Оглавление

NOTES ON CONSTRUCTIVE MATHEMATICS

by
PER MARTIN-LÖF

Almqvist & Wiksell
Stockholm
1970

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

П. Мартин-Лёф

ОЧЕРКИ ПО КОНСТРУКТИВНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Перевод с английского
Г. Е. Минца

Под редакцией
А. Г. Драгалина

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1975

УДК 517.11; 519.50

Эта книга представляет собой введение в конструктивную математику и рассчитана на математиков, желающих уточнить свои интуитивные представления о конструктивности; она позволяет без особых технических усилий ознакомиться с точными результатами в этой области. В книге излагается найденный автором конструктивный вариант некоторых первоначальных идей Брауэра из области конструктивизации математического анализа.

Книга доступна математикам всех специальностей, начиная со студентов младших курсов. Она представляет интерес также для всех лиц, интересующихся основаниями математики.

Редакция литературы по математическим наукам

М $\frac{20203\text{-}016}{041\text{-}75}$ 16-75

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Последние десятилетия характеризуются бурным развитием конструктивных подходов в математике. Вычислительная тенденция в современной математике вызвала устойчивый интерес к выяснению общей роли алгорифмических процессов. В частности, появилось настойчивое стремление построить главные разделы математики на строго эффективной основе, без привлечения актуально бесконечных множеств и закона исключенного третьего, нарушающих вычислимость. Идея такого построения, восходящая к интуиционистской концепции Брауэра [1], [2], получила дальнейшее развитие в работе Тьюринга [1] (в которой, в частности, описано точное понятие алгоритма) и в работе Банаха и Мазура [1*].

В настоящее время конструктивная математика довольно детально и глубоко разработана с различных позиций.

В Советском Союзе плодотворно работает большая школа конструктивной математики. Со взглядами этой школы на основания математики читатель может ознакомиться по статьям Маркова [1*] и Шанина [1*]. Основные факты конструктивного математического анализа в стиле школы Маркова систематически изложены в книге Кушнера [1*]. Другие подходы к построению конструктивной математики описаны в монографиях Бишопа [1*], Гудстейна [1*].

Эта небольшая книга принадлежит перу известного шведского специалиста по математической логике П. Мартин-Лёфа. Она представляет собой блестяще написанный сжатый очерк основных идей и методов конструктивной математики. Для чтения книги

необходимо лишь знание основ математического анализа и некоторая общая математическая культура, поэтому она может служить для первого ознакомления с предметом.

В первых двух своих главах книга содержит сжатое изложение самых характерных результатов конструктивной математики. Выбор в качестве уточнения интуитивного понятия алгорифма канонических систем Поста позволил автору удивительно кратко изложить громоздкие конструкции теории алгорифмов (см., например, п. 7, п. 9). Этот выбор привел автора к трактовке открытых и замкнутых множеств (п. 17), при которой удалось доказать конструктивную версию теоремы Гейне — Бореля (п. 18) и теорему Бэра о категории (п. 21). Значительный интерес представляет также оригинальное построение теории борелевских множеств и теории меры (гл. 3 и 4). Автор привлекает для построения этих теорий так называемые обобщенные индуктивные определения (в терминологии автора — определения по трансфинитной индукции). Эта идея, восходящая к Брауэру, позволяет Мартин-Лёфу придать рассматриваемым конструктивным теориям такое же изящество, которое присуще их классическим прообразам. Специалист, несомненно, оценит и два применения конструктивной теории борелевских множеств к математической логике (п. 31 и п. 32).

Русский перевод книги снабжен несколькими примечаниями переводчика и редактора. Введение автора, содержащее более специальное обсуждение методологических установок монографии, перенесено в конец книги.

Можно надеяться, что предлагаемая книга будет полезна для широкого круга математиков и логиков, студентов, аспирантов, интересующихся конструктивностью в математике.

А. Г. Драгалин

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта монография выросла из лекций, которые я читал в университетах Орхуса и Стокгольма в 1966—1968 годах. Целью этих лекций было ввести математиков, не имеющих логической подготовки, в круг идей, известных как интуиционистские или конструктивные, а также представить некоторые из моих собственных работ. Я добавил приложение, где описываю в логических терминах занятую мной конструктивную позицию.

Чикаго, октябрь 1968 *Пер Мартин-Лёф*

ГЛАВА 1

РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Конструктивные объекты

Мы попытаемся установить границы понятия *конструктивного объекта*. Простейшие примеры таких объектов получаются с помощью сочетания *букв*, *знаков* или *символов* из конечного *алфавита* в *цепочки* или *слова*. В частности, если взять алфавит, состоящий из единственной буквы — черточки |, то мы получаем *натуральные числа*

□ | || ||| ... |||||| ....

Здесь и всюду в дальнейшем, когда возникает опасность недоразумений, присутствие *пустого слова* указывается с помощью символа □. *Целые числа*

... —|| —| □ | || ||| ...

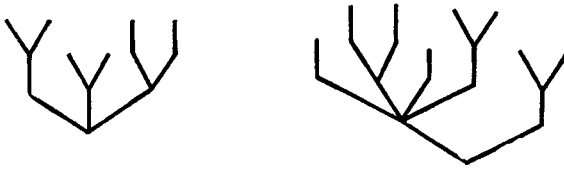
— это слова в двухбуквенном алфавите | —. Добавляя знак /, мы можем строить *рациональные числа*

|/||| —|||/|||| —||/| ....

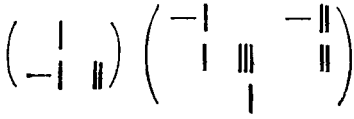
Несколько более сложные примеры дают нам формулы аксиоматической теории, например арифметики первого порядка

$$\wedge x - (x' = 0) \quad \vee x\,(x' + a = b) \to -\,(a = b) \ldots .$$

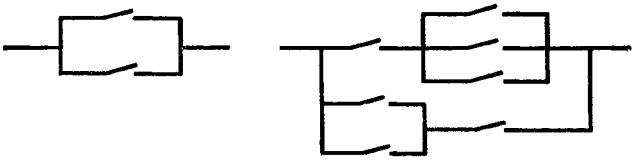
Мы можем также рассматривать конструктивные объекты, устроенные нелинейным образом, например конечные деревья



целочисленные матрицы



и релейно-контактные схемы



Можно не вводить общее понятие конструктивного объекта, так как каждый, кто ясно понимает, что это такое, вероятно, согласится, что конструктивный объект всегда можно закодировать словом в подходящем алфавите. Например, конечные деревья, приведенные выше, легко закодировать в виде цепочек скобок

(((( ) ( ))) (( ) ( )) ((( )) (( ))))

(((( )) ((( )) (( ))) (( )) ((( ) ( )))) ((( ) ( )))),

а целочисленные матрицы — в виде слов в четырехбуквенном алфавите |—, ;

|,;—|,|| —|,,—||;|,|||,||;,|,

Эту редукцию можно провести еще дальше, так как слова в конечном алфавите могут быть перенумерованы, например путем использования лексикографического упорядочения, как показано ниже для случая трехбуквенного алфавита $\alpha\beta\gamma$:

□ α β γ αα αβ αγ ...

□ | || ||| |||| ||||| |||||| ...

Таким образом, достаточно было бы рассматривать только натуральные числа. Однако необходимость все время линейно упорядочивать символы причиняет некоторые неудобства, а необходимость нумеровать все рассматриваемые объекты приводила бы к еще боль-

шей громоздкости. Вот почему мы предпочитаем работать с более общим понятием конструктивного объекта.

По-видимому, несущественно, предпочитаем ли мы считать конструктивные объекты мысленными конструкциями или материально существующими объектами. Следует, однако, заметить, что в последнем случае мы позволяем себе оперировать с этими объектами таким образом, как будто не существует никаких ограничений в пространстве и во времени. Например, если наши конструкции — это отметки чернилами на листе бумаги, то мы предполагаем, что запас чернил и бумаги не ограничен. Эта абстракция позволяет нам, в частности, сложить любые два натуральных числа, приписав одно к другому. Бесконечное появляется здесь лишь потенциально, не приводя, по-видимому, ни к одной из трудностей, порождаемых классическим понятием актуальной бесконечности.

Важность конструктивных объектов определяется тем фактом, что это единственные объекты, которые мы можем сообщить друг другу во всех деталях. В частности, если нужна уверенность, что два математика, рассматривающие некоторый математический объект, имеют в виду один и тот же объект, то этот объект должен быть конструктивно определен. В соответствии с этим все конкретные математические объекты, которые мы будем рассматривать, такие, как вещественные числа, открытые множества, вещественнозначные функции вещественной переменной, ординальные числа, измеримые множества и т. д., будут конструктивными объектами, т. е. в конечном счете натуральными числами.

2. Канонические системы

Канонические системы были изобретены Постом в 1941 году при попытке найти наиболее общий вид формальных систем, таких, например, как Principia Mathematica.

Будем предполагать, что дан список *знаков* и другой список символов, называемых *переменными*, и

отличных от знаков. *Терм* — это любая цепочка знаков и переменных, а *производящая схема* (короче, схема) — это фигура вида

$$\frac{t_1\ t_2\ \ldots\ t_n}{t},$$

где все t, $t_1, \ldots, t_n$ $(n \geqslant 0)$ суть термы. Термы $t_1, \ldots, t_n$ называются *посылками*, а t — *заключением* схемы. Схема без посылок $(n = 0)$ называется *аксиомой*.

Каноническая система, или *система Поста*, состоит из списка знаков, списка переменных и конечного множества схем. Знаки образуют *алфавит* канонической системы.

Применение схемы получается из схемы путем подстановки цепочек знаков вместо всех переменных, причем вместо всех вхождений одной и той же переменной подставляется одна и та же цепочка.

Если дана каноническая система, то определим по индукции понятие *доказательства* некоторого слова, т. е. цепочки знаков.

1. Применение аксиомы — доказательство этого применения.

2. Если $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — доказательства соответственно слов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и

$$\frac{a_1\ a_2\ \ldots\ a_n}{a}$$

— применение некоторой схемы, то

$$\frac{P_1\ P_2\ \ldots\ P_n}{a}$$

— доказательство слова a.

Слово *доказуемо* в канонической системе, если мы можем найти его доказательство.

Пример. Слова, доказуемые в следующей системе Поста, — это в точности четные числа.

знак	$\mid$
переменная	x
схемы	$\square\ \dfrac{x}{x\mid\mid}$.

Пример. Альтернирующие цепочки знаков α и β.

знаки	$\alpha\ \beta$
переменные	x
схемы	$\alpha\beta\quad \beta\alpha\quad \dfrac{x\alpha}{x\alpha\beta}\quad \dfrac{x\beta}{x\beta\alpha}$.

3. Рекурсивно перечислимые множества и отношения

Интуитивно множество конструктивных объектов эффективно перечислимо, если мы можем дать предписание, указывающее нам, как порождать элементы этого множества один за другим чисто механическим путем. Понятие рекурсивно перечислимого множества задумано как точная математическая формулировка этого несколько расплывчатого интуитивного понятия.

Рекурсивно перечислимое множество слов в данном алфавите — это система Поста, алфавит которой является расширением данного алфавита. Знаки расширенного алфавита, не принадлежащие данному алфавиту, будут называться *вспомогательными знаками.*

Пусть a обозначает слово в данном алфавите, и пусть E и F — рекурсивно перечислимые множества слов в том же алфавите. Введем следующие определения.

$a \in E$ (читается «a принадлежит E» или «a является элементом множества E»), если a доказуемо в системе Поста E.

$a \notin E$, если a не принадлежит E, т. е. если любое доказательство в системе Поста E оканчивается словом, отличным от a.

$E \subseteq F$, если любое слово в данном алфавите, доказуемое в системе Поста E, доказуемо также в F.

$E = F$, если $E \subseteq F$ и $F \subseteq E$.

Два примера рекурсивно перечислимых множеств были уже приведены в предыдущем пункте. Добавим к ним следующие чуть менее тривиальные примеры.

Пример. Множество чисел, не являющихся простыми.

знак	$\mid$					
вспомогательные знаки	N	$\cdot$	$=$			
переменные	x	y	z			
схемы	N	$\dfrac{Nx}{Nx\mid}$	$\dfrac{Nx}{x\cdot =}$	$\dfrac{x\cdot y=z}{x\cdot y\mid =xz}$	$\dfrac{\mid\mid x\cdot y\mid\mid =z}{z}$.	

Пример. Выводимые формулы интуиционистского исчисления высказываний в бесскобочной записи

знаки	P	$\mid$	$\wedge$	$\vee$	$\to$	$-$
вспомогательные знаки	A	F	T			
переменные	x	y	z			
схемы	AP	$\dfrac{Ax}{Ax\mid}$	$\dfrac{Ax}{Fx}$	$\dfrac{Fx\,Fy}{F\wedge xy}$	$\dfrac{Fx\,Fy}{F\vee xy}$	

$$\frac{Fx\ Fy}{F\to xy}\qquad \frac{Fx}{F-x}\qquad \frac{Fx\ Fy}{T\to x\to yx}\qquad \frac{Fx\ Fy\ Fz}{T\to\to xy\to\to x\to yz\to xz}$$

$$\frac{Tx\ T\to xy}{Ty}\qquad \frac{Fx\ Fy}{T\to x\to y\wedge xy}\qquad \frac{Fx\ Fy}{T\to\wedge xyx}\qquad \frac{Fx\ Fy}{T\to\wedge xyy}\qquad \frac{Fx\ Fy}{T\to x\vee xy}$$

$$\frac{Fx\ Fy}{T\to y\vee xy}\qquad \frac{Fx\ Fy\ Fz}{T\to\to xz\to\to yz\to\vee xyz}\qquad \frac{Fx\ Fy}{T\to\to xy\to\to x-y-z}$$

$$\frac{Fx\ Fy}{T\to -x\to xy}\qquad \frac{Tx}{x}$$

Мы часто будем использовать следующий прием. К каждому члену каждой схемы данной системы Поста приписывается один и тот же знак, не содержащийся в алфавите этой системы. Эта операция будет называться *нанесением метки.*

Пусть E и F — рекурсивно перечислимые множества слов в алфавите $\alpha_1 \ldots \alpha_p$.

$E \cup F$, *объединение* множеств E и F, определяется как система Поста, схемами которой являются схемы первого множества, отмеченные знаком E, схемы второго, отмеченные знаком F, и новые схемы

$$A\quad \frac{Ax}{Ax\alpha_1}\cdots\frac{Ax}{A\,x\alpha_p}\quad \frac{Ax\ Ex}{x}\quad \frac{Ax\ Fx}{x}.$$

Здесь мы не стали явно выписывать знаки, вспомогательные знаки и переменные определяемых нами систем Поста. Мы часто будем допускать такого рода неточности, если не будет опасности путаницы. Непосредственно видно, что если a — слово в алфавите $\alpha_1 \ldots \alpha_p$, то $a \in E \cup F$ тогда и только тогда, когда $a \in E$ или $a \in F$. Этим оправдывается наше определение.

Заменяя последние две схемы из определения $E \cup F$ на

$$\frac{Ax \quad Ex \quad Fx}{x},$$

мы получаем $E \cap F$, *пересечение* E и F, обладающее тем свойством, что $a \in E \cap F$ тогда и только тогда, когда $a \in E$ и $a \in F$.

Рекурсивно перечислимое множество E слов в данном алфавите *рекурсивно* или *разрешимо*, если можно найти рекурсивно перечислимое множество F, такое, что $E \cap F$ пусто, а $E \cup F$ равно множеству всех слов в данном алфавите. Хотя мы и не будем этого доказывать, все рекурсивно перечислимые множества, приведенные в наших примерах, в действительности разрешимы. Утверждение о существовании рекурсивно перечислимого неразрешимого множества — это одна из основных теорем теории рекурсивных функций, которая будет доказана позднее.

Предположим теперь, что даны два алфавита $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ и $\beta_1 \ldots \beta_q$. *Рекурсивно перечислимое отношение* — это рекурсивно перечислимое множество слов вида a, b в алфавите[1]) $\alpha_1 \ldots \alpha_p$, $\beta_1 \ldots \beta_q$, где a и b — слова в соответствующих алфавитах (т. е. a есть слово в алфавите $\alpha_1 \ldots \alpha_p$, b — слово в алфавите $\beta_1 \ldots \beta_q$). Мы будем использовать запись aRb, чтобы выразить тот факт, что a, b принадлежит отношению R.

Если рекурсивно перечислимое отношение обладает свойством функциональности, т. е. из того, что a, b и a, c принадлежат ему, следует, что $b = c$, то мы

[1]) Запятая является буквой этого алфавита. — *Прим. перев.*

будем называть это отношение *частично рекурсивной функцией* или *алгорифмом*. Обычная функциональная запись $F(a) = b$ будет использоваться для выражения того, что a, b принадлежит частично рекурсивной функции F. Мы приводим ниже несколько примеров алгорифмов, в которых мы позволили себе чуть изменить символику по сравнению с используемой в математической практике.

Пример. Сложение натуральных чисел.

знаки	$\mid \; + \; =$
вспомогательный знак	N
переменные	$x \; y$
схемы	$N \; \dfrac{Nx}{Nx\mid} \; \dfrac{Nx \; Ny}{x+y=xy}.$

Пример. Умножение натуральных чисел.

знаки	$\mid \; \cdot \; =$
вспомогательный знак	N
переменные	$x \; y \; z$
схемы	$N \; \dfrac{Nx}{Nx\mid} \; \dfrac{Nx}{x\cdot =} \; \dfrac{x\cdot y=z}{x\cdot y\mid =xz}.$

Пример. Факториал.

знаки	$\mid \; ! \; =$
вспомогательные знаки	N
переменные	$x \; y \; z$
схемы	$! = \mid \; \dfrac{x! = y \quad x\mid \cdot y = z}{x\mid ! = z}$

вместе со схемами из предыдущего примера.

Пример. Лексикографически следующий.

знаки	$\alpha_1 \ldots \alpha_p \; F$
вспомогательный знак	A
переменные	$x \; y$
схемы	$A \; \dfrac{Ax}{Ax\alpha_1} \ldots \dfrac{Ax}{Ax\alpha_p} \; F\alpha_1 \; \dfrac{Ax}{x\alpha_1 Fx\alpha_2} \ldots \dfrac{Ax}{x\alpha_{p-1}Fx\alpha_p} \; \dfrac{xFy}{x\alpha_p Fy\alpha_1}.$

Пример. Лексикографическая гёделевская нумерация.

знаки	$\mid\ \alpha_1 \ldots \alpha_p\ G$
вспомогательные знаки	$A\ F$
переменные	$x\ y\ z$
схемы	$G\ \dfrac{xGy\ \ yFz}{x \mid Gz}$

вместе со схемами из предыдущего примера.

Область определения рекурсивно перечислимого отношения между словами в $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ и словами в $\beta_1 \ldots \beta_q$ — это рекурсивно перечислимое множество, получаемое с помощью нанесения метки R на схемы рассматриваемого отношения и добавления новых схем

$$A\ \frac{Ax}{Ax\alpha_1} \ldots \frac{Ax}{Ax\alpha_p}\quad B\ \frac{Bx}{Bx\beta_1} \ldots \frac{Bx}{Bx\beta_q}\quad \frac{Ax\ Rx,y\ \ By}{x}.$$

Аналогичным образом мы получаем *область значений*, заменяя последнюю схему на

$$\frac{Ax\ Rx,y\ \ By}{y}.$$

Если область определения частично рекурсивной функции, перерабатывающей слова в $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ в слова в $\beta_1 \ldots \beta_q$, есть множество всех слов в $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, то эта функция называется *общерекурсивной функцией или всюду определенным алгорифмом.*

Образ рекурсивно перечислимого множества слов в $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ относительно рекурсивно перечислимого отношения между словами в $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ и словами в $\beta_1 \ldots \beta_q$ определяется схемами

$$A\ \frac{Ax}{Ax\alpha_1} \ldots \frac{Ax}{Ax\alpha_p}\quad B\ \frac{Bx}{Bx\beta_1} \ldots \frac{Bx}{Bx\beta_q}\quad \frac{Ax\ Ex\ Rx,y\ \ By}{y}$$

вместе со схемами отображаемого множества, отмеченными символом E, и схемами рассматриваемого отношения, отмеченными символом R. *Прообраз*

получается тем же способом, только последняя схема заменяется на

$$\frac{Ax \quad Rx,y \quad By \quad Ey}{x}.$$

Пусть R — рекурсивно перечислимое отношение между словами в $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ и словами в $\beta_1 \ldots \beta_q$ и S — рекурсивно перечислимое отношение между словами в $\beta_1 \ldots \beta_q$ и словами в $\gamma_1 \ldots \gamma_r$. *Композиция* отношений R и S определяется схемами

$$A \quad \frac{Ax}{Ax\alpha_1} \cdots \frac{Ax}{Ax\alpha_p} \qquad B \quad \frac{Bx}{Bx\beta_1} \cdots \frac{Bx}{Bx\beta_q}$$

$$C \quad \frac{Cx}{Cx\gamma_1} \cdots \frac{Cx}{Cx\gamma_r} \qquad \frac{Ax \quad Rx,y \quad By \quad Sy,z \quad Cz}{x,\ z}$$

вместе с отмеченными схемами R и S.

Наконец, *обращение* рекурсивно перечислимого отношения R — это рекурсивно перечислимое отношение, получаемое добавлением схем

$$A \quad \frac{Ax}{Ax\alpha_1} \cdots \frac{Ax}{Ax\alpha_p} \qquad B \quad \frac{Bx}{Bx\beta_1} \cdots \frac{Bx}{Bx\beta_q} \qquad \frac{Ax \quad Rx,y \quad By}{y,x}$$

к схемам, отмеченным символом R.

4. Исчисление равенств

Первое точное определение эффективно вычислимой функции принадлежит Эрбрану и Гёделю [3]. Их идея состояла в попытке найти наиболее общий вид рекурсивных определений теоретико-числовых функций.

Пример. Сложение φ и умножение ψ натуральных чисел могут быть определены через 0 и функцию следования σ посредством следующих равенств, написанных в бесскобочной символике

$$\varphi\xi 0 = \xi \qquad \psi\xi 0 = 0$$

$$\varphi\xi\sigma\eta = \sigma\varphi\xi\eta \quad \psi\xi\sigma\eta = \varphi\psi\xi\eta\xi.$$

Здесь ξ и η — переменные, пробегающие множество натуральных чисел.

В общем случае мы рассматриваем список *функциональных символов*

$$\varphi_0 = 0 \quad \varphi_1 = \sigma \quad \varphi_2 \ldots \varphi_m = \varphi,$$

с каждым из которых связано неотрицательное число, называемое *числом мест*

$$p_0 = 0 \quad p_1 = 1 \quad p_2 \ldots p_m = p.$$

Как уже отмечено, всегда должен присутствовать функциональный символ 0 с числом мест нуль и одноместный функциональный символ σ для функции следования. Последний функциональный символ φ с числом мест p называется *главным функциональным символом.*

Цифры определяются следующими индуктивными пунктами.

1 0 — цифра.

2 Если n — цифра, то и σn — цифра.

Далее предположим, что дан список *переменных*

$$\xi_1 \ \xi_2 \ \ldots \ \xi_n.$$

Из них и из функциональных символов мы индуктивно строим *термы.*

1 Переменная есть терм.

2 Если $t_1, t_2, \ldots, t_{p_i}$ — термы, то $\varphi_i t_1 t_2 \ldots t_{p_i}$ — терм $(0 \leqslant i \leqslant m)$.

В частности, все цифры являются термами. Если t и u — термы, то $t = u$ — *равенство.* Список функциональных символов и список переменных вместе с конечным множеством равенств называется *исчислением равенств.*

Для исчисления равенств имеется два *правила вывода.*

1 От данного равенства можно перейти к новому равенству, полученному подстановкой некоторой цифры вместо всех вхождений одной и той же переменной.

2 От равенства E и равенства $\varphi_i n_1 n_2 \ldots n_{p_i} = n$, где $n, n_1, n_2, \ldots, n_{p_i}$ — цифры, можно перейти к

равенству, полученному из E заменой некоторого вхождения терма $\varphi_i n_1 n_2 \ldots n_{p_i}$ на n.

Эти правила называются *подстановкой* и *заменой*. Равенство *выводимо*, если его можно получить из данных равенств с помощью правил вывода.

Если $\varphi n_1 n_2 \ldots n_p = n$ выводимо не более чем для одной цифры n при любом выборе цифр $n_1, n_2, \ldots, n_p$, то мы будем говорить, что рассматриваемое исчисление равенств определяет частично рекурсивную функцию в смысле Эрбрана и Геделя. Мы покажем, что это понятие частично рекурсивной функции не является более общим, чем то, которое мы ввели с помощью канонических систем Поста.

Если дано исчисление равенств, мы можем найти рекурсивно перечислимое множество, элементы которого — это в точности выводимые равенства вида $\varphi n_1 n_2 \ldots n_p = n$, где $n, n_1, \ldots, n_p$ — цифры и φ — главный функциональный символ.

Доказательство достигается путем построения следующей канонической системы.

