А. И. Маркушевич

ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

*

А. И. МАРКУШЕВИЧ

ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1951 ЛЕНИНГРАД

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 4

Очерк первый. Накопление основных фактов в XVIII столетии 5

Очерк второй. Построение систематической теории аналитических функций 49

Очерк третий. Значение геометрии Н. И. Лобачевского в теории аналитических функций 87

Очерк четвёртый. Идеи П. Л. Чебышева о приближении функций и их развитие в теории аналитических функций 94

Очерк пятый. Работы советских математиков по теории аналитических функций, связанные с задачами механики, теории функций действительного переменного и теории чисел 106

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие очерки только отмечают отдельные вехи развития теории аналитических функций и ни в какой мере не претендуют на полноту. Мы старались в меру сил и имеющихся у нас сведений указывать роль отечественных учёных в развитии теории аналитических функций. Подойдя к советской эпохе, мы встретились с таким разнообразием фактов и идей, что были вынуждены отказаться от сколько-нибудь подробного их рассмотрения и ограничились характеристикой некоторых из направлений научной работы, упоминая лишь немногие имена. За всеми подробностями, относящимися к успехам теории функций в СССР, мы отсылаем читателя к обзорной статье А. Ф. Берманта и А. И. Маркушевича в сборнике «Математика в СССР за 30 лет», Гостехиздат, 1948. При составлении очерков I и II нами использован текст §§ 4 и 6 «Введения» к нашей книге «Элементы теории аналитических функций» (Учпедгиз, 1944).

Выражаю искреннюю признательность редактору этой книги Б. В. Шабату, написавшему по моей просьбе пункты 5.3 и 5.7, В. В. Гуссову, автору исследований по истории специальных функций в России, сообщившему мне некоторые ценные сведения, а также А. Ф. Берманту и В. Л. Гончарову, прочитавшим рукопись очерков и сделавшим ряд существенных критических замечаний.

Автор

ОЧЕРК ПЕРВЫЙ

НАКОПЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ФАКТОВ В XVIII СТОЛЕТИИ *)

1.1. Теория аналитических функций росла и развивалась постепенно, вместе с ростом всего математического анализа. Основное свойство аналитических функций — их представимость степенными рядами — впервые в истории математики использовалось как систематический приём решения задач в работах И. Ньютона: «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (1669 г., напечатано в 1711 г.) и «Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых» (написано не позднее 1671 г., напечатано в 1736 г.) **). Ньютон рассматривал разложения функций (для него «буквенных выражений») в степенные ряды, как «приложение к буквам принципов недавно открытого учения

---

*) Роль математиков XVIII столетия в развитии теории функций была впервые выявлена с наибольшей полнотой и отчётливостью в исследовании русского историка математики И. Ю. Тимченко «Основания теории аналитических функций» (Записки Математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей, тт. XII, XVI, XIX, Одесса, 1892—1898 гг.). Из других работ по ранней истории теории функций укажем две статьи П. Штеккеля («Integration durch imaginäres Gebiet. Ein Beiträg zur Geschichte der Funktionentheorie», Bibliotheca Mathematica 3 Folge, I, стр. 109—128, и «Beiträge zur Geschichte der Funktionentheorie im achtzehnten Jahrhundert», там же, II, стр. 111—121), специально отмечающего, что приоритет в этом вопросе принадлежит И. Ю. Тимченко. Много фактического материала содержится в третьем и четвёртом томах истории математики М. Кантора (M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik).

**) См. русское издание: Исаак Ньютон, Математические работы, перевод с латинского, вводная статья и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, Гостехиздат, М.—Л., 1937.

о десятичных дробях», т. е. сравнивал степенные ряды с десятичными разложениями действительных чисел. «И так же, как десятичные дроби обладают тем преимуществом, что выраженные в них обыкновенные дроби и корни приобретают в некоторой степени свойства целых чисел, так что с ними можно обращаться, как с последними, так и буквенные бесконечные ряды приносят ту пользу, что всякие сложные выражения (дроби с составным знаменателем, корни составных величин или неявных уравнений) можно с их помощью привести к ряду простых количеств; именно, их оказывается возможным привести к бесконечному ряду дробей, у которых числители и знаменатели суть простые члены, и таким образом с небольшой затратой сил удастся преодолеть трудности, в другом виде представляющиеся почти непреодолимыми» *), В качестве примеров Ньютон получал разложения в ряды различных алгебраических функций (явных и неявных), используя биномиальную формулу (для дробного и отрицательного показателей), сложение, умножение и деление рядов, а также метод неопределенных коэффициентов. Для применения последнего к разложению неявных алгебраических функций он предложил простой приём, сохранивший свое значение до настоящего времени под названием «параллелограмма Ньютона» **). Все это изложение составляло введение к методу флюксий (и флюент), т. е. исчислению производных и интегралов. Умея, с одной стороны, разлагать функции в степенные ряды (иногда содержащие члены с отрицательными и дробными показателями), а с другой стороны, дифференцировать и интегрировать степени, Ньютон посредством почленного дифференцирования и интегрирования получал фактическую возможность дифференцировать и интегрировать любые, встречавшиеся в его исследованиях функции.

К приёмам разложения в ряды, развитым Ньютоном, последующее развитие математики добавило ещё два, весьма существенных: ряд Тейлора (опубликованный Тейлором в 1715 г. в книге «О прямом и обратном методе прира-

*) См. «Метод флюксий», стр. 25—26 русск. изд. Математических работ Ньютона.

**) См. статью Н. Г. Чеботарева «Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики» в сборнике «Исаак Ньютон, 1643—1727», М. — Л., 1943, стр. 99—126.

щений», но использованный в качестве основы для разложения функций в степенные ряды лишь Маклореном в его «Трактате о флюксиях» (1742 г.)) и ряд Лагранжа для обращения степенных рядов (опубликован в статье, сданной в печать не позднее 1768 г., но вышедшей в свет лишь в 1770 г.).

1.2. Первое применение комплексных чисел к решению задач математического анализа принадлежит Лейбницу и И. Бернулли *). Именно, в печатных работах (начиная с 1702 г.) и в научной переписке оба учёных, используя для интегрирования рациональных функций приём разложения на простейшие дроби, пришли к интегралам вида $\int \frac{dx}{ax+b}$, где a и b — комплексные числа, и рассматривали эти интегралы как «мнимые логарифмы». Насколько, однако, смутными и противоречивыми были ещё тогда сведения о комплексных числах, видно, например, из того, что Лейбниц в работе 1702 г. **) (где он впервые применяет разложение рациональных функций на простейшие дроби в качестве систематического приёма для суммирования рядов и интегрирования функций) отзывается о мнимых числах как о «чуде анализа, уроде (Miszgeburt) из мира идей, двойственной сущности, находящейся почти между бытием и небытием». В этой же работе Лейбниц ставит следующий важный вопрос: можно ли любой многочлен с действительными коэффициентами представить в виде произведения множителей первой и второй степеней? Понятно, что положительный ответ на этот вопрос означал бы, что интеграл от любой рациональной функции сводится к логарифмам («квадратура гиперболы») и круговым функциям («квадратура круга»), а также к рациональным функциям. Лейбниц заявляет, однако, что это неверно. «Я нашёл, пишет он, что тот, кто утверждал бы это (речь идёт именно о разложимости многочлена на мно-

*) И. Бернулли (1667—1748) был избран почётным членом Петербургской Академии наук, в изданиях которой он опубликовал девять работ.

**) Ниже цитирую по изданию Г. Ковалевского в оствальдовской серии классиков (№ 162): «Leibniz über die Analysis des Unendlichen», стр. 43—57.

жители первой и второй степеней. — *А. М.*), ограничивал бы, без оснований, многообразие природы». В подтверждение Лейбниц приводит разложение на множители

$$x^4+a^4=(x^2+a^2\sqrt{-1})(x^2-a^2\sqrt{-1})=$$
$$=\left(x+a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x-a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\times$$
$$\times\left(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)$$

и утверждает, что никакая пара из найденных четырёх множителей не может дать в произведении многочлен с действительными коэффициентами, что, конечно, неверно.

Отсутствие отчётливых понятий о комплексных числах не служило препятствием к их применению. Так, в работе, вышедшей в свет в 1704 г., но выполненной ещё в 1702 г., И. Бернулли замечает, что подобно тому, как дифференциал $\frac{a\,dz}{b^2-z^2}$ переходит посредством подстановки $z=b\frac{t-1}{t+1}$ в логарифмический дифференциал $\frac{a\,dt}{2bt}$, так и дифференциал $\frac{a\,dz}{b^2+z^2}$ посредством мнимой подстановки $z=\sqrt{-1}\,b\frac{t-1}{t+1}$ переходит в «дифференциал мнимого логарифма» — $\frac{a\,dt}{2\sqrt{-1}\,bt}$. Найденное таким образом соотношение

$$\frac{a\,dz}{b^2+z^2}=-\frac{a\,dt}{2\sqrt{-1}\,b\,dt}$$

по сути дела устанавливает связь между функциями $\operatorname{Arc\,tg}\frac{z}{b}$ и $\operatorname{Ln} t=\operatorname{Ln}\frac{b-z\sqrt{-1}}{b+z\sqrt{-1}}$. Впрочем, И. Бернулли не указывает эту связь, а выполняет новую подстановку $t=\frac{b\sqrt{-1}+\sqrt{\frac{1}{r}-b^2}}{b\sqrt{-1}-\sqrt{\frac{1}{r}-b^2}}$. Полученный им после этого результат можно выразить следующим образом:

$$d(\arcsin b\sqrt{r})=d\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\operatorname{Ln} t\right). \qquad (1.2:1)$$

К первой четверти XVIII века относятся работы Муавра, в которых в неявном виде содержится его знаменитая формула.

Её можно неявно усматривать ещё в заметке, помещённой Муавром в Philos. Trans. за 1707 г. В другой заметке 1722 г. Муавр, ссылаясь на упомянутую работу 1707 г., утверждает, что соотношение между x и t — синусами-верзусами*) двух дуг, относящихся как $1:n$, — можно получить, исключая z из двух уравнений:

$$1-2z^n+z^{2n}=-2z^nt \quad \text{и} \quad 1-2z+z^2=-2zx.$$

В этих формулах и содержится формула Муавра. В самом деле, пользуясь определением синуса-верзуса и полагая $x=1-\cos\varphi$, $t=1-\cos n\varphi$, перепишем уравнения Муавра в виде

$$1-2z^n\cos n\varphi+z^{2n}=0 \quad \text{и} \quad 1-2z\cos\varphi+z^2=0.$$

Чтобы получить отсюда z, определяем сначала z^n из первого уравнения и z из второго:

$$z^n=\cos n\varphi\pm\sqrt{\cos^2 n\varphi-1} \quad \text{и} \quad z=\cos\varphi\pm\sqrt{\cos^2\varphi-1},$$

а затем возводим обе части последнего равенства в степень n и приравниваем друг другу выражения, полученные для z^n:

$$(\cos\varphi\pm\sqrt{\cos^2\varphi-1})^n=\cos n\varphi\pm\sqrt{\cos^2 n\varphi-1},$$

или

$$(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi\pm i\sin n\varphi. \qquad (1.2:2)$$

Это и есть формула Муавра.

Свои исследования, связанные с этой формулой, Муавр изложил подробно в сочинении «Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis» (Лондон, 1730). Однако самую формулу он нигде не представляет в современном виде (1.2:2) **).

---

*) Синусом-верзусом дуги α называется разность $1-\cos\alpha$.

**) В этом виде её впервые представил Л. Эйлер (см. стр. 17).

Его интересует главным образом выражение $\cos\varphi$ через $\cos n\varphi$. Это выражение приводится им на первой же странице книги в виде

$$x=\frac{1}{2}\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}}+\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}}},$$

где $x=\cos B$ и $l=\cos A=\cos nB$.

1.3. Оперируя с логарифмами отрицательных и мнимых чисел, ни И. Бернулли, ни Лейбниц не знали, что нужно понимать под логарифмом комплексного числа. Это видно из спора между Лейбницем и Бернулли о логарифмах отрицательных чисел. Спор этот вёлся в виде переписки (1712 1713 гг.), причём Лейбниц утверждал, что логарифмы отрицательных чисел мнимы, в то время как Бернулли пытался доказать, что они действительны. Хотя Лейбниц и занимал в этом споре формально правильную позицию, однако, по существу, был весьма далёк от истины; он, так же как и его противник, и не подозревал, что логарифм многозначен. Теорию, устраняющую все затруднения, дал Эйлер в работе «О споре между Бернулли и Лейбницем о логарифмах отрицательных и мнимых чисел» *), опубликованной в 1749 г. Однако даже такой крупный математик, как Даламбер, продолжал и после статьи Эйлера защищать точку зрения И. Бернулли, приводя новые «аргументы» в доказательство того, что $\ln y=\ln(-y)$.

Вообще освоение самого понятия комплексного числа происходило крайне медленно, отставая от тех применений, которые эти числа находили во всё новых и новых областях. Лагранж в письме к итальянскому математику Лорнья (1777 г.) имел уже веские основания говорить: «Одним из важнейших шагов, сделанных анализом в последнее время, я считаю то, что его более не затрудняют мнимые величины и что вычисления с ними производятся так же, как и с действительными величинами». Однако тот из учёных XVIII века,

---

*) См. также статью «Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires» в первом томе «Посмертных сочинений Эйлера» («Leonardi Euleri Opera postuma etc.», т. I, стр. 269—281).

который, как мы увидим, больше всех других содействовал отмеченному Лагранжем успеху, а именно знаменитый Эйлер, в своём учебнике алгебры (лучшем курсе по этому предмету в XVIII веке, вышедшем впервые в 1768—1769 гг. на русском языке) испытывает большие затруднения, когда ему нужно разъяснить, что такое мнимые числа. Отмечая, что квадратный корень из отрицательного числа не может быть ни больше нуля, ни меньше нуля, ни равен нулю, Эйлер пишет «отсюда ясно, что квадратные корни из отрицательных чисел и не могут причисляться к возможным числам (т. е. действительным числам. — *А. М.*); следовательно, мы должны сказать, что они являются невозможными числами. И это обстоятельство приводит нас к понятию таких чисел, которые по своей природе невозможны и обычно называются мнимыми числами или воображаемыми числами, ибо они существуют только в воображении».

Естественно, что такое определение мнимых чисел мало приспособлено для установления действий над ними и если немного ниже цитированного места Эйлер утверждает, что $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4}=\sqrt{4}=2$, так как $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, то у читателя мог возникнуть законный вопрос: почему же $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a}=-a$, а не a?

Утверждение, что значения каждой функции комплексного переменного являются комплексными числами и, следовательно, имеют вид $u+iv$, где u и v — действительные числа с современной точки зрения, содержится в самих определениях комплексного числа и функции комплексного переменного. В XVIII веке, когда эти понятия не приобрели ещё ясности и логической отчётливости, указанное утверждение рассматривалось как серьёзная проблема. Формулировалась эта проблема довольно странным образом: «показать, что каждая мнимая величина имеет вид $A+B\sqrt{-1}$, где A и B — действительные числа».

Любопытную иллюстрацию к такой далёкой от нас постановке задачи даёт работа Н. Фусса, относящаяся к концу XVIII века (1781 г.). Автор рассуждает следующим образом: если z — переменная мнимая величина и a, b, c, ... — действительные постоянные, то выражения $a+z$ и bz представляют при произвольных значениях a, b и z бесконечное

множество мнимых величин. Более общее выражение $a \pm bz$ должно обнимать бесконечно много больше мнимых величин, чем $a+z$ и bz: поэтому оно, вероятно, обнимает все мнимые величины, и в частности, величину $\frac{c}{z}$. Полагая $a + bz = \frac{c}{z}$, имеем $bz^2 + az - c = 0$ и $z = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, где α и β — действительные числа, что и требовалось доказать (!?).

Следует учесть, что термин «мнимый» (imaginarius) часто применялся в математике того времени в буквальном смысле: «воображаемый». Так, например, если алгебраическое уравнение степени $2m$ не имело действительных корней, то говорилось, что оно имеет «мнимые корни» (числом $2m$); последние могли обозначаться буквами и фигурировать в рассуждениях по аналогии с действительными корнями. Над ними производились выкладки, подобно тому, как это делал Н. Фусс со своей «мнимой переменной». В этих условиях требование доказать, что каждое «мнимое число» имеет вид $A+Bi$, приобретало характер требования доказательства существования. Впрочем, в применении к функциям, понимаемым как аналитические выражения, требование это сводилось к доказательству следующего предложения: любое аналитическое выражение после замены в нём переменной z мнимым значением: $x+y\sqrt{-1}$ может быть представлено в виде $A+B\sqrt{-1}$, где A и B — действительные числа.

Эйлер в письме от 1. IX 1742 г. к Николаю Бернулли (племяннику Ивана и Якова Бернулли) *) высказал без доказательства следующую теорему: многочлен любой степени с действительными коэффициентами можно разло-

*) Математическая переписка Эйлера, а также ряда других крупных математиков XVIII века, связанных с Петербургской Академией наук, представляет одна из наиболее интересных и важных документальных источников по истории математики всего XVIII века. Она была опубликована в двух томах в 1843 г. в Петербурге: «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII ème siècle etc.», тт. I и II, St.-Pétersbourg, 1843. Продолжение её заключается в первом томе издания «Leonardi Euleri Opera postuma mathematica et physica etc.», Petropoli, 1862. Письма Эйлера к Николаю Бернулли содержатся именно в этом издании, а ответы на них и переписка Эйлера с Гольдбахом — в предыдущем.

жить на множители первой и второй степеней также с действительными коэффициентами, т. е. предложение, которое, как мы указывали выше, Лейбниц считал ложным. Н. Бернулли также не мог согласиться со справедливостью этой теоремы и в ответном письме пытался построить опровергающий пример. А именно, он утверждал, что для многочлена $x^4 - 4x^3 + 2xx + 4x + 4$ с нулями: $1 + \sqrt{2 + \sqrt{-3}}$, $1 - \sqrt{2 + \sqrt{-3}}$, $1 + \sqrt{2 - \sqrt{-3}}$, $1 - \sqrt{2 - \sqrt{-3}}$, требуемое Эйлером разложение не существует. В письме от 10. XI 1742 г. Эйлер доказывает Н. Бернулли неосновательность этого возражения. Вскоре (15. XII 1742 г.) он пишет на ту же тему другому своему корреспонденту Гольдбаху, подчёркивая, что мнимые корни алгебраического уравнения всегда встречаются парами, такими, что после перемножения получаются действительные многочлены второй степени. Приводя пример Н. Бернулли, Эйлер признаётся, что сначала этот пример поставил его в тупик, пока он не догадался, что нужно комбинировать первый нуль с третьим и второй с четвёртым. Он снова полностью формулирует свою теорему: «Каждое алгебраическое выражение вида $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 +$ и т. д. можно разложить на простые действительные множители $px + q$ или на квадратные действительные множители $p + qx + rxx$», причём отмечает весьма большую пользу этой теоремы для анализа, так как из неё следует, что интеграл от каждого рационального дифференциала можно свести к логарифмам и квадратуре круга (а также к рациональным функциям). Впрочем, как сообщает Эйлер, он не умеет полностью доказать свою теорему, но только «примерно (ungefähr), как некоторые ферматовские теоремы».

Любопытно, что теорема Эйлера встречает у Гольдбаха такое же противодействие, как и у Н. Бернулли; в письме от 5. II 1743 г. Гольдбах приводит в качестве «опровергающего» примера многочлен $x^4 + 72x - 20$.

Эйлер разъяснил Гольдбаху его ошибку, добавив, что он строго доказал свою теорему для всех уравнений ниже шестой степени. Гольдбах уже не спорит после этого, но всё ещё приводит соображения, которые должны оправдать его

скептическую позицию. Все эти детали дополнительно характеризуют длительное и трудное овладение комплексными числами.

Убеждаясь доводами Эйлера в справедливости его теоремы, Николай I Бернулли писал Эйлеру 6.IV 1743 г., что вообще каждое мнимое количество можно рассматривать как функцию от количеств вида $b \pm \sqrt{-a}$, где a и b действительные, причём $a > 0$, и приводить эту функцию к простейшему виду: $B \pm \sqrt{-A}$. Если это предложение применить к корням алгебраического уравнения (с действительными коэффициентами), то тогда рядом с корнем $B + \sqrt{-A}$ должен будет встретиться корень $B - \sqrt{-A}$, откуда и следует у многочлена наличие множителя вида $(x - B - \sqrt{-A}) \times \times (x - B + \sqrt{-A}) = x^2 - 2Bx + B^2 + A$. В ответном письме Эйлер пишет, что он не видит, как можно было бы доказать общее предложение, высказанное Н. Бернулли, хотя готов согласиться с его справедливостью.

В «Réflexions sur la cause générale de vents» (1746 г., напечатано в 1747 г.) Даламбер также утверждает, что каждое выражение, составленное посредством алгебраических действий (к которым он причисляет и возведение в степень с любым показателем) из комплексных чисел, само может быть представлено в виде $A + B\sqrt{-1}$, где A и B — действительные числа.

Единственное затруднение при определении A и B составляет случай выражения $(a + bi)^{g+hi}$. Чтобы справиться с ним, Даламбер почленно дифференцирует уравнение

$$(a + bi)^{g+hi} = A + Bi$$

(рассматривая $a + bi$ и $A + Bi$ как переменные) и, получив соотношение

$$(g + hi)\frac{d(a + bi)}{a + bi} = \frac{d(A + Bi)}{A + Bi},$$

отделяет в нём действительную и мнимую части, после чего легко находит выражения для $A^2 + B^2$ и $\operatorname{arctg}\frac{B}{A}$ через g, h, $a^2 + b^2$ и $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

В работе «Recherches sur le calcul integral» (1746г., напечатана в 1748 г.) Даламбер делает попытку доказать тео-

рему о разложимости многочлена с действительными коэффициентами на множители первой и второй степеней (теорема Эйлера). При этом он избирает тот же путь, который был намечен Н. Бернулли (не будучи, очевидно, знаком с перепиской Эйлера и Н. Бернулли), т. е. старается доказать, что каждый «мнимый» корень алгебраического уравнения (с действительными коэффициентами) имеет вид $p+q\sqrt{-1}$. В этой же работе он утверждает, что каждая функция от комплексного переменного $x+iy$ может быть представлена в виде $p+iq$, «хотя часто представляется невозможным действительно определить аналитические выражения для p и q». Наконец, Даламбер говорит об интеграле от функции $f(x+iy)$ и утверждает, что дифференциал $f(x+iy)\,d(x+iy)$ можно всегда представить в виде $dp+i\,dq$.

После Даламбера Эйлер также пытается дать доказательство своей алгебраической теоремы (1749 г.). Доказательства Даламбера и Эйлера содержали правильные идеи, впоследствии использованные Гауссом (1799 г.); Гаусс же раскрыл существенные пробелы этих доказательств.

1.4. Леонард Эйлер сыграл важнейшую роль в развитии начал теорий аналитических функций в XVIII веке. Первый этап его изысканий заканчивается классическим сочинением «Введение в анализ бесконечно-малых» (1748 г.) *).

В начале этой книги Эйлер подчёркивает, что «даже нуль и мнимые числа не исключаются из значений переменной величины», и далее даёт множество примеров плодотворности такого широкого толкования переменной. Таким образом, *переменная величина у Эйлера является комплексной переменной.*

В главе II Эйлер формулирует свою теорему о том, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть разложен на множители первой и второй степеней. Там же он доказывает её для многочленов четвёртой степени, а позднее, в главе IX, — для многочленов вида $a^n \pm z^n$, $\alpha+\beta z^n+\gamma z^{2n}, \ldots, \alpha+\beta z^n+\gamma z^{2n}+\delta z^{3n}+\varepsilon z^{4n}$. Он сознаёт,

*) Русский перевод: Л. Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, том первый. Перевод с лат. Е. Л. Пацановского, ред., вступ. статья и примечания С. Я. Лурье, М. — Л., 1936.

однако, что не владеет полным доказательством этой важной теоремы. Фактически оно должно было бы основываться на доказательстве существования корня любого алгебраического уравнения с действительными коэффициентами: для такого доказательства (исключая простейший случай уравнения нечётной степени или уравнения чётной степени с отрицательным свободным членом) математика XVIII века ещё не создала почвы.

Главу IV Эйлер посвящает разложению функций в степенные ряды, заявляя: «если же кто сомневается, чтобы можно было выразить функцию посредством бесконечного ряда членов подобного рода (т. е. $A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ и т. д. — *А. М.*), то это сомнение устранится при развёртывании каждой функции. Для большей ясности этого утверждения следует допустить, кроме степеней переменной z с целыми положительными показателями, ещё какие угодно степени. В таком случае не будет никакого сомнения в том, что всякая функция z может быть преобразована в такое бесконечное выражение:

$$Az^\alpha+Bz^\beta+Cz^\gamma+Dz^\delta+ \text{ и т. д.},$$

где показатели α, β, γ, δ и т. д. обозначают любые числа».

Итак, Эйлер рассматривает здесь разложимость функций (понимаемых им во «Введении в анализ», как аналитические выражения), как факт непосредственно подтверждаемый всей практикой современного ему математического анализа. И действительно, строя аналитические выражения из элементарных функций одного или нескольких переменных посредством операций сложения, вычитания, умножения и деления, возвышения в степень и извлечения корня, решения уравнений (алгебраических) и интегрирования*), он и должен был получать функции аналитические всюду, за исключением изолированных особых точек, в окрестности которых функции всё же допускали разложение в обобщённый степенной ряд (содержащий дробные или отрицательные степени). Вот почему

*) Все эти операции перечисляются самим Эйлером вслед за тем, как он даёт своё определение функции: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого количества и чисел или постоянных количеств» (Л. Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, т. I, стр. 30 русского издания).

Эйлер, его современники и последователи, понимая функцию как аналитическое выражение, имели достаточное основание считать её аналитической функцией. Факты иного рода, где аналитическое выражение, например, в виде сходящегося ряда элементарных функций, представляло неаналитическую функцию, являлись единичными в практике математики того времени (тригонометрические ряды у Д. Бернулли); эти «исключения» математический анализ XVIII века не мог охватить и, как правило, не считал нужным оговаривать.

В главе VII «Введения в анализ» сообщаются установленные Эйлером формулы для показательной функции и логарифма, которые в современной записи выглядят так:

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n, \qquad \ln z = \lim_{n\to\infty} n\left(z^{\frac{1}{n}}-1\right).$$

В главе VIII формула Муавра впервые в математической литературе появляется в явном виде:

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz,$$

причём даётся тот простейший вывод её, который приводится и в современных учебниках. Из этой формулы Эйлер выводит, что

$$\cos nz = \frac{(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z-\sqrt{-1}\sin z)^n}{2},$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z-\sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

и, считая здесь z бесконечно малым, а n бесконечно большим, так чтобы nz имело конечное значение v *), получает знаменитые формулы:

$$\left.\begin{aligned}\cos v &= \frac{e^{+v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}}{2},\\ \sin v &= \frac{e^{+v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.\end{aligned}\right\} \qquad (1.4:1)$$

*) То-есть, выражаясь по-современному, переходя к пределу при $n\to\infty$ и $nz\to v$.

Самый факт связи между тригонометрическими и показательными функциями, правда, выраженный в неявной и очень громоздкой форме, был установлен, как мы видели, впервые И. Бернулли в 1702 г., связавшим дифференциалы арксинуса и логарифма [см. (2.1 : 1)]. Далее Котес в работах, опубликованных в 1716 и 1722 гг., мимоходом высказал утверждение, эквивалентное формуле

$$\ln(\cos x + i \sin x) = ix.$$

В работе Эйлера, написанной около 1740 г. для XII тома «Комментариев Императорской Петербургской Академии наук» (том вышел из печати в 1750 г.), содержится формула

$$\frac{\pi\sqrt{-q}}{\sin \pi\sqrt{-q}} = \frac{2e^{-\pi\sqrt{q}}\pi\sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}}-1},$$

очевидно, лишь по внешнему виду отличающаяся от второй из формул (1.4 : 1). В том же 1740 г. в письме к И. Бернулли Эйлер отмечает, что $2\cos x$ и $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$ разлагаются в один и тот же ряд, что в точности соответствует первой из формул (1.4 : 1).

