АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКОВА ДУМКА»
КИЕВ — 1974

517.2
М30

УДК 517.946

Различные процессы, протекающие в средах с инородными включениями, описываются решениями эллиптических краевых задач с теми или иными граничными условиями, задаваемыми на поверхностях этих включений. При большом числе включений области, в которых ставятся такие краевые задачи, имеют чрезвычайно сложную структуру, и даже при помощи численных методов практически невозможно найти их решения. Поэтому принципиальное значение приобретает вопрос о том, как и при каких условиях задачи такого типа можно свести к значительно более простым задачам для однородной среды и найти описывающие их уравнения. В монографии развивается общая математическая теория, дающая ответ на этот вопрос и охватывающая большое количество конкретных задач. В качестве иллюстрации рассмотрены ее приложения к некоторым задачам радиофизики, акустики, теории упругости и гидромеханики.

Книга предназначена для математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов. Она будет полезна также физикам, радиофизикам и механикам, интересующимся вопросами распространения волн в средах с большим числом мелких неоднородностей и аналогичными вопросами, возникающими в теории упругости и гидромеханике.

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук *М. С. Лившиц*,
д-р физ.-мат. наук *А. Д. Мышкис*

Редакция математики и кибернетики

$$М\,\frac{20203-264}{М221\,(04)-74}\,10-74$$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Монография посвящена некоторым математическим вопросам, возникающим при изучении процессов, описываемых решениями краевых задач в областях сложной структуры, граница которых, например, состоит из большого числа мелких непересекающихся компонент. Такие области мы называем областями с мелкозернистой границей. Сложная структура области не вносит дополнительных трудностей в доказательства теорем существования и единственности решений краевых задач. Однако при нахождении этих решений как точными, так и приближенными методами возникают непреодолимые трудности. Лишь привлекая различные физические соображения, иногда удается приближенно найти основные характеристики изучаемого процесса при помощи замены решений исходных задач решениями более простых задач. В одних случаях решения исходных дифференциальных уравнений с граничными условиями на сложной границе заменяются решениями измененных дифференциальных уравнеиий, рассматриваемых во всем пространстве. В других — сложная граница в исходной задаче заменяется сравнительно простой поверхностью, на которой задаются так называемые усредненные граничные условия. Найти решения измененных задач много проще, чем исходных, поскольку они рассматриваются либо во всем пространстве, либо в сравнительно простой области и главной трудности, связанной с наличием сложной границы, в них нет. Такой подход используется, например, прн решении некоторых задач радиофизики, реологии, гидромеханики, теории упругости. Анализ вопросов, возникающих при строгой трактовке этого подхода, позволил выделить четко поставленные, достаточно интересные и трудные математические задачи общего характера. В настоящей монографии излагаются результаты, полученные нами при разработке методов решения этих задач. В разработке методов принимали участие харьковские математики В. П. Котляров, В. А. Львов, В. Г. Михайленко, Е. П. Подольский, В. Г. Сологуб, Г. В. Сузиков, В. П. Фенченко.

Основному материалу предшествует довольно обширное введение, в котором после рассмотрения простейших примеров дается строгая постановка общей проблемы и намечаются пути ее решения. Попутно в упрощенном варианте вводятся основные понятия и определения, используемые в дальнейшем.

В первой главе изучается первая краевая задача в областях со сложной границей. Основным методом исследования является теория потеициала, при помощи которой для первой краевой задачи получены весьма полные результаты.

Во второй главе развиваются методы исследования краевых задач в областях с мелкозернистой границей, основанные на вариационных принципах и пригодные для уравнений высоких порядков, систем уравнений и для других типов граничных условий. Этими методами подробно изучается задача Дирихле для сильно эллиптических систем уравнений произвольного порядка.

Третья глава посвящена второй краевой задаче для эллиптических самосопряженных уравнений второго порядка в областях со сложной границей. Эта задача много труднее первой краевой задачи, и полученные результаты существенно менее полны.

В четвертой главе рассмотрены некоторые приложения и обобщения результатов первых трех глав: изучены начально-краевые задачи, краевые задачи для систем уравнений Максвелла и Навье—Стокса и краевая задача Дирихле в областях со случайной мелкозернистой границей.

Последняя глава носит характер дополнения и посвящена более специальным вопросам. В ней изучается вторая краевая задача для уравнения Гельмгольца, описывающая процесс прохождения волн через стенку с тонкими каналами.

В монографии отражены все существенные результаты, относящиеся к рассматриваемому кругу вопросов. Некоторые из них носят предварительный характер. Наиболее интересные нерешенные вопросы сформулированы во введении

В. А. Марченко,
Е. Я. Хруслов

ВВЕДЕНИЕ

Поясним сущность вопросов, возникающих при изучении краевых задач в областях с мелкозернистой границей, на простейших примерах.

Рассмотрим бесконечную мембрану, закрепленную на множествах $F_i^{(s)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, лежащих вблизи замкнутого контура Γ (рис. 1). Ясно, что энергия, создаваемая источниками колебаний внутри контура Γ, должна проникать сквозь систему препятствий $\bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$, поскольку части мембраны, расположенные внутри и вне Γ, взаимодействуют. Степень этого взаимодействия, очевидно, зависит от массивности препятствий $F_i^{(s)}$ и густоты их распределения. Пусть на мембрану действует периодическая сила $f(x, t) = f(x)\, e^{-i\omega t}$ и необходимо найти величину средней (за период) энергии E, излучаемой на бесконечность. Как известно, для этого нужно решить краевую задачу

$$\Delta u^{(s)}(x) + k^2 u^{(s)}(x) = f(x), \quad x \in R_2 \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}, \tag{1}$$

$$u^{(s)}(x) = 0, \quad x \in \bigcup_{i=1}^{s} \partial F_i^{(s)}, \tag{2}$$

где $k^2 = \dfrac{\omega^2}{v^2}$, v — скорость распространения возмущений в мембране; функция $u^{(s)}(x)$ на бесконечности должна удовлетворять соответствующим условиям излучения. Энергия E определяется по формуле [1]

$$E = \operatorname{Im} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu}\, \overline{u^{(s)}}\, d\Gamma, \tag{3}$$

где Γ_R — произвольная окружность радиуса R, внутри которой лежат все $F_i^{(s)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по внешней нормали к Γ_R.

[1] Можно показать, что при $\operatorname{Im} k = 0$ E не зависит от Γ_R.

Если число препятствий $F_i^{(s)}$ велико ($s \gg 1$), а диаметры их малы, то решение задачи (1), (2) ведет себя очень нерегулярно, претерпевая вблизи $F^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ резкие изменения. Поэтому численное нахождение его связано с известными трудностями (нет необходимости говорить о том, что аналитически решение можно найти лишь в исключительных случаях). Однако, как видно из формулы (3), в данном случае интерес представляют лишь значения $u^{(s)}(x)$ на некотором расстоянии от $\bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$. В связи с этим естественно поставить такой вопрос: нельзя ли приближенно найти $u^{(s)}(x)$ вдали от Γ более простым способом, минуя решение исходной задачи (1), (2).

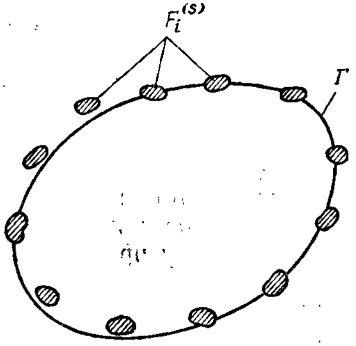

Рис. 1.

Интуитивно понятно, что если препятствий $F_i^{(s)}$ ($i = 1, 2, \ldots, s$) достаточно много ($s \gg 1$), диаметры их малы и расположены они близко к контуру Γ, то влияние $\bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ можно учесть, вводя на всем контуре Γ некоторые граничные условия (условия сопряжения), и затем, решив исходное уравнение (1) в области $R_2 \setminus \Gamma$ при этих условиях на Γ, получить приближенное решение задачи (1), (2). При этом можно ожидать, что приближение будет тем точнее, чем мельче препятствия и чем ближе они находятся от Γ. Так, если при $s \to \infty$ диаметры множеств $F_i^{(s)}$ стремятся к нулю, а сами они приближаются к Γ, то при правильном выборе условий сопряжения на Γ решение $u^{(s)}(x)$ задачи (1), (2) должно сходиться к решению $u(x)$ соответствующей задачи сопряжения. Как показано ниже, в данном случае такая задача сопряжения имеет вид

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = f(x), \quad x \in R_2 \setminus \Gamma, \tag{4}$$

$$u^+(x) = u^-(x), \quad \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)^+ - \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)^- = c_\Gamma(x)\, u(x), \quad x \in \Gamma. \tag{5}$$

Здесь знаками «+» и «—» отмечены предельные значения функций с разных сторон Γ, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по нормали к Γ, направленной в сторону, которой соответствует знак «+», $c_\Gamma(x)$ — гладкая функция на Γ, определяемая из соотношения

$$\int\limits_\gamma c_\Gamma(x)\, d\Gamma \sim 2\pi \sum_{(\gamma)} \frac{1}{|\ln d_i^{(s)}|}, \tag{6}$$

где $d_i^{(s)}$ — диаметры множеств $F_i^{(s)}$, γ — произвольный кусок контура Γ (длина его должна быть много больше $d_i^{(s)}$), сумма $\sum\limits_{(\gamma)}$ распространяется на те $F_i^{(s)}$, проекции которых на Γ попадают внутрь γ.

Очевидно, решить задачу (4), (5) (численно или аналитически, если это возможно) проще, чем исходную задачу (1), (2), поскольку область $R_2 \setminus \Gamma$, в которой она рассматривается, имеет вид более простой, чем область $R_2 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$. После этого, подставляя решение $u(x)$ в формулу (3), можно приближенно найти излучаемую энергию E. Например, если в задаче (1), (2) мембрана закреплена на кружках $F_i^{(s)}$ диаметра d с центрами, лежащими на окружности Γ радиуса r на равных расстояниях l друг от друга, то

$$E \sim \frac{(Fl \ln d)^2}{\left| 2\pi^2 kr J_0(kr) H_0^{(1)}(kr) - 2il \ln \frac{1}{d} \right|^2},$$

где $F = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^r f(\theta, \rho) J_0(k\rho) \rho d\rho d\theta$, $f(x) = f(\theta, \rho)$; $J_0(x)$, $H_0^{(1)}(x)$ — цилиндрические функции Бесселя и Ханкеля.

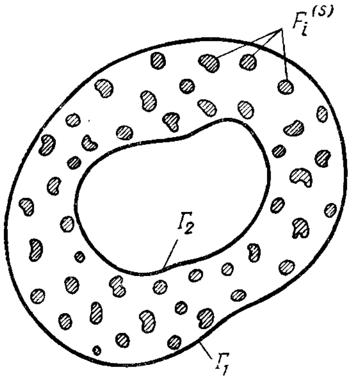

Рис. 2.

Рассмотрим теперь случай, когда препятствия $F_i^{(s)}$ не концентрируются вблизи контура Γ, а разбросаны в некоторой области $G \subset R_2$, например в полосе, лежащей между кривыми Γ_1 и Γ_2 (рис. 2). Как и раньше, нас интересует поведение решения задачи (1), (2) на удалении от G. Очевидно, и в этом случае функция $u(x)$, которая аппроксимирует решение задачи, вне области G должна удовлетворять исходному уравнению, но внутри области уравнение изменится. Оказывается, если диаметры $d_i^{(s)}$ множеств $F_i^{(s)}$ $(i \leqslant s,\ s \gg 1)$ достаточно малы и для любого круга K диаметра d $(d_i^{(s)} \ll d \ll 1)$ справедливо равенство

$$\int\limits_K c(x)\,dx \sim 2\pi \sum_{F_i^{(s)} \subset K} \frac{1}{|\ln d_i^{(s)}|}, \tag{7}$$

то в качестве функции $u(x)$ нужно взять решение уравнения

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) - c(x)\,u(x) = f(x)$$

во всем пространстве R_2 с теми же условиями излучения на бесконечности, что и в исходной задаче (1), (2). Ясно, что нахождение функции $u(x)$ — задача значительно более простая, чем решение задачи (1), (2) в сильно изрезанной области $R_2 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$.

Мы рассмотрели случай жесткого закрепления мембраны на множествах $F_i^{(s)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Аналогичные вопросы возникают и в тех случаях, когда мембрана свободна на границе области

$R_2 \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$. Колебания такой мембраны описываются второй краевой задачей

$$\Delta u^{(s)}(x) + k^2 u^{(s)}(x) = f(x), \quad x \in R_2 \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u^{(s)}(x)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \bigcup_{i=1}^{s} \partial F_i^{(s)}. \tag{9}$$

Эта задача более трудная для подобных исследований (соответствующие предельные условия сопряжения и уравнения см. ниже). В трехмерном пространстве краевой задачей (8), (9) описывается процесс прохождения звуковых волн, возбуждаемых источниками $f(x)$, через пористую стенку $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$. И здесь, как правило, интерес представляют лишь отраженная от стенки и прошедшая через нее энергии волн (коэффициенты отражения и прохождения), т. е. фактически поведение решения задачи вдали от $F^{(s)}$. Поэтому при достаточно сильной изрезанности множества $F^{(s)}$ можно найти приближенное решение задачи путем замены исходного уравнения в области, где сосредоточено $F_i^{(s)}$, некоторым другим уравнением с последующим решением полученной краевой задачи в более простой области.

Аналогичные задачи возникают и в других ситуациях. Пусть, например, в области $\Omega \subset R_2$ расположена упругая пластинка, жестко закрепленная по внешнему контуру $\partial\Omega$ и на множествах $F_i^{(s)} \subset \Omega$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, лежащих либо вблизи некоторой кривой $\Gamma \subset \Omega$, либо в некоторой подобласти $\Omega' \subset \Omega$. Предположим, что нам надо определить первые собственные частоты такой пластинки. Как известно, эти частоты пропорциональны собственным числам краевой задачи

$$\Delta^2 u^{(s)}(x) = \lambda u^{(s)}(x), \quad x \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}, \tag{10}$$

$$u^{(s)}(x) = \frac{\partial u^{(s)}(x)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega \cup \left(\bigcup_{i=1}^{s} \partial F_i^{(s)} \right), \tag{11}$$

нахождение которых ввиду сильной «изрешеченности» области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ представляет значительные трудности. Однако если множеств закрепления $F_i^{(s)}$ достаточно много и они малы, то и в этом случае возможно усредненное описание задачи. Вводя на всей кривой Γ соответствующие условия сопряжения (или изменяя исходный оператор в области $\Omega' \subset \Omega$), мы приходим к другой задаче на собственные значения, рассматриваемой уже в более простой области. Так, если множества закрепления сконцентрированы вблизи Γ, эта задача имеет вид

$$\Delta^2 u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \tag{12}$$

$$u(x)=\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}=0,\quad x\in\partial\Omega, \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(x)=0,\quad \left(\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\right)^{+}=\left(\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\right)^{-},\\ &\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial\nu^2}\right)^{+}-\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial\nu^2}\right)^{-}=-2c_\Gamma(x)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu},\\ &x\in\Gamma,\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где функция $c_\Gamma(x)$ определяется из соотношения (6). При этом, если множества $F_i^{(s)}$ $(i=1, 2, \ldots, s;\ s\gg 1)$ достаточно измельчены, первые собственные числа задачи (10), (11) становятся близкими к первым собственным числам задачи (12) — (14). Если же множества закрепления распределены в подобласти $\Omega'\subset\Omega$, то аналогичную роль играет задача

$$\Delta^2 u(x)+2c(x)u(x)=\lambda u(x),\quad x\in\Omega,$$
$$u(x)=\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}=0,\quad x\in\partial\Omega,$$

где функция $c(x)$ определяется равенством (7).

Рассмотренные примеры показывают, что некоторые важные функционалы, определяемые краевыми задачами (такие, как коэффициенты прохождения и отражения, первые собственные частоты колебаний и др.), слабо зависят от поведения решений этих краевых задач вблизи множеств $F^{(s)}=\bigcup\limits_{i=1}^{s}F_i^{(s)}$. Поэтому такие функционалы приближенно могут быть найдены путем сведения краевой задачи к «усредненной» краевой задаче, рассматриваемой в более простой области. Оказывается, что и сами решения исходной краевой задачи в разумно выбранных метриках мало отличаются от решений «усредненных» задач.

Подобные замены краевых задач в областях сложной структуры другими краевыми задачами, рассматриваемыми в более простых областях, встречаются в различных разделах механики и физики. При этом препятствия $F^{(s)}$ могут иметь и более сложную структуру, чем рассмотренная выше (они могут быть, например, связны), но одна существенная особенность остается — множества $F^{(s)}$ всегда сильно «изрезаны». Описанный подход эффективно применяется при исследовании, например, распределения потенциала электрического поля в электронных приборах с густыми управляющими и экранными сетками [33]; дифракции волн различной природы на экранах с большим числом мелких дырок, на решетках с малым периодом, на облаке мелких частиц (антенны, кольцевые и спиральные волноводы, «искусственные диэлектрики») [20, 29, 40, 47]; деформации упругих сред с большим числом мелких неоднородностей (пустот, трещин и т. п.) [42].

Таким образом, область применимости «усредненных» граничных условий и уравнений весьма обширна. Вместе с тем при выводе их возникает ряд интересных и трудных математических вопросов, связанных с изучением асимптотического поведения решений краевых задач в областях вида $\Omega \setminus F^{(s)}$, когда множество $F^{(s)}$ становится все более «изрезанным». Эти вопросы и рассматриваются в монографии. Точная постановка основной ее проблемы такова. *В фиксированной области $\Omega \subset R_n$ рассматривается последовательность множеств $F^{(s)}$, зависящих от параметра s $(s = 1, 2, \ldots)$ так, что при $s \to \infty$ множество $F^{(s)}$ становится все более изрезанным и располагается либо в некоторой подобласти $\Omega' \subset \Omega$, либо в сколь угодно малой окрестности фиксированной гладкой поверхности $\Gamma \subset \Omega$. Требуется выяснить, при каких условиях существует предел $u(x)$ последовательности решений $u^{(s)}(x)$ соответствующих краевых задач, и найти этот предел.* Оказывается, что такие пределы (главные члены асимптотики решений $u^{(s)}(x)$) сами являются решениями некоторых других краевых задач, рассматриваемых в простых областях («усредненных» краевых задач). Выводу уравнений и граничных условий, которым удовлетворяют пределы $u(x)$ решений $u^{(s)}(x)$, а также нахождению наиболее общих условий сходимости $u^{(s)}(x)$ к $u(x)$ в монографии уделено основное внимание.

Приведенные примеры показывают, что наибольший интерес представляют два следующих основных вида множеств $F^{(s)}$: 1) при $s \to \infty$ множества $F^{(s)}$ распределяются в некоторой подобласти $\Omega' \subset \Omega$ (см. рис. 2); 2) при $s \to \infty$ множества $F^{(s)}$ концентрируются в сколь угодно малой окрестности фиксированной гладкой поверхности Γ, лежащей в Ω (см. рис. 1). В дальнейшем будем называть первый случай объемным распределением $F^{(s)}$, а второй — поверхностным.

Поскольку в монографии рассматриваются общие ситуации, доказательства во многих случаях довольно громоздки, что затемняет основную схему рассуждений. Для того чтобы по возможности компенсировать этот недостаток, рассмотрим некоторые простейшие случаи и дадим схематические доказательства, приводящие к основным понятиям и результатам.

§ 1. ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим функцию Грина $G(x, y, k)$ уравнения Гельмгольца

$$\Delta G(x, y, k) + k^2 G(x, y, k) = -\delta(x, y) \qquad (\operatorname{Im} k > 0) \qquad (15)$$

в области $\Omega^{(s)} = R_3 \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$, внешней по отношению к системе тел $F_i^{(s)}$, ограниченных гладкими поверхностями $\partial F_i^{(s)}$, на которых задается нулевое граничное условие

$$G(x, y, k) = 0, \quad x \in \bigcup_{i=1}^{s} \partial F_i^{(s)}. \tag{16}$$

Пусть последовательность множеств $\left\{F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}, s = 1, 2, \ldots\right\}$ такова, что диаметры компонент $F_i^{(s)}$ и расстояния от них до некоторой фиксированной поверхности Γ стремятся к нулю при $s \to \infty$ (см. рис. 1). Обозначим соответствующую последовательность функций Грина задач (15), (16) через $G^{(s)}(x, y, k)$.

Для формулировки условий, при которых существует предел

$$\lim_{s\to\infty} G^{(s)}(x, y, k) = G(x, y, k),$$

и для вывода граничного условия, которому будет удовлетворять предельная функция $G(x, y, k)$, нам прежде всего понадобится понятие емкости. Напомним, что емкостью $C(F)$ тела F, ограниченного гладкой поверхностью ∂F, называется величина массы, которую нужно разместить на ∂F, чтобы порождаемый ею потенциал (ньютонов) был равен единице на ∂F, т. е.

$$C(F) = \int_{\partial F} d\omega \quad \text{при} \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\partial F} \frac{d\omega(\xi)}{|x - \xi|} = 1, \quad x \in \partial F,$$

где $|x - \xi|$ — евклидово расстояние между точками $x, \xi \in \partial F$. Примем такие обозначения: $C_i^{(s)}$ — емкости тел $F_i^{(s)}$, $d_i^{(s)}$ — их диаметры, r_{ij} — расстояния между $F_i^{(s)}$ и $F_j^{(s)}$, $r_i^{(s)}$ — расстояния от $F_i^{(s)}$ до Γ.

Основной результат, относящийся к данной задаче, состоит в следующем [31, 67].

Теорема 1. *Пусть при $s \to \infty$ последовательность множеств $\left\{F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}, s = 1, 2, \ldots\right\}$ удовлетворяет таким условиям:*

a) $\lim_{s\to\infty} \{\max_i d_i^{(s)}\} = \lim_{s\to\infty} \{\max_i r_i^{(s)}\} = 0;$

b) функция $\delta(\rho) = \overline{\lim_{s\to\infty}} \left\{\max_j \sum_{\substack{i \neq j \\ r_{ij}^{(s)} \leq \rho}}^{i} \frac{C_i^{(s)}}{r_{ij}^{(s)}}\right\}$ *стремится к нулю при* $\rho \to 0$;

c) для любого куска γ поверхности Γ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{(\gamma)} C_i^{(s)} = \int_{\gamma} c_\Gamma(x)\, d\Gamma,$$

где сумма $\sum_{(\gamma)}$ распространяется на те $F_i^{(s)}$, проекции которых на Γ попадают внутрь γ, а $c_\Gamma(x)$ — некоторая непрерывная функция на Γ (предельная поверхностная плотность емкостей).

Тогда равномерно по x, y, лежащим на любом положительном расстоянии от Γ, последовательность функций Грина $G^{(s)}(x, y, k)$ сходится к функции $G(x, y, k)$, которая вне Γ удовлетворяет исходному уравнению (15), *а на поверхности Γ — условиям сопряжения*

$$\left.\begin{aligned} &G^{+}(x, y, k) = G^{-}(x, y, k) = G(x, y, k), \\ &\left(\frac{\partial G}{\partial \nu}\right)^{+} - \left(\frac{\partial G}{\partial \nu}\right)^{-} = c_\Gamma(x)\, G(x, y, k), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

знаками «+» и «—» отмечены предельные значения функций с разных сторон Γ, а ν — нормаль к Γ, направленная из стороны, которой соответствует знак «—», в сторону, которой соответствует знак «+». При $x \to \infty$ $G(x, y, k) \to 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $k = 0$. Пусть $G^{(s)}(x, y)$ — функция Грина задачи (15), (16) при $k = 0$. Согласно хорошо известным фактам теории потенциала [19]

$$G^{(s)}(x, y) = \frac{1}{4\pi\,|x - y|} - \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial F_i^{(s)}} \frac{d\omega_i^{(s)}(\xi, y)}{|x - \xi|}, \tag{18}$$

где $\omega_i^{(s)}(\xi, y)$ — некоторое распределение масс на поверхности $\partial F_i^{(s)}$ (неотрицательная мера) и интегрирование ведется по переменной $\xi \in \partial F_i^{(s)}$. Общую величину массы, сосредоточенной на $\partial F_i^{(s)}$, обозначим через $\omega_i^{(s)}$, т. е.

$$\omega_i^{(s)} = \omega_i^{(s)}(y) = \int\limits_{\partial F_i^{(s)}} d\omega_i^{(s)}(\xi, y).$$

Так как эти массы получились в результате выметания единичной массы из точки $y \in \Omega^{(s)}$ на границу области, то их сумма не превышает единицы,

$$\sum_{i=1}^{s} \omega_i^{(s)} \leqslant 1. \tag{19}$$

Поэтому можно выделить такую подпоследовательность $s_1, s_2, \ldots$ $\ldots, s_k$, что соответствующие ей меры $\omega_i^{(s)}(\xi, y)$ будут слабо сходиться к некоторой предельной мере $\omega(\xi, y)$, сосредоточенной, очевидно, на поверхности Γ [19]. Переходя в формуле (18) к пределу по этой подпоследовательности, получаем при $x, y \notin \Gamma$

$$G(x, y) = \lim_{s = s_k \to \infty} G^{(s)}(x, y) = \frac{1}{4\pi\,|x - y|} - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{d\omega(\xi, y)}{|x - \xi|}. \tag{20}$$

Легко показать, что сходимость равномерна по x, y, лежащим в любой области, находящейся на положительном расстоянии от Γ.

Из формулы (20) видно, что предельная функция $G(x, y, k)$ удовлетворяет всюду вне Γ уравнению

$$\Delta G(x, y) = -\delta(x, y). \tag{21}$$

Исследуем теперь ее поведение на поверхности Γ. Покажем, что $G(x, y)$ удовлетворяет всюду на Γ граничным условиям (17). Основное значение при этом имеет следующий простой факт: если на поверхности ∂F, ограничивающей тело F емкости C, распределена масса ω, порождающая непрерывный потенциал, то на ∂F найдется точка, в которой значение потенциала равно $\frac{\omega}{C}$ [31].

Из формулы (18) и граничного условия (16) видно, что потенциал массы $\omega_i^{(s)}$, распределенной на поверхности $\partial F_i^{(s)}$, непрерывен. Поэтому в соответствии с только что сформулированным утверждением найдется точка $x^{(i)} \in \partial F_i^{(s)}$, в которой он равен $\omega_i^{(s)}/C_i^{(s)}$. Подставляя в формуле (18) $x = x^{(i)}$ и учитывая (16), получаем

$$\frac{1}{4\pi\,|x^{(i)} - y|} = \frac{\omega_i^{(s)}}{C_i^{(s)}} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j \neq i} \int\limits_{\partial F_j^{(s)}} \frac{d\omega_j^{(s)}(\xi, y)}{|x^{(i)} - \xi|}. \tag{22}$$

Отсюда следует, что для любых i и s справедливо неравенство

$$\omega_i^{(s)} \leqslant C_i^{(s)} \frac{1}{4\pi\,|x^{(i)} - y|},$$

которое при достаточно больших s можно записать в виде

$$\omega_i^{(s)} \leqslant \frac{1}{2\pi d(y)} C_i^{(s)}, \tag{23}$$

где $d(y)$ — расстояние от полюса функции Грина до поверхности Γ. Поэтому, учитывая условие c теоремы 1, получаем

$$\varlimsup_{s \to \infty} \sum_{(\gamma)} \omega_i^{(s)} \leqslant \frac{1}{2\pi d(y)} \lim_{s \to \infty} \sum_{(\gamma)} C_i^{(s)} \leqslant M \int\limits_{\gamma} c_\Gamma(x)\, d\Gamma,$$

откуда следует, что предельная мера $\omega(\xi, y)$ имеет на поверхности Γ ограниченную плотность $\varphi(\xi, y)$ и для любого куска $\gamma \subset \Gamma$ существует предел

$$\lim_{s = s_k \to \infty} \sum_{(\gamma)} \omega_i^{(s)} = \int\limits_{\gamma} d\omega(\xi, y) = \int\limits_{\gamma} \varphi(\xi, y)\, d\Gamma_\xi. \tag{24}$$

Таким образом, формулу (20) можно записать в виде

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi\,|x - y|} - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi, y)}{|x - \xi|}\, d\Gamma_\xi. \tag{20'}$$

Из этой формулы и классических свойств потенциала простого слоя следует, что функция $G(x, y)$ непрерывна по x на поверхности Γ, т. е.

$$G^+(x, y) = G^-(x, y) = G(x, y), \quad x \in \Gamma,$$

и справедливость первого граничного условия доказана.

Выберем теперь на поверхности Γ произвольную точку x_0, произвольное положительное число $\rho < \frac{1}{4}$ и перепишем равенство (22) в виде

$$\frac{\omega_i^{(s)}}{C_i^{(s)}}=\frac{1}{4\pi\,|x_0-y|}-\sum_{\substack{j\\ r_{ij}^{(s)}\geqslant\rho^{1/3}}}\int\limits_{\partial F_j^{(s)}}\frac{d\omega_j^{(s)}(\xi,y)}{|x_0-\xi|}-\alpha_i^{(s)}-\beta_i^{(s)},\tag{22'}$$

где

$$\alpha_i^{(s)}=\sum_{\substack{j\neq i\\ r_{ij}^{(s)}<\rho^{1/3}}}\int\limits_{\partial F_j^{(s)}}\frac{d\omega_j^{(s)}(\xi,y)}{|x^{(i)}-\xi|}=\sum_{\substack{j\neq i\\ r_{ij}^{(s)}<\rho^{1/3}}}\frac{\omega_j^{(s)}}{r_{ij}^{(s)}}\theta_{ij}^{(s)}\qquad(0\leqslant\theta_{ij}^{(s)}\leqslant1),$$

$$\beta_i^{(s)}=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{|x_0-y|}-\frac{1}{|x^{(i)}-y|}\right\}-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{j\neq i\\ r_{ij}^{(s)}\geqslant\rho^{1/3}}}\int\limits_{\partial F_j^{(s)}}\left\{\frac{1}{|x_0-\xi|}-\frac{1}{|x^{(i)}-\xi|}\right\}d\omega_j^{(s)}(\xi,y).$$

Из неравенства (23) и условия b теоремы 1 следует, что равномерно по i

$$\varlimsup_{s\to\infty}\alpha_i^{(s)}\leqslant\frac{1}{2\pi d(y)}\,\delta(\rho^{1/3}).\tag{25}$$

Обозначим через $\sigma(t)$ кусок поверхности Γ, вырезаемый из нее сферой радиуса t с центром в точке x_0. Очевидно, начиная с некоторого s расстояния от точки x_0 до любой точки тела $F_i^{(s)}$, проектирующегося внутрь $\sigma(\rho)$, станут меньше 2ρ. Поэтому, учитывая (19), заключаем, что равномерно по всем i, для которых $F_i^{(s)}$ проектируются внутрь куска $\sigma(\rho)$,

$$\varlimsup_{s\to\infty}|\beta_i^{(s)}|\leqslant C(\rho+\rho^{1/3}),\tag{26}$$

где постоянная C не зависит от i, s и ρ.

Далее, при помощи равенства (24) и оценки (19) легко показать, что при достаточно малых ρ равномерно по тому же множеству значений i

$$\varlimsup_{s=s_k\to\infty}\left|\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\xi,y)}{|x_0-\xi|}\,d\Gamma_\xi-\sum_{\substack{j\\ r_{ij}^{(s)}\geqslant\rho^{1/3}}}\int\limits_{\partial F_j^{(s)}}\frac{d\omega_j^{(s)}(\xi,y)}{|x_0-\xi|}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\sigma(\rho^{1/3}+2\rho)}\frac{\varphi(\xi,y)}{|x_0-\xi|}\,d\Gamma_\xi.\tag{27}$$

Учитывая неравенства (25) — (27), переписываем формулу (22') в виде

$$\frac{\omega_i^{(s)}}{C_i^{(s)}}=\frac{1}{4\pi\,|x_0-y|}-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\xi,y)}{|x_0-\xi|}\,d\Gamma_\xi+\varepsilon_i^{(s)},\tag{28}$$

где равномерно по i, для которых тела $F_i^{(s)}$ проектируются внутрь $\sigma(\rho)$,

$$\overline{\lim_{s=s_k\to\infty}}|\varepsilon_i^{(s)}|\leqslant\frac{\delta(\rho^{1/3})}{2\pi d(y)}+C\rho^{1/3}+C\rho+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma(\rho^{1/3}+2\rho)}\frac{\varphi(\xi,y)}{|x_0-\xi|}d\Gamma_\xi=\varepsilon(\rho). \tag{29}$$

В силу ограниченности функции $\varphi(\xi, y)$ и условия b теоремы 1

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon(\rho)=0. \tag{29'}$$

Из формул (28) и (20′) следует

$$\omega_i^{(s)}=G(x_0, y)\,C_i^{(s)}+\varepsilon_i^{(s)}C_i^{(s)}.$$

Отсюда в силу (29) получаем

$$\lim_{s=s_k\to\infty}\Big|\sum_{\sigma(\rho)}\omega_i^{(s)}-G(x_0, y)\sum_{\sigma(\rho)}C_i^{(s)}\Big|\leqslant\varepsilon(\rho)\lim_{s\to\infty}\sum_{\sigma(\rho)}C_i^{(s)},$$

т. е. согласно равенству (24) и условию c теоремы 1

$$\Big|\int\limits_{\sigma(\rho)}\varphi(\xi,y)\,d\Gamma_\xi-G(x_0,y)\int\limits_{\sigma(\rho)}c_\Gamma(\xi)\,d\Gamma\Big|\leqslant\varepsilon(\rho)\int\limits_{\sigma(\rho)}c_\Gamma(\xi)\,d\Gamma.$$

Деля обе части этого неравенства на площадь куска $\sigma(\rho)$ поверхности Γ и устремляя ρ к нулю, в силу (29′) заключаем, что для почти всех $x_0\in\Gamma$

$$\varphi(x_0, y)=c_\Gamma(x_0)\,G(x_0\, y). \tag{30}$$

Выше было доказано, что функция $G(x_0, y)$ непрерывна на Γ, а функция $c_\Gamma(x_0)$ непрерывна на Γ по условию. Следовательно, $\varphi(x, y)$ — непрерывная функция и равенство (30) выполняется в любой точке. Поэтому, согласно теореме о скачке нормальной производной потенциала простого слоя, из (20′) получаем

$$\left(\frac{\partial G}{\partial\nu}\right)^+-\left(\frac{\partial G}{\partial\nu}\right)^-=\varphi(x, y)=c_\Gamma(x)\,G(x, y),$$

т. е. выполняется и второе граничное условие (17).

Итак, мы доказали, что из последовательности функций Грина $G^{(s)}(x, y)$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, причем предельная функция $G(x, y)$ удовлетворяет всюду вне Γ уравнению (21), на Γ — граничным условиям (17), а на бесконечности стремится к нулю. Ясно, что такая функция единственна. Отсюда в силу слабой компактности множества мер $\omega_i^{(s)}(\xi, y)$ следует, что существует предел всей последовательности $\{G^{(s)}(x, y),\ s=1, 2, \ldots\}$, причем он равен $G(x, y)$. Таким образом, для $k=0$ теорема доказана.

Покажем теперь, как этот результат можно перенести на уравнение Гельмгольца с комплексным k ($\operatorname{Im}k\neq 0$).

Прежде всего заметим, что все те факты из теории потенциала, которыми мы пользовались выше, верны и для потенциалов, порождаемых ядром $\frac{e^{-\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ $(\lambda > 0)$ [19]. Поэтому можно повторить все рассуждения для уравнения

$$\Delta G(x, y, \lambda) - \lambda^2 G(x, y, \lambda) = -\delta(x, y)$$

и показать, что предельная функция $G(x, y, \lambda)$ также удовлетворяет граничным условиям (17). При этом, однако, функция $c_\Gamma(x)$ будет выражаться через емкости $C_{\lambda i}^{(s)}$ множеств $F_i^{(s)}$, определяемые ядром $\frac{e^{-\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|}$. Но легко показать, что если диаметры множеств $F_i^{(s)}$ стремятся к нулю, то $C_{\lambda i}^{(s)} = C_i^{(s)}(1 + o(1))$, и, следовательно, теорема 1 верна при любом $k_0 = i\lambda$ $(\lambda \geqslant 0)$.

Остается рассмотреть произвольные комплексные значения $k\,(\operatorname{Im} k \neq 0)$. Воспользуемся для этого соотношением Гильберта для резольвент [2], в силу которого

$$G^{(s)}(x, y, k) = G^{(s)}(x, y, k_0) + (k^2 - k_0^2) \int\limits_{\Omega^{(s)}} G^{(s)}(x, \xi, k_0)\, G^{(s)}(\xi, y, k)\, d\xi. \quad (31)$$

Продолжим функции $G^{(s)}(x, \xi, k_0)$ и $G^{(s)}(\xi, y, k)$ на множество $F^{(s)}$ так, что $G^{(s)}(x, \xi, k_0)$, $G^{(s)}(x, \xi, k) = 0$ при $x \in F^{(s)}$ или $\xi \in F^{(s)}$. Тогда интегрирование в (31) можно проводить по всему пространству R_3. Если взять в (31) $k_0^2 < 0$, то согласно только что доказанному существует предел (в смысле $L_2(R_3)$ по x)

$$\lim_{s\to\infty} G^{(s)}(x, y, k_0) = G(x, y, k_0). \quad (32)$$

Рассматривая равенство (31) как интегральное уравнение относительно $G(x, y, k)$ с симметричным ядром $G^{(s)}(x, \xi, k_0)$ и учитывая, что $\operatorname{Im}(k^2 - k_0^2) \neq 0$, находим

$$\int G^{(s)}(x, y, k)\, dx \leqslant C_1 \int G^{(s)}(x, y, k_0)\, dx \leqslant C,$$

где постоянная C не зависит от s. Следовательно, семейство функций $G^{(s)}(x, y, k)$ слабо компактно в пространстве $L_2(R_3)$. Это вместе с равенством (32) позволяет сделать в (31) предельный переход по некоторой подпоследовательности $\{s = s_k\}$ и установить, что соответствующая подпоследовательность функций $G^{(s)}(x, y, k)$ сходится не только слабо, но и в каждой точке $x \notin \Gamma$, причем ее предел $G(x, y, k)$ удовлетворяет уравнению

$$G(x, y, k) = G(x, y, k_0) + (k^2 - k_0^2) \int G(x, \xi, k)\, G(\xi, y, k_0)\, d\xi. \quad (33)$$

Очевидно, из любой подпоследовательности функции $G^{(s)}(x, y, k)$ также можно выделить сходящуюся подпоследовательность и ее предел будет удовлетворять уравнению (33). Так как это уравнение имеет единственное решение (его ядро $G(x, y, k_0)$ симметрично, а $\operatorname{Im}(k^2 - k_0^2) \neq 0$), то сходится вся последовательность и ее предел $G(x, y, k)$ удовлетворяет уравнению (33). Учитывая теперь, что функция $G(x, y, k_0)$ удовлетворяет вне поверхности Γ уравнению (15) ($k = k_0$), а на Γ — граничным условиям (17), из равенства (33) заключаем, что $G(x, y, k)$ также удовлетворяет вне Γ уравнению (15), а на Γ — условиям (17). Теорема доказана.

Приведенное доказательство состоит из двух этапов: вывода граничного условия для главной части уравнения (оператора $\Delta - \lambda^2$ при $\lambda \geqslant 0$); перехода к произвольным комплексным k. На первом этапе проявляются самые существенные особенности рассматриваемой задачи и, как правило, на этом этапе возникают наибольшие трудности. Перейти же к комплексным k всегда можно затем по изложенной выше схеме.

Мы рассмотрели случай поверхностного распределения множеств $F^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$. Аналогично исследуется объемное распределение. В этом случае основной результат состоит в следующем.

Теорема 2. *Пусть при* $s \to \infty$ *множества* $F^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ *распределяются в некоторой подобласти* $\Omega \subset R_3$ *и удовлетворяют условиям*

a) $\lim\limits_{s\to\infty} \{\max\limits_i d_i^{(s)}\} = 0$,

b) $\delta(\rho) = \lim\limits_{s\to\infty} \left\{\max\limits_j \sum\limits_{\substack{i \neq j \\ r_{ij}^{(s)} < \rho}} \frac{C_i^{(s)}}{r_{ij}^{(s)}}\right\} \to 0$ при $\rho \to 0$,

c) *для любой подобласти* $G \subset \Omega$ *выполняется соотношение*

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{(G)} C_i^{(s)} = \int_G c(x)\,dx,$$

где сумма $\sum\limits_{(G)}$ *распространяется на те множества* $F_i^{(s)}$, *которые попадают в* G, *а* $c(x)$ — *непрерывная неотрицательная функция в* Ω *(предельная плотность емкостей). Тогда последовательность функций Грина* $G^{(s)}(x, y, k)$ *задачи* (15), (16) *при* $s \to \infty$ *сходится (в смысле сильной сходимости в* L_2 *операторов, порождаемых ядром* $G^{(s)}(x, y, k)$) *к функции Грина задачи*

$$\Delta G(x, y, k) + k^2 G(x, y, k) - c(x)\,G(x, y, k) = -\delta(x, y), \quad x, y \in R_3, \quad (34)$$

$$G(x, y, k) \to 0, \quad x \to \infty, \quad (35)$$

где $c(x)$ *внутри* Ω *определяется условием* (*c*), *а вне* Ω *тождественно равна нулю*[2].

Обсудим теперь полученные результаты. Прежде всего отметим, что если множества $F_i^{(s)}$ не очень вытянуты, то емкости $C_i^{(s)}$ этих множеств по порядку величины равны их диаметрам $d_i^{(s)}$.

[2] Уравнение (34) при этом понимается в обобщенном смысле.

В этом случае из приведенных теорем видно, что диаметры $d_i^{(s)}$ множеств $F_i^{(s)}$ при $s \to \infty$ стремятся к нулю быстрее, чем расстояния до ближайших соседей. Точнее, согласно условиям с теорем 1, 2 при объемном распределении $d_i^{(s)}$ должны быть «в среднем» порядка кубов, а при поверхностном — порядка квадратов этих расстояний. Отсюда следует, что множества $F^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ при $s \to \to \infty$ становятся сильно «разреженными» в каждой точке $x \in \Omega$ (или $x \in \Gamma$). Можно показать, что если в окрестности некоторой точки диаметры $d_i^{(s)}$ убывают недостаточно быстро, то в этой окрестности предельная функция обращается в нуль. Это видно уже из граничных условий (17).

Методы теории потенциала, при помощи которых доказываются теоремы 1 и 2, удобны для изучения первой краевой задачи, порождаемой эллиптическими уравнениями второго порядка. В частности, при помощи этих методов в работе [32] результаты, сформулированные в теоремах 1 и 2, перенесены на произвольные эллиптические уравнения второго порядка.

Как видно из доказательства теоремы 1, в нем используются элементарные факты из теории потенциала (за исключением представления (18)), позволяющие рассмотреть множества $F^{(s)}$ определенного класса, а именно множества, состоящие из большого числа мелких непересекающихся компонент: $F^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$. Для таких множеств устанавливаются достаточные условия, при которых последовательность решений первых краевых задач сходится к некоторому пределу, и выводятся уравнения и граничные условия для предельных функций. Очевидно, данный класс множеств далеко не исчерпывает всех возможных видов границ. Кроме того, интересно найти общие (необходимые и достаточные) условия, при которых справедливы результаты, аналогичные теоремам 1 и 2 (см. гл. I, § 3). Более полное использование методов теории потенциала позволяет освободиться от излишних ограничений и установить общие результаты о сходимости последовательности решений первой краевой задачи для оператора Лапласа. Этими методами можно оценить разность между решениями исходной и предельной краевых задач (см. гл. I, § 6) и распространить основные результаты на задачи со случайной мелкозернистой границей (см. гл. IV, § 4).

§ 2. ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Методами теории потенциала не удается исследовать уравнения высших порядков, системы уравнений, а также другие краевые условия. Более удобны в этих случаях вариационные методы [48].

Во второй главе развиваются два подхода к изучению первой краевой задачи в областях с мелкозернистой границей для сильно эллиптических систем уравнений произвольного порядка, основанные на вариационных методах. Первый из них позволяет исследовать как объемное, так и поверхностное распределение множеств $F^{(s)}$, но при этом удается рассмотреть только множества, состоящие из непересекающихся компонент $F^{(s)}$ $\left(F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}\right)$, расположенных не очень близко друг к другу [61]. Проиллюстрируем основную схему этого подхода на примере оператора Лапласа.

Рассмотрим краевую задачу с неоднородным граничным условием и нулевой правой частью в уравнении, т. е. задачу Дирихле [3]:

$$\Delta u^{(s)}(x) = 0, \quad x \in \Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}, \tag{36}$$

$$u^{(s)}(x) = U(x), \quad x \in \partial\Omega^{(s)} = \partial\Omega \cup \left(\bigcup_{i=1}^{s} \partial F_i^{(s)}\right). \tag{37}$$

Будем считать, что функция $U(x)$ из граничного условия (37) задана всюду в Ω, непрерывно дифференцируема и обращается в нуль на границе $\partial\Omega$ области $\Omega \subset R_3$.

Как известно, решение $u^{(s)}(x)$ задачи (36), (37) минимизирует функционал

$$\|u^{(s)}\|_1^2 = \int_{\Omega^{(s)}} |\nabla u^{(s)}|^2\, dx = \int_{\Omega^{(s)}} \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_i}\right)^2 dx \tag{38}$$

в классе функций, принимающих значения $U(x)$ на $\partial\Omega^{(s)}$. Область интегрирования $\Omega^{(s)}$ в (38), очевидно, можно расширить до Ω, продолжая $u^{(s)}(x)$ на множество $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ равенством $u^{(s)}(x) = U(x)$. Исследуем поведение функции $u^{(s)}(x)$ при $s \to \infty$, когда диаметры множеств $F_i^{(s)}$ стремятся к нулю, а сами они распределяются объемно в области Ω.

Из условия минимума функционала (38) следует, что

$$\int_{\Omega} |\nabla u^{(s)}|^2\, dx \leqslant \int_{\Omega} |\nabla U|^2\, dx,$$

и так как $u^{(s)}(x) = 0$ на $\partial\Omega$, то

$$\int_{\Omega} |u^{(s)}|^2\, dx \leqslant d^2(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla u^{(s)}|^2\, dx \leqslant d^2(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla U|^2\, dx,$$

где $d(\Omega)$ — диаметр области Ω. Эти неравенства показывают, что множество функций $\{u^{(s)}(x)\}$ слабо компактно в пространстве

[3] К этой задаче, очевидно, всегда можно свести задачу с неоднородной правой частью.

$\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и, значит, компактно в $L_2(\Omega)$. Выделим подпоследовательность $\{u^{(s_k)}(x)\}$, которая сходится слабо в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и сильно в $L_2(\Omega)$ к некоторой функции $u(x) \in W_2^1(\Omega)$. Так как при этом она сходится по мере, то при достаточно больших s_k функция $u^{(s_k)}(x)$ будет равномерно близка к $u(x)$ всюду вне некоторого множества $G(s_k)$ сколь угодно малой меры. Можно ожидать, что $u^{(s_k)}(x)$ будет сильно отличаться от предельной функции $u(x)$ лишь в малых окрестностях $G_i(s_k)$ множеств $F_i^{(s_k)}$, т. е. $G(s_k) = \bigcup_{i=1}^{s} G_i(s_k)$, $F_i^{(s_k)} \subset G_i(s_k)$, а вне $G(s_k)$ $u^{(s_k)}(x)$ близка к $u(x)$ вместе с производными (рис. 3).

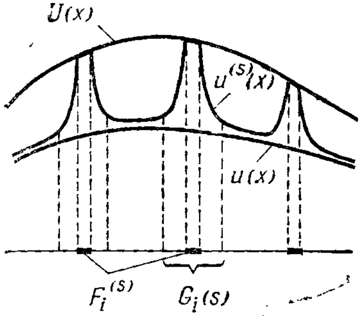

Рис. 3.

Напомним энергетическое определение емкости (эквивалентное ему потенциальное определение см. в § 1). Емкостью множества $F_i^{(s)}$ называется величина

$$C_i^{(s)} = C(F_i^{(s)}) = \inf_u \int |\nabla u|^2 dx, \tag{39}$$

где inf берется в классе функций, равных единице в окрестности $F_i^{(s)}$ и стремящихся к нулю на бесконечности. Как известно, существует единственная функция $v^{(i)}(x)$, на которой достигается нижняя грань в (39), причем вне $F_i^{(s)}$ она удовлетворяет уравнению $\Delta v^{(i)} = 0$, а на $F_i^{(s)}$ равна единице. Кроме того, справедливы оценки

$$D^{\alpha} v^{(i)}(x) = O\left(\frac{d_i^{(s)}}{r^{|\alpha|+1}}\right), \tag{40}$$

где $d_i^{(s)}$ — диаметр $F_i^{(s)}$, r — расстояние от $F_i^{(s)}$ до точки x. Таким образом, при достаточно малых $d_i^{(s)}$ функция $v^{(i)}(x)$ близка к нулю (вместе с производными) вне некоторой (малой) окрестности множеств $F_i^{(s)}$. Учитывая эти свойства функций $v^{(i)}(x)$ и все сказанное выше о решении $u^{(s)}(x)$ задачи (36), (37) при больших $s = s_k$, можно предположить, что для $u^{(s_k)}(x)$ справедливо приближенное равенство

$$u^{(s_k)}(x) \simeq u(x) + \sum_{i=1}^{s_k} [U(x) - u(x)]\, v^{(i)}(x)\, \varphi^{(i)}(x), \tag{41}$$

где $\varphi^{(i)}(x) \leqslant 1$ — достаточно гладкие срезающие функции, равные единице в окрестностях $G_i(s_k)$ множеств $F_i^{(s_k)}$ и имеющие непересекающиеся носители.

Действительно, всюду вне $\bigcup_i G_i(s_k)$ $u^{(s_k)}(x)$ близка к предельной функции $u(x)$, а $v^{(i)}(x)$ близки к нулю. Поэтому справедливость равенства (41) вне $\bigcup\limits_i G_i(s_k)$ вытекает из того, что носители функций $\varphi^{(i)}(x)$ не пересекаются, и $U(x)$, $u(x) < C$, $\varphi^{(i)}(x) \leqslant 1$. Далее, в окрестностях $G_i(s_k)$ решение $u^{(s_k)}(x)$ удовлетворяет условиям

$$\Delta u^{(s_k)}(x) = 0, \quad x \in G_i(s_k) \setminus F_i^{(s_k)},$$

$$u^{(s_k)}(x) \equiv U(x), \quad x \in F_i^{(s_k)}, \ u^{(s_k)}(x) \simeq u(x), \quad x \in \partial G_i(s_k),$$

причем если функции $U(x)$ и $u(x)$ достаточно гладкие, то в силу малости окрестностей $G_i(s_k)$ можно считать, что в каждой из них они почти постоянны. Отсюда, учитывая указанные выше свойства функций $v^{(i)}(x)$, заключаем, что при $x \in G_i(s_k)$ должно выполняться приближенное равенство

$$u^{(s_k)}(x) \simeq u(x) + [U(x) - u(x)]\, v^{(i)}(x).$$

Вводя для согласования срезающие функции $\varphi^{(i)}(x)$, приходим к приближенному равенству (41), которое выполняется теперь всюду. Считая это равенство точным, вычисляем норму (38) решения $u^{(s_k)}(x)$. Если множества $F_i^{(s)}$ находятся не очень близко друг к другу, то срезающие функции $\varphi^{(i)}(x)$ в (41) удается ввести так, что выполняется асимптотическое равенство

$$\|u^{(s_k)}\|_1^2 \sim \|u\|_1^2 + \sum_{i=1}^{s_k} \|(U - u)\, v^{(i)}\varphi^{(i)}\|_1^2 \sim$$

$$\sim \|u\|_1^2 + \sum_{i=1}^{s_k} (U(x^{(i)}) - u(x^{(i)}))^2 \int |\nabla v^{(i)}|^2\, dx \qquad (s_k \to \infty).$$

Отсюда, предполагая, что существует предельная плотность $c(x)$ емкостей множеств $F_i^{(s)}$, согласно (39) получаем

$$\lim_{s_k \to \infty} \|u^{(s_k)}\|_1^2 = \|u\|_1^2 + \int_\Omega c(x)\,(U(x) - u(x))^2\, dx. \tag{42}$$

Это предельное соотношение получено пока при помощи нестрогих рассуждений. Однако при определенных условиях оно действительно справедливо, а строгий его вывод является главным и аналитически наиболее трудным местом при обосновании рассматриваемого подхода. Заметим, что при этом существенную роль играют оценки типа (40).

Построим теперь при помощи произвольной функции $w(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ функцию

$$w^{(s)}(x) = w(x) + \sum_{i=1}^{s} [U(x) - w(x)]\, v^{(i)}(x)\, \varphi^{(i)}(x).$$

Легко видеть, что $w^{(s)}(x)$ принимает на $F_i^{(s)}$ и $\partial\Omega$ значение $U(x)$, т. е. принадлежит как раз тому классу, в котором мы ищем минимум функционала (38). Следовательно,

$$\|u^{(s)}\|_1^2 \leqslant \|w^{(s)}\|_1^2. \tag{43}$$

Аналогично можно показать, что при соответствующих условиях

$$\lim_{s\to\infty} \| w^{(s)} \|_1^2 = \| w \|_1^2 + \int_\Omega c(x) (U(x) - u(x))^2 \, dx. \qquad (42')$$

Сравнивая теперь (42), (43) и (42′), заключаем, что предельная функция $u(x)$ в классе $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ минимизирует функционал

$$\Psi(u) = \| u \|_1^2 + \int_\Omega c(x) (U(x) - u(x))^2 \, dx = \int_\Omega \{ |\nabla u|^2 + c (U - u)^2 \} \, dx.$$

Отсюда, как известно, следует, что $u(x)$ удовлетворяет всюду в области Ω уравнению

$$\Delta u(x) - c(x) u(x) = - c(x) U(x)$$

и обращается в нуль на границе $\partial\Omega$. Очевидно, последнее уравнение эквивалентно уравнению (34) ($k = 0$), так что мы пришли к тому же результату другим путем.

Приведенная схема исследования может быть строго обоснована и обобщена на уравнения высших порядков и системы уравнений (вариационные). Последнее является главным ее преимуществом перед схемой, рассмотренной в § 1. Во второй главе по этой схеме изучается краевая задача Дирихле для матричных операторов L произвольного порядка

$$L\mathbf{u}^{(s)} \equiv \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta \mathbf{u}^{(s)}(x)) = 0, \quad x \in \Omega^{(s)}, \qquad (44)$$

$$D^\alpha (\mathbf{u}^{(s)} - \mathbf{U}) |_{\partial\Omega^{(s)}} = 0, \quad |\alpha| \leqslant m - 1, \qquad (45)$$

где Ω — фиксированная область в R_n ($n \geqslant 2m$), $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x)$ — N-компонентная вектор-функция, заданная всюду в Ω и принадлежащая пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, матрицы $a_{\alpha\beta} = \| a_{\alpha\beta}^{ik} \|$ ($i, k = 1, 2, \ldots, N$) удовлетворяют некоторым условиям, обеспечивающим эллиптичность оператора L и разрешимость задачи (44), (45) (см. гл. II, § 1).

Для характеристики влияния множеств $F_i^{(s)}$ на решение задачи в данном случае нужно вводить тензорные величины $C(F_i^{(s)}) = \| C^{kl}(F_i^{(s)}) \|$ ($k, l = 1, 2, \ldots, N$), которые играют такую же роль, как емкость в задаче Дирихле для оператора Лапласа. Они определяются следующим образом. Пусть $T(F_i^{(s)})$ — шар минимального радиуса $d(F_i^{(s)})$, в котором содержится $F_i^{(s)}$, а $T_a(F_i^{(s)})$ — концентрический с ним шар радиуса a ($d(F_i^{(s)}) \ll a$). Обозначим через $\mathbf{u}^k(x)$ N-компонентный вектор, на котором достигается минимум функционала

$$\Phi_i(\mathbf{u}) = \int_{T_a(F_i^{(s)})} \sum_{|\alpha|, |\beta| = m} (a_{\alpha\beta}^0 D^\beta \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{u}) \, dx$$

в классе векторов из $\overset{\circ}{W}{}_2^m(T_a(F_i^{(s)}))$, равных на множестве $F_i^{(s)}$ орту k-й оси $\mathbf{e}^k$, т. е. $e_l^k = \delta_{kl}$ ($1 \leqslant k, l \leqslant N$). Здесь $a_{\alpha\beta}^0$ — значения матриц $a_{\alpha\beta}$ в центре шара $T\,(F_i^{(s)})$, а круглыми скобками обозначено скалярное произведение в R_N:

$$(a^0_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u},\ D^\alpha \mathbf{v}) = \sum_{i,k=1}^{N} a^{0ik}_{\alpha\beta} D^\beta u_k D^\alpha v_i.$$

С каждым множеством $F_i^{(s)}$ связывается система чисел

$$C^{kl}\,(F_i^{(s)}) = \int\limits_{T_a(F_i^{(s)})} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a^0_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u}^k,\ D^\alpha \mathbf{u}^l)\,dx \qquad (1 \leqslant k,\ l \leqslant N), \tag{46}$$

которая является контравариантным тензором в R_N (первого ранга). Очевидно, при $N = 1$ и $L = -\Delta$ мы придем к обычной емкости множества $F_i^{(s)}$ (относительно шара $T_a\,(F_i^{(s)})$) [41].

Пусть при $s \to \infty$ диаметры множеств $F_i^{(s)}$ стремятся к нулю, а $F_i^{(s)}$ распределяются объемно в области Ω так, что располагаются не очень близко друг к другу, и для любой подобласти G существует предел

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{(G)} C\,(F_i^{(s)}) = \int\limits_G c\,(x)\,dx, \tag{47}$$

где $c\,(x) = \| c^{kl}\,(x) \|$ — непрерывная неотрицательная матрица в Ω. Тогда последовательность решений задачи (44), (45), продолженных на множество $F^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ равенством $\mathbf{u}^{(s)}\,(x) = \mathbf{U}\,(x)$, по норме $W_2^{m-1}\,(\Omega)$ сходится к решению $\mathbf{u}\,(x)$ такой краевой задачи:

$$L\mathbf{u}\,(x) + c\,(x)\,\mathbf{u}\,(x) = c\,(x)\,\mathbf{U}\,(x), \quad x \in \Omega,$$
$$\mathbf{u}\,|_{\partial\Omega} = 0.$$

Это доказывается в гл. II (§ 2, 3) фактически по схеме, рассмотренной выше. При этом удается дать весьма удобную и полезную абстрактную интерпретацию ситуации, характерной для краевой задачи Дирихле в областях с мелкозернистой границей. Дело в том, что согласно методу ортогональной проекции решение $\mathbf{u}^{(s)}\,(x)$ задачи (44), (45) в специальном гильбертовом пространстве вектор-функций $\overset{\circ}{W}_L\,(\Omega)$ можно представить как проекцию вектора $\mathbf{U}$ на подпространство $H_L\,(\Omega,\ F^{(s)})$ вектор-функций, удовлетворяющих вне множества $F^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ уравнению $L\mathbf{u} = 0$, т. е. $\mathbf{u}^{(s)} = P^{(s)}\mathbf{U}$. Подпространство $H_L\,(\Omega,\ F^{(s)})$ является линейной оболочкой подпространств $H_L\,(\Omega,\ F_i^{(s)})$ вектор-функций, удовлетворяющих этому же уравнению вне множеств $F_i^{(s)}$. Так как диаметры множеств $F_i^{(s)}$ малы, то структура векторов из подпространств $H_L\,(\Omega,\ F_i^{(s)})$ в определенном смысле достаточно проста. Поэтому естественно поставить задачу о нахождении условий (на $H_L\,(\Omega,\ F_i^{(s)})$), при которых последовательность векторов $\{P^{(s)}\mathbf{U}\}$ сходится (слабо) к пределу, и об описании этого предела. В § 2 устанавливаются общие теоремы о поведении последовательности проекционных операторов $\{P^{(s)}\}$ в абстрактном гильбертовом пространстве и затем применяются к краевой задаче (44), (45), так что доказательство приведенного выше утверждения сводится лишь к проверке условий этих теорем (см. § 3). Аналогичным методом изучена (§ 3) задача (44), (45) при поверхностном распределении множеств $F^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$.

Как видим, описанный выше подход позволяет рассматривать лишь множества $F^{(s)}$, состоящие из непересекающихся компонент $F_i^{(s)}$. Кроме того, размерность пространства R_n должна быть не меньше порядка оператора L ($n \geqslant 2m$), так как при $n < 2m$ предел (47) не существует. Однако этот случай при объемном распределении не представляет интереса, поскольку в силу теоремы вложения при $n < 2m$ предельная вектор-функция равна $\mathbf{U}(x)$ во всех точках, предельных для множеств $F^{(s)}$ (при $s \to \infty$). Но при поверхностном распределении знания предельной вектор-функции на Γ еще не достаточно для ее определения; нужно исследовать поведение ее нормальных производных на Γ (до определенного порядка). Поэтому для изучения поверхностного распределения в § 4 гл. II развивается другой подход, также основанный на вариационных методах [62]. Его преимущество состоит в том, что он позволяет рассматривать множества $F^{(s)}$ произвольного вида, при этом не налагаются никакие ограничения на размерность пространства R_n и порядок оператора L. С помощью этого подхода изучена первая краевая задача в области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)}$

$$L\mathbf{u}^{(s)}(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in \Omega^{(s)}, \tag{48}$$

$$D^{\alpha}\mathbf{u}^{(s)}(x)\big|_{\partial\Omega^{(s)}} = 0, \quad |\alpha| \leqslant m-1, \tag{49}$$

где оператор L такой же, как в (44), а множества $F^{(s)}$ (произвольного вида) при $s \to \infty$ попадают в сколь угодно малую окрестность фиксированной поверхности $\Gamma \subset \Omega$. Оказывается, что в зависимости от массивности множеств $F^{(s)}$ последовательность решений $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ задачи (48), (49) сходится к решению одной из следующих задач сопряжения:

$$\left.\begin{aligned}
&L\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma,\\
&\left.\frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}^k}\right|_{\Gamma} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1,\\
&\left[\frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}^k}\right]_{-,\Gamma}^{+} = 0, \quad k = p, p+1, \ldots, 2m-p-2,\\
&\left[\frac{\partial^{2m-p-1} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}^{2m-p-1}}\right]_{-,\Gamma}^{+} = \tilde{c}_p \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}^p},\\
&D^{\alpha}\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega^{(s)}} = 0, \quad |\alpha| \leqslant m-1,
\end{aligned}\right\} \qquad (A_p)$$

где $[\mathbf{v}]^{+}_{-,\Gamma} = \mathbf{v}^{+}|_{\Gamma} - \mathbf{v}^{-}|_{\Gamma}$ — разность предельных значений вектор-функций с разных сторон от Г, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производные по нормали ν к Г, направленной в сторону, которой соответствует знак «+», $\tilde{c}_p = \tilde{c}_p(x)$ — непрерывная положительная матрица на Г, выражающаяся через определенную тензорную характеристику $C_p^{kl}(\gamma, \delta, s)$ множеств $F^{(s)}$, которая вводится аналогично тензору (46). Параметр p может принимать значения от нуля до m, причем, чем «массивнее» множества $F^{(s)}$, тем больше его значение. В гл. II рассмотрены также некоторые применения этих результатов к системе уравнений теории упругости и задаче, описывающей равновесие упругих пластин.

§ 3. ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим простейший случай, из которого видны некоторые характерные особенности второй краевой задачи в областях с мелкозернистой границей. Пусть «граничное» множество $F^{(s)}$ образуется путем удаления из фиксированной плоскости $\Gamma \subset R_3$ большого числа s областей $\sigma_i^{(s)}$ (дырок) малого диаметра $d_i^{(s)}$, т. е. $F^{(s)} = \Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^{s} \sigma_i^{(s)}$ (рис. 4). Обозначим через $G^{(s)}(x, y)$ функцию Грина второй краевой задачи в области $\Omega^{(s)} = R_3 \setminus (\Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^{s} \sigma_i^{(s)})$, т. е. функцию, удовлетворяющую условиям

$$\Delta G^{(s)}(x, y) = -\delta(x, y), \quad x, y \in \Omega^{(s)}, \tag{50}$$

$$\frac{\partial G^{(s)}(x, y)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^{s} \sigma_i^{(s)}, \tag{51}$$

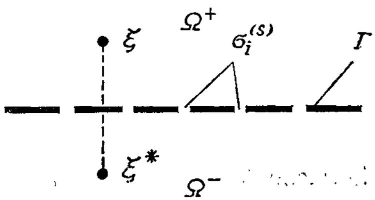

Рис. 4.

и стремящуюся к нулю при $x \to \infty$.

Так как граница области имеет ребра, то производная по нормали к $\Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^{s} \sigma_i^{(s)}$ в граничном условии (51) понимается в обобщенном смысле (см. гл. III, § 1).

Пусть при $s \to \infty$ диаметры дырок $\sigma_i^{(s)}$ стремятся к нулю, а сами они распределяются в некоторой конечной части E плоскости Г. Ставится прежняя задача: найти условия, при которых существует предел

$$\lim_{s \to \infty} G^{(s)}(x, y) = G(x, y),$$

и вывести граничные условия, которым удовлетворяет предельная функция на Г.

Специальный вид областей $\Omega^{(s)}$ позволяет в этом случае провести исследование методами теории потенциала так же, как в § 1. Обозначим через $G^+(x, y)$ и $G^-(x, y)$ функции Грина второй краевой задачи соответственно для верхнего Ω^+ и нижнего Ω^- полупространств. Как известно, они имеют вид

$$G^{\pm}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi|x-\xi|} + \frac{1}{4\pi|x-\xi^*|}, \quad x, \xi \in \Omega^{\pm}, \tag{52}$$

где ξ^* — точка, симметричная точке ξ относительно плоскости Γ. Учитывая свойства функций $G^{\pm}(x, \xi)$, для функции Грина $G^{(s)}(x, y)$ задачи (50), (51) с полюсом в точке $y \in \Omega^+$ получаем представление

$$G^{(s)}(x, y) = \begin{cases} G^+(x, y) - \sum\limits_{i=1}^{s} \int\limits_{\sigma_i^{(s)}} G^+(x, \xi)\, \varphi_i^{(s)}(\xi)\, d\Gamma_\xi, & x \in \Omega^+, \\ \sum\limits_{i=1}^{s} \int\limits_{\sigma_i^{(s)}} G^-(x, \xi)\, \varphi_i^{(s)}(\xi)\, d\Gamma_\xi, & x \in \Omega^-, \end{cases}$$

где $\varphi_i^{(s)}(\xi) = \left.\frac{\partial G^{(s)}(\xi, y)}{\partial \nu}\right|_{\sigma_i^{(s)}}$ — призводная по нормали к Γ, направленной из Ω^- в Ω^+. Функция $G^{(s)}(x, y)$ должна быть непрерывна всюду в $\Omega^{(s)} = R_3 \setminus \left(\Gamma \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} \sigma_i^{(s)}\right)$. Следовательно, приравнивая предельные значения $G^{(s)}(x, y)$ на $\sigma_i^{(s)}$, получаем для $\varphi_i^{(s)}(x)$ интегральное уравнение первого рода

$$G^+(x, y) - \sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\sigma_i^{(s)}} \{G^+(x, \xi) + G^-(x, \xi)\}\, \varphi_i^{(s)}(\xi)\, d\Gamma_\xi = 0, \quad x \in \bigcup_{i=1}^{s} \sigma_i^{(s)}.$$

Согласно (52) оно имеет вид

$$\frac{1}{2\pi|x-y|} - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\sigma_i^{(s)}} \frac{1}{|x-\xi|}\, \varphi_i^{(s)}(\xi)\, d\Gamma_\xi = 0, \quad x \in \bigcup_{i=1}^{s} \sigma_i^{(s)}. \tag{53}$$

Но в силу представления (18) такой же вид имеет и равенство (16). Очевидно, рассматривая задачу (15), (16) при $k = 0$ в области $R_3 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} \sigma_i^{(s)}$, мы придем к уравнению (53) (с заменой $(2\pi)^{-1}$ при свободном члене множителем $(\pi)^{-1}$) [4]. Поэтому можно воспользоваться результатами § 1. Пусть при $s \to \infty$ выполняются условия b и c теоремы 1 (при $F_i^{(s)} = \sigma_i^{(s)}$). Тогда согласно § 1 последовательность

---

[4] Такое точное сведение второй краевой задачи к первой возможно в областях, границей которых служат плоские экраны (с отверстиями). В этом состоит известный в теории дифракции принцип Бабине [56].

решений $\varphi_i^{(s)}(x)$ уравнения (53) слабо сходится к функции $\varphi(x)$, которая в силу равенства (30) удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = \frac{c_\Gamma(x)}{4}\left(\frac{1}{2\pi|x-y|} - \frac{1}{\pi}\int\limits_E \frac{1}{|x-\xi|}\varphi(\xi)\,d\Gamma_\xi\right), \quad x \in E. \quad (54)$$

Отсюда следует, что последовательность функций Грина $G^{(s)}(x, y)$ при $x \notin E$ сходится к функции $G(x, y)$, представимой в виде

$$G(x, y) = \begin{cases} G^+(x, y) - \int\limits_E G^+(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\Gamma_\xi, & x \in \Omega^+, \\ \int\limits_E G^-(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\Gamma_\xi, & x \in \Omega^-, \end{cases} \quad (55)$$

причем равномерно по x, принадлежащим любой области, находящейся на положительном расстоянии от E.

Из формул (55) видно, что предельная функция $G(x, y)$ вне плоскости Γ удовлетворяет уравнению (50), на $\Gamma \setminus E$ имеет нулевую нормальную производную, а на E в силу (54) удовлетворяет условиям сопряжения

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \nu}\right)^+ = \left(\frac{\partial G}{\partial \nu}\right)^- = \frac{c_\Gamma(x)}{4}[G^+(x, y) - G^-(x, y)], \quad (56)$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по нормали к Γ, направленной в область Ω^+. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть при $s \to \infty$ выполняются такие условия:*

a) $\lim\limits_{s\to\infty}\{\max\limits_i d_i^{(s)}\} = 0$;

b) $\delta(\rho) = \overline{\lim\limits_{s\to\infty}}\left\{\max\limits_i \sum\limits_{j \neq i} \frac{C_i^{(s)}}{r_{ij}^{(s)}}\right\} \to 0$ при $\rho \to 0$;

c) для любого куска $\gamma \subset E$

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{(\gamma)} C_i^{(s)} = \int\limits_\gamma c_\Gamma(x)\,d\Gamma,$$

где $d_i^{(s)}$, $C_i^{(s)}$ — соответственно диаметры и емкости дырок $\sigma_i^{(s)}$, $r_{ij}^{(s)}$ — расстояние между $\sigma_i^{(s)}$ и $\sigma_j^{(s)}$.

Тогда последовательность функций Грина задачи (50), (51) *равномерно по x, принадлежащим любой области, находящейся на положительном расстоянии от E, сходится к функции $G(x, y)$, удовлетворяющей условиям*

$$\Delta G(x, y) = -\delta(x, y), \quad x, y \in \Omega^+ \cup \Omega^-,$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \nu}\right)^+ - \left(\frac{\partial G}{\partial \nu}\right)^- = p(x)[G^+ - G^-], \quad x \in \Gamma, \quad (56')$$

где $p(x) = \frac{c_\Gamma(x)}{4}$ при $x \in E$ и $p(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma \setminus E$.

Сравнивая теоремы 1 и 3, замечаем определенную двойственность: в случае первой краевой задачи предельная функция имеет скачок нормальных производных на Γ, а сама непрерывна, а в случае второй краевой задачи, наоборот, разрыв терпит предельная функция, в то время как ее нормальные производные на Γ совпадают. Кроме того, функция $c_\Gamma(x)$ в первом случае выражается через емкости компонент «граничного» множества $F^{(s)}$, а во втором — через емкости дырок $\sigma_i^{(s)}$, т. е. компонент дополнения к $F^{(s)}$ (на Γ). Последнее обусловлено специальным видом множества $F^{(s)}$, и в этом, в частности, проявляется принцип Бабине. Однако сам вид граничных условий (56′) сохраняется для любых множеств $F^{(s)}$. В этом нетрудно убедиться при помощи таких нестрогих физических соображений.

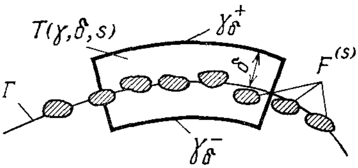

Рис. 5.

Пусть в области $\Omega^{(s)} = R_3 \setminus F^{(s)}$ течет постоянный электрический ток плотности $\mathbf{j}^{(s)}$, создаваемый источниками $f = \operatorname{div} \mathbf{j}^{(s)}$. Если $F^{(s)}$ — идеальный изолятор, то нормальная составляющая тока $\mathbf{j}^{(s)}$ на $F^{(s)}$ равна нулю. Следовательно, $\mathbf{j}^{(s)} = \operatorname{grad} u^{(s)}$, где потенциал $u^{(s)} = u^{(s)}(x)$ является решением краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} \Delta u^{(s)}(x) &= f(x), \quad x \in R_3 \setminus F^{(s)}, \\ \frac{\partial u^{(s)}(x)}{\partial \nu} &= 0, \qquad x \in \partial F^{(s)}, \\ u^{(s)}(x) &\to 0, \qquad x \to \infty. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Выделим на поверхности Γ произвольный кусок γ и проведем через него нормали к Γ длины δ (δ ≪ 1) в обе стороны от Γ. Эти нормали заполнят слой $T(\gamma, \delta)$ толщины 2δ, а концы их опишут параллельные γ поверхности γ_δ^+ и γ_δ^- (рис. 5). Предположим, что носитель функции $f(x)$ не пересекается с поверхностью Γ. Тогда при достаточно малых δ $\operatorname{div} \mathbf{j}^{(s)} = f = 0$ в $T(\gamma, \delta)$. Поскольку множество $F^{(s)}$ — идеальный изолятор, отсюда следует, что полный ток через поверхность, ограничивающую слой $T(\gamma, \delta)$, равен нулю. Поэтому, пренебрегая током через боковую поверхность (ввиду малости δ), получаем

$$\int\limits_{\gamma_\delta^+ \cup \gamma_\delta^-} j_\nu^{(s)} d\Gamma = \int\limits_{\gamma_\delta^+} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu} d\Gamma - \int\limits_{\gamma_\delta^-} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu} d\Gamma \simeq 0,$$

где $j_\nu^{(s)}$ — нормальная составляющая плотности тока, а $\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu}$ — производная по нормали ν к Γ, направленной в сторону, отмеченную знаком «+». Так как γ — произвольный кусок поверхности Γ, то

$$\left.\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_\delta^+} \sim \left.\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_\delta^-}. \tag{58}$$

Напомним определение проводимости [41]. Предположим, что $T(\gamma, \delta)$ — проводник с вкрапленным в него идеальным изолятором $F^{(s)}$ (боковая поверхность $T(\gamma, \delta)$ также непроницаема для тока). Пусть к его основаниям γ_δ^+ и γ_δ^- приложены потенциалы, равные соответственно нулю и единице. Тогда по проводнику $T(\gamma, \delta, s) = T(\gamma, \delta) \setminus F^{(s)}$ потечет ток $\mathbf{j}^{(s)}(x)$, который создаст в нем некоторое распределение потенциала $v^{(s)}(x)$ $(\mathbf{j}^{(s)} = -\operatorname{grad} v^{(s)})$. Величина протекающего тока

$$J = \int_{\gamma_\delta^-} j_\nu^{(s)}(x)\, d\Gamma = -\int_{\gamma_\delta^-} \frac{\partial v^{(s)}(x)}{\partial \nu}\, d\Gamma$$

называется проводимостью $T(\gamma, \delta, s)$ (от γ_δ^- к γ_δ^+). Обозначим ее через $P(\gamma, \delta, s)$. Отметим, что соответствующий потенциал $v^{(s)}(x)$ удовлетворяет в $T(\gamma, \delta, s)$ уравнению Лапласа, на γ_δ^+ и γ_δ^- принимает значения, равные соответственно нулю и единице, а на $\partial F^{(s)}$ и боковой поверхности слоя $T(\gamma, \delta)$ имеет нулевую нормальную производную.

Легко видеть, что если потенциалы на поверхностях $\gamma_\delta^\pm$ постоянны и равны $v^\pm$, то через проводник $T(\gamma, \delta, s)$ протекает полный ток:

$$J_{v^+ - v^-} = P(\gamma, \delta, s)(v^- - v^+). \tag{59}$$

Разобьем поверхность Γ на части γ_i достаточно малого диаметра. Можно считать, что при больших s решение $u^{(s)}(x)$ задачи (57) на поверхностях $\gamma_{i\delta}^\pm$ изменяется мало, т. е. $u^{(s)}(x)\big|_{\gamma_{i\delta}^\pm} \sim u_i^\pm = \text{const}$.

Пренебрегая током через боковые поверхности слоев $T(\gamma_i, \delta)$, в силу (59) получаем

$$J_{u_i^+ - u_i^-} \simeq -\int_{\gamma_{i\delta}^-} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu}\, d\Gamma \simeq -P(\gamma_i, \delta, s)(u_i^+ - u_i^-).$$

Разделив обе части равенства на $\operatorname{mes}_\Gamma \gamma_i$, находим

$$\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu}\bigg|_{\gamma_{i\delta}^-} \simeq \frac{P(\gamma_i, \delta, s)}{\operatorname{mes}_\Gamma \gamma_i}\left(u^{(s)}\big|_{\gamma_{i\delta}^+} - u^{(s)}\big|_{\gamma_{i\delta}^-}\right). \tag{60}$$

Пусть при $s \to \infty$ $u^{(s)} \to u$ и $\dfrac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu} \to \dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ (на расстоянии δ от Γ). Из соотношений (58) и (60) видно, что предельная функция $u(x)$ удовлетворяет на Γ граничным условиям (56′), причем

$$p(x) \sim \frac{P(\gamma, \delta, s)}{\operatorname{mes}_\Gamma \gamma} \qquad (s \to \infty,\ \delta \to 0,\ \gamma \to x).$$

Таким образом, следует ожидать, что граничные условия (56′) справедливы при любом виде множеств $F^{(s)}$. Однако при строгом обосновании приведенной схемы рассуждений возникают значительные математические трудности. Рассмотренный метод вывода граничных условий (56), основанный на сведении второй краевой задачи к первой, применим лишь для множеств $F^{(s)}$ специального вида и по своей идее, очевидно, далек от данной схемы. В главной его части используется аппарат теории потенциала. При некотором усовершенствовании этот метод может быть применен и в более сложных случаях, когда множество $F^{(s)}$ имеет аналогичный вид (например, если $F^{(s)}$ — гладкая продырявленная поверхность, см. [30] и гл. III). Но для множеств $F^{(s)}$ произвольного вида подобное сведение к первой краевой задаче невозможно. Вообще методы теории потенциала в этом случае не дают желаемых результатов. Более удобны для этих целей вариационные методы. В гл. III развит вариационный метод исследования второй краевой задачи при поверхностном распределении множеств $F^{(s)}$ произвольного вида, по своей идее близкий к приведенной выше схеме рассуждений (см. также [63]).

Как было показано, функция $p(x)$ выражается через проводимость слоев $T(\gamma, \delta, s) = T(\gamma, \delta) \setminus F^{(s)}$. Удобнее пользоваться следующим вариационным определением проводимости $P(\gamma, \delta, s)$ (которое, как легко убедиться, эквивалентно приведенному выше):

$$P(\gamma, \delta, s) = \inf_{v^{(s)}} \int\limits_{T(\gamma,\delta,s)} |\nabla v^{(s)}|^2 \, dx, \tag{61}$$

где inf берется в классе непрерывно дифференцируемых в области $T(\gamma, \delta, s)$ функций, равных единице на γ_δ^- и нулю — на γ_δ^+. Оказывается, что для сходимости последовательности решений второй краевой задачи (57) при $s \to \infty$ к функции $u(x)$, удовлетворяющей на поверхности Γ граничным условиям (56′), необходимо и достаточно, чтобы на любом куске $\gamma \subset \Gamma$ выполнялось равенство (см. гл. III, § 1):

$$\lim_{\delta\to 0} \underline{\lim}_{s\to\infty} P(\gamma, \delta, s) = \lim_{\delta\to 0} \overline{\lim}_{s\to\infty} P(\gamma, \delta, s) = \int\limits_{\gamma} p(x) \, d\Gamma, \tag{62}$$

где $p(x)$ — неотрицательная непрерывная функция на поверхности Γ.

Условия (62) свидетельствуют о некоторых характерных особенностях поведения решения второй краевой задачи в областях с мелкозернистой границей. Прежде всего на решение этой задачи существенно влияет ориентация компонент множества $F^{(s)} = \bigcup_i F_i^{(s)}$.

В этом легко убедиться, рассмотрев два примера множеств $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ (рис. 6). Для множеств $F^{(s)}$, изображенных на рис. 6, *а*,

$$P(\gamma, \delta, s) = \int\limits_{T(\gamma,\delta,s)} \left|\nabla\left(\frac{x_1}{\delta}\right)\right|^2 dx = \frac{\operatorname{mes}_\Gamma \gamma}{\delta}$$

и согласно (62) $p(x) = \infty$. Поэтому в силу (56′) предельная функция $u(x)$ имеет на T одинаковые значения: $u^+ = u^-$. Учитывая также равенство нормальных производных $u(x)$ на Γ, заключаем, что $u(x)$ удовлетворяет всюду исходному уравнению, т. е. в пределе (при $l \to 0$, $h \to 0$) граница не влияет на решение задачи. Заметим, что эти рассуждения не зависели от соотношения между длиной h и периодом l. Если же компоненты $F_i^{(s)}$ повернуть на 90° (рис. 6, *б*), то при достаточно малых промежутках между ними граница будет оказывать существенное влияние на решение задачи (особенно характерен случай $l = h$). Этим вторая краевая задача принципиально отличается от первой, в которой предельная функция зависит от емкостей компонент границы, т. е. величин, инвариантных относительно вращений.

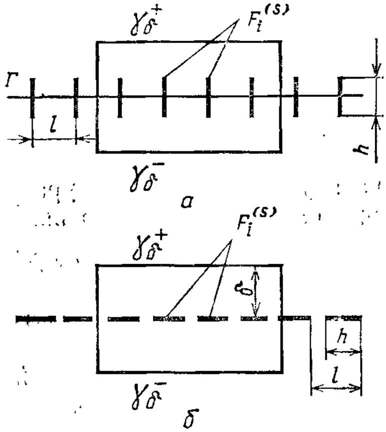

РИС. 6.

Далее, во второй краевой задаче множества $F^{(s)}$ должны быть значительно более массивными, чем в первой краевой задаче. Так, если $p(x) < \infty$, то, исходя из условия (62) и определения проводимости (61), можно показать, что для любого куска $\gamma \subset \Gamma$

$$\lim_{s\to\infty} \mathrm{mes}_\Gamma P_\Gamma \{F^{(s)} \cap T(\gamma, \delta)\} = \mathrm{mes}_\Gamma \gamma,$$

где P_Γ — оператор проектирования на поверхность Γ, mes_Γ — поверхностная мера. В то же время в первой краевой задаче при $c_\Gamma(x) < \infty$

$$\lim_{s\to\infty} \mathrm{mes}_\Gamma P_\Gamma \{F^{(s)}\} = 0.$$

Отмеченные характерные свойства второй краевой задачи в областях с мелкозернистой границей (влияние ориентации частей множества $F^{(s)}$ и значительная массивность $F^{(s)}$) создают особенно большие трудности при изучении объемного распределения $F^{(s)}$. Общий случай объемного распределения не исследован. Рассмотрены лишь некоторые частные случаи. Так, в работе [25] изучена вторая краевая задача для уравнения Гельмгольца, когда множества $F^{(s)}$ состоят из большого числа параллельных продырявленных поверхностей. Точная формулировка полученного результата приведена в § 4 гл. III. Качественная сторона этого результата заключается в том, что в случае второй краевой задачи наличие множества $F^{(s)}$, распределенного объемно, приводит к изменению коэффициентов при старших производных в исходном уравнении. Напомним, что в первой краевой задаче главная часть уравнения не изменяется.

Фактически такой же результат получается при исследовании задач, в которых граница слабо влияет на решение. По постановке этот класс задач несколько отличается от рассмотренных выше.

Пусть множество $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ состоит из непересекающихся компонент $F_i^{(s)}$. Тогда, как видно из теоремы 3, для того чтобы оно в пределе (при $s \to \infty$) оказывало конечное влияние на решение первой краевой задачи, нужно, чтобы диаметры $d_i^{(s)}$ компонент $F_i^{(s)}$ «в среднем» были порядка кубов расстояний $R_i^{(s)}$ до ближайших соседей. В случае второй краевой задачи такое множество оказывается недостаточно массивным и вносит слабое возмущение, исчезающее в пределе. А именно: даже если $d_i^{(s)} \sim o\left([R_i^{(s)}]^{\frac{3}{2}}\right)$, решение второй краевой задачи $u^{(s)}(x)$ при $s \to \infty$ сходится к решению $u^{(0)}(x)$ исходного уравнения во всем пространстве. Таким образом, в этом случае первый член асимптотики $u^{(s)}(x)$ (при $s \to \infty$) известен, и естественно поставить задачу о нахождении второго члена. Эта задача изучается нами для уравнения Гельмгольца. Оказывается, что при определенных условиях решение $u^{(s)}(x)$ в точках x, лежащих на некотором удалении от $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$, можно представить в виде

$$u^{(s)}(x) = u^{(0)}(x) + \tau^{(s)} v(x) + o(\tau^{(s)}),$$

где $\tau^{(s)} = \operatorname{mes} F^{(s)}$ — полный объем множества $F^{(s)}$, а функция $v(x)$ выражается явно через $u^{(0)}(x)$ и некоторые тензорные характеристики компонент $F_i^{(s)}$ (тензоры виртуальных масс [41]). Такие же результаты получены и для некоторых систем уравнений (Максвелла и теории упругости [55, 11, 12]).

До сих пор речь шла о краевых задачах, описывающих стационарные процессы. Аналогичные вопросы возникают и при изучении нестационарных процессов, которые описываются начально-краевыми задачами для эволюционных уравнений в областях с мелкозернистой границей. Основные теоремы о сходимости решений таких задач к решениям «усредненных» задач справедливы и в этом случае, поскольку резольвенты и разложения единицы операторов, порождаемых краевыми задачами в областях с мелкозернистой границей, сильно сходятся к резольвентам и разложениям единицы операторов, порождаемых «усредненными» краевыми задачами (гл. IV).

В заключение укажем некоторые, по нашему мнению, наиболее интересные нерешенные задачи, относящиеся к рассматриваемому кругу вопросов.

Из изложенного выше следует, что первая краевая задача в областях с мелкозернистой границей изучена достаточно полно. Но при объемном распределении множеств $F^{(s)}$ для систем уравнений и уравнений высших порядков рассмотрены лишь случаи, когда эти множества состоят из мелких непересекающихся компонент: $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$. Нужно освободиться от этого ограничения, рассмотреть множества $F^{(s)}$ произвольного вида и получить результаты в такой же мере полные, как для оператора Лапласа (см. гл. I).

Гораздо меньше изучена вторая краевая задача. Полностью исследован лишь случай поверхностного распределения множеств $F^{(s)}$ для эллиптического уравнения второго порядка, и почти никаких результатов не получено для систем уравнений и уравнений высших порядков. Но особый интерес представляет вторая краевая задача при объемном распределении множеств $F^{(s)}$ (в первую очередь, для оператора Лапласа). Можно ожидать, что при достаточно широких условиях ее решение $u^{(s)}(x)$ сходится к решению уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) = b(x) f(x). \tag{63}$$

Нужно найти эти условия и коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b(x)$ (один весьма частный случай рассмотрен в работе [25]; см. также § 4 гл. III). По-видимому, в общем случае даже для оператора Лапласа нахождение $\lim\limits_{s\to\infty} u^{(s)}(x)$ сводится к решению не одного уравнения (63), а системы уравнений вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{k}(x)\frac{\partial u_k(x)}{\partial x_j}\right) - \sum_{j=1}^{n} c^{jk}(x)\left[u_k(x) - u_j(x)\right] = b^k(x) f(x),$$
$$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N,$$

число N которых зависит от характера последовательности множеств $F^{(s)}$.

Не меньший интерес представляют краевые задачи в областях с мелкозернистой границей для системы уравнений Максвелла. Кроме случая слабого возмущения границей (см. [55]), этот вопрос совсем не исследован. Безусловно, здесь более простым (но не менее важным) является случай поверхностного распределения множеств $F^{(s)}$.

Глава первая

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

В этой главе исследуется первая краевая задача для оператора Лапласа в областях с мелкозернистой границей. На примере этой задачи наиболее удобно проследить роль методов теории потенциала в рассматриваемом круге вопросов. Основные результаты можно распространить на произвольные эллиптические уравнения второго порядка.

§ 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА [1]

Пусть в евклидовом пространстве R_n n измерений ($n \geqslant 2$) задана произвольная область Ω, которая, в частности, может совпадать со всем R_n. Назовем σ-аддитивную функцию множества, определенную на σ-алгебре всех борелевских подмножеств Ω и конечную на всех компактах $K \subset \Omega$, мерой, если ее значения неотрицательны, и зарядом, если она принимает значения любого знака. Пусть последовательность мер $\{\mu^{(s)}, s = 1, 2, \ldots\}$ слабо сходится к мере μ, т. е. для любой непрерывной и финитной в Ω функции $\varphi(x)$

$$\lim_{s\to\infty} \int \varphi(x)\, d\mu^{(s)}(x) = \int \varphi(x)\, d\mu(x).$$

Тогда справедливы неравенства:

$$\mu(G) \leqslant \varliminf_{s\to\infty} \mu^{(s)}(G) \tag{1.1}$$

для любого открытого множества $G \subset \Omega$ и

$$\mu(F) \geqslant \varlimsup_{s\to\infty} \mu^{(s)}(F) \tag{1.2}$$

для любого замкнутого множества $F \subset \Omega$.

Ограниченное множество E с границей ∂E называется нормальным относительно меры μ, если $\mu(\partial E) = 0$. Для нормальных множеств неравенства (1.1), (1.2) переходят в равенство

$$\mu(E) = \lim_{s\to\infty} \mu^{(s)}(E). \tag{1.3}$$

[1] Доказательства см., например, в работе [19].

Пусть $\{\mu_\alpha\}$ — равномерно ограниченное множество мер, т. е. $\mu_\alpha(\Omega) < C$, где C не зависит от α. Тогда из этого множества мер можно выделить подпоследовательность $\{\mu_{\alpha_k},\ k = 1, 2, \ldots\}$, которая слабо сходится к некоторой мере μ, причем $\mu(\Omega) < C$. Это свойство мер называется слабой компактностью.

Потенциалом меры μ называется функция ($n \geqslant 3$)

$$U^\mu(x) = \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_\Omega \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}, \tag{1.4}$$

где $\varkappa_n = \omega_n(n-2)$, ω_n — площадь поверхности единичной сферы в R_n. При $n = 2$ ядро $\dfrac{1}{\varkappa_n |x-\xi|^{n-2}}$ в (1.4) следует заменить ядром $\dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x-\xi|}$. Если $\mu(\Omega) < C$, то функция $U^\mu(x)$ конечна для почти всех $x \in \Omega$. Здесь и в дальнейшем, если специально не указано, термин «почти всюду» понимается относительно меры Лебега.

Емкостью множества $E \subset R_n$ называется величина

$$C(E) = \sup \mu(E), \tag{1.5}$$

где верхняя грань берется по множеству мер μ, сосредоточенных на E и таких, что потенциал $U^\mu(x)$ всюду не превышает единицу. Для любого компакта $K \subset \Omega$ верхняя грань в (1.5) достигается на некоторой мере γ, называемой равновесной мерой компакта K. Потенциал этой меры $U^\gamma(x)$ равен единице на K с точностью до множества нулевой емкости.

Точки $x \in K$, в которых $U^\gamma(x) < 1$, являются иррегулярными точками K. Приведем следующий критерий иррегулярности точки $x_0 \in K$ (критерий Н. Винера). Пусть $0 < q < 1$ и $K_i = K \cap \cap \{x : q^{i+1} \leqslant |x - x_0| \leqslant q^i\}$. Тогда для иррегулярности точки $x_0 \in K$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma(x_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C(K_i)}{q^{i(n-2)}} < \infty.$$

Таким образом, точки $x \in K$, в которых $\sigma(x) = \infty$, являются регулярными точками K, и в них $U^\gamma(x) = 1$. Заметим, что если все точки компакта $K \subset \Omega$ регулярны, то в области $\Omega \setminus K = \Omega_K$ однозначно разрешима задача Дирихле

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega_K,$$
$$u(x)|_{\partial\Omega_K} = \varphi(x), \quad u(x) \to 0, \quad x \to \infty,$$

для любой непрерывной на $\partial\Omega_K$ функции $\varphi(x)$.

Отметим теперь некоторые свойства емкости $C(E)$ как функции множества $E \subset \Omega$, причем в качестве E будем рассматривать борелевские множества [2]:

---

[2] При $n = 2$ рассматриваются множества, лежащие в единичном круге.

а) $C(E) \geqslant 0$;

б) $C(E)$ — инвариант относительно вращений и сдвигов множества E;

в) $C(E)$ — монотонно возрастающая функция, т. е.

$$C(E_1) \leqslant C(E_2), \text{ если } E_1 \subseteq E_2;$$

г) $C(E)$ полуаддитивна, т. е. $C(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} C(E_i)$, если $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$;

д) $C(E)$ непрерывна справа. Это значит, что для любого компакта K и любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность G_ε компакта K такая, что при $K \subset K' \subset G_\varepsilon$

$$C(K') - C(K) < \varepsilon.$$

Напомним известные свойства потенциалов мер (зарядов).

Супергармоничность. Потенциал $U^\mu(x)$ меры μ с носителем $S(\mu)$ является супергармонической функцией в Ω, гармонической вне $S(\mu)$.

Непрерывность. Пусть $U^\mu(x)$ — произвольный потенциал меры (заряда) μ. Тогда для любого $\eta > 0$ существует открытое множество G_η емкости меньше η такое, что на дополнении к нему потенциал $U^\mu(x)$ непрерывен.

Единственность меры (заряда). Если почти всюду

$$U^{\mu_1}(x) = U^{\mu_2}(x) + u(x),$$

где $u(x)$ — гармоническая функция, то $\mu_1 \equiv \mu_2$.

Принцип выметания. Пусть K — произвольный компакт в Ω. Тогда для любой меры μ существует мера ν, сосредоточенная на K и такая, что всюду

$$U^\mu(x) \geqslant U^\nu(x),$$

а на самом компакте K с точностью до множества нулевой емкости выполняется равенство

$$U^\mu(x) = U^\nu(x).$$

Это равенство может нарушаться только в иррегулярных точках компакта K. Построение меры ν называется выметанием меры μ. При выметании мера не увеличивается, т. е.

$$\nu(K) \leqslant \mu(\Omega).$$

В дальнейшем нами часто используется следующее простое свойство потенциалов мер.

Лемма 1.1. *Пусть мера μ сосредоточена на компакте K и ее потенциал $U^\mu(x)$ удовлетворяет неравенствам $U^\mu(x) \leqslant M$ всюду, а на самом компакте K с точностью до множества нулевой емкости*

$U^{\mu}(x) \geqslant m$. Тогда справедливы неравенства

$$mC(K) \leqslant \mu(K) \leqslant MC(K),$$

где $C(K)$ — емкость компакта K.

Доказательство. Пусть $E_m^{\mu} = \{x \in K : U^{\mu}(x) < m\}$, а $E_1^{\gamma} = \{x \in K : U^{\gamma}(x) < 1\}$, где γ — равновесная мера компакта K. По условию $C(E_m^{\mu}) = 0$, и в силу свойств равновесной меры $C(E_1^{\gamma}) = 0$. Поскольку всюду $U^{\mu}(x) \leqslant M$ и $U^{\gamma}(x) \leqslant 1$, из определения емкости следует, что $\gamma(E_m^{\mu}) = 0$ и $\mu(E_1^{\gamma}) = 0$, т. е. $U^{\mu}(x) \geqslant m$ γ-почти всюду и $U^{\gamma}(x) = 1$ μ-почти всюду на K. Учитывая это, в силу теоремы Фубини получаем

$$mC(K) = m\gamma(K) \leqslant \int_K U^{\mu}(x)\, d\gamma(x) = \int_K U^{\gamma}(x)\, d\mu(x) = \mu(K),$$

т. е. $mC(K) \leqslant \mu(K)$. Аналогично получаем и второе неравенство. Лемма доказана.

Все перечисленные свойства потенциалов мер остаются в силе и для потенциалов вида (потенциалов Грина)

$$U_{\Omega}^{\mu}(x) = \int \Gamma_{\Omega}(x, \xi)\, d\mu(\xi),$$

где $\Gamma_{\Omega}(x, \xi)$ — функция Грина задачи

$$\Delta\Gamma_{\Omega}(x, \xi) = -\delta(x, \xi), \quad x, \ \xi \in \Omega,$$

$$\Gamma_{\Omega}(x, \xi) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \xi \in \Omega.$$

§ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Ω — произвольная область в R_n $(n \geqslant 2)$ и в ней выделен некоторый компакт $F^{(s)}$, зависящий от параметра s $(s = 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим в области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)}$ краевую задачу

$$\Delta u^{(s)}(x) = f(x), \qquad x \in \Omega^{(s)}, \tag{1.6}$$

$$u^{(s)}(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega^{(s)}, \tag{1.7}$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа в R_n, $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, функция $f(x)$ задана всюду в Ω, непрерывна по Гельдеру и финитна. Если $n \geqslant 3$ и область Ω бесконечна, то к границе $\partial\Omega^{(s)}$ области $\Omega^{(s)}$ присоединяется точка $x = \infty$, т. е. в граничное условие (1.7) включается требование убывания $u^{(s)}(x)$ на бесконечности; при $n = 2$ рассматриваются только конечные Ω.

Предположим, что все точки множества $F^{(s)} \cup \partial\Omega$ регулярны, так что задача Дирихле в области $\Omega^{(s)}$ разрешима для любой граничной функции. Тогда, как легко видеть, существует единственное решение задачи (1.6), (1.7), т. е. существует единственная непрерывная на $\overline{\Omega^{(s)}} = \Omega^{(s)} \cup \partial\Omega^{(s)}$ и дважды непрерывно дифференцируемая в области $\Omega^{(s)}$ функция $u^{(s)}(x)$, которая в $\Omega^{(s)}$ удовлетворяет уравнению (1.6), а на $\partial\Omega^{(s)}$ обращается в нуль. Продолжим эту функцию на множество $F^{(s)}$, полагая $u^{(s)}(x) = 0$ при $x \in F^{(s)}$, и полученную функцию (определенную уже всюду в Ω) снова обозначим через $u^{(s)}(x)$.

Рассмотрим последовательность множеств $\{F^{(s)}, s = 1, 2, \ldots\}$ и соответствующую ей последовательность $\{u^{(s)}(x), s = 1, 2, \ldots\}$ решений задачи (1.6), (1.7) (при фиксированных Ω и $f(x)$), продолженных нулем на $F^{(s)}$. Пусть при $s \to \infty$ множества $F^{(s)}$ становятся все более изрезанными и располагаются либо в некоторой подобласти $\Omega' \subset \Omega$, либо в сколь угодно малой окрестности фиксированного гладкого многообразия $\Gamma \subset \Omega$ размерности $n-1$. Наша задача состоит в нахождении условий, при которых существует предел $\lim\limits_{s\to\infty} u^{(s)}(x) = u(x)$, и в описании этого предела. Приведем ее решение отдельно для объемного и поверхностного распределений множеств $F^{(s)}$.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Объемное распределение множеств $F^{(s)}$

Будем говорить, что последовательность $\{u^{(s)}(x), s = 1, 2, \ldots\}$ **сходится к** $u(x)$, если для любой ограниченной подобласти $\Omega' \subset \Omega$

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\Omega'} |u^{(s)}(x) - u(x)|\, dx = 0. \tag{1.8}$$

Обозначим через $K(x, \rho)$ замкнутый шар в R_n радиуса $\rho > 0$ с центром в точке $x \in \Omega$, а через $C^{(s)}(x, \rho)$ — емкость множества $F^{(s)} \cap K(x, \rho)$, т. е. $C^{(s)}(x, \rho) = C(F^{(s)} \cap K(x, \rho))$.

Теорема 1.1. *Пусть при $s \to \infty$ для любой точки $x \in \Omega$ выполняются условия*

$$\lim_{\rho\to 0} \varliminf_{s\to\infty} \frac{C^{(s)}(x, \rho)}{V_n(\rho)} = \lim_{\rho\to 0} \varlimsup_{s\to\infty} \frac{C^{(s)}(x, \rho)}{V_n(\rho)} = c(x), \tag{1.9}$$

где $V_n(\rho)$ — объем шара $K(x, \rho)$ в R_n, а $c(x)$ — неотрицательная непрерывная функция в Ω. Тогда последовательность $\{u^{(s)}(x), s = 1, 2, \ldots\}$ сходится к функции $u(x)$, которая является решением краевой задачи

$$\Delta u(x) - c(x)\, u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1.10}$$

$$u(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega. \tag{1.11}$$

Обратно: если хотя бы для одной функции $f(x) \leqslant 0$ $(f(x) \not\equiv 0)$ последовательность $\{u^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ сходится к решению задачи (1.10), (1.11), *где $c(x)$ — непрерывная неотрицательная функция, то в любой точке $x \in \Omega$ справедливы равенства* (1.9).

Таким образом, условия (1.9) необходимы и достаточны для того, чтобы последовательность решений задачи (1.6), (1.7) (продолженных нулем на $F^{(s)}$) сходилась к решению задачи (1.10), (1.11). При этом, если функция $c(x)$ не обладает нужной гладкостью, уравнение (1.10), вообще говоря, следует понимать в обобщенном смысле.

Докажем эту теорему для простоты при $n \geqslant 3$ и $\Omega \equiv R_n$. Установим сначала достаточность условий (1.9). Поскольку задачи (1.6), (1.7) и (1.10), (1.11) линейные, можно считать, что $f(x)$ знакопостоянна. Пусть $f(x) \leqslant 0$. Тогда в силу принципа выметания

$$u^{(s)}(x) = -\frac{1}{\varkappa_n}\int \frac{f(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{n-2}} - \frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{F^{(s)}} \frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}, \tag{1.12}$$

где $\mu^{(s)}$ — мера, сосредоточенная на $F^{(s)}$ и удовлетворяющая неравенству

$$\int\limits_{F^{(s)}} d\mu^{(s)}(\xi) \leqslant \int |f(\xi)|\,d\xi. \tag{1.13}$$

Действительно, функция

$$U^{-f}(x) = -\frac{1}{\varkappa_n}\int \frac{f(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{n-2}}$$

удовлетворяет в R_n уравнению $\Delta U^{-f}(x) = f(x)$. Выметая меру $-f(\xi)\,d\xi$ из области $R_n \setminus F^{(s)}$ на множество $F^{(s)}$ и не изменяя меру $-f(\xi)\,d\xi$, сосредоточенную на $F^{(s)}$, получаем меру на $F^{(s)}$, удовлетворяющую неравенству (1.13) и такую, что

$$\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{F^{(s)}} \frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} = U^{-f}(x)$$

всюду на $F^{(s)}$ (все точки $F^{(s)}$ регулярны). Поэтому функция $u^{(s)}(x)$, определяемая формулой (1.12), в области $R_n \setminus F^{(s)}$ удовлетворяет уравнению (1.6), равна нулю на $F^{(s)}$ и стремится к нулю при $x \to \infty$.

Покажем, что множество функций $\{u^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ компактно в смысле сходимости (1.8). Пусть Ω' — ограниченная область в R_n. Тогда в силу (1.13)

$$\int\limits_{\Omega'} |u^{(s)}(x)|\,dx \leqslant \max_{\eta}\int\limits_{\Omega'} \frac{dx}{|x-\eta|^{n-2}}\left(\int |f(\xi)|\,d\xi + \int d\mu^{(s)}(\xi)\right) < C_1(\Omega'),$$

где постоянная $C_1(\Omega')$ не зависит от s. Аналогично

$$\int_{\Omega'} |u^{(s)}(x+\Delta x) - u^{(s)}(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \max_{\eta} \int_{\Omega'} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\|\, x+\Delta x-\eta\,| - |\, x-\eta\,\|}{|\, x+\Delta x-\eta\,|^k\, |\, x-\eta\,|^{n-1-k}}\, dx.$$

Отсюда, учитывая, что $\|\, x+\Delta x-\eta\,| - |\, x-\eta\,\|\leqslant |\,\Delta x\,|$, и пользуясь теоремой о свертке ядер со слабой особенностью [46], получаем

$$\int_{\Omega'} |u^{(s)}(x+\Delta x) - u^{(s)}(x)|\, dx \leqslant C_2(\Omega')\,|\,\Delta x\,|,$$

где $C_2(\Omega')$ не зависит от s.

Таким образом, функции $u^{(s)}(x)$ равномерно (по s) ограничены в метрике $L_1(\Omega')$ и равностепенно непрерывны в среднем и, следовательно [46], множество $\{u^{(s)}(x),\ s=1, 2, \ldots\}$ компактно в $L_1(\Omega')$, где Ω' — любая ограниченная область в R_n. Отсюда, очевидно, вытекает компактность в смысле введенной сходимости.

Возьмем произвольную подпоследовательность $\{u^{(s)}(x),\ s = s_k \to \infty\} \subset \{u^{(s)}(x),\ s=1, 2, \ldots\}$. В силу компактности множества $\{u^{(s)}(x)\}$ из нее можно выделить подпоследовательность $\{u^{(s)}(x),\ s=s'_k \to \infty\}$, сходящуюся к некоторой функции $u(x) \in L_1(\Omega')$, где Ω' — любая ограниченная область в R_n. Покажем, что эта функция представима в виде

$$u(x) = -\frac{1}{\varkappa_n}\int \frac{f(\xi)\, d\xi}{|\, x-\xi\,|^{n-2}} - \frac{1}{\varkappa_n}\int \frac{d\mu(\xi)}{|\, x-\xi\,|^{n-2}}, \qquad (1.14)$$

причем мера μ допускает оценку

$$\int d\mu(\xi) \leqslant \int |f(\xi)|\, d\xi. \qquad (1.15)$$

В силу (1.13) множество мер $\{\mu^{(s)},\ s=1, 2, \ldots\}$ слабо компактно (см. § 1) и, значит, из последовательности $\{s=s_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{s=s'_k \to \infty\}$ такую, что соответствующая последовательность мер $\{\mu^{(s)},\ s=s''_k\}$ слабо сходится к некоторой мере μ, удовлетворяющей неравенству (1.15). Полученную подпоследовательность снова обозначим через $\{s=s_k\}$. В силу принципа выметания

$$\frac{1}{\varkappa_n}\int \frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|\, x-\xi\,|^{n-2}} \leqslant U^{-f}(x) \qquad (1.16)$$

всюду и, следовательно, для любого ограниченного множества $G \subset R_n$

$$\int_G u^{(s)}(x)\, dx = \int_G U^{-f}(x)\, dx - \int R_G(\xi)\, d\mu^{(s)}(\xi) \geqslant 0, \qquad (1.17)$$

где функция

$$R_G(\xi) = \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_G \frac{dx}{|x-\xi|^{n-2}}$$

непрерывна и стремится к нулю при $\xi \to \infty$. Из слабой сходимости мер $\mu^{(s_k)}$ к μ и неравенства (1.13) следует

$$\lim_{s=s_k \to \infty} \int R_G(\xi)\, d\mu^{(s)}(\xi) = \int R_G(\xi)\, d\mu(\xi). \tag{1.18}$$

Отсюда в силу (1.17)

$$\int\limits_G U^{-f}(x)\, dx \geqslant \int R_G(\xi)\, d\mu(\xi) = \int\limits_G \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\, dx.$$

а так как G — любое ограниченное множество, то почти всюду

$$\frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} \leqslant U^{-f}(x). \tag{1.19}$$

Кроме того, из равенства (1.17) и (1.18) следует

$$\lim_{s=s_k \to \infty} \int\limits_G u^{(s)}(x)\, dx = \int\limits_G w(x)\, dx,$$

где

$$w(x) = U^{-f}(x) - \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}.$$

Поскольку G — произвольное ограниченное множество, а $u^{(s)}(x)$ по подпоследовательности $\{s = s_k \to \infty\}$ сходится к $u(x)$, отсюда вытекает, что почти всюду выполняется равенство (1.14).

Покажем теперь, что в этом равенстве мера μ абсолютно непрерывна и имеет ограниченную плотность $\varphi(\xi)$, т. е.

$$\mu(G) = \int\limits_G \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{1.20}$$

Предварительно получим одну оценку для емкостей множеств $E \cap F^{(s)}$.

Лемма 1.2. *Пусть* K *— произвольный компакт в* R_n *и* $\operatorname{mes} K > 0$. *Тогда, если выполняется условие* (1.9), *найдется такое число* $S(K)$, *что при всех* $s \geqslant S(K)$ *справедливо неравенство*

$$C(K \cap F^{(s)}) \leqslant M \operatorname{mes} K,$$

где постоянная M *не зависит от* K *и* s, mes *— лебегова мера в* R_n.

Доказательство. Погрузим K в открытое множество G такое, что

$$\operatorname{mes} G < 2 \operatorname{mes} K, \tag{1.21}$$

и обозначим через ρ_0 расстояние от K до границы G. Пусть $K(x, \rho)$ — замкнутый шар радиуса ρ с центром в точке x. В силу условия (1.9) для каждой точки $x \in R_n$ существуют такие числа $\rho_0(x)$ и $S(x, \rho)$, что при $\rho < \rho_0(x)$ и $s \geqslant S(x, \rho)$ выполняются неравенства

$$C^{(s)}(x, \rho) = C(K(x, \rho) \cap F^{(s)}) < M_0 \operatorname{mes} K(x, \rho), \qquad (1.22)$$

где M_0 не зависит от x и ρ.

Накроем каждую точку $x \in K$ открытым шаром радиуса $\rho(x) = \min\{\rho_0, \rho_0(x)\}$. Поскольку K — компакт, согласно лемме о покрытии шарами [19] из этого множества шаров можно выделить конечное число шаров $K_i = K(x_i, \rho_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, покрывающих K, причем так, что каждая точка $x \in R_n$ будет покрыта не более чем $L(n)$ шарами, где $L(n)$ зависит только от размерности пространства R_n. Отсюда

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{mes} \overline{K}_i \leqslant L(n) \operatorname{mes} \left(\bigcup_{i=1}^{m} K_i\right). \qquad (1.23)$$

Так как $\rho_i = \rho(x_i) \leqslant \rho_0$ и $x_i \in K$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i \subset G$ и, значит, $\operatorname{mes}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i\right) \leqslant \operatorname{mes} G$. Поэтому, учитывая (1.21) и (1.23), получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{mes} \overline{K}_i \leqslant 2L(n) \operatorname{mes} K. \qquad (1.24)$$

Пусть $s \geqslant \max\{S(x_i, \rho_i), i = 1, 2, \ldots, m\}$. Тогда в силу монотонности и полуаддитивности емкости из неравенств (1.22) и (1.24) следует

$$C(K \cap F^{(s)}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} C(\overline{K}_i \cap F^{(s)}) \leqslant 2M_0 L(n) \operatorname{mes} K = M \operatorname{mes} K,$$

где $M = 2M_0 L(n)$ не зависит от K и $s \geqslant S(K) = \max\{S(x_i, \rho_i)\}$. Лемма доказана.