знаки	$0\ \sigma\ \varphi\ =$
вспомогательные знаки	$\varphi_2 \ldots \varphi_{m-1}\ \xi_1 \ldots \xi_n\ N\ S\ E$
переменные	$t\ u\ v\ w\ x\ x_1\ x_2 \ldots y\ z$
производящие схемы	$N0$ $\qquad \dfrac{Nx}{N\sigma x}$

$$\frac{Nx}{\varphi_i S \varphi_i S \xi_j S x} \qquad \begin{array}{l} i = 0, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

$$\frac{Nx}{\xi_j S x S \xi_j S x} \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\frac{Nx}{\xi_i S \xi_i S \xi_j S x} \qquad \begin{array}{l} i, j = 1, \ldots, n \\ i \neq j \end{array}$$

$$\frac{Nx}{= S = S \xi_j S x} \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\frac{tSvSxSy \quad uSwSxSy}{tuSvwSxSy}$$

равенства данного исчисления равенств, перед которыми вставлена буква E:

$$\frac{Et\ tSuSxSy}{Eu}$$

$$\frac{E\varphi_i x_1 \ldots x_{\rho_i} = x \quad Ey\varphi_i x_1 \ldots x_{\rho_i} z \quad Nx\ Nx_1 \ldots Nx_{\rho_i}}{Eyxz}$$

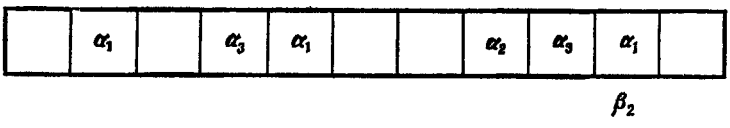
$$i = 0, \ldots, m$$

$$\frac{E\varphi x_1 \ldots x_p = x \quad Nx\ Nx_1 \ldots Nx_p}{\varphi x_1 \ldots x_p = x}.$$

5. Машины Тьюринга

Непосредственный анализ человеческих воможностей в области вычисления привел Поста [1] и Тьюринга [1] к введению определенного типа машин, которые должны имитировать действия человека-вычислителя.

Представим себе ленту, разделенную на ячейки и продолжимую в обоих направлениях сколь угодно далеко. Мы можем печатать на ней *знаки* $\alpha_1 \ldots \alpha_p$, возможно оставляя некоторые ячейки пустыми:



Далее, представим себе машину, которая в любой момент находится в одном из своих *состояний* $\beta_1 \ldots \beta_q$, обозревая одну из ячеек ленты. На рисунке это указывается посредством подписывания состояния машины под обозреваемой ячейкой. Если обозреваемый символ есть α_i (мы пишем α_0 вместо пустого символа) и машина находится в состоянии β_j, она выполняет *инструкцию*, имеющую один из четырех видов:

1 Напечатать $\alpha_k (0 \leqslant k \leqslant p)$ и перейти в состояние $\beta_l (1 \leqslant l \leqslant q)$.

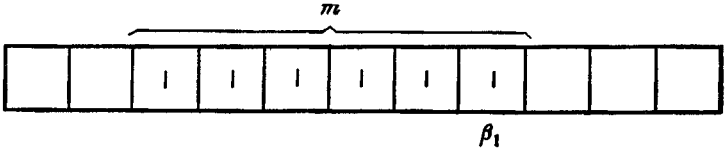
2 Сдвинуться на одну ячейку влево и перейти в состояние β_l.

3 Сдвинуться на одну ячейку вправо и перейти в состояние β_l.

4 Остановиться.

Машина начинает работу в состоянии β_1 с начальными данными, напечатанными на ленте, и работает шаг за шагом в соответствии с приведенными правилами до тех пор, пока не остановится. Результат вычисления — это надпись, оставшаяся на ленте после того, как машина остановилась. Может случиться, что она никогда не остановится.

Мы говорим, что лента обозревается в *стандартной позиции*, если машина обозревает самый правый символ, напечатанный на ленте. Лента, изображенная выше, обозревается в стандартной позиции



Машина только что описанного типа называется *машиной Тьюринга*. Она следующим образом определяет частичную теоретико-числовую функцию (при не уменьшающем общности предположении, что $\alpha_1 = |$). Запустим машину, обозревающую в начальном состоянии β число m в стандартной позиции.

Если машина в конце концов останавливается, обозревая некоторое натуральное число в стандартной позиции, то это натуральное число и есть значение, принимаемое рассматриваемой функцией для аргумента m. Мы покажем, что вычисление, осуществляемое машиной Тьюринга, может быть с тем же успехом выполнено в канонической системе.

Если дана машина Тьюринга, мы можем найти частично рекурсивную функцию F, такую, что $F(m) = n$ тогда и только тогда, когда рассматриваемая машина Тьюринга, запущенная в стандартной позиции, где она обозревает натуральное число m, в конце концов останавливается, обозревая натуральное число n в стандартной позиции.

Следующая система Поста определяет искомую частично рекурсивную функцию:

знаки	$\mid$,
вспомогательные знаки	$\alpha_0\ \alpha_2 \ldots \alpha_p\ \beta_1 \ldots \beta_q\ N$
переменные	$x\ y\ z$
производящие схемы	$N \quad \dfrac{Nx}{Nx\mid} \quad \dfrac{Nx}{x,x\beta_1}$

$$\frac{x,y}{x,y\alpha_0} \quad \frac{x,y}{x,\alpha_0 y} \quad \frac{x,y\alpha_0}{x,y} \quad \frac{x,\alpha_0 y}{x,y}.$$

Для каждой конструкции первого типа мы добавляем схему

$$\frac{x,y\alpha_i\beta_j z}{x,y\alpha_k\beta_l z}.$$

Аналогично инструкция второго типа порождает схему

$$\frac{x,y\alpha_i\beta_j z}{x,y\beta_l\alpha_i z},$$

инструкция третьего типа — схемы

$$\frac{x,y\alpha_i\beta_j\alpha_k z}{x,y\alpha_i\alpha_k\beta_l z} \quad k=0,\ \ldots,\ p,$$

инструкция четвертого типа — схемы

$$\frac{x,\alpha_i\beta_j}{x,\alpha_i} \quad \text{или} \quad \frac{x,y\alpha_i\beta_j}{x,y\alpha_i}$$

в зависимости от того, равно ли i нулю или единице. Для $i=2,\ \ldots,\ p$ инструкция типа 4 вообще не порождает схем.

Мы закончим этот пункт, приведя некоторые соображения в пользу того, что все возможные виды механических вычислений могут быть выполнены на машинах Тьюринга.

Должно быть ясно, что мы не наложим существенных ограничений, допустив, что производим наши вычисления обычным образом с помощью записей чернилами на листах бумаги. Эти листы мы берем настолько большими, чтобы те части наших вычислений, которые мы можем окинуть взглядом, умещались на

одном листе бумаги, лежащем перед нами. Результаты наших предшествующих усилий мы складываем в стопку около стола. Для числа конфигураций на бумаге, находящейся перед нами, которые мы способны отчетливо различить, должна иметься конечная граница, так как иначе нашлись бы сколь угодно мало различающиеся конфигурации. Наше действие в любой определенный момент должно определяться конфигурацией на бумаге перед нами и нашим состоянием ума. В расчет нужно принимать лишь конечное число состояний ума, так как в противном случае среди этих состояний были бы сколь угодно близкие, и это привело бы нас в замешательство. Далее, чтобы не запутаться в стопке бумаг, находящейся рядом с нами, мы пользуемся закладкой для указания положения в стопке того листа, который лежит перед нами. В зависимости от того, что написано на бумаге, лежащей перед нами, и состояния нашего ума мы предпринимаем действия двух возможных типов. Либо мы пишем что-нибудь на бумаге перед нами, либо мы кладем эту бумагу назад в стопку на место закладки и вынимаем из стопки другой лист для исследования. Снизу и сверху стопки подкладывается чистая бумага. Расстояние от закладки до листа, который мы собираемся вынуть, должно определяться конфигурацией на листе, лежащем перед нами, и нашим состоянием ума и тем самым имеет конечную границу. Сделав размер листов достаточно большим, мы можем допустить, что, меняя лист, лежащий перед нами, мы всегда кладем на его место один из соседних листов. Таким образом, ход вычисления разбит на последовательность элементарных действий того типа, который способна выполнять машина Тьюринга.

6. Тезис Чёрча

Чёрч [1] выдвинул тезис о том, что интуитивное понятие эффективности равнообъемно с точным математическим понятием рекурсивности, которое мы ввели. Этот тезис, известный как *тезис Чёрча*, можно рассматривать либо как гипотезу относительно ин-

туитивного понятия эффективности, либо как точную формулировку понятия, которому до сих пор не хватало математической строгости. Используя выражение Поста [1], можно сказать, что оно является фундаментальным открытием относительно границ математических способностей Homo Sapiens.

Мы попытаемся привести некоторые подтверждения тезиса Чёрча. Во-первых, можно спросить, реально ли вообще интуитивное понятие эффективности, так как иначе этот тезис был бы бессмысленным. Психологический факт состоит в том, что многие математики способны развить сильное ощущение понятия эффективности. Например, задолго до зарождения теории рекурсивных функций понятие эффективности использовалось с большой точностью Борелем [1] и Брауэром [2], который основывал на нем многие нетривиальные математические рассуждения.

Одна половина тезиса Чёрча утверждает, что рекурсивно перечислимые множества эффективно перечислимы также в интуитивном смысле. (Мы выбираем понятие рекурсивно перечислимого множества вместо рекурсивной функции в качестве основного понятия рекурсивности.) Это несомненно так: если дано рекурсивно перечислимое множество, то мы можем порождать его элементы один за другим чисто механическим путем, систематически перебирая все доказательства. Один из способов сделать это будет весьма подробно описан в п. 8.

Вторая половина тезиса Чёрча — основная. Она утверждает, что множество, эффективно перечислимое в интуитивном смысле, также и рекурсивно перечислимо. Эффективно перечислимое множество задано предписанием, содержащим конечное число слов и сообщающим нам, как порождать элементы. Мы утверждаем, что такое предписание всегда можно записать в виде канонической системы, которую можно считать чем-то вроде формализованного языка. Мы уже несколько раз демонстрировали, как неформальные предписания, написанные по-русски, могут быть переведены в соответствующим образом построенные канонические языки, и в следующем пункте будет

дано важнейшее применение этой техники. Это должно сделать правдоподобным утверждение о том, что канонические системы достаточно мощны для выражения всех возможных видов эффективных определений.

Другой более формальный тип подтверждений дается тем фактом, что многие сильно различающиеся подходы к понятию вычислимости, например

исчисление равенств	Эрбран и Гёдель
μрекурсивные функции	Клини
λопределимость	Чёрч
вычислительные машины	Тьюринг
канонические системы	Пост
нормальные алгорифмы	Марков

оказались эквивалентными. Это сильное свидетельство в пользу тезиса Чёрча. Мы не показали ни одной из этих эквивалентностей, а установили только, что исчисление равенств и машины Тьюринга могут быть сведены к каноническим системам Поста. Это иллюстрирует технику, нужную для таких доказательств, а также позволяет нам, для подтверждения общности принятого нами определения рекурсивности, опираться на тьюринговский анализ вычислительных возможностей человека, намеченный в предыдущем пункте.

Наконец, имеется эмпирическое подтверждение: за 38 лет, прошедших с тех пор, как был выдвинут тезис Чёрча, не была получена никакая процедура, эффективная по общему признанию, но оказавшаяся нерекурсивной.

7. Универсальная система

Точно так же, как мы говорили об исчислении равенств и машинах Тьюринга внутри соответствующим образом построенных канонических систем, мы начнем сейчас говорить о самих канонических системах внутри системы того же самого типа. Эта возможность автоссылок, впервые использованная Гёделем [2] в его знаменитой работе о неразрешимости аксиоматических теорий, составляет само ядро теории рекурсивных функций.

Мы рассмотрим все рекурсивно перечислимые множества слов в данном алфавите $\alpha_1 \ldots \alpha_p$, т. е. системы Поста, алфавиты которых являются расширениями данного алфавита. Чтобы о них можно было говорить внутри канонической системы, мы должны закодировать их словами в фиксированном алфавите. Оказывается, что подходит алфавит

$$\alpha_1 \ldots \alpha_p\ \beta\xi \to *\ .$$

Заменим каждый вспомогательный знак словом из списка

$$\alpha_1\beta \ \ldots\ \alpha_p\beta\ \alpha_1\beta\beta\ \ldots$$

и переменные — словами

$$\xi\ \xi\beta\ \xi\beta\beta\ \ldots .$$

Таким образом термы станут словами в $\alpha_1 \ldots \alpha_p\beta\xi$. Код определяющей схемы получается, если написать рядом коды всех посылок и код заключения, отделенный знаком $\to$. Наконец, приписывая друг к другу коды схем, разделенные $*$, мы получим код всей системы. Этот код называется *базисом* рассматриваемого рекурсивно перечислимого множества.

Пример. Базис множества чисел, не являющихся простыми, определенного в п. 3:

$$*\,|\beta *\,|\beta\xi \to |\beta\xi\,| * |\beta\xi \to \xi\,|\beta\beta\,|\beta\beta\beta * \xi\,|\beta\beta\xi\beta\,|\beta\beta\beta\xi\beta\beta$$
$$\to \xi\,|\beta\beta\xi\beta\,||\beta\beta\beta\xi\xi\beta\beta * \xi\,|||\beta\beta\xi\beta\,|||\beta\beta\beta\xi\beta\beta \to \xi\beta\beta.$$

Здесь вспомогательные знаки $N\cdot =$ были заменены на $|\beta\ |\beta\beta\ |\beta\beta\beta$ и переменные xyz — соответственно на $\xi\ \xi\beta\ \xi\beta\beta$.

Гёделевский номер рекурсивно перечислимого множества — это лексикографический номер его базиса.

Если рекурсивно перечислимое множество задано в виде своего базиса, то неудобно сначала производить все подстановки, а затем размещать применения схем в форме дерева. Поэтому мы чуть иначе определим понятие доказуемости. В следующих трех индуктивных пунктах мы, говоря о знаках, переменных, термах и схемах, имеем в виду коды этих объектов.

1 Схема, встречающаяся в базисе, доказуема.

2 Если некоторая схема доказуема, то доказуема и схема, получающаяся из нее подстановкой некоторой цепочки знаков вместо переменной.

3 Если доказуемы t и $t \to u$, причем t — терм, то u доказуемо.

Непосредственно проверяется, что слово принадлежит рекурсивно перечислимому множеству тогда и только тогда, когда оно доказуемо из его базиса по этим правилам. Мы готовы теперь к доказательству следующей фундаментальной теоремы.

Существует рекурсивно перечислимое отношение U между натуральными числами и словами в данном алфавите, такое, что mUa тогда и только тогда, когда m есть гёделевский номер рекурсивно перечислимого множества, которому принадлежит a.

Это отношение U будет называться *универсальным* для рекурсивно перечислимых множеств слов в данном алфавите.

Для облегчения чтения мы будем перемежать схемы канонических систем, которые мы собираемся строить, семантическими интерпретациями синтаксических выражений.

знаки $|\ ,\ \alpha_1 \ldots \alpha_p$

вспомогательные знаки $\beta\ \xi \to *\ A\ B\ C\ E\ F\ G\ L\ P\ S\ T\ V\ W$

переменные $t\ u\ v\ w\ x\ y\ z$

схемы

Ax $\quad x$ — слово в $\alpha_1 \ldots \alpha_p$

Lx $\quad x$ — знак или вспомогательный знак

$$A\ \frac{Ax}{Ax\alpha_1} \ldots \frac{Ax}{Ax\alpha_p}\ \ L\alpha_1 \ldots L\alpha_p\ \ \frac{Lx}{Lx\beta}$$

Vx $\quad x$ — переменная

Wx $\quad x$ — цепочка знаков

Tx $\quad x$ — терм

$$V\xi\ \frac{Vx}{Vx\beta}\ \ W\ \frac{Wx\ Ly}{Wxy}\ \ T\ \frac{Tx\ Ly}{Txy}\ \ \frac{Tx\ Vy}{Txy}$$

Px $\quad x$ — схема

Bx $\quad x$ — базис

$$\frac{Tx}{Px}\ \ \frac{Tx\ Py}{Px \to y}\ \ B\ \frac{Bx\ Py}{Bx * y}.$$

$tSuSvSw$ — схема u получена из схемы t в результате подстановки цепочки знаков w вместо переменной v

$$\frac{Lx\ Vy\ Wz}{xSxSySz} \qquad \frac{Vx\ Wy}{xSySxSy} \qquad \frac{Vx\ Vx\beta y\ Wz}{xSxSx\beta ySz}$$

$$\frac{Vx\ Vx\beta y\ Wz}{x\beta ySx\beta ySxSz} \qquad \frac{Vx\ Wy}{\to S \to SxSy} \qquad \frac{tSvSxSy\ uSwSxSy}{tuSvwSxSy}$$

xCy $\quad$ y доказуемо из базиса x

$$\frac{Bx\ Py\ Bz}{x * yzCy} \qquad \frac{xCt\ tSuSvSw}{xCu} \qquad \frac{xCy\ xCy \to z\ Ty}{xCz}$$

Ex $\quad$ x — слово в $\alpha_1 \ldots \alpha_p \beta \xi \to *$

$$E \quad \frac{Ex}{Ex\alpha_1} \cdots \frac{Ex}{Ex\alpha_p} \quad \frac{Ex}{Ex\beta} \quad \frac{Ex}{Ex\xi} \quad \frac{Ex}{Ex \to} \quad \frac{Ex}{Ex *}$$

xFy $\quad$ y лексикографически непосредственно следует за x

xGy $\quad$ x — лексикографический гёделевский номер y

$$F\alpha_1 \quad \frac{Ex}{x\alpha_1 Fx\alpha_2} \cdots \frac{Ex}{x\alpha_p Fx\beta} \quad \frac{Ex}{x\beta Fx\xi} \quad \frac{Ex}{x\xi Fx \to} \quad \frac{Ex}{x \to Fx *}$$

$$\frac{xFy}{x * Fy\alpha_1} \quad G \quad \frac{xGy\ yFz}{x \mid Gz} \quad \frac{xGy\ yGz\ Az}{x, z}.$$

Доказательство закончено.

Рассмотрим теперь частный случай, когда $p = 1$ и $\alpha_1 = |$. Добавляя новую схему

$$\frac{x, x}{x}$$

к схемам, приведенным выше, мы получаем рекурсивно перечислимое множество D натуральных чисел, которое назовем *диагональным множеством*. Оно содержит натуральное число n тогда и только тогда, когда n принадлежит рекурсивно перечислимому множеству с номером n. В частности, если e — гёделевский номер рекурсивно перечислимого множества E, то $e \in D$ тогда и только тогда, когда $e \in E$, т. е. $e \in D \cup E$ влечет за собой $e \in D \cap E$. Отсюда мы заключаем, что не может случиться так, что $D \cap E$ пусто, и в то же время $D \cup E$ равно множеству всех

натуральных чисел. Следовательно, диагональное множество неразрешимо.

Мы построили рекурсивно перечислимое множество натуральных чисел, которое неразрешимо.

Это важное следствие принадлежит Чёрчу [1]. Заметим, что в доказательстве скрыто рассуждение, приводящее к парадоксу Рассела. Действительно, если мы отождествим рекурсивно перечислимое множество с его гёделевым номером, то диагональное множество состоит из всех множеств, которые содержат самих себя. Чтобы доказать разрешимость диагонального множества, мы должны были бы указать рекурсивно перечислимое множество, элементы которого — это в точности те множества, которые не содержатся в себе. Рассуждение Рассела показывает, что допущение существования такого множества ведет к противоречию.

Рассмотрим утверждение

$$\text{для всех } n \text{ либо } n \in D, \text{ либо } n \notin D,$$

которое истинно классически, так как оно немедленно следует из закона исключенного третьего. Интуиционистская интерпретация этого утверждения такова. Мы нашли метод, позволяющий нам доказать либо $n \in D$, либо $n \notin D$, какое бы натуральное n ни было нам дано. При такой интерпретации это утверждение ведет к противоречию, если принять тезис Чёрча. Мы видим, таким образом, что если логическим связкам придан их конструктивный смысл, то закон исключенного третьего больше неприменим. Это фундаментальное обстоятельство было открыто Брауэром [1].

Теорема Чёрча — плод работ двадцатых и тридцатых годов, вызванных уверенностью Гильберта в разрешимости всех математических проблем. Брауэр с самого начала отвергал это утверждение Гильберта. Теперь, если разрешимость понимается в смысле существования эффективной процедуры для доказательства или опровержения любого математического ут-

верждения и если принят тезис Чёрча, то теорема Чёрча усиливает возражение Брауэра до настоящего опровержения.

8. Теорема о перечислении для частично рекурсивных функций

На основную теорему предыдущего пункта мы будем ссылаться как на теорему о перечислении для рекурсивно перечислимых множеств. В дальнейшем нам понадобятся несколько других теорем о перечислении. Все они будут выведены из усиленного варианта теоремы, которую мы уже доказали.

Рассмотрим базис рекурсивно перечислимого множества слов в данном алфавите. Последовательность схем, к которым спереди приписана $*$, считается по определению кодом доказательства из этого базиса, если каждая из этих схем может быть получена из предыдущих с помощью одного из трех правил вывода, приведенных в предыдущем пункте. Номер доказательства определяется как лексикографический гёделевский номер его кода.

Пример. Множество четных чисел, определенное в п. 2, имеет базис

$$* * \xi \to \xi \| ,$$

а

$$* * \xi \to \xi \| * \to \| * \| \to \|\| * \| * \|\|$$

является кодом доказательства того, что четыре — четное число.

Имеется разрешимое отношение V между натуральными числами и общерекурсивная функция W, переводящая натуральные числа в слова в данном алфавите, такие, что mVn тогда и только тогда, когда m есть гёделевский номер некоторого рекурсивно перечислимого множества и n есть номер доказательства некоторого элемента a этого множества, причем в этом случае $W(n) = a$.

Эту теорему можно считать аналогом теоремы Клини о нормальной форме. Она представляет универсальное отношение U в виде композиции разрешимого отношения V и общерекурсивной функции W.

Мы не будем выписывать явно системы Поста, определяющие V и W. Это потребовало бы около сотни схем и не было бы особенно ценно. Вместо этого мы неформально укажем, как узнавать, верно ли mVn, и как вычислять $W(n)$. Сила канонических систем продемонстрирована теперь до такой степени, что перевод наших неформальных инструкций в каноническую форму должен быть чисто рутинным делом. Это не значит, что мы полагаемся на тезис Чёрча. Мы только приводим менее детальные доказательства, чем раньше.

Доказательство теоремы. Пусть $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ — данный алфавит. Сначала проверяем, имеют ли слова в $\alpha_1 \ldots \alpha_p \beta \xi \to *$, соответствующие данным m и n, правильную синтаксическую структуру, т. е. являются ли они последовательностями схем, к каждой из которых приписана впереди звезда. Это так в том и только в том случае, если они начинаются со звезды и никакое β не следует за стрелкой или звездой. Далее мы последовательно проверяем для каждой из схем в последовательности, соответствующей числу n, может ли она быть получена из предыдущих применением одного из трех правил вывода из предыдущего пункта. Если все эти испытания дают положительный результат и если последняя схема последовательности есть слово в $\alpha_1 \ldots \alpha_p$, то mVn. Иначе неверно mVn. Это предписание определяет разрешимое отношение V.

Построение общерекурсивной функции W даже проще. Если n — лексикографический гёделевский номер слова в $\alpha_1 \ldots \alpha_p \beta \xi \to *$, оканчивающегося на $*a$, где a — слово в $\alpha_1 \ldots \alpha_p$, то $W(n) = a$. Иначе полагаем, например, $W(n) = \square$.

Эта теорема важна по той причине, что, как указывается ниже, она позволяет для всякого m порождать в определенном порядке элементы рекурсивно пере-

числимого множества, гёделевский номер которого есть m

n	mVn?	
0	нет	
1	нет	
.	.	
.	.	
.	.	
n_0	да	$W(n_0) = a_0$
.	.	
.	.	
.	.	
n_1	да	$W(n_1) = a_1$
.	.	
.	.	
.	.	

Очень простое применение этой техники влечет следующий конструктивный принцип выбора.

Если дано рекурсивно перечислимое отношение R, мы можем найти частично рекурсивную функцию F с той же областью, такую, что $F(a) = b$ влечет за собой aRb.

Достаточно порождать элементы a_i, b_i, принадлежащие R, $i = 0, 1, \ldots$, описанным выше способом и определить $F(a_i) = b_i$, если $a_i \neq a_j$ для всех $j < i$.

Более важна теорема о перечислении для частично рекурсивных функций, преобразующих слова в одном алфавите $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ в слова в другом алфавите $\beta_1 \ldots \beta_q$.

Существует частично рекурсивная функция $U(m, a)$, такая, что если m есть гёделевский номер частично рекурсивной функции F, то $U(m, a) = b$ тогда и только тогда, когда $F(a) = b$.

