi,\ \ldots\},$$

у которых $h_k = 0$ при $k > N$. По теореме 3.4.2 этим последовательностям соответствуют некоторые конечнозонные потенциалы $q_N(x)$, так что

$$\left.\begin{aligned} &\mu_0(q_N) = \mu_0(q),\ h_k(q_N) = h_k(q),\ \theta_k(q_N) = \theta_k(q) \quad (1 \leqslant k \leqslant N),\\ &h_k(q_N) = 0 \quad (k = N+1,\ N+2,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{3.4.67}$$

Ниже будет доказано, что последовательность $q_N(x)$ компактна в $\widetilde{W}^\infty\,[0, \pi]$, т. е. удовлетворяет неравенствам

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |q_N^{(n)}(x)| = \sup_{0\leqslant x\leqslant\pi} |q_N^{(n)}(x)| = C_n \quad (0 \leqslant n < \infty), \tag{3.4.68}$$

в которых константы $C_n < \infty$ не зависят от N. Поэтому из нее можно выделить подпоследовательность $q_{N'}(x)$, которая равномерно сходится вместе со всеми производными к некоторой функции $\hat{q}(x) \in \tilde{W}^{\infty}[0, \pi]$. Из равенств (3.4.67) и непрерывности функционалов $\mu_0(q)$, $h_k(q)$, $\theta_k(q)$ следует, что

$$\mu_0(\hat{q}) = \lim_{N'\to\infty} \mu_0(q_{N'}) = \mu_0(q), \quad h_k(\hat{q}) = \lim_{N'\to\infty} h_k(q_{N'}) = h_k(q),$$

$$\theta_k(\hat{q}) = \lim_{N'\to\infty} \theta_k(q_{N'}) = \theta_k(q).$$

Таким образом, потенциалам $\hat{q}(x)$ и $q(x)$ соответствует одна и та же последовательность $\{\mu_0(q), h_k(q); \theta_k(q)\}$, т. е. $\hat{q}(x) \equiv q(x)$ и конечнозонные потенциалы $q_{N'}(x)$ при $N' \to \infty$ равномерно сходятся к $q(x)$ вместе с производными всех порядков.

Докажем теперь неравенства (3.4.68). Так как $q_N(x) \in \tilde{W}^{\infty}[0, \pi]$, то при всех $m \geqslant 1$

$$\int_0^{\pi} q_N^{(m)}(x)\,dx = q_N^{(m-1)}(\pi) - q_N^{(m-1)}(0) = 0$$

и существуют точки $x_m \in [0, \pi]$, в которых $q_N^{(m)}(x_m) = 0$. Поэтому

$$q_N^{(m)}(x) = \int_{x_m}^{x} q_N^{(m+1)}(t)\,dt,$$

и

$$\max_{-\infty<x<\infty} |q_N^{(m)}(x)| \leqslant \pi \max_{-\infty<x<\infty} |q_N^{(m+1)}(x)|,$$

откуда видно, что для справедливости неравенств (3.4.68) достаточно, чтобы функции $\sigma_{2j-1}(N, x)$, построенные из потенциалов $q_N(x)$ по рекуррентным формулам (1.4.20), удовлетворяли неравенствам

$$\max_{-\infty<x<\infty} |\sigma_{2j-1}(N, x)| \leqslant A_j \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{3.4.69}$$

в которых константы $A_j < \infty$ не зависят от N. Из периодичности потенциала $q_N(x) \equiv q_N(x+\pi)$ следует, что собственные значения $\mu_0(q_N) = \mu_0(q)$, $\mu_k^{\pm}(q_N)$ периодических и антипериодических краевых задач, порождаемых на интервале $(0, \pi)$ уравнениями

$$-y'' + q_N(x+t)\,y = \mu y \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi), \tag{3.4.70}$$

не зависят от параметра $t \in (-\infty, \infty)$. Поэтому и элементы μ_0, h_k последовательностей, соответствующих потенциалам $q_N(x+t)$, не зависят от t. Элементы θ_k и собственные значения $\lambda_k(N, t)$

краевой задачи (3.4.2), порождаемой уравнениями (3.4.70), зависят от t, но в силу перемежаемости собственных значений неравенства

$$\mu_k^-(q_N) \leqslant \lambda_k(N,\ t) \leqslant \mu_k^+(q_N) \tag{3.4.71}$$

выполняются при всех значениях $t \in (-\infty,\ \infty)$.

Неравенства (3.4.69) доказываются с помощью формул следов (1.5.35), (1.5.35′), которые для уравнений (3.4.70) имеют такой вид:

$$\Delta_m(N,\ t) = (\mu_0(q))^m + \sum_{k=1}^{\infty}\{(\mu_k^+(q_N))^m + (\mu_k^-(q_N))^m - 2(\lambda_k(N,\ t))^m\},$$

$$\Delta_m(N,\ t) = -2\left[\sum_{j=0}^{m-2}\sigma_{2j+1}(N,\ t)(-4)^{-j-1}\Delta_{m-j-1}(N,\ t) + \right.$$
$$\left. + 2m\sigma_{2m-1}(N,\ t)(-4)^m\right]. \tag{3.4.72}$$

Рекуррентные формулы (3.4.72) показывают, что функции $\sigma_{2j-1}(N,\ t)$ являются полиномами от $\Delta_1(N,\ t),\ \ldots,\ \Delta_j(N,\ t)$, откуда следует, что для справедливости неравенств (3.4.69) достаточно, чтобы функции $\Delta_m(N,\ t)$ удовлетворяли неравенствам

$$\sup_{-\infty<t<\infty}|\Delta_m(N,\ t)| < D_m \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots),$$

в которых константы $D_m < \infty$ не зависят от N. Согласно (3.4.71)

$$|(\mu_k^+(q_N))^m + (\mu_k^-(q_N))^m - 2(\lambda_k(N,\ t))^m| \leqslant$$
$$\leqslant |(\mu_k^+(q_N))^m - (\mu_k^-(q_N))^m| \leqslant$$
$$\leqslant |\mu_k^+(q_N) - \mu_k^-(q_N)|\sum_{j=0}^{m-1}|\mu_k^+(q_N)|^{m-j-1}|\mu_k^-(q_N)|^j,$$

где

$$\mu_k^\pm(q_N) = \mu_0(q_N) + [\alpha_k^\pm(q_N)]^2 = \mu_0(q) + [\alpha_k^\pm(q_N)]^2,$$
$$\alpha_k^\pm(q_N) = z_{q_N}(k\pi \pm 0).$$

Используя доказанные в лемме 3.4.4 оценки (3.4.36), (3.4.37), находим

$$|\mu_k^+(q_N) - \mu_k^-(q_N)| = |\alpha_k^+(q_N) - \alpha_k^-(q_N)|\,|\alpha_k^+(q_N) + \alpha_k^-(q_N)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{2}{\pi}H(q_N)\right)kh_k(q_N),$$

$$|\mu_k^\pm(q_N)| \leqslant |\mu_0(q)| + |\alpha_k^\pm(q_N)|^2 \leqslant |\mu_0(q)| + \left(1 + \frac{2}{\pi}H(q_N)\right)^2 k^2 \leqslant$$
$$\leqslant k^2\left\{|\mu_0(q)| + \left(1 + \frac{2}{\pi}H(q_N)\right)^2\right\},$$

и так как $h_k(q_N) = h_k(q)$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$, $h_k(q_N) = 0$ $(k = N+1, N+2, \ldots)$, $H(q_N) = \max h_k(q_N) \leqslant \max h_k(q) = H(q)$, то

$$|(\mu_k^+(q_N))^m + (\mu_k^-(q_N))^m - 2(\lambda_k(N,\ t))^m| \leqslant \frac{m}{\pi}\left(1 + \frac{2}{\pi} H(q)\right) \times$$
$$\times \left\{|\mu_0(q)| + \left(1 + \frac{2}{\pi} H(q)\right)^2\right\}^{m-1} k^{2m-1} h_k(q) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{m}{\pi}\left(1 + \frac{2}{\pi} H(q)\right)^{2m-1} (1 + |\mu_0(q)|)^{m-1} k^{2m-1} h_k(q).$$

Поэтому

$$|\Delta_m(N,\ t)| \leqslant |\mu_0(q)|^m + \frac{m}{\pi}\left(1 + \frac{2}{\pi} H(q)\right)^{2m-1} (1 + |\mu_0(q))^{m-1} \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{\infty} k^{2m-1} h_k(q) = D_m,$$

где константы D_m, очевидно, не зависят от N и конечны, так как согласно (3.4.66)

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k(q)\, k^{2m-1} \leqslant \left\{\sum_{k=1}^{\infty} (h_k\ \ (q)\ \ k^{2m})^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\right\}^{\frac{1}{2}} = \pi \sqrt{\frac{A_{2m-1}}{6}} < \infty.$$

Теорема полностью доказана.

Задачи

1. Доказать, что собственные значения $\mu_k(\beta_1)$, $\mu_k(\beta_2)$ симметрических краевых задач, порождаемых уравнением

$$-y'' + q(x)\,y = zy \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad \operatorname{Im} q(x) = 0)$$

и граничными условиями

$$y'(0)\sin\alpha - y(0)\cos\alpha = 0, \quad y'(\pi)\sin\beta_1 + y(\pi)\cos\beta_1 = 0,$$
$$y'(0)\sin\alpha - y(0)\cos\alpha = 0, \quad y'(\pi)\sin\beta_2 + y(\pi)\cos\beta_2 = 0,$$

где $0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \pi$, $\quad 0 \leqslant \alpha < \pi$, перемежаются:

$$-\infty < \mu_1(\beta_2) < \mu_1(\beta_1) < \mu_2(\beta_2) < \mu_2(\beta_1) < \ldots \tag{3.4.73}$$

Указание. Для характеристических функций рассматриваемых краевых задач справедливы равенства

$$\chi_i(z) = \varphi'(\pi,\ z)\sin\beta_i + \varphi(\pi,\ z)\cos\beta_i \quad (i = 1,\ 2),$$

где $\varphi(x,\ z) = c(\sqrt{z},\ x)\sin\alpha + s(\sqrt{z},\ x)\cos\alpha$. Из уравнений $-\varphi'' + q(x)\varphi = z\varphi$, $-\dot\varphi'' + q(x)\dot\varphi = z\dot\varphi + \varphi$, которым удовлетворяют функции $\varphi(x,\ z)$ и $\dot\varphi(x,\ z) = \frac{\partial}{\partial z}\varphi(x,\ z)$, следует, что

$$\int_0^\pi [\varphi(x,\ z)]^2\,dx = \dot\varphi(\pi,\ z)\,\varphi'(\pi,\ z) - \dot\varphi'(\pi,\ z)\,\varphi(\pi,\ z) =$$
$$= \frac{\dot\chi_1(z)\,\chi_2(z) - \chi_1(z)\,\dot\chi_2(z)}{\sin(\beta_2 - \beta_1)}, \tag{3.4.74}$$

а из самосопряженности краевых задач вытекает вещественность их собственных значений, т. е. вещественность корней характеристических функций $\chi_i(z)$. Поскольку при вещественных z левая часть равенства (3.4.74) строго положительна, все корни характеристических функций простые. Переписывая равенство (3.4.74) в виде

$$\frac{\sin(\beta_2-\beta_1)}{[\chi_2(z)]^2}\int_0^\pi[\varphi(x,z)]^2\,dx=\frac{d}{dz}\left\{\frac{\chi_1(z)}{\chi_2(z)}\right\}$$

и учитывая, что при вещественных z левая часть в полученном равенстве положительна, замечаем, что в интервале $(-\infty,\mu_1(\beta_2))$ функция $\chi_1(z)/\chi_2(z)$ строго возрастает от $\lim\limits_{z\to-\infty}\chi_1(z)/\chi_2(z)$ до $+\infty$, а в интервалах $(\mu_k(\beta_2)$ $\mu_{k+1}(\beta_2))$ — от $-\infty$ до $+\infty$. Так как $\lim\limits_{z\to-\infty}\varphi(\pi,z)/\varphi'(\pi,z)=0$, то $\lim\limits_{z\to-\infty}\frac{\chi_1(z)}{\chi_2(z)}=\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\geqslant 0$. Поэтому в интервале $(-\infty,\mu_1(\beta_2))$ функция $\chi_1(z)$ не имеет корней, а в каждом интервале $(\mu_k(\beta_2),\mu_{k+1}(\beta_2))$ она имеет по одному корню $\mu_k(\beta_1)$, откуда следует, что собственные значения рассматриваемых краевых задач действительно удовлетворяют неравенствам (3.4.73).

2. Доказать справедливость неравенств (3.4.7).

Указание. Собственные значения λ_k краевой задачи (3.4.2) являются корнями функции $s(\sqrt{z},\pi)$, а собственные значения $\mu_k^\pm$ периодической и антипериодической краевых задач — корнями уравнений

$$u_+(\sqrt{z})=\frac{1}{2}[c(\sqrt{z},\pi)+s'(\sqrt{z},\pi)]=(-1)^k.$$

Полагая в тождестве

$$c(\sqrt{z},\pi)\,s'(\sqrt{z},\pi)-c'(\sqrt{z},\pi)\,s(\sqrt{z},\pi)=1$$

$z=\lambda_k$, получаем $c(\sqrt{\lambda_k},\pi)\,s'(\sqrt{\lambda_k},\pi)=1$ и

$$u_+(\sqrt{\lambda_k})=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s'(\sqrt{\lambda_k},\pi)}+s'(\sqrt{\lambda_k},\pi)\right],$$

откуда следует, что $u_+(\sqrt{\lambda_k}(\operatorname{sign}s'(\sqrt{\lambda_k},\pi)\geqslant 1$. Из равенств (3.4.74) при $\alpha=0$, $\beta_1=0,\beta_2=\frac{\pi}{2}$, $z=\lambda_k$ следует $0<\int_0^\pi[s(\sqrt{\lambda_k},x)]^2\,dx=\dot{s}(\sqrt{\lambda_k},\pi),\ s'(\sqrt{\lambda_k},\pi)\cdot$

Значит, $\operatorname{sign}s'(\sqrt{\lambda_k},)\pi)=\operatorname{sign}\dot{s}(\sqrt{\lambda_k},\pi)$, и так как функция $s(\sqrt{z},\pi)$ имеет только простые корни $\lambda_1<\lambda_2<\ldots$, а $\lim\limits_{z\to-\infty}s(\sqrt{z},\pi)=+\infty$, то $\dot{s}(\sqrt{\lambda_1},\pi)<0$, $\dot{s}(\sqrt{\lambda_2},\pi)>0$, $\dot{s}(\sqrt{\lambda_3},\pi)<0,\ldots$ Поэтому $\operatorname{sign}s'(\sqrt{\lambda_k},\pi)=\operatorname{sign}\dot{s}(\sqrt{\lambda_k},\pi)=$ $=(-1)^k$ и $u_+(\sqrt{\lambda_k})(-1)^k\geqslant 1$, т. е. $u_+(\sqrt{\lambda_1})\leqslant -1$, $u_+(\sqrt{\lambda_2})\geqslant 1$, $u_+(\sqrt{\lambda_3})\leqslant -1,\ldots$ Поскольку $\lim\limits_{z\to-\infty}u_+(\sqrt{z})=+\infty$, из этих неравенств следует, что в каждом промежутке $(-\infty,\lambda_1]$, $[\lambda_1,\lambda_2]$, $[\lambda_2,\lambda_3]$, ... функция $u_+(\sqrt{z})$ по крайней мере один раз принимает значения, равные $+1$ и -1. Обозначая через $\mu_k^+\in[\lambda_k,\lambda_{k+1}]$ $(\mu_k^-\in[\lambda_{k-1},\lambda_k])$ ближайший к λ_k корень уравнения $u_+(\sqrt{z}) = (-1)^k$, получаем

$$\mu_0 < \mu_1^- \leqslant \lambda_1 \leqslant \mu_1^+ < \mu_2^- \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_2^+ < .$$

Наконец, из асимптотических формул для собственных значений периодической и антипериодической краевых задач теоремы 1.5.2 вытекает, что последовательность $\{\mu_k^\pm\}$ содержит все собственные значения этих краевых задач.

3. Обобщить теорему 3.4.1: последовательности $\{\mu_k(1)\}$, $\{\mu_k(2)\}$ являются спектрами краевых задач, порождаемых одним и тем же уравнением $-y'' + q(x)y = \mu y$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ с вещественным потенциалом $q(x) \in W_2^n[0, \pi]$ и граничными условиями

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + H_1 y(\pi) = 0,$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + H_2 y(\pi) = 0$$

$(\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} H_1 = \operatorname{Im} H_2 = 0)$, тогда и только тогда, когда они перемежаются и удовлетворяют асимптотическим формулам задачи 2 § 5 гл. 1.

Указание. Необходимость сформулированных условий следует из задачи 1 этого параграфа и задачи 2 § 5 гл. 1. Достаточность доказывается сведением к обратной задаче рассеяния для уравнения $-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$, $y'(0) - hy(0) = 0$, $0 \leqslant x < \infty$ (см. задачу 1 § 3 гл. 3), так же как теорема 3.4.1. При этом вместо леммы 3.4.1 нужно воспользоваться формулой

$$S_h(\lambda) = -\frac{\omega'(\lambda, \pi; h) + i\lambda\omega(\lambda, \pi; h)}{\omega'(\lambda, \pi; h) - i\lambda\omega(\lambda, \pi; h)} e^{-2i\lambda\pi}.$$

4. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы данная конечная последовательность интервалов (a_0, a_1^-), (a_1^+, a_2^-), ..., (a_{N-1}^+, a_N^-), (a_N^+, ∞) была областью устойчивости некоторого уравнения Хилла.

Указание. Сопоставим данной последовательности интервалов два полинома

$$T(z) = \prod_{k=1}^{N} (z^2 - c_k^-)(z^2 - c_k^+), \quad P(z) = \prod_{k=1}^{N} (z^2 - p_k),$$

где $c_k^\pm = a_k^\pm - a_0$, а числа $p_k \in [c_k^-, c_k^+]$ определяются из уравнений

$$\int_{\sqrt{c_k^-}}^{\sqrt{c_k^+}} \frac{P(x)}{\sqrt{T(x)}} dx = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Тогда функция

$$\theta(z) = \pi \int_0^z \frac{P(\xi)}{\sqrt{T(\xi)}} d\xi$$

будет конформно отображать верхнюю полуплоскость на область

$$\{\theta : \operatorname{Im}\theta > 0\} \setminus \bigcup_{k=1}^{N} \{\theta : \operatorname{Re}\theta = \pm m_k, \quad 0 \leqslant \operatorname{Im}\theta \leqslant h_k\},$$

где

$$m_k = \pi \int\limits_0^{\sqrt{c_k}} \frac{P(x)}{\sqrt{T(x)}}\, dx, \quad h_k = \frac{\pi}{i} \int\limits_{\sqrt{c_k}}^{\sqrt{p_k}} \frac{P(x)}{\sqrt{T(x)}}\, dx.$$

Отсюда согласно теореме 3.4.2 вытекает, что числа m_k должны быть целыми.

§ 5. Обратная задача теории рассеяния на всей оси

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda^2 y \quad (-\infty < x < \infty) \tag{3.5.1}$$

с вещественным потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим неравенству

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)\, |q(x)|\, dx < \infty. \tag{3.5.2}$$

Согласно леммам 3.1.1, 3.1.2 при всех значениях λ из замкнутой верхней полуплоскости это уравнение имеет решения $e^+(\lambda, x)$, $e^-(\lambda, x)$, представимые в виде

$$\left.\begin{aligned} e^+(\lambda, x) &= e^{i\lambda x} + \int\limits_x^{\infty} K^+(x, t)\, e^{i\lambda t} dt, \\ e^-(\lambda, x) &= e^{-i\lambda x} + \int\limits_{-\infty}^{x} K^-(x, t)\, e^{-i\lambda t} dt, \end{aligned}\right\} \tag{3.5.3}$$

причем ядра $K^{\pm}(x, t)$ и их производные удовлетворяют неравенствам

$$|K^{\pm}(x, t)| \leqslant \frac{1}{2}\, \sigma^{\pm}\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{\sigma_1^{\pm}(x) - \sigma_1^{\pm}\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\},$$

$$\left|\frac{\partial K^{\pm}(x_1, x_2)}{\partial x_i} \pm \frac{1}{4}\, q\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\, \sigma_1^{\pm}(x_1)\, \sigma^{\pm}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \exp \sigma_1^{\pm}(x_1),$$

где

$$\sigma^+(x) = \int\limits_x^{\infty} |q(t)|\, dt, \quad \sigma_1^+(x) = \int\limits_x^{\infty} \sigma^+(t)\, dt,$$

$$\sigma^-(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} |q(t)|\, dt, \quad \sigma_1^-(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \sigma^-(t)\, dt.$$

Кроме того,

$$K^+(x,\ x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty q(t)\,dt, \quad K^-(x,\ x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^x q(t)\,dt.$$

Так как при вещественных значениях $\lambda \neq 0$ пары функций $e^+(\lambda, x)$, $e^+(-\lambda, x)$ и $e^-(\lambda, x)$, $e^-(-\lambda, x)$ образуют фундаментальные системы решений уравнения (3.5.1) и их вронскианы равны $2i\lambda$, то

$$e^+(\lambda,\ x) = b(\lambda)\,e^-(-\lambda,\ x) + a(\lambda)\,e^-(\lambda,\ x), \tag{3.5.4}$$

$$e^-(-\lambda,\ x) = -b(-\lambda)\,e^+(\lambda,\ x) + a(\lambda)\,e^+(-\lambda,\ x), \tag{3.5.4'}$$

где

$$a(\lambda) = \frac{W\{e^+(\lambda,\ x),\ e^-(-\lambda,\ x)\}}{2i\lambda} =$$

$$= \frac{e^+(\lambda,\ 0)'\,e^-(-\lambda,\ 0) - e^+(\lambda,\ 0)\,e^-(-\lambda,\ 0)'}{2i\lambda}, \tag{3.5.5}$$

$$b(\lambda) = \frac{W\{e^-(\lambda,\ x),\ e^+(\lambda,\ x)\}}{2i\lambda} =$$

$$= \frac{e^-(\lambda,\ 0)'\,e^+(\lambda,\ 0) - e^-(\lambda,\ 0)\,e^+(\lambda,\ 0)'}{2i\lambda}, \tag{3.5.6}$$

поскольку вронскианы не зависят от x. Далее, из равенств $\overline{e^\pm(\lambda,\ x)} = e^\pm(-\lambda,\ x)$, являющихся следствием вещественности потенциала $q(x)$, следует, что $a(\lambda) = \overline{a(-\lambda)}$, $b(\lambda) = \overline{b(-\lambda)}$. Поэтому

$$2i\lambda = W\{e^+(\lambda, x), e^+(-\lambda, x)\} = -2i\lambda\,\{b(\lambda)\,b(-\lambda) - a(\lambda)\,a(-\lambda)\} =$$
$$= 2i\lambda\,\{|a(\lambda)|^2 - |b(\lambda)|^2\}$$

и

$$|a(\lambda)|^2 = 1 + |b(\lambda)|^2 = 1 + |b(-\lambda)|^2. \tag{3.5.7}$$

Разделив обе части равенств (3.5.4), (3.5.4′) на $a(\lambda)$, придем к определенным при всех вещественных $\lambda \neq 0$ решениям уравнения (3.5.1):

$$u^-(\lambda,\ x) = t(\lambda)\,e^+(\lambda,\ x) = r^-(\lambda)\,e^-(-\lambda,\ x) + e^-(\lambda,\ x), \tag{3.5.8}$$

$$u^+(\lambda,\ x) = t(\lambda)\,e^-(-\lambda,\ x) = r^+(\lambda)\,e^+(\lambda,\ x) + e^+(-\lambda,\ x), \tag{3.5.8'}$$

где

$$r^-(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}, \quad r^+(\lambda) = -\frac{b(-\lambda)}{a(\lambda)}, \quad t(\lambda) = \frac{1}{a(\lambda)}. \tag{3.5.9}$$

Эти решения удовлетворяют асимптотическим равенствам

$$u^-(\lambda, x) \simeq r^-(\lambda)\,e^{-i\lambda x} + e^{i\lambda x} \quad (x \to -\infty),$$

$$u^-(\lambda, x) \simeq t(\lambda)\,e^{i\lambda x} \quad (x \to +\infty),$$

$$u^+(\lambda, x) \simeq t(\lambda)\, e^{-i\lambda x} \quad (x \to -\infty),$$
$$u^+(\lambda, x) = r^+(\lambda)\, e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x} \quad (x \to +\infty)$$

и называются собственными функциями левой ($u^-(\lambda, x)$) и правой ($u^+(\lambda, x)$) задач рассеяния, а коэффициенты $r^-(\lambda)$, $r^+(\lambda)$ и $t(\lambda)$ называются соответственно левым и правым коэффициентами отражения и коэффициентом прохождения.

При комплексных значениях λ из верхней полуплоскости функция $e^+(\lambda, x)$ ($e^-(-\lambda, x)$) является единственным решением уравнения (3.5.1), принадлежащим пространству $L_2\,[0, \infty)$ ($L_2(-\infty, 0]$). Поэтому рассматриваемое уравнение имеет решение, принадлежащее пространству $L_2(-\infty, \infty)$ лишь при тех значениях λ ($\operatorname{Im}\lambda > 0$), при которых функции $e^+(\lambda, x)$, $e^-(-\lambda, x)$ линейно зависимы, т. е. когда $W\{e^+(\lambda, x), e^-(-\lambda, x)\} = 2i\lambda a(\lambda) = 0$. Из формулы (3.5.5) следует, что функция $a(\lambda)$ аналитическая в верхней полуплоскости и ее нули образуют дискретное множество. Если $a(\lambda_k) = 0$ ($\operatorname{Im}\lambda_k > 0$), то $W\{e^+(\lambda_k, x), e^-(-\lambda_k, x)\} = 0$, решения

$$u^-(\lambda_k, x) = e^-(-\lambda_k, x), \quad u^+(\lambda_k, x) = e^+(\lambda_k, x) \tag{3.5.10}$$

линейно зависимы,

$$u^-(\lambda_k, x) = c_k^- u^+(\lambda_k, x), \quad u^+(\lambda_k, x) = c_k^+ u^-(\lambda_k, x), \quad c_k^- c_k^+ = 1, \tag{3.5.10$'$}$$

и принадлежат пространству $L_2(-\infty, \infty)$. Они называются левой ($u^-(\lambda_k, x)$) и правой ($u^+(\lambda_k, x)$) собственными функциями дискретного спектра, собственными значениями которого являются числа $\mu_k = \lambda_k^2$. Стандартным методом, опираясь на формальную самосопряженность ($q(x)$ вещественна) уравнения (3.5.1), доказываем, что собственные значения μ_k вещественны. Следовательно, $\lambda_k = i\varkappa_k$, $\varkappa_k > 0$, и нули функции $a(\lambda)$ могут лежать только на мнимой полуоси $i\varkappa$, $\varkappa > 0$. Далее, согласно формуле (3.1.37)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u^-(i\varkappa_k, x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{0} |e^-(-i\varkappa_k, x)|^2\, dx +$$
$$+ (c_k^-)^2 \int_0^{\infty} |e^+(i\varkappa_k, x)|^2\, dx = \frac{1}{2i\varkappa_k} W\{e^-(-\lambda, 0), \dot{e}^-(-\lambda, 0)\}\big|_{\lambda=i\varkappa_k} -$$
$$- \frac{(c_k^-)^2}{2i\varkappa_k} W\{e^+(\lambda, 0), \dot{e}^+(\lambda, 0)\}\big|_{\lambda=i\varkappa_k} =$$
$$= \frac{c_k^-}{2i\varkappa_k} \{W\{e^+(\lambda, 0), \dot{e}^-(-\lambda, 0)\} +$$

$$+ W\{\dot{e}^{+}(\lambda, 0),\ e^{-}(-\lambda, 0)\}\}\,|_{\lambda=i\varkappa_k} =$$

$$= \frac{c_k^{-}}{2i\varkappa_k}\frac{\partial}{\partial\lambda} W\{e^{+}(\lambda, 0),\ \dot{e}^{-}(-\lambda, 0)\}\,|_{\lambda=i\varkappa_k} =$$

$$= \frac{c_k^{-}}{2i\varkappa_k}\frac{\partial}{\partial\lambda}\{2i\lambda a(\lambda)\}\,|_{\lambda=i\varkappa_k},$$

откуда, поскольку $a(i\varkappa_k) = 0$, находим

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} |u^{-}(i\varkappa_k,\ x)|^2\,dx = ic_k^{-}\dot{a}(i\varkappa_k), \\ &\int_{-\infty}^{\infty} |u^{+}(i\varkappa_k,\ x)|^2\,dx = ic_k^{+}\dot{a}(i\varkappa_k). \end{aligned}\right\} \tag{3.5.11}$$

Поэтому $\dot{a}(i\varkappa_k) \neq 0$ и, следовательно, нули функции $a(z)$ простые. В дальнейшем обратные величины норм собственных функций дискретного спектра $u^{-}(i\varkappa_k,\ x) = e^{-}(-i\varkappa_k,\ x)$ и $u^{+}(i\varkappa_k,\ x) = e^{+}(i\varkappa_k,\ x)$ будем обозначать через m_k^{-} и m_k^{+}, так что

$$(m_k^{-})^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-}(i\varkappa_k,\ x)|^2\,dx,\quad (m_k^{+})^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{+}(i\varkappa_k,\ x)|^2\,dx. \tag{3.5.12}$$

Набор величин $\{r^{-}(\lambda),\ i\varkappa_k,\ m_k^{-}\}$ и $\{r^{+}(\lambda),\ i\varkappa_k,\ m_k^{+}\}$ называется соответственно левыми и правыми данными рассеяния уравнения (3.5.1). Обратная задача теории рассеяния для этого уравнения состоит в восстановлении потенциала $q(x)$ по левым или правым данным рассеяния и нахождении необходимых и достаточных условий, которым должен удовлетворять произвольно взятый набор $\{r(\lambda),\ i\varkappa_k,\ m_k\}$ для того, чтобы он являлся левыми (правыми) данными рассеяния некоторого уравнения (3.5.1) с вещественным потенциалом, удовлетворяющим неравенству (3.5.2).