Повидимому, самому Эйлеру не просто было освоить все выводы из этих фактов. Об этом свидетельствует письмо к Гольдбаху, написанное более чем через год после предыдущего письма (9.XII 1741). Здесь Эйлер сообщает: «Я нашёл также недавно замечательный парадокс, а именно, что значение выражения $\frac{2^{+\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ весьма близко к $\frac{10}{13}$ и эта дробь отличается только в миллионных долях от действительной. Истинное значение этого выражения есть косинус дуги 0,6931471805599...». Смысл этой цитаты становится ясным, если представить $\frac{2^{+\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ в виде $\frac{e^{\sqrt{-1}\ln 2}+e^{-\sqrt{-1}\ln 2}}{2}$, что первой из формул (1.4 : 1) даёт $\cos \ln 2$; значение $\ln 2$ и приводится Эйлером. Любопытно, что Эйлер рассматривает своё открытие как парадокс.

В письме к Николаю I Бернулли от 16.1 1742 г. Эйлер указывает, что

$$\sin s = \frac{\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}},$$

где n — «бесконечно большое число». В ответном письме Н. Бернулли пишет, что он ещё в 1728 г. сообщил своему кузену Д. Бернулли следующую теорему: если $\sin A = z$, то

$$\sin nA = \frac{(\sqrt{1-z^2}+z\sqrt{-1})^n - (\sqrt{1-z^2}-z\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}},$$

откуда при n бесконечно большом и $z = \frac{s}{n}$ вытекает, что

$$\sin s = \frac{\left(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1-\frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Из текста письма неясно, выполнял ли Н. Бернулли фактически ещё в 1728 г. этот предельный переход от формулы для $\sin nA$ к формуле для $\sin s$. Что касается самой формулы для $\sin nA$, то Даниил Бернулли опубликовал её в своё время в «Комментариях Петербургской Академии наук» за 1728 г. (напечатано в 1732 г.), со ссылкой на письмо к нему Н. Бернулли от 22.VIII 1728 г.

Обе формулы (1.4 : 1) были опубликованы Эйлером в 1743 г.

Таким образом, *представление зависимости между показательной и тригонометрическими функциями в окончательном, наиболее простом и выпуклом виде, выражаемом формулами* (1.4 : 1), *и первая публикация полученных формул являются заслугой Эйлера.*

Из других результатов, содержащихся во «Введении в анализ», отметим ещё разложения тригонометрических и гиперболических функций в бесконечные произведения, приводимые в главе IX.

Переписывая

$$e^x - e^{-x} = 2\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots\right) \quad (1.4:2)$$

в виде разности «одинаковых степеней» $\left(1+\frac{x}{i}\right)^i-\left(1-\frac{x}{i}\right)^i$ (здесь i «бесконечно большое число» *)), Эйлер ищет множители этого выражения (помимо очевидного из формулы (1.4:2) множителя $2x$). Так как он уже установил раньше, что двучлен a^n-z^n делится на трёхчлены $a^2-2az\cos\frac{2k}{n}\pi+z^2$ ($2k=2, 4, \ldots<n$), то, полагая $a=1+\frac{x}{i}$, $z=1-\frac{x}{i}$, $n=i$ и замечая, что $\cos\frac{2k}{i}\pi=1-\frac{2k^2}{i^2}\pi^2$ (здесь взяты два первых члена разложения косинуса в степенной ряд), Эйлер находит, что выражение (1.4:2) должно делиться на

$$2+\frac{2x^2}{i^2}-2\left(1-\frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2k}{i}\pi=\frac{4k^2\pi^2}{i^2}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}-\frac{x^2}{i^2}\right),$$

а следовательно, должно делиться на выражения:

$$1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}-\frac{x^2}{i^2}\qquad(k=1, 2, 3, 4, \ldots),$$

«где член $\frac{x^2}{i^2}$ может быть опущен без опасения, потому что даже после умножения на i он останется бесконечно малым».

Итак, e^x-e^{-x} имеет делителей: $2x$, $1+\frac{x^2}{\pi^2}$, $1+\frac{x^2}{4\pi^2}$, $1+\frac{x^2}{9\pi^2}$, ... и, следовательно,

$$e^x-e^{-x}=2x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots\qquad(1.4:3)$$

Путём перемножения множителей правой части можно получить снова разложение (1.4:2), что подтверждает правильность результата. Положив в формуле (1.4:3) $x=z\sqrt{-1}$, разделив обе части на $2\sqrt{-1}$ и заменив левую часть через $\sin z$ (по второй из формул (1.4:1)), будем иметь окончательно:

$$\sin z=z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\ldots\qquad(1.4:4)$$

---

*) Эйлер обозначает символом i «бесконечно большое число» (начальная буква слова «infinitus»), а в более поздних работах (1777 г.)—мнимую единицу (начальная буква слова «imaginarius»).

Впервые разложение

$$\sin s = s\left(1-\frac{s^2}{p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{4p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{9p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{16p^2}\right)\ldots \quad (1.4:4'),$$

где p обозначает π, встречается в работе Эйлера, помещенной в «Комментариях Императорской Петербургской Академии наук» за 1734—1735 гг. (том вышел из печати в 1740 г.) и посвящённой отысканию суммы ряда $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\left(=\frac{\pi^2}{6}\right)$.

Чтобы получить разложение на множители, Эйлер рассматривает здесь уравнение $\sin s = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \frac{s^7}{7!} + \ldots = 0$, по аналогии с алгебраическими уравнениями, как уравнение «бесконечно высокой степени». Оно имеет бесконечно много корней: $s=0$, $\pm p$, $\pm 2p$, $\pm 3p$, ...; неудивительно, что левая часть разлагается на бесконечное множество множителей первой степени, среди которых нет равных: s, $1-\frac{s}{p}$, $1+\frac{s}{p}$, $1-\frac{s}{2p}$, $1+\frac{s}{3p}$, ... В этой же работе впервые встречается и разложение функции $\frac{1}{\sin s}$ на простейшие дроби. Пусть $\sin s = y \neq 0$; переписывая это соотношение в виде $1-\frac{\sin s}{y} = 1-\frac{s}{y}+\frac{s^3}{3!y}-\frac{s^5}{5!y}+\ldots = 0$ и замечая, что последнее соотношение имеет корни: A (A — наименьшая дуга, синус которой равен A), $p-A$, $-p-A$, $2p+A$, $-2p+A$, ..., Эйлер заключает, что справедливо разложение на множители:

$$1-\frac{\sin s}{y} = \left(1-\frac{s}{A}\right)\left(1-\frac{s}{p-A}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{s}{-p-A}\right)\left(1-\frac{s}{2p+A}\right)\left(1-\frac{s}{-2p+A}\right)\ldots$$

Но коэффициент при s в левой части равен $-\frac{1}{y}$, а в правой части: $-\frac{1}{A}\,\frac{1}{p-A}\,\frac{1}{-p-A}\,\frac{1}{2p+A}\,\frac{1}{-2p+A}\ldots$, следовательно:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{A}+\frac{1}{p-A}+\frac{1}{-p-A}+\frac{1}{2p+A}+\frac{1}{-2p+A}+\ldots$$

В упоминавшемся выше письме Эйлера к Николаю I Бернулли (январь 1742 г.) к указанным формулам добавляются разложения на простейшие дроби функций $\pi \operatorname{ctg} \pi z$, $\pi^2 \operatorname{csc}^2 \pi z$ и других.

1.5. Во «Введении в анализ» Эйлер не разбирает вопроса о логарифмах мнимых чисел. Однако установленные им здесь результаты — в особенности его формулы, выражающие связь между показательными и тригонометрическими функциями, дают прочную основу для решения этого вопроса. Такое решение содержится в статье Эйлера «О споре между Бернулли и Лейбницем о логарифмах отрицательных и мнимых чисел» (1749).

Прежде всего Эйлер разбирает аргументы И. Бернулли в защиту утверждения $\ln(-x) = \ln x$ и возражения Лейбница.

Вот важнейшие из этих аргументов по порядку:

1. $\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$, следовательно, $\ln(-x) = \ln x$.

Лейбниц возражал на это, говоря, что правило дифференцирования логарифмов $d \ln x = \frac{dx}{x}$ справедливо только для положительных значений x и поэтому нельзя утверждать, что

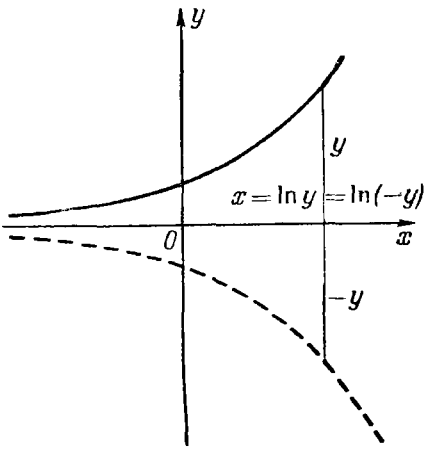
$$\frac{d(-x)}{-x} = d \ln(-x).$$

Не соглашаясь здесь с Лейбницем, Эйлер заявляет, что «это возражение, если бы оно было верно, поколебало бы основное положение всего анализа, заключающееся, в основных чертах, в общности правил и операций, признаваемых справедливыми, какова бы ни была природа количеств, к которым они прилагаются». «Хотя,— пишет он дальше,— правило дифференцирования логарифмов справедливо всегда, так что $d \ln x = \frac{dx}{x}$ при положительном и при отрицательном x, аргумент И. Бернулли не доказывает того, что хочет доказать».

Всё дело в том, что из равенства дифференциалов двух функций $d \ln x$ и $d \ln x(-x)$ следует лишь, что функции $\ln(-x)$ и $\ln x$ отличаются на постоянную. Постоянная эта равна $\ln(-1)$, так как $\ln(-x) = \ln(-1 \cdot x) = \ln(-1) + \ln x$,

так что утверждение И. Бернулли означает, что $\ln(-1)=0$. Но это утверждение должно быть доказано!

2. Далее И. Бернулли опирался на то, что интегральные кривые уравнения $dx=\frac{dy}{y^n}$ $\left(\text{выражаемые уравнением } x=C-\frac{1}{(n-1)y^{n-1}}\right)$ при n нечётном симметричны относительно оси x. Поэтому и при $n=1$ интегральные кривые, выражаемые теперь уравнением $x=c+\ln y$, должны быть симметричны относительно оси x. Это значит, что логарифмика



Черт. 1

$x=\ln y$ состоит из двух ветвей, симметричных относительно оси x, т. е. что $\ln(-y)=\ln y$ (черт. 1).

На этот довод, который Эйлер считает наиболее серьёзным, приводятся следующие возражения. Интегрирование дифференциала $x^n dx$ приводит к степени лишь при $n\neq-1$. Случай $n=-1$ является исключительным, и нельзя выводы, относящиеся к $n\neq-1$, распространять на этот исключительный случай. Чтобы пояснить возможность таких исключений, независимо от интегрального исчисления, Эйлер приводит пример алгебраической кривой

$$y=\sqrt{ax}+\sqrt[4]{a^3(b+x)}.$$

Это уравнение по освобождении от иррациональности содержит лишь чётные степени y; поэтому кривая вообще симметрична относительно оси x. Но в частном случае при $b=0$ получаем кривую $y=\sqrt{ax}+\sqrt[4]{a^3x}$, или, по уничтожении иррациональности:

$$y^4-2axy^2-4a^2xy+a^2x^2-a^3x=0.$$

Эта кривая уже не симметрична относительно оси x (так как уравнение содержит член с нечётной — первой степенью y).

3. Иногда наличие двух ветвей у логарифмики (см. черт. 1) выводят из того, что логарифмику можно получить путём квадратуры гиперболы, а последняя кривая состоит из двух ветвей. Не входя в подробный анализ этого аргумента, Эйлер замечает, что нужно доказать ещё, что построенные две ветви составляют одну и ту же непрерывную, в его смысле, кривую (т. е. такую, уравнение которой можно получить приравниванием нулю одного и того же аналитического выражения) *).

Эйлер приводит при этом примеры, когда определённые построения приводят к двум различным непрерывным кривым, или, напротив, дают лишь некоторую часть непрерывной кривой.

4. По поводу рассуждения И. Бернулли: из $(-a)^2=(+a)^2$ следует, что $\ln(-a)^2=\ln(+a)^2$, $2\ln(-a)=2\ln(+a)$, и, наконец, $\ln(-a)=\ln(+a)$. Эйлер замечает, что подобным образом можно было бы из уравнения $(a\sqrt{-1})^4=(+a)^4$ заключить, что $\ln a=\ln(a\sqrt{-1})=\ln a+\ln(\sqrt{-1})$, откуда следует далее, что $\ln(\sqrt{-1})=0$. Но самим же И. Бернулли было доказано, что $\frac{\ln(\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}=\frac{\pi}{2}$. Сомневаться в последнем нельзя, так как «это открытие обосновано наиболее надёжными доказательствами анализа».

Далее Эйлер переходит к разбору аргументов Лейбница, утверждавшему, что логарифмы отрицательных чисел не могут быть действительными и что, в частности, $\ln(-1)\neq 0$.

---

*) Эйлер не оговаривает условия неприводимости выражения, подразумевая его неявно.

1. Лейбниц указывает, что если в разложении

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

положить $x = -2$, то получится

$$\ln(-1) = -2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \ldots,$$

откуда и видно, что $\ln(-1) \neq 0$.

Чтобы убедиться в том, что подобное соотношение не позволяет сделать этого утверждения, Эйлер приводит пример разложения:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

Положив здесь x один раз равным -3, а другой — равным 1, Эйлер получает: $-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots$ и $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 + \ldots$ Складывая эти соотношения, он выводит:

$$0 = 2 + 2 + 10 + 26 + \ldots$$

Здесь «правая часть представляется отличной от нуля», хотя левая равна нулю.

2. Другое доказательство того, что $\ln(-1) \neq 0$ Лейбниц получал из соотношения

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

Если положить $e^y = -1$ и, следовательно, $y = \ln(-1)$, то получается соотношение

$$-1 = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots,$$

которое, очевидно, не удовлетворяется при $y = 0$. На это Эйлер возражает, указывая, что функция может иметь и такие значения, которые не могут быть получены из изображающего её ряда. Так,

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \ldots,$$

где сумма ряда является однозначной функцией, в то время как $(1-x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ — функция двузначная.

Вся эта критика нужна Эйлеру для того, чтобы показать, что ни один из его предшественников, стоявших на противоположных точках зрения, не сумел обосновать свою позицию.

Выяснив это и одновременно охарактеризовав исключительную трудность вопроса, Эйлер излагает правильное решение.

Идея этого решения сводится к тому, что значение $y=\ln x$ определяется из уравнения

$$x=e^y=\left(1+\frac{y}{i}\right)^i,$$

где i — «бесконечно большое число». Отсюда получается

$$x^{\frac{1}{i}}=1+\frac{y}{i} \quad \text{и} \quad y=i\left(x^{\frac{1}{i}}-1\right),$$

что отвечает современной формуле

$$y=\ln x=\lim_{n\to\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right).$$

Так как «корень с бесконечно большим показателем i» $x^{\frac{1}{i}}$ имеет бесконечное множество различных значений, вообще говоря мнимых, то и логарифм имеет бесконечное множество различных значений, вообще говоря мнимых.

Полагая $x=a+b\sqrt{-1}=c(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)=$ $=e^C(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$ (e^C — модуль комплексного числа x, а φ — аргумент этого числа), можно представить все эти значения в виде

$$y=\ln x=C+(\varphi\pm 2\lambda\pi)\sqrt{-1},$$

где λ — произвольное натуральное число, или нуль.

Таким образом, мало утверждать, что логарифмы отрицательных (и мнимых) чисел — мнимы, как это делал Лейбниц. Нужно ещё знать, что логарифм каждого числа имеет не одно, но бесконечное множество различных значений, отличающихся друг от друга на кратные $2\pi\sqrt{-1}$. При этом для действительного положительного числа лишь одно из значений лога-

рифма действительно, а все остальные — мнимые; для действительных отрицательных и для мнимых чисел мнимыми оказываются все значения логарифма.

Итак, *Эйлер в течение тридцатых и главным образом сороковых годов XVIII века разработал всю теорию элементарных функций комплексного переменного и к хорошо известным разложениям этих функций в степенные ряды добавил ещё аппарат бесконечных произведений и рядов простейших дробей.*

1.6. Следующий этап в развитии теории функций комплексного переменного связан с открытием того фундаментального факта, что пары сопряжённых гармонических функций, т. е. решения системы дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{1.6:1}$$

могут быть получены как действительные и мнимые части произвольных аналитических функций $f(x+\sqrt{-1}\,y)$ от комплексного переменного $x+\sqrt{-1}\,y$ и с приложениями этого факта к решению задач механики, картографии и интегрального исчисления. Основной предпосылкой для указанных исследований служило истолкование уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}, \tag{1.6:2}$$

как условия, при котором выражение $P\,dx+Q\,dy$ представляет полный дифференциал некоторой функции от x и y.

Этот результат был получен Эйлером в его работе «De infinitis curvis eiusdem generis ...», опубликованной в «Комментариях Императорской Петербургской Академии наук» за 1734—1735 гг. (том вышел из печати в 1740 г.). Здесь (по-видимому, впервые в математике) рассматриваются уравнения с частными производными:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=P(a,\ x,\ z)$$

и, в частности,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=P(a,\ x).$$

Останавливаясь на втором из этих уравнений, Эйлер ставит следующую задачу: найти производную $\frac{\partial z}{\partial a}=Q$, если известна производная $\frac{\partial z}{\partial x}=P$. С этой целью он доказывает теорему, в силу которой

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial a}=\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial x};$$

применяя эту теорему к дифференциалам $dP=A\,dx+B\,da$ и $dQ=C\,dx+D\,da$, Эйлер заключает, что $C=B$, т. е.

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial a}.$$

Отсюда он и получает, что $Q=\int\frac{\partial P}{\partial x}da$.

Таким образом, в этой работе Эйлера установлено, что производная не зависит от того порядка, в котором выполняются дифференцирования, и найдено условие, при котором выражение $P\,dx+Q\,da$ является полным дифференциалом. Эти же результаты независимо от Эйлера получил Клеро в работе, написанной около 1739 г. *).

Существенное значение для развития интересущей нас теории имел метод интегрирования, развитый Даламбером

---

*) В комментарнях к русскому изданию сочинения Клеро «Теория фигуры земли» (серия «Классики науки», Издательство Академии Наук СССР, 1947, стр. 251) редактор издания Н. И. Идельсон рассматривает формулировку Клеро: «Если $A\,dx+B\,dy$ представляет собой дифференциал какой угодно величины, составленной из x и y и из постоянных, то ... $\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dy}$», приложенную к письму Клеро к Эйлеру от 17.IV 1740, как «первую формулировку теоремы о равенствах накрест взятых производных в полном дифференциале функции двух переменных». Очевидно, что это утверждение Н. И. Идельсона ошибочно, так как первая формулировка содержалась в работе Эйлера, сданной в печать около 1734 г., а в 1740 г. уже вышедшей в свет.

Заметим, что сам Эйлер в письме к Н. Бернулли от 10. XI 1742 г., отмечая притязания французских математиков (Mathematicis Gallis) Бугера и Ла Фонтэна на авторство этой теоремы, напоминает о своей работе, однако приоритет приписывает не себе, а своему адресату, Н. Бернулли, ссылаясь на его старое исследование об ортогональных траекториях (1719).

в 1746 г. в статье, посвящённой решению уравнения колебания струны:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Обозначим $\frac{\partial y}{\partial x}$ через p и $\frac{\partial y}{\partial \tau}$ через q. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \frac{\partial p}{\partial x},$$

откуда следует, что выражение $p\,d\tau + q\,dx$ есть полный дифференциал некоторой функции u: $p\,d\tau + q\,dx = du$. С другой стороны, $q\,d\tau + p\,dx = \frac{\partial y}{\partial \tau}\,d\tau + \frac{\partial y}{\partial x}\,dx = dy$.

Отсюда, далее:

$$d(y+u) = dy + du = (p+q)(d\tau + dx) = (p+q)\,d(\tau + x)$$

и

$$d(y-u) = dy - du = (p-q)(d\tau - dx) = (p-q)\,d(\tau - x),$$

а это означает, что $y+u$ есть произвольная функция от $\tau + x$: $y + u = 2\Psi(\tau + x)$, а $y - u$ есть произвольная функция от $\tau - u$: $y - u = 2\Gamma(\tau - x)$. Складывая два последних равенства, получаем окончательно: $y = \Psi(\tau + x) + \Gamma(\tau - x)$, что и даёт общее решение уравнения колебания струны, содержащее две произвольные функции: Ψ и Γ.

В «Опыте новой теории сопротивления жидкости» (1752 г.) Даламбер, в связи с изучением обтекания твёрдого тела однородной невесомой жидкостью, решает задачу отыскания двух функций p и q по их полным дифференциалам:

$$dq = M\,dx + N\,dz, \qquad dp = N\,dx - M\,dz.$$

Из сравнения этих дифференциалов он получает уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial z}\,(= N), \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial x}\,(= -M), \qquad (1.6:3)$$

называемые обычно уравнениями Коши-Римана. Как мы увидим ниже, эти уравнения получил вновь (притом из весьма общих соображений) и существенно использовал Эйлер, поэтому *исторически значительно правильнее называть их уравнениями Даламбера-Эйлера.*

Эти уравнения (в силу результата Эйлера) означают, что $q\,dx+p\,dz$ и $p\,dx-q\,dz$ суть полные дифференциалы некоторых функций. Поэтому выражения

$$q\,dx+p\,dz+\sqrt{-1}\,(p\,dx-q\,dz)=(q+\sqrt{-1}\,p)\left(dx+\frac{dz}{\sqrt{-1}}\right)$$

и

$$q\,dx+p\,dz-\sqrt{-1}\,(p\,dx-q\,dz)=(q-\sqrt{-1}\,p)\left(dx-\frac{dz}{\sqrt{-1}}\right)$$

суть также полные дифференциалы некоторых функций, и можно утверждать, что $q+\sqrt{-1}\,p$ есть некоторая функция от $x+\frac{z}{\sqrt{-1}}$, а $q-\sqrt{-1}\,p$ — функция от $x-\frac{z}{\sqrt{-1}}$.

Полагая

$$q+\sqrt{-1}\,p=2\xi\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)+2\sqrt{-1}\,\zeta\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)$$

и

$$q-\sqrt{-1}\,p=2\xi\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)-2\sqrt{-1}\,\zeta\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right),$$

Даламбер получил для искомых функций следующие формулы:

$$q=\xi\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)+\xi\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)+$$
$$+\sqrt{-1}\,\zeta\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)-\sqrt{-1}\,\zeta\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right),$$

$$p=\frac{\xi\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)}{\sqrt{-1}}-\frac{\xi\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)}{\sqrt{-1}}+$$
$$+\zeta\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)+\zeta\left(x-\frac{z}{\sqrt{-1}}\right).$$

С современной точки зрения в этом рассуждении две сопряжённые гармонические функции q и p были представлены в виде действительной и мнимой части функции

$$2\xi\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)+2\sqrt{-1}\,\zeta\left(x+\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)$$

комплексного переменного $x+\frac{z}{\sqrt{-1}}$. При этом неявно подразумевалось, что это функция аналитическая, принимающая действительные значения для действительных значений аргумента (в виде примера Даламбер брал в качестве ξ и ζ многочлены третьей степени с действительными коэффициентами).

В исследованиях по гидромеханике, выполненных около 1755 г., Эйлер рассматривал, в частности, потенциальное плоское движение идеальной жидкости. Он нашёл, что выражения $u\,dy-v\,dx$ и $u\,dx+v\,dy$, где u и v — проекции скорости частицы жидкости на координатные оси, являются полными дифференциалами некоторых функций, откуда по методу Даламбера вывел, что

$$u-\sqrt{-1}\,v=\frac{1}{2}\varphi(x+\sqrt{-1}\,y)-\frac{\sqrt{-1}}{2}\psi(x+\sqrt{-1}\,y),$$

$$u+\sqrt{-1}\,v=\frac{1}{2}\varphi(x-\sqrt{-1}\,y)+\frac{\sqrt{-1}}{2}\psi(x-\sqrt{-1}\,y).$$

Чтобы представить u и v в виде действительных функций, Эйлер разлагал φ и ψ в степенные ряды

$$\varphi(p)=A+Bp+Cp^2+Dp^3+\ldots,$$
$$\psi(p)=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}p+\mathfrak{C}p^2+\mathfrak{D}p^3+\ldots$$

и полагал $p=x\pm\sqrt{-1}\,y=s(\cos w\pm\sqrt{-1}\sin w)$; в результате для u и v получались следующие разложения

$$u=A+Bs\cos w+Cs^2\cos 2w+Ds^3\cos 3w+\ldots+$$
$$+\mathfrak{B}s\sin w+\mathfrak{C}s^2\sin 2w+\mathfrak{D}s^3\sin 3w+\ldots,$$
$$v=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}s\cos w+\mathfrak{C}s^2\cos 2w+\mathfrak{D}s^3\cos 3w+\ldots-$$
$$-Bs\sin w-Cs^2\sin 2w-Ds^3\sin 3w-\ldots$$

Таким образом, Эйлер выразил здесь сопряжённые гармонические функции u и v в виде рядов, являющихся действительной и мнимой частью степенного ряда (разложение гармонических функций в ряды по однородным гармоническим многочленам). Замечательно, что, получая этот результат, Эйлер от координат точки (x, y) переходит к комплексному числу $p=x\pm\sqrt{-1}\,y$, а затем представляет p в полярных

координатах: $p = s(\cos w \pm \sqrt{-1}\sin w)$. Подобный переход становится далее привычным в работах Эйлера, Лагранжа и других математиков XVIII века. В этом переходе от точки к комплексному числу (и обратно) и заключается осуществление идеи геометрического представления комплексных чисел; здесь нехватает, однако, геометрического представления операций над комплексными числами.

Рассматривая этот этап в освоении математиками комплексных чисел, не следует фиксировать внимание именно на геометрическом истолковании. Существенно то, что в рассмотренных работах Даламбера и Эйлера и в последующих работах Эйлера и Лагранжа *комплексные числа выступают как пары действительных чисел, имеющих тот или иной конкретный смысл* — геометрический, физический или, наконец, аналитический (пары функций). Опираясь на то или иное истолкование комплексных чисел, математики рассматривают соотношения между комплексными числами как источник соотношений между действительными числами, как «сдвоенные» соотношения между последними.

Использование этого приёма предполагало во всех случаях уменье отделять действительные и мнимые части в выражениях вида $f(x+iy)$. Мы уже говорили в п. 1.3 о трудностях, связанных с этой проблемой. Наибольшую для того времени ясность внёс в неё Эйлер в своём «Интегральном исчислении» (т. II). Если функция $f(x+iy)$ дана аналитическим выражением и, следовательно (по убеждению Эйлера), разлагается в степенной ряд обыкновенный или обобщённый, то, представляя $x+iy$ в виде $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и применяя формулу Муавра, можно легко отделить действительную и мнимую части в каждом члене ряда, а следовательно, и во всём выражении $f(x+iy)$. Если же речь идёт о функции «разрывной» в смысле Эйлера, соответствующей кривой, начерченной свободным движением руки, то здесь подстановка мнимого значения аргумента теряет всякий смысл *).

В работе Эйлера «О представлении сферической поверхности на плоскости», напечатанной в «Деяниях Петербургской Академии наук» (Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae») за 1777 г., исследуется в общем виде вопрос об условиях,

*) Сравните И. И. Тимченко, стр. 514—515.

при которых мельчайшие части земной поверхности изображаются на плоскости в виде подобных им фигур, т. е. о *конформном отображении* областей сферы в плоскость. Самый термин «конформный» в применении к отображению — проектированию, впервые встречается в 1789 г. в работе геометра Шуберта; Эйлер называл эти отображения подобными в малом. Вводя долготу t, широту u и декартовы координаты на плоскости x и y, Эйлер получил общие условия конформности в виде

$$dx = p\,du + r\,dt\cos u, \quad dy = r\,du - p\,dt\cos u,$$

откуда

$$dx + i\,dy = (p + ir)\,(du - i\,dt\cos u)$$

или, полагая $s = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{u}{2}\right)$ и $z = \ln s - it$ *):

$$dx + i\,dy = (p + ir)\cos u\,dz.$$

Поэтому

$$x + iy = 2\Gamma(z) = 2\Gamma(\ln s - it),$$
$$x - iy = 2\Gamma(\ln s + it),$$

где $\Gamma(z)$ — какая-либо функция от z (аналитическая и принимающая действительные значения при z действительном) и, наконец,

$$x = \Gamma(\ln s - it) + \Gamma(\ln s + it),$$
$$iy = \Gamma(\ln s - it) - \Gamma(\ln s + it).$$

Эти формулы решают общую задачу о конформном отображении областей сферы в плоскость.