Так как $d\mu^{(s)}(\xi) \geqslant 0$, то из (1.16) следует, что для любого компакта $K \subset R_n$

$$\frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{K \cap F^{(s)}} \frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x - \xi|^{n-2}} \leqslant U^{-f}(x) < M_1,$$

где постоянная M_1 не зависит от K. Отсюда, учитывая лемму 1.1, получаем оценку

$$\mu^{(s)}(K) \leqslant M_1 C(K \cap F^{(s)}). \qquad (1.25)$$

Пусть E — произвольное борелевское множество. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ его можно погрузить в открытое множество G_ε такое, что

$$0 < \operatorname{mes} G_\varepsilon < \operatorname{mes} E + \varepsilon. \qquad (1.26)$$

Представим G_ε в виде суммы неубывающей последовательности компактов K_m: $G_\varepsilon = \bigcup K_m$ ($\operatorname{mes} K_m > 0$). Тогда в силу σ-аддитивности меры μ

$$\mu(E) \leqslant \mu(G_\varepsilon) = \lim_{m \to \infty} \mu(K_m). \qquad (1.27)$$

Так как $\operatorname{mes} K_m > 0$, то K_m можно погрузить в ограниченное открытое множество G_m такое, что

$$\operatorname{mes} G_m^- = \operatorname{mes} \overline{G}_m < 2 \operatorname{mes} K_m < 2 \operatorname{mes} G_\varepsilon. \tag{1.28}$$

Поскольку G_m открыто, а μ — слабый предел мер $\mu^{(s)}$ по подпоследовательности $\{s = s_k\}$, согласно (1.1)

$$\mu(G_m) \leqslant \varliminf_{s=s_k \to \infty} \mu^{(s)}(G_m) \leqslant \varlimsup_{s=s_k \to \infty} \mu^{(s)}(\overline{G}_m).$$

Поэтому в силу леммы 1.2 и неравенств (1.25), (1.28)

$$\mu(K_m) \leqslant \mu(G_m) \leqslant \varlimsup_{s=s_k \to \infty} M_1 C(\overline{G}_m \cap F^{(s)}) \leqslant 2MM_1 \operatorname{mes} G_\varepsilon.$$

Отсюда, учитывая (1.26) и (1.27), получаем

$$\mu(E) \leqslant 2MM_1(\operatorname{mes} E + \varepsilon),$$

а так как ε произвольно, то $\mu(E) \leqslant M_2 \operatorname{mes} E$, где M_2 не зависит от E. Из последнего неравенства следует, что мера μ абсолютно непрерывна и в силу теоремы Радона — Никодима справедливо равенство (1.20), причем почти всюду $0 \leqslant \varphi(\xi) \leqslant M_2$.

В силу сказанного формулу (1.14) можно переписать в виде

$$u(x) = U^{-f}(x) - \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{\varphi(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\, d\xi, \tag{1.14'}$$

откуда следует непрерывность функции $u(x)$.

Покажем, что выполняется равенство

$$\varphi(x) = c(x)\, u(x). \tag{1.29}$$

Возьмем произвольную точку $x_0 \in R_n$ и рассмотрим шары $K(x_0, \rho)$ и $K(x_0, \rho_1)$ $(\rho < \rho_1)$. Введем следующие обозначения: $K^{(s)}(x_0, \rho) = K(x_0, \rho) \cap F^{(s)}$, $CK^{(s)}(x_0, \rho) = F^{(s)} \setminus K^{(s)}(x_0, \rho)$, $\Delta K^{(s)} = K^{(s)}(x_0, \rho_1) \setminus K^{(s)}(x_0, \rho)$, $CK(x_0, \rho) = R_n \setminus K(x_0, \rho)$, $\Delta K = K(x_0, \rho_1) \setminus K(x_0, \rho)$.

Равенство (1.14′) при $x \in K(x_0, \rho)$ запишем в виде

$$U^{-f}(x) - \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{CK^{(s)}(x_0,\rho_1)} \frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} = u(x_0) + \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x, \rho_1) + \varepsilon_3(x, \rho_1, s), \tag{1.30}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1(x) &= u(x) - u(x_0), \\ \varepsilon_2(x, \rho_1) &= \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{K(x_0,\rho_1)} \frac{\varphi(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\, d\xi, \\ \varepsilon_3(x, \rho_1, s) &= \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{CK^{(s)}(x_0,\rho_1)} \frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} - \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{CK(x_0,\rho_1)} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{|x-\xi|^{n-2}}. \end{aligned}\right\} \tag{1.31}$$

Из непрерывности $u(x)$ и ограниченности $\varphi(\xi)$ следует, что

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0, \tag{1.31'}$$

и равномерно по $x \in K(x_0, \rho)$

$$\lim_{\rho_1 \to 0} \varepsilon_2(x, \rho_1) = 0. \tag{1.31''}$$

Рассмотрим выражение для $\varepsilon_3(x, \rho_1, s)$. Введем непрерывную в R_n функцию $\psi_N(x)$, удовлетворяющую условиям $0 \leqslant \psi_N(x) \leqslant 1$, $\psi_N(x) \equiv 1$ при $x \in K(x_0, N) \setminus K\left(x_0, \rho_1 + \frac{1}{N}\right)$ и $\psi_N(x) \equiv 0$ при $x \in K(x_0, \rho_1) \cup K(x_0, N+1)$. Тогда $\varepsilon_3(x, \rho_1, s)$ можно записать в виде

$$\varepsilon_3(x, \rho_1, s) = \varepsilon_3'(x, \rho_1, s) + \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{CK(x_0, \rho_1)} \frac{1 - \psi_N(\xi)}{|x - \xi|^{n-2}} d\mu^{(s)}(\xi) - \\ - \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{CK(x_0, \rho_1)} \frac{1 - \psi_N(\xi)}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi, \tag{1.32}$$

где

$$\varepsilon_3'(x, \rho_1, s) = \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{\psi_N(\xi)}{|x - \xi|^{n-2}} d\mu^{(s)}(\xi) - \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{\psi_N(\xi)}{|x - \xi|^{n-2}} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Так как функция $u_N(\xi) = \frac{\psi_N(\xi)}{|x - \xi|^{n-2}}$ при $x \in K(x_0, \rho)$ $(\rho < \rho_1)$ непрерывна и финитна, а последовательность мер $\{\mu^{(s)}, s = s_k \to \infty\}$ слабо сходится к мере μ, то при любом $x \in K(x_0, \rho)$ $\varepsilon_3'(x, \rho_1, s) \to 0$, если $s = s_k \to \infty$. Пользуясь неравенствами (1.13) и (1.15), легко показать, что функции $\varepsilon_3'(x, \rho_1, s)$ равностепенно (по s) непрерывны в шаре $K(x_0, \rho)$. Отсюда следует, что при $s = s_k \to \infty$ $\varepsilon_3'(x, \rho_1, s) \to 0$ равномерно по $x \in K(x_0, \rho)$. Поэтому, учитывая свойства функции $\psi_N(x)$ и пользуясь неравенствами (1.13), (1.15), (1.25) и леммой 1.2, из формулы (1.32) находим

$$\overline{\lim_{s = s_k \to \infty}} |\varepsilon_3(x, \rho_1, s)| < M \left\{ \frac{\operatorname{mes}\left[K\left(x_0, \rho_1 + \frac{1}{N}\right) \setminus K(x_0, \rho_1)\right]}{(\rho_1 - \rho)^{n-2}} + \frac{1}{N^{n-2}} \right\},$$

где постоянная M не зависит от N. Отсюда, переходя к пределу при $N \to \infty$, устанавливаем, что при любых фиксированных ρ и ρ_1 $(\rho < \rho_1)$ равномерно по $x \in K(x_0, \rho)$

$$\lim_{s = s_k \to \infty} \varepsilon_3(x, \rho_1, s) = 0. \tag{1.31'''}$$

Пусть теперь $x \in K^{(s)}(x_0, \rho)$. Так как $u^{(s)}(x) = 0$ при $x \in F^{(s)}$, из формулы (1.12) получаем

$$\frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{K^{(s)}(x_0,\rho)} \frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} + \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{\Delta K^{(s)}} \frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} =$$

$$= U^{-f}(x) - \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{CK^{(s)}(x_0,\rho_1)} \frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}. \tag{1.33}$$

Выметая меру $\mu^{(s)}$, сосредоточенную на $\Delta K^{(s)}$, на компакт $K^{(s)}(x_0, \rho)$, получаем меру $\mu_1^{(s)}$ такую, что с точностью до множества нулевой емкости на $K^{(s)}(x_0, \rho)$ выполняется равенство

$$\frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{\Delta K^{(s)}} \frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} = \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{K^{(s)}(x_0,\rho)} \frac{d\mu_1^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}, \tag{1.34}$$

причем правая часть его не превышает левой всюду. При этом в силу принципа выметания и неравенства (1.25)

$$\mu_1^{(s)}(K(x_0, \rho)) \leqslant \mu^{(s)}(\Delta K) \leqslant M_1 C(\Delta K^{(s)}). \tag{1.35}$$

Напомним, что меры $\mu^{(s)}$ и $\mu_1^{(s)}$ сосредоточены на $F^{(s)}$, так что

$$\mu^{(s)}(\Delta K) = \mu^{(s)}(\Delta K \cap F^{(s)}) = \mu^{(s)}(\Delta K^{(s)}),$$

$$\mu_1^{(s)}(K(x_0, \rho)) = \mu_1^{(s)}(K^{(s)}(x_0, \rho)).$$

Из формул (1.30), (1.33) и (1.34) следует, что с точностью до множества нулевой емкости на компакте $K^{(s)}(x_0, \rho)$ выполняется равенство

$$\frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{K(x_0,\rho)} \frac{d\nu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} = u(x_0) + \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x, \rho_1) + \varepsilon_3(x, \rho_1, s),$$

где $\nu^{(s)} = \mu^{(s)} + \mu_1^{(s)}$, причем левая часть равенства не превышает правой всюду. Отсюда, используя лемму 1.1 и равенства (1.31′) — (1.31‴), получаем

$$(u(x_0) - \delta(\rho_1, s))\, C^{(s)}(x_0, \rho) \leqslant \nu^{(s)}(K(x_0, \rho)) \leqslant$$

$$\leqslant (u(x_0) + \delta(\rho_1, s))\, C^{(s)}(x_0, \rho),$$

где $C^{(s)}(x_0, \rho) = C(K^{(s)}(x_0, \rho))$ и

$$\lim_{\rho_1 \to 0} \varlimsup_{s=s_k \to \infty} \delta(\rho_1, s) = 0. \tag{1.36}$$

Запишем эти неравенства в виде

$$(u(x_0) - \delta(\rho_1, s)) \frac{C^{(s)}(x_0, \rho)}{V_n(\rho)} \leqslant \frac{\mu^{(s)}(K(x_0, \rho))}{V_n(\rho)} + \frac{\mu_1^{(s)}(K(x_0, \rho))}{V_n(\rho)} \leqslant$$

$$\leqslant (u(x_0) + \delta(\rho_1, s)) \frac{C^{(s)}(x_0, \rho)}{V_n(\rho)},$$

где $V_n(\rho) = \operatorname{mes} K(x_0, \rho)$, и перейдем к пределу при $s = s_k \to \infty$. Так как $\mu^{(s)}$ по этой подпоследовательности слабо сходится к абсолютно непрерывной мере μ, для которой, очевидно, множество $K(x_0, \rho)$ нормально, то в силу (1.3) и (1.20)

$$(u(x_0) - \overline{\lim_{s=s_k\to\infty}} \delta(\rho_1, s)) \overline{\lim_{s=s_k\to\infty}} \frac{C^{(s)}(x_0, \rho)}{V_n(\rho)} \leqslant \frac{\int\limits_{K(x_0,\rho)} \varphi(x)\,dx}{V_n(\rho)} +$$

$$+ \frac{\overline{\lim\limits_{s=s_k\to\infty}} \mu_1^{(s)}(K(x_0, \rho))}{V_n(\rho)} \leqslant (u(x_0) + \overline{\lim_{s=s_k\to\infty}} \delta(\rho_1, s)) \overline{\lim_{s=s_k\to\infty}} \frac{C^{(s)}(x_0, \rho)}{V_n(\rho)}. \tag{1.37}$$

Из неравенства (1.35) и леммы 1.2 следует

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \mu_1^{(s)}(K(x_0, \rho)) \leqslant M \operatorname{mes}(K(x_0, \rho_1) \setminus K(x_0, \rho)).$$

Поэтому, устремляя в (1.37) сначала ρ_1 к ρ, а затем ρ к нулю и учитывая (1.9) и (1.36), приходим к равенству (1.29).

Итак, мы показали, что из любой подпоследовательности $\{u^{(s)}(x),\ s = \hat{s}_k \to \infty\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u^{(s)}(x),\ s = s_k \to \infty\}$, сходящуюся к функции $u(x)$, для которой справедливы равенства (1.14′) и (1.29). Отсюда обычным способом устанавливаем, что $u(x)$ удовлетворяет в R_n уравнению

$$\Delta u(x) - c(x)\,u(x) = f(x),$$

где лапласиан Δ, вообще говоря, следует понимать в обобщенном смысле. Кроме того, из (1.14) и (1.19) видно, что $u(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Поскольку этим функция $u(x)$ определяется однозначно, отсюда вытекает, что и вся последовательность $\{u^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ сходится к функции $u(x)$, являющейся решением задачи (1.10), (1.11) ($\Omega = R_n$). Таким образом, достаточность условий (1.9) доказана.

Необходимость условий (1.9) вытекает из следующих лемм.

Лемма 1.3. *Пусть $f(x) \leqslant 0$ и последовательность функций $u^{(s)}(x)$ при $s \to \infty$ сходится к функции $w(x)$ в смысле (1.8). Тогда почти всюду*

$$w(x) = -\frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{f(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{n-2}} - \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}, \tag{1.38}$$

где мера μ для любого компакта T удовлетворяет неравенству

$$\mu(T) \geqslant \inf_{x\in T} w(x) \overline{\lim_{s\to\infty}} C(T \cap F^{(s)}). \tag{1.39}$$

Доказательство. Как было показано выше, функции $u^{(s)}(x)$ представимы в виде (1.12) и множество $\{u^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ компактно в смысле сходимости (1.8). Из него можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к функции $u(x)$, представимой в виде (1.14), где мера μ — слабый предел мер $\mu^{(s)}$ по этой подпоследовательности. Но так как по условию леммы вся последовательность $\{u^{(s)}(x),\ s=1,2,\ldots\}$ сходится к $w(x)$, то отсюда следует, что почти всюду $w(x)=u(x)$, и представление (1.38) доказано.

Заметим, что функция $w(x)$ не может быть представлена в виде (1.38) двумя способами (с двумя различными мерами μ). Это вытекает из теоремы единственности для мер (см. § 1). Так как множество мер $\{\mu^{(s)}\}$ слабо компактно, то отсюда следует, что вся последовательность $\{\mu^{(s)},\ s=1,2,\ldots\}$ слабо сходится к мере μ.

Установим теперь справедливость неравенства (1.39). Рассмотрим произвольный компакт T в R_n и построим последовательность замкнутых множеств $\{T_i,\ i=1,2,\ldots\}$ таких, что $T_i \supset T_{i+1}$, $T=\bigcap T_i$ и множество T_{i+1} находится на положительном расстоянии от $R_n \setminus T_i$ для любого i. Предположим, что существует возрастающая последовательность номеров $s=s'$ таких, что множества $T \cap F^{(s)}$ не пусты (в противном случае неравенство (1.39) очевидно). Тогда, пользуясь представлением (1.12) и учитывая, что $u^{(s)}(x)=0$ при $x\in F^{(s)}$, записываем

$$U^{-f}(x)-\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{R_n\setminus T_i}\frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}-\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{T_i}\frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}=0,$$
$$x\in T\cap F^{(s)}.$$

Введем непрерывную и неотрицательную в R_n функцию $\psi_i(x)$, равную единице на множестве $R_n \setminus T_i$, нулю — на T_{i+1} и всюду не превышающую единицу. В силу положительности мер $\mu^{(s)}$ из предыдущего равенства вытекает

$$\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{T_i}\frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\geqslant U^{-f}(x)-\frac{1}{\varkappa_n}\int\frac{\psi_i(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\,d\mu^{(s)}(\xi),$$
$$x\in T\cap F^{(s)}.$$

Так как при $x\in T$ функции $v_i(\xi)=\dfrac{\psi_i(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}$ равностепенно непрерывны в R_n и равномерно стремятся к нулю при $\xi\to\infty$, то из слабой сходимости мер $\mu^{(s)}$ к μ и неравенств (1.13) и (1.15) получаем

$$\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{T_i}\frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\geqslant U^{-f}(x)-\frac{1}{\varkappa_n}\int\frac{\psi_i(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\,d\mu(\xi)+\varepsilon(s),$$
$$x\in T\cap F^{(s)}, \tag{1.40}$$

где $\varepsilon(s)\to 0$ при $s\to\infty$. Учитывая, что функция

$$u_i(\xi)=U^{-f}(x)-\frac{1}{\varkappa_n}\int\frac{\psi_i(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\,d\mu(\xi)$$

непрерывна на множестве T и $0\leqslant\psi_i(\xi)\leqslant 1$, из (1.38) и (1.40) заключаем, что

$$\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{T_i}\frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\geqslant\inf_{x\in T}w(x)+\varepsilon(s),\qquad x\in T\cap F^{(s)}.$$

Пусть $\nu^{(s)}$ — произвольная мера, сосредоточенная на $T \cap F^{(s)}$, и потенциал ее всюду не больше единицы. Интегрируя предыдущее неравенство по этой мере, получаем

$$\mu^{(s)}(T_i) = \int\limits_{T_i} d\mu^{(s)}(\xi) \geqslant [\inf_{x \in T} w(x) + \varepsilon(s)] \int\limits_{T} d\nu^{(s)}(\xi),$$

откуда, в силу определения емкости,

$$\mu^{(s)}(T_i) \geqslant [\inf_{x \in T} w(x) + \varepsilon(s)]\, C(T \cap F^{(s)}).$$

Так как последовательность мер $\mu^{(s)}$ слабо сходится к мере μ, а множество T_i замкнутое, то, учитывая (1.2), из предыдущего неравенства получаем

$$\mu(T_i) \geqslant \inf_{x \in T} w(x) \varlimsup_{s \to \infty} C(T \cap F^{(s)}).$$

Поскольку множества T_i выбирались так, что $T_{i+1} \subset T_i$ и $T = \bigcap T_i$, отсюда вытекает неравенство (1.39). Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Если выполнены условия леммы 1.3 и, кроме того, $w(x)$ — непрерывная функция, то равенство* (1.38) *выполняется всюду и для любого открытого множества G*

$$\mu(G) \leqslant \{\sup_{x \in G} w(x) + \varepsilon(G)\} \varliminf_{s \to \infty} C(G \cap F^{(s)}), \tag{1.41}$$

где $\varepsilon(G) \to 0$, когда диаметр G стремится к нулю, а само G находится в любой ограниченной части пространства R_n.

Доказательство. В силу леммы 1.3 почти всюду

$$\frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} = U^{-f}(x) - w(x). \tag{1.38'}$$

В левой части равенства стоит супергармоническая функция (§ 1), а в правой — по условию непрерывная функция. Но если супергармоническая функция почти всюду равна непрерывной, то она сама непрерывна, и, следовательно, равенство (1.38'), а вместе с ним и (1.38) выполняются всюду.

Рассмотрим произвольное открытое множество $G \subset R_n$. Можно считать, что множество $G \cap F^{(s)}$ не пусто, начиная с некоторого s (в противном случае найдется подпоследовательность $s = s'$ такая, что $\mu^{(s)}(G) = 0$, и, следовательно, из (1.2) сразу вытекает неравенство (1.41)). Построим последовательность компактов K_i таких, что $K_i \subset K_{i+1} \subset G$, $G = \bigcup K_i$ и K_i находится на положительном расстоянии от $R_n \setminus K_{i+1}$. Запишем условие $u^{(s)}(x) = 0$ при $x \in K_i \cap F^{(s)}$ в виде

$$\frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{K_i} \frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} = U^{-f}(x) - \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{R_n \setminus K_i} \frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}.$$

Введем непрерывные в R_n функции $\varphi_i(x)$, удовлетворяющие условиям $0 \leqslant \varphi_i(x) \leqslant 1$, $\varphi_i(x) = 1$ при $x \in R_n \setminus K_{i+1}$ и $\varphi_i(x) = 0$

при $x \in K_i$. Тогда из предыдущего равенства следует

$$\frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{K_i} \frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} \leqslant U^{-f}(x) - \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{\varphi_{i+1}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} d\mu^{(s)}(\xi),$$

$$x \in K_i \cap F^{(s)}.$$

Отсюда, учитывая слабую сходимость мер $\mu^{(s)}$ к μ и неравенства (1.13) и (1.15), заключаем, что при $x \in K_i \cap F^{(s)}$

$$\frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{K_i} \frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} \leqslant U^{-f}(x) - \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{\varphi_{i+1}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} d\mu(\xi) + \varepsilon(s),$$

где $\varepsilon(s) \to 0$ при $s \to \infty$. Так как $\varphi_{i+1}(x) \geqslant 0$ всюду и $\varphi_{i+1} = 1$ при $x \in R_3 \setminus G$, то из этого неравенства получаем при $x \in K_i \cap F^{(s)}$

$$\frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{K_i} \frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} \leqslant U^{-f}(x) - \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{R_n \setminus G} \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} + \varepsilon(s), \quad (1.42)$$

откуда в силу (1.38)

$$\frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{K_i} \frac{d\mu^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} \leqslant w(x) + \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{G} \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} + \varepsilon(s),$$

$$x \in K_i \cap F^{(s)}.$$

Поэтому, вводя обозначение

$$\varepsilon(G) = \sup_{x \in G} \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{G} \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} \quad (1.43)$$

и используя лемму 1.1 и монотонность емкости, записываем

$$\mu^{(s)}(K_i) \leqslant \{\sup_{x \in K_i} w(x) + \varepsilon(G) + \varepsilon(s)\} C(K_i \cap F^{(s)}) \leqslant$$

$$\leqslant \{\sup_{x \in G} w(x) + \varepsilon(G) + \varepsilon(s)\} C(G \cap F^{(s)}).$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$, получаем

$$\mu^{(s)}(G) \leqslant \{\sup_{x \in G} w(x) + \varepsilon(G) + \varepsilon(s)\} C(G \cap F^{(s)}).$$

Отсюда в силу (1.2) вытекает неравенство (1.41), где $\varepsilon(G)$ определено формулой (1.43).

Остается показать, что $\varepsilon(G)$ стремится к нулю, когда диаметр множества G стремится к нулю, а само G принадлежит любой ограниченной подобласти $\Omega' \subset R_n$. Предположим противное. Тогда найдется последовательность множеств $G_k \subset \Omega'$ и последовательность точек $x_k \in G_k$ таких, что диаметры G_k стремятся к нулю при $k \to \infty$ и для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{G_k} \frac{d\mu(\xi)}{|x_k-\xi|^{n-2}} > \varepsilon. \quad (1.44)$$

Так как область Ω' ограничена, то можно выбрать подпоследовательность $\{x_k\}$, которая сходится к некоторой точке $x_0 \in \overline{\Omega}'$. Из (1.44) следует, что для шара $K(x_0, \rho)$ любого радиуса $\rho > 0$ начиная с некоторого номера $\mathcal{J}(\rho)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{K(x_0,\rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x_k-\xi|^{n-2}} > \varepsilon, \qquad k \geqslant \mathcal{J}(\rho). \tag{1.45}$$

Запишем теперь равенство (1.38) в виде

$$\frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{K(x_0,\rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} = U^{-f}(x) - w(x) - \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{R_n \setminus K(x_0,\rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}.$$

Так как по условию функция $w(x)$ непрерывна, то отсюда следует, что функция

$$R(x, \rho) = \int\limits_{K(x_0,\rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}$$

ограничена и непрерывна во всех внутренних точках шара $K(x_0, \rho)$. Поэтому, учитывая, что $x_k \to x_0$, из (1.45) заключаем, что для любого $\rho > 0$

$$R(x_0, \rho) = \int\limits_{K(x_0,\rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x_0-\xi|^{n-2}} > \varepsilon. \tag{1.45'}$$

Из ограниченности $R(x, \rho)$ в точке x_0 вытекает, что $\mu(x_0) = 0$, и, следовательно,

$$R(x_0, \rho) = \sum_{i=0}^{\infty} \int\limits_{\Delta_i} \frac{d\mu(\xi)}{|x_0-\xi|^{n-2}}, \tag{1.46}$$

где

$$\Delta_i = K(x_0, \rho_i) \setminus K(x_0, \rho_{i+1}), \quad \rho_i = \frac{\rho}{2^i}.$$

В силу сходимости ряда (1.46)

$$R(x_0, \rho_N) = \sum_{i=N}^{\infty} \frac{d\mu(\xi)}{|x_0-\xi|^{n-2}} \to 0 \text{ при } N \to \infty,$$

что противоречит неравенству (1.45'). Лемма доказана.

Теперь уже нетрудно доказать и необходимость условий (1.9). Пусть $f(x) \leqslant 0$ ($f(x) \not\equiv 0$) и последовательность $\{u^{(s)}(x), s = 1, 2, \ldots\}$ сходится к решению $u(x)$ задачи (1.10), (1.11), где $\Omega = R_n$. Пользуясь свойствами решений эллиптических уравнений второго порядка [38], можно показать, что $u(x)$ всюду положительно. Кроме того, $u(x)$ непрерывно и в любом шаре K_R радиуса R

$$u(x) = -\frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{K_R} \frac{f(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi - \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{K_R} \frac{c(\xi)\, u(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{\partial K_R} \left\{ \frac{\partial u}{\partial R} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} - u \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \right\} d\Gamma_\xi.$$

Таким образом, выполняются условия лемм 1.3 и 1.4, **причем в силу** единственности мер (см. § 1) в равенстве (1.38)

$$d\mu(\xi) = c(\xi)\, u(\xi)\, d\xi.$$

Положим $G = K(x_0, \rho)$ и $T = \overline{K(x_0, \rho)}$, где x_0 — произвольная точка в R_n. Тогда в силу непрерывности $u(x)$ и неравенств (1.39) и (1.41)

$$\int\limits_{\overline{K(x_0,\rho)}} c(\xi)\, u(\xi)\, d\xi \geqslant \{u(x_0) - \varepsilon_1(\rho)\} \overline{\lim_{s\to\infty}} C^{(s)}(x_0, \rho),$$

$$\int\limits_{K(x_0,\rho)} c(\xi)\, u(\xi)\, d\xi \leqslant \{u(x_0) + \varepsilon_2(\rho)\} \underline{\lim_{s\to\infty}} C^{(s)}(x_0, \rho),$$

где $C^{(s)}(x_0, \rho) = C(\overline{K(x_0, \rho)} \cap F^{(s)})$, а $\varepsilon_{1,2}(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Отсюда, учитывая, что $u(x_0) > 0$, а также что функции $u(x)$ и $c(x)$ непрерывны, приходим к равенствам (1.9) в каждой точке $x_0 \in R_n$. Таким образом, теорема 1.1 доказана.

Поверхностное распределение множеств $F^{(s)}$

В случае поверхностного распределения $F^{(s)}$ справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть при $s \to \infty$ выполняются такие условия:*

а) множество $F^{(s)}$ попадает в сколь угодно малую окрестность фиксированной гладкой поверхности $\Gamma \subset \Omega$ (Γ — гладкое многообразие размерности $n-1$);

b) для любой точки $x \in \Gamma$ существуют пределы

$$\lim_{\rho\to 0} \underline{\lim_{s\to\infty}} \frac{C^{(s)}(x, \rho)}{V_{n-1}(\rho)} = \lim_{\rho\to 0} \overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{C^{(s)}(x, \rho)}{V_{n-1}(\rho)} = c_\Gamma(x), \qquad (1.47)$$

где $C^{(s)}(x, \rho) = C(K(x_0, \rho) \cap F^{(s)})$, $V_{n-1}(\rho)$ — объем шара радиуса ρ в пространстве R_{n-1}, $c_\Gamma(x)$ — непрерывная неотрицательная функция на Γ.

Тогда последовательность $\{u^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ решений задачи (1.6), (1.7) (продолженных нулем на $F^{(s)}$) сходится к функции $u(x)$, которая является решением краевой задачи

$$\Delta u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega \setminus \Gamma, \qquad (1.48)$$

$$\left.\begin{aligned} &u^+(x) = u^-(x) = u(x), \\ &\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^- = c_\Gamma(x)\, u(x), \qquad x \in \Gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (1.49)$$

$$u(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \qquad (1.50)$$

где знаками «+» и «—» отмечены предельные значения функций с разных сторон от Γ, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по нормали к Γ, направленной в сторону, которой соответствует знак «+». При этом вне любой фиксированной окрестности Γ сходимость равномерная.

Обратно: если выполняется условие a и хотя бы для одной функции $f(x) \leqslant 0$ ($f(x) \not\equiv 0$) последовательность $\{u^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ сходится к решению задачи (1.48) — (1.50), *где* $c_\Gamma(x)$ — *непрерывная неотрицательная функция на* Γ, *то в любой точке* $x \in \Gamma$ *справедливы равенства* (1.47).

Доказательство этой теоремы почти не отличается от доказательства предыдущей теоремы. Для предельной функции $u(x)$ вместо (1.14'), (1.29) получается представление

$$u(x) = -\frac{1}{\varkappa_n}\int \frac{f(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{n-2}} - \frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\,d\Gamma_\xi,$$

где $\varphi(\xi) = c_\Gamma(\xi)\,u(\xi)$. Отсюда в силу известных свойств потенциала простого слоя [35] вытекают условия сопряжения (1.49).

Полное доказательство теоремы при $\Omega \equiv R_n$ дано в работах [57, 58]. При $\Omega \neq R_n$ все доказательства можно провести аналогично, применяя потенциалы Грина (см. § 1).

Неоднородные граничные условия

При помощи теорем 1.1 и 1.2 нетрудно изучить поведение решения задачи Дирихле в областях с мелкозернистой границей. Пусть Ω — ограниченная область в R_n ($n \geqslant 2$), а $\{F^{(s)},\ s = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность замкнутых множеств в Ω (при любом s все точки границы области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)}$ регулярны). Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u^{(s)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega^{(s)},$$
$$(u^{(s)}(x) - \varphi(x))\,|_{\partial\Omega^{(s)}} = 0,$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная функция, заданная всюду в $\overline{\Omega}$. Решение $u^{(s)}(x)$ этой задачи продолжим на множество $F^{(s)}$, положив $u^{(s)}(x) = \varphi(x)$ при $x \in F^{(s)}$. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.3 (объемное распределение $\mathbf{F}^{(s)}$). *Если при $s \to \infty$ в любой точке $x \in \Omega$ выполняется условие* (1.9) *теоремы* 1.1, *то последовательность $\{u^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ в метрике $L_1(\Omega)$ сходится к функции $u(x)$, которая является решением краевой задачи*

$$\Delta u(x) - c(x)\,u(x) = -c(x)\,\varphi(x), \qquad x \in \Omega,$$
$$(u(x) - \varphi(x))\,|_{\partial\Omega} = 0.$$

Теорема 1.4 (поверхностное распределение $F^{(s)}$). *Если при $s \to \infty$ выполняются условия a и b теоремы* 1.2, *то последовательность $\{u^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ сходится к функции $u(x)$, являющейся решением краевой задачи*

$$\Delta u^{(s)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$
$$u^{+}(x) = u^{-}(x) = u(x),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^{+} - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^{-} = c_{\Gamma}(x)\,(u(x) - \varphi(x)), \quad x \in \Gamma,$$

$$(u(x) - \varphi(x))\,|_{\partial\Omega} = 0$$

(*обозначения те же, что и в теореме* 1.2).

Замечание. Пользуясь теоремами 1.3 и 1.4, можно показать, что из условий (1.9) и (1.47) вытекают соответственно равенства

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{s\to\infty} \frac{C^{(s)}(x,\rho)}{V_n(\rho)} = c(x),$$

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{s\to\infty} \frac{C^{(s)}(x,\rho)}{V_{n-1}(\rho)} = c_{\Gamma}(x).$$

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Простые достаточные условия сходимости

Необходимые и достаточные условия (1.9) и (1.47) не очень удобны для проверки, поскольку нужно знать емкости компактов $F^{(s)} \cap K(x, \rho)$, имеющих в общем случае довольно сложный вид. Поэтому здесь мы рассмотрим некоторые классы множеств $F^{(s)}$, для которых можно найти более эффективные достаточные условия, гарантирующие выполнимость условий (1.9) или (1.47). В основном это оказывается возможным в тех случаях, когда множество $F^{(s)}$ удается разбить на такие подмножества $F_i^{(s)}$, емкость которых известна или ее можно оценить, а расстояния между $F_i^{(s)}$ и $F_j^{(s)}$ $(i \neq j)$ не очень малы. Один из таких случаев рассмотрен в работе [31].

Чтобы сформулировать точный результат, введем такие обозначения: $d_{1i}^{(s)}$, $d_{2i}^{(s)}$ — диаметры множеств $F_{1i}^{(s)}$, $F_{2i}^{(s)}$, $C_{1i}^{(s)}$, $C_{2i}^{(s)}$ — их емкости, $\sum\limits_{(x,\rho)} C_i^{(s)}$ — сумма емкостей тех множеств $F_{1i}^{(s)}$ или $F_{2i}^{(s)}$, которые полностью содержатся в замкнутом шаре $K(x, \rho)$, $r_{ij}^{(s)}$ — расстояния между $F_{1i}^{(s)}$ и $F_{1i}^{(s)}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5. *Пусть при каждом s множество $F^{(s)}$ можно представить в виде конечной суммы замкнутых множеств $F_{1i}^{(s)}$ и $F_{2i}^{(s)}$*

$$F^{(s)} = (\bigcup_i F_{1i}^{(s)}) \cup (\bigcup_i F_{2i}^{(s)}),$$

и пусть при $s \to \infty$ выполняются такие условия:

a) $\lim\limits_{s\to\infty} \{\max\limits_i d_{1i}^{(s)}\} = \lim\limits_{s\to\infty} \{\max\limits_i d_{2i}^{(s)}\} = 0;$

b) $\lim\limits_{s\to\infty} \sum\limits_{(x,\rho)} C_{2i}^{(s)} = 0$ *для любой точки $x \in \Omega$ и любого* ρ;

c) $\delta(\rho) = \overline{\lim_{s\to\infty}} \max_i \sum_{\substack{i \neq j \\ r_{ij}^{(s)} < \rho}} \frac{C_{1i}^{(s)}}{(r_{ij}^{(s)})^{n-2}} \to 0$ при $\rho \to 0$;

d) $\lim_{\rho\to 0} \lim_{s\to\infty} \frac{\sum_{(x,\rho)} C_{1i}^{(s)}}{V_n(\rho)} = c(x), \qquad x \in \Omega,$

где $V_n(\rho)$ — объем шара $K(x, \rho)$ в R_n, $c(x)$ — непрерывная функция в Ω.

Тогда в любой точке $x \in \Omega$ вполняются равенства (1.9).

Если условие d заменить условием

d') $\lim_{\rho\to 0} \lim_{s\to\infty} \frac{\sum_{(x,\rho)} C_{1i}^{(s)}}{V_{n-1}(\rho)} = c_\Gamma(x), \qquad x \in \Gamma,$

где $V_{n-1}(\rho)$ — объем шара радиуса ρ в R_{n-1}, а $c_\Gamma(x)$ — непрерывная функция на поверхности Γ, то в любой точке $x \in \Gamma$ выполняются равенства (1.47).

Доказательство. Обозначим через $F_1^{(s)}(x, \rho)$ объединение тех множеств $F_{1i}^{(s)}$, которые полностью содержатся в замкнутом шаре $K(x, \rho)$, т. е. $F_1^{(s)}(x, \rho) = \bigcup_i F_{1i}^{(s)}$, где $F_{1i}^{(s)} \subset K(x, \rho)$. Учитывая свойства монотонности и полуаддитивности емкости, записываем

$$C(F_1^{(s)}(x, \rho)) \leqslant C^{(s)}(x, \rho) \leqslant \sum_{(x,\rho)} C_{1i}^{(s)} + \sum{}' C_{1i}^{(s)} + \sum_{(x,\rho')} C_{2i}^{(s)}, \tag{1.51}$$

где $C^{(s)}(x, \rho) = C(F^{(s)} \cap K(x, \rho))$, сумма Σ' распространяется на те $F_{1i}^{(s)}$, которые не содержатся в шаре $\overline{K(x, \rho)}$, но имеют с ним непустое пересечение, $\rho' = \rho + \max_i d_{2i}^{(s)}$. Из условий *a* и *d* (или *d'*) и *b* получаем

$$\lim_{s\to\infty} (\sum{}' C_{1i}^{(s)} + \sum_{(x,\rho')} C_{2i}^{(s)}) = 0. \tag{1.52}$$

Рассмотрим теперь компакт $F_1^{(s)}(x, \rho)$. Пусть $\gamma^{(s)}$ — равновесная мера $F_1^{(s)}(x, \rho)$, а $\gamma_i^{(s)}$ — ее часть, сосредоточенная на $F_{1i}^{(s)}$. Тогда всюду (см. § 1)

$$U^{\gamma^{(s)}}(x) = \sum_i \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{d\gamma_i^{(s)}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} \leqslant 1,$$

а на компакте $F_1^{(s)}(x, \rho)$ с точностью до множества нулевой емкости $U^{\gamma^{(s)}}(x) = 1$. Отсюда следует, что потенциал меры $\gamma_j^{(s)}$ удовлетворяет неравенствам $U^{\gamma_j^{(s)}}(x) \leqslant 1$ всюду, а на компакте $F_{1j}^{(s)}$ с точностью до множества нулевой емкости

$$U^{\gamma_j^{(s)}}(x) \geqslant 1 - \frac{1}{\varkappa_n} \sum_{\substack{i \neq j \\ F_{1i}^{(s)} \subset K(x,\rho)}} \frac{\gamma_i^{(s)}(F_{1i}^{(s)})}{(r_{ij}^{(s)})^{n-2}}.$$

Из этих неравенств на основании леммы 1.1 находим

$$C_{1j}^{(s)}\left(1-\frac{1}{\varkappa_n}\sum_{\substack{i\neq j\\ F_{1i}^{(s)}\subset K(x,\rho)}}\frac{C_{1i}^{(s)}}{(r_{ij}^{(s)})^{n-2}}\right)\leqslant\gamma_j^{(s)}(F_{1j}^{(s)})\leqslant C_{1j}^{(s)}. \tag{1.53}$$

По определению равновесной меры

$$C(F_1^{(s)}(x,\rho))=\gamma^{(s)}(F_1^{(s)}(x,\rho))=\sum_i\gamma_i^{(s)}(F_{1i}^{(s)}),$$

и, следовательно, из (1.53) вытекает неравенство

$$C(F_1^{(s)}(x,\rho))\geqslant(1-\delta(\rho,s))\sum_{(x,\rho)}C_{1i}^{(s)}, \tag{1.54}$$

где

$$\delta(\rho,s)=\frac{1}{\varkappa_n}\max_j\sum_{\substack{i\neq j\\ F_{1i}^{(s)}\subset K(x,\rho)}}\frac{C_{1i}^{(s)}}{(r_{ij}^{(s)})^{n-2}},$$

причем в силу условия c

$$\lim_{\rho\to 0}\overline{\lim_{s\to\infty}}\,\delta(\rho,s)=0. \tag{1.54'}$$

Согласно (1.51) и (1.54)

$$(1-\delta(\rho,s))\sum_{(x,\rho)}C_{1i}^{(s)}\leqslant C^{(s)}(x,\rho)\leqslant\sum_{(x,\rho)}C_{1i}^{(s)}+\sum{}'C_{1i}^{(s)}+\sum_{(x,\rho')}C_{2i}^{(s)},$$

откуда, учитывая (1.52) и (1.54′) и пользуясь условием d (или d'), приходим к равенству (1.9) (или (1.47)). Теорема доказана.

Примеры

Приведем теперь два простых примера, иллюстрирующих возможные применения теоремы 1.5.

Пример 1 (объемное распределение $F^{(s)}$). Пусть множество $F^{(s)}\subset\subset R_3$ состоит из конечного числа конгруэнтных тел $F_i^{(s)}$, расположенных так, что некоторые их точки образуют пространственную кубическую решетку, лежащую в области $\Omega<R_3$. Обозначим периоды решетки через $l=l^{(s)}$, емкости тел $F_i^{(s)}$ — через $C=C_i^{(s)}$, а их диаметры — через $d=d_i^{(s)}$. Рассмотрим последовательность задач такую, что при $s\to\infty$ $l\to 0$, $d\leqslant\frac{1}{3}l$ и существует предел

$$\lim_{l\to 0}\frac{C}{l^3}=q.$$

Покажем, что в этом случае все условия теоремы 1.5 выполняются, причем $c(x)=q$. Прежде всего, $F^{(s)}=\bigcup_i F_i^{(s)}$ (т. е. $F_{2i}^{(s)}=\varnothing$,

$F_{1i}^{(s)} = F_i^{(s)}$) и справедливость условий a и b очевидна. Далее, при $l \to 0$

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ r_{ij}^{(s)} < \rho}} \frac{C_i^{(s)}}{r_{ij}^{(s)}} \leqslant 3C \sum_{0 < \sqrt{m^2+n^2+k^2} \leqslant \frac{\rho}{l}} \frac{1}{l\sqrt{m^2+n^2+k^2}} \sim \frac{3C}{l^3} \int_{|x|<\rho} \frac{dx}{|x|} =$$

$$= 6\pi\rho^2 \frac{C}{l^3} \to 6\pi\rho^2 q,$$

так что $\delta(\rho) \leqslant 6\pi\rho^2 q$ и $\lim\limits_{\rho \to 0} \delta(\rho) = 0$. Следовательно, условие c тоже выполняется.

Поскольку при $l \to 0$ в шар $K(x, \rho)$ попадает $\frac{V_3(\rho)}{l^3}(1 + o(1))$ тел $F_i^{(s)}$, где $V_3(\rho) = \frac{4}{3}\pi\rho^3$ — объем шара,

$$\frac{1}{V_3(\rho)} \sum_{(x,\rho)} C_i^{(s)} = \frac{C}{l^3}(1 + o(1)) \text{ при } l \to 0,$$

откуда вытекает справедливость условия d, причем $c(x) = q$. Таким образом, все условия теоремы 1.5 установлены. Поэтому при $l \ll 1$ и $C \sim cl^3$ нулевые краевые условия на поверхностях тел можно приближенно учесть, введя в уравнение (1.1) эффективный потенциал, равный $\frac{C}{l^3}$. Для довольно широкого класса тел емкость C известна [19]. В частности, если $F_i^{(s)}$ — шары радиуса a, то $C = 4\pi a$.

Пример 2 (поверхностное распределение $F^{(s)}$). Пусть $F^{(s)} \subset R_3$ состоит из цилиндров произвольного сечения, расположенных так, что некоторые их прямые (например, оси) образуют квадратную решетку, лежащую на куске плоскости $\Gamma \subset R_3$. Обозначим периоды решетки через $l = l^{(s)}$, а диаметры цилиндров — через $d = d^{(s)}$ и рассмотрим последовательность задач таких, что при $s \to \infty$ $l \to 0$, $d \to 0$ и существует предел

$$\lim_{s \to \infty} \left(l \ln \frac{1}{d} \right) = \frac{1}{q}. \tag{1.55}$$

Предположим, что при любом s в сечение каждого цилиндра можно вписать круг радиуса $d_1 \geqslant c_1 d$, где c_1 больше нуля и не зависит от s. Покажем, что в этом случае все условия теоремы 1.5 выполняются, причем в условии d' $c_\Gamma(x) = 4\pi q$.

Представим $F^{(s)}$ в виде

$$F^{(s)} = (\bigcup_i F_{1i}^{(s)}) \cup (\bigcup_i F_{2i}^{(s)}),$$

где $F_{2i}^{(s)} = F^{(s)} \cap K_i$, K_i — замкнутые кубы с центрами в узлах решетки и ребрами длины $l^{3/2}$, параллельными (или перпендикулярными) основным направлениям в решетке, а $F_{1i}^{(s)}$ — оставшиеся цилиндры $l - l^{3/2}$ (рис. 7). Справедливость условия a очевидна. Чтобы проверить остальные условия, оценим сначала емкость кругового цилиндра радиуса r и высоты $h \geqslant c\,|\ln r|^{-\alpha}$, $\alpha, c = \text{const}$, $\alpha, c > 0$. Для этого впишем в него эллипсоид вращения с полуосями $\frac{h}{2}$ и r и опишем вокруг него аналогичный эллипсоид с полуосями $\frac{h}{2}\sqrt{1+|\ln r|^{-2\alpha}}$ и $r\sqrt{1+|\ln r|^{2\alpha}}$. Пользуясь известной формулой для емкости $C_э$ эллипсоида вращения с полуосями a и b [19]

$$C_э = 8\pi\sqrt{a^2-b^2}\left(\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^{-1}$$

и учитывая свойство монотонности емкости, находим асимптотическую формулу для емкости такого цилиндра

$$C = \frac{2\pi h}{|\ln r|}(1+o(1)), \quad r\to 0, \quad h \geqslant c\,|\ln r|^{-\alpha}. \tag{1.56}$$

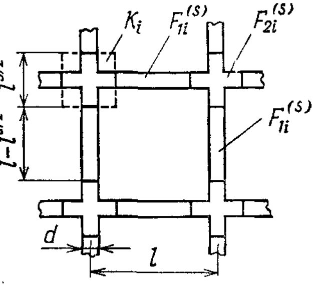

РИС. 7.

Емкость C_{1i} цилиндра $F_{1i}^{(s)}$ оценивается снизу и сверху емкостями круговых цилиндров высоты $l - l^{3/2}$ и радиусов $\frac{d_1}{2}$ и $\frac{d}{2}$ соответственно. Поэтому, полагая в (1.56) $h = l - l^{3/2}$ и $r = \frac{d_1}{2}$ или d и учитывая, что $d \geqslant d_1 \geqslant c_1 d$ и $l \geqslant c\,|\ln d|^{-1}$, получаем при $l\to 0$

$$C_{1i} = \frac{2\pi l}{|\ln d|}(1+o(1)). \tag{1.57}$$

Аналогично, оценивая емкость C_{2i} множества $F_{2i}^{(s)}$ сверху удвоенной емкостью кругового цилиндра высоты $l^{3/2}$ и диаметра $2d$, находим при $l\to 0$

$$C_{2i} \leqslant \frac{4\pi l^{3/2}}{|\ln d|}(1+o(1)). \tag{1.58}$$

Проверим теперь условия b, c и d' теоремы. Так как при $l\to 0$ в шар $K(x,\rho)$ попадает $\frac{\pi\rho^2}{l^2}(1+o(1))$ множеств $F_{2i}^{(s)}$ и $\frac{2\pi\rho^2}{l^2}(1+o(1))$ множеств $F_{1i}^{(s)}$, то согласно (1.57), (1.58)

$$\sum_{(x,\rho)} C_{2i} = \frac{C_{2i}}{l^2}\pi\rho^2(1+o(1)) \leqslant \frac{4\pi^2\rho^2}{l^{1/2}|\ln d|}(1+o(1)),$$

$$\sum_{(x,\rho)} C_{1i} = \frac{2C_{1i}}{l^2}\pi\rho^2(1+o(1)) = \frac{4\pi^2\rho^2}{l\,|\ln d|}(1+o(1)),$$

откуда в силу (1.55) следуют условия b и d', причем $c(x) = 4\pi q$.

Далее,

$$\sum_{\substack{i\neq j\\ r_{ij}<\rho}} \frac{C_{1i}}{r_{ij}} = \sum_{i\neq j}{}' \frac{C_{1i}}{r_{ij}} + \sum_{r_{ij}<\rho}{}'' \frac{C_{1i}}{r_{ij}},$$

где первая сумма распространяется на шесть ближайших к $F_{1j}^{(s)}$ цилиндров $F_{1i}^{(s)}$, а вторая — на все остальные. Поэтому при $l \to 0$ получаем

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ r_{ij} < \rho}} \frac{C_{1i}}{r_{ij}} \leqslant \frac{12 C_{1i}}{l^{3/2}} + 4 \sum_{0 < \sqrt{m^2+n^2} \leqslant \frac{\rho}{l}} \frac{C_{1i}}{l\sqrt{m^2+n^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{24\pi}{l^{1/2} |\ln d|} + \frac{16\pi^2 \rho}{l |\ln d|} \right) (1 + o(1)),$$

откуда в силу (1.55) $\lim\limits_{\rho \to 0} \delta(\rho) = 0$ и, значит, условие c также выполнено.

Таким образом, при $l \ll 1$ и $d \ll l$ нулевые краевые условия на решетке можно приближенно учесть, введя на куске плоскости Γ краевые условия

$$u^+ = u^- = u, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^- = \frac{4\pi}{l |\ln d|} u.$$

§ 5. МЕРА, СВЯЗАННАЯ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ МНОЖЕСТВ $F^{(s)}$

В § 3 рассмотрены объемное и поверхностное распределения множеств $F^{(s)}$. Из полученных результатов видно, что в обоих случаях последовательность решений задач (1.6), (1.7) сходится (при выполнении условий (1.9) или (1.47)) к функции $u(x)$, которая удовлетворяет в области Ω соотношению

$$\int_\Omega u(x) \Delta\varphi(x)\, dx - \int_\Omega u(x) \varphi(x)\, dm(x) = \int_\Omega f(x) \varphi(x)\, dx, \qquad (1.59)$$

где $\varphi(x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая и финитная в Ω функция, m — мера, которая при объемном распределении $F^{(s)}$ абсолютно непрерывна и имеет плотность $c(x)$, а при поверхностном — сосредоточена на Γ и имеет плотность $c_\Gamma(x)$. Это непосредственно следует из (1.10) и (1.48), (1.49).

Таким образом, предельная функция удовлетворяет в обобщенном смысле уравнению $\Delta u - m'u = f$, где мера m определяется лишь последовательностью множеств $F^{(s)}$.

Покажем, что аналогичный результат получается и в общем случае: если последовательность решений задачи (1.6), (1.7) в областях $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)}$ (продолженных нулем на $F^{(s)}$) сходится к некоторой функции $w(x)$, то $w(x)$ почти всюду равна функции $u(x)$, удовлетворяющей соотношению (1.59), где мера m определенным образом строится при помощи последовательности множеств $F^{(s)}$ и не зависит от $f(x)$. Как и в § 3, для простоты рассмотрим случай $\Omega = R_n$.

Пусть E — произвольное множество в R_n, $\mathfrak{M}_E$ — конечная система замкнутых непересекающихся множеств $F_i \subset E$, а G_i — открытые множества из R_n такие, что $F_i \subset G_i$. Каждому $E \subset R_n$ поставим в соответствие число

$$m(E) = \sup_{\mathfrak{M}_E} \sum_{\substack{i \\ F_i \subset \mathfrak{M}_E}} \inf_{G_i \supset F_i} \overline{\lim_{s \to \infty}} C(F^{(s)} \cap G_i), \tag{1.60}$$

где $C(F^{(s)} \cap G_i)$ — емкость множества $F^{(s)} \cap G_i$, верхняя грань берется по всевозможным конечным системам $\mathfrak{M}_E$. Очевидно, $m(E)$ — монотонно возрастающая функция множества, которая может принимать значения от нуля до бесконечности.

Пусть в задаче (1.6), (1.7) $f(x) \leqslant 0$ и последовательность решений $\{u^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ этой задачи (продолженных нулем на $F^{(s)}$) сходится к функции $u(x)$, так что для любой ограниченной подобласти $\Omega' \subset R_n$

$$\int_{\Omega'} |u^{(s)}(x) - u(x)|\, dx \to 0 \text{ при } s \to \infty.$$

Тогда согласно лемме 1.3 почти всюду

$$u(x) = U^{-f}(x) - U^{\mu}(x), \tag{1.61}$$

где

$$U^{-f}(x) = -\frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{f(\xi)\, d\xi}{|x - \xi|^{n-2}}, \quad U^{\mu}(x) = \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{d\mu(\xi)}{|x - \xi|^{n-2}},$$

а мера μ удовлетворяет неравенствам (1.15) и (1.39).

Будем считать, что предельная функция $u(x)$ определяется равенством (1.61) всюду, и дальше рассматривать именно эту функцию. Тогда $u(x)$ представима в виде разности непрерывной $U^{-f}(x)$ ($f(x)$ непрерывна и финитна) и супергармонической $U^{\mu}(x)$ функций и, следовательно, полунепрерывна сверху. Кроме того, в силу (1.19) $0 \leqslant u(x) \leqslant U^{-f}(x)$ всюду.

Введем обозначения:

$$S_\alpha = \{x \in R_n : u(x) \geqslant \alpha\},$$
$$O = \{x \in R_n : u(x) = 0\}, \quad S = \bigcup_{\alpha > 0} S_\alpha, \quad G = R_n \setminus \bar{O}.$$

Так как функция $u(x)$ полунепрерывна сверху и стремится к нулю на бесконечности, то множества S_α замкнуты и ограничены. Очевидно, $S_{\alpha_1} \subseteq S_{\alpha_2}$ при $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$ и $G \subseteq S$. Покажем, что сужение функции множества $m(E)$, определяемой формулой (1.60), на класс борелевских множеств $E \subset S$ есть σ-аддитивная мера, конечная и абсолютно непрерывная относительно меры μ на любом S_α ($\alpha > 0$). Это вытекает из следующей леммы (основной при выводе уравнения (1.59)).

Лемма 1.5. *Для любого борелевского множества $E \subset S$ выполняется равенство*

$$m(E) = \int_E \frac{d\mu(x)}{u(x)}. \qquad (1.62)$$

Для доказательства этой леммы необходимо установить некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 1.6. *Пусть $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где $E_k = E \cap T_k$, T_k — не пересекаются, причем множества $S_m = \bigcup_{k=1}^{m} T_k$ замкнуты при любом $m \geqslant 1$. Тогда*

$$m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k).$$

Доказательство. В силу определения $m(E)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такая конечная система $\mathfrak{M}_E$ непересекающихся замкнутых множеств $F_i \subset E$ ($i = 1, 2, \ldots, N_\varepsilon$), что

$$m(E) \leqslant \sum_{\substack{i \\ F_i \in \mathfrak{M}_E}} \overline{\lim_{s\to\infty}} C(F^{(s)} \cap G_i) + \varepsilon \qquad (1.63)$$

для любых открытых множеств $G_i \supset F_i$.

Рассмотрим множества $F_{1i} = T_1 \cap F_i$. Они замкнуты, не пересекаются и принадлежат множеству $E_1 = E \cap T_1$. Поэтому в силу (1.60) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие открытые множества $G_{1i} \supset F_{1i}$, что

$$m(E_1) \geqslant \sum_i \overline{\lim_{s\to\infty}} C(F^{(s)} \cap G_{1i}) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим теперь множества $F_{2i} = F_i \cap S_2 \setminus G_{1i}$. Они замкнуты, не пересекаются и принадлежат множеству $E_2 = E \cap T_2 = E \cap S_2 \setminus E_1$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие открытые множества $G_{2i} \supset F_{2i}$, что

$$m(E_2) \geqslant \sum_i \overline{\lim_{s\to\infty}} C(F^{(s)} \cap G_{2i}) - \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

Дальнейшее построение множеств G_{ki} проводится по индукции. Допустим, множества G_{k-1i} уже построены. Рассмотрим множества $F_{ki} = F_i \cap S_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} G_{ji}$. Они замкнуты, не пересекаются и принадлежат множеству $E_k = E \cap S_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$. Поэтому в силу (1.60) при любом $\varepsilon > 0$ существуют такие открытые множества $G_{ki} \supset F_{ki}$, что

$$m(E_k) \geqslant \sum_i \overline{\lim_{s\to\infty}} C(F^{(s)} \cap G_{ki}) - \frac{\varepsilon}{2^k}, \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad (1.64)$$

Очевидно, $F_i \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_{ki}$, и, следовательно, в неравенстве (1.63) можно положить $G_i = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_{ki}$. В силу полуаддитивности емкости

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} C(F^{(s)} \cap G_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lim_{s\to\infty}} C(F^{(s)} \cap G_{ki}),$$

откуда, учитывая (1.63) и (1.64), получаем

$$m(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) + 2\varepsilon.$$

Поскольку ε — любое положительное число,

$$m(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k).$$

Обратное неравенство вытекает непосредственно из определения $m(E)$. Таким образом, лемма 1.6 доказана.

Лемма 1.7. *Пусть μ — мера в R_n, а E — произвольное ограниченное борелевское множество. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует убывающая последовательность замкнутых множеств $F^k \subset E$ ($k = 1, 2, \ldots$), удовлетворяющих условиям*

a) $F^k = \bigcup\limits_{i=1}^{N_k} F_i^k$ ($N_k < \infty$), при любом k множества F_i^k замкнуты, не пересекаются и каждое F_i^k полностью принадлежит некоторому F_j^{k-1};

b) диаметры $d(F_i^k)$ множеств F_i^k стремятся к нулю при $k \to \infty$ т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_i d(F_i^k) = 0$;

c) для любых открытых множеств $G_i^k \supset F_i^k$

$$\mu(E) \leqslant \sum_{i=1}^{N_k} \mu(G_i^k) + \varepsilon.$$

При этом множества G_i^k можно выбрать так, что $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_i d(G_i^k) = 0$ *и каждое G_i^k принадлежит некоторому G_j^{k-1}.*

Доказательство. Поскольку E — ограниченное борелевское множество и в силу (1.15) $\mu(E) < \infty$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество $F' \subset E$ диаметра $d_1 < \infty$, что $\mu(E) < \mu(F') + \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, для любого открытого множества $G^1 \supset F^1$ $\mu(E) < \mu(G^1) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Допустим, что построено множество F^k, удовлетворяющее условию a, причем $\max\limits_i d(F_i^k) = d_k$, и для любых открытых множеств

$G_i^k \supset F_i^k$

$$\mu(E) < \sum_{i=1}^{N_k} \mu(G_i^k) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2^i}. \qquad (1.65)$$

Покажем, как построить множество F^{k+1}, удовлетворяющее условиям a, (1.65) и такое, что $\max_i d(F_i^{(k+1)}) = \frac{d_k}{2}$. Разобьем множество F_1^k на m_1 непересекающихся частей F_{1j}^k ($F_1^k = \bigcup_{j=1}^{m_1} F_{1j}^k$) так, чтобы диаметр каждой части не превышал $\frac{d_k}{2}$. Очевидно, m_1 ограничено сверху числом C, зависящим только от размерности пространства. Положим $F_1^{k+1} = \bar{F}_{11}^k$ и подберем такое открытое множество $\tilde{G}_1^{k+1} \supset \supset \bar{F}_1^{k+1}$, чтобы

$$\mu(\tilde{G}_1^{k+1}) < \mu(F_1^{k+1}) + \frac{\varepsilon}{CN_k 2^{k+1}}.$$

Положим далее $F_2^{k+1} = \overline{F_{12}^k \setminus \tilde{G}_1^{k+1}}$ и аналогично подберем $\tilde{G}_2^{k+1}$. Вообще, если множества F_j^{k+1} и $\tilde{G}_j^{k+1}$ ($j = 1, 2, \ldots, p$, $p - 1 < m_1$) построены, то следует положить $F_p^{k+1} = \overline{F_{1p}^{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{p-1} \tilde{G}_j^{k+1}}$ и подобрать открытое множество $\tilde{G}_p^{k+1} \supset F_p^{k+1}$ так, чтобы

$$\mu(\tilde{G}_p^{k+1}) < \mu(F_p^{k+1}) + \frac{\varepsilon}{CN_k 2^{k+1}}. \qquad (1.66)$$

Очевидно, множества F_j^{k+1} замкнуты, не пересекаются, $d(F_j^{k+1}) \leqslant \leqslant \frac{d_k}{2}$ и $F_j^{k+1} \subset F_1^k$ при $j = 1, 2, \ldots, m_1$. Кроме того, $F_1^k \subset \subset \bigcup_{j=1}^{m_1} \tilde{G}_j^{k+1}$. Поэтому в (1.65) в качестве G_1^k можно взять множество $\bigcup_{j=1}^{m_1} \tilde{G}_j^{k+1}$. Тогда, поскольку $\mu(G_1^k) < \sum_{j=1}^{m_1} \mu(\tilde{G}_j^{k+1})$, из (1.66) следует, что для любых открытых множеств $G_j^{k+1} \supset F_j^{k+1}$ ($j = 1, 2, \ldots, m_1$) выполняется неравенство

$$\mu(G_1^k) \leqslant \sum_{j=1}^{m_1} \mu(G_j^{k+1}) + \frac{\varepsilon}{N_k 2^{k+1}}.$$

Аналогичную операцию выполняем с каждым множеством F_i^k ($i = 1, 2, \ldots, N_k$). В результате получаем замкнутые непересекающиеся множества F_j^{k+1} диаметра $d(F_j^{k+1}) \leqslant \frac{d_k}{2}$ такие, что $F_j^{k+1} \subset \subset F_i^k$ при $\sum_{r=1}^{i-1} m_r < j < \sum_{r=1}^{i} m_r = M_i$ и для любых $G_j^{k+1} \supset F_j^{k+1}$

$$\mu(G_i^k) \leqslant \sum_{j=M_{i-1}}^{M_i} \mu(G_j^{k-1}) + \frac{\varepsilon}{N_k 2^{k+1}}.$$

Отсюда, учитывая (1.65), находим

$$\mu(E) \leqslant \sum_{i=1}^{N_{k+1}} \mu(G_i^{k+1}) + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\varepsilon}{2^i}, \quad N_{k+1} = \sum_{r=1}^{N_k} m_r,$$

для любых открытых множеств $G_i^{k+1} \supset F_i^{k+1}$.

Таким образом, условия a, b и c установлены. Последнее утверждение леммы о том, что множества G_i^k можно выбирать так, чтобы каждое G_i^k принадлежало какому-нибудь G_j^{k-1} и $\lim\limits_{k\to\infty} \{\max\limits_i d(G_i^k)\} = 0$, следует непосредственно из предыдущего. Лемма 1.7 доказана.

Докажем вспомогательную лемму, в которой устанавливается неравенство, аналогичное (1.41).

Лемма 1.8. *Пусть $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots$ — убывающая последовательность ограниченных открытых множеств, таких, что при $i \to \infty$ диаметр G_i стремится к нулю. Тогда выполняется неравенство*

$$\mu(G_i) \leqslant \{\max_{\overline{G}_i} u(x) + \varepsilon(G_i)\} \varliminf_{s\to\infty} C(G_i \cap F^{(s)}), \tag{1.67}$$

где $\varepsilon(G_i) \to 0$ при $i \to \infty$.

Доказательство. Исходя из неравенства (1.42) и рассуждая так же, как при доказательстве леммы 1.4, получаем

$$\mu(G_i) \leqslant \sup_{G_i} \left\{U^{-f}(x) - \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{R_n \setminus G_i} \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\right\} \varliminf_{s\to\infty} C(G_i \cap F^{(s)}). \tag{1.68}$$

Предположим, что неравенство (1.67) не выполняется. Тогда из (1.68) следует, что найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такая последовательность точек $x_i \in G_i$, для которых выполняются неравенства

$$U^{-f}(x_i) - \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{R_n \setminus G_i} \frac{d\mu(\xi)}{|x_i-\xi|^{n-2}} > \max_{\overline{G}_i} u(x) + \varepsilon.$$

Поскольку множества G_i ограничены, можно выделить сходящуюся подпоследовательность точек $\{x_i,\ i \in I,\ x_i \to x_0\}$, и так как $G_i \supseteq G_{i+1}$, то $x_0 \in \overline{G}_i$ для всех $i \in I$. Учитывая, что диаметры множеств G_i стремятся к нулю, отсюда заключаем, что для любого шара $K(x_0, \rho)$ радиуса $\rho > 0$ с центром в точке x_0 справедливо неравенство

$$U^{-f}(x_i) - \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{R_n \setminus K(x_0,\rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x_i-\xi|^{n-2}} > u(x_0) + \varepsilon, \qquad i \in I. \tag{1.69}$$

Поскольку функция $U^{-f}(x)$ непрерывна всюду, а функция

$$U_\rho^\mu(x) = \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{R_n \setminus K(x_0,\rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}$$

непрерывна во внутренних точках шара $K(x_0, \rho)$, из (1.69) следует, что при любом $\rho > 0$

$$U^{-f}(x) - \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{R_n \setminus K(x_0,\rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x_0 - \xi|^{n-2}} \geqslant u(x_0) + \varepsilon$$

или в силу (1.61)

$$\frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{K(x_0,\rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x_0 - \xi|^{n-2}} \geqslant \varepsilon > 0.$$

Но это, как показано в доказательстве леммы 1.4, противоречит ограниченности функции $u(x)$. Таким образом, лемма 1.8 доказана.

Теперь можно перейти непосредственно к доказательству основной леммы 1.5. Установим сначала равенство (1.62) для множеств $E \subset S_\alpha = \{x \in R_n : u(x) \geqslant \alpha > 0\}$. Пусть $\beta = \max\limits_{x \in \bar{E}} u(x)$. Разделим отрезок $[\alpha, \beta]$ на N равных частей и рассмотрим множества $T_i = \left\{x \in R_n : \beta - \frac{\beta - \alpha}{N} i \leqslant u(x) < \beta - \frac{\beta - \alpha}{N}(i-1)\right\}$, $i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, N$. Так как функция $u(x)$ полунепрерывна сверху и в силу (1.19) стремится к нулю при $x \to \infty$, то T_i — ограниченные борелевские множества, а множества $\bigcup\limits_{i=0}^{m} T_i = \left\{x \in R_n : u(x) \geqslant \beta - \frac{\beta - \alpha}{N} m\right\}$ $(m = 0, 1, \ldots, N)$ замкнуты. Тогда $E = \bigcup\limits_{i=1}^{N} E_i$, где $E_i = E \cap T_i$ — борелевские множества (возможно, некоторые из них пустые), и выполняются условия леммы 1.6.

Рассмотрим множество $E_i \neq \varnothing$. В силу лемм 1.7, 1.8 и определения $m(E)$ (1.60) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такая конечная система замкнутых непересекающихся множеств $F_{ik} \subset E_i$ $(k = 1, 2, \ldots, N_i)$ и такие открытые множества $G_{ik} \supset F_{ik}$, что выполняются неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\mu(E_i) \leqslant \sum_k \mu(G_{ik}) + \varepsilon, \\ &m(E_i) \geqslant \sum_k \overline{\lim_{s\to\infty}}\, C(F^{(s)} \cap G_{ik}) - \varepsilon, \\ &\mu(G_{ik}) \leqslant \{\max_{x \in \bar{G}_{ik}} u(x) + \varepsilon\} \underline{\lim_{s\to\infty}}\, C(F^{(s)} \cap G_{ik}). \end{aligned}\right\} \quad (1.70)$$

Так как $u(x)$ полунепрерывна сверху, а $F_{ik} \subset E_i = \left\{x \in E : \beta - \frac{\beta - \alpha}{N} i \leqslant u(x) < \beta - \frac{\beta - \alpha}{N}(i-1)\right\}$, то, не изменяя этих неравенств, можно выбрать G_{ik} так, чтобы $\max\limits_{\bar{G}_{ik}} u(x)$ для всех $k = 1, 2, \ldots, N_i$ стал меньше $\bar{u}_i = \beta - \frac{\beta - \alpha}{N}(i-1)$. Тогда из

(1.70) вытекает неравенство

$$m(E_i) \geqslant \frac{\mu(E_i) - \varepsilon}{\bar{u}_i + \varepsilon} - \varepsilon.$$

Так как ε здесь может быть сколь угодно малым и $\bar{u}_i > 0$, то

$$m(E_i) \geqslant \frac{\mu(E_i)}{\bar{u}_i}.$$

Отсюда в силу леммы 1.6

$$m(E) \geqslant \sum_{i=0}^{N} \frac{\mu(E_i)}{\bar{u}_i} \geqslant \int_E \frac{d\mu(x)}{u(x)} - \frac{\mu(E)}{N} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\alpha^2}.$$

Устремляя N к бесконечно ти, приходим к неравенству

$$m(E) \geqslant \int_E \frac{d\mu(x)}{u(x)}.$$

Чтобы получить обратное неравенство, снова воспользуемся представлением $E = \bigcup_{i=0}^{N} E_i$, $E_i = E \cap T_i$. Из определения $m(E_i)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая конечная система $\mathfrak{M}_{E_i}$ непересекающихся замкнутых множеств $F_{ik} \subset E_i$ ($F_{ik} \in \mathfrak{M}_{E_i}$, $k = 1, 2, \ldots, N_i$), что для любых открытых множеств $G_{ik} \supset F_{ik}$ выполняется неравенство

$$m(E_i) \leqslant \sum_{k=1}^{N_i} \varlimsup_{s \to \infty} C(F^{(s)} \cap \bar{G}_{ik}) + \varepsilon. \tag{1.71}$$

Поскольку мера μ σ-аддитивна, не изменяя этого неравенства, G_{ik} можно выбрать так, чтобы

$$\mu(E_i) \geqslant \sum_{k=1}^{N_i} \mu(\bar{G}_{ik}) - \varepsilon. \tag{1.72}$$

Как было показано выше, функция $u(x)$ равна разности непрерывной функции и потенциала меры μ и, следовательно, обладает таким свойством непрерывности (§ 1): при любом $\eta > 0$ существует открытое множество G_η емкости меньше η такое, что на дополнении к нему она непрерывна. Воспользовавшись этим, выберем множество G_η такое, чтобы его емкость $C(G_\eta)$ была меньше $\frac{\varepsilon}{\max\limits_i N_i}$ и на замкнутом множестве $F_\eta = R_n \setminus G_\eta$ функция $u(x)$ была непрерывна. В силу неравенства (1.39)

$$\mu(\bar{G}_{ik}) \geqslant \mu(\bar{G}_{ik} \cap F_\eta) \geqslant \inf_{\bar{G}_{ik} \cap F_\eta} u(x) \varlimsup_{s \to \infty} C(F^{(s)} \cap \bar{G}_{ik} \cap F_\eta). \tag{1.73}$$

Так как $F_{ik} \subset E_i = E \cap T_i$, а $u(x)$ непрерывна на F_η, то, не изменяя неравенств (1.71) и (1.72), множества G_{ik} можно выбрать так, чтобы $\inf\limits_{\overline{G}_{ik}\cap F_\eta} u(x)$ для всех $k=1, 2, \ldots, N_i$ стал больше $\inf\limits_{F_{ik}\cap F_\eta} u(x) - \varepsilon \geqslant \underline{u}_i - \varepsilon$, где $\underline{u}_i = \beta - \frac{\beta-\alpha}{N} i$, $0 < \varepsilon < \underline{u}_i$. Тогда из (1.73) получаем

$$\varlimsup_{s\to\infty} C(F^{(s)} \cap \overline{G}_{ik} \cap F_\eta) \leqslant \frac{\mu(\overline{G}_{ik})}{\underline{u}_i - \varepsilon}. \tag{1.74}$$

В силу полуаддитивности и монотонности емкости

$$\varlimsup_{s\to\infty} C(F^{(s)} \cap \overline{G}_{ik}) \leqslant \varlimsup_{s\to\infty} C(F^{(s)} \cap \overline{G}_{ik} \cap F_\eta) + \varlimsup_{s\to\infty} C(F^{(s)} \cap \overline{G}_{ik} \cap G_\eta) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{s\to\infty} C(F^{(s)} \cap \overline{G}_{ik} \cap F_\eta) + C(G_\eta) \leqslant \varlimsup_{s\to\infty} C(F^{(s)} \cap \overline{G}_{ik} \cap F_\eta) + \frac{\varepsilon}{\max\limits_i N_i}.$$

Отсюда, учитывая (1.71), (1.72) и (1.74), находим

$$m(E_i) \leqslant \frac{\mu(E_i)}{\underline{u}_i - \varepsilon} + 3\varepsilon,$$

а так как ε можно выбрать сколь угодно малым, то

$$m(E_i) \leqslant \frac{\mu(E_i)}{\underline{u}_i}.$$

Поэтому в силу леммы 1.6

$$m(E) \leqslant \sum_{i=0}^{N} \frac{\mu(E_i)}{\underline{u}_i} \leqslant \int_E \frac{d\mu(x)}{u(x)} + \frac{\mu(E)}{N} \cdot \frac{\beta-\alpha}{\alpha^2},$$

откуда при $N \to \infty$ получаем

$$m(E) \leqslant \int_E \frac{d\mu(x)}{u(x)}.$$

Следовательно, равенство (1.62) для борелевских множеств $E \subseteq S_\alpha = \{x \in R_n : u(x) \geqslant \alpha > 0\}$ доказано. Так как множества S_α замкнуты, то справедливость (1.62) для любых борелевских множеств $E \subset S = \bigcup\limits_{\alpha>0} S_\alpha$, очевидно, вытекает из включений $S_{\alpha_1} \subseteq S_{\alpha_2}$ $(\alpha_1 > \alpha_2)$ и леммы 1.6. Таким образом, лемма 1.5 доказана.

Из леммы 1.5 следует, что для любого борелевского множества $E \subset S$ выполняется равенство

$$\mu(E) = \int_E u(x)\, dm(x), \tag{1.75}$$

где интеграл по E понимается как предел при $\alpha \to 0$ интегралов по множествам $E \cap S_\alpha$, на которых мера m конечна. Заметим, что функция $u(x)$ измерима относительно σ-алгебры борелевских множеств в R_n.

Перейдем к доказательству равенства (1.61). Пусть $\varphi(x)$ — произвольная трижды непрерывно дифференцируемая и финитная в области $G = R_n \setminus \overline{O}$ $(O = \{x \in R_n,\ u(x) = 0\})$ функция. Умножим (1.61) на $\Delta\varphi(x) = \sum_{i=1}^{(s)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}$ и проинтегрируем по G:

$$\int_G u(x)\Delta\varphi(x)\,dx = -\frac{1}{\varkappa_n}\int_G dx\Delta\varphi(x)\int\frac{f(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{n-2}} - $$

$$-\frac{1}{\varkappa_n}\int dx\Delta\varphi(x)\int\frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}.$$

Поскольку мера μ конечна, а функция $f(\xi)$ непрерывна и финитна, в правой части в обоих слагаемых можно изменить порядок интегрирования. Учитывая при этом равенство

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{\varkappa_n}\int\frac{\Delta\varphi(x)}{|x-\xi|^{n-2}}\,dx,$$

получаем

$$\int u(x)\Delta\varphi(x)\,dx - \int\varphi(x)\,d\mu(x) = \int f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Отсюда в силу (1.75) вытекает равенство

$$\int u(x)\Delta\varphi(x)\,dx - \int u(x)\varphi(x)\,dm(x) = \int f(x)\varphi(x)\,dx, \tag{1.76}$$

где второй интеграл следует понимать как предел при $\alpha\to 0$ интегралов по множествам S_α, на которых мера m конечна.

Таким образом, доказана следующая теорема [59].

Теорема 1.6. *Пусть последовательность решений $u^{(s)}(x)$ краевых задач* (1.6), (1.7) *в областях $\Omega^{(s)} = R_n \setminus F^{(s)}$ ($u^{(s)}(x)$ продолжены нулем на $F^{(s)}$) сходится к некоторой функции $w(x)$, так что для любой ограниченной подобласти $\Omega' \subset R_n$*

$$\int_{\Omega'} |u^{(s)}(x) - w(x)|\,dx \to 0 \text{ при } s\to\infty.$$

Тогда функция $w(x)$ почти всюду равна функции $u(x)$, которая в области $G = R_n \setminus \bigcap_f \overline{O}_f$, $O_f = \{x : u(x) = 0\}$, удовлетворяет равенству (1.76), *где мера m определяется формулой* (1.60).

§ 6. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Выше предполагалось, что в уравнении (1.6) правая часть $f(x)$ — достаточно гладкая функция. При изучении поведения спектра краевой задачи (1.6), (1.7) важно выяснить вопрос о сходимости функций Грина. Покажем теперь, что при определенных условиях последовательность функций Грина задачи (1.6), (1.7) в специальной метрике сходится к функции Грина задачи (1.10), (1.11). Для этого нам придется оценить разность соответствующих функций Грина. Эта оценка позволяет заменить условия (1.9) условиями интегрального типа, которые во многих случаях (в частности, в задаче со случайной границей, см. гл. IV, § 4) более удобны. Для разности решений задач (1.6), (1.7) и (1.10), (1.11) получена более точная оценка.

Оценки разности функций Грина

Чтобы не загромождать выкладки несущественными подробностями, предположим, что $\Omega \equiv R_n$ $(n \geqslant 3)$. Обозначим через $G^{(s)}(x, y)$ функцию Грина задачи (1.6), (1.7) с полюсом в точке $y \in \Omega^{(s)} = R_n \setminus F^{(s)}$,

$$\begin{aligned} &\Delta_x G^{(s)}(x, y) = -\delta(x, y), && x, y \in \Omega^{(s)}, \\ &G^{(s)}(x, y) = 0, && x \in \partial\Omega^{(s)}, \ y \in \Omega^{(s)}, \\ &G^{(s)}(x, y) \to 0, && x \to \infty, \ y \in \Omega^{(s)}, \end{aligned}$$

через $G^c(x, y)$ — функцию Грина задачи

$$\begin{gathered} \Delta_x G^c(x, y) - c(x) G^c(x, y) = -\delta(x, y), \quad x, y \in R_n, \\ G^c(x, y) \to 0, \quad x \to \infty, \quad y \in \Omega^{(s)}, \end{gathered}$$

где $\Delta_x = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\delta(x, y)$ — δ-функция, сосредоточенная в точке y, $c(x)$ — неотрицательная, непрерывная, ограниченная и суммируемая в R_n функция.

Доопределим $G^{(s)}(x, y)$ на множестве $F^{(s)}$, положив $G^{(s)}(x, y) = 0$, при $x \in F^{(s)}$ или $y \in F^{(s)}$. Пусть D — произвольная ограниченная область в R_n. Введем норму

$$\|G^{(s)} - G^c\|_{D \times D} = \int\limits_D \left(\int\limits_D |G^{(s)}(x, y) - G^c(x, y)| \, dx \right) dy \qquad (1.77)$$

и получим для нее оценку, зависящую от множества $F^{(s)}$ и функции $c(x)$.

Как известно, функцию Грина $G^c(x, y)$ можно представить в виде

$$G^c(x, y) = \frac{1}{\varkappa_n |x - y|^{n-2}} - \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{\sigma(\xi, y)}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi, \qquad (1.78)$$

где

$$\sigma(x, y) = c(x) G^c(x, y) \geqslant 0. \qquad (1.78')$$

Разобьем пространство R_n на кубы K_α (замкнутые) со стороной δ и обозначим через $\{K_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ некоторое множество кубов таких, что $C(F^{(s)} \cap K_\alpha) > 0$ при $\alpha \in \Lambda$, а через $\{K_\alpha, \alpha \in \Lambda(y)\}$ — подмножество $\{K_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$, в которое входят кубы, находящиеся на расстоянии $r \geqslant 3\sqrt{n}\,\delta$ от y.

Рассмотрим функцию

$$G_\delta^{(s)}(x, y) = \frac{1}{\varkappa_n |x-y|^{n-2}} -$$

$$- \sum_{\alpha \in \Lambda(y)} \frac{q_\alpha(y)}{C(F^{(s)} \cap K_\alpha)} \int\limits_{F^{(s)} \cap K_\alpha} \frac{d\gamma_\alpha^{(s)}(\xi)}{\varkappa_n |x-\xi|^{n-2}}, \tag{1.79}$$

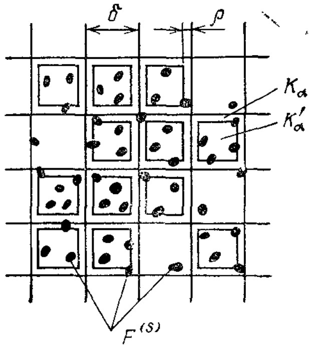

РИС. 8.

где $\gamma_\alpha^{(s)}(\xi)$ — равновесная мера множества $F^{(s)} \cap K_\alpha$, $q_\alpha(y) = \int\limits_{K_\alpha} \delta(x, y)\, dx$, а $\sigma(x, y)$ определяется по формуле (1.78′). Оценим норму $\| G^{(s)} - G_\delta^{(s)} \|_{D \times D}$. Для этого в каждом кубе K_α ($\alpha \in \Lambda$) выделим меньший куб K'_α с тем же центром и стороной $\delta' = \delta - 2\rho$, $\delta \gg \rho > 0$ (рис. 8). Выберем произвольный куб K_β ($\beta \in \Lambda(y)$) и представим функцию $G_\delta^{(s)}(x, y)$ при $x \in K'_\beta$ в виде

$$G_\delta^{(s)}(x, y) = G^c(x, y) - \frac{q_\beta(y)}{C(F^{(s)} \cap K_\beta)} \int \frac{d\gamma_\beta^{(s)}(\xi)}{\varkappa_n |x-\xi|^{n-2}} + \\ + G_{\beta\delta}^{(s)}(x, y) - G^c(x, y), \tag{1.80}$$

где

$$G_{\beta\delta}^{(s)}(x, y) = \frac{1}{\varkappa_n |x-y|^{n-2}} - \sum_{\substack{\alpha \neq \beta \\ \alpha \in \Lambda(y)}} \frac{q_\alpha(y)}{C(F^{(s)} \cap K_\alpha)} \int \frac{d\gamma_\alpha^{(s)}(\xi)}{\varkappa_n |x-\xi|^{n-2}}.$$

В силу (1.78) и (1.79) справедлива оценка

$$|G_{\beta\delta}^{(s)}(x, y) - G^c(x, y)| \leqslant \sum_{\alpha \neq \beta} \int \frac{d\mu_\alpha^{(s)}(\xi, y)}{\varkappa_n |x-\xi|^{n-2}} + \\ + \int\limits_{Q(y, \beta)} \frac{\sigma(\xi, y)}{\varkappa_n |x-\xi|^{n-2}}\, d\xi, \tag{1.81}$$

где $Q(y, \beta) = R_n \setminus \bigcup\limits_{\substack{\alpha \neq \beta \\ \alpha \in \Lambda(y)}} K_\alpha$ и

$$\mu_\alpha^{(s)}(E, y) = \begin{cases} \int\limits_{E \cap K_\alpha} \sigma(\xi, y)\, d\xi - \dfrac{q_\alpha(y)}{C(F^{(s)} \cap K_\alpha)} \gamma_\alpha^{(s)}(E), & \alpha \in \Lambda(y), \\ 0, & \alpha \notin \Lambda(y). \end{cases} \tag{1.81′}$$

Поскольку $\int\limits_{K_\alpha} d\gamma_\alpha^{(s)}(\xi) = C(F^{(s)} \cap K_\alpha)$ и, следовательно, $\int\limits_{K_\alpha} d\mu_\alpha^{(s)} = 0$, справедливо неравенство

$$\sum_{\alpha \neq \beta} \left| \int \frac{d\mu_\alpha^{(s)}(\xi, y)}{\varkappa_n |x-\xi|^{n-2}} \right| \leqslant \sum_{\alpha \neq \beta}{}' \left| \int \frac{d\mu_\alpha^{(s)}(\xi, y)}{\varkappa_n |x-\xi|^{n-2}} \right| + \\ + \sum{}'' \left| \int u_\alpha(x, \xi)\, d\mu_\alpha^{(s)}(\xi, y) \right|, \tag{1.82}$$

где $u_\alpha(x, \xi) = \frac{1}{\varkappa_n |x-\xi|^{n-2}} - \frac{1}{\varkappa_n |x-\xi_\alpha|^{n-2}}$, ξ_α — центры кубов K_α, сумма Σ' распространяется на кубы K_α, которые пересекаются с шаром радиуса $2\sqrt{n}\,\delta$ с центром в точке x, а Σ'' — на все остальные.

Оценим первую сумму в (1.82) при $x \in K'_\beta$. Так как в ней $|x-\xi| \leqslant 3\sqrt{n}\,\delta \leqslant r \leqslant |\xi - y|$, то $|\xi - y| > \frac{1}{2}|x-y|$. Поэтому из (1.78), (1.78′) и (1.81′) вытекает такое неравенство для вариации заряда $\mu_\alpha^{(s)}(\xi, y)$ на кубе K_α:

$$|\mu_\alpha^{(s)}(K_\alpha, y)| \leqslant \int_{K_\alpha} \sigma(\xi, y)\, d\xi + \frac{q_\alpha(y)}{C(F^{(s)} \cap K_\alpha)} \int_{K_\alpha} d\gamma_\alpha^{(s)}(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{n-1}}{\varkappa_n} \max_{x \in K_\alpha} c(x) \frac{\delta^n}{|x-y|^{n-2}}.$$

Отсюда, учитывая, что при $x \in K'_\beta$ $|\xi - x| \geqslant \rho$, получаем

$$\left| \sum_{\alpha \neq \beta}' \int \frac{d\mu_\alpha^{(s)}(\xi, y)}{\varkappa_n |x-\xi|^{n-2}} \right| < A \frac{\delta^n}{\rho^{n-2}} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}}, \qquad (1.83)$$

где $A = \mathrm{const}$ (A, A_1, ...— всюду постоянные, не зависящие от δ, ρ, r, множеств $F^{(s)}$ и Λ).

Перейдем к оценке второй суммы. Из формул (1.78), (1.78′) и (1.81′) следует, что для любого $\xi \in K_\alpha$, $\alpha \in \Lambda(y)$, в этой сумме

$$|\mu_\alpha^{(s)}(K_\alpha, y)| \leqslant \frac{A\delta^n}{(|\xi - y| - \sqrt{n}\,\delta)^{n-2}},$$

$$\max_{\zeta \in K_\alpha} |u_\alpha(x, \zeta)| \leqslant \frac{A\delta}{(|x-\xi| - \sqrt{n}\,\delta)^{n-1}}.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\sum_\alpha'' \left| \int u_\alpha(x, \xi)\, d\mu_\alpha^{(s)}(\xi, y) \right| \leqslant A\delta \int_{\Omega(x,y)} \frac{c(\xi)\, d\xi}{(|x-\xi| - \sqrt{n}\,\delta)^{n-1} (|\xi - y| - \sqrt{n}\delta)^{n-2}},$$

где

$$\Omega(x, y) = \{\xi \in R_n : |x-\xi| \geqslant 2\sqrt{n}\,\delta,\ |\xi - y| \geqslant 3\sqrt{n}\,\delta\}.$$

Так как в области $\Omega(x, y)$

$$|x-\xi| - \sqrt{n}\,\delta \geqslant \frac{1}{2}|x-\xi|, \quad |\xi - y| - \sqrt{n}\,\delta \geqslant \frac{2}{3}|\xi - y|,$$

то

$$\sum_\alpha'' \left| \int u_\alpha(x, \xi)\, d\mu_\alpha^{(s)}(\xi, y) \right| < A\delta \int_{\Omega(x,y)} \frac{c(\xi)\, d\xi}{|x-\xi|^{n-1} |\xi - y|^{n-2}}. \quad (1.84)$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие неравенства.

Пусть $0 < \lambda$, $\mu < n$, а $c(x)$ — ограниченная и при $\lambda + \mu \leqslant n$ суммируемая в R_n функция. Тогда при всех $x, y \in R_n$

$$\int\limits_{R_n} \frac{c(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{\lambda}|\xi-y|^{\mu}} \leqslant \begin{cases} \dfrac{C}{|x-y|^{\lambda+\mu-n}}, & \lambda+\mu > n, \\ C\left(1+\ln^{+}\dfrac{1}{|x-y|}\right), & \lambda+\mu = n, \\ C, & \lambda+\mu < n, \end{cases} \tag{1.85}$$

где постоянная c зависит от $c(\xi)$, λ, μ и n, а $\ln^{+} t = \ln t$ при $t > 1$ и $\ln^{+} t = 0$ при $t \leqslant 1$. Эти неравенства, очевидно, являются разновидностью известных неравенств о свертке ядер со слабой особенностью. Доказываются они обычным способом.

Оценивая с помощью (1.85) интеграл в (1.84) и учитывая (1.83) и (1.82), для первого слагаемого в (1.81) при $x \in K'_{\beta}$ и при любых $n \geqslant 3$ получаем

$$\sum_{\alpha\neq\beta}\left|\int \frac{d\mu_{\alpha}^{(s)}(\xi,y)}{\varkappa_n|x-\xi|^{n-2}}\right| \leqslant A\left\{\frac{\delta^n}{\rho^{n-2}}\cdot\frac{1}{|x-y|^{n-2}} + \delta\left(1+\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right)\right\}. \tag{1.86}$$

Рассмотрим второе слагаемое в (1.81). В силу (1.78) и (1.78′)

$$0 \leqslant \int\limits_{Q(y,\beta)} \frac{\sigma(\xi,y)\,d\xi}{\varkappa_n|x-\xi|^{n-2}} \leqslant \frac{1}{\varkappa_n^2}\int\limits_{Q(y,\beta)} \frac{c(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{n-2}|\xi-y|^{n-2}}.$$

Разлагая подынтегральное выражение в произведение $\dfrac{c^{1/p}(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}|\xi-y|^{n-2}}\cdot c^{1/q}(\xi)$, где $p = \dfrac{n-1}{n-2}$, $q = n-1$, и применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\int\limits_{Q(y,\beta)} \frac{\sigma(\xi,y)\,d\xi}{\varkappa_n|x-\xi|^{n-2}} \leqslant \frac{1}{\varkappa_n^2}\left\{\int \frac{c(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{n-1}|\xi-y|^{n-1}}\right\}^{\frac{n-2}{n-1}} \times$$

$$\times\left\{\int\limits_{Q(y,\beta)} c(\xi)\,d\xi\right\}^{\frac{1}{n-1}},$$

откуда в силу (1.85)

$$\int\limits_{Q(y,\beta)} \frac{\sigma(\xi,y)\,d\xi}{\varkappa_n|x-\xi|^{n-2}} \leqslant \frac{A_1\sqrt[n-1]{\int\limits_{Q(y,\beta)} c(\xi)\,d\xi}}{|x-y|^{n-2-\frac{n-2}{n-1}}} \leqslant$$

$$\leqslant A\left(1+\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right)\sqrt[n-1]{\int\limits_{Q(y,\beta)} c(\xi)\,d\xi}.$$

Учитывая включение $Q(y,\beta) = R_n \setminus \bigcup\limits_{\alpha\neq\beta,\ \alpha\in\Lambda(y)} K_{\alpha} \subseteq (R_n \setminus T_{\Lambda}) \cup$ $\cup\ K(y) \cup K_{\beta}$, где $K(y)$ — шар радиуса $r + \sqrt{n}\,\delta \leqslant \frac{4}{3} r$ с центрой в точке y, а $T_\Lambda = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha$, отсюда находим

$$\int\limits_{Q(y,\beta)} \frac{\sigma(\xi, y)\, d\xi}{\varkappa_n |x-\xi|^{n-2}} \leqslant A\left\{\sqrt[n-1]{\int\limits_{R_n/T_\Lambda} c(x)\, dx} + r^{\frac{n}{n-1}}\right\}\left(1 + \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right). \quad (1.87)$$

Рассмотрим теперь при $x \in F^{(s)} \cap K'_\beta$ $(\beta \in \Lambda(y))$ разность

$$g_\beta(x, y) = G^c(x, y) - \frac{q_\beta(y)}{C(F^{(s)} \cap K_\beta)} \int \frac{d\gamma_\beta^{(s)}(\xi)}{\varkappa_n |x-\xi|^{n-2}}.$$

Поскольку $\gamma_\beta^{(s)}(\xi)$ — равновесная мера компакта $F^{(s)} \cap K_\beta$, ее потенциал $U^{\gamma_\beta^{(s)}}(x)$ всюду не больше единицы и на самом компакте $F^{(s)} \cap K_\beta$ с точностью до множества нулевой емкости $U^{\gamma_\beta^{(s)}}(x) = 1$ (см. § 1). Это равенство может нарушаться только на пересечении $F^{(s)}$ гранями куба K_β, так как по условию все точки $F^{(s)}$ регулярны. Поэтому, учитывая, что $q_\beta(y) = \int\limits_{K_\beta} \sigma(\xi, y)\, d\xi$, из формул (1.78) и (1.78′) при $x \in F^{(s)} \cap K'_\beta$ получаем

$$|g_\beta(x, y)| \leqslant \frac{1}{\varkappa_n |x-y|^{n-2}} \left| 1 - \frac{\Phi_\beta}{C(F^{(s)} \cap K_\beta)} \right| + \frac{\Phi_\beta}{C(F^{(s)} \cap K_\beta)} |\tilde{v}_\beta(x, y)|,$$

где

$$\Phi_\beta = \int\limits_{K_\beta} c(x)\, dx, \quad \tilde{v}_\beta(x, y) = G^c(x, y) - G^c(\tilde{x}_\beta, y), \quad \tilde{x}_\beta \in K_\beta.$$

При помощи формул (1.78), (1.78′) и неравенств (1.85), поскольку при $x \in K'_\beta$ $(\beta \in \Lambda(y))$ $|x-y| \geqslant r > 3\sqrt{n}\,\delta$, находим

$$|\tilde{v}_\beta(x, y)| \leqslant A\left\{\frac{\delta}{r} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} + \delta\left(1 + \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right)\right\}.$$

Следовательно, при $x \in K'_\beta$

$$|g_\beta(x, y)| \leqslant \left| 1 + \frac{\Phi_\beta}{C(F^{(s)} \cap K_\beta)} \right| \frac{1}{\varkappa_n |x-y|^{n-2}} + \frac{A\Phi_\beta}{C(F^{(s)} \cap K_\beta)} \left\{\frac{\delta}{r} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} + \delta\left(1 + \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right)\right\}. \quad (1.88)$$

Неравенства (1.81), (1.86) — (1.88) позволяют оценить функцию $u_\delta^{(s)}(x, y) = G^{(s)}(x, y) - G_\delta^{(s)}(x, y)$ на множестве $F^{(s)} \cap T'_{\Lambda(y)}$, где $T'_{\Lambda(y)} = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda(y)} K'_\alpha$. Действительно, так как $G^{(s)}(x, y) = 0$ при $x \in F^{(s)}$, то из формулы (1.80) в силу этих неравенств следует, что при $x \in F^{(s)} \cap T'_{\Lambda(y)}$

$$u_\delta^{(s)}(x, y) \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \frac{1}{|x-y|^{n-2}}, \tag{1.89}$$

где

$$\varepsilon_1 = A\left\{\delta + \max_{\alpha \in \Lambda} \frac{\Phi_\alpha}{C(F^{(s)} \cap K_\alpha)}\delta + r^{\frac{n}{n-1}} + \sqrt[n-1]{\int\limits_{R_n \setminus T_\Lambda} c(x)\,dx}\right\}, \tag{1.89'}$$

$$\varepsilon_2 = A\left\{\max_{\alpha \in \Lambda}\left|1 - \frac{\Phi_\alpha}{C(F^{(s)} \cap K_\alpha)}\right| + \delta + \frac{\delta^n}{\rho^{n-2}} + r^{\frac{n}{n-1}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt[n-1]{\int\limits_{R_n \setminus T_\Lambda} c(x)\,dx} + \max_{\alpha \in \Lambda} \frac{\Phi_\alpha}{C(F^{(s)} \cap K_\alpha)}\left(\delta + \frac{\delta}{r}\right)\right\}. \tag{1.89''}$$

Аналогично можно получить грубую оценку для $u_\delta^{(s)}(x, y)$, справедливую всюду в R_n. Действительно, поскольку $0 \leqslant G^{(s)}(x, y) \leqslant \leqslant \frac{1}{\varkappa_n |x-y|^{n-2}}$, из (1.79) находим

$$|u_\delta^{(s)}(x, y)| \leqslant \frac{1}{\varkappa_n |x-y|^{n-2}} + \left(\sum_{\alpha \in \Lambda(y)}' + \sum_{\alpha \in \Lambda(y)}''\right) \frac{q_\alpha(y)}{C(F^{(s)} \cap K_\alpha)} \times$$

$$\times \int \frac{d\gamma_\alpha^{(s)}(\xi)}{\varkappa_n |x-\xi|^{n-2}},$$

где сумма Σ' распространяется на кубы K_α, $\alpha \in \Lambda(y)$, которые пересекаются с шаром радиуса $2\sqrt{n}\,\delta$ с центром в точке x, а Σ'' — на все остальные. Так как всюду $U^{\gamma_\alpha^{(s)}}(x) \leqslant 1$ и в силу (1.78), (1.78')

$$q_\alpha(y) = \int\limits_{K_\alpha} \sigma(\xi, y)\,d\xi \leqslant \frac{\Phi_\alpha}{\varkappa_n |y - \tilde{x}_\alpha|^{n-2}}, \qquad \tilde{x}_\alpha \in K_\alpha,$$

то, учитывая, что в сумме Σ' $|y - \tilde{x}_\alpha| \geqslant \frac{1}{2}|x-y|$, получаем

$$\sum_{\alpha \in \Lambda(y)}' \frac{q_\alpha(y)}{C(F^{(s)} \cap K_\alpha)} \int \frac{d\gamma_\alpha^{(s)}(\xi)}{\varkappa_n |x-\xi|^{n-2}} \leqslant$$

$$\leqslant A \max_{\alpha \in \Lambda} \frac{\Phi_\alpha}{C(F^{(s)} \cap K_\alpha)} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}}.$$

Вторая сумма оценивается с помощью (1.78), (1.78') и (1.85) аналогично сумме Σ'' в (1.82):

$$\sum_{\alpha \in \Lambda(y)}'' \frac{q_\alpha(y)}{C(F^{(s)} \cap K_\alpha)} \int \frac{d\gamma_\alpha^{(s)}(\xi)}{\varkappa_n |x-\xi|^{n-2}} \leqslant A\left(1 + \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right).$$

Таким образом, всюду в R_n справедливо неравенство

$$|u_\delta^{(s)}(x, y)| \leqslant C_1 + C_2 \frac{1}{|x-y|^{n-2}}, \tag{1.90}$$

где постоянная C_1 не зависит от s, δ, ρ, r, Λ, а

$$C_2 = A\left(1 + \max_{\alpha \in \Lambda} \frac{\Phi_\alpha}{C(F^{(s)} \cap K_\alpha)}\right). \tag{1.90'}$$

Выделим в каждом кубе K'_α ($\alpha \in \Lambda$) меньший куб K''_α (открытый) с тем же центром и стороной $\delta'' = \delta' - 2\rho_1 = \delta - 2\rho - 2\rho_1$ и введем непрерывную в R_n функцию $\chi_y(x)$, удовлетворяющую условиям $0 \leqslant \chi_y(x) \leqslant 1$, $\chi_y(x) = 0$ при $x \in T''_{\Lambda(y)} = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda(y)} K''_\alpha$ и $\chi_y(x) = 1$ при $x \in R_n \setminus T'_{\Lambda(y)}$. Обозначим через $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ решения уравнения $\Delta u(x) = 0$ в области $\Omega^{(s)} = R_n \setminus F^{(s)}$, стремящиеся к нулю при $x \to \infty$ и принимающие на $\partial F^{(s)}$ граничные значения соответственно $\chi_y(x)$ и $\chi_y(x) \frac{1}{|x-y|^{n-2}}$ ($y \in R_n$ — параметр). Доопределим эти функции на множестве $F^{(s)}$, положив $u_1(x, y) = \chi_y(x)$ и $u_2(x, y) = \chi_y(x) \frac{1}{|x-y|^{n-2}}$ при $x \in F^{(s)}$. В силу принципа максимума всюду в R_n

$$0 \leqslant u_1(x, y) \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant u_2(x, y) \leqslant \frac{1}{|x-y|^{n-2}}. \tag{1.91}$$

Рассмотрим функцию

$$w^{(s)}(x) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \frac{1}{|x-y|^{n-2}} + C_1 u_1(x, y) + C_2 u_2(x, y) - u_\delta^{(s)}(x, y), \tag{1.92}$$

где ε_1, ε_2, C_1, C_2 те же, что в (1.89) и (1.90). Из определения $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ и $u_\delta^{(s)}(x, y)$ следует, что $w^{(s)}(x)$ в области $R_n \setminus (F^{(s)} \cup y)$ удовлетворяет уравнению $\Delta w^{(s)}(x) = 0$ и стремится к бесконечности при $x \to y$. Кроме того, в силу неравенств (1.89) и (1.90)

$$\varliminf_{x \to F^{(s)}} w^{(s)}(x) \geqslant 0, \qquad \varliminf_{x \to \infty} w^{(s)}(x) \geqslant 0.$$

Отсюда на основании принципа максимума заключаем, что $w^{(s)}(x) \geqslant 0$ всюду в R_n. Учитывая это, из (1.92) получаем оценку для нормы $\| u_\delta^{(s)} \|_{D \times D}$, определенной равенством (1.77):

$$\| u_\delta^{(s)} \|_{D \times D} \leqslant \varepsilon_1 (\operatorname{mes} D)^2 + \varepsilon_2 \frac{\omega_n d^2}{2} \operatorname{mes} D + C_1 \| u_1 \|_{D \times D} + C_2 \| u_2 \|_{D \times D}, \tag{1.93}$$

где $\operatorname{mes} D$ — лебегова мера области D, d — ее диаметр.

В силу неравенств (1.91) и теоремы Фубини

$$\| u_i \|_{D \times D} = \int_D \left(\int_D u_i(x, y)\, dx \right) dy = \int_D u_i^D(x)\, dx,$$

где

$$u_i^D(x)=\int_D u_i(x,\ y)\,dy,\qquad i=1,\ 2.$$

Из свойств функций $u_i(x,\ y)$ следует, что $u_i^D(x)$ непрерывны в R_n, удовлетворяют в области $\Omega^{(s)}=R_n\setminus F^{(s)}$ уравнению $\Delta u_i^D=0$, стремятся к нулю при $x\to\infty$, а на множестве $F^{(s)}$ принимают значения

$$u_1^D(x)=\int_D \chi_y(x)\,dy \quad\text{и}\quad u_2^D(x)=\int_D \chi_y(x)\,\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\,dy.$$

Отсюда, учитывая свойства $\chi_y(x)$, получаем неравенства

$$\left.\begin{array}{lll} u_1^D(x)\leqslant A_1r^n, & u_2^D(x)\leqslant A_2r^2, & x\in F^{(s)}\cap T''_\Lambda,\\ u_1^D(x)\leqslant \operatorname{mes}D, & u_2^D(x)\leqslant\dfrac{\omega_nd^2}{2}, & x\in F^{(s)}\setminus T''_\Lambda,\end{array}\right\}\qquad(1.94)$$

где $T''_\Lambda=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}K''_\alpha$.

Пусть $\gamma_\alpha^{(s)}$ и $\tilde\gamma_\alpha^{(s)}$ — равновесные меры множеств $F^{(s)}\cap K_\alpha$ и $F^{(s)}\cap(K_\alpha\setminus K''_\alpha)$, а $U^{\gamma_\alpha^{(s)}}(x)$ и $U^{\tilde\gamma_\alpha^{(s)}}(x)$ — их потенциалы. Рассмотрим функции

$$\left.\begin{array}{l} v_1(x)=A_1r^n\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}U^{\gamma_\alpha^{(s)}}(x)+\operatorname{mes}D\Bigg(\sum\limits_{\alpha\notin\Lambda}U^{\gamma_\alpha^{(s)}}(x)+\\ \qquad+\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}U^{\tilde\gamma_\alpha^{(s)}}(x)\Bigg)-u_1^D(x),\\ v_2(x)=A_2r^2\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}U^{\gamma_\alpha^{(s)}}(x)+\dfrac{\omega_nd^2}{2}\Bigg(\sum\limits_{\alpha\notin\Lambda}U^{\gamma_\alpha^{(s)}}(x)+\\ \qquad+\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}U^{\tilde\gamma_\alpha^{(s)}}(x)\Bigg)-u_2^D(x).\end{array}\right\}\qquad(1.95)$$

Очевидно, в области $R_n\setminus F^{(s)}$ $v_i(x)$ $(i=1,\ 2)$ удовлетворяют уравнению $\Delta v_i=0$ и стремятся к нулю на бесконечности. Кроме того, так как $U^{\gamma_\alpha^{(s)}}(x)$ и $U^{\tilde\gamma_\alpha^{(s)}}(x)$ равны единице в регулярных точках множеств $F^{(s)}\cap K_\alpha$ и $F^{(s)}\cap(K_\alpha\setminus K''_\alpha)$ (см. § 1), то из (1.93) следует

$$\varliminf_{x\to F^{(s)}} v_i(x)\geqslant 0.$$

Последнее неравенство требует более подробного пояснения для иррегулярных точек. Пусть $x\to x_\beta$ и x_β — иррегулярная точка $F^{(s)}\cap K_\beta$, т. е. $U^{\gamma_\beta^{(s)}}(x_\beta)<1$. Так как все точки множества $F^{(s)}$ регулярны, то x_β должна лежать на пересечении $F^{(s)}$ с границей куба K_β. Следовательно, она принадлежит сразу нескольким множествам вида $F^{(s)}\cap(K_\alpha\setminus K''_\alpha)$ $(\alpha\in\Lambda)$ или $F^{(s)}\cap K_\alpha$ $(\alpha\notin\Lambda)$.

Отсюда на основании критерия Винера и полуаддитивности емкости (см. § 1) заключаем, что точка x_β регулярна хотя бы для одного из этих множеств и, значит, соответствующая функция $U^{\tilde{\gamma}_\alpha^{(s)}}(x)$ или $U^{\gamma_\alpha^{(s)}}(x)$ в этой точке непрерывна и равна единице. Поэтому согласно (1.95) и (1.94) $\varliminf\limits_{x \to x_\beta} v_i(x) \geqslant 0$.

В силу принципа максимума из указанных свойств функций $v_i(x)$ следует, что $v_i(x) \geqslant 0$ всюду в R_n. Поэтому, исходя из определения $U^{\gamma_\alpha^{(s)}}(x)$ и $U^{\tilde{\gamma}_\alpha^{(s)}}(x)$ и учитывая, что полная равновесная мера множества равна его емкости, из (1.95) находим

$$\|u_i\|_{D\times D} = \int\limits_D u_i^D(x)\,dx \leqslant A\Big\{r^2 \sum_{\alpha\in\Lambda} C(F^{(s)} \cap K_\alpha) + $$
$$+ \sum_{\alpha\notin\Lambda} C(F^{(s)} \cap K_\alpha) + \sum_{\alpha\in\Lambda} C(F^{(s)} \cap (K_\alpha \setminus K''_\alpha))\Big\}, \qquad i = 1, 2.$$

Из этих неравенств и неравенства (1.93) вытекает оценка для нормы $\|u_\delta^{(s)}\|_{D\times D} = \|G^{(s)} - G_\delta^{(s)}\|_{D\times D}$:

$$\|G^{(s)} - G_\delta^{(s)}\|_{D\times D} \leqslant A\Big\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (1 + C_2)\Big[r^2 \sum_{\alpha\in\Lambda} C(F^{(s)} \cap K_\alpha) + $$
$$+ \sum_{\alpha\notin\Lambda} C(F^{(s)} \cap K_\alpha) + \sum_{\alpha\in\Lambda} C(F^{(s)} \cap (K_\alpha \setminus K''_\alpha))\Big]\Big\} \qquad (1.96)$$

(постоянная A зависит только от h и области D, а ε_1, ε_2 и C_2 определяются по формулам (1.89′), (1.89″) и (1.90′)). Поскольку емкость — полунепрерывная справа функция множества (§ 1), $C(F^{(s)} \cap (K_\alpha \setminus K''_\alpha)) \to C(F^{(s)} \cap (K_\alpha \setminus K'_\alpha))$ при $\rho_1 \to 0$. Поэтому в неравенстве (1.96) $F^{(s)} \cap (K_\alpha \setminus K''_\alpha)$ всюду можно заменить множествами $F^{(s)} \cap (K_\alpha \setminus K'_\alpha)$. Пользуясь формулами (1.78) и (1.79), записываем

$$G^c(x, y) - G_\delta^{(s)}(x, y) = \frac{1}{\varkappa_n} \sum_{\alpha\in\Lambda(y)} \int\limits_{K_\alpha} \Big(\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} - $$
$$- \frac{1}{|x-\xi_\alpha|^{n-2}}\Big) d\mu_\alpha^{(s)}(\xi, y) + \int\limits_{R_n \setminus T_{\Lambda(y)}} \frac{\sigma(\xi, y)}{\varkappa_n |x-\xi|^{n-2}}\, d\xi,$$

где $T_{\Lambda(y)} = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda(y)} K_\alpha$, ξ_α — центры кубов K_α, а $\mu_\alpha^{(s)}(E, y)$ определяется равенствами (1.85′). Отсюда в силу (1.78) и (1.78′)

$$|G^c(x, y) - G_\delta^{(s)}(x, y)| < A\delta \sum_{\alpha\in\Lambda(y)} \sum_{i=0}^{n-3} \int \frac{d\nu_\alpha^{(s)}(\xi, y)}{|x-\xi|^i\,|x-\xi_\alpha|^{n-2-i}} + $$
$$+ \frac{1}{\varkappa_n^2} \int\limits_{R_n \setminus T_{\Lambda(y)}} \frac{c(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{n-2}\,|\xi-y|^{n-2}},$$

где мера $\nu_\alpha^{(s)}$ для любого борелевского множества E задается равенством

$$\nu_\alpha^{(s)}(E, y) = \int\limits_{E \cap K_\alpha} \frac{c(\xi)\, d\xi}{|y-\xi|^{n-2}} + \frac{\gamma_\alpha^{(s)}(E)}{C(F^{(s)} \cap K_\alpha)} \int\limits_{K_\alpha} \frac{c(\xi)\, d\xi}{|y-\xi|^{n-2}}.$$

Поэтому, учитывая, что $\gamma_\alpha^{(s)}(K_\alpha) = C(F^{(s)} \cap K_\alpha)$, получаем

$$\| G_\delta^{(s)} - G^c \|_{D\times D} \leqslant A \left\{ \delta + r^n + \int\limits_{R_n \setminus T_\Lambda} c(x)\, dx \right\}.$$

Объединяя это неравенство с (1.96), (1.89′), (1.89″) и (1.90′), приходим к окончательной оценке нормы разности функций Грина $G^{(s)}(x, y)$ и $G^c(x, y)$

$$\| G^{(s)} - G^c \|_{D\times D} \leqslant \| G^{(s)} - G_\delta^{(s)} \|_{D\times D} + \| G_\delta^{(s)} - G^c \|_{D\times D} \leqslant$$
$$\leqslant A \left\{ \max_{\alpha \in \Lambda} \left| 1 - \frac{\Phi_\alpha}{C(F^{(s)} \cap K_\alpha)} \right| + \left(1 + \max_{\alpha\in\Lambda} \frac{\Phi_\alpha}{C(F^{(s)} \cap K_\alpha)} \right) \left[\delta + \right.\right.$$
$$+ \frac{\delta}{r} + r^2 \sum_{\alpha\in\Lambda} C(F^{(s)} \cap K_\alpha) + \sum_{\alpha\in\Lambda} C(F^{(s)} \cap (K_\alpha \setminus K'_\alpha)) +$$
$$\left. + \sum_{\alpha \notin \Lambda} C(F^{(s)} \cap K_\alpha) \right] + \frac{\delta^n}{\rho^{n-2}} + r^{\frac{n}{n-1}} + \sqrt[n-1]{\int\limits_{R_n \setminus T_\Lambda} c(x)\, dx} +$$
$$\left. + \int\limits_{R_n \setminus T_\Lambda} c(x)\, dx \right\}, \tag{1.97}$$

где $\Phi_\alpha = \int\limits_{K_\alpha} c(x)\, dx$, $T_\Lambda = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha$, а постоянная A не зависит от ρ, δ, $r < 1$ и множеств $F^{(s)}$ и Λ.