Коэффициент прохождения $t(\lambda) = [a(\lambda)]^{-1}$ не входит в состав данных рассеяния. Но он играет существенную роль при исследовании их свойств и при решении обратной задачи. Поэтому нам нужно прежде всего изучить свойства этого коэффициента (для удобства будем формулировать их в терминах функции $a(z)$).

Лемма 3.5.1. *Определенные формулами (3.5.5), (3.5.6) коэффициенты $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ допускают следующее представление:*

$$a(\lambda) = 1 - (2i\lambda)^{-1}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} q(x)\,dx + \int_{-\infty}^{0} A(t)\,e^{-i\lambda t}dt\right\}, \tag{3.5.13}$$

$$b(\lambda) = (2i\lambda)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} B(t)\,e^{-i\lambda t}dt, \tag{3.5.13'}$$

где $A(t) \in L_1(-\infty,\ 0]$, $B(t) \in L_1(-\infty,\ \infty)$.

Доказательство. Согласно леммам 3.1.1, 3.1.2

$$e^{+}(\lambda,\ 0)'\, e^{-}(-\lambda,\ 0) = i\lambda + i\lambda \int\limits_{-\infty}^{0} K^{-}(0,\ t)\, e^{-i\lambda t} dt - K^{+}(0,\ 0) -$$

$$- K^{+}(0,\ 0) \int\limits_{-\infty}^{0} K^{-}(0,\ t)\, e^{-i\lambda t} dt + \int\limits_{0}^{\infty} K_x^{+\prime}(0,\ t)\, e^{i\lambda t} dt \times$$

$$\times \left[1 + \int\limits_{-\infty}^{0} K^{-}(0,\ t)\, e^{-i\lambda t} dt \right] = i\lambda - K^{-}(0,\ 0) - K^{+}(0,\ 0) +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{0} K_t^{-\prime}(0,\ t)\, e^{-i\lambda t} dt - K^{+}(0,\ 0) \int\limits_{-\infty}^{0} K^{-}(0,\ t)\, e^{-i\lambda t} dt +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{0} K_x^{+\prime}(0,\ -t)\, e^{-i\lambda t} dt \left[1 + \int\limits_{-\infty}^{0} K^{-}(0,\ t)\, e^{-i\lambda t} dt \right],$$

причем функции $K^{\pm}(0,\ \mp t)$, $K_x^{\pm\prime}(0,\ \mp t)$, $K_t^{-\prime}(0,\ t)$ принадлежат пространству $L_1(-\infty,\ \infty)$ и равны нулю при $t > 0$. Отсюда, поскольку произведение преобразований Фурье суммируемых функций, равных нулю на положительной полуоси, равно преобразованию Фурье их свертки, которая тоже суммируема и равна нулю на положительной полуоси, находим

$$e^{+}(\lambda,\ 0)'\, e^{-}(-\lambda,\ 0) = i\lambda - K^{-}(0,\ 0) - K^{+}(0,\ 0) + \int\limits_{-\infty}^{0} A_1(t)\, e^{-i\lambda t} dt,$$

где $A_1(t) \in L_1(-\infty,\ 0]$. Аналогично доказывается равенство $e^{+}(\lambda,\ 0)\, e^{-}(-\lambda,\ 0)' =$

$$= -i\lambda + K^{-}(0,\ 0) + K^{+}(0,\ 0) + \int\limits_{-\infty}^{0} A_2(t)\, e^{-i\lambda t} dt,$$

в котором $A_2(t) \in L_1(-\infty,\ 0]$. Подставляя эти выражения в формулу (3.5.5) и учитывая, что $2\{K^{-}(0,\ 0) + K^{+}(0,\ 0)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} q(x)\, dx$, приходим к равенству (3.5.13), в котором $A(t) = A_1(t) + A_2(t)$, $A(t) \in L_1(-\infty,\ 0]$.

Равенство (3.5.13′) доказывается аналогично. Из формулы (3.5.13) следует, что при $|\lambda| \to \infty$ ($\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$) $a(\lambda) = 1 + O(\lambda^{-1})$, а из равенства (3.5.7) — $|a(\lambda)|^{-1} \leqslant 1$ при всех вещественных $\lambda \neq 0$. Эти оценки позволяют доказать следующий аналог леммы 3.1.6.

Лемма 3.5.2. *Функция* $a(\lambda)$ *может иметь в полуплоскости* $\operatorname{Im}\lambda > 0$ *только конечное число нулей. Все эти нули простые, лежат на мнимой полуоси, и функция* $[a(\lambda)]^{-1}$ *ограничена в некоторой окрестности нуля.*

Эта лемма доказывается тем же методом, что и лемма 3.1.6 (см. задачу 1).

Выведем теперь основные интегральные уравнения, позволяющие восстанавливать потенциал $q(x)$ по левым или правым данным рассеяния. Заметим прежде всего, что согласно (3.5.7), (3.5.9) $|r^{\pm}(\lambda)| < 1$ при вещественных $\lambda \neq 0$, а согласно (3.5.13), (3.5.13′) $r^{\pm}(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ при $\lambda \to \pm\infty$. Поэтому $r^{\pm}(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty)$ и, следовательно, функции

$$R^{\pm}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^{\pm}(\lambda)\, e^{\pm i\lambda y} d\lambda \tag{3.5.14}$$

тоже принадлежат пространству $L_2(-\infty, \infty)$.

Для вывода основного уравнения воспользуемся тождеством (3.5.8′), записав его в такой форме:

$$\left(\frac{1}{a(\lambda)} - 1\right) e^{-}(-\lambda, x) = r^{+}(\lambda)\, e^{+}(\lambda, x) + e^{+}(-\lambda, x) - e^{-}(-\lambda, x). \tag{3.5.15}$$

Из равенств (3.5.3), (3.5.14) следует, что правая часть этого тождества при каждом фиксированном $x \in (-\infty, \infty)$ есть преобразование Фурье функции

$$R^{+}(x+y) + \int_{x}^{\infty} R^{+}(y+t)\, K^{+}(x, t)\, dt + K^{+}(x, y) - K^{-}(x, y). \tag{3.5.16}$$

Следовательно, интеграл от произведения $(2\pi)^{-1} e^{i\lambda y}$ и левой части тождества (3.5.15), взятый по всей оси $-\infty < \lambda < \infty$, должен быть равен (3.5.16). Так как функция $[a(\lambda)]^{-1} - 1$ аналитическая в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа точек $i\varkappa_k$, где она имеет простые полюсы, стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$ ($\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$) и ограничена в некоторой окрестности нуля, а функция $e^{-}(-\lambda, x)\, e^{i\lambda y}$ при $y > x$ равномерно ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, то, используя лемму Жордана, при $y > x$ получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{a(\lambda)} - 1\right) e^{-}(-\lambda, x)\, e^{i\lambda y} d\lambda = i\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-}(-i\varkappa_k, x)\, e^{-\varkappa_k y}}{\dot{a}(i\varkappa_k)} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{+}(i\varkappa_k, x)\, e^{-\varkappa_k y}}{i c_k^{+} \dot{a}(i\varkappa_k)} = -\sum_{k=1}^{n} (m_k^{+})^2 \left\{ e^{-\varkappa_k(x+y)} + \right.$$

$$\left. + \int_{x}^{\infty} K^{+}(x, t)\, e^{-\varkappa_k(t+y)} dt \right\}. \tag{3.5.17}$$

Поэтому при $y > x$ функции (3.5.16) и (3.5.17) совпадают, откуда, поскольку $K^-(x, y) = 0$ при $y > x$, находим

$$F^+(x+y) + K^+(x, y) + \int_x^\infty F^+(y+t)\,K^+(x, t)\,dt = 0, \tag{3.5.18}$$

где функция

$$F^+(x) = \sum_{k=1}^n (m_k^+)^2 e^{-\varkappa_k x} + R^+(x) =$$

$$= \sum_{k-1}^n (m_k^+)^2 e^{-\varkappa_k x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty r^+(\lambda)\,e^{i\lambda x}d\lambda \tag{3.5.19}$$

полностью определяется правыми данными рассеяния.

Поступая аналогично с тождеством (3.5.8), получаем равенство

$$F^-(x+y) + K^-(x, y) + \int_{-\infty}^x F^-(y+t)\,K^-(x, t)\,dt = 0 \quad (y < x), \tag{3.5.18'}$$

в котором функция

$$F^-(x) = \sum_{k=1}^n (m_k^-)^2 e^{\varkappa_k x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty r^-(\lambda)\,e^{-i\lambda y}d\lambda \tag{3.5.19'}$$

определяется левыми данными рассеяния.

Равенства (3.5.18), (3.5.18') по форме совпадают с равенством (3.2.10). Поэтому они позволяют уточнить свойства функций $F^\pm(x)$ так же, как были уточнены в § 2 свойства функции $F(x)$: функции $F^\pm(x)$ абсолютно непрерывны и при всех $a > -\infty$

$$\int_a^\infty |F^\pm(\pm x)|\,dx < \infty, \quad \int_a^\infty (1+|x|)\,|F^{\pm'}(\pm x)|\,dx < \infty.$$

Очевидно, этими свойствами обладают и функции $R^\pm(x)$.

Таким образом, данные рассеяния рассматриваемой задачи удовлетворяют такому условию.

I. При всех вещественных $\lambda \neq 0$ коэффициенты отражения $r^\pm(\lambda)$ непрерывны, $r^\pm(-\lambda) = \overline{r^\pm(\lambda)}$, $|r^\pm(\lambda)| < 1$ и $r^\pm(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ при $\lambda \to \pm\infty$. Их преобразования Фурье

$$R^\pm(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty r^\pm(\lambda)\,e^{\pm i\lambda x}d\lambda$$

вещественны, абсолютно непрерывны, принадлежат пространству $L_2(-\infty, \infty)$ и при всех $a > -\infty$ удовлетворяют неравенствам

$$\int_a^\infty |R^\pm(\pm x)|\,dx < \infty, \quad \int_a^\infty (1+|x|)\,|R^{\pm'}(\pm x)|\,dx < \infty.$$

Рассмотрим два набора произвольных величин $\{r^+(\lambda), i\varkappa_k, m_k^+\}$, $\{r^-(\lambda), i\varkappa_k, m_k^-\}$ $(-\infty<\lambda<\infty,\ k=1, 2, \ldots, n,\ \varkappa_k>0,\ m^{\pm}_k>0)$, в которых функции $r^{\pm}(\lambda)$ удовлетворяют условию I. Исходя из этих наборов, построим функции $F^{\pm}(x)$ по формулам (3.5.19), (3.5.19′) и семейства интегральных уравнений (3.5.18), (3.5.18′) относительно неизвестных функций $K^{\pm}(x, y)$, в которых x играет роль параметра, а сами уравнения рассматриваются соответственно в пространствах $L_1[x, \infty)$, $L_1(-\infty, x]$.

Лемма 3.5.3. *Если выполнены условия I, то уравнения (3.5.18) (3.5.18′) при каждом значении параметра $x>-\infty$ имеют единственные решения $K^+(x, y)\in L_1\ [x, \infty)$, $K^-(x, y)\in L_1(-\infty, x]$ и при всех значениях λ из замкнутой верхней полуплоскости функции*

$$\left.\begin{aligned} e^+(\lambda, x) &= e^{i\lambda x}+\int_x^{\infty} K^+(x, t)\, e^{i\lambda t}dt,\\ e^-(-\lambda, x) &= e^{-i\lambda x}+\int_{-\infty}^{x} K^-(x, t)\, e^{-i\lambda t}dt \end{aligned}\right\} \tag{3.5.20}$$

удовлетворяют уравнениям

$$-e^{\pm}(\pm\lambda, x)''+q^{\pm}(x)\, e^{\pm}(\pm\lambda, x)=\lambda^2 e^{\pm}(\pm\lambda, x), \tag{3.5.21}$$

где $q^+(x)=-2\dfrac{d}{dx}K^+(x, x)$, $q^-(x)=2\dfrac{d}{dx}K^-(x, x)$, *и*

$$\int_a^{\infty}(1+|x|)\,|q^{\pm}(\pm x)|\,dx<\infty \tag{3.5.22}$$

при всех $a>-\infty$.

Доказательство. Согласно лемме 3.3.1 рассматриваемые интегральные уравнения порождаются вполне непрерывными операторами, и для доказательства их однозначной разрешимости достаточно показать, что соответствующие однородные уравнения имеют только нулевые решения. Рассмотрим, например, уравнение

$$f(y)+\int_x^{\infty} F^+(y+t)\, f(t)\, dt=0 \quad (f(y)\in L_1[x, \infty)). \tag{3.5.23}$$

Согласно условию I функция $F^+(y)$, а вместе с ней и решение $f(y)$ ограничены на полуоси $x\leqslant y<\infty$. Поэтому $f(y)\in L_2[x, \infty)$ и

$$0=\int_x^{\infty} f(y)\,\overline{f(y)}\,dy+\int_x^{\infty}\int_x^{\infty} F^+(y+t)\, f(t)\,\overline{f(y)}\,dtdy=$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda + \sum_{k=1}^{n} (m_k^+)^2 |\tilde{f}(-i\varkappa_k)|^2 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(-\lambda) \overline{\tilde{f}(\lambda)} r^+(\lambda) d\lambda,$$

где $\tilde{f}(\lambda) = \int_x^{\infty} f(y) e^{-i\lambda y} dy$. Поскольку $|r^+(-\lambda)| = |r^+(\lambda)|$, $2|\overline{\tilde{f}(\lambda)} \tilde{f}(-\lambda)| \leqslant |\tilde{f}(-\lambda)|^2 + |\tilde{f}(\lambda)|^2$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r^+(\lambda) \tilde{f}(-\lambda) \overline{\tilde{f}(\lambda)}| d\lambda \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |r^+(\lambda)| |\tilde{f}((\lambda)|^2 d\lambda$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda = - \sum_{k=1}^{n} (m_k^+)^2 |\tilde{f}(-i\varkappa_k)|^2 -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r^+(\lambda) \tilde{f}(-\lambda) \overline{\tilde{f}(\lambda)} d\lambda \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |r^+(\lambda) \tilde{f}(-\lambda) \overline{\tilde{f}(\lambda)}| d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |r^+(\lambda)| |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda,$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 - |r^+(\lambda)|) \tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda \leqslant 0,$$

откуда следует, что $\tilde{f}(\lambda) \equiv 0$, так как $1 - |r^+(\lambda)| > 0$ при всех $\lambda \neq 0$. Таким образом, однородное уравнение (3.5.23) имеет лишь нулевое решение. Однозначная разрешимость уравнений (3.5.18′) доказывается аналогично. Все остальные утверждения доказываемой леммы являются следствием теоремы 3.3.1, так как при доказательстве последней использовалась только однозначная разрешимость соответствующих уравнений.

До сих пор мы не интересовались зависимостью между левыми и правыми данными рассеяния. Оказывается, одни данные рассеяния однозначно определяются другими. Действительно, из формул (3.5.9) — (3.5.12) вытекают равенства

$$r^-(\lambda) = -r^+(-\lambda) \frac{a(-\lambda)}{a(\lambda)}, \quad (m_k^-)^{-2} = -(m_k^+)^2 [\dot{a}(i\varkappa_k)]^2, \quad (3.5.24)$$

показывающие, что для определения одних данных рассеяния по другим достаточно по ним восстановить функцию $a(z)$. Согласно лемме 3.5.2 функция

$$g(z) = \frac{1}{a(z)} \prod_{k=1}^{n} \frac{z - i\varkappa_k}{z + i\varkappa_k}$$

в верхней полуплоскости голоморфна, равномерно ограничена, не имеет нулей и при $|z| \to \infty$ ведет себя как $1 + O(z^{-1})$, а согласно равенствам (3.5.7), (3.5.9) при вещественных значениях $\lambda \neq 0$

$$|g(\lambda)| = |a(\lambda)|^{-1} = \sqrt{1 - |r^{\pm}(\lambda)|^2}.$$

Это позволяет восстановить функцию $\ln g(z)$ ($\operatorname{Im} z > 0$) по ее вещественной части $\ln |g(\lambda)|$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ с помощью формулы Пуассона — Шварца

$$\ln g(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |g(\lambda)|}{\lambda - z} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln (1 - |r^{\pm}(\lambda)|^2)}{\lambda - z} d\lambda,$$

откуда для функции $a(z)$ вытекает такое представление через $|r^+(\lambda)| = |r^-(\lambda)|$:

$$a(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln (1 - |r^+(\lambda)|^2)}{\lambda - z} d\lambda\right\} \prod_{k=1}^{n} \frac{z - i\varkappa_k}{z + i\varkappa_k}. \qquad (3.5.25)$$

Строгое обоснование этой формулы дано в задаче 2. Здесь отметим только, что из формулы (3.5.13) следует непрерывность функции $za(z)$ в замкнутой верхней полуплоскости и ограниченность функции $\lambda^2 (1 + \lambda^2)^{-1} |a(\lambda)|^2 = \lambda^2 (1 + \lambda^2)^{-1} (1 - |r^+(\lambda)|^2)^{-1}$ на вещественной оси, влекущая за собой неравенства $1 > (1 - |r^+(\lambda)|^2) > C\lambda^2 (1 + \lambda^2)^{-1}$, которые вместе с оценкой $|r^+(\lambda)| = O(\lambda^{-1})$ $(\lambda \to \pm\infty)$ обеспечивают сходимость интеграла в формуле (3.5.25).

Поведение функции $za(z)$ при $z \to 0$ тесно связано с поведением функций $r^{\pm}(\lambda)$ при $\lambda \to 0$. Действительно, преобразовав равенства (3.5.8), (3.5.8′) к виду

$$\lambda e^{\pm}(\pm\lambda, x) = \lambda a(\lambda) [(r^{\pm}(\lambda) + 1) e^{\mp}(\mp\lambda, x) + e^{\mp}(\pm\lambda, x) - \\ - e^{\mp}(\mp\lambda, x)],$$

при $\lambda \to 0$ получим

$$0 \equiv e^{\mp}(0, x) \lim_{\lambda \to 0} \lambda a(\lambda) [r^{\pm}(\lambda) + 1].$$

Следовательно,

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda a(\lambda) [r^{\pm}(\lambda) + 1] = 0,$$

откуда, в частности, вытекает, что, если $\lim\limits_{z\to 0} za(z) \neq 0$, функции $r^{\pm}(\lambda)$ непрерывны на всей вещественной оси и $r^{\pm}(0) = -1$.

Итак, кроме условия I данные рассеяния удовлетворяют также следующим условиям.

II. Коэффициенты отражения $r^{+}(\lambda)$ и $r^{-}(\lambda)$ и нормировочные коэффициенты m_k^{+} и m_k^{-} связаны равенствами (3.5.24), в которых функция $a(z)$ определяется через собственные значения $\mu_k = (i\varkappa_k)^2$, а модуль коэффициентов отражения $|r^{+}(\lambda)| = |r^{-}(\lambda)|$ — формулой (3.5.25). При этом функция $za(z)$ непрерывна в замкнутой верхней полуплоскости и $\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda a(\lambda)\,[r^{\pm}(\lambda) + 1] = 0$.

Условия I и II не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы два набора рассматриваемого вида были правыми и левыми данными рассеяния одного и того же уравнения (3.5.1). Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3.5.1. *Для того чтобы набор величин* $\{r^{+}(\lambda),\ i\varkappa_k,\ m_k^{+}\}$ $(-\infty < \lambda < \infty,\ k = 1, 2, \ldots, n,\ \varkappa_k > 0, m_k^{+} > 0)$ *являлся правыми данными рассеяния некоторого уравнения (3.5.1) с вещественным потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим неравенству (3.5.2), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) при вещественных $\lambda \neq 0$ функция $r^{+}(\lambda) = \overline{r^{+}(-\lambda)}$ непрерывна, $|r^{+}(\lambda)| \leqslant 1 - C\lambda^2(1+\lambda^2)^{-1}$ и $r^{+}(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ при $\lambda \to \pm\infty$;

2) функция

$$R^{+}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r^{+}(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda$$

абсолютно непрерывна и ее производная $R^{+\prime}(x)$ при всех $a > -\infty$ удовлетворяет неравенствам

$$\int\limits_{a}^{\infty} (1+|x|)\,|R^{+\prime}(x)|\,dx < \infty;$$

3) функция $za(z)$, где

$$a(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1-|r^{+}(\lambda)|^2)}{\lambda - z}\, d\lambda\right\} \prod_{k=1}^{n} \frac{z - i\varkappa_k}{z + i\varkappa_k},$$

непрерывна в замкнутой верхней полуплоскости и $\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda a(\lambda)\,[r^{+}(\lambda) + 1] = 0;$

4) функция

$$R^{-}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r^{+}(-\lambda)\,\frac{a(-\lambda)}{a(\lambda)}\, e^{-i\lambda x} d\lambda$$

абсолютно непрерывна и ее производная $R^-(x)'$ при всех $a > -\infty$ удовлетворяет неравенствам

$$\int\limits_a^\infty (1+|x|)\,|R^-(-x)'|\,dx < \infty.$$

Доказательство. Необходимость этих условий была установлена ранее. Для доказательства достаточности построим, исходя из заданного набора, второй набор $\{r^-(\lambda),\ i\varkappa_k,\ m_k^-\}$, положив

$$r^-(\lambda) = -r^+(-\lambda)\frac{a(-\lambda)}{a(\lambda)}, \quad (m_k^-)^{-2} = -(m_k^+)^2[\dot a(i\varkappa_k)]^2, \tag{3.5.26}$$

и покажем, что $\{r^+(\lambda),\ i\varkappa_k,\ m_k^+\}$ и $\{r^-(\lambda),\ i\varkappa_k,\ m_k^-\}$ являются правыми и левыми данными рассеяния одного и того же уравнения (3.5.1) с вещественным потенциалом, удовлетворяющим условию (3.5.2). Из условий 1, 2, 4 следует, что оба набора удовлетворяют условиям леммы 3.5.3. Поэтому построенные по ним уравнения (3.5.18), (3.5.18′) при каждом фиксированном $x \neq \pm\infty$ имеют единственные решения $K^\pm(x, y)$ и определенные формулами (3.5.20) функции $e^\pm(\pm\lambda, x)$ являются решениями уравнений (3.5.21), в которых потенциалы $q^+(x)$, $q^-(x)$ вещественны и удовлетворяют неравенствам (3.5.22). Для доказательства теоремы достаточно, очевидно, показать, что при вещественных значениях λ функции $e^+(\lambda, x)$, $e^-(-\lambda, x)$ связаны равенствами

$$\left.\begin{aligned} r^+(\lambda)e^+(\lambda, x) + e^+(-\lambda, x) &= [a(\lambda)]^{-1}e^-(-\lambda, x),\\ r^-(\lambda)e^-(-\lambda, x) + e^-(\lambda, x) &= [a(\lambda)]^{-1}e^+(\lambda, x)\end{aligned}\right\} \tag{3.5.27}$$

и, кроме того,

$$(m_k^-)^{-2} = \int\limits_{-\infty}^\infty |e^-(-i\varkappa_k, x)|^2\,dx, \quad (m_k^+)^{-2} = \int\limits_{-\infty}^\infty |e^+(i\varkappa_k, x)|^2\,dx. \tag{3.5.28}$$

Поскольку $R^\pm(y) \in L_2(-\infty, \infty)$, функции

$$\Phi^+(x, y) = R^+(x+y) + \int\limits_x^\infty R^+(y+t)K^+(x, t)\,dt,$$

$$\Phi^-(x, y) = R^-(x+y) + \int\limits_{-\infty}^x R^-(y+t)K^-(x, t)\,dt$$

при каждом фиксированном x тоже принадлежат пространству $L_2(-\infty, \infty)$ и

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int\limits_{-N}^N \Phi^+(x, y)e^{-i\lambda y}dy = r^+(\lambda)\left[e^{i\lambda x} + \int\limits_x^\infty K^+(x, t)e^{i\lambda t}dt\right] =$$
$$= r^+(\lambda)e^+(\lambda, x),$$

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-N}^{N}\Phi^-(x,\ y)\,e^{i\lambda y}dy=r^-(\lambda)\left[e^{-i\lambda x}+\int_{-\infty}^{x}K^-(x,\ t)\,e^{-i\lambda t}dt\right]=$$
$$=r^-(\lambda)\,e^-(-\lambda,\ x).$$

С другой стороны, в силу уравнений (3.5.18), (3.5.18′)

$$\Phi^+(x,\ y)=-K^+(x,\ y)-\sum_{k=1}^{n}(m_k^+)^2\left\{e^{-\varkappa_k(x+y)}+\right.$$
$$\left.+\int_x^\infty K^+(x,\ t)\,e^{-\varkappa_k(y+t)}dt\right\}=-K^+(x,\ y)-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}(m_k^+)^2\,e^{-\varkappa_k y}e^+(i\varkappa_k,\ x)\quad(x<y<\infty),$$

$$\Phi^-(x,\ y)=-K^-(x,\ y)-\sum_{k=1}^{n}(m_k^-)^2\times$$
$$\times\left\{e^{\varkappa_k(x+y)}+\int_{-\infty}^{x}K^-(x,\ t)\,e^{\varkappa_k(y+t)}dt\right\}=$$
$$=-K^-(x,\ y)-\sum_{k=1}^{n}(m_k^-)^2\,e^{\varkappa_k y}e^-(-i\varkappa_k,\ x)\quad(-\infty>y>x)$$

и, следовательно,

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-N}^{N}\Phi^+(x,\ y)\,e^{-i\lambda y}dy=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-N}^{x}\Phi^+(x,\ y)\,e^{-i\lambda y}dy+$$
$$+e^{-i\lambda x}-e^+(-\lambda,\ x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(m_k^+)^2}{\varkappa_k+i\lambda}\,e^{-i\lambda x}e^{-\varkappa_k x}e^+(i\varkappa_k,\ x),$$