Частично рекурсивная функция рассматриваемого нами типа есть по определению рекурсивно перечислимое множество слов в $\alpha_1 \ldots \alpha_p$, $\beta_1 \ldots \beta_q$, имеющее определенные свойства. Мы уже доказали теорему о перечислении для класса всех рекурсивно перечислимых множеств слов в этом алфавите. Затруднение

в том, что не все они — функции. Пусть дано произвольное натуральное число m, и мы порождаем последовательно элементы $c_0, c_1, \ldots, c_i \ldots$ того множества, гёделевский номер которого равен m, если такие имеются. Если c_i имеет вид a_i, b_i, где a_i и b_i — слова в $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ и $\beta_1 \ldots \beta_q$ соответственно, и свойство функциональности еще не нарушено, т. е. $a_i = a_j$ для некоторых $j < i$ влечет $b_i = b_j$, мы полагаем $U(m, a_i) = b_i$. Так определенное U — очевидным образом частично рекурсивная функция, и если m уже было гёделевским номером некоторой частично рекурсивной функции F, то $U(m, a) = b$ тогда и только тогда, когда $F(a) = b$. Доказательство закончено.

Построенная функция U называется *универсальной* для частично рекурсивных функций рассматриваемого нами типа.

9. Теоремы об итерации

Мы докажем, что произвольная рекурсивная нумерация рекурсивно перечислимых множеств может быть в определенном смысле сведена к универсальной нумерации.

Пусть R — рекурсивно перечислимое отношение между натуральными числами и словами в данном алфавите. Тогда можно найти общерекурсивную функцию S, такую, что R равно композиции S и универсального отношения U.

Эту теорему мы назовем теоремой об итерации для рекурсивно перечислимых множеств.

Доказательство. Рассмотрим алфавит $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ и запишем схемы данного отношения, отмеченные знаком R, и, кроме того, схемы

$$A \quad \frac{Ax}{Ax\alpha_1} \cdots \frac{Ax}{Ax\alpha_p} \quad \frac{\overbrace{R\,|||\,..\,||,}^{m}x \quad Ax}{x}$$

Пусть $S(m)$ — гёделевский номер этого рекурсивно перечислимого множества. Тогда S — общерекурсивная функция, удовлетворяющая условиям теоремы.

Действительно, если $S(m)=n$, то mRa тогда и только тогда, когда nUa, что как раз и означает, что R равно композиции S и U.

Теорема об итерации для частично рекурсивных функций столь же проста.

Если дана частично рекурсивная функция $F(m, a)$, то мы можем найти общерекурсивную функцию S, такую, что $F(m, a)=U(S(m), a)$, где U — универсальная функция.

По аналогии с доказательством предыдущей теоремы мы полагаем $S(m)$ равным гёделевскому номеру сечения F в точке m.

10. Рекурсивная неотделимость

Говорят, что два рекурсивно перечислимых множества A и B рекурсивно *отделимы*, если можно найти рекурсивное множество C, такое, что $A \subseteq C$ и $B \cap C$ пусто.

Существует пара дизъюнктных рекурсивно перечислимых множеств натуральных чисел, которые не могут быть рекурсивно отделены.

Если два дизъюнктных рекурсивно перечислимых множества не могут быть рекурсивно отделены, то ни одно из них не рекурсивно. Поэтому приведенная выше теорема усиливает теорему Чёрча о существовании рекурсивно перечислимого множества, которое не рекурсивно.

Доказательство. Допустим, что уже доказано существование рекурсивной нумерации всех пар дизъюнктных рекурсивно перечислимых множеств натуральных чисел,

$$A_n, B_n, \quad n=0, 1, \ldots.$$

Пусть A и B — рекурсивно перечислимые множества, элементами которых являются соответственно те числа n, для которых $n \in A_n$, $n \in B_n$. Так как A_n и B_n

дизъюнктны для любого n, то A и B также дизъюнктны. Мы покажем, что A и B не могут быть рекурсивно отделены. Действительно, допустим, что $A \subseteq C$ и $D \supseteq B$, где C и D — дизъюнктные рекурсивно перечислимые множества, объединение которых есть множество всех натуральных чисел. Так как D, C — пара дизъюнктных рекурсивно перечислимых множеств, мы можем найти n, такое, что $A_n = D$ и $B_n = C$. Теперь $n \in C = B_n$ влечет $n \in B \subseteq D$, и $n \in D = A_n$ влечет $n \in A \subseteq C$. Так как либо $n \in C$, либо $n \in D$ и $C \cap D$ пусто, мы пришли к противоречию.

Остается построить рекурсивную нумерацию всех пар дизъюнктных рекурсивно перечислимых множеств натуральных чисел. Мы уже доказали теорему о нумерации для рекурсивно перечислимых множеств. С помощью рекурсивного взаимно однозначного соответствия между натуральными числами и парами натуральных чисел мы получаем отсюда рекурсивную нумерацию всех пар (не обязательно дизъюнктных) рекурсивно перечислимых множеств. Теперь мы сделаем их дизъюнктными с помощью рекурсивной процедуры модификации, которая не трогает те пары, которые были дизъюнктны с самого начала.

Пусть A и B образуют произвольную пару рекурсивно перечислимых множеств. Порождаем последовательно их элементы методом, указанным в п. 8, так что

$$a_0, a_1, \ldots, a_{i_n}$$

и

$$b_0, b_1, \ldots, b_{j_n}$$

— элементы, полученные из доказательств с номерами $\leqslant n$. Мы поступаем так, пока имеет место $a_i \neq b_j$ для всех $i \leqslant i_n$ и $j \leqslant j_n$. Если это условие нарушено для некоторого значения n, то процедура модификации заканчивается, и модифицированные A и B состоят из элементов, полученных к этому моменту. Ясно, что если A и B дизъюнктны с самого начала, то они остаются неизменными после модификации. Доказательство закончено.

11. Теорема Клини о неподвижной точке

Для доказательства рекурсивности некоторых операций в теории конструктивных ординалов Клини [1] доказал важную теорему, которую обычно называют теоремой о рекурсии или теоремой Клини о неподвижной точке.

Рассмотрим два алфавита, и пусть U — универсальна для частично рекурсивных функций, переводящих слова из первого алфавита в слова из второго, т. е. $U(n, a) = b$, если функция с гёделевским номером n, будучи применена к аргументу a, дает значение b.

Для данной частично рекурсивной функции $F(n, a)$ мы можем найти натуральное число f, называемое неподвижной точкой, такое, что $F(f, a) = b$ тогда и только тогда, когда $U(f, a) = b$.

Рассмотрим сначала вопрос о нахождении какой-нибудь функции U, имеющей свойство, сформулированное в теореме. Очевидный путь решения состоит в рассмотрении универсальной функции V для частично рекурсивных функций от двух переменных и извлечении диагональной функции. Таким образом, $V(m, n, a) = b$, если функция с гёделевским номером m и аргументами n, a принимает значение b, и мы утверждаем, что $V(n, n, a)$ подходит в качестве функции U из формулировки теоремы. Действительно, вычислим гёделевский номер f функции F. Тогда $F(n, a) = V(f, n, a)$, так что $F(f, a) = V(f, f, a)$, что и требовалось.

Остается показать, что и сама U обладает этим свойством. Пусть $S(m, n)$ есть гёделевский номер сечения функции V в m, n, так что $V(m, n, a) = U(S(m, n), a)$. Существование такой общерекурсивной функции S следует из теоремы об итерации, которая несколько отлична от уже сформулированных нами, но доказывается точно тем же путем. Рассмотрим вспомогательную функцию $G(n, a) = F(S(n, n), a)$ и вычислим ее гёделевский номер g. Тогда $f = S(g, g)$

и есть искомая неподвижная точка, так как

$$F(f, a) = F(S(g, g), a) = G(g, a) = V(g, g, a) = \\ = U(S(g, g), a) = U(f, a).$$

Теорему о неподвижной точке можно понимать следующим образом. Допустим, что при определении значения, которое некоторая частично рекурсивная функция должна принять для некоторого аргумента, мы ссылаемся не только на этот аргумент, но и на гёделевский номер функции, которую собираемся определить. Точнее, величина функции для аргумента a будет равна $F(n, a)$, где n — гёделевский номер самой функции, а F — данная частично рекурсивная функция. Такое определение имеет непредикативный характер, и не сразу ясно, что можно заставить некоторую частично рекурсивную функцию удовлетворять ему. Теорема Клини о неподвижной точке говорит нам, что это тем не менее так. Действительно, при несколько некорректной записи функция $f(a) = F(f, a) = U(f, a)$ имеет все требуемые свойства.

Соответствующая теорема для рекурсивно перечислимых множеств известна как теорема Майхилла о неподвижной точке.

Для данного рекурсивно перечислимого отношения R между натуральными числами и словами в данном алфавите мы можем найти неподвижную точку f, такую, что fRa тогда и только тогда, когда fUa, где U — универсальное отношение.

Доказательство во всех деталях аналогично только что приведенному.

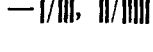
Пример. Чтобы найти натуральное число f, которое является гёделевским номером рекурсивно перечислимого множества с единственным элементом f, достаточно применить теорему Майхилла о неподвижной точке к отношению равенства R между натуральными числами. Заметим, что уже в этом простом случае не ясно, как найти f без обращения к теореме о неподвижной точке.

ГЛАВА 2

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ КОНСТРУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ

12. Окрестности, аппроксимации и конструктивные точки

Окрестности на *вещественной прямой* будут синтаксическими выражениями вида a, b, где a и b — рациональные числа, такие, что $a < b$. (Арифметика и отношения порядка между рациональными числами разрешимы, и мы будем их использовать без дальнейших пояснений.) Например,



есть окрестность. Окрестность $I = a, b$ *тоньше*, чем окрестность $J = c, d$, если $c < a < b < d$. I и J *отделены*, если $b < c$ или $d < a$.

Если a_i, b_i является окрестностью на вещественной прямой для $i = 1, \ldots, n$, то $a_1, b_1 \times \ldots \times a_n, b_n$ — окрестность в *n-мерном евклидовом пространстве*. $I = a_1, b_1 \times \ldots \times a_n, b_n$ тоньше, чем $J = c_1, d_1 \times \ldots \times c_n, d_n$, если $c_i < a_i < b_i < d_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$. I отделена от J, если a_i, b_i отделена от c_i, d_i для некоторого $i = 1, \ldots, n$.

В *пространстве Кантора* мы берем в качестве окрестностей все конечные цепочки знаков 0 и |. $I = d_1 d_2 \ldots d_k$ тоньше, чем $J = e_1 e_2 \ldots e_l$, если $k \geqslant l$ и $d_1 = e_1, \ldots, d_l = e_l$. I и J отделены, если $d_i \neq e_i$ для некоторого $i \leqslant \min(k, l)$.

Окрестность в *бэровском пространстве* — это конечная последовательность натуральных чисел, $n_1, n_2, \ldots, n_l$, разделенных запятыми. Натуральное число l называется длиной этой окрестности. □ — единственная окрестность, для которой $l = 0$. Отношения отделенности и «быть тоньше» определяются в бэровском пространстве точно так же, как в канторовском.

В канторовском и бэровском пространствах любые две окрестности либо отделены, либо одна из них тоньше другой.

Применяя терминологию Лакомба [1], мы будем называть рекурсивно перечислимое множество a окрестностей *аппроксимацией*, если оно удовлетворяет следующим двум условиям. Мы предпочитаем говорить, что I есть окрестность (*аппроксимации*) a, вместо того чтобы говорить, что I принадлежит рекурсивно перечислимому множеству a.

1 Если I тоньше J и I есть окрестность a, то J есть окрестность a.

2 Если I и J — окрестности a, то мы можем найти окрестность a, которая тоньше I и J.

Окрестности погружаются в аппроксимации путем сопоставления окрестности I множества всех окрестностей J, таких, что I тоньше J.

Аппроксимации могут быть рекурсивно перечислены.

Точнее, мы построим рекурсивно перечислимое отношение U между натуральными числами и окрестностями, такое, что для любого n сечение U числом n есть аппроксимация и любая аппроксимация может быть получена таким образом.

Доказательство для вещественной прямой. Аппроксимация — это по определению рекурсивно перечислимое множество слов в четырехбуквенном алфавите $| - /$, удовлетворяющее двум приведенным выше условиям. Мы уже построили рекурсивную нумерацию всех перечислимых множеств слов в этом алфавите. Таким образом, достаточно описать рекурсивную процедуру, превращающую любое такое множество в аппроксимацию и оставляющую неизменными те рекурсивно перечислимые множества, которые уже удовлетворяют этим двум условиям.

Итак, возьмем произвольное рекурсивно перечислимое множество слов в рассматриваемом алфавите и будем порождать его элементы $I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ в определенном порядке. Для любого натурального n, если $I_0, I_1, \ldots, I_n$ все являются окрестностями и

$I = I_0 \cap I_1 \cap \ldots \cap I_n$ непусто, то модифицированное множество должно содержать все окрестности J, такие, что I тоньше, чем J. Если модифицированное множество определено таким образом, то ясно, что оно — аппроксимация и что множество, которое уже удовлетворяет определяющим условиям для аппроксимации, не изменяется процедурой модификации. Доказательство закончено.

Аппроксимация a называется *максимальной*, если для любой пары окрестностей I и J, таких, что I тоньше J, либо I отделена от некоторой окрестности a, либо J есть окрестность a. Максимальные аппроксимации образуют *конструктивные точки* рассматриваемого пространства.

Пространства, введенные до сих пор, допускают естественное вычисление диаметров окрестностей. Обозначая диаметр окрестности I через $d(I)$, мы полагаем

$$I = a,b \qquad d(I) = b - a$$

$$I = a_1,b_1 \times \ldots \times a_n,b_n \qquad d(I) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (b_i - a_i)$$

$$I = e_1 e_2 \ldots e_l \qquad d(I) = 2^{-l}$$

$$I = , n_1, n_2, \ldots, n_l \qquad d(I) = 2^{-l}$$

Аппроксимация максимальна тогда и только тогда, когда она содержит окрестности произвольно малого диаметра.

Доказательство для вещественной прямой. Достаточность. Пусть $I = a, b$ тоньше $J = c, d$. Найдем окрестность рассматриваемой аппроксимации с диаметром, меньшим $\min(a - c, d - b)$. Она должна быть либо отделена от I, либо быть тоньше J.

Необходимость. Максимальная аппроксимация наверняка имеет хотя бы одну окрестность. Поэтому достаточно показать, что если a, b — такая окрестность, то такова же $a, (a + 2b)/3$ или $(2a + b)/3, b$. Во-первых, мы можем найти окрестность c, d нашей аппроксимации, которая тоньше a, b. Затем мы можем применить условие максимальности к $c, (2a + 3b)/5$ и

a, $(a+2b)/3$, а также к $(3a+2b)/5$, d и $(2a+b)/3$, b. Обе окрестности c, $(2a+3b)/5$ и $(3a+2b)/5$, d не могут быть отделены от некоторых окрестностей из аппроксимации, так как отсюда следовало бы то же для c, d. Следовательно, либо a, $(a+2b)/3$, либо $(2a+b)/3$, b является окрестностью нашей аппроксимации.

Пусть a и b — две конструктивные точки. Введем следующие определения.

$a = b$, если любая окрестность a налегает на любую окрестность b.

$a \neq b$, если можно найти окрестность a и окрестность b, которые отделены.

Мы покажем, что две конструктивные точки равны в смысле приведенного определения тогда и только тогда, когда они равны как рекурсивно перечислимые множества.

Две конструктивные точки равны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же окрестности.

Доказательство для канторовского и бэровского пространств. Необходимость. Допустим, что $a = b$, и пусть I — окрестность a. Так как a — максимальная аппроксимация и I не отделена от окрестности b, то I является в действительности окрестностью b. По симметрии, любая окрестность b есть также окрестность a. Достаточность этого условия очевидна.

Под *последовательностью* аппроксимаций мы понимаем рекурсивно перечислимое отношение A между натуральными числами и окрестностями, такое, что сечение A в n есть аппроксимация (которую мы обозначим через a_n) для любого $n = 0, 1, \ldots$.

Последовательность аппроксимаций

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$$

сходится к аппроксимации a, если для любой окрестности I аппроксимации a мы можем найти настолько большое N, что I есть окрестность a_n для всех $n \geqslant N$. Любая последовательность аппроксимаций сходится к пустой аппроксимации. Если последовательность сходится к двум максимальным аппроксимациям, то

они обязательно равны. Последовательность аппроксимаций называется *сходящейся*, если мы можем найти максимальную аппроксимацию, к которой она сходится.

Мы будем говорить, что последовательность аппроксимаций

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$$

есть *последовательность Коши*, если для любых окрестностей I и J, таких, что J тоньше I, мы можем найти N и доказать, либо что I есть окрестность a_n для всех $n \geqslant N$, либо что J отделена от некоторой окрестности, общей для всех a_n при $n \geqslant N$. Так как мы провели диаметризацию окрестностей в рассматриваемых пространствах, определение последовательности Коши можно несколько упростить. Достаточно потребовать, чтобы для любого m мы могли найти окрестность I и натуральное число N, такие, что $d(I) \leqslant 2^{-m}$ и I есть окрестность a_n для всех $n \geqslant N$.

Последовательность аппроксимаций сходится тогда и только тогда, когда она — последовательность Коши.

Доказательство для канторовского и бэровского пространства. Необходимость этого условия очевидна, поэтому допустим, что $a_0, a_1 \ldots$ — последовательность Коши. Это значит, что для любой окрестности I мы можем найти N и доказать, что либо I есть окрестность a_n для всех $n \geqslant N$, либо I отделена от окрестности, общей всем a_n для $n \geqslant N$. Пусть a состоит из всех окрестностей I, для которых решено, что имеет место первый случай. Тогда, как легко проверить, a — максимальная аппроксимация, к которой последовательность сходится.

13. Парадокс Ришара и неперечислимость континуума

Рассмотрим вещественные числа, которые могут быть определены конечным множеством слов русского языка. Определение такого числа — это цепочка

букв из алфавита

$$а, б, \ldots, я, \ . \ ! \ ? \ 1 \ 2 \ \ldots \ 9,$$

содержащего около пятидесяти букв. Все такие цепочки могут быть перечислены одна за другой, например, в лексикографическом порядке. Удалим из этого списка каждую цепочку, не являющуюся осмысленным предложением русского языка, определяющим вещественное число. Пусть a_0, a_1, ... обозначают числа, определяемые остающимися предложениями, взятыми в том порядке, в котором они стоят. Каждое из них может быть разложено в десятичную дробь

$$\begin{aligned} a_0 &= n_0 . d_{00} d_{01} \ldots d_{0l} \ldots \\ a_1 &= n_1 . d_{10} d_{11} \ldots d_{1l} \ldots \\ &\vdots \\ a_k &= n_k . d_{k0} d_{k1} \ldots d_{kl} \ldots . \\ &\vdots \end{aligned}$$

Теперь положим

$$d_k = \begin{cases} 5, & \text{если } d_{kk} \leqslant 4, \\ 4, & \text{если } d_{kk} \geqslant 5 \end{cases}$$

и определим вещественное число a разложением

$$a = 0 . d_0 d_1 \ldots d_k \ldots \ .$$

Это число было определено конечным числом слов, а именно теми словами из этого пункта, которые были до сих пор написаны. Тем не менее оно не содержится в приведенной выше нумерации всех чисел, определимых конечным множеством слов. Это парадокс Ришара [1].

Этот парадокс был частично объяснен самим Ришаром, который заметил, что определение критического числа a носит непредикативный характер. Действительно, определяя a конечным числом слов, мы

ссылаемся на совокупность всех чисел, определимых конечным числом слов. Более глубокий анализ был дан Борелем [1]. Он указал, что процесс выбрасывания тех цепочек символов, которые не определяют вещественных чисел, не может быть проведен эффективно и множество всех вещественных чисел, определимых конечным числом слов, не является эффективно перечислимым, хотя оно и счетно в теоретико-множественном смысле, будучи подмножеством счетного множества всех слов в конечном алфавите. Этот пример показывает, как заметил Борель, что классическая теорема о счетности подмножества счетного множества не имеет места, если счетность заменить эффективной перечислимостью.

Мы сейчас используем рассуждение из парадокса Ришара для доказательства того, что конструктивные точки континуума не могут быть эффективно перечислены. Это конструктивная версия знаменитой теоремы Кантора.

Если дана последовательность конструктивных точек $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$, мы можем найти конструктивную точку a, такую, что $a_k \neq a$ для всех $k = 0, 1, \ldots$.

Допустим, что

$$\begin{aligned} a_0 &= e_{00}e_{01} \ldots e_{0l} \ldots \\ a_1 &= e_{10}e_{11} \ldots e_{1l} \ldots \\ &\vdots \\ a_k &= e_{k0}e_{k1} \ldots e_{kl} \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

— последовательность конструктивных точек канторовского пространства. Полагая $e_k = 1 - e_{kk}$, мы получаем конструктивную точку

$$a = e_0e_1 \ldots e_k \ldots ,$$

которая отличается от a_k для всех $k = 0, 1, \ldots$.

В бэровском пространстве для данной последовательности конструктивных точек

$$a_0 = ,n_{00},n_{01} \ldots ,n_{0l} \ldots$$
$$a_1 = ,n_{10},n_{11} \ldots ,n_{1l} \ldots$$
$$\vdots$$
$$a_k = ,n_{k0},n_{k1} \ldots ,n_{kl} \ldots ,$$
$$\vdots$$

мы строим новую точку

$$a = ,n_0,n_1 \ldots ,n_k \ldots ,$$

где $n_k = n_{kk} + 1$.

Наконец допустим, что дана последовательность конструктивных точек $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ на вещественной прямой. Пусть J_0 — окрестность a_0, и выберем I_0, отделенную от J_0, такую, что $d(I_0) \leqslant 1$. Допустим, что уже определена I_{k-1}. Найдем окрестность J_k точки a_k с $d(J_k) < d(J_{k-1})$, а затем I_k, более тонкую, чем I_{k-1}, и такую, что $d(I_k) < 2^{-k}$ и I_k отделена от J_k. Последовательность $I_0, I_1, \ldots, I_k$ сходится к конструктивной точке a, которая обладает искомым свойством $a_k \neq a$ для всех k. Для многомерного евклидова пространства доказательство то же самое.

14. Вычислимые вещественные числа

Конструктивная точка на вещественной прямой будет называться *вычислимым вещественным числом*.

Рациональные числа можно естественным образом вложить в конструктивные вещественные числа. Рациональному числу $r = p/q$ мы сопоставляем рекурсивно перечислимое множество всех окрестностей $I = a, b$, таких, что $a < r < b$. Вычислимое вещественное число называется *рациональным*, если мы можем найти равное ему рациональное число. Оно *иррационально*, если для любого рационального числа

$r = p/q$ мы можем найти его окрестность $I = a, b$, такую, что $r < a$ или $b < r$.

Примерами вычислимых иррациональных чисел являются $\sqrt{2}$, e и π. $\sqrt{2}$ можно определить как рекурсивно перечислимое множество всех рациональных интервалов $I = a, b$, таких, что или $a < 0$ или $a^2 < 2$ и $b > 0$ и $b^2 > 2$. Чтобы определить e и π, можно использовать обычные разложения в ряды

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots ,$$

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right).$$

Эти ряды имеют смысл, так как частичные суммы являются даже рациональными числами, и легко проверить, что они конструктивно сходятся.

Отношения порядка между вычислимыми вещественными числами вводятся следующим образом.

$a < b$, если мы можем найти окрестность I точки a и окрестность J точки b, такие, что правый конец I меньше левого конца J.

$a \leqslant b$, если для всех окрестностей I точки a и J точки b левый конец I меньше, чем правый конец J.

Теперь очевидны следующие эквивалентности:

$a \neq b$ тогда и только тогда, когда $a < b$ или $a > b$.

$a = b$ тогда и только тогда, когда $a \leqslant b$ и $a \geqslant b$.

Первое определение понятия вычислимого вещественного числа было дано Тьюрингом [2]. Согласно ему, вещественное число вычислимо, если оно может быть представлено в виде

$$(2i - 1)n + \sum_{r=1}^{\infty} (2c_r - 1)\left(\frac{2}{3}\right)^r,$$

где бинарная последовательность

$$\underbrace{i \parallel \ldots \rfloor}_{n}\ 0\ c_1\ c_2 \ldots c_r \ldots$$

вычислима на машине Тьюринга. Разумеется, с конструктивной точки зрения вычислимое вещественное число есть не что иное, как сама машина Тьюринга.

Если последовательность $i \| \ldots | 0c_1c_2 \ldots c_r \ldots$ вычислима на машине Тьюринга, то она рекурсивна и потому определяет вычислимое вещественное число в смысле нашего определения. Обратно, данное вычислимое вещественное число нетрудно представить в указанном выше виде посредством рекурсивной бинарной последовательности. Чтобы завершить доказательство эквивалентности нашего и тьюринговского определений, достаточно таким образом показать, что любая рекурсивная бинарная последовательность вычислима на машине Тьюринга. Как замечено в связи с тезисом Чёрча, это действительно так, хотя мы и не прилагали усилий, чтобы доказать это.

15. Результаты о неразрешимости для вычислимых вещественных чисел

Тьюринг [1] сначала ввел определение вычислимого вещественного числа как такого числа, для которого на машине Тьюринга вычислимо двоичное разложение его дробной части. Но, как он скоро понял, нет способа вычислять двоичное разложение любого конструктивного вещественного числа в смысле нашего определения. Именно этот факт заставил заменить исходное определение на приведенное в предыдущем пункте и использующее налегающие интервалы вместо прилегающих. Невозможность вычисления десятичного разложения любого вещественного числа была впервые осознана Брауэром [4], и использование налегающих интервалов восходит к нему.