Сходимость функций Грина

Применим теперь оценку (1.97) для исследования сходимости функций Грина краевых задач (1.6), (1.7) при $s \to \infty$. Разобьем пространство R_n на замкнутые кубы K_α^δ со стороной δ и введем функцию

$$\Psi_\delta^{(s)}(x) = \sum_\alpha \frac{C(F^{(s)} \cap K_\alpha^\delta)}{\delta^n} \chi_\alpha(x), \tag{1.98}$$

где $\chi_\alpha(x)$ — характеристическая функция куба K_α^δ. Очевидно, при любых s и $\delta > 0$ $\Psi_\delta^{(s)}(x)$ определена для всех $x \in R_n$.

Теорема 1.7. *Пусть для некоторой непрерывной, ограниченной и суммируемой в R_n функции $c(x)$ выполняется предельное равенство*

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{s\to\infty}} \int\limits_{R_n} | \Psi_\delta^{(s)}(x) - c(x) |\, dx = 0. \tag{1.99}$$

Тогда последовательность функций Грина краевых задач (1.6), (1.7) (*продолженных на множество* $F^{(s)}$ *так, что* $G^{(s)}(x, y) = 0$ *при* $x \in F^{(s)}$ *или* $y \in F^{(s)}$) *по нормам* (1.77) *сходится к функции Грина задачи* (1.10), (1.11), *где* $c(x)$ *та же, что в* (1.99).

Доказательство. Разобьем каждый куб K_α^δ на меньшие кубы K_β^ρ со стороной ρ, где $\rho \sim \delta^{\frac{n-1}{n-2}}$ при $\delta \to 0$. В силу (1.99) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие δ и ρ и такое $N(\rho, \delta)$, что при $s \geqslant N(\rho, \delta)$ одновременно выполняются неравенства

$$\int |\Psi_\delta^{(s)}(x) - c(x)|\, dx < \varepsilon, \qquad \int |\Psi_\rho^{(s)}(x) - c(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{1.100}$$

Согласно (1.98)

$$\int |\Psi_\delta^{(s)}(x) - c(x)|\, dx \geqslant \sum_\alpha \left| C(F^{(s)} \cap K_\alpha^\delta) - \int_{K_\alpha^\delta} c(x)\, dx \right| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_\alpha{}' \left| 1 - \frac{C(F^{(s)} \cap K_\alpha^\delta)}{\Phi_\alpha^\delta} \right| \Phi_\alpha^\delta, \tag{1.101}$$

где $\Phi_\alpha^\delta = \int\limits_{K_\alpha^\delta} c(x)\, dx$, а сумма Σ' распространяется на те K_α^δ, для которых $\Phi_\alpha^\delta > 0$.

Пусть $\{K_\alpha^\delta, \alpha \in \Lambda^{(s)}\}$ — подмножество кубов K_α^δ, удовлетворяющих условиям

$$\Phi_\alpha^\delta > 0, \qquad \max_{\alpha \in \Lambda^{(s)}} \left| 1 - \frac{C(F^{(s)} \cap K_\alpha^\delta)}{\Phi_\alpha^\delta} \right| < \sqrt{\varepsilon}. \tag{1.102}$$

Тогда из (1.100), (1.101) и (1.102) следуют неравенства

$$\sum_{\alpha \in \Lambda^{(s)}} C(F^{(s)} \cap K_\alpha^\delta) \leqslant \varepsilon + \int c(x)\, dx, \tag{1.103}$$

$$\int\limits_{R_n \setminus T_{\Lambda^{(s)}}} c(x)\, dx < \sqrt{\varepsilon}, \quad T_{\Lambda^{(s)}} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda^{(s)}} K_\alpha^\delta, \tag{1.104}$$

и при $\varepsilon < \frac{1}{4}$

$$\max_{\alpha \in \Lambda^{(s)}} \left| 1 - \frac{\Phi_\alpha^\delta}{C(F^{(s)} \cap K_\alpha^\delta)} \right| < 2\sqrt{\varepsilon}. \tag{1.105}$$

Обозначим через $\{K_\beta^\rho, \beta \in \Lambda_1^{(s)}\}$ множество кубов, накрывающих область $R_n \setminus T_{\Lambda^{(s)}}$, а через $\{K_\beta^\rho, \rho \in \Lambda_2^{(s)}\}$ — множество кубов K_β^ρ, принадлежащих кубам K_α^δ, $\alpha \in \Lambda^{(s)}$, и прилегающих к их границе. Согласно (1.98)

$$\int |\Psi_\rho^{(s)}(x) - c(x)|\, dx \geqslant \left| \sum_{\beta\in\Lambda_1^{(s)}} C(F^{(s)} \cap K_\beta^\rho) - \int\limits_{R_n \setminus T_{\Lambda^{(s)}}} c(x)\, dx \right| +$$

$$+ \left| \sum_{\beta\in\Lambda_2^{(s)}} C(F^{(s)} \cap K_\beta^\rho) - \sum_{\beta\in\Lambda_2^{(s)}} \int\limits_{K_\beta^\rho} c(x)\, dx \right|,$$

откуда в силу (1.100) и (1.104)

$$\sum_{\beta\in\Lambda_1^{(s)}} C(F^{(s)} \cap K_\beta^\rho) \leqslant \varepsilon + \sqrt{\varepsilon}, \qquad \sum_{\beta\in\Lambda_2^{(s)}} C(F^{(s)} \cap K_\beta^\rho) \leqslant \varepsilon + \varepsilon', \tag{1.106}$$

где $\varepsilon' = \sum\limits_{\beta\in\Lambda_2^{(s)}} \int\limits_{K_\beta^\rho} c(x)\, dx$. Так как $\rho \sim \delta^{\frac{n-1}{n-2}}$, а функция $c(x)$ суммируема, то $\varepsilon' \to 0$ при $\delta \to 0$.

Рассмотрим теперь неравенство (1.97). Положим в нем $K_\alpha = K_\alpha^\delta$, $\Lambda = \Lambda^{(s)}$, $r = \sqrt{\delta}$ и $\rho \sim \delta^{\frac{n-1}{n-2}}$. Тогда $\frac{\delta}{r} = \sqrt{\delta}$, $\frac{\delta^n}{\rho^{n-2}} \sim \delta$ и в силу полуаддитивности емкости

$$\sum_{\alpha \notin \Lambda} C(F^{(s)} \cap K_\alpha) \leqslant \sum_{\beta\in\Lambda_1^{(s)}} C(F^{(s)} \cap K_\beta^\rho), \quad \sum_{\alpha\in\Lambda} C(F^{(s)} \cap (K_\alpha \setminus K'_\alpha)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\beta\in\Lambda_2^{(s)}} C(F^{(s)} \cap K_\beta^\rho).$$

Учитывая это, из (1.97), (1.103) — (1.106) получаем

$$\| G^{(s)} - G^c \|_{D\times D} \to 0 \qquad \text{при } s \to \infty$$

для любой ограниченной области $D \subset R_n$. Теорема доказана.

Приведенное доказательство теоремы 1.7 основано на оценке (1.97), которая получена для случая $\Omega = R_n$ $(n \geqslant 3)$ и для оператора Лапласа. Аналогичная оценка справедлива и для оператора $\Delta - \lambda^2$ $(\operatorname{Im}\lambda = 0)$ и $\Omega \neq R_n$ [60]. Из нее вытекает следующий результат.

Пусть $G^{(s)}(x, y, \lambda)$ и $G^c(x, y, \lambda)$ — соответственно функции Грина краевых задач

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_x G^{(s)}(x, y, \lambda) - \lambda^2 G(x, y, \lambda) = -\delta(x, y), \quad x, y \in \Omega^{(s)} = \\ &= \Omega \setminus F^{(s)}, \\ &G^{(s)}(x, y, \lambda) = 0, \qquad x \in \partial\Omega^{(s)}, \quad y \in \Omega^{(s)}, \end{aligned}\right\} \tag{1.107}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_x G^c(x, y, \lambda) - (\lambda^2 + c(x))\, G^c(x, y, \lambda) = -\delta(x, y), \quad x, y \in \Omega, \\ &G^c(\ , y, \lambda) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \quad y \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{1.108}$$

где $\lambda^2 \geqslant 0$, $c(x)$ — неотрицательная, непрерывная, ограниченная и суммируемая в Ω функция. Если область Ω бесконечна, то в граничные условия входит требование $G^{(s)}$, $G^c \to 0$ при $x \to \infty$. При $\lambda = 0$ Ω конечна. Продолжим $G^{(s)}(x, y, \lambda)$ на множество $F^{(s)}$, положив $G^{(s)}(x, y, \lambda) = 0$ при $x \in F^{(s)}$ или $y \in F^{(s)}$, и введем норму

$$\|G^{(s)} - G^c\|_{\Omega'} = \int_{\Omega'} \int_{\Omega} |G^{(s)}(x, y, \lambda) - G^c(x, y, \lambda)|\, dxdy, \qquad (1.109)$$

где Ω' — ограниченная область в Ω.

Теорема 1.7'. *Пусть при $s \to \infty$ выполняется условие*

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{\Omega} |\Psi_\delta^{(s)}(x) - c(x)|\, dx = 0, \qquad (1.110)$$

где функция $\Psi_\delta^{(s)}(x)$ определяется равенством (1.98). *Тогда последовательность функций $G^{(s)}(x, y, \lambda)$ сходится к функции $G^c(x, y, \lambda)$ по норме* (1.109) *для любой ограниченной области Ω'.*

Оценки разности решений

Оценим теперь разность решений краевой задачи (1.6), (1.7) и предельной задачи (1.10), (1.11). Конечно, такую оценку можно вывести из неравенства (1.97) для разности соответствующих функций Грина $G^{(s)}(x, y) - G(x, y)$. Однако непосредственное рассмотрение позволяет получить более точную и компактную оценку. При этом удается выяснить, от каких параметров допредельной задачи и как именно зависит погрешность, возникающая при замене решения задачи (1.6), (1.7) решением предельной задачи.

Итак, пусть $u(x)$ — решение краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u(x) = -f(x), \quad x \in R_n \setminus F = \Omega_F, \\ &u(x)|_{\partial\Omega_F} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1.111)$$

где $f(x)$ — достаточно гладкая финитная функция, F — произвольный регулярный компакт в R_n, $v(x)$ — решение задачи

$$\left.\begin{aligned} &\Delta v(x) - c(x) v(x) = -f(x), \quad x \in R_n, \\ &\lim_{x\to\infty} v(x) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.112)$$

Продолжим $u(x)$ нулем на множество F и оценим разность $u(x) - v(x)$ в норме

$$\|u - v\|_R = \sup_{x \in R_n} \int_{T(R)} |u(x+\xi) - v(x+\xi)|\, d\xi, \qquad (1.113)$$

где $T(R)$ — шар радиуса R с центром в начале координат.

Разобьем пространство R_n на замкнутые кубы $\overline{K}_i$ со стороной h и в каждый куб $\overline{K}_i$ впишем меньший замкнутый куб $\overline{K}'_i$ со стороной $h - 2r$ (K_i и K'_i — множества внутренних точек этих кубов).

Построим функцию

$$c_h(x) = h^{-n} C(F \cap \overline{K}_i), \qquad x \in K_i, \tag{1.114}$$

определенную для почти всех $x \in R_n$, и положим

$$\varepsilon(h) = \int |c_h(x) - c(x)|\, dx, \tag{1.115}$$

$$\delta(h, r) = \sum_i C(F \cap (\overline{K}_i \setminus K'_i)). \tag{1.116}$$

Заметим, что величина $\delta(h, r)$ оценивается через $\varepsilon(r)$ и интеграл от функции $c(x)$ по множеству $R_n \setminus \bigcup_i K'_i$. Действительно, если $r = hN^{-1}$, где $N \geqslant 20$, то, разбивая множество $\overline{K}_i \setminus K'_i$ на кубы $\overline{L}_j$ со стороной r и учитывая полуаддитивность емкости, получаем

$$C(F \cap (\overline{K}_i \setminus K'_i)) \leqslant \sum_{\overline{L}_j \subset \overline{K}_i \setminus K'_i} C(F \cap \overline{L}_j) = \int_{\overline{K}_i \setminus K'_i} c_r(x)\, dx =$$

$$= \int_{\overline{K}_i \setminus K'_i} c(x)\, dx + \int_{\overline{K}_i \setminus K'_i} \{c_r(x) - c(x)\}\, dx \leqslant \int_{\overline{K}_i \setminus K'_i} c(x)\, dx +$$

$$+ \int_{\overline{K}_i \setminus K'_i} |c_r(x) - c(x)|\, dx$$

и тем более

$$\sum_i C(F \cap (\overline{K}_i \setminus K'_i)) \leqslant \int_{R_n \setminus \bigcup_i K'_i} c(x)\, dx + \int |c_r(x) - c(x)|\, dx,$$

т. е.

$$\delta(h, r) \leqslant \varepsilon(r) + \int_{R_n \setminus \bigcup_i K'_i} c(x)\, dx. \tag{1.117}$$

Введем для краткости такие обозначения:

$$|g|_k = \sup_{x \in R_n} \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{|g(\xi)|}{|x - \xi|^k}\, d\xi \qquad (k = 0,\ n-2,\ n-1).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.8. *Разность $u(x) - v(x)$ решения $u(x)$ краевой задачи (1.111), продолженного нулем на множество F, и решения $v(x)$ задачи (1.112) при любых $R > 0$ и $h \geqslant 20r > 0$ удовлетворяет неравенству*

$$\|u - v\|_R \leqslant A\{hR\,|f|_0 + (\delta(h, r) + \varepsilon(h))\, R^2\, |f|_{n-2} +$$

$$+ hR^2(|f|_{n-1}\,|c|_0 + |f|_{n-2}\,|c|_{n-1}\,|c|_0 + h^{n-1} r^{-n+2}\,|f|_{n-2}\,|c^2|_0)\},$$

в котором константа A зависит только от размерности пространства R_n.

Доказательство этой теоремы основано на ряде вспомогательных предложений. Заметим прежде всего, что теорему достаточно доказать для неотрицательных функций $f(x)$. Поэтому в дальнейшем предполагается, что $f(x) \geqslant 0$. Согласно принципу выметания решение задачи (1.111) можно представить в виде

$$u(x) = U^f(x) - U^\mu(x),$$

где

$$U^f(x) = \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{f(\xi)\, d\xi}{|x-\xi|^{n-2}}, \quad U^\mu(x) = \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}},$$

а μ — мера, сосредоточенная на компакте F и удовлетворяющая неравенству

$$\int d\mu(\xi) = \int_F d\mu(\xi) \leqslant \int f(\xi)\, d\xi.$$

Напомним, что $U^\mu(x) \leqslant U^f(x)$ всюду и, значит, $u(x) \geqslant 0$.

Непосредственно сравнивать функцию $u(x)$ с решением $v(x)$ задачи (1.112) неудобно, и нам придется сначала построить две вспомогательные функции. Возьмем пока произвольный компакт $F_1 \subset F$ и выметем меру μ на этот компакт. В результате получим сосредоточенную на компакте F_1 меру μ_1, потенциал которой

$$U^{\mu_1}(x) = \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{d\mu_1(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} = \frac{1}{\varkappa_n} \int_{F_1} \frac{d\mu_1(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}$$

всюду удовлетворяет неравенству $U^{\mu_1}(x) \leqslant U^\mu(x)$, переходящему в равенство во всех регулярных точках компакта F_1. Ясно, что

$$\mu_1(A) = \mu(A) + \nu(A) \qquad (A \subset F_1), \tag{1.118}$$

где мера ν получена выметанием на F_1 той части исходной меры μ, которая была сосредоточена на множестве $F \setminus F_1$. Поэтому

$$\int d\nu(\xi) = \int_{F_1} d\nu(\xi) \leqslant \int_{F \setminus F_1} d\mu(\xi),$$

$$\frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{d\nu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} \leqslant \frac{1}{\varkappa_n} \int_{F \setminus F_1} \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}. \tag{1.119}$$

Положим

$$u_1(x) = U^f(x) - U^{\mu_1}(x).$$

Из всего сказанного выше следует, что функции $u(x)$ и $u_1(x)$ всюду удовлетворяют неравенствам

$$u_1(x) \geqslant u(x) \geqslant 0,$$

которые переходят в равенство во всех регулярных точках компакта F_1.

Лемма 1.9. *Введенные выше меры μ и μ_1 удовлетворяют неравенствам*

$$\mu(F \cap K) \leqslant C(F \cap K)\, |f|_{n-2}, \qquad \mu_1(F \cap K) \leqslant C(F_1 \cap K)\, |f|_{n-2},$$

каково бы ни было замкнутое множество $K \subset R_n$.

Доказательство. В силу положительности меры μ

$$U^f(\ )-\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{F\cap K}\frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\geqslant U^f(x)-U^\mu(x)=u(x)\geqslant 0$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{F\cap K}\frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\leqslant U^f(x)\leqslant|f|_{n-2},$$

откуда согласно определению емкости получаем

$$\mu(F\cap K)\leqslant C(F\cap K)\,|f|_{n-2}.$$

Доказательство для меры μ_1 аналогично.

Лемма 1.10. *Для любого шара $T(R)$ справедливо неравенство*

$$\|u-u_1\|_R\leqslant\frac{R^2}{2(n-2)}C(\overline{F\setminus F_1})\,|f|_{n-2}.$$

Доказательство. Согласно определению функций $u(x)$ и $u_1(x)$

$$u_1(x)-u(x)=\frac{1}{\varkappa_n}\left\{\int\limits_F\frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}-\int\limits_{F_1}\frac{d\mu_1(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\right\},$$

откуда, используя равенство (1.118), получаем

$$u_1(x)-u(x)=\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{F\setminus F_1}\frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}-\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{F_1}\frac{d\nu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}.$$

Из этой формулы и неравенства (1.119) следует

$$0\leqslant u_1(x)-u(x)\leqslant\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{F\setminus F_1}\frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}},$$

так что

$$\int\limits_{T(R)}|u(x+\eta)-u_1(x+\eta)|\,d\eta=\int\limits_{T(R)}\{u_1(\ +\eta)-u(x+\eta)\}\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{T(R)}d\eta\int\limits_{F\setminus F_1}\frac{d\mu(\xi)}{|x+\eta-\xi|^{n-2}}=\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{F\setminus F_1}d\mu(\xi)\int\limits_{T(R)}\frac{d\eta}{|x+\eta-\xi|^{n-2}}.$$

Поскольку

$$\int\limits_{T(R)}\frac{d\eta}{|x+\eta-\xi|^{n-2}}\leqslant\int\limits_{T(R)}\frac{d\eta}{|\eta|^{n-2}}=\frac{\omega_nR^2}{2},$$

при всех $x\in R_n$

$$\int\limits_{T(R)}|u(x+\eta)-u_1(x+\eta)|\,d\eta\leqslant\frac{R^2}{2(n-2)}\mu(\overline{F\setminus F_1})$$

и в силу леммы 1.9 и определения нормы (1.113)

$$\|u-u_1\|_R\leqslant\frac{R^2}{2(n-2)}C(\overline{F\setminus F_1})\,|f|_{n-2},$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем компакт $F_1 \subset F$ выбирается в соответствии с проведенным выше разбиением пространства R_n на кубы $\overline{K}_i$ следующим образом. Пусть $\mathcal{J}_1$ — множество тех номеров i, для которых

$$C(F \cap \overline{K}_i') \leqslant 2 \int\limits_{\overline{K}_i} c(x)\,dx, \qquad (1.120)$$

а $\mathcal{J}_2$ — множество остальных номеров. Полагаем

$$F_1 = F \cap \left(\bigcup_{i \in \mathcal{J}_1} \overline{K}_i'\right) = \bigcup_{i \in \mathcal{J}_1} (F \cap \overline{K}_i'). \qquad (1.121)$$

При таком выборе компакта F_1 емкость $C(\overline{F \setminus F_1})$, фигурирующая в лемме 1.10, удовлетворяет неравенству

$$C(\overline{F \setminus F_1}) \leqslant \delta(h, r) + 2\varepsilon(h). \qquad (1.122)$$

Действительно, из очевидного равенства

$$\overline{F \setminus F_1} = \bigcup_i \{F \cap (\overline{K}_i \diagup K_i')\} \cup \{\bigcup_{i \in \mathcal{J}_2} (F \cap \overline{K}_i')\}$$

и полуаддитивности емкости следует

$$C(\overline{F \setminus F_1}) \leqslant \sum_i C(F \cap (\overline{K}_i \diagup K_i')) + \sum_{i \in \mathcal{J}_1} C(F \cap \overline{K}_i'),$$

откуда согласно определению (1.116) величины $\delta(h, r)$ находим

$$C(\overline{F \setminus F_1}) \leqslant \delta(h, r) + \sum_{i \in \mathcal{J}_2} C(F \cap \overline{K}_i'). \qquad (1.123)$$

Далее,

$$C(F \cap \overline{K}_i') \leqslant C(F \cap \overline{K}_i) = \int\limits_{\overline{K}_i} c_h(x)\,dx = \int\limits_{\overline{K}_i} \{c_h(x) - c(x)\}\,dx + \int\limits_{\overline{K}_i} c(x)\,dx,$$

и так как при $i \in \mathcal{J}_2$ выполняется неравенство, противоположное неравенству (1.120), то

$$C(F \cap K_i') \leqslant \int\limits_{\overline{K}_i} \{c_h(x) - c(x)\}\,dx + \frac{1}{2} C(F \cap K_i').$$

Тем более справедливо неравенство

$$\sum_{i \in \mathcal{J}_2} C(F \cap \overline{K}_i') \leqslant 2 \sum_{i \in \mathcal{J}_2} \int\limits_{\overline{K}_i} |c_h(x) - c(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int |c_h(x) - c(x)|\,dx = 2\varepsilon(h),$$

из которого в силу (1.123) вытекает оценка (1.122).

Мера μ_1, полученная в результате выметания меры μ на компакт F_1, выбранный по формуле (1.121), сосредоточена на объединении множеств $F \cap \overline{K}'_i$ $(i \in \mathcal{J}_1)$. Распределим теперь каждую меру $\mu_1(F \cap \overline{K}'_i)$ $(i \in \mathcal{J}_1)$ равномерно по соответствующему кубу $\overline{K}_i$, т. е. построим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in K_j, \quad j \in \mathcal{J}_2, \\ h^{-n}\mu_1(F \cap \overline{K}'_i) = h^{-n} \int\limits_{\overline{K}'_i} d\mu_1(\xi), & x \in K_i, \quad i \in \mathcal{J}_1, \end{cases}$$

определенную для почти всех $x \in R_n$. В качестве второй вспомогательной функции возьмем функцию

$$u_2(x) = U^f(x) - U^\varphi(x),$$

где

$$U^\varphi(x) = \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{|x-\xi|^{n-2}}.$$

Лемма 1.11. *Для любого шара $T(R)$ справедливо неравенство*

$$\|u_1 - u_2\|_R \leqslant 2\sqrt{n}\, hR\, |f|_0.$$

Доказательство. Согласно определению функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$

$$u_2(x) - u_1(x) = \frac{1}{\varkappa_n}\left\{\int \frac{d\mu_1(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} - \int \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{|x-\xi|^{n-2}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\varkappa_n} \sum_{i \in \mathcal{J}_1} \left\{\int\limits_{\overline{K}_i} \frac{d\mu_1(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} - \int\limits_{\overline{K}_i} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{|x-\xi|^{n-2}}\right\},$$

и так как

$$\int\limits_{\overline{K}_i} \varphi(\xi)\, d\xi = \int\limits_{\overline{K}_i} d\mu_1(\xi),$$

то

$$u_2(x) - u_1(x) = \frac{1}{\varkappa_n} \sum_{i \in \mathcal{J}_1} \int\limits_{\overline{K}_i} \varphi(\xi) \left\{\frac{1}{|x-\xi^i|^{n-2}} - \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\right\} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\varkappa_n} \sum_{i \in \mathcal{J}_1} \int\limits_{\overline{K}_i} \left\{\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} - \frac{1}{|x-\xi^i|^{n-2}}\right\} d\mu_1(\xi), \qquad (1.124)$$

где ξ^i — центр куба $\overline{K}_i$. При $\xi \in \overline{K}_i$

$$\big||x-\xi| - |x-\xi^i|\big| \leqslant |\xi - \xi^i| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{n}\, h$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{1}{|x-\xi^i|^{n-2}} - \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-2} \frac{|x-\xi| - |x-\xi^i|}{|x-\xi^i|^k\, |x-\xi|^{n-1-k}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{n}\,h}{2}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{|x-\xi^i|^k\,|x-\xi|^{n-1-k}}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{n}\,(n-2)}{2}\,h\left\{\frac{1}{|x-\xi^i|^{n-1}}+\frac{1}{|x-\xi|^{n-1}}\right\}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{T(R)}d\eta\left|\int\limits_{\overline{K}_i}\varphi(\xi)\left\{\frac{1}{|x+\eta-\xi^i|^{n-2}}-\frac{1}{|x+\eta-\xi|^{n-2}}\right\}d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{\overline{K}_i}\varphi(\xi)\,\frac{\sqrt{n}\,(n-2)\,h}{2}\left[\int\limits_{T(R)}\left\{\frac{1}{|x+\eta-\xi^i|^{n-1}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{|x+\eta-\xi|^{n-1}}\right\}d\eta\right]d\xi\leqslant\frac{\sqrt{n}\,(n-2)\,\omega_nRh}{\varkappa_n}\int\limits_{\overline{K}_i}\varphi(\xi)\,d\xi=$$

$$=\sqrt{n}\,Rh\int\limits_{\overline{K}_i}d\mu_1(\xi).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{T(R)}d\eta\left|\sum_{i\in\mathcal{J}_1}\int\limits_{\overline{K}_i}\varphi(\xi)\left\{\frac{1}{|x+\eta-\xi^i|^{n-2}}-\frac{1}{|x+\eta-\xi|^{n-2}}\right\}d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{n}\,Rh\int d\mu_1(\xi)\leqslant\sqrt{n}\,Rh\int d\mu(\xi)\leqslant\sqrt{n}\,Rh\,|f|_0.$$

Совершенно аналогично доказывается неравенство

$$\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{T(R)}d\eta\left|\sum_{i\in\mathcal{J}_1}\int\limits_{\overline{K}_i}\left\{\frac{1}{|x+\eta-\xi|^{n-2}}-\frac{1}{|x+\eta-\xi^i|^{n-2}}\right\}d\mu_1(\xi)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{n}\,Rh\,|f|_0.$$

Утверждение леммы непосредственно вытекает из последних двух неравенств и формулы (1.124).

Выше отмечалось, что функция $u_1(x)$ всюду удовлетворяет неравенству $u_1(x)\geqslant 0$, которое в регулярных точках компакта F_1 переходит в равенство. Так как мера μ_1 сосредоточена на компакте $F_1=\bigcup_{i\in\mathcal{J}_1}(F\cap\overline{K}_i')\subset\bigcup_i K_i'$ и кубы $\overline{K}_i'$, $\overline{K}_j'$ $(i\neq j)$ не пересекаются, то отсюда, в частности, следует, что при всех $x\in R_n$

$$\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{F\cap\overline{K}_i'}\frac{d\mu_1(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\leqslant U^f(x)-\sum_{\neq i}\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{\overline{K}_j'}\frac{d\mu_1(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}},$$

причем в регулярных точках компакта $F \cap \overline{K}'_i$ $(i \in \mathcal{I}_1)$ это неравенство переходит в равенство. Тем более

$$m_i \leqslant \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{F \cap \overline{K}'_i} \frac{d\mu_1(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} \leqslant M_i \qquad (i \in \mathcal{I}_1), \tag{1.125}$$

где

$$m_i = \inf_{x \in \overline{K}'_i} g_i(x), \qquad M_i = \sup_{x \in \overline{K}'_i} g_i(x),$$

$$g_i(x) = U^f(x) - \sum_{j \neq i} \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{\overline{K}'_j} \frac{d\mu_1(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}},$$

причем правая часть неравенства (1.125) выполняется для всех точек $x \in F \cap \overline{K}'_i$, а левая — для всех регулярных точек этого компакта. Из неравенств (1.125) вытекают также оценки для меры $\mu_1(F \cap \overline{K}'_i)$ (см. лемму 1.1)

$$C(F \cap \overline{K}'_i)\, m_i \leqslant \mu_1(F \cap \overline{K}'_i) \leqslant C(F \cap \overline{K}'_i)\, M_i,$$

из которых в силу непрерывности функции $g_i(x)$ на компакте $\overline{K}'_i$ следует существование такой точки $x^i \in \overline{K}'_i$, что

$$\mu_1(F \cap \overline{K}'_i) = C(F \cap \overline{K}'_i)\, g_i(x^i) \qquad (i \in \mathcal{I}_1).$$

Вводя функцию

$$c'_h(x) = \begin{cases} 0, & x \in K_j, \quad j \in \mathcal{I}_2, \\ h^{-n} C(F \cap \overline{K}'_i), & x \in K_i, \quad i \in \mathcal{I}_1, \end{cases}$$

согласно определению функций $\varphi(x)$ и $g_i(x)$ это равенство можно записать в таком виде:

$$\varphi(x) = c'_h(x) \left\{ U^f(x^i) - \sum_{j \neq 1} \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{\overline{K}'_j} \frac{d\mu_1(\xi)}{|x^i-\xi|^{n-2}} \right\}, \qquad x \in K_i, \tag{1.126}$$

где x^i — некоторая фиксированная точка компакта $\overline{K}'_i$. Заметим, что равенство (1.26) справедливо при всех значениях i, так как при $i \in \mathcal{I}_2$ и $x \in K_i$

$$c'_h(x) = \varphi(x) = 0.$$

Лемма 1.12. *При $h \geqslant 20r$ справедлива формула*

$$\varphi(x) = c'_h(x)\, u_2(x) + \varphi_1(x),$$

где

$$\int |\varphi_1(x)|\, dx \leqslant 2h(n-2)\sqrt{n}\, \{|f|_{n-1} + 4(1 +$$

$$+ 2\sqrt{n})^{n-1} |f|_{n-2} |c|_{n-1}\} |c|_0 + \frac{32 n^{\frac{n+2}{2}} |f|_{n-2}}{n-2} \left(\frac{h}{r}\right)^{n-2} h^2 |c^2|_0.$$

Доказательство. Согласно определению функции $u_2(x)$, формулу (1.126) можно преобразовать к виду

$$\varphi(x) = c_h'(x)\, u_2(x) + \varphi_1(x),$$

где

$$\varphi_1(x) = c_h'(x)\left[U^f(x^i) - U^f(x) + \frac{1}{\varkappa_n}\sum_j \int_{K_j} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{|x-\xi|^{n-2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\varkappa_n}\sum_{j\neq i} \int_{\overline{K}_j'} \frac{d\mu_1(\xi)}{|x^i-\xi|^{n-2}}\right]$$

при $x \in K_i$. Пусть

$$\alpha_1(x) = U^f(x^i) - U^f(x),$$
$$\alpha_2(x) = \frac{1}{\varkappa_n}\left[\sum_j{}' \int_{K_j} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{|x-\xi|^{n-2}} - \sum_{j\neq i}{}' \int_{\overline{K}_j'} \frac{d\mu_1(\xi)}{|x^i-\xi|^{n-2}}\right],$$
$$\alpha_3(x) = \frac{1}{\varkappa_n}\sum_{j\neq i}{}'' \left[\int_{K_j} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{|x-\xi|^{n-2}} - \int_{\overline{K}_j'} \frac{d\mu_1(\xi)}{|x^i-\xi|^{n-2}}\right], \qquad x \in K_i,$$

где сумма $\sum\limits_{j\neq i}{}'$ $\left(\sum\limits_j{}'\right)$ распространяется на индексы $j \in \mathfrak{J}_2$, соответствующие ближайшим к K_i кубам (включая куб K_i), а $\sum\limits_{j\neq i}{}''$ — на все остальные индексы. Тогда

$$\varphi_1(x) = c_h'(x)\,[\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x)].$$

Если точки x, x^i лежат в одном и том же кубе K_i со стороной h, то $|x - x^i| \leqslant \sqrt{n}\, h$. Поэтому при $x \in K_i$

$$|\alpha_1(x)| = |U^f(x^i) - U^f(x)| = \frac{1}{\varkappa_n}\left|\int \frac{f(\xi)\, d\xi}{|x^i-\xi|^{n-2}} - \int \frac{f(\xi)\, d\xi}{|x-\xi|^{n-2}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(n-2)\sqrt{n}\, h}{\varkappa_n} \sup_{y\in R_n} \int \frac{f(\xi)\, d\xi}{|y-\xi|^{n-1}},$$

т. е.

$$|\alpha_1(x)| \leqslant (n-2)\sqrt{n}\, h\, |f|_{n-1}. \tag{1.127}$$

Согласно определению функции $\varphi(\xi)$

$$0 \leqslant \frac{1}{\varkappa_n}\int_{K_j} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{|x-\xi|^{n-2}} = \frac{\mu_1(F \cap \overline{K}_j')}{\varkappa_n h^n} \int_{K_j} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-2}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\mu_1(F \cap \overline{K}_j')}{\varkappa_n h^n} \int_{T(\sqrt{n}\, h)} \frac{d\xi}{|\xi|^{n-2}} = \frac{\mu_1(F \cap \overline{K}_j')\, \omega_n n h^2}{2 h^n \varkappa_n} =$$
$$= \frac{nh^2}{2(n-2)} \cdot \frac{\mu_1(F \cap \overline{K}_j')}{h^n},$$

причем в силу леммы 1.9

$$\mu_1(F \cap \overline{K}'_j) \leqslant C(F \cap \overline{K}'_j)\,|f|_{n-2}.$$

Поэтому

$$0 \leqslant \frac{1}{\varkappa_n}\sum_j{}' \int\limits_{K_j} \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{n-2}} \leqslant \frac{nh^2}{2(n-2)}\,|f|_{n-2}\sum_j{}' C(F \cap \overline{K}'_j)\,h^{-n},$$

откуда, используя неравенство (1.120), получаем

$$0 \leqslant \frac{1}{\varkappa_n}\sum_j{}' \int\limits_{K_j} \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{n-2}} \leqslant \frac{nh^2\,|f|_{n-2}}{(n-2)\,h^n}\sum_j{}' \int\limits_{K_j} c(\xi)\,d\xi. \quad (1.128)$$

Далее, если $j \neq i$, $\xi \in \overline{K}'_j$, $x^i \in \overline{K}'_i$, то $|x^i - \xi| \geqslant 2r$ и

$$0 \leqslant \frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{\overline{K}'_j} \frac{d\mu_1(\xi)}{|x^i-\xi|^{n-2}} \leqslant \frac{\mu_1(F \cap \overline{K}'_j)}{\varkappa_n(2r)^{n-2}} \leqslant \frac{C(F \cap \overline{K}'_j)\,|f|_{n-2}}{\varkappa_n(2r)^{n-2}},$$

так что

$$0 \leqslant \frac{1}{\varkappa_n}\sum_{j\neq i}{}' \int\limits_{\overline{K}'_j} \frac{d\mu_1(\xi)}{|x^i-\xi|^{n-2}} \leqslant \frac{h^n\,|f|_{n-2}}{\varkappa_n(2r)^{n-2}}\sum_{j\neq i}{}' C(F \cap \overline{K}'_j) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2h^n\,|f|_{n-2}}{\varkappa_n(2r)^{n-2}}\,\frac{1}{h^n}\sum_j{}' \int\limits_{K_j} c(\xi)\,d\xi. \quad (1.129)$$

Заметим теперь, что

$$\frac{4\cdot 10^{n-2}}{\varkappa_n} \geqslant \frac{n}{n-2},$$

откуда при $h \geqslant 20r$

$$\frac{4h^n}{\varkappa_n(2r)^{n-2}} \geqslant \frac{4h^2\cdot 10^{n-2}}{\varkappa_n} \geqslant \frac{nh^2}{n-2},$$

т. е.

$$\frac{nh^2\,|f|_{n-2}}{n-2} \leqslant \frac{4h^n\,|f|_{n-2}}{\varkappa_n(2r)^{n-2}}.$$

Из этого неравенства, определения функции $\alpha_2(x)$ и оценок (1.128), (1.129) вытекает, что при $h \geqslant 20r$

$$|\alpha_2(x)| \leqslant \frac{4h^n\,|f|_{n-2}}{\varkappa_n(2r)^{n-2}}\,\frac{1}{h^n}\sum_j{}' \int\limits_{K_j} c(\xi)\,d\xi, \qquad x \in K_i,$$

и тем более

$$|\alpha_2(x)| \leqslant \frac{h^n 2^{n-2} n^{\frac{n+2}{2}}\,|f|_{n-2}}{(n-2)\,(2r)^{n-2}\,V(2\sqrt{n}\,h)} \int\limits_{T(2\sqrt{n}\,h)} c(x-\xi)\,d\xi, \quad (1.130)$$

где $V(2\sqrt{n}\,h)$ — объем шара $T(2\sqrt{n}\,h)$.

Для оценки функции $\alpha_3(x)$ воспользуемся теоремой о среднем значении, согласно которой

$$\frac{1}{\varkappa_n}\left|\sum_{j\neq i}{}''\left\{\int\limits_{K_j}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{n-2}}-\int\limits_{\overline{K}'_j}\frac{d\mu_1(\xi)}{|x^i-\xi|^{n-2}}\right\}\right|=$$

$$=\frac{1}{\varkappa_n}\left|\sum_{j\neq i}{}''\left\{\frac{1}{|x-\check{\xi}^j|^{n-2}}\int\limits_{K_j}\varphi(\xi)\,d\xi-\frac{\mu_1(F\cap\overline{K}'_j)}{|x^i-\hat{\xi}^j|^{n-2}}\right\}\right|=$$

$$=\frac{1}{\varkappa_n}\left|\sum_{j\neq i}{}''\mu_1(F\cap\overline{K}'_j)\left\{\frac{1}{|x-\check{\xi}^j|^{n-2}}-\frac{1}{|x^i-\hat{\xi}^j|^{n-2}}\right\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\varkappa_n}\sum_{j\neq i}{}''\mu_1(F\cap\overline{K}'_j)\sum_{k=1}^{n-2}\frac{||x-\check{\xi}^j|-|x^i-\hat{\xi}^j||}{|x-\check{\xi}^j|^k\,|x^i-\hat{\xi}^j|^{n-1-k}},$$

где $x,\ x^i\in K_i$; $\check{\xi}^j,\ \hat{\xi}^j\in K_j$, вследствие чего

$$||x-\check{\xi}^j|-|x^i-\hat{\xi}^j||\leqslant 2\sqrt{n}\,h.$$

Из этих неравенств, леммы 1.9 и неравенства (1.120) следует

$$|\alpha_3(x)|\leqslant\frac{4\sqrt{n}\,h\,|f|_{n-2}}{\varkappa_n}\sum_{j\neq i}{}''\left\{\int\limits_{K_j}c(\xi)\,d\xi\sum_{k=1}^{n-2}|x-\check{\xi}^j|^{-k}\,|x^i-\hat{\xi}^j|^{-n+1+k}\right\}.$$

Снова используя теорему о среднем значении, находим

$$\int\limits_{K_j}c(\xi)\,|x-\xi|^{1-n}d\xi=|x-\tilde{\xi}^j|^{1-n}\int\limits_{K_j}c(\xi)\,d\xi,\qquad \tilde{\xi}^j\in K_j,$$

и, следовательно,

$$|\alpha_3(x)|\leqslant\frac{4\sqrt{n}\,h\,|f|_{n-2}}{\varkappa_n}\sum_{j\neq i}{}''\left\{\int\limits_{K_j}\frac{c(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{n-2}}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{|x-\tilde{\xi}^j|^{n-1}}{|x-\check{\xi}^j|^k\,|x^i-\hat{\xi}^j|^{n-1-k}}\right\}.$$

Так как $x,\ x^i\in K_i$, а $\check{\xi}^j,\ \hat{\xi}^j,\ \tilde{\xi}^j\in K_j$ и куб K_j отстоит от куба K_i на расстоянии не меньшем h, то

$$\frac{|x-\tilde{\xi}^j|^{n-1}}{|x-\check{\xi}^j|^{n-1}\,|x^i-\hat{\xi}^j|^{n-1}}\leqslant(1+2\sqrt{n})^{n-1},$$

откуда вытекает оценка

$$|\alpha_3(x)|\leqslant\frac{4\sqrt{n}\,(n-2)\,(1+2\sqrt{n})^{n-1}\,|f|_{n-2}h}{\varkappa_n}\sum_{j\neq i}{}''\int\limits_{K_j}\frac{c(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{n-1}}\leqslant$$

$$\leqslant 4\sqrt{n}\,(n-2)(1+2\sqrt{n})^{n-1}\,|f|_{n-2}h\frac{1}{\varkappa_n}\int\frac{c(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{n-1}}$$

и тем более

$$|\alpha_3(x)|\leqslant 4\sqrt{n}\,(n-2)(1+2\sqrt{n})^{n-1}\,|f|_{n-2}\,|c|_{n-1}\,h. \quad (1.131)$$

Из неравенств (1.129) — (1.131) следует

$$\int |\varphi_1(x)|\,dx \leqslant \int c_h'(x)\{|\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| + |\alpha_3(x)|\}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant h\{(n-2)\sqrt{n}\,|f|_{n-1} + 4(n-2)\sqrt{n}\,(1+$$
$$+2\sqrt{n})^{n-1}|f|_{n-2}|c|_{n-1}\}\int c_h'(x)\,dx+$$
$$+\frac{16n^{\frac{n+2}{2}}|f|_{n-2}}{(n-2)\,V(2\sqrt{n}\,h)}\left(\frac{h}{r}\right)^{n-2}h^2\int c_h'(x)\left\{\int\limits_{T(2\sqrt{n}\,h)} c(x-\xi)\,d\xi\right\}dx,$$

и так как

$$\int c_h'(x)\,dx = |c_h'|_0,$$

$$\int c_h'(x)\int\limits_{T(2\sqrt{n}\,h)} c(x-\xi)\,d\xi dx = \int\limits_{T(2\sqrt{n}\,h)} d\xi\int c_h'(x)\,c(x-\xi)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T(2\sqrt{n}\,h)} d\xi\left\{\int (c_h'(x))^2\,dx\int (c(x))^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$=V(2\sqrt{n}\,h)\,|(c_h')^2|_0^{\frac{1}{2}}\,|c^2|_0^{\frac{1}{2}},$$

то

$$\int |\varphi_1(x)|\,dx \leqslant h(n-2)\sqrt{n}\,\{|f|_{n-1}+$$
$$+4(1+2\sqrt{n})^{n-1}|f|_{n-2}|c|_{n-1}\}\,|c_h'|_0+$$
$$+\frac{16n^{\frac{n+2}{n}}|f|_{n-2}}{n-2}\left(\frac{h}{r}\right)^{n-2}h^2\,|(c_h')^2|_0^{\frac{1}{2}}\,|c^2|_0^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, при $x\in K_i$

$$c_h'(x) = \begin{cases} 0, & i\in \mathfrak{J}_2,\\ h^{-n}C(F\cap \overline{K}_i') \leqslant 2h^{-n}\int\limits_{K_i} c(x)\,dx, & i\in\mathfrak{J}_1,\end{cases}$$

и

$$\int\limits_{K_i} c_h'(x)\,dx \leqslant 2\int\limits_{K_i} c(x)\,dx,$$

так что

$$|c_h'|_0 = \int c_h'(x)\,dx \leqslant 2\int c(x)\,dx = 2|c|_0.$$

Аналогично

$$\int\limits_{K_i}(c_h'(x))^2\,dx \leqslant 4h^{-n}\left\{\int\limits_{K_i} c(x)\,dx\right\}^2 \leqslant 4\int\limits_{K_i} c^2(x)\,dx,$$
$$|(c_h')^2|_0 = \int (c_h'(x))^2\,dx \leqslant 4\int c^2(x)\,dx = 4|c^2|_0.$$

Следовательно,

$$\int |\varphi_1(x)|\,dx \leqslant 2h(n-2)\sqrt{n}\,\{|f|_{n-1} + 4(1+2\sqrt{n})^{n-1}|f|_{n-2}|c|_{n-1}\}\,|c|_0 + \frac{32n^{\frac{n+2}{2}}|f|_{n-2}}{n-2}\left(\frac{h}{r}\right)^{n-2} h^2 |c^2|_0,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1.13. *При всех $R > 0$ и $h \geqslant 20r > 0$ справедливо неравенство*

$$\|u_2 - v\|_R \leqslant \frac{R^2}{2(n-2)}\int|\varphi_1(\xi)|\,d\xi + \frac{R^2}{2(n-2)}|f|_{n-2}\{\delta(h, r) + \varepsilon(h)\},$$

где $v(x)$ — решение задачи (1.112).

Доказательство. Так как функция

$$u_2(x) = U^f(x) - U^\varphi(x) = \frac{1}{\varkappa_n}\int \frac{f(\xi) - \varphi(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\,d\xi$$

удовлетворяет в слабом смысле уравнению

$$\Delta u_2(x) = -f(x) + \varphi(x),$$

то согласно лемме 1.12

$$\Delta u_2(x) - c_h'(x)\,u_2(x) = -f(x) + \varphi_1(x).$$

Поэтому если $v(x)$ — решение задачи (1.112), то функция

$$w(x) = u_2(x) - v(x)$$

удовлетворяет уравнению

$$\Delta w(x) - c_h'(x)\,w(x) = \{c_h'(x) - c(x)\}\,v(x) + \varphi_1(x)$$

и стремится к нулю при $x \to \infty$. Обозначим через $G(x, \xi, c)$ функцию Грина задачи (1.112) и через $G(x, \xi, c_h')$ — функцию Грина задачи

$$\Delta w(x) - c_h'(x)\,w(x) = -g(x).$$

Тогда

$$v(x) = \int G(x, \xi, c)\,f(\xi)\,d\xi$$

и

$$w(x) = \int G(x, \xi, c_h')\,\{[c(\xi) - c_h'(\xi)]\,v(\xi) - \varphi_1(\xi)\}\,d\xi.$$

Так как $c_h'(x) \geqslant 0$ и $c(x) \geqslant 0$, то

$$0 \leqslant G(x, \xi, c) \leqslant \frac{1}{\varkappa_n|x-\xi|^{n-2}}, \qquad 0 \leqslant G(x, \xi, c_h') \leqslant \frac{1}{\varkappa_n|x-\xi|^{n-2}}.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant v(x) \leqslant \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{f(\xi)\, d\xi}{|x-\xi|^{n-2}} = U^f(x) \leqslant |f|_{n-2}$$

и

$$|w(x)| \leqslant \frac{1}{\varkappa_n} \int \frac{|c(\xi) - c_h'(\xi)|\,|f|_{n-2} + |\varphi_1(\xi)|}{|x+\eta-\xi|^{n-2}}\, d\xi.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{T(R)} |w(x+\eta)|\, d\eta \leqslant \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{T(R)} d\eta \int \frac{|c(\xi) - c_h'(\xi)|\,|f|_{n-2} + |\varphi_1(\xi)|}{|x+\eta-\xi|^{n-2}}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\varkappa_n} \int \{|c(\xi) - c_h'(\xi)|\,|f|_{n-2} + |\varphi_1(\xi)|\} \left\{\int \frac{d\eta}{|x+\eta-\xi|^{n-2}}\right\} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega_n R^2}{2\varkappa_n} \int \{|c(\xi) - c_h'(\xi)|\,|f|_{n-2} + |\varphi_1(\xi)|\}\, d\xi =$$

$$= \frac{R^2}{2(n-2)} \left\{|f|_{n-2} \int |c(\xi) - c_h'(\xi)|\, d\xi + \int |\varphi_1(\xi)|\, d\xi\right\},$$

откуда согласно определению функции $w(x)$ и (1.113)

$$\|u_2 - v\|_R \leqslant \frac{R^2}{2(n-2)} \left\{|f|_{n-2} \int |c(\xi) - c_h'(\xi)|\, d\xi + \int |\varphi_1(\xi)|\, d\xi\right\}. \tag{1.132}$$

Далее,

$$\int |c(\xi) - c_h'(\xi)|\, d\xi = \sum_{i \in \mathcal{J}_1} \int\limits_{K_i} |c(\xi) - c_h(\xi)|\, d\xi + \sum_{i \in \mathcal{J}_1} \int\limits_{K_i} |c_h(\xi) -$$

$$- c_h'(\xi)|\, d\xi + \sum_{j \in \mathcal{J}_2} \int\limits_{K_j} c(\xi)\, d\xi,$$

причем если $i \in \mathcal{J}_1$, то

$$0 \leqslant c_h(\xi) - c_h'(\xi) = h^{-n} \{c(F \cap \overline{K}_i) \setminus C(F \cap \overline{K}_i')\} \leqslant$$

$$\leqslant h^{-n} C(F \cap (\overline{K}_i \setminus \overline{K}_i')), \qquad \xi \in K_i,$$

а при $j \in \mathcal{J}_2$

$$\int\limits_{K_j} c_h(\xi)\, d\xi = C(F \cap \overline{K}_j) \geqslant C(F \cap \overline{K}_j') \geqslant 2 \int\limits_{K_j} c(\xi)\, d\xi,$$

т. е.

$$\int\limits_{K_j} \{c_h(\xi) - c(\xi)\}\, d\xi \geqslant \int\limits_{K_j} c(\xi)\, d\xi.$$

Следовательно,

$$\sum_{i \in \mathcal{J}_1} \int\limits_{K_i} |c_h(\xi) - c_h'(\xi)|\, d\xi \leqslant \sum_{i \in \mathcal{J}_1} C(F \cap (\overline{K}_i \setminus \overline{K}_i')) \leqslant \delta(h, r),$$

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_2} \int\limits_{K_j} c(\xi)\, d\xi + \sum_{i \in \mathcal{J}_1} \int\limits_{K_i} |c(\xi) - c_h(\xi)|\, d\xi \leqslant \sum_i \int\limits_{K_i} |c(\xi) - c_h(\xi)|\, d\xi = \varepsilon(h).$$

Поэтому

$$\int |c(\xi) - c_h'(\xi)|\, d\xi \leqslant \delta(h, r) + \varepsilon(h).$$

Утверждение леммы непосредственно вытекает из этого неравенства и неравенства (1.132).

Доказательство теоремы 1.8. Так как в силу 1.113

$$\|u - v\|_R \leqslant \|u - u_1\|_R + \|u_1 - u_2\|_R + \|u_2 - v\|_R,$$

то, согласно неравенству (1.122) и леммам 1.10—1.13, получаем

$$\|u - v\|_R \leqslant \frac{R^2}{2(n-2)} |f|_{n-2} \{\delta(h, r) + 2\varepsilon(h)\} + 2\sqrt{n}\, R |f|_0 h +$$
$$+ \frac{R^2}{2(n-2)} \Big\{ [\delta(h, r) + \varepsilon(h)] |f|_{n-2} + 2h(n-2)\sqrt{n}\, [|f|_{n-1} +$$
$$+ 4(1 + 2\sqrt{n})^{n-1} |f|_{n-2} |c|_{n-1}] |c|_0 + \frac{32n^{\frac{n+2}{2}}}{n-2} \times$$
$$\times |f|_{n-2} |c^2|_0 \left(\frac{h}{r}\right)^{n-2} h^2 \Big\},$$

что и требовалось доказать.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что если выполняется условие (1.9), то

$$\lim_{s \to \infty} \operatorname{mes} F^{(s)} = 0.$$

2. Пусть $P_\Gamma F^{(s)}$ — проекция множества $F^{(s)}$ на поверхность Г. Показать, что если выполняется условие (1.47) при поверхностном распределении $F^{(s)}$, то

$$\lim_{s \to \infty} \operatorname{mes}_\Gamma P_\Gamma F^{(s)} = 0.$$

3. Пусть $h = h(t)$ — положительная монотонно возрастающая функция на полуоси $t > 0$, а $\mu_h(E)$ — хаусдорфова h-мера множества E. Пусть при $s \to \infty$ последовательность решений задачи (1.6), (1.7) ($f(x) \leqslant 0$) сходится к функции $u(x)$. Показать, что если $\mu_h(E) > 0$ и в каждой точке $x \in E$ выполняется равенство

$$\lim_{\rho \to 0} \varlimsup_{s \to \infty} \frac{C^{(s)}(x, \rho)}{h(\rho)} = \infty,$$

то для почти всех $x_0 \in E$ (относительно меры μ_h)

$$\varlimsup_{x \to x_0} u(x) = 0.$$

4. Пусть $m_\alpha(E)$ — функция множества, определяемая формулой (1.60), где верхний предел по s берется по некоторой подпоследовательности $\{s = s_k \in \alpha\}$. Предположим, что для любых таких подпоследовательностей эти функции множества совпадают, т. е. $m_\alpha(E) = m(E)$. Показать, что тогда последовательность решений задач (1.6), (1.7) ($f(x) \leqslant 0$) при $s \to \infty$ сходится в $L_1(\Omega')$ к функции $u(x)$, представимой в виде разности непрерывной ($U^{-f}(x)$) и супергармонической ($U^{\mu}(x)$) функций, причем если G — объединение открытых множеств E, для которых $m(E) < \infty$, то $u(x)$ в области G удовлетворяет уравнению (1.59), а на дополнении к нему в любой точке $x_0 \in CG$

$$\varlimsup_{x \to x_0} u(x) = 0.$$

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ

В данной главе развиты два подхода к изучению краевых задач в областях с мелкозернистой границей для сильно эллиптических систем уравнений произвольного порядка, основанные на вариационных методах. С помощью первого из них можно исследовать решения задачи Дирихле как при поверхностном, так и при объемном распределении множеств $F^{(s)}$. При этом предполагается, что $F^{(s)}$ состоит из непересекающихся компонент $F_i^{(s)}$ и, кроме того, размерность пространства R_n не меньше порядка оператора. Этот подход основан на методе ортогональной проекции [6, 34, 69] и позволяет дать первой краевой задаче в областях с мелкозернистой границей функциональную трактовку.

С помощью второго подхода (см. § 4) можно исследовать решение краевых задач только при поверхностном распределении $F^{(s)}$. Однако он обладает тем преимуществом, что позволяет рассмотреть множества $F^{(s)}$ произвольного вида в пространствах любой размерности (в том числе меньшей, чем порядок оператора) и установить общие (необходимые и достаточные) условия сходимости решений. Аналогичным методом в гл. III исследована вторая краевая задача при поверхностном распределении $F^{(s)}$.

§ 1. ПРОСТРАНСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ И ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Приведем некоторые необходимые в дальнейшем сведения, относящиеся к теории соболевских пространств и вариационным методам исследования краевых задач.

Некоторые свойства дифференцируемых функций

Пусть Ω — произвольная ограниченная область в R_n $(n \geqslant 2)$. Как обычно, через $W_2^l(\Omega)$ обозначим соболевское пространство, т. е. пространство, элементами которого являются классы эквивалентных функций из $L_2(\Omega)$, имеющих в Ω обобщенные производные по x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) до порядка l включительно, суммируемые по Ω со степенью 2. Норма в $W_2^l(\Omega)$ вводится следующим образом:

$$\|u\|_{l,\Omega} = \left\{\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant l} |D^\alpha u(x)|^2 dx\right\}^{1/2}, \tag{2.1}$$

где $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ — обобщенная производная функции $u(x)$, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ — целочисленный мультииндекс, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. При $l = 0$ $W_2^l(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Пусть $\Omega' \subset \Omega$ — произвольная подобласть, находящаяся на положительном расстоянии от границы $\partial\Omega$ области Ω. Тогда любую функцию из $W_2^l(\Omega)$ по норме пространства $W_2^l(\Omega')$ можно аппроксимировать бесконечно дифференцируемыми в $\bar{\Omega}'$ функциями [46]. Если граница области Ω достаточно гладкая, то любую функцию $u(x)$ из $W_2^l(\Omega)$ можно продолжить в более широкую область $\tilde{\Omega} \supset \Omega$ так, что полученная функция $\tilde{u}(x) \in W_2^l(\tilde{\Omega})$ будет удовлетворять неравенству

$$\|\tilde{u}\|_{l,\tilde{\Omega}} \leqslant C \|u\|_{l,\Omega},$$

где постоянная C не зависит от u [3, 37].

Обозначим через $\mathring{W}_2^l(\Omega)$ подпространство пространства $W_2^l(\Omega)$, плотным множеством в котором является совокупность всех бесконечно дифференцируемых и финитных в Ω функций;

$W_2^l(\Omega, \text{loc})$ — совокупность функций $u(x)$, заданных в области Ω и таких, что $u(x) \in W_2^l(\Omega')$ для любой ограниченной подобласти $\Omega' \subset \Omega$, находящейся на положительном расстоянии от $\partial\Omega$;

$C^k(\Omega)$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых в Ω функций с нормой

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \max_{\bar{\Omega}} |D^\alpha u(x)|;$$

$L_2(\Gamma)$ — пространство, элементами которого являются классы эквивалентных (относительно меры $d\Gamma$) функций, заданных на поверхности $\Gamma \subset \Omega$ и имеющих конечную норму

$$\|u\|_{L_2(\Gamma)} = \left\{\int_\Gamma |u(x)|^2 d\Gamma\right\}^{1/2},$$

где $d\Gamma$ — элемент объема на Γ. Под поверхностью $\Gamma \subset R_n$ всюду понимается гладкое многообразие класса $C^{2m+\alpha}$ размерности $n - 1$ с краем или без края. А именно: каждая точка $x \in \Gamma$ имеет окрестность ω в R_n, которую можно взаимно однозначно отобразить на шар $K \subset R_n$ так, что множество $\omega \cap \Gamma$ перейдет в $K \cap \{x \in$

$\in R_n : x_n = 0\}$, если x не принадлежит краю Γ, и в $K \cap \{x \in R_n : x_n = 0, x_{n-1} \geqslant 0\}$, если x принадлежит краю; при этом как прямое, так и обратное отображения должны принадлежать классу $C^{2m+\alpha}$ $(\alpha > 0)$. Очевидно, если поверхность $\Gamma \subset \Omega$ имеет край, то ее можно погрузить в более широкую поверхность $\tilde{\Gamma} \subset \Omega$ $(\Gamma \subset \tilde{\Gamma})$ этого же класса гладкости.

Для функций из пространства $W_2^l(\Omega)$ установлены интегральные неравенства и свойства, которые принято называть теоремами вложения [48]. Приведем некоторые частные случаи этих теорем, достаточные для наших целей.

Предположим, что область Ω является объединением конечного числа подобластей, звездных относительно некоторого шара. Оператором вложения из одного пространства $W_2^l(\Omega)$ в другое, более широкое пространство H $(W_2^k(\Omega),\ L_2(\Gamma),\ C^k(\bar{\Omega}))$ называется оператор, сопоставляющий элементам из $W_2^l(\Omega)$ специальным способом выбираемые функции из соответствующих классов.

Теорема 2.1. *Операторы вложения из $W_2^l(\Omega)$ в $W_2^k(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ вполне непрерывны при любом $n > 0$ и $l > k \geqslant 0$. При $n < 2(l-k)$ вполне непрерывен оператор вложения из $W_2^l(\Omega)$ в $C^k(\bar{\Omega})$.*

Поскольку для любой функции $u(x) \in W_2^l(\Omega)$ ее обобщенные производные $D^\alpha u(x)$ $(|\alpha| \leqslant l)$ принадлежат $W_2^{l-|\alpha|}(\Omega)$, приведенная теорема вложения гарантирует существование следа на поверхностях Γ у функций $D^\alpha u(x)$ $(|\alpha| < l)$ и справедливость неравенства

$$\|D^\alpha u\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant C\|u\|_{l,\Omega},$$

где постоянная C не зависит от $u(x)$. При этом след функции непрерывен относительно определенного класса деформаций Γ. В частности, если Γ_t — поверхность, «параллельная» Γ и находящаяся от нее на расстоянии $|t|$, то

$$\left|\|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Gamma_t)} - \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Gamma)}\right| \leqslant \varepsilon(t)\|u\|^2_{l,\Omega} \qquad (|\alpha| < l), \tag{2.2}$$

где $\varepsilon(t)$ не зависит от u и стремится к нулю при $|t| \to 0$. Это неравенство выводится с помощью интегрального представления С. Л. Соболева для функций из $W_2^l(\Omega)$ точно так же, как доказывается непрерывность следов функций на плоских сечениях относительно сдвигов.

Приведем свойства функций из $W_2^l(\Omega)$, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Пусть область Ω разделена поверхностью Γ на подобласти Ω^+ и Ω^- и в $\Omega^\pm$ заданы функции $u^\pm \in W_2^l(\Omega^\pm)$ такие, что на Γ следы их производных по нормали ν к Γ до порядка $l-1$ включительно совпадают:

$$\frac{\partial^k u^+}{\partial \nu^k} = \frac{\partial^k u^-}{\partial \nu^k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, l-1.$$

Тогда функция $u(x)$, равная $u^+(x)$ при $x \in \Omega^+$ и $u^-(x)$ при $x \in \Omega^-$, принадлежит пространству $W_2^l(\Omega)$.

Пусть Ω' — подобласть в Ω диаметра d. Для любой функции $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{\Omega'}^2 \leqslant Cd^2\theta_1(d) \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx, \tag{2.3}$$

где постоянная C не зависит от $u(x)$ и Ω', $\|u\|_{\Omega'}$ — норма в $L_2(\Omega')$, а $\theta_1(d) = 1$ при $n > 2$ и $\theta_1(d) = 1 + |\ln d|$ при $n = 2$. Из этого неравенства, в частности, следует, что норма (2.1) в $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ эквивалентна норме

$$\|u\|'_{l,\Omega} = \left\{\int_\Omega \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}^p(\Gamma)$ множество $2m$ раз непрерывно дифференцируемых и финитных в Ω функций, удовлетворяющих условиям

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}\right|_{\Gamma_u} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, p-1,$$

где $\Gamma_u = \Gamma$, если Γ не имеет края, и Γ_u — некоторая окрестность Γ в $\tilde{\Gamma}$ (зависящая от u), если Γ имеет край, $\frac{\partial}{\partial\nu}$ — производная по нормали к Γ_u. Напомним, что $\tilde{\Gamma}$ — фиксированная поверхность того же класса, что и Γ, содержащая внутри себя Γ.

Лемма 2.1. *Если Γ — поверхность класса $C^{2m+\alpha}$ и $p \leqslant m$, то замыкание множества $\mathfrak{M}^p(\Gamma)$ по норме пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ совпадает с подпространством функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, у которых обобщенные производные до порядка $p-1$ включительно равны нулю на Γ.*

Доказательство леммы мы проведем, пользуясь понятием пространств типа С. Л. Соболева нецелого индекса [37, 45]. Пусть S — поверхность класса $C^{2m+\alpha}$ с краем или без края. Рассмотрим пространство $W_2^{m-\frac{1}{2}}(S)$ функций, заданных на S, с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{m-\frac{1}{2}}(S)} = \sum_{|\alpha|\leqslant m-1} \|D^\alpha u\|_{L_2(S)} +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=m-1} \int_S \int_S \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^n} dS_x dS_y,$$

где $D^\alpha u$ — производные $u(x)$ на поверхности S. Если S — поверхность без края, а G — область, ограниченная ею, то справедлива следующая теорема Л. Н. Слободецкого [45].

Теорема 2.2. *Пусть* $v(x) \in W_2^m(G)$. *Тогда при* $k = 0, 1, \ldots, m-1$ *нормальные производные* $\frac{\partial^k v}{\partial \nu^k}$ *как функции точки на поверхности* S *принадлежат пространствам* $W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(S)$ и

$$\left\| \frac{\partial^k v}{\partial \nu^k} \right\|_{W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(S)} \leqslant C_1 \| v \|_{W_2^m(G)},$$

где C_1 *зависит только от* G.

Обратно: если заданы функции $\varphi_k(x) \in W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(S)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, *то существует функция* $\bar{v}(x) \in W_2^m(G)$, *удовлетворяющая граничным условиям*

$$\left. \frac{\partial^k \bar{v}}{\partial \nu^k} \right|_S = \varphi_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Кроме того,

$$\| \bar{v} \|_{W_2^m(G)} \leqslant C_2 \sum_{k=0}^{m-1} \| \varphi_k \|_{W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(S)},$$

где C_2 *зависит только от* G.

Теперь можно перейти непосредственно к доказательству леммы.

В силу теоремы вложения замыкание $\mathfrak{M}^p(\Gamma)$ по норме $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ содержится в подпространстве функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, у которых обобщенные производные до порядка $p-1$ включительно равны нулю на Γ. Пусть $u(x)$ — произвольная функция из этого подпространства. Согласно определению $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ существует последовательность бесконечно дифференцируемых и финитных в Ω функций $u_i(x)$ таких, что

$$\| u(x) - u_i(x) \|_{m,\Omega} \to 0 \text{ при } i \to \infty. \tag{2.4}$$

Отсюда, учитывая свойства функции $u(x)$ и теорему 2.2, заключаем, что найдется такая последовательность окрестностей Γ_i поверхности Γ в $\tilde{\Gamma}$ ($\Gamma \subset \Gamma_i \subset \tilde{\Gamma}$), что для $k = 0, 1, \ldots, p-1$

$$\left\| \frac{\partial^k u_i}{\partial \nu^k} \right\|_{W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(\Gamma_i)} \to 0 \text{ при } i \to \infty. \tag{2.5}$$

Покажем, что при любом i существует $2m$ раз непрерывно дифференцируемая и финитная в Ω функция $v_i(x)$, удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial^k v_i}{\partial \nu^k} = \frac{\partial^k u_i}{\partial \nu^k} \text{ на } \Gamma_i, \qquad k = 0, 1, \ldots, p-1,$$

$$\| v_i \|_{m,\Omega} \leqslant C \sum_{k=0}^{p-1} \left\| \frac{\partial^k u_i}{\partial \nu^k} \right\|_{W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(\Gamma_i)}, \tag{2.6}$$

где постоянная C зависит только от Ω и $\tilde{\Gamma} \supset \Gamma$. Тогда, положив $w_i(x) = u_i(x) - v_i(x)$, получим последовательность функций из $\mathfrak{M}^p(\Gamma)$, которая в силу (2.4) — (2.6) по норме $W_2^m(\Omega)$ сходится к $u(x)$. Тем самым лемма будет доказана.

Достаточно рассмотреть случай, когда поверхность $\tilde{\Gamma}$ можно дополнить до некоторой поверхности $\tilde{\Gamma}_0$ без края класса $C^{2m+\alpha}$, разбивающей область Ω на две подобласти: Ω^+ — внутреннюю относительно $\tilde{\Gamma}_0$ и Ω^- — внешнюю (поскольку $\tilde{\Gamma}$ можно представить в виде объединения конечного числа поверхностей, обладающих таким свойством, обычным способом с помощью разбиения единицы все рассмотрения сводятся к этому случаю). Продолжим функцию

$$\varphi_k(x) = \frac{\partial^k u_i(x)}{\partial \nu^k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, p-1,$$

с Γ_i на $\tilde{\Gamma}_0$ так, чтобы полученные функции $\tilde{\varphi}_k(x)$ принадлежали классу $C^{2m+\alpha}$ и выполнялись неравенства

$$\| \tilde{\varphi}_k x) \|_{W2^{m-k-\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}_0)} \leqslant C \| \varphi_k \|_{W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(\Gamma_i)}, \tag{2.7}$$

где C зависит только от $\tilde{\Gamma}_0$ и Γ. Достаточно считать, что Γ_i — полупространство $R_{n-1}^+ = \{x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}), \ x_{n-1} > 0\}$ и функция $\varphi_k(x)$ финитна. Тогда это продолжение делается с помощью известного метода отражения [21]

$$\tilde{\varphi}_k(x', x_{n-1}) = \begin{cases} \varphi_k(x', x_{n-1}), & x_{n-1} \geqslant 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{2m+2} \lambda_s \varphi_k(x', -s x_{n-1}), & x_{n-1} < 0, \end{cases}$$

где λ_s удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{s=1}^{2m+2} (-s)^j \lambda_s = 1, \qquad j = 0, 1, \ldots, 2m+1. \tag{2.8}$$

Построенная функция $\tilde{\varphi}_k(x)$, очевидно, $2m+1$ раз непрерывно дифференцируема в $R_{n-1} = R_{n-1}^+ \cup R_{n-1}^-$. Покажем, что для нее справедливо неравенство (2.7). Из определения нормы в пространстве $W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(R_{n-1})$ следует

$$\|\tilde{\varphi}_k\|^2_{W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(R_{n-1})} = \|\varphi_k\|^2_{W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(R^+_{n-1})} + \|\tilde{\varphi}_k\|^2_{W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(R^-_{n-1})} +$$

$$+ 2 \sum_{|\alpha|=m-1} \int_{R^+_{n-1}} \int_{R^-_{n-1}} \frac{|D^\alpha\varphi_k(x) - D^\alpha\tilde{\varphi}_k(\bar{y})|^2}{|x-\bar{y}|^n} d\Gamma_x d\Gamma_{\bar{y}},$$

$$x \in R^+_{n-1}, \ \bar{y} \in R^-_{n-1}.$$

Учитывая конструкцию $\tilde{\varphi}_k(x)$, получаем

$$\|\tilde{\varphi}_k\|_{W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(R^-_{n-1})} \leqslant C\|\varphi_k\|_{W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(R^+_{n-1})},$$

и, значит, нужно оценить лишь интегралы в последней сумме. Поскольку в силу (2.8) $D^\alpha\varphi(x) = \sum_{s=1}^{2m+2}(-s)^j\lambda_s D^\alpha\varphi(x)$ при любом $j = 0, 1, \ldots, m-1$, с помощью замены переменных $y = \{\bar{y}', -s\bar{y}_{n-1}\}$ задача сводится к оценке интегралов

$$J_\alpha(\varphi_k) = \int_{R^+_{n-1}} \int_{R^+_{n-1}} \frac{|D^\alpha\varphi_k(x) - D^\alpha\varphi_k(y)|^2}{|x-\bar{y}|^n} d\Gamma_x d\Gamma_y,$$

где $\bar{y} = \left\{y', -\frac{y_{n-1}}{s}\right\} \in R^-_{n-1}$. Так как $|x-\bar{y}| \geqslant \frac{1}{s}|x-y|$, то

$$J_\alpha(\varphi_k) \leqslant s^n \int_{R^+_{n-1}} \int_{R^+_{n-1}} \frac{|D^\alpha\varphi_k(x) - D^\alpha\varphi_k(y)|^2}{|x-y|^n} d\Gamma_x d\Gamma_y \leqslant$$

$$\leqslant s^n\|\varphi_k\|^2_{W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(R^+_{n-1})}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\|\tilde{\varphi}_k\|_{W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(R^-_{n-1})} \leqslant C\|\varphi_k\|_{W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(R^+_{n-1})},$$

где постоянная C не зависит от $\varphi_k(x)$.

Считая функцию $\tilde{\varphi}_n(x)$ построенной на $\tilde{\Gamma}_0$, воспользуемся второй частью теоремы 2.2, согласно которой существует функция

$\hat{v}_i(x) \in W_2^m(\Omega^+)$, принимающая на $\tilde{\Gamma}_0$ граничные значения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^k \hat{v}_i}{\partial \nu^k}\Big|_{\tilde{\Gamma}_0} = \tilde{\varphi}_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, p-1, \\ &\frac{\partial^k \hat{v}_i}{\partial \nu^k}\Big|_{\tilde{\Gamma}_0} = 0, \qquad k = p, \ldots, m-1, \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

причем в силу (2.7)

$$\|\hat{v}_i\|_{m,\Omega^+} \leqslant C \sum_{k=0}^{p-1} \left\| \frac{\partial^k u_i}{\partial \nu^k} \right\|_{W_2^{m-k-\frac{1}{2}}(\Gamma_i)}, \tag{2.10}$$

где C зависит только от Ω^+. Обозначим через $v_i(x)$ функцию, которая в классе функций из $W_2^m(\Omega^+)$, принимающих на $\tilde{\Gamma}_0$ граничные значения (2.9), имеет наименьшую норму $\|v\|_{m,\Omega^+}$. Как известно, такая функция существует и удовлетворяет в области Ω^+ эллиптическому уравнению порядка $2m$ с постоянными коэффициентами

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u = 0,$$

а так как граничные значения на $\tilde{\Gamma}_0$ и сама поверхность $\tilde{\Gamma}_0$ достаточно гладкие (принадлежат классу $C^{2m+\alpha}$), то $v_i(x)$ $2m$ раз непрерывно дифференцируема в $\bar{\Omega}^+$ [1]. С помощью метода отражения эту функцию можно продолжить на всю область Ω так, что полученная функция $v_i(x)$ будет $2m$ раз непрерывно дифференцируема и финитна в Ω, причем $\|v_i\|_{m,\Omega} \leqslant C\|v_i\|_{m,\Omega^+}$. Поскольку $v_i(x)$ имеет наименьшую норму в $W_2^m(\Omega^+)$ и, значит, $\|v_i\|_{m,\Omega^+} \leqslant \|\hat{v}_i\|_{m,\Omega^+}$, в силу (2.10) выполняются все условия (2.6). Лемма доказана.

Рассматривая векторнозначные (N-компонентные) функции $\mathbf{u}(x) = \{u_1(x), u_2(x), \ldots, u_N(x)\}$, определенные в области Ω, будем говорить, что вектор-функция $\mathbf{u}(x)$ принадлежит некоторому пространству (или подмножеству в нем), если этим свойством обладает каждая ее компонента. Нормы в соответствующих векторных пространствах вводятся следующим образом:

$$\|\mathbf{u}\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{1 \leqslant k \leqslant N} \|u_k\|_{C(\bar{\Omega})},$$

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Gamma)} = \int_\Gamma \|\mathbf{u}\|^2 d\Gamma = \int_\Gamma \sum_{k=1}^N u_k^2(x)\, d\Gamma,$$

$$\|\mathbf{u}\|^2_{W_2^l(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \|D^\alpha \mathbf{u}\|^2 dx = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \sum_{k=1}^N |D^\alpha u_k(x)|^2 dx.$$

Здесь и всюду в дальнейшем $\|\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^N u_k(x)\, v_k(x)$, $D^\alpha \mathbf{u} = \{D^\alpha u_1, D^\alpha u_2, \ldots, D^\alpha u_N\}$. Очевидно, все приведенные выше утверждения справедливы и для векторнозначных функций.

В данной главе в основном рассматриваются матричные дифференциальные операторы вида

$$Lu = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} (a_{\alpha\beta} D^{\beta} \mathbf{u}(x)),$$

где $a_{\alpha\beta} = \| a_{\alpha\beta}^{ik} \|$ — квадратные матрицы порядка N, удовлетворяющие следующим условиям. Элементы их $a_{\alpha\beta}^{ik} \equiv a_{\alpha\beta}^{ik}(x)$ — такие вещественные достаточно гладкие в области Ω функции, что $a_{\alpha\beta}^{ik} = a_{\beta\alpha}^{ki}$ и для любых векторов $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in R_n$ и $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N\} \in R_N$ и любой вектор-функции $\mathbf{u}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ выполняются неравенства

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| = m} \sum_{i,k=1}^{N} a_{\alpha\beta}^{ik} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} \eta_i \eta_k \geqslant \mu_0 |\xi|^{2m} \|\eta\|^2, \tag{2.11}$$

$$\xi^{\alpha} = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n}, \quad |\xi|^2 = \sum_{1}^{n} \xi_i^2,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^{\beta} \mathbf{u}, D^{\alpha} \mathbf{u})\, dx \equiv \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} \sum_{i,k=1}^{N} a_{\alpha\beta}^{ik} D^{\beta} u_k D^{\alpha} u_i\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \mu_1 \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \| D^{\alpha} \mathbf{u} \|^2\, dx, \tag{2.12}$$

где μ_0 и μ_1 — положительные постоянные, не зависящие соответственно от $x \in \Omega$ и $\mathbf{u}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$. Первое из этих неравенств является условием сильной эллиптичности L, а второе гарантирует однозначную разрешимость первой краевой задачи для оператора L.

Рассмотрим в области $\Omega' \subseteq \Omega$ краевую задачу

$$L\mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in \Omega', \tag{2.13}$$

$$\left. \frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial \nu^k} \right|_{\partial \Omega'} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.14}$$

где $\mathbf{f}(x) \in L_2(\Omega')$, $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по нормали к границе $\partial\Omega'$ области Ω'. Обобщенным решением этой задачи называется вектор-функция $\mathbf{u}(x)$, принадлежащая пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega') \cap W_2^{2m}(\Omega', \mathrm{loc})$ и удовлетворяющая в Ω' уравнению (2.13), где оператор L понимается в смысле обобщенных производных. В силу (2.11) и (2.12) обобщенное решение задачи (2.13), (2.14) существует и единственно, а при достаточной гладкости $\mathbf{f}(x)$ и $\partial\Omega'$ оно — классическое [1, 4].

Краевая задача (2.13), (2.14) тесно связана с задачей нахождения минимума функционала

$$J(\mathbf{v}) = \int_{\Omega'} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^{\beta} \mathbf{v}, D^{\alpha} \mathbf{v})\, dx - 2 \int_{\Omega'} (\mathbf{f}, \mathbf{v})\, dx. \tag{2.15}$$

В силу (2.12) существует единственная вектор-функция из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega')$, на которой достигается минимум этого функционала. Она является решением краевой задачи (2.13), (2.14). Мы будем пользоваться этим в § 5 при исследовании решения задачи (2.13), (2.14) в областях $\Omega' = \Omega \setminus F^{(s)}$.

Кроме функционалов (2.15) в дальнейшем нам понадобятся также функционалы вида

$$J_c(\mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - 2\int_\Omega (\mathbf{f}, \mathbf{v})\,dx,$$

где

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{v}, D^\alpha \mathbf{v})\,dx + \int_\Gamma \left(c_p \frac{\partial^p u}{\partial \nu^p}, \frac{\partial^p u}{\partial \nu^p}\right) d\Gamma,$$

Γ — поверхность в Ω, $c_p = c_p(x)$ — квадратные матрицы порядка N на Γ. Для них ставится задача на минимум в классах вектор-функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, у которых обобщенные производные до порядка $p-1$ $(p \leqslant m)$ равны нулю на Γ. По поводу этой задачи отметим следующее: если для любой вектор-функции из рассматриваемого класса выполняется неравенство $a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant \mu \|\mathbf{u}\|^2_{m,\Omega}$ $(\mu > 0)$, то существует единственная вектор-функция из этого класса, минимизирующая $J_c(v)$ (доказывается обычным способом так же, как и в скалярном случае, см. [34]).

Рассмотрим в области $\Omega' \subseteq \Omega$ краевую задачу Дирихле

$$L\mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in \Omega', \tag{2.16}$$

$$D^\alpha(\mathbf{u} - \psi)|_{\partial\Omega'} = 0, \quad |\alpha| \leqslant m-1, \tag{2.17}$$

где $\psi = \psi(x)$ — некоторая вектор-функция из $W_2^m(\Omega')$, а граничное условие (2.17) понимается в смысле $L_2(\partial\Omega')$. Если граница области Ω' не обладает достаточной гладкостью, то это условие понимается в обобщенном смысле: $\mathbf{u} - \psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega')$. Вариационный метод решения этой задачи, известный как метод ортогональной проекции, допускает следующую функциональную трактовку.

Обозначим через $W_L(\Omega')$ гильбертово пространство вектор-функций из $W_2^m(\Omega')$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_L = \int_{\Omega'} \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{v})\,dx.$$

При некоторых условиях нормы в $W_2^m(\Omega')$ и $W_L(\Omega')$ эквивалентны. Пусть $H_L(\Omega')$ — подпространство в $W_L(\Omega')$, ортогональное к $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega')$, $H_L(\Omega') = W_L(\Omega') \ominus \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega')$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3. *Подпространство $H_L(\Omega')$ совпадает с множеством вектор-функций из $W_2^m(\Omega')$, удовлетворяющих в области Ω' уравнению $L\mathbf{u} = 0$.*

В скалярном случае ($N = 1$) эта теорема доказана в работе [6]. При $N > 1$ доказательство проводится аналогично.

Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$ — решение задачи (2.16), (2.17). Поскольку в Ω' $L\mathbf{u} = 0$ и $\psi - \mathbf{u} \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega')$, из теоремы 2.3 следует, что $\mathbf{u}(x)$ — ортогональная проекция в $W_L(\Omega')$ элемента ψ на подпространство $H_L(\Omega')$. Таким образом, решение задачи (2.16), (2.17) можно представить в виде $\mathbf{u} = P_L\psi$, где P_L — оператор ортогонального проектирования на подпространство $H_L(\Omega')$. Этот факт используется в § 3 при изучении решения задачи Дирихле в областях $\Omega' = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$.

§ 2. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СХЕМА

Пусть Ω — произвольная ограниченная область в R_n. Выделим в ней конечное число непересекающихся замкнутых множеств $F_i^{(s)}$ ($i = 1, 2, \ldots, s$), ограниченных гладкими поверхностями, и положим $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$. В области $\Omega^{(s)}$ рассмотрим краевую задачу Дирихле

$$L\mathbf{u}^{(s)} \equiv \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x)\, D^\beta \mathbf{u}^{(s)}(x)) = 0, \quad x \in \Omega^{(s)}, \tag{2.18}$$

$$D^\alpha (\mathbf{u}^{(s)} - \psi)\big|_{\partial\Omega^{(s)}} = 0, \quad |\alpha| \leqslant m - 1. \tag{2.19}$$

Предположим, что оператор L удовлетворяет всем условиям, сформулированным в § 1, а вектор-функция $\psi = \psi(x)$ задана всюду в Ω и принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$. Решение $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ этой задачи продолжим на множество $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$, положив $\mathbf{u}^{(s)}(x) = \psi(x)$ при $x \in F^{(s)}$. Полученная вектор-функция $\mathbf{u}^{(s)}(x)$, очевидно, принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ (см. § 1). Найдем для нее нужное нам представление. Обозначим через $\overset{\circ}{W}_L(\Omega)$ гильбертово пространство вектор-функций $\mathbf{u}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, скалярное произведение в котором задается формулой

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_L = \int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{v})\, dx. \tag{2.20}$$

В силу (2.12) нормы в $\overset{\circ}{W}_L(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ эквивалентны.

Пусть F — некоторое замкнутое множество в Ω, ограниченное гладкой поверхностью, $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega, F)$ — замыкание по норме $W_2^m(\Omega)$ множества вектор-функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, равных нулю в некоторой окрестности F, а $H_L(\Omega, F)$ — совокупность вектор-функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, удовлетворяющих в области $\Omega_F = \Omega \setminus F$ уравнению

$Lu = 0$. Из теоремы 2.3 следует, что $H_L(\Omega, F)$ — подпространство в $\overset{\circ}{W}_L(\Omega)$ и

$$\overset{\circ}{W}_L(\Omega) = H_L(\Omega, F) \oplus \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega, F). \tag{2.21}$$

Рассмотрим случаи $F = F_i^{(s)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ и $F = F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$.

Легко видеть, что $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega, F^{(s)}) = \bigcap_{i=1} \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega, F_i^{(s)})$. Отсюда, учитывая разложение (2.21), заключаем, что подпространство $H_L(\Omega, F^{(s)})$ есть линейная оболочка подпространств $H_L(\Omega, F_i^{(s)})$ $(i=1, 2, \ldots, s)$:

$$H_L(\Omega, F^{(s)}) = [H_L(\Omega, F_i^{(s)})]_1^s.$$

Обозначим через $P_L^{(s)}$ оператор ортогонального проектирования на подпространство $H_L(\Omega, F^{(s)})$. Тогда вектор-функция $\mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{u}^{(s)}(x)$, являющаяся в области $\Omega^{(s)}$ решением краевой задачи (2.18), (2.19), а на множестве $F^{(s)}$ равная $\psi(x)$, может быть представлена в виде $\mathbf{u}^{(s)} = P_L^{(s)}\psi$. Поставим следующую задачу: найти условия, налагаемые на подпространства $H_L(\Omega, F_i^{(s)})$, при которых последовательность $\{P_L^{(s)}\psi,\ s = 1, 2, \ldots\}$ для любой вектор-функции $\psi = \psi(x) \in \overset{\circ}{W}_L(\Omega)$ сходится (слабо в $\overset{\circ}{W}_L(\Omega)$) к некоторому пределу $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x) \in \overset{\circ}{W}_L(\Omega)$, и описать этот предел. Рассмотрим абстрактную схему решения этой задачи.

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (u, v), $H_i^{(s)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ подпространства в нем, $H_i^{\perp(s)}$ — их ортогональные дополнения, т. е. $H_i^{\perp(s)} = H \ominus H_i^{(s)}$, $P_i^{(s)}$ — операторы ортогонального проектирования на $H_i^{(s)}$, а $P^{(s)}$ — оператор ортогонального проектирования на линейную оболочку $[H_i^{(s)}]_1^s$ подпространств $H_i^{(s)}$. Представляют интерес случаи, когда подпространства $H_i^{(s)}$ удовлетворяют следующим условиям.

1. При $s \to \infty$ $H_i^{(s)}$ становятся «почти ортогональными» в том смысле, что существуют линейные ограниченные операторы $B_i^{(s)}$, близкие (при больших s) к операторам $P_i^{(s)}$ и такие, что векторы $B_i^{(s)}u$ и $B_j^{(s)}v$ $(i \neq j;\ u, v \in H)$ ортогональны. Аналитически запишем это условие в виде

a) $(B_i^{(s)}u, B_j^{(s)}v) = 0, \quad i \neq j, \ \forall\, u, v \in H;$

b) $\lim\limits_{s\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{s} \| P_i^{(s)}u - B_i^{(s)}u \|^2 = 0, \quad \forall\, u \in H;$

c) $P_j^{(s)} B_i^{(s)} = P_i^{(s)} \delta_{ij};$

d) $\lim\limits_{s\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{s}(B_i^{(s)}u, v^{(s)}) = 0$ для $\forall u \in H$ и любой сходящейся слабо к нулю в H последовательности векторов $v^{(s)} \in \bigcap\limits_{i=1}^{s} H_i^{\perp(s)}$.

Смысл условий a и b ясен. Условия c и d являются дополнительными требованиями, налагаемыми на операторы $B_i^{(s)}$. В определенном смысле они также указывают на близость $B_i^{(s)}$ к $P_i^{(s)}$. Действительно, поскольку подпространства $H_i^{(s)}$ и $H_j^{(s)}$ почти ортогональны при больших s, в равенстве

$$P_j^{(s)}P_i^{(s)} = \begin{cases} A_{ij}^{(s)}, & j \neq i, \\ P_i^{(s)}, & j = i, \end{cases}$$

операторы $A_{ij}^{(s)}$ должны быть малы по норме. Кроме того, для любого $v^{(s)} \in \bigcap\limits_{i=1}^{s} H_i^{\perp(s)}$ и любого $u \in H$

$$\sum_{i=1}^{s}(P_i^{(s)}u, v^{(s)}) = 0.$$

Заменяя эти равенства соответственно условиями c и d, мы требуем, чтобы операторы $B_i^{(s)}$ при больших s были близки к $P_i^{(s)}$ еще и в этом смысле.

2. При $s \to \infty$ подпространства $H_i^{(s)}$ достаточно быстро «уходят» из H, что в терминах операторов $B_i^{(s)}$ записывается следующим образом:

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{s}(B_i^{(s)}u, v) = 0, \quad \forall u, v \in H.$$

3. Существует предел

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{s}\| P_i^{(s)}u \|^2 = \Phi(u),$$

где $\Phi(u) = \Phi(u, u)$, а $\Phi(u, v)$ — билинейный непрерывный функционал в H.

Рассмотрим пример, который дает представление о возможном расположении подпространств $H_i^{(s)}$, удовлетворяющих условиям 1—3, и для которого естественна терминология, использованная в этих условиях.

Пусть $H \equiv l_2$, а $H_i^{(s)}$ — одномерные подпространства, порождаемые векторами

$$h^{(s)} = \{\underbrace{\frac{c_i}{\sqrt{s}}, 0, \ldots, 0, 1}_{n+i}, 0, \ldots\}\frac{1}{\sqrt{1 + |c_i|^2 s^{-1}}},$$

где c_i — комплексные числа такие, что при $s \to \infty$ $\max\limits_{i \leqslant s} |c_i| = o(\sqrt{s})$ и существует предел

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} |c_i|^2 = c, \tag{2.22}$$

а $n = n(s)$ — возрастающая функция s.

Подпространства $H_i^{(s)}$ и $H_j^{(s)}$ ($i \neq j$, i, $j \leqslant s$) становятся почти ортогональными при больших s, поскольку скалярное произведение порождающих их нормированных векторов $h_i^{(s)}$ и $h_j^{(s)}$

$$(h_i^{(s)}, h_j^{(s)}) = \frac{c_i \bar{c}_j}{s\sqrt{1 + |c_i|^2 s^{-1}}\sqrt{1 + |c_j|^2 s^{-1}}}$$

стремится к нулю при $s \to \infty$. Кроме того, так как $n = n(s) \to \infty$ при $s \to \infty$, то эти подпространства сдвигаются в сторону удаляющихся элементов базиса и в этом смысле «уходят» из H.

Покажем, что условия 1—3 выполняются. Для любого вектора $u = \{u_1, u_2, \ldots\} \in l_2$

$$P_i^{(s)} u = (u, h_i^{(s)}) h_i^{(s)} = \frac{\bar{c}_i s^{-\frac{1}{2}} u_1 - u_{n+i}}{\sqrt{1 + |c_i|^2 s^{-1}}} h_i^{(s)}.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{s} \| P_i^{(s)} u \|^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{|\bar{c}_i s^{-\frac{1}{2}} u_1 + u_{n+i}|^2}{1 + |c_i|^2 s^{-1}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \frac{|c_i|^2}{s} \cdot \frac{|u_1|^2}{1 + |c_i|^2 s^{-1}} + 2\operatorname{Re} \sum_{i=1}^{s} \frac{\bar{c}_i}{\sqrt{s}} \cdot \frac{u_1 \bar{u}_{n+1}}{1 + |c_i|^2 s^{-1}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \frac{|u_{n+i}|^2}{1 + |c_i|^2 s^{-1}}. \tag{2.23}$$

Оценивая вторую сумму с помощью неравенства Коши — Буняковского и учитывая, что $\max\limits_{i \leqslant s} |c_i| = o(\sqrt{s})$ и $\sum\limits_{i=1} |u_{n+i}|^2 \to 0$ при $n = n(s) \to \infty$, в силу (2.22) получаем

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{s} \| P_i^{(s)} u \|^2 = c |u_1|^2.$$

Таким образом, условие 3 выполняется, причем $\Phi(u, v) = c u_1 \bar{v}_1$.

Положим

$$B_i^{(s)} u = \{\underbrace{0, \ldots, 0, \frac{\bar{c}_i}{\sqrt{s}} u_1 + u_{n+i}}_{n+i}, 0, \ldots\}.$$

Тогда, как легко видеть, условия 1, *a* и 1, *c* выполняются. Далее,

$$\sum_{i=1}^{s} \| P_i^{(s)} u - B_i^{(s)} u \|^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{|\bar{c}_i s^{-\frac{1}{2}} u_1 + u_{n+i}|^2}{1 + |c_i|^2 s^{-1}} \cdot \frac{|c_i|^2}{s} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max\limits_{i \leqslant s} |c_i|^2}{s} \sum_{i=1}^{s} \frac{|\bar{c}_i s^{-\frac{1}{2}} u_1 + u_{n+i}|^2}{1 + |c_i|^2 s^{-1}}.$$

Оценивая сумму так же, как в (2.23), приходим к условию 1, *в*. Пусть вектор $v^{(s)}$ принадлежит $\bigcap\limits_{i=1}^{s} H_i^{\perp(s)}$ и при $s \to \infty$ слабо сходится к нулю в l_2. Тогда

$$v^{(s)} = \left\{ v_1^{(s)}, v_2^{(s)}, \ldots, v_n^{(s)}, -\frac{\bar{c}_1}{\sqrt{s}} v_1^{(s)}, \ldots, -\frac{\bar{c}_s}{\sqrt{s}} v_1^{(s)}, v_{n+s+1}^{(s)} \ldots \right\},$$

где $v_i^{(s)}$ — произвольные комплексные числа, причем для любого фиксированного i $v_i^{(s)} \to 0$ при $s \to \infty$. Учитывая это, получаем

$$\left| \sum_{i=1}^{s} (B_i^{(s)} u, v^{(s)}) \right| = \left| \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\bar{c}_i}{\sqrt{s}} u_1 + u_{n+i} \right) \frac{c_i}{\sqrt{s}} v_1^{(s)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant |v_1^{(s)}| \left\{ \sum_{i=1}^{s} \left| \frac{\bar{c}_i u_1}{\sqrt{s}} + u_{n+i} \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^{s} \frac{\| c_i |^2}{s} \right\}^{\frac{1}{2}} \to 0, \quad s \to \infty,$$

т. е. условие 1, *d* также выполняется.

Аналогично для любого вектора $v = \{v_1, v_2, \ldots\} \in l_2$ при $s \to \infty$

$$\left| \sum_{i=1}^{s} (B_i^{(s)} u, v) \right| = \left| \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\bar{c}_i}{\sqrt{s}} u_1 + u_{n+i} \right) \bar{v}_{n+i} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{i=1}^{s} \left| \frac{\bar{c}_i}{\sqrt{s}} u_1 + u_{n+i} \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \sum_{i=1}^{s} |v_{n+i}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \to 0,$$

и мы приходим к условию 2. Таким образом, все условия 1—3 выполняются.

Рассмотрим проекцию вектора $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \ldots\} \in l_2$ на линейную оболочку $[H_i^{(s)}]_1^s$ подпространств $H_i^{(s)}$

$$P^{(s)} \psi = \Bigl\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{i=1}^{s} c_i \alpha_i, 0, \ldots, 0}_{n}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, 0, \ldots \Bigr\},$$

где комплексные коэффициенты α_i определяются из условия минимума функции

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = \|\psi - P^{(s)}\psi\|^2 = \left|\psi_1 - \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{i=1}^{s} c_i\alpha_i\right|^2 + $$

$$+ \sum_{i=1}^{s} |\psi_{n+i} + \alpha_i|^2 + \text{члены, не зависящие от } \alpha_i.$$

В силу условий 1—3 последовательность векторов $\{P^{(s)}\psi, s = 1, 2, \ldots\}$ слабо в l_2 сходится к вектору

$$\varphi = \left\{\frac{c}{1+c}\psi_1, 0, 0, \ldots\right\},$$

на котором достигается минимум функционала

$$\Psi(v) = \sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^2 + c|\psi_1 - v_1|^2.$$

Этот факт является частным случаем следующей теоремы — одного из основных результатов настоящего параграфа.

Теорема 2.4. *Пусть при $s \to \infty$ выполняются условия* 1—3. *Тогда для любого вектора $\psi \in H$ последовательность $\{P^{(s)}\psi, s = 1, 2, \ldots\}$ слабо сходится к вектору $v \in H$, на котором достигается минимум функционала*

$$\Psi(v) = \|v\|^2 + \Phi(\psi - v), \tag{2.24}$$

или, что то же, вектор v удовлетворяет в H уравнению

$$v + Av = A\psi, \tag{2.25}$$

где A — непрерывный положительный оператор, определяемый равенством $\Phi(u, v) = (Au, v)$ $\forall\, u, v \in H$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что выполняется равенство

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{s} \|B_i^{(s)}u\|^2 = \Phi(u). \tag{2.26}$$

Действительно, в силу условия 1, c

$$\|B_i^{(s)}u\|^2 = \|P_i^{(s)}u - (P_i^{(s)}u - B_i^{(s)}u)\|^2 = \|P_i^{(s)}u\|^2 + \|P_i^{(s)}u - B_i^{(s)}u\|^2 -$$

$$- 2\mathrm{Re}(P_i^{(s)}u, P_i^{(s)}u) + 2\mathrm{Re}(P_i^{(s)}u, B_i^{(s)}u) = \|P_i^{(s)}u\|^2 + \|P_i^{(s)}u - B_i^{(s)}u\|^2,$$

откуда, учитывая условия 1, b и 3, получаем (2.26).

Обозначим через $M_\psi^{(s)}$ множество векторов $v^{(s)} \in H$, для которых $\psi - v^{(s)} \in \bigcap_{i=1}^{s} H_i^{\perp(s)}$. Легко видеть, что $M_\psi^{(s)}$ — замкнутое выпуклое множество в H. Пусть w — произвольный вектор из H. Построим вектор

$$w^{(s)} = w + \sum_{i=1}^{s} B_i^{(s)}(\psi - w) \tag{2.27}$$

и покажем, что $w^{(s)} \in M_\psi^{(s)}$. Поскольку $\bigcap_{i=1}^{s} H_i^{\perp(s)} = H \ominus [H_i^{(s)}]_1^s$, достаточно проверить, что вектор $\psi - w^{(s)}$ ортогонален векторам $z_j^{(s)} = P_j^{(s)} z$, где $z \in H$. Но это вытекает из условия 1, c:

$$(\psi - w^{(s)}, z_j^{(s)}) = (\psi, P_j^{(s)} z) - (w, P_j^{(s)} z) - \sum_{i=1}^{s} (B_i^{(s)}(\psi - w), P_j^{(s)} z) =$$

$$= (P_j^{(s)}(\psi - w), z) - \sum_{i=1}^{s} (P_j^{(s)} B_i^{(s)} (\psi - w), z) = 0.$$

Оценим норму $w^{(s)}$. В силу (2.27) и ортогональности векторов $B_i^{(s)} u$ и $B_j^{(s)} u$ при $i \neq j$ для любого $u \in H$

$$\| w^{(s)} \|^2 = \| w \|^2 + \sum_{i=1}^{s} \| B_i^{(s)} (\psi - w) \|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{s} (B_i^{(s)} (\psi - w), w),$$

откуда, учитывая (2.26) и условие 2, получаем

$$\| w^{(s)} \|^2 = \| w \|^2 + \Phi(\psi - w) + \Delta(s), \tag{2.28}$$

где $\Delta(s) \to 0$ при $s \to \infty$.

Далее, поскольку $\| P^{(s)} \psi \| \leqslant \| \psi \|$, последовательность $\{P^{(s)} \psi, s = 1, 2, \ldots\}$ слабо компактна в H и, значит, можно выделить подпоследовательность $\{P^{(s)} \psi, s = s_k \to \infty\}$, которая слабо сходится к некоторому вектору $v \in H$. Представим вектор $P^{(s)} \psi$ в виде

$$P^{(s)} \psi = v + \sum_{i=1}^{s} B_i^{(s)} (\psi - v) + v^{(s)}. \tag{2.29}$$

Так как $P^{(s)} \psi$ есть проекция ψ на подпространство $[H_i^{(s)}]_1^s = H \ominus \bigcap_{i=1}^{s} H_i^{\perp(s)}$, то в силу известной теоремы об ортогональной проекции $P^{(s)} \psi$ принадлежит множеству $M_\psi^{(s)}$ и имеет наименьшую норму среди всех векторов $u^{(s)} \in M_\psi^{(s)}$. Выше было показано, что вектор $v + \sum_{i=1}^{s} B_i^{(s)} (\psi - v)$ также принадлежит $M_\psi^{(s)}$. Поэтому из (2.29) следует, что $v^{(s)} \in \bigcap_{i=1}^{s} H_i^{\perp(s)}$. Кроме того, так как $P^{(s)} \psi$ по подпоследовательности $\{s = s_k \to \infty\}$ слабо сходится к v, то из (2.12) и условия 3 вытекает, что $v^{(s)}$ по этой же подпоследовательности слабо сходится к нулю. Оценим норму $P^{(s)} \psi$. Согласно (2.29) и условию 1, a

$$\| P^{(s)} \psi \|^2 = \| v \|^2 + \sum_{i=1}^{s} \| B_i^{(s)} (\psi - v) \|^2 + \| v^{(s)} \|^2 +$$

$$+ 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{s} (B_i^{(s)} (\psi - v), v) + 2 \operatorname{Re} (v, v^{(s)}) +$$

$$+ 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{s} (B_i^{(s)} (\psi - v), v^{(s)}). \tag{2.30}$$

Поскольку вектор $P^{(s)}\psi$ ортогонален любому вектору из подпространства $\bigcap\limits_{i=1}^{s} H_i^{\perp(s)}$, в том числе и вектору $v^{(s)}$, из (2.29) следует

$$(P^{(s)}\psi, v^{(s)}) = \left(v + \sum_{i=1}^{s} B_i^{(s)}(\psi - v) + v^{(s)}, v^{(s)}\right) = 0,$$

или

$$\| v^{(s)} \|^2 = -(v, v^{(s)}) - \sum_{i=1}^{s} (B_i^{(s)}(\psi - v), v^{(s)}). \tag{2.31}$$

Учитывая, что вектор $v^{(s)}$ принадлежит $\bigcap\limits_{i=1}^{s} H_i^{\perp(s)}$ и слабо сходится к нулю по подпоследовательности $s = s_k \to \infty$, из (2.26), (2.30), (2.31) и условий 1, d и 2 находим

$$\lim_{s=s_k\to\infty} \| v^{(s)} \| = 0, \tag{2.32}$$

$$\| P^{(s)}\psi \|^2 = \| v \|^2 + \Phi(\psi - v) + \Delta(s), \tag{2.33}$$

где $\Delta(s) \to 0$ при $s = s_k \to \infty$.

Обратимся теперь снова к формуле (2.27). Так как $w^{(s)} \in M_\psi^{(s)}$, а $P^{(s)}\psi$ имеет наименьшую норму в классе $M_\psi^{(s)}$, то $\| P^{(s)}\psi \|^2 \leqslant \| w^{(s)} \|^2$. Отсюда, учитывая (2.28) и (2.33), получаем

$$\| v \|^2 + \Phi(\psi + v) \leqslant \| w \|^2 + \Phi(\psi - w).$$

Поскольку это неравенство выполняется для любого вектора $w \in H$, вектор v минимизирует функционал

$$\Psi(v) = \| v \|^2 + \Phi(\psi - v).$$

Как известно, билинейный функционал $\Phi(u, v)$ можно представить в виде $\Phi(u, v) = (Au, v)$, где A — непрерывный положительный оператор в H. Поэтому вектор v минимизирует также функционал

$$F(v) = \Psi(v) - (A\psi, \psi) = ((I + A)v, v) - (A\psi, v) - (v, A\psi),$$

где I — тождественный оператор в H. Но это эквивалентно тому, что v удовлетворяет в H уравнению $v + Av = A\psi$ [36].

Таким образом, последовательность $\{P^{(s)}\psi, \ s = 1, \ 2, \ldots\}$ слабо компактна в H и ее слабый предел по любой подпоследовательности минимизирует функционал (2.24), или, что то же, удовлетворяет уравнению (2.25). Так как оператор A положительный, то это уравнение имеет единственное решение v, откуда следует, что вся последовательность $\{P^{(s)}\psi, s = 1, 2, \ldots\}$ слабо сходится к v. Теорема доказана.

Заметим, что попутно установлена структура векторов $P^{(s)}\psi$ при больших s. Она определяется формулами (2.29) и (2.32).

В приложении к краевым задачам в областях с мелкозернистой границей более удобна следующая теорема, являющаяся усложненным вариантом теоремы 2.4.

Теорема 2.5. *Пусть при $s \to \infty$ условия* 1—3 *выполняются лишь для некоторого плотного в H множества $\mathfrak{M}$ векторов u, v, а условие* 1, d *заменяется условием*

$$1,\ d') \qquad \overline{\lim_{s\to\infty}} \sum_{i=1}^{s} (B_i^{(s)} u,\ v^{(s)}) \leqslant C \| u \| \| v \|,$$

где вектор $v^{(s)}$ принадлежит $\bigcap_{i=1}^{s} H_i^{\perp(s)}$ и слабо сходится к v; $u \in \mathfrak{M}$, $C = \text{const}$. Тогда справедливо утверждение теоремы 2.4.

Доказательство достаточно провести для случая $\psi \in \mathfrak{M}$. Действительно, для произвольного $\psi \in H$ можно построить последовательность $\{\psi_k \in \mathfrak{M},\ k = 1, 2, \ldots\}$, сходящуюся к ψ. Пусть последовательность $\{P^{(s)} \psi_k,\ s = 1, 2, \ldots\}$ слабо сходится к вектору v_k, на котором достигается минимум функционала (2.24) при $\psi = \psi_k$, а последовательность $\{P^{(s)} \psi,\ s = 1, 2, \ldots\}$ слабо сходится к v. Тогда v_k сильно сходится к v при $k \to \infty$, поскольку

$$\| v_k - v \|^2 = \lim_{s\to\infty} (P^{(s)}\psi_k - P^{(s)}\psi,\ v_k - v) \leqslant \overline{\lim_{s\to\infty}} \| P^{(s)} (\psi_k - \psi) \| \| v_k - v \|$$

и, значит,

$$\| v_k - v \| \leqslant \| \psi_k - \psi \| \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Отсюда в силу непрерывности функционала $\Phi(u)$ следует, что v минимизирует функционал (2.24).

Итак, пусть $\psi \in \mathfrak{M}$. Точно так же, как в доказательстве предыдущей теоремы, получаем равенства (2.26) и (2.28) для любых векторов u, $w \in \mathfrak{M}$. Так как векторы $B_i^{(s)} u$ и $B_j^{(s)} u$ $(i \neq j)$ ортогональны, то из (2.26) следует, что для любого $u \in \mathfrak{M}$ нормы векторов $\sum_{i=1}^{s} B_i^{(s)} u$ ограничены равномерно по s. Поэтому условие 2 эквивалентно слабой сходимости этих векторов к нулю.

Последовательность $\{P^{(s)} \psi,\ s = 1, 2, \ldots\}$ слабо компактна в H. Выделим подпоследовательность $\{P^{(s)} \psi,\ s = s_k \to \infty\}$, сходящуюся слабо к некоторому вектору $v \in H$. Подберем $v_\delta \in \mathfrak{M}$ так, чтобы

$$\| v - v_\delta \| \leqslant \delta, \tag{2.34}$$

и представим $P^{(s)} \psi$ в виде

$$P^{(s)}\psi = v_\delta + \sum_{i=1}^{s} B_i^{(s)} (\psi - v_\delta) + v_\delta^{(s)}.$$

Как и при доказательстве теоремы 2.4, показываем, что вектор $v_\delta^{(s)}$ принадлежит $\bigcap_{i=1}^{s} H_i^{\perp(s)}$ и слабо сходится к вектору $v - v_\delta$. При этом следует учитывать, что $\psi - v_\delta \in \mathfrak{M}$.

Аналогично оценивается норма вектора $P^{(s)} \psi$:

$$\| P^{(s)}\psi \|^2 = \| v_\delta \|^2 + \sum_{i=1}^{s} \| B_i^{(s)} (\psi - v_\delta) \|^2 + \| v_\delta^{(s)} \|^2 +$$

$$+2\mathrm{Re}\sum_{i=1}(B_i^{(s)}(\psi-v_\delta),\ v_\delta)+2\mathrm{Re}(v_\delta,\ v_\delta^{(s)})+$$

$$+2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{s}(B_i^{(s)}(\psi-v_\delta),\ v_\delta^{(s)}),$$

$$\|v_\delta^{(s)}\|^2=-(v_\delta,\ v_\delta^{(s)})-\sum_{i=1}^{s}(B_i^{(s)}(\psi-v_\delta),\ v_\delta^{(s)}).$$

Отсюда, учитывая, что $v_\delta^{(s)}$ слабо сходится к $v-v_\delta$, и используя условия 1, d' и 2, неравенство (2.34), предельное соотношение (2.26) и непрерывность функционала $\Phi(u)$, получаем

$$\|P^{(s)}\psi\|^2=\|v\|^2+\Phi(\psi-v)+\Delta(s,\ \delta), \tag{2.35}$$

где

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{s\to\infty}}|\Delta(s,\ \delta)|=0.$$

Из (2.28) и (2.35) вытекает неравенство

$$\|v\|^2+\Phi(\psi-v)\leqslant\|w\|^2+\Phi(\psi-w),$$

справедливое для любого вектора $w\in\mathfrak{M}$. По непрерывности оно продолжается на все $w\in H$. Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как при доказательстве теоремы 2.4. Этим заканчивается доказательство теоремы 2.5.

§ 3. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

Объемное распределение множеств $F^{(s)}$

Применим теорему 2.5 для исследования поведения решения краевой задачи (2.18), (2.19), когда диаметры множеств $F_i^{(s)}$ стремятся к нулю, число их неограниченно возрастает ($s\to\infty$) и располагаются они «объемно» в Ω. Рассмотрим лишь случаи $n\geqslant 2m$, так как при $n<2m$ последовательность $\{\mathbf{u}^{(s)}(x),\ s=1,\ 2,\ \ldots\}$ решений задачи (2.18), (2.19) (продолженных на множество $F^{(s)}=\bigcup_i F_i^{(s)}$ равенством $\mathbf{u}^{(s)}(x)=\psi(x),\ x\in F^{(s)}$) в случае объемного распределения $F^{(s)}$ сходится просто к вектор-функции $\psi(x)$. Действительно, в силу теоремы вложения любая последовательность $\{\mathbf{v}^{(s)}(x),\ s=1,\ 2,\ \ldots\}$ функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, равных на множестве $F^{(s)}$ функции $\psi(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ при $n<2m$, равномерно сходится к $\psi(x)$, если $F^{(s)}$ при $s\to\infty$ становится все более плотным в Ω.