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-N}^{N}\Phi^-(x,\ y)\,e^{i\lambda y}dy=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{x}^{N}\Phi^-(x,\ y)\,e^{i\lambda y}dy+$$
$$+e^{i\lambda x}-e^-(\lambda,\ x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(m_k^-)^2}{\varkappa_k+i\lambda}\,e^{i\lambda x}e^{\varkappa_k x}e^-(-i\varkappa_k,\ x).$$

Сопоставляя полученные выражения для преобразований Фурье функций $\Phi^\pm(x,\ y)$, приходим к равенствам

$$r^+(\lambda)\,e^+(\lambda,\ x)+e^+(-\lambda,\ x)=[a(\lambda)]^{-1}\,h^-(-\lambda,\ x),\tag{3.5.29}$$
$$r^-(\lambda)\,e^-(-\lambda,\ x)+e^-(\lambda,\ x)=[a(\lambda)]^{-1}\,h^+(\lambda,\ x),\tag{3.5.29′}$$

где $-\infty<\lambda<\infty$ и

$$h^-(-\lambda,\ x) = e^{-i\lambda x}a(\lambda)\left[1 + \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-N}^{x}\Phi^+(x,\ y)\,e^{-i\lambda(y-x)}dy - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n}\frac{(m_k^+)^2}{\varkappa_k + i\lambda}\,e^{-\varkappa_k x}e^+(i\varkappa_k,\ x)\right], \tag{3.5.30}$$

$$h^+(\lambda,\ x) = e^{i\lambda x}a(\lambda)\left[1 + \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{x}^{N}\Phi^-(x,\ y)\,e^{i\lambda(y-x)}dy - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n}\frac{(m_k^-)^2}{\varkappa_k + i\lambda}\,e^{\varkappa_k x}e^-(-i\varkappa_k,\ x)\right]. \tag{3.5.30'}$$

Перечислим используемые в дальнейшем свойства функций $h^+(\lambda, x)$, $h^-(\lambda, x)$. Из равенств (3.5.29), (3.5.29′) и условия 3 следует, что при вещественных значениях $\lambda \neq 0$ функции $h^+(\lambda, x)$, $h^-(-\lambda, x)$ непрерывны, $h^+(\lambda, x) = \overline{h^+(-\lambda, x)}$, $h^-(-\lambda, x) = \overline{h^-(\lambda, x)}$,

$$W\{e^+(\lambda,\ x),\ h^-(-\lambda,\ x)\} = W\{h^+(\lambda,\ x),\ e^-(-\lambda,\ x)\} = 2i\lambda a(\lambda),$$

$$\sup_{\lambda\neq 0}|[a(\lambda)]^{-1}h^-(-\lambda,\ x)| < \infty, \quad \sup_{\lambda\neq 0}|[a(\lambda)]^{-1}h^+(\lambda,\ x)| < \infty,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda h^-(-\lambda,\ x) = \lim_{\lambda\to 0}\lambda h^+(\lambda,\ x) = 0,$$

а из формул (3.5.30), (3.5.30′) и условия 3 — что они аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость, причем

$$\lim_{|z|\to\infty} e^{izx}h^-(-z,\ x) = \lim_{|z|\to\infty} e^{-izx}h^+(z,\ x) = 1, \tag{3.5.31}$$

$$\lim_{z\to 0} zh^-(-z,\ x) = \lim_{z\to 0} zh^+(z,\ x) = 0, \tag{3.5.32}$$

$$\overline{\lim_{z\to 0}}|[a(z)]^{-1}h^-(-z,\ x)| < \infty, \quad \overline{\lim_{z\to 0}}|[a(z)]^{-1}h^+(z,\ x)| < \infty, \tag{3.5.33}$$

$$\left.\begin{aligned} h^-(-i\varkappa_k,\ x) &= i\dot{a}(i\varkappa_k)(m_k^+)^2 e^+(i\varkappa_k,\ x), \\ h^+(i\varkappa_k,\ x) &= i\dot{a}(i\varkappa_k)(m_k^-)^2 e^-(-i\varkappa_k,\ x), \end{aligned}\right\} \tag{3.5.34}$$

$$W\{e^+(z,\ x),\ h^-(-z,\ x)\} = W\{h^+(z,\ x),\ e^-(-z,\ x)\} =$$

$$= 2iza(z). \tag{3.5.35}$$

Решая систему

$$r^+(\lambda)e^+(\lambda,\ x) + e^+(-\lambda,\ x) = [a(\lambda)]^{-1}h^-(-\lambda,\ x),$$

$$r^+(-\lambda)e^+(-\lambda,\ x) + e^+(\lambda,\ x) = [a(-\lambda)]^{-1}h^-(\lambda,\ x)$$

относительно $e^+(\lambda,\ x)$, $e^+(-\lambda,\ x)$, получаем

$$e^+(\lambda,\ x)[1 - r^+(\lambda)r^+(-\lambda)] = \frac{h^-(\lambda,\ x)}{a(-\lambda)} - \frac{r^+(-\lambda)h^-(-\lambda,\ x)}{a(\lambda)},$$

откуда, поскольку $1 - r^+(\lambda) r^+(-\lambda) = 1 - |r^+(\lambda)|^2 = |a(\lambda)|^{-2} = [a(\lambda) a(-\lambda)]^{-1}$, приходим к равенству

$$\frac{e^+(\lambda, x)}{a(\lambda)} = -r^+(-\lambda) \frac{a(-\lambda)}{a(\lambda)} h^-(-\lambda, x) + h^-(\lambda, x),$$

которое в силу определения функции $r^-(\lambda)$ эквивалентно такому:

$$r^-(\lambda) h^-(-\lambda, x) + h^-(\lambda, x) = \frac{e^+(\lambda, x)}{a(\lambda)}. \tag{3.5.36}$$

Исключение из равенств (3.5.29′), (3.5.36) функции $r^-(\lambda)$ приводит к тождеству

$$e^-(\lambda, x) h^-(-\lambda, x) - h^-(\lambda, x) e^-(-\lambda, x) = \\ = \frac{h^+(\lambda, x) h^-(-\lambda, x) - e^+(\lambda, x) e^-(-\lambda, x)}{a(\lambda)}, \tag{3.5.37}$$

справедливому при всех вещественных $\lambda \neq 0$. Правая часть этого тождества равна отношению двух функций, голоморфных в верхней полуплоскости, причем в нулях $i\varkappa_k$ знаменателя согласно (3.5.30), (3.5.30′), (3.5.26) числитель $h^+(i\varkappa_k, x)\ h^-(-i\varkappa_k, x) - e^+(i\varkappa_k, x) e^-(-i\varkappa_k, x) = -e^+(i\varkappa_k, x)\ e^-(-i\varkappa_k, x) \{1 + [m_k^+ m_k^- \times \dot{a}(i\varkappa_k)]^2\} = 0$ тоже обращается в нуль. Поэтому функция

$$g(z) = \frac{h^+(z, x) h^-(-z, x) - e^+(z, x) e^-(-z, x)}{a(z)}$$

голоморфна в верхней полуплоскости и стремится к нулю при $|z| \to \infty$ $(\operatorname{Im} z \geqslant 0)$, поскольку согласно (3.5.31), (3.5.20) $\lim\limits_{|z|\to\infty} h^+(z, x) h^-(-z, x) = \lim\limits_{|z|\to\infty} e^+(z, x) e^-(-z, x) = 1$. Так как левая часть тождества (3.5.37) является нечетной функцией от λ, то $g(\lambda) = -g(-\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty,\ \lambda \neq 0)$, откуда следует, что, продолжив функцию $g(z)$ нечетно $(g(z) = -g(-z))$ в нижнюю полуплоскость, получим однозначную и голоморфную при всех $z \neq 0$ функцию, которая стремится к нулю при $|z| \to \infty$. Далее из равенств (3.5.32), (3.5.33) и ограниченности в окрестности нуля функции $[a(z)]^{-1}$, которая является очевидным следствием формулы (3.5.25), следует, что

$$\lim_{z\to 0} g(z) z = \lim_{z\to 0} \frac{z h^+(z, x) h^-(-z, x)}{a(z)} - \lim_{z\to 0} \frac{z e^+(z, x) e^-(-z, x)}{a(z)} = 0.$$

Поэтому точка $z = 0$ является устранимой особенностью функции $g(z)$, откуда в силу теоремы Лиувилля следует, что $g(z) \equiv 0$, а значит, и

$$h^+(z, x) h^-(-z, x) - e^+(z, x) e^-(-z, x) \equiv 0, \tag{3.5.38}$$

$$e^-(\lambda, x) h^-(-\lambda, x) - h^-(\lambda, x) e^-(-\lambda, x) \equiv 0. \tag{3.5.39}$$

Так как $e^-(-z, x)$ — ненулевые решения уравнения $-y'' + q^-(x)y = z^2y$, то множество значений x, в которых $e^-(-z, x) = 0$, дискретно. Поэтому множество $O\{0, i\varkappa_1, \ldots, i\varkappa_n\}$ значений x, при которых выполняется хотя бы одно из равенств $e^-(0, x) = 0$, $e^-(-i\varkappa_1, x) = 0, \ldots, e^-(-i\varkappa_n, x) = 0$, тоже дискретно. Покажем, что при любом $x \notin O\{0, i\varkappa_1, \ldots, i\varkappa_n\}$ функция

$$p(z) = \frac{h^-(-z, x)}{e^-(-z, x)}$$

голоморфна в верхней полуплоскости. Вследствие простоты нулей функции $e^-(-z, x)$ для этого достаточно убедиться, что каждый ее нуль z_k является также нулем функции $h^-(-z, x)$. Но если $e^-(-z_k, x) = 0$, а $x \notin O\{0, i\varkappa_1, \ldots, i\varkappa_n\}$, то $2iz_k a(z_k) \neq 0$ и согласно (3.5.35) $h^+(z_k, x) \neq 0$. С другой стороны, из тождества (3.5.38) следует, что $0 = h^+(z_k, x)\, h^-(-z_k, x)$, а значит, и $h^-(-z_k, x) = 0$. Итак, функция $p(z)$ действительно голоморфна в верхней полуплоскости и стремится к $+1$ при $|z| \to \infty$, что следует из формулы (3.5.20) и равенства (3.5.31). Кроме того, из тождества (3.5.39) вытекает равенство $p(\lambda) = p(-\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty,\ \lambda \neq 0)$, показывающее, что функция, получающаяся из $p(z)$ при четном продолжении $(p(z) = p(-z))$ в нижнюю полуплоскость, однозначна и голоморфна при всех $z \neq 0$. Так как при рассматриваемых значениях x $e^-(0, x) \neq 0$ и согласно (3.5.32) $\lim\limits_{z\to 0} zh^-(-z, x) = 0$, то $\lim\limits_{z\to 0} zp(z) = 0$. Следовательно, точка $z = 0$ является устранимой особенностью функции $p(z)$ и по теореме Лиувилля $p(z) \equiv 1$, а значит, и $e^-(-z, x) \equiv h^-(-z, x)$ при всех $x \notin O\{0, i\varkappa_1, \ldots, i\varkappa_n\}$. Последнее тождество по непрерывности распространяется на все значения x, так как множество $O\{0, i\varkappa_1, \ldots, i\varkappa_n\}$ дискретно. Подставляя в (3.5.29), (3.5.36) вместо $h^-(-z, x)$ функцию $e^-(-z, x)$, приходим к равенствам (3.5.27).

Остается еще проверить справедливость формул (3.5.28). В силу доказанных равенств (3.5.27) $q^+(x) = q^-(x)$, что позволяет для вычисления $\|e^-(-i\varkappa_k, x)\|^2$, $\|e^+(i\varkappa_k, x)\|^2$ использовать формулы (3.5.11), в которых согласно (3.5.34) следует положить $c_k^- = i\dot{a}(i\varkappa_k)(m_k^+)^2$, $c_k^+ = i\dot{a}(i\varkappa_k)(m_k^-)^2$. Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^-(-i\varkappa_k, x)|^2\, dx = -[\dot{a}(i\varkappa_k)\, m_k^+]^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^+(i\varkappa_k, x)|^2\, dx = -[\dot{a}(i\varkappa_k)\, m_k^-]^2,$$

откуда в силу (3.5.26) вытекает справедливость формул (3.5.28).

Задачи

1. Доказать утверждения, сформулированные в лемме 3.5.2.

Указание. Как было показано (с. 266), корни $i\varkappa_k$ функции $a(z)$ лежат на конечном отрезке мнимой полуоси: $0 \leqslant \varkappa_k \leqslant M$. Обозначим через δ точную нижнюю границу расстояний между соседними нулями и покажем, что $\delta > 0$. Допуская противное, можно было бы выделить такие последовательности нулей $i\hat{\varkappa}_k$, $i\varkappa_k$, что $\hat{\varkappa}_k > \varkappa_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \hat{\varkappa}_k = \lim\limits_{k\to\infty} \varkappa_k = \varkappa_0$. Выберем число $A > 0$ так, чтобы при всех $x \in [0, \infty)$ выполнялись неравенства $e^+(i\varkappa, x) > 0{,}5 \exp(-\varkappa x)$ $(A \leqslant x < \infty)$, $e^-(-i\varkappa, x) > 0{,}5 \exp(\varkappa x)$ $(-\infty < x \leqslant -A)$, влекущие за собой согласно (3.1.36) оценки

$$\int\limits_A^\infty e^+(i\hat{\varkappa}_k, x)\, e^+(i\varkappa_k, x)\, dx > \frac{e^{-2AM}}{8M},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{-A} e^-(-i\hat{\varkappa}_k, x)\, e^-(-i\varkappa_k, x)\, dx > \frac{e^{-2AM}}{8M}.$$

Из ортогональности собственных функций дискретного спектра и равенств $e^+(i\hat{\varkappa}_k, x) = c^+(\hat{\varkappa}_k)\, e^-(-i\hat{\varkappa}_k, x)$, $e^+(i\varkappa_k, x) = c^+(\varkappa_k)\, e^-(-i\varkappa_k, x)$ следует

$$0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^+(i\hat{\varkappa}_k, x)\, e^+(i\varkappa_k, x)\, dx = c^+(i\hat{\varkappa}_k)\cdot c^+(i\varkappa_k) \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{A} e^-(i\hat{\varkappa}_k, x)\, e^-(-i\varkappa_k, x)\, dx + \int\limits_{-A}^{A} e^+(i\hat{\varkappa}_k, x)\, e^+(i\varkappa_k, x)\, dx +$$

$$+ \int\limits_A^\infty e^+(i\hat{\varkappa}_k, x)\, e^+(i\varkappa_k, x)\, dx. \tag{3.5.40}$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} e^{\pm}(\pm i\hat{\varkappa}_k, x) = \lim\limits_{k\to\infty} e^{\pm}(\pm i\varkappa_k, x) = e^{\pm}(\pm i\varkappa_0, x)$, то

$$\lim_{k\to\infty} c^+(i\hat{\varkappa}_k)\, c^+(i\varkappa_k) = [e^+(i\varkappa_0, x)]^2\, [e^-(-i\varkappa_0, x)]^{-2} > 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} e^+(i\hat{\varkappa}_k, x)\, e^+(i\varkappa_k, x)\, dx = \int\limits_{-A}^{A} [e^+(i\varkappa_0, x)]^2\, dx > 0.$$

Поэтому, перейдя в обеих частях равенств (3.5.40) к пределу при $k \to \infty$, получим абсурдное неравенство $0 > e^{-2AM}(8M)^{-1}$, показывающее, что сделанное предположение ($\delta = 0$) неверно и функция $a(z)$ может иметь лишь конечное число нулей $i\varkappa_1, i\varkappa_2, \ldots, i\varkappa_n$.

Ограниченность функций $[a(z)]^{-1}$ в окрестности нуля является следствием неравенства

$$\left| [a(z)]^{-1} \prod_{k=1}^{n} (z - i\varkappa_k)(z + i\varkappa_k)^{-1} \right| \leqslant 1 \quad (\operatorname{Im} z \geqslant 0). \tag{3.5.41}$$

Для доказательства этого неравенства рассмотрим функции $a_N(z)$, соответствующие потенциалам $q_N(x)$, совпадающим с $q(x)$ при $|x| < N$ и равным нулю при $|x| > N$. Поскольку при таких потенциалах функции $e^+(z, x)$, $e^-(z, x)$ целые, то функции $za_N(z)$ тоже целые и неравенства

$$\left| [a_N(z)]^{-1} \prod_{k=1}^{n} (z - i\varkappa_k)(z + i\varkappa_k)^{-1} \right| \leqslant 1 \quad (\operatorname{Im} z \geqslant 0) \tag{3.5.41'}$$

следуют непосредственно из принципа максимума и оценок

$$|a_N(\lambda)|^{-1} \leqslant 1 \quad (-\infty < \lambda < \infty), \quad a_N(z) = 1 + O(z^{-1}) \quad (|z| \to \infty, \operatorname{Im} z \geqslant 0).$$

Пусть δ_N — минимальное расстояние между соседними нулями функции $a_N(z)$. Тогда $\inf\limits_N \delta_N = \delta > 0$, что следует из равномерности относительно N оценок, с помощью которых была доказана положительность δ_N. Это позволяет получить неравенство (3.5.41) из (3.5.41′) предельным переходом при $N \to \infty$.

2. Вывести формулу (3.5.25).

Указание. Пусть

$$g_N(z) = [a_N(z)]^{-1} \prod_{k=1}^{n_N} (z - i\varkappa_k(N))(z + i\varkappa_k(N))^{-1},$$

где $a_N(z)$ — введенные в предыдущей задаче функции, соответствующие потенциалам $q_N(x)$. Функции $\ln g_N(z)$, очевидно, однозначны и голоморфны в верхней полуплоскости, причем $\ln g_N(z) = O(z^{-1})$ при $|z| \to \infty$ и $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Кроме того, в окрестности нуля $|\ln g_N(z)| \leqslant A_N \ln|z| + B_N$ $(\operatorname{Im} z \geqslant 0)$, так как функция $za_N(z)$ целая. Поэтому $\ln g_N(z)$ можно представить интегралом Коши

$$\ln g_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln g_N(\lambda)}{\lambda - z} \, d\lambda \quad (\operatorname{Im} z > 0),$$

откуда обычным способом выводится формула Пуассона — Шварца

$$\ln g_N(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|g_N(\lambda)|}{\lambda - z} \, d\lambda \quad (\operatorname{Im} z > 0),$$

влекущая за собой равенство

$$a_N(z) = \exp\left\{\frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r_N^+(\lambda)|^2)}{\lambda - z} \, d\lambda\right\} \sum_{k=1}^{n_N} \frac{z - i\varkappa_k(N)}{z + i\varkappa_k(N)}, \tag{3.5.42}$$

поскольку $|g_N(\lambda)| = |a_N(\lambda)|^{-1} = \sqrt{1 - |r_N^+(\lambda)|^2}$. Из леммы 3.5.1 и тождества $|a_N(\lambda)|^{-2} = 1 - |r_N^+(\lambda)|^2$ вытекают оценки $1 > 1 - |r_N^+(\lambda)|^2 > 1 - C_1\lambda^2(1 + \lambda^2)^{-1}$, $|r_N^+(\lambda)|^2 < C_2\lambda^{-2}$, в которых константы C_1 и C_2 не зависят от N. Эти оценки позволяют в равенстве (3.5.42) сделать предельный переход при $N \to \infty$ под знаком интеграла и получить для функции $a(z)$ формулу (3.5.25).

3. Как отмечалось выше, при $\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda a(\lambda) = (2i)^{-1} W\{e^+(0, x), e^-(0, x)\} \neq$ $\neq 0$ коэффициенты отражения $r^+(\lambda)$, $r^-(\lambda)$ непрерывны на всей вещественной оси, причем $r^+(0) = r^-(0) = -1$. По-видимому, они непрерывны во всех случаях. Доказать, что это предположение верно для потенциалов, удовлетворяющих неравенству

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2) \, |q(x)| \, dx < \infty. \tag{3.5.43}$$

Указание. Из неравенства (3.5.43) и оценок ядер $K^+(x, y)$, $K^-(x, y)$ операторов преобразования следует дифференцируемость по λ функций $e^+(\lambda, x)$, $e^-(-\lambda, x)$ при всех вещественных значениях λ. При этом функции $\dot{e}^+(0, x)$, $\dot{e}^-(0, x)$ являются решениями уравнения (3.5.1) с такой асимптотикой:

$$\dot{e}^+(0, x) = ix + o(1), \quad \frac{d}{dx}\dot{e}^+(0, x) = i + o(1) \quad (x \to +\infty),$$

$$\dot{e}^-(0, x) = -ix + o(1), \quad \frac{d}{dx}\dot{e}^-(0, x) = -i + o(1) \quad (x \to -\infty).$$

Пусть $W\{e^+(0, x), e^-(0, x)\} = 0$ и, следовательно, $e^+(0, x) = c^+e^-(0, x)$, $e^-(0, x) = c^-e^+(0, x)$, $c^+c^- = 1$. Тогда

$$2i \frac{\partial}{\partial\lambda}[\lambda a(\lambda)]\,|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial\lambda} W\{e^+(\lambda, x), e^-(-\lambda, x)\}\,|_{\lambda=0} =$$

$$= W\{\dot{e}^+(0, x), e^-(0, x)\} + W\{e^+(0, x), \dot{e}^-(0, x)\} =$$

$$= c^-W\{\dot{e}^+(0, x), e^+(0, x)\} + c^+W\{e^-(0, x), \dot{e}^-(0, x)\} = i(c^- + c^+) \neq 0,$$

так как $\frac{d}{dx} e^+(0, x) = o(x^{-1})$ $(x \to +\infty)$, $\frac{d}{dx} e^-(0, x) = o(x^{-1})$ $(x \to -\infty)$, если выполнено условие (3.5.43). Аналогично можно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}[2i\lambda b(\lambda)]\,|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial\lambda} W\{e^-(\lambda, x), e^+(\lambda, x)\}\,|_{\lambda=0} = i(c^+ - c^-).$$

Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to 0} r^+(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{2i\lambda b(\lambda)}{2i\lambda a(\lambda)} = \frac{c^+ - c^-}{c^+ + c^-} = \operatorname{th}\gamma^+,$$

$$\lim_{\lambda\to 0} r^-(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{-2i\lambda b(-\lambda)}{2i\lambda a(\lambda)} = \frac{c^- - c^+}{c^+ + c^-} = -\operatorname{th}\gamma^+,$$

где $\gamma^+ = \ln |c^+|$.

4. Доказать справедливость следующих формул разложения по собственным функциям задачи рассеяния:

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-N}^{N} u^-(\lambda, f)\, u^+(\lambda, x)\, a(\lambda)\, d\lambda +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (m_k^-)^2\, u^-(i\varkappa_k, f)\, u^-(i\varkappa_k, x),$$

где $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ и

$$u^{\pm}(\lambda, f) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-N}^{N} u^{\pm}(\lambda, x) f(x)\, dx.$$

Указание. Достаточно доказать равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^{-}(\lambda, f) u^{+}(\lambda, g) a(\lambda)\, d\lambda +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (m_k^{-})^2 u^{-}(i\varkappa_k, f) u^{-}(i\varkappa_k, g) \tag{3.5.44}$$

для произвольных финитных функций $f(x)$, $g(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Пусть $f(x) = g(x) = 0$ при $|x| > N$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-}(-\lambda, x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x) + \int_{x}^{N} f(\xi) K^{-}(\xi, x)\, d\xi \right] e^{-i\lambda x} dx = \tilde{f}^{*}(\lambda),$$

где

$$f^{*}(x) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}^{-*}) f, \quad \tilde{f}^{*}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{*}(x) e^{-i\lambda x} dx,$$

$\mathbf{I} + \mathbf{K}^{-*}$ — оператор, сопряженный оператору преобразования $\mathbf{I} + \mathbf{K}^{-}$. Отсюда согласно (3.5.8), (3.5.8′) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^{-}(\lambda, f) u^{+}(\lambda, g) a(\lambda)\, d\lambda + \sum_{k=1}^{n} (m_k^{-})^2 u^{-}(i\varkappa_k, f) u^{-}(i\varkappa_k, g) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ r^{-}(\lambda) \tilde{f}^{*}(\lambda) \tilde{g}^{*}(\lambda) + \tilde{f}^{*}(-\lambda) \tilde{g}^{*}(\lambda) \}\, d\lambda + \sum_{k=1}^{n} (m_k^{-})^2 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\varkappa_k (x+y)} f^{*}(x) g^{*}(y)\, dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F^{-}(x+y) f^{*}(x) g^{*}(y)\, dx dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} f^{*}(t) g^{*}(t)\, dt = ((\mathbf{I} + \mathbf{F}^{-})(\mathbf{I} + \mathbf{K}^{-*}) f, \quad (\mathbf{I} + \mathbf{K}^{-*}) \bar{g}) =$$

$$= ((\mathbf{I} + \mathbf{K}^{-})(\mathbf{I} + \mathbf{F}^{-})(\mathbf{I} + \mathbf{K}^{-*}) f, \bar{g}),$$

где через $\mathbf{F}^{-}$ обозначен оператор

$$\mathbf{F}^{-}(f) = \int_{-\infty}^{N} F^{-}(x+t) f(t)\, dt,$$

действующий в пространстве $L_2(-\infty, N]$. Поэтому для справедливости равенства Парсеваля (3.5.44) необходимо и достаточно, чтобы

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K}^{-})(\mathbf{I} + \mathbf{F}^{-})(\mathbf{I} + \mathbf{K}^{-*}) = \mathbf{I}.$$

Последнее тождество эквивалентно основному уравнению (3.5.18′), что доказывается так же, как в теореме 3.2.1.

ГЛАВА 4 НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. *Операторы преобразования специального вида*

В 1967 г. К. Гарднером, Дж. Грином, М. Крускалом и Р. Миура [27] были открыты глубокие связи между уравнением Кортевега — де Фриса (КдФ)

$$\dot{v}_t - 6vv'_x + v'''_{xxx} = 0, \tag{4.1.1}$$

описывающим движение волн в неглубокой воде, и спектральными свойствами семейства операторов Штурма — Лиувилля

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x,\ t) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{4.1.2}$$

порождаемых решением $v(x,\ t)$ уравнения (4.1.1). Эти связи позволили им найти решение задачи Коши

$$v(x,\ 0) = v_0(x), \quad \lim_{x\to\pm\infty} v(x,\ t) = 0$$

для уравнения КдФ, используя методы обратной задачи теории рассеяния. Основная идея их метода получила дальнейшее развитие в работе П. Лакса [12], введшего понятие операторной $L - A$-пары.

Операторы L и A, зависящие от параметра t, образуют пару Лакса, если их коммутатор $[A, L] = AL - LA$ и производная $\frac{dL}{dt}$ являются операторами умножения на некоторые функции. Например, оператор (4.1.2) вместе с оператором

$$A = -4\frac{d^3}{dx^3} + 3\left(v\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}v\right) \tag{4.1.3}$$

образуют пару Лакса, так как оператор $\frac{dL}{dt}$ есть оператор умножения на $\dot{v}(x,\ t) = \frac{\partial v}{\partial t}$, а коммутатор $[A,\ L]$ равен оператору умножения на функцию $6vv'_x - v'''_{xxx}$. Уравнение КдФ (4.1.1) эквивалентно операторному уравнению

$$\frac{dL}{dt} = [A,\ L] \tag{4.1.4}$$

для пары Лакса (4.1.2), (4.1.3). Как показал П. Лакс, уравнения в частных производных, эквивалентные уравнениям вида (4.1.4), имеют бесконечное множество интегралов, так как из уравнения (4.1.4) следует, что спектр операторов $L = L(t)$ не зависит от t. К. Гарднер обнаружил, что такие уравнения можно трактовать как гамильтоновы системы с бесконечным числом степеней свободы. В. Е. Захаров и Л. Д. Фаддеев [7] установили, что уравнение КдФ, рассматриваемое в классе быстроубывающих при $x \to \pm\infty$ функций $v(x, t)$, является вполне интегрируемой гамильтоновой системой, причем данные рассеяния оператора (4.1.2) являются для нее каноническими переменными типа действие — угол.