---

*) Геометрически это соответствует применению стереографической проекции сферы на плоскость $\zeta = s(\cos t + i\sin t)$, затем преобразованию плоскости ζ посредством логарифма: $\mathfrak{z} = \ln\zeta = \ln s + it$ и, наконец, зеркальному отражению в действительной оси: $z = \overline{\mathfrak{z}}$. Получающееся в результате конформное отображение сферы (за исключением из неё полюсов) на плоскость: $z = \ln s - it = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4}{2}\right) - it$ называется в картографии проекцией Меркатора. При этой проекции сетка параллелей и меридианов изображается двумя семействами взаимно перпендикулярных прямых.

Интересно отметить, что в своих выкладках Эйлер переходит от точек плоскости (x, y) к комплексным числам $x+iy$, а затем вновь возвращается к точкам. Таким образом, в этих выкладках Эйлера особенно ясно выступает *геометрическое истолкование* комплексных чисел.

1.7. Чрезвычайно важную роль в дальнейшем развитии теории аналитических функций сыграл ряд работ Эйлера, посвящённых применению комплексного переменного к вычислению интегралов от действительных функций.

Работы эти начинаются с 1776 г. и продолжаются до смерти Эйлера, последовавшей в 1783 г. Однако из печати они стали выходить лишь с 1788 г. Среди них особый интерес представляют две работы, доложенные в Петербургской Академии наук 20. III и 21. III 1777 г. и опубликованные соответственно в 1793 и 1797 гг.

Эйлер отмечает, что каждая функция Z от z, которая при $z=x+iy$ имеет вид $M+iN$, при $z=x-iy$ приобретает вид $M-iN$. Здесь, как и в других своих работах, он неявным образом ограничивается рассмотрением аналитических функций, принимающих действительные значения при z действительном. Таким образом, речь идёт о простейшем случае известного *принципа симметрии* (принцип зеркального отражения) теории аналитических функций. Какое значение Эйлер придаёт этому предложению, видно из следующих строк, с которых начинается вторая из указанных работ («Ulterior disquisitio de formulis integralibis imaginariis»):

«Вся Теория Мнимых, которой Анализ обязан теперь столькими успехами, опирается главным образом на следующем основании: если Z есть какая-либо функция от z, которая после подстановки $z=x+y\sqrt{-1}$ принимает такой вид: $M+N\sqrt{-1}$, то по подстановке $z=x-y\sqrt{-1}$ та же функция $Z=M-N\sqrt{-1}$, где буквы M и N обозначают всегда действительные количества» *).

Если теперь

$$\int Z\,dz = V, \qquad (1.7:1)$$

*) Цитирую по книге И. И. Тимченко, стр. 554.

то, полагая $z = x + iy$, $V = P + iQ$, находим:

$$P + iQ = \int (M + iN)(dx + i\,dy);$$

поэтому при $z = x - iy$ мы должны иметь

$$P - iQ = \int (M - iN)(dx - i\,dy),$$

откуда

$$P = \int M\,dx - N\,dy \quad \text{и} \quad Q = \int N\,dx + M\,dy. \qquad (1.7:2)$$

Следовательно, выражения $M\,dx - N\,dy$ и $N\,dx + M\,dy$ являются полными дифференциалами функций P и Q, что означает выполнение условий

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}. \qquad (1.7:3)$$

«Посредством такой подстановки (т. е. замены z на $x + iy$ в выражении функции $Z(z)$. — *А.М.*), заключает Эйлер, всегда получаются две функции M и N переменных x и y, обладающие тем замечательным свойством, что $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}$, так же, как $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$; подобными же свойствами обладают P и Q». Здесь *впервые в общем виде устанавливается тот факт, что действительная и мнимая части произвольной функции* $Z(z)$ (аналитической и принимающей действительные значения при z действительном) *связаны условиями* (1.7 : 3), *т. е. удовлетворяют уравнениям Даламбера-Эйлера* (Коши-Римана).

Эти выводы Эйлер иллюстрирует на примерах, в которых $Z(z)$ является рациональной функцией. Основная его цель заключается, однако, в том, чтобы использовать соотношения (1.7 : 2) как метод вычисления интегралов, значительно более сложных, чем исходный интеграл (1.7 : 1).

Для того чтобы интегралы (1.7 : 2) представлялись в виде интегралов от функций одного переменного, Эйлер вместо подстановки $z = x + iy$ в выражении (1.7 : 1) пользуется подстановкой $z = v(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ и считает ϑ постоянным (это эквивалентно интегрированию комплексной функции $Z(z)$

вдоль луча, выходящего из начала координат). Именно таким путём Эйлер из интеграла

$$V=\int \frac{z^{m-1}\,dz}{(a+bz^{x})^{\frac{m}{n}}},$$

выражающегося в конечном виде, получает после некоторых преобразований интегралы вида

$$\int \frac{\alpha \sin m\omega+\beta \cos m\omega}{\gamma \sin n\omega+\delta \sin n\omega}\,\frac{d\omega}{(\sin n\omega)^{1-\frac{m}{n}}}.$$

В позднейшей работе он, отправляясь от интеграла

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\arcsin z,$$

вычисляет тем же методом такие «труднейшие интегралы», как

$$P=\int \frac{\cos(\vartheta+\omega)\,dv}{\sqrt{s}} \quad \text{и} \quad Q=\int \frac{\sin(\vartheta+\omega)\,dv}{\sqrt{s}},$$

где

$$\operatorname{tg} 2\omega=\frac{v^2\sin 2\vartheta}{1-v^2\cos 2\vartheta} \quad \text{и} \quad s=\sqrt{1-2v^2\cos 2\vartheta+v^4}$$

(ϑ — постоянное).

В работе, доложенной Петербургской Академии наук 30. IV 1781 г. и напечатанной в 1794 г., Эйлер отправляется от интеграла

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx,$$

получившего впоследствии название эйлерова интеграла второго рода (вместо $\Gamma(n)$ он пишет: $1\cdot 2\ldots(n-1)$, не считая, однако, n целым числом). Заменяя x через ky, он выводит, что

$$\int_0^\infty y^{n-1}e^{-ky}\,dy=\frac{\Gamma(n)}{k^n};$$

наконец, полагая

$$k = p \pm iq = r(\cos\alpha \pm i\sin\alpha),$$

находит интегралы:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty y^{n-1}e^{-py}\cos qy\,dy &= \frac{\Gamma(n)\cos n\alpha}{r^n}, \\ \int_0^\infty y^{n-1}e^{-py}\sin qy\,dy &= \frac{\Gamma(n)\sin n\alpha}{r^n} \end{aligned}\right\}. \qquad (1.7:4)$$

Отсюда, в частности, при $n = \frac{1}{2}$, $p = 0$, $q = 1$ получаются интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(при этом используется ранний результат Эйлера: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$), которые часто называют интегралами Френеля.

Считая, что n во второй формуле (1.7 : 4) есть бесконечно малое, Эйлер находит, что

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\sin qx\,dx}{x} = \alpha = \operatorname{arctg}\frac{q}{p},$$

откуда при $p = 0$ и $q = 1$ получается интеграл

$$\int \frac{\sin x\,dx}{x} = \frac{\pi}{2},$$

который часто связывают с именами Лапласа или Дирихле.

1.8. Чтобы закончить характеристику достижений математики XVIII века в изучении аналитических функций, следует указать ещё введение в науку различных неэлементарных аналитических функций. И здесь ведущая роль принадлежит Эйлеру. В письме к Гольдбаху, написанном в Петербурге в октябре 1729 г., Эйлер распространяет определение факто-

риала $m!$ на случай не целого числа m, т. е. вводит гамма-функцию (само наименование и обозначение гамма-функции было предложено Лежандром в XIX веке).

При этом он даёт выражение для обобщённого факториала $m! = \Gamma(m+1)$ в виде бесконечного произведения

$$\frac{1\cdot 2^m}{1+m}\cdot\frac{2^{1-m}3^m}{2+m}\cdot\frac{3^{1-m}4^m}{3+m}\cdot\frac{4^{1-m}5^m}{4+m} \text{ и т. д.},$$

которое представляет также в следующем виде (мы пользуемся современным способом записи):

$$\Gamma(m+1) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\ldots n}{(1+m)(2+m)\ldots(n+m)}(n+1)^m.$$

Здесь же он даёт значение для $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, равное $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, и далее получает значения $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$, ... с помощью основного свойства факториала ($m! = m\cdot(m-1)!$ или $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$). В дальнейших работах он получает интегральные представления гамма-функции, а именно:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^1 (-\ln x)^n\,dx$$

(письмо к Гольдбаху, написанное в январе 1730 г., и работа, выполненная около того же времени, но вышедшая из печати лишь в 1738 г.), а также

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx$$

(упоминавшаяся в п. 1.7 работа, выполненная в 1781 г., но напечатанная лишь в 1794 г.).

В статье, написанной около 1737 г. (т. IX «Комментариев Императорской Петербургской Академии наук», содержащий эту статью, вышел из печати в 1744 г.), Эйлер приводит разложение в бесконечное произведение для функции, получившей впоследствии наименование дзета-функции Римана и обозначение $\zeta(s)$. А именно:

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\text{ и т. д.} =$$

$$= \frac{2^n\cdot 3^n\cdot 5^n\cdot 7^n\cdot 11^n \text{ и т. д.}}{(2^n-1)(3^n-1)(5^n-1)(7^n-1)(11^n-1) \text{ и т. д.}}$$

(в правой части фигурируют все простые числа), что можно переписать (меняя обозначения) в виде:

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s} = \prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

В таком именно виде эту формулу использовал впоследствии Риман, отмечая, что она принадлежит Эйлеру.

Риман не знал, однако, что и выведенное им функциональное уравнение для $\zeta(s)$:

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \cdot \zeta(s)$$

в несколько ином виде также встречалось у Эйлера *). Правда, Эйлер проверил это соотношение лишь в частных случаях, высказав в качестве гипотезы (которую он считал весьма правдоподобной), что оно справедливо и при любых s (в его обозначениях n).

Занимаясь эллиптическими интегралами, Эйлер нашёл теорему сложения для эллиптических интегралов (ряд исследований, публикация которых началась с VI т. «Новых комментариев Петербургской Академии наук за 1756 и 1757 гг.», вышедшего из печати в 1761 г.), содержащую в себе позднейшие теоремы сложения для эллиптических функций. В его «Введении в анализ», гл. XVI встречались также функции типа тета-функций, например, следующие:

$$\prod_1^\infty (1 - x^n z)^{-1}, \quad \prod_1^\infty (1 + x^{2n}) \quad \text{и др.}$$

Эти функции и им подобные исследовались Эйлером для решения задач о разбиении чисел на слагаемые, точнее говоря, для подсчёта количества способов, которыми данное натуральное число может быть представлено в виде суммы натуральных чисел, подчинённых дополнительным условиям.

Впрочем, некоторые из этих функций, разложенные в степенные ряды, встречаются ещё у Я. Бернулли, а именно, в «Ars conjectandi» («Искусство строить предположения»)—сочинении,

*) «Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques» — статья, написанная в 1749 г., но вышедшая в свет в 1768 г. в XVII т. «Histoire de l'académie des sciences et belles lettres» (Берлин).

вышедшем в 1713 г. и содержащем наиболее раннюю форму закона больших чисел.

Отметим, наконец, что в статье Эйлера, посвящённой колебаниям мембраны и опубликованной в X т. «Новых комментариев Петербургской Академии наук за 1764 г.» (том вышел из печати в 1766 г.), вводятся функции, позднее получившие название цилиндрических (а также бесселевых). Эйлер предположил, что колебания круглой мембраны определяются уравнением вида

$$z = \sin \alpha t \sin \beta\varphi \cdot u(r),$$

где r и φ — полярные координаты точки в плоскости мембраны, t — время и z — отклонение от положения равновесия точки мембраны с координатами r и φ в момент времени t. Он показал, что входящая сюда функция $u(r)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению вида:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2}\right)u = 0$$

(уравнение часто называют уравнением Бесселя, хотя исторически это совершенно неоправдано *), и нашёл для $u(r)$ разложение в степенной ряд

$$u(r) = r^\beta \left\{1 - \frac{1}{1\cdot(\beta+1)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{1\cdot 2(\beta+1)(\beta+2)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^4 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^6 + \ldots\right\}.$$

Функция $u(r)$ с точностью до числового множителя совпадает с цилиндрической функцией $J_\beta(r)$, а именно:

$$J_\beta(r) = \frac{1}{2^\beta \Gamma(\beta+1)} u(r).$$

В дальнейших своих работах, посвящённых цилиндрическим функциям, Эйлер доказал, что для значения β, равного целому числу с половиной, эти функции выражаются через элементарные, заметил, что при любом действительном β они имеют бесчисленное множество действительных нулей и дал их инте-

*) Повидимому, лучше всего называть его уравнением цилиндрических функций, ибо термин «уравнение Эйлера» используется в теории дифференциальных уравнений и в механике в других значениях.

гральное представление. Наконец, для случаев $\beta=0$ и $\beta=1$ Эйлер дал разложение в ряд второго решения уравнения цилиндрических функций, линейно независимого от $u(r)$.

Для случая $\beta=0$ соответствующая цилиндрическая функция была введена петербургским академиком Д. Бернулли около 1732 г. в работе, посвящённой колебаниям тяжёлой цепи, подвешенной за один конец (опубликовано в 1738 г.).

1.9. Мы уже говорили выше, что Эйлер (и ранее его Ньютон) рассматривал разложимость в степенной ряд как общее свойство аналитических выражений, т. е. аналитически представимых функций. «Аналитически представимые функции суть функции аналитические» — вот одно из основных (не сформулированных, впрочем, именно в этих терминах) положений математического анализа XVIII века; оно молчаливо признавалось и почти всеми математиками первой четверти XIX века.

В конце XVIII века оно было принято Лагранжем в качестве исходной точки для обоснования математического анализа (дифференциального и интегрального исчислений).

В сочинении «Теория аналитических функций, содержащая принципы дифференциального исчисления, освобождённые от всякого рассмотрения бесконечно-малых или умаляющихся, пределов или флюксий и сведённые к алгебраическому анализу конечных количеств» (1797) Лагранж определяет функцию, как и его предшественники: «Функцией одного или нескольких количеств называют всякое вычислительное выражение (expression de calcul), в которое эти количества входят каким-либо образом...».

Вслед за этим, ссылаясь на теорию рядов, он пишет для $f(x+i)$ разложение вида

$$f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+ \text{ и т. д.}$$

«в котором количества p, q, r и т. д. — коэффициенты степеней i, будут новыми функциями x, производными от первоначальной функции fx и независимыми от количества i» *).

Таким образом, с помощью степенных рядов Лагранж на второй странице своей книги сразу вводит понятие производных и первоначальной (примитивной, первообразной) функции.

*) Буквой «i» Лагранж обозначает приращение (начальная буква латинского incrementum).

После критико-исторического очерка разных попыток обоснования анализа Лагранж отмечает, что ещё в 1772 г. он высказал мысль, что теория разложения в ряды содержит истинные принципы дифференциального исчисления. Далее он делает попытку обосновать разложение функций в ряды. «Но чтобы ничего не утверждать без обоснования, говорит Лагранж, мы начнём с изучения формы того самого ряда, который должен представлять разложение всякой функции fx, когда туда подставляют $x+i$ на место x, и который мы предположили содержащим только целые и положительные степени i.

Это предположение на самом деле проверяется посредством разложения известных функций; но никто, кого я знаю, не пытался его доказать a priori; это представляется мне тем более необходимым, что имеются частные случаи, где оно не может иметь места. Впрочем, дифференциальное исчисление основано именно на том же предположении, и случаи, представляющие исключение, как раз те, где это исчисление оказывается непригодным». (Здесь Лагранж имеет в виду отдельные значения x, где сама функция или её производные обращаются в бесконечность.) Так как возможность разложения по любым вообще степеням x, как целым, так и дробным, для Лагранжа, как и для Эйлера, представляется совершенно бесспорной, то изучению подвергается лишь один вопрос: могут ли в разложении $f(x+i)$ при неопределённых значениях x и i присутствовать дробные степени i?

Степень $i^{\frac{m}{n}}$ может содержаться в разложении $f(x+i)$, по мнению Лагранжа, лишь благодаря наличию радикалов в выражении функции. Эти радикалы будут входить также и в fx. Поэтому в правой части разложения

$$f(x+i)=fx+pi+qi^2+\ldots+ui^{\frac{m}{n}}+\ldots$$

каждое из многих значений fx, комбинируясь с каждым из n значений $i^{\frac{m}{n}}$, даёт для левой части большее число значений, чем их имеет fx, что невозможно при неопределённых x и i (благодаря наличию одних и тех же радикалов в выражениях fx и $f(x+i)$). Для частных значений x может случиться, что $f(x+i)$ содержит радикалы, которых нет в fx. Тогда

рассуждение непригодно. В другом месте своего сочинения Лагранж рассматривает эти исключительные случаи; в качестве простейшего примера он приводит функцию

$$fx = (x - a)\sqrt{x - b}.$$

Для неё имеем:

$$f(b + i) = (b + i - a)\sqrt{i} = (b - a)\sqrt{i} + i^{\frac{3}{2}};$$

здесь исключительным значением x является $x = b$. Установив таким образом (с нашей точки зрения, конечно, совершенно неудовлетворительно), что всякая функция разлагается в общем случае в ряд по целым положительным степеням, Лагранж переходит к более подробному рассмотрению «в чём состоит это разложение и что означает каждый из его членов». Вместе с тем он получает также и метод для отыскания коэффициентов разложения. Вот как он рассуждает. Так как разность $f(x + i)$ и fx обращается в нуль при $i = 0$, то она должна представляться в виде произведения положительной степени i на некоторую функцию от x и i. Но степень i, как уже доказано, не может быть дробной. Поэтому можно положить: $f(x + i) = fx + iP$. Обозначая через p значение P при $i = 0$, мы получаем точно так же: $P = p + iQ$ и далее: $Q = q + iP$ и т. д. Подставляя последовательно, будем иметь:

$$f(x + i) = fx + iP = fx + ip + i^2Q =$$
$$= fx + ip + i^2q + i^3R = \ldots,$$

что и даёт требуемое разложение.

Лагранж поясняет изложенный приём на примерах функций: $\frac{1}{x}$ и $\sqrt{x}$. Этот метод позволяет ему высказать теорему, что в ряде

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$$

i можно взять настолько малым, чтобы любой наперёд заданный член ряда был больше, чем сумма всех следующих за ним членов, и это будет иметь место для всех ещё меньших значений i. Действительно, сумма всех членов, следующих, например, за i^2q, есть i^3R. Но iR, как следует из способа получения этой величины, обращается в нуль при $i = 0$. Поэтому, если оставить в стороне исключительные значения x,

iR может быть сделано меньше, чем q, начиная с некоторого достаточно малого i; тогда будет $i^2q > i^3R$, что и доказывает предложение.

Конечно, этим рассуждением Лагранж вовсе не хочет доказать сходимость ряда *). Изложенная теорема выражает для него важное свойство разложений функции в степенные ряды, один из фундаментальных принципов его теории, как говорит сам Лагранж. «Её (эту теорему) молчаливо допускают в дифференциальном исчислении и в исчислении флюксий и именно благодаря ей, можно сказать, эти исчисления больше ценятся, особенно в их приложениях к задачам геометрии и механики».

Вопрос о сходимости рядов, в смысле сколько-нибудь близком к современному, не возникает перед Лагранжем. И остаточный член ряда Тейлора в форме, носящей теперь имя Лагранжа, даётся им в этой книге не для обоснования разложимости функций в степенной ряд (его обоснование, как мы видели, совсем иное), но для замены суммы членов ряда, отбрасываемых, начиная с некоторого места. Иными словами, для Лагранжа первичным является ряд Тейлора и вторичным формула Тейлора; мы увидим ниже, что Коши изменил этот порядок.

Заканчивая этот обзор основных принципов труда Лагранжа, приведём ещё место, где Лагранж резюмирует своё исследование исключительных случаев, когда разложение по целым положительным степеням невозможно: «... Разложение $fx + if'x + \frac{i^2}{2}f''x +$ и т. д. может стать неверным для данного значения x только потому, что одна из функций fx, $f'x$, $f''x$ и т. д. станет для этого значения бесконечной, так же как и все следующие. Тогда, если n — индекс первой, становящейся бесконечной функции, разложение, о котором идёт речь, должно содержать член i^m, где m — число, заключающееся между $n-1$ и n. И если все функции fx, $f'x$, $f''x$ и т. д. становятся бесконечными для одного и того же значения x, разложение $f(x+i)$ содержит в этом случае отрицательные степени i».

*) В последнем смысле высказывается, например, Вивиани в IV томе «Vorlesungen über Geschichte der Mathematik», *M. Cantor*, стр. 666.

Перед этим Лагранж специально отмечает, что «вопреки мнению некоторых геометров» все производные некоторой функции вместе с ней самой не могут обращаться в нуль при некотором частном значении x, так как иначе функция должна была бы тождественно обращаться в нуль. Однако все они могут обращаться в бесконечность.

Позднее Вейерштрасс, отмечая заслугу Лагранжа, сохранил за функциями, представимыми степенными рядами, название «аналитические», стоящее в заголовке труда Лагранжа. Читатель ошибётся, однако, если решит, что сам Лагранж употреблял термины «теория функций», «аналитические функции» в смысле, соответствующем современному. В этом отношении интересен следующий отрывок из статьи, в которой Лагранж разъясняет предмет своих лекций по теории аналитических функций» *).

«Собственно говоря, алгебра есть не что иное, как теория функций. В арифметике числа ищут по данным условиям, наложенным на эти и другие числа, и найденные числа удовлетворяют этим условиям, не сохраняя никакого следа операций, служивших для их образования. Напротив, в алгебре искомые количества должны быть функциями данных количеств, т. е. выражениями, представляющими различные операции, которые нужно произвести над этими количествами, чтобы получить значения искомых. В алгебре, в собственном смысле слова, рассматривают только первоначальные функции, происходящие из обычных алгебраических операций; это первая ветвь теории функций. Во второй ветви рассматривают производные функции, и это та ветвь, которую мы называем просто «Теорией аналитических функций» и которая содержит всё, относящееся к новым исчислениям». Итак, Лагранж, называя своё сочинение «Теорией аналитических функций», хотел лишь указать, что здесь будет итти речь о той ветви теории функций (в его смысле слова), где рассматриваются первоначальные (первообразные) функции и производные, т. е. об анализе.

1.10. Подведём итоги. Начиная с шестидесятых годов XVII века, И. Ньютон широко использует аппарат степенных

---

*) «Discours sur l'objet de la théorie des fonctions analytiques» Journal de l'Ecole Politechnique, thermidor an VII (1799).

рядов для представления функций и решения разнообразных задач математики и механики. Завершение техники операций со степенными рядами происходит в XVIII веке, где к ассортименту приёмов, употреблявшихся Ньютоном, присоединяются ещё формулы Тейлора и Лагранжа. Наряду с аппаратом степенных рядов для представления функций применяются, главным образом по инициативе Эйлера, бесконечные произведения, разложения на простейшие дроби, представления функций интегралами (гамма-функция, эллиптические интегралы), а также непрерывные дроби (на чём мы не останавливались).

Принципиально новым моментом является в математическом анализе XVIII века использование комплексных значений независимого переменного. Трудами Эйлера теория элементарных функций комплексного переменного получает полное развитие и завершение к середине XVIII века. Кроме того, Эйлер впервые вводит в практику анализа новые аналитические функции (гамма-функция, дзета-функция, цилиндрические функции) и устанавливает основные соотношения для них и для функций, встречавшихся и у других авторов (эллиптические интегралы, функции типа тета-функций). Правда, все эти неэлементарные функции рассматриваются им, как правило, только для действительных значений независимых переменных.

Эйлер впервые вводит в рассмотрение уравнения с частными производными и устанавливает, что уравнение $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ является условием, при котором $P\,dx+Q\,dy$ есть полный дифференциал некоторой функции.

Даламбер первым, а за ним Эйлер в связи с задачами гидромеханики приходят к системе уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

и получают пары решений этой системы в виде действительной и мнимой частей аналитической функции $f(x)$ комплексного переменного. При этом именно в работах Эйлера обнаруживается общий характер этого результата, так как для получения u и v он берёт в качестве $f(z)$ не отдельные элементарные функции, как Даламбер, а общую аналитиче-

скую функцию, заданную степенным рядом, с любыми (действительными) коэффициентами.

В работах по интегральному исчислению Эйлер устанавливает равенство

$$\int Z(z)\,dz = \int (M\,dx - N\,dy) + i\int (N\,dx + M\,dy).$$

Нехватает только представления об интегралах от функций комплексного переменного вдоль различных кривых, принадлежащих комплексной плоскости, чтобы вычитать отсюда интегральную теорему Коши о независимости интеграла от пути интегрирования.

Пользуясь этим соотношением, Эйлер вновь устанавливает, что действительная и мнимая части функций комплексного переменного (аналитической) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Кроме того, он впервые использует приём отделения действительной и мнимой частей в интеграле от комплексной функции для вычисления интегралов от действительных функций. Именно этот приём, как мы увидим в очерке II, послужил отправным пунктом в исследованиях Коши.

Наконец, Эйлер в связи с задачей о построении географических карт изучает задачу конформного отображения в общей постановке и использует для этой цели комплексное переменное.

В исследованиях Эйлера (а также Даламбера и позднее Лагранжа), связанных с различными приложениями комплексного переменного к решению задач, формулируемых непосредственно в терминах действительных чисел, комплексные числа обычно выступают как пары действительных чисел, имеющих определённый конкретный смысл (например, как пары, составленные из абсциссы и ординаты точки или из проекций скорости частицы жидкости на координатные оси). Таким образом, различные конкретные интерпретации комплексных чисел (в частности, геометрическая) осваиваются в математике, начиная с середины XVIII века.

Однако здесь отсутствует ещё в явном виде наглядное представление о комплексном переменном как о точке, перемещающейся по плоскости (а также отсутствует наглядное истолкование операций над комплексными числами).

Таким образом, *в XVIII веке был накоплен обширный материал по основам теории аналитических функций и выявлена плодотворность изучения функций комплексного переменного. И основную ведущую роль в этой работе играл гениальный петербургский академик Леонард Эйлер.*

ОЧЕРК ВТОРОЙ

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

2.1. В дальнейшей истории теории аналитических функций большое значение имело развитие геометрического представления комплексных чисел точками или векторами на плоскости. Как уже отмечалось, весьма близок к такому представлению был Эйлер в тех работах, где он переходил от записи комплексного числа в виде $x \pm \sqrt{-1}y$ к тригонометрической форме комплексного числа $s(\cos w \pm \sqrt{-1} \sin w)$ (например, в гидродинамических исследованиях, выполненных около 1755 г. (п. 1.6), и в особенности в работе 1777 г. «О представлении сферической поверхности на плоскости» (п. 1.6), в которой от точек (x, y) плоскости (географической карты) Эйлер переходит к комплексным числам $x + iy$ и затем вновь возвращается к координатам x и y).

Однако в явной и систематической форме геометрическое изображение комплексных чисел (в виде направленных отрезков) и действий над ними впервые встречается в работе датского землемера К. Весселя «Об аналитическом представлении направления», напечатанной на датском языке в 1799 г.

К сожалению, это сочинение своевременно не было замечено математиками и его содержание было оценено по достоинству лишь 100 лет спустя.

Посвящённая геометрическому представлению комплексных чисел работа французского математика Аргана (1806 г.), написанная, повидимому, независимо от Весселя, также оставалась долгое время малоизвестной.

Впрочем, в первой четверти XIX века многие математики были весьма близки к геометрическому представлению

комплексных чисел. Всеобщую известность и признание геометрическое представление комплексных чисел получило начиная с 1832 г., когда была опубликована работа Гаусса «Теория биквадратичных вычетов», содержавшая обоснование теории комплексных чисел и их геометрическую интерпретацию. Однако Гаусс владел геометрическим представлением комплексных чисел значительно ранее этого времени.

На грани XVIII и XIX столетий стоит докторская диссертация Гаусса (напечатана в 1799 г.), посвящённая доказательству теоремы, впервые формулированной (но не доказанной) Эйлером, о том, что каждый многочлен с действительными коэффициентами разлагается на множители первой и второй степени с действительными коэффициентами. Доказательство Гаусса не безупречно (хотя и основано на верной идее).

Позднее Гаусс неоднократно возвращался к этой теореме, представив её в более общей форме (каждое алгебраическое уравнение степени не ниже первой имеет, по крайней мере, один корень, мнимый или действительный), и предлагал другие доказательства её.

2.2. Но наибольшее значение для построения основ теории аналитических функций комплексного переменного имели исследования, в которых применялись и развивались эйлеровы методы вычисления определённых интегралов, основанные на использовании комплексного переменного (см. п. 1.7).