Мы докажем сначала несколько более слабый результат, имеющий место для всех рассматриваемых нами пространств.

Невозможно распознать для любых двух конструктивных точек a и b, верно ли $a = b$ или $a \neq b$.

Доказательство для канторовского пространства. Рассмотрим диагональное множество D, которое рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно, и положим $e_{mn} = 0$ или 1 в зависимости от того, является ли n

номером доказательства m в D, т. е. в символике п. 8.

$$e_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{если } mVn \text{ и } W(n) = m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть 0 обозначает точку канторовского пространства, все знаки которой равны нулю, и положим

$$a_m = e_{m0}e_{m1} \ldots e_{mn} \ldots$$

для $m = 0, 1, \ldots$. Тогда $m \in D$ или $m \notin D$ в зависимости от того, что имеет место: $a_m \neq 0$ или $a_m = 0$. Поэтому если бы мы могли решить для любого m, что имеет место $a_m \neq 0$ или $a_m = 0$, то D было бы разрешимо, что дает противоречие.

Нет алгорифма, который для любого вычислимого вещественного числа a говорит нам, что имеет место: $a \leqslant 0$ или $a > 0$.

По аналогии с предыдущим доказательством мы полагаем

$$a_m = \sum_{n=0}^{\infty} e_{mn} 2^{-n},$$

так что $a_m \leqslant 0$ или $a_m > 0$ в зависимости от того, $m \notin D$ или $m \in D$. Таким образом, мы имели бы разрешающую процедуру для D, если бы могли доказать либо $a \leqslant 0$, либо $a > 0$ для любого вычислимого вещественного числа.

Невозможен алгорифм, вычисляющий необрывающееся десятичное разложение любого вычислимого вещественного числа.

Разумеется, эта теорема, принадлежащая Тьюрингу [2], имеет место также, если выбрать любое основание системы счисления, отличное от 10. Допустим, что имеется алгорифм разложения любого вычислимого вещественного числа в десятичную дробь:

$$a = n + \sum_{k=0}^{\infty} d_k 10^{-k-1}, \quad n = 0, \pm 1, \ldots, \quad 0 \leqslant d_k \leqslant 9,$$
$$k = 0, 1, \ldots,$$

такую, что $d_k > 0$ для бесконечно многих k. Тогда $a \leqslant 0$ или $a > 0$ в зависимости от того, $n \leqslant -1$ или $n \geqslant 0$, так что мы имеем противоречие с предыдущей теоремой.

Теперь мы покажем, что невозможно вычисление какого бы то ни было обрывающегося или нет десятичного разложения любого вычислимого вещественного числа. Это — простое следствие теоремы, которую можно найти, например, у Цейтина [1].

Нет рекурсивной процедуры, которая доказывала бы либо $a \leqslant 0$, либо $a \geqslant 0$ для любого вычислимого вещественного числа a.

Пусть A и B — два дизъюнктных рекурсивно перечислимых множества натуральных чисел, которые не могут быть рекурсивно отделены. Свяжем с A общерекурсивную функцию f, определенную соотношением

$$f_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ есть номер доказательства } m \text{ в } A, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Соответствующим образом B определяет общерекурсивную функцию g. Допустим теперь, что существует общерекурсивная процедура, упомянутая в теореме, и применим ее к вычислимым вещественным числам

$$a_m = \sum_{n=0}^{\infty} (g_{mn} - f_{mn}) 2^{-n}, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Пусть $C(D)$ состоит из тех чисел m, для которых мы решили, что $a_m \leqslant 0$ $(a_m \geqslant 0)$. Тогда C и D образуют рекурсивное отделение для A и B, так как из $m \in A$ $(m \in B)$ следует $a_m < 0$ $(a_m > 0)$, так что $m \in C$ $(m \in D)$. Мы пришли к противоречию.

Не существует алгорифма, вычисляющего десятичное разложение любого вычислимого вещественного числа.

Если бы мы могли вычислить десятичное разложение

$$a = n + \sum_{k=0}^{\infty} d_k 10^{-k-1}$$

любого вычислимого вещественного числа a, то, определив $n \leqslant -1$ или $n \geqslant 0$, мы могли бы доказать либо $a \leqslant 0$, либо $a \geqslant 0$. Это противоречит предыдущей теореме.

Рассмотрим следующее рассуждение, использующее закон исключенного третьего. Пусть дано произвольное вычислимое вещественное число. Если оно десятично рационально, то оно очевидным образом имеет десятичное рекурсивное разложение. Далее, если оно не является десятично рациональным, то мы можем определить любой знак его десятичного разложения, просто вычисляя его с достаточной точностью. Так как вычислимое вещественное число либо является десятично рациональным, либо не является, мы заключаем отсюда, что любое вычислимое вещественное число имеет рекурсивное десятичное разложение. С другой стороны, мы только что доказали, что это утверждение ложно, если его интерпретировать конструктивно. Это показывает, что (как было впервые отмечено в п. 7) неосторожное использование закона исключенного третьего может вести к заключениям, не являющимся конструктивно истинными.

Брауэр [4] и [8] классифицировал вычислимые вещественные числа согласно возможности установить их положение относительно рациональных чисел, из которых они получены пополнением.

Вычислимое вещественное число без всякой дальнейшей информации называется элементом (пополнения) нулевого порядка.

Если, кроме того, для любого рационального числа r может быть доказано либо $r \leqslant a$, либо $r \geqslant a$, то a называется элементом первого порядка.

Элемент a первого порядка, для которого $r \leqslant a$ может быть доказано или опровергнуто при любом рациональном r, называется элементом второго порядка.

Если мы можем решить для любого рационального r, верно ли $r \leqslant a$ или $r > a$, то a называется элементом третьего порядка.

Наконец, если для любого рационального r мы можем решить, верно ли $r < a$, $r = a$ или $r > a$, то a называется элементом четвертого порядка, или, в терминологии Гейтинга [1], респектабельным вещественным числом.

Когда мы погружаем рациональное число в вычислимые вещественные числа, мы, очевидно, получаем элемент четвертого порядка. Также и иррациональное число автоматически имеет четвертый порядок.

Мы показали выше, что нет рекурсивного метода, позволяющего хотя бы доказывать $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 0$ для любого вычислимого вещественного числа a, и поэтому мы никогда не сможем сказать, что любое вычислимое число есть элемент первого порядка. Всегда будут числа вроде эйлеровой константы C, о которых мы сможем сказать лишь, что они нулевого порядка. В процессе развития математики, разумеется, может случиться, что мы сможем доказать, что некоторые из них имеют более высокий порядок, но всегда можно будет найти новые, для которых это еще не показано.

16. Последовательность Шпеккера

Шпеккер [1949] построил пример, показывающий, что теорема о монотонной сходимости ложна при конструктивной интерпретации.

Существует рекурсивная последовательность рациональных чисел

$$0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_n < \ldots < 1,$$

которая не сходится.

Пусть f — общерекурсивная функция, перечисляющая без повторений диагональное множество D. Полагая

$$a_n = \sum_{m=0}^{n} 2^{-f(m)-1}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

мы, очевидно, имеем

$$0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_n < \ldots < 1.$$

Допустим, что a_n сходится при $n \to \infty$. Это значит, что мы нашли общерекурсивную функцию $N(m)$, такую, что

$$a_n - a_{N(m)} < 2^{-m-1}, \quad n > N(m).$$

Это последнее соотношение влечет за собой $f(n) > m$ для $n > N(m)$. Следовательно, $m \in D$ тогда и только тогда, когда $f(m) = n$ для некоторого $n = 0, 1, \ldots$ $\ldots, N(m)$. Таким образом, мы имели бы разрешающую процедуру для D, что невозможно. Эта конструкция принадлежит Райсу [1].

Ограниченная монотонная последовательность вычислимых вещественных чисел, которая не сходится, будет называться шпеккеровой последовательностью.

Конструктивная точка a называется точкой сгущения последовательности конструктивных точек a_0, $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, если для любой окрестности I точки a и любого натурального N мы можем найти $n \geqslant N$, такое, что I есть окрестность a_n.

Последовательность Шпеккера доставляет нам также контрпример к теореме Больцано — Вейерштрасса. Действительно, если бы мы могли найти точку сгущения шпеккеровой последовательности, то эта последовательность обязательно сходилась бы к ней, что невозможно.

17. Открытые и замкнутые множества

Открытое множество (Брауэр [3] использует термин Bereich) — это рекурсивно перечислимое множество G окрестностей, удовлетворяющее следующим двум условиям.

1 Если J тоньше I и I принадлежит G, то J принадлежит G.

2 Если I принадлежит G, то мы можем найти J в G, такое, что I тоньше J.

Среди открытых множеств имеется *пустое множество* $\emptyset$ и множество всех окрестностей, которое мы обозначим через X и назовем *всем пространством*.

Окрестности погружаются в открытые множества путем сопоставления окрестности I множества всех окрестностей J, которые тоньше I.

$a \in G$, где a — конструктивная точка и G — открытое множество, если некоторая окрестность a принадлежит рекурсивно перечислимому множеству G.

$a \notin G$, если любая окрестность a не принадлежит рекурсивно перечислимому множеству G.

Если A и B — открытые множества, то $A \cap B$ и $A \cup B$ определяются просто как пересечение и объединение A и B, рассматриваемых как рекурсивно перечислимые множества.

Последовательность открытых множеств — это рекурсивно перечислимое отношение между натуральными числами и окрестностями, такое, что для любого $n = 0, 1, \ldots$ сечение этого отношения в n есть открытое множество G_n. Объединение $\bigcup G_n$ — это объединение $G_0, G_1, \ldots, G_n, \ldots$, рассматриваемых как рекурсивно перечислимые множества, т. е. область значений этого отношения.

Существует рекурсивная нумерация открытых множеств.

Это значит, разумеется, что мы можем построить последовательность открытых множеств, обладающую свойством, что всякое открытое множество встречается в этой последовательности. Доказательство параллельно доказательству теоремы о перечислении для аппроксимаций.

В евклидовом пространстве (в частности, на вещественной прямой) и в канторовом пространстве мы можем, ввиду локальной компактности, нормализовать определение открытого множества, наложив еще одно условие чисто комбинаторного характера.

3 Если I тоньше, чем $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ и $I_1, I_2, \ldots, I_n$ принадлежат G, то I принадлежит G.

В канторовском пространстве это условие можно сформулировать проще, сказав, что если две окрест-

ности $I0$ и $I|$ принадлежат G, то I должна принадлежать G [1]). Заметим, что соответствующее условие для бэровского пространства требовало бы, чтобы I принадлежала G, если I, n принадлежит G для всех $n = 0, 1, \ldots$. Это уже не комбинаторное условие, а правило с бесконечным числом посылок, чем и объясняется тот факт, что экстенсиональная интерпретация открытых множеств в бэровском пространстве требует трансфинитной индукции и должна быть отложена до следующей главы.

После наложения третьего условия мы можем определить отношения включения и равенства между двумя открытыми множествами A и B в евклидовом или канторовском пространстве.

$A \subseteq B$, если A содержится в B, когда они рассматриваются как рекурсивно перечислимые множества.

$A = B$, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Если G — открытое множество, заданное, скажем, своим гёделевским номером, то $\mathbf{C}G$ — *замкнутое множество* [2]) (Брауэр [4] говорит Bereichkomplement). Теоретико-множественные операции и отношения между замкнутыми множествами определяются по двойственности. Остается определить только отношение включения между двумя множествами, одно из которых открыто, а другое замкнуто, причем случай бэровского пространства все еще исключается.

$A \subseteq \mathbf{C}B$, где A и B открыты, означает, что $A \cap B = \varnothing$ $\mathbf{C}A \subseteq B$, если $A \cup B = X$.

18. Теорема Гейне — Бореля о покрытиях

Замкнутое множество F на вещественной прямой *ограничено*, если мы можем найти натуральное

[1]) При наложении условия 3 следует естественным образом изменить определение объединения открытых множеств, чтобы обеспечить выполнение этого условия у суммы множеств: именно поэтому в таблице на стр. 56 добавлена схема $\frac{x0 \quad x|Bx}{x}$. — *Прим. ред.*

[2]) Здесь $\mathbf{C}$ следует рассматривать не как обозначение операции, а как формальный символ, поставленный перед гёделевским номером G. — *Прим. ред.*

число n, такое, что F содержится в замкнутом интервале от $-n$ до n. Определение для евклидова пространства аналогично. Ограниченное замкнутое множество в евклидовом пространстве, а также любое замкнутое множество в канторовском пространстве называются *компактными*.

Пусть F — компактное множество, и допустим, что

$$F \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n,$$

где G_0, G_1, ... — последовательность открытых множеств. Тогда можно найти натуральное N, такое, что

$$F \subseteq \bigcup_{n=0}^{N} G_n.$$

Доказательство для канторового пространства. По предположению, $F = \complement G$, где G открыто и

$$G \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n = X.$$

Система Поста, определяющая левый член, состоит из отмеченных схем для G, схем для последовательности G_0, G_1, ..., отмеченных, например, символом S, и новых схем

$$N \quad \frac{Nx}{Nx|} \quad B \quad \frac{Bx}{Bx0} \quad \frac{Bx}{Bx|} \quad \frac{Bx\ Gx}{x},$$

$$\frac{x0\ x|\ Bx}{x} \quad \frac{Sxy\ Nx\ By}{y}.$$

Любая окрестность, в частности $\square$, порождается этой системой Поста. Пусть N — максимум натуральных чисел, подставленных вместо x в тех применениях последней схемы, которые входят в доказательство $\square$. Тогда, очевидно,

$$G \cup \bigcup_{n=0}^{N} G_n = X,$$

так что

$$F \subseteq \bigcup_{n=0}^{N} G_n,$$

что и требовалось доказать.

Конструктивная форма теоремы Гейне — Бореля была найдена Брауэром в [9]. Он доказал ее как следствие теоремы о веерах для так называемых локализованных компактных видов (Katalogisiertkompakte Species). Предположение локализованности (понятие локализованности будет введено в следующем разделе) излишне, по крайней мере в случае, если принята наша интерпретация интуиционистских понятий.

19. Локализованные замкнутые множества

Пусть G — открытое множество в канторовом пространстве. Мы скажем, что замкнутое множество $\complement G$ *локализовано* и что G *дополнительно локализовано*, если мы можем решить для любой окрестности I, верно ли, что I принадлежит G.

Для евклидова пространства определение лишь технически сложнее. $\complement G$ локализовано, если мы можем найти рекурсивно перечислимое множество окрестностей F, которое дизъюнктно с G и таково, что для любой пары окрестностей I и J, если I тоньше J, то либо I принадлежит G, либо J принадлежит F. Без ограничения общности можно считать, что F удовлетворяет следующим двум условиям, двойственным условиям, определяющим открытое, множество.

1 Если I тоньше J и I принадлежит F, то J принадлежит F.

2 Если I принадлежит F, то мы можем найти в F окрестность J, более тонкую, чем I.

Наконец, замкнутое множество $\complement G$ в бэровском пространстве локализовано, если мы можем найти рекурсивно перечислимое множество окрестностей F, дизъюнктное с G и такое, что любая окрестность I принадлежит либо F, либо G, и если I принадлежит

F, то мы можем найти натуральное число n, такое, что I, n также принадлежит F. Локализованное замкнутое множество в бэровском пространстве определяет закон потока в терминологии Гейтинга [1]. Элементы F и G называются соответственно допустимыми и недопустимыми относительно закона потока.

Если замкнутое локализованное множество непусто, то мы можем найти в нем конструктивную точку.

Доказательство для канторовского пространства. Локализованность $\complement G$ означает разрешимость G. Пусть F — множество всех окрестностей, не принадлежащих G. Сначала мы можем найти $e_0 = 0$ или $|$ в F, так как если бы и 0 и $|$ принадлежали G, то $\square$ тоже принадлежала бы G, и F было бы пусто. Тем же рассуждением мы можем определить e_1, такое, что e_0e_1 принадлежит F, и так далее. Таким образом, мы последовательно определяем знаки некоторой конструктивной точки в $\complement G$.

Объединение двух локализованных множеств локализовано.

Мы должны доказать, что пересечение двух дополнительно локализованных открытых множеств снова дополнительно локализовано. Это непосредственно очевидно в канторовом пространстве, например, ввиду того что пересечение двух открытых множеств — это просто пересечение этих двух открытых множеств, рассматриваемых как рекурсивно перечислимые множества, а пересечение двух разрешимых множеств разрешимо.

Существуют два локализованных множества, пересечение которых не локализовано.

Положим $e_{mn} = 0$ или 1 в зависимости от того, является ли n номером доказательства m в диагональном множестве D, и определим следующую последовательность вычислимых вещественных чисел:

$$a_m = \sum_{n=0}^{\infty} e_{mn} 2^{-n-1}, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Для любого m пусть U_m есть открытый интервал от $5m-3$ до $5m+a_m$ и V_m — открытый интервал от $5m-a_m$ до $5m+3$. Легко проверить, что два открытых множества

$$U=\bigcup U_m \quad \text{и} \quad V=\bigcup V_m$$

дополнительно локализованные. Допустим теперь, что $G=U\cup V$ — дополнительно локализованное. Тогда мы можем для любого m доказать либо

$$5m-1,\ 5m+1 \text{ принадлежит } G,$$

либо

$$5m-2,\ 5m+2 \text{ принадлежит } F,$$

где F — то рекурсивно перечислимое множество окрестностей, которое фигурирует в определении локализованности. Но если $5m-1$, $5m+1$ принадлежит G, то $a_m>0$ и $m\in D$, а если $5m-2$, $5m+2$ принадлежит F, то $a_m=0$ и $m\notin D$, так что D было бы разрешимо. Мы достигли противоречия.

Две последние теоремы в применении к бэровскому пространству объясняют, почему, как утверждал Брауэр [2] и [7], объединение двух потоков (Mengen) есть снова поток, в то время как пересечение двух потоков — не обязательно поток.

Понятие локализованности замкнутого множества (katalogisiertes Bereichkomplement) и дополнительно локализованного открытого множества (komplementär katalogisierter Bereich) принадлежат Брауэру [3]. Брауэр [2] и [7] ввел также понятие Gebiet, но трудно усмотреть различие между понятием Gebiet и понятием дополнительно локализованного открытого множества. Сам Брауэр [3] считал, что Gebiet всегда есть дополнительно локализованное открытое множество, но не утверждал обратное.

20. Внутренние и внешние предельные множества

Если G_0, G_1, ..., G_n, ... — последовательность открытых множеств, то

$$\bigcap G_n$$

есть *внутреннее предельное множество* (innere Grenzspecies в терминологии Брауэра [3]), и

$$\bigcup \complement G_n$$

есть *внешнее предельное множество* (äussere Grenzspecies). В данный момент мы должны удовольствоваться рассмотрением $\bigcap G_n$ и $\bigcup \complement G_n$ как чисто символических выражений, поскольку экстенсиональная интерпретация внутренних и внешних предельных множеств требует трансфинитной индукции.

Открытые множества можно тривиально погрузить во внутренние предельные множества, сопоставляя открытому множеству G внутреннее предельное множество $\bigcap G_n$, где $G_n = G$ для всех $n = 0, 1, \ldots$. Аналогично замкнутые множества погружаются во внешние предельные множества. Пусть $I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ — перечисление окрестностей открытого множества G. Тогда G можно отождествить с внешним предельным множеством $\bigcup \complement G_n$, где G_n — объединение всех окрестностей, отделенных от I_n, и $\complement G$ можно отождествить с $\bigcap G_n$.

Внутренние (внешние) предельные множества очевидным образом замкнуты относительно счетных (конечных) пересечений и конечных (счетных) объединений.

$a \in \bigcap G_n$, где a — конструктивная точка, если для любого n мы можем найти окрестность a, которая принадлежит G_n.

Крайзель и Лакомб [1], а также Заславский и Цейтин [1] дали пример внутреннего предельного множества, показывающий, грубо говоря, что конструктивные точки континуума могут быть покрыты произвольно малым открытым множеством. Конструкция похожа на хорошо известное доказательство того, что множество рациональных чисел имеет лебегову меру 0. Но в то время, как рациональные числа могут быть рекурсивно перечислены, это неверно для конструктивных точек. Для доказательства достаточно того, что имеется рекурсивное перечисление аппроксимаций.

Существует внутреннее предельное множество $\bigcap G_n$ *в канторовском пространстве, которое содержит все конструктивные точки и обладает тем свойством, что мера объединения любого конечного числа окрестностей из* G_n *меньше* 2^{-n}.

Под мерой здесь имеется в виду обычная лебегова мера, которая сопоставляет любой окрестности

$$I = 0\|\underbrace{0\ldots0}_{n}|$$

меру 2^{-n}.

В п. 12 мы построили рекурсивную нумерацию всех аппроксимаций

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m,\ \ldots.$$

Пусть G_n есть объединение всех окрестностей I, таких, что I — окрестность a_m и $d(I) \leqslant 2^{-m-n-1}$ для некоторого $m = 0,\ 1,\ \ldots$[1]). Конструктивная точка — это аппроксимация, имеющая окрестности произвольно малого диаметра, следовательно, конструктивная точка должна обязательно принадлежать G_n для всех n. Кроме того, объединение любого конечного числа окрестностей из G_n имеет меру

$$< \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m-n-1} = 2^{-n}.$$

Это завершает доказательство.

Открытое множество $G = G_0$ содержит все конструктивные точки. С другой стороны, G не равно X, всему пространству. Действительно, из $G = X$ следовало бы по лемме Гейне — Бореля, что уже конечное число окрестностей, объединением которых является G, покрывало бы X. Это противоречит тому факту, что мера объединения любого конечного числа окрестностей из G меньше 1. Мы доказали следующую теорему, принадлежащую Клини [2].

---

[1]) Подразумевается, что I включается в G_n с «анализом», от какого a_m она произошла, и для каждого m в G_n имеется не более одной окрестности с анализом a_m. — *Прим. перев.*

Существует открытое множество $G \neq X$, содержащее все конструктивные точки, и двойственным образом замкнутое множество $F \neq \emptyset$, не содержащее ни одной конструктивной точки.

В качестве побочного результата мы получаем пример замкнутого множества, которое не локализовано. Действительно, если бы замкнутое множество $F \neq \emptyset$, упоминаемое в теореме, было локализовано, то мы могли бы найти в нем конструктивную точку.

В классической математике континуум воспринимается как совокупность своих точек. Поэтому можно было бы попытаться, как Марков и его школа, конструктивизировать теорию континуума, рассматривая его как совокупность его конструктивных точек. Это ведет, как показывает теорема Клини, к теории, радикально отличной от теории Брауэра.

21. Теорема Бэра о (множествах первой) категории

Открытое множество G *плотно*, если для любой окрестности I мы можем найти более тонкую окрестность J, принадлежащую G. Внутреннее предельное множество $\bigcap G_n$ плотно, если G_n плотно при любом n.

Пусть $\bigcap G_n$ — плотное внутреннее предельное множество. Тогда любая окрестность содержит конструктивную точку, принадлежащую $\bigcap G_n$.

Классическое доказательство уже конструктивно и не требует модификации. Пусть I — произвольная окрестность. Так как G_0 плотно, мы можем найти I_0 в G_0, которая тоньше I и удовлетворяет $d(I_0) \leqslant 1$. Допустим теперь, что $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ уже определены, $n \geqslant 1$. Так как G_n плотно, мы можем найти I_n в G_n, которая тоньше I_{n-1} и удовлетворяет $d(I_n) \leqslant 2^{-n}$. Последовательность $I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ сходится к конструктивной точке a, которая принадлежит G_n при любом n. Кроме того, I есть окрестность a.

Приведенное доказательство напоминает доказательство неперечислимости конструктивных точек, и

действительно, последний результат — простое следствие теоремы о категории. Точнее, пусть

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$$

— вычислимая последовательность конструктивных точек, и для любого n удалим из всего пространства точку a_n, получая таким образом открытое и плотное множество G_n. По теореме Бэра, в любой окрестности I мы можем найти конструктивную точку $a \in \bigcap G_n$, что и означает в точности $a \neq a_n$ для всех n.

Другое применение таково. Пусть $\bigcap G_n$ — внутреннее предельное множество на вещественной прямой, содержащее все рациональные точки. Тогда в любой окрестности I мы можем найти иррациональное вычислимое вещественное число $a \in \bigcap G_n$. Чтобы установить это, зафиксируем нумерацию рациональных чисел

$$r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots,$$

и пусть H_n получится из G_n выбрасыванием точки r_n. H_n все еще открыто и плотно при $n = 0, 1, \ldots$, и поэтому в силу теоремы Бэра мы находим в любой окрестности I вычислимое вещественное число $a \in \bigcap H_n$. Очевидно, что a иррационально и принадлежит $\bigcap G_n$.

22. Частично рекурсивные функционалы

Будет удобно включить множество натуральных чисел в список рассматриваемых нами пространств. Мы сделаем это, определив окрестности I просто как натуральные числа

$$I = |||\ldots||$$

и положив $d(I) = 0$. О множестве натуральных чисел говорят, что оно *дискретно*.

Частично рекурсивный функционал, отображающий пространство X в пространство Y, — это рекурсивно перечислимое отношение между окрестностями в X и окрестностями в Y, удовлетворяющее следующим двум условиям.

1 Для любой окрестности I в X $f(I)$ есть аппроксимация в Y.