Введем необходимую нам характеристику множеств $F_i^{(s)}$. Пусть F — произвольное замкнутое множество в области Ω, ограниченное гладкой поверхностью S; $T(F)$ — шар минимального радиуса $d(F)$, в котором содержится F, а $T_a=T_a(F)$ — концентрический с ним шар, ограниченный сферой S_a радиуса $a > d(F)$. В области $T_a(F)\setminus F$ рассмотрим краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &L^0\mathbf{u} = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (-1)^m a^0_{\alpha\beta} D^{\alpha+\beta}\mathbf{u} = 0, \\ &D^\alpha(\mathbf{u}-\mathbf{e}^k)|_S = 0, \quad |\alpha| \leqslant m-1, \\ &D^\alpha\mathbf{u}|_{S_a} = 0, \quad |\alpha| \leqslant m-1, \end{aligned}\right\} \qquad (2.36)$$

где $a^0_{\alpha\beta}$ — значения матриц $a_{\alpha\beta}(x)$ (см. (2.18)) в центре шара $T(F)$, $\mathbf{e}^k$ — вектор из R_N, у которого k-я компонента равна единице, а все остальные — нулю, т. е. $e^k_l = \delta_{kl}$ $(k, l \leqslant N)$. Решение $\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^k(x)$ этой задачи при необходимости будем продолжать на множество F, полагая $\mathbf{u}^k(x) = \mathbf{e}^k$ при $x \in F$.

С каждым множеством F описанного вида свяжем систему чисел

$$C^{kl}(F, a) = \int_{T_a(F)} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a^0_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u}^k, D^\alpha \mathbf{u}^l)\, dx, \quad 1 \leqslant k, l \leqslant N, \qquad (2.37)$$

где $\mathbf{u}^k$ — решения задачи (2.36). Легко видеть, что эта система чисел является в пространстве R_N контравариантным тензором первого ранга, симметричным по k, l. Его матрица положительно определена (см. (2.45)). Этот тензор — основная характеристика множеств $F_i^{(s)}$, с помощью которой описывается влияние $F_i^{(s)}$ на решение задачи (2.18), (2.19).

Диагональные элементы матрицы $\|C^{k,l}(F, a)\|_{1\leqslant k,l\leqslant N}$ можно определять также по формуле (см. § 1)

$$C^{kk}(F, a) = \inf_{\mathbf{u}} \int_{T_a(F)} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a^0_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{u})\, dx, \qquad (2.38)$$

где inf берется по всевозможным m раз непрерывно дифференцируемым и финитным в $T_a(F)$ вектор-функциям, равным $\mathbf{e}^k$ в некоторой окрестности множества F. Отсюда видно, что при $F_1 \subseteq F_2$ $C^{kk}(F_1, a) \leqslant C^{kk}(F_2, a)$ и, следовательно, числа $C^{kk}(F, a)$ в определенном смысле характеризуют массивность множества F. Аналогичные характеристики массивности множества рассматривались в работах [9, 26].

Замечание. Нетрудно показать, что равенство (2.38) обобщается на любые элементы матрицы $\|C^{kl}(F, a)\|_{1\leqslant k,l\leqslant N}$ в виде

$$C^{kl}(F, a) = \underset{\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}\in W^{kl}}{\mathrm{st}} \int_{T_a(F)} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a^0_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{v})\, dx,$$

где st — стационарное значение функционала в классе $W^{kl} = W^k(F) \times W^k(F)$, $W^k(F)$ — множество вектор-функций из $\overset{\circ}{W}{}^m_2(T(F))$, равных $\mathbf{e}^k$ на F.

Сформулируем теперь основной результат. Для этого введем такие обозначения: $d_i^{(s)}$ — диаметры множеств $F_i^{(s)}$, $r_i^{(s)}$ — расстояние от минимального шара $T(F_i^{(s)})$ до множества $\bigcup_{j\neq i} T(F_j^{(s)}) \bigcup \partial\Omega$, $C(F_i^{(s)}) = \| C^{kl}(F_i^{(s)}) \|$ — тензор влияния $F_i^{(s)}$, определяемый формулой (2.37) при $F = F_i^{(s)}$ (как будет видно из дальнейшего, формальная зависимость $C(F_i^{(s)})$ от радиуса a становится несущественной при малых диаметрах $d_i^{(s)}$, если $a > 0$ фиксировано), $\sum\limits_{(G)}$ — суммирование по множествам $F_i^{(s)}$, принадлежащим области $G \subset \Omega$.

Теорема 2.6. *Пусть при $s \to \infty$ выполняются такие условия:*

a) $\lim\limits_{s\to\infty} \{\max\limits_i d_i^{(s)}\} = \lim\limits_{s\to\infty} \{\max\limits_i r_i^{(s)}\} = 0,$

b) для любой подобласти $G \subseteq \Omega$ существует предел

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{(G)} C(F_i^{(s)}) = \int_G c(x)\,dx,$$

где $c(x)$ — непрерывная в Ω матрица,

c) расстояния $r_i^{(s)}$ стремятся к нулю не очень быстро, так, что при $n > 2m$

$$r_i^{(s)} > c_1 d_i^{(s)}, \quad \overline{\lim_{s\to\infty}} \sum_{(G)} \frac{(d_i^{(s)})^{2(n-2m)}}{(r_i^{(s)})^n} < C_2 \operatorname{mes} G,$$

а при $n = 2m$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sum_{(G)} \frac{|\ln d_i^{(s)}|^{-2}}{(r_i^{(s)})^n} < C_2 \operatorname{mes} G,$$

где постоянные c_1 и C_2 не зависят от i, s и G.

Тогда последовательность $\{\mathbf{u}^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ решений задачи (2.18), (2.19) (продолженных на множество $F^{(s)}$ равенством $\mathbf{u}^{(s)}(x) = \boldsymbol{\psi}(x)$, $x \in F^{(s)}$) сходится в метрике $W_2^{m-1}(\Omega)$ к решению краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} L\mathbf{v}(x) + c(x)\mathbf{v}(x) &= c(x)\boldsymbol{\psi}(x), \quad x \in \Omega, \\ D^\alpha \mathbf{v}(x)|_{\partial\Omega} &= 0, \quad |\alpha| \leqslant m-1. \end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

Доказательство. Согласно § 1 решение $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ задачи (2.18), (2.19) можно рассматривать как вектор $\mathbf{u}^{(s)}$ в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}_L(\Omega)$ со скалярным произведением $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_L$, заданным формулой (2.20). При этом он представляется в виде $\mathbf{u}^{(s)} = P_L^{(s)}\boldsymbol{\psi}$, где $P_L^{(s)}$ — оператор ортогонального проектирования на подпространство $H_L(\Omega, F^{(s)})$, являющееся линейной оболочкой подпространств $H_L(\Omega, F_i^{(s)})$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Таким образом, естественно применить теорему 2.5 в рассматриваемом случае, т. е. при $H = \overset{\circ}{W}_L(\Omega)$ и $H_i^{(s)} = H_L(\Omega, F_i^{(s)})$. Для этого нужно убедиться, что все условия теоремы выполняются. Ниже показано, что они действительно выполняются при условиях теоремы 2.6, причем функционал $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ определяется по формуле

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int\limits_{\Omega} (c\mathbf{u}, \mathbf{v})\, dx,$$

где $c = c(x)$ — матрица, стоящая в правой части равенства b. Отсюда согласно теореме 2.5 вытекает, что последовательность $\{\mathbf{u}^{(s)}(x), s = 1, 2, \ldots\}$ в пространстве $\mathring{W}_L(\Omega)$ слабо сходится к вектор-функции $\mathbf{v}(x) \in \mathring{W}_L(\Omega)$, которая минимизирует функционал

$$\Psi(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|_L^2 + \Phi(\psi - \mathbf{v}) =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{v}, D^\alpha \mathbf{v})\, dx + \int\limits_{\Omega} (c[\psi - \mathbf{v}], \psi - \mathbf{v})\, dx.$$

Так как нормы пространств $\mathring{W}_L(\Omega)$ и $\mathring{W}_2^m(\Omega)$ эквивалентны, а $\mathring{W}_2^m(\Omega)$ компактно вкладывается в $W_2^{m-1}(\Omega)$, то $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ сходится к $\mathbf{v}(x)$ по норме $W_2^{m-1}(\Omega)$ и $\mathbf{v}(x) \in \mathring{W}_2^m(\Omega)$. Из условия минимума функционала $\Psi(\mathbf{v})$ следует, что $\mathbf{v}(x)$ удовлетворяет в Ω тождеству

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{v}, D^\alpha \zeta) + (c\mathbf{v}, \zeta) - (c\psi, \zeta) \right\} dx = 0,$$

где $\zeta = \zeta(x)$ — произвольная вектор-функция из $\mathring{W}_2^m(\Omega)$, т. е. $\mathbf{v}(x)$ является обобщенным решением задачи (2.39). Заметим, что при достаточной гладкости коэффициентов и границы $\partial\Omega$ области всякое обобщенное решение задачи (2.39) является классическим.

Таким образом, доказательство теоремы 2.6 сводится к проверке условий теоремы 2.5. Для этого нам понадобятся некоторые оценки решения $\mathbf{u}(x)$ задачи (2.36), составляющие содержание следующих двух лемм.

Лемма 2.2. *Пусть точка x принадлежит шару $T_b(F)$ $(b < a)$ и находится на расстоянии ρ от минимального шара $T(F)$, причем при $n > 2m$ $\rho \geqslant c_1 d$, а при $n = 2m$ $\rho \geqslant \exp(-c_1 \sqrt{|\ln d|})$, $c_1 > 0$. Тогда для любой компоненты $u_i(x)$ решения $\mathbf{u}(x)$ задачи (2.36) в этой точке справедливы неравенства*

$$|D^\alpha u_i(x)| \leqslant A \frac{d^{n-2m}}{\rho^{n-2m-|\alpha|}}, \quad n > 2m, \ |\alpha| \leqslant 2m,$$

$$|D^\alpha u_i(x)| \leqslant \begin{cases} A \dfrac{|\ln \rho| + 1}{|\ln d|}, & n = 2m, \ |\alpha| = 0, \\[2ex] A \dfrac{|\ln d|^{-1}}{\rho^{|\alpha|}}, & n = 2m, \ 1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2m, \end{cases}$$

где d — диаметр множества F, а постоянные A не зависят от d и ρ, *но зависят от c_1, a, $b < a$ и коэффициентов оператора L^0.*

Доказательство этой леммы основано на следующих формулах Грина:

$$\int_{T_a \setminus F} (L^0\mathbf{u}, \mathbf{v})\, dx = \int_{T_a \setminus F} \sum_{|\alpha|, |\beta| = m} (a^0_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{v})\, dx + \\ + \int_{S \cup S_a} \sum_{|\gamma| \leqslant m-1} (M^\gamma \mathbf{u}, D^\gamma \mathbf{v})\, dS, \tag{2.40}$$

$$\int_{T_a \setminus F} \{(L^0\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}, L^0\mathbf{v})\}\, dx = \int_{S \cup S_a} \sum_{|\gamma| \leqslant m-1} \{(M^\gamma \mathbf{u}, D^\gamma \mathbf{v})\}\, dS, \tag{2.41}$$

где M^γ — однородные дифференциальные операторы (матричные) порядков $2m - 1 - |\gamma|$ с гладкими коэффициентами. Эти формулы получаются обычным способом при помощи интегрирования по частям.

Обозначим через $\Gamma(x, \xi) = \|\Gamma^{ij}(x, \xi)\|_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$ матрицу Грина задачи Дирихле в шаре $T_a = T_a(F)$ для оператора L^0, т. е. матрицу-функцию, определенную на $T_a \times T_a$ и удовлетворяющую в T_a системе уравнений [1]

$$L^0_x \Gamma(x, \xi) = -\delta(x, \xi) I, \quad x, \xi \in T_a,$$

и граничным условиям

$$D^\alpha_x \Gamma(x, \xi) = 0, \quad |\alpha| \leqslant m - 1, \; x \in S_a, \; \xi \in T_a,$$

на сфере S_a ($\delta(x, \xi)$ — δ-функция, сосредоточенная в точке $\xi \in T_a$, а I — единичная матрица в R_N). Как известно, такая матрица существует и обладает следующими свойствами [22]. При $x \neq \xi$ и $\xi \in T_b(F)$ $(b < a)$ существуют и непрерывны по $\{x, \xi\} \in T_a \times T_b$ производные $D^\alpha_x D^\beta_\xi \Gamma^{ij}(x, \xi)$. Каждая такая производная имеет вид $A(x, \xi)\, |x - \xi|^{-n+2m-|\alpha|-|\beta|}$ (при $n - 2m + |\alpha| + |\beta| > 0$) и $A(x, \xi)(1 - \ln|x - \xi|)$ (при $n - 2m + |\alpha| + |\beta| = 0$), где $A(x, \xi)$ ограничены.

Положим в формуле (2.41) $\mathbf{v}(x) = \Gamma_i(x, \xi)$, где $\Gamma_i(x, \xi)$ — i-й столбец матрицы $\Gamma(x, \xi)$, а $\mathbf{u}(x)$ равной решению задачи (2.36). Тогда, учитывая, что $D^\gamma_x \mathbf{u}(x) = 0$, $D^\gamma_x \Gamma_i(x, \xi) = 0$ при $x \in S_a$ $(0 \leqslant |\gamma| \leqslant m - 1)$ и $\mathbf{u}(x) = \mathbf{e}^k$, $D^\gamma \mathbf{u}(x) = 0$ $(1 \leqslant |\gamma| \leqslant m - 1)$ при $x \in S$, получим следующее выражение для i-й компоненты $\mathbf{u}(x)$:

$$u_i(x) = \int_S \sum_{|\gamma| \leqslant m-1} (M^\gamma_x \mathbf{u}(x), D^\gamma_x \Gamma_i(x, \xi))\, dS_x - \int_S (M^0_x \Gamma_i(x, \xi), \mathbf{e}^k)\, dS_x.$$

Последний интеграл в этом выражении равен нулю. Это вытекает из формулы (2.40), если ее применить к области $F \setminus S$, внутренней по отношению к S, и положить $\mathbf{u}(x) = \Gamma_i(x, \xi)$ $(\xi \notin F)$, $\mathbf{v}(x) = \mathbf{e}^k$.

[1] Операторы L^0_x и D^α_x применяются к столбцам матрицы $\Gamma(x, \zeta)$.

Следовательно, при любом $\xi \in T_b \setminus F$ и $|\alpha| \leqslant 2m$

$$D_\xi^\alpha u_i(\xi) = \int\limits_S \sum_{|\gamma| \leqslant m-1} (M_x^\gamma \mathbf{u}(x), D_x^\gamma D_\xi^\alpha \Gamma_i(x, \xi))\, dS_x. \tag{2.42}$$

Рассмотрим случай $n > 2m$. Введем вектор-функцию

$$\mathbf{v}_i^\alpha(x, \xi) = D_\xi^\alpha \Gamma_i(x, \xi)\, \varphi_d(x),$$

где $\varphi_d(x) = \varphi\left(\frac{r - d_1}{d}\right)$, $\varphi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $t \leqslant 0$ и нулю при $t \geqslant \frac{c_1}{2}$, а $r = r(x)$ — расстояние от точки x до центра минимального шара $T(F)$ радиуса $d_1 = d(F)$. Очевидно, при $x \in S \subset T(F)$

$$D_x^\gamma \mathbf{v}_i^\alpha(x, \xi) = D_x^\gamma D_\xi^\alpha \Gamma_i(x, \xi), \quad |\gamma| \leqslant m - 1, \tag{2.43}$$

и если точка ξ находится на расстоянии $\rho \geqslant c_1 d$ от $T(F)$, то вектор-функция $\mathbf{v}_i^\alpha(x, \xi)$ бесконечно дифференцируема по x в шаре $T_a = T_a(F)$ и равна нулю при $r(x) > d_1 + \frac{c_1}{2} d$.

Полагая в формуле (2.40) $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i^\alpha(x, \xi)$, а $\mathbf{u}$ равным решению задачи (2.36) и учитывая (2.42), (2.43), получаем

$$D_\xi^\alpha u_i(\xi) = -\int\limits_{T_a \setminus F} \sum_{|\gamma|, |\beta| = m} (a_{\gamma\beta}^0 D^\beta \mathbf{u}(x), D_x^\gamma \mathbf{v}_i^\alpha(x, \xi))\, dx,$$

откуда в силу неравенства Коши — Буняковского

$$|D_\xi^\alpha u_i(\xi)| \leqslant \left\{\int\limits_{T_a \setminus F} \sum_{|\gamma|, |\beta| = m} (a_{\gamma\beta}^0 D^\beta \mathbf{u}, D^\gamma \mathbf{u})\, dx\right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{\int\limits_{T_a \setminus F} \sum_{|\gamma|, |\beta| = m} (a_{\gamma\beta}^0 D^\beta \mathbf{v}_i^\alpha, D^\gamma \mathbf{v}_i^\alpha)\, dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant A \left\{\int\limits_{T_a \setminus F} \sum_{|\gamma|, |\beta| = m} (a_{\gamma\beta}^0 D^\beta \mathbf{u}, D^\gamma \mathbf{u})\, dx\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int\limits_{T_a \setminus F} \sum_{|\beta| = m} \| D_x^\beta \mathbf{v}_i^\alpha(x, \xi)\|^2\, dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.44}$$

Применение неравенства Коши — Буняковского здесь законно, так как из (2.11) следует, что для любой финитной вектор-функции $\mathbf{u}(x)$

$$\int\limits_{T_a \setminus F} \sum_{|\alpha|, |\beta| = m} (a_{\alpha\beta}^0 D^\beta \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{u})\, dx \geqslant \mu_0 \int\limits_{T_a \setminus F} \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha \mathbf{u}\|^2\, dx. \tag{2.45}$$

Для оценки первого сомножителя в (2.44) заметим, что на $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}^k(x)$ достигается минимум функционала (2.38) в классе m раз непрерывно дифференцируемых и финитных в T_a вектор-функций, равных $\mathbf{e}^k$ в окрестности F. Поскольку вектор $\psi_d(x)$, у которого k-я компонента равна $\varphi_d(x)$, а все остальные — нулю, принадлежит этому классу, отсюда следует, что

$$\int\limits_{T_a \setminus F} \sum_{|\gamma|,|\beta|=m} (\overset{0}{a}_{\gamma\beta} D^\beta \mathbf{u}, D^\gamma \mathbf{u})\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{T_a \setminus F} \sum_{|\gamma|,|\beta|=m} (\overset{0}{a}_{\gamma\beta} D^\beta \psi_d, D^\gamma \psi_d)\, dx \leqslant A d^{n-2m}, \tag{2.46}$$

где постоянная A зависит только от c_1, n, m и коэффициентов $\overset{0ik}{a_{\alpha\beta}}$.

Перейдем к оценке второго сомножителя. Очевидно, $|x - \xi| \geqslant \rho(\xi) - \rho(x)$, где $\rho(y)$ — расстояние от точки y до шара $T(F)$. Так как по условию $\rho(\xi) \geqslant c_1 d$ и в силу свойств функции $\varphi_d(x)$ $\rho(x) \leqslant \frac{c_1}{2} d \leqslant \frac{\rho(\xi)}{2}$, то $|x-\xi| \geqslant \frac{\rho(\xi)}{2} = \frac{\rho}{2}$. Учитывая отмеченные выше свойства матрицы Грина $\Gamma(x, \xi)$ ($\xi \in T_b(F)$, $b < a$), находим

$$\int\limits_{T_a \setminus F} \sum_{|\beta|=m} |D_x^\beta \mathbf{v}_i^\alpha(x, \xi)|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant A \sum_{k=0}^{m} \left\{ \frac{1}{\rho^{2(n-2m+|\alpha|+m-k)}} \sum_{|\beta|=k} \int\limits_{r<d_1+\frac{c_1}{2}d} |D^\beta \varphi_d(x)|^2\, dx \right\},$$

а поскольку

$$\int\limits_{r<d_1+\frac{c_1}{2}d} |D^\beta \varphi_d(x)|^2\, dx \leqslant A d^{n-2|\beta|}, \quad \rho \geqslant c_1 d,$$

отсюда следует

$$\int\limits_{T_a \setminus F} \sum_{|\beta|=m} |D_x^\beta \mathbf{v}_i^\alpha(x, \xi)|^2\, dx \leqslant A \frac{d^{n-2m}}{\rho^{2(n-2m+|\alpha|)}}, \tag{2.47}$$

где постоянные A не зависят от d и ρ, но зависят от c_1, a, b, n, m и коэффициентов $\overset{0ik}{a_{\alpha\beta}}$. Объединяя (2.44), (2.46) и (2.47), получаем требуемое неравенство

$$|D_\xi^\alpha u_i(\xi)| \leqslant A \frac{d^{n-2m}}{\rho^{n-2m+|\alpha|}}.$$

Таким образом, для $n > 2m$ лемма доказана.

При $n = 2m$ в приведенное доказательство следует внести такие изменения. Вместо $\varphi_d(x)$ вводим функцию

$$v(x, \xi) = \psi\left(\frac{r}{\rho}\right)\left(1 - V_m(r)\frac{(m-1)!}{r^{m-1}}\right), \tag{2.48}$$

где $r = r(x)$ — расстояние от x до центра шара $T(F)$, $\rho = \rho(\xi)$ — расстояние от ξ до $T(F)$, $\psi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $t \leqslant \frac{1}{4}$ и нулю при $t \geqslant \frac{1}{2}$, а $V_m(r)$ определяется по формулам

$$V_1(r) = \begin{cases} \frac{\ln r - \ln d}{|\ln d|}, & r > d, \\ 0, & r \leqslant d, \end{cases}$$

$$V_m(r) = \int_0^r V_{m-1}(t)\,dt, \quad r \geqslant 0,\ m \geqslant 2.$$

Очевидно, функция $\tilde{V}_m(r) = 1 - \frac{(m-1)!}{r^{m-1}} V_m(r)$ $m-1$ раз непрерывно дифференцируема, имеет ограниченные производные m-го порядка и при $r \leqslant d$ тождественно равна единице. Нетрудно также проверить, что при $r > d$ и $d < 1$ справедливо равенство

$$\tilde{V}_m(r) = -\frac{\ln r}{|\ln d|} + \frac{1}{|\ln d|} \sum_{i=0}^{m-1} A_i^m \left(\frac{d}{r}\right)^i, \quad r > d, \tag{2.49}$$

где постоянные A_i^m не зависят от d. Оценим нормы производных функций $v(x, \xi)$ по x. Согласно (2.48)

$$\int_{T_a} |D_x^\beta v(x, \xi)|^2\,dx \leqslant \int_{r < \frac{\rho}{4}} |D_x^\beta \tilde{V}_m(r)|^2\,dx + \int_{\frac{\rho}{4} < r < \frac{\rho}{2}} \left| D_x^\beta \left(\psi\left(\frac{r}{d}\right) \tilde{V}_m(r)\right)\right|^2 dx.$$

Предполагая $d < \rho < \frac{1}{3}$, при помощи равенства (2.49) получаем

$$\int_{r < \frac{\rho}{4}} |D^\beta \tilde{V}_m(r)|^2\,dx \leqslant \begin{cases} A\,\frac{\rho^{n-2|\beta|}\,|\ln\rho|^2}{|\ln d|^2}, & |\beta| < m, \\ A\,\frac{1}{|\ln d|}, & |\beta| = m, \end{cases}$$

где постоянная A не зависит от d и ρ. Аналогично, из свойств функции $\psi\left(\frac{r}{\rho}\right)$ и (2.49) следует

$$\int_{\frac{\rho}{4} < r < \frac{\rho}{2}} \left| D^\beta \left(\psi\left(\frac{r}{\rho}\right) \tilde{V}_n(r)\right)\right|^2 dx < A\,\frac{\rho^{n-2|\beta|}\,|\ln\rho|^2}{|\ln d|^2}.$$

Таким образом,

$$\int_{T_a} |D_x^\beta v(x, \xi)|^2\,dx \leqslant \begin{cases} \frac{A}{|\ln d|}\,\rho^{n-2|\beta|}\,\frac{|\ln\rho|^2}{|\ln d|}, & |\beta| < m, \\ \frac{A}{|\ln d|}\left(1 + \frac{|\ln\rho|^2}{|\ln d|}\right), & |\beta| = m. \end{cases} \tag{2.50}$$

Здесь множитель $\frac{|\ln\rho|^2}{|\ln d|}$ ограничен, поскольку в силу условия леммы $\rho=\rho(\xi)\geqslant \exp(-c_1\sqrt{|\ln d|})$, $c_1>0$, $A=\mathrm{const}$. Далее лемма доказывается так же, как и при $n>2m$. Полагая $\mathbf{v}_i^\alpha(x,\xi)=v(x,\xi)D_\xi^\alpha\Gamma_i(x,\xi)$ и учитывая, что при малых d $\rho=\rho(\xi)\geqslant\exp(-c_1\sqrt{|\ln d|})>4d$ (а, значит, $v(x,\xi)\equiv 1$ при $x\in T(F)$), приходим к неравенству (2.44). Первый сомножитель в нем оценивается с помощью вектор-функции сравнения, у которой k-я компонента равна $v(x,\xi)$, а остальные — нулю, и неравенства (2.50) при $|\beta|=m$:

$$\int\limits_{T_a\setminus F}\sum_{|\gamma|,|\beta|=m}(a^0_{\gamma\beta}D^\beta\mathbf{u},\,D^\gamma\mathbf{u})\,dx\leqslant\frac{A}{|\ln d|}\,. \tag{2.51}$$

Аналогично, пользуясь (2.50) при $|\beta|=m$, так же как и при $n>2m$, оцениваем второй сомножитель в (2.44):

$$\int\limits_{T_a\setminus F}\sum_{|\beta|=m}|D_x^\beta\mathbf{v}_i^\alpha(x,\xi)|^2\,dx\leqslant\begin{cases}A\,\dfrac{|\ln\rho|^2}{|\ln d|}, & |\alpha|=0,\\ A\,\dfrac{\rho^{-2|\alpha|}}{|\ln d|}, & |\alpha|>0.\end{cases} \tag{2.52}$$

Из (2.44), (2.50) и (2.51) вытекает нужная оценка и при $n=2m$. Таким образом, лемма доказана.

Лемма 2.3. *Продолжим решение* $\mathbf{u}(x)$ *задачи* (2.36) *на множество* F *равенством* $\mathbf{u}(x)=\mathbf{e}^k$. *Тогда в любом шаре* $T_b(F)$ *радиуса* $b<a$ *справедливы неравенства*

$$\int\limits_{T_b}\|D^\alpha\mathbf{u}\|^2\,dx\leqslant\begin{cases}A\{d^{n-2|\alpha|}+d^{2(n-2m)}\}, & n>2m,\\ A\left\{\dfrac{1}{|\ln d|}e^{-(n-2|\alpha|)\sqrt{|\ln d|}}+\dfrac{1}{|\ln d|^2}\right\}, & n=2m\end{cases} \tag{2.53}$$

где постоянная A *не зависит от* α, $|\alpha|\leqslant m$.

Доказательство. Для $|\alpha|=m$ эти неравенства вытекают непосредственно из (2.45), (2.46) при $n>2m$ и (2.45), (2.51) при $n=2m$. Рассматривая случай $|\alpha|<m$, запишем

$$\int\limits_{T_b}\|D^\alpha\mathbf{u}\|^2\,dx=\int\limits_{r<\delta}\|D^\alpha\mathbf{u}\|^2\,dx+\int\limits_{\delta<r<b}\|D^\alpha\mathbf{u}\|^2\,dx=I_1+I_2, \tag{2.54}$$

где $r=r(x)$ — расстояние от точки x до центра шара $T_b(F)$, $\delta=2d$ при $n>2m$ и $\delta=\exp(-\sqrt{|\ln d|})$ при $n=2m$. Интеграл по области $\delta<r<b$ оценивается непосредственно с помощью леммы 2.2:

$$I_2\leqslant\begin{cases}A\{d^{n-2|\alpha|}+d^{2(n-2m)}\}, & n>2m,\\ A|\ln d|^{-2}, & n=2m.\end{cases} \tag{2.55}$$

Для того чтобы оценить I_1, поместим шар $\{r < \delta\}$ в куб K_δ со стороной 2δ и будем считать, что начало координат находится на одной из его граней, а сам куб лежит в полупространстве $x_n \geqslant 0$. Поскольку решение задачи (2.36), указанным выше способом продолженное на F, имеет в T_a абсолютно непрерывные производные до $(m-1)$-го порядка включительно, при $k \leqslant m - |\alpha| - 1$ для любой его компоненты $u_i(x)$ справедливо равенство

$$\frac{\partial^k}{\partial x_n^k} D^\alpha u_i(x) = \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} D^\alpha u_i(x', 0) + \int_0^{x_n} \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} D^\alpha u_i(x', t)\, dt,$$

$$x' = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0\},$$

и, следовательно,

$$\int_{K_\delta} \left| \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} D^\alpha u_i(x) \right|^2 dx \leqslant 2^{n-1}\delta^n \left| \frac{\partial^k D^\alpha u_i}{\partial x_n^k} \right|_0^2 + 8\delta^2 \int_{K_\delta} \left| \frac{\partial^{k+1}}{\partial x_n^{k+1}} D^\alpha u_i(x) \right|^2 dx,$$

где

$$\left. \frac{\partial^k D^\alpha u_i}{\partial x_n^k} \right|_0 = \max_{x'} \left| \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} D^\alpha u_i(x', 0) \right|, \quad k = 0, 1, \ldots, m - |\alpha| - 1.$$

Оценивая каждый раз интегральный член в правой части при помощи неравенства с бо́льшим k, получаем

$$\int_{K_\delta} |D^\alpha u_i(x)|^2 dx \leqslant \sum_{k=0}^{m-|\alpha|-1} 2^{n+1+3k}\delta^{n+2k} \left| \frac{\partial^k D^\alpha u_i}{\partial x_n^k} \right|_0^2 +$$
$$+ 8^{m-|\alpha|}\delta^{2(m-|\alpha|)} \int_{K_\delta} \left| \frac{\partial^{m-|\alpha|}}{\partial x_n^{m-|\alpha|}} D^\alpha u_i(x) \right|^2 dx. \tag{2.56}$$

Здесь под знаком интеграла в правой части стоит производная порядка m, а так как неравенство (2.53) для $|\alpha| = m$ доказано, то им можно воспользоваться при оценке этого интеграла. Производные, стоящие в сумме, оцениваются с помощью леммы 2.2, поскольку расстояние от точек $x' = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0\}$ до центра шара $\{r < \delta\}$ не меньше δ. В результате получаем

$$I_1 \leqslant \int_{K_\delta} \|D^\alpha \mathbf{u}\|^2 dx \leqslant \begin{cases} A d^{n-2m}\delta^{2(m-|\alpha|)}, & n > 2m, \\ A|\ln d|^{-1}\delta^{2(m-|\alpha|)}, & n = 2m, \end{cases}$$

откуда, учитывая (2.54) и (2.55), приходим к неравенству (2.53) для $|\alpha| < m$. Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к проверке условий 1—3 теоремы 2.5. В качестве множества $\mathfrak{M}$, плотного в $H = \overset{\circ}{W}_L(\Omega)$, возьмем множество $2m$ раз непрерывно дифференцируемых и финитных в Ω вектор-функций.

Определим операторы $B_i^{(s)}$ по формуле

$$[B_i^{(s)}\mathbf{u}](x) = \hat{\mathbf{u}}^{(i,s)}(x) = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{v}^{k(i,s)}(x)\, u_k(x)\, \varphi_i^{(s)}(x), \tag{2.57}$$

где $\varphi_i^{(s)}(x) = \varphi\left[\dfrac{r - a_i^{(s)}}{r_i^{(s)}}\right]$, $\varphi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $t \leqslant \frac{1}{4}$ и нулю при $t \geqslant \frac{1}{2}$, $r = r(x)$ — расстояние от точки x до центра шара $T(F_i^{(s)}) \supset F_i^{(s)}$ минимального радиуса $a_i^{(s)} = \frac{1}{2} d(F_i^{(s)})$, $r_i^{(s)}$ — расстояние от $T(F_i^{(s)})$ до $\bigcup\limits_{j \neq i} T(F_j^{(s)})$, $\mathbf{v}^k(x) = \mathbf{v}^{k(i,s)}(x)$ — решение задачи (2.36) в области $T_a^i \setminus F_i^{(s)}$ при некотором фиксированном $a > 0$ ($T_a^i \subset \Omega$, $\mathbf{v}^{k(i,s)}(x)$ продолжается на $F_i^{(s)}$ равенством $\mathbf{v}^{k(i,s)}(x) = \mathbf{e}^k$ и нулем вне T_a^i). Легко видеть, что на множестве $F_i^{(s)}$ $\hat{\mathbf{u}}^{(i,s)}(x) \equiv \mathbf{u}(x)$ и носители вектор-функций $\hat{\mathbf{u}}^{(i,s)}(x)$ и $\hat{\mathbf{u}}^{(j,s)}(x)$ не пересекаются. Следовательно, условия 1, *a* и 1, *c* теоремы 2.5 выполняются.

Проверим условие 1, *b*. Пусть $\mathbf{u}(x) \in \mathfrak{M}$. Рассмотрим проекцию $\mathbf{u}(x)$ на подпространство $H_L(\Omega, F_i^{(s)})$, т. е. вектор-функцию $\mathbf{u}^{(i,s)} = P_i^{(s)}\mathbf{u}$, которая на $F_i^{(s)} \cup \partial\Omega$ равна $\mathbf{u}(x)$ вместе с производными до порядка $m - 1$ включительно, а в области $\Omega \setminus F_i^{(s)}$ удовлетворяет уравнению $L\mathbf{u}^{(i,s)} = 0$. Такая вектор-функция минимизирует функционал

$$\| \mathbf{u}^{(i,s)} \|_L^2 = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u}^{(i,s)}, D^\alpha \mathbf{u}^{(i,s)})\, dx$$

в классе вектор-функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, равных $\mathbf{u}(x)$ на $F_i^{(s)}$. Ищем $\mathbf{u}^{(i,s)}(x) = [P_i^{(s)}\mathbf{u}](x)$ в виде

$$\mathbf{u}^{(i,s)}(x) = \hat{\mathbf{u}}^{(i,s)}(x) + \mathbf{w}^{(i,s)}(x), \tag{2.58}$$

где $\hat{\mathbf{u}}^{(i,s)}(x) = [B_i^{(s)}\mathbf{u}](x)$ определяется равенством (2.57). Вектор-функция $\mathbf{w}^{(i,s)}(x)$ должна минимизировать функционал

$$\hat{U}_L(\mathbf{w}) = \| \mathbf{w} \|_L^2 + 2(\hat{\mathbf{u}}^{(i,s)}, \mathbf{w})_L \tag{2.59}$$

в классе $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega, F_i^{(s)})$ вектор-функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, равных нулю на $F_i^{(s)}$. Так как $\hat{U}_L(\mathbf{w}^{(i,s)}) \leqslant \hat{U}_L(0) = 0$, то

$$\| \mathbf{w}^{(i,s)} \|_L^2 \leqslant 2\,|(\hat{\mathbf{u}}^{(i,s)}, \mathbf{w}^{(i,s)})_L|.$$

Согласно (2.20)

$$(\hat{\mathbf{u}}^{(i,s)}, \mathbf{w}^{(i,s)})_L = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| = m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \hat{\mathbf{u}}^{(i,s)}, D^\alpha \mathbf{w}^{(i,s)})\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha| + |\beta| < 2m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \hat{\mathbf{u}}^{(i,s)}, D^\alpha \mathbf{w}^{(i,s)})\, dx,$$

где в силу свойств $\hat{\mathbf{u}}^{(i,s)}$ интегрирование фактически проводится по области $\Omega_i^{(s)} = \left\{x \in \Omega : r \leqslant \frac{r_i^{(s)}}{2} + a_i^{(s)}\right\}$. Вводя обозначения $\Omega_{1i}^{(s)} = \left\{x : r < \frac{r_i^{(s)}}{4} + a_i^{(s)}\right\}$, $\Omega_{2i}^{(s)} = \left\{x : \frac{r_i^{(s)}}{4} + a_i^{(s)} < r < \frac{r_i^{(s)}}{2} + a_i^{(s)}\right\}$ и учитывая, что $\mathbf{w}^{(i,s)} \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega, F_i^{(s)})$, а $L^0\, [\mathbf{v}^{k\,(i,s)}\, \varphi_i^{(s)}] = 0$ в области $\Omega_{1i}^{(s)} \setminus F_i^{(s)}$, интегрированием по частям преобразуем это выражение к виду

$$(\hat{\mathbf{u}}^{(i,s)}, \mathbf{w}^{(i,s)})_L = \sum_{l=1}^{5} I_l^{(i,s)}(\mathbf{w}), \tag{2.60}$$

$$\left.\begin{aligned}
I_1^{(i,s)}(\mathbf{w}) &= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Omega_{1i}^{(s)}} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (\delta_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{v}^k, D^\alpha \mathbf{w})\, u_k dx,\\
I_2^{(i,s)}(\mathbf{w}) &= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Omega_{2i}^{(s)}} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (\delta_{\alpha\beta} D^\beta [\mathbf{v}^k \varphi_i^{(s)}], D^\alpha \mathbf{w})\, u_k dx,\\
I_3^{(i,s)}(\mathbf{w}) &= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Omega_{2i}^{(s)}} (L^0 [\mathbf{v}^k \varphi_i^{(s)}], \mathbf{w})\, u_k dx,\\
I_4^{(i,s)}(\mathbf{w}) &= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Omega_{1i}^{(s)}} \sum_{\substack{|\beta|<m\\ |\alpha|\leqslant m}} (b_{\alpha\beta}^k D^\beta \mathbf{v}^k, D^\alpha \mathbf{w})\, dx,\\
I_5^{(i,s)}(\mathbf{w}) &= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Omega_{2i}^{(s)}} \sum_{\substack{|\beta|<m\\ |\alpha|\leqslant m}} (b_{\alpha\beta}^k D^\beta [\mathbf{v}^k \varphi_i^{(s)}], D^\alpha \mathbf{w})\, dx,
\end{aligned}\right\} \tag{2.60'}$$

где $\delta_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - \overset{0i}{a}_{\alpha\beta}$, $\overset{0i}{a}_{\alpha\beta}$ — значения матриц $a_{\alpha\beta}$ в центре шара $T\,(F_i^{(s)})$, $L^0 = (-1)^m \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \overset{0i}{a}_{\alpha\beta} D^{\alpha+\beta}$, $b_{\alpha\beta}^k = b_{\alpha\beta}^k\,(x)$ — матрицы с ограниченными элементами, выражающимися через $a_{\alpha\beta}^{kl}\,(x)$ и $u_k\,(x)$ и их производные. Для сокращения записи здесь и часто в дальнейшем индексы (i, s) при $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(i,s)}$ и $\mathbf{v}^k = \mathbf{v}^{k\,(i,s)}$ опускаются. Применяя неравенство Коши — Буняковского и учитывая (2.12), записываем

$$|I_1^{(i,s)}| \leqslant A\varepsilon_1(r_i^{(s)}) \sum_{k=1}^{N} \Big\{ \int\limits_{\Omega_{1i}^{(s)}} \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha \mathbf{v}^k\|^2 dx\Big\}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{w}\|_L,$$

$$|I_4^{(i,s)}| \leqslant A \sum_{k=1}^{N} \Big\{ \int\limits_{\Omega_{1i}^{(s)}} \sum_{|\alpha|<m} \|D^\alpha \mathbf{v}^k\|^2 dx\Big\}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{w}\|_L,$$

$$|I_2^{(i,s)}| + |I_5^{(i,s)}| \leqslant A \sum_{k=1}^{N} \Big\{ \int\limits_{\Omega_{2i}^{(s)}} \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha [\mathbf{v}^k \varphi_i^{(s)}]\|^2 dx\Big\}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{w}\|_L,$$

где

$$\varepsilon_1(r_i^{(s)}) = \max_{\substack{|\alpha|,|\beta|=m\\ 1\leqslant k,l\leqslant N}} \max_{x\in\Omega_{1i}^{(s)}} |a_{\alpha\beta}^{kl}(x) - a_{\alpha\beta}^{0ikl}| \to 0 \text{ при } r_i^{(s)} \to 0,$$

а постоянные A не зависят от s. Интегралы по областям $\Omega_{1i}^{(s)}$ оцениваем при помощи леммы 2.3. В результате получаем неравенство

$$|I_1^{(i,s)}| + |I_4^{(i,s)}| \leqslant A(\varepsilon_1(r_i^{(s)}) + \varepsilon_2(d_i^{(s)}))\sqrt{p(d_i^{(s)})}\|\mathbf{w}\|_L,$$

где $\varepsilon_2(d_i^{(s)}) \to 0$ при $d_i^{(s)} \to 0$, $A = \text{const}$, а

$$p(d_i^{(s)}) = \begin{cases} (d_i^{(s)})^{n-2m}, & n > 2m, \\ |\ln d_i^{(s)}|^{-1}, & n = 2m. \end{cases}$$

Для оценки интегралов по областям $\Omega_{2i}^{(s)}$ воспользуемся леммой 2.2, применимой в этом случае, поскольку в силу условия c теоремы 2.6 $r_i^{(s)} > c_1 d_i^{(s)}$ при $n > 2m$ и $r_i^{(s)} > C_2^{-\frac{1}{n}} |\ln d_i^{(s)}|^{-\frac{2}{n}} > \exp(-c_1\sqrt{|\ln d_i^{(s)}|})$, при $n = 2m$ $(c_1 > 0,\ d_i^{(s)} \ll 1)$. Учитывая при этом свойства функции $\varphi_i^{(s)}(x)$, получаем

$$|I_2^{(i,s)}| + |I_5^{(i,s)}| \leqslant A(r_i^{(s)})^m \theta_m^{\frac{1}{2}} \frac{p(d_i^{(s)})}{\sqrt{(r_i^{(s)})^n}}\|\mathbf{w}\|_L,$$

где $\theta_m = 1$ при $n > 2m$ и $\theta_m = 1 + |\ln r_i^{(s)}|$ при $n = 2m$, $A = \text{const}$.

Перейдем к оценке интеграла $I_3^{(i,s)}(\mathbf{w})$. В силу неравенства Коши — Буняковского

$$|I_3^{(i,s)}| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \max_{x\in\Omega_{2i}^{(s)}} |u_k(x)| \left\{ \int_{\Omega_{2i}^{(s)}} \|L^0[\mathbf{v}^k\varphi_i^{(s)}]\|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\Omega_{2i}^{(s)}} \|\mathbf{w}\|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.61)$$

Поскольку $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(i,s)}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, из (2.3) и (2.12) следует

$$\int_{\Omega_{2i}^{(s)}} \|\mathbf{w}\|^2 dx \leqslant A(r_i^{(s)})^2 \theta_1 \|\mathbf{w}\|_L^2, \quad A = \text{const}.$$

Поэтому, оценивая первый сомножитель в (2.61) с помощью леммы 2.2, приходим к неравенству

$$|I_{3i}^{(s)}| \leqslant A r_i^{(s)} \sqrt{\theta_1\theta_m} \frac{p(d_i^{(s)})}{\sqrt{(r_i^{(s)})^n}}\|\mathbf{w}\|_L.$$

Таким образом, из (2.60) окончательно получаем

$$|(\hat{\mathbf{u}}^{(i,s)}, \mathbf{w}^{(i,s)})_L| \leqslant A\varepsilon_i^{(s)} \left\{ \sqrt{p(d_i^{(s)})} + \frac{p(d_i^{(s)})}{\sqrt{(r_i^{(s)})^n}} \right\} \|\mathbf{w}^{(i,s)}\|_L,$$

где A не зависит от s, а $\varepsilon_i^{(s)} = \max\{\varepsilon_1(r_i^{(s)}) + \varepsilon_2(d_i^{(s)}),\ r_i^{(s)}(1 + |\ln r_i^{(s)}|)\}$ согласно условию a стремится к нулю при $s \to \infty$. Отсюда в силу (2.59) вытекает оценка для нормы вектор-функции $\mathbf{w}^{(i,s)}$

$$\|\mathbf{w}^{(i,s)}\|_L^2 \leqslant A(\varepsilon_i^{(s)})^2 \left\{p(d_i^{(s)}) + \frac{p^2(d_i^{(s)})}{(r_i^{(s)})^n}\right\}, \quad A = \text{const}.$$

Согласно (2.57) и (2.58) $\mathbf{w}^{(i,s)} = P_i^{(s)}\mathbf{u} - B_i^{(s)}\mathbf{u}$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{s} \|P_i^{(s)}\mathbf{u} - B_i^{(s)}\mathbf{u}\|_L^2 \leqslant A \max_i (\varepsilon_i^{(s)})^2 \left\{\sum_{i=1}^{s} p(d_i^{(s)}) + \sum_{i=1}^{s} \frac{p^2(d_i^{(s)})}{(r_i^{(s)})^n}\right\}. \quad (2.62)$$

Оценим первую сумму в правой части (2.62) при помощи неравенства Коши — Буняковского

$$\sum_{i=1}^{s} p(d_i^{(s)}) \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{s} \frac{p^2(d_i^{(s)})}{(r_i^{(s)})^n}\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{i=1}^{s} (r_i^{(s)})^n\right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.63)$$

Сумма $\sum_{i=1}^{s} (r_i^{(s)})^n$ ограничена равномерно по s, поскольку шары $T_\delta(F_i^{(s)})$ радиуса $\delta = a_i^{(s)} + \frac{r_i^{(s)}}{2}$ не пересекаются, и все множества $F_i^{(s)}$ лежат в ограниченной области Ω. Поэтому в силу условий a и c теоремы 2.6 из (2.62) вытекает условие 1, b теоремы 2.5.

Замечание. Из приведенных рассуждений вытекает равенство

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{s} \int_{T_a^i} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta}^{0i} D^\beta \mathbf{w}^{k(i,s)}, D^\alpha \mathbf{w}^{k(i,s)})\, dx = 0,$$

где $\mathbf{w}^{k(i,s)} = \mathbf{v}^{k(i,s)}(1 - \varphi_i^{(s)})$, $T_a^i = T_a(F_i^{(s)})$ — шар радиуса a, относительно которого определяется тензор $C^{kl}(F_i^{(s)})$, $a_{\alpha\beta}^{0i}$ — значения матриц $a_{\alpha\beta}(x)$ в центре этого шара.

Проверим условие 1, d'. Пусть $\mathbf{u} \in \mathfrak{M}$, а $\mathbf{z}^{(s)}(x)$ принадлежит $\bigcap_{i=1}^{s} \mathring{W}_2^m(\Omega, F_i^{(s)}) = \mathring{W}_2^m(\Omega, F^{(s)})$ и слабо сходится к вектор-функции $\mathbf{z}(x) \in \mathring{W}_L(\Omega)$. Так как нормы в пространствах $\mathring{W}_L(\Omega)$ и $\mathring{W}_2^m(\Omega)$ эквивалентны, то $\mathbf{z}^{(s)}(x)$ слабо сходится к $\mathbf{z}(x)$ также в $\mathring{W}_2^m(\Omega)$ и $\mathbf{z}(x) \in \mathring{W}_2^m(\Omega)$. Учитывая, что $\mathbf{z}^{(s)}(x) \in \bigcap_{i=1}^{s} \mathring{W}_2^m(\Omega, F_i^{(s)})$ и, значит, $D^\alpha \mathbf{z}^{(s)}(x) = 0$ при $x \in (\bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}) \cup \partial\Omega$ и $|\alpha| \leqslant m - 1$, с помощью интегрирования по частям (так же, как в (2.60)) получаем

$$\sum_{i=1}^{s} (B_i^{(s)}\mathbf{u}, \mathbf{z}^{(s)})_L = \sum_{l=1}^{5} \sum_{i=1}^{s} I_l^{(i,s)}(\mathbf{z}^{(s)}), \quad (2.64)$$

где $I_l^{(i,s)}(\mathbf{z}^{(s)})$ определяются равенствами (2.60′) (с заменой $\mathbf{w}$ на $\mathbf{z}^{(s)}$). Суммы $\sum_{i=1}^{s} I_l^{(i,s)}(\mathbf{z}^{(s)})$ ($l \neq 3$) оцениваются с помощью лемм 2.2 и 2.3 и неравенства (2.12) точно так же, как в (2.60). При этом только следует учитывать, что области $\Omega_i^{(s)} = \Omega_{1i}^{(s)} \cap \Omega_{2i}^{(s)}$, $i = 1, 2, \ldots, s$, не пересекаются и $\bigcup_{i=1}^{s} \Omega_i^{(s)} \subset \Omega$. В результате находим

$$\sum_{l\neq 3}\left|\sum_{i=1}^{s} I_l^{(i,s)}(\mathbf{z}^{(s)})\right| \leqslant A\varepsilon(s)\left\{\sum_{i=1}^{s} p\,(d_i^{(s)}) + \sum_{i=1}^{s}\frac{p^2\,(d_i^{(s)})}{(r_i^{(s)})^n}\right\}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{z}^{(s)}\|_L,$$

где $\varepsilon(s) = \max\limits_i \max\{\varepsilon_1(r_i^{(s)}) + \varepsilon_2(d_i^{(s)}),\ (r_i^{(s)})^m\,\theta_m\}$, $\varepsilon(s) \to 0$ при $s \to \infty$, $A = \mathrm{const}$. Поскольку $\mathbf{z}^{(s)}$ слабо сходятся в пространстве $\mathring{W}_L(\Omega)$ и, значит, нормы $\|\mathbf{z}^{(s)}\|_L$ ограничены равномерно по s, отсюда в силу (2.63) и условия c теоремы 2.6 следует

$$\sum_{l\neq 3}\sum_{i=1}^{s} I_l^{(i,s)}(\mathbf{z}^{(s)}) \to 0 \text{ при } s \to \infty. \tag{2.65}$$

Оценим третью сумму в (2.64). Рассмотрим сначала случай $n > 2m$. Согласно неравенству Коши — Буняковского

$$\left|\sum_{i=1}^{s} I_3^{(i,s)}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{N}\left\{\sum_{i=1}^{s}\int_{\Omega_{2i}^{(s)}} \|L^0[\mathbf{v}^k\varphi_i^{(s)}]\|^2 u_k^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{i=1}^{s}\int_{\Omega_{2i}^{(s)}}\|\mathbf{z}^{(s)}\|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.66}$$

Вектор-функция $\mathbf{z}^{(s)} = \mathbf{z}^{(s)}(x)$ слабо сходится к $\mathbf{z} = \mathbf{z}(x)$ в пространстве $\mathring{W}_2^m(\Omega)$, а так как оператор вложения из $\mathring{W}_2^m(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ вполне непрерывен, то $\mathbf{z}^{(s)}$ сильно сходится к $\mathbf{z}$ в $L_2(\Omega)$. Следовательно,

$$\varlimsup_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{s}\int_{\Omega_{2i}^{(s)}}\|\mathbf{z}^{(s)}\|^2\,dx \leqslant \lim_{s\to\infty}\int_{\Omega}\|\mathbf{z}^{(s)}\|^2\,dx = \int_{\Omega}\|\mathbf{z}\|^2\,dx \leqslant A\|\mathbf{z}\|_L^2. \tag{2.67}$$

Первый сомножитель в (2.66) оценивается с помощью леммы 2.2. Учитывая при этом гладкость вектор-функции $\mathbf{u}(x) \in \mathfrak{M}$, условие c теоремы 2.6 и неравенство (2.12), получаем

$$\varlimsup_{s\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\left\{\sum_{i=1}^{s}\int_{\Omega_{2i}^{(s)}}\|L^0[\mathbf{v}^k\varphi_i^{(s)}]\|^2 u_k^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant A_1\left\{\sum_{k=1}^{N}\varlimsup_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{s}\frac{p^2\,(d_i^{(s)})}{(r_i^{(s)})^n}\cdot(\bar{u}_k^i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant A_2\left\{\int_{\Omega}\|\mathbf{u}\|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant A\|\mathbf{u}\|_L, \tag{2.68}$$

где $\overline{u}_k^i$ — значение функции $u_k(x)$ в некоторой точке $x^{(i)} \in \Omega_{2i}^{(s)}$, A не зависит от s и $\mathbf{u}$. Объединяя (2.66) — (2.68), находим при $n > 2m$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \left| \sum_{i=1}^{s} I_3^{(i,s)} \right| \leqslant A \|\mathbf{u}\|_L \|\mathbf{z}\|_L, \quad A = \text{const}. \tag{2.69}$$

При $n = 2m$ оценку (2.68) получить не удается, так как члены с чистым $\mathbf{v}^k$ (без производных), входящие в $L^0 [\mathbf{v}^k \varphi_k^{(s)}]$, вносят дополнительный множитель $|\ln r_i^{(s)}|$. Поэтому при $n = 2m$ оценка $\sum_{i=1}^{s} I_3^{(i,s)}$ проводится немного сложнее. Запишем

$$\sum_{i=1}^{s} I_3^{(i,s)} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega_{2i}^{(s)}} (L^0 [\mathbf{v}^k \varphi_i^{(s)}], \mathbf{z}^{(s)})\, u_k dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega_{2i}^{(s)}} (L^0 [I \varphi_i^{(s)}]\, \mathbf{v}^k, \mathbf{z}^{(s)})\, u_k dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega_{2i}^{(s)}} \{(L^0 [\mathbf{v}^k \varphi_i^{(s)}], \mathbf{z}^{(s)})\, u_k - (L^0 [I \varphi_i^{(s)}]\, \mathbf{v}^k, \mathbf{z}^{(s)})\, u_k\}\, dx,$$

где I — единичная матрица в R_N. Во вторую сумму входят только производные вектор-функции $\mathbf{v}^k$, а сама функция не входит. Поэтому эту сумму можно оценить с помощью леммы 2.2 так же, как при $n > 2m$. В результате для нее получаем неравенство, аналогичное (2.69). Первую сумму, учитывая, что $\mathbf{z}^{(s)} \in \overset{\circ}{W}{}_2^m (\Omega, F^{(s)})$, интегрированием по частям преобразуем к виду

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega_{2i}^{(s)}} (L^0 [I \cdot \varphi_i^{(s)}]\, \mathbf{v}^k, \mathbf{z}^{(s)})\, u_k dx = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{n} \int_{\Omega_{2i}^{(s)}} (L_r^0 [I \varphi_i^{(s)}]\, D_r \mathbf{v}^k, \mathbf{z}^{(s)})\, u_k dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{n} \int_{\Omega_{2i}^{(s)}} (L_r^0 [I \varphi_i^{(s)}] \cdot \mathbf{v}^k, D_r \mathbf{z}^{(s)})\, u_k dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{n} \int_{\Omega_{2i}^{(s)}} (L_r^0 [I \varphi_i^{(s)}]\, \mathbf{v}^k, \mathbf{z}^{(s)})\, D_r u_k dx = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3,$$

где $D_r = \dfrac{\partial}{\partial x_r}$, а L_r^0 — однородные дифференциальные операторы (матричные) порядка $2m - 1$. Оценивая второе и третье слагаемые, как обычно, с помощью неравенства Коши — Буняковского и леммы 2.2, получаем

$$|\Sigma_2| + |\Sigma_3| \leqslant A \max_i \{r_i^{(s)} (1 + |\ln r_i^{(s)}|)\} \left\{ \sum_{i=1}^{s} \frac{p^2 (d_i^{(s)})}{(r_i^{(s)})^n} \right\}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{z}^{(s)}\|_L,$$

где постоянная A не зависит от s, но зависит от $\mathfrak{u}$. Следовательно, при любом $\mathfrak{u} \in \mathfrak{M}$ $\Sigma_2, \Sigma_3 \to 0$, когда $s \to \infty$. Слагаемое Σ_1 оценивается точно так же, как при $n > 2m$, и для него справедливо неравенство, аналогичное (2.69). Таким образом, неравенство (2.69) выполняется при всех $n \geqslant 2m$. Объединяя (2.64), (2.65) и (2.69), приходим к условию 1, d' теоремы 2.5.

Проверим условие 2. Пусть $\mathfrak{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{M}$. Согласно (2.57)

$$\sum_{i=1}^{s} (B_i^{(s)}\mathfrak{u}, \mathbf{v})_L = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^{\beta} [\mathbf{v}^k \varphi_i^{(s)} u_k], D^{\alpha}\mathbf{v})\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega} (\mathbf{v}^k \varphi_i^{(s)} u_k, L\mathbf{v})\, dx \quad \left(L = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} (a_{\alpha\beta} D^{\beta})\right).$$

Учитывая, что $\|\mathfrak{u}\|_L, \|L\mathbf{v}\|_L < A_1$, $|\varphi_i^{(s)}| < 1$ и носители функций $\varphi_i^{(s)}$ сосредоточены в областях $\Omega_i^{(s)} = \Omega_{1i}^{(s)} \cup \Omega_{2i}^{(s)}$, с помощью неравенства Коши — Буняковского получаем

$$\left| \sum_{i=1}^{s} (B_i^{(s)}\mathfrak{u}, \mathbf{v})_L \right| \leqslant A_2 \sum_{i=1}^{s} \left\{ \int_{\Omega_i^{(s)}} \|\mathbf{v}^k\|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \operatorname{mes}^{\frac{1}{2}} \Omega_i^{(s)} \leqslant$$

$$\leqslant A \left\{ \sum_{i=1}^{s} \int_{\Omega_i^{(s)}} \|\mathbf{v}^k\|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда в силу леммы 2.3, неравенства (2.63) и условия c теоремы 2.6 следует

$$\left| \sum_{i=1}^{s} (B_i^{(s)}\mathfrak{u}, \mathbf{v})_L \right| = \left\{ \sum_{i=1}^{s} p(d_i^{(s)}) \right\}^{\frac{1}{2}} o(1) \to 0 \text{ при } s \to \infty.$$

Таким образом, условие 2 выполняется.

Проверим условие 3. Как было показано в § 2, условие 3 эквивалентно (2.26). Поэтому рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^{s} \|B_i^{(s)}\mathfrak{u}\|_L^2 = \sum_{i=1}^{s} \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^{\beta} \check{\mathfrak{u}}^{(i,s)}, D^{\alpha} \hat{\mathfrak{u}}^{(i,s)})\, dx,$$

где $\hat{\mathfrak{u}}^{(i,s)}(x)$ определяется из равенства (2.57). Учитывая свойства функций $\varphi_i^{(s)}(x)$, записываем ее в виде

$$\sum_{i=1}^{s} \|B_i^{(s)}\mathfrak{u}\|_L^2 = I_1^{(s)} + I_2^{(s)} + I_3^{(s)} + I_4^{(s)}, \tag{2.70}$$

где

$$I_1^{(s)} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k,l=1}^{N} \left\{ \int_{\Omega_i^{(s)}} \sum_{|\alpha|,|\beta| = m} (a_{\alpha\beta}^{0i} D^{\beta} [\mathbf{v}^k \varphi_i^{(s)}], D^{\alpha} [\mathbf{v}^l \varphi_i^{(s)}])\, dx \right\} u_k^{0i} u_l^{0i},$$

$$I_2^{(s)} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k,l=1}^{N} \int_{\Omega_{1i}^{(s)}} \sum_{|\alpha|,|\beta| = m} (\{\delta_{\alpha\beta} u_k u_l - a_{\alpha\beta}^{0i} \Delta_{kl}\} D^{\beta}\mathbf{v}^k, D^{\alpha}\mathbf{v}^l)\, dx,$$

$$I_3^{(s)} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k,l=1}^{N} \int\limits_{\Omega_{1i}^{(s)}} \sum_{|\alpha|+|\beta|<2m} (b^1_{\alpha\beta kl} D^\beta \mathbf{v}^k, D^\alpha \mathbf{v}^l)\, dx,$$

$$I_4^{(s)} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k,l=1}^{N} \int\limits_{\Omega_{2i}^{(s)}} \sum_{|\alpha|,\, |\beta| \leqslant 2m} (b^2_{\alpha\beta kl} D^\beta [\mathbf{v}^k \varphi_i^{(s)}],\ D^\alpha [\mathbf{v}^l \varphi_i^{(s)}])\, dx.$$

Здесь $\delta_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - a^{0i}_{\alpha\beta}$, $\Delta_{kl} = u_k u_l - u_k^{0i} u_l^{0i}$, $a^{0i}_{\alpha\beta}$, u_k^{0i} — значения матриц $a_{\alpha\beta}$ и функций u_k в центре шара $T(F_i^{(s)})$, $b^{1,2}_{\alpha\beta kl} = b^{1,2}_{\alpha\beta kl}(x)$ — матрицы в R_N с ограниченными элементами, выражающимися через $a_{\alpha\beta}(x)$, $\mathbf{u}(x) \in \mathfrak{M}$ и их производные, $\Omega_i^{(s)} = \Omega_{1i}^{(s)} \cup \Omega_{2i}^{(s)}$. В силу неравенства Коши — Буняковского

$$|I_2^{(s)}| \leqslant A\varepsilon(s) \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m} \int\limits_{\Omega_{1i}^{(s)}} \| D^\alpha \mathbf{v}^k \|^2 dx,$$

$$|I_3^{(s)}| \leqslant A \sum_{i=1}^{s} \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{|\alpha|+|\beta|<2m} \left\{ \int\limits_{\Omega_{1i}^{(s)}} \| D^\beta \mathbf{v}^k \|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int\limits_{\Omega_{1i}^{(s)}} \| D^\alpha \mathbf{v}^l \|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$|I_4^{(s)}| \leqslant A \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int\limits_{\Omega_{2i}^{(s)}} \| D^\alpha [\mathbf{v}^k \varphi_i^{(s)}] \|^2 dx,$$

где $\varepsilon(s) = \max\limits_{\alpha,\beta,r,j,k,l} \max\limits_{x \in \Omega_{1i}^{(s)},\, i \leqslant s} |\delta^{rj}_{\alpha\beta} u_k u_l - a^{0irj}_{\alpha\beta} \Delta_{kl}|$, $\varepsilon(s) \to 0$ при $s \to \infty$, а постоянные A не зависят от s. Оценивая, как обычно, интегралы по областям $\Omega_{1i}^{(s)}$ с помощью леммы 2.3, а по областям $\Omega_{2i}^{(s)}$ — с помощью леммы 2.2 и учитывая, что во втором неравенстве либо $|\alpha| < m$ ($|\beta| \leqslant m$), либо $|\beta| < m$ ($|\alpha| \leqslant m$), устанавливаем, что слагаемые $I_2^{(s)}$, $I_3^{(s)}$ и $I_4^{(s)}$ в (2.70) стремятся к нулю при $s \to \infty$.

Рассмотрим слагаемое $I_1^{(s)}$, представив его в виде

$$I_1^{(s)} = \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{i=1}^{s} \left\{ \int\limits_{T_a^i} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a^{0i}_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{v}^k,\ D^\alpha \mathbf{v}^l)\, dx \right\} u_k^{0i} u_l^{0i} +$$

$$+ \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{i=1}^{s} \left\{ \int\limits_{T_a^i} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a^{0l}_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{w}^k,\ D^\alpha \mathbf{w}^l)\, dx \right\} u_k^{0i} u_l^{0i} -$$

$$- 2 \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{i=1}^{s} \left\{ \int\limits_{T_a^i} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a^{0i}_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{v}^k,\ D^\alpha \mathbf{w}^l)\, dx \right\} u_k^{0i} u_l^{0i} = I_{11}^{(s)} + I_{12}^{(s)} + I_{13}^{(s)}, \tag{2.71}$$

где $\mathbf{w}^k = \mathbf{v}^k (1 - \varphi_i^{(s)})$, $T_a^i = T_a(F_i^{(s)})$ — шар радиуса a, относительно которого вводился тензор $C^{kl}(F_i^{(s)})$ (см. (2.37)). Вектор-функция $\mathbf{w}^k = \mathbf{w}^k(x)$ равна нулю в окрестности множества $F_i^{(s)}$, и в силу свойств $\mathbf{v}^k$ на границе шара T_a^i равны нулю производные $\mathbf{w}^k$ до $(m-1)$-го порядка включительно. Поэтому, учитывая, что в области $T_a^i \setminus F_i^{(s)}$ $\mathbf{v}^k$ является решением задачи (2.36), интегрированием по частям получаем

$$\int_{T_a^i} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta}^{0i} D^\beta \mathbf{v}^k, D^\alpha \mathbf{w}^l)\, dx = \int_{T_a^i \setminus F_i^{(s)}} (L^0 \mathbf{v}^k, \mathbf{w}^l)\, dx = 0,$$

и, следовательно, $I_{13}^{(s)} = 0$.

Далее, согласно (2.45) и неравенству Коши — Буняковского

$$|I_{12}^{(s)}| \leqslant \sum_{k,l=1}^{N} \left\{ \sum_{i=1}^{s} \int_{T_a^i} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta}^{0i} D^\beta \mathbf{w}^k, D^\alpha \mathbf{w}^k)\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^{s} \int_{T_a^i} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta}^{0i} D^\beta \mathbf{w}^l, D^\alpha \mathbf{w}^l)\, dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

откуда, учитывая замечание на стр. 127, заключаем, что $\lim\limits_{s\to\infty} I_{12}^{(s)} = 0$. Таким образом, из (2.71) следует

$$\lim_{s\to\infty} I_1^{(s)} = \lim_{s\to\infty} I_{11}^{(s)} = \lim_{s\to\infty} \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{i=1}^{s} C^{kl}(F_i^{(s)})\, u_k u_l.$$

Наконец, используя условие b теоремы 2.6 и вспоминая, что в равенстве (2.70) $\lim\limits_{s\to\infty} I_{2,3,4}^{(s)} = 0$, находим

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{s} \| B_i^{(s)} \mathbf{u} \|^2 = \Phi(\mathbf{u}) = \int_\Omega (c\mathbf{u}, \mathbf{u})\, dx.$$

Равенство (2.26), а следовательно, и условие 3 установлены, причем найден вид функционала $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Таким образом, теорема 2.6 доказана.

Поверхностное распределение множеств $F^{(s)}$

Рассмотрим теперь случай, когда множества $F_i^{(s)}$ при $s \to \infty$ приближаются к гладкой фиксированной поверхности $\Gamma \subset \Omega$. Найдем достаточные условия, при которых последовательность решений краевых задач (2.18), (2.19) сходится к пределу, и опишем этот предел. Введем такие обозначения: γ — произвольный кусок поверхности Γ, $\sum\limits_{(\gamma)}$ — суммирование по множествам $F_i^{(s)}$, проекции которых на Γ лежат в γ, $T_\rho^{(s)}$ — слой толщины $\rho^{(s)}$ со срединной поверхностью Γ.

Пусть при $s \to \infty$ выполняются такие условия:

a) $\lim\limits_{s\to\infty}\{\max\limits_i d_i^{(s)}\} = \lim\limits_{s\to\infty}\{\max\limits_i r_i^{(s)}\} = 0;$

b) все множества $F_i^{(s)}$ попадают в слой $T_{\rho^{(s)}}$ толщины $\rho^{(s)} = C\max\limits_i r_i^{(s)}$ $\quad(0 < C < \infty)$;

c) для любого куска $\gamma \subset \Gamma$ существует предел

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{(\gamma)} C(F_i^{(s)}) = \int_\gamma c_\Gamma(x)\,d\Gamma,$$

где $c_\Gamma(x) = \|c_\Gamma^{kl}(x)\|_{1\leqslant k,l\leqslant N}$ — непрерывная матрица на Γ;

d) при $n > 2m$ $r_i^{(s)} > c_1 d_i^{(s)}$ и для любого куска $\gamma \subset \Gamma$

$$\varlimsup_{s\to\infty}\rho^{(s)}\sum_{(\gamma)}\frac{\left(d_i^{(s)}\right)^{2(n-2m)}}{\left(r_i^{(s)}\right)^n} < C_2\,\mathrm{mes}_\Gamma\gamma,$$

а при $n = 2m$

$$\varlimsup_{s\to\infty}\rho^{(s)}\sum_{(\gamma)}\frac{|\ln d_i^{(s)}|^{-2}}{\left(r_i^{(s)}\right)^n} < C_2\,\mathrm{mes}_\Gamma\gamma.$$

Покажем, что при этом выполняются условия теоремы 2.5, причем

$$\Phi(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \int_\Gamma (c_\Gamma\mathbf{u},\ \mathbf{v})\,d\Gamma. \tag{2.72}$$

Как и раньше, определим операторы $B_i^{(s)}$ по формуле (2.57). Тогда проверка условий этой теоремы проводится точно так же, как при объемном распределении $F_i^{(s)}$. При этом следует учитывать, что в силу условия b $\sum\limits_{i=1}^s (r_i^{(s)})^n < A\rho^{(s)}$, где постоянная A не зависит от s. Более подробного объяснения требует лишь оценка суммы $\sum\limits_{i=1}^s I_3^{(i,s)}$ в (2.64).

Пусть $n > 2m$. Учитывая (2.66) и (2.68), записываем

$$\left|\sum_{i=1}^s I_3^{(i,s)}\right| \leqslant A\left\{\sum_{k=1}^N\sum_{i=1}^s\frac{p^2(d_i^{(s)})}{(r_i^{(s)})^n}(\bar{u}_k^{(i)})^2\right\}^{\frac12}\left\{\sum_{i=1}^s\int_{\Omega_{2i}^{(s)}}\|\mathbf{z}^{(s)}\|^2\,dx\right\}^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant A\left\{\sum_{k=1}^N\rho^{(s)}\sum_{i=1}^s\frac{p^2(d_i^{(s)})}{\left(r_i^{(s)}\right)^n}(\bar{u}_k^{(i)})^2\right\}^{\frac12}\left\{\frac{1}{\rho^{(s)}}\int_{T_{\rho^{(s)}}}\|\mathbf{z}^{(s)}\|^2\,dx\right\}^{\frac12}, \tag{2.73}$$

где $\bar{u}_k^{(i)}$ — значение функции $u_k(x)$ в некоторой точке $\bar{x}^{(i)} \in \Omega_{2i}^{(s)}$, $A = \mathrm{const}$.

В силу гладкости вектор-функции $\mathbf{u}(x)$, условий a и d, теоремы вложения и неравенства (2.12) оценка первого сомножителя в (2.73) имеет вид

$$\varlimsup_{s\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^N\rho^{(s)}\sum_{i=1}^s\frac{p^2(d_i^{(s)})}{(r_i^{(s)})^n}(\bar{u}_k^{(i)})^2\right\}^{\frac12} \leqslant A_1\left\{\int_\Gamma\|\mathbf{u}\|^2\,d\Gamma\right\}^{\frac12} \leqslant A\|\mathbf{u}\|_L. \tag{2.74}$$

Второй сомножитель можно оценить с помощью следующей леммы.

Лемма 2.4. *Пусть $T_{\rho^{(s)}}$ — слой толщины $\rho^{(s)}$ со срединной поверхностью Γ, причем $\rho^{(s)} \to 0$ при $s \to \infty$. Пусть последовательность функций $z^{(s)}(x) \in W_2^1(\Omega)$ при $s \to \infty$ в пространстве $W_2^1(\Omega)$ слабо сходится к функции $z(x)$. Тогда выполняется равенство*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{\rho^{(s)}} \int\limits_{T_{\rho^{(s)}}} |z^{(s)}|^2 dx = \int\limits_{\Gamma} |z|^2 d\Gamma.$$

Доказательство. Обозначим через Γ_t поверхность, параллельную Γ и находящуюся от нее на расстоянии $|t|$. Согласно (2.2)

$$\int\limits_{\Gamma_t} |z^{(s)}|^2 d\Gamma_t = \int\limits_{\Gamma} |z^{(s)}|^2 d\Gamma + \varepsilon(t) \| z^{(s)} \|_{1,\Omega}^2,$$

где $\varepsilon(t) \to 0$ при $|t| \to 0$, $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ — норма в $W_2^1(\Omega)$. Поэтому

$$\int\limits_{T_{\rho^{(s)}}} |z^{(s)}|^2 dx = \int\limits_{-\frac{1}{2}\rho^{(s)}}^{\frac{1}{2}\rho^{(s)}} \left(\int\limits_{\Gamma_t} |z^{(s)}|^2 d\Gamma_t \right) dt = \rho^{(s)} \int\limits_{\Gamma} |z^{(s)}|^2 d\Gamma +$$

$$+ \| z^{(s)} \|_{1,\Omega}^2 \int\limits_{-\frac{1}{2}\rho^{(s)}}^{\frac{1}{2}\rho^{(s)}} \varepsilon(t)\, dt.$$

Отсюда в силу слабой сходимости последовательности $\{z^{(s)}(x)\}$ к $z(x)$ в $W_2^1(\Omega)$ и полной непрерывности оператора вложения из $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Gamma)$ следует утверждение леммы.

Воспользовавшись этой леммой и теоремой вложения при оценке второго сомножителя в (2.73) и учитывая (2.74), получаем требуемое неравенство (2.69) при $n > 2m$. При $n = 2m$ оценка $I_3^{(s)}$ проводится с теми же изменениями, что и при объемном распределении, и с учетом леммы 2.4.

Таким образом, все условия теоремы 2.5 выполняются, причем справедливо равенство (2.72). Согласно этой теореме последовательность $\{\mathbf{u}^{(s)}(x)\}$ решений краевой задачи (2.18), (2.19) (продолженных на множество $F^{(s)}$ равенством $\mathbf{u}^{(s)}(x) = \psi(x)$) в пространстве $\mathring{W}_L(\Omega)$ (а значит, и в $\mathring{W}_2^m(\Omega)$) слабо сходится к вектор-функции $\mathbf{v} \in \mathring{W}_2^m(\Omega)$, на которой достигается минимум функционала

$$\Psi(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|_L^2 + \Phi(\psi - \mathbf{v}) =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{v},\ D^\alpha \mathbf{v})\, d \;+ \int\limits_{\Gamma} (c_\Gamma[\psi - \mathbf{v}],\ \psi - \mathbf{v})\, d\Gamma. \quad (2.75)$$

Так как при любом $l \leqslant m - 1$ оператор вложения из $W_2^m(\Omega)$ в $W_2^l(\Omega)$ вполне непрерывен, то $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ сходится к $\mathbf{v}(x)$ по норме

$W_2^l(\Omega)$ ($l \leqslant m-1$). На самом деле при поверхностном распределении множеств $F_i^{(s)}$ последовательность $\{\mathbf{u}^{(s)}(x)\}$ сходится к $\mathbf{v}(x)$ равномерно (вместе с производными до порядка k, допускаемого гладкостью $a_{\alpha\beta}(x)$ и $\psi(x)$) в любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$, находящейся на положительном расстоянии от Γ и $\partial\Omega$. Это легко показать, учитывая, что при достаточно больших s $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ удовлетворяет в Ω' уравнению (2.18), и воспользовавшись известной априорной оценкой типа Шаудера.

Рассмотрим в области $\Omega\setminus\Gamma$ задачу сопряжения

$$\left.\begin{aligned} &L\mathbf{u} \equiv \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u}) = 0, \qquad x \in \Omega\setminus\Gamma,\\ &\left[\frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial \nu^k}\right]_{-,\Gamma}^{+} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2m-2,\\ &\left[\frac{\partial^{2m-1}\mathbf{u}}{\partial \nu^{2m-1}}\right]_{-,\Gamma}^{+} = a^{-1} c_\Gamma (\mathbf{u} - \psi),\\ &D^\alpha \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \qquad |\alpha| \leqslant m-1, \end{aligned}\right\} \tag{2.76}$$

где $[\mathbf{v}]_{-,L}^{+} = \mathbf{v}^{+}|_\Gamma - \mathbf{v}^{-}|_\Gamma$ — разность предельных значений вектор-функций с разных сторон от поверхности Γ, $\frac{\partial}{\partial\nu}$ — производная по нормали ν к Γ, направленной в сторону, которой соответствует знак «+», a^{-1} — матрица, обратная матрице

$$a = (-1)^{m-1} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta} \cos^\alpha(\nu, x) \cos^\beta(\nu, x),$$

$$\cos^\alpha(\nu, x) = \prod_{i=1}^{n} \cos^{\alpha_i}(\nu, x_i).$$

Нетрудно проверить, что всякая вектор-функция $\mathbf{v}(x)$ из класса $C^m(\overline{\Omega}) \cap C^{2m-1}(\Omega) \cap C^{2m}(\Omega\setminus\Gamma)$, удовлетворяющая равенствам (2.76), т. е. являющаяся классическим решением задачи (2.76), принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{v}, D^\alpha \zeta)\, dx + \int_\Gamma (c_\Gamma [\mathbf{v} - \psi], \zeta)\, d\Gamma = 0 \tag{2.77}$$

для любой вектор-функции $\zeta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$. В то же время из условия (2.12) и положительности матрицы c_Γ следует, что существует не более одной вектор-функции из $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, удовлетворяющей этому тождеству (см. § 1). Если такая вектор-функция достаточно гладкая, то она удовлетворяет равенствам (2.76). Учитывая это, естественно назвать обобщенным решением задачи сопряжения (2.76) вектор-функцию из $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, удовлетворяющую в Ω тождеству (2.77). Отметим, что аналогичные обобщенные решения вводились в работе [17].

Выше было показано, что предел $\mathbf{v}(x)$ последовательности $\{\mathbf{u}^{(s)}(x)\}$ минимизирует функционал (2.75) в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$. Из условия минимума функционала (2.75) следует, что $\mathbf{v}(x)$ удовлетворяет в Ω тождеству (2.77), т. е. является обобщенным решением задачи (2.76). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.7. *Пусть при* $s \to \infty$ *выполняются условия* $a - d$. *Тогда последовательность решений краевой задачи* (2.18), (2.19) *сходится к обобщенному решению задачи* (2.45).

Непротиворечивость условий теорем 2.6, 2.7

Условие d теоремы 2.7 и соответственно условие c теоремы 2.6 требуют, чтобы множества $F_i^{(s)}$ располагались в среднем не очень близко друг к другу. Возникает вопрос о том, насколько это не противоречит соответственно условиям c и b. Покажем, что для определенного класса множеств $F_i^{(s)}$ эти условия совместны. Пусть $L = (-1)^m \Delta^m$, где Δ — оператор Лапласа, а $F_i^{(s)}$ — шары радиуса $b = b^{(s)}$ в R_n ($n \geqslant 2m$, $N = 1$). Тогда при малых b легко получить оценки

$$C''(F_i^{(s)}) = \begin{cases} C_{nm} b^{n-2m}(1 + o(1)), & n > 2m, \\ \omega_n |\ln b|^{-1}(1 + o(1)), & n = 2m, \end{cases} \tag{2.78}$$

где ω_n — площадь поверхности единичной сферы в R_n, а C_{nm} — постоянные, не зависящие от b (например, $C_{n1} = (n-2)\,\omega_n$, $C_{n2} = (n-2)^n (n-4)\,\omega_n$).

С помощью (2.78) можно оценить $C^{kl}(F_i^{(s)})$ и в более общих случаях. Рассмотрим множества $F_i^{(s)}$ в R_n диаметров $d_i^{(s)}$ такие, что в них вписываются шары радиусов $b_i^{(s)} \geqslant c d_i^{(s)}$, причем c больше нуля и не зависит от $d_i^{(s)}$. Тогда, учитывая (2.38) и (2.45), из (2.37) и (2.78) получаем

$$A_1 (d_i^{(s)})^{n-2m} \delta_{kl} | \leqslant C^{kl}(F_i^{(s)}) | \leqslant A_2 (d_i^{(s)})^{n-2m}, \qquad n > 2m,$$

$$A_1 |\ln d_i^{(s)}|^{-1} \delta_{kl} \leqslant |C^{kl}(F_i^{(s)})| \leqslant A_2 |\ln d_i^{(s)}|^{-1}, \qquad n = 2m,$$

где δ_{kl} — символ Кронекера, а постоянные $A_{1,2}$ больше нуля и не зависят от $d_i^{(s)}$. Эти оценки показывают, что условия теорем 2.6 и 2.7 не противоречивы. С помощью их легко строятся примеры, когда все эти условия выполняются. Вместе с тем очевидно, что они независимы.

§ 4. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ПОВЕРХНОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МНОЖЕСТВ $F^{(s)}$

Рассмотрим в области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)} \subset R_n$ первую краевую задачу

$$Lu^{(s)} \equiv \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} (a_{\alpha\beta} D^{\beta} \mathbf{u}^{(s)}) = \mathbf{f}, \tag{2.79}$$

$$D^{\alpha} \mathbf{u}^{(s)} \Big|_{\partial\Omega^{(s)}} = 0, \qquad |\alpha| \leqslant m - 1, \tag{2.80}$$

где $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x) \in L_2(\Omega)$, а граничное условие (2.80) при произвольных $F^{(s)}$ понимается в обобщенном смысле: $\mathbf{u}^{(s)} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega^{(s)})$. Предположим, что оператор L удовлетворяет условию (2.12) и более сильному условию эллиптичности, чем (2.11):

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| = m} (a_{\alpha\beta} \mathbf{t}_{\beta}, \mathbf{t}_{\alpha}) \geqslant \mu_0 \sum_{|\alpha| = m} \| \mathbf{t}_{\alpha} \|^2, \tag{2.81}$$

где $\{\mathbf{t}_{\alpha}\} = \{\mathbf{t}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}\}$ — произвольная система векторов в R_N, симметричная относительно перестановок индексов α_i, $\mu_0 > 0$ не зависит от $\{\mathbf{t}_{\alpha}\}$ и $x \in \Omega$.

Пусть при $s \to \infty$ множества $F^{(s)}$ попадают в сколь угодно малую окрестность фиксированной поверхности $\Gamma \subset \Omega$. Покажем, что тогда при определенных условиях последовательность решений краевой задачи (2.79), (2.80) в областях $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)}$ сходится к решению одной из следующих задач сопряжения:

$$\left.\begin{aligned}
&L\mathbf{u} = \mathbf{f}, \qquad x \in \Omega \setminus \Gamma, \\
&\frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial \nu^k} \Big|_{\Gamma} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, p-1, \\
&\left[\frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial \nu^k}\right]^{+}_{-,\Gamma} = 0, \qquad k = p, p+1, \ldots, 2m-p-2, \\
&\left[\frac{\partial^{2m-p-1} \mathbf{u}}{\partial \nu^{2m-p-1}}\right]^{+}_{-,\Gamma} = (-1)^p a^{-1} c_p \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial \nu^p}, \\
&D^{\alpha} \mathbf{u} |_{\partial\Omega} = 0, \quad |\alpha| \leqslant m - 1,
\end{aligned}\right\} \qquad (A_p)$$

где $[\mathbf{v}]^{+}_{-,\Gamma}$, $\frac{\partial}{\partial \nu}$, a^{-1} те же, что в § 3, $c_p(x)$ — непрерывная, положительно определенная матрица на Γ, характеризующая в определенном смысле массивность множеств $F^{(s)}$. Параметр p может принимать значения от нуля до m, причем, чем массивнее последовательность $\{F^{(s)}\}$, тем большее значение он принимает. Соответствующую задачу сопряжения обозначим через (A_p). Одна из таких задач — (A_0) — рассмотрена в § 3.

Введем понятие обобщенного решения задачи (A_p). Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega,\ \Gamma)$ подпространство вектор-функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, у которых все обобщенные производные до порядка $p-1$ включительно равны нулю на Γ (в смысле L_2).

Назовем обобщенным решением задачи (A_p) вектор-функцию $\mathbf{u}(x)$, принадлежащую $\overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega,\ \Gamma)$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}(a_{\alpha\beta}D^{\beta}\mathbf{u},\ D^{\alpha}\zeta)-(\mathbf{f},\ \zeta)\right\}dx+\int\limits_{\Gamma}\left(c_p\frac{\partial^p\mathbf{u}}{\partial\nu^p},\ \frac{\partial^p\zeta}{\partial\nu^p}\right)d\Gamma=0 \quad (A_p')$$

для любой вектор-функции $\zeta(x)$ из подпространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega,\ \Gamma)$. С помощью интегрирования по частям нетрудно проверить, что классическое решение задачи (A_p) является обобщенным и, наоборот, всякое обобщенное решение, если оно достаточно гладко, удовлетворяет всем равенствам в (A_p). В то же время в силу положительности матрицы c_p и условия (2.12) существует не более одного обобщенного решения задачи (A_p). Мы будем пользоваться в основном понятием обобщенного решения задачи (A_p). Классическая разрешимость задач типа (A_p) исследовалась в работах [65, 66].

Введем характеристику массивности множеств $F^{(s)}$. Пусть γ — произвольный кусок поверхности Γ, ограниченный конечным числом гладких подмногообразий Γ, размерности $n-2$. Через все точки γ проведем нормали к Γ длины δ в разные стороны от Γ. При достаточно малых δ эти нормали не пересекаются и концы их образуют гладкие поверхности γ_δ^+, γ_δ^-. Подобласть в R_n, заполненную указанными отрезками нормалей (слой толщины 2δ со срединной поверхностью γ), обозначим через $T(\gamma,\ \delta)$. Рассмотрим в $T(\gamma,\ \delta)$ множество m раз непрерывно дифференцируемых вектор-функций, равных нулю в некоторой окрестности $F^{(s)}$, а на поверхностях $\gamma_\delta^\pm$ удовлетворяющих условиям

$$\left.\frac{\partial^j\mathbf{u}}{\partial\nu^j}\right|_{\gamma_\delta^\pm}=\begin{cases}\dfrac{(\pm\delta)^{p-j}}{(p-j)!}\,\mathbf{e}^k, & j=0,\ 1,\ \ldots,\ p,\\ \quad 0\quad, & j=p+1,\ \ldots,\ m-1,\end{cases} \tag{2.82}$$

где $\mathbf{e}^k$ — вектор в R_N, у которого k-я компонента равна единице, а остальные—нулю (орт k-й оси в R_N), $\frac{\partial}{\partial\nu}$ — производная по нормали к Γ, направленной в сторону, отмеченную знаком «+». Замыкание этого множества вектор-функций в норме $W_2^m(T(\gamma,\ \delta))$ обозначим через $W_p^k(\gamma,\ \delta,\ s)$.

Для характеристики массивности множеств $F^{(s)}$ (в области $T(\gamma,\ \delta)$) введем систему чисел $C_p^{kl}(\gamma,\ \delta,\ s)$ $(k,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$. Обозначим через $\mathbf{v}_p^k=\mathbf{v}_p^{k(s)}(x)$ вектор-функцию из класса

$W_p^k(\gamma, \delta, s)$, удовлетворяющую в $T(\gamma, \delta)$ интегральному тождеству

$$\int\limits_{T(\gamma,\delta)} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{v}_p^k, D^\alpha \zeta)\, dx = 0, \tag{2.83}$$

где $\zeta(x)$ — произвольная вектор-функция, принадлежащая замыканию по норме $W_2^m(T(\gamma, \delta))$ множества m раз непрерывно дифференцируемых в $T(\gamma, \delta)$ вектор-функций, равных нулю в некоторых окрестностях $F^{(s)}$ и $\gamma_\delta^+ \cup \gamma_\delta^-$. Учитывая (2.81), обычным способом можно показать, что такая вектор-функция $\mathbf{v}_p^k$ существует и единственна, причем в классе $W_p^k(\gamma, \delta, s)$ она минимизирует функционал $\Phi(\mathbf{u}^{(s)}, \mathbf{u}^{(s)})$, где

$$\Phi(\mathbf{u}^{(s)}, \mathbf{v}^{(s)}) = \int\limits_{T(\gamma,\delta)} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u}^{(s)}, D^\alpha \mathbf{v}^{(s)})\, dx. \tag{2.84}$$

Положим

$$C_p^{kl}(\gamma, \delta, s) = \Phi(\mathbf{v}_p^{k(s)}, \mathbf{v}_p^{l(s)}), \qquad 1 \leqslant k, l \leqslant N. \tag{2.85}$$

Нетрудно проверить, что система чисел $C_p^{kl}(\gamma, \delta, s)$ $(1 \leqslant k, l \leqslant N)$ задает в пространстве R_N контравариантный тензор $C_p(\gamma, \delta, s) = \| C_p^{kl}(\gamma, \delta, s) \|$ первого ранга, симметричный по k, l. В силу (2.81) его матрица положительно определена.

Непосредственно из определения (2.85) и свойств вектор-функций $\mathbf{v}_p^{k(s)}(x)$ вытекают равенства

$$\left.\begin{aligned} C_p^{kk}(\gamma, \delta, s) &= \inf \Phi(\mathbf{v}^{(s)}, \mathbf{v}^{(s)}), \\ C_p^{kl}(\gamma, \delta, s) &= \operatorname{st} \Phi(\mathbf{v}^{(s)}, \mathbf{u}^{(s)}), \end{aligned}\right\} \tag{2.85'}$$

где inf берется в классе $W_p^k(\gamma, \delta, s)$, а стационарное значение st — в классе $W_p^{kl} = W_p^k(\gamma, \delta, s) \times W_p^l(\gamma, \delta, s)$. Первое из этих равенств часто будет использоваться в дальнейшем. Из него, в частности, вытекают такие свойства диагональных элементов матрицы $C_p(\gamma, \delta, s)$:

1) $C_p^{kk}(\gamma', \delta, s) \leqslant C_p^{kk}(\gamma'', \delta, s)$, если $\gamma' \subseteq \gamma''$,

2) $C_p^{kk}(\gamma, \delta, s_1) \leqslant C_p^{kk}(\gamma, \delta, s_2)$, если $F^{(s_1)} \cap T(\gamma, \delta) \subseteq F^{(s_2)} \cap T(\gamma, \delta)$.

Из последнего неравенства видно, что величины $C_p^{kk}(\gamma, \delta, s)$ в определенном смысле характеризуют массивность множества $F^{(s)}$ в $T(\gamma, \delta)$. Как будет показано ниже, при малых δ выполняется неравенство

3) $C_{p+1}^{kk}(\gamma, \delta, s) \leqslant A\delta (C_p^{kk}(\gamma, \delta, s) + \mathrm{mes}_\Gamma \gamma)$, в силу которого можно считать, что $C_p^{kk}(\gamma, \delta, s)$ является более грубой характеристикой, чем $C_{p+1}^{kk}(\gamma, \delta, s)$.

Можно показать, что если множество $F^{(s)}$ состоит из непересекающихся компонент $F_i^{(s)}$, удовлетворяющих условиям теоремы 2.7, то $\sum\limits_{(\gamma)} C^{kl}(F_i^{(s)}) \sim C_0(\gamma, \delta, s)$ $\qquad (s \to \infty, \ \delta \to 0)$.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 2.8. *Пусть при $s \to \infty$ выполняются такие условия:*

a) множество $F^{(s)}$ приближается к Γ так, что при достаточно больших s оно попадает в сколь угодно малую окрестность Γ и расстояние от любой точки $x \in \Gamma$ до $F^{(s)}$ стремится к нулю;

b) для любого куска $\gamma \subset \Gamma$ существуют пределы

$$\lim_{\delta\to 0} \varliminf_{s\to\infty} C_p(\gamma, \delta, s) = \lim_{\delta\to 0} \varlimsup_{s\to\infty} C_p(\gamma, \delta, s) = \int_\gamma c_p d\Gamma,$$

где $c_p = c_p(x)$ — неотрицательная матрица на Γ с ограниченными элементами[2];

c) если $n \geqslant 2(m - p + 1)$, то матрица c_p должна быть положительно определенной всюду на Γ.

При этих условиях последовательность $\{\mathbf{u}^{(s)}(x), s = 1, 2, \ldots\}$ решений краевой задачи (2.79), (2.80) (продолженных нулем на множество $F^{(s)}$) сходится по норме $W_2^{m-1}(\Omega)$ к обобщенному решению задачи (A_p), причем на любом множестве $G \subset \Omega$, находящемся на положительном расстоянии от $\Gamma \cup \partial\Omega$, сходимость равномерна вместе с производными, допускаемыми гладкостью коэффициентов оператора L.

Доказательство. Доказательство этой теоремы состоит из двух частей. Предположим для простоты, что Γ не имеет края и разбивает область Ω на две подобласти: Ω^+ — внутреннюю относительно Γ и Ω^- — внешнюю. В общем случае доказательство проводится аналогично с очевидными изменениями.

1. Пусть $\mathbf{u}(x)$ — произвольная вектор-функция из подпространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma)$, $W(\mathbf{u}, \delta, s)$ — замыкание по норме $W_2^m(T(\Gamma, \delta))$ множества вектор-функций $\mathbf{v}(x) \in W_2^m(T(\Gamma, \delta))$, равных нулю в некоторой окрестности множества $F^{(s)}$ и удовлетворяющих на поверхностях Γ_δ^+ и Γ_δ^- условиям

$$\left.\frac{\partial^k \mathbf{v}}{\partial \nu^k}\right|_{\Gamma_\delta^\pm} = \left.\frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial \nu^k}\right|_{\Gamma_\delta^\pm}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.86}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по нормали к Γ, а равенства понимаются, вообще говоря, в смысле $L_2(\Gamma_\delta^\pm)$, $\Gamma_\delta^\pm$ — поверхности, ограничивающие слой $T(\Gamma, \delta)$ и лежащие соответственно в областях Ω^+ и Ω^-. При этом предполагается, что $F^{(s)} \subset T(\Gamma, \delta)$.

Замечание. Если поверхность Γ имеет край, то класс вектор-функций $W(\mathbf{u}, \delta, s)$ следует рассматривать в слое $T(\Gamma_1, \delta)$ $(\Gamma \subset \Gamma_1)$, а (2.86) заменить условием $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(T(\Gamma_1, \delta))$.

[2] Если поверхность Γ имеет край, то условие b должно выполняться также для кусков $\gamma \subset \Gamma_1$, немного выходящих за пределы Γ; при этом $c_p(x) \equiv 0$ на $\Gamma_1 \setminus \Gamma$.

На подпространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma)$ рассмотрим функционал

$$\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}} \int\limits_{T(\Gamma,\delta)} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}, D^\alpha \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)})\, dx, \tag{2.87}$$

где inf берется по множеству вектор-функций $\mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}$ из класса $W(\mathbf{u}, \delta, s)$.

Теорема 2.9. *Если выполняются условия a и b теоремы* 2.8, *то для любой вектор-функции* $\mathbf{u}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma)$ *выполняются равенства*

$$\lim_{\delta\to 0} \underline{\lim}_{s\to\infty} \Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u}) = \lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{s\to\infty}} \Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u}) = \int\limits_\Gamma \left(c_p \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial \nu^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial \nu^p} \right) d\Gamma,$$

где $c_p = c_p(x)$ — *матрица из условия b.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{M}^p(\Gamma)$ множество $2m$ раз непрерывно дифференцируемых и финитных в Ω вектор-функций, удовлетворяющих условиям $\left.\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}\right|_\Gamma = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, p-1$. В силу гладкости Γ множество $\mathfrak{M}^p(\Gamma)$ плотно в подпространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ (см. лемму 2.1).

Докажем теорему сначала для вектор-функций $\mathbf{u}(x)$ из $\mathfrak{M}^p(\Gamma)$. Разобьем поверхность Γ на части γ_i, ограниченные конечным числом гладких многообразий размерности $n-2$ ($\Gamma = \bigcup\limits_i \gamma_i$). Пусть $\mathbf{u}(x) \in \mathfrak{M}^p(\Gamma)$, а $\mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}(x)$ — вектор-функция из класса $W(\mathbf{u}, \delta, s)$, на которой достигается минимум в (2.87). Тогда

$$\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u}) = \sum_i \int\limits_{T(\gamma_i,\delta)} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}, D^\alpha \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)})\, dx. \tag{2.88}$$

Введем в области $T(\gamma_i, \delta)$ криволинейные координаты $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ такие, чтобы поверхность Γ задавалась уравнением $t_n = 0$, а ось t_n была направлена по нормали ν к Γ в сторону Ω^+, причем $|t_n|$ — расстояние от точки x до Γ. Тогда, учитывая гладкость поверхности Γ, вектор-функцию $\mathbf{u}(x) \in \mathfrak{M}^p(\Gamma)$ в любой из областей $T(\gamma_i, \delta)$ можно представить в виде

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{r=p}^{m-1} \frac{\partial^r \mathbf{u}}{\partial \nu^r}(\bar{x}) \frac{t_n^r}{r!} + \overset{\circ}{\mathbf{u}}(x), \tag{2.89}$$

где $\bar{x} = \{t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, 0\} \in \Gamma$, а вектор-функции $\frac{\partial^r \mathbf{u}}{\partial \nu^r}(\bar{x})$ ($r = p, \ldots, m-1$) и $\overset{\circ}{\mathbf{u}}(x)$ по крайней мере m раз непрерывно дифференцируемы, причем справедливы оценки

$$\| D^\alpha \overset{\circ}{\mathbf{u}}(x) \| = O(\delta^{m-|\alpha|}), \qquad x \in T(\gamma_i, \delta), \quad |\alpha| \leqslant m. \tag{2.89'}$$

Пусть $\left\|\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial \nu^p}(\bar{x})\right\| \geqslant q_i > 0$ при $\bar{x} \in \gamma_i$. Рассмотрим в области $T(\gamma_i, \delta)$ вектор-функцию

$$\mathbf{u}_p^{(s)}(x) = \left\|\frac{\partial^p \mathbf{u}(\bar{x})}{\partial \nu^p}\right\|^{-1} \left\{\mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}(x) - \sum_{r=p}^{m-1} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^r u_k}{\partial \nu^r}(\bar{x}) \mathbf{v}_r^k(x) - \right.$$

$$\left. - \mathring{\mathbf{u}}(x) \chi\left(\frac{t_n}{\delta}\right)\right\} + \left\|\frac{\partial^p \mathbf{u}(\bar{x}^i)}{\partial \nu^p}\right\|^{-1} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^p u_k(\bar{x}^i)}{\partial \nu^p} \mathbf{v}_p^k(x), \qquad (2.90)$$

где $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю при $|t| \leqslant \frac{1}{2}$ и единице при $|t| \geqslant 1$; $\mathbf{v}_r^k(x) = \mathbf{v}_r^{k(i,s)}(x)$ — вектор-функция из класса $W_r^k(\gamma_i, \delta, s)$, минимизирующая функционал $\Phi(\mathbf{v}^{(s)}, \mathbf{v}^{(s)})$ (2.84); $\bar{x}^i$ — произвольная фиксированная точка на γ_i. В силу (2.89), (2.82) и (2.86) при $x \in \gamma_{i\delta}^{\pm}$ $(t_n = \pm\delta)$

$$\frac{\partial^j \mathbf{u}_p^{(s)}}{\partial \nu^j} = \left\|\frac{\partial^p \mathbf{u}(\bar{x})}{\partial \nu^p}\right\|^{-1} \left\{\frac{\partial^j \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}}{\partial \nu^j} - \sum_{r=p}^{m-1} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^r u_k(\bar{x})}{\partial \nu^r} \frac{\partial^j \mathbf{v}_r^k}{\partial \nu^j} - \frac{\partial^j \mathring{\mathbf{u}}}{\partial \nu^j}\right\} +$$

$$+ \left\|\frac{\partial^p \mathbf{u}(\bar{x}^i)}{\partial \nu^p}\right\|^{-1} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^p u_k(\bar{x}^i)}{\partial \nu^p} \frac{\partial^j \mathbf{v}_p^k}{\partial \nu^j} = \begin{cases} \dfrac{(\pm\delta)^{p-j}}{(p-j)!} \mathbf{e}(\bar{x}^i), & j = 1, 2, \ldots, p, \\ 0, & j = p+1, \ldots, m-1, \end{cases} \qquad (2.91)$$

где $\mathbf{e}(\bar{x}^i) = \left\|\frac{\partial^p \mathbf{u}(\bar{x}^i)}{\partial \nu^p}\right\|^{-1} \frac{\partial^p \mathbf{u}(\bar{x}^i)}{\partial \nu^p}$ — единичный вектор в R_N. Введем в пространстве R_N новый ортонормированный базис $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_N\}$, выбрав орт $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}(\bar{x}^i)$. Тогда из (2.90) и (2.91) вытекает, что $\mathbf{u}_p^{(s)} = \tilde{\mathbf{u}}_p^{(s)} \in \tilde{W}_p^1(\gamma_i, \delta, s)$, и, следовательно, в силу (2.85′)

$$\int\limits_{T(\gamma_i, \delta)} \sum_{|\alpha|, |\beta| = m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u}_p^{(s)}, D^\alpha \mathbf{u}_p^{(s)})\, dx =$$

$$= \int\limits_{T(\gamma_i, \delta)} \sum_{|\alpha|, |\beta| = m} (\tilde{a}_{\alpha\beta} D^\beta \tilde{\mathbf{u}}_p^{(s)}, D^\alpha \tilde{\mathbf{u}}_p^{(s)})\, dx \geqslant \tilde{C}_p^{11}(\gamma_i, \delta, s) \qquad (2.92)$$

(здесь и далее буквами со знаком «∼» обозначаются векторы и тензоры в R_N и класс вектор-функций $W_p^k(\gamma_i, \delta, s)$ в новом базисе). Используя равенство (2.90), представим производные $D^\alpha \mathbf{u}_p^{(s)}$ $(\alpha \leqslant m)$ в виде

$$D^\alpha \mathbf{u}_p^{(s)}(x) = \left\|\frac{\partial^p \mathbf{u}(\bar{x})}{\partial \nu^p}\right\|^{-1} D^\alpha \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}(x) + \sum_{|\beta| < |\alpha|} c_{\alpha\beta}(\bar{x}) D^\beta \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)} -$$

$$- \sum_{r=p+1}^{m-1} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} c_{\alpha\beta}^{rk}(\bar{x}) D^{\beta} \mathbf{v}_r^k - \sum_{\substack{|\beta| \leqslant \alpha \\ |\beta'| \leqslant |\beta|}} c_{\alpha\beta\beta'}(\bar{x}) D^{\alpha-\beta} \chi\left(\frac{t_n}{\delta}\right) D^{\beta'} \mathring{\mathbf{u}} -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} \Delta_{ik}(\bar{x}) D^{\alpha} \mathbf{v}_p^k - \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\beta| < |\alpha|} c_{\alpha\beta}^{k}(\bar{x}) D^{\beta} \mathbf{v}_p^k,$$

где $\Delta_{ik}(\bar{x}) = \left\| \frac{\partial^p \mathbf{u}(\bar{x})}{\partial \nu^p} \right\|^{-1} \frac{\partial^p u_k(\bar{x})}{\partial \nu^p} - \left\| \frac{\partial^p \mathbf{u}(\bar{x}^i)}{\partial \nu^p} \right\|^{-1} \frac{\partial^p u_k(\bar{x}^i)}{\partial \nu^p}$, а функции $c_{\alpha\beta}(\bar{x})$, $c_{\alpha\beta}^{k}(\bar{x})$, $c_{\alpha\beta}^{rk}(\bar{x})$ и $c_{\alpha\beta\beta'}(\bar{x})$ ограничены и выражаются через компоненты вектор-функции $\mathbf{u}(x)$ и их производные до порядка $|\alpha| + p \leqslant 2m$. Заметим, что максимум модуля их растет при уменьшении $\inf\limits_{\gamma_i} \left\| \frac{\partial^p \mathbf{u}(\bar{x})}{\partial \nu^p} \right\| = q_i > 0$. Отсюда, учитывая свойства функции $\chi(t)$ и оценки (2.89′), с помощью неравенства Коши — Буняковского получаем

$$\int\limits_{T(\gamma_i,\,\delta)} \sum_{|\alpha|, |\beta| = m} (a_{\alpha\beta} D^{\beta} \mathbf{u}_p^{(s)}, D^{\alpha} \mathbf{u}_p^{(s)})\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{T(\gamma_i,\,\delta)} \left\| \frac{\partial^p \mathbf{u}(\bar{x})}{\partial \nu^p} \right\|^{-2} \sum_{|\alpha|, |\beta| = m} (a_{\alpha\beta} D^{\beta} \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}, D^{\alpha} \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)})\, dx + A_i S(\gamma_i, \delta, s, \mathbf{u}) +$$

$$+ B \left\{ \frac{\Delta_i}{q_i} \| \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)} \|_{m, \gamma_i} \sum_{k=1}^{N} \| \mathbf{v}_p^k \|_{m, \gamma_i} + \Delta_i^2 \sum_{k=1}^{N} \| \mathbf{v}_p^k \|_{m, \gamma_i} \right\}, \qquad (2.93)$$

где постоянные A_i не зависят от s и δ, но зависят от q_i; B не зависит от s, δ и q_i; $\Delta_i = \max\limits_{k} \max\limits_{\bar{\gamma}_i} |\Delta_{ik}(\bar{x})|$; $\| \quad \|_{l, \gamma}$ — норма вектор-функций в пространстве $W_2^l(T(\gamma, \delta))$, а числа $S(\gamma, \delta, s, \mathbf{u})$ определяются выражением

$$S(\gamma, \delta, s, \mathbf{u}) = \left(\| \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)} \|_{m, \gamma} + \sum_{k=1}^{N} \| \mathbf{v}_p^k \|_{m, \gamma} \right) \left(\| \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)} \|_{m-1, \gamma} + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=p+1}^{m-1} \sum_{k=1}^{N} \| \mathbf{v}_r^k \|_{m, \gamma} + \sum_{k=1}^{N} \| \mathbf{v}_p^k \|_{m-1, \gamma} + \operatorname{mes}^{\frac{1}{2}} T(\gamma, \delta) \right) +$$

$$+ \sum_{r=p+1}^{m-1} \sum_{k=1}^{N} \| \mathbf{v}_r^k \|_{m, \gamma}^2 + \sum_{k=1}^{N} \| \mathbf{v}_p^k \|_{m-1, \gamma}^2 + \operatorname{mes} T(\gamma, \delta). \qquad \mathbf{(2.93')}$$

Поскольку в новом базисе $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_N\}$ вектор $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial \nu^p}(\bar{x}^i)$ имеет только первую отличную от нуля компоненту, справедливы равенства

$$\left| \frac{\partial^p \tilde{u}_1}{\partial \nu^p}(\bar{x}^i) \right| = \left\| \frac{\partial^p \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \nu^p}(\bar{x}^i) \right\| = \left\| \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial \nu^p}(\bar{x}^i) \right\|,$$

$$\widetilde{C}_p^{11}(\gamma_i,\delta,s)\left|\frac{\partial^p\widetilde{\mathbf{u}}}{\partial\nu^p}(\bar{x}^i)\right|^2=\sum_{k,l=1}^{N}\widetilde{C}_p^{kl}(\gamma_i,\delta,s)\frac{\partial^p\widetilde{u}_l}{\partial\nu^p}(\bar{x}^i)\frac{\partial^p\widetilde{u}_k}{\partial\nu^p}(\bar{x}^i)=$$

$$=\sum_{k,l=1}^{N}C_p^{kl}(\gamma_i,\delta,s)\frac{\partial^p u_l}{\partial\nu^p}(\bar{x}^i)\frac{\partial^p u_k}{\partial\nu^p}(\bar{x}^i).$$

Учитывая их, из (2.88), (2.92), (2.93) и (2.81) выводим

$$\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u})+B\sum_i\left\{\Delta_i\|\mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}\|_{m,\gamma_i}\sum_{k=1}^{N}\|\mathbf{v}_p^k\|_{m,\gamma_i}+\Delta_i^2q_i^2\sum_{k=1}^{N}\|\mathbf{v}_p^k\|_{m,\gamma_i}^2\right\}+$$

$$+\sum_i{}' A_iq_i^2S(\gamma_i,\delta,s,\mathbf{u})\geqslant\sum_i\sum_{kl=1}^{N}C_p^{kl}(\gamma_i,\delta,s)\frac{\partial^p u_l}{\partial\nu^p}(\bar{x}^i)\frac{\partial^p u_k}{\partial\nu^p}(\bar{x}^i)-$$

$$-\sum_i\widetilde{C}_p^{11}(\gamma_i,\delta,s)\left(\left|\frac{\partial^p\widetilde{u}_1}{\partial\nu^p}(\bar{x}^i)\right|^2-q_i^2\right)\qquad(2.94)$$

(сумма $\sum_i{}'$ распространяется только на те γ_i, для которых определены $A_i<\infty$, т. е. на те γ_i, где $q_i=\inf\limits_{\gamma_i}\left\|\frac{\partial^p\mathbf{u}}{\partial\nu^p}\right\|>0$).

Для дальнейшего нам необходимо доказать два вспомогательных предложения.

Лемма 2.5. *Для любой функции $u(x)$ из пространства $W_2^m(T(\gamma,\delta))$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{T(\gamma,\delta)}|D^\alpha u|^2dx\leqslant A\left\{\sum_{k=0}^{m-|\alpha|-1}\delta^{1+2k}\int\limits_{\gamma_\delta}\left|\frac{\partial^k}{\partial t_n^k}D^\alpha u\right|^2d\Gamma+\right.$$

$$\left.+\delta^{2(m-|\alpha|)}\int\limits_{T(\gamma,\delta)}\left|\frac{\partial^{m-|\alpha|}}{\partial t_n^{m-|\alpha|}}D^\alpha u\right|^2dx\right\},\qquad(2.95)$$

где $|\alpha|\leqslant m$, γ — произвольный кусок поверхности Γ, $\gamma_\delta=\gamma_\delta^+$ или γ_δ^-, постоянная A не зависит от $u(x)$, γ и δ.

Доказательство. В силу гладкости Γ, очевидно, достаточно установить это неравенство для плоского слоя $T(\gamma,\delta)$. Последнее аналогично выводу неравенства (2.56) (см. § 3).

Лемма 2.6. *Пусть $\mathbf{v}_{r+1}^k(x)=\mathbf{v}_{r+1}^{k(s)}(x)$ — вектор-функция из класса $W_{r+1}^k(\gamma,\delta,s)$, на которой достигается минимум функционала $\Phi(\mathbf{v}^{(s)},\mathbf{v}^{(s)})$ (2.84). Тогда для любого α ($|\alpha|\leqslant m$) справедливо неравенство*

$$\int\limits_{T(\gamma,\delta)}|D^\alpha\mathbf{v}_{r+1}^k|^2dx\leqslant A\delta\,[C_r^{kk}(\gamma,\delta,s)+\operatorname{mes}_\Gamma\gamma]\qquad(A=\text{const}).$$

Доказательство. Пусть вектор-функция $\mathbf{v}_r^k(x)$ минимизирует функционал $\Phi(\mathbf{v}^{(s)},\mathbf{v}^{(s)})$ (2.84) в классе $W_r^k(\gamma,\delta,s)$.

Положим

$$\mathbf{v}^k(x) = \frac{1}{r+1}\varphi(x)\mathbf{v}_r^k(x),$$

где функция $\varphi(x)$ равна евклидову расстоянию $\rho(x)$ от точки x до поверхности Γ при $x \in \Omega^+ \cap T(\gamma, \delta)$ и $-\rho(x)$ при $x \in \Omega^- \cap T(\gamma, \delta)$ (в криволинейных координатах $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ $\varphi(x) = t_n$). Легко видеть, что $\mathbf{v}^k(x)$ принадлежит классу $W_{r+1}^k(\gamma, \delta, s)$ и, следовательно,

$$\int\limits_{T(\gamma,\delta)} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta}D^\beta\mathbf{v}_{r+1}^k, D^\alpha\mathbf{v}_{r+1}^k)\,dx \leqslant \int\limits_{T(\gamma,\delta)} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta}D^\beta\mathbf{v}^k, D^\alpha\mathbf{v}^k)\,dx.$$

Отсюда, учитывая ограниченность производных функции $\varphi(x)$, получаем

$$\int\limits_{T(\gamma,\delta)} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta}D^\beta\mathbf{v}_{r+1}^k, D^\alpha\mathbf{v}_{r+1}^k)\,dx \leqslant A_1\delta^2 \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha\mathbf{v}_r^k\|_\gamma^2 + \\ + A_2 \sum_{|\alpha|<m} \|D^\alpha\mathbf{v}_r^k\|_\gamma^2,$$

где $\|D^\alpha\mathbf{v}\|_\gamma^2$ — норма вектор-функции $D^\alpha\mathbf{v}$ в $L_2(T(\gamma, \delta))$, постоянные A_1, A_2 не зависят от s и δ. Оценивая нормы $\|D^\alpha\mathbf{v}_r^k\|_\gamma^2$ и $\|D^\alpha\mathbf{v}_{r+1}^k\|_\gamma^2$ при $|\alpha| < m$ с помощью леммы 2.5, а при $|\alpha| = m$ — с помощью неравенства (2.81), убеждаемся в справедливости леммы.