Лаплас в цикле работ, начинающемся с его «Мемуара о приближённом представлении формул, являющихся функциями весьма больших чисел» (1782 г.) и завершённом «Аналитической теорией вероятностей» (1812 г.), развивает метод решения линейных разностных и дифференциальных уравнений, основанный на замене неизвестной функции $y(s)$ интегралом вида $\int \varphi(x)\, x^s\, dx$ или $\int \varphi(x)\, e^{-sx}\, dx$, где $\varphi(x)$ — новая неизвестная функция. *Здесь мы впервые встречаемся со знаменитым преобразованием Лапласа, которое в настоящее время получило столь важные приложения в технике.* Указанные интегралы берутся между пределами, удовлетворяющими некоторому уравнению — уравнению пределов, вообще неалгебраическому. Вообще говоря, корни этого уравнения оказываются мнимыми, а иногда и вовсе не

существуют, что не мешает Лапласу говорить о них и называть мнимыми корнями. В последнем случае речь идёт, впрочем, об указании таких способов стремления к бесконечности переменного x, при которых левая часть «уравнения пределов» стремится к нулю. Так, например, если уравнение пределов имеет вид $e^{-x^2}=0$, то в качестве пределов интеграла берутся $x=-\infty$ и $x=+\infty$, причём интегрирование ведётся вдоль действительной оси (или вдоль кривых, асимптотически к ней приближающихся); в других случаях Лаплас полагает $x=-\mu+\bar{\omega}\sqrt{-1}$ и изменяет $\bar{\omega}$ от $-\infty$ до $+\infty$, что соответствует интегрированию вдоль прямой, параллельной мнимой оси. Получив интегралы с «мнимыми пределами», Лаплас подвергает их различным преобразованиям, основанным на замене переменного интегрирования, и приходит к интегралам от действительных функций действительного переменного. Лаплас отмечает, что переходы от действительного к мнимому позволили ему найти значения многих определённых интегралов, оценивает роль этих переходов как своего рода индукцию (наведение) и считает необходимым дополнительную проверку получаемых с помощью мнимых результатов. Лаплас указывает, что Эйлер одновременно с ним использовал переход от действительного к мнимому для вычисления интегралов, но что полученные Эйлером результаты были опубликованы позднее, чем соответствующие работы Лапласа. Но если согласиться с Лапласом, что уже в его работе, представленной для «Мемуаров Академии наук» (1778), содержатся основы его метода, то и тогда приоритет систематического употребления мнимых для вычисления интегралов остаётся за Эйлером, который, как указывалось выше, доложил Петербургской Академии свои основные результаты в этом направлении ещё в марте 1777 г.

Из результатов Лапласа, изложенных в «Аналитической теории вероятностей», интересно отметить *выражения коэффициентов степенного ряда через интегралы от суммы ряда*, взятые по окружности в комплексной плоскости (сам Лаплас не пользуется геометрическим языком). А именно, заменяя в выражении

$$u=y_0+y_1t+y_2t^2+\ldots+y_xt^x+y_{x+1}t^{x+1}+\ldots+y_\infty t^\infty$$

(так Лаплас записывает степенной ряд) t^x на $e^{x\bar{\omega}\sqrt{-1}}$, т. е. полагая $t = e^{\bar{\omega}\sqrt{-1}}$, умножая обе части равенства на $e^{-x\bar{\omega}\sqrt{-1}}d\bar{\omega}$ и интегрируя по $\bar{\omega}$ от 0 до 2π, Лаплас находит

$$y_x = \frac{1}{2\pi}\int U d\bar{\omega}\,(\cos x\bar{\omega} - \sqrt{-1}\sin x\bar{\omega}),$$

где U — результат подстановки $t = e^{\bar{\omega}\sqrt{-1}}$ в выражение для суммы ряда. Очевидно, что интеграл в правой части есть $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{U\,dt}{t^{x+1}}$, т. е. *формулы Лапласа совпадают с интегральными формулами Коши для коэффициентов степенного ряда.*

Методы, развитые Эйлером в цитированной в п. 1.7 работе 1781 г., применяются Пуассоном к вычислению определённых интегралов в двух мемуарах 1813 г. о распределении электричества на поверхности проводников.

В 1815 г. Пуассон замечает, что «переход от действительного к мнимому» может дать неверные результаты потому, что «аналитическое выражение интеграла не всегда равно сумме дифференциалов»; возникающие здесь вопросы он подробно рассматривает в работе 1820 г. «Об интегралах от функций, которые обращаются в бесконечность между пределами интегрирования, и об употреблении мнимых при вычислении определённых интегралов».

Анализируя формулу

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

Пуассон замечает прежде всего, что она может привести к ошибкам, если $f'(x)$ обращается в ∞. (На это ещё раньше указывал Лагранж на примере интеграла $\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2}$, для которого формула даёт $\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{+1} = -2$, что, конечно неверно.)

Однако в таких случаях, как пишет далее Пуассон, можно пользоваться общей формулой, если «поступать так,

чтобы переменная x переходила от предела a к пределу b через ряд мнимых значений; тогда $f'(x)$ не будет более бесконечной ни для какого из промежуточных значений и определённый интеграл будет иметь свой обычный смысл», т. е. его можно будет рассматривать как сумму дифференциалов $f'(x)\,dx$ и поэтому применять формулу

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

В виде примера Пуассон вычисляет $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$, полагая $x = e^{iz}$, где действительное переменное z меняется от $(2n+1)\pi$ до 0 и получает значение $-(2n+1)\pi i$. Это же значение, в согласии с утверждениями Пуассона, получается, если для вычисления $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ воспользоваться первообразной функцией от $\frac{1}{x}$. Тогда будем иметь:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = [\ln x]_{-1}^{+1} = -\ln(-1) = -(2n+1)\pi i.$$

Подобные же мысли об интегрировании функций комплексного переменного ещё в более полном и совершенном виде были высказаны Гауссом раньше Пуассона в письме к Бесселю (1811 г.)*).

«Что нужно понимать, — пишет Гаусс, — под $\int \varphi x \cdot dx$ для $x = a + bi$? Очевидно, если хотят исходить из ясных понятий, нужно принять, что x, отправляясь от значения, для которого интеграл должен равняться нулю, посредством бесконечно малых приращений (каждое вида $\alpha + \beta i$) переходит к $x = a + bi$, и тогда сложить все $\varphi x \cdot dx$.

---

*) Опубликовано вместе со всей перепиской Гаусса и Бесселя только в 1880 г.

Итак, смысл (интеграла. — *А. М.*) вполне установлен. Но переход можно осуществлять бесконечно многими способами: так же как совокупность всех действительных величин можно мыслить в виде бесконечной прямой линии, так и совокупность всех величин, действительных и мнимых, можно осмыслить (sinnlich machen) посредством бесконечной плоскости, каждая точка которой с абсциссой a и ординатой b будет представлять величину $a+bi$. Непрерывный переход от одного значения x к другому $a+bi$ представляется тогда посредством линии и возможен бесконечным множеством способов. Я утверждаю теперь, что интеграл $\int \varphi x \cdot dx$ при *двух различных переходах всегда сохраняет одно и то же значение, если внутри части плоскости, заключённой между двумя линиями, представляющими переход, φx нигде не обращается в бесконечность* (курсив мой. — *А. М.*). Это прекраснейшая теорема*) (sehr schöner Lehrsatz), нетрудное доказательство которой я дам при удобном случае. Она связана с другими прекрасными истинами, относящимися к разложению в ряды...». Выделенное нами курсивом предложение, очевидно, есть не что иное, как будущая *интегральная теорема Коши*; последняя фраза цитаты заставляет предполагать, что Гауссу было также известно другое основное предложение теории функций комплексного переменного о разложении функций в степенные ряды (теорема, полученная Коши в 1831 г.). В этом же письме Гаусс прилагает изложенные выше общие соображения к интегралу $\int \frac{dx}{x}$. Он объясняет его многозначность различными обходами вокруг точки $x=0$.

2.3. Первое исследование Коши, имеющее значение для истории теории функций, это его «Мемуар о теории опре-

---

*) При этом существенно предполагается, что сама φx является однозначной (einförmig) функцией от x, или по крайней мере, что её значение внутри всей этой части плоскости принадлежит лишь одной системе значений без нарушения непрерывности (примечание Гаусса). В этой оговорке Гаусса термин непрерывность употребляется, очевидно, в смысле Эйлера: речь идёт о функции, заданной одним аналитическим выражением и, более того, аналитической.

делённых интегралов» (представлен в 1814 г., напечатан в 1825 г.). К вычислению определённых интегралов Коши привели гидродинамические изыскания. Отправной пункт мемуара — соотношение

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (2.3:1)$$

Соотношение (2.3:1), выражающее перестановку порядка интегрирования в двойных интегралах, было указано Эйлером ещё в 1769 г. (напечатано в 1770 г.). Но оно интересует Коши лишь как средство вычисления однократных интегралов, т. е. как приём интегрирования по параметру. В этом смысле его также рассматривал Эйлер в работе 1774 г. (опубликованной в 1775 г.). С тех пор он и позднее Лаплас дали много примеров применения этого приёма.

Для применения соотношения (2.3:1) к вычислению определённых интегралов Коши берёт две функции S и V, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Простой способ для нахождения бесчисленного множества таких функций дал (как мы видели выше) Эйлер ещё в 1777 г. Именно, достаточно в некотором аналитическом выражении $F(z)$ подставить $x+iy$ вместо z, чтобы получить функции S и V в виде действительной и мнимой частей выражения $F(x+iy)$:

$$F(x+iy) = S + iV.$$

В самом деле, S и V должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Этим способом и пользуется Коши. Подставляя в (2.3:1) вместо $f(x, y)$ в левую часть $\frac{\partial V}{\partial y}$, а в правую часть $\frac{\partial S}{\partial x}$, он получает:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \frac{\partial V}{\partial y}\,dy\,dx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} \frac{\partial S}{\partial x}\,dx\,dy,$$

или

$$\int_{x_0}^{X} [V(x, Y) - V(x, y_0)]\, dx =$$

$$= \int_{y_0}^{Y} [S(X, y) - S(x_0, y)]\, dy. \quad (2.3:2)$$

Найденное соотношение позволяет Коши сводить вычисление одного определённого интеграла к вычислению другого. С этой точки зрения формула

$$\int_{x_0}^{X} [S(x, Y) - S(x, y_0)]\, dx =$$

$$= -\int_{y_0}^{Y} [V(X, y) - V(x_0, y)]\, dy, \quad (2.3:3)$$

получаемая, если в (2.3 : 1) положить

$$f(x, y) = \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

не даёт ничего нового по сравнению с (2.3 : 2) и поэтому не представляет интереса. Лишь в 1822 г. Коши приходит к мысли соединить формулы (2.3 : 2) и (2.3 : 3) в одну, получая таким образом соотношение, в котором фигурирует непосредственно функция комплексного переменного $F(x+iy)$. Соответственно этому он в 1825 г. перед печатью добавляет к своему мемуару 1814 г. сноску, где, умножая соотношение (2.3 : 2) на i и складывая с (2.3 : 3), получает уравнение

$$\int_{x_0}^{X} F(x+iY)\, dx - \int_{x_0}^{X} F(x+iy_0)\, dx =$$

$$= \int_{y_0}^{Y} F(X+iy)\, i\, dy - \int_{y_0}^{Y} F(x_0+iy)\, i\, dy\ ^{*)},$$

*) Это же соотношение Коши приводит в заметке 1822 г. и в «Кратком изложении лекций по исчислению бесконечно-малых» (лекция 34, 1823 г.).

которое представляет окончательно в виде

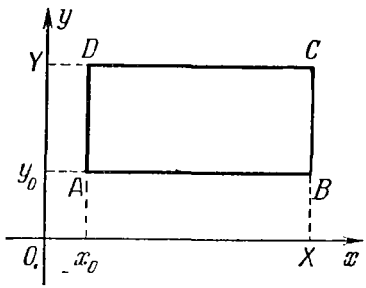
$$\int_{y_0}^{Y} F(x_0+iy)\,i\,dy+\int_{x_0}^{X} F(x+iY)\,dx=$$

$$=\int_{x_0}^{X} F(x+iy_0)\,dx+\int_{y_0}^{Y} F(X+iy)\,dy. \quad (2.3:4)$$

Последнее соотношение *содержит интегральную теорему Коши в простейшем частном случае интегрирования по прямоугольному контуру.* В самом деле, его, очевидно, можно представить, как равенство интегралов от функции комплексного переменного $F(z)$ по двум ломаным ADC и ABC:

$$\int_{ADC} F(z)\,dz=\int_{ABC} F(z)\,dz$$

(черт. 2). Этот геометрический смысл уравнения (2.3 : 4) Коши указал в другой своей работе — «Мемуаре об определённых интегралах, взятых между мнимыми пределами» (1825). Прежде чем перейти к этой работе, закончим наш обзор мемуара 1814 г.



Черт. 2.

Предшественники Коши, пользуясь соотношением (2.3 : 1) для вычисления интегралов, требовали только одного — чтобы пределы интеграции были постоянными, т. е. чтобы двойное интегрирование распространялось на площадь прямоугольника. Коши отмечает необходимость дополнительного требования: функция $f(x, y)$ не должна обращаться в бесконечность внутри прямоугольника и на его сторонах. В случаях же, когда это требование не выполнено, интегралы в левой и правой частях (2.3 : 2) или (2.3 : 4) различны и возникает задача отыскания новых формул, учитывающих разность между этими интегралами. Именно этим формулам, послужившим началом позднейшей теории вычетов и их приложениям к вычислению многочисленных определённых интегралов, как

уже известных, так и новых, и посвящена большая часть мемуара 1814 г.

2.4. В уже упомянутом «Мемуаре об определённых интегралах, взятых между мнимыми пределами» (1825 г.), Коши определяет с самого начала интеграл

$$\int\limits_{x_0+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)\,dz,$$

по аналогии с интегралом от функций действительного переменного, как предел интегральной суммы. Чтобы уточнить построение такой суммы, следует положить $x=\varphi(t)$ и $y=\chi(t)$ $(x+iy=z)$, где $\varphi(t)$ и $\chi(t)$ — функции монотонные и непрерывные при $t_0\leqslant t\leqslant T$, удовлетворяющие условиям: $\varphi(t_0)=x_0$, $\chi(t_0)=y_0$, $\varphi(T)=X$, $\chi(T)=Y$. Выбор таких функций, очевидно, эквивалентен заданию некоторой кривой, соединяющей на плоскости точки (x_0, y_0) и (X, Y); на это Коши указывает в другом месте того же мемуара. Таким образом, определённый им интеграл $\int\limits_{x_0+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)\,dz$ является интегралом вдоль некоторой кривой и посредством уравнений этой кривой $x=\varphi(t)$, $y=\chi(t)$ сводится к обыкновенному определённому интегралу

$$\int\limits_{t_0}^{T} [\varphi'(t)+\sqrt{-1}\,\chi'(t)]\cdot f[\varphi(t)+\sqrt{-1}\,\chi(t)]\,dt,$$

который сокращённо записывается в виде

$$\int\limits_{t_0}^{T} (x'+\sqrt{-1}\,y')\,f(x+\sqrt{-1}\,y)\,dt.$$

После этого Коши формулирует свою основную теорему: «*Если* $f(x+y\sqrt{-1})$ *конечна и непрерывна для* $x_0\leqslant x\leqslant X$ и $y_0\leqslant y\leqslant Y$, *то значение интеграла не зависит от природы функций* $x=\varphi(t)$ *и* $y=\chi(t)$» (т. е., скажем мы, не зависит от вида кривой интегрирования, соединяющей точки

(x_0, y_0) и (X, Y) в прямоугольнике $x_0 \leqslant x \leqslant X$, $y_0 \leqslant y \leqslant Y$). Это и есть интегральная теорема Коши.

При доказательстве Коши пользуется производной от $f(z)$ и, строго говоря, опирается на непрерывность этой производной. Однако в формулировке теоремы, как мы видели, о производной и тем более о её непрерывности ничего не говорится. Это связано с убеждением Коши в том, что непрерывная функция всегда дифференцируема, причём её производная может стать разрывной лишь в тех точках, где сама функция разрывна. Убеждение, повидимому, основано на том, что в большинстве случаев (по крайней мере в первые десятилетия своей деятельности) Коши, говоря о функциях, имеет в виду аналитические выражения, для которых существование производной вытекает из правил дифференциального исчисления. Связанное с этим убеждение в непрерывности производной от непрерывной функции покоится на восходящей к Эйлеру традиции рассматривать аналитические выражения как функции *комплексного переменного*. С этой точки зрения отсутствие производной, например у $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $x = 0$, объясняется тем, что функция $f(x)$ разрывна при $x = 0$, как функция комплексного переменного (если $x = X\sqrt{-1}$, то $f(x) = X \frac{e^{\frac{1}{X}} - e^{-\frac{1}{X}}}{2} \to \infty$ при X действительном и стремящемся к 0). Немногим сложнее объясняется обращение в бесконечность при $x = 0$ производной от $f(x) = \sqrt{x}$. В письме к Кориолису в 1837 г. (опубликованном в Comptes Rendus в том же году) Коши пишет, что его определение непрерывности предполагает однозначность функции и что точки, в которых функция становится многозначной, хотя бы она и оставалась конечной, он рассматривает как разрывы непрерывности. С этой точки зрения функция $\sqrt{x}$ не будет непрерывной в точке $x = 0$. В пояснение позиции Коши заметим, что в любой односвязной области плоскости, не содержащей начала координат, можно определить непрерывную и однозначную ветвь функции комплексного переменного $\sqrt{z}$, тогда как этого нельзя сделать для областей, заключающих эту точку; благодаря этому $z = 0$ действительно является особой

точкой — точкой разветвления — функции $\sqrt{z}$. Поэтому, по Коши, вполне естественно, что и производная $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ не является непрерывной при $x=0$.

Метод доказательства интегральной теоремы доставляет Коши вариационное исчисление. Варьируя путь интегрирования, т. е. заменяя функции $\varphi(t)$ и $\chi(t)$ на другие, принимающие близкие к ним значения: $\varphi(t)+\varepsilon u(t)$ и $\chi(t)+\varepsilon v(t)$ и вычисляя вариацию интеграла, т. е. главную относительно ε часть приращения интеграла, Коши убеждается в справедливости своей теоремы, установив, что эта вариация равна нулю.

Наибольшее внимание, как и в мемуаре 1814 г., Коши уделяет анализу случаев, когда $f(z)$ обращается в бесконечность внутри или на сторонах прямоугольника. Здесь интегралы по разным путям имеют вообще неравные значения и Коши вычисляет при различных предположениях разности между этими интегралами. Пусть, например, $f(z)$ обращается в бесконечность лишь в одной точке (a, b), лежащей между двумя путями интегрирования, причём существует конечный предел

$$\mathrm{f}=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}[(x-a)+(y-b)\sqrt{-1}]\,f(x+y\sqrt{-1}).$$

(Так будет, например, для функции $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ в точке $z=\sqrt{-1}$; здесь $a=0$, $b=1$ и

$$[(x-a)+(y-b)\sqrt{-1}]\cdot f(x+y\sqrt{-1})=$$

$$=\frac{x+(y-1)\sqrt{-1}}{(x+y\sqrt{-1}+\sqrt{-1})(x+y\sqrt{-1}-\sqrt{-1})}=$$

$$=\frac{1}{x+y\sqrt{-1}+\sqrt{-1}}\to-\frac{\sqrt{-1}}{2}\text{ при } x\to 0 \text{ и } y\to 1;$$

итак, здесь $\mathrm{f}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}$.) Тогда разность между интегралами равна, как доказывает Коши, $\pm 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{f}$.

Величина f *представляет простейший пример вычета.*

2.5. В «Алгебраическом анализе» (1821 г.), где Коши обстоятельно излагает теорию пределов и основанную на ней

теорию рядов и элементарных функций, содержится, в частности, исследование степенных рядов

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

в которых x принимает не только действительные, но и мнимые значения. Коши устанавливает, что такой ряд будет сходиться или расходиться в зависимости от того, будет ли модуль x меньше или больше числа

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Теорема эта (теорема Коши-Адамара), из которой следует, в частности, что для x действительного ряд сходится внутри интервала $(-\rho, +\rho)$ и расходится вне этого интервала, полностью выясняет область сходимости степенного ряда.

Вопрос о разложении функций в степенные ряды впервые в истории анализа получает правильное освещение в лекциях 36—38 «Краткого изложения лекций по исчислению бесконечно малых», т. I (1823 г.) *). Какое значение Коши придавал этому вопросу, показывает следующий отрывок из его предисловия к этой книге, воспроизведённый им позднее, слово в слово, в предисловии к «Лекциям по дифференциальному исчислению» (1829): «Моей главной целью было согласовать строгость, которую я вменял себе в обязанность в изложении моего курса анализа (имеется в виду «Алгебраический анализ». — *А. М.*) с простотой, вытекающей из непосредственного рассмотрения бесконечно малых количеств. По этой причине я считал долгом отвергать разложения функций в бесконечные ряды во всех случаях, когда полученные ряды не сходятся, и я был вынужден отнести к интегральному исчислению формулу Тейлора, так как формулу эту можно считать общей лишь тогда, когда содержащийся в ней ряд сведен к конечному числу членов и дополнен определённым интегралом (подразумевается остаточный член формулы Тейлора в виде определённого интеграла. — *А. М.*).

*) Есть старый русский перевод акад. В. Я. Буняковского: «Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении, преподаваемых в Королевской политехнической школе г. А. Л. Коши», СПБ, 1831.

Я знаю, что знаменитый автор Аналитической механики (т. е. Лагранж. — *А. М.*) взял формулу, о которой идёт речь, в качестве основы своей теории производных функций. Но несмотря на всё почтение, внушаемое таким большим авторитетом, большая часть геометров согласно признаёт теперь недостоверность результатов, к которым можно притти, употребляя расходящиеся ряды; мы прибавим, что во многих случаях теорема Тейлора как бы даёт разложение функции в сходящийся ряд, хотя сумма этого ряда существенно отличается от предложенной функции (см. конец 38-й лекции). Впрочем, я надеюсь, что читатели моего сочинения убедятся в том, что принципы дифференциального исчисления и его важнейших приложений могут быть легко изложены без помощи рядов».

Почти каждая фраза этого отрывка направлена против Лагранжа, желавшего основать анализ на теории рядов (степенных), но не располагавшего сколько-нибудь прочными основами теории рядов и прежде всего чётким представлением о сходимости ряда. Коши совершенно справедливо указывает, что разложение функции в ряд Тейлора должно основываться на формуле Тейлора с остаточным членом, и в своём сочинении даёт остаточный член этой формулы в виде определённого интеграла, почему и самую формулу относит к интегральному исчислению. Коши очень ценит найденные им примеры функций, тейлоровские разложения которых сходятся, но имеют сумму, отличную от предложенной функции. Первый из этих примеров — функция

$$F(x)=\begin{cases} 0 & (\text{если } x=0) \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & (\text{если } x\neq 0), \end{cases}$$

все производные которой вместе с самой функцией обращаются в нуль при $x=0$. Пример этот показывает ошибочность приведённого на странице 45 утверждения Лагранжа.

В своих первых работах Коши ещё недалеко уходит от своих предшественников, прибегая к комплексному переменному в анализе лишь как к вспомогательному средству, позволяющему решать трудные задачи интегрального исчисления.

Эта позиция рисуется следующим отрывком из отзыва Лакруа и Лежандра о мемуаре Коши «Об определённых инте-

гралах» (1814), повторяющим соответствующее высказывание Лапласа (см. выше, стр. 51):

«Некоторые исследования в интегральном исчислении приводят иногда к результатам, в которых переход от действительного к мнимому употребляется как некий род индукции, который, не будучи достаточно очевидным сам по себе, требует подтверждений посредством прямых и строгих доказательств».

Вскоре, однако, исследования Коши и других учёных приводят к такому исключительному богатству фактов и новых результатов, что становится ясным, что речь идёт не о некоем роде индукции, играющем чисто вспомогательную роль и вдобавок не очень надёжном, но об имеющей право на самостоятельное существование дисциплине — теории функций комплексного переменного.

На протяжении 1826—1829 гг. Коши создаёт теорию вычетов.

Название вычет (résidu) объясняется, повидимому, тем, что Коши пришёл к этому понятию, отыскивая разность между интегралами, взятыми по таким двум путям, имеющим общие начало и конец, между которыми заключаются полюсы функции. В таком виде вычеты можно усматривать ещё в «Мемуаре об определённых интегралах» (1814). Самый термин «вычет» встречается впервые в статье «О новом роде исчисления, аналогичного исчислению бесконечно малых», помещённой в первом томе «Exercices de Mathématiques» Коши (1826). Вот каким образом Коши вводит здесь это понятие: «Если, после того как найдены значения x, обращающие $f(x)$ в бесконечность, прибавить к одному из этих значений, обозначаемому через x_1, бесконечно малое количество ε и далее разложить $f(x_1+\varepsilon)$ по возрастающим степеням того же количества, то первые члены разложения будут содержать отрицательные степени ε и один из них будет произведением $\frac{1}{\varepsilon}$ на конечный коэффициент, который мы назовём вычетом функции $f(x)$, относящимся к частному значению x_1 переменной x». Вслед за этой статьёй Коши дал большое количество других, помещённых в этом и следующих трёх томах «Exercices» (1826—1829), в которых он рассматривал приложения теории к вычислению интегралов, дифференциальным

уравнениям, разложению функций в ряды и бесконечные произведения, к теории уравнений и т. д.

2.6. В 1826 г. появляется «Исследование о ряде $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^2+$ и т. д.» Абеля. «Превосходное сочинение г. Коши „Курс анализа политехнической школы“, которое должен прочесть всякий аналист, любящий строгость в математических изысканиях, служило мне проводником», пишет Абель. Он отмечает, что сходимость одного из замечательнейших рядов анализа — биномиального ряда — ещё никем не изучена и сумма его строго никем не определена. Задача Абеля: «найти сумму ряда

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+ \text{ и т. д.}$$

для всех действительных или мнимых x, для которых ряд сходится». При этом Абель допускает, что m является произвольным, вообще комплексным числом. Эту задачу он решает исчерпывающим образом. В качестве предварительных теорем он устанавливает несколько важных предложений общей теории рядов и, в частности, теории степенных рядов.

Теорема IV этой классической работы гласит:

«*Если ряд* $f(\alpha)=v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\ldots+v_m\alpha^m+\ldots$ *сходится для определённого значения* α, *равного* δ, *то он сходится также для всякого меньшего значения* α, *и для постоянно убывающих значений* β *функция* $f(\alpha-\beta)$ *неограниченно приближается к пределу* $f(\alpha)$, *в предположении, что* α *равно или меньше* δ».

Эта теорема распадается на два предложения, соединённых союзом «и». Первое из них называется обычно первой теоремой Абеля, второе, утверждающее, что сумма сходящегося степенного ряда есть непрерывная функция аргумента, называется второй теоремой Абеля.

Попутно Абель отмечает принципиальную ошибку Коши, утверждавшего и «доказывавшего» в «Алгебраическом анализе», что сумма сходящегося ряда непрерывных функций — непрерывна.

К этому времени относится ряд фундаментальных исследований Абеля по теории эллиптических функций и теории

абелевых интегралов (так в честь Абеля стали называть интегралы от алгебраических функций) и исследований Якоби по теории эллиптических функций. И Абель и Якоби, работая один независимо от другого, изучают эти специальные классы аналитических функций для комплексных значений аргумента.

В 1826 г. было сделано одно из наиболее замечательных открытий во всей истории науки — открытие неевклидовой геометрии казанским профессором Николаем Ивановичем Лобачевским. Работа «О началах геометрии», излагающая это открытие, была опубликована в Казанском вестнике в 1829—1830 гг. Это гениальное открытие, оказавшее глубокое революционное воздействие на всю систему человеческих знаний, было понято и осознано учёными как у нас, так и за границей лишь после смерти Н. И. Лобачевского. Понадобились ещё десятилетия для того, чтобы математики обнаружили значение геометрии Лобачевского для теории аналитических функций. Можно утверждать, что основной смысл обширного цикла фундаментальных исследований по теории функций комплексного переменного в последние десятилетия XIX века и первое десятилетие XX века (Ф. Клейн, А. Пуанкаре, П. Кебе) заключался, именно, в постепенном выяснении того обстоятельства, что геометрия Лобачевского есть геометрия аналитических функций одного комплексного переменного (см. об этом ниже, очерк третий, пп. 3.1—3.3).