Следующий существенный шаг в этом направлении сделан в работе С. П. Новикова [22], рассмотревшего уравнение КдФ в классе периодических и почти периодических функций, являющихся конечнозонными потенциалами. В этом классе уравнение КдФ представляет собой гамильтонову систему с конечным числом степеней свободы, для которой в работе [22] найден полный набор коммутирующих интегралов. Используя метод, предложенный Н. И. Ахиезером [1], А. Р. Итс и В. Б. Матвеев [10] нашли явный вид конечнозонных потенциалов, что в сочетании с результатами Б. А. Дубровина и С. П. Новикова [6] позволило получить явные формулы для решений уравнения КдФ с конечнозонными начальными данными. Обзору полученных в этом направлении результатов посвящена работа [5].

Кроме уравнения КдФ известно много других уравнений, имеющих физический смысл и интегрирующихся аналогичными методами. Первым примером таких уравнений (после уравнения КдФ) оказалось нелинейное уравнение Шредингера

$$i\dot{u}_t + u''_{xx} \pm |u|^2 u = 0,$$

для которого В. Е. Захаров и А. Б. Шабат [8] нашли пару Лакса, позволившую им решить это уравнение в классе быстроубывающих функций методом обратной задачи.

Настоящая глава посвящена интегрированию уравнения КдФ в классах убывающих и периодических функций. Нами использован подход, предложенный в работе [20]. В основе его лежат те же идеи, что и в подходе, примененном в работах [12, 27].

Рассмотрим семейства операторов Штурма — Лиувилля (4.1.2) и

$$A = 2N \frac{d}{dx} + B, \tag{4.1.5}$$

где $N = N(z, x, t)$, $B = B(z, x, t)$ — пока произвольные функции. Все функции, встречающиеся в этом параграфе, предполагаются дифференцируемыми нужное число раз по всем переменным. Производные по x всюду обозначаются штрихами, по t —

точкой. Через z обозначен комплексный параметр. Непосредственно устанавливается, что операторы A переводят функции $y = y(x, z, t)$, удовлетворяющие уравнениям $(L - z)\, y = 0$, в функции $A[y]$, удовлетворяющие уравнениям

$$(L - z)\, A[y] = -2(N'' + B')\, y' - \\ - \{2Nv' + 4N'(v - z) + B''\}\, y. \tag{4.1.6}$$

Выберем функции N и B так, чтобы в правой части этого равенства коэффициент при y' обратился в нуль, а коэффициент при y не зависел от z. Эти требования эквивалентны равенствам

$$B = -N', \quad -2Nv' - 4N'(v - z) + N''' = f(x, t), \tag{4.1.7}$$

где $f(x, t)$ — произвольная, не зависящая от z функция. Будем искать функцию N в виде полинома от z:

$$N = N_n = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(x, t)\, z^j. \tag{4.1.8}$$

Подставляя это выражение в левую часть равенства (4.1.7), видим, что она не зависит от z, если коэффициенты $a_k = a_k(x, t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} &-4a_0' = 0, \\ &-4a_1' = a_0''' - 4a_0'v - 2a_0v', \\ &\quad\vdots \\ &-4a_n' = a_{n-1}''' - 4a_{n-1}'v - 2a_{n-1}v'. \end{aligned}\right\} \tag{4.1.9}$$

При этом для функции $f(x, t) = f_n(x, t)$ справедливо равенство

$$f_n(x, t) = a_n''' - 4a_n'v - 2a_nv' = -4\frac{d}{dx}\, a_{n+1}(x, t), \tag{4.1.9'}$$

если a_{n+1} определить из уравнения

$$-4a_{n+1}' = a_n''' - 4a_n'v - 2a_nv'.$$

Последовательно интегрируя уравнения (4.1.9), находим

$$\left.\begin{aligned} &a_0 = p_0, \quad a_1 = \frac{1}{2}p_0v + p_1, \quad a_2 = -\frac{1}{8}p_0(v'' - 3v^2) + \\ &+ \frac{1}{2}p_1v + p_2, \\ &a_k = p_0(\mathcal{J}D)^k[1] + p_1(\mathcal{J}D)^{k-1}[1] + \cdots + p_k, \end{aligned}\right\} \tag{4.1.10}$$

где $p_k = p_k(t)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ — произвольные коэффициенты, которые могут зависеть только от t, $\mathcal{J}$ — оператор интегрирования, а $D = -\frac{1}{4}\frac{d^3}{dx^3} + v\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}v'$. Из этих формул видно, что общее решение системы уравнений (4.1.9) имеет такой вид:

$$a_k(x, t) = \sum_{j=0}^{k} p_j(t)\,\hat{a}_{k-j}(x), \tag{4.1.10'}$$

где $\hat{a}_0(x) = 1$, $\hat{a}_1(x)$, ..., $\hat{a}_n(x)$ — любое частное решение этой системы. Определив таким образом коэффициенты $a_k(x, t)$ полинома N_n, получим операторы $A_n = 2N_n \frac{d}{dx} - N_n'$, для которых уравнение (4.1.6) примет вид $(L - z) A_n[y] = f_n(x, t)\,y$, где функция $f_n(x, t)$ определяется равенством (4.1.9').

Дифференцируя уравнение $-y'' + vy - zy = 0$ по t, видим, что оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ преобразует решения этого уравнения в функции $\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t}$, удовлетворяющие уравнению $(L - z)\,\dot{y} = -\dot{v}y$. Поэтому операторы

$$M_n = \frac{\partial}{\partial t} + A_n = \frac{\partial}{\partial t} + 2N_n \frac{\partial}{\partial x} - N_n' \tag{4.1.11}$$

преобразуют решения уравнения $(L - z)\,y = 0$ в функции $M_n[y]$, удовлетворяющие уравнениям $(L - z) M_n[y] = \{f_n - \dot{v}\}\,y$. Тем самым доказана следующая лемма.

Лемма 4.1.1. *Если коэффициенты полиномов N_n удовлетворяют системе уравнений (4.1.9), то операторы M_n вида (4.1.11) преобразуют решения уравнения Штурма — Лиувилля $(L - z)\,y = 0$ в функции $M_n[y]$, удовлетворяющие уравнениям $(L - z) \times M_n[y] = K_n[v]\,y$, где $K_n[v] = N_n''' - 4N_n'(v - z) - 2Nv' - \dot{v} \equiv -4\frac{d}{dx}\,a_{n+1}(x, t) - \frac{\partial v}{\partial t}$.*

Уравнение Штурма — Лиувилля $(L - z)\,y = 0$ эквивалентно, очевидно, системе уравнений

$$y_1' = y_2, \quad y_2' - (v - z)\,y_1 = 0$$

для функций $y_1 = y$, $y_2 = y'$, которая в матричной форме имеет вид

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{Y} = 0, \quad \boldsymbol{L} = \frac{d}{dx} + \boldsymbol{V}(x, z, t), \tag{4.1.12}$$

где

$$\boldsymbol{V}(x, z, t) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v(x, t) - z & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1.12'}$$

Так как

$$M_n[y] = \dot{y} + 2N_n y' - N_n' y = \dot{y}_1 + 2N_n y_2 - N_n' y_1,$$

$$M_n[y]' = \ddot{y}_1 + 2N_n'y_2 + 2N_ny_2' - N_n''y_1 - N_n'y_1' =$$
$$= y_2' + N_n'y_2 + (2N_n(v-z) - N_n'')\,y_1,$$

то, введя матричные операторы

$$\boldsymbol{M}_n = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{A}_n, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1.11'}$$

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} -N_n' & 2N_n \\ 2N_n(v-z) - N_n'' & N_n' \end{pmatrix}, \tag{4.1.11''}$$

лемму 4.1.1 можно сформулировать в следующей эквивалентной форме.

Лемма 4.1.1′. *Если коэффициенты полиномов N_n удовлетворяют системе уравнений (4.1.9), то операторы $\boldsymbol{M}_n$ вида (4.1.11′) преобразуют решения уравнения (4.1.12) в вектор-функции $\boldsymbol{M}_n[\boldsymbol{Y}]$, удовлетворяющие уравнениям $\boldsymbol{L}\boldsymbol{M}_n[\boldsymbol{Y}] = K_n(v)\,\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$.*

Следствие. *Для того чтобы функция $v(x, t)$ удовлетворяла уравнению $K_n(v) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы операторы M_n ($\boldsymbol{M}_n$) преобразовывали решения уравнения $-y'' + v(x, t)\,y - zy = 0$ ($\boldsymbol{L}\boldsymbol{Y} = 0$) в решения этого же уравнения.*

В дальнейшем основную роль будут играть операторы M_n, $\boldsymbol{M}_n$ при $n = 0, 1$ и специальных значениях коэффициентов $p_k(t)$. Положив $p_0 = -\frac{1}{2}$, получим

$$\left.\begin{aligned} &N_0 = -\frac{1}{2}, \quad M_0 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}, \quad K_0[v] = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t}, \\ &\boldsymbol{M}_0 = \frac{\partial}{\partial t} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v-z & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{4.1.13}$$

а при $p_0 = -2$, $p_1 = 0$ —

$$\left.\begin{aligned} &N_1 = -(v+2z), \quad K_1[v] = -\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 6v\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t}, \\ &M_1 = \frac{\partial}{\partial t} - 2(v+2z)\frac{\partial}{\partial x} + v', \\ &\boldsymbol{M}_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} v' & -2(v+2z) \\ v'' - 2v^2 - 2vz + 4z^2 & -v' \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{4.1.14}$$

Если функция v удовлетворяет уравнению КдФ (4.1.2), то $K_1[v] = 0$ и, следовательно, оператор M_1 преобразует решения уравнения Штурма — Лиувилля $(L - z)\,y = 0$ в решения этого же уравнения, т. е. является некоторой разновидностью операторов преобразования.

Выведем явные формулы для операторов M_n, $\boldsymbol{M}_n$ при любых значениях n. Согласно (4.1.10′) для этого достаточно найти какоенибудь частное решение системы (4.1.9). Заметим, что если

$$N_\infty = N_\infty(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_k(x) z^{-k} \tag{4.1.15}$$

является формальным решением уравнения

$$N_\infty'' - 4N_\infty'(v - z) + 2N_\infty v' = 0, \tag{4.1.16}$$

то коэффициенты $\hat{a}_0(x)$, $\hat{a}_1(x)$, ... удовлетворяют уравнениям (4.1.9). Поэтому для нахождения частного решения системы уравнений (4.1.9) достаточно найти формальное решение уравнения (4.1.16) вида (4.1.15). Согласно (4.1.10) общим решением системы (4.1.9) будут коэффициенты при неотрицательных степенях z формального произведения $P_n(t, z) N_\infty(x, z)$, где $P_n(t, z) = \sum_{j=0}^{n} p_{n-j}(t) z^j$ — произвольный полином. Следовательно, общий вид полиномов (4.1.8), для которых правая часть равенства (4.1.7) не зависит от z, таков:

$$N_n = N_n(z, x, t) = \operatorname{Reg}\{P_n(t, z) N_\infty(x, z)\},$$

где Reg означает, что в формальном произведении $P_n(t, z) N_\infty(x, z)$ нужно сохранить только неотрицательные степени z. Поскольку произведение $P_n(t, z) N_\infty(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x, t) z^{n-k}$ тоже является формальным решением уравнения (4.1.16), его коэффициенты удовлетворяют равенствам $-4a_k' = a_{k-1}''' - 4a_{k-1}'v - 2a_{k-1}v'$, откуда при $k = n + 1$ согласно (4.1.9′) находим

$$f_n(x, t) = -4 \frac{d}{dx} a_{n+1}(x, t) = -4 \frac{d}{dx} \operatorname{Res}\{P_n(t, z) N_\infty(x, z)\},$$

где через Res обозначен коэффициент при z^{-1} в формальном произведении $P_n(t, z) N_\infty(x, z)$.

Найдем теперь формальное решение уравнения (4.1.16) вида (4.1.15). Непосредственная проверка показывает, что произведения $y_1 y_2$ двух решений уравнения Штурма — Лиувилля $-y'' + vy = zy$ удовлетворяют уравнению (4.1.16). Это позволяет по найденным в лемме 1.4.2 решениям $y(\sqrt{z}, x)$, $y(-\sqrt{z}, x)$ уравнения Штурма — Лиувилля построить решение $y(\sqrt{z}, x)\, y(-\sqrt{z}, x)$ уравнения (4.1.16). Но согласно (1.4.21)

$$\frac{y(\sqrt{z}, x)\, y(-\sqrt{z}, x)}{2i\sqrt{z} + \sigma(\sqrt{z}, 0) - \sigma(-\sqrt{z}, 0)} =$$

$$= \{2i\sqrt{z} + \sigma(\sqrt{z}, x) - \sigma(-\sqrt{z}, x)\}^{-1} =$$

$$= 2i\sqrt{z}\left\{1 + 2\sum_{j=0}^{n} \sigma_{2j+1}(x)(-4z)^{-j-1} + O(z^{-n-2})\right\}^{-1},$$

откуда следует, что формальное разложение выражения

$$N_\infty(x, z) = \left\{1 + 2\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{2j+1}(x)(-4z)^{-j-1}\right\}^{-1}$$

в ряд по отрицательным степеням z есть формальное решение уравнения (4.1.16). Следовательно, все интересующие нас полиномы $N_n(z, x, t)$ и соответствующие им функции $f_n(x, t)$ находятся по формулам

$$N_n(z, x, t) = \operatorname{Reg}\left\{P_n(t, z)\left[1 + 2\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{2j+1}(x)(-4z)^{-j-1}\right]^{-1}\right\},$$

$$f_n(x, t) = -4\frac{d}{dx}\operatorname{Res}\left\{P_n(t, z)\left[1 + 2\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{2j+1}(x)(-4z)^{-j-1}\right]^{-1}\right\},$$

откуда, в частности, видно, что функции $a_k(x, t)$ и $f_n(x, t)$ являются полиномами от потенциала v и его производных по x, коэффициенты которых не зависят от x. Итак, общий вид операторов $A_n = 2N_n\frac{d}{dx} - N_n'$, преобразующих решения уравнения $(L - z)y = 0$ в функции $A_n[y]$, удовлетворяющие уравнению $(L - z)A_n[y] = f_n(x, t)\,y$, найден. На решениях уравнения $(L - z)\,y = 0$ операторы умножения на полиномы N_n и N_n' можно заменить дифференциальными операторами, которые получаются из этих полиномов, если в них вместо z подставить оператор Штурма — Лиувилля L. Следовательно, на решениях уравнений $(L - z)\,y = 0$ (z — произвольный комплексный параметр) операторы A_n действуют как дифференциальные (по x) операторы $\hat{A}_n$ $(2n + 1)$-го порядка, причем их коммутатор $[\hat{A}_n, L]$ равен оператору умножения на функцию $f_n(x, t)$. Поскольку линейная оболочка таких решений всюду плотна, $[\hat{A}_n, L] = f_n(x, t)$ на всех функциях, дифференцируемых нужное число раз. Иными словами, дифференциальные операторы $\hat{A}_n$ образуют с оператором Штурма — Лиувилля L пары Лакса. Обращая проведенное доказательство, убеждаемся, что любой дифференциальный оператор $\hat{A}$, образующий с L пару Лакса, равен одному из построенных выше операторов $\hat{A}_n$.

Отметим, наконец, что

$$[L - zI, M_n] = 4N_n'L + K_n[v], \quad [L, M_n] = CK_n[v],$$

если в операторах A_n, A_n оставить z численным параметром.

Задачи

Коммутатор $[L, M]$ двух дифференциальных операторов L, M вида

$$L = \frac{d}{dx} + V(x, t, z), \quad M = \frac{d}{dt} + A(x, t, z)$$

с операторнозначными коэффициентами $A = A(x, t, z)$, $V = V(x, t, z)$, принадлежащими множеству OH (см. задачу 4 § 2 гл. 1), имеет вид

$$[L, M] = LM - ML = A' - \dot{V} + [V, A]. \qquad (4.1.17)$$

Приведенные ниже задачи являются обобщением леммы 4.1.1′: для заданной зависимости операторов A, V от z требуется найти их общий вид, при котором коммутатор $[L, M]$ не зависит от z. Например, при $V = z(V_{-1}z^{-1} + V_0)$, $A = z^N(A_N z^{-N} A_{N-1} z^{-N+1} + \cdots + A_0)$ согласно (4.1.17)

$$[L, M] = \sum_{k=0}^{N} A_k' z^{N-k} - \dot{V}_1 - \dot{V}_0 z + \sum_{k=0}^{N} [V_1, A_k]\, z^{N-k} + \sum_{k=0}^{N} [V_0, A_k]\, z^{N-k+1}$$

и если выполняются равенства

$$\left.\begin{aligned} &[V_0, A_0] = 0, \quad A_k' + [V_1, A_k] + [V_0, A_{k+1}] = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, N-2),\\ &A_{N-1}' - \dot{V}_0 + [V_1, A_{N-1}] + [V_0, A_N] = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.18)$$

то

$$[L, M] = A_N' - \dot{V}_1 + [V_1, A_N] \qquad (4.1.18')$$

и, значит, коммутатор $[L, M]$ не зависит от z. Следовательно, при такой зависимости операторов A и V от z задача состоит в решении системы уравнений (4.1.18) относительно $A_0, A_1, \ldots, A_N$.

1. Операторное уравнение Дирака $By' + \Omega y - zy = 0$ эквивалентно, очевидно, уравнению $Ly = 0$, где $L = \frac{d}{dx} + V$, $V = z(V_1 z^{-1} + V_0)$, $V_1 = -B\Omega$, $V_0 = B$. Найти общий вид операторов $M_2 = \frac{d}{dt} + z^2(A_2 z^{-2} + A_1 z^{-1} + A_0)$, для которых коммутатор $[L, M_2]$ не зависит от z, и выписать условия, при которых он равен нулю.

Указание. Из равенств $B^2 = -I$, $B\Omega + \Omega B = 0$ следует, что операторы $P = \frac{1}{2}(I + iB)$, $Q = \frac{1}{2}(I - iB)$ удовлетворяют соотношениям $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = QP = 0$, $P\Omega = \Omega Q$, $Q\Omega = \Omega P$, $P + Q = I$, $B = i(Q - P)$, $BP = PB = -iP$, $BQ = QB = iQ$. Поэтому для любых операторов X, Y

$$[V_0, X] = [B, X] = 2i(QXP - PXQ),$$

$$[V_1, Y] = -[B\Omega, Y] = i\{P(\Omega QYP + PYQ\Omega)P - Q(\Omega PYQ + QYP\Omega)Q + P(\Omega QYQ - PYP\Omega)Q - Q(\Omega PYP - QYQ\Omega)P\}$$

и система (4.1.18) эквивалентна системе

$$PA_0Q = QA_0P = 0,$$

$$P\{A_k' + i(\Omega QA_kP + PA_kQ\Omega)\}P = 0,$$

$$Q\{A_k' - i(\Omega PA_kQ + QA_kP\Omega)\}Q = 0,$$

$$P\{A_k' + i(\Omega Q A_k Q - P A_k P \Omega) - 2iA_{k+1}\} Q = 0,$$

$$Q\{A_k' - i(\Omega P A_k P - Q A_k Q \Omega) + 2iA_{k+1}\} P = 0.$$

Общее решение этой системы находится по рекуррентным формулам

$$A_0 = C_0 \quad ([B,\ C_0] = 0, \quad C_0 = \mathrm{const}),$$

$$PA_{k+1}Q = \frac{1}{2i} P\{A_k' + i[\Omega,\ A_k]\} Q,$$

$$QA_{k+1}P = \frac{1}{2i} Q\{-A_k' + i[\Omega,\ A_k]\} P,$$

$$PA_{k+1}'P = \frac{1}{2} P\{[\Omega,\ A_k'] - i[\Omega^2,\ A_k]\} P,$$

$$QA_{k+1}'Q = \frac{1}{2} Q\{[\Omega,\ A_k'] + i[\Omega^2,\ A_k]\} Q,$$

из которых при $N = 2$ получаем

$$A_0 = C_0, \quad A_1 = \frac{1}{2}[\Omega,\ C_0] + \frac{B}{2}[\Omega_2,\ C_0] + C_1,$$

$$A_2 = \frac{B}{4}[\Omega',\ C_0] + \frac{1}{4}[\Omega,\ B[\Omega_2,\ C_0] + 2C_1] + C_2(x,\ t),$$

где C_0, C_1 — произвольные постоянные операторы, а $C_2(x,\ t)$ — произвольная операторнозначная функция, коммутирующие с оператором B, и

$$\Omega_2(x,\ t) = \int_{x_0}^{x} \Omega^2(\xi,\ t)\, d\xi.$$

Коммутатор $[L,\ M_2]$ обращается в нуль, если

$$\frac{B}{4}[\Omega'',\ C_0] + \frac{1}{4}[\Omega,\ B[\Omega_2,\ C_0] + 2C_1]' + B\dot{\Omega} - B[\Omega,\ C_2] = 0,$$

$$C_2' + \frac{1}{4}[\Omega,\ [C_0,\ \Omega'] + B[\Omega,\ B[\Omega_2,\ C_0] + 2C_1]] = 0.$$

Например, при $C_0 = C_2 = 0$, $C_1 = B$ находим

$$A_0 = 0, \quad A_1 = B, \quad A_2 = -B\Omega,$$

и если

$$M_1 = \frac{\partial}{\partial \tau} + Bz - B\Omega,$$

то

$$[L,\ M_1] = -B\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\Omega,$$

а при $C_0 = 2B$, $C_1 = 0$, $C_2 = B\Omega^2$ —

$$A_0 = 2B, \ A_1 = -2B\Omega, \ A_2 = \Omega' + B\Omega^2,$$

и если

$$M_2 = \frac{\partial}{\partial t} + 2Bz^2 - 2B\Omega z + \Omega' + B\Omega^2,$$

то

$$[L, M_2] = \left(B \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Omega - 2\Omega^3.$$

Поэтому операторы M_1, M_2 преобразуют решения уравнения Дирака $By' + \Omega(x, \tau, t)\, y - zy = 0$ в решения этого же уравнения, если операторнозначный потенциал $\Omega = \Omega(x, \tau, t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\Omega = 0, \quad \left(B \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Omega - 2\Omega^3 = 0.$$

Заметим, что в случае, когда пространство H имеет конечную размерность $2n$ и

$$B = i\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & P_n(x, \tau, t) \\ \pm P_n^*(x, \tau, t) & 0 \end{pmatrix},$$

последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) P_n \mp 2P_n P_n^* P_n = 0.$$

2. Найти общий вид операторов $M_n = \frac{\partial}{\partial t} + z^n \sum_{k=0}^{n} A_k z^{-k}$, для которых коммутатор $[L, M_n]$ не зависит от z (оператор $L = \frac{d}{dx} - B\Omega + Bz$ тот же, что в предыдущей задаче).

Указание. Операторные коэффициенты T_k формального решения $T = \sum_{k=0}^{\infty} T_k z^{-k}$ уравнения $T' + [V, T] = 0$, где $V = -B\Omega + Bz$, удовлетворяют той же системе уравнений (4.1.18), что и искомые операторы A_k. Поэтому $M_n = \frac{\partial}{\partial t} + \operatorname{Reg} z^n T$. Общее решение уравнения $T' + [V, T] = 0$, как легко проверить, задается формулой $T = YCY^{-1}$, где Y — невырожденное решение уравнения $Y' + VY = 0$, а C — произвольный не зависящий от x оператор. В рассматриваемом случае уравнение $Y' + VY = 0$ эквивалентно уравнению Дирака $By' + \Omega y - zy = 0$, невырожденные решения которого обозначим через $y(x, z; B, \Omega)$. Так как y^{-1} удовлетворяет уравнению $(y^{-1})' + (y^{-1}) \times \times B\Omega - (y^{-1}) Bz = 0$, то $B^* \{(y^{-1})^*\}' + \Omega^* (y^{-1})^* - (-\bar{z})(y^{-1})^* = 0$ и, следовательно, $\{y(x, z; B, \Omega)\}^{-1} = \{y(x, -\bar{z}; B^*, \Omega^*)\}^*$. Поэтому

$$T = y(x, z; B, \Omega)\, C y(x, -\bar{z}; B^*, \Omega^*)^*,$$

где в качестве $y(x, z; B, \Omega)$, $y(x, -z; B^*, \Omega^*)$ можно взять решения, построенные в задачах 1, 2 § 4 гл. 1:

$$y(x, z; B, \Omega) = e^{izx}(I + v(z, x, \Omega))\, u_1(z, x, \Omega) P + $$
$$+ e^{-izx}(I - v(-z, x, \Omega))\, u_1(-z, x, \Omega) Q,$$

$$y(x, -\bar{z};\ B^*,\ \Omega^*)^* = e^{izx} Q u_1(-\bar{z},\ x,\ \Omega^*)^* (I + v(-\bar{z},\ x,\ \Omega^*))^* +$$
$$+ e^{-izx} P u_1(\bar{z},\ x,\ \Omega^*)^* (I - v(z,\ x,\ \Omega^*)^*).$$

Для того чтобы решение T разлагалось в формальный ряд по отрицательным степеням z, нужно взять оператор C коммутирующим с B. Тогда

$$T = (I + v(z,\ x,\ \Omega))\, u_1(z,\ x,\ \Omega)\, PCPu_1(\bar{z},\ x,\ \Omega^*)^* (I - v(z,\ x,\ \Omega^*)^*) +$$
$$+ (I - v(-z,\ x,\ \Omega))\, u_1(-z,\ x,\ \Omega)\, QCQu_1(-\bar{z},\ x,\ \Omega^*)^* (I + v(-\bar{z},\ x,\ \Omega^*)^*).$$

Принимая здесь $C = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k z^k$, $[C_k,\ B] = 0$, получаем общий вид операторов $M_n = \dfrac{\partial}{\partial t} + \operatorname{Reg} T$. При этом $[L,\ M_n] = -\dot{V}_1 - [V_0,\ \operatorname{Res} T]$.

3. Найти условия, при которых коммутируют операторы

$$L = \frac{d}{dx} + \sum_{k=-1}^{1} V_k z^k, \quad M = \frac{d}{dt} + \sum_{k=-1}^{1} A_k z^k,$$

предполагая, что $V_k = \beta_k U_k$, $A_k = \alpha_k U_k$, где α_k, β_k — числа.