2 Для любой окрестности J в Y $f^{-1}(J)$ есть открытое множество в X.

Частично рекурсивные функционалы, отображающие бэровское пространство в себя, рассматриваются Клини [3].

Эквивалентным образом мы могли бы сначала ввести окрестности в пространстве $X \to Y$ как синтаксические выражения вида

$$I_1 \to J_1 \cap \ldots \cap I_n \to J_n,$$

где $I_1, \ldots, I_n$ и $J_1, \ldots, J_n$ — окрестности соответственно в X и Y. Введя также необходимые отношения между окрестностями (тонкость и отделенность), мы могли бы затем определить частично рекурсивный функционал как аппроксимацию в пространстве $X \to Y$. С использованием этой формулировки теорема о нумерации для частично рекурсивных функционалов становится частным случаем теоремы о нумерации для аппроксимаций.

Существует рекурсивная нумерация частично рекурсивных функционалов.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы о нумерации для аппроксимаций, данному в п. 12.

Если a — аппроксимация, то $f(a)$ — также аппроксимация.

Принадлежность J к $f(a)$ означает, что IfJ для некоторой окрестности I из a. Если J тоньше J_1, то IfJ_1, так что J_1 также принадлежит $f(a)$.

Пусть J_1 и J_2 принадлежат $f(a)$. Тогда I_1fJ_1 и I_2fJ_2 для некоторых окрестностей I_1 и I_2 из a. Так как a — аппроксимация, имеется окрестность I из a, которая тоньше I_1 и I_2. Так как $f^{-1}(J_1)$ и $f^{-1}(J_2)$ — открытые множества, то IfJ_1 и IfJ_2, а так как $f(I)$ — аппроксимация, мы можем найти J, более тонкую, чем J_1 и J_2, такую, что IfJ. Окрестность J, очевидно, принадлежит $f(a)$.

Рассмотрим частично рекурсивный функционал, отображающий пространство X в пространство Y, и пусть J_1 и J_2 — две окрестности в Y, причем J_2 тоньше J_1. Образуем объединение всех окрестностей I, таких, что $I f J_1$ или $I f J$ для некоторой J, отделенной от J_2. Взяв пересечение всех открытых множеств, полученных таким способом при варьировании J_1 и J_2, мы имеем внутреннее предельное множество, которое будем называть *областью* (определения) *функционала* f. Если окрестности в Y диаметризованы, то область можно определить более обозримым способом как $\bigcap G_n$, где G_n — объединение всех окрестностей I, таких, что $I f J$ для некоторого J с $d(J) < 2^{-n}$. Область дискретнозначного функционала — открытое множество.

Если конструктивная точка a принадлежит области частично рекурсивного функционала f, то $f(a)$ — конструктивная точка.

Доказательство очевидно.

Точно так же, как и в классическом анализе, теорема о равномерной непрерывности — простое следствие леммы Гейне — Бореля.

Частично рекурсивный функционал, всюду определенный на компактном множестве, равномерно непрерывен на этом множестве.

Доказательство для отображений канторовского пространства в себя. Всюду определенность f на компактном множестве F означает, разумеется, что $F \subseteq G_n$ для всех n, где $\bigcap G_n$ — область f. Пусть n — произвольное натуральное число. Лемма Гейне — Бореля позволяет нам найти окрестности $I_1, I_2, \ldots, I_l$, такие, что

$$F \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_l$$

и

$$I_k f J_k, \ d(J_k) \leqslant 2^{-n}, \ 1 \leqslant k \leqslant l.$$

Пусть m определено соотношением

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant l} d(I_k) = 2^{-m}.$$

Тогда для вычисления первых n знаков значения f на F достаточно знать первые m знаков аргумента.

Последовательность частично рекурсивных функционалов

$$f_0, f_1, \ldots, f_n \ldots$$

сходится к частично рекурсивному функционалу f, если для любой пары окрестностей I и J, таких, что $I f J$, мы можем найти настолько большое N, что $I f_n J$ для всех $n \geqslant N$. Если рассматривать частично рекурсивные функционалы, отображающие пространство X в пространство Y, как аппроксимации в пространстве $X \to Y$, то это определение сходимости — просто частный случай определения сходимости аппроксимаций, данного в п. 12.

Если последовательность частично рекурсивных функционалов сходится к частично рекурсивному функционалу, который всюду определен на компактном множестве, то сходимость равномерна на этом множестве.

Это немедленно следует из определения сходимости и теоремы о равномерной непрерывности.

23. Максимальные рекурсивные функционалы

Как уже отмечено, частично рекурсивные функционалы, отображающие пространство X в пространство Y, можно рассматривать как аппроксимации в пространстве $X \to Y$. Среди них мы выделим теперь максимальные.

Говорят, что частично рекурсивный функционал f есть *максимальный рекурсивный функционал*, если для любых пар окрестностей I_1 и I_2 в X и J_1 и J_2 в Y, таких, что I_1 тоньше I_2 и J_2 тоньше J_1, либо имеет место $I_1 f J_1$, либо $I f J$ для некоторой I, более тонкой, чем I_2, и J, отделенной от J_2.

Если частично рекурсивный функционал всюду определен на евклидовом или канторовом пространстве, то он максимален.

Это утверждение — следствие локальной компактности и не имеет места для бэровского пространства.

Доказательство для функционалов, отображающих канторовское пространство в себя. Пусть f всюду определен, и пусть I и J — произвольные окрестности. По теореме о равномерной непрерывности мы имеем

$$I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_l,$$

$$I_k f J_k,\ d(J_k) \leqslant d(J),\ 1 \leqslant k \leqslant l.$$

Так как $d(J_k) \leqslant d(J)$, то либо J_k тоньше J, либо J_k отделена от J. Если J_k тоньше J для всех k, $1 \leqslant k \leqslant l$, то IfJ. В противном случае $I_k f J_k$ для некоторого k, такого, что I_k тоньше I и J_k отделена от J. Это показывает, что f максимален.

Вещественные рекурсивные функционалы, которые всюду определены, совпадают с рекурсивными вещественными функциями Шпеккера [1] (если заменить там примитивно рекурсивные функции общерекурсивными), Гжегорчика [1] и Лакомба [1].

Область максимального рекурсивного функционала плотна.

Рассмотрим максимальный рекурсивный функционал f, отображающий X в Y. Допустим, что J_1 и J_2 — окрестности в Y, такие, что J_2 тоньше J_1, и выберем окрестность I в X. Взяв I_1 тоньше I, мы имеем или $I_1 f J_1$ или $I_2 f J$ для некоторой I_2 более тонкой, чем I и J, отделенной от J_2. Это показывает, что открытые множества, пересечение которых составляет область f, все плотны. Следовательно, область f плотна.

Применяя теорему Бэра, мы видим, что в любой окрестности I пространства X имеется конструктивная точка a, такая, что $f(a)$ — конструктивная точка.

Чтобы продемонстрировать полезность понятия максимального рекурсивного функционала, мы докажем конструктивный вариант теоремы Рисса о представлении. Максимальный вещественный *рекурсивный функционал* F называется *неубывающей функцией*, если из соотношений $a_1, b_1 F c_1, d_1$ и $a_2, b_2 F c_2, d_2$ вместе с $a_1 < b_2$ следует $c_1 < d_2$.

Под *полигоном* (рис. 1) мы будем понимать кусочно линейную функцию, исчезающую вне конечного интервала, вершины которой имеют рациональные координаты. Точнее, полигон — это синтаксическое выражение вида $r_0, s_0; r_1, s_1; \ldots\ldots; r_n, s_n$, где

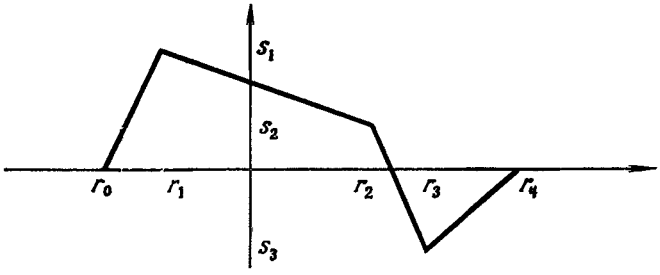


Рис. 1.

$r_0 < r_1 < \ldots < r_n$, и $s_0 = 0, s_1, \ldots, s_n = 0$ — рациональные числа.

Интеграл полигона f относительно неубывающей функции M,

$$\mu(f) = \int f\,dM,$$

определяется обычным образом как предел сумм Стильтьеса

$$\sum_{n=1}^{N} f(a_n)(M(a_n) - M(a_{n-1})).$$

Единственное нововведение состоит в том, что мы должны позаботиться о выборе точек разбиения $a_0 < a_1 < \ldots < a_N$ из области M. Это всегда возможно, так как область M плотна согласно вышеприведенной теореме. Интеграл $\mu(f)$, очевидно, имеет свойства

$$\mu(f) \geqslant 0, \text{ если } f \geqslant 0,$$
$$\mu(f+g) = \mu(f) + \mu(g).$$

Обратно, мы покажем, что если μ — рекурсивная функция, сопоставляющая каждому полигону неко-

торое вычислимое действительное число таким образом, что эти условия выполнены, то мы можем найти неубывающую функцию M, такую, что

$$\mu(f) = \int f\,dM,$$

причем весовая функция M однозначно определяется функцией μ с точностью до аддитивной константы.

Для данной μ определим G_n как объединение всех окрестностей $I = a, b$, таких, что $\mu(f) < 2^{-n}$ для

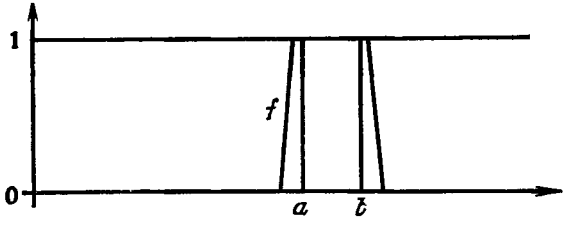


Рис. 2.

какого-либо полигона f, имеющего вид, изображенный на рис. 2. Тогда G_n — плотное открытое множество для любого n, так что теорема Бэра позволяет нам найти точку $x \in \bigcap G_n$.

Определим рекурсивно перечислимое отношение M между рациональными интервалами a, b и c, d требованием, чтобы a, bMc, d тогда и только тогда, когда

$$c < \mu(f) \leqslant \mu(g) < d$$

для некоторых функций f и g того типа, который изображен на рис. 3. В действительности f и g уже не являются полигонами, но выбор точки x позволяет нам определить $\mu(f)$ и $\mu(g)$ очевидным предельным переходом.

Определенный таким образом M, очевидно, является частично рекурсивным функционалом. Основная трудность — доказать его максимальность.

Пусть $I_1 = a_1, b_1$ тоньше $I_2 = a_2, b_2$ и $J_2 = c_2, d_2$ тоньше $J = c_1, d_1$. Нам нужно доказать, что либо

I_1MJ_1, либо IMJ для некоторой I, более тонкой, чем I_2, и J, отделенной от J_2.

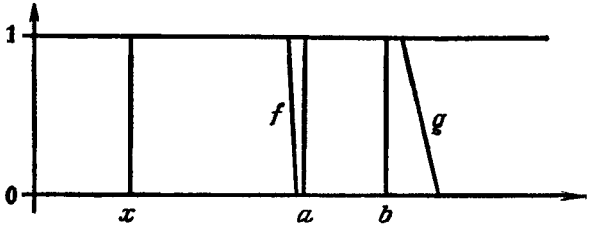


Рис. 3.

С этой целью выберем f и g, как показано на рис. 4.

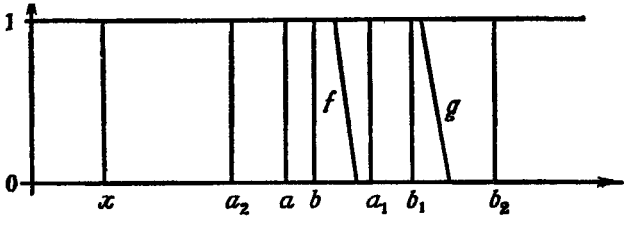


Рис. 4.

Вычисляя $\mu(f)$ и $\mu(g)$ с достаточной точностью, мы можем доказать

$$\mu(f) > c_1 \quad \text{или} \quad \mu(f) < c_2,$$

и

$$\mu(g) < d_1 \quad \text{или} \quad \mu(g) > d_2.$$

Если имеют место $\mu(f) > c_1$ и $\mu(g) < d_2$, то I_1MJ_1 согласно определению M. Если $\mu(f) < c_2$, то мы можем найти a, b тоньше a_2, b_2, такую, что a, bMc, d при $d < c_2$, откуда следует, что c, d отделена от c_2, d_2. Аналогично, если $\mu(g) > d_2$. Следовательно, M максимален. Неубывание M — прямое следствие предположения, что $\mu(f) \geqslant 0$, если $f \geqslant 0$.

Проверка соотношения

$$\mu(f) = \int f\,dM,$$

а также того обстоятельства, что M однозначно определяется нормализующим условием $M(x) = 0$, стандартна и завершает доказательство.

Область M совпадает с внутренним предельным множеством, которое определено в начале доказательства, и интуитивно может быть представлена как множество точек, не несущих массы.

Пусть

$$\mu_n(f) = \int f\,dM_n, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,$$

и

$$\mu(f) = \int f\,dM$$

— интегралы. Применяя теорему о категории, найдем конструктивную точку x, принадлежащую областям M_n для всех n, а также области M. Нормализуем весовые функции, полагая $M_n(0) = 0$ для всех n и $M(0) = 0$. Тогда

$$\mu_n(f) \to \mu(f) \quad \text{при } n \to \infty$$

для всех полигонов f тогда и только тогда, когда $M_n \to M$ согласно определению сходимости, данному в предыдущем разделе. Это соответствует классическому понятию поточечной сходимости в каждой точке непрерывности предельной функции.

24. Две теоремы из классической теории функций

Если вещественный частично рекурсивный функционал всюду определен на некотором локализованном компактном множестве, то мы можем вычислить его максимум на этом множестве. Чтобы усмотреть это, пусть f — отображение (например) канторовского пространства в вещественную прямую, и предположим, что f всюду определено на локализованном компактном множестве F. Теорема о равномерной

непрерывности позволяет нам найти для каждого n окрестности $I_1, I_2, \ldots, I_l$, такие, что

$$F \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_l,$$

$$I_k f J_k, \ d(J_k) \leqslant 2^{-n}, \ 1 \leqslant k \leqslant l.$$

Так как $F = \complement G$ локализовано, мы можем решить для каждой окрестности I_k, содержится ли она в G. Если да, выбрасываем ее. Сделав это, найдем тот рациональный интервал $J_k = a_k, b_k$, для которого b_k наибольшее из возможных. Этот интервал является окрестностью максимума f на F.

Следующий пример показывает, что предположение локализованности действительно необходимо для того, чтобы можно было вычислить максимум всюду определенной функции на этом множестве. Рассмотрим Шпеккерову последовательность $0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_n < \ldots < 1$, и пусть F_n — замкнутый промежуток от a_n до 1. Тогда $F = \bigcap F_n$ замкнуто и ограничено. Если бы мы могли вычислить минимум тождественной функции $f(x) = x$ на F, то последовательность Шпеккера сходилась бы к этому минимальному значению, что невозможно.

Хотя мы можем вычислить максимум действительной функции на локализованном компактном множестве, может случиться, что нет конструктивной точки, в которой достигается это максимальное значение. Это было обнаружено Лакомбом [2], Заславским [1] и Шпеккером [2].

Существует действительный рекурсивный функционал f, который всюду определен, хотя

$$f(a) < \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} f(x)$$

для любой конструктивной точки $0 \leqslant a \leqslant 1$.

Пусть $I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ — рекурсивная последовательность рациональных интервалов, такая, что $\bigcup I_n$ содержит все конструктивные точки, но $\sum_{n=0}^{N} d(I_n) < 1$ для всех N. Такая последовательность была построе-

на для канторовского пространства в п. 20, но конструкция работает столь же хорошо и для вещественной прямой. С $I_n = a_n, b_n$ мы свяжем функцию

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{b_n - a_n}\left|x - \dfrac{a_n + b_n}{2}\right| - 1, & \text{если } a_n \leqslant x \leqslant b_n, \\ 0, & \text{если } x \leqslant a_n \text{ или } x \geqslant b_n. \end{cases}$$

Тогда

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} f_n$$

определена всюду на вещественной прямой

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} f(x) = 0,$$

хотя

$$f(a) < 0$$

для любой конструктивной точки a. Это доказательство было дано Лакомбом [3].

Используя существование открытого множества, которое содержит все конструктивные точки, но не равно всему пространству, мы можем построить различные функции, области определения которых содержат все конструктивные точки, но которые тем не менее ведут себя очень плохо. Например, как показано Клини [2], функция может быть определена во всех конструктивных точках канторова пространства, не будучи равномерно непрерывной, а в этом случае она не может быть продолжена до всюду определенной функции. Чтобы усмотреть это, допустим, что $I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ — дизъюнктные окрестности, покрывающие все конструктивные точки, но не покрывающие всего пространства. Положим $f = 0$ и 1 на окрестностях $I_n 0$ и $I_n 1$ соответственно, $n = 0, 1, \ldots$. Тогда f — дискретнозначный частично рекурсивный функционал, принимающий только значения 0 и 1, который обладает нужными свойствами.

Другой пример классической теоремы, которая проваливается конструктивно, — это теорема о среднем значении.

Нет алгорифма, вычисляющего корень любого вещественного рекурсивного функционала, который всюду определен и меняет знак в единичном интервале.

Эта, а также следующая теорема упомянута Крайзелем [2] и доказана Цейтиным [1].

Сопоставим каждому вычислимому действительному числу a функцию, изображенную на рис. 5.

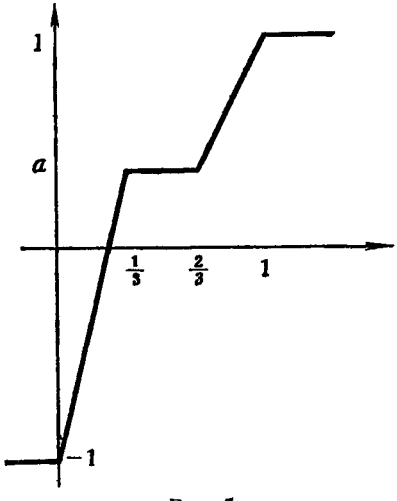


Рис. 5.

Если бы в нашем распоряжении был алгоритм со свойствами, указанными в теореме, то мы могли бы найти точку, в которой эта функция исчезает. Для этой точки b можно решить $b > {}^1/_3$ или $b < {}^2/_3$, просто вычисляя ее с достаточной точностью. В первом случае $a \leqslant 0$, во втором $a \geqslant 0$. Таким образом, мы имели бы рекурсивный метод доказательства $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 0$ для любого вычислимого действительного числа a. Однако мы знаем из п. 15, что такого метода нет.

Невозможно, чтобы вещественный рекурсивный функционал, который всюду определен и меняет

знак в единичном интервале, принимал ненулевое значение в любой конструктивной точке.

Действительно, допустим, что f всюду определен на единичном интервале $f(0) < 0$, $f(1) > 0$. Положим $I_0 = a_0, b_0 = 0, 1$ и определим индуктивно

$$a_{n+1}, b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2}, \ b_n, & \text{если } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0, \\ a_n, \ \frac{a_n + b_n}{2}, & \text{если } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

Здесь мы использовали тот факт, что если вычислимое действительное число $b \neq 0$, то мы можем решить $b < 0$ или $b > 0$. Когда $n \to \infty$, окрестность $I_n = a_n, b_n$ сходится к конструктивной точке, где f исчезает. Мы достигли противоречия.

ГЛАВА 3

ОРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И БОРЕЛЕВСКИЕ МНОЖЕСТВА

25. Определение ординалов второго числового класса

Канторовская теория ординальных чисел второго числового класса получила конструктивное обоснование с использованием рекурсивных функций в работах Черча и Клини [1], Черча [2] и Клини [1]. Другой подход принадлежит Марквальду [1] и Спектору [1], который ввел так называемые рекурсивные вполне упорядочения. Мы будем ближе следовать изложению Брауэра [2] и [10].

Ординалы в нашем смысле можно изобразить как фундированные деревья, ветви которых, исходящие из данной точки, нумеруются натуральными числами 0, 1, ... в нужном количестве. См. рис. 6. Из каждой точки ветвления может исходить конечное или бесконечное число ветвей. Точка ветвления, из которой не исходит ветвей, называется вершиной. Фундированность дерева означает, что, как бы мы ни взбирались вверх по дереву, мы доберемся до вершины за конечное число шагов.

Формально мы определяем *ординальное число второго числового класса* как рекурсивно перечислимое множество α конечных последовательностей $,n_1, n_2, \ldots, n_l$ натуральных чисел, которое может быть получено повторными применениями следующего индуктивного пункта.

Если $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ (возможно, пустая или конечная) — рекурсивно перечислимая последовательность ординальных чисел, то рекурсивно перечислимое множество α, элементами которого являются $\square$ и множество всех $,n, n_1, \ldots, n_l$, таких, что $,n_1 \ldots, n_l$ принадлежит α_n, — ординальное число.

Если последовательность $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ пуста, подразумевается, что условие этого индуктивного определения выполнено тривиально, так что рекурсивно перечислимое множество, состоящее только из $\square$, является ординальным числом, называемым нулем и обозначаемым через 0.

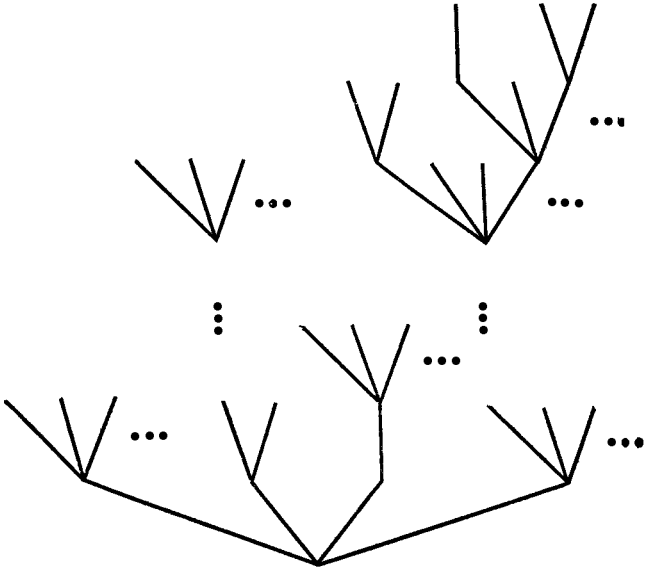


Рис. 6.

Ординальное число α, получаемое применением индуктивного пункта к последовательности ординалов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, называется *супремумом* этой последовательности, и мы пишем

$$\alpha = \sup \alpha_n.$$

Если α — это единственный ординал, то $\sup \alpha$ называется также *наследником* (или непосредственно следующим за) α. Используя стандартную запись, мы

вводим последовательно

$$0,\ 1=\sup 0,\ 2=\sup 1,\ 3=\sup 2,\ \ldots$$
$$\omega=\sup n,\ \omega+1=\sup\omega,\ \omega+2=\sup(\omega+1),\ \ldots$$
$$\omega 2=\sup(\omega+n),\ \omega 2+1=\sup\omega 2,\ \ldots$$
$$\vdots$$
$$\omega^2=\sup\omega n,\ \ldots,\ \omega^3=\sup\omega^2 n,\ \ldots$$
$$\vdots$$
$$\omega^\omega=\sup\omega^n,\ \ldots,\ \omega^{\omega^\omega}=\sup\omega^{\omega^n},\ \ldots$$
$$\vdots$$
$$\varepsilon_0=\sup\left.\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}\right\}^n,\ \ldots.$$
$$\vdots$$

Индуктивный пункт, определяющий ординальные числа, разрешает нам получать из бесконечного числа посылок

α_n — ординальное число для любого $n=0,\ 1,\ \ldots$

заключение

$\alpha=\sup\alpha_n$ — ординальное число.

Мы выражаем это, говоря, что задано *определение по трансфинитной индукции.*

Если мы можем доказать, что ординальное число $\alpha=\sup\alpha_n$ обладает некоторым свойством, как только α_n обладает этим свойством для любого $n=0,\ 1,\ \ldots$, то мы разрешаем себе заключить отсюда, что все ординалы второго числового класса также обладают этим свойством. На такое рассуждение мы будем ссылаться как на *доказательство по* (*с помощью*) *трансфинитной индукции.*

Мы будем говорить, что $n_1,\ n_2\ \ldots,\ n_l$ — *точка ветвления* (*узел*) ординального числа α, вместо того

чтобы говорить, что $,n_1, n_2 \ldots, n_l$ принадлежит рекурсивно перечислимому множеству α. *Верхний узел* — это такой узел, никакое собственное продолжение которого не принадлежит α.

Если $,n_1 \ldots, n_k$ — узел ординального числа α, то множество всех $,n_{k+1} \ldots, n_l$, таких, что $,n_1 \ldots, n_k, n_{k+1} \ldots, n_l$ также есть узел α, называется *подординалом k-го порядка* ординала α и будет обозначаться через

$$\alpha_{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

(Брауэр [2] применял название konstruktive Unterspecies k-ter Ordnung).