2.7. В 1831 г. Коши получает теорему о разложении функций в степенные ряды. Теорема эта гласит: «Функция $f(x)$ разлагается по формуле Маклорена в сходящийся ряд, расположенный по возрастающим степеням x, если модуль действительной или мнимой переменной x сохраняет значение, меньшее того, для которого функция перестаёт быть конечной или непрерывной. Пусть X это — последнее значение или значение меньшее, и $\bar{x}$ — мнимое выражение, модуль которого есть X. Модули общего члена и остатка ряда Маклорена будут соответственно меньше модулей общего члена и остатка геометрической прогрессии, имеющей сумму

$$\frac{X}{X-x}\Delta f(\bar{x})».$$

Здесь $\Delta f(\bar{x})$ обозначает «предел модуля $f(\bar{x})$», при фиксированном модуле $|\bar{x}| = X$ (или, как скажем мы теперь, верхнюю грань $|f(\bar{x})|$ в точках окружности $|\bar{x}| = X$). Теорема эта устанавливает не только простейший критерий разложимости функций в степенной ряд, т. е. аналитичности функции, но и даёт мажоранту разложения в виде геометрической прогрессии, что чрезвычайно важно для всех применений степенных рядов.

Для доказательства Коши, используя соотношение (2.3: 4), представляет $f(x)$ в виде интеграла:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\bar{x} f(\bar{x})}{\bar{x} - x} dp, \qquad (\bar{x} = Xe^{p\sqrt{-1}}),$$

получившего впоследствии название *интеграла Коши*.

После этого ему остаётся только разложить дробь $\frac{\bar{x}}{\bar{x} - x} = \frac{1}{1 - \frac{x}{\bar{x}}}$ в геометрический ряд (пользуясь тем, что $\left|\frac{x}{\bar{x}}\right| < 1$) и, подставив этот ряд под знак интеграла, интегрировать его почленно. В результате он приходит к требуемому разложению, причём из самого способа получения разложения обнаруживается и мажоранта ряда в виде геометрической прогрессии.

Для правильного применения этой теоремы необходимо иметь в виду, что Коши предполагает существование и непрерывность производной от функции $f(x)$, хотя и не оговаривает этого в условии теоремы. Причины этого мы объяснили уже на странице 59. Кроме того, следует помнить, что условия непрерывности и дифференцируемости должны выполняться для функции $f(x)$, рассматриваемой *как функция комплексного переменного*. Всё это Коши разъясняет на примерах. Функции $\cos x$, $\sin x$, e^x, e^{x^2}, $\cos(1 - x^2)$, ... являются непрерывными (и дифференцируемыми) для любого комплексного x. Поэтому они разлагаются в ряд по степеням x, *всюду сходящийся*. Функции $(1 + x)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{1 - x}$, $\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$, $\ln(1 + x)$, $\operatorname{arctg} x$ перестают, по Коши, быть непрерывными

при некотором значении x, равном по модулю единице. Для нас здесь достаточно заметить, что производная от первой функции $\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ обращается в бесконечность при $x=-1$ (Коши считает и самую функцию $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ разрывной в этой точке в силу невозможности выделения однозначной и непрерывной ветви этой функции в окрестности точки $x=-1$ *); вторая функция сама обращается в бесконечность при $x=1$; для третьей же функции производная, равная $\frac{1}{(1+\sqrt{(1-x^2)})\sqrt{1-x^2}}$, обращается в ∞ при $x=\pm 1$ (снова Коши считает разрывной в этих точках самоё функцию); $\ln(1+x)$ становится разрывным при $x=-1$; наконец, производная от $\operatorname{arctg} x$, равная $\frac{1}{1+x^2}$, обращается в бесконечность при $x=\pm i$ (Коши, ограничивающийся исследованием самой функции, а не её производной, выражает $\operatorname{arctg}(\pm X\sqrt{-1})$ через логарифмы:

$$\operatorname{arctg}(\pm X\sqrt{-1})=\frac{\ln(1\mp X)-\ln(1\pm X)}{2\sqrt{-1}},$$

откуда и заключает, что $\operatorname{arctg} x$ терпит разрыв при $X=1$, т. е. при $x=\pm\sqrt{-1}$). Отсюда по теореме Коши следует, что степенной ряд для всех этих функций будет сходиться только для $|x|<1$. Наконец, функции $e^{\frac{1}{x}}$, $e^{\frac{1}{x^2}}$, $\cos\frac{1}{x}$ разрывны уже в самом начале координат. Поэтому эти функции невозможно представить сходящимся рядом, расположенным по степеням x.

Работа Коши, в которой был получен этот результат: «Мемуар о небесной механике и о новом исчислении, называемом исчислением пределов», была литографирована в 1832 г. в Турине в небольшом числе экземпляров и очень мало распространена. Поэтому Коши вновь воспроизвёл её главнейшие

*) См. об определении непрерывности по Коши на стр. 59.

результаты в статьях, помещённых в первом и втором томах его «Exercices d'analyse et de Physique Mathematique» (1840, 1841 гг.). Здесь он после спора с Лиувиллем и Штурмом включает в формулировку своей теоремы наряду с требованием непрерывности функции ещё и требование непрерывности производной. Именно, в первой фразе формулировки, приведённой нами на странице 65, Коши вместо слов «функция перестаёт быть конечной или непрерывной» пишет теперь: «функция $f(x)$ и её производная $f'(x)$ перестают быть конечными и непрерывными».

Отметив, что во всех примерах (см. примеры на стр. 66—67) функция и её производная становятся бесконечными или разрывными для одного и того же значения x, Коши прибавляет: «Если быть уверенным в том, что это всегда так, то в высказанной теореме можно освободиться от упоминания о производной; но так как на этот счёт нет достаточной уверенности, то будет более строгим выражать теорему в терминах, которыми мы пользовались выше». Впоследствии, в 1851 г., Коши снова снимает требование непрерывности производной, считая его излишним.

Отсутствие ясности и чёткости в формулировках Коши и в его доказательствах обратило на себя внимание П. Л. Чебышева.

В небольшой работе «Заметка о сходимости ряда Тейлора» 1844 г. *) он отмечает, между прочим: «г. Коши полагает, будто значение определённого интеграла разложимо в сходящийся ряд, когда дифференциал между пределами интегрирования может быть разложен в сходящийся ряд; это имеет место только в частных случаях». Таким образом, здесь П. Л. Чебышев указывает на недопустимость формального интегрирования рядов без специального обоснования законности такой операции.

2.8. Преимущественно к тридцатым годам относится ряд работ Н. И. Лобачевского, имеющих непосредственное значение для математического анализа и, в частности, теории функций комплексного переменного.

---

*) См. Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева, том II, Математический анализ, изд. АН СССР, М. — Л., 1947.

В его известном сочинении «Алгебра или вычисление конечных», 1834 г. *) содержится теория элементарных функций комплексного переменного. При этом $\cos x$ и $\sin x$ определяются первоначально для x действительного как действительная и мнимая части функции $e^{x\sqrt{-1}}$. Отсюда уже, с использованием ранее установленных свойств показательной функции и привлечением степенных разложений, развёртываются все основные свойства тригонометрических функций. Повидимому, Лобачевский придавал особое значение такому чисто аналитическому построению тригонометрии, не зависящему от евклидовой геометрии.

Первая и наиболее известная из его работ по анализу «Об исчезании тригонометрических строк» (1834 г.) представляет большой интерес с точки зрения трактовки основных понятий всего математического анализа: функции, непрерывности и дифференцируемости, сходимости рядов и др. Здесь с полной отчётливостью формулировано общее понятие функции, ныне общепринятое: «Это общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое даётся для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением или условием, которое подаёт средство испытывать все числа и выбирать одно из них, или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной».

В других работах Н. И. Лобачевского по анализу: «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значению функций от весьма больших чисел» (1835), «Über die Convergenz der unendlichen Reihen» (1835—1836, напечатано в 1841 г.), «Значение некоторых определенных интегралов» (1852), дано построение теории гамма-функции, содержащее ряд новых, оригинальных результатов **).

---

*) См. Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, т. IV, Сочинения по алгебре, Гостехиздат, М. — Л., 1948, и статью А. П. Юшкевича и И. Г. Башмаковой «Алгебра или вычисление конечных Н. И. Лобачевского» в сборнике «Историко-математические исследования», вып. II, под редакцией Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича, Гостехиздат, М. — Л., 1949.

**) См. статью Г. Л. Лунца: «О работах Н. И. Лобачевского по математическому анализу» в сборнике «Историко-математические исследования», вып. II.

К началу сороковых годов относятся первые работы Вейерштрасса по теории функций. Он их не опубликовал своевременно, и они увидели свет впервые в 1894 г. Следует отметить обобщение Вейерштрассом (в 1841 г.) теоремы Коши о разложении функции в степенной ряд на случай функции комплексного переменного, непрерывной и дифференцируемой в круговом кольце. Здесь получается ряд, расположенный вообще по положительным и отрицательным степеням. Этот ряд был найден и опубликован независимо от Вейерштрасса Лораном в 1843 г. и носит теперь имя Лорана.

В 1842 г. в работе, также не опубликованной в своё время: «Определение аналитической функции одного переменного посредством дифференциального уравнения», Вейерштрасс владеет уже идеей аналитического продолжения, которая впоследствии играла основную роль в его построении теории аналитических функций. Но примерно до середины 50-х годов центр тяжести его научных интересов лежит в теории абелевых функций, т. е. функций, обратных абелевым интегралам.

К сороковым годам относятся исследования Лиувилля, применившего теорию Коши к теории эллиптических функций. В них существенную роль играла носящая имя Лиувилля, но в действительности принадлежащая Коши, теорема о том, что целая функция, ограниченная по модулю, тождественно равна постоянной.

В 1850 г. профессор Петербургского университета Иосиф Иванович Сомов издал «Основания теории эллиптических функций», явившиеся «первым на русском языке полным, систематическим сочинением об одной из замечательнейших и труднейших отраслей интегрального исчисления» (из отзыва современников И. И. Сомова — академиков М. В. Остроградского и В. Я. Буняковского).

В 1850 г. появляется «Мемуар об алгебраических функциях» Пюизё, где автор изучает многозначную функцию $u(z)$, определённую уравнением

$$f(u, z) = 0$$

[$f(u, z)$ — многочлен относительно u и z], разлагая её в ряды, содержащие в общем случае дробные и отрицательные степени.

2.9. В 1851 г. выходит в свет знаменитая диссертация Римана «Основы общей теории функций комплексного переменного» *). Опираясь на тот факт, что действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют двумерному дифференциальному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0,$$

Риман применяет к теории функций идеи и методы, развитые в математической физике для решения трёхмерного уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

Последнее уравнение играет основную роль в теории притяжения, в вопросе о равновесии электричества на проводниках, при изучении установившегося движения жидкости, тепла, электрического тока и т. д. Ко времени появления работы Римана усилиями Гаусса (1813, 1840), Грина (1828), Кирхгоффа, Дирихле и других учёных были разработаны методы решения этого уравнения при наличии краевых условий, когда значение искомой функции задаётся на некоторых поверхностях, и, кроме того, условий, определяющих места и характер разрыва непрерывности этой функции.

Перенося идеи математической физики в теорию функций, Риман исследует, в какой мере аналитические функции определяются по краевым условиям и по характеру разрыва непрерывности.

При этом он опирается на так называемый «принцип Дирихле», применявшийся, начиная с 1840 г., Гауссом, Томсоном, Кирхгоффом и Дирихле в задачах математической физики (теории потенциала). Принцип этот утверждает существование функции, удовлетворяющей заданным краевым условиям и доставляющей минимум некоторого интеграла (измеряющего потенциальную энергию в задачах с физическим содержанием). Критика, которой

*) См. Бернгард Риман, Сочинения, перевод с немецкого, под редакцией, с предисловием, обзорной статьёй и примечаниями проф. В. Л. Гончарова, Гостехиздат, М.—Л., 1948.

Вейерштрасс подверг этот принцип (1869), поставила под сомнение надёжность римановых доказательств. Лишь после работ Гильберта (1901, 1909) удалось строго обосновать правильность избранного Риманом пути.

Риман широко привлекает и геометрические идеи, ведущие начало от Эйлера и основанные на том, что аналитические функции комплексного переменного определяют конформное отображение одной области на другую. При этом Риман допускает, что соответствие, устанавливаемое аналитической функцией между областями, может и не быть взаимно однозначным, и для восстановления взаимной однозначности создаёт новый геометрический образ — многолистные поверхности, которые носят теперь имя *римановых поверхностей*.

Диссертация заканчивается приложением общих результатов теории к конформному отображению римановых поверхностей. Здесь Риман получает следующее предложение: «Две односвязные плоские поверхности (подразумеваются многолистные поверхности Римана. — *А. М.*) всегда могут быть так отнесены друг к другу, что каждой точке одной соответствует непрерывно перемещающаяся вместе с нею одна точка другой поверхности и что соответствующие мельчайшие части поверхностей подобны между собой; при этом можно произвольно задать точки, соответствующие одной внутренней и одной граничной точке; вследствие этого определится соответствие для всех точек». Предложение это, как частный случай, содержит основную в теории конформных отображений теорему Римана о существовании и единственности (при соответствующих условиях) конформного отображения на круг произвольной односвязной области (с границей, содержащей более одной точки).

В «Теории абелевых функций» (1857) Риман применяет результаты своей диссертации к изучению алгебраических функций и абелевых интегралов (т. е. интегралов от алгебраических функций). Здесь он выясняет минимум условий, достаточных для определения абелева интеграла, с точностью до постоянного слагаемого (а следовательно, и для полного определения алгебраической функции). Для общей теории аналитических функций важен *принцип аналитического продолжения*, формулированный в начале этой работы в следующих словах: «Функцию от $x+iy$ (имеется в виду

аналитическая функция. — *А. М.*), заданную в части (x, y) плоскости, можно непрерывно продолжать единственным образом». При этом Риман подчёркивает, что продолжение это вовсе не требует, чтобы было известно аналитическое выражение функции (напротив, в теории Вейерштрасса продолжение связано со степенными рядами). Нужно лишь, чтобы функция всюду продолжала удовлетворять дифференциальному уравнению $i\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$, представляющему уравнения Даламбера-Эйлера, записанные в комплексной форме.

Римановому построению теории посвящена одна из наиболее ранних русских монографий по теории аналитических функций — докторская диссертация киевского профессора математики М. Е. Ващенко-Захарченко «Риманова теория функций составного переменного», Киев, 1866.

Синтез идей, произведённый Риманом, имел большое значение для всего последующего развития теории функций и связанных с ней научных дисциплин. Ветви теории функций, ведущие своё начало от Римана, объединяются в настоящее время под именем *геометрической теории функций* и представляют существенную часть современной теории функций комплексного переменного.

В связи с изучением аналитических функций на римановых поверхностях (замкнутых) перед Риманом вставали вопросы топологического характера, разрешая которые, он создавал основы топологии поверхностей. Дальнейшее развитие геометрической теории функций в конце XIX и начале XX веков продолжало оказывать существенное влияние на формирование простейших понятий и методов топологии.

В последнее время теория аналитических функций в свою очередь всё чаще обращается к топологии, заимствуя из неё некоторые методы и идеи.

2.10. В 1856 г. появляется «Исследование функций мнимого переменного» (первый мемуар) учеников Коши и Лиувилля — Брио и Буке, содержащее в простой и ясной форме систематическое изложение основных результатов, полученных главным образом Коши в теории аналитических функций. Этот небольшой мемуар (он содержит около 50 страниц) по содержанию и манере изложения можно рас-

сматривать как первый учебник по теории аналитических функций *).

К этому времени относится и первый читанный Вейерштрассом в Берлине курс лекций по теории аналитических функций: «Общие теоремы, относящиеся к представлению аналитических функций сходящимися рядами». Начиная с 1861 г., он читает: «Общую теорию аналитических функций». Исходным пунктом для Вейерштрасса являются разложения функций в степенные ряды. Но в то время как его предшественники обычно рассматривали каждую функцию как сумму только одного степенного ряда, Вейерштрасс рассматривает вместе с данным рядом также и все возможные его аналитические продолжения, определяя функцию посредством совокупности всех возможных, органически связанных между собой степенных рядов.

Анализируя разложение

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Cz} \cdot z \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

вытекающее из эйлеровского представления $\Gamma(z)$ в виде предела произведения, Вейерштрасс пришёл в 1876 г. к общему разложению произвольной целой функции в виде бесконечного произведения:

$$f(z) = z^{\lambda} e^{g(r)} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{z^n}{n a_n^n}}.$$

Теорема Вейерштрасса подчёркивает аналогию между многочленами и трансцендентными целыми функциями, как своего рода «многочленами бесконечно высокой степени» (идея этой аналогии, как мы видели, была уже у Эйлера). Эта аналогия служила путеводной нитью в исследованиях французского математика Лагерра, занимавшегося некоторыми вопросами распределения нулей целых функций и их производных. В связи с этими исследованиями он ввёл понятие *рода целой функции* (1882). Таким образом были заложены основы теории целых функций.

---

*) Он вошёл почти без изменения в первое издание курса Брио и Буке «Теория двояко-периодических и, в частности, эллиптических функций», 1859.

Вслед за ними строились и основы более общей теории — теории мероморфных функций, т. е. однозначных аналитических функций, не имеющих в конечной плоскости других особых точек, кроме полюсов; каждую из них можно представить в виде отношения двух целых функций и, следовательно, рассматривать как аналог дробной рациональной функции. Обобщая теорему о разложении рациональной функции на простейшие дроби, ученик Вейерштрасса — шведский математик Г. Миттаг-Леффлер получил разложение произвольной мероморфной функции в ряд по главным частям (1877).

Именно, если b_n есть полюс $f(z)$ и

$$\frac{A_n^{(1)}}{z-b_n}+\ldots+\frac{A_n^{(p_n)}}{(z-b_n)^{p_n}}=g_n(z)$$

— главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки b_n, то можно найти такие многочлены $p_n(z)$ и такую целую функцию $h(z)$, что $f(z)$ представится в виде

$$f(z)=h(z)+\sum_{n=1}^{\infty}[g_n(z)+p_n(z)].$$

Частные случаи этой теоремы (для трансцендентных мероморфных функций) были известны задолго до Миттаг-Леффлера. Как мы указывали в очерке I, разложения тригонометрических функций $\csc z$, $\operatorname{ctg} z$ и т. д. на простейшие дроби впервые встречаются у Эйлера.

2.11. В 1848 г. появилось классическое исследование П. Л. Чебышева: «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» *), в котором наш гениальный математик на основании изучения поведения эйлеровской

*) См. Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева, т. I, Теория чисел, изд. АН СССР, М.—Л., 1944, а также статью И. М. Виноградова и Б. Н. Делоне «Работы П. Л. Чебышева по теории чисел» в сборнике «Научное наследие П. Л. Чебышева», вып. первый, Математика, изд. АН СССР, М.—Л., 1945, и книгу Б. Н. Делоне «Петербургская школа теории чисел», изд. АН СССР, М.—Л., 1947.

дзета-функции

$$\zeta(z)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$$

для действительных значений z вблизи полюса $z=1$ этой функции и рассмотрения $\ln\zeta(z)$ и производных от $\zeta(z)$, получил первое за два тысячелетия, истекшие со времён Евклида, существенное продвижение в проблеме распределения простых чисел. А именно, он установил следующее предложение:

«От $x=2$ до $x=\infty$ функция $\varphi(x)$, означающая число простых чисел, меньших x, удовлетворяет бесконечное число раз и неравенству

$$\varphi(x)>\int_{2}^{x}\frac{dx}{\ln x}-\frac{\alpha x}{\ln^n x},$$

и неравенству

$$\varphi(x)<\int_{2}^{x}\frac{dx}{\ln x}+\frac{\alpha x}{\ln^n x},$$

как бы α, оставаясь количеством положительным, ни было мало, а n ни было велико».

Отсюда, в частности, вытекает, что если отношение $\dfrac{\varphi(x)}{\int_{2}^{x}\frac{dx}{\ln x}}$ стремится к какому-либо пределу при x, стремящемся к бесконечности, то этот предел должен равняться единице.

Через десять лет после исследования П. Л. Чебышева появилась работа Римана «О числе простых чисел, не превосходящих данной величины» (1859) *). В ней устанавливается, что для дальнейшего изучения функции $\pi(x)$ (так в настоящее время обозначают функцию, которую Чебышев обозначал $\varphi(x)$) нужно рассматривать функцию $\zeta(z)$ не только для

*) См. Бернгард Риман, Сочинения, Гостехиздат, М. — Л., 1948.

действительных, но и для мнимых значений z. В особенности важно изучить распределение нулей функции $\zeta(z)$ в комплексной плоскости.

При этом Риман высказал предположение, что все мнимые нули функции $\zeta(z)$ лежат на прямой $x=\frac{1}{2}$. Это предположение, известное под названием гипотезы Римана, до сих пор остаётся недоказанным. Однако самые попытки найти подход к решению этой труднейшей задачи оказались весьма плодотворными для математики. Под их влиянием в конце XIX века в работах Пуанкаре (1883), Адамара (1892) и Бореля (1896—1897) были установлены основные соотношения между порядком роста целых функций и распределения их нулей. Итоги этих работ изложены в «Лекциях по теории целых функций» Бореля (1900). Исследования Адамара по теории целых функций позволили ему доказать в 1896 г., что отношение $\pi(x):\int\limits_2^x \frac{dx}{\ln x}$, изучавшееся П. Л. Чебышевым, действительно стремится к пределу (равному единице) при x, стремящемся к бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\int\limits_2^x \frac{dx}{\ln x}} = 1.$$

Одновременно этот результат был получен и Валле-Пусеном. Таким образом, установление чебышевского асимптотического закона распределения простых чисел в его окончательном виде потребовало выхода в комплексную плоскость и развития основ теории целых функций.

Из работ П. Л. Чебышева и Римана впоследствии возникла новая математическая дисциплина — *аналитическая теория чисел*, изучающая вопросы распределения простых чисел преимущественно методами теории аналитических функций комплексного переменного. К числу крупнейших достижений в этой области принадлежат работы советских математиков И. М. Виноградова, Н. Г. Чудакова (Саратов) и Ю. В. Линника (Ленинград). Отметим, в частности, следующий результат Н. Г. Чудакова (1936), дающий

наибольшее известное в настоящее время продвижение в задаче об оценке остаточного члена асимптотического закона:

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dx}{\ln x} + O\left[x \exp\left(-c(\ln x)^{\mu}\right)\right], \quad c > 0,$$

$$\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{42} - \varepsilon.$$

Результат этот был получен с помощью разработанного И. М. Виноградовым *общего метода оценки тригонометрических сумм* (вида $\sum_m^n \exp[2\pi i f(x)]$). Если бы гипотеза Римана о нулях $\zeta(z)$ подтвердилась, то тогда можно было бы установить лучшую оценку:

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dx}{\ln x} + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

2.12. Одним из наиболее ранних по времени университетских курсов общей теории аналитических функций был курс, читанный в конце шестидесятых годов в Петербургском университете русским математиком Ю. В. Сохоцким*), автором оригинальных и важных исследований по теории аналитических функций. В своей магистерской диссертации «Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями» (С.-Петербург, 1868). Ю. В. Сохоцкий, отмечая значение теории вычетов для математического анализа, указывает, что «исчисление интегральных вычетов почти вовсе не разрабатывается учёными нынешнего времени». «В настоящем рассуждении, — пишет далее Ю. В. Сохоцкий, — я излагаю общие начала исчисления интегральных вычетов и показываю некоторые из его применений, именно такие, которых я вовсе не нашёл между рабо-

*) Юлиан Васильевич Сохоцкий родился в 1842 г., окончил Петербургский университет в 1865 г. С 1868 г. доцент, позднее профессор Петербургского университета и профессор Института гражданских инженеров. Скончался в Ленинграде в 1927 г. на 86-м году жизни. Эти факты мне любезно сообщил проф. И. Я. Депман.

тами Коши, или же нашёл их изложенными не в столь простой и наглядной форме, в какой мне удалось их представить».

В этой работе стр. 17 сформулирована и доказана знаменитая теорема, неправильно приписанная впоследствии К. Вейерштрассу, у которого она встречается лишь в 1876 г.*). Ю. В. Сохоцкий высказывает её в следующем старомодном виде: «Если данная функция $f(z)$ в некоторой точке z_0 обращается в ∞ бесконечного порядка, то непременно в этой же точке функция $f(z)$ должна принимать всевозможные значения». В этой формулировке существенно особая точка называется точкой, в которой $f(z)$ «обращается в ∞ бесконечного порядка» (имеется в виду характер лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки z_0), а под значениями функции $f(z)$ в точке z_0 подразумевается множество предельных значений функции $f(z)$ в этой точке. Это явствует как из примеров, приводимых Ю. В. Сохоцким ранее (стр. 2) и поясняющих, что «одиночная» (однозначная) функция может в исключительных точках иметь более одного значения, например, $\sin\frac{1}{z-b}$ «в точке $z=b$ принимает всевозможные значения», так и из сообщаемых им доказательств, не отличающихся по существу от современных.

Приложения теории вычетов, даваемые Ю. В. Сохоцким, относятся к ряду Лагранжа и к разложению функции в непрерывные дроби. Здесь он использует теорию вычетов для того, чтобы получить некоторые теоремы Чебышева из теории непрерывных дробей.

Развитием теоремы Сохоцкого является теорема Э. Пикара (1879), установившая, что аналитическая функция в любой окрестности существенно особой точки принимает все значения за исключением, быть может, одного. Последняя теорема послужила поводом для многочисленных исследований (Борель, Шоттки, Ландау и др.).

На основании этих исследований, а также на основе классической теории целых функций (Пуанкаре, Адамар, Борель) в двадцатых годах текущего столетия финским математиком Р. Неванлинна и его школой была построена общая *теория распределения значений мероморфных*

*) Эту же теорему одновременно с Сохоцким получил итальянский математик Казорати.

функций, включившая в себя как частный случай теорию распределения значений целых функций*).

Существенную роль в общей теории играет формула Пуассона-Иенсена, выражающая логарифм модуля функции аналитической, за исключением, быть может, полюсов в некотором круге (мероморфной в круге), через граничные значения этого логарифма и через нули и полюсы функции, принадлежащие кругу:

$$\ln|f(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha})| \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\alpha - \theta)}\, d\alpha +$$

$$+ \sum_{|b_i|<\rho} \ln\left|\frac{\rho^2 - \bar{b}_i z}{\rho(z - b_i)}\right| - \sum_{|a_j|<\rho} \ln\left|\frac{\rho^2 - a_j z}{\rho(z - a_j)}\right|;$$

здесь $r < \rho$, b_i — полюсы и a_j — нули функции $f(z)$. В случае, когда $f(z)$ не имеет ни нулей, ни полюсов в круге $|z| < \rho$, суммы в правой части обращаются в нуль и формула превращается в известную формулу Пуассона для определения гармонической функции $\ln|f(re^{i\theta})|$ по её значениям на окружности $|z| = \rho$. Если в общей формуле положить $r = 0$, то получится соотношение

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha + \sum_{|b_i|<\rho} \ln\frac{\rho}{|b_i|} - \sum \ln\frac{\rho}{|a_j|};$$

последнее было выведено Иенсеном в 1899 г.

2.13. Докторская диссертация Ю. В. Сохоцкого «Об определённых интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды» (С. Петербург, 1873), замечательна тем, что *в ней впервые изучаются граничные значения интегралов типа Коши и при весьма общих условиях выводятся формулы, впоследствии получившие важные применения в задачах механики.*

Приведём полностью текст первого пункта этой работы:

---

*) См. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М. — Л., 1941, гл. VI—X.

«I. Пусть будет функция $\varphi(x)$, выражающаяся формулою

$$\varphi(x)=\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x}, \tag{1}$$

где a и b суть два произвольных комплексных числа, $f(t)$ есть произвольная функция от переменной t, а интеграл предполагается взятым по некоторой траектории, соединяющей a с b. Функция может быть разрывная между пределами интеграла, лишь бы только интеграл (1) имел конечное и определённое значение. Функция $\varphi(x)$ есть неразрывная во всей координатной плоскости, за исключением траектории интеграла (1); в каждой точке этой траектории функция $\varphi(x)$ будет иметь вообще два различных значения, а в некоторых её точках она может обращаться в бесконечность.

Всякую точку x, лежащую на траектории интеграла (1), мы будем рассматривать как совокупность двух смежных точек x_1 и x_2, из которых первая лежит по одной стороне траектории, а вторая — по другой; два значения функции $\varphi(x)$, соответствующие точке x, будем рассматривать как соответствующие двум различным точкам x_1 и x_2. Вследствие этого траектория интеграла (1) может быть названа *линией разрыва* функции $\varphi(x)$».