Указание. Согласно (4.1.17)

$$[L,\ M] = [V_{-1},\ A_{-1}]\, z^{-2} + (A'_{-1} - \dot{V}_{-1} + [V_{-1},\ A_0] + [V_0,\ A_{-1}])\, z^{-1} +$$
$$+ (A'_0 - \dot{V}_0 + [V_{-1},\ A_1] + [V_0,\ A_0] + [V_1,\ A_{-1}]) +$$
$$+ (A'_1 - \dot{V}_1 + [V_0,\ A_1] + [V_1,\ A_1])\, z + [V_1,\ A_1]\, z^2,$$

откуда, учитывая равенства $V_k = \beta_k U_k$, $A_k = \alpha_k U_k$, иаходим $[L,\ M] = 0$, если операторы U_k удовлетворяют системе уравнений

$$\alpha_{-1} U'_{-1} - \beta_{-1} \dot{U}_{-1} + (\beta_{-1}\alpha_0 - \beta_0\alpha_{-1})\, [U_{-1},\ U_0] = 0,$$
$$\alpha_0 U'_0 - \beta_0 \dot{U}_0 + (\beta_{-1}\alpha_1 - \beta_1\alpha_{-1})\, [U_{-1},\ U_1] = 0,$$
$$\alpha_1 U'_1 - \beta_1 \dot{U}_1 + (\beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0)\, [U_0,\ U_1] = 0,$$

которая в наиболее интересном случае, когда $U_1 = \mathrm{const}$, $\alpha_0 = \alpha_1$, $\beta_0 = \beta_1$, сводится к уравнениям

$$D_{-1} U_{-1} + [\delta U_0,\ U_{-1}] = 0, \quad D_0 U_0 + [\delta U_1,\ U_{-1}] = 0,$$

где $D_k = \left(\alpha_k \dfrac{\partial}{\partial x} - \beta_k \dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ $(k = 0,\ -1)$ и $\delta = \beta_0\alpha_{-1} - \beta_{-1}\alpha_0$. При $\delta = 0$ операторы L, M коммутируют, если выполняются равенства $D_{-1}U_{-1} = 0$, $D_0 U_0 = 0$. При $\delta \neq 0$ так же, как в предыдущей задаче, устанавливаем, что операторы U_{-1} и δU_0 выражаются через невырожденное решение уравнения $Y' + \delta U_0 Y = 0$ по формулам

$$\delta U_0 = -(D_{-1} Y)\, Y^{-1}, \quad U_{-1} = Y C Y^{-1} \quad (D_{-1} C = 0).$$

Следовательно, в этом случае $[L,\ M] = 0$, если операторнозначная функция Y удовлетворяет такому уравнению:

$$D_0 \{(D_{-1} Y)\, Y^{-1}\} - \delta^2 [U_1,\ Y C Y^{-1}] = 0. \tag{4.1.19}$$

Например, если пространство H двумерно и

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \exp\left(\frac{1}{2} Bu\right), \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad C = \gamma U_1,$$

где $u = u(x, \tau, t)$ — скалярная функция, то уравнение (4.1.19) сводится к следующему уравнению:

$$D_0 (D_{-1} u) + 4\gamma\delta^2 \sin u = 0.$$

Поэтому операторы

$$M_0 = \frac{\partial}{\partial\tau} + \sum_{k=-1}^{1} \beta_k U_k, \quad M_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=-1}^{1} \alpha_k U_k \quad (\alpha_0 = \alpha_1, \quad \beta_0 = \beta_1),$$

где

$$U_{-1} = \gamma e^{\frac{1}{2} Bu} U_1 e^{-\frac{1}{2} Bu} = \gamma (\cos uI + \sin uB) U_1, \quad U_0 = -\frac{D_{-1} u}{2\delta} B,$$

преобразуют решения уравнения $y' + \left(\sum_{k=-1}^{1} \beta_k U_k z^k\right) y = 0$ в решения этого же уравнения, если функция $u = u(x, \tau, t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0, \quad D_0 (D_{-1} u) + 4\gamma\delta^2 \sin u = 0.$$

Заметим, что при $\beta_0 = \beta_{-1} = \beta_1 = 1$ и $\alpha_0 = -\alpha_{-1}$ последнее уравнение имеет такой вид:

$$\left(-\alpha_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u + 16\gamma\alpha_0^2 \sin u = 0,$$

причем $\delta = -2\alpha_0$.

§ 2. Быстроубывающие решения уравнения Кортевега — де Фриса

Функцию $f(x, t)$ будем называть быстроубывающей, если

$$\max_{|t| \leqslant T} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |f(x, t)| \, dx < \infty$$

при всех неотрицательных значениях T, а решение $v(x, t)$ уравнения КдФ $\dot{v} - 6vv' + v''' = 0$ — быстроубывающим, если функция $v(x, t)$ и все ее производные по x до третьего порядка включительно быстро убывают. Заметим, что производная по t быстроубывающего решения автоматически является быстроубывающей функцией.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\dot{v}_t(x, t) - 6v(x, t) v'_x(x, t) + v'''_{xxx}(x, t) = 0, \; v(x, 0) = v_0(x) \quad (4.2.1)$$

с вещественной быстроубывающей начальной функцией $v_0(x)$ и предположим, что она имеет быстроубывающее вещественное решение $v(x, t)$. Для отыскания этого решения введем семейство уравнений Штурма — Лиувилля

$$-y'' + v(x, t)\,y - \lambda^2 y = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \tag{4.2.2}$$

порождаемых искомым решением $v(x, t)$. При каждом фиксированном значении t эти уравнения, очевидно, удовлетворяют условию (3.5.2) и к ним применимы все результаты § 5 гл. 3.

При всех значениях параметра λ из замкнутой верхней полуплоскости уравнения (4.2.2) имеют решения $e^+(\lambda, x;\ t)$, $e^-(-\lambda;\ x;\ t)$, представимые в виде

$$e^{\pm}(\pm\lambda, x;\ t) = e^{\pm i\lambda x} \pm \int_x^{\pm\infty} K^{\pm}(x, y;\ t)\, e^{\pm i\lambda y}\,dy \tag{4.2.3}$$

и связанные при вещественных значениях λ равенствами

$$\left.\begin{aligned} &e^+(\lambda, x;\ t) = b(\lambda, t)\,e^-(-\lambda, x;\ t) + a(\lambda, t)\,e^-(\lambda, x;\ t),\\ &e^-(-\lambda, x;\ t) = -b(-\lambda, t)\,e^+(\lambda, x;\ t) +\\ &+ a(\lambda, t)\,e^+(-\lambda, x;\ t), \end{aligned}\right\} \tag{4.2.4}$$

где

$$a(\lambda, t) = (2i\lambda)^{-1}\{e^+(\lambda, 0;\ t)'\,e^-(-\lambda, 0;\ t) - e^+(\lambda, 0;\ t)e^-(-\lambda, 0;\ t)'\},$$

$$b(\lambda, t) = (2i\lambda)^{-1}\{e^-(\lambda, 0;\ t)'\,e^+(\lambda, 0;\ t) - e^-(\lambda, 0;\ t)\,e^+(\lambda, 0;\ t)'\}.$$

Дискретные собственные значения уравнений (4.2.2) являются квадратами нулей $i\varkappa_k(t)$ функции $a(\lambda, t)$ и соответствующие им собственные функции удовлетворяют равенствам

$$e^-(-i\varkappa_k(t), x;\ t) = c_k^-(t)\,e^+(i\varkappa_k(t), x;\ t), \tag{4.2.5}$$

причем

$$(m_k^+(t))^{-2} = \int_{-\infty}^{\infty} |e^+(i\varkappa_k(t), x;\ t)|^2\,dx = i\,(c_k^-(t))^{-1}\left.\frac{\partial a(\lambda, t)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=i\varkappa_k(t)}. \tag{4.2.6}$$

Потенциал однозначно восстанавливается по данным рассеяния, и для отыскания решения $v(x, t)$ задачи Коши (4.2.1) достаточно найти закон изменения во времени данных рассеяния

$$r^+(\lambda, t) = -\frac{b(-\lambda, t)}{a(\lambda, t)}, \quad i\varkappa_k(t), \quad (m_k^+(t))^2 \tag{4.2.7}$$

семейства уравнений (4.2.2). Так как потенциалы $v(x, t)$ этого семейства удовлетворяют уравнению КдФ, то, как было показано в предыдущем параграфе, операторы

$$M_1 = \frac{\partial}{\partial t} - 2(v(x, t) + 2\lambda^2)\frac{\partial}{\partial x} + v'_x(x, t) \tag{4.2.8}$$

преобразуют (дифференцируемые по t) решения уравнения (4.2.2) в решения этого же уравнения.

Поскольку функции $v(x, t)$, $\dot{v}(x, t)$ по предположению быстро убывают, из интегральных уравнений вида (3.1.11), (3.1.13) следует, что ядра $K^{\pm}(x, y; t)$ дифференцируемы по t и

$$\left|\int_x^{\pm\infty}\left|\frac{\partial}{\partial t}K^{\pm}(x, y; t)\right|dy\right| < \infty,$$

$$\left|\int_{x_1}^{\pm\infty}\left|\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_1}K^{\pm}(x_1, x_2; t)\right|dx_2\right| < \infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\int_x^{\pm\infty}\left|\frac{\partial}{\partial t}K^{\pm}(x, y; t)\right|dy = 0.$$

Поэтому решения $e^{\pm}(\pm\lambda, x; t)$, их производные $\frac{\partial}{\partial x}e^{\pm}(\pm\lambda, x; t)$, а вместе с ними и коэффициенты $a(\lambda, t)$, $b(\lambda, t)$ дифференцируемы по t, причем для всех значений λ из замкнутой верхней полуплоскости справедливы равенства

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to\pm\infty} e^{\mp i\lambda x}\dot{e}^{\pm}(\pm\lambda, x; t) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} e^{\mp i\lambda x}e^{\pm}(\pm\lambda, x; t) = 1,\\ &\lim_{x\to\pm\infty} e^{\mp i\lambda x}e^{\pm}(\pm\lambda, x; t)' = \pm i\lambda.\end{aligned}\right\} \tag{4.2.9}$$

Это позволяет применять оператор M_1 к каждому слагаемому, входящему в равенства (4.2.4). Применяя его к $e^{+}(\lambda, x; t)$, получаем решение $M_1[e^{+}(\lambda, x; t)]$ уравнения (4.2.2), которое при $x\to\pm\infty$ удовлетворяет асимптотическим равенствам

$$M_1[e^{+}(\lambda, x; t)] = -4i\lambda^3 e^{i\lambda x} + o(1) \quad (x\to+\infty),$$

$$M_1[e^{+}(\lambda, x; t)] = M_1[b(\lambda, t)e^{-}(-\lambda, x; t)] +$$

$$+ M_1[a(\lambda, t)e^{-}(\lambda, x; t)] = \{\dot{b}(\lambda, t) + 4i\lambda^3 b(\lambda, t)\}e^{-i\lambda x} +$$

$$+\{\dot{a}(\lambda, t) - 4i\lambda^3 a(\lambda, t)\}e^{i\lambda x} + o(1) \quad (x\to-\infty),$$

вытекающим из (4.2.9), если учесть, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} v(x, t) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} v'_x(x, t) = 0$. Но решениями уравнения (4.2.2), удовлетворяющими этим асимптотическим равенствам, являются только функции $-4i\lambda^3 e^{+}(\lambda, x; t)$ и

$$\{\dot{b}(\lambda, t) + 4i\lambda^3 b(\lambda, t)\}e^{-}(-\lambda, x; t) +$$

$$+\{\dot{a}(\lambda, t) - 4i\lambda^3 a(\lambda, t)\}e^{-}(\lambda, x; t),$$

откуда следует, что

$$-4i\lambda^3 e^+(\lambda, x; t) = \{\dot b(\lambda, t) + 4i\lambda^3 b(\lambda, t)\} e^-(-\lambda, x; t) + $$
$$+ \{\dot a(\lambda, t) - 4i\lambda^3 a(\lambda, t)\} e^-(\lambda, x; t).$$

Сопоставляя это равенство с (4.2.4), получаем тождество

$$\{\dot b(\lambda, t) + 8i\lambda^3 b(\lambda, t)\} e^-(-\lambda, x; t) + \dot a(\lambda, t) e^-(\lambda, x; t) = 0,$$

из которого в силу линейной независимости решений $e^-(-\lambda, x; t)$, $e^-(\lambda, x; t)$ вытекают такие дифференциальные уравнения для коэффициентов $a(\lambda, t)$, $b(\lambda, t)$:

$$\dot a(\lambda, t) = 0, \quad \dot b(\lambda, t) + 8i\lambda^3 b(\lambda, t) = 0.$$

Следовательно, $a(\lambda, t) = a(\lambda, 0)$, $b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) e^{-8i\lambda^3 t}$, откуда, в частности, видно, что нули $i\varkappa_k(t)$ функции $a(\lambda, t) = a(\lambda, 0)$ не зависят от t. Учитывая это и применяя оператор M_1 к обеим частям равенства (4.2.5), аналогично предыдущему находим

$$4\varkappa_k^3 e^-(-i\varkappa_k, x; t) = \{\dot c_k^-(t) - 4\varkappa_k^3 c_k^-(t)\} e^+(i\varkappa_k, x; t)$$

и, следовательно, $\dot c_k^-(t) - 8\varkappa_k^3 c_k^-(t) = 0$, т. е. $c_k^-(t) = c_k^-(0) e^{8\varkappa_k^3 t}$.

Итак, если в семействе уравнений (4.2.2) потенциал $v(x, t)$ *является быстроубывающим решением уравнения КдФ, то изменение во времени коэффициентов* $a(\lambda, t)$, $b(\gamma, t)$, $c_k^-(\lambda, t)$ *задается формулами*

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) e^{-8i\lambda^3 t}, \quad c_k^-(t) = c_k^-(0) e^{8\varkappa_k^3 t},$$

откуда, согласно (4.2.6), (4.2.7), вытекает, что закон изменения во времени данных рассеяния этого семейства определяется такими равенствами:

$$r^+(\lambda, t) = r^+(\lambda, 0) e^{8i\lambda^3 t}, \quad \varkappa_k(t) = \varkappa_k(0),$$
$$m_k^+(t)^2 = m_k^+(0)^2 e^{8\varkappa_k^3 t}, \tag{4.2.10}$$

где $\{r^+(\lambda, 0), i\varkappa_k(0), m_k^+(0)\}$ — *данные рассеяния, соответствующие начальному потенциалу* $v_0(x)$. *Для отыскания самого решения* $v(x, t)$ *нужно построить функцию*

$$F^+(x; t) = \sum_{k=1}^{n} m_k^+(0)^2 e^{-\varkappa_k x + 8\varkappa_k^3 t} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^+(\lambda, 0) e^{i\lambda x + 8i\lambda^3 t} d\lambda, \tag{4.2.10'}$$

решить при каждом фиксированном x *уравнение*

$$F^+(x+y; t) + K^+(x, y; t) + \int_x^{\infty} F^+(y+\xi; t) K^+(x, \xi; t)\, d\xi = 0 \tag{4.2.11}$$

$$(x \leqslant y < \infty)$$

и воспользоваться формулой

$$v(x, t) = -2\frac{d}{dx}K^{+}(x, x; t). \tag{4.2.12}$$

До сих пор мы предполагали, что задача Коши (4.2.1) имеет быстроубывающее решение. От этого предположения нетрудно освободиться, непосредственно убедившись, что полученная таким способом функция $v(x, t)$ действительно удовлетворяет уравнению КдФ.

Согласно следствию леммы 4.1.1. функция $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению КдФ тогда и только тогда, когда оператор M_1 переводит решения уравнений (4.2.2) в решения этих же уравнений. Поэтому, если функция $v(x, t)$, ее производная по t и первые три производные по x быстро убывают, то уравнение

$$M_1[e^{+}(\lambda, x; t)] = -4i\lambda^3 e^{+}(\lambda, x; t)$$

эквивалентно уравнению КдФ для потенциалов $v(x, t)$. Согласно (4.2.8), (4.2.3) последнее уравнение эквивалентно следующему:

$$\int_x^\infty \{\dot{K}^{+}(x, y; t) + v'(x, t)K^{+}(x, y; t) - 2v(x, t)K_x^{+}(x, y; t)' -$$
$$-4\lambda^2 K_x^{+}(x, y; t)'\}e^{i\lambda y}dy + \{-4i\lambda^3 - 2i\lambda v(x, t) + v'(x, t) +$$
$$+2v(x, t)K^{+}(x, x; t) + 4\lambda^2 K^{+}(x, x; t)\}e^{i\lambda x} =$$
$$= -4i\lambda^3 e^{i\lambda x} - 4i\lambda^3\int_x^\infty K^{+}(x, y; t)e^{i\lambda y}dy,$$

откуда, после интегрирования по частям,

$$\int_x^\infty \{\dot{K}^{+}(x, y; t) + v'(x, t)K^{+}(x, y; t) - 2v(x, t)K_x^{+}(x, y; t)' +$$
$$+4K_{xyy}^{+}(x, y; t)'''\}e^{i\lambda y}dy + \{-4i\lambda^3 - 2i\lambda v(x, t) + v'(x, t) +$$
$$+2v(x, t)K^{+}(x, x; t) + 4\lambda^2 K^{+}(x, x; t) + [-4i\lambda K_x^{+}(x, y; t)' +$$
$$+4K_{xy}^{+}(x, y; t)'']\,|_{y=x}\}e^{i\lambda x} = \{-4i\lambda^3 + [4\lambda^2 K^{+}(x, y; t) +$$
$$+4i\lambda K_y^{+}(x, y; t)' - 4K_{yy}^{+}(x, y; t)'']\,|_{y=x}\}e^{i\lambda x} -$$
$$-4\int_x^\infty K_{yyy}^{+}(x, y; t)'''e^{i\lambda y}dy,$$

или

$$\int_x^\infty \{\dot{K}_t^{+}(x, y; t) + 4K_{xyy}^{+}(x, y; t)''' + 4K_{yyy}^{+}(x, y; t)''' -$$

$$-2v(x,\ t)\,K_x^+(x,\ y;\ t)' + v'(x,\ t)\,K^+(x,\ y;\ t)\}\,e^{i\lambda y}dy =$$
$$= -\{v'(x,\ t) + 4K_{xy}^+(x,\ y;\ t)'' + 4K_{yy}^+(x,\ y;\ t)'' -$$
$$-2i\lambda\,[v(x,\ t) + 2K_x^+(x,\ y;\ t)' + 2K_y^+(x,\ y;\ t)']\}|_{y=x}\,e^{i\lambda x} \equiv 0,$$

так как из формулы (4.2.12) и уравнения

$$K_{xx}^+(x,\ y;\ t)'' = K_{yy}^+(x,\ y;\ t)'' + v(x,\ t)\,K^+(x,\ y;\ t), \tag{4.2.13}$$

которому всегда удовлетворяет ядро оператора преобразования, следует, что

$$v(x,\ t) = -2\frac{d}{dx}K^+(x,\ x;\ t) =$$
$$= -2\left\{\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right\}K^+(x,\ y;\ t)|_{y=x}, \tag{4.2.14}$$
$$v_x'(x,\ t) = -2\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}K^+(x,\ y;\ t)|_{y=x} =$$
$$= -2\left\{2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + v(x,\ t)\right\}K^+(x,\ y;\ t)|_{y=x}. \tag{4.2.15}$$

Поэтому функция $v(x,\ t)$ с нужным числом быстроубывающих производных удовлетворяет уравнению КдФ тогда и только тогда, когда ядра $K^+(x,\ y;\ t)$ соответствующих операторов преобразования удовлетворяют уравнению

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + 4\frac{\partial^3}{\partial y^3} + 4\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2} - 2v(x,\ t)\frac{\partial}{\partial x} + v_x'(x,\ t)\right\}K^+ = 0. \tag{4.2.16}$$

Дифференцируя уравнение (4.2.13) по x, получаем

$$\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}K^+(x,\ y;\ t) = \frac{\partial^3}{\partial x^3}K^+(x,\ y;\ t) - v_x'(x,\ t)\,K^+(x,\ y;\ t) -$$
$$-v(x,\ t)\frac{\partial}{\partial x}K^+(x,\ y;\ t),$$

что позволяет заменить уравнение (4.2.16) следующим эквивалентным:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 4\frac{\partial^3}{\partial y^3} - 6v(x,\ t)\frac{\partial}{\partial x} - 3v_x'(x,\ t)\right\}K^+ = 0. \tag{4.2.16'}$$

Докажем теперь, что решения $K^+(x,\ y;\ t)$ интегральных уравнений (4.2.11), в которых ядра $F^+(x+y;\ t)$ определены равенством (4.2.10′), удовлетворяют уравнению (4.2.16′) и, следовательно, функция $v(x,\ t)$ является решением задачи Коши (4.2.1). Из равенства (4.2.10′), очевидно, следует, что функция $F^+(x;\ t)$ есть обобщенное решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}F^+(x;\ t) = -8\frac{\partial^3}{\partial x^3}F^+(x;\ t).$$

Поэтому, если она трижды непрерывно дифференцируема по x и один раз по t, то тождества

$$\frac{\partial}{\partial t} F^+(x+y;\ t) = -8\frac{\partial^3}{\partial x^3} F^+(x+y;\ t) =$$
$$= -8\frac{\partial^3}{\partial y^3} F^+(x+y;\ t) \tag{4.2.17}$$

выполняются в обычном смысле. Кроме того, если при всех $a > -\infty$

$$\int_a^\infty (1+|x|)\left(\left|\frac{\partial}{\partial t} F^+(x;\ t)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} F^+(x;\ t)\right|\right) dx < \infty \quad (0 \leqslant k \leqslant 3), \tag{4.2.18}$$

то из равенств (4.2.11) следует, что решения $K^+(x,\ y;\ t)$ трижды непрерывно дифференцируемы по x и один раз по t, их производные, как функции y, удовлетворяют аналогичным неравенствам, а сами равенства (4.2.11) можно трижды дифференцировать по x, y и один раз по t. Поэтому к обеим частям равенств (4.2.11) можно применить оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} + 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 4\frac{\partial^3}{\partial y^3} - 6v\frac{\partial}{\partial x} - 3v'_x$$
$$\left(v(x,t) = -2\frac{d}{dx} K^+(x,\ x;\ t)\right),$$

в результате чего после интегрирования по частям, учитывая равенства (4.2.13) — (4.2.15) и (4.2.17), получаем

$$D(x,\ y;\ t) + \int_x^\infty F^+(y+\xi;\ t)\, D(x,\ \xi;\ t)\, d\xi = 0,$$

где

$$D(x,\ y;\ t) = \left\{\frac{\partial}{\partial t} + 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 4\frac{\partial^3}{\partial y^3} - 6v\frac{\partial}{\partial x} - 3v'_x\right\} K^+(x,\ y;\ t).$$

Так как это интегральное уравнение для D имеет лишь нулевое решение (см. лемму 3.5.3), то $D(x,\ y;\ t) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, указанный метод действительно приводит к решению задачи Коши (4.2.1), если функция $F^+(x,\ t)$, построенная из начальных данных по формуле (4.2.10′), удовлетворяет условиям (4.2.18). Нетрудно убедиться, что эти условия заведомо выполнены, если начальная функция $v_0(x)$ бесконечно дифференцируема и финитна. Применимость метода в случае любой трижды непрерывно дифференцируемой начальной функции $v_0(x)$ с быстроубывающими производными можно доказать, аппроксимируя ее финитными бесконечно дифференцируемыми функциями.

Остановимся в заключение на важном частном случае, когда можно получить явные формулы для решений уравнения КдФ. Заметим прежде всего, что произвольный набор вида $\{r^+(\lambda) \equiv 0, \varkappa_k > 0,\ m_k > 0\ (k = 1, 2, \ldots, n)\}$ удовлетворяет, очевидно, всем условиям теоремы 3.5.1. Следовательно, он состоит из данных рассеяния некоторого уравнения Штурма — Лиувилля с вещественным быстроубывающим потенциалом $v(x)$, для нахождения которого нужно решить интегральные уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\varkappa_k(x+y)} + K^+(x,\ y) + \int_x^\infty \sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\varkappa_k(y+\xi)} K^+(x,\ \xi)\,d\xi = 0. \tag{4.2.19}$$

Эти уравнения вырождены и сводятся к линейным алгебраическим уравнениям. Действительно, согласно (4.2.19)

$$K^+(x,\ y) = \sum_{k=1}^{n} e^{-\varkappa_k y} P_k(x),$$

где

$$P_k(x) = -m_k^2\left(e^{-\varkappa_k x} + \int_x^\infty e^{-\varkappa_k \xi} K^+(x,\ \xi)\,d\xi\right).$$

Подставляя это выражение в уравнение (4.2.19), получаем тождество

$$\sum_{k=1}^{n} e^{-\varkappa_k y}\left(m_k^2 e^{-\varkappa_k x} + P_k(x) + m_k^2 \sum_{l=1}^{n} \frac{e^{-(\varkappa_k+\varkappa_l)x}}{\varkappa_k + \varkappa_l} P_l(x)\right) \equiv 0,$$

эквивалентное алгебраической системе уравнений для функций $P_k(x)$,

$$P_k(x) + \sum_{l=1}^{n} m_k^2 \frac{e^{-(\varkappa_k+\varkappa_l)x}}{\varkappa_k + \varkappa_l} P_l(x) = -m_k^2 e^{-\varkappa_k x},$$

из которой по правилу Крамера находим

$$P_l(x) = \Delta_l(x)\,\Delta(x)^{-1}, \quad \Delta(x) = \operatorname{Det}\left\| \delta_{kl} + m_k^2 \frac{e^{-(\varkappa_k+\varkappa_l)x}}{\varkappa_k + \varkappa_l} \right\|,$$

где определитель $\Delta_l(x)$ получается из $\Delta(x)$ заменой в нем l-го столбца $m_k^2(\varkappa_k + \varkappa_l)^{-1} \exp\{-(\varkappa_k + \varkappa_l)x\}$ столбцом правой части $-m_k^2 \exp\{-\varkappa_k x\}$. Замечая, что столбец правой части, умноженный на $\exp\{-\varkappa_l x\}$, равен производной l-го столбца определителя $\Delta(x)$, находим далее

$$K^+(x,\ x) = \sum_{l=1}^{n} e^{-\varkappa_l x} P_l(x) = \sum_{l=1}^{n} \tilde{\Delta}_l(x)\,\Delta(x)^{-1},$$

где через $\tilde{\Delta}_l(x) = \Delta_l(x) \exp\{-\varkappa_l x\}$ обозначен определитель, получающийся из $\Delta(x)$ заменой в нем l-го столбца его производной. Отсюда согласно правилу дифференцирования определителей вытекает такая окончательная формула для искомого потенциала: $v(x) = -2 \frac{d}{dx} K^+(x, x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \Delta(x)$.

Обращаясь к формулам (4.2.10), убеждаемся, что решение задачи Коши (4.2.1) с начальным потенциалом $v_0(x)$ рассматриваемого вида ($r^+(\lambda, 0) \equiv 0$) представляется в виде

$$\left.\begin{aligned} &v(x, t) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \Delta(x, t), \\ &\Delta(x, t) = \operatorname{Det}\left(\delta_{kl} + m_k^2(0) \frac{e^{-(\varkappa_k+\varkappa_l)x+8\varkappa_k^3 t}}{\varkappa_k+\varkappa_l}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.2.20}$$

Задачи

1. Если функция $v(x, t)$ бесконечно дифференцируема по x и все ее производные быстро убывают, то решения $e^+(\lambda, x; t)$ уравнений (4.2.2) представимы в виде

$$e^+(\lambda, x; t) = \exp\left\{i\lambda x - \int_x^\infty \sigma(\lambda, \xi; t)\, d\xi\right\},$$

причем функция $\sigma(\lambda, x; t)$ при $\lambda \to \pm\infty$ разлагается в асимптотический ряд

$$\sigma(\lambda, x; t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j(x; t)}{(2i\lambda)^j}, \tag{4.2.21}$$

коэффициенты которого $\sigma_j(x; t)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\sigma_1(x; t) = v(x, t), \qquad \sigma_{j+1}(x; t) = -\sigma_j'(x; t) - \sum_{l=1}^{j-1} \sigma_{j-l}(x; t)\, \sigma_j(x; t)$$

(см. задачу 9 § 1 гл. 3). Доказать, что интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_j(x; t)\, dx$ сохраняются (т. е. не зависят от t), если функция $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению $K_m[v] = 0$ (в частности, уравнению КдФ).