Трансфинитной индукцией с использованием соотношения

$$(\alpha_{n_1})_{n_2 \ldots n_k} = \alpha_{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

доказывается, что подординал действительно является ординалом.

26. Равенство и отношения порядка между ординальными числами

Мы введем сначала отношения порядка $<$ и $\leqslant$, в терминах которых легко определяется отношение равенства $=$.

Конечное множество выражений вида $\alpha < \beta$ или $\alpha \leqslant \beta$, где α и β — ординальные числа, будет называться *секвенцией*[1]). Секвенции будут обозначаться через Γ, Δ и Θ.

Мы будем рассматривать следующие два *правила вывода*:

$$\frac{\Gamma,\ \alpha_n < \beta \text{ для всех } n}{\Gamma,\ \alpha \leqslant \beta} \qquad \frac{\Gamma,\ \alpha \leqslant \beta_n \text{ для некоторого } n}{\Gamma,\ \alpha < \beta}.$$

Доказательство — это бесконечное дерево секвенций, в котором каждое разветвление является применением одного из правил вывода. В частности, верхние секвенции должны иметь вид $\Gamma,\ 0 \leqslant \beta$. Они

[1]) Приблизительное истолкование секвенции $A_1, \ldots, A_n$ дается формулой $A_1 \vee \ldots \vee A_n$. — *Прим. перев.*

выводятся посредством первого правила вывода, когда α есть нуль, так что посылка выполнена автоматически. Говоря точнее, мы понимаем под бесконечным деревом секвенций ординальное число вместе с частично рекурсивной функцией, которая сопоставляет некоторую секвенцию каждому узлу этого ординального числа. Полагаем $\alpha < \beta$ (или $\alpha \leqslant \beta$), если выводима соответствующая секвенция.

$\alpha \leqslant \beta$, *тогда и только тогда, когда* $\alpha_n < \beta$ *для всех* n.

Достаточность — просто применение первого правила выбора, а необходимость — следствие того факта, что обращение этого правила

$$\frac{\Gamma,\ \alpha \leqslant \beta}{\Gamma,\ \alpha_n < \beta \text{ для всех } n}$$

имеет место как допустимое правило вывода. Мы доказываем это трансфинитной индукцией по длине доказательства посылки. Следует различать несколько случаев в зависимости от последнего применения правила в данном доказательстве секвенции $\Gamma,\ \alpha \leqslant \beta$. Если $\Gamma = \Delta,\ \gamma \leqslant \delta$ и это применение есть

$$\frac{\Delta,\ \gamma_m < \delta,\ \alpha \leqslant \beta \text{ для всех } m}{\Delta,\ \gamma \leqslant \delta,\ \alpha \leqslant \beta},$$

то мы получаем по предположению индукции $\Delta, \gamma_m < \delta, \alpha_n < \beta$ для всех m и n. Отсюда по первому правилу вывода заключаем $\Delta, \gamma \leqslant \delta, \alpha_n < \beta = \Gamma, \alpha_n < \beta$ для всех n, что и требовалось доказать. Аналогично если $\Gamma = \Delta,\ \gamma < \delta$, и последнее применение правила есть

$$\frac{\Delta,\ \gamma \leqslant \delta_m,\ \alpha \leqslant \beta \text{ для некоторого } m}{\Delta,\ \gamma < \delta,\ \alpha \leqslant \beta}.$$

Остается рассмотреть случаи

$$\frac{\Gamma,\ \alpha_n < \beta \text{ для всех } n}{\Gamma,\ \alpha \leqslant \beta}$$

и

$$\frac{\Gamma,\ \alpha \leqslant \beta,\ \alpha_n < \beta \text{ для всех } n}{\Gamma,\ \alpha \leqslant \beta},$$

в первом из которых все получается сразу, а во втором можно применить предположение индукции к

$\Gamma, \alpha \leqslant \beta, \alpha_n < \beta$, получая тем самым $\Gamma, \alpha_n < \beta$ для всех n. Доказательство окончено.

$\alpha \leqslant \alpha$ для любого ординального числа α.

Доказательство — трансфинитной индукцией по α. Допустим, что $\alpha_n \leqslant \alpha_n$ для всех n. Тогда по второму правилу вывода $\alpha_n < \alpha$ для всех n, так что по первому правилу вывода $\alpha \leqslant \alpha$, что и требовалось доказать.

Если $\alpha < \beta$ и $\beta \leqslant \gamma$, то $\alpha < \gamma$.
Если $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$.

Мы докажем чуть больше, а именно что

$$\frac{\Gamma, \alpha < \beta \quad \Theta, \beta \leqslant \gamma}{\Gamma, \Theta, \alpha < \gamma} \qquad \frac{\Gamma, \alpha \leqslant \beta \quad \Theta, \beta < \gamma}{\Gamma, \Theta, \alpha < \gamma}$$

имеют место как допустимые правила вывода. Это делается кратной трансфинитной индукцией. Индукционное предположение состоит в том, что первое правило справедливо для всех подординалов первого порядка ординалов α и γ и что второе правило справедливо для всех подординалов первого порядка ординала β. Внутри индукционного перехода нам снова приходится применять трансфинитную индукцию, на этот раз предполагая, что правила справедливы, если уменьшилась длина вывода хотя бы одной из посылок.

Рассмотрим для начала первое правило. Следует различать несколько случаев в зависимости от последних применений правил в доказательствах посылок.

Основной случай возникает, когда они имеют вид

$$\frac{\Gamma, \alpha < \beta \; \alpha \leqslant \beta_n \text{ для некоторого } n}{\Gamma, \alpha < \beta}$$

и

$$\frac{\Theta, \beta \leqslant \gamma, \beta_n < \gamma \text{ для всех } n}{\Theta, \beta \leqslant \gamma}$$

соответственно. В этом случае доказательство завершается следующими применениями правил:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma,\ \alpha<\beta,\ \alpha\leqslant\beta_n\quad \Theta,\ \beta\leqslant\gamma}{\Gamma,\ \Theta,\ \alpha<\gamma,\ \alpha\leqslant\beta_n}\qquad \dfrac{\Gamma,\ \alpha<\beta\quad \Theta,\ \beta\leqslant\gamma,\ \beta_n<\gamma}{\Gamma,\ \Theta,\ \alpha<\gamma,\ \beta_n<\gamma}}{\Gamma,\ \Theta,\ \alpha<\gamma}.$$

Здесь верхние применения правил допустимы согласно предположению индукции по длинам доказательств посылок, а нижнее — согласно предположению индукции по β.

Второе правило рассматривается во многом тем же способом. Ограничимся случаем, когда последние применения правил в доказательствах посылок имеют вид

$$\dfrac{\Gamma,\ \alpha\leqslant\beta,\ \alpha_m<\beta \text{ для всех } m}{\Gamma,\ \alpha\leqslant\beta}$$

и

$$\dfrac{\Theta,\ \beta<\gamma,\ \beta\leqslant\gamma_n \text{ для некоторых } n}{\Theta,\ \beta<\gamma}$$

соответственно. Искомое заключение получается так:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma,\ \alpha\leqslant\beta,\ \alpha_m<\beta\quad \Theta,\ \beta<\gamma}{\Gamma,\ \Theta,\ \alpha<\gamma,\ \alpha_m<\beta}\qquad \dfrac{\Gamma,\ \alpha\leqslant\beta\quad \Theta,\ \beta<\gamma,\ \beta\leqslant\gamma_n}{\Gamma,\ \Theta,\ \alpha<\gamma,\ \beta\leqslant\gamma_n}}{\Gamma,\ \Theta,\ \alpha<\gamma,\ \alpha_m<\gamma_n}}{\dfrac{\Gamma,\ \Theta,\ \alpha<\gamma,\ \alpha\leqslant\gamma_n}{\Gamma,\ \Theta,\ \alpha<\gamma}}.$$

Здесь верхние применения правил допустимы согласно предположению индукции по длинам выводов посылок, а следующее применение — согласно предположению индукции по α и γ. Последние два применения — просто применения постулированных правил вывода. Доказательство окончено.

Если $\alpha\leqslant\beta$ *и* $\beta\leqslant\gamma$, *то* $\alpha\leqslant\gamma$.

Если $\alpha\leqslant\beta$, то $\alpha_n<\beta$ для всех n. Из $\alpha_n<\beta$ и $\beta\leqslant\gamma$ следует $\alpha_n<\gamma$. Таким образом, $\alpha_n<\gamma$ для всех n, так что $\alpha\leqslant\gamma$, что и требовалось доказать.

Транзитивность отношения $<$ следует из уже доказанного и того факта, что отношение $<$ сильнее, чем отношение $\leqslant$.

Если $\alpha<\beta$, *то* $\alpha\leqslant\beta$.

Достаточно доказать, что $\alpha_n \leqslant \alpha$ для всех n, так как тогда мы получим $\alpha_n < \beta$ для всех n, что эквивалентно $\alpha \leqslant \beta$. Соотношение $\alpha_n \leqslant \alpha$ доказывается трансфинитной индукцией по α с индукционным предположением $\alpha_{mn} \leqslant \alpha_m$ для всех m и n. Отсюда мы получаем $\alpha_{mn} < \alpha$ по второму правилу вывода для любых m и n, а затем $\alpha_m \leqslant \alpha$ по первому правилу вывода, что и требовалось доказать.

Следующую теорему можно рассматривать как конструктивный вариант теоремы о сравнимости ординальных чисел, которая в классической формулировке утверждает, что для любой пары ординальных чисел α, β имеет место либо $\alpha < \beta$, либо $\beta \leqslant \alpha$.

Для любых ординалов α и β доказуема секвенция $\alpha < \beta, \beta \leqslant \alpha$.

Мы докажем одновременной трансфинитной индукцией, что две секвенции

$$\alpha < \beta, \quad \beta \leqslant \alpha \qquad \alpha \leqslant \beta, \quad \beta < \alpha$$

доказуемы. Индукционное предположение состоит в том, что первая секвенция доказана для всех подординалов первого порядка ординала α, а вторая секвенция — для всех подординалов первого порядка ординала β. Отсюда мы получаем

$$\frac{\dfrac{\alpha \leqslant \beta_n,\ \beta_n < \alpha \quad \text{для всех } n}{\alpha < \beta,\ \beta_n < \alpha \quad \text{для всех } n}}{\alpha < \beta,\ \beta \leqslant \alpha}$$

и

$$\frac{\dfrac{\alpha_n < \beta,\ \beta \leqslant \alpha_n \quad \text{для всех } n}{\alpha_n < \beta,\ \beta < \alpha \quad \text{для всех } n}}{\alpha \leqslant \beta,\ \beta < \alpha},$$

что и требовалось доказать.

Отношения $\alpha < \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$ исключают друг друга.

Для того чтобы эта теорема имела место, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha < \alpha$ было невозможно для любого ординала α. Учитывая непротиворечивость нашего исчисления, т. е. недоказуемость пустой

секвенции, достаточно доказать выводимое правило

$$\frac{\Gamma, \alpha < \alpha}{\Gamma},$$

что мы сделаем трансфинитной индукцией по α. Внутри индукционного перехода нам придется использовать трансфинитную индукцию по длине доказательства посылки. Если $\Gamma = \Delta$, $\beta \leqslant \gamma$ и последнее применение правила в этом доказательстве есть

$$\frac{\Delta, \beta_n < \gamma, \alpha < \alpha \text{ для всех } n}{\Delta, \beta \leqslant \gamma, \alpha < \alpha},$$

то мы получаем Δ, $\beta_n < \gamma$ для всех n и, следовательно, Δ, $\beta \leqslant \gamma = \Gamma$ по первому правилу вывода. Аналогично и если $\Gamma = \Delta$, $\beta < \gamma$. Остается рассмотреть случаи

$$\frac{\Gamma, \alpha \leqslant \alpha_n \text{ для некоторого } n}{\Gamma, \alpha < \alpha}$$

и

$$\frac{\Gamma, \alpha < \alpha, \alpha \leqslant \alpha_n \text{ для некоторого } n}{\Gamma, \alpha < \alpha},$$

из которых более трудное — второе. Согласно предположению индукции по длине доказательства посылки мы получаем Γ, $\alpha \leqslant \alpha_n$ для некоторого n, что влечет Γ, $\alpha_n < \alpha_n$. Предположение индукции по α дает нам теперь искомое доказательство Γ.

Отношения равенства и неравенства между ординальными числами определяются следующим образом:

$$\alpha = \beta, \quad \text{если} \quad \alpha \leqslant \beta \quad \text{и} \quad \beta \leqslant \alpha.$$

$$\alpha \neq \beta, \quad \text{если доказуемо} \quad \alpha < \beta, \beta < \alpha.$$

Рефлексивность, симметричность и транзитивность отношения $=$ следует из рефлексивности и транзитивности $\leqslant$. Далее, тот факт, что отношения $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ и $\beta < \alpha$ взаимно исключают друг друга, является непосредственным следствием несовместимости $\alpha < \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$.

Заметим, наконец, что если $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ — возможно, пустая или конечная последовательность ординалов, то $\alpha = \sup \alpha_n$ — это наименьший ординал α, такой, что $\alpha_n < \alpha$ для всех n. А именно допустим, что $\alpha_n < \beta$ для всех n. Тогда по первому правилу вывода $\alpha \leqslant \beta$, как и утверждалось.

27. Неперечислимость второго числового класса

Ординальные числа, согласно нашему определению, — это некоторые рекурсивно перечислимые множества в двухбуквенном алфавите , | . Мы знаем, что существует рекурсивная нумерация всех рекурсивно перечислимых множеств слов в данном алфавите. Следовательно, конструктивные ординалы второго числового класса счетны в теоретико-множественном смысле слова. Тем не менее они не являются эффективно перечислимыми. Борель [2] и Брауэр [2] понимали это, а Тьюринг [2] доказал для ординалов Чёрча — Клини.

Если дана последовательность ординалов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, *то мы можем найти ординал* α, такой, что $\alpha_n \neq \alpha$ *для всех* n.

Построим ординал $\alpha = \sup \alpha_n$. Тогда $\alpha_n < \alpha$ и, следовательно, $\alpha_n \neq \alpha$ для всех n, что и требовалось доказать.

Заметим, что это доказательство использует рассуждение, которое привело Кантора к выводу о том, что второй числовой класс имеет мощность, которая больше $\aleph_0$ и в действительности равна второму по величине трансфинитному ординальному числу $\aleph_1$. Именно введение понятия эффективной перечислимости вместо теоретико-множественного понятия счетности позволяет нам вывести из рассуждения Кантора совсем иные следствия.

28. Открытые множества в бэровском пространстве

До сих пор мы еще не ввели отношений равенства и включения между открытыми множествами в бэровском пространстве. Чтобы сделать это, мы

определим сначала по трансфинитной индукции отношение: окрестность I *заперта* открытым множеством G (или множество G запирает I) в бэровском пространстве.

1 Если I принадлежит G, то G запирает I.

2 Если G запирает I, n для любого натурального числа n, то G запирает I.

Введем следующие определения, в которых A и B обозначают открытые множества в бэровском пространстве.

$A \subseteq B$, если B запирает любую окрестность, принадлежащую A.

$A = B$, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Обозначим через X все бэровское пространство, т. е. множество всех конечных последовательностей целых чисел $, n_1, n_2 \ldots, n_l$. Из данного нами определения мы заключаем, что $G = X$, где G — открытое множество, тогда и только тогда, когда G запирает пустую последовательность $\square$.

Пример. Пусть G состоит из всех окрестностей $, n_1, n_2 \ldots, n_l$, для которых $n_1 < l$. Согласно первому пункту, G запирает $, 0$ и G запирает $, 1, n_2$ для любого n_2, так что по второму пункту G запирает $, 1$. Снова по первому пункту G запирает $, 2, n_2, n_3$ для любых n_2 и n_3, откуда второй пункт позволяет нам заключить, что G запирает $, 2, n_2$ для любого n_2, а затем, что G запирает $, 2$. Продолжая тем же способом, мы доказываем, что G запирает $, n_1$ для любого n_1. Следовательно, по второму пункту G запирает $\square$, так что $G = X$.

В определении открытого подмножества G бэровского пространства мы могли бы потребовать, чтобы рекурсивно перечислимое множество G было разрешимым. Это не привело бы к ограничению общности.

Пусть A — открытое множество в бэровском пространстве. Тогда $A = B$ для открытого множества B, которое, если его рассматривать как рекурсивно перечислимое множество, разрешимо и содержится в A.

Если n — номер доказательства I в постовской системе A, то B будет содержать все окрестности I,

более тонкие, чем I, для которых $d(J) \leqslant 2^{-n}$. Для любой окрестности I можно решить, принадлежит ли она B, проверяя, является ли I более тонкой, чем одна из окрестностей, принадлежащих A и имеющих доказательство с номером $\leqslant n$, где $d(I) = 2^{-n}$. Следовательно, рекурсивно перечислимое множество B содержится в рекурсивно перечислимом множестве A. С другой стороны, наша конструкция такова, что B запирает любую окрестность из A, откуда $A = B$, что и требовалось доказать.

Напомним, что в определении открытого множества G в канторовом пространстве мы требовали не только того, чтобы $I0$ и $I\,|$ принадлежали G вместе с I, но и обратного соотношения. Мы всегда можем достичь этого, отмечая производящие схемы G и добавляя новые схемы:

$$B \quad \frac{Bx}{Bx0} \quad \frac{Bx}{Bx|} \quad \frac{Bx\ Gx}{x} \quad \frac{x0\ x|\ Bx}{x}.$$

В бэровском пространстве это не срабатывает, так как схема, соответствующая последней из только что приведенных, должна была бы иметь бесконечное множество посылок. Следующий пример, приведенный Клини [4], показывает, что мы действительно существенно ограничили бы общность, потребовав, чтобы окрестность I принадлежала открытому множеству G в бэровском пространстве, если I, n принадлежит G для всех n.

Пусть A — открытое множество, состоящее из всех окрестностей $, n_1, n_2 \ldots, n_l$, таких, что n_2 не является номером доказательства n_1 в диагональном множестве D. Допустим, что $A = B$, где B обладает свойством: если для всех n окрестность I, n принадлежит B, то I принадлежит B. Тогда $n \notin D$ тогда и только тогда, когда $, n$ принадлежит B. Так как последнее отношение рекурсивно перечислимо, это противоречит неразрешимости D.

Брауэр работал с понятием *свободно становящейся* последовательности (choice sequence) натуральных чисел

$$, n_1, n_2 \ldots, n_l \ldots ,$$

последовательные элементы которой определяются произвольным образом, путем свободного выбора, а не обязательно математическим законом. Бесконечно продолжающаяся последовательность принадлежит по определению открытому множеству B в бэровском пространстве, если для некоторого l ее начальный отрезок $, n_1, n_2 \ldots, n_l$ есть окрестность из G. Примем на минуту понятие бесконечно продолжающейся последовательности. В дополнение к данному выше определению $G = X$ (G запирает $\square$) мы получаем другое определение, потребовав, чтобы все бесконечно продолжающиеся последовательности принадлежали G. Эквивалентность этих двух определений составляет содержание брауэровской *бар теоремы*. Разумеется, она имеет лишь интуитивный смысл, если не принято понятие бесконечно продолжающейся последовательности. Бар теорема и теорема о веерах из следующего пункта весьма тщательно обсуждены Клини и Весли [1].

29. Теорема Брауэра о веерах

С каждой рекурсивной последовательностью натуральных чисел

$$, c_1, c_2 \ldots, c_l \ldots$$

мы можем связать дополнительно локализованное открытое множество A в бэровском пространстве, состоящее из всех окрестностей $, n_1, n_2 \ldots, n_l$, таких, что $n_k > c_k$ для некоторого $k \leqslant l$. $B = \complement A$ является тогда локализованным замкнутым множеством, которое мы назовем *ограничивающим множеством*. Замкнутое множество F в бэровском пространстве *ограничено*, если мы можем найти ограничивающее множество B, такое, что $F \subseteq B$. Ограниченное замкнутое множество в бэровском пространстве называется *компактным*.

Следующая лемма содержит основную сущность теоремы Брауэра о веерах.

Если G — открытое множество, покрывающее все бэровское пространство, и $,c_1,c_2 \ldots ,c_l$ — рекурсивная последовательность натуральных чисел, мы можем найти настолько большое l, что $,n_1,n_2 \ldots ,n_l$ принадлежит G для всех $n_1 \leqslant c_1$, $n_2 \leqslant c_2$, ..., $n_l \leqslant c_l$.

Сначала мы с помощью обычной индукции определим некоторое рекурсивно перечислимое отношение R между окрестностями в бэровском пространстве и натуральными числами.

1 Если окрестность I принадлежит G, то полагаем $IR0$.

2 Если I, nRl для всех $n \leqslant c_{k+1}$, где k есть длина I, то $IR\ l+1$.

Очевидно, IRl означает, что $I\ ,n_{k+1}\ ,n_{k+2} \ldots ,n_{k+l}$ принадлежит G для всех $n_{k+1} \leqslant c_{k+1}$, $n_{k+2} \leqslant c_{k+2}$, ..., $n_{k+l} \leqslant c_{k+l}$, где k означает длину I. Таким образом, утверждение теоремы имеет место тогда и только тогда, когда мы можем найти такое l, что $\square Rl$, т. е. тогда и только тогда, когда $\square$ принадлежит области R.

Мы сейчас покажем, что область R содержит все окрестности I, которые заперты множеством G, и, значит, в частности, пустую последовательность $\square$. Мы сделаем это трансфинитной индукцией по длине доказательства того, что G запирает I. Базис. Если I принадлежит G, то $IR0$, так что I принадлежит области R. Шаг индукции. Допустим, что I, n принадлежит области R для любого n, т. е. для любого n мы можем найти l_n, такое, что $I,\ nRl_n$. Положим

$$l = \max_{n \leqslant c_{k+1}} l_n,$$

где k обозначает длину I. Тогда I, nRL для всех $n \leqslant c_{k+1}$, так что в силу второго пункта выше $IRl+1$. Следовательно, I принадлежит области R. Доказательство закончено.

Теорема Гейне — Бореля о покрытиях для бэровского пространства — простое следствие только что доказанной леммы.

Если F — компактное множество в бэровском пространстве и

$$F \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n,$$

где G_0, G_1, ... — последовательность открытых множеств, то можно найти настолько большое N, что

$$F \subseteq \bigcup_{n=0}^{N} G_n.$$

Компактность F означает, что $F = \complement G$, где G открыто и $F \subseteq B$, где $B = \complement A$ — ограничивающее множество, определяемое рекурсивной последовательностью натуральных чисел

$$,c_1\ ,c_2 \ldots ,c_l \ldots .$$

Далее, $F \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$ означает, что открытое множество $G \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$ покрывает все бэровское пространство. Применяя приведенную выше лемму, находим l, такое, что $,n_1\ ,n_2 \ldots ,n_l$ принадлежит $G \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$ для всех $n_1 \leqslant c_1$, $n_2 \leqslant c_2$, ..., $n_l \leqslant c_l$. Так как имеется лишь конечное число таких окрестностей, мы можем найти настолько большое N, что все они содержатся уже в $G \cup \bigcup_{n=0}^{N} G_n$. Теперь объединение этих окрестностей и A равно всему пространству и $F \subseteq B$, значит $A \subseteq G$. Следовательно,

$$G \cup \bigcup_{n=0}^{N} G_n = X,$$

а это и есть определение отношения

$$F \subseteq \bigcup_{n=0}^{N} G_n.$$

Если f — дискретнозначный частично рекурсивный функционал, который всюду определен на компактном множестве F в бэровском пространстве, то можно найти натуральное число l, такое, что значение f на F определяется уже знанием первых l знаков аргумента.

Эта обычная форма теоремы о веерах, доказанная Брауэром [5], [6], [11] и [12] при дополнительном предположении, что компактное множество F локализовано.

Доказательство. По предположению F содержится в области f, которая определена как объединение всех окрестностей I, таких, что $If n$ для некоторого натурального числа n. Согласно предыдущей теореме, уже конечное число этих окрестностей покрывает F. Пусть l — максимум их длин. Тогда для вычисления значений f на F достаточно знать первые l знаков аргумента.

30. Борелевские множества

Мы возвращаемся теперь к задаче о конструктивной интерпретации теоретико-множественных отношений между внутренними и внешними предельными множествами, которая осталась нерешенной в п. 20. Оказывается, что эта задача для полной иерархии борелевских множеств не труднее, чем для внутренних предельных множеств, так что мы рассмотрим непосредственно этот более общий случай.

Для упрощения наше рассмотрение борелевских множеств будет ограничено канторовским пространством. Остальные пространства можно рассмотреть похожим образом.

Простое множество в канторовском пространстве — это синтаксическое выражение вида

$$\bigcup I_1 \bigcup I_2 \ldots \bigcup I_n,$$

где $I_1, I_2, \ldots, I_n$ — окрестности. Интуитивно говоря, множество в канторовском пространстве простое, если оно налагает условия лишь на конечное число

координат. Используя теорему Гейне — Бореля о покрытиях, мы видим, что простые множества — это в точности те, которые одновременно и открыты, и замкнуты. Если дано простое множество, то можно найти другое простое множество, являющееся его дополнением. Аналогично мы можем найти объединение и пересечение любых двух простых множеств. Отношения включения и равенства между простыми множествами очевидным образом разрешимы.

Сейчас мы определим трансфинитной индукцией понятие борелевского множества.