Далее Ю. В. Сохоцкий доказывает следующие теоремы:

«Теорема 1. Если $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ суть два значения функции $\varphi(x)$, соответствующие двум смежным точкам на линии разрыва, то

$$\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{2\pi i}=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

так что если функция $f(x)$ в точке x неразрывна, то

$$\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{2\pi i}=\varphi(x)».$$

«Теорема 2. Если в точке x на линии разрыва функции $\varphi(x)$ функция $\varphi(x)$ есть неразрывная, так что при бесконечно малом h

$$f(x+h)-f(x-h)=\theta h^{\alpha},$$

где α — конечная, положительная величина, а θ принимает конечное положительное значение при $h=0$, то

$$\varphi(x_1)=\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x}+\pi i f(x),$$

где интеграл со знаком во второй части означает предел суммы

$$\lim\left[\int_a^{x-h}\frac{f(t)\,dt}{t-x}+\int_{x+h}^{b}\frac{f(t)\,dt}{t-x}\right]$$

для $h=0$».

Приведём наконец следующее предложение:

«Теорема 4. Существует одна и только одна функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\varphi(\infty)=0$.

2) Функция $\varphi(x)$ остаётся неразрывной во всех точках координатной плоскости, кроме точек некоторой данной линии, называемой линией разрыва.

3) Разность двух значений функции $\varphi(x)$, соответствующих двум смежным точкам на линии разрыва, равняется данной функции $f(x)$.

4) Функция $\varphi(x)$ или вовсе не обращается в ∞, или же обращается в ∞ в некоторых точках на линии разрыва, но всегда порядка меньше единицы.

Эта функция $\varphi(x)$ определяется по формуле

$$\varphi(x)=\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x},$$

где a и b суть концы линии разрыва, а траектория интеграла совпадает с линией разрыва».

Мы прибегли к этим пространным выпискам потому, что результаты Ю. В. Сохоцкого в учебной и научной литературе до сих пор приписывались другим, позднейшим авторам. Мы уже говорили об этом в связи с теоремой о существенно

особой точке, неправильно приписываемой Вейерштрассу *). Та же судьба постигла и теоремы Сохоцкого об интегралах типа Коши. Содержащиеся в них результаты обычно приписываются Племелю, переоткрывшему их в 1908 г., или Племелю и Привалову **) в связи с тем, что И. И. Привалов дал доказательство этих результатов при более общих предположениях.

2.14. В очерках по теории аналитических функций должны быть упомянуты и исследования С. В. Ковалевской, хотя их основное значение лежит за пределами этой теории. В работе «К теории уравнений в частных производных» — одной из трёх, представленных в 1874 г. в Геттингенский университет и принесших С. В. Ковалевской степень доктора «с высшей похвалой» (summa cum laude) — С. В. Ковалевская даёт весьма общую теорему существования аналитических решений системы уравнений с частными производными, в которой старшие производные неизвестных функций выражены через аналитические функции от независимых переменных, искомых функций и их производных более низкого порядка (нормальная форма системы).

Важнейшими в научном творчестве С. В. Ковалевской являются, как известно, её исследования по теории движения твёрдого тела и прежде всего работа: «Задача о вращении твёрдого тела вокруг неподвижной точки», 1888 г. ***). Общая задача состоит в изучении движения твёрдого тела, одна из точек которого неподвижно закреплена. Изучением этой задачи занимались крупнейшие математики и механики, начиная с Эйлера.

В случае, изученном Эйлером, когда неподвижная точка есть центр тяжести тела, а также в случае, исследованном Ла-

---

*) Эта ошибка, в частности, встречается и в моей книге «Элементы теории аналитических функций», 1944 г. На неё обратил моё внимание проф. Г. М. Голузин.

**) См., например, Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946, стр. 47—54, а также его книгу «Некоторые основные задачи математической теории упругости», 3 изд., 1949, стр. 247—249.

***) Эта работа получила премию Парижской академии наук. Ввиду выдающихся научных достоинств работы размер премии был увеличен с 3000 до 5000 франков.

гранжем, когда два главных момента инерции равны между собой, а центр тяжести лежит на оси третьего момента, параметры, определяющие положение движущегося тела, выражаются в виде эллиптических функций времени. Успех С. В. Ковалевской заключался прежде всего в совершенно новой и общей постановке задачи, в терминах теории аналитических функций. Рассматривая время t как комплексное переменное, С. В. Ковалевская решила найти вообще все случаи, когда параметры движения выражаются мероморфными функциями от t, содержащими пять произвольных постоянных. В результате блестяще проведённого анализа она обнаружила, что в её постановке задачи, кроме случаев Эйлера и Лагранжа, существует ещё один и только один (случай С. В. Ковалевской), характеризуемый тем, что два главных момента инерции равны удвоенному третьему, причём центр тяжести тела лежит в плоскости равных между собой моментов.

Этот результат был позднее дополнен А. М. Ляпуновым, показавшим, что случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской суть единственные, при которых параметры, определяемые дифференциальными уравнениями движения, являются однозначными функциями времени при любых начальных значениях. Исследования Ковалевской послужили отправной точкой для многочисленных работ русских и иностранных учёных, посвящённых отысканию и изучению случаев движения твёрдого тела при тех или иных специальных предположениях относительно аналитического характера соответствующих функций *).

2.15. В 1894 г. голландский математик Т. Стильтьес в своих «Исследованиях по теории непрерывных дробей» опубликовал следующую теорему: Пусть

$$\{f_k(z)\}$$

— последовательность функций, однозначных и аналитических

---

*) Работы С. В. Ковалевской переизданы и комментированы в книге: С. В. Ковалевская, Научные работы, Редакция и комментарии члена-корреспондента АН СССР П. Я. Полубариновой-Кочиной, Изд. АН СССР, 1948.

в области S; если ряд

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

равномерно сходится в каком-нибудь круге, принадлежащем области S, и если последовательность частичных сумм ряда $\{\sum_1^n f_k(z)\}$ равномерно ограничена в каждой области S', лежащей вместе со своей границей в области S, то ряд $\sum_1^\infty f_k(z)$ равномерно сходится в каждой такой области S'.

Условия теоремы Стильтьеса были ослаблены в 1905 г. итальянским математиком Витали и английским математиком Портером. Они доказали, что вместо равномерной сходимости в каком-либо круге достаточно потребовать простой сходимости на множестве точек, имеющем предельную точку в области S.

Факты, отмеченные этими теоремами, получили полное освещение и развитие в трудах французского математика П. Монтеля, установившего в своей докторской диссертации «О бесконечных последовательностях функций» (1907), что равномерная ограниченность последовательности аналитической функции в некоторой области влечёт за собой равностепенную непрерывность функций этой последовательности в каждой области G', содержащейся вместе со своей границей в области G. Из равностепенной непрерывности в свою очередь вытекает свойство *компактности* ограниченной последовательности аналитических функций, т. е. возможность извлечь из каждой подпоследовательности новую подпоследовательность, равномерно сходящуюся в любой из областей G' ($\overline{G'} \subset G$). Теоремы Стильтьеса, Витали и Портера являются простыми следствиями из компактности последовательности $\{f_n(z)\}$, а также из классической теоремы единственности аналитических функций. В своих дальнейших работах П. Монтель ввёл понятие *нормального семейства* аналитических функций как такого, для которого из любой последовательности можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся

равномерно внутри данной области к аналитической функции, либо также равномерно сходящуюся к бесконечности. Критерии нормальности семейства аналитических функций, найденные П. Монтелем (в частности, критерий компактности), получили многочисленные применения в различных вопросах теории аналитических функций: при изучении поведения функции в окрестности существенно особой точки, в частности, в теории целых и мероморфных функций, в теории конформных отображений, изучении последовательностей аналитических функций и т. п. Сводное изложение этого комплекса идей и фактов содержится в монографии П. Монтеля «Нормальные семейства», 1927 г. (есть русский перевод).

ОЧЕРК ТРЕТИЙ *)

ЗНАЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО В ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

3.1. Значение геометрии Лобачевского для теории аналитических функций было раскрыто в конце XIX и начале XX веков, в процессе разработки теории автоморфных функций и изучения аналитических функций на римановых поверхностях.

Изложим вкратце основные результаты этих обширных исследований, принадлежащих французскому математику А. Пуанкаре и немецким математикам Ф. Клейну и П. Кебе.

Пусть S — абстрактная риманова поверхность *). Тогда, как показали независимо друг от друга А. Пуанкаре и П. Кебе (1907), на этой поверхности существует вообще многозначная, но не имеющая других особенностей, кроме, быть может, полюсов, аналитическая функция $t = f(p)$, обладающая следующими свойствами:

а) множество значений функции $t = f(p)$ есть либо вся расширенная плоскость, либо конечная плоскость, либо единичный круг;

б) обратная функция $p = f^{-1}(t) = \varphi(t)$ является однозначной и непрерывной в соответствующей области (одной из перечисленных в п. а).

Из этой теоремы вытекает, что любая, вообще многозначная, но не имеющая на S других особенностей, кроме полюсов, аналитическая функция $z = F(t)$ превращается посредством замены $p = \varphi(t)$ в функцию от t, мероморфную соответственно в расширенной плоскости, конечной плоскости или в единичном круге, т. е. становится однозначной аналитической функцией от t: $z = F\varphi(t)$. Именно поэтому функция $t = f(p)$ называется *униформизирующей* (т. е. превращающей в однозначную) функцией, и сама теорема Кебе-Пуанкаре — *теоремой об униформизации*. Если исключить четыре

---

*) Очерк требует более обстоятельных сведений по теории функций. О римановых поверхностях см., например, нашу книгу «Теория аналитических функций», Гостехиздат, 1950, глава VIII. Развёрнутая теория содержится в книге: H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, 1923.

абстрактных римановых поверхности, моделями которых являются соответственно: расширенная плоскость, конечная плоскость, конечная плоскость, из которой удалено начало координат, и, наконец, тор, то для всего бесконечного множества остальных римановых поверхностей область значений униформизирующей переменной есть единичный круг.

Следовательно, во всех случаях, кроме указанных четырёх, изучение аналитических функций (вообще многозначных) на римановых поверхностях сводится, посредством соответствующей униформизирующей функции, к изучению функций, мероморфных в единичном круге: $|t|<1$.

Будем рассматривать этот круг как плоскость Лобачевского, а дробно-линейные отображения его самого на себя, как движения в плоскости Лобачевского. Тогда для геометрического представления свойств функций, аналитических на римановой поверхности, можно будет пользоваться геометрией Лобачевского.

Если униформизирующая функция $t=f(p)$ однозначна, т. е. если каждая точка поверхности S изображается лишь одной точкой единичного круга, то функция $t=f(p)$ осуществляет взаимно однозначное и конформное отображение римановой поверхности S на круг. В этом случае поверхность S односвязна и конформно-эквивалентна единичному кругу так, что её моделью может служить сам единичный круг, т. е. плоскость Лобачевского.

Если униформизирующая функция $t=f(p)$ многозначна (что будет тогда и только тогда, когда риманова поверхность неодносвязна), то каждая точка поверхности S при отображении $t=f(p)$ представляется бесконечным счётным множеством различных точек единичного круга; это множество не будет иметь предельных точек внутри единичного круга. Таким образом, множество всех точек плоскости Лобачевского разбивается на классы, каждый из которых содержит счётное множество точек и не имеет предельных точек на плоскости. Классы эти изображают отдельные точки поверхности S.

Разбиение плоскости Лобачевского на классы такого рода подчиняется замечательной закономерности. Оказывается, существует последовательность $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ движений в плоскости Лобачевского, зависящая только от данной римановой поверхности S и образующая группу Γ движений, такая, что последовательности точек, конгруентных между собой относительно этой группы, совпадают с упомянутыми классами. Иными словами, две точки t_1 и t_2 плоскости Лобачевского служат образами одной и той же точки p римановой поверхности S тогда и только тогда, когда группа Γ, зависящая только от этой поверхности, содержит движение, перемещающее t_1 в t_2 (или t_2 в t_1). Это обстоятельство обусловливает особую правильность во взаимном расположении точек одного и того же класса, которую можно сравнить с правильностью расположения атомов в кристаллической решётке; поэтому плоскость Лобачевского, разделённую на классы точек, представляющих точки данной римановой поверхности S, характеризуют иногда как «неевклидов кристалл».

Пусть Г — произвольная группа движений в плоскости Лобачевского. Разобьём точки плоскости Лобачевского на классы, объединяя в один и тот же класс точки, которые могут быть получены одна из другой посредством какого-либо движения группы Г. Группа Г называется собственно разрывной, если множество точек любого класса не имеет предельных точек. Предполагая, что Г — собственно разрывная группа, убедимся в том, что совокупность всех соответствующих классов точек плоскости Лобачевского, т. е. «неевклидов кристалл», можно рассматривать как некоторую риманову поверхность, точками которой служат эти классы. С этой целью опишем около одной из точек t_0 класса K_0 круг $\varkappa_0$ с центром в точке t_0 (круг и центр его рассматриваются в смысле геометрии Лобачевского) так, чтобы этот круг не содержал других точек того же класса. Подвергая круг $\varkappa_0$ движениям группы Г, получим совокупность кругов, содержащих внутри все точки класса K_0. Если t_1 точка одного из этих кругов и K_1 класс, к которому она принадлежит, то все точки последнего класса также будут содержаться в кругах рассматриваемой совокупности. Назовём множество тех классов, точки которых содержатся в указанных кругах, окрестностью класса K_0; легко проверить, что при таком определении множество всех классов плоскости Лобачевского будет представлять некоторую поверхность S. Чтобы превратить её в риманову поверхность, заметим, что каждая непрерывная кривая Г на поверхности S, с началом в некотором классе K_0, изображается совокупностью непрерывных кривых $\{\gamma_n\}$ плоскости Лобачевского, выходящих по одной из точек этого класса и обладающих тем свойством, что то самое движение из группы Г, которое совмещает начальную точку одной кривой γ_j с начальной точкой другой кривой γ_k, совмещает и все точки γ_j с точками γ_k. Поэтому угол между двумя кривыми Γ' и Γ'' с общим началом K_0 можно определить как общую величину углов, образованных парами кривых γ'_n и γ''_n, выходящих из точек класса K_0. Примем это определение; тогда множество классов плоскости Лобачевского можно будет рассматривать как риманову поверхность. Итак, каждая риманова поверхность (за исключением отмеченных выше частных случаев) изображается некоторым «неевклидовым кристаллом», и обратно, каждый «неевклидов кристалл» изображает собой некоторую риманову поверхность.

3.2. Рассмотрим произвольную функцию $F(p)$, однозначную и аналитическую (за исключением, быть может, полюсов) на данной римановой поверхности S.

Посредством преобразования $p = \varphi(t)$, обратного по отношению к униформизирующей функции, $F(p)$ переходит в функцию $\Phi(t) = F\varphi(t)$, мероморфную в единичном круге. Но $F(p)$ — однозначная функция, а точка p изображается не одной точкой круга, а целым классом их; поэтому функция $\Phi(t)$ принимает одно и то же значение во всех точках одного и того же класса, т. е. она не изменяется в результате движений группы Г. Мероморфные

функции, сохраняющие свои значения при любом движении, принадлежащем некоторой группе Г движений в плоскости Лобачевского, называются *фуксовыми функциями* *); их можно рассматривать по аналогии с периодическими и, в частности, двоякопериодическими функциями. Периодические функции сохраняют свои значения при любом сдвиге, принадлежащем некоторой группе сдвигов евклидовой плоскости (эта группа имеет вид: $z' = z + n\omega$, $n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$ для просто периодических функций или $z' = z + m\omega_1 + n\omega_2$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ для двоякопериодических функций). Подобно тому как для периодических (двоякопериодических) функций евклидова плоскость может быть разбита на полосы или параллелограммы периодов, перемещаемые друг в друга посредством сдвигов рассматриваемой группы, так и для фуксовых функций, соответствующих однозначным аналитическим функциям на римановой поверхности S, плоскость Лобачевского может быть разбита на так называемые *фундаментальные* области, ограниченные прямыми Лобачевского или отрезками таких прямых и перемещаемые друг в друга посредством движений группы Г. При этом каждая фундаментальная область обладает тем свойством, что никакие две точки её не конгруентны друг с другом относительно группы Г, т. е. не могут быть перемещены одна в другую посредством движений этой группы. Если мы рассматриваем всю плоскость Лобачевского, разбитую на классы точек, как «неевклидов кристалл», то каждая из соответствующих фундаментальных областей может рассматриваться как одна из «ячеек» этого кристалла; весь кристалл образуется правильным повторением этих ячеек, посредством движений группы Г. Указанную аналогию между классом функций $\{\Phi(t)\}$ и функциями периодическими (в особенности эллиптическими) можно проследить и далее, она позволяет строить теорию функций, аналитических на римановой поверхности S. Впрочем, эта теория не обладает ещё такой полнотой и законченностью, как например, теория эллиптических функций.

Замечая, что как группы движений в плоскости Лобачевского, так и группа сдвигов в евклидовой плоскости являются специальными группами дробно-линейных отображений, мы приходим к общему понятию *автоморфных функций*. Пусть Г — какая-либо группа дробно-линейных преобразований, обладающая тем свойством, что некоторая область D плоскости переходит сама в себя в результате каждого преобразования, принадлежащего Г, причём

*) Так их назвал А. Пуанкаре по имени немецкого математика Л. Фукса, привлекшего в семидесятых годах XIX века внимание французских математиков к функциям этого рода. Фактически простейшая из рассматриваемых функций, а именно *модулярная*, встречается ещё в работах Гаусса (не были в своё время опубликованы), Якоби и Римана. Заметим, что модулярная функция изучалась названными учёными в полуплоскости, а не в единичном круге. Впрочем, это различие не имеет принципиального значения, так как полуплоскость служит для изображения плоскости Лобачевского так же хорошо, как и единичный круг.

множество точек области D, переходящих одна в другую посредством этих преобразований, не имеет предельных точек внутри D. Тогда функцию $\Phi(z)$, мероморфную в области D и сохраняющую свои значения при любом преобразовании $z' = L(z)$ из группы Γ, т. е. такую, что $\Phi[L(z)] = \Phi(z)$, $z \in D$, называют автоморфной функцией по отношению к данной группе. В частном случае, если D есть плоскость, а Γ — группа евклидовых сдвигов: $z' = z + m\omega_1 + n\omega_2 \left(\omega_1 \neq 0,\ \omega_2 \neq 0, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right.$ не есть действительное число$\left.\right)$, получаем класс эллиптических функций; если D есть единичный круг, а Γ — группа движений в плоскости Лобачевского, получим рассмотренные выше фуксовы функции. Последний класс автоморфных функций имеет, как мы отмечали, основное значение для общей теории функций, аналитических на римановых поверхностях *).

Среди автоморфных функций весьма интересен ещё один класс так называемых *клейновских функций*, области существования которых D вообще отличны от плоскости или круга (а также отличны и от полуплоскости). Теория этих функций также связана с геометрией Лобачевского, а именно, с геометрией в пространстве.

Для изучения затронутых здесь вопросов мы отсылаем читателя к следующим книгам: В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений (гл. VIII); Ж. Адамар, Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций; H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche (§§ 19—21) и P. Fatou (P. Appell и E. Goursat), Fonctions automorphes (наиболее обстоятельное изложение теории автоморфных функций).

---

*) В виде иллюстрации к изложенному рассмотрим риманову поверхность S, представляемую плоскостью w с исключенными из неё тремя точками: 0, 1 и ∞. Модулярная функция $z = \omega(w)$ является многозначной аналитической функцией на S; значения этой функции принадлежат единичному кругу и заполняют его, причём обратная функция $w = \chi(z)$ однозначна в единичном круге (функция модулярная в круге). Следовательно, $z = \omega(w)$ — униформизирующая функция для поверхности S. Из известных свойств функции $w = \chi(z)$ следует, что весь единичный круг покрывается треугольниками с нулевыми углами, стороны которых суть дуги окружностей, ортогональные к единичной окружности; эти треугольники конформно отображаются посредством $w = \chi(z)$ на верхнюю и нижнюю полуплоскости. Сгруппируем попарно треугольники, имеющие общую сторону, в четырёхугольники так, чтобы каждый треугольник вошёл в одну и только в одну пару, и присоединим к каждому четырёхугольнику по две и только по две из его сторон с общей вершиной. В каждом из таких четырёхугольников функция $w = \chi(z)$ будет принимать все комплексные значения (за исключением значений 0, 1 и ∞) по одному разу. Так как два соседних треугольника симметричны относительно их общей стороны, то переход от одного четырёхугольника к другому может быть осуществлён посредством двух последовательно произведённых

3.3. Значение геометрии Лобачевского для теории аналитических функций не ограничивается её ролью в теории автоморфных функций и римановых поверхностей. Пусть G — область плоскости z, вообще многосвязная, имеющая, по крайней мере, три граничные точки. Такая область является моделью римановой поверхности, к которой применима формулированная выше теорема об униформизации. Если $t = f(p) = f(z)$ $(z \in G)$ — униформизирующая функция, то обратная функция $z = f^{-1}(t) = \varphi(t)$ будет однозначной аналитической функцией в единичном круге; она осуществляет взаимно однозначное и конформное отображение достаточно малой окрестности каждой точки единичного круга на некоторую окрестность соответствующей точки области G.

Это обстоятельство позволяет переносить измерение длин линий из плоскости Лобачевского на линии, лежащие в области G. А именно, если некоторая линия γ в области G является взаимно однозначным образом отрезка прямой Лобачевского, то «длиной» этой линии назовём длину (в смысле Лобачевского) соответствующего ей отрезка. При таком условии, определённой «длиной» будет обладать каждая ломаная, составленная из образов отрезков прямых Лобачевского, а следовательно, будут обладать «длинами» и все кривые области G, для которых «длины» вписанных ломаных указанного рода стремятся к определённым конечным пределам (нетрудно показать, что класс таких кривых совпадает с классом кривых, спрямляемых в смысле евклидовой геометрии).

Введённая указанным способом в области G метрика геометрии Лобачевского (так называемая *гиперболическая метрика*) не зависит от специального выбора униформизирующей функции $t = f(p)$, так как переход от этой униформизирующей к какой-либо другой

преобразований симметрии, эквивалентных некоторому дробно-линейному отображению $z' = L(z)$, представляющему движение в плоскости Лобачевского. Поэтому переход от одного четырёхугольника к любому другому также может быть осуществлён посредством некоторого движения в плоскости Лобачевского. Все полученные таким образом движения образуют группу Г. Точки, конгруентные относительно этой группы, располагаются по одной в каждом из четырёхугольников, причём функция $w = \chi(z)$ принимает одинаковые значения в конгруентных точках. Это следует из построения функции $\chi(z)$ и принципа симметрии. Отсюда вытекает, что эта функция является автоморфной относительно группы Г, а построенные нами четырёхугольники — области, из которых каждая ограничена четырьмя прямыми Лобачевского, — суть соответствующие фундаментальные области. Остаётся заметить, что произвольная функция $F(w)$, однозначная и мероформная на римановой поверхности S, посредством замены $w = \chi(z)$ преобразуется в некоторую функцию $\Phi(z)$, автоморфную относительно той же группы. Обратно, каждая функция $\Phi(z)$, автоморфная относительно группы Г, преобразуется посредством $\omega(w)$ в функцию однозначную и мероморфную на S. Например, сама функция $\chi(z)$ после такой замены преобразуется в $\chi_\omega(w) \equiv w$.

$t_1 = f_1(p)$ эквивалентен дробно-линейному отображению $t_1 = L(t)$ единичного круга самого на себя, т. е. некоторому движению в плоскости Лобачевского, а такое движение не изменяет длин. Пользуясь этой метрикой, можно доказать следующую теорему:

Если $w = F(z)$—какая-либо функция, аналитическая в области G (вообще многозначная), значения которой принадлежат некоторой области D, также имеющей, по крайней мере, три граничные точки, то «длина» l любой кривой области G (измеренная в этой области) будет не меньше, чем «длина» образа $F(b)$ этой кривой (измеренная относительно области D).

Это предложение, которое можно рассматривать как обобщение известной леммы Шварца, называется *принципом гиперболической меры*: оно служит для получения различных оценок в теории аналитических функций.

С относящимися сюда вопросами можно ознакомиться по книгам: Г. Жюлиа, Геометрические принципы анализа, ч. 1 (глава четвёртая) и Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции (главы третья и четвёртая).

О дальнейшем развитии этих идей и их распространении на теорию аналитических функций многих переменных см. Б. А. Фукс, Неевклидова геометрия в теории конформных и псевдоконформных отображений.

ОЧЕРК ЧЕТВЁРТЫЙ

ИДЕИ П. Л. ЧЕБЫШЕВА О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ И ИХ РАЗВИТИЕ В ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

4.1. Если идеи Н. И. Лобачевского служат путеводной нитью для разработки так называемой геометрической теории функций, то идеи другого великого русского математика П. Л. Чебышева дают путеводную нить для разработки теории приближения и интерполяции аналитических функций. В своём первоначальном виде эти идеи были выражены в знаменитой работе П. Л. Чебышева «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов» в 1854 г. *).

В классическом анализе приближение к аналитической функции обычно даётся посредством тейлоровского многочлена этой функции, т. е. многочлена, получающегося из ряда Тейлора, если в последнем отбросить все члены, начиная с некоторого из них.

Рассмотрение этого многочлена достаточно для решения многих задач анализа, геометрии и механики, в особенности тех, где речь идёт о локальном приближении функции, т. е. о её приближении в малой (сколь угодно малой) окрестности фиксированной точки. В тех, однако, задачах, где требуется найти приближение функции $f(z)$ на некотором фиксирован-

---

*) Ко всему этому пункту см. статью В. Л. Гончарова в сборнике «Научное наследие П. Л. Чебышева», вып. первый, Математика, изд. Академии Наук СССР, М.—Л., 1945 г., а также «Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева», изд. Академии Наук СССР, М.—Л., т. II, 1947.

ном множестве точек E (в частности, на фиксированном отрезке), тейлоровский многочлен может оказаться далеко не лучшим средством приближения. Чтобы уточнить постановку вопроса, нужно формулировать требования, предъявляемые к искомому приближению. Можно требовать, например, чтобы наименьшую величину имело отклонение многочлена $p(z)$ от функции, понимаемое как

$$\max_{z \in E} |f(z) - p(z)|,$$

или как

$$\sum \mu_i |f(z_i) - p(z_i)|^2,$$

где μ_i — заданные положительные числа, а z_i — фиксированные точки и т. п.

Именно эта принадлежащая П. Л. Чебышеву постановка вопроса даёт начало общей теории приближения функций. Здесь исходным пунктом служит не какой-либо a priori заданный аналитический аппарат (типа ряда Тейлора), способный изображать функции одного только определённого класса (класса функций аналитических в окрестности данной точки), с определённой областью сходимости (круг с центром в этой точке), но задача приближения функций наперёд заданного класса в данной области посредством функций более узкого класса, например многочленов (алгебраических или тригонометрических), причём характер приближения устанавливается заранее.

Идеи П. Л. Чебышева получили непосредственное развитие во второй половине XIX века в его собственных работах, а также в работах А. Н. Коркина, Е. И. Золотарёва, А. А. Маркова и В. А. Маркова, К. П. Поссе и других математиков петербургской школы. К этим работам, относящимся к функциям действительного переменного, вообще говоря, не аналитическим, примыкает известная теорема К. Вейерштрасса (1885), устанавливающая принципиальную возможность сколь угодно хорошего приближения функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, посредством многочленов достаточно высоких степеней, и сделанное С. Н. Бернштейном открытие, что в качестве многочленов, приближающих произвольную непрерывную функцию $f(x)$ на сегменте $[a, b]$,

можно всегда брать многочлены

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, C_n^k \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-k}, \text{ где } x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$$

(многочлены С. Н. Бернштейна).

Для аналитических функций комплексного переменного возможность неограниченного приближения их посредством рациональных функций и, в частности, многочленов была доказана К. Рунге в 1885 г. и позднее, из других соображений, Д. Гильбертом (1898). Фактическое построение приближающих многочленов для случая функции аналитической в замкнутой односвязной области дал Г. Фабер (1903), применивший для этой цели конформное отображение внешности области на внешность круга.

Крупнейший вклад в разработку идей Чебышева был сделан С. Н. Бернштейном в его работах, ведущихся с 1912 г. В этих работах получила развитие и оформление *конструктивная теория функций* — математическая дисциплина, изучающая связи между свойствами функций различных классов и порядком убывания наилучших приближений функций посредством других функций, принадлежащих определённому более узкому и более элементарному классу, например классу многочленов алгебраических или тригонометрических *).