Указание. Согласно следствию леммы 4.1.1 оператор $M_m = \frac{\partial}{\partial t} + 2N_m \times \times \frac{d}{dx} - N_m'$ преобразует решение $e^+(\lambda, x; t)$ уравнения (4.2.2) в решение этого же уравнения. В предыдущем параграфе было показано, что

$$N_m = N_m(\lambda^2, x, t) = \sum_{j=0}^{m} a_{m-j}(x; t)\,(2i\lambda)^{2j} =$$

$$= \operatorname{Reg}\left\{P_m(t, \lambda^2)\left[1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{2k+1}(x; t)\,(-4\lambda^2)^{-k-1}\right]^{-1}\right\},$$

откуда, замечая, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sigma_{2k+1}(x;\ t) = 0$, находим

$$\lim_{x\to\pm\infty} N_m(\lambda^2,\ x,\ t) = P_m(t,\ \lambda^2),\quad \lim_{x\to\pm\infty} N'_m(\lambda^2,\ x,\ t) = 0.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$

$$M_m[e^+(\lambda,\ x;\ t)] = 2i\lambda P_m(t,\ \lambda^2)\, e^{i\lambda x} + o(1)$$

и, значит,

$$M_m[e^+(\lambda,\ x;\ t)] = \left\{-\frac{\partial}{\partial t}\int_x^\infty \sigma(\lambda,\ \xi;\ t)\, d\xi + 2N_m(i\lambda + \sigma(\lambda,\ x;\ t)) - N'_m\right\} \times$$

$$\times\, e^+(\lambda,\ x;\ t) = 2i\lambda P_m(t,\ \lambda^2)\, e^+(\lambda,\ x;\ t),$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_x^\infty \sigma(\lambda,\ \xi;\ t)\, d\xi = 2i\lambda(N_m - P_m) + 2N_m\sigma(\lambda,\ x;\ t) - N'_m.$$

Отсюда в силу асимптотической формулы (4.2.21) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_x^\infty \sigma_k(\xi;\ t)\, d\xi = 2\sum_{j=0}^m a_{m-j}(x;\ t)\, \sigma_{k+2j}(x;\ t)\quad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как при $x \to \pm\infty$ коэффициенты $a_{m-j}(x;\ t)$ ограничены, а функции $\sigma_{k+2j}(x;\ t)$ стремятся к нулю, то, устремляя в этих равенствах x к $-\infty$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^\infty \sigma_k(\xi;\ t)\, d\xi = 0,$$

что и требовалось доказать.

2. Доказать, что функция (4.2.12) удовлетворяет уравнению КдФ, если K^+ является единственным решением уравнения (4.2.11), а функция $F^+(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению (4.2.17). Исследовать поведение функции (4.2.12) при $x \to \pm\infty$, если $F^+(x,\ t) = \int\limits_0^1 m^2(\lambda)\, e^{-\lambda x + 8\lambda^3 t} d\lambda$.

3. Найти решение операторного уравнения $\left(B\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Omega - 2\Omega^3 = 0$ методом обратной задачи.

Указание. См. работу [8] и задачу 1 § 1 настоящей главы.

§ 3. Периодические решения уравнения Кортевега — де Фриса

Для лучшего освещения направлений возможных обобщений и сокращения выкладок вместо семейства уравнений Штурма — Лиувилля (4.2.2) будем пользоваться эквивалентным ему семейством матричных уравнений первого порядка (4.1.12) и вместо леммы 4.1.1 — леммой 4.1.1′.

Напомним основные факты элементарной теории матричных дифференциальных уравнений вида

$$Y' = A(x)\,Y. \tag{4.3.1}$$

Детерминанты их решений удовлетворяют уравнению

$$\{\operatorname{Det} Y(x)\}' = \operatorname{Sp} A(x) \operatorname{Det} Y(x),$$

из которого вытекает формула Лиувилля

$$\operatorname{Det} Y(x) = \operatorname{Det} Y(x_1) \exp \int_{x_1}^{x} \operatorname{Sp} A(\xi)\, d\xi.$$

Фундаментальной матрицей уравнения (4.3.1) называется его решение $\Phi(x)$ с отличным от нуля детерминантом. Фундаментальную матрицу, обращающуюся в единичную в точке $x = x_1$, обозначим через $U(x, x_1)$. Очевидно, $U(x, x_1) = \Phi(x)\,\Phi(x_1)^{-1}$, где $\Phi(x)$ — произвольная фундаментальная матрица. Метод вариации произвольных постоянных приводит к формуле

$$Y(x) = U(x,\ x_1)\,Y_1 + U(x,\ x_1) \int_{x_1}^{x} U^{-1}(\xi,\ x_1)\,F(\xi)\,d\xi \tag{4.3.2}$$

для решения задачи Коши неоднородного уравнения $Y' = A(x)\,Y + F(x)$, $Y(x_1) = Y_1$.

Пусть $\Phi_i(x)$ $(i = 1,\ 2)$ — фундаментальные матрицы уравнений $\Phi_1' = A_1(x)\,\Phi_1$, $\Phi_2' = -\Phi_2 A_2(x)$. Тогда общее решение уравнения

$$Y' = A_1(x)\,Y - Y A_2(x) \tag{4.3.3}$$

имеет вид

$$Y = \Phi_1(x)\,C\Phi_2(x),$$

где C — произвольная постоянная матрица. Из этой формулы и формулы Лиувилля следует, что детерминант решений уравнения (4.3.3) не зависит от x, если $\operatorname{Sp} A_1(x) = \operatorname{Sp} A_2(x)$. Так как след коммутатора $[A, B] = AB - BA$ двух матриц всегда равен нулю, то след решений уравнения (4.3.3) не зависит от x, если $A_1(x) = A_2(x)$. Таким образом, у решений уравнения

$$Y' = [Y,\ A(x)] \tag{4.3.3′}$$

как детерминант, так и след не зависят от x.

Рассмотрим семейство операторов

$$L = \frac{d}{dx} + V, \quad V = V(x,\ z,\ t) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v(x,\ t) - z & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.3.4}$$

где $v(x,\ t)$ — произвольная достаточно гладкая функция, определенная в конечной или бесконечной полосе $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $-\infty < t < \infty$. Условимся полином

$$N_n = N_n(z,\ x,\ t) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(x,\ t)\, z^j$$

называть допустимым (для данного семейства), если его коэффициенты $a_k(x, t)$ удовлетворяют системе уравнений (4.1.9). Из формул (4.1.10) для общего решения системы (4.1.9) видно, что допустимый полином однозначно определяется своим значением $N_n(z, x_0, t)$ в любой точке x_0, которое может быть произвольным полиномом $B_n(z, t) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_{n-j}(t)\, z^j$. Нетрудно найти и явную формулу, определяющую допустимый полином по его значениям $B_n(z, t)$ в точке $x = x_0$. Действительно, как было установлено ранее, все допустимые полиномы имеют такой вид:

$$N_n(z,\ x,\ t) = \operatorname{Reg}\{P_n(t,\ z)\, N_\infty(x,\ z)\},$$

где через $N_\infty(x, z)$ обозначен формальный ряд

$$N_\infty(x,\ z) = \left[1 + 2\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{2j+1}(x)\,(-4z)^{-j-1}\right]^{-1}.$$

Поэтому формула

$$N_n(z,\ x,\ t) = \operatorname{Reg}\{B_n(z,\ t)\, N_\infty(x_0,\ z)^{-1}\, N_\infty(x,\ z)\}$$

определяет допустимый полином, совпадающий, очевидно, с полиномом $B_n(z, t)$ в точке $x = x_0$. Фигурирующие в лемме 4.1.1′ нелинейный оператор K_n,

$$K_n[v] = -\dot{v} + N_n''' - 4N_n'(v - z) - 2N_n v', \tag{4.3.5}$$

и линейные операторы

$$M_n = \frac{\partial}{\partial t} + A_n, \quad A_n = A_n(z,\ x,\ t) = \begin{pmatrix} -N_n' & 2N_n \\ 2N_n(v - z) - N_n'' & N_n' \end{pmatrix}, \tag{4.3.6}$$

очевидно, тоже однозначно определяются значением $B_n(z, t)$ соответствующего допустимого полинома N_n в точке $x = x_0$.

Все изложенное выше позволяет сформулировать лемму 4.1.1′ в следующей уточненной форме.

Лемма 4.3.1. *Любому семейству операторов L вида (4.3.4), точке x_0 и произвольному полиному $B_n(z, t) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_{n-j}(t)\, z^j$ однозначно соответствует допустимый полином $N_n(z, x, t)$ такой, что $N_n(z, x_0, t) = B_n(z, t)$. Определяемые полиномом N_n операторы*

(4.3.5), (4.3.6) связаны соотношением

$$[L,\ M_n] = CK_n[v], \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.3.7}$$

причем функция $K_n[v]$ не зависит от z.

В доказательстве нуждается лишь равенство (4.3.7), которое проверяется элементарно.

Рассмотрим теперь фундаментальные матрицы $U = U(x, x_1)$ семейства уравнений $L[Y] = 0$, порождаемых операторами (4.3.4). Непосредственно из вида этих операторов следует, что

$$U = \begin{pmatrix} c & s \\ c' & s' \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} -s' & -s \\ -c' & c \end{pmatrix}, \tag{4.3.8}$$

где $c = c(\sqrt{z},\ x;\ x_1,\ t)$ и $s = s(\sqrt{z},\ x;\ x_1,\ t)$ — фундаментальная система решений уравнения $-y'' + v(x,\ t)\,y = zy$, определяемая такими начальными данными в точке $x = x_1$: $c' = s = 0$, $c = s' = 1$. По лемме 4.3.1 операторы M_n преобразуют матрицы $U = U(x,\ x_1)$ в матрицы $M_n[U] = \dot{U} + A_nU$, удовлетворяющие уравнениям $L\{M_n[U]\} = CK_n(v)\,U$ и начальным условиям $M_n[U]|_{x=x_1} = A_n(x_1)$, вытекающим из равенств $U|_{x=x_1} = I$. Следовательно, матрицы $M_n[U]$ являются решениями задачи Коши $L[Y] = CUK_n[v]$, $Y|_{x=x_1} = A_n(x_1)$, и согласно формуле (4.3.2)

$$M_n[U] = \dot{U} + A_n(x)\,U =$$
$$= UA_n(x_1) + U\int_{x_1}^{x} U^{-1}(\xi,\ x_1)\,CU(\xi,\ x_1)\,K_n[v]\,d\xi,$$

т. е.

$$\dot{U} = UA_n(x_1) - A_n(x)\,U + U\int_{x_1}^{x} W(\xi)\,K_n[v]\,d\xi, \tag{4.3.9}$$

где $W(\xi) = U^{-1}(\xi,\ x_1)\,CU(\xi,\ x_1)$. Используя равенства (4.3.8), находим

$$W(\xi) = \begin{pmatrix} -cs & -s^2 \\ c^2 & cs \end{pmatrix}. \tag{4.3.9'}$$

Таким образом, из леммы 4.3.1 вытекает такое следствие.

Следствие. *Фундаментальные матрицы $U = U(x,\ x_1)$ семейства уравнений $L[Y] = 0$, порождаемых операторами (4.3.4), удовлетворяют равенствам (4.3.9), в которых операторы K_n и матрицы $A_n = A_n(z,\ x,\ t)$ определены формулами (4.3.5), (4.3.6), где $N_n = N_n(z,\ x,\ t)$ — любые допустимые для этого семейства полиномы.*

Значения функций $f(x)$ в точках $x = x_i$ для краткости условимся обозначать через $f(i)$. Например, $U(x_2,\ x_1) = U(2,\ 1)$,

$N_n(z, x_i, t) = N_n(i)$, $A_n(z, x_i, t) = A_n(i)$ и т. д. Значение фундаментальной матрицы $U(x, x_1)$ уравнения $L[y] = 0$ в точке $x = x_2$, т. е. матрицу $U(x_2, x_1) = U(2, 1)$, будем называть матрицей перехода этого уравнения или самого оператора L (от точки x_1 к точке x_2). Она является функцией спектрального параметра z и непосредственно связана со спектральными данными краевых задач, порождаемых уравнением $-y'' + v(x, t)y = zy$ на сегменте $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Если функция $v(x, t)$ удовлетворяет в полосе $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $-\infty < t < \infty$ уравнению $K_n[v] = 0$, то матрицы перехода $U(2,1)$ семейства операторов (4.3.4) удовлетворяют уравнению

$$\dot{U}(2, 1) = U(2, 1)A_n(1) - A_n(2)U(2, 1), \tag{4.3.10}$$

которое является очевидным следствием формулы (4.3.9). Подчеркнем, что в этом уравнении полностью исключена переменная x, а коэффициенты $A_n(i)$ полиномиально зависят от z. Весьма существенно, что обратное утверждение тоже верно.

Теорема 4.3.1. *Для того чтобы заданная в полосе $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $-\infty < t < \infty$ функция $v(x, t)$ удовлетворяла в этой полосе уравнению $K_n[v] = 0$, порождаемому каким-нибудь допустимым для семейства операторов (4.3.4) полиномом $N_n(z, x, t)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие полиномиально зависящие от z матрицы второго порядка*

$$B^{(i)} = (B^{(i)}_{\alpha\beta}(z, t)), \ \operatorname{Sp} B^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2),$$

что матрицы перехода $U(2,1)$ этого семейства будут удовлетворять уравнению

$$\dot{U}(2, 1) = U(2, 1)B^{(1)} - B^{(2)}U(2, 1). \tag{4.3.11}$$

Если обладающие этими свойствами матрицы $B^{(i)}$ существуют, то полином $N_n(z, x, t)$ однозначно определяется условием $2N_n(z, x_2, t) = B^{(2)}_{12}(z, t)$, причем $B^{(1)} = A_n(1)$, $B^{(2)} = A_n(2)$, где матрицы $A_n = A_n(z, x, t)$ строятся из полинома $N_n(z, x, t)$ по формулам (4.3.6).

Доказательство. Необходимость условий теоремы была установлена ранее. Для доказательства достаточности этих условий заметим, что в силу следствия леммы (4.3.1) матрицы перехода $U(2,1)$ всегда удовлетворяют равенствам

$$\dot{U}(2, 1) = U(2, 1)A_n(1) - A_n(2)U(2, 1) + U(2, 1)\int_{x_1}^{x_2} W(\xi)K_n[v]\,d\xi.$$

Если условия теоремы выполнены, то, вычитая их из (4.3.11), получаем

$$0 = U(2, 1)(B^{(1)} - A_n(1)) - (B^{(2)} - A_n(2))U(2, 1) -$$
$$- U(2, 1)\int_{x_1}^{x_2} W(\xi)K_n[v]\,d\xi$$

или

$$C^{(1)} = U(2,\ 1)^{-1} C^{(2)} U(2,\ 1) + \int_{x_1}^{x_2} W(\xi) K_n[v]\, d\xi, \tag{4.3.12}$$

где $C^{(i)} = B^{(i)} - A_n(i) = (C^{(i)}_{\alpha\beta})$, $\operatorname{Sp} C^{(i)} = 0$ $(i = 1,\ 2)$, причем равенства (4.3.12) выполняются для любого допустимого полинома $N_n(z,\ x,\ t)$, определяющего операторы K_n и матрицы A_n по формулам (4.3.5) и (4.3.6). Согласно лемме 4.3.1 допустимый полином $N_n = N_n(z,\ x,\ t)$ можно выбрать так, чтобы $2N_n(z,\ x_2,\ t) \equiv B^{(2)}_{12}(z,\ t)$, а следовательно, и $C^{(2)}_{12} \equiv 0$. Теорема будет доказана, если показать, что при таком выборе допустимого полинома $C^{(2)} \equiv 0$ и $K_n[v] \equiv 0$.

Из формул (4.3.8), (4.3.9′), учитывая равенства $\operatorname{Sp} C^{(2)} = 0$, $C^{(2)}_{12} = 0$, устанавливаем, что правые верхние элементы матриц, входящих в равенство (4.3.12), удовлетворяют соотношению

$$C^{(1)}_{12} = s(2)\,\{2s'(2)\, C^{(2)}_{11} - s(2)\, C^{(2)}_{21}\} - \int_{x_1}^{x_2} s^2(\sqrt{z},\ \xi) K_n[v]\, d\xi, \tag{4.3.13}$$

где $C^{(1)}_{12}$, $C^{(2)}_{11}$, $C^{(2)}_{21}$ — некоторые полиномы от z, $s(2) = s(\sqrt{z},\ x_2)$, $s'(2) = s'(\sqrt{z},\ x_2)$ и

$$s(\sqrt{z},\ x) = s(\sqrt{z},\ x;\ x_1,\ t) = \frac{\sin\sqrt{z}\,(x - x_1)}{\sqrt{z}} +$$

$$+ \int_{x_1}^{x} K(x,\ y;\ t) \frac{\sin\sqrt{z}\,(y - x_1)}{\sqrt{z}}\, dy.$$

Из последней формулы легко выводится представление для функций $s^2(\sqrt{z},\ x)$:

$$s^2(\sqrt{z},\ x) = (2z)^{-1} \Bigg[1 - \cos 2\sqrt{z}\,(x - x_1) +$$

$$+ \int_{x_1}^{x} H(x,\ y;\ t) \cos 2\sqrt{z}\,(y - x_1)\, dy\Bigg],$$

показывающее, что они образуют полную систему в пространстве $L_2[x_1,\ x_2]$ (см. задачу 1 § 3 гл. 1). Так как правая часть равенства (4.3.13) стремится к нулю, когда z пробегает последовательность нулей функции $s(2) = s(\sqrt{z},\ x_2)$, то полином $C^{(1)}_{12}$, стоящий в его левой части, равен нулю тождественно. Учитывая это и рассматривая равенство (4.3.13) в нулях функции $s'(2) = s'(\sqrt{z},\ x_2)$, убеждаемся, что $C^{(2)}_{21} \equiv 0$. Наконец, рассмотрение равенства (4.3.13) (с учетом уже доказанных тождеств $C_{12}^{(1)} = C_{21}^{(2)} \equiv 0$) при $2\sqrt{z}\,(x_2 - x_1) = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ показывает, что

$$C_{11}^{(2)} \equiv 0, \quad \int_{x_1}^{x_2} s^2(\sqrt{z},\ \xi)\, K_n[v]\, d\xi \equiv 0,$$

откуда в силу полноты множества функций $s^2(\sqrt{z},\ x)$ в пространстве $L_2[x_1,\ x_2]$ следует, что $K_n[v] \equiv 0$.

Замечание. Принятые нами обозначения допустимых полиномов могут привести к недоразумению, когда приходится рассматривать их семейства, зависящие от параметров, от которых могут зависеть и потенциалы v. Общий вид допустимых полиномов

$$N_n = \operatorname{Reg}\left\{P_n(z)\left[1 + 2\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{2j+1}(x)\,(-4z)^{-j-1}\right]^{-1}\right\},$$

показывает, что они являются результатом применения некоторого нелинейного дифференциального оператора $N\{P_n\}$ к потенциалу v, рассматриваемому в качестве функции переменной x. Вид этого оператора определяет полином P_n. Поэтому, если потенциалы $v = v(x,\ t)$ и полиномы $P_n = P_n(t,\ z)$ зависят от параметра t, то принятое ранее обозначение $N_n(z,\ x,\ t)$ лучше заменить таким: $N_n(z,\ x,\ t) = N\{P_n(t,\ z)\}[v(x,\ t)]$. По этой же причине последовательнее было бы пользоваться такими обозначениями формальных рядов $N_\infty(x,\ z)$, матриц A_n и операторов K_n: $N_\infty(x,\ z) = N_\infty(v(x,t),\ z)$, $A_n = A_n(P_n(z,t),\ v(x,t))$, $K_n[v] = K\{P_n(t,z)\} \times [v]$. Равенство $K_n = K\{P_n(t,\ z)\}$ указывает на зависимость оператора K_n от t. Например, в теореме 4.3.1 оператор K_n, определяемый матрицами $B^{(i)}$, имеет такой вид:

$$K_n = K\{\operatorname{Reg}[B_{12}^{(1)}(z,\ t)\, N_\infty(v(x_1,\ t),\ z)]\}.$$

Поэтому он не зависит от t, если

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Reg}\{B_{12}^{(1)}(z,\ t)\, N_\infty(v(x_1,\ t),\ z)\} = 0,$$

и в этом случае уравнение $K_n[v] = 0$ является уравнением с постоянными коэффициентами, как, например, уравнение КдФ.

Остановимся подробнее на частном случае этой теоремы, когда элементы матриц $B^{(i)}$ являются полиномами не выше второй степени. Согласно (4.1.10) общий вид допустимых полиномов первой степени таков:

$$N_1 = p_0 z + \frac{1}{2} p_0 v + p_1,$$

а порождаемых ими операторов K_1 и матриц A_1 —

$$K_1[v] = -\dot{v} + \frac{1}{2}p_0\{v''' - 6vv'\} - 2p_1v',$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}p_0v' & 2N_1 \\ 2N_1(v-z) - \frac{1}{2}p_0v'' & \frac{1}{2}p_0v' \end{pmatrix},$$

где $p_0 = p_0(t)$, $p_1 = p_1(t)$ — произвольные функции от t. Поэтому матрицы $B^{(i)}$ должны иметь такую структуру:

$$B^{(i)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}p_0b_i & B_{12}^{(i)} \\ B_{12}^{(i)}(a_i - z) - \frac{1}{2}p_0d_i & \frac{1}{2}p_0b_i \end{pmatrix}, \quad B_{12}^{(i)} = p_0(2z + a_i) + 2p_1, \tag{4.3.14}$$

где a_i, b_i, d_i — некоторые функции от t. Согласно теореме 4.3.1 функция $v(x, t)$ удовлетворяет в полосе $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $-\infty < t < \infty$ уравнению

$$-\dot{v} + \frac{1}{2}p_0\{v''' - 6vv'\} - 2p_1v' = 0$$

тогда и только тогда, когда существуют такие матрицы $B^{(i)}$ вида (4.3.14), что матрица перехода $U(2,1)$ семейства операторов (4.3.4) удовлетворяет уравнению (4.3.11).

Предположим теперь, что функция $v = v(x, \tau, t)$, определяющая семейство операторов (4.3.4), зависит от параметров τ и t. Из рассмотренного выше частного случая теоремы 4.3.1 вытекает важное следствие.

Следствие. Для того чтобы в области $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $-\infty < \tau < \infty$, $-\infty < t < \infty$ функция $v(x, \tau, t)$ одновременно удовлетворяла двум уравнениям:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 6v\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3},$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали такие матрицы $B_0^{(i)}$, $B_1^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ вида

$$B_0^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ z - \tilde{a}_i & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1^{(i)} = \begin{pmatrix} b_i & -2(a_i + 2z) \\ 4z^2 - 2a_iz + c_i & -b_i \end{pmatrix}, \tag{4.3.15}$$

где $\tilde{a}_i$, a_i, b_i, c_i — некоторые функции от τ и t, что матрицы перехода $U = U(2, 1)$ семейства операторов (4.3.4) будут удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial \tau}U = UB_0^{(1)} - B_0^{(2)}U, \qquad \frac{\partial}{\partial t}U = UB_1^{(1)} - B_1^{(2)}U.$$

Если матрицы $B_0^{(i)}$, $B_1^{(i)}$, обладающие этими свойствами, существуют, то

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{a}_i = a_i = v(x_i, \tau, t), \quad b_i = v'_x(x_i, \tau, t), \\ c_i = v''_{xx}(x_i, \tau, t) - 2v^2(x_i, \tau, t).\end{array}\right\} \qquad (4.3.15')$$

Перейдем теперь к рассмотрению периодической задачи Коши для уравнения КдФ

$$\dot{v} - 6vv' + v''' = 0, \; v(x+\pi, t) = v(x, t) \quad (-\infty < x < \infty) \qquad (4.3.16)$$

с вещественной трижды непрерывно дифференцируемой начальной функцией

$$v(x, 0) = v_0(x) = v(x+\pi). \qquad (4.3.16')$$

Пусть $U_0(z)$ — матрица перехода (от $x_1 = 0$ к $x_2 = \pi$) оператора вида (4.3.4), порождаемого начальной функцией $v_0(x)$, а $U(t, \tau; z)$ — матрицы перехода операторов (4.3.4), порождаемых функциями $v(x+\tau, t)$, где $v(x, t)$ — решение задачи (4.3.16), (4.3.16′). Очевидно, функции $v(x+\tau, t)$ удовлетворяют в полосе $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $-\infty < t < \infty$ одновременно двум уравнениям:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 6v\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3},$$

и периодическим краевым условиям

$$\left.\frac{\partial^k v}{\partial x^k}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^k v}{\partial x^k}\right|_{x=\pi} \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Отсюда согласно следствию теоремы 4.3.1 вытекает существование матриц $B_0^{(1)} = B_0^{(2)} = B_0$, $B_1^{(1)} = B_1^{(2)} = B_1$ вида

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ z-a & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b & -2(a+2z) \\ 4z^2 - 2az + c & -b \end{pmatrix} \qquad (4.3.17)$$

(a, b, c — некоторые функции от τ и t) таких, что

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = [U, B_0], \quad \frac{\partial U}{\partial t} = [U, B_1].$$

Наоборот, если по матрице перехода $U_0(z)$ удастся найти матрицу B_1 вида (4.3.17) такую, что решение задачи Коши

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [U, B_1], \quad U|_{t=0} = U_0(z) \qquad (4.3.18)$$

при каждом значении t окажется матрицей перехода $U = U(t, z)$ некоторого оператора вида (4.3.4), то в силу этого же следствия функция $v(x, t)$, порождающая это семейство операторов, будет решением краевой задачи, порождаемой в полосе $0 \leqslant x \leqslant \pi$,

$-\infty < t < \infty$ уравнением КдФ и начальными краевыми условиями $v(x, 0) = v_0(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$, $v^{(k)}(0, t) = v^{(k)}(\pi, t)$ $(k = 0, 1, 2)$. Так как при этом автоматически выполняется равенство $v'''(0, t) = v'''(\pi, t)$, то периодическое продолжение $(v(x+\pi, t) = v(x, t))$ функции $v(x, t)$ на всю ось $-\infty < x < \infty$ будет решением задачи (4.3.16), (4.3.16′). Далее, если по уже найденным матрицам перехода $U(t; z)$ удастся найти матрицы B_0 вида (4.3.17) такие, что решения задач Коши

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = [U, B_0], \quad U|_{\tau=0} = U(t; z) \tag{4.3.19}$$

при всех значениях τ будут матрицами перехода $U(\tau, t; z)$ операторов вида (4.3.4), то функция $v(x, \tau, t)$, порождающая это семейство операторов, будет решением такой начальной краевой задачи:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad v(x, 0, t) = v(x, t), \quad v(0, \tau, t) = v(\pi, \tau, t).$$

Но единственным решением этой задачи является, очевидно, функция $v(x+\tau, t)$. Поэтому $v(x, \tau, t) = v(x+\tau, t)$ и в силу равенств (4.3.15′) $a(\tau, t) = v(0, \tau, t) = v(\tau, t)$, где $a(\tau, t)$ — функция, определяющая матрицу B_0.

Следовательно, если удастся осуществить обе указанные выше процедуры, то этим будет не только доказано существование решения задачи (4.3.16), (4.3.16′), но и найдено это решение по формуле

$$v(x, t) = a(x, t). \tag{4.3.20}$$

В начале этого параграфа отмечалось, что уравнения вида $Y' = [Y, A]$ имеют два интеграла: $\operatorname{Det} Y$ и $\operatorname{Sp} Y$. Поэтому для решений задач Коши (4.3.18), (4.3.19) равенства

$$\operatorname{Sp} U(\tau, t; z) = \operatorname{Sp} U(t; z) = \operatorname{Sp} U_0(z),$$
$$\operatorname{Det} U(\tau, t; z) = \operatorname{Det} U(t; z) = \operatorname{Det} U_0(z)$$

выполняются всегда, что позволяет представить их решения в такой форме:

$$U(t, z) = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} U_0(z) I + V(t; z),$$
$$U(\tau, t; z) = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} U_0(z) I + V(\tau, t; z),$$

где $V(t; z)$, $V(\tau, t; z)$ — решения задач Коши

$$\frac{\partial V}{\partial t} = [V, B_1], \quad V(0; z) = V_0(z) = U_0(z) - \frac{1}{2} \operatorname{Sp} U_0(z) I,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = [V, B_0], \quad V(0, t; z) = V(t, z).$$

Согласно формуле (4.3.8) матрицы перехода любых операторов (4.3.4) имеют вид

$$U = \begin{pmatrix} c & s \\ c' & s' \end{pmatrix} = u_+(\sqrt{z})\, I + \begin{pmatrix} u_-(\sqrt{z}) & s(\sqrt{z},\ \pi) \\ c'(\sqrt{z},\ \pi) & -u_-(\sqrt{z}) \end{pmatrix},$$

где $c = c(\sqrt{z},\ x)$, $s = s(\sqrt{z},\ x)$ — стандартная фундаментальная система решений уравнения $-y'' + v(x)\, y = zy$, $u_+(\sqrt{z}) = \frac{1}{2}[c(\sqrt{z},\ \pi) + s'(\sqrt{z},\ \pi)] = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}U$ — дискриминант Хилла этого уравнения и $u_-(\sqrt{z}) = \frac{1}{2}[c(\sqrt{z},\ \pi) - s'(\sqrt{z},\ \pi)]$.