Из этой леммы, очевидно, вытекает свойство 3 величин $C_p^{kk}(\gamma, \delta, s)$.

Возвратимся теперь к неравенству (2.94). Учитывая (2.93′), используя леммы 2.5 и 2.6, неравенства Коши — Буняковского и (2.81), а также теорему вложения (для оценки поверхностных интегралов в (2.95)), получаем

$$\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u}) + \Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u})(\varepsilon(\mathbf{u}, \delta, s) + \Delta) + \\ + \sum_{k=1}^{N}\sum_i C_p^{kk}(\gamma_i, \delta, s)(\varepsilon(\mathbf{u}, \delta, s) + \tilde{\Delta}) + \varepsilon(\mathbf{u}, \delta, s) \geqslant \\ \geqslant \sum_{k,l=1}^{N}\sum_i C_p^{kl}(\gamma_i, \delta, s)\frac{\partial^p u_l}{\partial \nu^p}(\bar{x}^i)\frac{\partial^p u_k}{\partial \nu^p}(\bar{x}^i),$$

где

$$\Delta = A\max_i\max_k\max_{\bar{x}\in\bar{\gamma}_i}\left(\left\|\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial \nu^p}(\bar{x})\right\|^{-1}\frac{\partial^p u_k}{\partial \nu^p}(\bar{x}) - \right. \\ \left. - \left\|\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial \nu^p}(\bar{x}^i)\right\|^{-1}\frac{\partial^p u_k}{\partial \nu^p}(\bar{x}^i)\right),$$

$$\tilde{\Delta} = \Delta + A\max_i\left(\left|\frac{\partial^p \tilde{u}_1}{\partial \nu^p}(\bar{x}^i)\right|^2 - q_i^2\right) \qquad (A = \mathrm{const}),$$

а $\varepsilon(\mathbf{u}, \delta, s) > 0$ и для любой $\mathbf{u}(x) \in \mathfrak{M}^p(\Gamma)$ и любого фиксированного разбиения Γ на части γ_i

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{s\to\infty}} \varepsilon(\mathbf{u}, \delta, s) = 0.$$

Отсюда в силу условия b теоремы 2.8 следует, что для любой вектор-функции $\mathbf{u}(x) \in \mathfrak{M}^p(\Gamma)$ справедливо неравенство

$$\lim_{\delta\to 0} \underline{\lim_{s\to\infty}} \Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u}) \geqslant \int_\Gamma \left(c_p \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial \nu^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial \nu^p}\right) d\Gamma. \tag{2.96}$$

Докажем теперь обратное неравенство. Для этого, как и раньше, разобьем поверхность Γ на части γ_i ($i = 1, 2, \ldots, M$) достаточно малого диаметра d_i, ограниченные конечным числом многообразий размерности $n-2$. Каждую часть γ_i погрузим в более широкое открытое на Γ множество $\tilde{\gamma}_i$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $\tilde{\gamma}_i$ также ограничены конечным числом многообразий размерности $n-2$ и имеют диаметры, близкие к d_i,

2) $\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{M} \mathrm{mes}_\Gamma(\tilde{\gamma}_i \cap \tilde{\gamma}_j) < \varepsilon$,

3) система множеств $\{\tilde{\gamma}_i, i = 1, 2, \ldots, M\}$ образует покрытие поверхности Γ.

С покрытием $\{\tilde{\gamma}_i, i = 1, 2, \ldots, M\}$ свяжем разбиение единицы $\{\psi_i(\bar{x}), i = 1, 2, \ldots, M\}$ на Γ, т. е. построим совокупность m раз непрерывно дифференцируемых функций $\psi_i(\bar{x})$ таких, что $0 \leqslant \psi_i(x) \leqslant 1$, носитель $\psi_i(\bar{x})$ принадлежит $\tilde{\gamma}_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{M} \psi_i(\bar{x}) = 1$, $x \in \Gamma$. Пусть $\mathbf{u}(x)$ — произвольная вектор-функция из $\mathfrak{M}^p(\Gamma)$. Тогда в каждой из областей $T(\tilde{\gamma}_i, \delta)$, $i = 1, 2, \ldots, M$, она представима в виде (2.89). Учитывая это, рассмотрим в слое $T(\Gamma, \delta)$ вектор-функцию

$$\mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}(x) =$$
$$= \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{M} \psi_i(\bar{x}) \left[\sum\limits_{r=p}^{m-1} \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{\partial^r u_k}{\partial \nu^r}(\bar{x})\, \mathbf{v}_r^{k(i,s)}(x) + \chi\left(\dfrac{t_n}{\delta}\right) \mathring{\mathbf{u}}(x)\right], & x \in T(\Gamma, \delta'), \\ \mathbf{u}(x), & x \in T(\Gamma, \delta) \setminus T(\Gamma, \delta'), \end{cases} \tag{2.97}$$

где δ' — произвольное число, меньшее δ; $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю при $t \leqslant \frac{1}{2}$ и единице при $t \geqslant 1$; $\mathbf{v}_r^{k(i,s)}(x)$ — вектор-функция из класса $W_r^k(\tilde{\gamma}_i, \delta', s)$, на которой достигается минимум функционала $\Phi(\mathbf{v}^{(s)}, \mathbf{v}^{(s)})$ (2.84). Покажем, что при достаточно больших s (таких, чтобы $F^{(s)}$ попадало в слой $T\left(\Gamma, \frac{\delta'}{2}\right)$) $\mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}(x)$ принадлежит классу $W(\mathbf{u}, \delta, s)$.

Прежде всего отметим, что $\mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}(x) \equiv \mathbf{u}(x)$ в области $T(\Gamma, \delta) \setminus T(\Gamma, \delta')$ и в силу свойств функций $\psi_i(\bar{x})$ $\mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}(x) \in W_2^m(\Gamma, \delta')$. Учитывая (2.82) и (2.89), при $x \in \Gamma_{\delta'}^{\pm}$ ($t_n = \pm\delta'$) получаем

$$\left.\frac{\partial^j \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}}{\partial \nu^j}\right|_{\Gamma_{\delta'}^{\pm}} = \sum_{i=1}^{M} \psi_i(\bar{x}) \left[\sum_{r=p}^{m-1} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^r u_k}{\partial \nu^r}(\bar{x}) \frac{\partial^j}{\partial t_n^j} \frac{t_n^r}{r!} \mathbf{e}^k - \frac{\partial^j \mathring{\mathbf{u}}(x)}{\partial \nu^j}\right]_{t_n = \pm\delta'} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \psi_i(\bar{x}) \left.\frac{\partial^j \mathbf{u}}{\partial \nu^j}\right|_{\Gamma_{\delta'}^{\pm}} = \left.\frac{\partial^j \mathbf{u}}{\partial \nu^j}\right|_{\Gamma_{\delta'}^{\pm}}, \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}(x) \in W_2^m(T(\Gamma, \delta))$ (см. § 1). Так как в окрестности $\Gamma_\delta^{\pm}$ $\mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}(x) = \mathbf{u}(x)$, то $\mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}(x)$ удовлетворяет условиям (2.86). Наконец, из свойств функций $\mathbf{v}_r^{k(i,s)}(x)$ и $\chi(t)$ вытекает, что $\mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}(x)$ обращается в нуль на $F^{(s)} \subset T\left(\Gamma, \frac{\delta'}{2}\right)$ вместе с производными до порядка $m-1$, так что ее можно аппроксимировать в $W_2^m(T(\Gamma, \delta))$ m раз непрерывно дифференцируемыми вектор-функциями, равными нулю в окрестности $F^{(s)}$. Следовательно, $\mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}(x) \in W(\mathbf{u}, \delta, s)$. Поэтому в силу (2.87)

$$\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u}) \leqslant \int\limits_{T(\Gamma,\delta)} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}, D^\alpha \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)})\, dx =$$

$$= \int\limits_{T(\Gamma,\delta')} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}, D^\alpha \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)})\, dx +$$

$$+ \int\limits_{T(\Gamma,\delta) \setminus T(\Gamma,\delta')} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{u})\, dx = I_1(\mathbf{u}, \delta', s) + I_2(\mathbf{u}). \quad (2.98)$$

Согласно (2.97) производные $D^\alpha \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}(x)$ при $x \in T(\Gamma, \delta')$ можно представить в виде

$$D^\alpha \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{(s)}(x) = \sum_{i=1}^{M} \psi_i(\bar{x}) \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^p u_k}{\partial \nu^p}(\bar{x}) D^\alpha \mathbf{v}_p^{k(i,s)}(x) + \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\beta|<|\alpha|} c_{\alpha\beta}^{k(i)}(x) \times$$

$$\times D^\beta \mathbf{v}_p^{k(i,s)}(x) + \sum_{i=1}^{M} \sum_{r=p+1}^{m-1} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|} c_{\alpha\beta}^{rk(i)}(x) D^\beta \mathbf{v}_r^{k(i,s)}(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{|\beta|\leqslant|\alpha| \\ |\beta'|\leqslant|\beta|}} c_{\alpha\beta\beta'}^{(i)}(x) D^{\alpha-\beta} \mathring{\mathbf{u}}(x) D^{\beta'} \chi\left(\frac{t_n}{\delta'}\right),$$

где функции $c_{\alpha\beta}^{k(i)}(x)$, $c_{\alpha\beta}^{rk(i)}(x)$, $c_{\alpha\beta\beta'}^{(i)}(x)$ ограничены, не зависят от s и δ' и выражаются через $D^\beta \varphi_i(\bar{x})$ ($|\beta| \leqslant |\alpha|$) и $D^\beta \mathbf{u}(x)$ ($|\beta| \leqslant$

$\leqslant p + |\alpha|$). Используя это равенство и учитывая свойства функций $\psi_i(x)$, $\chi(t)$ и оценки (2.89′), получаем

$$I_1(\mathbf{u}, \delta', s) \leqslant \sum\nolimits_1(\mathbf{u}, \delta', s) + \sum\nolimits_2(\mathbf{u}, \delta', s) + A\widetilde{S}(\mathbf{u}, \delta', s), \quad (2.99)$$

$$\sum\nolimits_1(\mathbf{u}, \delta', s) = \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} \int\limits_{T(\widetilde{\gamma}_i, \delta')} \psi_i^2 \frac{\partial^p u_k}{\partial \nu^p} \times$$

$$\times \frac{\partial^p u_l}{\partial \nu^p} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{v}_p^{k(i,s)}, D^\alpha \mathbf{v}_p^{l(i,s)})\, dx,$$

$$\sum\nolimits_2(\mathbf{u}, \delta', s) = \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{M} \int\limits_{T(\widetilde{\gamma}_i \cap \widetilde{\gamma}_j, \delta')} \psi_i \psi_j \frac{\partial^p u_k}{\partial \nu^p} \times$$

$$\times \frac{\partial^p u_l}{\partial \nu^p} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{v}_p^{k(i,s)}, D^\alpha \mathbf{v}_p^{l(j,s)})\, dx,$$

$$\widetilde{S}(\mathbf{u}, \delta', s) = \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{M} \|\mathbf{v}_p^{k(i,s)}\|_{m,\widetilde{\gamma}_i} \Big\{ \|\mathbf{v}_p^{l(j,s)}\|_{m-1,\widetilde{\gamma}_j} + \sum_{r=p+1}^{m-1} \|\mathbf{v}_r^{l(j)}\|_{m,\widetilde{\gamma}_j} +$$

$$+ \operatorname{mes}^{\frac{1}{2}} T(\widetilde{\gamma}_j, \delta') \Big\} + \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{M} \sum_{r,r'=p+1}^{m-1} \|\mathbf{v}_r^{k(i,s)}\|_{m,\widetilde{\gamma}_i} \|\mathbf{v}_{r'}^{l(j,s)}\|_{m,\widetilde{\gamma}_j} +$$

$$+ \operatorname{mes} T(\Gamma, \delta'),$$

где $\| \ \|_{l,\widetilde{\gamma}_i}$ — норма вектор-функций в пространстве $W_2^l(T(\widetilde{\gamma}_i, \delta'))$, а постоянная A не зависит от s и δ'.

Из лемм 2.5, 2.6 и условия b теоремы 2.8 следует

$$\lim_{\delta'\to 0} \overline{\lim_{s\to\infty}} \widetilde{S}(\mathbf{u}, \delta', s) = 0. \quad (2.100)$$

Далее, используя неравенство Коши — Буняковского, записываем

$$\sum\nolimits_2(\mathbf{u}, \delta', s) \leqslant A_1 \sum_{k,l=1}^{N} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{M} \Big\{ \int\limits_{T'_{ij}} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{v}_p^{k(i,s)}, D^\alpha \mathbf{v}_p^{k(i,s)})\, dx \Big\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \Big\{ \int\limits_{T'_{ij}} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{v}_p^{l(j,s)}, D^\alpha \mathbf{v}_p^{l(j,s)})\, dx \Big\}^{\frac{1}{2}}, \quad (2.101)$$

где $T'_{ij} = T(\widetilde{\gamma}_i \cap \widetilde{\gamma}_j, \delta')$, A_1 не зависит от s и δ'. Согласно (2.85′)

$$\int\limits_{T'_{ij}} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{v}_p^{k(i,s)}, D^\alpha \mathbf{v}_p^{k(i,s)})\, dx =$$

$$= \int\limits_{T(\widetilde{\gamma}_i, \delta')} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{v}_p^{k(i,s)}, D^\alpha \mathbf{v}_p^{k(i,s)})\, dx -$$

$$-\int\limits_{T(\widetilde{\gamma}_i\setminus\widetilde{\gamma}_j,\delta')}\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}(a_{\alpha\beta}D^\beta\mathbf{v}_p^{k(l,s)},\ D^\alpha\mathbf{v}_p^{k(l,s)})\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C_p(\widetilde{\gamma}_i,\ \delta',\ s)-C_p(\widetilde{\gamma}_i\setminus\widetilde{\gamma}_i,\ \delta',\ s).$$

Поэтому из (2.101) и условия b теоремы 2.8 вытекает

$$\lim_{\delta'\to 0}\overline{\lim_{s\to\infty}}\ \sum\nolimits_2(\mathbf{u},\ \delta',\ s)\leqslant A_2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{M}\operatorname{mes}_\Gamma(\widetilde{\gamma}_i\cap\widetilde{\gamma}_j)\quad(A_2=\mathrm{const}).\qquad(2.102)$$

Рассмотрим теперь сумму Σ_1 ($\mathbf{u}$, δ, s). Учитывая свойства функций ψ_i $(\overline{x})$, представим ее в виде

$$\sum\nolimits_1(\mathbf{u},\ \delta',\ s)=\sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i=1}^{M}\int\limits_{T(\gamma_i,\delta')}\frac{\partial^p u_k}{\partial\nu^p}\times$$

$$\times\frac{\partial^p u_l}{\partial\nu^p}\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}(a_{\alpha\beta}D^\beta\mathbf{v}_p^{k(i,s)},\ D^\alpha\mathbf{v}_p^{l(i,s)})\,dx+$$

$$+\sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i=1}^{M}\int\limits_{T(\widetilde{\gamma}_i\setminus\widehat{\gamma}_i)}\varphi_i\frac{\partial^p u_k}{\partial\nu^p}\frac{\partial^p u_l}{\partial\nu^p}\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}(a_{\alpha\beta}D^\beta\mathbf{v}_p^{k(i,s)},\ D^\alpha\mathbf{v}_p^{l(i,s)})\,dx,\qquad(2.103)$$

где $\widehat{\gamma}_i=\widetilde{\gamma}_i\setminus\bigcup_{j\neq i}\widetilde{\gamma}_j$; $\varphi_i=\psi_i^2(x)-1$ при $x\in\gamma_i\setminus\widehat{\gamma}_i$ и $\varphi_i=$ $=\psi_i^2(x)$ при $x\in\widetilde{\gamma}_i\setminus\gamma_i$. Так как $|\varphi_i|\leqslant 1$, то второе слагаемое правой части в (2.103) можно оценить так же, как Σ_2 ($\mathbf{u}$, δ', s). Учитывая при этом неравенство

$$\sum_{i=1}^{N}\operatorname{mes}_\Gamma(\widetilde{\gamma}_i\setminus\widehat{\gamma}_i)\leqslant\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\operatorname{mes}_\Gamma(\widetilde{\gamma}_i\cap\widetilde{\gamma}_j),$$

получаем для него оценку, аналогичную (2.102). Поэтому в силу непрерывности функций $\dfrac{\partial^p u_k}{\partial\nu^p}$ из условия b теоремы 2.8 следует

$$\lim_{\delta'\to 0}\overline{\lim_{s\to\infty}}\sum\nolimits_1(\mathbf{u},\ \delta',\ s)\leqslant\int\limits_\Gamma\left(c_p\frac{\partial^p\mathbf{u}}{\partial\nu^p},\ \frac{\partial^p\mathbf{u}}{\partial\nu^p}\right)d\Gamma+A_1\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{M}\operatorname{mes}_\Gamma(\widetilde{\gamma}_i\cap\widetilde{\gamma}_j)\qquad(2.104)$$

$$(A_1=\mathrm{const}).$$

Отметим, что постоянные A_1 и A_2 в (2.102) и (2.104) зависят только от вектор-функции $\mathbf{u}$ $(x)\in\mathfrak{M}^p$ (Γ).

Возвратимся теперь к неравенству (2.98). Так как $\mathbf{u}$ $(x)\in\mathfrak{M}^p$ (Γ), то I_2 $(\mathbf{u})\to 0$ при $\delta\to 0$. Поэтому, выбирая множества $\widetilde{\gamma}_i$ так, чтобы выполнялось условие 2 с нужным ε, и учитывая (2.99), (2.100), (2.102) и (2.104), устанавливаем, что для любой вектор-функции

$\mathbf{u}(x) \in \mathfrak{M}^p(\Gamma)$

$$\lim_{\delta \to 0} \overline{\lim_{s \to \infty}} \Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u}) \leqslant \int_\Gamma \left(c_p \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial \nu^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial \nu^p} \right) d\Gamma. \tag{2.105}$$

Из неравенств (2.94) и (2.105) вытекает утверждение теоремы 2.9 для вектор-функций из $\mathfrak{M}^p(\Gamma)$. Для окончания доказательства этой теоремы необходимо доказать следующую лемму.

Лемма 2.7. *Для любой вектор-функции* $\mathbf{u}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma)$ *и любого* $\delta > 0$ *справедливо неравенство*

$$\overline{\lim_{s \to \infty}} \Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u}) \leqslant C \|\mathbf{u}\|_{m,\Omega}^2, \tag{2.106}$$

где $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ — *норма в* $W_2^m(\Omega)$, *а постоянная* C *не зависит от* $\mathbf{u}$ *и* δ.

Доказательство. Прежде всего, учитывая (2.99) — (2.104) и оценивая интеграл по Γ в (2.104) с помощью теоремы вложения, получаем неравенство (2.106) для вектор-функций из $\mathfrak{M}^p(\Gamma)$. Далее, как легко видеть, согласно (2.87) для любой вектор-функции $\mathbf{u}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma)$ при достаточно больших s выполняется неравенство

$$\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u}) \leqslant C(\delta) \|\mathbf{u}\|_{m,\Omega}^2, \tag{2.107}$$

где $C(\delta)$ — постоянная, не зависящая от s и $\mathbf{u}(x)$. Кроме того, из (2.87) и (2.81) следует, что функционал $\sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u})}$ полуаддитивен, т. е.

$$\sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u}+\mathbf{v})} \leqslant \sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u})} + \sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{v})}. \tag{2.108}$$

Так как множество $\mathfrak{M}^p(\Gamma)$ плотно в $\overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma)$, то при $\mathbf{u}(x) \not\equiv 0$ можно подобрать такую вектор-функцию $\mathbf{v}(x) \in \mathfrak{M}^p(\Gamma)$, чтобы выполнялись неравенства

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{m,\Omega} \leqslant \frac{1}{\sqrt{C(\delta)}} \|\mathbf{u}\|_{m,\Omega}, \quad \|\mathbf{v}\|_{m,\Omega} \leqslant 2\|\mathbf{u}\|_{m,\Omega}. \tag{2.109}$$

Тогда в силу (2.107) и (2.108)

$$\sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u})} \leqslant \sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{v})} + \sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u}-\mathbf{v})} \leqslant \sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{v})} + \\ + \sqrt{C(\delta)} \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{m,\Omega}.$$

Отсюда, учитывая (2.81) и вспоминая, что неравенство (2.106) для вектор-функций $\mathbf{v}(x) \in \mathfrak{M}^p(\Gamma)$ уже доказано, убеждаемся в справедливости леммы.

Теперь нетрудно закончить доказательство теоремы 2.9. На основании полуаддитивности функционала $\sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u})}$ (2.108) запишем

$$\sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{v})} - \sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u}-\mathbf{v})} \leqslant \sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u})} \leqslant \sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{v})} + \\ + \sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u}-\mathbf{v})},$$

откуда в силу леммы 2.7 вытекают неравенства

$$\sqrt{\varlimsup_{s\to\infty}\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{v})}-\sqrt{C}\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{m,\Omega}\leqslant\sqrt{\varliminf_{s\to\infty}\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u})}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\varlimsup_{s\to\infty}\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u})}\leqslant\sqrt{\varlimsup_{s\to\infty}\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{v})}+\sqrt{C}\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{m,\Omega},$$

где C не зависит от $\mathbf{u}$ и δ. Выбирая здесь $\mathbf{v}\in\mathfrak{M}^p(\Gamma)$ достаточно близким к $\mathbf{u}(x)$ и учитывая, что для вектор-функций из $\mathfrak{M}^p(\Gamma)$ теорема 2.9 уже доказана, убеждаемся в справедливости этой теоремы.

2. Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.8. Напомним, что решение $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ краевой задачи (2.79), (2.80) минимизирует функционал

$$J(\mathbf{u}^{(s)})=\int\limits_{\Omega^{(s)}}\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}(a_{\alpha\beta}D^\beta\mathbf{u}^{(s)},D^\alpha\mathbf{u}^{(s)})\,dx-2\int\limits_{\Omega^{(s)}}(\mathbf{f},\mathbf{u}^{(s)})\,dx \quad (2.110)$$

в классе вектор-функций $\mathbf{u}^{(s)}(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega^{(s)})$. Доопределим $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ нулем на множестве $F^{(s)}$ и покажем, что полученное множество вектор-функций $\{\mathbf{u}^{(s)}(x),\ s=1,2,\ldots\}$ по норме пространства $W_2^m(\Omega)$ ограничено равномерно по s.

Действительно, так как $^{(s)}(x)$ минимизирует функционал (2.110), то

$$0\geqslant J(\mathbf{u}^{(s)})=\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}(a_{\alpha\beta}D^\beta\mathbf{u}^{(s)},D^\alpha\mathbf{u}^{(s)})\,dx-2\int\limits_{\Omega}(\mathbf{f},\mathbf{u}^{(s)})\,dx\geqslant$$
$$\geqslant\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}(a_{\alpha\beta}D^\beta\mathbf{u}^{(s)},D^\alpha\mathbf{u}^{(s)})\,dx-2\|\mathbf{f}\|_\Omega\|\mathbf{u}^{(s)}\|_\Omega, \quad (2.111)$$

где $\|\cdot\|_\Omega$ — норма в пространстве $L_2(\Omega)$. Поскольку $\mathbf{u}^{(s)}\in\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, в силу (2.12)

$$\|\mathbf{u}^{(s)}\|_\Omega\leqslant\|\mathbf{u}^{(s)}\|_{m,\Omega}\leqslant C\left\{\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}(a_{\alpha\beta}D^\beta\mathbf{u}^{(s)},D^\alpha\mathbf{u}^{(s)})\,dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где постоянная C не зависит от s. Учитывая это, из (2.111) получаем

$$\|\mathbf{u}^{(s)}\|_{m,\Omega}\leqslant 2C^2\|\mathbf{f}\|_\Omega. \quad (2.112)$$

Рассмотрим $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ как гильбертово пространство со скалярным произведением, порождающим норму $\|\mathbf{u}^{(s)}\|_{m,\Omega}$. Из полученного неравенства следует, что множество $\{\mathbf{u}^{(s)}(x),\ s=1,2,\ldots\}$ слабо компактно в $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ и, значит, можно выделить подпоследовательность $\{\mathbf{u}^{(s)}(x),\ s=s_k\to\infty\}$, слабо сходящуюся к некоторой вектор-функции $\mathbf{u}(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$. Поскольку при любом $l\leqslant m-1$ оператор вложения $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ в $W_2^l(\Omega)$ вполне непрерывен, последовательность $\{u^{(s)}(x), \quad s = s_k \to \infty\}$ сходится к $u(x)$ по норме $W_2^l(\Omega)\,(l \leqslant m-1)$.

Пусть Ω' — произвольная подобласть в Ω, находящаяся на положительном расстоянии от Γ и $\partial\Omega$. Вложим Ω' в более широкую область Ω'', удовлетворяющую этим же условиям, причем так, чтобы расстояние от границы Ω'' до Ω' было положительным. В силу условия *a* теоремы 2.8 вектор-функции $u^{(s)}(x)$ начиная с некоторого $s = s''$ удовлетворяют в Ω'' уравнению (2.79), где $f(x) \in L_2(\Omega)$. Поэтому справедлива априорная оценка

$$\|u^{(s)}\|_{2m,\Omega'} \leqslant C(\Omega', \Omega'')(\|f\|_{\Omega''} + \|u^{(s)}\|_{\Omega''}), \tag{2.113}$$

где постоянная $C(\Omega', \Omega'')$ не зависит от s [7, 50]. Отсюда, учитывая предыдущее, заключаем, что последовательность $\{u^{(s)}(x), s = s_k \to \infty\}$ сходится к $u(x)$ по норме $W_2^{2m}(\Omega')$.

Лемма 2.8. *Если выполняются условия теоремы* 2.8, *то* $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma)$.

Доказательство. Для пространств R_n размерности $n < 2(m-p+1)$ утверждение леммы следует непосредственно из теоремы вложения. Действительно, при $n < 2(m-p+1)$ оператор вложения $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ в $C^{p-1}(\overline{\Omega})$ вполне непрерывен и, значит, последовательность $\{u^{(s)}(x), s = s_k \to \infty\}$ сходится к $u(x)$ по норме $C^{p-1}(\overline{\Omega})$. Пусть x — произвольная точка на Γ. В силу условия *a* в любую ее окрестность попадут точки множества $F^{(s)}$, в которых все производные функций $u^{(s)}(x)$ до порядка $p-1$ равны нулю. Следовательно, и предельная функция $u(x)$ равна нулю на Γ вместе с производными до порядка $p-1$ включительно.

Рассмотрим случай $n \geqslant 2(m-p+1)$. Так как $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, то можно считать, что $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{m,k}(\Omega, \Gamma)$, где k равно одному из значений $0, 1, 2, \ldots, p$.

Пусть $\tilde{\Omega}$ и $\tilde{\Omega}'$ — некоторые достаточно малые окрестности поверхности Γ, причем $\tilde{\Omega}$ содержится в Ω и находится на положительном расстоянии от границы Γ. Рассмотрим в области Ω вектор-функции

$$\left.\begin{aligned} v^{(s)}(x) &= \frac{k!}{p!}\varphi^{p-k}(x)\,u^{(s)}(x)\,\chi(x), \\ v(x) &= \frac{k!}{p!}\varphi^{p-k}(x)\,u(x)\,\chi(x), \end{aligned}\right\} \tag{2.114}$$

где $\chi(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице в $\tilde{\Omega}'$ и нулю вне $\tilde{\Omega}$, а функция $\varphi(x)$ равна евклидову расстоянию $\rho(x)$ от x до Γ при $x \in \Omega^+$ и $-\rho(x)$ при $x \in \Omega^-$ (в криволинейных координатах $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ $\varphi(x) = t_n$). Нетрудно проверить, что $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma)$. Действительно, в силу гладкости Γ функция $\varphi(x)$ в области $\tilde{\Omega}$ по крайней мере m раз непрерывно дифференцируема и, следовательно, $\mathbf{v}(x) \in W_2^m(\Omega)$. Остается убедиться, что нормальные производные $\mathbf{v}(x)$ до порядка $p-1$ включительно равны нулю на Γ. В силу равенств

$$\frac{\partial^j \mathbf{v}}{\partial \nu^j} = \frac{k!}{p!} \sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!\,(j-i)!} \frac{\partial^i}{\partial t_n^i} (t_n^{p-k}) \frac{\partial^{j-i} \mathbf{u}}{\partial \nu^{j-i}}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, p,$$

которые верны в области $\widetilde{\Omega}'$, на Γ

$$\left.\frac{\partial^j \mathbf{v}}{\partial \nu^j}\right|_\Gamma = 0, \qquad j = 0, \ldots, p-k-1,$$

$$\left.\frac{\partial^j \mathbf{v}}{\partial \nu^j}\right|_\Gamma = \frac{k!\,j!}{p!\,(j-p+k)!} \left.\frac{\partial^{j-p+k} \mathbf{u}}{\partial \nu^{j-p+k}}\right|_\Gamma, \qquad j = p-k, \ldots, p.$$

Поскольку $\mathbf{u}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{m,k}(\Omega, \Gamma)$, отсюда следует, что

$$\left.\frac{\partial^j \mathbf{v}}{\partial \nu^j}\right|_\Gamma = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, p-1, \quad \left.\frac{\partial^p \mathbf{v}}{\partial \nu^p}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial \nu^k}\right|_\Gamma. \tag{2.115}$$

Таким образом, $\mathbf{v}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma)$. Поэтому, учитывая (2.115), в силу теоремы 2.9 получаем

$$\int_\Gamma \left(c_p \frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial \nu^k}, \frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial \nu^k} \right) d\Gamma = \Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{v}) + \varepsilon_1(s, \delta, \mathbf{u}), \tag{2.116}$$

где $\lim\limits_{\delta \to 0} \overline{\lim\limits_{s \to \infty}} |\varepsilon_1(s, \delta, \mathbf{u})| = 0$.

Как было показано выше, подпоследовательность $\{\mathbf{u}^{(s)}(x), s = s_k \to \infty\}$ сходится к $\mathbf{u}(x)$ по норме $W_2^{2m}(\Omega')$, где Ω' — любая подобласть в Ω, находящаяся на положительном расстоянии от Γ и $\partial\Omega$. Отсюда в силу (2.114) следует, что подпоследовательность $\{\mathbf{v}^{(s)}(x), s = s_k \to \infty\}$ сходится к $\mathbf{v}(x)$ по норме $W_2^m(\Omega \setminus T(\Gamma, \delta))$ при любом $\delta > 0$. Поэтому, как легко видеть, функции $\mathbf{v}^{(s)}(x)$ можно так изменить в слое $T(\Gamma, \delta)$, чтобы полученные функции $\mathbf{v}_\delta^{(s)}(x)$ принадлежали подпространству $\overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma)$, совпадали с $\mathbf{v}^{(s)}(x)$ вне $T(\Gamma, \delta)$ и при $s = s_k \to \infty$ норма $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_\delta^{(s)}\|_{m,\Omega}$ стремилась к нулю. Используя неравенства (2.107) и (2.108), записываем

$$\sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{v})} \leqslant \sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{v}_\delta^{(s)})} + \sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\delta^{(s)})} \leqslant \sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{v}_\delta^{(s)})} + \\ + \sqrt{C(\delta)}\, \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_\delta^{(s)}\|_{m,\Omega},$$

откуда, учитывая свойства функций $\mathbf{v}_\delta^{(s)}$, получаем

$$\sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{v})} \leqslant \sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{v}^{(s)})} + \varepsilon_2(\delta, s), \tag{2.117}$$

где при любом фиксированном $\delta > 0$

$$\lim_{s = s_k \to \infty} \varepsilon_2(\delta, s) = 0. \tag{2.117$'$}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (2.117). Пусть δ достаточно мало, так, что $T(\Gamma, \delta) \subset \tilde{\Omega}'$. В силу (2.114) в области $\tilde{\Omega}'$

$$D^{\alpha}\mathbf{v}^{(s)}(x) = \frac{k!}{p!}\left\{\varphi^{p-k}(x)\, D^{\alpha}\mathbf{u}^{(s)}(x) + \sum_{|\beta|<|\alpha|} c_{\alpha\beta} D^{\alpha}\mathbf{u}^{(s)}(x)\, D^{\alpha-\beta}\varphi^{p-k}(x)\right\},$$

$$c_{\alpha\beta} = \prod_i \frac{\alpha_i!}{\beta_i!\ (\beta_i - \alpha_i)!}.$$

Отсюда, учитывая свойства функции $\varphi(x)$ и используя неравенства Коши — Буняковского и (2.81), получаем

$$\Phi_{\delta}^{(s)}(\mathbf{v}^{(s)}) \leqslant \left(\frac{k!}{p!}\right)^2 \delta^{2(p-k)} \int\limits_{T(\Gamma,\delta)} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta} D^{\beta}\mathbf{u}^{(s)}, D^{\alpha}\mathbf{u}^{(s)})\, dx + \\ + A \|\mathbf{u}^{(s)}\|_{m,\Gamma} \|\mathbf{u}^{(s)}\|_{m-1,\Gamma}, \qquad (2.118)$$

где постоянная A не зависит от s и δ; $\|\cdot\|_{l,\Gamma}$ — норма вектор-функций в $W_2^l(T(\Gamma, \delta))$.

Для оценки нормы $\|\mathbf{u}^{(s)}\|_{m-1,\Gamma}$ используем лемму 2.5, полагая в ней $\gamma_{\delta} = \Gamma_{\delta}^{+}$. При этом интегралы по Γ^{+} оцениваем с помощью теоремы вложения. В результате находим

$$\|\mathbf{u}^{(s)}\|_{m-1,\Gamma} \leqslant A\delta \|\mathbf{u}^{(s)}\|_{m,\Omega} \qquad (A = \mathrm{const}).$$

Подставляя это неравенство в (2.118) и учитывая (2.116) — (2.117′), получаем

$$\int\limits_{\Gamma} \left(c_p \frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial \nu^k},\ \frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial \nu^k}\right) d\Gamma \leqslant A\,(\delta^{2(p-k)} + \delta) \|\mathbf{u}^{(s)}\|_{m,\Omega}^2 + \varepsilon(s, \delta), \qquad (2.119)$$

где A не зависит от s и δ, а

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{s\to\infty}}\, \varepsilon(s, \delta) = 0.$$

Теперь воспользуемся условием c теоремы **2.8**, согласно которому при $n \geqslant 2(m - p + 1)$ матрица $c_p = c_p(x)$ положительно определена всюду на Γ. Из (2.119) находим

$$\int\limits_{\Gamma} \left\| \frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial \nu^k} \right\|^2 d\Gamma \leqslant \frac{A}{\mu} (\delta^{2(p-k)} + \delta) \|\mathbf{u}^{(s)}\|_{m,\Omega}^2 + \frac{\varepsilon(s, \delta)}{\mu}, \qquad \mu > 0.$$

Отсюда в силу (2.112) следует, что при $k < p$ $\dfrac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial \nu^k} = 0$ почти всюду на Γ, т. е. $\mathbf{u}(x) \in \mathring{W}_2^{m,k+1}(\Omega, \Gamma)$. Таким образом, из предположения $\mathbf{u}(x) \in \mathring{W}_2^{m,k}(\Omega, \Gamma)$ $(k < p)$ вытекает, что $\mathbf{u}(x) \in \mathring{W}_2^{m,k+1}(\Omega, \Gamma)$. Но таким путем, очевидно, можно повышать k вплоть до $k = p - 1$. Следовательно, $\mathbf{u}(x) \in \mathring{W}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma)$. Лемма доказана.

Докажем теперь, что $\mathbf{u}(x)$ минимизирует функционал

$$J_c(\mathbf{v}) = \int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^{\beta}\mathbf{v}, D^{\alpha}\mathbf{v})\, dx - 2(\mathbf{f}, \mathbf{v}) \right\} dx + \int\limits_{\Gamma} \left(c_p \frac{\partial^p \mathbf{v}}{\partial \nu^p}, \frac{\partial^p \mathbf{v}}{\partial \nu^p} \right) d\Gamma \tag{2.120}$$

в классе $\overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma)$.

Пусть $\mathbf{w}(x)$ — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma)$. Положим

$$\mathbf{u}_{\delta}^{(s)}(x) = \begin{cases} \mathbf{w}(x), & x \in \Omega \diagdown T(\Gamma, \delta), \\ \mathbf{w}_{\delta}^{(s)}(x), & x \in T(\Gamma, \delta), \end{cases}$$

где $\mathbf{w}_{\delta}^{(s)}(x)$ — функция из класса $W(\mathbf{w}, \delta, s)$, на которой достигается минимум в (2.87). Легко видеть, что $\mathbf{u}_{\delta}^{(s)}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{m}(\Omega^{(s)})$, и так как $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ минимизирует функционал (2.110) в классе $\overset{\circ}{W}{}_2^{m}(\Omega^{(s)})$, то

$$J(\mathbf{u}^{(s)}) \leqslant J(\mathbf{u}_{\delta}^{(s)}). \tag{2.121}$$

Далее,

$$J(\mathbf{u}_{\delta}^{(s)}) = \int\limits_{\Omega \diagdown T(\Gamma,\delta)} \left\{ \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^{\beta}\mathbf{w}, D^{\alpha}\mathbf{w}) - 2(\mathbf{f}, \mathbf{w}) \right\} dx + \Phi_{\delta}^{(s)}(\mathbf{w}) +$$
$$+ \int\limits_{T(\Gamma,\delta)} \left\{ \sum_{|\alpha|+|\beta| < 2m} (a_{\alpha\beta} D^{\beta}\mathbf{w}_{\delta}^{(s)}, D^{\alpha}\mathbf{w}_{\delta}^{(s)}) - 2(\mathbf{f}, \mathbf{w}_{\delta}^{(s)}) \right\} dx. \tag{2.122}$$

Так как в последнем интеграле либо $|\alpha| < m$, либо $|\beta| < m$, то его удобно оценить с помощью леммы 2.5, предварительно воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского. При этом надо учитывать, что поверхностные интегралы в (2.95) в силу свойств функции $\mathbf{w}_{\delta}^{(s)}(x)$ и теоремы вложения не превышают $C_1 \|\mathbf{w}\|_{m,\Omega}^2$, а интегралы по слою от производных $D^{\alpha}\mathbf{w}_{\delta}^{(s)}$ порядка m в силу (2.81) не превышают $C_2 \Phi_{\delta}^{(s)}(\mathbf{w})$. В результате убеждаемся, что последний интеграл в (2.122) оценивается сверху величиной $C\delta\{\Phi_{\delta}^{(s)}(\mathbf{w}) + \|\mathbf{w}\|_{m,\Omega}^2 + 1\}$, где постоянная C не зависит от s и δ. Учитывая это и используя теорему 2.9, из (2.122) получаем

$$\lim_{\delta \to 0} \overline{\lim_{s \to \infty}} J(\mathbf{u}_{\delta}^{(s)}) = J_c(\mathbf{w}),$$

где функционал $J_c(\mathbf{w})$ определяется по формуле (2.120). Следовательно, в силу (2.121)

$$\overline{\lim_{s \to \infty}} J(\mathbf{u}^{(s)}) \leqslant J_c(\mathbf{w}). \tag{2.123}$$

Пусть $\mathbf{u}(x)$ — слабый предел $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^{m}(\Omega)$ по подпоследовательности $\{s = s_k \to \infty\}$. Тогда согласно лемме 2.5 $\mathbf{u}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma)$. Из рассуждений, проведенных выше (стр. 152), следует, что $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ при $s = s_k \to \infty$ сходится к $\mathbf{u}(x)$ по норме $W_2^m(\Omega \diagdown T(\Gamma, \delta))$ при любом $\delta > 0$. Кроме того, $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ можно так изменить в слое $T(\Gamma, \delta)$, чтобы полученные функции $\widetilde{\mathbf{u}}_\delta^{(s)}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma)$ совпадали с $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ вне $T(\Gamma, \delta)$ и при $s = s_k \to \infty$ норма $\|\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}_\delta^{(s)}\|_{m,\Omega}$ стремилась к нулю. Учитывая это и используя неравенства (2.107), (2.108), записываем

$$J(\mathbf{u}^{(s)}) \geqslant \int\limits_{\Omega \setminus T(\Gamma,\delta)} \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u}^{(s)}, D^\alpha \mathbf{u}^{(s)})\, dx - 2 \int\limits_\Omega (\mathbf{f}, \mathbf{u}^{(s)})\, dx +$$

$$+ \Phi_\delta^{(s)}(\mathbf{u}) - C(\delta) \|\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}_\delta^{(s)}\|_{m,\Omega}^2 - 2C(\delta) \|\mathbf{u}\|_{m,\Omega} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta^{(s)}\|_{m,\Omega} +$$

$$+ \int\limits_{T(\Gamma,\delta)} \sum_{|\alpha|+|\beta| < 2m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u}^{(s)}, D^{(\alpha)} \mathbf{u}^{(s)})\, dx$$

и, следовательно,

$$\varliminf_{s=s_k \to \infty} J(\mathbf{u}^{(s)}) \geqslant \int\limits_{\Omega \setminus T(\Gamma,\delta)} \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{u})\, dx -$$

$$- 2 \int\limits_\Omega (\mathbf{f}, \mathbf{u})\, dx + \varliminf_{s \to \infty} \Phi_\delta^{(s)}(u) +$$

$$+ \varliminf_{s \to \infty} \int\limits_{T(\Gamma,\delta)} \sum_{|\alpha|+|\beta| < 2m} (a_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{u}^{(s)}, D^\alpha \mathbf{u}^{(s)})\, dx. \qquad (2.124)$$

На основании леммы 2.5 и теоремы вложения заключаем, что интеграл по слою $T(\Gamma, \delta)$ в (2.124) не превышает величины $C\delta \|\mathbf{u}^{(s)}\|_{m,\Omega}^2$. Поэтому, учитывая (2.112) и переходя к пределу при $\delta \to 0$, согласно теореме 2.9 получаем

$$\varliminf_{s=s_k \to \infty} J(\mathbf{u}^{(s)}) \geqslant J_c(\mathbf{u}).$$

Отсюда в силу (2.123) приходим к неравенству

$$J_c(\mathbf{u}) \leqslant J_c(\mathbf{w}).$$

Поскольку $\mathbf{w}$ — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^{m,p}(\Omega, \Gamma)$, из этого неравенства следует, что $\mathbf{u}(x)$ минимизирует функционал (2.120). Отсюда обычным способом устанавливаем, что $\mathbf{u}(x)$ удовлетворяет интегральному тождеству (A_p') и, значит, является обобщенным решением задачи (A_p). Таким образом, доказано, что множество вектор-функций $\{\mathbf{u}^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ слабо компактно в $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ и слабый предел $\mathbf{u}(x)$ по любой подпоследовательности $\{s = s_k \to \infty\}$ является обобщенным решением задачи (A_p). Поскольку эта задача имеет единственное решение, отсюда следует, что и вся последовательность $\{\mathbf{u}^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ сходится к $\mathbf{u}(x)$. Наконец, заметим, что в любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$, находящейся на положительном расстоянии от Γ и $\partial\Omega$, $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ (и $\mathbf{u}(x)$) удовлетворяют уравнению (2.79) и в силу (2.113) $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ сходится к $\mathbf{u}(x)$ в метрике $W_2^{2m}(\Omega')$.

Отсюда вытекает, что в Ω' $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ сходится к $\mathbf{u}(x)$ равномерно вместе с производными, допускаемыми гладкостью коэффициентов оператора L. Теорема доказана.

Замечание. Условие b этой теоремы является и необходимым в следующем смысле: если выполняется условие a и последовательность решений задачи (2.79), (2.80) сходится к решению задачи (A_p), то выполняется и условие b.

§ 5. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

Равновесие упругой пластинки

Пусть в плоскости R_2 расположены пластинка Ω, жестко закрепленная по краю $\partial\Omega$ и на множествах $F_i^{(s)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, лежащих вблизи контура $\Gamma \subset \Omega$. Отклонение $u^{(s)}(x)$ такой пластинки под действием сил $f(x)$ описывается краевой задачей

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^2 u^{(s)}(x) = f(x), \qquad x \in \Omega^{(s)} = \Omega \diagdown \bigcap_{i=1}^{s} F_i^{(s)}, \\ &u^{(s)}(x) = \frac{\partial u^{(s)}(x)}{\partial \nu} = 0, \; x \in \partial\Omega^{(s)} = \partial\Omega \cup \left(\bigcup_{i=1}^{s} \partial F_i^{(s)}\right), \end{aligned}\right\} \quad (2.125)$$

где Δ — оператор Лапласа в R_2, а $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по нормали к $\partial\Omega^{(s)}$; при этом $u^{(s)}(x) \equiv 0$ на $\bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$.

Исследуем асимптотическое поведение $u^{(s)}(x)$ при $s \to \infty$, когда число областей закрепления $F_i^{(s)}$ стремится к бесконечности, а диаметры их $d_i^{(s)}$ — к нулю. Предположим, что при $s \to \infty$ выполняются такие условия:

1) в каждое множество $F_i^{(s)}$ можно вписать круг $K_i^{(s)}$ с центром на Γ радиуса $r_i^{(s)}$, причем $r_i^{(s)} \geqslant (d_i^{(s)})^{1+\varepsilon(s)}$, где $\varepsilon(s) \to 0$ при $s \to \infty$;

2) каждая точка $x \in \Gamma$ является предельной для множеств $F^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$, т. е. расстояние от x до $F^{(s)}$ стремится к нулю при $s \to \infty$;

3) для любого куска $\gamma \subset \Gamma$ существуют пределы

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{(\gamma)} \frac{1}{|\ln d_i^{(s)}|} = \int_{\gamma} c(x)\, d\Gamma;$$

4) $$\varlimsup_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{R_i^{(s)} |\ln d_i^{(s)}|^2} < \infty,$$

где $R_i^{(s)}$ — расстояние от $F_i^{(s)}$ до $\bigcup\limits_{j\neq i} F_j^{(s)}$, а $c(x)$ — ограниченная функция на Γ.

Тогда оказывается, что решение $u^{(s)}(x)$ задачи (2.125) при $s \to \infty$ сходится к решению $u(x)$ следующей задачи сопряжения:

$$\Delta^2 u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega \setminus \Gamma,$$

$$u(x) = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^-, \\ &\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right)^+ - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right)^- = 4\pi c \frac{\partial u}{\partial \nu}, \end{aligned}\right\} \quad x \in \Gamma,$$

$$u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

где нормаль ν к Γ направлена в сторону, которой соответствует знак «+», а функция $c = c(x)$ определена условием 3. Доказательство этого утверждения вытекает из теорем 2.8 и 2.10. Отметим, что этот результат, по-видимому, верен и без предположения 1 (см., например, частный случай задачи (2.125 в работе [51]).

Рассмотрим краевую задачу (2.79), (2.80) при $N = 1$, $n = 2$ и $L = (-1)^m \Delta^m$. В этом случае для характеристики массивности множеств $F^{(s)}$ вводятся скалярные функции $C_p(\gamma, \delta, s) = C_p^{11}(\gamma, \delta, s)$ как минимум функционала (2.85′) в классе $W_p(\gamma, \delta, s) = W_p^1(\gamma, \delta, s)$ (см. § 4). Назовем их p-емкостями множества $F^{(s)} \cap T(\gamma, \delta)$.

Теорема 2.10. *Пусть* $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ *и при* $s \to \infty$ *выполняются условия* 1—4. *Тогда выполняется условие* b *теоремы* 2.8 *для* $p = m - 1$, *причем*

$$c_{m-1}(x) = c(x) \int_0^{2\pi} P_m(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi, \tag{2.126}$$

где $P_m(u, v)$ — *полином степени* $2(2m-1)$ *от* u, v,

$$\left.\begin{aligned} &P_m(u, v) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=m} \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!} \left\{ r \frac{\partial^m}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \left[\frac{x_2^{m-1}}{(m-1)!} \ln r \right] \right\}^2, \\ &x_1 = ru, \quad x_2 = rv, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.126′}$$

В случае бигармонического уравнения $(m = 2)$

$$\int_0^{2\pi} P_m(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi = 4\pi.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу неравенства $n = 2 < 2[m - (m-2)]$ и теоремы вложения предельная функция $u(x)$ должна иметь нулевые производные на Γ до порядка $m - 2$ включительно и, следовательно, $u(x) \in \mathring{W}_2^{m,m-1}(\Omega, \Gamma)$. Поэтому нужно установить справедливость условия b при $p = m - 1$ и равенства (2.126). Применительно к данному случаю $(m-1)$-емкость $C_{m-1}(\gamma, \delta, s)$ множества $F^{(s)} \cap T(\gamma, \delta)$ определяется как минимум функционала

$$C_{m-1}(\gamma, \delta, s) = \min_{v^{(s)}} \int\limits_{T(\gamma,\delta)} |\nabla_m v^{(s)}|^2 \, dx \tag{2.127}$$

в классе функций $W_{m-1}(\gamma, \delta, s)$. Здесь и далее используются обозначения $|\nabla_m v|^2 = (\nabla_m v, \nabla_m v)$, $(\nabla_m v, \nabla_m u) = \sum\limits_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha_1! \, \alpha_2!} D^\alpha v \cdot D^\alpha u$.

Покажем, что при вычислении $C_{m-1}(\gamma, \delta, s)$ слой $T(\gamma, \delta)$ при малых δ можно «распрямить» в плоский слой $\hat{T}(\gamma, \delta)$ (прямоугольник). Множество $F^{(s)} \cap T(\gamma, \delta)$ при этом деформируется и переходит в некоторое множество в $T(\gamma, \delta)$.

Пусть в прямоугольных координатах $\{\xi, \eta\}$ контур γ задается равенствами $\xi = \xi_\Gamma(t)$ и $\eta = \eta_\Gamma(t)$, где t — длина дуги на Γ $(0 < t < \mathrm{mes}_\Gamma \gamma)$. В силу гладкости Γ функции $\xi_\Gamma(t)$ и $\eta_\Gamma(t)$ по крайней мере $m+1$ раз непрерывно дифференцируемы. Поэтому, как легко видеть, функции

$$\xi = \xi_\Gamma(x_1) - x_2 \eta'_\Gamma(x_1), \quad \eta = \eta_\Gamma(x_1) + x_2 \xi'_\Gamma(x_1) \tag{2.128}$$

задают диффеоморфное отображение (класса C^m) прямоугольника $\hat{T}(\gamma, \delta) = \{0 < x_1 < \mathrm{mes}_\Gamma \gamma, \ |x_2| < \delta\}$ на слой $T(\gamma, \delta)$, так что ортогональная сеть, образованная координатными линиями в $\hat{T}(\gamma, \delta)$, переходит в криволинейную ортогональную сеть в $T(\gamma, \delta)$. Обозначим через $\hat{F}^{(s)} \cap \hat{T}(\gamma, \delta)$ прообраз множества $F^{(s)} \cap T(\gamma, \delta)$ при отображении (2.128), а через $\hat{C}_{m-1}(\gamma, \delta, s)$ и $\hat{W}_{m-1}(\gamma, \delta, s)$ соответственно $(m-1)$-емкость множества $\hat{F}^{(s)} \cap \hat{T}(\gamma, \delta)$ и класс функций, в котором ищется минимум функционала (2.127) при определении $\hat{C}_{m-1}(\gamma, \delta, s)$. Нетрудно проверить, что функция $\hat{u}(x_1, x_2) = u(\xi, \eta)$ принадлежит классу $\hat{W}_{m-1}(\gamma, \delta, s)$, если $u(\xi, \eta) \in W_{m-1}(\gamma, \delta, s)$. Пусть функция $v^{(s)}(\xi, \eta) \in W_{m-1}(\gamma, \delta, s)$ минимизирует функционал (2.127). Полагая $\hat{v}^{(s)}(x_1, x_2) = v^{(s)}(\xi, \eta)$, получаем

$$\left.\begin{aligned} C_{m-1}(\gamma, \delta, s) &= \int\limits_{T(\gamma,\delta)} |\nabla_m v^{(s)}|^2 \, d\xi d\eta, \\ \hat{C}_{m-1}(\gamma, \delta, s) &\leqslant \int\limits_{\hat{T}(\gamma,\delta)} |\nabla_m \hat{v}^{(s)}|^2 \, dx_1 dx_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.129}$$

Далее, отображение (2.128) в главной части при малых x_2 почти ортогональное, а именно матрица

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} \xi'_{x_1} & \xi'_{x_2} \\ \eta'_{x_1} & \eta'_{x_2} \end{pmatrix}$$

с точностью до величин порядка $O(x_2)$ удовлетворяет всем условиям ортогональных матриц. Поэтому, учитывая инвариантность $|\nabla_m u|^2$ относительно ортогональных преобразований, нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_{\hat{T}(\gamma,\delta)} |\nabla_m \hat{v}^{(s)}|^2 dx_1 dx_2 \leqslant \int\limits_{T(\gamma,\delta)} |\nabla_m v^{(s)}|^2 d\xi d\eta (1 + O(\delta)) +$$

$$+ C \| v^{(s)} \|_{m,\gamma} \| v^{(s)} \|_{m-1,\gamma},$$

где $\|\cdot\|_{l,\gamma}$ — норма функции в $W_2^l(\gamma, \delta, s)$, а постоянная C не зависит от s и δ. Оцениваем норму $\| v^{(s)} \|_{m-1,\gamma}$ с помощью неравенства (2.95). В результате, учитывая (2.129), получаем при $s \geqslant S(\gamma, \delta)$

$$\hat{C}_{m-1}(\gamma, \delta, s) \leqslant C_{m-1}(\gamma, \delta, s) + O(\delta)(1 + C_{m-1}(\gamma, \delta, s)).$$

Ввиду равноправия $\hat{T}(\gamma, \delta)$ и $T(\gamma, \delta)$ справедливо также обратное неравенство

$$C_{m-1}(\gamma, \delta, s) \leqslant \hat{C}_{m-1}(\gamma, \delta, s) + O(\delta)(1 + \hat{C}_{m-1}(\gamma, \delta, s)).$$

Отсюда видно, что при вычислении функции $c_{m-1}(x)$ в равенствах b теоремы 2,8 можно подставить $\hat{C}_{m-1}(\gamma, \delta, s)$ вместо $C_{m-1}(\gamma, \delta, s)$. Отметим, что если множество $F^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ удовлетворяет условиям 1—4, то этим же условиям, очевидно, будет удовлетворять и преобразованное множество $\hat{F}^{(s)}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $T(\gamma, \delta)$ и $F^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ уже преобразованы, и знак «$\wedge$» сверху будем опускать.

В силу условий 1 и 4 для каждого $F_i^{(s)}$ при больших s можно построить концентрические круги $K_i^{(s)}$ и $\tilde{K}_i^{(s)}$ радиусов $r_i = r_i^{(s)}$ и $R_i = \tilde{R}_i^{(s)} = \frac{R_i^{(s)}}{2}$ с центром на Γ такие, что $K_i^{(s)} \subset F_i^{(s)} \subset \tilde{K}_i^{(s)}$ и $\tilde{K}_i^{(s)} \cap \tilde{K}_j^{(s)} = \varnothing$ $(i \neq j)$. Пусть $K_I^{(s)} = \bigcup\limits_{i \in I} K_i^{(s)}$ — объединение кругов $K_i^{(s)}$, для которых соответствующие $\tilde{K}_i^{(s)}$ лежат строго внутри $T(\gamma, \delta)$; $W_{m-1}(\gamma, \delta, s, I)$ — замыкание по норме $W_2^m(T(\gamma, \delta))$ множества m раз непрерывно дифференцируемых в $T(\gamma, \delta)$ функций, равных нулю в окрестности $K_I^{(s)}$ и удовлетворяющих на $\gamma_\delta^{\pm}$ $(x_2 = \pm\delta)$ условиям (2.82) при $p = m - 1$. Так как $K_I^{(s)} \subset F^{(s)} \cap T(\gamma, \delta)$, то $W_{m-1}(\gamma, \delta, s, I) \supseteq W_{m-1}(\gamma, \delta, s)$. Поэтому, если функция $u_I^{(s)}(x)$ минимизирует функционал (2.127) в классе $W_{m-1}(\gamma, \delta, s, I)$, то

$$J(u_I^{(s)}) = \int\limits_{T(\gamma,\delta)} |\nabla_m u_I^{(s)}|^2 dx \leqslant C_{m-1}(\gamma, \delta, s). \qquad (2.130)$$

Чтобы оценить левую часть неравенства, представим $u_I^{(s)}$ в виде

$$u_I^{(s)}(x) = u^{(s)}(x) - v^{(s)}(x), \tag{2.131}$$

полагая

$$u^{(s)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2^{m-1}}{(m-1)!}, & x \in T(\gamma, \delta) \setminus \bigcup\limits_{i \in I} \widetilde{K}_i^{(s)}, \\ \dfrac{x_2^{m-1}}{(m-1)!} + \chi\left(\dfrac{r}{R_i}\right)\left[V_{mi}(r)\dfrac{x_2^{m-1}}{r^{m-1}} - \dfrac{x_2^{m-1}}{(m-1)!}\right], & x \in \widetilde{K}_i^{(s)},\ i \in I. \end{cases} \tag{2.132}$$

Здесь r — расстояние от точки $x = \{x_1, x_2\}$ до центра круга $\widetilde{K}_i^{(s)}$, $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $t \leqslant \frac{1}{2}$ и нулю при $t \geqslant 1$, а функция $V_{mi}(r)$ определяется равенствами

$$V_{1i}(r) = \begin{cases} \dfrac{\ln r - \ln r_i}{\ln R_i - \ln r_i}, & R_i \geqslant r \geqslant r_i, \\ 0, & r < r_i, \end{cases}$$

$$V_{m,i}(r) = \int\limits_0^r V_{m-1,i}(\rho)\, d\rho, \quad m \geqslant 2. \tag{2.133}$$

Легко видеть, что $u^{(s)}(x) \in W(\gamma, \delta, s, I)$. Следовательно, функция $v^{(s)}(x)$ должна принадлежать пространству $W_2^m(T(\gamma, \delta))$ и обращаться в нуль на $\gamma_\delta^\pm$ $(x_2 = \pm\delta)$ и $K_I^{(s)}$ вместе с производными до порядка $m-1$ включительно.

Исходя из формул (2.132), (2.133), функцию $u^{(s)}(x)$ можно представить в виде

$$u^{(s)}(x) = u_1^{(s)}(x) + u_0^{(s)}(x), \tag{2.134}$$

где

$$u_1^{(s)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2^{m-1}}{(m-1)!}, & x \in T(\gamma, \delta) \setminus \bigcup\limits_{i \in I} \widetilde{K}_i^{(s)}, \\ \dfrac{x_2^{m-1}}{(m-1)!} + \chi\left(\dfrac{r}{R_i}\right)\left[\dfrac{x_2^{m-1}}{(m-1)!}\dfrac{\ln\frac{r}{r_i}}{\ln\frac{R_i}{r_i}} - \dfrac{x_2^{m-1}}{(m-1)!}\right], & x \in \widetilde{K}_i^{(s)} \setminus K_i^{(s)}, \end{cases} \tag{2.135}$$

$$u_0^{(s)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in T(\gamma, \delta) \setminus \bigcup\limits_{i \in I} \widetilde{K}_i^{(s)}, \\ \dfrac{\chi\left(\frac{r}{R_i}\right)}{\ln\frac{R_i}{r_i}} \sum\limits_{k=0}^{m-1} A_k^m x_2^{m-1}\left(\dfrac{r_i}{r}\right)^k, & x \in \widetilde{K}_i^{(s)} \setminus K_i^{(s)}, \end{cases} \tag{2.136}$$

причем постоянные A_i^m не зависят от r_i и R_i. Согласно (2.130), (2.131) и (2.134)

$$J(u_I^{(s)}) = J(u^{(s)}) + J(v^{(s)}) - 2\int\limits_{T(\gamma,\delta)} (\nabla_m u_0^{(s)}, \nabla_m v^{(s)})\,dx -$$

$$-2\int\limits_{T(\gamma,\delta)} (\nabla_m u_1^{(s)}, \nabla_m v^{(s)})\,dx,$$

откуда, преобразовывая последний интеграл с помощью интегрирования по частям и учитывая свойства функций $u_1^{(s)}(x)$ и $v^{(s)}(x)$, получаем

$$J(u_I^{(s)}) = J(u^{(s)}) + J(v^{(s)}) - 2\int\limits_{T(\gamma,\delta)} (\nabla_m u_0^{(s)}, \nabla_m v^{(s)})\,dx - 2\int\limits_{T(\gamma,\delta)} Fv^{(s)}dx,$$

где $F = F(x) = (-1)^m \Delta^m u_1^{(s)}(x)$. Так как $u_I^{(s)}(x)$ минимизирует функционал $J(u_I^{(s)})$, то из последнего равенства следует, что функция $v^{(s)}(x)$ должна минимизировать функционал

$$J_0(v^{(s)}) = J(v^{(s)}) - 2\int\limits_{T(\gamma,\delta)} (\nabla_m u_0^{(s)}, \nabla_m v^{(s)})\,dx - 2\int\limits_{T(\gamma,\delta)} Fv^{(s)}dx$$

в классе функций из $W_2^m(T(\gamma, \delta))$, равных нулю вместе с производными до порядка $m-1$ на $\gamma_\delta^\pm$ и $K_I^{(s)}$. Это позволяет оценить интеграл $J(v^{(s)})$. Действительно, так как $J_0(v^{(s)}) \leqslant 0$, то в силу неравенства Коши — Буняковского и (2.135), (2.136)

$$J(v^{(s)}) \leqslant 2\left\{\sum_{i\in I}\int\limits_{\tilde K_i^{(s)}\setminus K_i^{(s)}} |\nabla_m u_0^{(s)}|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \{J(v^{(s)})\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ 2\sum_{i\in I}\left\{\int\limits_{\tilde K_i^{(s)}\setminus K_i^{(s)}} |F|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int\limits_{\tilde K_i^{(s)}\setminus K_i^{(s)}} |v^{(s)}|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.137)$$

Из формул (2.136) нетрудно получить оценки (при $|\alpha| = m$)

$$D^\alpha u_0^{(s)}(x) = \begin{cases} O\left(\frac{r_i}{r^2}\ln^{-1}\frac{R_i}{r_i}\right), & r_i \leqslant r \leqslant \frac{R_i}{2}, \\ O\left(R_i^{-1}\ln^{-1}\frac{R_i}{r_i}\right., & \frac{R_i}{2} < r \leqslant R_i, \end{cases} \qquad (2.138)$$

откуда в силу условий 2 $\left(R_i = \frac{R_i^{(s)}}{2} \to 0\right)$ и 4 следует, что

$$\sum_{i\in I}\int\limits_{\tilde K_i^{(s)}\setminus K_i^{(s)}} |\nabla_m u_0^{(s)}|^2\,dx = O\left(\sum_{(\gamma)}\ln^{-2}\frac{R_i}{r_i}\right) = o(1) \quad (s\to\infty). \qquad (2.139)$$

Оценим теперь функцию $F(x) = (-1)^m \Delta^m u_1^{(s)}(x)$. Так как $\Delta^m (x_2^{m-1} \ln r) = 0$, то согласно (2.135) $F(x) = 0$ при $r \leqslant \frac{R_i}{2}$. Далее, при $\frac{R_i}{2} \leqslant r \leqslant R_i$

$$D^\alpha \left[\chi \left(\frac{r}{R_i} \right) \frac{x_2^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \frac{\ln \frac{r}{R_i}}{\ln \frac{R_i}{r_i}} \right] = O \left(\frac{R_i^{m-1-|\alpha|}}{\ln \frac{R_i}{r_i}} \right), \quad |\alpha| \leqslant 2m, \tag{2.140}$$

откуда, учитывая (2.135), заключаем, что

$$\max_{\widetilde{K}_i^{(s)} \setminus K_i^{(s)}} |F(x)| = O \left(R_i^{m-1} \ln^{-1} \frac{R_i}{r_i} \right).$$

Следовательно,

$$\int_{\widetilde{K}_i^{(s)} \setminus K_i^{(s)}} |F|^2 \, dx = O \left(R_i^{-2m} \ln^{-2} \frac{R_i}{r_i} \right). \tag{2.141}$$

Для того чтобы оценить норму функции $v^{(s)}(x)$ в $L_2(\widetilde{K}_i^{(s)})$, докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 2.9. *Пусть* $\{x_{1i}, 0\}$ *— центр круга* $\widetilde{K}_i^{(s)}$ *(радиуса* R_i*), лежащего в прямоугольнике* $T(\gamma, \delta)$*, а* $T_i(\delta) = \{x\colon |x_1 - x_{1i}| < R_i, |x_2| < \delta\}$. *Если функция* $u(x) \in W_2^m(T(\gamma, \delta))$ *удовлетворяет условиям*

$a)$ $D^\alpha u|_{\gamma_\delta^\pm} = 0, \quad |\alpha| \leqslant m-1,$

$b)$ $D^\alpha u(x) = 0, \quad |\alpha| \leqslant m-2,$ *в точке* $x = \{x_{1i}, 0\}$,

то справедливо неравенство

$$\int_{\widetilde{K}_i^{(s)}} u^2(x) \, dx \leqslant 2^m R_i^{2m-1} \delta \int_{T_i(\delta)} |\nabla_m u|^2 \, dx.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу теоремы вложения условие b в R_2 имеет смысл для функций из $W_2^m(T(\gamma, \delta))$. Так как любую функцию из $W_2^m(T(\gamma, \delta))$, удовлетворяющую условиям a, b, можно аппроксимировать в норме $W_2^m(T(\gamma, \delta))$ достаточно гладкими в $\overline{T(\gamma, \delta)}$ функциями, удовлетворяющими этим же условиям, то можно считать, что $u(x)$ m раз непрерывно дифференцируема в $\overline{T(\gamma, \delta)}$. Кроме того, достаточно получить неравенство только для верхних половин областей $\widetilde{K}_i^{(s)}$ и $T_i(\delta)$ (обозначим их через K_i^+ и T_i^+).

Введем в $T(\gamma, \delta)$ прямоугольную систему координат $\{x_1, x_2\}$ с началом в точке $\{x_{1i}, 0\}$. В силу условия a

$$D^\alpha u(x_1, x_2) = -\int_{x_2}^{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} D^\alpha u(x_1, \eta) \, d\eta, \qquad |\alpha| \leqslant m-1,$$

и, следовательно, при $0 \leqslant x_2 \leqslant \delta$

$$|D^\alpha u(x_1, x_2)|^2 \leqslant \delta \int_0^\delta \left| \frac{\partial}{\partial \eta} D^\alpha u(x_1, \eta) \right|^2 d\eta.$$

Отсюда при $|\alpha| \leqslant m-1$ вытекают такие неравенства:

$$\int_{-R_i}^{R_i} |D^\alpha u(x_1, x_2)|^2 dx_1 \leqslant \delta \int_{T_i^+} |\nabla_m u|^2 dx, \tag{2.142}$$

$$\int_{K_i^+} |D^\alpha u|^2 dx \leqslant R_i \delta \int_{T_i^+} |\nabla_m u|^2 dx. \tag{2.143}$$

Из последнего неравенства вытекает справедливость леммы при $m = 1$.

Рассмотрим случай $m > 1$. Поступая так же, как при выводе неравенства (2.95), нетрудно получить

$$\int_{K_i^+} |u(x_1, x_2)|^2 dx \leqslant \sum_{k=0}^{m-2} 2^{k+1} R_i^{2k+1} \int_{-R_i}^{R_i} \left| \frac{\partial^k u}{\partial x_2^k}(x_1, 0) \right|^2 dx_1 + 2^{m-1} R_i^{2m-2} \int_{K_i^+} \left| \frac{\partial^{m-1} u(x, \eta)}{\partial \eta^{m-1}} \right|^2 dx. \tag{2.144}$$

Далее, в силу условия b леммы 2.9

$$D^\alpha u(x_1, 0) = \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial \xi} D^\alpha u(\xi, 0)\, d\xi, \qquad |\alpha| \leqslant m-2,$$

и, следовательно,

$$\int_{-R_i}^{R_i} |D^\alpha u(x, 0)|^2 dx_1 \leqslant R_i^2 \int_{-R_i}^{R_i} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} D^\alpha u(x_1, 0) \right|^2 dx_1, \quad |\alpha| \leqslant m-2.$$

Отсюда обычным способом находим

$$\int_{-R_i}^{R_i} \left| \frac{\partial^k u}{\partial x_2^k}(x_1, 0) \right|^2 dx_1 \leqslant R_i^{2(m-1-k)} \int_{-R_i}^{R_i} \left| \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_1^{m-1-k} \partial x_2^k}(x_1, 0) \right|^2 dx_1,$$

$$k = 0, 1, \ldots, m-2,$$

или в силу (2.141)

$$\int_{-R_i}^{R_i} \left| \frac{\partial^k u}{\partial x_2^k}(x_1, 0) \right|^2 dx_1 \leqslant R_i^{2(m-1-k)} \delta \int_{T_i^+} |\nabla_m u|^2 dx, \quad k = 0, 1, \ldots, m-2.$$

Подставляя эти неравенства вместе с (2.143) в (2.144), убеждаемся в справедливости леммы.

Функция $v^{(s)}(x)$ удовлетворяет условиям a, b леммы 2.9, поэтому

$$\int\limits_{\widetilde{K}_i^{(s)}} |v^{(s)}|^2\,dx \leqslant 2^m R^{2m-1}\delta \int\limits_{T_i(\delta)} |\nabla_m v^{(s)}|^2\,dx.$$

Отсюда, учитывая (2.137), (2.139), (2.141) и условие 4, получаем

$$J(v^{(s)}) \leqslant o(1)\,J^{\frac{1}{2}}(v^{(s)}) + O(\delta^{\frac{1}{2}}) \sum_{i\in I} R_i^{-\frac{1}{2}} \ln^{-1}\frac{R_i}{r_i} \left\{ \int\limits_{T_i(\delta)} |\nabla_m v^{(s)}|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ o(1) + O(\delta^{\frac{1}{2}}) \left(\sum_{(\gamma)} \frac{1}{R_i^{(s)}\,|\ln r_i^{(s)}|} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} J^{\frac{1}{2}}(v^{(s)}),$$

и, следовательно,

$$\lim_{\delta\to 0} \varlimsup_{s\to\infty} J(v^{(s)}) = 0. \tag{2.145}$$

Далее, согласно (2.131)

$$J^{\frac{1}{2}}(u_I^{(s)}) \geqslant J^{\frac{1}{2}}(u^{(s)}) - J^{\frac{1}{2}}(v^{(s)}),$$

откуда в силу (2.130) и (2.145) вытекает

$$\lim_{\delta\to 0} \varliminf_{s\to\infty} C_{m-1}(\gamma,\ \delta,\ s) \geqslant J(u^{(s)}). \tag{2.146}$$

Используя равенства (2.134) и (2.135), записываем

$$J(u^{(s)}) \geqslant J_1^{(s)} + J_2^{(s)} + J_3^{(s)} - 2\sqrt{J_3^{(s)}}\sqrt{J_1^{(s)} + J_2^{(s)}}, \tag{2.147}$$

где

$$J_1^{(s)} = \sum_{i\in I} \int\limits_{K_{1i}^{(s)}\setminus K_i^{(s)}} \left| \nabla_m \left(\frac{x_2^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{R_i}{r_i}} \right) \right|^2 dx,$$

$$J_2^{(s)} = \sum_{i\in I} \int\limits_{\widetilde{K}_i^{(s)}\setminus K_{1i}^{(s)}} \left| \nabla_m \left[\chi\left(\frac{r}{R_i}\right) \frac{x_2^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \frac{\ln \frac{r}{R_i}}{\ln \frac{R_i}{r_i}} \right] \right|^2 dx,$$

$$J_3^{(s)} = \sum_{i\in I} \int\limits_{\widetilde{K}_i^{(s)}\setminus K_i^{(s)}} |\nabla_m u_0^{(s)}|^2\,dx,$$

а $K_{1i}^{(s)}$ — круг радиуса $\frac{R_i}{2}$, концентрический с $\widetilde{K}_i^{(s)}$. Сумма $J_3^{(s)}$ оценена (см. (2.139)). Аналогично с помощью (2.140) и условий 2 и 4 оценивается сумма $J_2^{(s)}$:

$$J_2^{(s)} = O\left\{ \sum_{(\gamma)} \ln^{-2}\frac{R_i}{r_i} \right\} = o(1) \quad (s\to\infty). \tag{2.148}$$

Далее, нетрудно проверить, что выражение

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2=m} \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \left[\frac{x_2^{m-1}}{(m-1)!} \ln r \right] \right\}^2 r^2$$

не зависит от $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и является полиномом $P_m(u, v)$ степени $2(2m-1)$ от $u = \frac{x_1}{r}$ и $v = \frac{x_2}{r}$. Поэтому, учитывая условия 1 и 4, получаем

$$J_1^{(s)} = \int_0^{2\pi} P_m(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi \sum_{i \in I} \int_{r_i}^{R_i} \frac{dr}{r \ln^2 \frac{R_i}{r_i}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} P_m(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi \sum_{(\gamma)} \frac{1}{|\ln d_i^{(s)}|} + o(1). \qquad (2.149)$$

Объединяя (2.139), (2.145) — (2.149) и условие 3, приходим к такой оценке снизу:

$$\lim_{\delta\to 0} \varliminf_{s\to\infty} C_{m-1}(\gamma, \delta, s) \geqslant \int_0^{2\pi} P_m(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi \int_\gamma c(x)\, d\Gamma. \qquad (2.150)$$

Аналогичная оценка сверху выводится проще. Пусть $\check{K}_i^{(s)}$ — круги радиуса $d_i^{(s)}$, концентрические с $\tilde{K}_i^{(s)}$. В силу условия 4 при больших s $F_i^{(s)} \subset \check{K}_i^{(s)} \subset \tilde{K}_i^{(s)}$ и $\tilde{K}_i^{(s)} \cap \tilde{K}_j^{(s)} = \varnothing$ $(i \neq j)$. Рассмотрим функцию

$$\check{u}^{(s)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2^{m-1}}{(m-1)!}, & x \in T(\gamma, \delta) \setminus \bigcup_i \tilde{K}_i^{(s)}, \\ \dfrac{x_2^{m-1}}{(m-1)!} + \chi\left(\dfrac{r}{R_i}\right)\left[V_{mi}(r)\dfrac{x_2^{m-1}}{r^{m-1}} - \dfrac{x_2^{m-1}}{(m-1)!}\right], & x \in \tilde{K}_i^{(s)} \end{cases}$$

(обозначения те же, что и в (2.132), отличие состоит только в том, что $\check{u}^{(s)}(x)$ теперь задается нижней строкой во всех $\tilde{K}_i^{(s)}$ $(F_i^{(s)} \cap T(\gamma, \delta) \neq \varnothing)$, а не только в тех, которые лежат строго в $T(\gamma, \delta)$, и функция $V_{mi}(r)$ определяется по формулам (2.133) при $r_i = d_i^{(s)}$). Учитывая включение $\bigcup F_i^{(s)} \subset \bigcup \check{K}_i^{(s)}$, нетрудно проверить, что $\check{u}^{(s)}(x)$ принадлежит классу $W_{m-1}(\gamma, \delta, s)$, и, следовательно,

$$C_{m-1}(\gamma, \delta, s) \leqslant \int_{T(\gamma,\delta)} |\nabla_m \check{u}^{(s)}|^2\, dx = J(\check{u}^{(s)}).$$

Интеграл $J(\check{u}^{(s)})$ оценивается точно так же, как в (2.147). В результате находим

$$\lim_{\delta\to 0} \varlimsup_{s\to\infty} C_{m-1}(\gamma, \delta, s) \leqslant \int_0^{2\pi} P_m(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi \int_\gamma c(x)\, d\Gamma. \qquad (2.151)$$

Из (2.150) и (2.151) следует, что при $p = m - 1$ выполняется условие b теоремы 2.8, причем $c_{m-1}(x)$ определяется равенством (2.126). Теорема доказана.

Система уравнений теории упругости

Рассмотрим в области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{s} F_j^{(s)}, \ F_j^{(s)} \subset \Omega \subset R_2\ (R_3)$, первую краевую задачу для системы уравнений линейной теории упругости

$$-\mu\Delta \mathbf{u}^{(s)}(x) - (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}^{(s)}(x) = \mathbf{K}(x), \qquad (2.152)$$

$$\mathbf{u}^{(s)}\big|_{\partial\Omega^{(s)}} = 0, \qquad (2.153)$$

где $\mathbf{K}(x)$ — заданный вектор объемных сил, $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ — вектор смещений. Граничное условие (2.153) означает, что среда жестко закреплена на границе $\partial\Omega^{(s)}$. Параметры λ и μ в (2.152) должны удовлетворять условиям $\mu > 0$ и $3\lambda + 2\mu > 0$ [23].

Покажем, что для данной системы уравнений выполняются неравенства (2.81) и (2.12). Для этого заметим, что систему (2.152) можно записать в виде (2.79):

$$A\mathbf{u}^{(s)} = -\sum_{i,k}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial \mathbf{u}^{(s)}}{\partial x_k}\right) = \mathbf{K}. \qquad (2.152')$$

Здесь матрицы a_{ii} диагональны, причем

$$a_{ii}^{kk} = \begin{cases}\lambda + 2\mu, & i = k,\\ \mu, & i \neq k,\end{cases}$$

а элементы матриц a_{ik} $(i \neq k)$ все равны нулю, кроме $a_{ik}^{ik} = \lambda + \mu$.

Пусть $\{\mathbf{t}^i,\ i = 1, 2\ (3)\}$ — совокупность вещественных векторов в $R_2\ (R_3)$. Тогда

$$\sum_{i,k}\sum_{j,l} a_{ik}^{jl} t_l^k t_j^i = \sum_i (\lambda + 2\mu)(t_i^i)^2 + \sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}} \mu (t_i^k)^2 +$$

$$+ \sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}} (\lambda + \mu)\, t_i^i t_k^k = \frac{1}{2}(\lambda + \mu)\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}} (t_i^i + t_k^k)^2 + \mu\sum_{i,k}(t_i^k)^2.$$

Поскольку $\frac{3}{2}\lambda + \mu > 0$ и $\mu > 0$, то $\lambda + \mu > 0$, и, следовательно,

$$\sum_{i,k}\sum_{j,l} a_{ik}^{jl} t_l^k t_j^i \geqslant \mu \sum_k \|\mathbf{t}^k\|^2.$$

Таким образом, неравенство (2.11) выполняется, а из него для системы (2.152') непосредственно вытекает и неравенство (2.12). Поэтому для данной системы применима теория, развитая в § 3.

Пусть в задаче (2.152), (2.153) $F_j^{(s)}$ — шары диаметра $d_j^{(s)}$ в R_3. Тогда нетрудно найти ее решение (см. [23]), а с помощью этого решения — тензор $C(F_j^{(s)}) = \{C^{ik}(F_j^{(s)})\}$:

$$C^{ik}(F_j^{(s)}) = \frac{6\pi\mu(\lambda + 2\mu)}{2\lambda + 5\mu} d_j^{(s)}\delta_{ik} + o(d_j^{(s)}), \qquad i, k = 1, 2, 3.$$

Пусть, далее, при $s \to \infty$ существует объемная плотность $a(x)$ суммы диаметров,

$$\int_G a(x)\,dx = \lim_{s\to\infty} \sum_{(G)} d_j^{(s)},$$

и $R_j^{(s)} \geqslant C\sqrt[3]{d_j^{(s)}}$ $(C > 0)$. Тогда, как легко видеть, выполняются условия теоремы 2.6, и согласно этой теореме решение $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ задачи (2.152), (2.153) сходится к решению $\mathbf{u}(x)$ краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &A\mathbf{u}(x) + c(x)\,\mathbf{u}(x) = \mathbf{K}(x), \qquad x \in \Omega, \\ &\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.154}$$

где оператор A и вектор $\mathbf{K}$ определяются из (2.152′), $c(x) = \frac{6\pi\mu(\lambda + 2\mu)}{2\lambda + 5\mu} a(x) I$, а I — единичная матрица в R_3. Если центры шаров $F_j^{(s)}$ расположены на поверхности $\Gamma \subset \Omega$, при $s \to \infty$ существует поверхностная плотность $a_\Gamma(x)$ суммы диаметров $d_j^{(s)}$ и $R_j^{(s)} \geqslant C\sqrt{d_j^{(s)}}$ $(C > 0)$, то выполняются все условия теоремы 2.7. Согласно этой теореме $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ сходится к решению задачи сопряжения

$$A\mathbf{u}(x) = \mathbf{K}(x), \qquad x \in \Omega \setminus \Gamma, \tag{2.155}$$

$$\mathbf{u}^+(x) = \mathbf{u}^-(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{2.156}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}(x)}{\partial \nu}\right)^+ - \left(\frac{\partial \mathbf{u}(x)}{\partial \nu}\right)^- = a^{-1}(x)\,c_\Gamma(x)\,\mathbf{u}(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{2.157}$$

$$\mathbf{u}(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \tag{2.158}$$

где $c_\Gamma(x) = \frac{6\pi\mu(\lambda + 2\mu)}{2\lambda + 5\mu} a_\Gamma(x) I$, $a(x) = \sum_{i,k} a_{ik} \cos(\nu, x_i)\cos(\nu, x_k)$ — матрица с элементами $a^{ik} = (\lambda + \mu)\cos(\nu, x_i)\cos(\nu, x_k) + \mu\delta_{ik}$.

Заметим, что в силу (2.156) граничное условие (2.157) можно записать также в виде

$$(\mathbf{t}(\mathbf{u}))^+ - (\mathbf{t}(\mathbf{u}))^- = c_\Gamma(x)\,\mathbf{u}(x),$$

где $\mathbf{t}(\mathbf{u})$ — вектор упругих напряжений на Γ, определяемый равенством [23]

$$\mathbf{t}(\mathbf{u}) = \sum_{i,k}\left[\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}\,\delta_{ik} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right]\cos(\nu, x_i)\,\mathbf{e}^k$$

($\mathbf{e}^k$ — орт оси x_k).

Аналогичные результаты справедливы и в двумерном пространстве R_2. При этом матрицы $c(x)$ и $c_\Gamma(x)$ в предельных задачах (2.154) и (2.155) — (2.158) имеют вид

$$c(x) = \frac{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu}\, a(x)\, I, \quad c_\Gamma(x) = \frac{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu}\, a_\Gamma(x)\, I,$$

где плотности $a(x)$ и $a_\Gamma(x)$ определяются из равенств

$$\int\limits_G a(x)\, dx = \lim_{s\to\infty} \sum_{(G)} \frac{1}{|\ln d_j^{(s)}|}, \quad \int\limits_\gamma a_\Gamma(x)\, d\Gamma = \lim_{s\to\infty} \sum_{(\gamma)} \frac{1}{|\ln d_j^{(s)}|}.$$

Отметим, что в двумерном случае эти результаты справедливы для множеств $F^{(s)} = \bigcup\limits_i F_i^{(s)}$ произвольного вида, удовлетворяющих условию c теоремы 2.6 или 2.7 и условию типа 1 (см. [10]).

Нами рассмотрена однородная и изотропная среда. Для произвольной среды, вообще говоря, не выполняется неравенство (2.12). Однако хотя этот случай формально и выпадает из рассмотрений § 3, 4, он может быть изучен аналогичными методами, если воспользоваться известным неравенством Корна, которое в данном случае выполняет роль неравенства (2.12) (см. [10]).

ЗАДАЧИ

1. Пок зать, что каждая из предельных задач (A_p), $p = 0, 1, \ldots, m-1$, рассмотренных в теореме 2.8, реализуется. Для этого можно рассмотреть оператор $L = (-\Delta)^m$, в качестве поверхности Γ взять кусок гиперплоскости в R_n, а в качестве множества $F^{(s)}$ — совокупность шаров в R_n диаметра d с центрами в узлах периодической решетки на Γ периода l. Доказать, что если $d \sim l^{\frac{n-1}{n-2m+2p}}$ (при $n - 2m + 2p > 0$) или $d \sim \exp\left(-\frac{1}{l}\right)$ (при $n - 2m + 2p = 0$), то реализуется задача (A_p).

2. Доказать, что условие b теоремы 2.8 является не только достаточным, но и необходимым, т. е. если выполняется условие a и последовательность решений задачи (2.79), (2.80) сходится к решению задачи (A_p), то выполняется и условие b.

3. Исследовать взаимную зависимость условий 1—3 теоремы 2.4.

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

§ 1. ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПОВЕРХНОСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МНОЖЕСТВ $F^{(s)}$

Пусть Ω — произвольная фиксированная область в R_n, $n \geqslant 2$ (в частности, Ω может совпадать с R_n), а $F^{(s)}$ — ограниченное замкнутое множество в Ω, лежащее вблизи некоторой фиксированной поверхности $\Gamma \subset \Omega$. Множество $F^{(s)}$ зависит от параметра s и при $s \to \infty$ попадает в сколь угодно малую окрестность Γ. В области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus F_i^{(s)}$ рассмотрим краевую задачу

$$Lu^{(s)} \equiv \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_k}\right) - cu^{(s)} = f, \tag{3.1}$$

$$\left.\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu_L}\right|_{\partial F^{(s)}} = 0, \tag{3.2}$$

$$u^{(s)} \in W_2^2(\Omega^{(s)}\,\mathrm{loc}) \cap W_{20}^1(\Omega^{(s)}), \tag{3.3}$$

где $f = f(x)$ — непрерывная и финитная в Ω функция, носитель которой не пересекается с Γ, $W_{20}^1(\Omega^{(s)})$ — замыкание по норме $W_2^1(\Omega^{(s)})$ множества функций из $W_2^1(\Omega^{(s)})$, равных нулю в окрестности $\partial\Omega$, $\frac{\partial}{\partial \nu_L}$ — производная по конормали ν_L к Γ, соответствующей оператору L:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_L} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\cos(\nu,\ x_i)\frac{\partial}{\partial x_k},$$

ν — нормаль к $\partial F^{(s)}$. Поскольку поверхность $\partial F^{(s)}$ не предполагается гладкой, граничное условие (3.2) понимается в обобщенном смысле [48]. А именно: пусть $\{\Omega_i^{(s)},\ i = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность подобластей в $\Omega^{(s)}$, ограниченных гладкими поверхностями и таких, что $\Omega_i^{(s)} \subset \Omega_{i+1}^{(s)}$ и $\Omega^{(s)} = \bigcup_i \Omega_i^{(s)}$; $\Sigma_i^{(s)}$ — часть границы области $\Omega_i^{(s)}$, охватывающая множество $F^{(s)}$. Тогда краевое условие (3.2) следует понимать так:

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\Sigma_i^{(s)}} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu_L}\zeta\, d\Gamma = 0, \tag{3.2$'$}$$

где $\zeta = \zeta(x)$ — любая функция из $W_2^1(\Omega^{(s)})$; $\frac{\partial}{\partial \nu_L}$ — производная по конормали к $\Sigma_i^{(s)}$. Коэффициенты $a_{ik} = a_{ik}(x)$ и $c = c(x)$ оператора L предполагаются достаточно гладкими функциями, заданными всюду в Ω и удовлетворяющими условиям $a_{ik} = a_{ki}$, $c(x) > 0$ и

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \geqslant \mu_0 |\xi|^2 \tag{3.4}$$

при всех $x \in \Omega$ и любом векторе $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. Граничное условие на $\partial\Omega$ в данной задаче не существенно, поэтому для простоты функция $u^{(s)}(x)$ подчинена на $\partial\Omega$ первому краевому условию (3.3) ($u^{(s)} \in W_{20}^1(\Omega^{(s)})$). Заметим, что если область Ω не ограничена, то это условие включает требование убывания $u^{(s)}(x)$ на бесконечности. При этом предполагается, что $c(x) \geqslant h > 0$ вне некоторого шара.

Как известно, задача (3.1) — (3.3) тесно связана с задачей нахождения минимума функционала

$$J(u) = \int_{\Omega^{(s)}} \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu^2 + 2fu \right\} dx. \tag{3.5}$$

При помощи известных методов [13, 48] можно показать, что существует единственная функция $u^{(s)} = u^{(s)}(x)$, минимизирующая функционал (3.5) в классе $W_{20}^1(\Omega^{(s)})$, и эта функция является решением задачи (3.1) — (3.3). Изучим асимптотическое поведение $u^{(s)}(x)$ при $s \to \infty$, когда множество $F^{(s)}$ неограниченно приближается к поверхности $\Gamma \subset \Omega$. Покажем, что при определенных условиях $u^{(s)}(x)$ сходится к решению $u(x)$ следующей краевой задачи (сопряжения):

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \tag{3.6}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_L}\right)^+ + \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_L}\right)^- = p(x)\,[u^+(x) - u^-(x)], \quad x \in \Gamma, \tag{3.7}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{3.8}$$

где оператор L и функция $f(x)$ те же, что в (3.1), $p(x)$ — неотрицательная ограниченная функция на поверхности Γ; знаками «+» и «—» отмечены предельные значения функций с разных сторон от Γ; $\frac{\partial}{\partial \nu_L}$ — производная по конормали к Γ, направленной в сторону, которой соответствует знак «+». Если функция $p(x)$ недостаточно гладкая, то и в этой задаче граничное условие (3.7) будем понимать в обобщенном смысле. А именно: пусть Ω_i — возрастающая последовательность областей с гладкими границами, исчерпывающая область $\Omega \setminus \Gamma$ (Ω_i — несвязны, если Γ разбивает Ω на две подобласти), а Σ_i — часть границы Ω_i, охватывающая Γ. Тогда для любой функции $\zeta = \zeta(x) \in W_2^1(\Omega \setminus \Gamma)$

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\Sigma_i} \frac{\partial u}{\partial \nu_L} \zeta d\Gamma = \int_{\Gamma} p(u^+ - u^-)(\zeta^+ - \zeta^-) d\Gamma, \qquad (3.7')$$

где $p = p(x)$, $\frac{\partial}{\partial \nu_L}$ — производная по конормали к Σ_i, направленной в сторону Ω_i.

Введем характеристику влияния множеств $F^{(s)}$ на решение второй краевой задачи. Пусть γ — произвольный кусок поверхности Γ (открытое связное множество на Γ); $T(\gamma, \delta)$ — слой толщины 2δ со срединной поверхностью γ; $\gamma_\delta^\pm$ — основания слоя $T(\gamma, \delta)$, т. е. поверхности, лежащие с разных сторон от γ и образованные концами нормалей к Γ длины δ, проходящих через точки $x \in \gamma$; $T(\gamma, \delta, s)$ — область, образующаяся в результате выбрасывания из слоя $T(\gamma, \delta)$ точек множества $F^{(s)}$, т. е. $T(\gamma, \delta, s) = T(\gamma, \delta) \setminus F^{(s)}$. Обозначим через $W(\gamma, \delta, s)$ класс функций из $W_2^1(T(\gamma, \delta, s))$, принимающих (в смысле L_2) на основаниях γ_δ^+ и γ_δ^- значения, равные соответственно единице и нулю. Назовем L-проводимостью области $T(\gamma, \delta, s)$ (в направлении нормали к γ) величину

$$P_L(\gamma, \delta, s) = \inf_{u^{(s)}} \int_{T(\gamma,\delta,s)} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_k} dx, \qquad (3.9)$$

где нижняя грань берется по множеству функций $u^{(s)}(x)$ из класса $W(\gamma, \delta, s)$, $a_{ik} = a_{ik}(x)$ — коэффициенты оператора L. Это понятие является простым обобщением (на случай произвольного эллиптического самосопряженного оператора L второго порядка) известного понятия проводимости, связанного с оператором Лапласа [41]. Более общие аналоги проводимости изучались в работе [27]. Отметим очевидные свойства L-проводимости:

1) $P_L(\gamma_1, \delta, s) \leqslant P_L(\gamma_2, \delta, s)$, если $\gamma_1 \subseteq \gamma_2$;

2) $P_L(\gamma, \delta_1, s) \leqslant P_L(\gamma, \delta_2, s)$, если $\delta_1 \geqslant \delta_2$;

3) $P_L(\gamma_1 \cup \gamma_2, \delta, s) \geqslant P_L(\gamma_1, \delta, s) + P_L(\gamma_2, \delta, s)$, если $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \varnothing$

4) $P_L(\gamma, \delta, s_1) \leqslant P_L(\gamma, \delta, s_2)$, если $F^{(s_1)} \cap T(\gamma, \delta) \supseteq F^{(s_2)} \cap T(\gamma, \delta)$.

Последнее неравенство показывает, что L-проводимость в некотором смысле характеризует «проницаемость» множества $F^{(s)}$ (в направлении нормали к Γ), поскольку она в отличие от характеристики массивности $C^{kk}(\gamma, \delta, s)$ (см. гл. II, § 4) убывает при расширении $F^{(s)}$.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 3.1. *Пусть при $s \to \infty$ выполняются следующие условия:*

а) множества $F^{(s)}$ попадают в сколь угодно малую окрестность $\Gamma \subset \Omega$;

b) для любого куска $\gamma \subset \Gamma$ существуют пределы

$$\lim_{\delta\to 0} \underline{\lim}_{s\to\infty} P_L(\gamma, \delta, s) = \lim_{\delta\to 0} \overline{\lim}_{s\to\infty} P_L(\gamma, \delta, s) = \int_\gamma p d\Gamma, \qquad (3.10)$$

где $p = p(x)$ — неотрицательная ограниченная функция на Γ.

Тогда последовательность решений $u^{(s)}(x)$ краевых задач (3.1) — (3.3) *всюду вне Γ сходится к решению $u(x)$ краевой задачи* (3.6) — (3.8). *Сходимость равномерна по x в любой подобласти, находящейся на положительном расстоянии от Γ.*

Обратно: если выполняется условие (a) и последовательность решений задачи (3.1) — (3.3) *для любой $f(x)$ сходится к решению задачи* (3.6) — (3.8), *то для любого куска $\gamma \subset \Gamma$ выполняется условие b.*

Общая схема доказательства этой теоремы аналогична схеме доказательства теоремы 2.8. Однако аналитически основные конструкции имеют некоторые особенности. Некоторые оценки также приходится проводить иначе. В частности, вместо неравенства (2.95) используются следующие две леммы.

Лемма 3.1. *Пусть $u(x) \in W_2^1(T(\gamma, \delta, s))$ и $\hat{u}^{\pm} = \operatorname{vraimax}_{v_\delta^{\pm}} u(x)$, $\check{u}^{\pm} = \operatorname{vraimin}_{v_\delta^{\pm}} u(x)$. Справедливо неравенство*

$$\int_{T(\gamma,\delta,s)} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx \geqslant a^2 P_L(\gamma, \delta, s),$$

где $P_L(\gamma, \delta, s)$ — L-проводимость $T(\gamma, \delta, s)$; $a = \check{u}^+ - \hat{u}^-$, если $\check{u}^+ > \hat{u}^-$, и $a = \check{u}^- - \hat{u}^+$, если $\check{u}^- > \hat{u}^+$; в остальных случаях полагаем $a = 0$.

Доказательство. Пусть $\check{u}^+ > \hat{u}^-$. Рассмотрим срезанную функцию

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \check{u}^+ & \text{при } u(x) \geqslant \check{u}^+, \\ u(x) & \text{при } \hat{u}^- < u(x) < \check{u}^+, \\ \hat{u}^- & \text{при } u(x) \leqslant \hat{u}^-. \end{cases} \qquad (3.11)$$

Покажем, что $\bar{u}(x) \in W_2^1(T(\gamma, \delta, s))$ и

$$\int_{T(\gamma,\delta,s)} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx \geqslant \int_{T(\gamma,\delta,s)} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} dx. \qquad (3.12)$$

Для этого выберем последовательность подобластей $G_j \subset T(\gamma, \delta, s)$ с гладкими границами и следующими свойствами: $G_j \subset G_{j+1}$, $\bigcup G_j = T(\gamma, \delta, s)$; в каждой G_j существует последовательность кусочно-линейных функций $u_j^l(x)$, сходящаяся при $l \to \infty$ к $u(x)$ по норме $W_2^1(G_j)$. Рассмотрим последовательность срезанных функций $\overline{u}_j^l(x)$, построенных по функции $u_j^l(x)$ с помощью формул (3.11). Так как $u_j^l(x)$ — кусочно-линейные функции в G_j, то, очевидно, $\overline{u}_j^l(x) \in W_2^1(G_j)$ и в силу (3.4)

$$\int\limits_{G_j} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \overline{u}_j^l}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{u}_j^l}{\partial x_k} dx \leqslant \int\limits_{G_j} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u_j^l}{\partial x_i} \frac{\partial u_j^l}{\partial x_k} dx. \qquad (3.13)$$

Из леммы 3.2 работы [17] следует, что последовательность $\overline{u}_j^l(x)$ при $l \to \infty$ сходится по норме $W_2^1(G_j)$ к функции $\overline{u}(x)$. Следовательно, $\overline{u}(x) \in W_2^1(G_j)$ и согласно (3.1)

$$\int\limits_{G_j} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_k} dx \leqslant \int\limits_{G_j} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$, устанавливаем, что $\overline{u}(x) \in W_2^1(T(\gamma, \delta, s))$ и выполняется неравенство (3.12). Легко видеть, что функция $v(x) = \frac{1}{a}(\overline{u}(x) - \hat{u}^-)$ принадлежит классу $W(\gamma, \delta, s)$, и, значит,

$$\int\limits_{T(\gamma,\delta,s)} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_k} dx = \frac{1}{a^2} \int\limits_{T(\gamma,\delta,s)} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_k} dx \geqslant P(\gamma, \delta, s).$$

Отсюда в силу (3.12) вытекает утверждение леммы при $\check{u}^+ > \hat{u}^-$. Случай $\check{u}^- > \hat{u}^+$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Таким же методом в работе [17] доказывается теорема о принципе максимума для решений вариационных задач. Приведенная ниже лемма 3.2 является одной из разновидностей этой теоремы.

Пусть M_φ — класс функций из $W_2^1(T(\gamma, \delta, s))$, которые на поверхностях γ_δ^+ и γ_δ^- принимают значения $\varphi(x) \in L_2(\gamma_\delta^\pm)$, и $\hat{\varphi} = \operatorname{vraimax}_{\gamma_\delta^+ \cup \gamma_\delta^-} \varphi(x)$, $\check{\varphi} = \operatorname{vraimin}_{\gamma_\delta^+ \cup \gamma_\delta^-} \varphi(x)$. Рассмотрим в классе M_φ функционал

$$J(v) = \int\limits_{T(\gamma,\delta,s)} \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} + cv^2 \right\} dx, \qquad (3.14)$$

где коэффициенты $a_{ik} = a_{ik}(x)$ те же, что в уравнении (3.11), а $c = c(x) \geqslant 0$. Введем функции

$$\underline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{при} \quad u(x) \leqslant \hat{\varphi}, \\ \hat{\varphi} & \text{при} \quad u(x) > \hat{\varphi}, \end{cases}$$

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{при} \quad u(x) \geqslant \check{\varphi}, \\ \check{\varphi} & \text{при} \quad u(x) < \check{\varphi}. \end{cases}$$

При помощи рассмотренного выше метода нетрудно показать, что $\underline{u}(x)$, $\overline{u}(x) \in M_\varphi$ и справедливы неравенства

$$J(\underline{u}) \leqslant J(u), \quad \text{если} \quad \hat{\varphi} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad c(x) \geqslant 0,$$

$$J(\overline{u}) \leqslant J(u), \quad \text{если} \quad \check{\varphi} \leqslant 0 \quad \text{и} \quad c(x) \geqslant 0,$$

$$J(\underline{u}),\ J(\overline{u}) \leqslant J(u), \quad \text{если} \quad c(x) \equiv 0.$$

Отсюда, очевидно, вытекает такой принцип максимума.

Лемма 3.2. *Пусть функция* $u(x)$ *минимизирует функционал* (3.14) *в классе* M_φ, *т. е.* $J(u) = \inf\limits_{v \in M_\varphi} J(v)$. *Тогда при* $c(x) \geqslant 0$ $u(x) \geqslant \check{\varphi}$, *если* $\check{\varphi} \leqslant 0$, и $u(x) \leqslant \hat{\varphi}$, *если* $\hat{\varphi} \geqslant 0$; *при* $c(x) \equiv 0$ *всегда* $\check{\varphi} \leqslant u(x) \leqslant \hat{\varphi}$.

Остановимся теперь на основных моментах доказательства теоремы 3.1. Для простоты предположим, что поверхность Γ не имеет края и разбивает область Ω на две подобласти: Ω^+ — внутреннюю и Ω^- — внешнюю относительно Γ.

1. Пусть $T(\Gamma, \delta)$ — слой толщины 2δ со срединной поверхностью Γ, а $T(\Gamma, \delta, s) = T(\Gamma, \delta) \setminus F^{(s)}$. Введем пространство функций $W_2^1(\Omega^+ \cup \Omega^-) = W_2^1(\Omega^+) \times W_2^1(\Omega^-)$ с нормой

$$\|u\|_1^2 = \|u\|_{1,\Omega^+}^2 + \|u\|_{1,\Omega^-}^2$$

и рассмотрим в нем функционал

$$\Phi_\delta^{(s)}(u) = \inf_{w^{(s)}} \int\limits_{T(\gamma,\delta,s)} \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x_k} + c\,(w^{(s)})^2 \right\} dx, \tag{3.15}$$

где коэффициенты a_{ik} и c те же, что в (3.1), а нижняя грань берется по множеству функций $w^{(s)}(x) \in W_2^1(T(\Gamma, \delta, s))$, принимающих на поверхностях Γ_δ^+ и Γ_δ^-, ограничивающих слой $T(\Gamma, \delta)$, значения $u(x) \in W_2^1(\Omega^+ \cup \Omega^-)$. Обычным способом можно показать, что существует единственная функция $w^{(s)}(x)$, на которой достигается минимум функционала (3.15). Эта функция удовлетворяет в области $T(\Gamma, \delta, s)$ однородному уравнению (3.1) и принимает на Γ_δ^+ и Γ_δ^- значение $u(x)$. На множестве $\partial F^{(s)}$ она удовлетворяет второму краевому условию в смысле (3.2′). Отсюда, в частности, следует

$$\sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(u_1 + u_2)} \leqslant \sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(u_1)} + \sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(u_2)}. \tag{3.16}$$

Кроме того, очевидно,

$$\Phi_\delta^{(s)}(u) \leqslant C(\delta)\|u\|_1^2, \tag{3.17}$$

где $C(\delta)$ не зависит от s и $u(x) \in W_2^1(\Omega^+ \cup \Omega^-)$.

Основную роль при доказательстве теоремы 3.1 играет следующее предельное соотношение (3.18) для функционала $\Phi_\delta^{(s)}(u)$.

Теорема 3.2. *Пусть при* $s \to \infty$ *выполняется условие* (3.10) *Тогда для любой функции* $u(x) \in W_2^1(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ *справедливо равенство*

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{s\to\infty}} \Phi_\delta^{(s)}(u) = \lim_{\delta\to 0} \underline{\lim_{s\to\infty}} \Phi_\delta^{(s)}(u) = \int_\Gamma p(u^+ - u^-)^2 \, d\Gamma, \tag{3.18}$$

где u^+ и u^- — *предельные значения* $u(x)$ *на поверхности* Γ *с разных сторон от* Γ, $p = p(x)$.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество функций $u(x) \in W_2^1(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ таких, что

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x), & x \in \Omega^+, \\ u^-(x), & x \in \Omega^-, \end{cases}$$

где $u^\pm(x)$ принадлежат $W_2^1(\Omega^\pm)$ и непрерывны в замкнутых областях $\overline{\Omega^\pm}$. В силу гладкости Γ $\mathfrak{M}$ плотно в $W_2^1(\Omega^+ \cup \Omega^-)$. Докажем сначала теорему для функций из $\mathfrak{M}$. Разобьем поверхность Γ на конечное число кусков γ_j достаточно малого диаметра d_j. Пусть $u = u(x)$ — произвольная функция из $\mathfrak{M}$, а $v^{(s)}(x)$ — функция, на которой достигается минимум в (3.15). Тогда

$$\Phi_\delta^{(s)}(u) = \sum_j \int_{T(\gamma_j, \delta, s)} \left\{ \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial v^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial v^{(s)}}{\partial x_k} + c(v^{(s)})^2 \right\} dx.$$

Так как при $x \in \Gamma_\delta^+$ $v^{(s)}(x) = u^+(x)$, а при $x \in \Gamma_\delta^-$ $v^{(s)}(x) = u^-(x)$, то отсюда в силу леммы 3.2 следует

$$\Phi_\delta^{(s)}(u) \geqslant \sum_j a_j^2 P_L(\gamma_j, \delta, s), \tag{3.19}$$

где $a_j = \min\limits_{\gamma_{j\delta}^+} u^+(x) - \max\limits_{\gamma_{j\delta}^-} u^-(x)$ либо $a_j = \min\limits_{\gamma_{j\delta}^-} u^-(x) - \max\limits_{\gamma_{j\delta}^+} u^+(x)$, в зависимости от того, какое из этих выражений положительно; если они оба не положительны, то $a_j = 0$. Так как $u(x) \in \mathfrak{M}$, то в любом случае $a_j^2 = [u^+(x^j) - u^-(x^j)]^2 + \varepsilon(\delta, \gamma_j, x^j)$, где x^j — произвольная точка на γ_j, а $\varepsilon(\delta, \gamma_j, x^j) \to 0$ при $\delta \to 0$ и $d_j \to 0$. Кроме того, из условия (3.10) следует, что для γ_j, где $\int_{\gamma_j} p(x)\,d\Gamma > 0$,

$$P_L(\gamma_j, \delta, s) = \int_{\gamma_j} p(x)\,d\Gamma\,(1 + \varepsilon(s, \delta, \gamma_j)),$$

причем $\lim\limits_{\delta\to 0} \overline{\lim\limits_{s\to\infty}} |\varepsilon(s, \delta, \gamma_j)| = 0$. Учитывая это, из (3.19) получаем неравенство

$$\lim_{\delta\to 0} \underline{\lim_{s\to\infty}} \Phi_\delta^{(s)}(u) \geqslant \int_\Gamma p(u^+ - u^-)^2 \, d\Gamma. \tag{3.20}$$

Для вывода обратного неравенства снова разобьем поверхность Γ на конечное число кусков γ_l достаточно малого диаметра d_l, ограниченных гладкими многообразиями размерности $n-2$. Совокупность этих многообразий обозначим через $l (l = \bigcup l_k)$. Введем функцию $\varphi_{\delta'}(x) \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую таким условиям: $\varphi_{\delta'}(x) = 0$ в $2\delta'$-окрестности множества l; $\varphi_{\delta'}(x) = 1$ вне $\frac{\delta}{2}$-окрестности l $\left(2\delta' < \frac{\delta}{4}\right)$; всюду $0 \leqslant \varphi_{\delta'}(x) \leqslant 1$; для любого фиксированного $\delta > 0$

$$\lim_{\delta' \to 0} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_{\delta'}(x)|^2 \, dx = 0.$$

Существование такой функции гарантируется тем, что l состоит из конечного числа гладких многообразий размерности $n-2$. Построить ее можно, например, так.

Допустим, что функция $\varphi_{\delta'}^k(x)$, обладающая такими же свойствами, но только по отношению к множеству l_k, уже построена. Тогда, очевидно, функция

$$\varphi_{\delta'}(x) = \prod_k \varphi_{\delta'}^k(x)$$

будет обладать этими свойствами по отношению к $l = \bigcup l_k$. Пусть l_k — плоское многообразие: $l_k \subset R_{n-2} \subset R_n$. Выберем в R_n координаты $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ так, чтобы подпространство R_{n-2} задавалось уравнениями $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_{\delta'}^k(x) = \begin{cases} 1 - \eta(x), & \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant 2\delta', \\ 1 - \eta(x) \dfrac{\ln \delta - \ln 2\rho}{\ln \delta - \ln 2\delta'}, & 2\delta' \leqslant \rho \leqslant \dfrac{\delta}{2}, \\ 1, & \rho \geqslant \dfrac{\delta}{2}, \end{cases}$$

где $\eta(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице в $\frac{\delta}{4}$-окрестности l_k и нулю вне $\frac{\delta}{2}$-окрестности, кроме того, $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$. Нетрудно проверить, что $\varphi_{\delta'}^k(x)$ обладает требуемыми свойствами по отношению к l_k. В случае произвольного многообразия l_k функция $\varphi_{\delta'}^k(x)$ строится обычным способом с помощью диффеоморфного отображения окрестности l_k на окрестность плоского многообразия и рассмотренной конструкции.

Пусть теперь $u(x) \in \mathfrak{M}$ и $u^{\pm}(x)$ — сужение $u(x)$ на область $\Omega^{\pm}$. Обозначим через $\tilde{u}^{\pm}(x)$ непрерывное продолжение функции $u^{\pm}(x)$ на область $\tilde{\Omega}^{\pm} = \Omega^{\pm} \bigcup T(\Gamma, \delta)$. Поскольку поверхность Γ гладкая, то это продолжение всегда можно выполнить так, чтобы было справедливо неравенство

$$\|\tilde{u}^{\pm}\|_{1, \tilde{\Omega}^{\pm}} \leqslant C \|u^{\pm}\|_{1, \Omega^{\pm}}, \tag{3.21}$$

где постоянная C не зависит от $u(x)$. Рассмотрим функцию

$$w^{(s)}(x) =$$

$$= \begin{cases} u^{+}(x)\varphi_{\delta'}(x), & x \in T^{+}(\delta, \delta'), \\ u^{-}(x)\varphi_{\delta'}(x), & x \in T^{-}(\delta, \delta'), \\ \tilde{u}^{+}(x)v_j^{(s)}(x)\varphi_{\delta'}(x) - \tilde{u}^{-}(x)(1 - v_j^{(s)}(x))\varphi_{\delta'}(x), & x \in T(\gamma_j, \delta', s), \end{cases}$$

где $T^{\pm}(\delta, \delta') = \Omega^{\pm} \cap T(\Gamma, \delta) \setminus T(\Gamma, \delta')$ — области, лежащие между поверхностями $\Gamma_{\delta}^{\pm}$ и $\Gamma_{\delta'}^{\pm}$; $v_j^{(s)}(x)$ — функция из класса $W(\gamma_j, \delta', s)$, на которой достигается минимум функционала (3.9) в области $T(\gamma_j, \delta', s)$.