Один из выводов этой обширной теории заключается в том, что определённый порядок стремления к нулю величин наилучших приближений функций многочленами данной степени n (n неограниченно возрастает) полностью определяет дифференциальные свойства соответствующих функций и может быть положен в основу классификации функций. Примером может служить классическая теорема С. Н. Бернштейна: Чтобы функция $f(x)$, определённая на отрезке $[-1, +1]$, была аналитической на этом отрезке и могла быть аналитически продолжена на внутренность эллипса с фокусами ± 1 и суммой полуосей $R > 1$, необходимо и достаточно существование

*) См. монографию И. П. Натансона «Конструктивная теория функций», Гостехиздат, М.—Л., 1949, где даётся весьма обстоятельное изложение теории.

для каждого R', $R > R' > 1$ последовательности многочленов $p_n(x)$ степени не выше n и постоянной C таких, что

$$|f(x) - p_n(x)| < \frac{C}{R'^n}, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Другой замечательный пример дают квазианалитические в смысле С. Н. Бернштейна классы функций. Функция $f(x)$ называется *квазианалитической* (в смысле С. Н. Бернштейна) на отрезке $[a, b]$, если для неё существуют числа $M > 0$, $\rho\,(0 < \rho < 1)$ и последовательность натуральных чисел $\{n\}$ такие, что наилучшие приближения $E_{n_k} f(x)$ функции $f(x)$ посредством многочленов степени не выше n_k удовлетворяют неравенствам

$$E_{n_k} f(x) < M\rho^{n_k}.$$

Две квазианалитические функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ относятся к *одному и тому же классу квазианалитических функций*, если существует такое $l > 1$, что для любого числа n_k (относящегося к одной из этих функций) найдётся число $n'_{k'}$ (относящееся к другой функции), удовлетворяющее неравенству

$$\frac{1}{l} < \frac{n'_{k'}}{n_k} < l.$$

Если две функции одного и того же класса совпадают на каком-либо сегменте $[\alpha, \beta]$, принадлежащем данному сегменту $[a, b]$, то они совпадают и на всём сегменте $[a, b]$. Это свойство, сближающее функции С. Н. Бернштейна с аналитическими функциями, оправдывает их наименование («квазианалитические»).

4.2. Тогда как для функций действительного переменного самая возможность сколь угодно хорошего приближения (в том или другом смысле) многочленами устанавливается, как правило, без особого труда, доказательство соответствующих предложений для функций комплексного переменного представляет значительно более трудную задачу. С точки зрения действительного переменного возникающие здесь трудности объясняются отчасти тем, что приближающие функции

$P(x, y)+iQ(x, y)$ являются соединениями двух многочленов от x и y, отнюдь не произвольных, но, во-первых, гармонических, а, во-вторых, сопряжённых между собой. Существенное осложнение вызывают также геометрические факторы как топологического, так и метрического характера, которые приходится учитывать при переходе от замкнутых или открытых множеств на прямой (в случае действительного переменного) к замкнутым или открытым множествам плоскости (случай комплексного переменного). Все основные и наиболее глубокие результаты и постановки задач в этом обширном разделе теории функций принадлежат советским учёным. М. А. Лаврентьеву принадлежит фундаментальная теорема о возможности сколь угодно хорошего приближения многочленами любой функции, непрерывной на произвольном ограниченном континууме плоскости, не имеющем внутренних точек (кривая в смысле Кантора) и не разбивающем плоскости. М. В. Келдыш установил, что если континуум K, не разбивающий плоскости, есть замкнутая область, то любую функцию, непрерывную на K и аналитическую во всех внутренних точках K, можно как угодно хорошо приближать многочленами.

Наконец, в самое последнее время (1951 г.) молодой армянский учёный С. Н. Мергелян доказал общую теорему, заключающую в себе теоремы М. А. Лаврентьева и М. В. Келдыша: Если F — произвольное ограниченное замкнутое множество точек плоскости, не разбивающее плоскости, и $f(z)$ — функция, непрерывная на F и аналитическая во внутренних точках F, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать многочлен $P(z)$, удовлетворяющий во всех точках F неравенству $|f(z)-P(z)|<\varepsilon$.

Большое количество исследований советских математиков относится к *приближению в среднем* функций комплексного переменного многочленами. Пусть G — область, ограниченная спрямляемой кривой Γ, и $f(z)$ — функция, аналитическая внутри G. Если существует сходящаяся к области G возрастающая последовательность областей G_n, ограниченных спрямляемыми кривыми Γ_n, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_n} |f(z)|^{\delta} ds < \infty \quad (\delta > 0),$$

то говорят, что функция $f(z)$ принадлежит классу E_δ в данной области.

Классы E_δ могут рассматриваться как обобщение класса функций, ограниченных по модулю (последний класс содержится в каждом E_δ), и обладают многими замечательными свойствами. Так, например, для каждой функции $f(z) \in E_\delta$ и почти для всех точек ζ на кривой Γ существует конечный предел $\lim\limits_{z\to\zeta} f(z) = f(\zeta)$ *), причём

$$\int\limits_\Gamma |f(\zeta)|\,ds < \infty.$$

В. И. Смирнов, исследовавший классы E_δ, доказал, что принадлежность классу E_1 необходима и достаточна для того, чтобы функция $f(z)$ выражалась через свои граничные значения $f(\zeta)$ по формуле

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)\,dt}{\zeta - z}$$

(интеграл понимается в смысле Лебега).

Он нашёл также необходимые и достаточные условия, представленные в аналитической форме, которым должна удовлетворять кривая Γ, чтобы для любой функции $f(z) \in E_2$ существовала последовательность многочленов $\{p_n(z)\}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Gamma |f(\zeta) - p_n(\zeta)|^2\,ds = 0$$

(речь идёт о приближении в среднем граничных значений аналитических функций многочленами).

Этот результат непосредственно относится к вопросу о разложении аналитических функций в ряд по системе многочленов $\{P_n(z)\}$, ортогональной и нормированной на кривой Γ, так как если условия В. И. Смирнова выполнены, то для любой функции $f(z) \in E_2$ справедливо разложение

$$f(z) = \sum_0^\infty a_j P_j(z), \qquad a_j = \int\limits_\Gamma f(z)\,\overline{P_j(z)}\,ds,$$

*) Предполагается, что z стремится к ζ по произвольной кривой, не касающейся Γ в точке ζ.

равномерно сходящееся внутри области G и, кроме того, такое, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma}|f(\zeta)-\sum_{0}^{n}a_jP_j(\zeta)|^2\,ds=0.$$

М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев построили примеры областей, ограниченных спрямляемыми кривыми, для которых условие В. И. Смирнова не выполняется. В этих областях существуют функции $f(z)$ класса E_2 (например, $\sqrt{\varphi'(z)}$, где $w=\varphi(z)$ конформно отображает область G на единичный круг), к которым соответствующее разложение в ряд по ортогональным многочленам не сходится (оно сходится к функциям, отличным от $f(z)$).

Вместо приближения в среднем на контуре области можно рассматривать приближение в среднем, оцениваемое по площади области; тогда получаем теорему, установленную автором этих очерков и независимо от него американским математиком Фаррелем: Если G — односвязная область, граница которой совпадает с границей компоненты дополнения к G, содержащей бесконечно удалённую точку (область Каратеодори), то для любой функции $f(z)$, аналитической в области G и удовлетворяющей условию

$$\iint_{G}|f(z)|^2\,dx\,dy<\infty, \qquad (4.2:1)$$

существует последовательность многочленов $\{\pi_n(z)\}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{G}|f(z)-\pi_n(z)|^2\,dx\,dy. \qquad (4.2:2)$$

Этот результат непосредственно относится к вопросу о разложении аналитических функций в ряд по системе многочленов $\{\Pi_n(z)\}$, ортогональной и нормированной на кривой Γ, так как в областях указанного типа для любой функции, удовлетворяющей условию (4.2:1), справедливо разложение

$$f(z)\sum_{0}^{\infty}\alpha_j\Pi_j(z),\qquad \alpha_j=\iint_{G}f(z)\,\overline{\Pi_j(z)}\,dx\,dy,$$

равномерно сходящееся внутри области G и, кроме того, такое, что

$$\lim_{n\to\infty}\iint_G |f(z)-\sum_0^n \alpha_j \Pi_j(z)|^2\,dx\,dy=0.$$

М. В. Келдыш открыл, что и среди областей, не являющихся областями Каратеодори, существуют такие, в которых из условия (4.2:1) вытекает существование последовательности многочленов $\{\pi_n(z)\}$, удовлетворяющей условию (4.2:2). Исследованием таких областей с успехом занимались учёные Армянской ССР А. Л. Шагинян и М. М. Джрбашян.

Если множество E, на котором определена функция $f(z)$, неограничено и требуется найти хорошее приближение для $f(z)$ на всём множестве E, то многочлены перестают годиться в качестве средства приближения, так как каждый из них бесконечно возрастает по модулю вместе с $|z|$. Тогда можно искать приближения для $f(z)$ в виде целых трансцендентных функций.

Пусть E есть континуум, не содержащий внутренних точек, и пусть существует возрастающая функция $\eta(t)$, $\eta(t)\to\infty$ при $t\to\infty$ такая, что любую точку ζ, не принадлежащую E, можно соединить с бесконечно удалённой точкой непрерывной кривой, лежашей вне круга $|z|<\eta(|\zeta|)$ и не имеющей общих конечных точек с E. Тогда, как показали М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев, для любой функции $f(z)$, непрерывной во всех конечных точках E, и для любой функции $\varepsilon(t)>0$ $(0<t<\infty)$ можно найти целую функцию $g(z)$, приближающую $f(z)$ на E с точностью до $\varepsilon(|z|)$:

$$|f(z)-g(z)|<\varepsilon(|z|).$$

Если E содержит внутренние точки, то тогда справедлива следующая теорема М. В. Келдыша: Пусть E — замкнутая область, ограниченная жордановой кривой расширенной плоскости, проходящей через бесконечно удалённую точку; тогда для каждой функции $f(z)$, непрерывной в конечных точках E и аналитической во внутренних точках E, можно при любых $\varepsilon>0$ и $\eta>0$ указать целую функцию $g(z)$, такую, что

$$|f(z)-g(z)|<\varepsilon e^{-|z|^{\frac{1}{2}-\eta}} \qquad (z\in E,\ z\neq\infty).$$

В частных случаях, когда E есть угол или полоса, М. В. Келдыш нашёл оценку (в известном смысле окончательную) для порядка приближающей функции $g(z)$ в зависимости от порядка роста функции $f(z)$.

Среди других исследований советских математиков, развивающих идеи Чебышева в применении к функциям комплексного переменного, следует выделить работы С. Н. Мергеляна, посвящённые установлению зависимостей между величинами наилучших приближений комплексными многочленами функций, непрерывных на различных множествах точек комплексной плоскости, и свойствами как этих функций, так и множеств. Принципиально новой по сравнению с приближениями функций одного действительного переменного здесь является роль того множества, на котором изучается приближение функции. Коротко говоря, порядок возможного приближения портится как вследствие «ухудшения» поведения приближаемой функции, так и вследствие «ухудшения» характера того множества, на котором изучается функция. Оба фактора и их влияние на порядок приближения получают точные количественные характеристики.

4.3. К теории приближения функций примыкает теория интерполяции, разрабатывавшаяся в трудах П. Л. Чебышева и А. А. Маркова преимущественно для функций действительного переменного. Вопросы теории интерполяции, специфические для аналитических функций комплексного переменного, получили существенное развитие в работах А. О. Гельфонда, В. Л. Гончарова и других советских учёных.

В простейшем случае интерполяционная задача заключается в отыскании аналитической функции, принадлежащей некоторому классу (например, классу $[\rho, \sigma]$ целых функций, порядок которых либо ниже определённого числа ρ, либо равен ρ, но тогда тип меньше, чем σ), по значениям этой функции или по значениям её производных различных порядков, заданным в точках некоторой последовательности $\{z_n\}$. Необходимо выяснить условия существования и единственности решения и, кроме того, указать способ построения решения. Классический приём решения состоит в построении *интерполяционных многочленов* $P_n(z)$, т. е. многочленов

наинизших возможных степеней, которые (или их производные соответствующих порядков) принимают заданные значения в точках $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$. Если последовательность $\{P_n(z)\}$ сходится, то её предел $f(z)$ может дать одно из решений задачи; остаётся только выяснить, принадлежит ли $f(z)$ к рассматриваемому классу и выполнено ли условие единственности решения (по отношению к этому классу).

Если все точки z_n различны между собой и в них задаются значения самой функции, то интерполяционные многочлены являются частичными суммами *ряда Ньютона*:

$$\sum_0^\infty \frac{1}{n!}[f;\ z_0, z_1, \ldots, z_n]\ (z-z_0)\ldots(z-z_n), \qquad (4.3:1)$$

где $[f;\ z_0, \ldots, z_n]$ — так называемые разделённые разности функции $f(z)$ порядка n. Они определяются следующим образом:

$$[f;\ z_0]=f(z_0),\ [f;\ z_0;\ z_1]= \\ =\frac{f(z_1)-f(z_0)}{z_1-z_0}, \ldots,\ [f;\ z_0, z_1, \ldots, z_{n+1}]= \\ =\frac{[f;\ z_1, \ldots, z_{n+1}]-[f;\ z_0, \ldots, z_n]}{z_{n+1}-z_0}.$$

Если точки z_n произвольны (различны или нет) и в точке z_n задаётся значение производной порядка n, то интерполяционные многочлены оказываются частичными суммами *ряда Абеля-Гончарова*:

$$\sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_n)\cdot \int_{z_0}^{z} dz' \int_{z_1}^{z'} dz'' \ldots \int_{z_{n-1}}^{z^{(n-1)}} dz^{(n)}. \qquad (4.3:2)$$

А. О. Гельфонд установил (1930), что если $n(r)$ — число точек z_n в круге радиуса r и $\nu=\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\ln n(r)}{\ln r}$, то каждая целая функция порядка $\rho<\nu$ разлагается в соответствующий ряд (4.3:1); если, кроме того, существует предел $\mu=\lim\limits_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r^\nu}>0$, то в ряд (4.3:1) разлагается также любая

целая функция порядка $\rho=\nu$ и типа $\sigma<\frac{2^{1-\nu\mu}}{\nu}\int\limits_0^1\frac{dt}{2-t^{\frac{1}{\nu}}}$.

В. Л. Гончаров показал (1930), что если ряд $\sum\limits_0^\infty|z_n-z_{n+1}|$ сходится и $\lim\limits_{h\to\infty} z_n=a$, то каждая функция, аналитическая в некотором круге с центром a, разлагается в этом круге в ряд (4.3:2); если же ряд $\sum\limits_0^\infty|z_n-z_{n+1}|$ расходится, причём $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{\rho}}\sum\limits_0^n|a_j-a_{j+1}|=\tau$, $\rho>0$, $\tau>0$, то каждая целая функция порядка, меньшего ρ, или порядка, равного ρ, и типа σ, удовлетворяющего неравенству $\rho\sigma\tau^\rho<\omega^\rho(1+\omega)^{1-\rho}$, где ω — положительный корень уравнения $\omega^\rho e^{\omega+1}=1$, разлагается в соответствующий ряд (4.3:2).

В позднейшей работе («О некоторых интерполяционных задачах», Успехи матем. наук, 1946, стр. 236—239) А. О. Гельфонд изложил основы общей теории интерполяционных процессов, охватывающих, в частности, случай ньютоновской интерполяции и интерполяции в случае Абеля-Гончарова. Из многочисленных работ советских математиков по теории интерполяции упомянем ещё исследования Б. Я. Левина (1940), в которых он рассматривает условия представимости целой функции по формуле, являющейся аналогом известной интерполяционной формулы Лагранжа. Речь идёт о представлении целой функции $f(z)$ следующим рядом:

$$f(z)=F(z)\sum_0^\infty\frac{f(z_n)}{F'(z_n)(z-z_n)},$$

$$F(z)=\prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{\frac{z}{z_n}+\ldots+\frac{z^p}{pz_n^p}}$$

(предполагается, что существует целое $p\geqslant 0$, для которого бесконечное произведение сходится).

Интересный общий критерий сходимости рядов (4.3:1) и (4.3:2) был установлен М. В. Келдышем и И. И. Ибра-

гимовым (1947). Если $M(r)$ — максимум модуля целой функции $f(z)$ на окружности $|z|=r$ и $n(r)$ — число точек z_n в круге $|z|<r$, то для сходимости ряда (4.3:1) (а также ряда (4.3:2)) к $f(z)$ достаточно, чтобы для некоторого ϑ, $0<\vartheta<\frac{1}{2}$ и всех достаточно больших r выполнялось неравенство

$$n(r)>C\ln M\left(\frac{r}{\vartheta}\right) \qquad \left(C>\frac{1}{\ln\frac{1}{\vartheta}}\right). \tag{4.3:3}$$

С другой стороны, для каждого $\vartheta>\frac{1}{2}$ $(\vartheta<1)$ можно указать целую функцию и последовательность $\{z_n\}$ такие, что соответствующий ряд (4.3:1) или (4.3:2) будет расходиться, хотя условие (4.3:3) выполнено. Можно без труда проверить (с помощью формулы Иенсена), что при выполнении неравенства (4.3:3) для $1>\vartheta>\frac{1}{2}$ решение интерполяционной задачи будет оставаться единственным. Так как ряд (4.3:1) может расходиться, то возникает вопрос о построении соответствующей функции $f(z)$ посредством аппарата, отличного от ряда Ньютона. Построение такого рода содержится в цитированной работе М. В. Келдыша и И. И. Ибрагимова.

ОЧЕРК ПЯТЫЙ

РАБОТЫ СОВЕТСКИХ МАТЕМАТИКОВ ПО ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫЕ С ЗАДАЧАМИ МЕХАНИКИ, ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ *)

5.1. Стимулирующую роль в теории аналитических функций XX века сыграли классические труды Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина, открывшие для этой теории новую обширную область применений, которая потребовала углублённой разработки геометрической теории функций и связанных с ней краевых задач.

Задачи механики потребовали прежде всего от теории функций детального анализа самого механизма конформного отображения, умения производить разнообразные количественные оценки и предсказывать качественные особенности отображения. Наибольшего развития эта ветвь теории достигла в трудах советских математиков — И. И. Привалова, М. А. Лаврентьева, Г. М. Голузина и др.

Большой принципиальный интерес для теории конформных отображений имеет теорема Н. Н. Лузина и И. И. Привалова о том, что при конформном отображении областей со спрямляемыми границами множества граничных точек меры нуль переходят снова во множества меры нуль (1919 г.). В дальнейшем М. А. Лаврентьев в своей работе «О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций» (Мат. сб., 1 (43), 1936, 815—846) дал этой теореме коли-

*) Ко всему этому очерку см. статью А. Ф. Берманта и А. И. Маркушевича в сборнике «Математика в СССР за 30 лет 1917—1947», Гостехиздат, 1948.

чественное уточнение. Именно, он показал, что если отображаемая область содержит круг $|z|<1$, то при её конформном отображении на круг $|w|<1$ (переводящем точку $z=0$ в точку $w=0$) мера множества E на границе области и мера соответствующего ему множества $\mathfrak{E}$ на окружности $|w|=1$ связаны неравенством

$$\operatorname{mes}\mathfrak{E}<\frac{Kl}{1+|\ln(\operatorname{mes}E)|},$$

где K—абсолютная постоянная и l—длина границы области *). В ряде других своих работ М. А. Лаврентьев исследовал поведение функций, осуществляющих конформное отображение на границе отображаемых областей в зависимости от геометрических свойств границ, и дал оценки для граничных производных конформного отображения. Полученные оценки он использовал для решения важных задач гидродинамики.

В статье «К теории конформных отображений» (Труды ин-та им. Стеклова, 1934, 159—246) и других статьях М. А. Лаврентьев создаёт и развивает один из наиболее эффективных как в теоретическом, так и в прикладном отношении методов — геометрический вариационный метод. Этот метод базируется на вариационных принципах, доказанных М. А. Лаврентьевым. Приведём формулировку одного из принципов для случая конформного отображения криволинейной полосы D (т. е. области, ограниченной двумя линиями C_0 и C без общих точек, но с общими концами a и b, которые могут совпадать с бесконечно удалённой точкой) на прямолинейную полосу. Пусть линия C_0 деформирована внутрь области D и функция

$$w=f(z);\quad f(a)=-\infty,\quad f(b)=\infty$$

осуществляет конформное отображение D на полосу $0<\operatorname{Im}w<1$, а функция

$$w=\tilde{f}(z);\quad \tilde{f}(a)=-\infty,\quad \tilde{f}(b)=\infty$$

— отображение на ту же полосу полученной после деформации области $\tilde{D}$ (ограниченной кривыми $\tilde{C}_0$ и C). Тогда:

*) При $\operatorname{mes}E=0$ из неравенства Лаврентьева следует $\operatorname{mes}\mathfrak{E}=0$, что и составляет содержание теоремы Лузина-Привалова.

1) при любом v, $0 < v < 1$, прообраз прямой $\operatorname{Im} w = v$ при отображении $w = \tilde{f}(z)$ лежит ближе к линии C, чем её прообраз при отображении $w = f(z)$; 2) в любой точке z_1, общей для линий C_0 и $\tilde{C}_0$,

$$|\tilde{f}'(z_1)| < |f'(z_1)|;$$

3) в любой точке z линии C

$$|\tilde{f}'(z)| > |f'(z)|.$$

Этот принцип допускает простое гидродинамическое истолкование. Пусть стенки глубокого канала с горизонтальным дном суть цилиндрические поверхности с вертикальными образующими. Тогда при прогибании одной стенки внутрь канала все линии тока приближаются к противоположной стенке, скорости потока в недеформированных участках первой стенки уменьшаются, а в точках противоположной стенки возрастают.

Пользуясь вариационным методом, М. А. Лаврентьев получил важные результаты и оценки в теории однолистных функций. Уточняя количественно вариационные принципы, он нашёл простые выражения для конформных отображений областей, мало отличающихся от области, отображение которой задано. Тем же методом он решил до конца или наметил решение ряда задач гидромеханики. Сюда относятся полученные им формулы изменения подъёмной силы крыла при переходе от некоторого профиля к профилю близкому, качественные результаты в задаче обтекания со срывом струй, решение задачи о волнах, уточнение предложенного Н. Н. Павловским метода расчёта подземных частей гидросооружений и т. д.

С основами вариационных методов и их приложений можно ознакомиться по книге М. А. Лаврентьева «Конформные отображения», а также по его (совместно с Б. В. Шабатом) книге «Методы теории функций комплексного переменного».

В области гидродинамических приложений теории конформных отображений существенные результаты получены также М. В. Келдышем, В. В. Голубевым, П. Я. По-

лубариновой-Кочиной, Л. И. Седовым и др. Работы Келдыша и Полубариновой-Кочиной удостоены Сталинской премии.

Большое количество исследований советских учёных относится к оценкам модулей и аргументов функций, однолистных в круге или вне круга, их производных (в частности, коэффициентов степенных разложений) и, наконец, таких комбинаций из однолистных функций и их производных, которые имеют простой геометрический смысл.

Важнейшие результаты в этой области получены Г. М. Голузиным. Эти результаты удостоены Сталинской премии. Так, ему принадлежит окончательная оценка аргумента производной функции, однолистной в круге (теорема вращения). Эта теорема утверждает, что при конформном отображении единичного круга $|z|<1$ на некоторую область G посредством функции $w=f(z)$, $f(0)$, $f'(0)>0$ аргумент производной удовлетворяет неравенствам:

$$|\arg f'(z)| \leqslant 4 \arcsin |z| \quad \text{при} \quad |z| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$|\arg f'(z)| \leqslant \pi + \ln \frac{|z|^2}{1-|z|^2}.$$

Оценки, даваемые этой теоремой, не могут быть улучшены. Отметим ещё одну оценку модуля конечного приращения для функции $F(z)$, однолистной вне единичного круга и имеющей разложение вида $F(z)=z+a_0+\frac{a_1}{z}+\ldots$:

$$1-\frac{1}{r^2} \leqslant \left|\frac{F(z_1)-F(z_2)}{z_1-z_2}\right| \qquad (|z_1|=|z_2|=r).$$

Г. М. Голузину принадлежат и многие другие существенные результаты. Для ознакомления с исследованиями Г. М. Голузина отсылаем к двум его монографиям: «Внутренние задачи теории однолистных функций» (Успехи матем. наук, вып. VI, 1939) и «Некоторые вопросы теории однолистных функций» (Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, XXVII, 1949).

Полученная Г. М. Голузиным оценка модуля конечного вращения была дополнена И. Е. Базилевичем, давшим оценку сверху:

$$\left|\frac{F(z_1)-F(z_2)}{z_1-z_2}\right| \leqslant 1+\frac{1}{r^2}.$$

И. Е. Базилевичу принадлежит оценка площади образа круга $|z| \leqslant r$, $r < 1$ при конформном отображении посредством функции $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, позволившая ему получить наилучшие из известных оценок для модулей коэффициентов однолистных функций и ряд других важных результатов.

Для приложений конформного отображения большое значение имеют методы приближённого построения конформного отображения. Такого рода методы с успехом разрабатывались Л. В. Канторовичем и другими ленинградскими математиками. Им посвящена значительная часть обширного труда Л. В. Канторовича и В. И. Крылова «Приближённые методы высшего анализа», 2-е изд., Л. — М., 1941.

5.2. К теории конформных отображений примыкают также исследования Д. Е. Меньшова, выясняющие самую природу конформных отображений. Речь идёт о выявлении основных свойств конформного отображения, из которых все прочие свойства вытекают как следствия.

Вот некоторые из результатов Д. Е. Меньшова:

Пусть $f(z)$ — функция, осуществляющая гомеоморфное отображение области G на некоторую область D. Если в точках z_0 области G (за исключением, быть может, конечного и счётного множества их) выполняется одно из следующих условий (в одних точках одни, в других — другие условия):

а) в точке z_0 преобразование $w = f(z)$ обладает одинаковыми растяжениями вдоль трёх лучей, выходящих из z_0 и принадлежащих трём различным прямым;

б) сохраняются углы между тремя лучами, исходящими из z_0 и принадлежащими трём различным прямым;

в) сохраняется угол между двумя лучами, исходящими из z_0 и принадлежащими различным прямым, причём в точке z_0 растяжения вдоль этих лучей одинаковы;

то $w = f(z)$ осуществляет конформное отображение первого или второго рода (т. е. функция $f(z)$ или $\overline{f(z)}$ является аналитической в области G с отличной от нуля производной).

Существенно, что в этой теореме заранее не предполагается, что функции $u(x, y) = R[f(z)]$ и $v(x, y) = I[f(z)]$ дифференцируемы.

Методы доказательств Д. Е. Меньшова основаны на теории множеств и теории функций действительного переменного *).

5.3. Помимо теории конформных отображений с физическими приложениями связаны также и другие вопросы теории аналитических функций. В качестве первого примера мы рассмотрим вопросы, к которым приводят проблемы устойчивости колебаний.

Комплекснозначную функцию действительного переменного t:

$$e^{(\sigma+i\omega)t} = e^{\sigma t}\cos\omega t + ie^{\sigma t}\sin\omega t, \qquad (5.3.1)$$

где σ и ω — действительные постоянные, можно трактовать, как комплексную форму записи простейшего колебания с частотой ω и с «амплитудой» $e^{\sigma t}$. Это колебание будет устойчивым, если его амплитуда не возрастает неограниченно с течением времени t, т. е. если $\sigma \leqslant 0$. Коэффициент $p = \sigma + i\omega$ при t в показателе степени (5.3.1) во многих задачах колебаний находится, как корень уравнения $f(p) = 0$, где $f(p)$ — целая функция комплексного переменного p, или в простейшем случае многочлен. Поэтому для практики весьма важно получить критерии, позволяющие определить, в каких условиях все нули данного многочлена или целой функции лежат в левой полуплоскости, т. е. их действительные части неположительны (критерии устойчивости). Эта проблема была поставлена ещё в 1868 г. Максвеллом. В 1877 г. Раусс дал аналитическое её решение для случая многочленов, которое, однако, вскоре было забыто. В 1895 г. Гурвиц дал новое её решение, основанное на теории вычетов, и теперь проблему называют проблемой Раусса-Гурвица.

Интересный геометрический метод решения проблемы предложил одновременно с Рауссом русский инженер И. А. Вышнеградский в своей статье «О регуляторах прямого действия» (Изв. СПб. практ. технолог. ин-та, 1877). Идея его состоит в том, что исследуемый многочлен включается в семейство

$$P(p)\xi + Q(p)\eta + R(p) = 0, \qquad (5.3.2)$$

*) См. Д. Меньшов, Les conditions de monogénéité, Paris, Hermann, 1936.