Следовательно, если $v(x,\ t)$ — решение задачи (4.3.16), (4.3.16′), то дискриминанты Хилла, а значит, и спектры периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых уравнениями $-y'' + v(x + \tau,\ t)\, y = zy$ на сегменте $0 \leqslant x \leqslant \pi$, не зависят от τ и t. В частности, если начальный потенциал $v(x,\ 0) = v_0(x)$ был конечнозонным, то потенциалы $v(x + \tau,\ t)$ остаются конечнозонными при всех τ, t с неизменными границами лакун. В этом случае структура матриц перехода особенно проста. Действительно, из асимптотической формулы (3.4.26) следует, что

$$1 - u_+(\sqrt{z})^2 = \pi^2 (z - \mu_0) \prod_{k=1}^{\infty} k^{-4} (z - \mu_k^-)(z - \mu_k^+),$$

где $\mu_0 < \mu_1^- \leqslant \mu_1^+ < \mu_2^- \leqslant \mu_2^+ < \ldots$ — собственные значения периодической и антипериодической краевых задач, а согласно (3.4.28′) и (3.4.7)

$$s(\sqrt{z},\ \pi) = \pi \prod_{k=1}^{\infty} k^{-2} (\lambda_k - z), \quad \mu_k^- \leqslant \lambda_k \leqslant \mu_k^+.$$

Конечнозонность потенциала означает, что уравнение $1 - u_+(\sqrt{z})^2 = 0$ имеет лишь конечное число простых корней. Будем обозначать их через $\mu_0 < \mu_1^- < \mu_1^+ < \cdots < \mu_N^- < \mu_N^+$, изменяя, в случае необходимости, нумерацию. Далее, неравенства $\mu_k^- \leqslant \lambda_k \leqslant \mu_k^+$ показывают, что каждый двукратный корень уравнения $1 - u_+(\sqrt{z})^2 = 0$ является простым корнем функции $s(\sqrt{z},\ \pi)$. Поэтому у $(N + 1)$-зонных потенциалов

$$1 - u_+(\sqrt{z})^2 = T_{2N+1}(z)\, d^2(z), \quad s(\sqrt{z},\ \pi) = R_N(z)\, d(z),$$

где

$$T_{2N+1}(z) = (z - \mu_0) \prod_{j=1}^{N} (z - \mu_j^-)(z - \mu_j^+), \quad R_N(z) = \prod_{j=1}^{N} (z - \lambda_j),$$

$$d(z) = (-1)^N \pi (N!)^{-2} \prod_{k=1}^{\infty} (\bar{\mu}_k - z)(N + k)^{-2},$$

$\tilde{\mu}_k$ — кратные корни уравнения $1-u_+(\sqrt{z})^2=0$ и $\mu_j^-\leqslant\lambda_j\leqslant\mu_j^+$. Переписав равенство $\operatorname{Det} U=1$ в форме

$$-u_-(\sqrt{z})^2-c'(\sqrt{z},\ \pi)\,s(\sqrt{z},\ \pi)=1-u_+(\sqrt{z})^2,$$

видим, что функции $u_-(\sqrt{z})$, $c'(\sqrt{z},\ \pi)$ делятся на $d(z)$ и, значит,

$$c'(\sqrt{z},\ \pi)=-W_{N+1}(z)\,d(z),\qquad W_{N+1}(z)=\prod_{j=0}^{N}(z-\nu_j),$$

$$u_-(\sqrt{z})=V_{N-1}(z)\,d(z),\quad V_{N-1}(z)=\sum_{k=0}^{N-1}v_kz^k,$$

так как

$$\lim_{z\to-\infty}\frac{c'(\sqrt{z},\ \pi)}{zs(\sqrt{z},\ \pi)}=-1,\quad \lim_{z\to-\infty}\frac{u_-(\sqrt{z})}{s(\sqrt{z},\ \pi)}=0.$$

Таким образом, матрицы перехода операторов вида (4.3.4), порождаемых конечнозонными потенциалами с одним и тем же дискриминантом Хилла $u_+(\sqrt{z})$, имеют структуру

$$U=u_+(\sqrt{z})\,I+d(z)\,P_{N+1}(z),\ \ P_{N+1}(z)=\begin{pmatrix}U_{N-1}(z) & R_N(z)\\ -W_{N+1}(z) & -U_{N-1}(z)\end{pmatrix},\tag{4.3.21}$$

где $U_{N-1}(z)$, $R_N(z)$, $W_{N+1}(z)$ — вещественные полиномы, связанные соотношением

$$-U_{N-1}(z)^2+W_{N+1}(z)\,R_N(z)=T_{2N+1}(z),$$

в котором

$$T_{2N+1}(z)=(1-u_+(\sqrt{z})^2)\,d(z)^{-2}=(z-\mu_0)\prod_{j=1}^{N}(z-\mu_j^-)(z-\mu_j^+).$$

Коэффициенты при старших степенях полиномов $R_N(z)$, $W_{N+1}(z)$, равны единице и в каждой лакуне $[\mu_j^-,\ \mu_j^+]$ $(0\leqslant j\leqslant N)$ лежит ровно один корень λ_j полинома $R_N(z)$.

Из теоремы 3.4.2 следует, что обратное утверждение тоже верно: если $u_+(\sqrt{z})$ — дискриминант Хилла, то матрицы U вида (4.3.21), в котором полиномы $U_{N-1}(z)$, $R_N(z)$, $W_{N+1}(z)$ удовлетворяют перечисленным выше условиям, являются матрицами перехода операторов вида (4.3.4), порождаемых периодическими конечнозонными (а значит, и бесконечно дифференцируемыми) потенциалами. Предположим, что в задаче (4.3.16), (4.3.16′) начальная функция $v_0(x)$ является конечнозонным потенциалом и $v(x,\ t)$ — ее решение. Согласно предыдущему матрицы перехода семейства операторов (4.3.4), порождаемого функциями $v(x+\tau,\ t)$, должны иметь вид

$$U(\tau,\ t;\ z) = u_+(\sqrt{z})\,I + d(z)\,P_{N+1}(\tau,\ t;\ z),$$

где функции $u_+(\sqrt{z})$, $d(z)$ не зависят от t, а матрица $P_{N+1}(\tau,\ t;\ z)$ полиномиально зависит от z и удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial P_{N+1}}{\partial t} = [P_{N+1},\ B_1], \qquad \frac{\partial P_{N+1}}{\partial \tau} = [P_{N+1},\ B_0] \tag{4.3.22}$$

с матрицами B_0, B_1 вида (4.3.17). *Эти уравнения не замкнуты в том смысле, что в них неизвестны как искомые решения P_{N+1}, так и функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, определяющие матрицы B_0, B_1. Однако условие полиномиальной зависимости от z решений P_{N+1} замыкает их и сводит к системам автономных обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Действительно, согласно (4.3.17) уравнения (4.3.22) эквивалентны системам уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot U_{N-1} &= \{c - 2az + 4z^2\}\,R_N - \{2a + 4z\}\,W_{N+1}, \\ \dot R_N &= -2\,(2a + 4z)\,U_{N-1} - 2bR_N, \\ \dot W_{N+1} &= 2\,\{c - 2az + 4z^2\}\,U_{N-1} + 2bW_{N+1}, \end{aligned}\right\} \tag{4.3.23}$$

$$\left.\begin{aligned} U'_{N-1} &= (z - a)\,R_N - W_{N+1}, \\ R'_N &= -2U_{N-1}, \\ W'_{N+1} &= 2\,(z - a)\,U_{N-1} \end{aligned}\right\} \tag{4.3.24}$$

для элементов U_{N-1}, R_N, W_{N+1} матрицы $P_{N+1}(\tau,\ t;\ z)$ (точкой обозначено дифференцирование по t, штрихом — по τ). Для того чтобы эти системы имели полиномиальные относительно z решения вида

$$U_{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} u_k z^k,\quad R_N = \sum_{j=0}^{N} r_j z^j,\quad W_{N+1} = \sum_{l=0}^{N+1} w_l z^l \tag{4.3.25}$$

$(r_N = w_{N+1} = 1)$,

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись уравнения

$$\left.\begin{aligned} \dot u_k &= cr_k - 2ar_{k-1} + 4r_{k-2} - 2aw_k - 4w_{k-1}, \\ \dot r_j &= -4au_j - 8u_{j-1} - 2br_j, \\ \dot w_l &= 2cu_l - 4au_{l-1} + 8u_{l-2} + 2bw_l, \end{aligned}\right\} \tag{4.3.23'}$$

$$\left.\begin{aligned} u'_k &= -ar_k + r_{k-1} - w_k, \quad r'_j = -2u_j, \\ w'_l &= -2au_l + 2u_{l-1}, \end{aligned}\right\} \tag{4.3.24'}$$

получающиеся при подстановке полиномов (4.3.25) в системы (4.3.23), (4.3.24). Так как $u_k = w_l = r_j$ при отрицательных k, j, l и при $k > N-1$, $j > N$, $l > N+1$, а $w_{N+1} = r_N = 1$, то уравнения, содержащие производные от u_N, u_{N+1}, u_{N+2}, r_N, w_{N+1}, сводятся к таким алгебраическим уравнениям:

$$0 = c - 2a(r_{N-1} + w_N) + 4(r_{N-2} - w_{N-1}),$$

$$0 = -4(a - r_{N-1} + w_N), \quad 0 = -a + r_{N-1} - w_N,$$

$$0 = -2(4u_{N-1} + b),$$

откуда следует, что системы (4.3.23), (4.3.24) имеют полиномиальные решения вида (4.3.25) тогда и только тогда, когда

$$\left.\begin{aligned} &a = r_{N-1} - w_N, \quad b = -4v_{N-1}, \\ &c = 2(r_{N-1}^2 - w_N^2) - 4(r_{N-2} - w_{N-1}). \end{aligned}\right\} \tag{4.3.26}$$

Подставляя в системы (4.3.23′), (4.3.24′) вместо a, b, c правые части последних равенств, получаем для функций u_k, r_j, w^l $(0 \leqslant k, j \leqslant N-1,\ 0 \leqslant l \leqslant N)$ некоторые автономные системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Решив их, по формулам (4.3.26) найдем функции a, b, c, а значит, и матрицы B_0, B_1, при которых уравнения (4.3.22) имеют полиномиальные относительно z решения.

Пусть $U_0(z) = u_+(\sqrt{z})\, I + d(z) P_{N+1}(z)$ — матрица перехода, соответствующая начальной функции $v_0(x)$. Решив соответствующую автономную систему при начальных данных, определяемых матрицей $P_{N+1}(z)$, найдем вещественные полиномы $U_{N-1}(t;\ z)$, $R_N(t;\ z)$, $W_{N+1}(t;\ z)$ и матрицу B_1 вида (4.3.17) такие, что построенная из этих полиномов матрица $P_{N+1}(t,\ z)$ будет удовлетворять уравнению $\dot P_{N+1} = [P_{N+1}, B_1]$. Следовательно, матрица $U(t;\ z) = u_+(\sqrt{z})\ I + d(z) P_{N+1}(t;\ z)$ будет решением задачи Коши (4.3.18). Так как $\operatorname{Det} P_{N+1}(t,\ z) = -U_{N-1}(t;\ z)^2 + W_{N+1}(t;\ z) R_N(t;\ z)$ сохраняется, то тождество

$$-U_{N-1}(t;\ z)^2 + W_{N+1}(t;\ z) R_N(t;\ z) = T_{2N+1}(z) \tag{4.3.27}$$

выполняется во всей области существования решения автономной системы. Обозначим через $\lambda_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ корни полинома $R_N(t;\ z)$. В начальный момент $(t = 0)$ они были локализованы в лакунах: $\mu_k^- \leqslant \lambda_k(0) \leqslant \mu_k^+$. При непрерывном изменении t они двигаются, но каждый из них не может выйти из своей лакуны, так как согласно (4.3.27) произведение

$$W_{N+1}(t;\ z) R_N(t;\ z) = T_{2N+1}(z) + U_{N-1}(t;\ z)^2$$

строго положительно вне лакун. Поэтому корни полинома $R_N(t;\ z)$ остаются простыми вещественными и локализованными в соответствующих лакунах, откуда согласно предыдущему следует, что матрицы $U(t; z)$ будут матрицами перехода некоторых операторов вида (4.3.4).

Аналогичное рассуждение при рассмотрении корней $\nu_k(t)$ полинома $W_{N+1}(t; z)$ показывает, что они тоже локализованы в лакунах: $-\infty < \nu_0(t) \leqslant \mu_0$, $\mu_k^- \leqslant \nu_k(t) \leqslant \mu_k^+$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, откуда, учитывая тождество (4.3.27), видим, что коэффициенты всех трех полиномов во всей области существования решения автономной системы ограничены константами, не зависящими от t, и решение этой системы ни при каких конечных значениях t не может обратиться в бесконечность, т. е. оно продолжается на всю ось $-\infty < t < \infty$. Отсюда, как мы видели, вытекает существование и единственность решения $v(x, t)$ задачи (4.3.16), (4.3.16′), причем найденные матрицы $U(t; z)$ являются матрицами перехода операторов (4.3.4), порождаемых этим решением. Теперь можно решить автономную систему, образующуюся из уравнений (4.3.24) в результате замены в них коэффициента a функцией $r_{N-1} - w_N$ при начальных данных, задаваемых уже найденной матрицей $P_{N+1}(t; z)$, и получить функцию $a(\tau, t)$, определяющую решение $v(x, t)$ по формуле (4.3.20).

Итак, мы доказали существование и единственность решения задачи (4.3.16), (4.3.16′) *при конечнозонных начальных данных, а также свели ее решение к решению двух автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, получающихся из уравнений* (4.3.23′), (4.3.24′).

Решение периодической задачи Коши для уравнения КдФ при произвольном трижды непрерывно дифференцируемом начальном потенциале $v_0(x)$ можно получить, аппроксимируя его конечнозонными потенциалами, которые по теореме 3.4.3 плотны в любом пространстве $\widetilde{W}_2^n[0, \pi]$. При этом для оценок удобно использовать равенства

$$\left.\begin{aligned} a(\tau, t) &= \nu_0(\tau, t) + \sum_{k=1}^{N} (\nu_k(\tau, t) - \lambda_k(\tau, t)), \\ c(\tau, t) &= -2\left\{\nu_0(\tau, t)^2 + \sum_{k=1}^{N} (\nu_k(\tau, t)^2 - \lambda_k(\tau, t)^2)\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{4.3.28}$$

вытекающие из формул Ньютона для корней полиномов и равенств (4.3.26), а также соотношение

$$\nu_0(t) + \sum_{k=1}^{N} (\nu\ (t) + \lambda_k(t)) = \mu_0 + \sum_{j=0}^{N} (\mu_j^- + \mu_j^+), \tag{4.3.29}$$

получающееся в результате сравнения коэффициентов при z^{2N} в тождестве (4.3.27). Для оценки функции $b(\tau, t)$ можно воспольлзоваться интерполяционной формулой

$$U_{N-1}(z) = R_N(z) \sum_{k=1}^{N} \frac{U_{N-1}(\lambda_k)}{(z-\lambda_k)\, R'_N(\lambda_k)}$$

и равенством

$$U_{N-1}(\lambda_k)^2 = -T_{2N+1}(\lambda_k), \tag{4.3.30}$$

вытекающим из тождества (4.3.27), если в нем вместо z подставить корень λ_k полинома R_N. Сопоставляя равенства (4.3.28), (4.3.29), получаем еще одну удобную формулу:

$$a(\tau, t) = \mu_0 + \sum_{j=1} \{\mu_j^- + \mu_j^+ - 2\lambda_j(\tau, t)\} = 2[m + r_{N-1}(\tau, t)], \tag{4.3.31}$$

где $2m$ — постоянная величина,

$$2m = \mu_0 + \sum_{j=1}^{N} \{\mu_j^- + \mu_j^+\}, \tag{4.3.31'}$$

а функция $r_{N-1}(\tau, t) = -\sum_{j=1}^{N} \lambda_j(\tau, t)$ — коэффициент при z^{N-1} у полинома R_N. Конечно, равенства (4.3.28), (4.3.29), (4.3.31) являются не чем иным, как частными случаями формул следов, но они сохраняются и в том случае, когда U_{N-1}, R_N, W_{N+1} — произвольные полиномы, удовлетворяющие системам дифференциальных уравнений (4.3.23), (4.3.24).

Из систем (4.3.23), (4.3.24) вытекают также автономные дифференциальные уравнения, описывающие движения корней λ_j, ν_l полиномов R_N, W_{N+1}. Действительно, разделив обе части тех уравнений в них, которые содержат производные полинома R_N, на этот же полином и вычислив затем вычеты получившихся рациональных дробей в точках $z = \lambda_k$, придем к таким равенствам:

$$\dot{\lambda}_k = 4(a + 2\lambda_k)\, U_{N-1}(\lambda_k;\ \tau,\ t) \prod_{j \neq k} (\lambda_k - \lambda_j)^{-1}, \tag{4.3.32}$$

$$\lambda'_k = 2U_{N-1}(\lambda_k;\ \tau,\ t) \prod_{j \neq k} (\lambda_k - \lambda_j)^{-1}, \tag{4.3.32'}$$

где $\prod_{j \neq k} (\lambda_k - \lambda_j) = \frac{d}{dz} R_N \big|_{z=\lambda_k}$. Эти равенства на самом деле являются системами автономных дифференциальных уравнений для корней $\lambda_k(\tau, t)$, так как функция $a(\tau, t)$ выражается через них по формуле (4.3.31), а функция $U_{N-1}(\lambda_k, \tau, t)$ — с помощью равенства (4.3.30). Совершенно аналогично можно получить дифференциальные уравнения для корней $\nu_l(\tau, t)$ полинома W_{N+1}:

$$\dot{\nu}_l = -2(c - 2a\nu_l + 4\nu_l^2)\, U_{N-1}(\nu_l;\ \tau,\ t) \prod_{j \neq l} (\nu_l - \nu_j)^{-1},$$

$$\nu_l' = -2(\nu_l - a)\,U_{N-1}(\nu_l;\ \tau,\ t)\prod_{j\neq l}(\nu_l - \nu_j)^{-1},$$

$$c = 4\{-m^2 + m w_N(\tau,\ t) - m_1 + w_{N-1}(\tau,\ t)\},$$

где $2m_1$ — коэффициент при z^{2N-1} полинома T_{2N+1}, а $w_N(\tau,\ t)$, $w_{N-1}(\tau,\ t)$ — коэффициенты при z^N, z^{N-1} полинома W_{N+1}, выражающиеся через его корни по формулам Ньютона.

Отметим в заключение, что из приведенного выше метода решения задачи (4.3.16), (4.3.16′), очевидно, вытекает, что автономные системы, получающиеся из систем (4.3.23′), (4.3.24′), совместны, т. е. вполне интегрируемы. Поэтому, решая их при произвольных начальных полиномах $U_{N-1}(z)$, $R_N(z)$, $W_{N+1}(z)$, удовлетворяющих единственному условию: коэффициенты при старших степенях z у полиномов $R_N(z)$, $W_{N+1}(z)$ равны единице, получаем функцию $a(x,\ t) = r_{N-1}(x,\ t) - w_N(x,\ t)$, которая обязательно является решением уравнения КдФ, поскольку оно эквивалентно, как легко видеть, совместности систем (4.3.23), (4.3.24). Разумеется, эти утверждения можно проверить непосредственно и получить те же результаты, нигде не используя какие бы то ни было понятия спектральной теории. Такой путь особенно полезен, когда трудно разобраться в спектральных свойствах оператора L (например, если это несамосопряженный оператор или параметр z входит в него сложно и т. п.). Основным наводящим соображением остается принцип полиномиального замыкания.

Задачи

1. Пусть $v(x,\ t)$—бесконечно дифференцируемое периодическое ($v(x,\ t) = v(x+\pi,\ t)$) решение уравнения $K_m[v] = 0$ (в частности, уравнения КдФ). Доказать, что интегралы $\int\limits_0^\pi \sigma_k(x;\ t)\,dx$ сохраняются, т. е. не зависят от t.

Указание. Матрицы перехода U семейства операторов (4.3.4), порождаемого периодическим решением $v(x,\ t)$ уравнения $K_m[v] = 0$, удовлетворяют уравнению $\dot U = [U, A_m]$, из которого вытекает независимость $\operatorname{Sp} U = u_+(\sqrt{z})$ от t. Выражая с помощью равенств (1.4.24), (1.4.24′) дискриминант Хилла $u_+(\lambda) = \frac{1}{2}[c(\lambda,\ \pi) + s'(\lambda,\ \pi)]$ через решения $y(\lambda,\ x)$, $y(-\lambda,\ x)$, получаем

$$2u_+(\lambda) = y(\lambda,\ \pi)\left[1 + \frac{\sigma(\lambda,\ \pi) - \sigma(\lambda,\ 0)}{\omega(\lambda,\ 0)}\right] + y(-\lambda,\ \pi)\left[1 + \frac{\sigma(-\lambda,\ 0) - \sigma(-\lambda,\ \pi)}{\omega(\lambda,\ 0)}\right] =$$

$$= y(\lambda,\ \pi)\,[1 + O(\lambda^{-n-1})] + y(-\lambda,\ \pi)\,[1 + O(\lambda^{-n-1})],$$

так как $\sigma(\lambda, \pi) - \sigma(\lambda, 0) = O(\lambda^{-n-1})$ в силу периодичности потенциала. Поэтому

$$0 = \frac{d}{dt} 2u_+(\lambda) = y(\lambda, \pi) \, [1 + O(\lambda^{-n-1})] \times$$

$$\times \frac{d}{dt} \int_0^\pi \sigma(\lambda, x; t)\, dx + y(-\lambda, \pi)[1 + O(\lambda^{-n-1})] \frac{d}{dt} \int_0^\pi \sigma(-\lambda, x; t)\, dx,$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_0^\pi \sigma(\lambda, x; t)\, dx = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi \sigma_k(x; t)\, dx\, (2i\lambda)^{-k} + O(\lambda^{-n-1}), \\ &y(\lambda, \pi) = \exp\left(i\lambda\pi + \int_0^\pi \sigma(\lambda, x; t)\, dx \right), \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.33)$$

что возможно лишь в том случае, когда

$$\frac{d}{dt} \int_0^\pi \sigma_k(x; t)\, dx = 0.$$

2. Если функция $v(x, t) \equiv v(x)$ не зависит от t, то уравнение $K_n[v] = 0$, порождаемое допустимым полиномом $N_n(z, x)$, превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение $(2n + 1)$-го порядка

$$\widetilde{K}_n[v] \equiv N_n''' - 4N_n'(v - z) - 2N_n v' = 0 \qquad (4.3.34)$$

для функции $v(x)$. В этом частном случае из теоремы 4.3.1 следует, что функция $v(x)$ удовлетворяет в сегменте $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ уравнению вида (4.3.34) тогда и только тогда, когда матрица перехода $U(2, 1)$ порождаемого ею оператора вида (4.3.4) удовлетворяет равенству $U(2,1)\, B^{(1)} - B^{(2)} U(2,1) = 0$, где $B^{(i)}$ — полиномиально зависящие от z матрицы и $B^{(1)} = A_n(1)$, $B^{(2)} = A_n(2)$. Пользуясь этим следствием теоремы 4.3.1, доказать, что периодическая функция $v(x)$ тогда и только тогда является m-зонным потенциалом, когда она удовлетворяет уравнению вида (4.3.34), причем $m \leqslant n + 1$.

Указание. Если $v(x)$ — m-зонный потенциал, то, как было показано выше, $U(2, 1) = u_+(\sqrt{z})\, I + d(z)\, P_{m+1}(z)$, где $P_{m+1}(z)$ — полиномиальная относительно z матрица. Поэтому $U(2,1)\, P_{m+1} - P_{m+1} U(2,1) = 0$, откуда, согласно следствию теоремы 4.3.1, вытекает, что функция $v(x)$ удовлетворяет уравнению вида (4.3.34). Наоборот, если периодическая функция $v(x)$ удовлетворяет уравнению (4.3.4), то соответствующая ей матрица перехода $U(2, 1)$ удовлетворяет равенству $U(2, 1)\, A_n(1) - A_n(2) \times U(2,1) = 0$, причем $A_n(1) = A_n(2)$ в силу периодичности. Так как

$$A_n(1) = \begin{pmatrix} -N_n' & 2N_n \\ 2N_n(v - z) - N_n'' & N_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{m-1} & R_m \\ -W_{m+1} & -U_{m-1} \end{pmatrix} q(z) = P_{m+1} q,$$

где $q(z)$ — общий делитель элементов матрицы $A_n(1)$, то $[V, P_{m+1}] = 0$, где $U(2, 1) = u_+(\sqrt{z})\, I + V$, $m \leqslant n$ и

$$V = \begin{pmatrix} u_- & s \\ c' & -u_- \end{pmatrix}.$$

Равенство $[V, P_{m+1}] = 0$ эквивалентно трем скалярным:

$$-sW_{m+1} = R_m c', \quad u_- R_m = sU_{m-1}, \quad c'U_{m-1} = -u_- W_{m+1},$$

из которых следует, что $s = R_m d$, $c' = -W_{m+1} d$, $u_- = U_{m-1} d$ и, значит,

$$1 - u_+ (\sqrt{z})^2 = -u_-^2 - c's = (-U_{m-1}^2 + W_{m+1} R_m) d^2,$$

где $d = d(z)$ — некоторая целая функция, а $T_{2m+1}(z) = -U_{m-1}^2 + W_{m+1}R_m$ — полином степени $2m+1$. Поэтому уравнение $1 - u_+ (\sqrt{z})^2 = 0$ имеет только $2m + 1$ простой корень и функция $v(x)$ является $(m + 1)$-зонным потенциалом.

3. Пусть периодическая функция $v_0(x)$ удовлетворяет уравнению $K_l[v] = 0$ и, следовательно, является конечнозонным потенциалом. Доказать, что решение $v(x, t)$ периодической задачи Коши для любого уравнения $K_m[v] = 0$ с начальными данными $v(x, 0) = v_0(x)$ при каждом t удовлетворяет этому же уравнению, т. е. множество периодических решений уравнения $K_l[v] = 0$ является инвариантным многообразием для любого уравнения $K_m[v] = 0$.

Указание. Матрицы перехода операторов (4.3.4), порождаемых решением $v(x, t)$, имеют вид $U = u_+(\sqrt{z}) I + d(z) P_{l+1}(z, t)$, где функции $u_+(\sqrt{z})$, $d(z)$ не зависят от t, а правые верхние элементы $R_l(z, t)$ матриц $P_{l+1}(z, t)$ являются полиномами l-й степени, причем для решения $s(\sqrt{z}, x; t)$ уравнения $-y'' + v(x, t) y = zy$ справедливо равенство $s(\sqrt{z}, \pi; t) = R_l(z, t) d(z)$.