1 Если A — простое множество, то A — борелевское множество.

2 Если $A_0, A_1, \ldots$ — возможно, пустая или конечная рекурсивно перечислимая последовательность борелевских множеств, то $\bigcup A_n$ и $\bigcap A_n$ — борелевские множества.

Точнее, борелевское множество A — это ординальное число, каждому узлу которого некоторая частично рекурсивная функция сопоставляет либо простое множество, либо один из знаков $\bigcup$, $\bigcap$, причем простые множества сопоставлены только вершинам. Если α — это лежащий в основе ординал, то мы говорим, что A имеет бэровский класс α. A имеет *аддитивный* или *мультипликативный* класс α в зависимости от внешнего знака A, т. е. от того, какой знак, $\bigcup$ или $\bigcap$, сопоставляет рассматриваемая частично рекурсивная функция узлу $\square$.

Когда ординал равен 0 и узлу $\square$ сопоставлено $\bigcup$ или $\bigcap$, мы получаем два борелевских множества, называемых *пустым множеством* и *всем пространством* и обозначаемых соответственно через $\emptyset$ и X.

Дополнение $\complement A$ борелевского множества A получается заменой любого простого множества на его дополнение и взаимной заменой $\bigcup$ и $\bigcap$. Для объединения двух борелевских множеств мы будем использовать обычную неформальную запись $A \cup B$. Аналогично для пересечения. *Разность* двух борелевских множеств A и B определяется соотношением

$$A - B = A \cap \complement B,$$

а *симметрическая разность* — соотношением

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Чтобы определить отношение включения между борелевскими множествами, мы построим формальную систему генценовского типа, правила вывода которой имеют бесконечное число посылок. *Формулами* нашей системы являются борелевские множества, а конечная последовательность формул

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$

где $n \geqslant 0$, называется *секвенцией*. Чтобы избежать структурных правил вывода, мы будем отождествлять секвенции, которые равны, если их рассматривать как конечные множества. Буквы Γ, Δ и Θ будут использоваться для обозначения секвенций.

Аксиома — это секвенция, состоящая целиком из простых множеств, которые вместе покрывают все пространство. Ясно, что если зафиксирована запись простых множеств, то множество аксиом разрешимо.

Наша формальная система имеет два *правила вывода*. Формула, указанная явно в заключении правила вывода, называется *главной формулой* этого правила.

$\bigcup$-введение $\quad \dfrac{\Gamma,\ A_n \text{ для некоторого } n}{\Gamma,\ \bigcup A_n}$

$\bigcap$-введение $\quad \dfrac{\Gamma,\ A_n \text{ для всех } n}{\Gamma,\ \bigcap A_n}$.

В случае пустого объединения посылка $\bigcup$-введения выполнена, если доказана Γ, а для пустого пересечения подразумевается, что посылка $\bigcap$-введения выполнена тривиально.

Мы полагаем по определению, что борелевское множество A содержится в борелевском множестве B, и пишем

$$A \subseteq B,$$

если секвенция

$$\subset A,\ B$$

может быть выведена из аксиом с использованием приведенных выше правил вывода.

Равенство определяется соотношением

$$A = B, \quad \text{если} \quad A \subseteq B \quad \text{и} \quad B \subseteq A.$$

Остается показать, что определенное нами отношение включения имеет все обычные свойства или, что сводится к тому же, доказать достаточное число *выводимых правил* для сформулированной нами формальной системы. Будет достаточно следующих правил:

закон исключенного третьего $A, \complement A$

утончение $\dfrac{\Gamma}{\Gamma, A}$

$\bigcap$-удаление $\dfrac{\Gamma, \bigcap A_n}{\Gamma, A_n \text{ для всех } n}$

сечение $\dfrac{\Gamma, A \quad \Theta, \complement A}{\Gamma, \Theta}$

Именно сечение является основным среди этих выводимых правил. Оно играет ту же роль для нашей системы, что основная теорема Генцена [1] для классической логики предикатов первого порядка. Доказательства следуют тому же образцу.

Закон исключенного третьего выражает рефлексивность отношения включения, т. е. тот факт, что $A \subseteq A$ для любого борелевского множества A.

Транзитивность отношения включения — это простое следствие правила сечения. Действительно, отношения $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ означают, что обе секвенции

$$\complement A, B \quad \text{и} \quad \complement B, C$$

доказуемы, а тогда доказуема и

$$\complement A, C,$$

т. е. в точности $A \subseteq C$, что и требовалось доказать.

Доказательство закона исключенного третьего. Трансфинитной индукцией по бэровскому классу A. Базис. Если A — простое множество, то $A, \complement A$ — аксиома. Шаг индукции. Допустим, что $A = \bigcup A_n$ и $A_n, \complement A_n$ уже доказано для всех n. По $\bigcup$-введению мы получаем тогда $A, \complement A_n$ для всех n, $\bigcap$-введение дает

затем A, CA, что и требовалось. Аналогично, если $A = \bigcap A_n$.

Доказательство утончения. Рассмотрим данный вывод секвенции Г и добавим формулу A к каждой секвенции, входящей в этот вывод. При этом преобразовании каждое применение правила переходит в применение того же правила, так что достаточно доказать возможность утончения аксиом. Это делается трансфинитной индукцией по бэровскому классу A. Если A — пустое множество, утончение очевидным образом допустимо. Допустим, что $A = \bigcup A_n$ и что утончение уже доказано для всех A_n. Это значит, что для любого n мы построили вывод Г, A_n. По $\bigcup$-введению мы получаем Г, A. Аналогично если $A = \bigcap A_n$.

Доказательство $\bigcap$-удаления. Мы используем трансфинитную индукцию по длине данного вывода Г, $\bigcap A_n$ и должны рассмотреть ряд случаев в зависимости от правила, примененного на последнем шаге вывода, и от того, является ли $\bigcap A_n$ главной формулой этого правила.

Если $\Gamma = \Delta$, $\bigcap B_m$ и последнее применение правила в данном выводе имеет вид

$$\frac{\Delta,\ B_m,\ \bigcap A_n \text{ для некоторого } m,}{\Gamma,\ \bigcup B_m,\ \bigcap A_n},$$

то предположение индукции дает Δ, B_m, A_n для всех n. Применяя то же самое правило вывода, мы получаем отсюда Δ, $\bigcup B_m$, A_n для всех n, т. е. Г, A_n для всех n, что и требовалось доказать. Аналогично если $\Gamma = \Delta$, $\bigcap B_m$.

Если $\bigcap A_n$ — главная формула последнего применения правила в доказательстве Г, $\bigcap A_n$, то это применение — либо

$$\frac{\Gamma,\ A_n \text{ для всех } n}{\Gamma,\ \bigcap A_n}, \quad \text{либо} \quad \frac{\Gamma,\ \bigcap A_n,\ A_n \text{ для всех } n}{\Gamma,\ \bigcap A_n}.$$

В первом случае мы непосредственно получаем Г, A_n для всех n, а во втором индукционное предположение позволяет нам вывести то же заключение. Это завершает доказательство $\bigcap$-удаления.

Доказательство сечения. Доказательство получается индукцией по бэровскому классу формулы A. Базис. Если A — простое множество, мы используем непосредственную трансфинитную индукцию по длинам выводов посылок. В этом месте не возникает трудностей, так как A не может быть главной формулой последнего применения правила в выводе посылки. Кроме того, сечение тривиально имеет место, когда посылки являются аксиомами.

Индукционный переход. Так как сечение симметрично относительно своих посылок, достаточно рассмотреть случай, когда $A = \bigcup A_n$ и утверждение доказано для всех A_n. Мы снова должны использовать трансфинитную индукцию, на этот раз по длинам выводов посылок. Если A не является главной формулой последнего применения правила в выводе Γ, A или $\complement A$ не является таковой в выводе $\Theta, \complement A$, то рассуждение протекает по следующему образцу. Пусть $\Gamma = \Delta, \bigcap B_n$ и последнее применение правила в выводе Γ, A есть

$$\frac{\Delta, B_n A \text{ для всех } n}{\Delta, \bigcap B_n, A}.$$

Предположение индукции позволяет нам выполнить сечение

$$\frac{\Delta, B_n, A \quad \Theta, \complement A}{\Delta, B_n, \Theta}$$

для всех n, а затем Γ, Θ получается $\bigcap$-введением.

Если $A = \bigcup A_n$ есть главная формула последнего применения правила в выводе секвенции Γ, A, то это применение имеет вид

$$\frac{\Gamma, A_n \text{ для некоторого } n}{\Gamma, A} \quad \text{или} \quad \frac{\Gamma, A, A_n \text{ для некоторого } n}{\Gamma, A}$$

и аналогично, когда $\complement A = \bigcap \complement A_n$ есть главная формула последнего применения правила в выводе секвенции $\Theta, \complement A$, это применение имеет вид

$$\frac{\Theta, \complement A_n \text{ для всех } n}{\Theta, \complement A} \quad \text{или} \quad \frac{\Theta, \complement A, \complement A_n \text{ для всех } n}{\Theta, \complement A}.$$

Таким образом, нужно рассмотреть четыре случая. В первом случае сечение

$$\frac{\Gamma, A_n \quad \Theta, \mathbf{C}\, A_n}{\Gamma, \Theta}$$

допустимо согласно соответствующему индукционному предположению. Во втором случае мы производим два сечения

$$\frac{\dfrac{\Gamma, A, A_n \quad \Theta, \mathbf{C}\, A}{\Gamma, \Theta, A_n} \quad \Theta, \mathbf{C}\, A_n}{\Gamma, \Theta},$$

верхнее из которых обосновывается предположением индукции по длинам доказательств посылок, а нижнее — индукционным предположением, касающимся бэровского класса формулы сечения. Аналогично в третьем случае. В четвертом случае мы производим следующие три сечения:

$$\frac{\dfrac{\Gamma, A, A_n \quad \Theta, \mathbf{C}\, A}{\Gamma, \Theta, A_n} \quad \dfrac{\Gamma, A \quad \Theta, \mathbf{C}\, A, \mathbf{C}\, A_n}{\Gamma, \Theta, \mathbf{C}\, A_n}}{\Gamma, \Theta}.$$

Предположение индукции по длинам доказательств посылок позволяет нам выполнить два верхних сечения, а предположение индукции по бэровскому классу формулы сечения оправдывает нижнее сечение. Доказательство окончено.

31. Конструктивный вариант теоремы Гёделя о полноте

Множество всех оценок (т. е. распределений истинностных значений) атомарных формул, выполняющих данную формулу классического исчисления предикатов первого порядка, — это борелевское множество конечного бэровского класса в канторовом пространстве. Конструктивизация теории борелевских множеств, предпринятая в предыдущем пункте, позволяет нам дать конструктивный вариант теоремы Гёделя [1] о полноте.

Мы будем рассматривать формулы, построенные обычным образом из предикатных символов, функциональных символов, свободных и связанных переменных и логических связок и кванторов $-$, $\vee$, $\wedge$, $\bigvee$ и $\bigwedge$. Знак отрицания может стоять только перед атомарными формулами, а отрицание произвольной формулы определяется индуктивно по законам де Моргана.

Конечная последовательность формул

$$F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n$$

будет называться секвенцией. Мы отождествляем секвенции, если они равны как конечные множества.

Аксиома — это секвенция, построенная из атомарных формул и их отрицаний и содержащая как F, так и $-F$ для некоторой атомарной формулы F. Правила вывода следующие:

$\vee$-введение $\quad \dfrac{\Gamma, F}{\Gamma, F \vee G} \quad \dfrac{\Gamma, G}{\Gamma, F \vee G}$

$\wedge$-введение $\quad \dfrac{\Gamma, F \quad \Gamma, G}{\Gamma, F \wedge G}$

$\bigvee$-введение $\quad \dfrac{\Gamma, Ft}{\Gamma, \bigvee x\, Fx}$

$\bigwedge$-введение $\quad \dfrac{\Gamma, Fa}{\Gamma, \bigwedge x\, Fx}$

Для правила $\bigwedge$-введения имеется обычное условие: свободная переменная a не должна входить в заключение.

Зафиксируем теперь взаимно однозначную рекурсивную нумерацию атомарных формул

$$F_0,\ F_1,\ \ldots,\ F_n,\ \ldots.$$

Используя 0 и $|$ для обозначения истинности и ложности соответственно, мы сопоставим каждой атомарной формуле $F = F_n$ множество $\bar{F}$ всех оценок атомарных формул, при которых F истинна, т. е. множество всех бесконечных бинарных последовательностей, n-я координата которых равна $|$. Это простое множество в канторовском пространстве. Для неатомарных

формул F мы определяем $\bar{F}$ индукцией по числу логических знаков в F:

$$\overline{-F} = C\bar{F},\ \overline{F \vee G} = \bar{F} \cup \bar{G},\ \overline{F \wedge G} = \bar{F} \cap \bar{G},$$

$$\overline{\bigvee x Fx} = \bigcup \bar{F}t_n\ \overline{\bigwedge x Fx} = \bigcap \bar{F}t_n.$$

Здесь мы предположили, что

$$t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_n,\ \ldots$$

— фиксированная взаимно однозначная нумерация всех термов. Если Γ — секвенция, то мы будем обозначать через $\bar{\Gamma}$ секвенцию борелевских множеств, полученную из Γ заменой каждой формулы F на $\bar{F}$.

Так как в формуле F есть лишь конечное число логических знаков, то бэровский класс $\bar{F}$ конечен.

Формула F называется логически истинной, если она истинна для всех оценок атомарных формул, т. е. если $\bar{F} = X$, где X обозначает все канторовское пространство. Мы готовы теперь сформулировать наш вариант теоремы Гёделя о полноте.

Формула доказуема тогда и только тогда, когда она логически истинна.

Заменим временно правило $\bigwedge$-введения, сформулированное выше, на бесконечное правило

$$\frac{\Gamma,\ Ft \text{ для всех } t}{\Gamma,\ \bigwedge x Fx}.$$

Выводы в модифицированном таким образом исчислении предикатов изоморфны выводам в формальной системе для борелевских множеств, построенной в предыдущем пункте, если мы сопоставим каждой формуле F борелевское множество $\bar{F}$. С другой стороны, приведенное выше бесконечное правило. эквивалентно обычному правилу $\bigwedge$-введения. Действительно, если Γ, Ft доказуемо для всех термов t, то, в частности, доказуемо Γ, Fa, где a — свободная переменная, не входящая в $\Gamma, \bigwedge x Fx$, так как свободная переменная является термом. Обратно, если даны произвольный терм t и вывод секвенции Γ, Fa, где a — свободная переменная, не входящая в Γ, $\bigwedge x Fx$,

то позаботимся сначала о том, чтобы переменные, связываемые при $\wedge$-введениях в доказательстве Γ, Fa, не входили бы в t. Затем мы можем заменить a на t во всем доказательстве, получая тем самым вывод Γ, Ft. Доказательство закончено.

Основная теорема Генцена утверждает, что правило сечения имеет место для исчисления предикатов как производное правило вывода:

сечение $$\frac{\Gamma, F \quad \Theta, -F}{\Gamma, \Theta}.$$

Это утверждение оказывается непосредственным следствием справедливости правила сечения для исчисления борелевских множеств (через теорему о полноте). Действительно, если Γ, F и Θ, $-F$, то по одной половине теоремы о полноте мы получаем $\overline{\Gamma}$, $\overline{F}$ и $\overline{\Theta}, C\overline{F}$. Отсюда правило сечения для борелевских множеств позволяет нам заключить $\overline{\Gamma}$, $\overline{\Theta}$, а другая половина теоремы о полноте дает Γ, Θ, что и требовалось. Хотя это доказательство основной теоремы и конструктивно, оно, в отличие от доказательства Генцена [1], не финитно в строгом гильбертовском смысле.

32. Полнота логики второго порядка с сечением

Мы будем теперь рассматривать логику второго порядка, получаемую из логики первого порядка (предыдущий раздел) добавлением замкнутых предикатных переменных к списку символов и разрешением применять в формулах кванторы по предикатам.

К аксиомам и правилам вывода для первого порядка мы добавляем кванторные правила второго порядка и правило сечения

$\vee$-введение $$\frac{\Gamma, FT}{\Gamma, \vee XFX}$$

$\wedge$-введение $$\frac{\Gamma, FA}{\Gamma, \wedge XFX}$$

сечение $$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, -F}{\Gamma}.$$

Здесь T обозначает предикатный терм, A — свободную предикатную переменную, не входящую в Γ, $\bigwedge XFX$.

Зафиксируем взаимно однозначную рекурсивную нумерацию

$$F_0, F_1, \ldots, F_n, \ldots$$

всех формул, а не только атомарных, как в предыдущем пункте. Для произвольной формулы $F = F_n$ мы будем обозначать через $\bar{F}$ простое множество в канторовом пространстве, определяемое условием, что n-я координата равна $|$.

Мы переходим к определению внутреннего предельного множества V в канторовом пространстве, которое образует *множество всех полных оценок.* V — это пересечение следующих открытых множеств:

1 Для любой формулы F — открытые множества $\bar{F} \cup \overline{-F}$ и $C\bar{F} \cup C\overline{-F}$.

2 Для любой формулы $F \vee G$ — открытые множества $C\bar{F} \cup \overline{F \vee G}$, $C\bar{G} \cup \overline{F \vee G}$ и $\bar{F} \cup \bar{G} \cup C\overline{F \vee G}$.

3 Для любой формулы $F \wedge G$ — открытые множества $\bar{F} \cup C\overline{F \wedge G}$, $\bar{G} \cup C\overline{F \wedge G}$ и $C\bar{F} \cup C\bar{G} \cup \overline{F \wedge G}$.

4 Для любой формулы $\bigvee xFx$ открытые множества $\bigcup \overline{Ft} \cup C\overline{\bigvee xFx}$, где объединение берется по всем предметным термам t, и открытое множество $C\overline{Ft} \cup \cup \overline{\bigvee xFx}$ для любого предметного терма t.

5 Для любой формулы $\bigwedge xFx$ — открытое множество $\bigcup C\overline{Ft} \cup \overline{\bigwedge xFx}$ и открытое множество $\overline{Ft} \cup \cup C\overline{\bigwedge xFx}$ для любого предметного терма t.

6 Для любой формулы $\bigvee XFX$ — открытое множество $\bigcup \overline{FT} \cup C\overline{\bigvee XFX}$, где объединение берется по всем предикатным термам от подходящего числа переменных, и открытое множество $C\overline{FT} \cup \overline{\bigvee XFX}$ для каждого предикатного терма T.

7 Для любой формулы $\bigwedge XFX$ открытое множество $\bigcup C\overline{FT} \cup \overline{\bigwedge XFX}$ и открытое множество $\overline{FT} \cup \cup C\overline{\bigwedge XFX}$ для любого предикатного терма T.

Формула F истинна для всех полных оценок, если $V \subseteq \bar{F}$, т. е. если $\mathsf{C}V$, $\bar{F}$ выводима в исчислении борелевских множеств. Мы докажем следующий конструктивный вариант теоремы Генкина [1] о полноте для логики второго порядка с сечением.

Формула истинна для всех полных оценок тогда и только тогда, когда она доказуема в логике второго порядка с сечением.

Достаточность. Заменим правила $\bigwedge$-введения бесконечными правилами

$$\frac{\Gamma, Ft \text{ для всех } t}{\Gamma, \bigwedge x Fx}, \quad \frac{\Gamma, FT \text{ для всех } T}{\Gamma, \bigwedge XFX}.$$

Как и в случае логики первого порядка, секвенция выводима посредством этих бесконечных правил тогда и только тогда, когда она выводима в обычной логике второго порядка.

Непосредственным следствием построения V является доказуемость следующих семи типов борелевских секвенций:

1 $\mathsf{C}V, \bar{F}, \overline{-F}$ и $\mathsf{C}V, \mathsf{C}\bar{F}, \mathsf{C}\overline{-F}$

2 $\mathsf{C}V, \mathsf{C}\bar{F}, \overline{F \vee G}$ и $\mathsf{C}V, \mathsf{C}\bar{G}, \overline{F \vee G}$

3 $\mathsf{C}V, \mathsf{C}\bar{F}, \mathsf{C}\bar{G}, \overline{F \wedge G}$

4 $\mathsf{C}V, \mathsf{C}\overline{Ft}, \overline{\bigvee xFx}$

5 $\mathsf{C}V, \mathsf{C}\bigcap \overline{Ft}, \overline{\bigwedge xFx}$

6 $\mathsf{C}V, \mathsf{C}\overline{FT}, \overline{\bigvee XFX}$

7 $\mathsf{C}V, \mathsf{C}\bigcap \overline{FT}, \overline{\bigwedge XFX}$.

Для секвенции Γ, состоящей из формул второго порядка, обозначим через $\bar{\Gamma}$ секвенцию, состоящую из простых множеств, полученную путем замены каждой формулы F из Γ на $\bar{F}$.

Мы докажем индукцией по длине доказательства Γ, что если Γ выводима в логике второго порядка, то $\mathsf{C}V$, $\bar{\Gamma}$ выводима в исчислении борелевских множеств. Базис. Если Γ — аксиома, то $\mathsf{C}V$, $\bar{\Gamma}$ получается из

$\mathsf{C}V$, $\bar{F}$, $\overline{-F}$ утончением. Шаг индукции. Допустим, например, что $\Gamma = \Delta$, $\bigwedge XFX$ и что последнее применение правила в доказательстве Γ есть

$$\frac{\Delta,\ FT \text{ для всех } T}{\Delta,\ \bigwedge XFX}.$$

По индукционному предположению мы имеем $\mathsf{C}V$, $\bar{\Delta}\overline{FT}$ для всех T. $\bigcap$-введение дает $\mathsf{C}V$, $\bar{\Delta}$, $\bigcap\overline{FT}$. Далее, мы знаем, что $\mathsf{C}V, \mathsf{C}\bigcap\overline{FT}$, $\overline{\bigwedge XFX}$ выводима в исчислении борелевских множеств. Сечение, примененное к этим двум посылкам, дает $\mathsf{C}V$, $\bar{\Delta}$, $\overline{\bigwedge XFX} = \mathsf{C}V$, $\bar{\Gamma}$, что и требовалось. Остальные правила вывода рассматриваются аналогично.

Необходимость. Допустим, что формула F истинна для всех полных оценок, т. е. что мы имеем вывод $\mathsf{C}V$, $\bar{F}$ в исчислении борелевских множеств. Мы преобразуем этот вывод в вывод формул F в логике второго порядка с сечением.

Так как борелевское исчисление не содержит сечения, то имеет место принцип подформульности. Таким образом, любая секвенция из доказательства $\mathsf{C}V$, $\bar{F}$ имеет вид

$$A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n, \mathsf{C}V, \bar{F},$$

где $B_1, \ldots, B_n$ — некоторые из замкнутых множеств, объединением которых является $\mathsf{C}V$, а $A_1, \ldots, A_m$ — некоторые из атомарных множеств (т. е. множеств, ограничивающих лишь одну координату), пересечениями которых являются упомянутые замкнутые множества. Некоторые из множеств $A_1, \ldots, A_m$, $B_1, \ldots, B_n$, $\mathsf{C}V$ могут, разумеется, отсутствовать.

Множество A_i имеет вид $\bar{G}$ или $\mathsf{C}\bar{G}$, где G — некоторая формула. В первом случае заменим A_i на G, во втором — на $-G$. Сделаем это для всех $i = 1, \ldots, m$. Далее мы просто вычеркнем множества $B_1, \ldots, B_n$, $\mathsf{C}V$ и, наконец, заменим $\bar{F}$ на F. Таким образом мы преобразуем каждую секвенцию из данного вывода $\mathsf{C}V$, $\bar{F}$ в секвенцию, состоящую из формул второго порядка. Конечная секвенция $\mathsf{C}V$, $\bar{F}$ пе-

реходит в F. Мы получили вывод F, в котором каждая аксиома и применение правила является частным случаем следующих аксиом и правил вывода.

Аксиомы — это секвенции (не обязательно состоящие из атомарных формул), содержащие как F, так и $-F$ для некоторой формулы F, а правила вывода — это

$$\frac{\Gamma, F \quad \Gamma, -F}{\Gamma}$$

$$\frac{\Gamma, -F \quad \Gamma, -G \quad \Gamma, F \vee G}{\Gamma}$$

$$\frac{\Gamma, -F \quad \Gamma, F \wedge G}{\Gamma} \quad \frac{\Gamma, -G \quad \Gamma, F \wedge G}{\Gamma}$$

$$\frac{\Gamma, -Ft \text{ для всех } t \quad \Gamma, \bigvee xFx}{\Gamma} \quad \frac{\Gamma, -Ft \quad \Gamma, \bigwedge xFx}{\Gamma}$$

$$\frac{\Gamma, -FT \text{ для всех } T \quad \Gamma, \bigvee XFX}{\Gamma} \quad \frac{\Gamma, -FT \quad \Gamma, \bigwedge XFX}{\Gamma}.$$

Так как аксиомы легко могут быть выведены в логике второго порядка с сечением, а правила вывода справедливы как выводимые правила, мы видим, что формула F выводима в логике второго порядка с сечением. Доказательство закончено.

В действительности в ходе доказательства мы получили больше, чем нам было нужно, а именно некоторую нормальную форму выводов в логике второго порядка с сечением.