где P, Q и R — некоторые многочлены, а ξ и η — действительные параметры; пусть исследуемый многочлен получается в левой части уравнения (5.3.2) при значениях параметров ξ_0 и η_0.

Вышнеградский рассматривает плоскость комплексного переменного $\omega = \xi + i\eta$ и получает разбиение этой плоскости на отдельные области, в каждой из которых уравнение (5.3.2) имеет определённое число корней с отрицательными и положительными действительными частями (и не имеет чисто мнимых корней). Область, для точек которой уравнение имеет k корней с отрицательной и $n-k$ корней с положительной действительной частью, обозначим через $D(k, n-k)$. Уравнение границы различных областей $D(k, n-k)$, оказывается, легко получить и не решая уравнения (5.3.2), а после того, как разбиение плоскости получено, остаётся лишь определить, какой именно из них принадлежит точка $\omega_0 = \xi_0 + i\eta_0$, соответствующая исследуемому многочлену. В частности, условие устойчивости состоит в том, что точка ω_0 принадлежит области $D(n, 0)$ (области устойчивости).

И. А. Вышнеградский изложил свой метод лишь на примере многочленов третьей степени с действительными коэффициентами. Распространение метода Вышнеградского на случай произвольных многочленов является заслугой советских математиков. Существенные и важные результаты, связанные с проблемой Раусса-Гурвица, получили Н. Г. Чеботарёв в Казани, М. Г. Крейн и Б. Я. Левин в Одессе и Н. Н. Мейман и Л. С. Понтрягин в Москве. С их работами можно ознакомиться по монографии Н. Г. Чеботарёва и Н. Н. Меймана «Проблема Раусса-Гурвица для полиномов и целых функций» (Труды ин-та им. Стеклова, XXVI, 1949).

Большой цикл исследований, в которых используется аналитическая теория функций комплексного переменного, связан с контурными интегралами и операционным исчислением. Так называемое операционное исчисление имеет своеобразную историю. В середине прошлого века появился ряд работ, развивающих символический метод решения дифференциальных уравнений. Этот метод основан на том, что символ дифференцирования $\frac{d}{dt} = p$ рассматривается как величина, над кото-

рой и над функциями из некоторого класса производятся определённые операции. Так, дифференцирование функции $f(t)$ рассматривается как умножение этой функции на p, интегрирование — как деление на p и т. д. При этом решение некоторых, главным образом линейных дифференциальных уравнений сводится к решению простых алгебраических уравнений.

У нас в России этот метод успешно развивался М. Е. Ващенко-Захарченко, книга которого «Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений» (Киев, 1862) в своё время явилась одной из наиболее полных монографий по символическому исчислению и содержала ряд ценных оригинальных результатов. Во второй половине века символический метод стал широко известным в кругах математиков.

В конце века американский инженер О. Хевисайд дал решение ряда сводящихся к дифференциальным уравнениям электротехнических задач, имеющих большую практическую ценность; свои решения Хевисайд публиковал без всяких пояснений и обоснований методов, а также без ссылок на своих предшественников. Это привело к тому, что он стал считаться, главным образом в инженерных кругах, творцом нового мощного метода решения дифференциальных уравнений.

Между тем, так называемый метод Хевисайда является не чем иным, как хорошо известным математикам символическим методом. Когда уже в нашем веке этот метод вновь привлёк внимание математиков (Бромвича, Ван дер Поля и др.), оказалось, что он представляет собой лишь иную трактовку метода интегральных преобразований, широко применявшегося ещё Лапласом и Коши. Символ p стал трактоваться как комплексное переменное, и операционное исчисление стало тесно связанным с теорией аналитических функций.

Много важных результатов по операционному исчислению получено советскими учёными. В книге трагически погибших в годы Великой Отечественной войны харьковских математиков А. М. Эфроса и А. М. Данилевского «Операционное исчисление и контурные интегралы» (ДНТВУ, 1937) приводится большое количество оригинальных решений задач операционного исчисления. Особо следует отметить принадлежащее А. М. Эфросу обобщение теоремы умножения

Бореля, которое по существу является правилом замены переменных в операционных соотношениях и привело уже к ряду новых результатов.

В трудах советских учёных операционное исчисление широко используется в самых разнообразных вопросах физики и техники. Б. В. Булгаков и А. И. Лурье успешно применили его в механике, М. Ю. Юрьев и К. А. Круг — в электротехнике, С. И. Евтянов — в радиотехнике, А. В. Лыков — в теплотехнике. Обоснованием операционного исчисления с точки зрения функционального анализа занимались А. И. Плеснер и В. А. Диткин.

С методами операционного исчисления можно ознакомиться по цитированной книге Эфроса и Данилевского или по книге А. И. Лурье «Операционное исчисление» (М. — Л., 1950).

В операционном исчислении приходится часто пользоваться контурными интегралами от функций комплексного переменного. Особенно важно уметь находить асимптотические выражения представленных контурными интегралами функций, т. е. приближённые выражения интегралов для больших значений входящих в них параметров. Наиболее употребительным в приложениях методом получения асимптотических выражений интегралов является так называемый метод перевала, идея которого восходит ещё к Лапласу и который был разработан в десятых годах нашего века трудами Дебая, Перрона и русского математика П. А. Некрасова. Метод этот состоит в том, что контур интегрирования надлежащим образом деформируется так, чтобы величина интеграла не изменилась, но при больших значениях параметров основная часть этой величины приходилась на малый участок контура интегрирования, а интеграл по остальной части контура был исчезающе малым. После этого для приближённой оценки интеграла можно пользоваться обычными локальными методами, например тейлоровским разложением подинтегральной функции.

Методом перевала широко пользуются и советские физики-теоретики. В. А. Фок с его помощью нашёл новые асимптотические выражения для цилиндрических функций, которые он применил для изучения явления диффракции радиоволн. С методом перевала можно ознакомиться по «Курсу высшей математики» В. И. Смирнова (М. — Л., 1950,

т. III, ч. 2) или по книге В. А. Фока «Диффракция радиоволн вокруг земной поверхности» (изд. АН СССР, 1949).

Отметим, наконец, что ещё со времён Эйлера в России успешно занимаются различными важными для приложений специальными функциями, полное изучение которых возможно лишь в комплексной области. В прошлом столетии большой вклад в теорию цилиндрических функций внёс петербургский математик Н. Я. Сонин *); П. Л. Чебышев ввёл и изучил различные классы специальных многочленов (в частности, так называемые многочлены Эрмита и многочлены Лагерра введены впервые Чебышевым в 1859 г.); теорию гамма-функции Эйлера продолжал разрабатывать В. П. Алексеевский и др.

В советское время специальные функции продолжают разрабатываться как математиками, так и физиками.

5.4. Обширное поле для приложений теории аналитических функций к задачам механики составила также плоская задача теории упругости, разрабатывавшаяся преимущественно русскими и грузинскими учёными. Задача эта «развилась главным образом при приближённом исследовании распределения напряжений в задачах трёх измерений, где одно из них сравнительно мало с двумя другими, например, в тонких пластинках, арках, где для упрощения анализа приходится приближённо пренебрегать их толщиной, а также вообще в тех случаях, где вследствие сложности задачи в трёх измерениях её сводят к двум измерениям» **).

Первая задача такого рода была поставлена и решена в 1880 г. русским учёным Х. Г. Головиным. Из позднейших исследований особое значение для теории упругости и развития методов теории функций комплексного переменного имели работы Г. В. Колосова (1908 г. и след.) и Н. И. Мусхелишвили (1915 г. и след.) и его школы в Тбилиси.

---

*) Об истории цилиндрических функций и, в частности, о работах Н. Я. Сонина см. кандидатскую диссертацию В. В. Гуссова. Из истории трансцендентных функций в России и СССР. (Защищена в 1951 г. в Московском университете.)

**) Г. В. Колосов, Применение комплексной переменной к теории упругости, ОНТИ, Л. — М., 1935, стр. 4.

С результатами этих исследований можно познакомиться по цитированной выше книге Г. В. Колосова и по фундаментальному сочинению Н. И. Мусхелишвили «Некоторые основные задачи теории упругости», 3-е изд.*), Изд. АН СССР, М.—Л., 1949.

Пусть частицы упругого тела перемещаются параллельно фиксированной плоскости xoy, причём все точки, находящиеся на одном и том же перпендикуляре к плоскости xoy, перемещаются одинаково. Тогда компоненты напряжения X_x, Y_y, X_y и компоненты смещения u и v могут быть представлены по следующим формулам Г. В. Колосова:

$$X_x + Y_y = 2\,[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}],$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2\,[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)],$$

$$2\mu\,(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)},$$

где $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — аналитические функции от $z = x + iy$, $\varphi(z) = \int \Phi(z)\,dz + C_1$, $\psi(z) = \int \Psi(z)\,dz + C_2$, $\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} > 1$ и λ и μ — постоянные Ламе, характеризующие упругие свойства тела (вывод см. в цитированной книге Н. И. Мусхелишвили).

В силу формул Г. В. Колосова плоская задача теории упругости сводится к определению двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ по граничным условиям, относящимся к величинам напряжений и смещений на контуре любого плоского сечения тела, параллельного плоскости xoy, т. е. к решению так называемых краевых задач. В трудах Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили были разработаны различные методы решения этих задач, основанные на теории аналитических функций. В свою очередь эти труды оказали влияние и на развитие самой теории аналитических функций. В исследованиях Н. И. Мусхелишвили и его школы получила широкое развитие и нашла многочисленные приложения теория особых интегральных уравнений, стоящая ближе к теории аналитических функций, чем к теории интегральных уравнений. Основоположником этой теории является Ю. В. Со-

*) Второе издание удостоено Сталинской премии первой степени.

хоцкий*), который в предисловии к своей докторской диссертации «Об определённых интегралах и функциях и т. д.» (1873) писал: «В сочинении этом я стараюсь обратить внимание читателя на решение уравнения

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x},$$

то-есть на определение функции $f(x)$ по данной функции $\varphi(x)$...» и вывел в этой работе основные во всей теории формулы для граничных значений интеграла типа Коши.

На почве разработки методов теории функций, применяемых к решению задач теории упругости (не только плоской задачи), грузинский математик И. Н. Векуа применил методы теории аналитических функций к отысканию и изучению свойств решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа**).

Исследования И. Н. Векуа интересны не только благодаря своим приложениям к задачам механики, но также и в методологическом отношении. Класс решений произвольного уравнения эллиптического типа (с аналитическими коэффициентами) можно рассматривать как обобщение класса гармонических функций $\left(\text{состоящего из решений простейшего уравнения } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\right)$; поэтому изучение свойств решений эллиптических уравнений позволяет оценивать свойства гармонических функций и связанные с ними свойства аналитических функций одного комплексного переменного с общей точки зрения.

5.5. В краевых задачах, к которым приводят проблемы механики и физики, значения искомых функций на границе области, так же как и самая граница, подчиняются определённым условиям непрерывности и гладкости. Интересы

---

*) Правда, Сохоцкий, ставя задачу о решении интегрального уравнения, считает, что точка x не лежит на контуре интегрирования, так что особое интегральное уравнение в собственном смысле слова им не разрешается.

**) См. И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, М. — Л., 1948.

построения общей теории, выявляющей основные закономерности, относящиеся к граничным значениям аналитических (или гармонических функций), требуют, однако, изучения граничных свойств при самых общих предположениях, обусловленных лишь математической постановкой задачи. Сюда относятся исследования М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева об условиях разрешимости и устойчивости задачи Дирихле (для произвольного числа измерений) *).

При этом рассматриваются наиболее общие области, тогда как граничные значения предполагаются непрерывными. Наряду с вопросами существования решения ставится и исследуется чрезвычайно важный для теории функций вопрос о влиянии изменения границы области на решение задачи Дирихле (устойчивость решения в зависимости от изменения границы). Весьма частным случаем этого вопроса является задача об изменении функции, дающей конформное отображение данной двумерной области на круг или какую-либо другую неканоническую область, вызванном некоторым изменением границы данной области.

В ином направлении шли исследования, возникшие из задачи изучения самого аналитического аппарата, представляющего гармоническую или аналитическую функцию по её значениям на границе области. Классическими примерами такого аппарата являются интегралы Пуассона и интеграл Коши, а образцами задач, здесь возникающих, — изучение поведения этих интегралов, построенных для a priori заданных граничных значений. Неоднократно упоминавшаяся нами работа Ю. В. Сохоцкого, содержащая исследования граничных значений интеграла типа Коши, может рассматриваться как первый и основной шаг в этой области. Для дальнейшего продвижения нужна была та разработка основ теории множеств и теории функций действительного переменного, которая привела в конце XIX века к теории меры и интеграла (Борель, Лебег). Следующий шаг был сделан французским математиком П. Фату, применившим в работе «Тригонометрические ряды и ряды Тейлора» (1906 г.) интеграл Лебега к обобщению и изучению интеграла Пуассона и интеграла Коши,

---

*) См. М. В. Келдыш, О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, Успехи математических наук, вып. VIII, 1941.

а также для изучения поведения ряда Тейлора на границе круга сходимости.

Полного развития новая область теории аналитических функций — теория граничных свойств аналитических функций — достигла лишь в трудах математиков Московской школы В. В. Голубева, Н. Н. Лузина и И. И. Привалова, к которым впоследствии присоединились работы Г. М. Фихтенгольца и В. И. Смирнова (Ленинград) и А. И. Плеснера (Москва). Отметим здесь лишь некоторые из достигнутых результатов, отсылая читателя для изучения теории граничных свойств к специальной литературе*).

Часть результатов В. В. Голубева и И. И. Привалова относится к распространению результатов Ю. В. Сохоцкого (на которого они, впрочем, не ссылались, не зная его работы) на общий случай интеграла типа Коши $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$, где L — произвольная спрямляемая кривая, а $\varphi(\zeta)$ — какая угодно функция, суммируемая на L. В частности, В. В. Голубев показал (1916), что почти для всех точек $\zeta - \zeta_0$ кривой L разность двух значений интеграла типа Коши в точках z' и z'', симметричных относительно ζ_0, стремится к пределу $\varphi(\zeta_0)$ (или $-\varphi(\zeta_0)$), когда z' и z'' стремятся к ζ_0, оставаясь на какой-либо прямой, не касающейся L в точке ζ_0. И. И. Привалов (1918) исследовал условия существования особого интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - \zeta_0}$ и доказал при некоторых ограничениях на кривую L, что такой интеграл существует почти всюду на L и что почти всюду на L угловые граничные значения интеграла типа Коши выражаются формулами Ю. В. Сохоцкого:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \pm \frac{1}{2}\varphi(\zeta_0).$$

---

*) См. монографию И. И. Привалова «Граничные свойства однозначных аналитических функций», изд. 2-е, значительно переработанное и дополненное, Гостехиздат, 1950.

К числу важнейших достижений теории граничных свойств относится *общая теорема единственности* Н. Н. Лузина и И. И. Привалова (1918), согласно которой две функции, аналитические в области G, ограниченной спрямляемой кривой L, и принимающие одинаковые угловые граничные значения в точках некоторого множества $E \subset L$, обладающего положительной мерой, должны совпадать во всей области G. Укажем ещё теорему А. И. Плеснера (1927), показавшего, что для функции $f(r)$, мероморфной в единичном круге, все точки окружности, за исключением, быть может, множества меры нуль, делятся на два рода: в одних (точки первого рода) функция имеет угловое граничное значение, т. е. стремится к определённому конечному пределу, когда z приближается к точке окружности ζ по любому некасательному пути, в других (точки второго рода) совокупность предельных значений функций при стремлении к точке ζ внутри любого угла с вершиной ζ покрывает всю плоскость.

Г. М. Фихтенгольц (1929) доказал, что функция $f(z)$, аналитическая в единичном круге, представляется интегралом Коши $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$ через свои граничные значения тогда и только тогда, когда для неё выполнено условие

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\,d\theta < \infty$$

(принадлежность $f(z)$ к классу H_1).

В. И. Смирнов подверг систематическому исследованию вопросы аналитического представления функций классов $H_\delta\,(\delta > 0)$, характеризуемых тем, что для них

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^\delta\,d\theta < \infty,$$

и так называемых функций ограниченного вида и исследовал условия, при которых функция $f(z)$, аналитическая в области G, ограниченной жордановой спрямляемой кривой L, выражается через свои угловые граничные значения интегра-

лом Коши или обобщающим интеграл Пуассона интегралом Грина:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\zeta)\frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n}ds,$$

где $G(\zeta, z)$ — функция Грина области G.

5.6. К крупнейшим достижениям теории аналитических функций в Советском Союзе относятся результаты, полученные в связи с исследованием арифметических свойств аналитических функций *). Напомним, что комплексное число называется алгебраическим или трансцендентным в зависимости от того, является ли оно нулем какого-либо многочлена с целыми коэффициентами, не равного тождественно нулю, или же такого многочлена не существует. Если $w=f(z)$ есть алгебраическая функция, определяемая уравнением

$$P_0(z)+P_1(z)f(z)+\ldots+P_n(z)[f(z)]^n=0,$$

где коэффициентами многочленов $P_j(z)$ служат алгебраические числа, то при любом алгебраическом значении z функция $f(z)$ также принимает алгебраическое значение (или, быть может, обращается в бесконечность). Если же $f(z)$ есть функция трансцендентная (т. е. не алгебраическая), то тогда вопрос об алгебраичности или трансцендентности значения $f(z)$, соответствующего алгебраическому, в частности рациональному, значению z, представляет, вообще говоря, чрезвычайно трудную задачу, даже для случая элементарной функции $f(z)$. Хорошо известно, что для функции $f(z)=e^z$ трансцендентность значения $f(1)=e$ была установлена только в 1873 г. (Эрмит). Ещё Эйлер во «Введении в анализ бесконечно малых» (1748) высказал уверенность в том, что логарифмы рациональных чисел по рациональному основанию трансцендентны в том случае, когда они не являются рациональными числами. В 1900 г. Гильберт формулировал более общее предположение о том, что логарифм любого алгебраического числа по алгебраическому основанию трансцендентен, если он

*) См. статью А. О. Гельфонда «Приближение алгебраических чисел алгебраическими же числами и теория трансцендентных чисел», Успехи математических наук, т. IV, вып. 4 (32), 1949.

не есть число рациональное. Справедливость этого предположения была доказана советским математиком А. О. Гельфондом в 1929 г. (частично) и в 1934 г. (в окончательном виде). В первой работе А. О. Гельфонд доказал, что функция α^z, где α — алгебраическое число, отличное от 0 и от 1, принимает трансцендентные значения в точках $z=\sqrt{-p}$, где p — целые положительные числа, не являющиеся точными квадратами. Для этой цели он разработал метод, основанный на разложении целой аналитической функции в интерполяционный ряд Ньютона. Развивая метод А. О. Гельфонда, Р. О. Кузьмин доказал в 1930 г., что та же функция принимает трансцендентные значения также и в точках вида $z=\sqrt{p}$, и, таким образом, установил, в частности, что $2^{\sqrt{2}}$ есть число трансцендентное.

В упомянутой выше работе А. О. Гельфонда 1934 г., где проблема Эйлера-Гильберта получила своё окончательное решение, первоначальный метод А. О. Гельфонда был существенно дополнен идеей *аналитико-арифметического продолжения* *). Новый метод оказался исключительно плодотворным и с его помощью советским и зарубежным математикам удалось получить ряд новых интересных результатов. В частности, немецкий математик Шнейдер применил метод А. О. Гельфонда к исследованию арифметической природы эллиптической функции $\wp(z)$ и пришёл к следующей теореме: если инварианты g_2 и g_3 функции $\wp(z)$ суть алгебраические числа, то эта функция принимает трансцендентные значения при алгебраических значениях z. Отсюда, в частности, следует, что основные периоды такой функции суть трансцендентные числа (в самом деле, значения $\wp(\omega_j)=e_j$ суть корни уравнения $w^3-g_2w-g_3=0$ и, следовательно, являются алгебраическими числами).

Общие методы, разрабатываемые А. О. Гельфондом, начиная с 1929 г., а также работы Р. О. Кузьмина и одного из старейших советских математиков Д. Д. Мордухай-Болтовского привели к возникновению новой математической дисциплины, выросшей на основе теории аналитических функций — *теории трансцендентных чисел*. Теория эта с успе-

---

*) См. цитированную выше статью А. О. Гельфонда.

хом продолжает разрабатываться А. О. Гельфондом и его учениками.

5.7. Развитие механики и в особенности *газовой динамики*, основоположником которой является С. А. Чаплыгин («О газовых струях», 1902), потребовало изучения отображений более общих, чем конформные. Дело в том, что при больших скоростях среду, окружающую движущееся тело, уже нельзя считать несжимаемой, как при малых скоростях. Следствием сжимаемости явится то, что функция тока $u(x, y)$ и потенциальная функция $v(x, y)$ течения будут связаны уже не системой Даламбера-Эйлера, а более общей системой дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Комплексный потенциал $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ будет уже не аналитической функцией, и отображение $w = f(z)$ не будет конформным.

В связи с этим возникает весьма важная для практики проблема: выяснить, какие свойства аналитических функций и конформных отображений распространяются на более широкие классы функций и отображений. К ним примыкает и другая: выяснить, какие свойства гармонических функций распространяются на решения дифференциальных уравнений второго порядка более общего вида, чем уравнение Лапласа.

Одним из первых результатов в указанном направлении явилась теорема С. Н. Бернштейна (1900 г.), распространяющая известную теорему Лиувилля с гармонических функций на решения произвольного уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа (с аналитическими коэффициентами). В дальнейшем выяснилось, что *очень многие свойства аналитических и гармонических функций можно переформулировать так, чтобы они стали топологическими свойствами*, т. е. оставались справедливыми для любых функций, которые после некоторых топологических преобразований переменных z и w переходят в аналитические и соответственно гармонические функции (К. Сциллярд, С. Стоилов, М. Морс).

Для приложений больший интерес представляют свойства, которые носят в себе некоторые элементы метрики, т. е. сохраняются не при любых топологических преобразованиях переменных, а лишь при преобразованиях, подчинённых определён-

ным метрическим условиям. Естественный класс таких преобразований составляют так называемые *отображения с ограниченным эксцентриситетом*. Гомеоморфное отображение $w=f(z)$ называют отображением с ограниченным эксцентриситетом в данной области D, если оно преобразует семейство бесконечно малых окружностей с центром в любой точке z области в семейство кривых, отличающихся на малые высшего порядка от подобных и подобно расположенных эллипсов с центром в точке $w=f(z)$, причём отношение большой полуоси эллипса к малой ограниченно для всех точек области *). (Напомним, что конформные отображения с точностью до малых высших порядков переводят бесконечно малые окружности снова в окружности, а отображения, дифференцируемые и с отличным от нуля якобианом, — в некоторые эллипсы.) Свойства отображений с ограниченным эксцентриситетом, т. е., так сказать, метрико-топологические свойства конформных отображений, изучались Грёчем (Grötsch) и Альфорсом.

Принципиально по-новому поставил вопрос М. А. Лаврентьев в своей работе «Об одном классе непрерывных отображений» (Матем. сб., 42 : 4, 1935). Он предложил рассматривать характеристики отображений, т. е. отношение p большой полуоси эллипса, преобразуемого в круг, к его малой полуоси и наклон θ большой оси эллипса к оси x, как функции точки z. Задание характеристик $p=p(z)$, $\theta=\theta(z)$ выделяет из класса отображений с ограниченным эксцентриситетом (предполагается, что характеристика $p(z)$ ограничена) подкласс отображений, которые М. А. Лаврентьев назвал квазиконформными отображениями. Основной результат работы 1935 г. состоит в том, что при заданных непрерывных характеристиках для квазиконформных отображений остаётся в силе основная теорема о возможности и единственности отображения одной односвязной области на другую при заданных трёх действительных параметрах.

В дальнейших работах М. А. Лаврентьева и его учеников были изучены свойства квазиконформных отображений и вы-

---

*) Иными словами, их можно определить как отображения, для которых отношение максимального линейного растяжения в данной точке к минимальному ограничено во всей области.

яснилось, что *квазиконформные отображения тесно связаны с решениями линейных систем уравнений в частных производных первого порядка эллиптического типа.* Именно, в несколько более общей постановке, чем выше, действительная и мнимая части $u(x, y)$ и $v(x, y)$ квазиконформного отображения с заданными характеристиками, оказывается, удовлетворяют линейной эллиптической системе

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} &= d\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \quad ac - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 > 0,$$

более общей, чем система Даламбера-Эйлера. (Случай, рассмотренный в работе 1935 г., соответствует самосопряжённым системам, для которых $b = d$; при $b = d = 0$, $a = c = 1$ получается система Даламбера-Эйлера и отображение конформно.) Таким образом, теория квазиконформных отображений стала геометрической теорией уравнений в частных производных.

Теория квазиконформных отображений нашла применения и в самой теории аналитических функций. Так, Л. И. Волковыский (Львов) с успехом использует её в трудной проблеме типа римановой поверхности. Эта проблема заключается в исследовании тех свойств открытой односвязной римановой поверхности в собственном смысле слова (т. е. римановой поверхности, заданной как некоторая накрывающая поверхность сферы), от которых зависит возможность отобразить конформно эту поверхность на всю конечную плоскость (параболический тип) или на единичный круг (гиперболический тип).

В последних работах М. А. Лаврентьева, удостоенных Сталинской премии, теория была продвинута ещё значительно дальше. В работах «Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей» (Мат. сб., 21 (63): 2,1947) и «Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей» (Известия АН СССР, 12, 1948) М. А. Лаврентьев рассматривает уже произвольные нелинейные системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$\Phi_1\left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\Phi_2\left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,$$

и гомеоморфное отображение $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, осуществляемое решением этой системы, называет квазиконформным отображением, ей соответствующим. В геометрических терминах, близких к соответствующим терминам газовой динамики, М. А. Лаврентьев вводит условие сильной эллиптичности системы. Далеко обобщая известные в газовой динамике переменные С. А. Чаплыгина, он получает в этих новых переменных более простую систему уравнений, которую называет производной для данной системы и которая служит ему средством исследования.

В упомянутых работах М. А. Лаврентьев распространяет на решения произвольных сильно эллиптических систем многие свойства конформных отображений, в том числе свои вариационные принципы и свои результаты относительно граничных свойств отображений. Наконец, в тех же предположениях он доказывает основную теорему существования и единственности отображений — это наиболее далеко идущее обобщение классической теоремы Римана.

Одной из наиболее интересных и трудных проблем, которые стоят сейчас перед математиками, является проблема изучения так называемых уравнений смешанного типа, т. е. дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которые в одной части области имеют эллиптический, а в другой части — гиперболический тип. К таким уравнениям приводят задачи газовой динамики, в которых скорости потоков в одной части области ниже скорости распространения звука, а в другой — выше. Первой работой по уравнениям смешанного типа явилась работа итальянского математика Ф. Трикоми, в которой он изучает уравнение

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(эллиптическое в верхней полуплоскости и гиперболическое в нижней), являющееся одной из моделей уравнения смешанного типа. Ценность работы Трикоми объясняется тем, что на данной ступени развития теории уравнений смешанного типа приходится ограничиваться выяснением свойств таких уравнений хотя бы на отдельных их примерах, ибо сами эти свойства далеко не ясны. Уравнение Трикоми у нас изучали Ф. И. Франкль и др.

М. А. Лаврентьев предложил изучать ещё более простую модель уравнения смешанного типа: уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

где $\operatorname{sign} y$ — знак y — равно $+1$ в верхней полуплоскости и -1 в нижней. Рассмотрение уравнения Лаврентьева вместо уравнения Трикоми позволяет избежать многих технических трудностей, а принципиальная картина остаётся без изменений. Эта простая идея уже принесла плоды: М. А. Лаврентьев и его ученик А. В. Бицадзе для новой модели получили лучшие результаты и значительно более простым путём, чем известные результаты для модели Трикоми.

Редактор *Б. В. Шабат.*

Техн. редактор *Н. А. Тумаркина.*

Корректор *О. А. Сигал.*

* * *

Подписано к печати 26/X 1951 г. Бумага 84×108¹/₃₂. 2 бум. л. 6,56 печ. л. 7,1 уч.-изд. л. 43 338 тип. зн. в печ. л. Т-07296. Тираж 5000 экз. Цена книги 4 руб. 30 к. Заказ № 2872.

4-я типография им. Евг. Соколовой
Главполиграфиздата при Совете Министров СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

Цена ~~4 р. 30 к.~~

3 45

— 35 г —

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1951