Из свойств функций $v_j^{(s)}(x)$ и $\varphi_{\delta'}(x)$ следует, что $w^{(s)}(x)$ принадлежит пространству $W_2^1(T(\Gamma, \delta, s))$ и принимает на поверхностях Γ_{δ}^{+} и Γ_{δ}^{-} соответственно значения $u^{+}(x)$ и $u^{-}(x)$. Поэтому

$$\Phi_{\delta}^{(s)}(u) \leqslant \int\limits_{T(\Gamma,\delta,s)} \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x_k} + c(w^{(s)})^2 \right\} dx =$$

$$= \left\{ \int\limits_{T^{+}(\delta,\delta')} + \int\limits_{T^{-}(\delta,\delta')} + \sum_{j} \int\limits_{T(\gamma_j,\delta',s)} \right\} \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x_k} + c(w^{(s)})^2 \right] dx. \tag{3.22}$$

Учитывая вид функции $u^{\pm}(x)$ в областях $T^{\pm}(\delta, \delta')$ и ограниченность коэффициентов $a_{ik}(x)$ и $c(x)$, получаем оценки

$$\int\limits_{T^{\pm}(\delta,\delta')} \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x_k} + c(w^{(s)})^2 \right\} dx \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int\limits_{T^{\pm}(\delta,\delta')} \varphi_{\delta'}^2 \{ |\nabla u^{\pm}|^2 + (u^{\pm})^2 \} dx + C_2 \int\limits_{T^{\pm}(\delta,\delta')} (u^{\pm})^2 |\nabla \varphi_{\delta'}|^2 dx.$$

Так как $u^{\pm}(x)$ ограничены в $\overline{\Omega}^{\pm}$, то из свойств функции $\varphi_{\delta'}(x)$ вытекает, что последнее слагаемое становится сколь угодно малым при достаточно малом δ' (каждый раз, когда выбирается какое-либо δ', предполагается, что s достаточно велико, так что множество $F^{(s)}$ лежит внутри слоя $T(\Gamma, \delta')$). Следовательно, при $\delta' < \delta_0(u^{\pm})$ и $s > S(u^{\pm})$ справедливы неравенства

$$\int\limits_{T^{\pm}(\delta,\delta')} \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x_k} + c(w^{(s)})^2 \right\} dx \leqslant C \| u^{\pm} \|_{1,\Omega^{\pm}(\delta)}^2, \tag{3.23}$$

где $\Omega^{\pm}(\delta) = \Omega^{\pm} \cap T(\Gamma, \delta)$, а постоянная C не зависит от $u(x) \in \mathfrak{M}$, δ', δ и s.

При $x \in T(\gamma_j, \delta', s)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} w^{(s)}(x) = (\tilde{u}^+(x) - \tilde{u}^-(x))\, \varphi_{\delta'}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} v_j^{(s)}(x) + \Delta(x, \delta', s),$$

где

$$\Delta(x, \delta', s) = (1 - v_j^{(s)})\, \varphi_{\delta'} \frac{\partial \tilde{u}^-}{\partial x_i} + v_j^{(s)} \varphi_{\delta'} \frac{\partial \tilde{u}^+}{\partial x_i} +$$

$$+ [\tilde{u}^-(1 - v_j^{(s)}) + \tilde{u}^+ v_j^{(s)}] \frac{\partial \varphi_{\delta'}}{\partial x_i}.$$

Учитывая, что $0 \leqslant \varphi_{\delta'}(x) \leqslant 1$ и что в силу леммы 3.2 $0 \leqslant v_j^{(s)}(x) \leqslant \leqslant 1$, так же, как при выводе неравенства (3.23), при достаточно больших s и малых δ' получаем

$$\sum_j \int\limits_{T(\gamma_j, \delta', s)} |\Delta(x, \delta', s)|^2\, dx \leqslant C_1 \{ \|\tilde{u}^+\|^2_{1, T(\Gamma, \delta')} + \|\tilde{u}^-\|^2_{1, T(\Gamma, \delta')} \},$$

и, следовательно,

$$\sum_j \int\limits_{T(\gamma_j, \delta', s)} \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x_k} + c\,(w^{(s)})^2 \right\} dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j \int\limits_{T(\gamma_j, \delta', s)} (\tilde{u}^+ - \tilde{u}^-)^2 \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x_k} dx + C_1 \{ \|\tilde{u}^+\|^2_{1, T(\Gamma, \delta')} +$$

$$+ \|\tilde{u}^-\|^2_{1, T(\Gamma, \delta')} \} + C_2 \{ \|\tilde{u}^+\|^2_{1, T(\Gamma, \delta')} + \|\tilde{u}^-\|^2_{1, T(\Gamma, \delta')} \}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_j \int\limits_{T(\gamma_j, \delta', s)} (\tilde{u}^+ - \tilde{u}^-)^2 |\nabla v_j^{(s)}|^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.24)$$

Здесь постоянные C_1 и C_2 не зависят от $u(x) \in \mathfrak{M}$, δ', δ и s. Из (3.4) и определения L-проводимости вытекает, что

$$\mu_0 \sum_j \int\limits_{T(\gamma_j, \delta', s)} (\tilde{u}^+ - \tilde{u}^-)^2 |\nabla v_i^{(s)}|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j \int\limits_{T(\gamma_j, \delta', s)} (\tilde{u}^+ - \tilde{u}^-)^2 \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x_k} dx \leqslant \sum_j U_j^2 P_L(\gamma_j, \delta', s), \qquad (3.25)$$

где $U_j = \max\limits_{T(\gamma_j, \delta', s)} |\tilde{u}^+ - \tilde{u}^-|$, $\mu_0 > 0$. Так как $\tilde{u}^+$ и $\tilde{u}^-$ — непрерывные продолжения функций $u^+ = u|_{\Omega^+}$ и $u^- = u|_{\Omega^-}$, то $U_j^2 = = [u^+(x^j) - u^-(x^j)]^2 + \varepsilon(\delta', \gamma_j, u, x^j)$, $x^j \in \gamma_j$, причем

$\varepsilon(\delta', \gamma_j, u, x^j) \to 0$ при $\delta' \to 0$ и $d_j \to 0$. Поэтому, учитывая условие (3.10), из (3.25) получаем

$$\mu_0 \sum_j \int_{T(\gamma_j,\delta',s)} (\tilde{u}^+ - \tilde{u}^-)^2 |\nabla v_j^{(s)}|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j \int_{T(\gamma_j,\delta',s)} (\tilde{u}^+ - \tilde{u}^-)^2 \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x_k} dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Gamma p(u^+ - u^-)^2 d\Gamma + \varepsilon(\delta', s, d), \tag{3.26}$$

где $\lim\limits_{d\to 0} \overline{\lim\limits_{\delta'\to 0}} \overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \varepsilon(\delta', s, d) = 0$, $d = \max\limits_j d_j$. Объединяя (3.22) — (3.24) и (3.26), приходим к неравенству

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{s\to\infty}} \Phi_\delta^{(s)}(u) \leqslant \int_\Gamma p(u^+ - u^-)^2 d\Gamma,$$

из которого в силу (3.20) вытекает справедливость теоремы 3.2 для функций из $\mathfrak{M} \subset W_2^1(\Omega^+ \cup \Omega^-)$.

Отметим, что приведенный выше вывод равенства (3.18) для $u(x) \in \mathfrak{M}$ менее громоздкий, чем соответствующий вывод в теореме 2.9 гл. II. Однако он пригоден только для уравнений второго порядка.

Из (3.22) — (3.26) следует, что для любой функции $u \in \mathfrak{M}$ и любого δ найдется такое число $S(u, \delta)$, что при $s \geqslant S(u, \delta)$

$$\Phi_\delta^{(s)}(u) \leqslant C \|u\|_1^2,$$

где постоянная C не зависит от u, δ и $s \geqslant S(u, \delta)$. Это неравенство вместе с (3.16) и (3.17) позволяет закончить доказательство теоремы 3.2, т. е. установить равенство (3.18) для любой функции $u(x) \in W_2^1(\Omega^+ \cup \Omega^-)$. Делается это точно так же, как в теореме 2.9 гл. II (см. [63]).

2. Перейдем теперь к доказательству достаточности условий теоремы 3.1. Вспомним, что решение $u^{(s)}(x)$ задачи (3.1) — (3.3) минимизирует функционал $J(u)$ (3.5) в классе $W_{20}^1(\Omega^{(s)})$, который является замыканием по норме $W_2^1(\Omega^{(s)})$ множества функций из $W_2^1(\Omega^{(s)})$, равных нулю в окрестности $\partial\Omega$. Отсюда непосредственно следует, что множество функций $u^{(s)}(x)$ в норме $W_2^1(\Omega^{(s)})$ ограничено равномерно по s. Действительно, поступая так же, как в § 4 гл. II, находим

$$\int_{\Omega^{(s)}} \left\{ \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_k} + c(u^{(s)})^2 \right\} dx \leqslant \frac{4}{c_0^2} \int_{\Omega^{(s)}} f^2(x)\, dx, \quad c_0 = \min_\Omega c(x),$$

откуда, учитывая (3.4), заключаем, что $\|u^{(s)}\|_{1,\Omega^{(s)}} \leqslant C$, где C не зависит от s.

Обозначим через Ω_δ^+ область, внутреннюю относительно Γ_δ^+, а через Ω_δ^- — внешнюю относительно Γ_δ^-, т. е. $\Omega_\delta^+ = \Omega^+ \setminus T(\Gamma, \delta)$ и $\Omega_\delta^- = \Omega^- \setminus T(\Gamma, \delta)$. Для любого $\delta > 0$ при достаточно больших s функции $u^{(s)}(x)$ определены всюду в Ω_δ^+ и Ω_δ^-, и согласно предыдущему

$$\|u^{(s)}\|_{1, \Omega_\delta^\pm} \leqslant C. \tag{3.27}$$

Отсюда вытекает, что последовательность $\{u^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ слабо компактна в $W_2^1(\Omega_\delta^\pm)$, и, значит, можно выделить подпоследовательность $\{u^{(s)}(x),\ s = s_k \to \infty\}$, которая слабо сходится к некоторой функции $u_\delta^\pm(x) \in W_2^1(\Omega_\delta^\pm)$ при любом $\delta > 0$. Очевидно, $u_\delta^\pm(x)$ в любой области $\Omega_{\delta_1}^\pm$ $(\delta < \delta_1)$ не зависит от δ и в силу (3.27) $\| u_\delta^\pm \|_{1, \Omega_\delta^\pm} \leqslant C$. Следовательно, существует функция $u(x) \in W_2^1(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, к которой подпоследовательность $\{u^{(s)}(x),\ s = s_k \to \infty\}$ сходится слабо в $W_2^1(\Omega_\delta^\pm)$ при любом $\delta > 0$. Покажем, что на самом деле она сходится по норме $W_2^1(\Omega_\delta^\pm)$, а также равномерно в $\overline{\Omega_\delta^\pm}$ $(\delta > 0)$.

Пусть $\chi(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая в Ω функция, равная нулю в слое $T(\Gamma, \delta)$ и единице вне слоя $T(\Gamma, \delta_1)$ $(\delta < \delta_1)$. Рассмотрим функцию $v^{(s)}(x) = u^{(s)}(x)\,\chi(x)$. Всюду в области Ω она удовлетворяет уравнению

$$Lv^{(s)}(x) = \chi(x) f(x) + \varphi^{(s)}(x),$$

где

$$\varphi^{(s)}(x) = u^{(s)} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik} \frac{\partial \chi}{\partial x_k}\right) + 2 \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial \chi}{\partial x_k},$$

а на границе $\partial\Omega$ обращается в нуль. Поэтому при $x \in \Omega \setminus T(\Gamma, \delta)$

$$u^{(s)}(x) = v^{(s)}(x) = \int_\Omega G(x, \xi)\,\chi(\xi) f(\xi)\, d\xi + \int_\Omega G(x, \xi)\,\varphi^{(s)}(\xi)\, d\xi, \tag{3.28}$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина для уравнения $Lu = 0$ в области Ω при нулевом условии на $\partial\Omega$. Во втором слагаемом интегрирование фактически производится по слою $T(\Gamma, \delta_1)$ и функция $\varphi^{(s)}(x)$ ограничена по норме $L_2(T(\Gamma, \delta_1))$ равномерно по s. Из предположений относительно коэффициентов оператора L следует, что интегральный оператор, порожденный ядром $G(x, \xi)$ и действующий из $L_2(T(\Gamma, \delta_1))$ в $W_2^1(\Omega_{\delta_1}^\pm)$ (или в $C^k(\Omega_{\delta_2}^\pm)$, $\delta_1 < \delta_2$, $k = 0, 1$), вполне непрерывен. Отсюда вытекает доказываемое утверждение. Из формулы (3.28) видно также, что предельная функция $u(x)$ обращается в нуль на $\partial\Omega$.

Покажем теперь, что $u(x)$ является решением краевой задачи (3.6) — (3.8). Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^1_{2}(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ класс функций из $W^1_2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$, и рассмотрим в $\overset{\circ}{W}{}^1_{2}(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ функционал

$$J_p(w) = \int\limits_{\Omega^+\cup\Omega^-} \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_k} + cw^2 + 2fw \right\} dx + $$

$$+ \int\limits_{\Gamma} p(w^+ - w^-)^2 \, d\Gamma, \tag{3.29}$$

где w^+ и w^- — предельные значения w с разных сторон от Γ. Известным методом (см. [13, 48]) нетрудно установить, что существует единственная функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2}(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, на которой достигается минимум этого функционала, и при этом для любого $\delta > 0$ выполняется равенство

$$2 \int\limits_{\Omega^+_\delta \cup \Omega^-_\delta} \{-Lu + f\} \zeta dx - \int\limits_{\Gamma^+_\delta} \frac{\partial u}{\partial v^+_L} \zeta d\Gamma - \int\limits_{\Gamma^-_\delta} \frac{\partial u}{\partial v^-_L} \zeta d\Gamma +$$

$$+ 2 \int\limits_{\Gamma} p(u^+ - u^-)(\zeta^+ - \zeta^-) \, d\Gamma = 0,$$

где $\zeta = \zeta(x)$ — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}^1_{2}(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, $\dfrac{\partial}{\partial v^\pm_L}$ — производные по конормалям к $\Gamma^\pm_\delta$, направленным в области $\Omega^\pm_\delta$. Отсюда видно, что функция, минимизирующая функционал (3.29), удовлетворяет в областях Ω^+ и Ω^- уравнению (3.6), а на поверхности Γ — граничным условиям (3.7) в смысле (3.7').

Остается доказать, что предельная функция $u(x)$ (предел $u^{(s)}(x)$ по подпоследовательности $\{s = s_k \to \infty\}$) минимизирует функционал (3.29). Так как этот функционал имеет единственную точку минимума, то отсюда будет также следовать, что вся последовательность $\{u^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ сходится к $u(x)$.

Пусть $w(x)$ — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}^1_{2}(\Omega^+ \cup \Omega^-)$. Положим

$$w^{(s)}_\delta(x) = \begin{cases} w(x) & \text{при } x \in \Omega^\pm_\delta, \\ w^{(s)}(x) & \text{при } x \in T(\Gamma, \delta, s), \end{cases}$$

где $w^{(s)}(x)$ — функция из $W^1_2(T(\Gamma, \delta, s))$, минимизирующая функционал (3.15) в классе функций, равных $w(x)$ на поверхностях $\Gamma^\pm_\delta$. Легко видеть, что $w^{(s)}_\delta(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2}(\Omega^{(s)})$. Так как при малых δ $f(x)$ сосредоточена вне $T(\Gamma, \delta)$, то согласно (3.5) и (3.15)

$$J(w^{(s)}_\delta) = \int\limits_{\Omega^+_\delta \cup \Omega^-_\delta} \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_k} + cw^2 + 2fw \right\} dx + \Phi^{(s)}_\delta(w),$$

откуда, используя теорему 3.2 и равенство (3.29), получаем

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{s\to\infty}} J(w_\delta^{(s)}) = J_p(w). \tag{3.30}$$

Пусть $u(x) \in W_{20}^1(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ — предел $u^{(s)}(x)$ по подпоследовательности $\{s = s_k \to \infty\}$. Как было показано выше, для любого $\delta > 0$ $\| u^{(s)} - u \|_{1,\Omega_\delta^\pm} \to 0$ при $s = s_k \to \infty$. Следовательно, существует функция $u_\delta^{(s)} \in W_{20}^1(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ такая, что $u_\delta^{(s)}(x) = u^{(s)}(x)$ при $x \in \Omega_\delta^\pm$ и

$$\lim_{s=s_k\to\infty} \| u_\delta^{(s)} - u \|_1 = 0.$$

Поэтому согласно (3.15) — (3.17) при малых δ

$$J(u^{(s)}) = \int\limits_{\Omega_\delta^+\cup\Omega_\delta^-} \left\{ \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial u_\delta^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial u_\delta^{(s)}}{\partial x_k} + c(u_\delta^{(s)})^2 + 2fu_\delta^{(s)} \right\} dx + \Phi_\delta^{(s)}(u_\delta^{(s)}) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega_\delta^+\cup\Omega_\delta^-} \left\{ \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial u_\delta^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial u_\delta^{(s)}}{\partial x_k} + c(u_\delta^{(s)})^2 + 2fu_\delta^{(s)} \right\} dx + \Phi_\delta^{(s)}(u) -$$

$$- 2\sqrt{C(\delta)}\sqrt{\Phi_\delta^{(s)}(u)}\, \| u_\delta^{(s)} - u \|_1 - C(\delta) \| u_\delta^{(s)} - u \|_1^2,$$

откуда в силу теоремы 3.2 следует неравенство

$$\underline{\lim_{s=s_k\to\infty}}\, J(u^{(s)}) \geqslant J_p(u). \tag{3.31}$$

Так как функция $u^{(s)}(x)$ минимизирует функционал $J(w^{(s)})$ в классе $W_{20}^1(\Omega^{(s)})$, то при $w_\delta^{(s)}(x) \in W_{20}^1(\Omega^{(s)})$ $J(u^{(s)}) \leqslant J(w_\delta^{(s)})$. Поэтому из (3.30) и (3.31) вытекает, что $J_p(u) \leqslant J_p(w)$ для любой $w(x) \in W_{20}^1(\Omega^+ \cup \Omega^-)$. Следовательно, $u(x)$ минимизирует функционал (3.29) в классе $W_{20}^1(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, что и требовалось доказать.

3. Для доказательства необходимости условий (3.10) используем следующую лемму.

Лемма 3.3. *Пусть при $s \to \infty$ последовательность решений задачи* (3.1) — (3.3) $\{u^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ *сходится к решению $u(x)$ задачи* (3.6) — (3.8). *Тогда для любого куска $\gamma \subset \Gamma$ выполняется равенство*

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{s\to\infty} \int\limits_{T(\gamma,\delta,s)} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial} dx = \int\limits_\gamma p(u^+ - u^-)^2 d\Gamma,$$

где u^+, u^- — предельные значения $u(x)$ с разных сторон от Γ, $T(\gamma, \delta, s) = T(\gamma, \delta) \setminus F^{(s)}$, $p = p(x)$.

Доказательство. Пусть G — произвольная ограниченная подобласть в Ω такая, что ее граница ∂G пересекается с Γ

по множеству нулевой меры на Γ, и мера Лебега самой ∂G также равна нулю. Справедливо равенство

$$\lim_{s\to\infty} \int\limits_{G\cap\Omega^{(s)}} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_k} dx = \int\limits_{G^+\cup G^-} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx + \\ + \int\limits_{\gamma} p (u^+ - u^-)^2 d\Gamma, \tag{3.32}$$

где $G^\pm = \Omega^\pm \cap G$, $\gamma = G \cap \Gamma$. Лемма 3.3 вытекает из этого равенства, если в нем положить $G = T(\gamma, \delta)$ и перейти к пределу при $\delta \to 0$.

Докажем равенство (3.32). Из предположений относительно ∂G следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся области G_1 и G_2, удовлетворяющие таким условиям: $G_1 \subset G \subset G_2$, $\gamma_1 \subset \gamma \subset \gamma_2$, расстояние от ∂G до границы областей G_1 и G_2 больше нуля и

$$\operatorname{mes}(G_2 \setminus G_1) < \varepsilon, \quad \operatorname{mes}_\Gamma (\gamma_2 \setminus \gamma_1) < \varepsilon, \tag{3.33}$$

где $\gamma_r = G_r \cap \Gamma$, $r = 1, 2$. Для этих областей, очевидно, можно построить дважды непрерывно дифференцируемые функции $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ такие, что $\eta_1(x) \equiv 1$ в G_1, $\eta_1(x) \equiv 0$ вне G, а $\eta_2(x) \equiv 1$ в G, $\eta_2(x) \equiv 0$ вне G_2. Учитывая, что $u^{(s)}(x)$ удовлетворяет в $\Omega^{(s)}$ уравнению (3.1) и граничному условию (3.2), нетрудно получить равенства

$$0 = \int\limits_{T(\Gamma,\delta,s)} \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_k} \right) - c u^{(s)} \right\} u^{(s)} \eta_r dx =$$

$$= - \int\limits_{T(\Gamma,\delta,s)} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_k} \eta_r dx - \int\limits_{T(\Gamma,\delta,s)} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \eta_r}{\partial x_i} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_k} u^{(s)} dx -$$

$$- \int\limits_{T(\Gamma,\delta,s)} c (u^{(s)})^2 \eta_r dx + \int\limits_{\Gamma_\delta^+} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu_L^+} u^{(s)} \eta_r d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_\delta^-} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu_L^-} u^{(s)} \eta_r d\Gamma, \tag{3.34}$$

$$r = 1, 2,$$

где $T(\Gamma, \delta, s) = T(\Gamma, \delta) \setminus F^{(s)}$, $\dfrac{\partial}{\partial \nu_l^\pm}$ — производные по конормалям к поверхностям $\Gamma_\delta^\pm$, направленным соответственно в области $\Omega_\delta^\pm = \Omega^\pm \setminus T(\Gamma, \delta)$. Предполагается, что s достаточно велико, а δ мало, так что $F^{(s)} \subset T(\Gamma, \delta)$ и $\operatorname{supp} f(x) \subset \Omega_\delta^+ \cup \Omega_\delta^-$.

Как было показано выше, последовательность $\{u^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ равномерно ограничена по норме $W_2^1(\Omega^{(s)})$ и сходится к $u(x)$ по нормам $W_2^1(\Omega_\delta^\pm)$ и $C^1(\overline{\Omega}_\delta^\pm)$ для любого $\delta > 0$. Так как функция $u(x)$ ограничена в Ω, то отсюда согласно лемме 3.2 следует, что $\sup |u^{(s)}(x)| < C$, причем C не зависит от s. Учитывая все это, из (3.34) заключаем, что

$$\left| \int\limits_{T(\Gamma,\delta,s)} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_k} \eta_r dx - \left(\int\limits_{\Gamma_\delta^+} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu_L^+} u^{(s)} \eta_r d\Gamma + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{\Gamma_\delta^-} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu_L^-} u^{(s)} \eta_r d\Gamma \right) \right| < \varepsilon(s, \delta),$$

где $\lim\limits_{\delta\to 0} \overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \varepsilon(s, \delta) = 0$, $r = 1, 2$. Так как $u^{(s)}(x)$ при $s \to \infty$ сходится к $u(x)$ в $C^1(\overline{\Omega_\delta^\pm})$ при любом $\delta > 0$, а $u(x)$ удовлетворяет граничному условию (3.7), то отсюда вытекают равенства

$$\lim_{s\to\infty} \int\limits_{\Omega^{(s)}} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x^{(k)}} \eta_r dx = \int\limits_{\Omega^+ \cup \Omega^-} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} \eta_r dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} p(u^+ - u^-)^2 \eta_r d\Gamma, \qquad r = 1, 2.$$

Учитывая (3.4), из первого равенства ($r = 1$) получаем

$$\underline{\lim_{s\to\infty}} \int\limits_{G \cap \Omega^{(s)}} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_k} dx \geqslant \int\limits_{G_1^+ \cup G_1^-} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx +$$

$$+ \int\limits_{\gamma_1} p(u^+ - u^-)^2 d\Gamma.$$

Аналогично при $r = 2$ находим

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int\limits_{G \cap \Omega^{(s)}} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_k} dx \leqslant \int\limits_{G_2^+ \cup G_2^-} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx +$$

$$+ \int\limits_{\gamma_2} p(u^+ - u^-)^2 d\Gamma.$$

В этих неравенствах $G_r^\pm = G_r \cap \Omega^\pm$, $\gamma_r = G_r \cap \Gamma$, $r = 1, 2$. Поскольку области G_1 и G_2 можно выбрать так, чтобы ε в (3.33) было сколь угодно малым, отсюда следует равенство (3.32). Лемма доказана.

Докажем необходимость условий (3.10). Предполагая, что поверхность Γ дважды непрерывно дифференцируема, для любого $\varepsilon > 0$ можно построить решение $u_\varepsilon(x)$ задачи (3.6) — (3.8), непрерывное в $\overline{\Omega^\pm}$ и удовлетворяющее на Γ неравенствам

$$|u_\varepsilon^-(x) - 1| < \varepsilon, \quad |u_\varepsilon^+(x) - 2| < \varepsilon. \tag{3.35}$$

Это легко сделать, выбрав соответствующим образом правую часть $f(x) = f_\varepsilon(x)$ в уравнении (3.1), причем так, чтобы носитель $f_\varepsilon(x)$ лежал вне слоя $T(\Gamma, \delta_1)$ при некотором $\delta_1 > 0$. Предположим, что для некоторого куска γ поверхности Γ условие (3.10) не выполняется. Тогда найдется такая подпоследовательность $\{s = s_k \to \infty\}$ и такие положительные числа ε', δ' и $S(\delta)$, что будет справедливо одно из неравенств

$$P_L(\gamma, \delta, s) > \int\limits_\gamma p(x)\,d\Gamma + \varepsilon' \text{ при } \delta < \delta', \quad s = s_k \geqslant S(\delta), \quad (3.36)$$

$$P_L(\gamma, \delta, s) < \int\limits_\gamma p(x)\,d\Gamma - \varepsilon' \text{ при } \delta < \delta', \quad s = s_k \geqslant S(\delta). \quad (3.36')$$

Пусть выполняется неравенство (3.36). Рассмотрим последовательность $\{u_\varepsilon^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ решений задачи (3.1) — (3.3) с правой частью $f_\varepsilon(x)$. По условию $u_\varepsilon^{(s)}(x)$ сходится к $u_\varepsilon(x)$, и, значит, $u_\varepsilon^{(s)}(x)$ в областях $\Omega_\delta^\pm$ $(\delta > 0)$ сходится к $u_\varepsilon(x)$ равномерно. Поэтому в силу леммы 3.2 и неравенств (3.35)

$$\int\limits_{T(\gamma,\delta,s)} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial u_\varepsilon^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial u_\varepsilon^{(s)}}{\partial x_k}\,dx \geqslant (1 - 2\varepsilon + \varepsilon(s, \delta))^2 P_L(\gamma, \delta, s),$$

где $\varepsilon(s, \delta) \to 0$ при $s \to \infty$ и любом δ $(0 < \delta < \delta_1)$. Отсюда, учитывая (3.36), при $\delta < \min\{\delta', \delta_1\}$, $s = s_k \geqslant s(\delta)$ получаем

$$\int\limits_{T(\gamma,\delta,s)} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial u_\varepsilon^{(s)}}{\partial x_i} \frac{\partial u_\varepsilon^{(s)}}{\partial x_k}\,dx > \int p(x)\,d\Gamma + \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon' - 2\left(\int\limits_\gamma p(x)\,d\Gamma + \varepsilon'\right)(2\varepsilon + \varepsilon(s, \delta))$. Так как, выбирая достаточно малыми ε, δ и достаточно большими $s = s_k \geqslant S(\delta)$, можно добиться, чтобы ε_1 стало больше $\frac{\varepsilon'}{2} > 0$, то это неравенство противоречит лемме 3.3. Таким образом, неравенство (3.36) невозможно ни для какого $\gamma \subset \Gamma$.

Рассмотрим случай (3.36′). При любом $\varepsilon'' > 0$ найдутся такие $\delta(\varepsilon'')$ и $S(\delta)$, что при $\delta < \delta(\varepsilon'')$ и $s \geqslant S(\delta)$

$$P_L(\Gamma \setminus \gamma, \delta, s) < \int\limits_{\Gamma\setminus\gamma} p(x)\,d\Gamma + \varepsilon'', \quad (3.37)$$

так как в противном случае на $\Gamma \setminus \gamma$ будет справедливо неравенство (3.36). Введем функцию

$$w_\delta^{(s)}(x) = \begin{cases} u_\varepsilon^+(x)\,\varphi_\delta(x), & x \in \Omega_\delta^+, \\ u_\varepsilon^-(x)\,\varphi_\delta(x), & x \in \Omega_\delta^-, \\ \tilde{u}_\varepsilon^+(x)\,v_j^{(s)}(x)\,\varphi_\delta(x) + \tilde{u}_\varepsilon^-(x)\,(1 - v_j^{(s)}(x))\,\varphi_\delta(x), & \\ & x \in T(\gamma_j, \delta, s), \end{cases}$$

где $j=1,\ 2,\ \gamma_1=\gamma,\ \gamma_2=\Gamma\setminus\gamma,\ \varphi_\delta(x)$ — функция из класса $W_2^1(\Omega)$, равная нулю в 2δ-окрестности множества l, разделяющего γ_1 и γ_2, и удовлетворяющая тем же условиям, что и функция $\varphi_{\delta'}(x)$, введенная при доказательстве достаточности условий (3.10).

Легко видеть, что $w_\delta^{(s)}(x)\in W_{20}^1(\Omega^{(s)})$. Рассмотрим функционал $J(w)$ (3.5) при $f(x)=f_\varepsilon(x)$. Оценивая его значение на функции $w_\delta^{(s)}(x)$ с помощью (3.35) — (3.37), получаем

$$J(w_\delta^{(s)})<J_p(u_\varepsilon)-\Delta(\varepsilon',\ \varepsilon'',\ \varepsilon,\ \delta,\ s), \tag{3.38}$$

где $J_p(u_\varepsilon)$ — функционал, определяемый по формуле (3.29) при $f(x)=f_\varepsilon(x)$; $\Delta(\varepsilon',\ \varepsilon'',\ \varepsilon,\ \delta,\ s)>0$ при любом $\varepsilon'>0$, но при достаточно малых $\delta,\ \varepsilon,\ \varepsilon''$ и больших s. С другой стороны, если $u_\varepsilon^{(s)}(x)$ — решение задачи (3.1) — (3.3) при $f(x)=f_\varepsilon(x)$, то в силу леммы 3.3

$$\lim_{s\to\infty}J(u_\varepsilon^{(s)})=J_p(u_\varepsilon).$$

Но это противоречит неравенству (3.38), так как $u_\varepsilon^{(s)}(x)$ минимизирует функционал $J(u^{(s)})$. Таким образом, неравенство (3.36′) также невозможно, и, значит, условие (3.10) выполняется для любого $\gamma\subset\Gamma$. Теорема 3.1 доказана.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Введенные в предыдущем параграфе необходимые и достаточные условия сходимости (3.10) и функция $p(x)$ из граничного условия (3.7) выражаются через довольно сложную характеристику множества $F^{(s)}$ — L-проводимость $P_L(\gamma,\ \delta,\ s)$, вычисление которой в общем случае связано со значительными трудностями. Поэтому рассмотрим некоторые частные случаи задачи (3.1) — (3.3), когда функцию $p(x)$ (а также условия сходимости) удается выразить через более простые характеристики, в частности через геометрические параметры $F^{(s)}$.

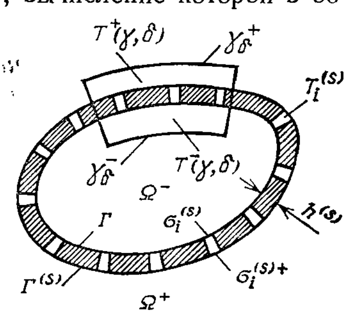

РИС. 9.

Пусть при каждом s в трехмерном пространстве R_3 задан слой $T^{(s)}$ толщины $h^{(s)}$, ограниченный с одной стороны гладкой фиксированной поверхностью Γ, а с другой — поверхностью $\Gamma^{(s)}$, параллельной Γ и находящейся на расстоянии $h^{(s)}$ от нее. На Γ выделено s непересекающихся связных открытых множеств $\sigma_i=\sigma_i^{(s)}$ диаметра $d_i^{(s)}$. Нормали к Γ, проходящие через точки $x\in\sigma_i$, вырезают в слое $T^{(s)}$ каналы $T_i^{(s)}$. Положим $F^{(s)} = \overline{T^{(s)} \setminus \bigcup_{i=1}^{s} T_i^{(s)}}$, т. е. множество $F^{(s)}$ при каждом s является слоем с каналами (рис. 9).

В области $\Omega^{(s)} = R_3 \setminus F^{(s)}$ рассмотрим краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u^{(s)} - \lambda^2 u^{(s)} = f, \\ &\left.\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega^{(s)}} = 0, \\ &u^{(s)} \in W_2^1(\Omega^{(s)}) \cap W_2^2(\Omega^{(s)}, \mathrm{loc}), \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

где $\lambda^2 > 0$, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по нормали к $\partial\Omega^{(s)}$. Изучим поведение решения $u^{(s)}(x)$ этой задачи при $s \to \infty$, когда толщина слоя $h^{(s)}$ и диаметры каналов $d_i^{(s)}$ стремятся к нулю, причем $d_i^{(s)} = o(h^{(s)})$.

Теорема 3.3. *Пусть при $s \to \infty$ выполняются такие условия:*

a) $h^{(s)} \to 0$ и $\max_i d_i^{(s)} = o(h^{(s)})$;

b) $\overline{\lim_{s\to\infty}} \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\mathrm{mes}_\Gamma \sigma_i^{(s)}}{h^{(s)} R_i^{(s)}} \right)^2 < C$;

c) для любого куска $\gamma \subset \Gamma$ существует предел

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{(\gamma)} \frac{\mathrm{mes}_\Gamma \sigma_i^{(s)}}{h^{(s)}} = \int_\gamma p(x)\, d\Gamma$$

($\mathrm{mes}_\Gamma\, \sigma_i^{(s)}$ *— мера множества $\sigma_i^{(s)}$ на Γ — площадь, $R_i^{(s)}$ — расстояние от $\sigma_i^{(s)}$ до множества $\bigcup_{j\neq i} \sigma_j^{(s)}$, сумма $\sum_{(\gamma)}$ распространяется на те значения i, для которых $\sigma_i^{(s)}$ принадлежит куску $\gamma \subset \Gamma$, $p(x)$ — неотрицательная непрерывная функция на* Γ). *При этих условиях последовательность решений $u^{(s)}(x)$ задачи* (3.39) *сходится к функции $u(x)$, которая является решением следующей краевой задачи:*

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u(x) - \lambda^2 u(x) = f(x), && x \in R_3 \setminus \Gamma, \\ &\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^- = p(x)\,[u^+(x) - u^-(x)], && x \in \Gamma, \\ &u(x) \to 0, && x \to \infty, \end{aligned}\right\} \tag{3.40}$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по нормали к Γ, направленной в сторону, которой соответствует знак «+».

Доказательство. В силу теоремы 3.1 достаточно показать, что для любого $\gamma \subset \Gamma$ выполняются равенства

$$\lim_{\delta\to 0} \underline{\lim_{s\to\infty}} P_\Delta(\gamma, \delta, s) = \lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{s\to\infty}} P_\Delta(\gamma, \delta, s) = \lim_{s\to\infty} \sum_{(\gamma)} \frac{\mathrm{mes}_\Gamma\, \sigma_i^{(s)}}{h^{(s)}}, \tag{3.41}$$

где

$$P_\Delta(\gamma, \delta, s) = \inf_{w^{(s)}} \int\limits_{T(\gamma,\delta,s)} |\nabla w^{(s)}|^2\, dx, \tag{3.42}$$

$T(\gamma, \delta, s) = T(\gamma, \delta) \setminus \overline{(T^{(s)} \setminus \bigcup_i T_i^{(s)})}$, а нижняя грань берется в классе $W(\gamma, \delta, s)$ функций из $W_2^1(T(\gamma, \delta, s)$, принимающих на поверхностях γ_δ^+ и γ_δ^- значения, равные соответственно единице и нулю. Для определенности всюду считаем, что знак «+» соответствует той стороне от Г, в которой лежит слой $T^{(s)}$. В соответствии с этим части слоя $T(\gamma, \delta)$, лежащие с разных сторон от $T^{(s)}$, обозначим через $T^-(\gamma, \delta)$ и $T^+(\gamma, \delta)$, а основания каналов $T_i^{(s)}$, прилегающих к $T^-(\gamma, \delta)$ и $T^+(\gamma, \delta)$,— через σ_i^- и σ_i^+ ($\sigma_i^- = \sigma_i^{(s)}$, $\sigma_i^+ = \sigma_i^{(s)+} \subset \Gamma^{(s)}$). В области $T(\gamma, \delta, s)$ рассмотрим функцию

$$w^{(s)}(x) = \begin{cases} 0 \quad\quad\quad , & x \in T^-(\gamma, \delta), \\ \dfrac{t}{h^{(s)}}, \quad x \in T_i^{(s)}, & i = 1, 2, \ldots, s, \\ 1 \quad\quad\quad , & x \in T^+(\gamma, \delta), \end{cases}$$

где t — расстояние от точки $x \in T_i^{(s)}$ до поверхности Г. Легко видеть, что $w^{(s)}(x) \in W(\gamma, \delta, s)$ и, следовательно,

$$P_\Delta(\gamma, \delta, s) \leqslant \int\limits_{T(\gamma,\delta,s)} |\nabla w^{(s)}|^2\, dx.$$

Учитывая, что $|\nabla w^{(s)}|^2 \equiv 0$ в $T^+(\gamma, \delta) \cup T^-(\gamma, \delta)$ и $|\nabla w^{(s)}|^2 = (h^{(s)})^{-2}$ в $T_i^{(s)}$, отсюда находим

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} P_\Delta(\gamma, \delta, s) \leqslant \lim_{s\to\infty} \sum_{(\gamma)} \frac{\operatorname{mes} \sigma_i^{(s)}}{h^{(s)}}. \tag{3.43}$$

Рассмотрим теперь область $T_1(\gamma, \delta, s) = T^-(\gamma, \delta) \cup T^+(\gamma, \delta) \cup \cup \{\bigcup_{\gamma(s)}{}'(T_i^{(s)} \cup \sigma_i^- \cup \sigma_i^+)\}$, где суммирование $\bigcup_{\gamma(s)}{}'$ ведется только по тем i, для которых $\sigma_i^- = \sigma_i^{(s)}$ находится от края γ на расстоянии, большем $\frac{R_i^{(s)}}{2}$ ($\sigma_i^{(s)} \subset \gamma(s)$). Класс функций из $W_2^1(T_1(\gamma, \delta, s))$, принимающих на γ_δ^- и γ_δ^+ значения, равные соответственно нулю и единице, обозначим через $W_1(\gamma, \delta, s)$, а соответствующую Δ-проводимость (минимум функционала (3.42)) — через $P_{1\Delta}(\gamma, \delta, s)$. Так как $T_1(\gamma, \delta, s) \subseteq T(\gamma, \delta, s)$ и, значит, $W(\gamma, \delta, s) \subseteq W_1(\gamma, \delta, s)$, то при любых s и δ

$$P_{1\Delta}(\gamma, \delta, s) \leqslant P_\Delta(\gamma, \delta, s). \tag{3.44}$$

В области $T_1(\gamma, \delta, s)$ определим функцию

$$\widehat{w}^{(s)}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{\gamma(s)} w_i^-(x), & x \in T^-(\gamma, \delta), \\ \dfrac{t}{h^{(s)}}, & x \in T_i^{(s)}, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \\ 1 - \sum\limits_{\gamma(s)} w_i^+(x), & x \in T^+(\gamma, \delta), \end{cases} \tag{3.45}$$

где t — расстояние от x до Γ,

$$w_i^-(x) = \frac{\varphi_i^-(x)}{h^{(s)}} \int\limits_{\sigma_i^-} \frac{d\Gamma_\xi}{2\pi|x-\xi|}, \quad w_i^+(x) = \frac{\varphi_i^+(x)}{h^{(s)}} \int\limits_{\sigma_i^+} \frac{d\Gamma_\xi}{2\pi|x-\xi|}, \tag{3.46}$$

$\varphi_i^-(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая в $\overline{T^-(\gamma, \delta)}$ функция, удовлетворяющая таким условиям: $\varphi_i^-(x) \equiv 1$ в $\frac{R_i^{(s)}}{4}$ -окрестности σ_i^- (в $T^-(\gamma, \delta)$), $\varphi_i^-(x) \equiv 0$ вне $\frac{R_i^{(s)}}{3}$-окрестности σ_i^-, $\frac{\partial \varphi_i^-}{\partial \nu} = 0$ на Γ, всюду $0 \leqslant \varphi_i^-(x) \leqslant 1$ и $D^\alpha \varphi_i^-(x) = O[(R_i^{(s)})^{-|\alpha|}]$, $|\alpha| = 1, 2$: аналогичными свойствами обладает функция $\varphi_i^+(x)$ по отношению к $T^+(\gamma, \delta, s)$, σ_i^+ и $\Gamma^{(s)}$.

Легко видеть, что сужения функции $\hat{w}^{(s)}(x)$ на области $T^-(\gamma, \delta)$, $T^+(\gamma, \delta)$ и $T_i^{(s)}$ принадлежат пространствам $W_2^1(T^-(\gamma, \delta))$, $W_2^1(T^+(\gamma, \delta))$, $W_2^1(T_i^{(s)})$, но сама $\hat{w}^{(s)}(x)$ пространству $W_2^1(T_1(\gamma, \delta, s))$ не принадлежит, так как на поверхностях σ_i^- и σ_i^+ (при переходе из $T^-(\gamma, \delta)$ в $T_i^{(s)}$ и соответственно из $T_i^{(s)}$ в $T^+(\gamma, \delta)$) она имеет скачки, равные $q_i^-(x) = w_i^-|_{\sigma_i^-}$ и $q_i^+(x) = w_i^+|_{\sigma_i^+}$.

Обозначим через $Q(T_1(\gamma, \delta, s))$ класс функций из $L_2(T_1(\gamma, \delta, s))$, на $\gamma_\delta^\pm$ равных нулю, а на $\sigma_i^\pm$ имеющих скачки $q_i^\pm$. Сужения функций из этого класса на $T^-(\gamma, \delta)$, $T^+(\gamma, \delta)$ и $T_i^{(s)}$ должны принадлежать соответствующим пространствам W_2^1, так что все равенства на поверхностях понимаются в смысле L_2. Пусть $z^{(s)}(x) \in Q(T_1(\gamma, \delta, s))$. Тогда функция

$$w^{(s)}(x) = \widehat{w}^{(s)}(x) - z^{(s)}(x) \tag{3.47}$$

принадлежит $W_2^1(T_1(\gamma, \delta, s))$, а так как $\hat{w}^{(s)}(x)$ на γ_δ^- и γ_δ^+ принимает значения, равные соответственно нулю и единице, то $w^{(s)}(x)$ попадает в класс $W_1(\gamma, \delta, s)$, в котором ищется минимум функционала (3.42). Отсюда обычным способом устанавливаем, что функция

$w^{(s)}(x)$ вида (3.47) минимизирует функционал (3.42) в классе $W_1(\gamma, \delta, s)$, если функция $z^{(s)}(x)$ минимизирует в классе $Q(T_1(\gamma, \delta, s)$ функционал

$$J(z^{(s)}) = \Big(\int\limits_{T^-(\gamma,\delta)} + \int\limits_{T^+(\gamma,\delta)} + \sum_{\gamma(s)} \int\limits_{T_i^{(s)}} \Big) \{ |\nabla z^{(s)}|^2 -$$

$$- 2(\nabla \widehat{w}^{(s)}, \nabla z^{(s)})\} \, dx.$$

Учитывая свойства функции $\hat{w}^{(s)}(x)$ и интегрируя по частям, преобразуем этот функционал к виду

$$J(z^{(s)}) = \Big(\int\limits_{T^-(\gamma,\delta)} + \int\limits_{T^+(\gamma,\delta)} + \sum_{\gamma(s)} \int\limits_{T_i^{(s)}} \Big) \{ |\nabla z^{(s)}|^2 + 2\Delta \widehat{w}^{(s)} z^{(s)} \} \, dx -$$

$$- \int\limits_{\Gamma^{(s)} \setminus U'\sigma_i^+} \frac{\partial w_i^+}{\partial \nu} (z^{(s)})^+ \, d\Gamma - \int\limits_{\Gamma \setminus U'\sigma_i^-} \frac{\partial w_i^-}{\partial \nu} (z^{(s)})^- \, d\Gamma - \sum_{\gamma(s)} \int\limits_{\sigma_i^+} \Big\{ \frac{\partial w_i^+}{\partial \nu} +$$

$$+ \frac{1}{h^{(s)}} \Big\} (z^{(s)})^+ d\Gamma - \sum_{\gamma(s)} \int\limits_{\sigma_i^-} \Big\{ \frac{\partial w_i^-}{\partial \nu} - \frac{1}{h^{(s)}} \Big\} (z^{(s)})^- \, d\Gamma +$$

$$+ \sum_{\gamma(s)} \Big\{ \int\limits_{\sigma_i^-} \frac{1}{h^{(s)}} q_i^- d\Gamma - \int\limits_{\sigma_i^+} \frac{1}{h^{(s)}} q_i^+ d\Gamma \Big\}, \tag{3.48}$$

где $(z^{(s)})^\pm$ — предельные значения функций $z^{(s)}(x)$ из областей $T^\pm(\gamma, \delta)$, нормаль ν направлена в сторону $T^+(\gamma, \delta)$. В этой сумме последнее слагаемое можно отбросить, так как оно не зависит от $z^{(s)}(x)$. Используя формулы для нормальных производных потенциала простого слоя и учитывая свойства функций $\varphi_i^\pm(x)$, из (3.46) получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w_i^-}{\partial \nu}\Big|_\Gamma &= \begin{cases} \dfrac{1}{h^{(s)}} - \rho_i^-(x), & x \in \sigma_i^-, \\ \rho_i^-(x), & x \notin \sigma_i^-, \end{cases} \\ \frac{\partial w_i^+}{\partial \nu}\Big|_\Gamma &= \begin{cases} -\dfrac{1}{h^{(s)}} + \rho_i^+(x), & x \in \sigma_i^+, \\ \rho_i^+(x), & x \notin \sigma_i^+, \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{3.49}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \rho_i^-(x) &= \frac{\varphi_i^-(x)}{h^{(s)}} \int\limits_{\sigma_i^-} \frac{\cos(\nu_x, x-\xi)}{2\pi |x-\xi|} \, d\Gamma_\xi, \\ \rho_i^+(x) &= \frac{\varphi_i^+(x)}{h^{(s)}} \int\limits_{\sigma_i^+} \frac{\cos(\nu_x, x-\xi)}{2\pi |x-\xi|} \, d\Gamma \end{aligned}\right\} \tag{3.49'}$$

Таким образом, согласно (3.48) и (3.49) функция $z^{(s)}(x)$ должна минимизировать функционал

$$\Phi(z^{(s)}) = D(z^{(s)}) + g^{+}(z^{(s)}) + g^{-}(z^{(s)}) + g(z^{(s)}) + \rho^{+}(z^{(s)}) + \rho^{-}(z^{(s)}) \tag{3.50}$$

в классе $Q(T_1(\gamma, \delta, s))$. Здесь введены обозначения

$$D(z^{(s)}) = \left(\int\limits_{T^{-}(\gamma,\delta)} + \int\limits_{T^{+}(\gamma,\delta)} + \sum_{\gamma(s)} \int\limits_{T_i^{(s)}} \right) |\nabla z^{(s)}|^2 \, dx,$$

$$g^{\pm}(z^{(s)}) = 2 \sum_{\gamma(s)} \int\limits_{T_i^{\pm}} \Delta w_i^{\pm} z^{(s)} dx, \quad g(z^{(s)}) = 2 \sum_{\gamma(s)} \int\limits_{T_i^{(s)}} \Delta \widehat{w}^{(s)} z^{(s)} dx,$$

$$\rho^{\pm}(z^{(s)}) = - \sum_{\gamma(s)} \int\limits_{\gamma_i^{\pm}} \rho_i^{\pm}(x) (z^{(s)})^{\pm} d\Gamma,$$

где $T_i^{\pm}$ — носители функций $\varphi_i^{\pm}(x)$, $\gamma_i^{+} = T_i^{+} \cap \Gamma^{(s)}$, $\gamma_i^{-} = T_i^{-} \cap \Gamma^{(s)} = \gamma_i$. Из формул (3.45), (3.46) и (3.49′) нетрудно получить оценки

$$\max_{T_i^{(s)}} |\Delta \widehat{w}^{(s)}(x)| = O\left(\frac{1}{h^{(s)}}\right), \quad \max_{T_i^{\pm}} |\Delta w_i^{+}(x)| = O\left(\frac{\operatorname{mes}_{\Gamma} \sigma_i^{(s)}}{h^{(s)} R_i^{(s)\,3}}\right),$$

$$\max_{\gamma_i^{\pm}} |\rho_i^{\pm}(x)| = O\left(\frac{d_i^{(s)}}{h^{(s)}}\right).$$

Поэтому в силу неравенства Коши — Буняковского

$$\left.\begin{aligned}
|g^{\pm}(z^{(s)})| &\leqslant C \sum_{\gamma(s)} \frac{\operatorname{mes}_{\Gamma} \sigma_i^{(s)}}{h^{(s)} (R_i^{(s)})^{3/2}} \left\{ \int\limits_{T_i^{\pm}} |z^{(s)}|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \\
|g(z^{(s)})| &\leqslant C \sum_{\gamma(s)} \frac{(\operatorname{mes}_{\Gamma} \sigma_i^{(s)})^{1/2}}{h^{(s)}} \left\{ \int\limits_{T_i^{(s)}} |z^{(s)}|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \\
|\rho^{\pm}(z^{(s)})| &\leqslant C \sum_{\gamma(s)} \frac{d_i^{(s)}}{h^{(s)}} (\operatorname{mes}_{\Gamma} \gamma_i^{\pm})^{\frac{1}{2}} \left\{ \int\limits_{\gamma_i^{\pm}} (z^{(s)\,\pm})^2 d\Gamma \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.51}$$

Учитывая, что $z^{(s)}(x) \in Q(T_1(\gamma, \delta, s))$, находим

$$\left.\begin{aligned}
\int\limits_{T_i^{\pm}} |z^{(s)}|^2 dx &\leqslant C R_i^{(s)} \delta \int\limits_{T^{\pm}(\gamma_i,\delta)} |\nabla z^{(s)}|^2 dx, \\
\int\limits_{\gamma_i^{\pm}} (z^{(s)\,\pm})^2 dx &\leqslant C\delta \int\limits_{T^{\pm}(\gamma,\delta)} |\nabla z^{(s)}|^2 dx,
\end{aligned}\right\} \tag{3.52}$$

а так как скачок функции $z^{(s)}(x)$ на $\sigma_i^{(s)}$ в силу (3.45) и (3.46) имеет порядок $O\left(\frac{d_i^{(s)}}{h^{(s)}}\right)$, то из последнего неравенства следует

$$\int_{T_i^{(s)}} |z^{(s)}|^2\,dx \leqslant C\left\{\frac{(d_i^{(s)})^2}{h^{(s)}}\,\mathrm{mes}_\Gamma\sigma_i^{(s)} + h^{(s)}\delta\int_{T^-(\gamma_i\delta)\,\cup\,T_i^{(s)}} |\nabla z^{(s)}|^2\,dx\right\}. \qquad (3.53)$$

Здесь всюду постоянные C не зависят от s. Подставляя (3.52) и (3.53) в (3.49), окончательно получаем

$$\left.\begin{aligned}
&|g^\pm(z^{(s)})| \leqslant C\delta^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{(\gamma)}\left[\frac{\mathrm{mes}_\Gamma\sigma_i^{(s)}}{h^{(s)}R_i^{(s)}}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}}(z^{(s)}),\\
&|g(z^{(s)})| \leqslant C\,\frac{\max\limits_i d_i^{(s)}}{\sqrt{h^{(s)}}}\sum_{(\gamma)}\frac{\mathrm{mes}_\Gamma\sigma_i^{(s)}}{h^{(s)}} + C\delta^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{(\gamma)}\frac{\mathrm{mes}_\Gamma\sigma_i^{(s)}}{h^{(s)}}\right\}^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}}(z^{(s)}),\\
&|\rho_i^\pm(z^{(s)})| \leqslant C\delta^{\frac{1}{2}}\,\frac{\max\limits_i d_i^{(s)}}{h^{(s)}}\,D^{\frac{1}{2}}(z^{(s)}).
\end{aligned}\right\} \qquad (3.54)$$

Пусть $u^{(s)}(x)$ — произвольная функция из класса $Q(T_1(\gamma, \delta, s))$, а функция $z^{(s)}(x)$ минимизирует функционал $\Phi(u^{(s)})$ в этом классе. Тогда $\Phi(u^{(s)}) \geqslant \Phi(z^{(s)})$ и в силу (3.50) и (3.54)

$$D(u^{(s)}) + \varepsilon_1(s, \delta)\,D^{\frac{1}{2}}(u^{(s)}) + \varepsilon_2(s) \geqslant D(z^{(s)}) - \varepsilon_1(s, \delta)\,D^{\frac{1}{2}}(z^{(s)}) - \varepsilon_2(s). \qquad (3.55)$$

Здесь

$$\varepsilon_1(s, \delta) = C\delta^{\frac{1}{2}}\left\{\left[\sum_{(\gamma)}\left(\frac{\mathrm{mes}_\Gamma\sigma_i^{(s)}}{h^{(s)}R_i^{(s)}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{(\gamma)}\frac{\mathrm{mes}_\Gamma\sigma_i^{(s)}}{h^{(s)}}\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\max\limits_i d_i^{(s)}}{h^{(s)}}\right\},$$

$$\varepsilon_2(s) = C\,\frac{\max\limits_i d_i^{(s)}}{\sqrt{h^{(s)}}}\sum_{(\gamma)}\frac{\mathrm{mes}_\Gamma\sigma_i^{(s)}}{h^{(s)}},$$

причем согласно условиям теоремы

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{s\to\infty}}\,\varepsilon_1(s, \delta) = 0, \quad \lim_{s\to\infty}\varepsilon_2(s) = 0. \qquad (3.55')$$

В качестве функции сравнения $u^{(s)}(x) \in Q(T; (\gamma, \delta, s))$ **возьмем** функцию

$$u^{(s)}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{\gamma(s)} w_i^-(x), & x \in T^-(\gamma, \delta), \\ 0, & x \in T_i^{(s)}, \\ -\sum\limits_{\gamma(s)} w_i^+(x), & x \in T^+(\gamma, \delta), \end{cases}$$

где $w_i^\pm(x)$ определены по формулам (3.46). Очевидно,

$$D(u^{(s)}) = \sum_{\gamma(s)} \left\{ \int_{T_i^-} |\nabla w_i^-|^2 dx + \int_{T_i^+} |\nabla w_i^+|^2 dx \right\}. \tag{3.56}$$

Области интегрирования $T_i^\pm = \operatorname{supp} \varphi_i^\pm$ разобьем на две части:

$T_{i1}^\pm = \{x \in T^\pm(\gamma, \delta)\colon \ \varphi_i^\pm(x) \equiv 1\}$ и $T_{i2}^\pm = \{x \in T^\pm(\gamma, \delta)\colon \ \varphi_i^\pm < 1\}$.

Из формул (3.46) и свойств функций $\varphi_i^\pm(x)$ вытекает, что в $T_{i2}^\pm$

$$\max_{T_{i2}^\pm} |Dw_i^\pm(x)| = O\left(\frac{\operatorname{mes}_\Gamma \sigma_i^{(s)}}{h^{(s)} R_i^{(s)\,2}}\right)$$

и, следовательно,

$$\int_{T_{i2}^\pm} |\nabla w_i^\pm|^2 dx \leqslant C R_i^{(s)} \left(\frac{\operatorname{mes}_\Gamma \sigma_i^{(s)}}{h^{(s)} R_i^{(s)}}\right)^2. \tag{3.57}$$

Далее, используя теорему о композиции ядер со слабой особенностью, находим

$$\int_{T_{i1}^\pm} |\nabla w_i^\pm|^2 dx \leqslant \frac{C}{(h^{(s)})^2} \int_{T_{i1}^\pm} \left(\int_{\sigma_i^\pm} \frac{d\Gamma_\xi}{|x-\xi|^2} \right) dx = \frac{C}{(h^{(s)})^2} \int_{T_{i1}^\pm} \left(\int_{\sigma_i^\pm} \frac{d\Gamma_\xi}{|x-\xi|^2} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\sigma_i^\pm} \frac{d\Gamma_\eta}{|x-\eta|^2} \right) dx \leqslant \frac{C_1}{(h^{(s)})^2} \int_{\sigma_i^\pm} \left(\int_{\sigma_i^\pm} \frac{d\Gamma_\xi}{|\xi-\eta|} \right) d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \frac{d_i^{(s)} \operatorname{mes}_\Gamma \sigma_i^{(s)}}{(h^{(s)})^2}. \tag{3.58}$$

Подставляя неравенства (3.57) и (3.58) в (3.56), получаем

$$D(u^{(s)}) \leqslant C \left\{ \max_i R_i^{(s)} \sum_{(\gamma)} \left(\frac{\operatorname{mes}_\Gamma \sigma_i^{(s)}}{h^{(s)} R_i^{(s)}} \right)^2 + \frac{\max\limits_i d_i^{(s)}}{h^{(s)}} \sum_{(\gamma)} \frac{\operatorname{mes}_\Gamma \sigma_i^{(s)}}{h^{(s)}} \right\},$$

откуда согласно условиям теоремы

$$\lim_{s\to\infty} D(u^{(s)}) = 0. \tag{3.59}$$

Учитывая это, из (3.55) и (3.55′) находим

$$\lim_{\delta\to\infty}\overline{\lim_{s\to\infty}} D(z^{(s)}) = 0. \tag{3.60}$$

Обратимся теперь к формуле (3.47). Так как

$$P_{1\Delta}^{\frac{1}{2}}(\gamma, \delta, s) = D^{\frac{1}{2}}(w^{(s)}) \geqslant D^{\frac{1}{2}}(\widehat{w}^{(s)}) - D^{\frac{1}{2}}(z^{(s)}),$$

$$D(\widehat{w}^{(s)}) = \sum_{\gamma(s)} \int_{T_i^{(s)}} \left|\nabla\left(\frac{t}{h^{(s)}}\right)\right|^2 dx + D(u^{(s)}),$$

то в силу (3.59) и (3.60)

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{s\to\infty} P_{1\Delta}(\gamma, \delta, s) \geqslant \lim_{s\to\infty}\sum_{(\gamma)} \frac{\mathrm{mes}_\Gamma \sigma_i^{(s)}}{h^{(s)}}.$$

Учитывая неравенства (3.44) и (3.43), получаем формулу (3.41). Теорема доказана.

Таким образом, если множество $F^{(s)}$ — слой с каналами, причем при $s \to \infty$ диаметры каналов стремятся к нулю быстрее, чем толщина слоя, функция $p(x)$ и условия сходимости выражаются через геометрические параметры $F^{(s)}$. Другой крайний случай «слоя с каналами», а именно когда толщина слоя при всех s равна нулю, рассмотрен в работе [30]. Приведем основной результат этой работы.

Пусть множество $F^{(s)}$ состоит из точек фиксированной гладкой поверхности Г, из которой удалено большое число непересекающихся областей $\sigma_i^{(s)}$ (на Г), $i = 1, 2, \ldots, s$. Изучим поведение решения $u^{(s)}(x)$ задачи (3.39) в областях $R_3 \setminus F^{(s)}$ при $s \to \infty$, когда диаметры множеств $\sigma_i^{(s)}$ стремятся к нулю. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4. *Пусть при $s \to \infty$ выполняются такие условия:*

a) $\lim\limits_{s\to\infty}\{\max\limits_i d_i^{(s)}\} = 0$;

b) функция $\delta(\rho) = \overline{\lim\limits_{s\to\infty}}\left\{\max\limits_i \sum\limits_{\substack{j\neq i\\ r_{ij}^{(s)}<\rho}} \frac{C_j^{(s)}}{r_{ij}^{(s)}}\right\}$ *стремится к нулю при* $\rho \to 0$;

c) для любого куска $\gamma \subset \Gamma$ существует предел

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{(\gamma)} C_i^{(s)} = \int_\gamma \varphi(x)\, d\Gamma,$$

где $C_i^{(s)}$ — ньютоновы емкости множеств $\sigma_i^{(s)}$, $r_{ij}^{(s)}$ — расстояния между $\sigma_i^{(s)}$ и $\sigma_j^{(s)}$.

Тогда последовательность $\{u^{(s)}(x),\ s = 1, 2, \ldots\}$ решений задачи (3.39) *сходится к функции $u(x)$, которая является решением краевой задачи* (3.40), *где* $p(x) = \frac{1}{4}\varphi(x)$.

В работе [30] эта теорема доказана методами теории потенциала. Заметим, что условие b требует, чтобы множества $\sigma_i^{(s)}$ находились на Γ не очень близко друг к другу. Если его заменить условием

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{C_i^{(s)}}{R_i^{(s)}}\right)^2<C$$

(аналогом условия b теоремы 3.3), то доказательство теоремы можно провести изложенным выше методом.

Некоторые другие характеристики множеств $F^{(s)}$ рассмотрены в работах [8, 52—54], где с их помощью установлены достаточные условия сходимости решений задачи (3.39) (и описана функция $p(x)$) для специальных видов множеств $F^{(s)}$.

§ 3. ОБЪЕМНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МНОЖЕСТВ $F^{(s)}$ (СЛУЧАЙ СЛАБОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ГРАНИЦЕЙ)

Постановка задачи и основные результаты

Пусть множество $F^{(s)}$ состоит из s непересекающихся связных компонент $F_i^{(s)}$, ограниченных гладкими поверхностями Ляпунова $\Gamma_i^{(s)}$ и распределенных в некоторой фиксированной конечной области $\Omega\subset R_3$, также ограниченной гладкой поверхностью $\partial\Omega$. Рассмотрим в области $\Omega^{(s)}=R_3\setminus F^{(s)}$ краевую задачу

$$\Delta u^{(s)}(x)+k^2u^{(s)}(x)=f(x), \tag{3.61}$$

$$\left.\frac{\partial u^{(s)}}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega^{(s)}}=0, \tag{3.62}$$

где $\operatorname{Im}k\geqslant 0$, $\frac{\partial}{\partial\nu}$ — производная по нормали к границе $\partial\Omega^{(s)}$, а $f(x)$ — произвольная непрерывная и финитная функция. В полную постановку этой задачи должны входить условия на бесконечности. Пусть при $\operatorname{Im}k>0$ или $k=0$ $u^{(s)}(x)$ стремится к нулю на бесконечности, а при $\operatorname{Im}k=0$ $(k\neq 0)$ удовлетворяет условиям излучения

$$u^{(s)}(x)=O\left(\frac{1}{R}\right),$$

$$\frac{\partial u^{(s)}(x)}{\partial R}-iku^{(s)}(x)=o\left(\frac{1}{R}\right),\qquad i=\sqrt{-1},\quad R=|x|.$$

Тогда, как известно, существует единственное решение $u^{(s)}(x)$ задачи (3.61), (3.62). Изучим асимптотическое поведение решения $u^{(s)}(x)$, когда число множеств $F_i^{(s)}$ в Ω неограниченно растет, а диаметры их уменьшаются, причем так, что суммарный объем $\tau^{(s)}$ множества $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ стремится к нулю. Покажем, что при определенных условиях во всех точках, лежащих на положительном расстоянии от Ω, оно представимо в виде

$$u^{(s)}(x) = u^{(0)}(x) + \tau^{(s)} v(x) + o(\tau^{(s)}), \tag{3.63}$$

где $u^{(0)}(x)$ — решение уравнения (3.61) во всем пространстве с теми же условиями на бесконечности, что и в исходной задаче, а $v(x)$ — непрерывная функция в R_3, выражающая (явно) через $u^{(0)}(x)$ и некоторые предельные характеристики множеств $F_i^{(s)}$.

В качестве основной характеристики множества $F_i^{(s)}$ используем понятие виртуальной массы [41]. Пусть F — произвольный компакт, ограниченный поверхностью Ляпунова Γ_F. Рассмотрим в области $\Omega_F = R_3 \setminus F$ краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\Delta w_l(x) = 0, && x \in \Omega_F, \\ &\frac{\partial w_l}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_F} = \cos(x_l, \nu), && \\ &w_l(x) \to 0, && x \to \infty, \end{aligned}\right\} \tag{3.64}$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по внешней нормали ν к Γ_F, (x_l, ν) — угол между положительным направлением оси x_l и нормалью ν. Как известно, существует единственное решение $w_l(x)$ этой задачи, и оно имеет конечную энергию

$$\| w_l \|^2 = \int_{\Omega_F} | \nabla w_l |^2 \, dx,$$

где $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$, $|\nabla w|^2 = (\nabla w, \nabla w)$, а $(\nabla u, \nabla v) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$ — скалярное произведение векторов ∇u и ∇v в R_3. С помощью решений $w_l(x)$ и $w_m(x)$ определим систему чисел $W_{lm}(F)$, связанную с множеством F:

$$W_{lm}(F) = \int_{\Omega_F} (\nabla w_l, \nabla w_m) \, dx, \qquad l, m = 1, 2, 3.$$

Легко видеть, что при замене координат эта система преобразуется как тензор; она называется тензором виртуальной массы тела F.

Охарактеризуем теперь более детально вид рассматриваемых множеств $F_j^{(s)}$. Предполагая, что $F_j^{(s)}$ ограничены поверхностями Ляпунова $\Gamma_j^{(s)}$, введем интегральные операторы

$$[N_j^{(s)} \rho](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j^{(s)}} \frac{\cos(\nu_x, x - \xi)}{|x - \xi|^2} \rho(\xi) \, d\Gamma_\xi, \tag{3.65}$$

действующие в пространствах $C(\Gamma_j^{(s)})$ (ν_x — внешняя нормаль к $\Gamma_j^{(s)}$ в точке x, а $(\nu_x, x-\xi)$ — угол между векторами ν_x и $x-\xi$). Такие операторы возникают при решении внешней задачи Неймана методами теории потенциала [35]. Как известно, всегда существует ограниченный оператор $(I+N_j^{(s)})^{-1}$ (I — тождественный оператор), но его норма $\|(I+N_j^{(s)})^{-1}\|$ в пространстве $C(\Gamma_j^{(s)})$, вообще говоря, зависит от вида поверхности $F_j^{(s)}$. Предположим, что множества $F_j^{(s)}$ ограничены поверхностями Ляпунова $\Gamma_j^{(s)}$, для которых при всех s и j ($1 \leqslant j \leqslant s$) выполняются неравенства

$$\|(I+N_j^{(s)})^{-1}\| < C_1, \tag{3.66}$$

$$\int\limits_{\Gamma_j^{(s)}} \frac{1}{|x-\xi|^\theta}\, d\Gamma_\xi < C_2 (d_j^{(s)})^{2-\theta}, \qquad \theta = 0,\ 1, \tag{3.67}$$

где $d_j^{(s)}$ — диаметры множеств $F_j^{(s)}$, а постоянные C_1 и C_2 не зависят от j и s. Грубо говоря, это сводится к требованию, чтобы при $s \to \infty$ множества $F_j^{(s)}$ не вырождались в плоские фигуры, а поверхности $\Gamma_j^{(s)}$ не становились очень извилистыми. Например, нетрудно проверить, что неравенства (3.66) и (3.67) выполняются, если поверхности $\Gamma_j^{(s)}$ являются диффеоморфными образами единичной сферы в R_3, причем при всех j и s соответствующие отображения $r_j^{(s)}(u, v)$ удовлетворяют таким условиям: $|D^\alpha r_j^{(s)}| \leqslant A d_j^{(s)}$, $|\alpha| = 0,\ 1,\ 2$, $|r_j^{(s)}(1) - r_j^{(s)}(2)| \geqslant a d_j^{(s)} \rho(1,\ 2)$, где a, A — постоянные ($0 < a$, $A < \infty$), а $\rho(1,\ 2)$ — расстояние между точками $1 = (u_1, v_1)$ и $2 = (u_2, v_2)$ на сфере.

Введем такие обозначения: $\{W_{lm}(F_j^{(s)}),\ l, m = 1, 2, 3\}$ — тензор виртуальной массы множества $F_j^{(s)}$, $\tau(F_j^{(s)})$ — объем $F_j^{(s)}$, $\tau^{(s)} = \sum\limits_{j=1}^{s} \tau(F_j^{(s)})$ — суммарный объем множества $F^{(s)}$, $d_j^{(s)}$ — диаметр $F_j^{(s)}$, $R_{ij}^{(s)}$ — расстояние между $F_i^{(s)}$ и $F_j^{(s)}$, $\sum\limits_{(G)}$ — сумма, распространенная на те значения индекса j, для которых $F_j^{(s)}$ лежат строго внутри области $G \subset R_3$.

Теперь можно сформулировать основной результат.

Теорема 3.5. *Пусть при $s \to \infty$ выполняются такие условия: а) для любой подобласти $G \subset \Omega$ существуют пределы*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{\tau^{(s)}} \sum_{(G)} W_{lm}(F_j^{(s)}) = \int\limits_G a_{lm}(x)\, dx \qquad (l, m = 1, 2, 3),$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{\tau^{(s)}} \sum_{(G)} \tau(F_j^{(s)}) = \int\limits_G b(x)\, dx,$$

где $a_{lm}(x)$ *и* $b(x)$ — *гладкие функции в* Ω;

b) $d_j^{(s)} = o(\min\limits_{i \neq j} R_{ij}^{(s)})$;

c) $\max\limits_i \sum\limits_{j \neq 1} \left(\frac{d_j^{(s)}}{R_{ij}^{(s)}} \right)^2 \leqslant \frac{2\pi\alpha}{C_1 C_2 (1 + |k| d(\Omega))}$,

где $\alpha < 1$, $d(\Omega)$ — *диаметр области* Ω, *а постоянные* C_1 *и* C_2 *определяются из неравенств* (3.66), (3.67).

Тогда в любой точке x, *находящейся на положительном расстоянии от области* Ω, *решение* $u^{(s)}(x)$ *задачи* (3.61), (3.62) *имеет асимптотику* (3.63), *причем функция* $v(x)$ *в ней задается формулой*

$$v(x) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|} \sum_{l,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left\{ (a_{lm}(\xi) + \delta_{lm} b(\xi)) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi_m} \right\} d\xi -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|} [k^2 u^{(0)}(\xi) - f(\xi)] \, b(\xi) \, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|} \sum_{l,m=1}^{3} (a_{lm}(\xi) + \delta_{lm} b(\xi)) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi_m} \cos(\xi_l, \nu_\xi) \, d\Gamma_\xi, \quad (3.68)$$

где (ξ_l, ν_ξ) — *угол между положительным направлением оси* ξ_l *и внешней нормалью к* $\partial\Omega$ *в точке* ξ, $i = \sqrt{-1}$, δ_{lm} — *символ Кронекера.*

Доказательство. Установим сначала ряд вспомогательных лемм.

Лемма 3.4. *Пусть* $w_l^{(j)}(x)$ — *решение задачи* (3.64) *в области* $\Omega_j^{(s)} = R_3 \setminus F_j^{(s)}$. *Тогда* $w_l^{(j)}(x)$ *представимо в виде потенциала простого слоя*

$$w_l^{(j)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_j^{(s)}} \frac{1}{|x-\xi|} \sigma_l^{(j)}(\xi) \, d\Gamma_\xi \quad (3.69)$$

с плотностью $\sigma_l^{(j)}(\xi)$, *удовлетворяющей условиям*

$$\int\limits_{\Gamma_j^{(s)}} \sigma_l^{(j)}(\xi) \, d\Gamma_\xi = 0, \quad (3.70)$$

и если выполняется неравенство (3.66), *то*

$$\max_\xi |\sigma_l^{(j)}(\xi)| < C_1. \quad (3.71)$$

Доказательство. Потенциал простого слоя (3.69) по поверхности $\Gamma_j^{(s)}$ удовлетворяет уравнению и условиям на бесконечности (3.64). В силу граничных условий (3.64) плотность $\sigma_l^{(j)}(\xi)$ должна удовлетворять на $\Gamma_j^{(s)}$ интегральному уравнению

$$\sigma_l^{(j)}(x)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_j^{(s)}}\frac{\cos(\nu_x, x-\xi)}{|x-\xi|^2}\sigma_l^{(j)}(\xi)\,d\Gamma_\xi=\cos(x_l, \nu_x). \quad (3.72)$$

Интегрируя это равенство по $\Gamma_j^{(s)}$ и учитывая, что интеграл от правой части равен нулю, а при $\xi\in\Gamma_j^{(s)}$

$$\int\limits_{\Gamma_j^{(s)}}\frac{\cos(\nu_x, x-\xi)}{|x-\xi|^2}\,d\Gamma_x=2\pi,$$

получаем (3.70).

Далее, согласно (3.65) уравнение (3.71) можно записать в операторном виде в пространстве $C(\Gamma_j^{(s)})$

$$\sigma_l^{(j)}+N_j^{(s)}\sigma_l^{(j)}=\cos(x_l, \nu_x), \quad (3.72')$$

откуда в силу неравенства (3.66) следует (3.71). Лемма доказана.

Введем функцию $u_j^{(s)}(x)$, удовлетворяющую в области $\Omega_j^{(s)}=R_3\setminus F_j^{(s)}$ уравнению

$$\Delta u_j^{(s)}+k^2u_j^{(s)}=0, \quad (3.61')$$

а на поверхности $\Gamma_j^{(s)}$ — граничному условию

$$\left.\frac{\partial u_j^{(s)}}{\partial\nu}\right|_{\Gamma_j^{(s)}}=\left.\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\nu}\right|_{\Gamma_j^{(s)}}, \quad (3.62')$$

где k^2 то же, что в (3.61), а $u^{(0)}(x)$ — решение уравнения (3.61) во всем пространстве R_3, причем на бесконечности как $u_j^{(s)}(x)$, так и $u^{(0)}(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и решение $u^{(s)}(x)$ исходной задачи (3.61), (3.62). Как известно, $u_j^{(s)}(x)$ можно представить в виде потенциала простого слоя

$$u_j^{(s)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_j^{(s)}}\frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\rho_j^{(s)}(\xi)\,d\Gamma_\xi \quad (3.73)$$

с плотностью, удовлетворяющей в силу (3.72) уравнению

$$\rho_j^{(s)}(x)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_l^{(s)}}\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\rho_j^{(s)}(\xi)\,d\Gamma_\xi=\frac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial\nu}, \quad x\in\Gamma_j^{(s)}, \quad (3.74)$$

где $\frac{\partial}{\partial\nu_x}$ — производная по внешней нормали к $\Gamma_j^{(s)}$ в точке $x\in\Gamma_j^{(s)}$. При достаточно малых диаметрах $d_j^{(s)}$ поверхностей $\Gamma_j^{(s)}$ это уравнение имеет единственное решение $\rho_j^{(s)}(x)$.

Лемма 3.5. *Если выполняются условия* (3.66), (3.67), *то справедливы равенства*

$$\rho_j^{(s)}(x) = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_l}(x^j)\,\sigma_l^{(j)}(x) + O(d_j^{(s)}), \tag{3.75}$$

$$u_j^{(s)}(x) = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_l}(x^j)\,w_l^{(j)}(x) + O([d_j^{(s)}]^2), \tag{3.76}$$

$$u_j^{(s)}(x) = O(d_j^{(s)}), \qquad x \in \Gamma_j^{(s)}, \tag{3.76'}$$

где x^j *— произвольная точка в* $F_j^{(s)}$.

Доказательство. Учитывая гладкость функций $\frac{\partial u^{(0)}(x)}{\partial x_l}$, уравнение (3.74) запишем в таком операторном виде (в пространстве $C(\Gamma_j^{(s)})$):

$$\rho_j^{(s)} + N_j^{(s)}\rho_j^{(s)} + M_j^{(s)}\rho_j^{(s)} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_l}(x^j)\cos(x_l, \nu) + O(d_j^{(s)}), \tag{3.74'}$$

где операторы $N_j^{(s)}$ и $M_j^{(s)}$ определяются соответственно равенствами (3.65) и

$$M_j^{(s)}\rho = \int\limits_{\Gamma_j^{(s)}} \frac{(e^{ik|x-\xi|} - 1 - ik|x-\xi|\,e^{ik|x-\xi|})}{2\pi|x-\xi|^2}\cos(\nu_x, x-\xi)\,\rho(\xi)\,d\Gamma_\xi. \tag{3.77}$$

В силу (3.67) ($\theta = 0$) для нормы оператора $M_j^{(s)}$ справедлива оценка

$$\|M_j^{(s)}\| = O([d_j^{(s)}]^2). \tag{3.78}$$

Используя эту оценку, а также неравенство (3.66), из (3.74) и (3.72′) получаем (3.75). Учитывая теперь представления (3.69) и (3.73) и еще раз воспользовавшись неравенствами (3.67) ($\theta = 0, 1$) и (3.71), из (3.75) выводим (3.76). Наконец, из (3.76), (3.69), (3.71) и (3.67) ($\theta = 1$) вытекает (3.76′). Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Пусть функция* $z^{(s)}(x)$ *удовлетворяет в области* $\Omega^{(s)} = R_3 \setminus F_j^{(s)}$ *уравнению* $\Delta z^{(s)} + k^2 z^{(s)} = 0$ *и граничным условиям на* $\partial\Omega^{(s)} = \bigcup \Gamma_j^{(s)}$

$$\left.\frac{\partial z^{(s)}}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \varphi^{(s)}, \tag{3.79}$$

где $\varphi^{(s)} = \varphi^{(s)}(x)$ *— непрерывная функция на* $\partial\Omega^{(s)}$; *на бесконечности* $z^{(s)}(x)$ *удовлетворяет тому же условию, что и решение задачи* (3.61), (3.62). *Тогда если выполняются неравенства* (3.66), (3.67) *и условие* (*c*) *теоремы* 3.5, *то в любой точке* $x \in R_3$, *лежащей на положитель-*

ном расстоянии от области $\Omega\ (\bigcup \Gamma_j^{(s)} \subset \Omega)$, *справедливо неравенство*

$$|z^{(s)}(x)| \leqslant C(x)\{\max_{\partial\Omega^{(s)}} |\varphi^{(s)}(\xi)|\,\tau^{(s)} + \sum_j |\int_{\Gamma_j^{(s)}} \varphi^{(s)}(x)\,d\Gamma|\},$$

где постоянная $C(x)$ *не зависит от* s, $\tau^{(s)} = \Sigma\tau_j^{(s)}$, $\tau_j^{(s)} = \operatorname{mes} F_j^{(s)}$.

Доказательство. Представим функцию $z^{(s)}(x)$ в виде потенциала простого слоя

$$z^{(s)}(x) = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j^{(s)}} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\,\sigma^{(s)}(\xi)\,d\Gamma_\xi. \tag{3.80}$$

Тогда в силу (3.79) плотность $\sigma^{(s)}(x)$ должна удовлетворять на $\partial\Omega^{(s)} = \bigcup \Gamma_j^{(s)}$ интегральному уравнению

$$\sigma^{(s)}(x) - \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j^{(s)}} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\,\sigma^{(s)}(\xi)\,d\Gamma_\xi = \varphi^{(s)}(x), \tag{3.81}$$

$$x \in \partial\Omega^{(s)}.$$

Обозначим через $\sigma^j(x)$ сужение функции $\sigma^{(s)}(x)$ на $\Gamma_j^{(s)}$ и введем банахово пространство $\prod_{j=1}^{s} C(\Gamma_j^{(s)})$, являющееся прямым произведением пространств $C(\Gamma_j^{(s)})$; норму элемента $\sigma^{(s)}(x) = \{\sigma^1(x), \sigma^2(x) \ldots \sigma^s(x)\}$ в $\prod_{j=1}^{s} C(\Gamma_j^{(s)})$ определим следующим образом: $\|\sigma\| = \max_{1\leqslant j\leqslant s} \max_{\Gamma_j^{(s)}} |\sigma^j(x)|$. В этом пространстве уравнение (3.80) имеет вид

$$\sigma^{(s)} + N^{(s)}\sigma^{(s)} + M^{(s)}\sigma^{(s)} + L^{(s)}\sigma^{(s)} = \varphi^{(s)}, \tag{3.81'}$$

где операторы $N^{(s)}$, $M^{(s)}$ и $L^{(s)}$ определяются равенствами

$$[N^{(s)}\sigma^{(s)}]^j = N_j^{(s)}\sigma^j, \quad [M^{(s)}\sigma^{(s)}]^j \equiv M_j^{(s)}\sigma^j$$

(см. (3.65), (3.77)),

$$[L^{(s)}\sigma^{(s)}]^j(x) = \sum_{r=j} \int_{\Gamma_r^{(s)}} \frac{(1-ik|x-\xi|)\,e^{ik|x-\xi|}\cos(\nu_x, x-\xi)}{2\pi|x-\xi|}\,\sigma^r(\xi)\,d\Gamma_\xi.$$

В силу (3.66) и (3.78)

$$\|(I+N^{(s)})^{-1}\| \leqslant C_1 \text{ и } \|M^{(s)}\| = O([d^{(s)}]^2),$$

где I — тождественный оператор в $\prod C(\Gamma_j^{(s)})$, а $d^{(s)} = \max_j d_j^{(s)}$. Используя неравенство (3.67) ($\theta = 0$) и условие c теоремы 3.5, получаем

$$\|L^{(s)}\| \leqslant \alpha C_1^{-1}, \quad \alpha < 1.$$

Из этих оценок следует, что при достаточно малых $d^{(s)}$ уравнение (3.81′) (а значит, и (3.81)) имеет единственное решение $\sigma^{(s)} = \sigma^{(s)}(x)$, причем

$$\max_{\partial\Omega^{(s)}} |\sigma^{(s)}(x)| = \|\sigma^{(s)}\| \leqslant C\|\varphi^{(s)}\| = C \max_{\partial\Omega^{(s)}} |\varphi^{(s)}(x)|, \tag{3.82}$$

где постоянная C не зависит от s.

Запишем теперь уравнение (3.81) при $x \in \Gamma_j^{(s)}$ в виде

$$\sigma^{(s)}(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_j^{(s)}} \frac{\cos(\nu_x, x-\xi)}{|x-\xi|^2}\sigma^{(s)}(\xi)\,d\Gamma_\xi + [M_j^{(s)}\sigma^{(s)}](x) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial\nu_x}\sum_{r\neq j}\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r^{(s)}}\frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\sigma^{(s)}(\xi)\,d\Gamma_\xi = \varphi^{(s)}(x).$$

Проинтегрировав это равенство по поверхности $\Gamma_j^{(s)}$, после простых преобразований получаем

$$2\int_{\Gamma_j^{(s)}}\sigma^{(s)}(x)\,d\Gamma_x + \int_{\Gamma_j^{(s)}}[M_j^{(s)}\sigma^{(s)}](x)\,d\Gamma_x + \int_{F_j^{(s)}}\Big\{\sum_{r\neq j}\frac{k^2}{2\pi}\int_{\Gamma_r^{(s)}}\frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\times$$

$$\times\,\sigma^{(s)}(\xi)\,d\Gamma_\xi\Big\}\,dx = \int_{\Gamma_j^{(s)}}\varphi^{(s)}(x)\,d\Gamma_x.$$

Отсюда, используя оценку (3.78), неравенства (3.67) ($\theta = 0$) и (3.82) и условие c теоремы 3.5, находим

$$\int_{\Gamma_j^{(s)}}\sigma^{(s)}(x)\,d\Gamma_x = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_j^{(s)}}\varphi^{(s)}(x)\,d\Gamma_x + O(\tau_j^{(s)})\max_{\partial\Omega^{(s)}}|\varphi^{(s)}(x)|. \tag{3.83}$$

Теперь обратимся к представлению (3.80). При $x \notin \overline{\Omega}$ запишем

$$z^{(s)}(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{s}\int_{\Gamma_j^{(s)}}\left\{\frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|} - \frac{e^{ik|x-\xi^j|}}{|x-\xi^j|}\right\}\sigma^{(s)}(\xi)\,d\Gamma_\xi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{s}\frac{e^{ik|x-\xi^j|}}{|x-\xi^j|}\int_{\Gamma_j^{(s)}}\sigma^{(s)}(x)\,d\Gamma_\xi.$$

Отсюда, учитывая гладкость функции $\dfrac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}$ при $\xi \in \Omega$, $x \notin \overline{\Omega}$, с помощью (3.82) и (3.83) получаем доказываемое неравенство. Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3.5. Рассмотрим функцию

$$u^{(s)}(x) = u^{(0)}(x) - \sum_{j=1}^{s}u_j^{(s)}(x) + z^{(s)}(x), \tag{3.84}$$

где $u_j^{(s)}(x)$ — решение задачи (3.61′), (3.62′), а функция $z^{(s)}(x)$ определена в лемме 3.6, если положить

$$\varphi^{(s)}(x) = -\sum_{r\neq j} \frac{\partial u_r^{(s)}(x)}{\partial \nu} \quad \text{при } x \in \Gamma_r^{(s)}.$$

Легко видеть, что $u^{(s)}(x)$ является решением задачи (3.61), (3.62). Используя представление (3.73) и равенства (3.75), (3.70), запишем

$$\varphi^{(s)}(x) = \sum_{r\neq j} \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x_l}(x^r) \int_{\Gamma_r^{(s)}} \{G(x,\xi) - G(x,\xi^r)\}\, \sigma_l^{(r)}(\xi)\, d\Gamma_\xi +$$

$$+ O(d^{(s)}) \sum_{r\neq j} \int_{\Gamma_r^{(s)}} |G(x,\xi)|\, d\Gamma_\xi, \qquad (3.85)$$

где

$$G(x,\xi) = \frac{e^{ik|x-\xi|}(1-ik|x-\xi|)\cos(\nu_x, x-\xi)}{2\pi|x-\xi|^2}, \quad x^r,\ \xi^r \in F_r^{(s)}.$$

В силу условия b теоремы 3.5 при $x \in \Gamma_j^{(s)}$ и $\xi \in \Gamma_r^{(s)}$

$$|G(x,\xi) - G(x,\xi^r)| \leqslant C\frac{d_r^{(s)}(|x-\xi| + |x-\xi^r|)}{|x-\xi|^2\,|x-\xi^r|^2} = 0\left(\frac{1}{[R_{rj}^{(s)}]^2}\right)$$

$$(s\to\infty).$$

Поэтому, учитывая неравенства (3.67) ($\theta = 0$), (3.71) и условие c, из (3.83) находим

$$|\varphi^{(s)}(x)| = o(1) \qquad (s\to\infty). \qquad (3.86)$$

Аналогично получаем оценку

$$\left|\sum_{r\neq j} u_r^{(s)}(x)\right| = O(d^{(s)}), \qquad x \in F_j^{(s)}. \qquad (3.87)$$

Далее, поскольку функция $\sum\limits_{r\neq j} u_r^{(s)}(x)$ в окрестности $F_j^{(s)}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца,

$$\int_{\Gamma_j^{(s)}} \varphi^{(s)} d\Gamma = -\int_{\Gamma_j^{(s)}} \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sum_{r\neq j} u_r^{(s)}\right) d\Gamma = -\int_{F_j^{(s)}} \Delta\left(\sum_{r\neq j} u_r^{(s)}\right) dx =$$

$$= k^2 \int_{F_j^{(s)}} \sum_{r\neq j} u_r^{(s)} dx,$$

откуда в силу (3.87) следует

$$\int_{\Gamma_j^{(s)}} \varphi^{(s)} d\Gamma = o(\tau_j^{(s)}). \qquad (3.88)$$

На основании леммы 3.6 из (3.86) и (3.88) получаем такую оценку для функции $z^{(s)}(x)$ в любой точке x, лежащей на положительном расстоянии от области Ω:

$$|z^{(s)}(x)| = o(\tau^{(s)}). \qquad (3.89)$$

Покажем, что в этих же точках

$$\tau^{(s)} v(x) - \left(-\sum_{j=1}^{s} u_j^{(s)}(x)\right) = o(\tau^{(s)}), \tag{3.90}$$

где функция $v(x)$ определяется равенством (3.68).

Прежде всего интегрированием по частям преобразуем (3.68) к виду

$$v(x) = \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|}(f - k^2 u^{(0)})\, b d\xi + \sum_{l,m=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|} \times$$

$$\times \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi_m} b\delta_{lm} d\xi + \sum_{l,m=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|} a_{lm} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi_m} d\xi = I_1 + I_2 + I_3. \tag{3.91}$$

Согласно (3.73) и (3.62′)

$$2\rho_j^{(s)} = \left(\frac{\partial u_j^{(s)}}{\partial \nu}\right)^- - \left(\frac{\partial u_j^{(s)}}{\partial \nu}\right)^+ = \left(\frac{\partial u_j^{(s)}}{\partial \nu}\right)^- - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \nu},$$

и, следовательно,

$$-\sum_{j=1}^{s} u_j^{(s)}(x) = \sum_{j=1}^{s} \int_{\Gamma_j^{(s)}} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \nu} d\Gamma_\xi -$$

$$- \sum_{j=1}^{s} \int_{\Gamma_j^{(s)}} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|} \left(\frac{\partial u_j^{(s)}}{\partial \nu}\right)^- d\Gamma_\xi.$$

Отсюда, пользуясь формулами Грина для области $F_j^{(s)} \setminus \Gamma_j^{(s)}$, получаем при $x \notin \overline{\Omega}$

$$-\sum_{j=1}^{s} u_j^{(s)}(x) = \sum_{j=1}^{3} \int_{F_j^{(s)}} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|}(f - k^2 u^{(0)})\, d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} \sum_{l,m=1}^{3} \int_{F_j^{(s)}} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi_m} \delta_{lm} d\xi -$$

$$- \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=1}^{3} \int_{\Gamma_j^{(s)}} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|} \cos(\nu_\xi, \xi_l)\, u_j^{(s)} d\Gamma_\xi = I_1^{(s)} + I_2^{(s)} + I_3^{(s)}. \tag{3.92}$$

Сравним слагаемые I_3 и $I_3^{(s)}$ в (3.91) и (3.92). Для этого разобьем область Ω на подобласти G_α достаточно малых диаметров d_α и, учитывая (3.76) и (3.67) ($\theta = 0$), запишем

$$\tau^{(s)} I_3 - I_3^{(s)} = \tau^{(s)} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{l,m=1}^{3} P_{lm}(x, \xi^\alpha) \left\{ \int_{G_\alpha} a_{lm} d\xi - \frac{1}{\tau^{(s)}} \sum_{(G_\alpha)}' \int_{\Gamma_i^{(s)}} w_m^{(j)} \times\right.$$

$$\times \cos(\nu, \xi_l)\, d\Gamma_\xi \Big\} + \tau^{(s)} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{l,m=1}^{3} \int_{G_\alpha} [P_{lm}(x, \xi) - P_{lm}(x, \xi^\alpha)]\, a_{lm} d\xi -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{l=1}^{3} \sum_{(G_\alpha)}' \int_{\Gamma_j^{(s)}} [P_l(x, \xi) - P_l(x, \xi^\alpha)] \cos(\nu, \xi_l)\, u_l^{(s)} d\Gamma_\xi + \sum_{j=1}^{s} O([d_j^{(s)}]^4), \tag{3.93}$$

где

$$P_{lm}(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_l} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|} \frac{\partial u^{(0)}(\xi)}{\partial \xi_m}, \quad P_l(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_l} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|},$$

ξ^α — произвольная фиксированная точка в G_α. Сумма $\sum\limits_{(G_\alpha)}'$ распространяется на те j, для которых $F_j^{(s)}$ лежат в G_α или пересекаются с границей G_α; при этом $F_j^{(s)}$, пересекающиеся с границей, включаются только в одну из этих сумм. Так как точка x находится на положительном расстоянии от Ω, то $P_{lm}(x, \xi) - P_{lm}(x, \xi^\alpha) = O(d_\alpha)$, и, следовательно, второе слагаемое в (3.93) имеет порядок $O(\max\limits_\alpha d_\alpha)\, \tau^{(s)}$. Аналогично, учитывая (3.76′) и (3.67) ($\theta = 0$), получаем такую же оценку для третьего слагаемого. Последняя сумма в силу условия b теоремы 3.5 имеет порядок $o(\tau^{(s)})$. Согласно (3.63)

$$\int_{\Gamma_j^{(s)}} w_m^{(j)} \cos(\nu, \xi_l)\, d\Gamma = \int_{\Gamma_j^{(s)}} w_m^{(j)} \frac{\partial w_l^{(j)}}{\partial \nu}\, d\Gamma = \int_{R_3 \setminus F_j^{(s)}} (\nabla w_m^{(j)}, \nabla w_l^{(j)})\, dx =$$

$$= W_{lm}(F_j^{(s)}),$$

откуда в силу условия a следует, что и первое слагаемое в (3.93) имеет порядок $o(\tau^{(s)})$. Из приведенных рассуждений вытекает, что $\tau^{(s)} I_3 - I_3^{(s)} = o(\tau^{(s)})$. Аналогично получаются такие же оценки и для разностей $\tau^{(s)} I_k - I_k^{(s)}$, $k = 1, 2$. Таким образом, оценка (3.90) доказана. Воспользовавшись теперь равенством (3.84) и оценками (3.89), (3.90), получаем для решения $u^{(s)}(x)$ задачи (3.61), (3.62) представление (3.63). Теорема доказана.

Приближенное уравнение

Решение задачи (3.61), (3.62) в точках x, лежащих на положительном расстоянии от Ω, с точностью до $o(\tau^{(s)})$ равно функции $w^{(s)}(x)$, удовлетворяющей всюду в R_3 в обобщенном смысле уравнению

$$L^{(s)} w^{(s)}(x) \equiv \sum_{l,m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(A_{lm}^{(s)}(\ ) \frac{\partial}{\partial x_m} w^{(s)}(x)\right) + k^2 B^{(s)}(x)\, w^{(s)}(x) =$$

$$= B^{(s)}(x) f(x), \tag{3.94}$$

где

$$A_{lm}^{(s)}(x) = \begin{cases} \delta_{lm} - \tau^{(s)}(a_{lm}(x) + \delta_{lm} b(x)), & x \in \Omega, \\ \delta_{lm}, & x \in R_3 \setminus \Omega, \end{cases}$$

$$B^{(s)}(x) = \begin{cases} 1 - \tau^{(s)} b(x), & x \in \Omega, \\ 1, & x \in R_3 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Это означает, что для любой непрерывно дифференцируемой и финитной функции $\xi(x)$ выполняется равенство

$$\int \left\{ \sum_{l,m=1}^{3} A_{lm}^{(s)} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x_l} \frac{\partial \zeta}{\partial x_m} - k^2 B^{(s)} w^{(s)} \zeta + B^{(s)} f \zeta \right\} dx = 0,$$

или, что эквивалентно, функция $w^{(s)}(x)$ удовлетворяет в областях Ω и $R_3 \setminus \Omega$ уравнениям (3.94) в обычном смысле, а на поверхности $\partial\Omega$ — условиям сопряжения

$$(w^{(s)})^+ = (w^{(s)})^-, \quad \left(\frac{\partial w^{(s)}}{\partial \nu^{(s)}} \right)^+ = \left(\frac{\partial w^{(s)}}{\partial \nu} \right)^-, \tag{3.95}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \nu^{(s)}}$ — производная по конормали, соответствующей оператору $L^{(s)}$:

$$\frac{\partial}{\partial \nu^{(s)}} = \sum_{l,m=1}^{3} [\delta_{lm}(1 - \tau^{(s)} b) - \tau^{(s)} a_{lm}] \cos(\nu, x_m) \frac{\partial}{\partial x_l},$$

ν — нормаль к $\partial\Omega$; знаками «+» и «—» отмечены предельные значения функций соответственно с внутренней и внешней стороны от $\partial\Omega$.

Наметим общую схему доказательства. Рассмотрим функцию $\psi^{(s)}(x)$, удовлетворяющую в областях Ω и $R_3 \setminus \Omega$ уравнениям

$$L^{(s)} \psi^{(s)} = (\tau^{(s)})^2 \left\{ \sum_{l,m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(a_{lm} \frac{\partial v}{\partial x_m} + \delta_{lm} b \frac{\partial v}{\partial x_m} \right) + k^2 b v \right\}, \quad x \in \Omega,$$

$$\Delta \psi^{(s)} + k^2 \psi^{(s)} = 0, \quad x \in R_3 \setminus \Omega,$$

а на $\partial\Omega$ — условиям сопряжения

$$(\psi^{(s)})^+ = (\psi^{(s)})^-, \quad \left(\frac{\partial \psi^{(s)}}{\partial \nu^{(s)}} \right)^+ - \left(\frac{\partial \psi^{(s)}}{\partial \nu} \right)^- = (\tau^{(s)})^2 \sum_{l,m=1}^{3} (a_{lm} + \delta_{lm} b) \times$$
$$\times \cos(\nu, x_l) \frac{\partial v}{\partial x_m},$$

где $v = v(x)$ определяется по формуле (3.68). На бесконечности $\psi^{(s)}(x)$ должна удовлетворять тем же условиям, что и $u^{(s)}(x)$. Пользуясь известными методами, относящимися к уравнениям с разрывными коэффициентами (см., например [15, 39, 65]), можно показать, что такая функция существует и имеет оценку $O([\tau^{(s)}]^2)$.

Теперь с помощью (3.68) нетрудно проверить, что функция $w^{(s)}(x) = u^{(0)}(x) + \tau^{(s)}v(x) + \psi^{(s)}(x)$ удовлетворяет (3.94) и (3.95), а так как $\psi^{(s)}(x) = o(\tau^{(s)})$, то отсюда в силу (3.63) вытекает доказываемое утверждение.

Для иллюстрации рассмотрим такой пример. Пусть множества $F_j^{(s)}$ — вытянутые эллипсоиды вращения с полуосями $a = a^{(s)}$ и $b = b^{(s)}$ $(a > b)$, центры которых лежат в области Ω в узлах кубической решетки периода $l = l^{(s)}$, а большие полуоси образуют с осями координат углы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Предположим, что при $s \to \infty$ $l \to 0$, $a = o(l^{3/2})$ и $\frac{a}{b} = \mathrm{const}$. Последнее означает, что при $s \to \infty$ эллипсоиды просто сжимаются, и поэтому, как легко видеть, справедливы неравенства (3.66) и (3.67).

Далее, так как $d_i^{(s)} = 2a = o(l^{3/2})$ и $R_{ij}^{(s)} = l\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}$ $(m, n, k = 0, 1, \ldots, m^2 + n^2 + k^2 > 0)$, то

$$\sum_{i \neq 1} \frac{(d_i^{(s)})^2}{(R_{ij}^{(s)})^2} = o\left(\sum_{(\Omega)} \frac{l^3}{l^2(m^2 + n^2 + k^2)}\right) = o\left(\max_{\xi} \int_{\Omega} \frac{dx}{|x - \xi|^2}\right) = o(1),$$

и, следовательно, условия b и c теоремы 3.5 выполняются. Введем прямоугольную систему координат $\{x_1', x_2', x_3'\}$, связанную с эллипсоидом, направив ось x_1' по большой полуоси. Как известно [18], в такой системе координат тензор виртуальной массы эллипсоида вращения диагонален и имеет вид

$$W_{11}' = \frac{\alpha_0}{2 - \alpha_0}\tau, \quad W_{22}' = W_{33}' = \frac{\beta_0}{2 - \beta_0}\tau, \tag{3.96}$$

где $\tau = \frac{4\pi}{3}ab^2$ — объем эллипсоида,

$$\alpha_0 = \frac{2(1 - e^2)}{e^3}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1 + e}{1 - e} - e\right), \quad \beta_0 = \frac{1}{e^2} - \frac{1 - e^2}{2e^3}\ln\frac{1 + e}{1 - e},$$

$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет меридионального сечения. Нетрудно проверить, что в исходной системе координат этот тензор вычисляется с помощью преобразования

$$\left.\begin{aligned} W_{ii} &= W_{11}'\cos^2\gamma_i + W_{22}'(\cos^2\gamma_k + \cos^2\gamma_l), && i \neq k \neq l \neq i, \\ W_{ik} &= (W_{11}' - W_{22}')\cos\gamma_i\cos\gamma_k, \quad i \neq k, && i, k, l = 1, 2, 3. \end{aligned}\right\} \tag{3.97}$$

Так как $\tau_i^{(s)} = \frac{4\pi}{3}ab^2$ и $\tau^{(s)} \sim \frac{4\pi}{3}ab^2\frac{\mathrm{mes}\,\Omega}{l^3}$, то, используя формулы (3.96) и (3.97), устанавливаем, что условия a теоремы 3.5 выполняются, причем

$$a_{ii}(x) = \frac{1}{\mathrm{mes}\,\Omega}\left[\frac{\alpha_0}{2 - \alpha_0}\cos^2\gamma_i + \frac{\beta_0}{2 - \beta_0}(\cos^2\gamma_k + \cos^2\gamma_l)\right],$$

$$a_{ik}(x) = \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\left(\frac{\alpha_0}{2-\alpha_0} - \frac{\beta_0}{2-\beta_0}\right)\cos\gamma_i\cos\gamma_k,$$

$$i \neq k \neq l \neq i,$$

$$b(x) = \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}.$$

Выполняя в этих формулах предельный переход при $b \to a$, получаем выражение для $a_{ik}(x)$ в случае шаров:

$$a_{ii} = \frac{1}{2\operatorname{mes}\Omega}, \quad a_{ik} = 0, \qquad i \neq k.$$

Таким образом, если $F_i^{(s)}$ — шары радиуса a, то в точках, лежащих на положительном расстоянии от Ω, решение задачи (3.61), (3.62) с точностью до $o(\tau^{(s)}) \sim o\left(\frac{a^3}{l^3}\right)$ равно функции $w(x)$, удовлетворяющей в Ω и $R_3 \setminus \Omega$ уравнениям

$$h\Delta w(x) + k^2 w(x) = f(x),$$

где

$$h = \begin{cases} \left(1 - 2\pi\frac{a^3}{e^3}\right)\left(1 - \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{a^3}{e^3}\right)^{-1} & \text{в } \Omega, \\ 1 & \text{в } R_3 \setminus \Omega, \end{cases}$$

а на поверхности $\partial\Omega$ — условиям сопряжения

$$(w)^+ = (w)^-, \quad \left(1 - 2\pi\frac{a^3}{e^3}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^+ = \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^-.$$

§ 4. СЛУЧАЙ СИЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ГРАНИЦЕЙ ПРИ ОБЪЕМНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ $F^{(s)}$

При сопоставлении результатов предыдущего параграфа с результатами § 4 гл. I видно, что на решение второй краевой задачи мелкозернистая граница влияет значительно слабее, чем на решение первой краевой задачи. Так, если множество $F^{(s)} \subset R_3$ состоит из непересекающихся компонент $F_i^{(s)}$ (зерен), то в случае первого краевого условия диаметры $d_i^{(s)}$ зерен должны быть порядка кубов расстояний $R_i^{(s)}$ до ближайших соседей, и при этом граница оказывает в пределе конечное влияние, которое учитывается введением в исходное уравнение эффективного потенциала. Если же на $F_i^{(s)}$ поставлено второе краевое условие, то, как видно из теоремы 3.5, даже при $d_i^{(s)} = o\left([R_i^{(s)}]^{3/2}\right)$ (условие c) влияние границы можно учесть, введя в коэффициенты исходного уравнения (в том числе и при старших производных) возмущение порядка суммарного объема зерен $\tau^{(s)}$. Заметим, что такая же граница $\left(d_i^{(s)} \sim (R_i^{(s)})^{3/2+\varepsilon}\right)$ для первой краевой задачи является настолько сильным возмущением, что решение всюду (в области сгущения $F_i^{(s)}$) при $s \to \infty$ просто стремится к нулю. Таким образом, в случае второй краевой задачи множество $F^{(s)}$ должно быть более массивным, и это создает большие трудности при исследовании поведения решения при $s \to \infty$.

Рассмотрим частный случай объемного распределения $F^{(s)}$, когда граница в пределе оказывает конечное влияние.

Пусть в R_3 задано семейство замкнутых гладких поверхностей $\Gamma_j^{(s)}$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$, являющихся поверхностями уровня некоторой однозначной достаточно гладкой функции $F(x)$, так, что $\Gamma_j^{(s)}$ определяется уравнением $F(x) = \alpha + jh^{(s)}$, $h^{(s)} = \dfrac{\beta - \alpha}{s}$, и все $\Gamma_j^{(s)}$ лежат в слое T между поверхностями Γ_α и Γ_β $(F(x) = \alpha, \beta)$. Из каждой поверхности Γ_j удалим конечное число непересекающихся открытых и связных множеств $\sigma_j^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, p_j^{(s)})$, ограниченных гладкими кривыми так, что образуются продырявленные поверхности $\Sigma_j^{(s)} = \Gamma_j^{(s)} \setminus \bigcup\limits_i \sigma_j^{(i)}$. При этом предполагается, что при каждом s диаметры множеств $\sigma_j^{(i)} \subset \Gamma_j^{(s)}$ много меньше расстояний между ними, а последние в свою очередь много меньше расстояний между поверхностями. В области $\Omega^{(s)} = R_3 \setminus \bigcup\limits_j \Sigma_j^{(s)}$ рассмотрим краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u^{(s)}(x) + k^2 u^{(s)}(x) = f(x), \qquad x \in \Omega^{(s)}, \quad \operatorname{Im} k > 0, \\ &\left.\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega^{(s)}} = 0, \\ &u^{(s)}(x) \in W_2^1(\Omega^{(s)}) \cap W_2^2(\Omega^{(s)}, \mathrm{loc}), \end{aligned}\right\} \tag{3.98}$$

где граничное условие понимается в обобщенном смысле (3.62′), а $f(x) \in L_2(R_3)$. Асимптотическое поведение решения этой задачи при $s \to \infty$, когда число дырок на каждой поверхности стремится к бесконечности, а расстояние между поверхностями и диаметры дырок — к нулю, описывается следующей теоремой.

Теорема 3.6. *Пусть при любом s каждую поверхность $\Gamma_j^{(s)}$ можно разбить на конечное число кусков $\Gamma_{ji}^{(s)}$ диаметра $d_{ji}^{(s)}$ так, что выполняются следующие условия:*

a) $d^{(s)} = \max\limits_{i,j} d_{ji}^{(s)} \leqslant A (h^{(s)})^{2+\varepsilon}$, $\quad \varepsilon > 0$, $\quad A = \mathrm{const}$;

b) внутри каждого куска $\Gamma_{ji}^{(s)}$ помещается только одна дырка $\sigma_j^{(i)}$, причем расстояние от нее до границы $\Gamma_{ji}^{(s)}$ больше чем $ad^{(s)}$, $a > 0$;

c) для любого куска $\Gamma_{ji}^{(s)}$ выполняется равенство

$$C(\sigma_j^{(i)}) = \frac{4}{h^{(s)}} \int\limits_{\Gamma_{ji}^{(s)}} \frac{d\Gamma_x}{\varphi(x)} \left(1 + O\left(\frac{d^{(s)}}{h^{(s)}}\right)\right),$$

где $C(\sigma_j^{(i)})$ — *ньютонова емкость* $\sigma_j^{(i)}$, $\varphi(x)$ — *некоторая положительная гладкая функция, заданная в слое* T.

Тогда при $s \to \infty$ *последовательность* $\{u^{(s)}(x)\}$ *решений задачи* (3.98) *сходится по норме* $L_2(R_3)$ *к функции* $u(x)$, *которая всюду в* R_3 *удовлетворяет уравнениям*

$$\sum_{l,m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(A_{lm}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\right) + k^2 u(x) = f(x),$$

где

$$A_{lm}(x) = \begin{cases} \delta_{lm} - \dfrac{|\nabla F(x)|^{-1}\varphi(x)}{1 + |\nabla F(x)|\,\varphi(x)}\,\dfrac{\partial F(x)}{\partial x_l}\,\dfrac{\partial F(x)}{\partial x_m}, & x \in T, \\ \delta_{lm}, & x \in R_3 \setminus T. \end{cases}$$

На поверхностях Γ_α *и* Γ_β, *ограничивающих слой* T, $u(x)$ *удовлетворяет естественным условиям сопряжения*

$$u^- = u^+, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^- = \left(\frac{1}{1 + |\nabla F|\,\varphi}\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+,$$

а на бесконечности стремится к нулю.

В доказательстве этой теоремы используются результаты работы [24]. Оно очень громоздко и не обладает достаточной общностью. Поэтому мы его опускаем (см. [25]). Отметим, что в рассмотренном случае граница в пределе приводит к изменению коэффициентов старших членов исходного уравнения. В этом проявляется качественное отличие второй краевой задачи по сравнению с первой, в которой к исходному уравнению прибавлялись только члены типа потенциала. По-видимому, при некоторых не очень ограничительных предположениях относительно $F^{(s)}$ такое изменение уравнения характерно для второй краевой задачи.

ЗАДАЧИ

1. Пусть $P_\gamma F^{(s)}$ — проекция множества $F^{(s)} \cap T(\gamma, \delta)$ на поверхность Γ. Показать, что если выполняются условия (3.10) теоремы 3.1, то для любого куска $\gamma \subset \Gamma$

$$\lim_{s\to\infty} \operatorname{mes}_\Gamma P_\gamma F^{(s)} = \operatorname{mes}_\Gamma \gamma.$$

2. Обобщить теорему 3.1 на случай эллиптических систем уравнений и уравнений высших порядков.

3. Ослабить условия теоремы 3.5, показав, что она справедлива и без предположения c.

Глава четвертая

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ И ОБОБЩЕНИЯ

Основные результаты, изложенные в предыдущих главах, относятся к краевым задачам, описывающим стационарные процессы. Представляет интерес изучение аналогичных вопросов и для задач, описывающих нестационарные и колебательные процессы. Это тесно связано с исследованием спектральных свойств соответствующих операторов. В данной главе рассматривается поведение разложений единицы операторов, порождаемых краевыми задачами в областях с мелкозернистой границей (§ 1), а затем с помощью полученных результатов исследуются решения начально-краевых задач для некоторых эволюционных уравнений в таких областях. Эти результаты применяются при изучении рассеяния электромагнитных волн на густых металлических решетках. Естественной с точки зрения приложений является постановка задачи со случайной мелкозернистой границей. Развитые в гл. I методы обобщаются на этот случай. Краевые задачи для системы уравнений Навье — Стокса исследуются методами, развитыми в гл. II.

§ 1. ПОВЕДЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЙ ЕДИНИЦЫ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДАЕМЫХ КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ

Для определенности в этом и следующем параграфах рассматриваются операторы, порождаемые первой краевой задачей для уравнения Лапласа при объемном распределении $F^{(s)}$. Однако полученные результаты почти полностью переносятся на любые операторы, порождаемые краевыми задачами, изученными в главах I—III. Исключение составляет лишь равномерная (по норме) сходимость резольвент и разложений единицы, которая в соответствующих местах должна быть заменена сильной сходимостью.