Очевидно, $[U, P_{l+1}] = 0$, и по теореме 4.3.1 функции $v(x, t)$ удовлетворяют уравнениям $\tilde{K}_l[v] = \tilde{K}\{Q_l(z, t)\}[v] = 0$, где $Q_l(z, t) = \operatorname{Reg}\{R_l(z, t) \times N_\infty(v(0, t), z)\}$, так что доказываемое утверждение эквивалентно равенству

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Reg}\{R_l(z, t) N_\infty(v(0, t), z)\} = 0$$

(см. замечание к теореме 4.3.1). Согласно (1.4.24)

$$s(\sqrt{z}, \pi; t) = \frac{y(\sqrt{z}, \pi; t) - y(-\sqrt{z}, \pi; t)}{\omega(\sqrt{z}, 0; t)} = R_l(z, t) d(z)$$

и, значит,

$$R_l(z, t) \frac{\omega(\sqrt{z}, 0; t)}{2i\sqrt{z}} = \frac{y(\sqrt{z}, \pi; t) - y(-\sqrt{z}, \pi; t)}{y(\sqrt{z}, \pi; 0) - y(-\sqrt{z}, \pi; 0)} \times$$

$$\times R_l(z, 0) \frac{\omega(\sqrt{z}, 0; 0)}{2i\sqrt{z}}. \qquad (4.3.35)$$

Из формулы (1.4.22) следует, что при достаточно больших n

$$\operatorname{Reg}\left\{R_l(z, t) \frac{\omega(\sqrt{z}, 0; t)}{2i\sqrt{z}}\right\} = \operatorname{Reg}\{R_l(z, t) N_\infty(v(0, t), z)\},$$

а из равенств (4.3.33), (4.3.35) и независимости $\int\limits_0^\pi \sigma_k(x;\ t)\,dx$ от t —

$$\operatorname{Reg}\left\{R_l(z,\ t)\,\frac{\omega(\sqrt{z},\ 0;\ t)}{2i\sqrt{z}}\right\} = \operatorname{Reg}\left\{R_l(z,\ 0)\,\frac{\omega(\sqrt{z},\ 0;\ 0)}{2i\sqrt{z}}\right\}.$$

Поэтому

$$\operatorname{Reg}\{R_l(z,\ t)\,N_\infty(v(0,\ t),\ z)\} = \operatorname{Reg}\{R_l(z,\ 0)\,N_\infty(v(0,\ 0),\ z)\}$$

и $\tilde{K}\{Q_l(z,\ t)\} \equiv \tilde{K}\{Q_l(z,\ 0)\}$, что и требовалось доказать.

4. Свести интегрирование операторного уравнения в частных производных

$$B\,\frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} - 2\Omega^3 = 0 \qquad (4.3.36)$$

(см. задачу 1 § 1 гл. 4) к интегрированию совместных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Указание. Если $\Omega(x,\ t)$ — периодическое решение уравнения (4.3.36), то операторы перехода $U = U(2,\ 1;\ \tau,\ t,\ z)$ семейства уравнений $L[Y] = 0$,

$$L = \frac{d}{dx} - B\Omega(x+\tau,\ t) + Bz,$$

удовлетворяют такой совместной системе уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial\tau} = [U,\ A_1], \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = [U,\ A_2],$$

где $A_1 = Bz - B\Omega$, $A_2 = 2Bz^2 - 2B\Omega z + \Omega' + B\Omega^2$. Используя эти уравнения как наводящее соображение, рассматриваем произвольную систему вида

$$\frac{\partial P}{\partial\tau} = [P,\ B_1], \qquad \frac{\partial P}{\partial t} = [P,\ B_2], \qquad (4.3.37)$$

где $B_1 = Bz - BC$, $B_2 = 2Bz^2 - 2BCz + D + BC^2$ и $C = C(\tau,\ t)$, $D = D(\tau, t)$ — некоторые операторнозначные функции, удовлетворяющие условиям $BC + CB = 0$, $BD + DB = 0$. Требование существования у этой системы полиномиального решения

$$P = \sum_{k=0}^{N} P_k(\tau,\ t)\,z^k$$

приводит к равенствам

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau}P_k &= [P_{k-1},\ B] - [P_k,\ BC], \\ \frac{\partial P_k}{\partial t} &= [P_{k-2},\ 2B] - [P_{k-1},\ 2BC] + [P_k,\ D + BC^2], \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.38)$$

которые здесь играют ту же роль, что и равенства (4.3.24′), (4.3.23′) для уравнения КдФ. Равенства (4.3.38) при $k = N+2,\ N+1,\ N$ сводятся к алгебраическим равенствам

$$0 = [P_N,\ B], \qquad \frac{\partial P_N}{\partial\tau} = [P_{N-1},\ B] - [P_N,\ BC],$$

$$0 = [P_N,\ 2B], \quad 0 = [P_{N-1},\ 2B] - [P_N,\ 2BC],$$

$$\frac{\partial P_N}{\partial t} = [P_{N-2},\ 2B] - [P_{N-1},\ 2BC] + [P_N,\ D + BC^2],$$

выполнение которых необходимо и достаточно для существования полиномиального по z решения у каждого из уравнений (4.3.37) и которым можно удовлетворить, полагая $P_N = B$, $C = \frac{1}{2}[B,\ P_{N-1}]$, $D = B\left\{[P_{N-2},\ B] - \frac{1}{2}[P_{N-1},\ B[B,\ P_{N-1}]]\right\}$. Подставляя найденные выражения для P_N, C, D в уравнения (4.3.38), получаем две автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $P_{N-1}, P_{N-2}, \ldots, P_1, P_0$. Совместность их проверяется непосредственно: поскольку правые части являются простыми полиномами от неизвестных, по теореме Фробениуса доказательство совместности сводится к проверке несложного алгебраического тождества. Локальная разрешимость очевидна. Наконец, доказать, что операторнозначная функция $\Omega(\tau,\ t) = \frac{1}{2}[B,\ P_{N-1}(\tau,\ t)]$ (после замены τ на x) удовлетворяет уравнению (4.3.36), проще всего, опираясь на установленную совместность уравнений (4.3.37).

5. Свести интегрирование операторного уравнения (4.1.20) к интегрированию совместных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. *Указание.* См. задачу 3 § 1 настоящей главы.

§ 4. Явные формулы для периодических решений уравнения Кортевега — де Фриса

В предыдущем параграфе установлено, что решение $v(x,\ t)$ задачи Коши (4.3.16), (4.3.16′) с конечнозонным начальным потенциалом существует, причем согласно (4.3.20), (4.3.31)

$$v(x,\ t) = \mu_0 + \sum_{j=1}^{N} \{\mu_j^- + \mu_j^+ - 2\lambda_j(x,\ t)\}, \tag{4.4.1}$$

а подлежащие определению функции $\lambda_j(\tau,\ t)$ (корни полинома R_N) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (4.3.32), (4.3.32′). Входящие в эти уравнения функции $U_{N-1}(\lambda_k(\tau,\ t);\ \tau,\ t)$ нужно выразить через $\lambda_k(\tau,\ t)$, используя равенство (4.3.30), которое, однако, позволяет найти их лишь с точностью до знака. Для того чтобы избавиться от этой неоднозначности, введем в рассмотрение риманову поверхность Γ функции $\sqrt{-T_{2N+1}(z)}$ и заменим уравнения (4.3.32), (4.3.32′) вытекающими из них уравнениями для точек поверхности Γ, лежащих над точками $\lambda_k(\tau, t)$. В качестве римановой поверхности Γ функции $\sqrt{-T_{2N+1}(z)}$ можно взять два листа z-плоскости с разрезами вдоль отрезков $[\mu_0,\ \mu_1^-]$, $[\mu_1^+,\ \mu_2^-]$, ..., $[\mu_{N-1}^+,\ \mu_N^-]$, $[\mu_N^+,\ \infty)$, края которых склеены крестнакрест. На этой двухлистной поверхности функция $\sqrt{-T_{2N+1}(z)}$ однозначна. Сопоставим теперь каждой паре $\lambda_k(\tau, t)$, $\operatorname{sign} U_{N-1}(\lambda_k(\tau, t); \tau, t)$ точку римановой поверхности $\gamma_k(\tau, t)$, лежащую над точкой $\lambda_k(\tau, t)$ на том листе, где

$$\operatorname{sign} U_{N-1}(\lambda_k(\tau, t); \tau, t) = \operatorname{sign}\sqrt{-T_{2N+1}(\gamma_k(\tau, t))}.$$

Из формулы (4.3.30) видно, что при таком сопоставлении $U_{N-1}(\lambda_k(\tau, t); \tau, t) = \sqrt{-T_{2N+1}(\gamma_k(\tau, t))}$ и уравнения (4.3.32), (4.3.32′) превращаются в дифференциальные уравнения

$$\dot{\gamma}_k = 4(a + 2\gamma_k)\sqrt{-T_{2N+1}(\gamma_k)}\prod_{j\neq k}(\gamma_k - \gamma_j)^{-1}, \tag{4.4.2}$$

$$\gamma_k' = 2\sqrt{-T_{2N+1}(\gamma_k)}\prod_{j\neq k}(\gamma_k - \gamma_j)^{-1} \tag{4.4.2′}$$

для точек γ_k поверхности Г, лежащих над точками λ_k.

Полученные уравнения можно проинтегрировать с помощью подстановки Абеля. Введем для этого на римановой поверхности Г канонические сечения a_k, b_k $(1 \leqslant k \leqslant N)$: a_k—замкнутый контур, лежащий на верхнем листе и охватывающий разрез $[\mu_{k-1}^+, \mu_k^-]$; b_k — замкнутый контур, который начинается на верхнем берегу разреза $[\mu_{k-1}^+, \mu_k^-]$, проходит по верхнему листу до верхнего берега разреза $[\mu_N^+, \infty)$, переходит на нижний лист, по которому возвращается в начальную точку (рис. 6).

На римановой поверхности Г функции $\sqrt{-T_{2N+1}(\gamma)}$ существует N линейно независимых дифференциалов Абеля

$$dU_j = \frac{C_j(\gamma)}{\sqrt{-T_{2N+1}(\gamma)}}\,d\gamma, \quad C_j(\gamma) = \sum_{p=0}^{N-1} c_j^{(p)}\gamma^p, \tag{4.4.3}$$

которые можно выбрать так, чтобы

$$\oint_{a_k} dU_j = \delta_{jk}, \qquad b_{jk} = \oint_{b_k} dU_j, \tag{4.4.4}$$

причем по теореме Римана матрица их b-периодов $B = (b_{jk})$ симметрична $(b_{jk} = b_{kj})$ и ее мнимая часть положительно определена (см., например, [24]). Отображение Абеля $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N) \to$ $\to (e_1, e_2, \ldots, e_N)$ определяется равенствами

$$e_j(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N) \equiv \sum_{k=1}^{N}\int_{\infty}^{\gamma_k} dU_j = \sum_{k=1}^{N} U_j(\gamma_k), \tag{4.4.5}$$

в которых знак $\equiv$ означает сравнение по модулю периодов абелевых дифференциалов dU_j. Получающиеся при таком отображении функции $e_j(\gamma_1(\tau, t), \ldots, \gamma_N(\tau, t))$ линейно зависят от τ и t, если точки $\gamma_1(\tau, t), \ldots, \gamma_N(\tau, t)$ удовлетворяют уравнениям (4.4.2), (4.4.2′). Действительно, согласно (4.4.3), (4.3.31), (4.4.5)

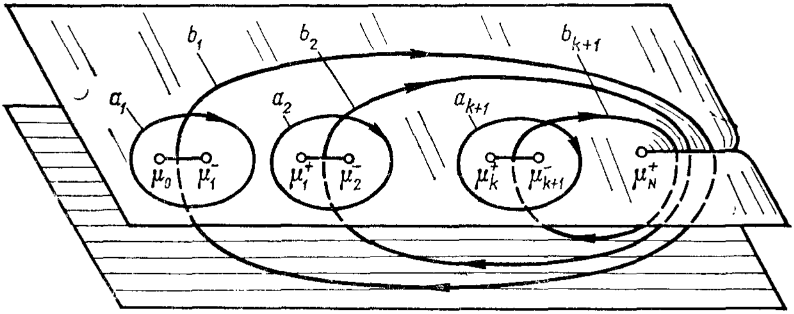

Рис. 6.

$$\frac{\partial e_j}{\partial t}=\sum_{k=1}^{N}\frac{C_j(\gamma_k)}{\sqrt{-T(\gamma_k)}}\dot{\gamma}_k=4\sum_{k=1}^{N}C_j(\gamma_k)\,[a+2\gamma_k]\prod_{j\neq k}(\gamma_k-\gamma_j)^{-1}=$$

$$=4\sum_{k=1}^{N}\frac{C_j(\gamma_k)\,[a+\gamma_k]}{R_N'(\gamma_k)}=8\sum\operatorname{Res}\frac{C_j(\gamma)\,[m+r_{N-1}+\gamma]}{R_N(\gamma)},$$

$$\frac{\partial e_j}{\partial \tau}=\sum_{k=1}^{N}\frac{C_j(\gamma_k)}{\sqrt{-T_{2N+1}(\gamma_k)}}\gamma_k'=2\sum_{k=1}^{N}\operatorname{Res}\frac{C_j(\gamma)}{R_N(\gamma)},$$

и так как в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\frac{C_j(\gamma)\,[m+r_{N+1}+\gamma]}{R_N(\gamma)}=c_j^{(N-1)}+(mc_j^{(N-1)}+c_j^{(N-2)})\,\gamma^{-1}+O(\gamma^{-2}),$$

$$\frac{C_j(\gamma)}{R_N(\gamma)}=\frac{(c_j^{(N-1)}\gamma^{N-1}+c_j^{(N-2)}\gamma^{N-2}+\cdots)}{\gamma^N+r_{N-1}\gamma^{N-1}+\cdots}=c_j^{(N-1)}\gamma^{-1}+O(\gamma^{-2}),$$

то частные производные

$$\frac{\partial e_j}{\partial t}=8\,(mc_j^{(N-1)}+c_j^{(N-2)}),\qquad \frac{\partial e_j}{\partial \tau}=2c_j^{(N-1)}$$

не зависят от τ, t, а функции $e_j(\gamma_1(\tau, t), \ldots, \gamma_N(\tau, t))$ зависят от них линейно. Следовательно, точки $\gamma_k(\tau, t)$ $(1\leqslant k\leqslant N)$ удовлетворяют системе уравнений

$$e_j(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N)\equiv g_j\tau+v_jt+p_j\quad (1\leqslant j\leqslant N), \tag{4.4.6}$$

в которых для краткости приняты такие обозначения:

$$g_j=2c_j^{(N-1)},\quad v_j=8\,(mc_j^{(N-1)}+c_j^{(N-2)}),\quad p_j=\sum_{k=1}^{N}\int_{\infty}^{\gamma_k(0,0)}dU_j.$$

Таким образом, решение дифференциальных уравнений (4.4.2), (4.4.2′) сводится к определению функций $\gamma_k(\tau,\ t)$ из системы уравнений (4.4.6), т. е. к обращению отображения Абеля (4.4.5). Эта задача называется проблемой обращения Якоби. Ее решение было получено Б. Риманом с помощью введенной им (римановой) θ-функции, которая строится следующим образом. Сначала вводится θ-функция N комплексных переменных

$$\theta(\mathbf{z}) = \theta(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_N) = \sum_{\mathbf{k}} \exp i\pi \{(B\mathbf{k},\ \mathbf{k}) + 2(\mathbf{z},\ \mathbf{k})\},$$

где $\mathbf{z} = (z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_N)$, $\mathbf{k} = (k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_N)$ — N-мерный вектор с целочисленными координатами $k_j = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ B$ — матрица (4.4.4′) b-периодов рассматриваемой системы абелевых дифференциалов dU_j и $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ — обычное скалярное произведение. Из положительной определенности мнимой части матрицы B вытекает сходимость этого ряда, причем сумма его является целой функцией N комплексных переменных $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_N$. Функция $\theta(\mathbf{z})$ четна, $\theta(\mathbf{z}) = \theta(-\mathbf{z})$, и обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

$$\theta(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_p + 1,\ \ldots,\ z_N) = \theta(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_p,\ \ldots,\ z_N), \quad (4.4.7)$$

$$\theta(z_1 + b_{1p},\ z_2 + b_{1p},\ \ldots,\ z_N + b_{Np}) = \\ = \theta(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_N) \exp - i\pi\{b_{pp} + 2z_p\}. \quad (4.4.7')$$

Если в эту функцию вместо аргументов z_j подставить абелевы интегралы $U_j(\gamma) - e_j = \int\limits_{\infty}^{\gamma} dU_j - e_j$ $(1 \leqslant j \leqslant N)$ $(e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_N$ — произвольные константы), то полученная функция

$$\theta_1(\gamma) = \theta(\mathbf{u}(\gamma) - \mathbf{e}) = \theta(U_1(\gamma) - e_1,\ \ldots,\ U_N(\gamma) - e_N) \quad (4.4.8)$$

будет, очевидно, голоморфной и однозначной на римановой поверхности Γ, разрезанной по каноническим сечениям $a_k,\ b_k$. Функция (4.4.8) называется θ-функцией Римана. Ее фундаментальное значение для решения проблемы обращения Якоби видно из следующей теоремы Римана.

Теорема. *Если θ-функция Римана (4.4.8) не обращается тождественно в нуль, то она имеет ровно N нулей $\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_N$ и*

$$\sum_{j=1}^{N} U_p(\gamma_j) \equiv e_p - k_p, \qquad k_p = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{N} b_{pj} - p\right) \quad (1 \leqslant p \leqslant N).$$

Из этой теоремы (доказательство см., например, в работах [9, 24]) и соотношений (4.4.6) следует, что точки $\gamma_k(\tau,\ t)$ будут нулями θ-функции Римана $\theta_1(\gamma) = \theta(\mathbf{u}(\gamma) - \mathbf{e})$, если положить

$$e_j = g_j\tau + v_j t + p_j - k_j. \quad (4.4.9)$$

Для отыскания решения $v(x,\ t)$ задачи Коши (4.3.16), (4.3.16′)

нужны не сами точки $\gamma_k(\tau,\ t)$, а сумма $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda(\gamma_k(\tau,\ t))$ их проекций $\lambda(\gamma_k(\tau, t)) = \lambda_k(\tau,\ t)$ на те точки комплексной плоскости, над которыми они лежат. По теореме о вычетах

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k(\tau,\ t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\widetilde{\Gamma}} \lambda(\gamma)\, d\ln\theta_1(\gamma) - \operatorname{Res}\{\lambda(\gamma)\, d\ln\theta_1(\gamma)\}\,|_{\gamma=\infty},$$

где $\widetilde{\Gamma}$ — область, которая получается из римановой поверхности Γ после рассечения ее по каноническим циклам a_k, b_k $(1 \leqslant k \leqslant N)$, а $\partial\widetilde{\Gamma} = \sum\limits_k \{a_k^+ - a_k^- + b_k^+ - b_k^-\}$ — ее граница, состоящая из левых $(a_k^+,\ b_k^+)$ берегов канонических сечений, пробегаемых по часовой стрелке, и правых $(-a_k^-,\ -b_k^-)$ берегов, пробегаемых против часовой стрелки. Интегрируя дифференциалы dU_j по циклам a_k^+, b_k^+, получаем согласно (4.4.4) равенства

$$U_j(\gamma)\,|_{a_k^+} - U_j(\gamma)\,|_{a_k^-} = -b_{kj}, \quad U_j(\gamma)\,|_{b_k^+} - U_j(\gamma)\,|_{b_k^-} = \delta_{kj},$$

из которых в силу (4.4.7), (4.4.7′) следует

$$\oint\limits_{a_k^+} \lambda(\gamma)\, d\ln\theta_1(\gamma) + \oint\limits_{-a_k^-} \lambda(\gamma)\, d\ln\theta_1(\gamma) = 2\pi i \oint\limits_{a_k^+} \lambda(\gamma)\, dU_k(\gamma),$$

$$\oint\limits_{b_k^+} \lambda(\gamma)\, d\ln\theta_1(\gamma) + \oint\limits_{-b_k^-} \lambda(\gamma)\, d\ln\theta_1(\gamma) = 0,$$

и, значит,

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k(\tau,\ t) = \sum_{k=1}^{N} \oint\limits_{a_k^+} \lambda(\gamma)\, dU_k(\gamma) - \operatorname{Res}\{\lambda(\gamma)\, d\ln\theta_1(\gamma)\}\,|_{\gamma=\infty}. \tag{4.4.10}$$

В окрестности бесконечно удаленной точки области $\widetilde{\Gamma}$ абелевы интегралы

$$U_j(\gamma) = i \int\limits_{-\infty}^{\gamma} \left(\sum_{p=0}^{N-1} c_j^{(p)} z^{p-N+1}\right)(1 - 2mz^{-1} + \ldots)^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{3}{2}}\, dz$$

разлагаются в ряды по нечетным степеням $s = \lambda(\gamma)^{-\frac{1}{2}}$:

$$U_j(\gamma) = -2i\,\{c_j^{(N-1)} s + \ldots\}. \tag{4.4.11}$$

Следовательно, функция $\ln\theta_1(\gamma)$ тоже разлагается в степенной ряд по s

$$\ln\theta_1(\gamma) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q_j s^j}{j!}, \quad q_j = \left.\frac{d^j \ln\theta_1(\gamma)}{ds^j}\right|_{s=0},$$

и в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\lambda(\gamma)\, d\ln\theta_1(\gamma) = s^{-2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q_j s^{j-1}}{(j-1)!}\,ds,$$

так что

$$\operatorname{Res}\{\lambda(\gamma)\, d\ln\theta_1(\gamma)\}\,|_{\gamma=\infty} = q_2 = \frac{d^2\ln\theta_1(\gamma)}{ds^2}\Bigg|_{s=0}. \tag{4.4.12}$$

Из определения θ-функции Римана через многомерную θ-функцию и формул (4.4.11) следует, что

$$\left|\frac{d^2\ln\theta_1(\gamma)}{ds^2}\right|_{s=0} = \left\{\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial^2\ln\theta(\mathbf{u}-\mathbf{e})}{\partial U_j\partial U_l}\frac{dU_j}{ds}\frac{dU_l}{ds} + \right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\ln\theta(\mathbf{u}-\mathbf{e})}{\partial U_j}\frac{d^2U_j}{ds^2}\right\}\Bigg|_{s=0} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} -4\,\frac{\partial^2\ln\theta(-\mathbf{e})}{\partial e_j\partial e_l}\,c_j^{(N-1)}c_l^{(N-1)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial^2\ln\theta(\mathbf{e})}{\partial e_j\partial e_l}\frac{\partial e_j}{\partial\tau}\frac{\partial e_l}{\partial\tau} = -\frac{d^2}{d\tau^2}\ln\theta(\mathbf{e}),$$

так как $\theta(\mathbf{e}) = \theta(-\mathbf{e})$ и согласно (4.4.9), (4.4.6) $\frac{\partial e_k}{\partial\tau} = g_k = 2c_k^{(N-1)}$. Наконец, сопоставляя равенства (4.4.1), (4.4.6), (4.4.9), (4.4.10) и (4.4.12), получаем окончательную формулу

$$v(x,\ t) = -2\frac{d^2}{dx^2}\ln\theta(\mathbf{g}x + \mathbf{v}t + \mathbf{w}) + C, \tag{4.4.13}$$

где $g_k = 2c_k^{(N-1)}$, $v_k = 8\left(mc_k^{(N-1)} + c_k^{(N-2)}\right)$, $w_k = \sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\infty}^{\gamma_j(0,0)} dU_k - \frac{1}{2}\times$ $\times\left(\sum_{j=1}^{N} b_{kj} - k\right)$, $C = \mu_0 + \sum_{j=1}^{N}\{\mu_j^- + \mu_j^+\} - 2\sum_{j=1}^{N}\oint\limits_{a_j^+}\lambda(\gamma)\,dU_j$. Эта формула получена для решений с конечнозонными начальными функциями. Однако из замечания, сделанного в конце предыдущего параграфа, следует, что функция (4.4.13) удовлетворяет уравнению КдФ во всей области ее существования при любом выборе полинома $T_{2N+1}(z)$ и точек $\gamma_k(0,0)$. Если у полинома $T_{2N+1}(z)$ нули вещественные и простые, а $\mu_k^- \leqslant \lambda(\gamma_k(0,\ 0)) \leqslant \mu_k^+$, то решение существует всюду и является почти периодической функцией. В других случаях могут быть самые разнообразные решения. Например, решения (4.2.20) получаются из формулы (4.4.13) в результате предельного перехода при $\mu_k^+ = \mu_{k+1}^-$ (см. [11]).

Литература

1. *Ахиезер Н. И.* Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов.— Докл. АН СССР, 1961, **141**, № 2, с. 263—266.
2. *Гасымов М. Г., Левитан Б. М.* Определение дифференциального оператора по двум спектрам.— Успехи мат. наук, 1964, **19**, вып. 2, с. 3—63.
3. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1951, **15**, вып. 4, с. 309—360.
4. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка.— Докл. АН СССР, 1953, **88**, № 4, с. 593—596.
5. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия.— Успехи мат. наук, 1976, **31**, вып. 1, с. 55—136.
6. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Периодическая задача для уравнений Кортевега — де Фриза и Штурма — Лиувилля. Их связь с алгебраической геометрией.— Докл. АН СССР, 1974, **219**, № 3, с. 531—534.
7. *Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.* Уравнение Кортевега — де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система.— Функц. анализ, 1971, **5**, вып. 4, с. 18—27.
8. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах.— ЖЭТФ, 1971, **61**, № 1, с. 118—134.
9. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций.— Успехи мат. наук, 1971, **26**, вып. 1, с. 113—179.
10. *Итс А. Р., Матвеев В. Б.* Об операторах Хилла с конечным числом лакун.— Функц. анализ, 1975, **9**, вып. 1, с. 69—70.
11. *Итс А. Р., Матвеев В. Б.* Об одном классе решения уравнения КдФ.— Пробл. мат. физики, 1976, № 8, с. 70—92.
12. *Лакс П.* Интегралы нелинейных уравнений эволюции и уединенные волны.— Математика, 1969, **13**, вып. 5, с. 128—150.
13. *Левин Б. Я.* Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка.— Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 2, с. 187—190.
14. *Левитан Б. М.* Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка и о разложении по собственным функциям. I.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1953, **17**, вып. 4, с. 331—364; 1955, **19**, вып. 1, с. 33—58.
15. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщенного сдвига. М., «Наука», 1973. 312 с.
16. *Марченко В. А.* Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка.— Докл. АН СССР, 1950, **72**, № 3, с. 457—460.
17. *Марченко В. А.* О формулах обращения, порождаемых линейным дифференциальным оператором второго порядка.— Докл. АН СССР, 1950, **74**, № 4, с. 657—660.

18. *Марченко В. А.* Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн.— Докл. АН СССР, 1955, **104**, № 5, с. 695—698.
19. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. К., «Наук. думка», 1972. 219 с.
20. *Марченко В. А.* Периодическая задача Кортевега — де Фриза.— Мат. сборник, 1974, **95**, вып. 3, с. 331—356.
21. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла.— Мат. сборник, 1975, **97**, вып. 4, с. 540—606.
22. *Новиков С. П.* Периодическая задача Кортевега — де Фриза. I.— Функц. анализ, 1974, **8**, вып. 3, с. 54—66.
23. *Повзнер А. Я.* О дифференциальных уравнениях типа Штурма — Лиувилля на полуоси.— Мат. сборник, 1948, **23**, вып. 65, с. 3—52.
24. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. М., Изд-во иностр. лит., 1960. 341 с.
25. *Фаддеев Л. Д.* Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера.— Труды Мат. ин-та АН СССР, 1964, **73**, с. 314—336.
26. *Borg G.* Eine Umkehrung der Sturm — Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. — Acta math., 1946, **78**, fasc. 1, p.1—96.
27. *Gardner C., Green J., Kruskal M., Miura R.* A method for solving the Korteweg — de Vries equation. — Phys. Rev. Letters, 1967, **19**, p. 1095—1098.
28. *Lax P. D.* Periodic solutions of the KdV equation. — Lectures Appl. Math., 1974, **15**, p. 85—96.