Пусть Ω — произвольная область в R_n $(n \geqslant 2)$, а $G^c(x, y, \lambda)$ и $G^{(s)}(x, y, \lambda)$ — функции Грина краевых задач (1.108) и (1.107) в областях Ω и $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)}$ при $\lambda^2 \geqslant 0$ (если $\lambda = 0$, то область Ω будем считать конечной). Как функция от x (или y) $G^{(s)}(x, y, \lambda)$

продолжается на множество $F^{(s)}$ нулем так, что $G^{(s)}(x, y, \lambda) = 0$ при $x \in F^{(s)}$ или $y \in F^{(s)}$. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ интегральные операторы G^c и $G^{(s)}$ с ядрами $G^c(x, y, \lambda)$ и $G^{(s)}(x, y, \lambda)$, т. е. для любой функции $f(x) \in L_2(\Omega)$

$$[G^c f](x) = \int_\Omega G^c(x, y, \lambda) f(y)\, dy, \quad [G^{(s)} f](x) = \int_\Omega G^{(s)}(x, y, \lambda) f(y)\, dy.$$

Эти операторы ограничены, самосопряжены и положительны.

Обозначим через $\{H_t^c\}$ и $\{H_t^{(s)}\}$ разложения единицы операторов G^c и $G^{(s)}$, и пусть $H^c(\delta) = H_{t_2}^c - H_{t_1}^c$, $H^{(s)}(\delta) = H_{t_2}^{(s)} - H_{t_1}^{(s)}$, где $\delta = (t_1, t_2)$ — интервал с концами $t_1, t_2 \in R_1$. Изучим поведение операторов $G^{(s)}$, $H_t^{(s)}$ и $H^{(s)}(\delta)$ при $s \to \infty$, когда множества $F^{(s)}$ становятся все более изрезанными и располагаются объемно в области Ω.

Как обычно, простой стрелкой обозначим сильную сходимость операторов: $A^{(s)} \to A$, если для каждого $f \in L_2(\Omega)$ $\lim\limits_{s\to\infty} \| A^{(s)} f - Af \|_{L_2(\Omega)} = 0$, а двойной — сходимость по норме (равномерную): $A^{(s)} \Rightarrow A$, если $\lim\limits_{s\to\infty} \| A^{(s)} - A \| = 0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Если выполняются условия теоремы* 1.7', *то*

a) $G^{(s)} \Rightarrow G^c$;

b) для любого t, не принадлежащего дискретному спектру оператора G^c, $H_t^{(s)} \to H_t^c$;

c) для любого интервала $\delta = (t_1, t_2)$, концы которого не принадлежат спектру оператора G^c, $H^{(s)}(\delta) \Rightarrow H^c(\delta)$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная и финитная в Ω функция. Согласно определению операторов $G^{(s)}$ и G^c

$$[(G^{(s)} - G^c) f](x) = \int_\Omega g^{(s)}(x, y, \lambda) f(y)\, dy =$$

$$= \int_\Omega \{g^{(s)}(x, y, \lambda)\}^{\frac{1}{2}} \{g^{(s)}(x, y, \lambda)\}^{\frac{1}{2}} f(y)\, dy,$$

где $g^{(s)}(x, y, \lambda) = G^{(s)}(x, y, \lambda) - G^c(x, y, \lambda)$. Используя принцип максимума, нетрудно убедиться, что функция $g^{(s)}(x, y, \lambda)$ (вместе с $G^{(s)}(x, y, \lambda)$ и $G^c(x, y, \lambda)$) удовлетворяет всюду неравенству

$$| g^{(s)}(x, y, \lambda) | < C \frac{e^{-\theta\lambda |x-y|}}{|x-y|^{n-2}}, \tag{4.1}$$

где постоянная C не зависит от s и $0 < \theta < 1$. Поэтому согласно неравенству Коши — Буняковского

$$|[(G^{(s)} - G^c) f](x)|^2 \leqslant \int_\Omega | g^{(s)}(x, y, \lambda)|\, dy \int_\Omega | g^{(s)}(x, \xi, \lambda)| f^2(\xi)\, d\xi,$$

и, следовательно,

$$\|(G^{(s)}-G^{c})f\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant \max_{\xi}\left\{\int_{\Omega}\left(\int_{\Omega}|g^{(s)}(x,y,\lambda)|\,dy\right)|g^{(s)}(x,\xi,\lambda)|\,dx\right\}\|f\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Так как множество непрерывных и финитных функций плотно в $L_2(\Omega)$, то, учитывая, что $g^{(s)}(x, y, \lambda) = g^{(s)}(y, x, \lambda)$, из предыдущего неравенства получаем

$$\|G^{(s)}-G^{c}\|^2\leqslant \max_{\xi}\int_{\Omega}\left(\int_{\Omega}|g^{(s)}(x,y,\lambda)|\,dx\right)|g^{(s)}(y,\xi,\lambda)|\,dy. \quad (4.2)$$

Разобьем область интегрирования по y в (4.2) на три части: $\Omega\cap K_\varepsilon$, $\Omega\setminus K_N$ и $\Omega\cap(K_N\setminus K_\varepsilon)$, где K_ε и K_N — шары в R_n радиусов ε и N с центром в точке $\xi\in\Omega$. Используя неравенство (4.1), легко получить оценки

$$\int_{\Omega\cap K_\varepsilon}\{\cdot\}\,dy\leqslant C_1\varepsilon^2,\qquad \int_{\Omega\setminus K_N}\{\cdot\}\,dy\leqslant C_2Ne^{-\theta\lambda N},$$

$$\int_{\Omega\cap(K_N\setminus K_\varepsilon)}\{\ \}\,dy\leqslant\frac{C_3}{\varepsilon^{n-2}}\int_{\Omega\cap K_N}\left(\int_{\Omega}|g^{(s)}(x,y,\lambda)|\,dx\right)dy,$$

где постоянные C_1, C_2, C_3 не зависят от ξ, ε, N и s. Выберем ε и N так, чтобы интегралы по $\Omega\cap K_\varepsilon$ и $\Omega\setminus K_N$ были достаточно малыми. Затем при фиксированных ε и N применим теорему 1.7′, согласно которой

$$\lim_{s\to\infty}\int_{\Omega\cap K_N}\left(\int_{\Omega}|g^{(s)}(x,y,\lambda)|\,dx\right)dy=0.$$

Из приведенных рассуждений следует, что $G^{(s)}\rightrightarrows G^{c}$. Таким образом, утверждение *a* доказано. Утверждения *b* и *c* вытекают из *a* следующей теоремы [43].

Теорема 4.2. *Пусть последовательность ограниченных самосопряженных операторов $A^{(s)}$ сильно сходится к ограниченному самосопряженному оператору A: $A^{(s)}\to A$. Тогда, если $\{E^{(s)}_\lambda\}$ и $\{E_\lambda\}$ — соответствующие разложения единицы, то $E^{(s)}_\lambda\to E_\lambda$ в любой точке λ, не принадлежащей дискретному спектру оператора A.*

Если последовательность операторов $A^{(s)}$ сходится к A по норме $A^{(s)}\rightrightarrows A$, то для любого интервала $\delta=(\lambda_1,\lambda_2)$, концы которого не принадлежат спектру A,

$$E^{(s)}(\delta)\rightrightarrows E(\delta),$$

где $E^{(s)}(\delta)=E^{(s)}_{\lambda_2}-E^{(s)}_{\lambda_1}$, $\quad E(\delta)=E_{\lambda_2}-E_{\lambda_1}$.

Таким образом, теорема 4.1 доказана.

Для дальнейшего необходимо ввести следующие обозначения: $L_2(\Omega^{(s)})$ — гильбертово пространство функций, определенных в области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)}$; $P^{(s)}$ — оператор ограничения, действующий из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega^{(s)})$ и определяемый равенством

$$[P^{(s)}f](x) = f(x), \quad x \in \Omega^{(s)} \qquad (f = f(x) \in L_2(\Omega));$$

$Q^{(s)}$ — оператор вложения $L_2(\Omega^{(s)})$ в $L_2(\Omega)$, определяемый на функциях $g = g(x) \in L_2(\Omega^{(s)})$ равенствами

$$[Q^{(s)}g](x) = \begin{cases} g(x), & x \in \Omega^{(s)}, \\ 0, & x \in F^{(s)} = \Omega \setminus \Omega^{(s)}; \end{cases}$$

$A^{(s)}$ — замыкание оператора — Δ, определенного на непрерывно дифференцируемых в $\Omega^{(s)}$ функциях, равных нулю на границе $\partial\Omega^{(s)}$ и финитных; A^c — замыкание оператора — $\Delta + c(x)$, определенного на дважды непрерывно дифференцируемых в Ω функциях, равных нулю на $\partial\Omega$ и финитных; $c(x)$ — неотрицательная, непрерывная, ограниченная и суммируемая в Ω функция; $\{E_\lambda^{(s)}\}$, $\{E_\lambda^c\}$ — разложения единицы (спектральные семейства) операторов $A^{(s)}$ и A^c ([2, 43]).

Операторы $A^{(s)}$ и A^c самосопряжены и положительны, и, следовательно, при любом комплексном ν (или $\nu < 0$) существуют ограниченные операторы $R_\nu^{(s)} = (A^{(s)} - \nu E)^{-1}$ и $R_\nu^c = (A^c - \nu E)^{-1}$ — резольвенты $A^{(s)}$ и A^c. Пусть $\{N_t^{(s)}\}$ и $\{N_t^c\}$ — спектральные семейства операторов $R_\nu^{(s)}$ и R_ν^c. Нетрудно убедиться, что при $\nu \leqslant 0$ во всех точках непрерывности выполняются равенства

$$E_\lambda^{(s)} = E - N_t^{(s)} \text{ и } E_\lambda^c = E - N_t^c, \tag{4.3}$$

где $t = \dfrac{1}{\lambda - \nu}$. Как известно [4], операторы $R_\nu^{(s)}$ и R_ν^c $(\nu < 0)$ являются интегральными операторами в пространствах $L_2(\Omega^{(s)})$ и $L_2(\Omega)$ и ядрами их служат соответственно функции Грина $G^{(s)}(x, y, \sqrt{-\nu})$ и $G^c(x, y, \sqrt{-\nu})$. Поэтому

$$R_\nu^c = G^c, \quad Q^{(s)}R_\nu^{(s)}P^{(s)} = G^{(s)} \qquad (\lambda = \sqrt{-\nu}) \tag{4.4}$$

и, следовательно, $N_t^c = H_t^c$ и $Q^{(s)}N_t^{(s)}P^{(s)} = H_t^{(s)}$.

Таким образом, из (4.3) вытекает, что во всех точках непрерывности

$$E_\lambda^c = E - H_t^c, \quad Q^{(s)}E_\lambda^{(s)}P^{(s)} = Q^{(s)}P^{(s)} - H_t^{(s)}, \quad t = \frac{1}{\lambda - \nu}. \tag{4.3'}$$

Покажем, что в условиях теоремы 1.7′

$$Q^{(s)}P^{(s)} \to E. \tag{4.5}$$

Очевидно, достаточно доказать, что мера множества $F^{(s)}$ стремится к нулю при $s \to \infty$. Пусть Q — замкнутое множество в R_n диаметра d. Из определения емкости $C(Q)$ легко получить оценку

$$\operatorname{mes} Q \leqslant \frac{d^2}{2(n-2)\omega_n} C(Q).$$

Поэтому, разбивая пространство R_n на кубы K_α^r со стороной r, находим

$$\operatorname{mes} F^{(s)} = \sum_\alpha \operatorname{mes}(F^{(s)} \cap K_\alpha^r) \leqslant \frac{nr^2}{2(n-2)\omega_n} \sum_\alpha C(F^{(s)} \cap K_\alpha^r),$$

откуда в силу условия (1.110) следует, что $\operatorname{mes} F^{(s)} \to 0$. Применяя теперь теорему (4.1) к равенствам (4.4) и (4.3′) и учитывая (4.5), приходим к следующей теореме.

Теорема 4.3. *Если выполняются условия* (1.110), *то*

a) для любого λ, не принадлежащего дискретному спектру оператора A^c, последовательность операторов $Q^{(s)}E_\lambda^{(s)}P^{(s)}$ сильно сходится к оператору E_λ^c: $Q^{(s)}E_\lambda^{(s)}P^{(s)} \to E_\lambda^c$;

b) для любого интервала $\delta = (\lambda_1, \lambda_2)$, концы которого не принадлежат спектру A^c, последовательность $Q^{(s)}E^{(s)}(\delta)P^{(s)}$ равномерно сходится к $E^c(\delta)$: $Q^{(s)}E^{(s)}(\delta)P^{(s)} \Rightarrow E^c(\delta)$;

c) при любом комплексном ν (или $\nu < 0$) последовательность $Q^{(s)}R_\nu^{(s)}P^{(s)}$ равномерно сходится к R_ν^c: $Q^{(s)}R_\nu^{(s)}P^{(s)} \Rightarrow R_\nu^c$.

Замечание. Утверждение c устанавливается сначала для отрицательных ν, после чего для комплексных ν ($\operatorname{Im} \nu \neq 0$) оно непосредственно следует из тождества Гильберта для резольвент.

Из равномерной сходимости операторов $Q^{(s)}E^{(s)}(\delta)P^{(s)}$ вытекает, в частности, что если на некотором отрезке спектр оператора A^c чисто дискретный, то при достаточно больших s спектр оператора $A^{(s)}$ на этом же отрезке также будет дискретным и при $s \to \infty$ в любую окрестность собственного значения A^c кратности m попадет ровно m собственных значений $A^{(s)}$ (с учетом кратности).

§ 2. ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Теорема 4.3 позволяет легко перенести основные результаты гл. I на соответствующие начально-краевые задачи для уравнений теплопроводности, Шредингера и волнового уравнения. Проиллюстрируем это на примере волнового уравнения.

Рассмотрим в области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)}$ начально-краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u^{(s)}(x,t)}{\partial t^2} = \Delta u^{(s)}(x,t), && x \in \Omega^{(s)}, \quad t > 0, \\ &u^{(s)}(x,t) = 0, && x \in \partial\Omega^{(s)}, \quad t \geqslant 0, \\ &u^{(s)}(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u^{(s)}}{\partial t}(x,0) = \psi(x), && x \in \Omega^{(s)}. \end{aligned}\right\} \quad (4.6)$$

Используя введенный в § 1 оператор $A^{(s)}$, эту задачу можно сформулировать как задачу Коши в $L_2(\Omega^{(s)})$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial t^2} u^{(s)}(\cdot, t) = -A^{(s)} u^{(s)}(\cdot, t), \quad t > 0, \\ &u^{(s)}(\cdot, 0) = P^{(s)}\varphi, \quad \frac{\partial u^{(s)}}{\partial t}(\cdot, 0) = P^{(s)}\psi. \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Предположим, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемы, финитны в Ω и равны нулю в некоторой окрестности всех множеств $F^{(s)}$. Тогда, очевидно, $P^{(s)}\varphi$ и $P^{(s)}\psi$ принадлежат области определения $A^{(s)}$. Как известно [34], в этом случае решение задачи (4.7) можно представить в виде

$$u^{(s)}(\cdot, t) = \int_0^\infty \cos\sqrt{\lambda} t\, dE_\lambda^{(s)} P^{(s)}\varphi + \int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}}\, dE_\lambda^{(s)} P^{(s)}\psi. \tag{4.8}$$

Пусть при $s \to \infty$ выполняются условия (1.110). Тогда в силу теоремы 4.3 последовательность векторов $\{Q^{(s)} u^{(s)}(\cdot, t)\}$ при любом $t \geqslant 0$ в $L_2(\Omega)$ сходится к вектору

$$u(\cdot, t) = \int_0^\infty \cos\sqrt{\lambda} t\, dE_\lambda^c \varphi + \int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}}\, dE_\lambda^c \psi. \tag{4.9}$$

Действительно, используя свойства проекционных операторов $E_\lambda^{(s)}$, E_λ^c и теорему 4.3, обычным способом легко установить, что при любом фиксированном N, не принадлежащем дискретному спектру оператора A^c,

$$\lim_{s\to\infty} \left\| Q^{(s)} \int_0^N \cos\sqrt{\lambda} t\, dE_\lambda^{(s)} P^{(s)}\varphi - \int_0^N \cos\sqrt{\lambda} t\, dE_\lambda^c \varphi \right\|_{L_2(\Omega)} = 0. \tag{4.10}$$

Далее,

$$\left\| Q^{(s)} \int_N^\infty \cos\sqrt{\lambda} t\, dE_\lambda^{(s)} P^{(s)}\varphi \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \left\| Q^{(s)} \int_N^\infty dE_\lambda^{(s)} P^{(s)}\varphi \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} -$$
$$- \| Q^{(s)} E_N^{(s)} P^{(s)}\varphi \|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} - \| E_N^c \varphi \|^2_{L_2(\Omega)} +$$
$$+ 2 \| E_N^c \varphi \|_{L_2(\Omega)} \| Q^{(s)} E_N^{(s)} P^{(s)}\varphi - E_N^c \varphi \|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда в силу теоремы 4.3 следует, что при всех N, не принадлежащих дискретному спектру A^c,

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \left\| Q^{(s)} \int_N^\infty \cos\sqrt{\lambda} t\, dE_\lambda^{(s)} P^{(s)}\varphi \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \left\| \int_N^\infty dE_\lambda^c \varphi \right\|^2_{L_2(\Omega)} = o(1) \quad (N \to \infty). \tag{4.11}$$

Объединяя (4.10) и (4.11), получаем

$$\lim_{s\to\infty}\left\| Q^{(s)}\int_0^\infty \cos\sqrt{\lambda}t\,dE_\lambda^{(s)}P^{(s)}\psi - \int_0^\infty \cos\sqrt{\lambda}t\,dE_\lambda^c\varphi\right\|_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Аналогично доказывается сходимость второго слагаемого в (4.8).

Поскольку $\{E_\lambda^c\}$ — разложение единицы оператора A^c, а функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат его области определения $D(A^c)$, вектор $u(\cdot, t) = u(x, t)$, заданный формулой (4.9), при всех $t \geqslant 0$ также принадлежит $D(A^c)$ и удовлетворяет равенствам

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot, t) = -A^c u(\cdot, t),$$

$$u(\cdot, 0) = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = \psi.$$

Поэтому, согласно определению A^c, $u(x, t)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \Delta u(x,t) - c(x)u(x,t), && x \in \Omega, \quad t > 0,\\ &u(x,t) = 0, && x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0,\\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), && x \in \Omega. \end{aligned}\right\} \quad (4.12)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.4. *Пусть в задаче* (4.6) *начальные данные* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ — *дважды непрерывно дифференцируемые и финитные в* Ω *функции, равные нулю в некоторой окрестности всех множеств* $F^{(s)}$. *Тогда, если выполняется условие* (1.110), *последовательность решений этой задачи, продолженных нулем на* $F^{(s)}$, *при любом* $t \geqslant 0$ *сходится по норме* $L_2(\Omega)$ *к решению задачи* (4.12), *где начальные данные* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *те же, что в* (4.6) [1].

Точно таким же способом аналогичные теоремы можно установить для уравнений теплопроводности и Шредингера.

§ 3. ЗАДАЧА О РАССЕЯНИИ ВОЛН НА ГУСТЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ РЕШЕТКАХ

Пусть в трехмерном пространстве расположена решетка, состоящая из цилиндрических брусьев $\hat{F}_\alpha^{(s)}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$) произвольной формы с образующими, параллельными оси x_3, причем некоторые оси $\hat{F}_\alpha^{(s)}$ лежат в плоскости $\{x_1, x_3\}$ (рис. 10). Предположим, что на решетку падает электромагнитная волна, создаваемая токами

[1] Для обобщенных решений начально-краевых задач теорема верна при любых $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_2(\Omega)$.

$\mathbf{j} = \mathbf{j}(x)$. Если брусья идеально проводящие, то стационарное электромагнитное поле вне решетки описывается следующей краевой задачей:

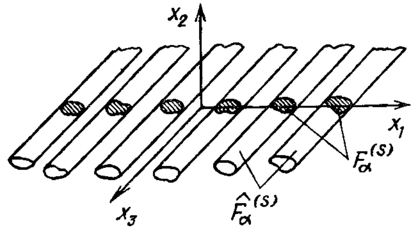

РИС. 10.

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{H} - ik\mathbf{E} = \mathbf{j}, \\ &\operatorname{rot}\mathbf{E} + ik\mathbf{H} = 0, \\ &\quad \mathbf{E}_\tau \Big|_{\partial F_\alpha^{(s)}} = 0, \\ &\qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s, \end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

где $\mathbf{E}_\tau$ — касательная составляющая вектора $\mathbf{E}$, $i = \sqrt{-1}$, $\operatorname{Im} k > 0$ (что соответствует некоторому затуханию в среде). Изучим асимптотическое поведение решения $\{\mathbf{E}^{(s)}, \mathbf{H}^{(s)}\}$ задачи (4.13), когда число брусьев стремится к бесконечности, а диаметры их — к нулю. Рассмотрим два случая поляризации волн.

Случай E-поляризации

Пусть вектор плотности тока $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x)$ направлен вдоль оси x_3 и не зависит от координаты x_3: $\mathbf{j} = \{0, 0, j_3(x_1, x_2)\}$. Тогда существует решение $\{\mathbf{E}^{(s)}, \mathbf{H}^{(s)}\}$ задачи (4.13), также не зависящее от x_3, причем $\mathbf{E}^{(s)} = \{0, 0, E_3^{(s)}(x, x_2)\}$, $\mathbf{H}^{(s)} = \{H_1^{(s)}(x_1, x_2), H_2^{(s)}(x_1, x_2), 0\}$. Предположим, что функция $j_3(x_1, x_2)$ финитна по $\{x_1, x_2\}$, и пусть $\mathbf{E}^{(s)}$ и $\mathbf{H}^{(s)}$ убывают при $x = \{x_1, x_2\} \to \infty$.

Легко видеть, что в данном случае решение задачи (4.13) имеет вид

$$\mathbf{H}^{(s)} = \frac{i}{k}\operatorname{rot}\mathbf{E}^{(s)} = \frac{i}{k}\operatorname{rot}\{0, 0, E_3^{(s)}\},$$

а функция $E_3^{(s)} = E_3^{(s)}(x_1, x_2)$ является решением такой краевой задачи в R_2:

$$\left.\begin{aligned} \Delta E_3^{(s)} + k^2 E_3^{(s)} &= j_3, \text{ вне } \bigcup_{\alpha=1}^{s} F_\alpha^{(s)} \subset R_2, \\ E_3^{(s)}\Big|_{\partial F_\alpha^{(s)}} &= 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s, \\ E_3^{(s)} &\to 0, \qquad x = \{x_1, x_2\} \to \infty. \end{aligned}\right\} \qquad (4.14)$$

Предположим, что при $s \to \infty$ множества $F^{(s)} = \bigcup_{\alpha=1}^{s} F_\alpha^{(s)} \subset R_2$, где $F_\alpha^{(s)}$ — нормальное сечение брусьев $\hat{F}_\alpha^{(s)}$, ведут себя достаточно «регулярно», так, что выполняются, например, условия теоремы 2.10 (при $m = 1$). Тогда, используя эту теорему и учитывая результаты § 1 относительно поведения резольвенты R_{k^2} ($\operatorname{Im} k^2 \neq 0$) оператора, порожденного данной краевой задачей, заключаем, что $E_3^{(s)}$ сходится к функции $E_3 = E_3(x)$, которая вне Γ удовлетворяет исходному уравнению в (4.14), а на Γ — таким условиям сопряжения:

$$E_3^+ = E_3^-, \qquad \left(\frac{\partial E_3}{\partial \nu}\right)^+ - \left(\frac{\partial E_3}{\partial \nu}\right)^- = 2\pi c_\Gamma E_3,$$

где $c_\Gamma = c_\Gamma(x)$ — плотность суммы обратных величин логарифмов диаметров $F_\alpha^{(s)}$ (см. гл. II, § 5). Применительно к системе уравнений Максвелла эти условия запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{E}_\tau^+ = \mathbf{E}_\tau^- = \mathbf{E}_\tau, \\ &\mathbf{H}_\nu^+ = \mathbf{H}_\nu^-, \quad \mathbf{H}_\tau^+ - \mathbf{H}_\tau^- = \hat{c}_\Gamma \mathbf{E}_\tau, \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

где буквами τ и ν отмечены соответственно касательные и нормальные составляющие векторов на Γ, а $\hat{c}_\Gamma$ — матрица в R_2 вида

$$\hat{c}_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{k} \end{pmatrix} 2\pi c_\Gamma(x).$$

Вместе с уравнениями Максвелла (4.13) вне Γ и условиями убывания на бесконечности условия сопряжения (4.15) на Γ полностью определяют предельное решение $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$.

Случай H-поляризации

Пусть теперь вектор плотности тока $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x)$ имеет нулевую x_3-компоненту и не зависит от x_3: $\mathbf{j} = \{j_1(x_1, x_2), j_2(x_1, x_2), 0\}$, причем $j_1(x_1, x_2)$, $j_2(x_1, x_2)$ финитны. Тогда существует решение $\{\mathbf{E}^{(s)}, \mathbf{H}^{(s)}\}$ задачи (4.13), не зависящее от x_3 и такое, что

$$\mathbf{E}^{(s)} = \{E_1^{(s)}(x_1, x_2), E_2^{(s)}(x_1, x_2), 0\}, \quad \mathbf{H}^{(s)} = \{0, 0, H_3^{(s)}(x_1, x_2)\}.$$

Нетрудно убедиться, что это решение можно представить в виде

$$\mathbf{E}^{(s)} = \frac{i}{ik}(\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(s)} - \mathbf{j}) = \frac{1}{ik}(\operatorname{rot}\{0, 0, H_3^{(s)}\} - \mathbf{j}),$$

где $H_3^{(s)}$ — решение такой краевой задачи в R_2:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta H_3^{(s)} + k^2 H_3^{(s)} = -(\operatorname{rot} j)_3 \ \text{ вне } \bigcup_{\alpha=1}^{s} F_\alpha^{(s)} \subset R_2, \\ &\left.\frac{\partial H_3^{(s)}}{\partial \nu}\right|_{\partial F_\alpha^{(s)}} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s, \\ &H_3^{(s)} \to 0, \qquad x = \{x_1, x_2\} \to \infty, \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по нормали к $\partial F_\alpha^{(s)}$.

Пусть при $s \to \infty$ множества $F^{(s)} = \bigcup_{\alpha=1}^{s} F_\alpha^{(s)} \subset R_2$ удовлетворяют условиям теоремы 3.1. Тогда, используя эту теорему и замечания

§ 1, заключаем, что $H_3^{(s)}$ сходится к функции H_3, удовлетворяющей вне Г исходному уравнению в (4.16), а на Г — таким условиям сопряжения:

$$\left(\frac{\partial H_3}{\partial \nu}\right)^+ = \left(\frac{\partial H_3}{\partial \nu}\right)^- = p(x)\,[H_3^+ - H_3^-],$$

где $p(x)$ — плотность проводимостей (см. гл. III, § 1). Если $p(x) > 0$, то эти условия можно записать в виде (4.15) с матрицей

$$\hat{c}_\Gamma = \frac{1}{p(x)}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ik \end{pmatrix}.$$

§ 4. ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ОБЛАСТЯХ СО СЛУЧАЙНОЙ МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ

В прикладных вопросах встречаются задачи типа (1), (2) (см. введение) или (4.6), когда вид множества $F^{(s)}$ точно не известен — известны лишь некоторые его вероятностные характеристики, например вероятностный закон, по которому оно образуется. При этом требуется установить некоторые (вероятностные) свойства решений этих задач. Рассмотрим такой пример. Пусть в пространство R_3 независимо друг от друга «вброшено» s шаров $F_i^{(s)}$ радиуса $r^{(s)}$ так, что вероятность попадания центра шара $F_i^{(s)}$ в область $D \subset R_3$ равна $\int\limits_D \varphi(x)\,dx$ $(\varphi(x) \geqslant 0, \int \varphi(x)\,dx = 1)$. При каждом фиксированном s множество $F^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)} = F^{(s)}(\omega)$ случайное, т. е. оно зависит от элементарного события ω из вероятностного пространства Ω_B, мера в котором порождается плотностью вероятности $\varphi(x)$. В области $\Omega^{(s)} = R_3 \setminus F^{(s)}(\omega)$ рассмотрим краевую задачу

$$\Delta u^{(s)} + k^2 u^{(s)} = f, \quad u^{(s)}\big|_{\partial\Omega^{(s)}} = 0. \tag{4.17}$$

Решение $u^{(s)} = u^{(s)}(x, \omega)$ этой задачи зависит от элементарного события $\omega \in \Omega_B$, т. е. оно случайное. Пусть, например, число шаров $F_i^{(s)}$ велико, а диаметры их малы. Тогда оказывается, что $u^{(s)}$ по вероятности близко (а при $s \to \infty$ сходится) к неслучайной функции $u(x)$, которая во всем пространстве удовлетворяет уравнению

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) - \overline{\varphi}(x)\,u(x) = f(x),$$

где k^2 и $f(x)$ те же, что в (4.17), а

$$\overline{\varphi}(x) = 4\pi\varphi(x) \lim_{s\to\infty} s r^{(s)}.$$

Это вытекает из приведенных ниже теорем 4.5 и 4.6.

Сходимость решений первой краевой задачи по вероятности

Пусть в области $\Omega \subset R_n$ задана последовательность случайных множеств $F^{(s)}(\omega)$ $(s = 1, 2, \ldots)$, т. е. при каждом фиксированном s множество $F^{(s)}(\omega)$ зависит от элементарного события ω из некоторого вероятностного пространства Ω_B. Для характеристики множеств $F^{(s)}(\omega)$ введем функцию $\Phi^{(s)}(x, \tau, \omega)$ (x — точка в Ω, $\tau > 0$ — параметр усреднения). Для этого разобьем пространство R_n на кубы K_i^τ (замкнутые) со стороной τ и положим

$$\Phi^{(s)}(x, \tau, \omega) = \sum_i \frac{C(F^{(s)}(\omega) \cap K_i^\tau)}{\tau^n} \chi_i(x), \tag{4.18}$$

где $\chi_i(x)$ — характеристическая функция куба K_i^τ, $C(F^{(s)}(\omega) \cap \cap K_i^\tau)$ — ньютонова емкость множества $F^{(s)}(\omega) \cap K_i^\tau$. С каждым множеством $F^{(s)}(\omega)$ связаны операторы $P^{(s)}(\omega)$, $Q^{(s)}(\omega)$, $A^{(s)}(\omega)$, $E_\lambda^{(s)}(\omega)$ и $R_\nu^{(s)}(\omega) = (A^{(s)}(\omega) - \nu E)^{-1}$ (см. § 1). Теперь это случайные операторы, поскольку пространство $L_2(\Omega^{(s)}(\omega)) = L_2(\Omega \setminus F^{(s)}(\omega))$ зависит от множества $F^{(s)}(\omega)$ и, значит, от элементарного события $\omega \in \Omega_B$. Однако при определенных условиях операторы $Q^{(s)}(\omega) R_\nu^{(s)}(\omega) P^{(s)}(\omega)$ и $Q^{(s)}(\omega) E_\lambda^{(s)}(\omega) P^{(s)}(\omega)$ по вероятности близки (а при $s \to \infty$ сходятся) к неслучайным операторам $R_\nu^c = (A^c - \nu E)^{-1}$ и E_λ^c, введенным в § 1.

Сформулируем точный результат. Предположим, что все рассматриваемые в следующей теореме множества в Ω_B измеримы относительно меры в Ω_B, т. е. являются событиями. Вероятность события $A \subset \Omega_B$ обозначим через $\Pr\{A\}$.

Теорема 4.5. *Пусть при любом $\varepsilon > 0$ выполняется равенство*

$$\lim_{\tau \to 0} \overline{\lim_{s \to \infty}} \Pr\left\{\int_\Omega |\Phi^{(s)}(x, \tau, \omega) - c(x)|\, dx > \varepsilon\right\} = 0, \tag{4.19}$$

где $c(x)$ — непрерывная, ограниченная и суммируемая функция в Ω. Тогда

a) для каждого комплексного ν (или $\nu < 0$) последовательность операторов $\{Q^{(s)}(\omega) R_\nu^{(s)}(\omega) P^{(s)}(\omega),\ s = 1, 2, \ldots\}$ по вероятности равномерно сходится к оператору R_ν^c, т. е. при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{s \to \infty} \Pr\{\|Q^{(s)}(\omega) R_\nu^{(s)}(\omega) P^{(s)}(\omega) - R_\nu^c\| > \varepsilon\} = 0;$$

b) для каждого λ, не принадлежащего дискретному спектру оператора A^c, последовательность операторов $\{Q^{(s)}(\omega) E_\lambda^{(s)}(\omega) P^{(s)}(\omega),\ s = 1, 2, \ldots\}$ по вероятности сильно сходится к оператору E_λ^c, т. е. при любых $\varepsilon > 0$ и $g \in L_2(\Omega)$

$$\lim_{s \to \infty} \Pr\{\|Q^{(s)}(\omega) E_\lambda^{(s)}(\omega) P^{(s)}(\omega) g - E_\lambda^c g\|_{L_2(\Omega)} > \varepsilon\} = 0$$

(*операторы* A^c, $R^c_\nu = (A^c - \nu E)^{-1}$, E^c_λ *связаны с функцией* $c(x)$ *из* (4.19), *см.* § *1*).

Доказательство. Покажем сначала, что из (4.19) вытекает утверждение *a*. Предположим противное. Тогда найдутся такие $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta > 0$ и такая подпоследовательность $\{s_k\}$, что

$$\Pr\{\|Q^{(s_k)}(\omega) R_\nu^{(s_k)}(\omega) P^{(s_k)}(\omega) - R^c_\nu\| > \varepsilon_0\} \geqslant \delta > 0. \qquad (4.20)$$

Рассмотрим события

$$V(s, \tau, m) = \left\{\omega \in \Omega_B : \int\limits_\Omega |\Phi^{(s)}(x, \tau, m) - c(x)|\, dx > \frac{1}{m}\right\},$$

$$W(s_k) = \{\omega \in \Omega_B : \|Q^{(s_k)}(\omega) R_\nu^{(s_k)}(\omega) P^{(s_k)}(\omega) - R^c_\nu\| > \varepsilon_0\}.$$

В силу условия (4.19) для любого m найдутся такие $S(\tau, m)$ и $\tau(m)$, что при $\tau < \tau(m)$ и $s > S(\tau, m)$ будет выполняться неравенство

$$\Pr\{V(s, \tau, m)\} < \frac{\delta}{2^m}. \qquad (4.21)$$

Рассмотрим событие

$$U(s_k) = W(s_k) \cap [\bigcap_{m=1}^{M_k} \overline{V(s_k, \tau(m), m)}], \qquad (4.22)$$

где $\overline{V(s_k, \tau(m), m)}$ — событие, противоположное $V(s_k, \tau(m), m)$, а пересечение по m берется до M_k, для которых выполняется неравенство (4.21) при $s = s_k$, $\tau = \tau(m)$, $m \leqslant M_k$. Поскольку $s_k \to \infty$, в силу (4.21) M_k также неограниченно возрастает при $k \to \infty$. Покажем, что событие $U(s_k) \subset \Omega_B$ не пусто ни при каком k.

Учитывая (4.21), получаем

$$\Pr\{\bigcup_{m=1}^{M_k} V(s_k, \tau(m), m)\} \leqslant \sum_{m=1}^{M_k} \Pr\{V(s_k, \tau(m), m)\} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta.$$

Поэтому

$$\Pr\{\bigcap_{m=1}^{M_k} \overline{V(s_k, \tau(m), m)}\} > 1 - \delta,$$

а так как согласно (4.20) $\Pr\{W(s_k)\} \geqslant \delta$, то из (4.22) следует, что $U(s_k)$ не пусто.

Пусть $\omega_k \in U(s_k)$. Рассмотрим последовательность множеств $F^{(k)} = F^{(s_k)}(\omega_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и соответствующие последовательности функций $\Phi^{(k)}_\tau(x) = \Phi^{(s_k)}(x, \tau, \omega_k)$ и операторов $Q^{(k)} = Q^{(s_k)}(\omega_k)$, $P^{(k)} = P^{(s_k)}(\omega_k)$, $R_\nu^{(k)} = R_\nu^{(s_k)}(\omega_k)$. Так как $\omega_k \in U(s_k) \subset W(s_k)$, то согласно определению $W(s_k)$

$$\varlimsup_{k\to\infty} \|Q^{(k)} R^{(k)}_\nu P^{(k)} - R^c_\nu\| > \varepsilon_0 > 0. \qquad (4.23)$$

Аналогично, учитывая, что $\omega_k \in U(s_k) \subset \bigcap_{m=1}^{M_k} V(s_k, \tau(m), m)$, заключаем, что при любом m

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int_\Omega |\Phi^{(s_k)}(x, \tau, \omega_k) - c(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{m}, \text{ если } \tau \leqslant \tau(m).$$

Следовательно,

$$\lim_{\tau\to 0} \overline{\lim_{k\to\infty}} \int_\Omega |\Phi_\tau^{(k)}(x) - c(x)|\, dx = 0. \qquad (4.24)$$

Таким образом, построена последовательность множеств $F^{(k)} = F^{(s_k)}(\omega_k)$, для которой выполняется условие (4.24) (т. е. условие теоремы 1.7) и неравенство (4.23). Но это противоречит теореме 4.3. Следовательно, (4.20) неверно, т. е. выполняется утверждение *a*. Утверждение *b* вытекает из *a* и теоремы 4.2. Теорема доказана.

Используя эту теорему, так же как в § 2, нетрудно получить аналогичные результаты для задачи (4.6) в областях $\Omega^{(s)}(\omega) = \Omega \setminus F^{(s)}(\omega)$, где $F^{(s)}(\omega)$ — случайное множество.

Частный случай множеств

Рассмотрим теперь характерный для задач дифракции пример случайных множеств $F^{(s)}(\omega)$, для которых выполняется условие (4.19) теоремы 4.5. Пусть множество $F^{(s)}(\omega)$ состоит из совокупности s тел $F_i^{(s)} = F_i^{(s)}(\omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, случайно разбросанных в области Ω с плотностью вероятности $\varphi(x)$, причем формы этих тел также случайны. Более точно это означает следующее. В области выбирается независимо друг от друга s точек $x^{(i)}$ так, что вероятность выбора точки из области $D \subset \Omega$ равна $\int_D \varphi(x)\, dx$, где $\varphi(x)$ — неотрицательная, непрерывная и ограниченная функция. Затем каждая из точек $x^{(i)}$ также независимо друг от друга накрывается множеством $F_i^{(s)}$, ограниченным гладкой поверхностью, форма которой и положение относительно $x^{(i)}$ определяются некоторым вероятностным законом. Предположим, что при этом выполняются такие условия:

1) ньютонова емкость $C_i^{(s)} = C(F_i^{(s)})$ множества $F_i^{(s)} = F_i^{(s)}(\omega)$ есть случайная величина с функцией распределения $\sigma_s(t) = \sigma(s \cdot t)$, где $\sigma(t)$ — некоторая фиксированная функция распределения такая, что $\int_0^\infty t^n d\sigma(t) < A$;

2) множества $F_i^{(s)}$ не очень вытянуты, так что

$$d_i^{(s)} \leqslant a\,(C_i^{(s)})^{\frac{1}{n-2}},$$

где $d_i^{(s)}$ — диаметр $F_i^{(s)}$, $C_i^{(s)}$ — емкость, $a > 0$.

Таким образом, можно считать, что задана вероятностная мера в пространстве $\Omega_B^{(s)}$, соответствующем конфигурациям из s тел $F_i^{(s)}(\omega)$, когда s фиксировано. Вероятностное пространство Ω_B, фигурирующее в теореме 4.5, определим как прямое произведение пространств $\Omega_B^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots$ Положим $F^{(s)}(\omega) = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}(\omega)$.

Теорема 4.6. *При сделанных выше предположениях выполняется условие* (4.19) *теоремы* 4.5, *где* $c(x) = \varphi(x) \int\limits_0^\infty t d\sigma(t)$.

Доказательство. Установим сначала некоторые факты относительно емкостей $C_i^{(s)}$ множеств $F_i^{(s)}$ и их расположения. Обозначим через $U_\tau^{(s)}$ событие в Ω_B, состоящее в том, что емкости $C_i^{(s)}$ всех $F_i^{(s)}$ меньше $s^{-\tau}$. В силу условия 1 вероятность этого события при $s \to \infty$ оценивается следующим образом:

$$\Pr\{U_\tau^{(s)}\} = \Big(\int\limits_0^{s^{-\tau}} d\sigma(st)\Big)^s = \Big(1 - \int\limits_{s^{1-\tau}}^{\infty} d\sigma(t)\Big)^s \geqslant$$

$$\geqslant \left(1 - \frac{A}{s^{(1-\tau)n}}\right)^s \sim 1 - \frac{A}{s^{n(1-\tau)-1}}. \qquad (4.25)$$

Обозначим через N_s минимальное число множеств $F_i^{(s)}$, которое нужно выбросить из области Ω, чтобы оставшиеся множества находились друг от друга на расстояниях, больших $s^{-\frac{\tau}{n-2}}$. Оценим условную вероятность $\Pr\{N_s > l/U_\tau^{(s)}\}$ события $\{\omega \in \Omega_B : N_s > l\}$ $(l \leqslant s-1)$ при условии, что произошло событие $U_\tau^{(s)}$. Непосредственный подсчет этой вероятности с учетом условий 1 и 2 приводит к неравенству

$$\Pr\{N_s > l/U_\tau^{(s)}\} < \sum_{k=[l]+1}^{s} C_s^k B^k s^{k\left(1-\frac{n\tau}{n-2}\right)},$$

$$B = \frac{\omega_n}{n}(1+2a)^n \max_x \varphi(x).$$

Отсюда, учитывая, что $C_s^k \leqslant s^k (k!)^{-1}$, получаем

$$\Pr\{N_s > l/U_\tau^{(s)}\} < \frac{B^{[l]+1} s^{p([l]+1)}}{([l]+1)!} \sum_{k=0}^{s-[l]-1} \left(\frac{Bs^p}{[l]+1}\right)^k,$$

где $p = \frac{n(2-\tau)-4}{n-2}$. Положив $l = s^{p+\theta}$ $(\theta > 0)$ и оценивая $([l]+1)!$ с помощью формулы Стирлинга, при больших s находим

$$\Pr\{N_s > s^{p+\theta}/U_\tau^{(s)}\} < \left(\frac{Be}{s^\theta}\right)^{s^{p+\theta}}. \qquad (4.26)$$

Выберем теперь τ так, чтобы выполнялись неравенства $\frac{n-2}{n-1} < \tau < \frac{n-1}{n}$. Тогда при достаточно малых $\theta > 0$ $p+\theta-\tau<0$. При этих значениях τ и θ из неравенств (4.25) и (4.26) вытекает, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{s\to\infty} \Pr\left\{\sum_{i\in I_1} C_1^{(s)} < \varepsilon\right\} = 1, \tag{4.27}$$

где $\{F_i^{(s)}, i \in I_1\}$ — минимальное множество тел $F_i^{(s)}$, которое нужно выбросить из Ω, чтобы в оставшемся множестве $\{F_i^{(s)}, i \in I_2\}$ расстояние между любыми $F_i^{(s)}$ и $F_j^{(s)}$ $(i \neq j)$ были больше $s^{-\frac{\tau}{n-2}}$.

Пусть пространство R_n подразделено на кубы K_α^r со стороной r. Оценим емкость множеств $F^{(s)} \cap K_\alpha^r$. Для этого воспользуемся известным соотношением между емкостью множества и емкостями его частей. Пусть множество E состоит из частей E_i, находящихся друг от друга на положительных расстояниях r_{ij}. Справедливы неравенства (см. гл. I, § 4)

$$\sum_i C(E_i) \geqslant C(E) \geqslant \sum_i C(E_i) - \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \frac{C(E_i)\,C(E_j)}{r_{ij}^{n-2}}.$$

Используя эти неравенства и полуаддитивность емкости, запишем

$$\sum_i{}^{\alpha} C_i^{(s)} \geqslant C\left(\bigcup_i{}^{\alpha} F_i^{(s)}\right) \geqslant \sum_i{}^{\alpha} C_i^{(s)} - \sum_{i\in I_1}{}^{\alpha} C_i^{(s)} - \sum_{\substack{i,j\in I_2\\ i\neq j}}{}^{\alpha} \frac{C_i^{(s)} C_j^{(s)}}{(r_{ij}^{(s)})^{n-2}}, \tag{4.28}$$

где α означает, что суммирование проводится только по тем $F_i^{(s)}$, которые накрывают точки $x^{(i)} \in K_\alpha^r$.

Пусть Q — произвольная область в Ω. Рассмотрим случайную величину $\zeta_Q^{(s)} = \sum_{x^{(i)}\in Q} C_i^{(s)}$. В силу неравенства Чебышева при любом $\varepsilon > 0$

$$\Pr\{|\zeta_Q^{(s)} - M(\zeta_Q^{(s)})| \leqslant \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{D(\zeta_Q^{(s)})}{\varepsilon^2},$$

где M и D — соответственно математическое ожидание и дисперсия $\xi_Q^{(s)}$. В результате непосредственного подсчета этих величин с учетом условия 1 находим

$$M(\zeta_Q^{(s)}) = s\int_Q \varphi(x)\,dx \int_0^\infty t\,d\sigma_s(t) = \int_Q \varphi(x)\,dx \int_0^\infty t\,d\sigma(t),$$

$$D(\zeta_Q^{(s)}) = s\left\{\int_Q \varphi(x)\,dx \int_0^\infty t^2 d\sigma_s(t) - \right.$$

$$\left. - \left(\int_Q \varphi(x)\,dx \int_0^\infty t\,d\sigma_s(t)\right)^2\right\} \leqslant \frac{A_1}{s}\int_Q \varphi(x)\,dx,$$

откуда

$$\Pr\left\{\left|\zeta_Q^{(s)}-c\int_Q\varphi(x)\,dx\right|\leqslant\varepsilon\right\}\geqslant 1-\frac{A_1}{s\varepsilon^2}\int_Q\varphi(x)\,dx, \quad (4.29)$$

где

$$c=\int_0^\infty t\,d\sigma(t),\quad A_1=\sqrt[n]{A^2}.$$

Применяя это неравенство к областям $K_\alpha^r\setminus\partial K_\alpha^r$, получаем

$$\lim_{s\to\infty}\Pr\left\{\max_\alpha\left|\sum_i{}^\alpha C_i^{(s)}-c\int_{K_\alpha^r}\varphi(x)\,dx\right|\leqslant\varepsilon\right\}=1. \quad (4.30)$$

Оценим теперь случайную величину

$$\xi_\alpha^{(s)}=\sum_{\substack{i,j\in I_2\\ i\neq j}}{}^\alpha\frac{C_i^{(s)}C_j^{(s)}}{(r_{ij}^{(s)})^{n-2}}=\sum_{i\in I_2}{}^\alpha C_i^{(s)}\sum_{\substack{j\in I_2\\ j\neq i}}{}^\alpha\frac{C_j^{(s)}}{(r_{ij}^{(s)})^{n-2}}. \quad (4.31)$$

Пусть произошло событие $U_\tau^{(s)}=\{\omega\in\Omega_B:\max C_i^{(s)}<s^{-\tau}\}$. Тогда в силу условия $2\,d_i^{(s)}<as^{-\frac{\tau}{n-2}}$ и из неравенства $|x^{(i)}-x^{(j)}|\leqslant\leqslant r_{ij}^{(s)}+d_i^{(s)}+d_j^{(s)}$ следует, что $|x^{(i)}-x^{(j)}|\leqslant(1+2a)\,r_{ij}^{(s)}$. Отсюда вытекает, что в случаях, когда происходит событие $U_\tau^{(s)}$,

$$\sum_\alpha\xi_\alpha^{(s)}\leqslant X^{(s)}=b\sum_i C_i^{(s)}\sum_{\substack{j\neq i\\ |x^{(j)}-x^{(i)}|\leqslant\sqrt{n}r}}\frac{C_j^{(s)}}{|x^{(i)}-x^{(j)}|},\qquad b=(1+2a)^{n-2}.$$

Поэтому при любом $\varepsilon>0$ справедливы неравенства

$$\Pr\left\{\sum_\alpha\xi_\alpha^{(s)}\leqslant\varepsilon\right\}\geqslant\Pr\left\{U_\tau^{(s)}\cap\left(\sum_\alpha\xi_\alpha^{(s)}\leqslant\varepsilon\right)\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\Pr\{U_\tau^{(s)}\cap(X^{(s)}\leqslant\varepsilon)\}\geqslant\Pr\{X^{(s)}\leqslant\varepsilon\}-\Pr\{\overline{U_\tau^{(r)}}\},$$

где $\overline{U_\tau^{(s)}}$ — событие, противоположное $U_\tau^{(s)}$. Так как $X^{(s)}\geqslant 0$, то

$$\Pr\{X^{(s)}\leqslant\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{M(X^{(s)})}{\varepsilon},$$

и, следовательно,

$$\Pr\left\{\sum_\alpha\xi_\alpha^{(s)}\leqslant\varepsilon\right\}\geqslant 1-\frac{M(X^{(s)})}{\varepsilon}-\Pr\{\overline{U_\tau^{(s)}}\}, \quad (4.32)$$

где

$$M(X^{(s)})=$$

$$=bs(s-1)\left(\int_0^\infty t\,d\sigma_s(t)\right)^2\int_\Omega\varphi(x'')\left(\int_{|x''-x'|\leqslant\sqrt{n}r}\frac{\varphi(x')}{|x''-x'|^{n-2}}\,dx'\right)dx''\leqslant$$

$$\leqslant\tilde{A}r^2\quad(\tilde{A}=\mathrm{const}). \quad (4.32')$$

Пусть K^L — куб со стороной L, а T_r^L — его часть, состоящая из кубов K_α^r ($\alpha \in \Lambda_r^L$), не пересекающихся с границей области Ω. Положим

$$\varepsilon(r, L) = c \int\limits_{\Omega \setminus T_r^L} \varphi(x)\, dx, \quad c = \int\limits_0^\infty t d\sigma(t). \tag{4.33}$$

Очевидно, $\varepsilon(r, L) \to 0$ при $L \to \infty$ и $r \to 0$. Применяя неравенство (4.29) к области $Q = \Omega \setminus T_r^L$ и учитывая, что в силу полуаддитивности и монотонности емкости $\sum\limits_{\Omega \setminus T_r^L} C_i^{(s)} \geqslant \sum\limits_{\alpha \notin \Lambda_r^L} C\left(\bigcup\limits_i^{\alpha} F_i^{(s)}\right)$, при $\varepsilon > 0$ получаем

$$\lim_{s\to\infty} \Pr\left\{\sum_{\alpha \notin \Lambda_r^L} C\left(\bigcup_i^{\alpha} F_i^{(s)}\right) \leqslant \varepsilon + \varepsilon(r, L)\right\} = 1.$$

Далее, из (4.30)—(4.32′) и (4.25), (4.28) вытекает, что при любых положительных ε_1, ε_2, L и r

$$\underline{\lim_{s\to\infty}} \Pr\left\{\sum_{\alpha\in\Lambda_r^L} \left| C\left(\bigcup_i^{\alpha} F_i^{(s)}\right) - c\int\limits_{K_\alpha^r} \varphi(x)\, dx\right| \leqslant \varepsilon_1 \left(\frac{L}{r}\right)^n + \varepsilon_2\right\} \geqslant 1 - \frac{\tilde{A} r^2}{\varepsilon_2}.$$

В последних двух соотношениях емкости $C\left(\bigcup\limits_i^{\alpha} F_i^{(s)}\right)$ можно заменить емкостью $C(F^{(s)} \cap K_\alpha^r)$, где $F^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$. Это вытекает из равенства

$$\lim_{s\to\infty} \Pr\left\{\sum_{\alpha} \left| C(F^{(s)} \cap K_\alpha^r) - C\left(\bigcup_i^{\alpha} F_i^{(s)}\right)\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

которое легко установить, используя неравенства (4.25), (4.29), а также полуаддитивность и монотонность емкости. Поэтому, полагая $\varepsilon_1 = \left(\frac{r}{L}\right)^n \varepsilon < \varepsilon$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon$, окончательно получаем

$$\lim_{s\to\infty} \Pr\left\{\sum_{\alpha \notin \Lambda_r^L} C(F^{(s)} \cap K_\alpha^r) < \varepsilon + \varepsilon(r, L)\right\} = 1,$$

$$\lim_{r\to 0} \underline{\lim_{s\to\infty}} \Pr\left\{\sum_{\alpha\in\Lambda_r^L} \left| C(F^{(s)} \cap K_\alpha^r) - c\int\limits_{K_\alpha^r} \varphi(x)\, dx\right| < 2\varepsilon\right\} = 1. \tag{4.34}$$

Теперь, исходя из определения функции $\Phi^{(s)}(x, r, \omega)$, запишем неравенство

$$\int\limits_\Omega |\Phi^{(s)}(x, r, \omega) - c\varphi(x)|\, dx = \sum_\alpha \int\limits_{K_\alpha^r} \left| \frac{C(F^{(s)} \cap K_\alpha^r)}{r^n} - c\varphi(x)\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha\in\Lambda_r^L}\left| C(F^{(r)}\cap K_\alpha^r) - c\int_{K_\alpha^r}\varphi(x)\,dx\right| + \sum_{\alpha\notin\Lambda_r^L} c\int_{K_\alpha^r}\varphi(x)\,dx +$$
$$+ \sum_{\alpha\notin\Lambda_r^L} C(F^{(s)}\cap K_\alpha^r) + \sum_{\alpha\in\Lambda_r^L} c\int_{K_\alpha^r}|\varphi(x)-\varphi_\alpha^r|\,dx,$$

где φ_α^r — среднее значение функции $\varphi(x)$ в K_α^r. Так как $\varphi(x)$ непрерывна, то последнее слагаемое при любом L стремится к нулю, если $r\to 0$. Поэтому из (4.33) и (4.34) следует, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r\to 0}\varliminf_{s\to\infty} \Pr\left\{\int_\Omega |\Phi^{(s)}(x, r, \omega) - c\varphi(x)|\,dx < \varepsilon\right\} = 1,$$

или

$$\lim_{r\to 0}\varlimsup_{s\to\infty} \Pr\left\{\int_\Omega |\Phi^{(s)}(x, r, \omega) - c\varphi(x)|\,dx \geqslant \varepsilon\right\} = 0.$$

Теорема доказана.

§ 5. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА

Изучим поведение решений нелинейной системы уравнений Навье — Стокса в областях $\Omega^{(s)} = \Omega\setminus F^{(s)}$, где $F^{(s)}$ состоит из большого числа непересекающихся мелких компонент $F_i^{(s)}$ ($F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$). Даже линейная часть этой системы формально отличается от систем, рассмотренных в гл. II. Тем не менее основная схема исследования, развитая в § 2, 3 гл. II, применима и в этом случае.

Линеаризованная стационарная задача

Пусть в пространстве R_3 (R_2) задана фиксированная конечная область Ω с границей $\partial\Omega$ и в ней выделено некоторое число s непересекающихся замкнутых множеств $F_i^{(s)}$ с достаточно гладкими границами $\partial F_i^{(s)}$ ($i = 1, 2, \ldots, s$). Рассмотрим в области $\Omega^{(s)} = \Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ краевую задачу для линейной системы уравнений Навье—Стокса

$$\left.\begin{aligned} &\nu\Delta\mathbf{u}^{(s)}(x) = \operatorname{grad} p^{(s)}(x),\\ &\operatorname{div}\mathbf{u}^{(s)}(x) = 0, \quad x\in\Omega^{(s)}, \end{aligned}\right\}\tag{4.35}$$

$$\mathbf{u}^{(s)}(x) = \mathbf{U}(x), \quad x\in\partial\Omega^{(s)} = \partial\Omega\cup\left(\bigcup_{i=1}^{s}\partial F_i^{(s)}\right).\tag{4.36}$$

Предположим, что «граничная» вектор-функция $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x)$ задана всюду в Ω, принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и удовлетворяет в Ω уравнению $\operatorname{div} \mathbf{U}(x) = 0$.

Как известно, существует единственное решение $\{\mathbf{u}^{(s)}(x), p^{(s)}(x)\}$ задачи (4.35), (4.36) (см., например, [16]). Для краткости назовем решением задачи лишь вектор скорости $\mathbf{u}^{(s)}(x)$, продолжая его на множество $\bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ равенством $\mathbf{u}^{(s)}(x) = \mathbf{U}(x)$. Основная наша цель — изучить асимптотическое поведение вектора $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ при $s \to \infty$, когда диаметры $d_i^{(s)}$ множеств $F_i^{(s)}$ стремятся к нулю, а сами $F_i^{(s)}$ либо приближаются к фиксированной гладкой поверхности (контуру) $\Gamma \subset \Omega$, либо распределяются в Ω объемно. Для этого нам понадобится характеристика массивности множества $F_i^{(s)}$, аналогичная тензору $C^{kl}(F_i^{(s)})$, введенному в § 3 гл. II. Пусть $T(F_i^{(s)})$ — шар минимального радиуса $a_i^{(s)}$, в котором содержится $F_i^{(s)}$, а $T_a = T_a(F_i^{(s)})$ — концентрический с ним шар радиуса $a > a_i^{(s)}$. Обозначим через $H_k(F_i^{(s)})$ класс соленоидальных вектор-функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(T_a)$, равных $\mathbf{e}^k$ на множестве $F_i^{(s)}$ ($\mathbf{e}^k$ — орт оси x_k). Рассмотрим функционал

$$J_i(\mathbf{u}) = \int\limits_{T_a} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx = \int\limits_{T_a} \sum_{l,m=1}^{3\,(2)} \left| \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right|^2 dx. \tag{4.37}$$

Пусть $\mathbf{v}^{k(i)}(x)$ — вектор-функция, на которой достигается минимум функционала (4.37) в классе $H_k(F_i^{(s)})$. Из результатов работы [16] вытекает, что такая вектор-функция существует и единственна, причем она является решением краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &\Delta \mathbf{v}^{k(i)}(x) = \operatorname{grad} p^{k(i)}(x), \\ &\qquad \operatorname{div} \mathbf{v}^{k(i)}(x) = 0, \quad x \in T_a \setminus F_i^{(s)}, \\ &\mathbf{v}^{k(i)}(x) = \mathbf{e}^k, \quad x \in F_i^{(s)}, \quad \mathbf{v}^{k(i)}|_{\partial T_a} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

С каждым множеством $F_i^{(s)}$ свяжем систему чисел

$$C^{kl}(F_i^{(s)}) = \int\limits_{T_a} (\nabla \mathbf{v}^{k(i)}, \nabla \mathbf{v}^{l(i)})\, dx, \qquad k, l = 1, 2, (3).$$

Легко видеть, что при замене координат она преобразуется как тензор. Этот тензор примем в качестве характеристики массивности множества $F_i^{(s)}$ и ориентации его в пространстве.

Основные результаты, относящиеся соответственно к объемному и поверхностному распределению множеств $F_i^{(s)}$, содержатся в следующих теоремах.

Теорема 4.7. *Пусть при $s \to \infty$ выполняются такие условия:*

а) $\lim\limits_{s\to\infty} \max\limits_{i} d_i^{(s)} = \lim\limits_{s\to\infty} \max\limits_{i} r_i^{(s)} = 0;$

b) для любой подобласти $G \subset \Omega$ существует предел

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{(G)} C^{kl}(F_i^{(s)}) = \int_G c^{kl}(x)\,dx,$$

где $\| c^{kl}(x) \| = c(x)$ *— непрерывная неотрицательная матрица в* Ω;

c) расстояния $r_i^{(s)}$ *от* $T(F_i^{(s)})$ *до* $\bigcup_{j\neq i} T(F_j^{(s)}) \cup \partial\Omega$ *стремятся к нулю не очень быстро, так, что*

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sum_{i=1}^{s} \frac{(d_i^{(s)})^2}{(r_i^{(s)})^3} < C \qquad \text{при } n = 3,$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{|\ln d_i^{(s)}|^2 (r_i^{(s)})^2} < C \quad \text{при } n = 2.$$

Тогда последовательность решений $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ *задачи* (4.35), (4.36) (*продолженных на* $\bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ *равенством* $\mathbf{u}^{(s)}(x) = \mathbf{U}(x)$) *в метрике* $L_2(\Omega)$ *сходится к решению* $\mathbf{v}(x)$ *следующей краевой задачи:*

$$\left.\begin{aligned} \nu\Delta\mathbf{v}(x) - \nu c(x)\,\mathbf{v}(x) &= \operatorname{grad} p(x) - \nu c(x)\,\mathbf{U}(x), \\ \operatorname{div}\mathbf{v}(x) &= 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

$$\mathbf{v}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{4.40}$$

где матрица $c(x)$ *определена в условии* b.

Теорема 4.8. *Пусть при* $s \to \infty$ *множества* $F_i^{(s)}$ *попадают в слой толщины* $\rho^{(s)} \sim \max_i r_i^{(s)}$ *со срединной поверхностью* (*кривой в* R_2) Γ *и выполняются такие условия:*

a) $\lim_{s\to\infty} \max_i d_i^{(s)} = \lim_{s\to\infty} \max_i r_i^{(s)} = 0$;

b) для любого куска $\gamma \subset \Gamma$ *существует предел*

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{(\gamma)} C^{kl}(x) = \int_\gamma c_\Gamma^{kl}(x)\,d\Gamma,$$

где $\| c_\Gamma^{kl}(x) \| = c_\Gamma(x)$ *— непрерывная неотрицательная матрица на* Γ;

c) $\overline{\lim_{s\to\infty}} \rho^{(s)} \sum_{i=1}^{s} \frac{(d_i^{(s)})^2}{(r_i^{(s)})^3} < C$ при $n = 3$,

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \rho^{(s)} \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{|\ln d_i^{(s)}|^2 (r_i^{(s)})^2} < C \quad \text{при } n = 2.$$

Тогда последовательность $\{\mathbf{u}^{(s)}(x),\ p^{(s)}(x)\}$ *решений задачи* (4.35), (4.36) *сходится к решению* $\{\mathbf{v}(x),\ p(x)\}$ *следующей краевой задачи:*

$$\left.\begin{aligned} &\nu\Delta\mathbf{v}(x) = \operatorname{grad} p(x),\\ &\operatorname{div}\mathbf{v} = 0,\quad x\in\Omega\setminus\Gamma,\end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{v}^{+}(x) = \mathbf{v}^{-}(x),\\ &\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial n}\right)^{+} - \left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial n}\right)^{-} + \frac{1}{\nu}\left(p^{+}(x) - p^{-}(x)\right)\mathbf{n}(x) =\\ &= c_{\Gamma}(x)\left[\mathbf{v}(x) - \mathbf{U}(x)\right],\quad x\in\Gamma,\end{aligned}\right\} \tag{4.42}$$

$$\mathbf{v}(x) = 0,\quad x\in\partial\Omega, \tag{4.43}$$

где знаками «+» и «—», как обычно, отмечены предельные значения вектор-функций с разных сторон от Γ, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ — *нормаль к* Γ, *направленная в сторону, которой соответствует знак «+»; матрица* $c_{\Gamma}(x)$ *определена в условии* b. *При этом сходимость равномерна (вместе с производными) в любой подобласти, лежащей на положительном расстоянии от* Γ *и* $\partial\Omega$.

Замечание 1. Второе условие сопряжения в (4.42) можно записать также в виде

$$t^{+}(\mathbf{v}) - t^{-}(\mathbf{v}) = \nu c_{\Gamma}(x)\left[\mathbf{v}(x) - \mathbf{U}(x)\right],$$

где $t(\mathbf{v}) = p\mathbf{n}(x) - \nu\sum_{k,l}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right)\cos(\mathbf{n}, x_l)\,\mathbf{e}^{k}$ — вектор напряжений на Γ ($\mathbf{e}^{k}$ — орт оси x_k).

Замечание 2. Условия c в приведенных выше теоремах, очевидно, менее ограничительны, чем соответствующие условия в § 3 гл. II. Ими можно пользоваться, когда размерность пространства не больше трех.

Остановимся на основных моментах доказательства теорем 4.7 и 4.8. Как и в § 3 гл. II, используем общую теорему 2.5 (гл. II). Для этого необходимо ввести соответствующее гильбертово пространство $H(\Omega)$, систему подпространств $H(\Omega, F_i^{(s)})$ в нем и представить решение задачи (4.35), (4.36) как проекцию вектора $\mathbf{U}(x)$ на линейную оболочку подпространств $H(\Omega, F_i^{(s)})$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Рассмотрим в области Ω множество гладких, финитных и соленоидальных вектор-функций и введем в нем скалярное произведение

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = \int_{\Omega}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v})\,dx = \int_{\Omega}\sum_{k,l}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\,dx. \tag{4.44}$$

Пополняя это множество по норме, соответствующей скалярному произведению (4.44), получаем гильбертово пространство вектор-функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющих в Ω уравнению $\operatorname{div}\mathbf{u}(x) = 0$. Обозначим его через $H(\Omega)$. Рассмотрим в $H(\Omega)$ следующие подпространства: $\overset{\circ}{H}(\Omega, F_i^{(s)})$ — замыкание по норме $W_2^1(\Omega)$ множества гладких соленоидальных вектор-функций, равных нулю в окрестностях $\partial\Omega$ и $F_i^{(s)}$, $i = 1, 2, \ldots, s$; $H_{\Delta}(\Omega, F_i^{(s)})$ — ортогональное дополнение $\overset{\circ}{H}(\Omega,\ F_i^{(s)})$ в $H(\Omega)$; $\overset{\circ}{H}(\Omega,\ F^{(s)})$ — замыкание по норме $W_2^1(\Omega)$ множества гладких соленоидальных вектор-функций, равных нулю в окрестностях $\partial\Omega$ и $F^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$; $H_\Delta(\Omega,\ F^{(s)})$ — ортогональное дополнение $\overset{\circ}{H}(\Omega,\ F^{(s)})$. Таким образом, справедливо разложение

$$H(\Omega) = H_\Delta(\Omega,\ F^{(s)}) \oplus \overset{\circ}{H}(\Omega,\ F_i^{(s)}) = H_\Delta(\Omega,\ F_i^{(s)}) \oplus \overset{\circ}{H}(\Omega,\ F_i^{(s)}). \quad (4.45)$$

Согласно определению подпространств $\overset{\circ}{H}(\Omega,\ F_i^{(s)})$ и $\overset{\circ}{H}(\Omega,\ F^{(s)})$ $\overset{\circ}{H}(\Omega,\ F^{(s)}) = \bigcap\limits_{i=1}^{s} H(\Omega,\ F_i^{(s)})$, и, следовательно, в силу (4.45) $H_\Delta(\Omega,\ F^{(s)})$ является линейной оболочкой подпространств $H_\Delta(\Omega,\ F_i^{(s)})$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$, т. е. $H_\Delta(\Omega,\ F^{(s)}) = [H_\Delta(\Omega,\ F_i^{(s)})]_1^s$.

Из результатов работы [16] следует, что подпространство $H_\Delta(\Omega,\ F^{(s)})$ $(H_\Delta(\Omega,\ F_i^{(s)}))$ совпадает с множеством вектор-функций из $H(\Omega)$, удовлетворяющих в области $\Omega^{(s)} = \Omega \diagdown \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ (соответственно в $\Omega \diagdown F_i^{(s)}$) уравнению $\nu\Delta\mathbf{u} = \operatorname{grad} p$, где $p = p(x)$ — однозначная гладкая функция в $\Omega^{(s)}$ $(\Omega \diagdown F_i^{(s)})$. Действительно, пусть $\mathbf{u}$ принадлежит $H(\Omega)$ и удовлетворяет этому уравнению в $\Omega^{(s)}$, а $\mathbf{w}$ — произвольная соленоидальная гладкая и финитная в $\Omega^{(s)}$ вектор-функция, т. е. $\mathbf{w}$ принадлежит плотному множеству в $\overset{\circ}{H}(\Omega,\ F^{(s)})$. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$(\mathbf{u},\ \mathbf{w})_H = -\int\limits_{\Omega^{(s)}} (\Delta\mathbf{u},\ \mathbf{w})\,dx = -\frac{1}{\nu}\int\limits_{\Omega^{(s)}} (\operatorname{grad} p \cdot \mathbf{w})\,dx =$$
$$= \frac{1}{\nu}\int\limits_{\Omega^{(s)}} p \operatorname{div} \mathbf{w}\,dx = 0.$$

Таким образом, $\mathbf{u} \perp \overset{\circ}{H}(\Omega,\ F^{(s)})$ и согласно (4.15) $\mathbf{u} \in H_\Delta(\Omega,\ F^{(s)})$.

Обратно: если $\mathbf{u} \in H_\Delta(\Omega,\ F^{(s)})$, то $\mathbf{u} \perp \overset{\circ}{H}(\Omega,\ F^{(s)})$, т. е. для любой вектор-функции $\mathbf{w}$ из $\overset{\circ}{H}(\Omega,\ F^{(s)})$

$$\nu(\mathbf{u},\ \mathbf{w})_H = \nu\int\limits_{\Omega^{(s)}} \sum_{k,l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial w_k}{\partial x_l}\,dx = 0.$$

Но это означает, что $\mathbf{u}$ является обобщенным решением уравнения $\nu\Delta\mathbf{u} = \operatorname{grad} p$ в области $\Omega^{(s)}$ [16]. Отсюда следует [16], что $\mathbf{u}(x)$ и $p(x)$ бесконечно дифференцируемы в $\Omega^{(s)}$ и удовлетворяют этому уравнению в $\Omega^{(s)}$ в обычном смысле.

Из приведенных рассуждений вытекает, что решение $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ задачи (4.35), (4.36) (продолженное на множество $F^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$

равенством $\mathbf{u}^{(s)}(x) = \mathbf{U}(x)$) является ортогональной проекцией (в $H(\Omega)$) элемента $\mathbf{U}(x) \in H(\Omega)$ на подпространство $H_\Delta(\Omega, F^{(s)})$, т. е.

$$\mathbf{u}^{(s)} = P^{(s)}\mathbf{U}.$$

Напомним, что $P^{(s)}$ и $P_i^{(s)}$ ($i = 1, 2, \ldots, s$) — операторы ортогонального проектирования на подпространства $H_\Delta(\Omega, F^{(s)})$ и $H_\Delta(\Omega, F_i^{(s)})$. Таким образом, если операторы $P_i^{(s)}$ удовлетворяют условиям 1—3 теоремы 2.5, то можно воспользоваться ею для изучения асимптотического поведения $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ при $s \to \infty$. Ниже показано, что если выполняются условия теоремы 4.7 или 4.8, то выполняются и условия теоремы 2.5, причем билинейный функционал $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ из условия 3 определяется при объемном и поверхностном распределении соответственно равенствами

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega (c\mathbf{u}, \mathbf{v})\, dx, \quad \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Gamma (c_\Gamma \mathbf{u}, \mathbf{v})\, d\Gamma.$$

Поэтому, согласно теореме 2.5 последовательность $\{\mathbf{u}^{(s)}(x)\}$ в $H(\Omega)$ слабо сходится к вектор-функции $\mathbf{v}(x) \in H(\Omega)$, которая при объемном распределении минимизирует функционал

$$\Psi(\mathbf{v}) = \int_\Omega \{|\nabla \mathbf{v}|^2 + (c[\mathbf{U} - \mathbf{v}], \mathbf{U} - \mathbf{v})\}\, dx.$$

Отсюда, учитывая симметричность матрицы $c = c(x)$, заключаем, что для любой вектор-функции $\zeta \in H(\Omega)$ выполняется равенство

$$\int_\Omega \{(\nabla \mathbf{v}, \nabla \zeta) + (c\mathbf{v}, \zeta) - (c\mathbf{U}, \zeta)\}\, dx = 0\cdot \tag{4.46}$$

Пусть $\mathbf{v} \in W_2^2(\Omega)$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_\Omega (-\Delta \mathbf{v} + c\mathbf{v} - c\mathbf{U}, \zeta)\, dx = 0.$$

Теперь воспользуемся известным ортогональным разложением пространства $L_2(\Omega)$ (см., например, [16]):

$$L_2(\Omega) = \overset{\circ}{J}(\Omega) \oplus G(\Omega), \tag{4.47}$$

где $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ — замыкание в $L_2(\Omega)$ множества финитных в Ω и соленоидальных вектор-функций, а $G(\Omega)$ состоит из градиентов однозначных функций из $W_2^1(\Omega)$. Очевидно, $H(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap$ $\cap \{\mathbf{u} : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$ плотно в $\overset{\circ}{J}(\Omega)$. Поскольку $\zeta = \zeta(x)$ — произвольная вектор-функция из $H(\Omega)$, отсюда вытекает, что $\mathbf{v}$ удовлетворяет в Ω уравнениям (4.39). Поэтому, следуя работе [16], равенство (4.46) вместе с условием $\mathbf{v}(x) \in H(\Omega)$ можно принять в качестве определения обобщенного решения краевой задачи (4.39), (4.40). При этом, если вектор-функция $\mathbf{U}(x)$ и элементы матрицы $c(x)$

достаточно гладкие, то, пользуясь методами, применяемыми в работе [16], нетрудно показать, что обобщенное решение этой задачи является классическим. Наконец, заметим, что в силу теоремы вложения из слабой сходимости в пространстве $H(\Omega)$ вытекает сильная сходимость в $L_2(\Omega)$.

При поверхностном распределении предельная вектор-функция $\mathbf{v}(x)$ согласно теореме 2.5 должна минимизировать функционал

$$\Psi(\mathbf{v}) = \int_\Omega |\nabla \mathbf{v}|^2 dx + \int_\Gamma (c_\Gamma [\mathbf{U}-\mathbf{v}],\ \mathbf{U}-\mathbf{v})\, d\Gamma.$$

Из условия минимума и симметричности матрицы c_Γ следует, что $\mathbf{v}(x)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_\Omega (\nabla \mathbf{v},\ \nabla \zeta)\, dx - \int_\Gamma (c_\Gamma [\mathbf{U}-\mathbf{v}],\ \zeta)\, d\Gamma = 0 \tag{4.48}$$

для любой вектор-функции $\zeta \in H(\Omega)$. Это равенство вместе с условием $\mathbf{v} \in H(\Omega)$ можно принять в качестве определения обобщенного решения задачи (4.41) — (4.43). Действительно, если вектор-функция $\mathbf{v}(x)$ достаточно гладкая, например $\mathbf{v}(x) \in W_2^2(\Omega \setminus \Gamma)$, то, интегрируя по частям, получаем

$$-\int_{\Omega\setminus\Gamma} (\Delta \mathbf{v},\ \zeta)\, dx - \int_\Gamma \left(\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n}\right]^+ - \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n}\right]^- - c_\Gamma [\mathbf{v}-\mathbf{U}],\ \zeta\right) d\Gamma = 0.$$

Отсюда, выбирая $\zeta \in H(\Omega)$ равной нулю в окрестности Γ, заключаем, что $\mathbf{v}$ удовлетворяет в $\Omega \setminus \Gamma$ уравнениям (4.41), где $p(x)$ определено в каждой связной компоненте $\Omega \setminus \Gamma$ с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому для произвольной $\zeta \in H(\Omega)$ можно записать

$$-\frac{1}{\nu}\int_{\Omega\setminus\Gamma} (\operatorname{grad} p,\ \zeta)\, dx - \int_\Gamma \left(\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}\right]^+ - \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}\right]^- - c_\Gamma [\mathbf{v}-\mathbf{U}],\ \zeta\right) d\Gamma = 0,$$

откуда, учитывая, что $\operatorname{div} \zeta = 0$, с помощью интегрирования по частям получаем

$$\int_\Gamma \left(\frac{1}{\nu}[p^+ - p^-]\,\mathbf{n} + \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}\right]^+ - \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}\right]^- - c_\Gamma [\mathbf{v}-\mathbf{U}],\ \zeta\right) d\Gamma = 0. \tag{4.49}$$

Если поверхность Γ не замкнута, то вектор-функция $\zeta = \zeta(x)$ на Γ может быть произвольной и, следовательно, из (4.49) вытекает второе равенство в (4.42). Если же Γ — замкнутая поверхность, то в силу условия $\operatorname{div} \zeta = 0$ интеграл от нормальной составляющей ζ по Γ равен нулю. Поэтому из (4.49) следует, что второе равенство в (4.42) выполняется с точностью до слагаемого $\mathrm{const} \cdot n$. Но так как в каждой связной компоненте $\Omega \setminus \Gamma$ давление $p(x)$ определено лишь с точностью до постоянного слагаемого, то $\mathrm{const} \cdot n$ можно включить, например, в $\frac{1}{\nu} p^+ \cdot n$. Таким образом, равенства (4.42) выполняются во всех случаях и, значит, при поверхностном распределении предельная функция является обобщенным решением задачи (4.41) — (4.42).

Пусть Ω' — произвольная подобласть в $\Omega \setminus \Gamma$, находящаяся на положительном расстоянии от Γ и $\partial\Omega$. Погрузим ее в более широкую область Ω'' ($\Omega' \subset \Omega''$) такую, чтобы граница $\partial\Omega''$ находилась на положительном расстоянии от Γ, $\partial\Omega$ и Ω'. Тогда в любой точке $x \in \Omega'$ при достаточно больших s для разности решений задач (4.35), (4.36) и (4.41) — (4.43) можно получить представление (см. [16])

$$\mathbf{u}^{(s)}(x) - \mathbf{v}(x) = \int\limits_{\Omega'' \setminus \Omega'} L(x, y)\,[\mathbf{u}^{(s)}(y) - \mathbf{v}(y)]\,dy,$$

где $L(x, y)$ — матрица, элементы которой — бесконечно дифференцируемые функции по x при $x \in \Omega'$, а $y \in \Omega'' \setminus \overline{\Omega}'$. Отсюда, учитывая, что $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ сходится к $\mathbf{v}(x)$ слабо в $H(\Omega)$ и, значит, сильно в $L_2(\Omega)$, заключаем, что сходимость равномерна (вместе с любыми производными) в любой подобласти, лежащей на положительном расстоянии от Γ и $\partial\Omega$.

Таким образом, теоремы 4.7 и 4.8 будут доказаны, если мы установим справедливость условий 1—3 теоремы 2.5. Для этого нам понадобится теорема о представлении векторов из пространства $L_2(\Omega)$ в виде роторов [5].

Теорема 4.9. *Пусть G — некоторая область в R_3, являющаяся диффеоморфным образом шара, а $J(G)$ — подпространство в $L_2(\Omega)$, образованное замыканием линеала гладких соленоидальных вектор-функций. Тогда для любой $\mathbf{u}(x) \in J(G)$ справедливо представление*

$$\mathbf{u}(x) = \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{u}}(x),$$

где $\tilde{\mathbf{u}}(x) \in W_2^1(G)$, $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}(x) = 0$, $\tilde{u}_n|_{\partial G} = 0$, причем

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{W_2^1(G)} \leqslant C \|\mathbf{u}\|_{L_2(G)}$$

(постоянная C зависит только от области G). Вектор-функция $\tilde{\mathbf{u}}(x)$ этими условиями определяется однозначно.

Пусть $G = T_a$ — шар радиуса a. Тогда, исходя из теоремы 4.9 и соображений подобия, легко получаем оценки

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L_2(T_a)} \leqslant Ca \|\mathbf{u}\|_{L_2(T_a)}, \tag{4.50}$$

$$\|D\tilde{\mathbf{u}}\|_{L_2(T_a)} \leqslant C \|\mathbf{u}\|_{L_2(T_a)}, \tag{4.51}$$

где постоянная C не зависит от a и $\mathbf{u} \in J(T_a)$.

Замечание. Нетрудно убедиться, что в двумерном случае справедливо аналогичное представление

$$u_1(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \quad u_2(x) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \qquad (\mathbf{u} = \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{u}}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \{0, 0, \varphi\})$$

и для функции φ верны оценки (4.50), (4.51).

Перейдем к проверке условий теоремы 2.5. В качестве плотного множества $\mathfrak{M}$ в $H(\Omega)$ выберем множество дважды непрерывно дифференцируемых соленоидальных и финитных в Ω вектор-функций. Пусть $\mathbf{u}(x) \in \mathfrak{M}$. Определим операторы $B_i^{(s)}$:

$$B_i^{(s)}\mathbf{u} = \operatorname{rot}\left\{\sum_{k=1}^{3\,(2)} \tilde{\mathbf{v}}^{k\,(i)}(x)\, u_k(x^{(i)})\, \varphi_i^{(s)}(x)\right\} + \operatorname{rot}\{\tilde{\mathbf{u}}^{(i)}(x)\, \hat{\varphi}_i^{(s)}(x)\}, \quad (4.52)$$

где $\varphi_i^{(s)}(x) = \varphi\left(\dfrac{r - a_i^{(s)}}{r_i^{(s)}}\right)$, $\hat{\varphi}_i^{(s)}(x) = \varphi\left(\dfrac{r - a_i^{(s)}}{\hat{r}_i^{(s)}}\right)$, r — расстояние от x до центра $x^{(i)}$ минимального шара $T(F_i^{(s)})$ радиуса $a_i^{(s)}$, $\hat{r}^{(s)} = \min\{r_i^{(s)}, (d_i^{(s)})^{\frac{2}{3}}\}$, $\varphi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $t \leqslant \frac{1}{4}$ и нулю при $t \geqslant \frac{1}{2}$; вектор-функции $\tilde{\mathbf{v}}^{k\,(i)}(x)$ и $\tilde{\mathbf{u}}^{(i)}(x)$ определены в теореме 4.9 соответственно для $\mathbf{v}^{k\,(i)}(x)$ и $\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(x^{(i)})$ в шарах $T_{r_i^{(s)}}$ и $T_{\hat{r}_i^{(s)}}$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}^{k\,(i)}(x) &= \operatorname{rot}\tilde{\mathbf{v}}^{k\,(i)}(x), \quad x \in T_{r_i^{(s)}}, \\ \mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(x^{(i)}) &= \operatorname{rot}\tilde{\mathbf{u}}^{(i)}(x), \quad x \in T_{\hat{r}_i^{(s)}}; \end{aligned}\right\} \quad (4.53)$$

$\mathbf{v}^{k\,(i)}(x)$ — решение задачи (4.38). Очевидно, $B_i^{(s)}\mathbf{u} \in H(\Omega)$. Так как носители функций $\varphi_i^{(s)}$, $\varphi_j^{(s)}$ и $\hat{\varphi}_i^{(s)}$, $\hat{\varphi}_j^{(s)}$ $(i \neq j)$ не пересекаются и в некоторой окрестности $F_i^{(s)}$ $\varphi_i^{(s)} \equiv \hat{\varphi}_i^{(s)} \equiv 1$, то в силу свойств $\mathbf{v}^{k\,(i)}(x)$

$$B_i^{(s)}\mathbf{u}\big|_{x \in F_j^{(s)}} = \delta_{ij}\left\{\sum_{k=1}^{3\,(2)} \mathbf{v}^{k\,(i)}(x)\, u_k(x^{(i)}) + \mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(x^{(i)})\right\} = \delta_{ij}\mathbf{u}(x).$$

Отсюда следует, что условия 1*a* и 1*c* выполняются.

Для проверки других условий нам понадобятся оценки производных вектор-функций $\mathbf{v}^{k\,(i)}(x)$, аналогичные установленным в леммах 2.2, 2.3 (гл. II). В данном случае эти оценки выводятся аналогично, при помощи известных формул Грина для линейной системы уравнений Навье — Стокса.

Остановимся подробно на проверке условия 1*d'*. Для определенности рассмотрим случай объемного распределения $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ в $\Omega \subset R_3$. Учитывая (4.52) и (4.53), запишем

$$\sum_{i=1} (B_i^{(s)}\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})_H = I_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)}) + I_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)}) + I_3(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)}) + I_4(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)}), \quad (4.54)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
I_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)}) &= \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega}(\nabla\{\mathbf{v}^{k(i)}\varphi_i^{(s)}\},\ \nabla\mathbf{v}^{(s)})\,u_k(x^{(i)})\,dx,\\
I_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)}) &= \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega}(\nabla[\operatorname{grad}\varphi_i^{(s)}\times\tilde{\mathbf{v}}^{k(i)}],\ \nabla\mathbf{v}^{(s)})\,u_k(x^{(i)})\,dx,\\
I_3(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)}) &= \sum_{i=1}^{s}\int_{\Omega}(\nabla\{(\mathbf{u}-\mathbf{u}(x^{(i)}))\hat{\varphi}_i^{(s)}\},\ \nabla\mathbf{v}^{(s)})\,dx,\\
I_4(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)}) &= \sum_{i=1}^{s}\int_{\Omega}(\nabla[\operatorname{grad}\hat{\varphi}_i^{(s)}\times\tilde{\mathbf{u}}^{(i)}],\ \nabla\mathbf{v}^{(s)})\,dx.
\end{aligned}\right\}\quad(4.54')$$

Оценим каждое слагаемое $I_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})$. Вспоминая, что $\mathbf{v}^{(s)}\in\in\bigcap_{i=1}^{s}\overset{\circ}{H}(\Omega, F_i^{(s)})$, с помощью интегрирования по частям получаем

$$I_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)}) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega^{(i)}}\varphi_i^{(s)}(\Delta\mathbf{v}^{k(i)},\ \mathbf{v}^{(s)})\,u_k(x^{(i)})\,dx +$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega_2^{(i)}}\Delta\varphi_i^{(s)}(\mathbf{v}^{k(i)}, \mathbf{v}^{(s)})\,u_k(x^{(i)})dx + 2\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{3}\int_{\Omega_2^{(i)}}((\nabla\mathbf{v}^{k(i)}, \nabla\varphi_i^{(s)}), \mathbf{v}^{(s)})\times$$

$$\times u_k(x^{(i)})\,dx = I_{11}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)}) + I_{12}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)}) + I_{13}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)}),\qquad(4.55)$$

где $\Omega_1^{(i)} = \left\{x : |x - x^{(i)}| < a_i^{(s)} + \frac{r_i^{(s)}}{4}\right\}$, $\Omega_2^{(i)} = \left\{x : a_i^{(s)} + \frac{r_i^{(s)}}{4} < |x - x^{(i)}| < a_i^{(s)} + \frac{r_i^{(s)}}{2}\right\}$, $\Omega^{(i)} = \Omega_2^{(i)} \cup \Omega_1^{(i)} \setminus F_i^{(s)}$. Поскольку $\mathbf{u}(x)\in\mathfrak{M}$, в силу неравенства Коши — Буняковского, леммы 2.2 и свойств функций $\varphi_i^{(s)}$

$$|I_{12}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})| + |I_{13}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})| \leqslant C\left\{\sum_{i=1}^{s}\frac{(d_i^{(s)})^2}{(r_i^{(s)})^3}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{i=1}^{s}\int_{\Omega^{(i)}}|\mathbf{u}|^4\,dx\right\}^{\frac{1}{4}}\times$$

$$\times\left\{\sum_{i=1}^{s}\int_{\Omega^{(i)}}|\mathbf{v}^{(s)}|^4\,dx\right\}^{\frac{1}{4}} \leqslant C\left\{\sum_{i=1}^{s}\frac{(d_i^{(s)})^2}{(r_i^{(s)})^3}\right\}^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}\|_{L_4(\Omega)}\|\mathbf{v}^{(s)}\|_{L_4(\Omega)}.$$

Отсюда, учитывая, что в R_3 оператор вложения $H(\Omega)$ в $L_4(\Omega)$ вполне непрерывен, и используя условие c теоремы 4.7, находим

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\,(|I_{12}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})| + |I_{13}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})|) \leqslant C\|\mathbf{u}\|_H\|\mathbf{v}\|_H,\qquad(4.56)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x)$ — слабый предел последовательности $\{\mathbf{v}^{(s)}(x)\}$ в $H(\Omega)$. Для того чтобы оценить $I_{11}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})$, вспомним, что вектор-функция $\mathbf{v}^{k(i)}$ вне $F_i^{(s)}$ удовлетворяет уравнению $\Delta\mathbf{v}^{k(i)}(x) =$

$= \operatorname{grad} p(x)$, причем функция $p(x)$ определена с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому $p(x)$ можно представить в виде

$$p(x) = \int_{\bar{x}^{(i)}}^{x} (\operatorname{grad} p, d\mathbf{l}) = \int_{\bar{x}^{(i)}}^{x} (\Delta \mathbf{v}^{k(i)}, d\mathbf{l}),$$

где $\bar{x}^{(i)}$ — произвольная точка в области $\Omega_2^{(i)}$, а интегрирование ведется по любому контуру, соединяющему точки x и $\bar{x}^{(i)}$. Если $x \in \Omega_2^{(i)}$, то контур можно выбрать так, чтобы он находился в $\Omega_2^{(i)}$ и длина его не превышала $cr_i^{(s)}$. Следовательно, применяя лемму 2.2, устанавливаем, что при $x \in \Omega_2^{(i)}$

$$|p(x)| \leqslant C \frac{d_i^{(s)}}{(r_i^{(s)})^2}. \tag{4.57}$$

Теперь, учитывая, что $\mathbf{v}^{(s)}(x) \in \bigcap_{i=1}^{s} \overset{\circ}{H}(\Omega, F_i^{(s)})$, с помощью интегрирования по частям преобразуем $I_{11}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})$ к виду

$$I_{11}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)}) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{3} \int_{\Omega_2^{(i)}} p (\operatorname{grad} \varphi_i^{(s)}, \mathbf{v}^{(s)}) u_k(x^{(i)})\, dx.$$

Отсюда, используя неравенства Коши — Буняковского и (4.57), получаем

$$|I_{11}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})| \leqslant C \left\{ \sum_{i=1}^{s} \frac{(d_i^{(s)})^2}{(r_i^{(s)})^3} \right\}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|_{L_4(\Omega)} \|\mathbf{v}^{(s)}\|_{L_4(\Omega)},$$

и, следовательно, повторяя замечания, сделанные при выводе (4.56), заключаем, что

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} |I_{11}(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})| \leqslant C \|\mathbf{u}\|_H \|\mathbf{v}\|_H. \tag{4.58}$$

Рассмотрим слагаемое $I_3(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})$. Так как $\mathbf{u}(x) \in \mathfrak{M}$, а, значит, $|\nabla u_k| < C$ и $|u_k(x) - u_k(x^{(i)})| < C\hat{r}_i^{(s)}$ при $|x - x^{(i)}| < \hat{r}_i^{(s)}$, то в силу неравенства Коши — Буняковского и свойств функций $\hat{\varphi}_i^{(s)}$

$$|I_3(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})| \leqslant C \left\{ \sum_{i=1}^{s} (\hat{r}_i^{(s)})^3 \right\}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}^{(s)}\|_H.$$

Отсюда, так как $\|\mathbf{v}^{(s)}\|_H < C$ и $\hat{r}_i^{(s)} \leqslant (d_i^{(s)})^{\frac{2}{3}}$, заключаем, что

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} |I_3(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})| = 0. \tag{4.59}$$

Перейдем к оценке $I_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})$ и $I_4(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})$. В силу неравенства Коши — Буняковского и свойств функций $\varphi_i^{(s)}(x)$

$$|I_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})| \leqslant C \sum_{k=1}^{3} \left\{ \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{(r_i^{(s)})^4} \int_{\Omega^{(i)}} |\tilde{\mathbf{v}}^{k\,(i)}|^2 dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{(r_i^{(s)})^2} \int_{\Omega^{(i)}} |\nabla \tilde{\mathbf{v}}^{k\,(i)}|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}^{(s)}\|_H.$$

Отсюда, используя неравенства (4.50), (4.51) и лемму **2.3**, находим

$$|I_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})| \leqslant C \left\{ \sum_{i=1}^{s} \frac{(d_i^{(s)})^2}{(r_i^{(s)})^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}^{(s)}\|_H,$$

и, следовательно, согласно условиям a и c теоремы 4.7

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} |I_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})| = 0. \tag{4.60}$$

Аналогично

$$|I_4(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})| \leqslant C \left\{ \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{(\hat{r}_i^{(s)})^4} \int_{\hat{\Omega}^{(i)}} |\tilde{\mathbf{u}}^{(i)}|^2 dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{(\hat{r}_i^{(s)})^2} \int_{\hat{\Omega}^{(i)}} |\nabla \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}^{(s)}\|_H \leqslant$$

$$\leqslant C \left\{ \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{(\hat{r}_i^{(s)})^2} \int_{\hat{\Omega}^{(i)}} |\mathbf{u} - \mathbf{u}(x^{(i)})|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}^{(s)}\|_H,$$

где

$$\hat{\Omega}^{(i)} = \operatorname{supp} \hat{\varphi}_i^{(s)} = \left\{ x : |x - x^{(i)}| \leqslant \frac{1}{2} \hat{r}_i^{(s)} \right\}.$$

Поскольку в $\hat{\Omega}^{(i)}$ $|u_k - u_k(x^{(i)})| \leqslant C\hat{r}_i^{(s)}$ и $\hat{r}_i^{(s)} < (d_i^{(s)})^{\frac{2}{3}}$, отсюда следует

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} |I_4(\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})| = 0. \tag{4.61}$$

Подставляя теперь (4.56), (4.58) в (4.55), а (4.55) и (4.59) — (4.61) в (4.54), получаем окончательную оценку

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \sum_{i=1}^{s} (B_i^{(s)}\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(s)})_H \leqslant C \|\mathbf{u}\|_H \|\mathbf{v}\|_H,$$

где $\mathbf{v}$ — слабый предел последовательности $\{\mathbf{v}^{(s)}, s = 1, 2, \ldots\}$ в $H(\Omega)$.

Таким образом, условие $1d'$ при объемном распределении выполняется. При поверхностном распределении в эти рассуждения необходимо внести изменения (см. гл. II, § 3). В частности, нужно использовать равенство (справедливое в R_2 и R_3)

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{\rho^{(s)}} \int_{T_\rho^{(s)}} |\mathbf{v}^{(s)}|^4 dx = \int_\Gamma |\mathbf{v}|^4 d\Gamma,$$

которое доказывается точно так же, как лемма 2.4.

Условия 1*b*, 2 и 3 проверяются аналогично. Основная схема рассуждений такая же, как в § 3 гл. II, но в данном случае необходимо учитывать специфику системы уравнений и в нужных местах использовать неравенства (4.50), (4.51) и (4.57).

В заключение приведем два простых примера.

1. Пусть $F_i^{(s)}$ — шары радиуса $a_i^{(s)} = \frac{d_i^{(s)}}{2}$ в R_3. Тогда можно найти решение $\mathbf{v}^{k(i)}(x)$ задачи (4.38) (в главной части по $a_i^{(s)}$, $a_i^{(s)} \to 0$) (см. [44]) и с помощью этого решения оценить тензор $C^{kl}(F_i^{(s)})$. В результате получаем

$$C^{kl}(F_i^{(s)}) = 6\pi a_i^{(s)} (1 + o(1))\, \delta_{kl}.$$

Таким образом, матрицы $c(x)$ и $c_\Gamma(x)$ в теоремах 4.7 и 4.8 имеют вид

$$c(x) = 6\pi a(x) I, \quad c_\Gamma(x) = 6\pi a_\Gamma(x) I,$$

где I — единичная матрица, а функции $a(x)$ и $a_\Gamma(x)$ — соответственно объемная и поверхностная плотности (предельные) суммы радиусов $a_i^{(s)}$.

2. Пусть теперь $F_i^{(s)}$ — круги диаметров $d_i^{(s)}$ в R_2. Как и в предыдущем случае, явно находится решение задачи (4.38) [44], а с помощью этого решения — тензор

$$C^{kl}(F_i^{(s)}) = \frac{4\pi}{|\ln d_i^{(s)}|} (1 + o(1))\, \delta_{kl}.$$

Матрицы $c(x)$ и $c_\Gamma(x)$ при этом имеют вид

$$c(x) = 4\pi a(x) I, \qquad c_\Gamma(x) = 4\pi a_\Gamma(x) I, \tag{4.62}$$

где функции $a(x)$ и $a_\Gamma(x)$ определяются из равенств

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{(G)} \frac{1}{|\ln d_i^{(s)}|} = \int_G a(x)\, dx, \quad \lim_{s\to\infty} \sum_{(\gamma)} \frac{1}{|\ln d_i^{(s)}|} = \int_\gamma a_\Gamma(x)\, d\Gamma. \tag{4.62'}$$

Заметим, что в двумерном случае предельные матрицы $c(x)$ и $c_\Gamma(x)$ определяются равенствами (4.62), (4.62′) при любом виде множеств $F_i^{(s)}$ (достаточно только, чтобы они удовлетворяли условию типа 1 § 5 гл. II). Это легко доказать, учитывая, что решения $\mathbf{v}^{k(i)}(x)$ задачи (4.38) минимизируют функционал (4.37) в соответствующем классе (см., например, [11]).

Поведение резольвент линейных задач

Рассмотрим в области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\nu\Delta \mathbf{v}^{(s)}(x) - \operatorname{grad} p^{(s)}(x) = f(x), \\ &\operatorname{div} \mathbf{v}^{(s)}(x) = 0, \quad x \in \Omega^{(s)}, \\ &\mathbf{v}^{(s)}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^{(s)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.63}$$

Как известно, для любой вектор-функции $\mathbf{f}(x) \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение $\{\mathbf{v}^{(s)}, p^{(s)}\}$ такой задачи, причем $\mathbf{v}^{(s)}(x) \in \in W_2^2(\Omega^{(s)}, \mathrm{loc}) \cap H(\Omega^{(s)})$. Введем линейный оператор $\tilde{\Delta}^{(s)}$, устанавливающий соответствие между решениями $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ задач (4.63) и свободными членами $\mathbf{f}(x)$, а именно $\tilde{\Delta}^{(s)}\mathbf{v}^{(s)} = \mathbf{f}$. В качестве основного пространства возьмем $\mathring{J}(\Omega^{(s)})$ — замыкание в $L_2(\Omega^{(s)})$ множества финитных в $\Omega^{(s)}$ соленоидальных векторов. Напомним, что справедливо ортогональное разложение (см. (4.47))

$$L_2(\Omega^{(s)}) = \mathring{J}(\Omega^{(s)}) \oplus G(\Omega^{(s)}), \tag{4.47'}$$

где подпространство $G(\Omega^{(s)})$ состоит из градиентов однозначных функций из $W_2^1(\Omega^{(s)})$. В качестве области определения $D(\tilde{\Delta}^{(s)})$ оператора $\tilde{\Delta}^{(s)}$ примем совокупность всех решений задачи (4.63), соответствующих всевозможным f из $\mathring{J}(\Omega^{(s)})$. Справедлива следующая теорема [16]: *оператор $\tilde{\Delta}^{(s)}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $D(\tilde{\Delta}^{(s)})$ и $\mathring{J}(\Omega^{(s)})$. Он самосопряжен и отрицательно определен на $D(\tilde{\Delta}^{(s)})$. Обратный ему оператор $(\tilde{\Delta}^{(s)})^{-1} = R^{(s)}$ вполне непрерывен.*

Таким образом, на $\mathring{J}(\Omega^{(s)})$ определен самосопряженный вполне непрерывный оператор $R^{(s)}$. Можно расширить его по линейности на все $L_2(\Omega^{(s)})$, положив $R^{(s)}g = 0$ при $g \in G(\Omega^{(s)})$.

Рассмотрим теперь в областях Ω и $\Omega \setminus \Gamma$ краевые задачи

$$\left.\begin{aligned} &\nu\Delta \mathbf{v} - \nu c\mathbf{v} - \operatorname{grad} p = \mathbf{f}, \\ &\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad x \in \Omega, \\ &\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.64}$$

$$\left.\begin{aligned} &\nu\Delta \mathbf{v} - \operatorname{grad} p = \mathbf{f}, \\ &\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ &\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^-, \\ &\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^+ - \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^- + \frac{1}{\nu}(p^+ - p^-)\,\mathbf{n} = c_\Gamma \mathbf{v}, \quad x \in \Gamma, \\ &\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.65}$$

где матрицы $c = c(x)$ и $c_\Gamma = c_\Gamma(x)$ положительно определены, $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к Γ, направленной в сторону, которой соответствует знак «+». Так же как в § 1, можно определить обобщенное решение этих задач с помощью равенств, аналогичных (4.46) и (4.48) ($\mathbf{U}|= 0$). Исходя из этих равенств и используя методы, применяемые в работе [16], нетрудно доказать, что для любой $f(x) \in L_2(\Omega)$ существуют единственные решения $\{\mathbf{v}(x), p(x)\}$ и $\{\mathbf{v}^\Gamma(x), p^\Gamma(x)\}$ задач (4.64) и (4.65), причем если элементы матриц $c(x)$ и $c_\Gamma(x)$ достаточно гладкие, то $\mathbf{v}(x) \in W_2^2(\Omega, \text{loc}) \cap H(\Omega)$, а $\mathbf{v}^\Gamma(x) \in W_2^2(\Omega \setminus \Gamma, \text{loc}) \cap H(\Omega)$.

Аналогично предыдущему введем операторы $\tilde{\Delta}^c$ и $\tilde{\Delta}^\Gamma$, устанавливающие соответствие между решениями $\mathbf{v}(x)$ и $\mathbf{v}^\Gamma(x)$ задач (4.64) и (4.65) и правыми частями $\mathbf{f} \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$. Поступая так же, как в работе [16], нетрудно показать, что операторы $\tilde{\Delta}^c$ и $\tilde{\Delta}^\Gamma$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между областями их определения и $\overset{\circ}{J}(\Omega)$; они самосопряжены и отрицательно определены, а обратные им операторы $R^c = (\tilde{\Delta}^c)^{-1}$ и $R^\Gamma = (\tilde{\Delta}^\Gamma)^{-1}$ вполне непрерывны. Операторы R^c и R^Γ также распространим на все $L_2(\Omega)$ по линейности, полагая $R^c\mathbf{g} = 0$ и $R^\Gamma\mathbf{g} = 0$ при $\mathbf{g} \in G(\Omega)$ (см. разложение $L_2(\Omega)$ (4.47)).

Рассмотрим в $L_2(\Omega)$ самосопряженный вполне непрерывный оператор $\hat{R}^{(s)} = \hat{Q}^{(s)}R^{(s)}\hat{P}^{(s)}$, где $\hat{P}^{(s)}$ — оператор сужения $L_2(\Omega)$ на $L_2(\Omega^{(s)})$, а $\hat{Q}^{(s)}$ — оператор вложения $L_2(\Omega^{(s)})$ в $L_2(\Omega)$ (см. стр. 215). Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.10. *Если выполняются условия теоремы* 4.7, *то при любом* $\mathbf{f} \in L_2(\Omega)$ *последовательность* $\{\hat{R}^{(s)}\mathbf{f},\ s = 1, 2, \ldots\}$ *по норме* $L_p(\Omega)$ ($p < 6$ *в* R_3 *и* p — *любое в* R_2) *сходится к элементу* $R^c\mathbf{f}$: $\|\hat{R}^{(s)}\mathbf{f} - R^c\mathbf{f}\|_{L_p(\Omega)} \to 0$ *при* $s \to \infty$.

Аналогично, если выполняются условия теоремы 4.8,

$$\|\hat{R}^{(s)}\mathbf{f} - R^\Gamma\mathbf{f}\|_{L_p(\Omega)} \to 0 \quad \text{при } s \to \infty.$$

Доказательство. Учитывая, что элемент $\hat{R}^{(s)}\mathbf{f}$ является решением задачи (4.61) в области $\Omega^{(s)}$, представим его в виде

$$[\hat{R}^{(s)}\mathbf{f}](x) = \mathbf{U}^\mathbf{f}(x) - \mathbf{u}^{(s)}(x),$$

где $\mathbf{U}^\mathbf{f}(x)$ — решение этой же задачи в области Ω, а $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ — решение задачи (4.35), (4.36) с граничной вектор-функцией $\mathbf{U}(x) = \mathbf{U}^\mathbf{f}(x)$. Поскольку $\mathbf{U}^\mathbf{f}(x) \in H(\Omega)$ и согласно § 1 $\mathbf{u}^{(s)}(x)$ — проекция $\mathbf{U}^\mathbf{f}(x)$ в $H(\Omega)$ на подпространство $H(\Omega, F^{(s)})$, нормы элементов $\hat{R}^{(s)}\mathbf{f}$ ограничены в $H(\Omega)$ равномерно по s: $\|\hat{R}^{(s)}\mathbf{f}\|_H \leqslant \|\mathbf{U}^\mathbf{f}\|_H$.

Отсюда в силу полной непрерывности оператора вложения $H(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ ($p < 6$ в R_3) вытекает, что множество $\{\hat{R}^{(s)}\mathbf{f}\}$ компактно в $L_p(\Omega)$. Согласно теореме 4.7 $\hat{R}^{(s)}\mathbf{f}$ в $L_2(\Omega)$ сходится к решению $\mathbf{u}(x)$ задачи (4.39), (4.40). Следовательно, $\hat{R}^{(s)}\mathbf{f}$ сходится в $L_2(\Omega)$ к функции $\mathbf{v}(x) = \mathbf{U}^{\mathbf{f}}(x) - \mathbf{u}(x)$, которая, как легко проверить, является решением задачи (4.64), т. е. $\mathbf{v}(x) = R^c\mathbf{f}$. Отсюда, учитывая компактность множества $\{\hat{R}^{(s)}\mathbf{f}\}$ в $L_p(\Omega)$, заключаем, что $\|\hat{R}^{(s)}\mathbf{f} - R^c\mathbf{f}\|_{L_p(\Omega)} \to 0$ при $s \to \infty$. В случае поверхностного распределения $F^{(s)} = \overset{s}{\bigcup} F_i^{(s)}$ рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

Замечание. Краевые задачи (4.63) — (4.65) имеют решения и для правых частей $\mathbf{f}$ из более широкого класса, чем $L_2(\Omega)$, например для $\mathbf{f}(x) \in L_{6/5}(\Omega)$ (см. [16]). Учитывая это, легко показать, что операторы $\hat{R}^{(s)}$, R^c и R^Γ могут быть расширены до вполне непрерывных операторов, действующих из $L_{6/5}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ ($p < 6$). Эти операторы сопоставляют функции $f \in L_p(\Omega)$ решения $\mathbf{v}(x)$ задач (4.63) — (4.65).

В заключение отметим, что согласно § 1 гл. IV из теоремы 4.10 вытекает сильная сходимость разложений единицы операторов $\tilde{\Delta}^{(s)}$ к разложениям единицы операторов $\tilde{\Delta}^c$ и $\tilde{\Delta}^\Gamma$. Исходя из этого, так же как в § 2 гл. IV, нетрудно доказать сходимость решений соответствующих нестационарных линейных задач.

Нелинейная стационарная задача

Рассмотрим в области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ первую краевую задачу для нелинейной системы уравнений Навье — Стокса

$$\left.\begin{aligned} &\nu\Delta\mathbf{v}^{(s)} = \sum_k v_k^{(s)}\mathbf{v}_{x_k}^{(s)} - \operatorname{grad} p^{(s)} = \mathbf{f}, \\ &\operatorname{div}\mathbf{v}^{(s)} = 0, \\ &\mathbf{v}^{(s)}\big|_{\partial\Omega^{(s)}} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.66}$$

где $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x) \in L_2(\Omega)$. Этой краевой задачей описывается стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости в сосуде Ω с распределенными в нем неподвижными включениями $F_i^{(s)}$ под действием сил $\mathbf{f}(x)$. Разрешимость задачи детально исследована [16]. Приведем лишь некоторые необходимые для дальнейшего сведения. Прежде всего для любой вектор-функции $\mathbf{f}(x) \in L_2(\Omega)$ решение задачи (4.66) существует, причем справедлива оценка

$$\|\mathbf{v}^{(s)}\|_{H(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\nu\sqrt{\mu_1}}\|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)}, \tag{4.67}$$

где μ_1 — наименьшее собственное значение оператора Лапласа в области Ω при нулевом граничном условии на $\partial\Omega$. Таким образом, норма решений $\mathbf{v}^{(s)}(x)$ (продолженных нулем на $\bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$) в пространстве $H(\Omega)$ ограничена равномерно по s. Если в R_3 выполняется неравенство

$$\|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} < \left(\frac{4}{3}\right)^{-3/4} \nu^2 \mu^{3/4}, \tag{4.68}$$

то решение задачи (4.66) единственно.

Рассмотрим последовательность решений $\mathbf{v}^{(s)}(x)$ при $s \to \infty$.

Из (4.67) вытекает, что множество вектор-функций $\{\mathbf{v}^{(s)}(x), s = 1, 2, \ldots\}$ слабо компактно в $H(\Omega)$ и, следовательно, компактно в $L_p(\Omega)$ $(p < 6)$. Выделим подпоследовательность $\{\mathbf{v}^{(s)}(x), s = s_i \to \to \infty\}$, сходящуюся к некоторой вектор-функции $\mathbf{v}(x) \in H(\Omega) \subset \subset L_p(\Omega)$. Тогда для любой вектор-функции $\psi(x) \in L_r(\Omega)$ $(r > 3)$ выполняется равенство

$$\lim_{s=s_i\to\infty} \int_\Omega (v_k^{(s)} \mathbf{v}_{x_k}^{(s)}, \psi)\, dx = \int_\Omega (v_k \mathbf{v}_{x_k}, \psi)\, dx. \tag{4.69}$$

Действительно, справедливость этого равенства для ограниченных вектор-функций $\psi(x)$ вытекает, очевидно, из слабой сходимости $\mathbf{v}_{x_k}^{(s_i)}$ к $\mathbf{v}_{x_k}$ в $L_2(\Omega)$ и сильной сходимости $\mathbf{v}^{(s_i)}$ к $\mathbf{v}$ в $L_2(\Omega)$. Поэтому равенство (4.69) будет установлено для всех $\psi(x) \in L_r(\Omega)$ $(r > 3)$, если доказать ограниченность множества вектор-функций $\{v_k^{(s)} \mathbf{v}_{x_k}^{(s)}, s = 1, 2, \ldots\}$ в сопряженном пространстве $L_{r'}(\Omega)$ $\left(r' = \frac{r}{r-1} < \frac{3}{2}\right)$.

Но это вытекает из неравенств Гельдера, (4.67) и равномерной ограниченности $\mathbf{v}^{(s)}$ в $L_p(\Omega)$ $(p < 6)$:

$$\| v_k^{(s)} \mathbf{v}_{x_k}^{(s)} \|_{L_{r'}(\Omega)} \leqslant \| \mathbf{v}_{x_k}^{(s)} \|_{L_2(\Omega)} \| v_k^{(s)} \|_{L_p(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \| \mathbf{v}^{(s)} \|_{H(\Omega)} \| \mathbf{v}^{(s)} \|_{L_p(\Omega)} < C \qquad \left(p = \frac{2r'}{2-r'}\right). \tag{4.70}$$

Исследуем теперь поведение решения $\mathbf{v}^{(s)}(x)$ задачи (4.66) при $s \to \infty$, когда выполняются условия теоремы 4.7 или 4.8. При этом, как обычно, $\mathbf{v}^{(s)}$ продолжаем нулем на $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$. Перенося нелинейную часть[2] $\sum_k v_k^{(s)} \mathbf{v}_{x_k}^{(s)}$ вправо и пользуясь введенным в § 2 оператором $\hat{R}^{(s)}$, запишем

$$\mathbf{v}^{(s)} = \hat{R}^{(s)} \mathbf{f} + \hat{R}^{(s)} \left\{ \sum_k v_k^{(s)} \mathbf{v}_{x_k}^{(s)} \right\}.$$

[2] В силу предполагаемой гладкости границы эта часть при каждом фиксированном s принадлежит $L_2(\Omega)$.

Умножая это равенство скалярно в $L_2(\Omega)$ на произвольную вектор-функцию $\varphi \in L_2(\Omega)$ и учитывая самосопряженность оператора $\hat{R}^{(s)}$, получаем

$$(\mathbf{v}^{(s)}, \varphi)_{L_2(\Omega)} = (\hat{R}^{(s)}\mathbf{f}, \varphi)_{L_2(\Omega)} + \left(\hat{R}^{(s)}\left\{\sum_k v_k^{(s)}\mathbf{v}_{x_k}^{(s)}\right\}, \varphi\right)_{L_2(\Omega)} =$$
$$= (\hat{R}^{(s)}\mathbf{f}, \varphi)_{L_2(\Omega)} + \left(\sum_k v_k^{(s)}\mathbf{v}_{x_k}^{(s)}, \hat{R}^{(s)}\varphi\right)_{L_2(\Omega)}. \tag{4.71}$$

В силу теоремы 4.10

$$\lim_{s\to\infty} \|\hat{R}^{(s)}\varphi - R\varphi\|_{L_p(\Omega)} = 0 \quad (p<6), \tag{4.72}$$

$$\lim_{s\to\infty} (\hat{R}^{(s)}\mathbf{f}, \varphi)_{L_2(\Omega)} = (R\mathbf{f}, \varphi)_{L_2(\Omega)}, \tag{4.73}$$

где $R = R^c$ или R^Γ. Так как выделенная выше подпоследовательность $\{\mathbf{v}^{(s)}(x),\ s = s_l \to \infty\}$ сходится к $\mathbf{v}(x)$ в $L_p(\Omega)$, то

$$\lim_{s\to\infty} (\mathbf{v}^{(s)}, \varphi)_{L_2(\Omega)} = (\mathbf{v}, \varphi)_{L_2(\Omega)}. \tag{4.74}$$

Далее, при $r' < \frac{3}{2}$ и $6 > r = \frac{r'}{r'-1} > 3$

$$\left|\left(\sum_k v_k^{(s)}\mathbf{v}_{x_k}^{(s)}, \hat{R}^{(s)}\varphi\right)_{L_2(\Omega)} - \left(\sum_k v_k\mathbf{v}_{x_k}, R\varphi\right)_{L_2(\Omega)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_k |(v_k^{(s)}\mathbf{v}_{x_k}^{(s)}, \hat{R}^{(s)}\varphi - R\varphi)_{L_2(\Omega)} + (v_k^{(s)}\mathbf{v}_{x_k}^{(s)}, R\varphi)_{L_2(\Omega)} - (v_k\mathbf{v}_{x_k}, R\varphi)_{L_2(\Omega)}| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_k \|v_k^{(s)}\mathbf{v}_{x_k}^{(s)}\|_{L_{r'}(\Omega)} \|\hat{R}^{(s)}\varphi - R\varphi\|_{L_r(\Omega)} + \sum_k |(v_k^{(s)}\mathbf{v}_{x_k}^{(s)}, R\varphi)_{L_2(\Omega)} -$$
$$- (v_k\mathbf{v}_{x_k}, R\varphi)_{L_2(\Omega)}|,$$

откуда в силу (4.69), (4.70) и (4.72)

$$\lim_{s=s_l\to\infty} \left(\sum_k v_k^{(s)}\mathbf{v}_{x_k}^{(s)}, \hat{R}^{(s)}\varphi\right)_{L_2(\Omega)} = \left(\sum_k v_k\mathbf{v}_{x_k}, R\varphi\right)_{L_2(\varphi)}. \tag{4.75}$$

Объединяя (4.71) — (4.75), получаем

$$(\mathbf{v}, \varphi)_{L_2(\Omega)} = (R\mathbf{f}, \varphi)_{L_2(\Omega)} + \left(\sum_k v_k\mathbf{v}_{x_k}, R\varphi\right)_{L_2(\Omega)}. \tag{4.76}$$

Теперь вспомним, что оператор $R = R^c$, R^Γ самосопряжен и вполне непрерывен в пространстве $L_2(\Omega)$ и может быть расширен до вполне непрерывного оператора, действующего из $L_{6/5}(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Поскольку $\sum\limits_k v_k\mathbf{v}_{x_k} \in L_{3/2}(\Omega)$, отсюда заключаем, что

$$\left(\sum_k v_k\mathbf{v}_{x_k}, R\varphi\right)_{L_2(\Omega)} = \left(R\left\{\sum_k v_k\mathbf{v}_{x_k}\right\}, \varphi\right)_{L_2(\Omega)}.$$

Следовательно, согласно (4.76) предельная вектор-функция $\mathbf{v}(x)$ удовлетворяет в $L_2(\Omega)$ равенству

$$\mathbf{v} = R\mathbf{f} + R\left\{\sum_k v_k\mathbf{v}_{x_k}\right\},$$

из которого в силу определения операторов $R = R^c$, R^{Γ} вытекает, что $\mathbf{v}(x)$ является решением одной из следующих краевых задач:

$$\left.\begin{aligned} &\nu\Delta\mathbf{v} - \sum_k v_k \mathbf{v}_{x_k} - c\mathbf{v} - \operatorname{grad} p = \mathbf{f},\\ &\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad x \in \Omega,\\ &\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.77}$$

$$\left.\begin{aligned} &\nu\Delta\mathbf{v} - \sum_k v_k \mathbf{v}_{x_k} - \operatorname{grad} p = \mathbf{f},\\ &\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \end{aligned}\right\} \tag{4.78}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^-,\\ &\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial n}\right)^+ - \left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial n}\right)^- + \frac{1}{\nu}(p^+ - p^-)\mathbf{n} = c_\Gamma\mathbf{v}, \ x \in \Gamma,\\ &\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.79}$$

Учитывая положительную определенность матриц $c(x)$ и $c_\Gamma(x)$ и неравенство (4.68), так же как в работе [16], нетрудно показать, что эти задачи имеют единственные решения. Затем обычным способом показывается, что и вся последовательность $\{\mathbf{v}^{(s)}, s = 1, 2, \ldots\}$ сходится к $\mathbf{v}(x)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.11. *Если выполняются условия теоремы* 4.7 (4.8), *то последовательность решений задачи* (4.66) (*продолженных нулем на* $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$) *по норме* $L_2(\Omega)$ *сходится к решению задачи* (4.77) (*соответственно* (4.78), (4.79)).

В случае поверхностного распределения множеств $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ *сходимость равномерна вне любой фиксированной окрестности* Γ *и* $\partial\Omega$.

Нелинейная нестационарная задача

Рассмотрим в области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$ начально-краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\mathbf{v}^{(s)}(x,t)}{\partial t} - \nu\Delta_x\mathbf{v}^{(s)}(x,t) + \sum_k v_k(x,t)\,\mathbf{v}_{x_k}(x,t) =\\ &= -\operatorname{grad}_x p(x,t) + \mathbf{f}(x,t),\\ &\operatorname{div}_x\mathbf{v}^{(s)}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T^{(s)},\\ &\mathbf{v}^{(s)}(x,t)|_{t=0} = \mathbf{a}(x), \end{aligned}\right\} \tag{4.80}$$

$$\mathbf{v}^{(s)}(x,t)\,|_{\partial\Omega_T^{(s)}} = 0, \tag{4.81}$$

где $\Omega_T^{(s)} = \Omega^{(s)} \times (0, T)$, $\partial\Omega_T^{(s)} = \partial\Omega^{(s)} \times (0, T)$, $f(x, t) \in W_2^1(\Omega_T^{(s)})$. Предположим, что $\mathbf{a}(x) \in W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$, кроме того, $\mathbf{a}(x) = 0$ в некоторой подобласти $\Omega' \subset \Omega$, содержащей все множества $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$.

Существование и единственность решения задачи (4.79) в пространстве R_2 при любом фиксированном s доказаны в работе [16]. Анализ полученных в ней неравенств с учетом свойств $\mathbf{a}(x)$ позволяет заключить, что для решения $\mathbf{v}^{(s)}(x)$ задачи (4.79) (продолженного нулем на $F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$) справедлива оценка

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} (\| \mathbf{v}^{(s)}(x, t) \|_{H(\Omega)} + \| \mathbf{v}_t^{(s)}(x, t) \|_{L_2(\Omega)}) + \int_0^T \| \mathbf{v}_{xt}^{(s)}(x, t) \|_{L_2(\Omega)} dt < C, \tag{4.82}$$

где постоянная C выражается через $\mathbf{a}(x)$, $f(x, t)$, Ω и не зависит от s. Аналогичные факты справедливы и в трехмерном пространстве, однако при достаточно малых T, зависящих от вязкости ν и данных задачи [16].

В силу неравенства (4.82) из последовательности $\{\mathbf{v}^{(s)}, s = 1, 2, \ldots\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\mathbf{v}^{(s)}, s = s_i \to \infty\}$, для которой $\mathbf{v}^{(s_i)}$, $\mathbf{v}_x^{(s_i)}$, $\mathbf{v}_t^{(s_i)}$, $\mathbf{v}_{xt}^{(s_i)}$ сходятся слабо в $L_2(\Omega_T)$ $(\Omega_T = \Omega \times (0, T))$ соответственно к $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_x$, $\mathbf{v}_t$, $\mathbf{v}_{xt}$. Из такой сходимости нетрудно заключить, что $\mathbf{v}^{(s_i)}(x, t)$ сходится к $v(x, t)$ слабо в пространстве $H(\Omega)$ и сильно в $L_p(\Omega)$ $(p < 6)$ при любом $t \in [0, T]$. Отсюда в свою очередь вытекают оценка (4.70) и равенство (4.69). Перенося теперь в (4.80) $\frac{\partial \mathbf{v}^{(s)}(x, t)}{\partial t} = \mathbf{v}_t^{(s)}$ и нелинейный член направо и пользуясь оператором $\hat{R}^{(s)}$, при всех $t \in (0, T)$ получаем

$$\mathbf{v}^{(s)} = -\hat{R}^{(s)}\mathbf{f} + \hat{R}^{(s)}\left\{\sum_k v_k^{(s)} \mathbf{v}_{x_k}^{(s)}\right\} + \hat{R}^{(s)}\mathbf{v}_t^{(s)} .$$

Умножаем это равенство на произвольную вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(x, t)$ из $L_2(\Omega_T)$ и интегрируем по области Ω_T. Учитывая при этом самосопряженность $\hat{R}^{(s)}$, получаем

$$\int_0^T (\mathbf{v}^{(s)}, \boldsymbol{\varphi})_{L_2(\Omega)} dt = -\int_0^T (\hat{R}^{(s)}\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi})_{L_2(\Omega)} dt +$$

$$+ \int_0^T \left(\sum_k v_k^{(s)} \mathbf{v}_{x_k}^{(s)}, \hat{R}^{(s)}\boldsymbol{\varphi}\right)_{L_2(\Omega)} dt + \int_0^T (\mathbf{v}_t^{(s)}, \hat{R}^{(s)}\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\Omega)} dt.$$

Отсюда, почти полностью повторяя предыдущие рассуждения, **приходим к** следующей теореме.

Теорема 4.12. *Если выполняются условия теоремы* 4.7, *то последовательность* $\{\mathbf{v}^{(s)}(x, t)\}$ *решений задачи* (4.80), (4.81) *при любом* $t \in (0, T)$ *сходится по норме* $L_2(\Omega)$ *к вектор-функции* $\mathbf{v}(x, t)$, *которая является решением следующей начально-краевой задачи:*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + \sum_k v_k \mathbf{v}_{x_k} + c\mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{f},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega_T} = 0, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a}(x).$$

Если выполняются условия теоремы 4.8, *то* $\mathbf{v}(x, t)$ *в области* $(\Omega \setminus \Gamma) \times (0, T)$ *удовлетворяет системе уравнений и начальным данным* (4.80), *а на* $\Gamma \times (0, T)$ *и* $\partial\Omega \times (0, T)$ — *граничным условиям* (4.79).

ЗАДАЧИ

1. Обобщить результаты, полученные в § 5, на множества $F^{(s)}$ произвольного вида.

2. Обобщить теоремы 4.4 и 4.12 на случай, когда $\Omega_T^{(s)}$ — «криволинейный» цилиндр, т. е. $\Omega^{(s)} = \Omega_t^{(s)}$ изменяется со временем.

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ОБЛАСТЯХ С КАНАЛАМИ

В этой главе рассматривается краевая задача, описывающая процесс прохождения звуковых волн через систему тонких каналов. Как по структуре области, так и по методу исследования эта задача весьма близка к краевым задачам в областях с мелкозернистой границей. Изучая асимптотическое поведение ее решения, когда диаметры каналов стремятся к нулю, а число их — к бесконечности, мы найдем интегральное представление для предельной функции, с помощью которого затем строго докажем существование резонансов при прохождении волн через систему тонких каналов.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим в трехмерном пространстве область $\Omega^{(s)}$, которая состоит из двух полупространств Ω^{+} и Ω^{-}, разделенных плоским слоем T и соединяющихся между собой каналами $T_{\alpha}^{(s)}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$), проходящими в этом слое (рис. 11). Слой T лежит между плоскостями Γ и $\underline{\Gamma}$, находящимися на расстоянии h друг от друга, а каналы в нем прорезаются прямыми, параллельными фиксированному вектору $\mathbf{m}$ и проходящими через непересекающиеся области $\sigma_{\alpha}^{(s)}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$) на Γ. Очевидно, можно считать, что $|\mathbf{m}| = 1$ и $(\mathbf{m}, \boldsymbol{\nu}) = \cos\varphi > 0$, где $\boldsymbol{\nu}$ — вектор нормали к Γ, внешней к области Ω^{+}. Вектор $\mathbf{m}$ задает естественное отображение Γ на $\underline{\Gamma}$. Обозначим точки и множества на $\underline{\Gamma}$ теми же буквами, что и их прообразы на Γ, но с чертой снизу. Таким образом,

$$\Omega^{(s)} = \Omega^{+} \cup \Omega^{-} \cup T^{(s)} \cup \sigma^{(s)} \cup \underline{\sigma}^{(s)},$$

где

$$T^{(s)} = \bigcup_{\alpha=1}^{s} T_{\alpha}^{(s)}, \quad \sigma^{(s)} = \bigcup_{\alpha=1}^{s} \sigma_{\alpha}^{(s)}, \quad \underline{\sigma}^{(s)} = \bigcup_{\alpha=1}^{s} \underline{\sigma}_{\alpha}^{(s)}.$$

В области $\Omega^{(s)}$ рассмотрим краевую задачу

$$\Delta u^{(s)}(x, k) + k^2 u^{(s)}(x, k) = f(x), \quad x \in \Omega^{(s)}, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial u^{(s)}(x, k)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega^{(s)}, \tag{5.2}$$

$$u^{(s)}(x, k) \in W_2^1(\Omega^{(s)}) \cap W_2^2(\Omega^{(s)}, \mathrm{loc}), \tag{5.3}$$

где $\mathrm{Im}\, k > 0$, $f(x)$ — непрерывная и финитная функция, сосредоточенная в Ω^+, а граничное условие Неймана (5.2) понимается в обобщенном смысле. Последнее условие содержит в себе условие убывания $u^{(s)}(x, k)$ на бесконечности. Как известно, существует единственное решение задачи (5.1) — (5.3). Изучим асимптотическое поведение решения $u^{(s)}(x, k)$ этой задачи при $s \to \infty$, когда диаметры множеств $\sigma_\alpha^{(s)}$ стремятся к нулю, а сами $\sigma_\alpha^{(s)}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$ находятся в фиксированной конечной области $E \subset \Gamma$, ограниченной гладким контуром; при этом $h > 0$ также фиксировано. Справедлива следующая теорема [64].

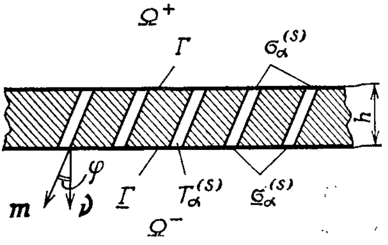

РИС. 11.

Теорема 5.1. *Пусть при $s \to \infty$ выполняются такие условия:*

a) $\lim\limits_{s\to\infty} \{\max\limits_{\alpha} d_\alpha^{(s)}\} = 0;$

b) $R_\alpha^{(s)} > a d_\alpha^{(s)}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s, \quad a > 0;$

c) $\lim\limits_{\rho\to 0} \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{\mathrm{mes}_\Gamma (\sigma^{(s)} \cap K(x, \rho))}{\pi\rho^2} = p(x),$

где $d_\alpha^{(s)}$ — диаметры множеств $\sigma_\alpha^{(s)}$, $R_\alpha^{(s)}$ — расстояние от $\sigma_\alpha^{(s)}$ до множества $\bigcup\limits_{\beta\neq\alpha} \sigma_\beta^{(s)}$, $K(x, \rho)$ — круг радиуса ρ с центром в точке $x \in \Gamma$, $p(x)$ — непрерывная и положительная на E функция.

Тогда равномерно по k, лежащем в любой ограниченной области комплексной плоскости, находящейся на положительном расстоянии от оси $\mathrm{Im}\, k = 0$, в метрике $C^1(\Omega')$, где Ω' — произвольное множество в $\Omega^+ \cup \Omega^-$, находящееся на положительном расстоянии от $E \cup \overline{E}$, существует предел решений $u^{(s)}(x, k)$ задачи (5.1) — (5.3)

$$\lim_{s\to\infty} u^{(s)}(x, k) = \begin{cases} u_+(x, k) - \displaystyle\int_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|}\varphi_+(\xi)\, d\Gamma_\xi, & x \in \Omega^+, \\ \displaystyle\int_{\underline{E}} \frac{e^{ik|x-\underline{\xi}|}}{2\pi|x-\underline{\xi}|}\varphi_-(\underline{\xi})\, d\Gamma_{\underline{\xi}}, & x \in \Omega^-. \end{cases} \tag{5.4}$$

Здесь $u_+(x, k)$ — *решение задачи Неймана* (5.1) — (5.3) *в области* Ω^+, *т. е.*

$$u_+(x, k) = \int\limits_{\Omega^+} \left\{ \frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|} + \frac{e^{ik|x-\xi^*|}}{4\pi|x-\xi^*|} \right\} f(\xi)\, d\xi,$$

$\underline{E} = E + \tilde{h}\,\mathbf{m}$, $\varphi_+(\xi) = \psi_+(\xi) + \psi_-(\xi)$, $\varphi_-(\xi) = \psi_+(\xi) - \psi_-(\xi)$, *а функции* $\psi_+(\xi)$ *и* $\psi_-(\xi)$ *удовлетворяют на* E *интегральным уравнениям*

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{k\tilde{h}}{2}}{k\tilde{p}(x)} \psi_+(x) + \int\limits_{\underline{E}} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi|x-\xi|} \psi_+(\xi)\, d\Gamma_\xi = u_+(x, k), \quad x \in E, \quad (5.5)$$

$$-\frac{2\,\mathrm{ctg}\,\frac{k\tilde{h}}{2}}{k\tilde{p}(x)} \psi_-(x) + \int\limits_{\underline{E}} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi|x-\xi|} \psi_-(\xi)\, d\Gamma_\xi = u_+(x, k), \quad x \in E, \quad (5.6)$$

где $\tilde{h} = \frac{h}{\cos\varphi}$, $\tilde{p}(x) = p(x)\cos\varphi$, $\cos\varphi = (\mathbf{m}, \mathbf{v})$.

Доказательство этой теоремы состоит из трех частей: сначала находится подходящее представление для решения $u^{(s)}(x, k)$ при фиксированных s и мнимых $k = i\varkappa$ ($\varkappa > 0$), затем с помощью этого представления доказывается теорема при $k = i\varkappa$ и, наконец, делается переход к любым комплексным k ($\mathrm{Im}\, k > 0$).

Вывод интегрального представления

При достаточно большом s и, следовательно, достаточно малых диаметрах каналов решение $u^{(s)}(x, k)$ задачи (5.1) — (5.3) в областях Ω^+ и Ω^- можно аппроксимировать функцией $Q^{(s)}(x, k)$ такого вида:

$$Q^{(s)}(x, k) = \begin{cases} u_+(x, k) - \int\limits_{\sigma^{(s)}} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|} \varphi_+^{(s)}(\xi)\, d\Gamma_\xi, & x \in \Omega^+, \\ \int\limits_{\underline{\sigma}^{(s)}} \frac{e^{ik|x-\underline{\xi}|}}{2\pi|x-\underline{\xi}|} \varphi_-^{(s)}(\underline{\xi})\, d\Gamma_{\underline{\xi}}, & x \in \Omega^-, \end{cases} \quad (5.7)$$

где $\sigma^{(s)} = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{s} \sigma_\alpha^{(s)}$, $\underline{\sigma}^{(s)} = \sigma^{(s)} + \tilde{h}\,\mathbf{m}$, $\varphi_+^{(s)}(\xi) = \psi_+^{(s)}(x) + \psi_-^{(s)}(x)$, $\varphi_-^{(s)}(\xi) = \psi_+^{(s)}(\xi) - \psi_-^{(s)}(\xi)$, а функции $\psi_+^{(s)}(\xi)$ и $\psi_-^{(s)}(\xi)$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{k\tilde{h}}{2}}{k\cos\varphi} \psi_+^{(s)}(x) + \int\limits_{\sigma^{(s)}} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi|x-\xi|} \psi_+^{(s)}(\xi)\, d\Gamma_\xi = u_+(x, k), \quad x \in \sigma^{(s)}, \quad (5.8)$$

$$-\frac{2\,\mathrm{ctg}\,\frac{k\tilde{h}}{2}}{k\cos\varphi} \psi_-^{(s)}(x) + \int\limits_{\sigma^{(s)}} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi|x-\xi|} \psi_-^{(s)}(\xi)\, d\Gamma_\xi = u_+(x, k), \quad x \in \sigma^{(s)}. \quad (5.9)$$

Чтобы получить эти формулы, приведем сначала нестрогие наводящие соображения.

Введем в каждом канале $T_\alpha^{(s)}$ прямоугольную систем координат (u, v, t) с началом в некоторой точке $\underline{x}_\alpha \in \underline{\sigma}_\alpha^{(s)}$, направляя ось t по образующей канала в сторону Ω^+ и выбирая оси u, v в нормальном сечении канала $\tilde{\sigma}_\alpha^{(s)}$. Обозначим через $\omega_{\alpha r}(u, v)$ собственные функции краевой задачи Неймана для оператора $-\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$ в области $\tilde{\sigma}_\alpha^{(s)}$, а через $\lambda_{\alpha r}$ соответствующие собственные значения. Тогда функция $u^{(s)}(x, k)$, удовлетворяющая в каналах уравнению $\Delta u^{(s)} + k_2 u^{(s)} = 0$ ($\operatorname{supp} f \in \Omega^+$), может быть представлена в них в виде ряда

$$u^{(s)}(x, k) = \sum_{r=0}^{\infty} \omega_{\alpha r}(u, v)\left(A_{\alpha r} e^{i\gamma_{\alpha r} t} + B_{\alpha r} e^{i\gamma_{\alpha r}(\tilde{h}-t)}\right),$$

где $\gamma_{\alpha r} = \sqrt{k^2 - \lambda_{\alpha r}}$ ($\operatorname{Im} \gamma_{\alpha r} > 0$), $x = x(u, v, t)$. Учитывая, что $\lambda_{\alpha 0} = 0$, а $\lambda_{\alpha r}$, $r \neq 0$, неограниченно возрастают при уменьшении диаметров $\tilde{d}_\alpha$ каналов, можно ожидать, что все члены этого ряда, кроме нулевого, благодаря экспоненциальным множителям в совокупности стремятся к нулю при $\tilde{d}_\alpha \to 0$ и $0 < t < \tilde{h}$. Но тогда, так как $\omega_{\alpha 0}(u, v) = \mathrm{const}$, функция $u^{(s)}(x, k)$ при достаточно тонких каналах близка к функции

$$Q_\alpha(u, v, t) = A_\alpha e^{ikt} + B_\alpha e^{ik(\tilde{h}-t)}. \qquad (5.10)$$

Далее, как легко видеть, если в формулах (5.7) в качестве $\varphi_+^{(s)}(x)$ и $\varphi_-^{(s)}(x)$ взять нормальные производные функции $u^{(s)}(x, k)$ на множествах $\sigma^{(s)}$ и $\underline{\sigma}^{(s)}$ (по нормалям, направленным в сторону Ω^+), то при $x \in \Omega^\pm$ будет справедливо равенство $u^{(s)}(x, k) = Q^{(s)}(x, k)$. Таким образом, $\varphi_+^{(s)}(\xi)$ и $\varphi_-^{(s)}(x)$ в (5.7) всегда можно выбрать так, чтобы $Q^{(s)}(x, k)$ в $\Omega^\pm$ была близка к $u^{(s)}(x, k)$. Этот выбор, очевидно, неоднозначен. Однако естественно предположить, что $Q^{(s)}(x, k)$ и $Q_\alpha(u, v, t)$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$), определяемые по формулам (5.7) и (5.10) и аппроксимирующие $u^{(s)}(x, k)$ соответственно в областях $\Omega^\pm$ и $T_\alpha^{(s)}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$), на множествах $\sigma^{(s)}$ и $\underline{\sigma}^{(s)}$ согласованы в смысле близости как самих функций, так и их нормальных производных, поскольку предельные значения функций $u^{(s)}(x, k)$ и их производных извне и изнутри каналов просто совпадают. Учитывая это, подбираем постоянные A_α, B_α и функции $\varphi_+^{(s)}(\xi)$, $\varphi_-^{(s)}(\xi)$ так, чтобы функции $Q^{(s)}(x, k)$ и $Q_\alpha(u, v, t)$ и их нормальные производные совпадали хотя бы в одной точке $x_\alpha \in \sigma_\alpha^{(s)}$ и соответственно $\underline{x}_\alpha \in \in \underline{\sigma}_\alpha^{(s)}$ в каждом канале. В результате получаем равенства

$$\left.\begin{aligned}
A_\alpha + B_\alpha e^{ik\tilde{h}} &= \int\limits_{\underline{\sigma}^{(s)}} \frac{e^{ik|\underline{x}_\alpha - \underline{\xi}|}}{2\pi|\underline{x}_\alpha - \underline{\xi}|} \varphi_-^{(s)}(\underline{\xi})\, d\Gamma_{\underline{\xi}},\\
A_\alpha e^{ik\tilde{h}} + B_\alpha &= u_+(x_\alpha, k) - \int\limits_{\sigma^{(s)}} \frac{e^{ik|x_\alpha - \xi|}}{2\pi|x_\alpha - \xi|} \varphi_+^{(s)}(\xi)\, d\Gamma_\xi,\\
(A_\alpha - B_\alpha e^{ik\tilde{h}})\, ik\cos\varphi &= \varphi_-^{(s)}(\underline{x}_\alpha),\\
(A_\alpha e^{ik\tilde{h}} - B_\alpha)\, ik\cos\varphi &= \varphi_+^{(s)}(x_\alpha), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s.
\end{aligned}\right\} \quad (5.11)$$

Исключая из этих равенств A_α и B_α, получаем такие соотношения для $\varphi_+^{(s)}(x)$ и $\varphi_-^{(s)}(x)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{ik\cos\varphi} \varphi_-^{(s)}(\underline{x}_\alpha) - \frac{e^{ik\tilde{h}}}{ik\cos\varphi} \varphi_+^{(s)}(x_\alpha) =\\
&\qquad = \int\limits_{\underline{\sigma}^{(s)}} \frac{e^{ik|\underline{x}_\alpha - \underline{\xi}|}}{2\pi|\underline{x}_\alpha - \underline{\xi}|} \varphi_-^{(s)}(\xi)\, d\Gamma_{\underline{\xi}} -\\
&\qquad - e^{ik\tilde{h}} \left\{ u_+(x_\alpha, k) - \int\limits_{\sigma^{(s)}} \frac{e^{ik|x_\alpha - \xi|}}{2\pi|x_\alpha - \xi|} \varphi_+^{(s)}(\xi)\, d\Gamma_\xi \right\},\\
&\frac{e^{ik\tilde{h}}}{ik\cos\varphi} \varphi_-^{(s)}(\underline{x}_\alpha) - \frac{1}{ik\cos\varphi} \varphi_+^{(s)}(x_\alpha) = u_+(x_\alpha, k) -\\
&- \int\limits_{\sigma^{(s)}} \frac{e^{ik|x_\alpha - \xi|}}{2\pi|x_\alpha - \xi|} \varphi_+^{(s)}(\xi)\, d\Gamma_\xi - e^{ik\tilde{h}} \int\limits_{\underline{\sigma}^{(s)}} \frac{e^{ik|\underline{x}_\alpha - \underline{\xi}|}}{2\pi|\underline{x}_\alpha - \underline{\xi}|} \varphi_-^{(s)}(\underline{\xi})\, d\Gamma_{\underline{\xi}}.
\end{aligned}\right\} \quad (5.12)$$

При этом

$$A_\alpha = \frac{e^{ik\tilde{h}}\varphi_+^{(s)}(x_\alpha) - \varphi_-^{(s)}(\underline{x}_\alpha)}{ik\cos\varphi\,(e^{2ik\tilde{h}} - 1)}, \quad B_\alpha = \frac{\varphi_+^{(s)}(x_\alpha) - e^{ik\tilde{h}}\varphi_-^{(s)}(\underline{x}_\alpha)}{ik\cos\varphi\,(e^{2ik\tilde{h}} - 1)}. \quad (5.13)$$

Соотношения (5.12) не определяют однозначно функций $\varphi_+^{(s)}(x)$ и $\varphi_-^{(s)}(\underline{x})$. Очевидно, они будут выполняться, если потребовать, чтобы $\varphi_+^{(s)}(x)$ и $\varphi_-^{(s)}(\underline{x}) = \varphi_-^{(s)}(x)$ удовлетворяли системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{1}{ik\cos\varphi} \varphi_-^{(s)}(x) - \frac{e^{ik\tilde{h}}}{ik\cos\varphi} \varphi_+^{(s)}(x) &= \int\limits_{\sigma^{(s)}} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|} \varphi_-^{(s)}(\xi)\, d\Gamma_\xi +\\
&+ e^{ik\tilde{h}} \int\limits_{\sigma^{(s)}} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|} \varphi_+^{(s)}(\xi)\, d\Gamma_\xi - e^{ik\tilde{h}} u_+(x, k),
\end{aligned}$$

$$\frac{e^{ik\tilde{h}}}{ik\cos\varphi}\varphi_-^{(s)}(x)-\frac{1}{ik\cos\varphi}\varphi_+^{(s)}(x)=-e^{ik\tilde{h}}\int\limits_{\sigma^{(s)}}\frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|}\varphi_-^{(s)}(\xi)\,d\Gamma_\xi-$$

$$-\int\limits_{\sigma^{(s)}}\frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|}\varphi_+^{(s)}(\xi)\,d\Gamma_\xi+u_+(x,k).$$

Нетрудно проверить, что эта система эквивалентна уравнениям (5.8), (5.9), где

$$\psi_+^{(s)}(\xi)=\frac{\varphi_+^{(s)}(\xi)-\varphi_-^{(s)}(\xi)}{2},\quad \psi_-^{(s)}(\xi)=\frac{\varphi_+^{(s)}(\xi)-\varphi_-^{(s)}(\xi)}{2}.$$

Таким образом, из приведенных рассуждений следует, что равенства (5.11) выполняются, если в качестве $\varphi_+^{(s)}(x)$ и $\varphi_-^{(s)}(x)$ взяты функции $\varphi_+^{(s)}(x)=\psi_+^{(s)}(x)+\psi_-^{(s)}(x)$ и $\varphi_-^{(s)}(x)=\psi_+^{(s)}(x)-\psi_-^{(s)}(x)$, где $\psi_\pm^{(s)}(x)$ — решения уравнений (5.8), (5.9), а постоянные A_α и B_α определены по формулам (5.3).

Рассмотрим уравнения (5.8), (5.9). В пространстве функций $L_2(\sigma^{(s)})$ их можно записать в виде $a^\pm(k)\psi_\pm+A_k^{(s)}\psi_\pm=u$, где $a^+(k)=\frac{2}{k}\operatorname{tg}\frac{k\tilde{h}}{2}$, $a^-(k)=-\frac{2}{k}\operatorname{ctg}\frac{k\tilde{h}}{2}$, а оператор $A_k^{(s)}$, определяемый по формуле

$$[A_k^{(s)}\psi](x)=\cos\varphi\int\limits_{\sigma^{(s)}}\frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi|x-\xi|}\psi(\xi)d\Gamma_\xi,$$

вполне непрерывен. В силу приведенной ниже леммы 5.1 однородные уравнения $a^\pm(k)\psi+A_k^{(s)}\psi=0$ при $\operatorname{Im}k\geqslant 0$ не имеют ненулевых решений, и, кроме того, при $\operatorname{Im}k>0$ $a^\pm(k)\neq 0$. Поэтому уравнения (5.8), (5.9) при всех k с $\operatorname{Im}k>0$ разрешимы в $L_2(\sigma^{(s)})$, причем имеют единственные решения $\psi_+^{(s)}(x)$ и $\psi_-^{(s)}(x)$. Далее, как нетрудно проверить, при $k=i\varkappa$ $(\varkappa>0)$ $a^\pm(k)>0$ и операторы $A_k^{(s)}$ положительны, а так как в правую часть уравнений входит ограниченная функция $u=u_+(x,k)\cos\varphi$, то отсюда обычным способом устанавливаем, что при $k=i\varkappa$ $\psi_+^{(s)}(x)$ и $\varphi_-^{(s)}(x)$ ограничены в $C(\sigma^{(s)})$ равномерно по s. Учитывая это, получаем при $k=i\varkappa$ $(\varkappa>0)$

$$\left|\int\limits_{\sigma^{(s)}}\frac{e^{ik|x''-\xi|}}{\pi|x''-\xi|}\psi_\pm^{(s)}(\xi)\,d\Gamma_\xi-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\sigma^{(s)}}\frac{e^{ik|x'-\xi|}}{\pi|x'-\xi|}\psi_\pm^{(s)}(\xi)\,d\Gamma_\xi\right|\leqslant C_1|x''-x'|\,|\ln|x''-x'||,\tag{5.14}$$

откуда в силу уравнений (5.8) и (5.9) и гладкости функции $u_+(x,k)$ на Γ следует

$$|\psi_\pm^{(s)}(x'')-\psi_\pm^{(s)}(x')|\leqslant C_2|x''-x'|\,|\ln|x''-x'||.\tag{5.15}$$

В этих неравенствах постоянные C_1 и C_2 не зависят от s.

Рассмотрим функцию $Q^{(s)}(x, k)$, определенную в областях $\Omega^{\pm}$ равенствами (5.7) — (5.9), а в каналах $T_{\alpha}^{(s)}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$) равенствами (5.10), (5.13). Легко видеть, что на боковых поверхностях каналов и на множествах $\Gamma \setminus \sigma^{(s)}$ и $\underline{\Gamma} \setminus \underline{\sigma}^{(s)}$ ее нормальная производная равна нулю. Далее, так как $\operatorname{Im} k > 0$, то сужения $Q^{(s)}(x, k)$ на области $\Omega^{\pm}$ и $T_{\alpha}^{(s)}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$) принадлежат пространствам $W_2^1(\Omega^+)$, $W_2^1(\Omega^-)$, $W_2^1(T_{\alpha}^{(s)})$, но пространству $W_2^1(\Omega^{(s)})$ сама функция $Q^{(s)}(x, k)$ не принадлежит, поскольку на множествах $\sigma_{\alpha}^{(s)}$ и $\underline{\sigma}_{\alpha}^{(s)}$ (при переходе из Ω^+ в $T_{\alpha}^{(s)}$ и из $T_{\alpha}^{(s)}$ в Ω^-) она имеет скачки $q_{\alpha}(x) = Q^{(s)}\Big|_{\sigma_{\alpha}^{(s)}} - Q_{\alpha}\Big|_{\sigma_{\alpha}^{(s)}}$ и $\bar{q}_{\alpha}(x) = Q_{\alpha}\Big|_{\underline{\sigma}_{\alpha}^{(s)}} - Q^{(s)}\Big|_{\underline{\sigma}_{\alpha}^{(s)}}$. Учитывая конструкцию функции $Q^{(s)}(x, k)$ и неравенство (5.14), находим при $k = i\varkappa$ ($\varkappa > 0$) и $x'', x' \in \sigma_{\alpha}^{(s)}$

$$\left.\begin{aligned} |q_{\alpha}(x'') - q_{\alpha}(x')| &\leqslant C\,|x'' - x'|\,|\ln|x'' - x'||, \\ |\bar{q}_{\alpha}(\underline{x}'') - \bar{q}_{\alpha}(\underline{x}')| &\leqslant C\,|\underline{x}'' - \underline{x}'|\,|\ln|\underline{x}'' - \underline{x}'||, \end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

а так как $q_{\alpha}(x_{\alpha}) = 0$ и $\bar{q}_{\alpha}(\underline{x}_{\alpha}) = 0$, то

$$|q_{\alpha}(x)|,\quad |\bar{q}_{\alpha}(\underline{x})| \leqslant C d_{\alpha}^{(s)}\,|\ln d_{\alpha}^{(s)}|, \tag{5.17}$$

где $d_{\alpha}^{(s)}$ — диаметр множества $\sigma_{\alpha}^{(s)}$, а C не зависит от s. Аналогично, используя неравенство (5.15), получаем оценки для скачков нормальной производной

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial\nu} Q^{(s)} - \frac{\partial}{\partial\nu} Q_{\alpha}\right|_{\sigma_{\alpha}^{(s)}} &\leqslant C d_{\alpha}^{(s)}\,|\ln d_{\alpha}^{(s)}|, \\ \left|\frac{\partial}{\partial\nu} Q_{\alpha} - \frac{\partial}{\partial\nu} Q^{(s)}\right|_{\underline{\sigma}_{\alpha}^{(s)}} &\leqslant C d_{\alpha}^{(s)}\,|\ln d_{\alpha}^{(s)}|. \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

Покажем теперь, что функция $Q^{(s)}(x, k)$ при достаточно малых $d_{\alpha}^{(s)}$ хорошо аппроксимирует решение $u^{(s)}(x, k)$ задачи (5.1) — (5.3) в областях $\Omega^{\pm}$.

Пусть $k = i\varkappa$, $\varkappa > 0$. Тогда, как известно, соответствующее решение $u^{(s)}(x, i\varkappa)$ в классе функций $W_2^1(\Omega^{(s)})$ минимизирует функционал

$$J(u^{(s)}) = \int_{\Omega^{(s)}} \{|\nabla u^{(s)}|^2 + \varkappa^2 |u^{(s)}|^2 + 2 f u^{(s)}\}\,dx. \tag{5.19}$$

Представим $u^{(s)}(x, i\varkappa)$ в виде

$$u^{(s)}(x, i\varkappa) = Q^{(s)}(x, i\varkappa) - z^{(s)}(x). \tag{5.20}$$

Очевидно, функция $z^{(s)}(x)$ должна принадлежать пространствам $W^1(\Omega^+)$, $W_2^1(\Omega^-)$ и $W_2^1(T_{\alpha}^{(s)})$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$), а на множествах $\sigma_{\alpha}^{(s)}$ и $\underline{\sigma}_{\alpha}^{(s)}$ иметь те же скачки $q_{\alpha}(x)$ и $\bar{q}_{\alpha}(x)$, что и $Q^{(s)}(x, i\varkappa)$. Класс функций, удовлетворяющих указанным условиям, обозначим через $W(Q^{(s)})$. При этом, естественно, скачки понимаются как разность предельных значений функций в смысле L_2. Учитывая свойства функции $Q^{(s)}(x, i\varkappa)$ и поступая так же, как в § 2 гл. III, из (5.19) и (5.20) устанавливаем, что функция $z^{(s)}(x)$ в классе $W(Q^{(s)})$ минимизирует функционал

$$\Phi(z^{(s)}) = D(z^{(s)}) - \rho(z^{(s)}) - \bar{\rho}(z^{(s)}), \tag{5.21}$$

где

$$D(z^{(s)}) = \left(\int\limits_{\Omega+} + \int\limits_{\Omega-} + \sum_{\alpha=1}^{s} \int\limits_{T_\alpha^{(s)}}\right)\{|\nabla z^{(s)}|^2 + \varkappa^2 |z^{(s)}|^2\}\, dx,$$

$$\rho(z^{(s)}) = \sum_{\alpha=1}^{s} \int\limits_{\sigma_\alpha^{(s)}} \left\{\frac{\partial}{\partial \nu} Q^{(s)} - \frac{\partial}{\partial \nu} Q_\alpha\right\}(z^{(s)})^+\, d\Gamma,$$

$$\bar{\rho}(z^{(s)}) = \sum_{\alpha=1}^{s} \int\limits_{\underline{\sigma}_\alpha^{(s)}} \left\{\frac{\partial}{\partial \nu} Q_\alpha - \frac{\partial}{\partial \nu} Q^{(s)}\right\}(z^{(s)})^-\, d\Gamma,$$

$(z^{(s)})^{\pm}$ — предельные значения $z^{(s)}$ из областей Ω^∞, а $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по нормали к Γ ($\underline{\Gamma}$), направленной в сторону Ω^-. В силу неравенств (5.15) и теоремы вложения справедлива оценка

$$|\rho(z^{(s)})|,\ |\bar{\rho}(z^{(s)})| \leqslant C \max_\alpha \{d_\alpha^{(s)} |\ln d_\alpha^{(s)}|\}\, D^{\frac{1}{2}}(z^{(s)}). \tag{5.22}$$

Пусть $v^{(s)}(x)$ — произвольная функция из класса $W(Q^{(s)})$. Тогда $\Phi(v^{(s)}) \geqslant \Phi(z^{(s)})$, и, следовательно, согласно (5.21) и (5.22)

$$D(v^{(s)}) + \varepsilon(s) D^{\frac{1}{2}}(v^{(s)}) \geqslant D(z^{(s)}) - \varepsilon(s) D^{\frac{1}{2}}(z^{(s)}), \tag{5.23}$$

причем в силу условия *а* теоремы $\lim\limits_{s\to\infty} \varepsilon(s) = 0$.

Неравенство (5.23) позволяет оценить $D(z^{(s)})$. Пусть G — подобласть в Ω^+, ограниченная гладкой замкнутой поверхностью Σ, часть которой лежит на Γ, причем так, что область E вместе с некоторой своей ε-окрестностью ($\varepsilon > \max\limits_\alpha R_\alpha^{(s)}$) находится в $\Sigma \cap \Gamma$.

Введем пространство функций $W_2^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ с дробной нормой (см. § 1 гл. II)

$$\|u\|^2_{W_2^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} = \int\limits_\Sigma \int\limits_\Sigma \frac{|u(x'') - u(x')|^2}{|x'' - x'|^3}\, d\Gamma_{x''} d\Gamma_{x'} + \|u\|^2_{L_2(\Sigma)}.$$

Покажем, что существует функция $g^{(s)}(x) \in \overset{\bullet}{W}{}_2^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$, равная нулю на $\Sigma \setminus (\Sigma \cap \Gamma)$ и совпадающая с функциями $q_\alpha(x)$ на $\sigma_\alpha^{(s)}$, причем при $s \to \infty$ $\|g\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} \to 0$.

Прежде всего заметим, что $q_\alpha(x)$ естественно продолжается на $\frac{d_\alpha^{(s)}}{2}$-окрестность множества $\sigma_\alpha^{(s)}$ так, что остаются в силе неравенства (5.16) и (5.17). Это продолжение $\hat{q}_\alpha(x)$ определяется по тем же формулам, что и для $q_\alpha(x)$. Пусть $\varphi_\alpha(x)$ — дифференцируемая функция на Σ, удовлетворяющая условиям $\varphi_\alpha(x) \equiv 1$ в $\frac{d_\alpha^{(s)}}{4}$-окрестности $\sigma_\alpha^{(s)}$, $\varphi_\alpha(x) \equiv 0$ вне $\frac{d_\alpha^{(s)}}{2}$-окрестности $\sigma_\alpha^{(s)}$, всюду $0 \leqslant \varphi_\alpha(x) \leqslant 1$ и $|D\varphi_\alpha(x)| < C(d_\alpha^{(s)})^{-1}$. Тогда, учитывая (5.16), (5.17) и условие b теоремы, нетрудно убедиться, что функция $g^{(s)}(x) = \sum_{\alpha=1}^{s} \hat{q}_\alpha(x)\varphi_\alpha(x)$ принимает на $\sigma_\alpha^{(s)}$ значение $q_\alpha(x)$ и удовлетворяет всюду на Σ неравенствам (5.16), (5.17). Поэтому

$$\|g^{(s)}\|^2_{W_2^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} \leqslant C_1 \max_\alpha (d_\alpha^{(s)})^{\frac{1}{2}} \int_\Sigma \int_\Sigma \frac{|\ln|x''-x'||^2}{|x''-x'|^{3/2}}\, d\Gamma_{x''} d\Gamma_{x'} + $$
$$+ C_2 \max_\alpha (d_\alpha^{(s)} |\ln d_\alpha^{(s)}|)^2,$$

и, следовательно,

$$\lim_{s\to\infty} \|g^{(s)}\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} = 0. \tag{5.24}$$

В силу теоремы 2.2 функцию $g^{(s)}(x)$ можно продолжить на область G так, чтобы полученная функция $w_1^{(s)}(x)$ принадлежала $W_2^1(G)$, совпадала с $g^{(s)}(x)$ на Σ (в смысле $L_2(\Sigma)$) и выполнялось неравенство

$$\|w_1^{(s)}\|_{W_2^1(G)} \leqslant C \|g^{(s)}\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}, \tag{5.25}$$

где постоянная C зависит лишь от Σ и G. Продолжив затем $w_1^{(s)}(x)$ на всю область Ω^+ нулем, очевидно, получим функцию $w_+^{(s)}(x)$ из пространства $W_2^1(\Omega^+)$, совпадающую на множествах $\sigma_\alpha^{(s)}$ с $q_\alpha(x)$, причем в силу (5.24) и (5.25)

$$\lim_{s\to\infty} \|w_+^{(s)}\|_{W_2^1(\Omega^+)} = 0. \tag{5.26}$$

Аналогично строится функция $w_-^{(s)}(x)$ из $W_2^1(\Omega^-)$ такая, что $w_-^{(s)}(x) = \bar{q}_\alpha(x)$ на $\sigma_\alpha^{(s)}$ и

$$\lim_{s\to\infty} \|w_-^{(s)}\|_{W_2^1(\Omega^-)} = 0. \tag{5.26'}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$v^{(s)}(x) = \begin{cases} w_-^{(s)}(x), & x \in \Omega^-, \\ 0, & x \in T_\alpha^{(s)} \\ -w_+^{(s)}(x), & x \in \Omega^+. \end{cases} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s),$$

Ясно, что $v^{(s)}(x)$ принадлежит классу $W(Q^{(s)})$ и в силу (5.26), (5.26′) $\lim\limits_{s\to\infty} D(v^{(s)}) = 0$. Поэтому, выбирая $v^{(s)}(x)$ в качестве функции сравнения, из (5.23) получаем

$$\lim_{s\to\infty} D(z^{(s)}) = 0. \tag{5.27}$$

Поскольку $z^{(s)}(x)$ в классе $W(Q^{(s)})$ минимизирует функционал $\Phi(z^{(s)})$ (5.21), для любой финитной в областях $\Omega^\pm$ (или $T_\alpha^{(s)}$) функции $\zeta(x)$

$$\int \{(\nabla z^{(s)}, \nabla\zeta) + \varkappa^2 z^{(s)}\zeta\}\, dx = 0,$$

и, следовательно, $z^{(s)}(x)$ удовлетворяет в $\Omega^\pm$ (и в $T_\alpha^{(s)}$) уравнению $\Delta z^{(s)} - \varkappa^2 z^{(s)} = 0$. Учитывая это, из (5.27) обычным способом устанавливаем, что $z^{(s)}(x)$ при $s \to \infty$ стремится к нулю в метрике $C'(\Omega')$, где Ω' — произвольное множество в $\Omega^+ \cup \Omega'$, лежащее на положительном расстоянии от слоя T.

Таким образом, доказано, что решение задачи (5.1) — (5.3) при $k = i\varkappa$ в областях $\Omega^\pm$ представимо в виде (5.20), где $Q^{(s)}(x, i\varkappa)$ определяется равенствами (5.7) — (5.9), а функция $z^{(s)}(x)$ становится сколь угодно малой при достаточно малых диаметрах каналов.

Доказательство теоремы 5.1 при $k = i\varkappa$ ($\varkappa > 0$)

Очевидно, достаточно показать, что $Q^{(s)}(x, k)$ при $s \to \infty$ в областях $\Omega^\pm$ сходятся к функции $Q(x, k)$, определяемой равенствами (5.4) — (5.6). Как отмечалось в первой части доказательства, решения $\psi_\pm^{(s)}(x)$ уравнений (5.8), (5.9) при любом фиксированном $k = i\varkappa$ ($\varkappa > 0$) ограничены на $\sigma^{(s)}$ равномерно по s. Поэтому можно выделить подпоследовательность $\{s_k\}$ такую, что для любой непрерывной на E функции $\omega(x)$ выполняются равенства

$$\lim_{s=s_k\to\infty} \int_E \psi_\pm^{(s)}(x)\,\omega(x)\,d\Gamma_x = \int_E \psi_\pm(x)\,\omega(x)\,d\Gamma_x, \tag{5.28}$$

где $\psi_\pm(x)$ — ограниченные функции на E. Переходя к пределу по этой подпоследовательности в формуле (5.7), видим, что $Q^{(s)}(x, k)$ в областях $\Omega^\pm$ сходится к функции $Q(x, k)$, представимой в виде (5.4), где $\varphi_+(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x)$, $\varphi_-(x) = \psi_+(x) - \psi_-(x)$, а $\psi_\pm(x)$ определяются из равенств (5.28).

Покажем, что $\psi_+(x)$ и $\psi_-(x)$ удовлетворяют соответственно уравнениям (5.8) и (5.9). Это достаточно доказать для $\psi_+(x)$. Будем считать, что $\psi_+(x)$ продолжена нулем вне множества $\sigma^{(s)}$. Умножая уравнение (5.8) на произвольную непрерывную на E функцию $\omega(x)$ и интегрируя по области E, получаем равенство

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{k\tilde{h}}{2}}{k\cos\varphi}\int\limits_E \psi_+^{(s)}(x)\,\omega(x)\,d\Gamma_x+\int\limits_E \omega(x)\,\chi^{(s)}(x)\int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi|x-\xi|}\psi_+^{(s)}(\xi)\,d\Gamma_\xi d\Gamma_x=$$

$$=\int\limits_E u_+(x,k)\,\chi^{(s)}(x)\,\omega(x)\,d\Gamma_x, \qquad (5.29)$$

где $\chi^{(s)}(x)$ — характеристическая функция монжества $\sigma^{(s)}$. Как легко видеть, в силу условия c теоремы существует предел

$$\lim_{s\to\infty}\int\limits_E \omega(x)\,\chi^{(s)}(x)\frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\,d\Gamma_x=\int\limits_E \omega(x)\,p(x)\frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\,d\Gamma_x,$$

причем в правую часть его входит непрерывная по ξ функция и предел достигается равномерно по $\xi\in E$. Поменяем во втором слагаемом в (5.29) порядок интегрирования по ξ и x. Тогда из сказанного выше следует, что в (5.29) можно перейти к пределу по подпоследовательности $\{s_k\}$. Возвращаясь затем снова к прежнему порядку интегрирования, приходим к равенству

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{k\tilde{h}}{2}}{k\cos\varphi}\int\limits_E \psi_+(x)\,\omega(x)\,d\Gamma_x+\int\limits_E \omega(x)\,p(x)\int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi|x-\xi|}\psi_+(\xi)\,d\Gamma_\xi d\Gamma_x=$$

$$=\int\limits_E u_+(x,k)\,p(x)\,\omega(x)\,d\Gamma_x.$$

Поскольку $\omega(x)$ — произвольная непрерывная функция, отсюда следует, что $\psi_+(x)$ удовлетворяет уравнению (5.5).

Уравнения (5.5) и (5.6) при $\operatorname{Im} k>0$ имеют единственные решения (см. лемму 5.1). Поэтому пределы $\lim\limits_{s=s_k\to\infty} Q^{(s)}(x,k)$ по любой подпоследовательности совпадают, а значит, существует предел $\lim\limits_{s\to\infty} Q^{(s)}(x,k)$, который определяется равенствами (5.4)—(5.6). Нетрудно также убедиться, что последовательность $\{Q^{(s)}(x,k)\}$ сходится и в метрике $C'(\Omega')$, где Ω' — произвольное множество в $\Omega^+\cup\Omega^-$, лежащее на положительном расстоянии от $E\cup\bar{E}$. Таким образом, в случае чисто мнимых k теорема доказана.

Переход к произвольным комплексным k ($\operatorname{Im} k > 0$)

Воспользуемся аналитичностью решения $u^{(s)}(x, k)$ задачи (5.1) — (5.3) по параметру k^2 во всей плоскости k^2 с выброшенной положительной вещественной полуосью. Это, очевидно, эквивалентно аналитичности $u^{(s)}(x, k)$ по k в полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$. Умножая обе части уравнения (5.1) на функцию $\overline{u^{(s)}(x, k)}$, комплексно сопряженную к $u^{(s)}(x, k)$, и интегрируя по области $\Omega^{(s)}$, получаем

$$\int\limits_{\Omega^{(s)}} \{\Delta u^{(s)} + k^2 u^{(s)}\} \bar{u}^{(s)} dx = \int\limits_{\Omega^{(s)}} f \bar{u}^{(s)} dx.$$

Учитывая, что $u^{(s)} \in W_2^1(\Omega^{(s)})$, а также граничное условие (5.2), при помощи интегрирования по частям можно преобразовать это равенство к виду

$$-\int\limits_{\Omega^{(s)}} |\nabla u^{(s)}|^2 dx + k^2 \int\limits_{\Omega^{(s)}} |u^{(s)}|^2 dx = \int\limits_{\Omega^{(s)}} f \bar{u}^{(s)} dx.$$

Отсюда, очевидно, вытекают неравенства

$$\left\{\int\limits_{\Omega^{(s)}} |u^{(s)}|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant C(k) \left\{\int\limits_{\Omega^{(s)}} |f|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $C(k) = |\operatorname{Im} k^2|^{-1}$ при $\operatorname{Im} k^2 \neq 0$ и $C(k) = |\operatorname{Re} k^2|^{-1}$ при $\operatorname{Re} k^2 < 0$. Объединяя их, легко получить

$$\left\{\int\limits_{\Omega^{(s)}} |u^{(s)}|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{2}{|\operatorname{Im} k|^2} \left\{\int\limits_{\Omega^{(s)}} |f|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{5.30}$$

Следовательно, решение $u^{(s)}(x, k)$ задачи (5.1) — (5.3) при всех k из верхней полуплоскости в метрике $L_2(\Omega^{(s)})$ ограничено равномерно по s. Покажем, что отсюда вытекает равномерная ограниченность $u^{(s)}(x, k)$ в каждой точке $x \in \Omega^{\pm}$.

Пусть $\varphi_\varepsilon^{\pm}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая в $\Omega^{\pm}$ функция, равная нулю в ε-окрестности $\Omega_\varepsilon^{\pm}$ и единице вне 2ε-окрестности $\Omega_{2\varepsilon}^{\pm}$ множества E ($\underline{E}$) и имеющая нулевую нормальную производную всюду на Γ ($\underline{\Gamma}$). Введем функцию

$$G_\varepsilon^{\pm}(x, y, k) = \varphi_\varepsilon^{\pm}(x) G_{\pm}(x, y, k),$$

где $G_{\pm}(x, y, k)$ — функция Грина краевой задачи (5.1) — (5.3) в области $\Omega^{\pm}$. Очевидно, $G_\varepsilon^{\pm} \equiv 0$ в ε-окрестности E ($\underline{E}$), $\left.\dfrac{\partial G_\varepsilon^{\pm}}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = 0$ и если y лежит вне $\Omega_{2\varepsilon}^{\pm}$, то в области $\Omega^{\pm}$ $G_\varepsilon^{\pm}(x, y, k)$ удовлетворяет уравнению $\Delta_x G_\varepsilon^{\pm}(x, y, k) + k^2 G_\varepsilon^{\pm}(x, y, k) = -\delta(x, y) + F^{\pm}(x, y, k)$, где функция $F^{\pm}(x, y, k) = \Delta\varphi_\varepsilon^{\pm}(x) G_{\pm}(x, y, k) +$

$+ 2 (\nabla\varphi_\varepsilon^\pm (x), \nabla G_\pm (x, y, k))$ сосредоточена в $\Omega_{2\varepsilon}^\pm \setminus \Omega_\varepsilon^\pm$ и ограничена. Поэтому, используя, как обычно, вторую формулу Грина, для решения $u^{(s)} (x, k)$ задачи (5.1) — (5.3) нетрудно получить представление

$$u^{(s)}(y, k) = \int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}^\pm \setminus \Omega_\varepsilon^\pm} F^\pm (x, y, k)\, u^{(s)} (x, k)\, dx - \int\limits_{\Omega^\pm} G_\varepsilon^\pm (x, y, k) f(x)\, dx, \tag{5.31}$$

справедливое во всех точках $y \in \Omega^\pm$, лежащих вне $\Omega_{2\varepsilon}^\pm$. Отсюда, учитывая (5.30), заключаем, что последовательность аналитических в верхней полуплоскости k функций $u^{(s)} (x, k)$ при каждом $x \in \Omega^\pm$ равномерно по s ограничена в любой подобласти полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$, лежащей на положительном расстоянии от оси $\operatorname{Im} k = 0$. Так как при любом $k = i\varkappa$ $(\varkappa > 0)$ эта последовательность сходится к функции $Q (x, i\varkappa)$, определяемой в $\Omega^\pm$ равенствами (5.4) — (5.6), то отсюда в силу теоремы Витали следует, что при каждом $x \in \Omega^\pm$ она сходится к некоторой аналитической функции $Q (x, k)$ при всех k $(\operatorname{Im} k > 0)$, причем сходимость равномерна по k, находящемся в любой ограниченной подобласти полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$, лежащей на положительном расстоянии от оси $\operatorname{Im} k = 0$. Учитывая также, что $u^{(s)} (x, k)$ ограничены в $\Omega_{2\varepsilon}^+ \setminus \Omega_\varepsilon^\pm$ (равномерно по s), и используя представление (5.31), нетрудно убедиться, что последовательность $\{u^{(s)} (x, k)\}$ сходится и в метрике $C^1(\Omega')$, если Ω' лежит в $\Omega^+ \cup \Omega^-$ на положительном расстоянии от $E \cup \bar{E}$.

Остается показать, что предел $Q (x, k)$ при всех комплексных k $(\operatorname{Im} k > 0)$ определяется равенствами (5.4) — (5.6). Для этого, очевидно, нужно доказать, что функция $Q (x, k)$ аналитическая в верхней полуплоскости k. Но это следует из аналитичности решений $\psi_\pm(x) = \psi_\pm (x, k)$ уравнений (5.5), (5.6). Так как правая часть в (5.5), (5.6) аналитическая по k, то, как известно [68], достаточно доказать, что уравнения (5.5), (5.6) однозначно разрешимы в $L_2 (E)$ при любом k из верхней полуплоскости и при любой правой части из $L_2 (E)$. Последнее вытекает из фредгольмовости этих уравнений и следующей леммы.

Лемма 5.1. *Пусть E — ограниченная область на Γ с гладким краем (или объединение конечного числа непересекающихся областей такого же вида), а $p (x)$ — положительная, непрерывная и ограниченная функция на $\bar{E}$. Тогда, если $h \geqslant 0$ и $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, интегральные уравнения*

$$\frac{2}{k} \operatorname{tg} \frac{kh}{2} \psi_+ (x) + p (x) \int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi |x-\xi|} \psi_+ (\xi)\, d\Gamma_\xi = 0, \quad x \in E, \tag{5.5'}$$

$$-\frac{2}{k} \operatorname{ctg} \frac{kh}{2} \psi_- (x) + p (x) \int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi |x-\xi|} \psi_- (\xi)\, d\Gamma_\xi = 0, \quad x \in E, \tag{5.6'}$$

не имеют ненулевых решений. Утверждение леммы остается в силе, если E — произвольная конечная система гладких поверхностей в R_3, замкнутых или с гладким краем.

Доказательство. Запишем оба уравнения в виде

$$\Lambda(k)\psi(x)+p(x)\int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi|x-\xi|}\psi(\xi)\,d\Gamma_\xi=0, \tag{5.32}$$

где $\Lambda(k)=\frac{2}{k}\operatorname{tg}\frac{kh}{2}$ для уравнения (5.5′) и $\Lambda(k)=-\frac{2}{k}\operatorname{ctg}\frac{kh}{2}$ для уравнения (5.6′). Случай $\Lambda(k)=0$ $\left(k=\pm\frac{\pi}{h}2m\right.$ или $k=\pm\frac{\pi}{h}(2m-1)$, $\left.m=1, 2, \ldots\right)$ рассмотрен в работе [28]. Поэтому предположим, что $\Lambda(k)\neq 0$. В этом случае, как известно [35], функция $\psi(x)$ в области E непрерывна и ограничена.

Рассмотрим во всем пространстве функцию

$$v(x, k)=\int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\psi(\xi)\,d\Gamma_\xi.$$

Очевидно, $v(x, k)$ вне множества E удовлетворяет уравнению

$$\Delta v+k^2v=0,$$

а в силу непрерывности и ограниченности $\psi(x)$ на E $v(x)=v(x, k)$ непрерывна во всем пространстве, имеет непрерывные нормальные производные на E и

$$|\operatorname{grad} v(x)|=o\left(\frac{1}{\rho(x)}\right), \tag{5.33}$$

где $\rho(x)$ — расстояние от x до E. Кроме того, из уравнения (5.32) следует, что $\psi(x)=-\frac{p(x)}{\pi\Lambda(k)}v(x)$, $x\in E$, а так как $\psi(x)=-\frac{1}{4\pi}\times$ $\times\left[\left(\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\right)_+-\left(\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\right)_-\right]$, то отсюда получаем соотношение

$$\left(\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\right)_+-\left(\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\right)_-=\frac{4p(x)}{\Lambda(k)}v(x), \quad x\in E, \tag{5.34}$$

где $\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_\pm$ — предельные значения нормальной производной $v(x)$ с разных сторон от E, нормаль ν направлена в сторону, которой соответствует знак «+».

Далее рассмотрим два случая:

1) $\operatorname{Im} k=0$, $\operatorname{Re} k\neq 0$, т. е. $k^2>0$;

2) $\operatorname{Im} k>0$ или $k=0$, т. е. либо $\operatorname{Im} k^2\neq 0$, либо $k^2\leqslant 0$.

В первом случае $v(x, k)$ удовлетворяет таким условиям излучения на бесконечности: $\frac{\partial v}{\partial R}-ikv=o\left(\frac{1}{R}\right)$, $v=O\left(\frac{1}{R}\right)$, $R=|x|\to\infty$.

Пусть Σ_ρ — гладкая поверхность, охватывающая E и состоящая из двух параллельных E кусков и части трубчатой поверхности радиуса ρ, охватывающей край E. Применяя к функциям $v(x, k)$ и $\overline{v(x, k)}$ в области Ω_R, заключенной между Σ_ρ и сферой Σ_R достаточно большого радиуса R, вторую формулу Грина, получаем

$$0 = \int_{\Omega_R} [\bar{v}(\Delta v + k^2 v) - v(\Delta\bar{v} + k^2\bar{v})]\, dx = \int_{\Sigma_R \cup \Sigma_\rho} \left(\bar{v}\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu}\right) d\Gamma,$$

где ν — внешняя нормаль к границе области Ω_R. Отсюда, стягивая Σ_ρ к E и учитывая непрерывность $v(x, k)$ и ее нормальной производной на E, а также оценку (5.33), находим

$$\int_E \left\{\bar{v}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_- - \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_+\right] - v\left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu}\right)_- - \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu}\right)_+\right]\right\} d\Gamma - \\ - \int_{\Sigma_R} \left(\bar{v}\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu}\right) d\Gamma = 0.$$

Так как $\operatorname{Im}\Lambda(k) = 0$ при $\operatorname{Im} k = 0$, то в силу (5.34) из последнего равенства следует

$$\int_{\Sigma_R} \left(\bar{v}\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu}\right) d\Gamma = 0,$$

откуда, используя условия излучения, находим

$$\int_{\Sigma_R} |v|^2\, d\Gamma \to 0 \quad \text{при } R \to \infty.$$

Как известно [14], этого достаточно для того, чтобы сделать заключение о тождественном равенстве функции $v(x, k)$ нулю. Следовательно,

$$\psi(x) = -\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_+ - \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_-\right] \equiv 0.$$

Перейдем ко второму случаю. Применим теперь в той же области Ω_R к функциям $v(x, k)$ и $\overline{v(x, k)}$ первую формулу Грина:

$$0 = \int_{\Omega_R} \bar{v}(\Delta v + k^2 v)\, dx = k^2 \int_{\Omega_R} |v|^2\, dx - \int_{\Omega_R} |\nabla v|^2\, dx + \int_{\Sigma_R \cup \Sigma_\rho} \bar{v}\frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\Gamma.$$

Стянем снова Σ_ρ к E, используя указанные свойства $v(x, k)$, а затем устремим R к бесконечности, учитывая при этом оценки $|v(x, k)| = O\left(\frac{1}{R}\right)$ и $|\operatorname{grad} v(x, k)| = O\left(\frac{1}{R^2}\right)$, которые вытекают непосредственно из вида $v(x, k)$. В результате получаем

$$\int_E \bar{v}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_- - \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_+\right] d\Gamma - \int |\nabla v|^2\, dx + k^2 \int |v|^2\, dx = 0.$$

Отсюда в силу соотношения (5.34) следует

$$-\frac{4}{\Lambda(k)} \int_E p\, |v|^2\, d\Gamma - \int |\nabla v|^2\, dx + k^2 \int |v|^2\, dx = 0. \qquad (5.35)$$

Если $k^2 \leqslant 0$, т. е. $\operatorname{Re} k = 0$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, то $\Lambda(k) > 0$ и из равенства (5.35) заключаем, что $v(x, k) \equiv 0$. Если $\operatorname{Im} k^2 \neq 0$, т. е. $\operatorname{Re} k \neq 0$ и $\operatorname{Im} k \neq 0$, то, отделяя в (5.35) мнимую часть, находим

$$\frac{4 \operatorname{Im} \Lambda(k)}{|\Lambda(k)|^2 \operatorname{Im} k^2} \int_E p\,|v|^2\,d\Gamma + \int |v|^2\,dx = 0.$$

Вводя обозначения $\operatorname{Im} k = k_1$, $\operatorname{Re} k = k_2$ и используя выражения для $\Lambda(k)$, получаем

$$\frac{4 \operatorname{Im} \Lambda(k)}{|\Lambda(k)|^2 \operatorname{Im} k^2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\left|\sin \dfrac{kh}{2}\right|^2}\left(\dfrac{\operatorname{sh} k_2 h}{k_2} - \dfrac{\sin k_1 h}{k_1}\right), & \Lambda(k) = \dfrac{2}{k}\operatorname{tg}\dfrac{kh}{2}, \\ \dfrac{1}{2\left|\cos \dfrac{kh}{2}\right|^2}\left(\dfrac{\operatorname{sh} k_2 h}{k_2} - \dfrac{\sin k_1 h}{k_1}\right), & \Lambda(k) = -\dfrac{2}{k}\operatorname{ctg}\dfrac{kh}{2}. \end{cases}$$

Так как $\dfrac{\operatorname{sh} k_2 h}{k_2} \geqslant \left|\dfrac{\sin k_1 h}{k_1}\right|$, $p = p(x) \geqslant 0$, то отсюда заключаем, что $v(x, k) \equiv 0$. Следовательно, $\psi(x) = -\dfrac{1}{4\pi}\left[\left(\dfrac{\partial v}{\partial \nu}\right)_+ - \left(\dfrac{\partial v}{\partial \nu}\right)_-\right] \equiv 0$. Таким образом, лемма 5.1, а значит, и теорема 5.1 доказаны.

§ 2. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Изучим сначала поведение решений $\psi_\pm(x, k)$ уравнений (5.5), (5.6) при малых $\tilde{p}(x)$ и $\operatorname{Im} k$. Для этого введем малый параметр θ, положив $\tilde{p}(x) = \theta p_0(x)$. Обозначим через $\psi_0(x)$ решение уравнения

$$\int_E \frac{e^{ik_1|x-\xi|}}{\pi|x-\xi|}\psi_0(\xi)\,d\Gamma_\xi = u_+(x, k_1), \quad x \in E, \tag{5.36}$$

где $k_1 = \operatorname{Re} k$. Существование и единственность решения этого уравнения доказаны в работе [28].

Лемма 5.2. *Пусть $k = k_1 + ik_2$ и $k_2 = o(\theta)$. Тогда при $\theta \to 0$ существуют пределы*

$$\lim_{\theta \to 0} \int_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|}\psi_\pm(\xi, k)\,d\Gamma_\xi = \begin{cases} 0, & k_1 \neq k_\pm(m), \\ \displaystyle\int_E \frac{e^{ik_1|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|}\psi_0(\xi)\,d\Gamma_\xi, & k_1 = k_\pm(m), \end{cases}$$

где $k_+(m) = \pm\dfrac{2\pi m}{h}\cos\varphi$, $k_-(m) = \pm\dfrac{\pi(2m-1)}{h}\cos\varphi$, $m = 1, 2, \ldots$

При этом по x предел существует и в метрике $C^1(\Omega)$, где Ω — произвольная область, лежащая на положительном рас-

стоянии от E, а по $k_1 = \operatorname{Re} k$ — равномерно на любом ограниченном замкнутом множестве, не содержащем точек $k_\pm(m)$, $m = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Запишем оба уравнения (5.5) и (5.6) в виде

$$\Lambda(k)\psi(x) + \theta p_0(x)\int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{\pi|x-\xi|}\psi(\xi)\,d\Gamma_\xi = \theta p_0(x)u_+(x, k) \qquad (5.37)$$

и рассмотрим сначала простой случай, когда $\Lambda(k_1) \neq 0$, т. е. $k_1 \neq k_+(m)$ в (5.5) и $k_1 \neq k_-(m)$ в (5.6). Тогда уравнение (5.37) удобно представить в операторном виде в пространстве $C(E)$:

$$(I + \theta A_k)\psi = \theta u_k, \qquad (5.38)$$

где $u_k = \dfrac{p_0(x)}{\Lambda(k)}u_+(x, k) \in C(E)$, I — тождественный оператор, A_k — ограниченный оператор, действующий из $C(E)$ в $C(E)$ по формуле

$$[A_k\psi](x) = \frac{p_0(x)}{\pi\Lambda(k)}\int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\psi(\xi)\,d\Gamma_\xi.$$

Пусть F — произвольное ограниченное множество на оси $\operatorname{Im} k = k_2 = 0$, не содержащее нулей $\Lambda(k)$. Если $k_1 \in F$, то $\|u_k\|_{C(E)} < C$ и $\|A_k\|_{C(E)} < C$, а значит, при достаточно малых θ $\|(I + \theta A_k)^{-1}\|_{C(E)} < C$, где постоянные C не зависят от k ($k_1 \in F$). Поэтому в силу (5.38)

$$\psi = \theta(I + \theta A_k)^{-1}u_k \to 0 \text{ при } \theta \to 0,$$

откуда, очевидно, вытекает доказываемое утверждение при $k_1 \neq k_\pm(m)$.

Перейдем к случаю $\Delta(k_1) = 0$, т. е. $k_1 = \pm\dfrac{2\pi m}{h}\cos\varphi$ в уравнении (5.5) и $k_1 = \pm\dfrac{\pi(2m-1)}{h}\cos\varphi$ в (5.6) ($m = 1, 2, \ldots$). Как будет видно из дальнейшего, здесь удобно все рассуждения проводить в некотором гильбертовом пространстве, а так как решение $\psi_0(x)$ уравнения (5.36) не принадлежит $L_2(E)$ (из-за наличия края у E), то нам придется ввести специальное гильбертово пространство $\mathscr{E}$ зарядов с ограниченной энергией [19].

Рассмотрим линейное многообразие $\mathfrak{M}$ комплексных непрерывных функций на E и введем в нем билинейную форму

$$(\varphi, \psi)_{\mathscr{E}} = \int\limits_E\int\limits_E \frac{\varphi(x)\overline{\psi(y)}}{|x-y|}\,d\Gamma_x d\Gamma_y.$$

Эта форма удовлетворяет условию положительности: $(\varphi, \varphi)_{\mathscr{E}} \geqslant 0$, причем $(\varphi, \varphi)_{\mathscr{E}} = 0$ только при $\varphi = 0$ [19], и, значит, является на $\mathfrak{M}$ скалярным произведением и порождает норму $\|\varphi\|_{\mathscr{E}}^2 =$

$= (\varphi, \varphi)_{\mathcal{E}}$. Пополняя $\mathfrak{M}$ по этой норме, получаем гильбертово пространство $\mathcal{E}$.

Поставим в соответствие каждой функции $\varphi \in \mathfrak{M}$ функцию $u_\varphi(x)$, заданную всюду в R_3 формулой

$$u_\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_E \frac{\varphi(\xi)}{|x-\xi|} d\Gamma_\xi. \tag{5.39}$$

Очевидно, вне E $u_\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, а при $x \to \infty$ $u_\varphi(x) = O\left(\frac{1}{R}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial R} u_\varphi(x) = O\left(\frac{1}{R^2}\right)$, где $R = |x|$. Учитывая это, нетрудно убедиться, что $u_\varphi(x)$ имеет конечную норму Дирихле $\|u_\varphi\|_1$, причем

$$\|u_\varphi\|_1 = \left\{\int |\nabla u_\varphi|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} = \|\varphi\|_{\mathcal{E}}. \tag{5.40}$$

Замыкание множества функций $\{u_\varphi : \varphi \in \mathfrak{M}\}$ по норме Дирихле приводит к полному пространству D_E.

Таким образом, в силу (5.40) с помощью формулы (5.39) устанавливается линейное изометрическое отображение $\mathfrak{M}$ в D_E, которое, очевидно, можно расширить до унитарного оператора U, отображающего $\mathcal{E}$ на D_E.

Можно показать, что D_E есть подпространство гармонических функций в пространстве Дирихле D [19], которое определяется как пополнение по норме $\|u\|_1$ множества дифференцируемых и финитных в R_3 функций, причем относительно скалярного произведения $(u, v) = \int (\nabla u, \nabla \bar{v})\, dx$ справедливо ортогональное разложение $D = D_E \oplus \mathring{D}_E$, где $\mathring{D}_E$ — множество функций из D, равных нулю на E (в смысле $L_2(E)$). Отсюда следует, что оператор проектирования на подпространство D_E не изменяет граничных значений функций на E. Для функций из пространства D справедливо неравенство

$$\int_{S_R} |u|^2 d\Gamma \leqslant \frac{1}{R} \|u\|_1^2,$$

где S_R — произвольная сфера в R_3 радиуса R. Поэтому для любой ограниченной области $G \subset R_3$

$$\|u\|^2_{W_2^1(G)} \leqslant C \|u\|_1^2, \tag{5.41}$$

где постоянная C зависит только от G.

Пусть V — оператор вложения, ставящий в соответствие каждой функции $u(x) \in D$ ее след $u(x)$ на поверхности E как элемент пространства $L_2(E)$. Тогда из (5.41) и теоремы вложения следует, что V вполне непрерывен. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{E}$ линейный оператор

$$A = 4p_0 VU,$$

где p_0 — оператор умножения на ограниченную положительную функцию $p_0(x)$. Из сказанного вытекает, что A вполне непрерывно отображает $\mathscr{E}$ в $L_2(E)$. Пусть $\varphi \in L_2(E)$. Тогда, используя неравенство Коши — Буняковского, запишем

$$\|\varphi\|_{\mathscr{E}}^2 = \int_E \int_E \frac{\varphi(x)\overline{\varphi(y)}}{|x-y|} d\Gamma_x d\Gamma_y \leqslant \left\{\int_E \int_E \frac{|\varphi(x)|^2}{|x-y|} d\Gamma_y d\Gamma_x\right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{\int_E \int_E \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|} d\Gamma_x d\Gamma_y\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant C\|\varphi\|_{L_2(E)}^2,$$

откуда следует, что A вполне непрерывен и как оператор, действующий из $\mathscr{E}$ в $\mathscr{E}$.

Покажем, что A — положительный оператор в $\mathscr{E}$. Для этого заметим, что на плотном в $\mathscr{E}$ множестве $\mathfrak{M}$ он определяется по формуле

$$[A\varphi](x) = \frac{p_0(x)}{\pi} \int_E \frac{\varphi(\xi)}{|x-\xi|} d\Gamma_\xi.$$

Следовательно, при $\varphi \in \mathfrak{M}$

$$(A\varphi, \varphi)_{\mathscr{E}} = \int_E \int_E \left\{\frac{p_0(x)}{\pi} \int_E \frac{\varphi(\xi)}{|x-\xi|} d\Gamma_\xi\right\} \frac{\overline{\varphi(y)}}{|x-y|} d\Gamma_x d\Gamma_y =$$

$$= \int_E \left| \sqrt{\frac{p_0(x)}{\pi}} \int_E \frac{\varphi(\xi)}{|x-\xi|} d\Gamma_\xi \right|^2 d\Gamma_x \geqslant 0,$$

и, значит, $(A\varphi, \varphi)_{\mathscr{E}} \geqslant 0$ для всех $\varphi \in \mathscr{E}$. Пусть для некоторого $\varphi \in \mathscr{E}$ $A\varphi = 0$. Так как $p_0(x) > 0$, то $VU\varphi = 0$. Следовательно, вектор $U\varphi$ в пространстве D одновременно принадлежит взаимно ортогональным подпространствам D_E и $\overset{\circ}{D}_E$. Поэтому $U\varphi = 0$, а так как оператор U унитарен, то $\varphi = 0$. Из всего сказанного вытекает, что спектр оператора A дискретен, причем его собственные значения μ_n положительны, а соответствующая им ортонормированная система собственных функций $\{e_n\}$ полна в пространстве $\mathscr{E}$.

Обозначим через $K_{R'}$ и K_R концентрические шары радиусов R' и R $(R' < R)$, содержащие внутри поверхность E, и рассмотрим функцию

$$v_\varphi^r(x, k) = \frac{r(x)}{4\pi} \int_E \frac{e^{ik|x-\xi|} - 1}{|x-\xi|} \varphi(\xi)\, d\Gamma_\xi, \tag{5.42}$$

где $\varphi(\xi) \in \mathfrak{M}$, а $r(x)$ — трижды непрерывно дифференцируемая функция, равная единице в $K_{R'}$ и нулю вне K_R. Легко видеть, что $v_\varphi^r(x, k) \in D$. Таким образом, на множестве $\mathfrak{M} \subset \mathscr{E}$ определен линейный оператор R_k $(\varphi \to v_\varphi^r(x, k))$ с областью значений в пространстве D. Покажем, что R_k можно расширить до вполне непрерывного оператора, действующего из $\mathscr{E}$ в D. Для этого прежде всего заметим, что $v_\varphi^r(x, k)$ удовлетворяет всюду в R_3 уравнению

$$(\Delta + k^2) v_\varphi^r(x, k) = -k^2 r(x) u_\varphi(x) + F_\varphi(x, k),$$

где $u_\varphi(x)$ определяется по формуле (5.39), а

$$F_\varphi(x, k) = \Delta r(x)\, v_\varphi(x, k) + 2(\nabla r(x), \nabla v_\varphi(x, k)), \tag{5.43}$$

$$v_\varphi(x, k) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}-1}{|x-\xi|}\varphi(\xi)\, d\Gamma_\xi. \tag{5.43'}$$

Учитывая, что $v_\varphi^r(x, k) \equiv 0$ вне K_R, отсюда обычным способом находим

$$\frac{\partial v_\varphi^r(x, k)}{\partial x_j} = -\frac{k^2}{4\pi}\int\limits_{K_R} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\frac{\partial}{\partial \xi_j}[r(\xi)\, u_\varphi(\xi)]\, d\xi + $$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_R \setminus K_{R'}} \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\frac{\partial}{\partial \xi_j} F_\varphi(\xi, k)\, d\xi. \tag{5.44}$$

Обозначим через $e_\alpha(x, \xi, k)$ D^α-производную ($|\alpha| = 0, 1, 2, 3$) функции $\frac{e^{ik|x-\xi|}-1}{|x-\xi|}$ по переменной x при $x \in K_R \setminus K_{R'}$ и $\xi \in E$. Очевидно, $e_\alpha(x, \xi, k)$ можно продолжить как функцию от ξ в шар $K_{R'}$ так, чтобы она принадлежала по ξ пространству D, по норме в D была ограничена равномерно по $x \in K_R \setminus K_{R'}$ и непрерывно зависела от k. Полученную функцию $\tilde{e}_\alpha(\xi, x, k)$ затем спроектируем на подпространство D_E. Очевидно, проекция $P_E\tilde{e}_\alpha$ обладает такими же свойствами и ее граничные значения на E равны $e_\alpha(x, \xi, k)$.

Рассмотрим вектор

$$\psi_\alpha(x, k) = \psi_\alpha = U^{-1}P_E\tilde{e}_\alpha.$$

Учитывая сказанное выше, заключаем, что $\psi_\alpha = \psi_\alpha(x, k)$ по норме пространства $\mathscr{E}$ ограничен равномерно по $x \in K_R \setminus K_{R'}$ и непрерывно зависит от k. Более того, как показано в работе [29], в силу гладкости $e_\alpha(x, \xi, k)$ по $\xi \in E$ этот вектор является обычной функцией $\psi_\alpha(\eta, x, k)$ на E, гладкой по η во внутренних точках E и такой, что

$$\int\limits_E \frac{|\psi_\alpha(\eta, x, k)|}{|\xi-\eta|}\, d\Gamma_\eta < C. \tag{5.45}$$

Поэтому при $\xi \in E$

$$e_\alpha(x, \xi, k)\Big|_{\xi\in E} = VP_E\tilde{e}_\alpha = VU\psi_\alpha = \frac{1}{4\pi}\int\limits_E \frac{\psi_\alpha(\eta, x, k)}{|\xi-\eta|}\, d\Gamma_\eta\Big|_{\xi\in E}.$$

Отсюда в силу (5.43′) следует, что при $x \in K_R \setminus K_{R'}$

$$D^\alpha v_\varphi(x, k) = \frac{1}{4\pi}(\psi_\alpha(x, k), \bar{\varphi})_{\mathscr{E}},$$

и, значит,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_\varphi(x, k) = (\hat{\psi}_j(x, k), \bar{\varphi})_{\mathscr{E}},$$

где векторы $\hat{\psi}_j(x, k)$ принадлежат $\mathscr{E}$, по норме $\mathscr{E}$ непрерывно зависят от k и ограничены равномерно по $x \in K_R \setminus K_{R'}$.

Из последнего равенства видно, что отображение $\varphi \to \frac{\partial}{\partial x_j} F_\varphi$, определяемое для элементов $\varphi \in \mathfrak{M}$ по формуле (5.43), можно расширить до ограниченного оператора, действующего из $\mathscr{E}$ в $L_2(K_R \setminus K_{R'})$, причем последний по норме непрерывно зависит от k. В силу (5.41) и унитарности U это справедливо и для оператора, отображающего $\varphi \in \mathfrak{M}$ в функцию $\frac{\partial}{\partial x_j}[r(x)\,u_\varphi(x)] \in L_2(K_R)$.

Рассмотрим теперь равенства (5.44), $j = 1, 2, 3$. Поскольку ядро $\frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}$ имеет слабую особенность, оно порождает вполне непрерывный оператор, действующий из $L_2(K_R)$ в $L_2(K_R)$, причем последний, как легко видеть, по норме непрерывно зависит от k. Из приведенных рассуждений следует, что отображение $\varphi \to v_\varphi^r(x, k)$, определенное на функциях φ из $\mathfrak{M}$ по формуле (5.42), можно расширить до вполне непрерывного оператора R_k, действующего из $\mathscr{E}$ в D и непрерывно зависящего по норме от k.

Введем еще оператор

$$B_k = U^{-1} P_E R_k,$$

где P_E — проектор на подпространство D_E. Из свойств операторов U, P_E и R_k вытекает, что B_k — вполне непрерывный оператор, действующий из $\mathscr{E}$ в $\mathscr{E}$ и по норме непрерывно зависящий от k. Так как $r(x) \equiv 1$ при $x \in K_{R'}$, а P_E не изменяет граничных значений функций на E, то из определения операторов R_k и A следует, что при $x \in E$ для любого $\varphi \in \mathfrak{M}$ выполняется равенство

$$\frac{p_0(x)}{\pi} \int_E \frac{e^{ik|x-\xi|} - 1}{|x-\xi|} \varphi(\xi)\, d\Gamma_\xi = AB_k\varphi, \tag{5.46}$$

в котором правая часть имеет смысл уже при всех $\varphi \in \mathscr{E}$.

Рассмотрим функцию $u_+(x, k)$ из правой части (5.37). Учитывая гладкость $u_+(x, k)$ по x, непрерывную зависимость ее от k и поступая так же, как в случае функций $e_\alpha(x, \xi, k)$, легко показать, что при $x \in E$ справедливо равенство

$$p_0(x)\, u_+(x, k) = Ag_k,$$

где g_k принадлежит $\mathscr{E}$ и по норме непрерывно зависит от k. Заметим, что согласно работе [28] $g_k = g_k(\eta)$ — обычная гладкая функция на E, растущая к краю E и удовлетворяющая неравенству типа (5.45).

Покажем теперь, что при $\theta \to 0$, $\operatorname{Im} k = k_2 = o(\theta)$, $\operatorname{Re} k = k_1$ $(\Lambda(k_1) = 0)$ решение $\psi(x)$ уравнения (5.37) стремится по норме пространства $\mathscr{E}$ к решению $\psi_0(x)$ уравнения (5.36). Для этого умножим уравнение (5.36) на функцию $p_0(x)$ и преобразуем его к виду

$$\frac{p_0(x)}{\pi}\int\limits_E \frac{\psi_0(\xi)}{|x-\xi|}\,d\Gamma_\xi + \frac{p_0(x)}{\pi}\int\limits_E \frac{e^{ik_1|x-\xi|}-1}{|x-\xi|}\,\psi_0(\xi)\,d\Gamma_\xi =$$

$$= p_0(x)\,u_+(x, k).$$

Пользуясь введенными выше операторами и формулой (5.46), запишем это равенство в пространстве $\mathscr{E}$:

$$A\psi_0 + AB_{k_1}\psi_0 = Ag_{k_1}. \qquad (5.36')$$

Отсюда, учитывая, что $A\varphi = 0$ только при $\varphi = 0$, получаем

$$\psi_0 + B_{k_1}\psi_0 = g_{k_1}.$$

Докажем, что оператор $I + B_k$ при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ имеет ограниченный обратный оператор. Поскольку B_k — вполне непрерывный оператор, достаточно показать, что однородное уравнение

$$\psi + B_k\psi = 0 \qquad (5.47)$$

при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ не имеет ненулевых решений. Из формулы (5.44) видно, что при любом векторе φ из $\mathscr{E}$ производные функции $R_k\varphi \in D$ удовлетворяют в окрестности поверхности E условию Гельдера. Как показано в работе [28], этого достаточно для того, чтобы было справедливо представление

$$P_E R_k\varphi = \frac{1}{4\pi}\int\limits_E \frac{\mu(\xi, k)}{|x-\xi|}\,d\Gamma_\xi = U\mu,$$

где $\mu(\xi, k)$ — гладкая во внутренних точках E функция, причем

$$\int\limits_E \frac{|\mu(\xi, k)|}{|x-\xi|}\,d\Gamma_\xi \leqslant C. \qquad (5.45')$$

Согласно определению B_k $B_k\varphi = \mu$, и, значит, для любого $\varphi \in \mathscr{E}$ вектор $B_k\varphi$ — обычная гладкая во внутренних точках E функция, удовлетворяющая неравенству (5.45'). Очевидно, если ψ — какое-нибудь решение уравнения (5.47), то оно обладает такими же свойствами. Поэтому можно всюду в R_3 рассмотреть функцию

$$v(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\,\psi(\xi)\,d\Gamma_\xi.$$

Из неравенства (5.45') следует, что $v(x)$ непрерывна в R_3. Кроме того, вне поверхности E она удовлетворяет уравнению $\Delta v + k^2 v = 0$, а на бесконечности — условиям излучения (если $\operatorname{Im} k = 0$) или экспоненциально убывает (если $\operatorname{Im} k > 0$). Согласно определению B_k и уравнению (5.47)

$$U\psi + P_E R_k\psi = 0,$$

или

$$VU\psi + VR_k\psi = \frac{1}{4\pi}\int\limits_E \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\,\psi(\xi)\,d\Gamma_\xi\Big|_E = 0,$$

т. е. $v(x)=0$ на E. Из перечисленных свойств $v(x)$ следует, что $v(x)\equiv 0$ [28], а так как $\psi(x)=\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_+-\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_-\right]$, то и $\psi(x)\equiv$ $\equiv 0$.

Таким образом, оператор $I+B_{k_1}$ имеет ограниченный обратный оператор, а уравнение (5.36′) — единственное решение $\psi_0=\psi_0(x)$, для которого, как легко видеть, справедливо неравенство (5.45). Значит, $\psi_0(x)$ удовлетворяет уравнению (5.36) в обычном смысле.

Поступая так же, как с уравнением (5.36), преобразуем уравнение (5.37) к виду

$$\varepsilon\psi+A\psi+AB_{k_1}\psi+A(B_k-B_{k_1})\psi=Ag_{k_1}+A(g_k-g_{k_1}),\quad (5.48)$$

где $\varepsilon=\frac{\Lambda(k)}{\theta}$. Из явных выражений для $\Lambda(k)$ видно, что при малых k_2 $\Lambda(k)\sim i\frac{\tilde{h}}{k_1}k_2+\frac{\tilde{h}}{k_1}k_2^2$ $(\Lambda(k_1)=0)$. Таким образом, если $k_2=o(\theta)$, то при $\theta\to 0$ $\varepsilon\to 0$, оставаясь в правой полуплоскости. Так как оператор A положительный, то существует ограниченный оператор $(\varepsilon I+A)^{-1}$ и, следовательно, уравнение (5.48) можно записать в виде

$$\psi+B_{k_1}\psi-\varepsilon(\varepsilon I+A)^{-1}B_{k_1}\psi+(\varepsilon I+A)^{-1}A(B_k-B_{k_1})\psi=$$
$$=g_{k_1}-\varepsilon(\varepsilon I+A)^{-1}g_{k_1}+(\varepsilon I+A)^{-1}A(g_k-g_{k_1}).\quad (5.48')$$

Учитывая положительность оператора A и $\operatorname{Re}\varepsilon$, из равенства $(\varepsilon I+A)^{-1}A=I-\varepsilon(\varepsilon I+A)^{-1}$ заключаем, что норма $\|(\varepsilon I+A)^{-1}A\|$ ограничена равномерно по ε. Поэтому в силу непрерывной зависимости оператора B_k и вектора g_k от параметра k

$$\lim_{k\to k_1}\|(\varepsilon I+A)^{-1}A(B_k-B_{k_1})\|=0,\quad \lim_{k\to k_1}\|(\varepsilon I+A)^{-1}A(g_k-g_{k_1})\|_{\mathscr{E}}=0.\quad (5.49)$$

Докажем равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\varepsilon(\varepsilon I+A)^{-1}B_{k_1}\|=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\|\varepsilon(\varepsilon I+A)^{-1}g_{k_1}\|_{\mathscr{E}}=0.\quad (5.50)$$

Оператор B_{k_1} вполне непрерывный, и, следовательно, его можно представить в виде суммы конечномерного оператора $B_{k_1}^N$ с N-мерной областью значений $\mathscr{E}_N$ и оператора $B_{k_1}^0$ с малой нормой (при достаточно большом N). Пусть $\{g_n\}_1^N$ — ортонормированный базис в $\mathscr{E}_N$. Тогда для любого $g\in\mathscr{E}$

$$\varepsilon(\varepsilon I+A)^{-1}B_{k_1}g=\sum_{n=1}^{N}(B_{k_1}^N g, g_N)_{\mathscr{E}}\,\varepsilon(\varepsilon I+A)^{-1}g_n+\varepsilon(\varepsilon I+A)^{-1}B_{k_1}^0 g,$$

и, значит,

$$\|\varepsilon(\varepsilon I+A)^{-1}B_{k_1}g\|_{\mathscr{E}}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{N}\|\varepsilon(\varepsilon I+A)^{-1}g_n\|_{\mathscr{E}}\|B_{k_1}^{N}\|+\right.$$

$$\left.+\|\varepsilon(\varepsilon I+A)^{-1}\|\|B_{k_1}^{0}\|\right)\|g\|_{\mathscr{E}}.$$

Отсюда следует, что для доказательства равенств (5.50) нужно показать, что для любого вектора $g\in\mathscr{E}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\varepsilon(\varepsilon I+A)^{-1}g\|_{\mathscr{E}}=0. \tag{5.51}$$

Пусть $\{\mu_n\}$ — последовательность собственных значений оператора A, а $\{e_n\}$ — соответствующая ортонормированная последовательность собственных векторов. Тогда, как известно, справедливо неравенство

$$\|\varepsilon(\varepsilon I+A)^{-1}g\|_{\mathscr{E}}^2\leqslant\sum_{1}^{\infty}\frac{|\varepsilon|^2}{|\varepsilon+\mu_n|^2}|(g,e_n)_{\mathscr{E}}|^2.$$

Учитывая сходимость ряда

$$\sum_{1}^{\infty}|(g,e_n)_{\mathscr{E}}|^2=\|g\|_{\mathscr{E}}^2,$$

а также неравенство $\left|\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+\mu_n}\right|<1$ (справедливое в силу положительности $\operatorname{Re}\varepsilon$ и μ_n), отсюда обычным способом выводим (5.51). Сравнивая уравнения (2.36′) и (5.48′) и вспоминая, что оператор $I+B_{k_1}$ имеет ограниченный обратный, из (5.49) и (5.50) заключаем, что при $\theta\to 0$ ($\operatorname{Im}k=k_2=o(\theta)$, а $\operatorname{Re}k=k_1$, $\Lambda(k_1)=0$) решение $\psi(x)$ уравнения (5.37) в норме пространства $\mathscr{E}$ сходится к решению $\psi_0(x)$ уравнения (5.36). Следовательно, в силу свойств операторов U и R_k

$$(U+R_k)\psi\to(U+R_{k_1})\psi_0 \text{ при } \theta\to 0, \qquad k=k_1+io(\theta),$$

а так как при $x\in K_{R'}$

$$[(U+R_k)\psi](x)=\frac{1}{4\pi}\int_E\frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|}\psi(\xi)\,d\Gamma_\xi,$$

$$[(U+R_{k_1}\psi_0](x)=\frac{1}{4\pi}\int_E\frac{e^{ik_1|x-\xi|}}{|x-\xi|}\psi_0(\xi)\,d\Gamma_\xi,$$

то отсюда вытекает утверждение леммы.

Простым следствием леммы 5.2 и теоремы 5.1 является теорема 5.2, которая показывает, что в физической системе, описываемой краевой задачей (5.1)—(5.3), наблюдаются резонансные явления при частотах $k=\pm\dfrac{\pi m}{h}\cos\varphi$, $m=1, 2, \ldots$

Теорема 5.2. *Пусть F — произвольное ограниченное замкнутое множество оси* $\operatorname{Im} k = 0$, *не содержащее точек* $\pm \frac{\pi m}{h} \cos\varphi$ ($m = 1, 2, \ldots$), *и* $\tilde{\Omega}^{\pm}$ — *произвольные подобласти в* $\Omega^{\pm}$, *находящиеся на положительном расстоянии от* E *или* $\bar{E}$. *Тогда, каковы бы ни были* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *и* $N < \infty$, *найдется такое множество* $\sigma = \bigcup\limits_{\alpha} \sigma_{\alpha}$ *на* E ($\operatorname{mes}_{\Gamma} \sigma < \delta$) *и такое* $\operatorname{Im} k = \bar{k}_2 < \delta$, *что для решения* $u(x, k)$ *краевой задачи* (5.1)—(5.3) с $\operatorname{Im} k = \bar{k}_2$ *и расположением каналов, соответствующим* σ, *будут выполняться неравенства*

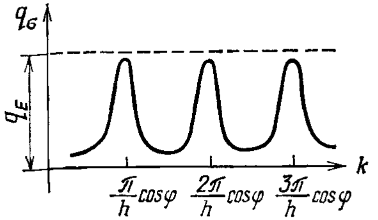

РИС. 12.

1) *при* $k_1 = \operatorname{Re} k \in F$

$$|u(x, k) - u_{+}(x, k_1)| < \varepsilon, \quad \text{если } x \in \tilde{\Omega}^{+},$$

$$|u(x, k)| < \varepsilon, \quad \text{если } x \in \tilde{\Omega}^{-};$$

2) *при* $k_1 = \operatorname{Re} k = \pm \frac{\pi m}{h} \cos\varphi$, $m = 1, 2, \ldots, N$,

$$|u(x, k) - u_E(x, k_1)| < \varepsilon, \quad \text{если } x \in \tilde{\Omega}^{+},$$

$$|u(x, k) - (-1)^m u_E^{\tilde{h}}(x, k_1)| < \varepsilon, \quad \text{если } x \in \tilde{\Omega}^{-}.$$

Здесь $u_{+}(x, k_1)$ *и* $u_E(x, k_1)$ — *решения задачи* (5.1)—(5.3) *соответственно в областях* Ω^{+} и $\Omega_E = R_3 \setminus (\Gamma \setminus E)$, а $u_E^{\tilde{h}}(x, k_1) = u_E\left(x - \frac{h}{\cos\varphi} m, k_1\right)$.

Доказательство теоремы вытекает непосредственно из теоремы 5.1 и леммы 5.2.

Из теоремы 5.2 следует, что даже при очень малом суммарном сечении каналов поток q_σ энергии поля $u(x, k)$, проходящий через каналы в область Ω^{-}, при частотах $k_1 = \operatorname{Re} k = \pm \frac{\pi m}{h} \cos\varphi$, $m = 1, 2, \ldots$, близок к потоку q_E поля $u_E(x, k)$ (создаваемого также источниками $f(x) \in \Omega^{+}$), проходящему в нижнее полупространство через отверстие E в экране Γ. В то же время при всех других частотах поток q_σ близок к нулю, т. е. график $q_\sigma(k_1)$ имеет резкие всплески в окрестностях точек $\frac{\pi m}{h} \cos\varphi$, $m = 1, 2, \ldots$ (рис. 12). Указанные резонансы возникают, когда на длине канала $\tilde{h} = \frac{h}{\cos\varphi}$ укладывается целое число полуволн $\frac{\pi}{k_1}$. Аналогичное явление «резонансного прохождения волн» описано в работе [49].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агмон С.*, *Дуглис А.*, *Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, ИЛ, М., 1962.
2. *Ахиезер Н. И.*, *Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. «Наука», М., 1966.
3. *Бабич В. М.* К вопросу о распространении функций.— УМН, 1953, 8, 2 (54), 111—113.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. «Наукова думка», К., 1965.
5. *Быховский Э. Б.*, *Смирнов Н. Б.* Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1960, **59**, 3—36.
6. *Вишик М. И.* Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1949, **25** (**67**), 189—234.
7. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем.— Мат. сб., 1965, **68** (**110**): **3**, 373—415.
8. *Гестрин Г. Н.*, *Лундина Д. Ш.*, *Марченко В. А.* Об одном предельном случае второй краевой задачи.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1967, 5, 115—139.
9. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений с особенностями на границе. Автореферат доктор кой диссертации. МГУ, М., 1965.
10. *Котляров В. П.* Первая краевая задача для уравнения теории упругости в области со сложной границей. I, II.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1972, 15, 1 1—141; 189—203.
11. *Котляров В. П.*, *Хруслов Є. Я.* Друга крайова задача лінійної теорії пружності в областях з дрібнозернистою границею.— ДАН УРСР. Сер. А, 1972, 5, 415—418.
12. *Котляров В. П.*, *Хруслов Е. Я.* Об уравнении упругой среды с большим числом мелких абсолютно твердых включений.— В кн.: Математическая физика и функциональный анализ, 3. Изд. ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1972, 39—51.
13. *Кудрявцев Л. Д.* Прямые и обратные теоремы вложения. Приложение к решению вариационным методом эллиптических уравнений.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1959, **55**, 1—181.
14. *Купрадзе В. Д.* Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. Гостехиздат, М., 1950.
15. *Ладыженская О. А.* О решении общей задачи дифракции. — ДАН СССР, 1954. **96**, 433—436.
16. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. «Наука», М., 1970.
17. *Ладыженская О. А.*, *Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. «Наука», М., 1964.
18. *Ламб Г.* Гидродинамика. Гостехиздат, М., 1947.

19. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. «Наука», М., 1966.
20. *Левин Л.* Современная теория волноводов. ИЛ, М., 1954.
21. *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. «Мир», М., 1971.
22. *Лопатинский Я. Б.* Фундаментальные решения системы дифференциальных уравнений эллиптического типа.— УМЖ, 1951, 3, 290—316.
23. *Лурье А. И.* Теория упругости. «Наука», М., 1970.
24. *Львов В. А.* Предельный случай одной краевой задачи в области с многослойной границей.— В кн.: Математическая физика и функциональный анализ, 1. Изд. ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1969, 84—99.
25. *Львов В. А., Хруслов Е. Я.* Исследование решения второй краевой задачи в области с границей, состоящей из большого числа продырявленных поверхностей.— В кн.: Математнческая физика и функциональный анализ, 2. Изд. ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1971, 76—98.
26. *Мазья В. Г.* Полигармоническая емкость в теории первой краевой задачи.— Сиб. мат. журн., 1956, 6, 127—147.
27. *Мазья В. Г.* P-проводимость и теоремы вложения пространств в пространство C.— ДАН СССР, 1961, **140**, 299—302.
28. *Марченко В. А., Маслов К. В.* Коротковолновое приближение в задаче о дифракции на плоском экране.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1966, 3, 158—182.
29. *Марченко В. А., Сологуб В. Г.* Возбуждение кольцевого волновода диполем.— Радиотехника. Республиканский межведомственный сборник, 1965, 1, 3—13.
30. *Марченко В. А. Сузиков Г. В.* Вторая краевая задача в областях со сложной границей.— Мат. сб., 1966, **69 (111)**, 35—60.
31. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи с мелкозернистой границей.— Мат. сб., 1964, **65 (107)**, 458—472.
32. *Михайленко В. Г.* Краевые задачи с мелкозернистой границей для эллиптических дифференциальных операторов. Автореферат кандидатской диссертации. ХГУ, Харьков, 1970.
33. *Мойжес Б. Я.* Электростатические усредненные граничные условия для металлических сеток.— ЖТФ, 1955, **25**, 1—2.
34. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. «Мир», М., 1965.
35. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, М., 1959.
36. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. ГИТТЛ, М., 1952.
37. *Никольский С. М.* О теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных.— УМН, 1961, **16**, 63—114.
38. *Олейник О. А.* О свойствах решений краевых задач для уравнений эллиптического типа.— Мат. сб., 1952, **30 (72)**, 695—702.
39. *Олейник О. А.* Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентамн.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, **25**, 3—20.
40. *Подольский Е. Н.* Математические вопросы теории дифракции на плоской периодической решетке.— В кн.: Третий Всесоюзный симпозиум по дифракции. Рефераты докладов. Тбилиси, 1964, 119—121.
41. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. Физматгиз, М., 1962.
42. *Рейнер М.* Реология. «Наука», М., 1965.
43. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. ИЛ, М., 1954.
44. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. ГИТТЛ, М., 1955.
45. *Слободецкий Л. Н.* Оценка в L_p решений эллиптических систем.— ДАН СССР, 1958, **123**, 616—619.
46. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 5. Физматгиз, М., 1959.
47. *Смирнов Н. Н.* Распространение электромагнитных волн в круговых волноводах с периодическими щелями.— ЖТФ, 1958, **25**, 1494—1504.
48. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, Л., 1950.

49. *Сологуб В. Г., Половников Г. Г., Шестопалов В. П.* Дифракция электромагнитных волн на металлических решетках с узкими щелями.— ЖТФ, 1967, **37**, 666—679.
50. *Солонников В. А.* Оценки решений общих краевых задач для эллиптических систем.— ДАН СССР, 1963, **151**, 783—785.
51. *Сохин А. С.* Об одном предельном случае задачи Дирихле для бигармонического оператора.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1969, 9, 21—49.
52. *Сузиков Г. В.* Третья краевая задача в области со сложной границей.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1966, 3, 135—150.
53. *Сузиков Г. В., Хруслов Е. Я.* О прохождении звуковых волн через тонкие каналы в отражающем слое.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1967. 5, 140—156.
54. *Сузиков Г. В., Хруслов Е. Я.* Об усредиенном граничном условии для задачи диффузии в области с кусочно-полупроницаемой границей.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1967, 4, 146—161.
55. *Фенченко В. Н.* Краевая задача для системы уравнений Максвелла в областях с мелкозернистой границей.— В кн.: Математическая физика и функциональный анализ, 4. Изд. ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1973.
56. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. «Мир», М., 1964.
57. *Хруслов Е. Я.* Первая краевая задача в областях со сложной границей.— Зап. мех.-мат. ф-та Харковск. ун-та и Харьковск. мат. об-ва, 1966, **32**, 3—16.
58. *Хруслов Е. Я.* Об условиях сходимости последовательиости решени первой краевой задачи.— Теория функций, фуикциональиый анализ и их приложения, 1971, 12, 103—110.
59. *Хруслов Е. Я.* О мере, связанной с последовательностью решений первых краевых задач.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1972, 16, 28—38.
60. *Хруслов Е. Я.* Задача Дирихле в областях со случайной границей.— Вестн. Харьковск. ун-та. Сер. мех.-мат., 1970, 34, 14— 7.
61. *Хруслов Е. Я.* Метод ортогональных проекций и задача Дирихле в областях с мелкозернистой границей.— Мат. сб., 1972, **88** (**130**), 38—60.
62. *Хруслов Є. Я.* Перша крайова задача для еліптичного самоспряженого оператора в області з дрібнозернистою границею.— ДАН УРСР. Сер. А, 1972, 4, 343—346.
63. *Хруслов Е. Я.* О краевой задаче Неймана в областях со сложной границей.— Мат. сб., 1970, **83** (**125**), 556—574.
64. *Хруслов Е. Я.* О резонансных явлениях в одной задаче дифракций.— Теория функций, функциональиый анализ и их приложеиия, 1958, 6, 111—129.
65. *Шефтель З. Г.* Энергетические неравенства и общие граничные задачи для ллиптических уравнений с разрывными коэффициентами.— Сиб. мат. журн., 1965, 6, 638—668.
66. *Шефтель З. Г.* Общая теория краевых задач для эллиптических систем с разрывными коэффициентами — УМЖ, 1966, 18, 132—136.
67. *Marĉenko V. A.* Randwertaufgaben in Gebieten mit feinkörnigem Rand.—Elliptische Differentialgleichungen, 2. Berlin, 1971, 177—180.
68. *Tamarkin J. D.* On Fredholm's integral equations whose kernels are analytic in a parameter.— Ann. of Math., 1927, **28**.
69. *Weyl H.* Method of ortogonal project on in potential theory.— Duke Math. J., 194 , **7**, 417—444.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Введение 5

§ 1. Первая краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка 10

§ 2. Первая краевая задача для эллиптических систем уравнений произвольного порядка 18

§ 3. Вторая краевая задача 25

Глава первая. Задача Дирихле для оператора Лапласа 34

§ 1. Некоторые сведения из теории потенциала 34

§ 2. Постановка задачи 37

§ 3. Основные теоремы 38

§ 4. Некоторые частные случаи 53

§ 5. Мера, связанная с последовательностью множеств $F^{(s)}$ 58

§ 6. Оценка точности приближений 67

Задачи 94

Глава вторая. Вариационные методы исследования краевых задач в областях с мелкозернистой границей 95

§ 1. Пространства дифференцируемых функций и вариационные методы 95

§ 2. Функциональная схема 105

§ 3. Задача Дирихле 114

§ 4. Общий случай поверхностного распределения множеств $F^{(s)}$ 137

§ 5. Некоторые примеры 157

Задачи 169

Глава третья. Вторая краевая задача 170

§ 1. Вторая краевая задача для эллиптических уравнений второго порядка. Поверхностное распределение множеств $F^{(s)}$ 170

§ 2. Некоторые частные случаи 187

§ 3. Объемное распределение множеств $F^{(s)}$ (случай слабого возмущения границей) 196

§ 4. Случай сильного возмущения границей при объемном распределении $F^{(s)}$ 209

Задачи 211

Глава четвертая. Некоторые приложения и обобщения 212

§ 1. Поведение разложений единицы операторов, порожда-

емых краевыми задачами в областях с мелкозернистой границей 212
§ 2. Поведение решений некоторых эволюционных уравнений 216
§ 3. Задача о рассеянии волн на густых металлических решетках 218
§ 4. Первая краевая задача в областях со случайной мелкозернистой границей 221
§ 5. Краевые задачи для уравнений Навье—Стокса . . 229
Задачи 249

Глава пятая. Вторая краевая задача в областях с каналами 250
§ 1. Постановка задачи и вывод интегрального представления для предельной функции 250
§ 2. Резонансные явления 265

Литература 275

ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ МАРЧЕНКО
ЕВГЕНИЙ ЯКОВЛЕВИЧ ХРУСЛОВ

Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей

Печатается по постановлению ученого совета Физико-технического института низких температур АН УССР

Редактор Е. Л. Орлик
Художественный редактор И. П. Антонюк
Оформление художника В. М. Флакса
Технический редактор М. А. Притыкина
Корректор Р. С. Коган

Сдано в набор 4.I 1974 г. Подписано к печати 19.VI 1974 г.
БФ 31796. Зак. № 3—3173. Изд. № 299.
Тираж 1800. Бумага № 1, 60×90 1/16.
Печ. физ. листов 17,5. Условн. печ. листов 17,5.
Учетно-изд. листов 17,5. Цена 1 руб. 98 коп.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Отпечатано с матриц республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» в Нестеровской городской типографии Львовского облполиграфиздата, г. Нестеров, ул. Горького, 8, зак. 5411.