ГЛАВА 4

ТЕОРИЯ МЕРЫ

33. Продолжение меры и ее основные свойства

Рассмотрим канторовское пространство и сопоставим любой окрестности

$$I = \underbrace{0|00\ldots|0}_{n}$$

меру $\mu(I) = 2^{-n}$. Эта мера μ будет называться мерой Лебега. Более общо, мы можем рассмотреть любую общерекурсивную функцию μ, которая сопоставляет любой окрестности I некоторое вычислимое вещественное число таким образом, что

$$\mu(I) \geqslant 0, \ \mu(\square) = 1,$$
$$\mu(I) = \mu(I0) + \mu(I|).$$

С точностью до порядка слагаемых представление простого множества

$$P = \bigcup I_1 \bigcup I_2 \ldots \bigcup I_n$$

однозначно, если мы потребуем, чтобы окрестности $I_1, I_2, \ldots, I_n$ были дизъюнктны и n минимально. Мера P тогда однозначно определена, если положить

$$\mu(P) = \mu(I_1) + \mu(I_2) + \ldots + \mu(I_n).$$

Очевидно, что

$$\mu(\emptyset) = 0, \ \mu(X) = 1,$$

и что

$$\mu(P) \geqslant 0$$

для любого простого множества P. Далее, нетрудно доказать теорему сложения

$$\mu(P \cup Q) + \mu(P \cap Q) = \mu(P) + \mu(Q)$$

для простых множеств P и Q.

Мы скажем, что открытое множество U *ограничено* вычислимым действительным числом ε, если

$$\mu(P) \leqslant \varepsilon$$

для любого простого множества $P \subseteq U$. Заметим, что ввиду открытости U содержащиеся в нем простые множества образуют рекурсивно перечислимое множество.

Следующая лемма, являющаяся простым следствием теоремы Гейне — Бореля о покрытиях, оказывается фундаментальной. Действительно, вне зависимости от рассматриваемого пространства основные теоремы переносятся без изменений, как только доказана эта лемма.

Если U_0, U_1, ... — последовательность открытых множеств, ограниченных соответственно числами ε_0, ε_1, ..., и $\sum_0^N \varepsilon_n \leqslant \varepsilon$ для всех N, то $\bigcup U_n$ ограничено числом ε.

Пусть P — простое множество $\subseteq \bigcup U_n$. По лемме Гейне — Бореля мы можем найти простые множества $P_0, P_1, \ldots, P_n$, такие, что

$$P \subseteq P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_N,$$
$$P_n \subseteq U_n, \quad 0 \leqslant n \leqslant N.$$

Следовательно,

$$\mu(P) \leqslant \sum_0^N \mu(P_n) \leqslant \sum_0^N \varepsilon_n \leqslant \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Борелевское множество A *измеримо*, если для любого вычислимого действительного числа $\varepsilon > 0$ (разумеется, достаточно брать числа вида 2^{-n}, например) мы можем найти простое множество P и открытое множество U, такие, что

$$A \triangle P \subseteq U$$

и U ограничено числом ε. Мы покажем, что существует единственное вычислимое действительное чис-

ло $\mu(A)$, называемое *мерой* множества A, со свойством

$$|\mu(A)-\mu(P)|\leqslant\varepsilon$$

при любом выборе $\varepsilon>0$, простого множества P и открытого множества U. Действительно, предположим, что

$$A\triangle P\subseteq U,\ A\triangle Q\subseteq V,$$

где P и Q — простые, а открытые множества U и V ограничены соответственно числами ε и η. Тогда

$$P\triangle Q\subseteq(A\triangle P)\cup(A\triangle Q)\subseteq U\cup V,$$

так что

$$|\mu(P)-\mu(Q)|\leqslant\mu(P\triangle Q)\leqslant\varepsilon+\eta,$$

так как $P\triangle Q$ — простое множество, а $U\cup V$ ограничено числом $\varepsilon+\eta$ согласно фундаментальной лемме. Это показывает существование и единственность $\mu(A)$.

Только что введенная мера — это *продолжение* меры, введенной ранее только для простых множеств. Действительно, если A — простое множество, то мы можем положить $P=A$ и $U=\emptyset$, так что U ограничено числом $\varepsilon=0$. Следовательно, новая мера множества A совпадает с его первоначальной мерой. В частности,

$$\mu(\emptyset)=0,\quad \mu(X)=1.$$

Далее,

$$\mu(A)\geqslant 0$$

для любого измеримого множества A, так как $\mu(A)$ может быть сколь угодно хорошо аппроксимирована числами $\mu(P)$, где P — простое множество, а выше отмечено, что $\mu(P)\geqslant 0$.

Если A — измеримое множество, то $\complement A$ — тоже измеримое и

$$\mu(\complement A)=1-\mu(A).$$

Пусть дано произвольное вычислимое действительное число $\varepsilon>0$. Так как A измеримо, можно

найти простое множество P и открытое множество U, такое, что

$$A \triangle P \subseteq U$$

и U ограничено числом ε. Тогда

$$|\mu(A) - \mu(P)| \leqslant \varepsilon$$

и, так как $\complement P$ — простое и

$$\complement A \triangle \complement P = A \triangle P \subseteq U,$$

мы получаем

$$|\mu(\complement A) - \mu(\complement P)| \leqslant \varepsilon,$$

что вместе с $\mu(P) + \mu(\complement P) = 1$ и произвольностью ε дает искомое соотношение

$$\mu(A) + \mu(\complement A) = 1.$$

Если A и B — измеримые множества, то $A \cup B$ и $A \cap B$ — тоже измеримые и

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Так как A и B измеримы, мы можем найти простые множества P и Q и открытые множества U и V, ограниченные числом ε, такие, что

$$A \triangle P \subseteq U, \ B \triangle Q \subseteq V.$$

Тогда

$$(A \cup B) \triangle (P \cup Q) \subseteq (A \triangle P) \cup (B \triangle Q) \subseteq U \cup V,$$
$$(A \cap B) \triangle (P \cap Q) \subseteq (A \triangle P) \cup (B \triangle Q) \subseteq U \cup V,$$

где $P \cup Q$, $P \cap Q$ — простые и $U \cup V$ ограничено числом 2ε согласно фундаментальной лемме. Следовательно, $A \cup B$ и $A \cap B$ измеримы и

$$|\mu(A \cup B) - \mu(P \cup Q)| \leqslant 2\varepsilon,$$
$$|\mu(A \cap B) - \mu(P \cap Q)| \leqslant 2\varepsilon,$$
$$|\mu(A) - \mu(P)| \leqslant \varepsilon, \ |\mu(B) - \mu(Q)| \leqslant \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно и теорема сложения верна для простых множеств P и Q, она следует отсюда также и для измеримых множеств A и B.

Если $A_0, A_1, \ldots$ — рекурсивная последовательность дизъюнктных измеримых множеств и $\sum_0^\infty \mu(A_n)$ сходится, то $\bigcup_0^\infty A_n$ измеримо и

$$\mu\left(\bigcup_0^\infty A_n\right) = \sum_0^\infty \mu(A_n).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Для любого n мы можем приблизить A_n простым множеством P_n таким образом, что

$$A_n \triangle P_n \subseteq U_n,$$

где U_n открыто и ограничено числом $\varepsilon 2^{-n-1}$. Далее, так как $\sum_0^\infty \mu(A_n)$ по предположению сходится, мы можем найти столь большое N, что

$$\sum_{N+1}^\infty \mu(A_n) \leqslant \varepsilon.$$

Полагая

$$P = \bigcup_0^N P_n, \quad U = \bigcup_0^N U_n \cup \bigcup_{N+1}^\infty (P_n \cup U_n),$$

мы получаем

$$\left(\bigcup_0^\infty A_n\right) \triangle P \subseteq U,$$

где P — простое, U — открытое, ограниченное числом

$$\sum_0^N \varepsilon 2^{-n-1} + \sum_{N+1}^\infty \left(\mu(A_n) + \varepsilon 2^{-n-1}\right) \leqslant 2\varepsilon.$$

Это доказывает измеримость $\bigcup_0^\infty A_n$. Теперь

$$\left|\mu\left(\bigcup_0^\infty A_n\right)-\mu(P)\right|\leqslant 2\varepsilon,$$

$$\left|\mu\left(\bigcup_0^N A_n\right)-\mu(P)\right|\leqslant \sum_0^N \varepsilon 2^{-n-1}\leqslant \varepsilon,$$

$$\left|\sum_0^N \mu(A_n)-\sum_0^\infty \mu(A_n)\right|\leqslant \varepsilon,$$

где второе неравенство следует из $\bigcup_0^N A_n \triangle P \subseteq \bigcup_0^N U_n$ и фундаментальной леммы. По предыдущей теореме

$$\mu\left(\bigcup_0^N A_n\right)=\sum_0^N \mu(A_n),$$

так что

$$\left|\mu\left(\bigcup_0^\infty A_n\right)-\sum_0^\infty \mu(A_n)\right|\leqslant 4\varepsilon,$$

и, так как выбор числа ε был произвольным, мы получаем искомое соотношение

$$\mu\left(\bigcup_0^\infty A_n\right)=\sum_0^\infty \mu(A_n).$$

Если $A_0, A_1, \ldots$ — рекурсивная последовательность измеримых множеств и $\mu\left(\bigcup_0^N A_n\right)$ сходится при $N\to\infty$, то $\bigcup_0^\infty A_n$ измеримо и $\mu\left(\bigcup_0^\infty A_n\right)=\lim_{N\to\infty}\mu\left(\bigcup_0^N A_n\right)$.

Это следствие получается применением предыдущей теоремы к последовательности

$$B_0=A_0,\ B_n=A_n\cap \complement A_{n-1}\cap \ldots \cap \complement A_0,\ n=1, 2, \ldots.$$

По двойственности мы видим, что следствие также справедливо, если повсюду заменить $\bigcup$ на $\bigcap$.

Если A — борелевское множество и

$$B \subseteq A \subseteq C,$$

где B и C измеримы и имеют одинаковую меру, то A измеримо и $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C)$.

Так как $A = (A - B) \cup B$, $A - B \subseteq C - B$, $C - B$ измеримо и $\mu(C - B) = \mu(C) - \mu(B) = 0$, то достаточно доказать, что борелевское подмножество любого множества меры нуль само имеет меру нуль. Это будет сделано в п. 35.

Борелевское множество A измеримо тогда и только тогда, когда мы можем найти измеримое внешнее предельное множество B и измеримое внутреннее предельное множество C, такие, что

$$B \subseteq A \subseteq C$$

и $\mu(B) = \mu(C)$.

Достаточность немедленно следует из предыдущей теоремы. Обратно, предположим, что A измеримо. Тогда для любого n мы можем найти простое множество P_n, такое, что

$$A \triangle P_n \subseteq U_n,$$

где U_n открыто и ограничено числом 2^{-n}. Множества

$$B = \bigcup (P_n \cap \complement U_n), \quad C = \bigcap (P_n \cup U_n)$$

являются соответственно внешним и внутренним предельным множеством и

$$B \subseteq A \subseteq C; \quad B \triangle P_n \subseteq U_n; \quad C \triangle P_n \subseteq U_n,$$

откуда следует, что B и C измеримы и имеют ту же меру, что и A.

34. Измеримые и неизмеримые открытые множества. Теорема Брауэра

По определению A есть непустое открытое множество, если

$$A = \bigcup I_n,$$

где $I_0, I_1, \ldots$ — рекурсивная последовательность окрестностей. Мы покажем, что A измеримо тогда и только тогда, когда $\mu\left(\bigcup_0^N I_n\right)$ сходится при $N \to \infty$, и в этом случае

$$\mu(A) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_0^N I_n\right).$$

Пусть A измеримо, и пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда мы можем найти такое простое множество P и такое открытое множество U, ограниченное числом ε, что

$$A \triangle P \subseteq U.$$

Отсюда мы заключаем

$$P \subseteq \bigcup I_n \cup U,$$

так что теорема Гейне — Бореля позволяет нам найти столь большое N, что

$$P \subseteq \bigcup_0^N I_n \cup U.$$

Теперь $P \triangle \bigcup_0^N I_n$ — простое множество $\subseteq U$ и, следовательно,

$$\left|\mu(P) - \mu\left(\bigcup_0^N I_n\right)\right| \leqslant \mu\left(P \triangle \bigcup_0^N I_n\right) \leqslant \varepsilon,$$

что вместе с

$$|\mu(A) - \mu(P)| \leqslant \varepsilon$$

дает

$$\mu\left(\bigcup_0^N I_n\right) \geqslant \mu(A) - 2\varepsilon.$$

Это завершает доказательство необходимости условия, а достаточность следует из предыдущего пункта.

Брауэр [3] вводил измеримость открытого множества (Bereich) посредством вышеприведенного усло-

вия. Мы получаем, что для открытых множеств его определение совпадает с нашим.

Теперь легко построить неизмеримое открытое множество. Пусть f — общерекурсивная функция, перечисляющая без повторений нерекурсивное множество натуральных чисел. Окрестности

$$I_n = \underbrace{000\ldots0}_{f(n)}|, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

дизъюнктны, так что

$$\mu\left(\bigcup_0^N I_n\right) = \sum_0^N 2^{-f(n-1)},$$

где μ — мера Лебега. Как показано в п. 16, правая часть равенства не сходится при $N \to \infty$ и, следовательно,

$$\bigcup_0^\infty I_n$$

— неизмеримое открытое множество.

Мы переходим к доказательству важной теоремы Брауэра [3] (содержащейся также в книге Гейтинга), не имеющей классического аналога.

Если A — измеримое множество, то для любого $\varepsilon > 0$ мы можем найти измеримое открытое множество B, дополнительно локализованное и такое, что

$$A \subseteq B, \ \mu(B) \leqslant \mu(A) + \varepsilon.$$

Для любой окрестности

$$I = \underbrace{0||\ldots0|}_{n}$$

мы можем решить, что имеет место

$$\mu(I - A) \leqslant \varepsilon 2^{-2n-1}$$

или

$$\mu(I - A) > \varepsilon 2^{-2n-2},$$

вычисляя $\mu(I - A)$ с достаточной точностью. Ясно, что мы можем дать эффективную процедуру, которая

всегда выбирает один определенный из этих двух случаев. Пусть B_n — простое множество, являющееся объединением тех из окрестностей длины n, для которых мы остановились на первом случае. Мы покажем, что открытое множество

$$B = \bigcup_0^\infty B_n$$

удовлетворяет условиям теоремы.

Пусть I — произвольная окрестность $\subseteq A$. Тогда $\mu(I - A) = 0$, так что необходимо $I \subseteq B_n \subseteq B$, где n обозначает длину I. Мы заключаем, что $A \subseteq B$.

Далее мы покажем, что B измеримо. Из определения B_n мы видим, что

$$\mu(B_n - A) \leqslant \varepsilon 2^{-2n-1} 2^n = \varepsilon 2^{-n-1}.$$

Так как ряд, общий член которого дается правой частью равенства, суммируем, мы заключаем из предыдущего пункта, что $\bigcup_0^\infty (B_n - A) = \bigcup_0^\infty B_n - A = B - A$; тем самым $B = A \cup (B - A)$ измеримо и

$$\mu(B) - \mu(A) = \mu(B - A) \leqslant \sum_0^\infty \varepsilon 2^{-n-1} = \varepsilon.$$

Мы покажем, наконец, что если I — окрестность длины n, то $I \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $I \subseteq B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n$. Так как очевидным образом можно решить, верно ли это включение, отсюда следует, что B дополнительно локализовано. Возьмем производящие схемы, которые порождают окрестности всех B_n, $n = 0, 1, \ldots$, и отметим их, скажем, символом B. Добавим новые схемы

$$A \quad \frac{Ax}{Ax0} \quad \frac{Ax}{Ax|} \quad \frac{Ax\ Bx}{x} \quad \frac{x\ Ax}{x0} \quad \frac{x\ Ax}{x|}.$$

Мы покажем, что если обе окрестности $I\,0$ и $I\,|$ доказуемы в этой системе Поста, то это же верно для окрестности I. Это очевидно, если какая-либо из $I\,0$, $I\,|$ получена по одной из двух последних схем, по-

этому предположим, что $I0$ и $I|$ — окрестности из B_{n+1}, где n обозначает длину I. Тогда обязательно

$$\mu(I0 - A) \leqslant \varepsilon 2^{-2n-3}, \ \mu(I| - A) \leqslant \varepsilon 2^{-2n-3},$$

так что

$$\mu(I - A) \leqslant \varepsilon 2^{-2n-2},$$

что вынуждает I быть одной из окрестностей из B_n. Теперь $I \subseteq B$ означает, что I доказуемо в приведенной выше системе Поста и тогда уже $I \subseteq B_0 \cup B_1 \cup \ldots \ldots \cup B_n$, где n — длина I. Это завершает доказательство.

Мы знаем, что непустота замкнутого множества, вообще говоря, недостаточна для того, чтобы оно содержало конструктивную точку. Однако, как отмечено Брауэром [3], из только что доказанной теоремы следует, что если замкнутое множество измеримо и имеет положительную меру, то мы можем найти в нем конструктивную точку. Это следствие было переоткрыто Крайзелем и Лакомбом [1], а также Заславским и Цейтиным [1].

По данному замкнутому множеству положительной меры мы можем найти содержащуюся в нем конструктивную точку.

Согласно предыдущей теореме, мы можем найти локализованное замкнутое измеримое подмножество данного множества, все еще имеющее положительную меру. Следовательно, оно непусто и, будучи локализованным, содержит конструктивную точку.

Теперь мы можем обсудить различие между брауэровским и принятым нами определением измеримости. Как уже отмечено, эти два определения эквивалентны, если мы ограничимся множествами, которые открыты или замкнуты. Однако для внутренних и внешних предельных множеств это уже не так.

Точечный вид A измерим, по Брауэру [3], если для любого $\varepsilon > 0$ мы можем найти простое множество P и открытое измеримое множество U, такие, что $A \triangle P \subseteq U$ и $\mu(U) \leqslant \varepsilon$. Если забыть, что мы предпочли понятие борелевского множества брауэровскому понятию вида, то единственная разница между

этими двумя определениями измеримости в том, что Брауэр требует, чтобы U было измеримым и $\mu(U) \leqslant \varepsilon$, в то время как мы удовлетворяемся тем, что U ограничено числом ε.

Рассмотрим построенное в п. 20 внутреннее предельное множество $A = \bigcap G_n$, которое содержит все конструктивные точки, хотя при любом n множество G_n ограничено числом 2^{-n} относительно меры Лебега. Согласно нашему определению, A очевидным образом измеримо и $\mu(A) = 0$. Следовательно, если F — измеримое замкнутое подмножество множества A, то $\mu(F) = 0$. Допустим теперь, что G — измеримое открытое множество, такое, что $A \subseteq G$. Тогда G содержит все конструктивные точки и мы можем заключить из теоремы Брауэра, что $\mu(G) = 1$. Это показывает, что A не может быть измеримо по Брауэру, так как точечный вид измерим в смысле Брауэра тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ мы можем найти измеримые открытое и замкнутое множества G и F соответственно, такие, что $F \subseteq A \subseteq G$ и $\mu(G) - \mu(F) = \mu(G - F) \leqslant \varepsilon$.

Имеется несколько причин, по которым мы приняли более широкое определение измеримости, чем Брауэр. Прежде всего, проблема всегда состояла в нахождении непротиворечивого и возможно более широкого продолжения меры, определенной сначала лишь для простых множеств. Наше продолжение, хотя оно идет дальше брауэровского, не влечет отхода от конструктивной точки зрения. Во-вторых, тот факт, что наше определение позволяет нам построить внутреннее предельное множество меры нуль, содержащее все конструктивные точки, хотя оно и обеспокоит тех, чей континуум состоит только из конструктивных точек, находится в полном согласии с интуиционистской концепцией континуума как среды свободного становления. В-третьих, принятое определение дает нам возможность доказать новую теорему, которая может служить оправданием понятия случайной последовательности, задуманного фон Мизесом и разработанного Вальдом и Чёрчем (см. Чёрч [3]). Это будет показано в следующем пункте.

35. Множества меры нуль

Удобно использовать следующее несколько упрощенное определение множества меры нуль, или, как мы будем иногда говорить, нулевого множества.

Борелевское множество A измеримо и имеет меру нуль тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ мы можем найти открытое множество U, такое, что

$$A \subseteq U$$

и U ограничено числом ε.

Чтобы увидеть это, допустим, что A измеримо и $\mu(A) = 0$. Тогда для данного $\varepsilon > 0$ мы можем найти простое множество P и открытое множество U, такие, что

$$A \triangle P \subseteq U$$

и U ограничено числом ε. $V = P \cup U$ открыто,

$$A \subseteq V,$$

и мы покажем, что V ограничено числом ε. Пусть Q — простое множество $\subseteq V$. Тогда

$$A \triangle (P \cup Q) \subseteq (A \triangle P) \cup (Q - P) \subseteq U,$$

так что

$$\mu(Q) \leqslant \mu(P \cup Q) = |\mu(A) - \mu(P \cup Q)| \leqslant \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. Достаточность этого условия очевидна.

После этой переформулировки определения множества меры нуль непосредственно ясно, что борелевское подмножество нулевого множества — снова нулевое множество.

Если A — борелевское множество и $A \subseteq B$, где B измеримо и $\mu(B) = 0$, то A измеримо и $\mu(A) = 0$.

Отсюда и из результатов п. 23 мы получаем следствие.

Если $A_0, A_1, \ldots$ — рекурсивная последовательность нулевых множеств, то $\bigcup A_n$ — нулевое множество.

Мы переходим к доказательству того, что понятие измеримости, с которым мы имеем дело, позволяет построить внутреннее предельное множество, максимальное в том смысле, что в нем содержится любое другое нулевое множество. Этот результат был получен Мартин-Лёфом [1].

Мы уже знаем, что открытые множества могут быть рекурсивно перенумерованы. Учитывая это, мы покажем, что для каждого вычислимого $\varepsilon > 0$ (достаточно брать его в виде 2^{-n}) мы можем рекурсивно перечислить все открытые множества U, такие, что

$$\mu(P) < \varepsilon$$

для всех простых множеств $P \subseteq U$. Выберем произвольное открытое множество U, и пусть $I_0, I_1, \ldots$ — рекурсивная нумерация составляющих его окрестностей. Модифицируем U, взяв объединение лишь тех I_n, для которых $\mu(I_0 \cup \ldots \cup I_n) < \varepsilon$. Так как последнее отношение рекурсивно перечислимо (в этом причина того, что мы выбрали $<$ вместо $\leqslant$, несколько отклонившись от определения ограниченности), то модифицированное U — открытое множество, удовлетворяющее вышеприведенному условию. Далее, те открытые множества U, для которых это условие уже выполнено, остаются неизменными после модификации.

Мы показали, что для любого n мы можем рекурсивно перечислить открытые множества, удовлетворяющие указанному условию при $\varepsilon = 2^{-n}$. Но тогда мы можем также рекурсивно перечислить внутренние предельные множества

$$\bigcap U_n,$$

которые таковы, что $\mu(P) < 2^{-n}$ для всех простых множеств $P \subseteq U_n$. Очевидно, что все эти внутренние предельные множества измеримы и имеют меру нуль. Их объединение, скажем A, является, следовательно, множеством меры нуль.

Пусть B — произвольное множество меры нуль. Тогда, по определению нулевого множества, мы можем найти открытые множества U_n, такие, что

$$B \subseteq \bigcap U_n$$

и $\mu(P) < 2^{-n}$ для всех простых множеств $P \subseteq U_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Следовательно, $B \subseteq A$, так что A — максимальное множество меры нуль. Далее, будучи само нулевым множеством, A содержится в некотором внутреннем предельном множестве меры нуль, которому оно должно быть равно из-за максимальности. Следовательно, A — внутреннее предельное множество.

Мы построили внутреннее предельное множество меры нуль, содержащее любое множество меры нуль.

Переходя к дополнениям, мы видим, что мы могли сопоставить любой мере μ некоторое внешнее предельное множество, являющееся минимальным множеством меры 1. Его естественно назвать *конструктивным носителем* μ.

Мы хотели бы сделать следующее замечание относительно классического понятия носителя. Он определяется как дополнение объединения всех окрестностей I, для которых $\mu(I) = 0$. Классически это замкнутое множество. Однако легко построить вычислимую меру μ, для которой множество окрестностей I, таких, что $\mu(I) = 0$, не является рекурсивно перечислимым. Таким образом, мы не можем в общем случае получить классический носитель как конструктивное замкнутое множество, а вынуждены довольствоваться внутренним предельным множеством $\bigcap G_n$, где G_n — объединение окрестностей I длины n, для которых $\mu(I) > 0$. Будучи множеством меры один, оно наверняка содержит конструктивный носитель, но в общем случае более объемисто. Например, классический носитель меры Лебега равен всему пространству, в то время как конструктивный носитель не содержит ни одной конструктивной точки. Далее, за исключением случая дискретного пространства, классический носитель не имеет никакого отношения к понятиям абсолютной непрерывности и сингулярности. С другой стороны, две конструктивные меры являются, например, сингулярными тогда и только тогда, когда их конструктивные носители дизъюнктны.

Наконец, отметим следствие, усиливающее последнюю теорему из п. 33.

Если дано измеримое множество A, то мы можем найти измеримое внешнее предельное множество B и измеримое внутреннее предельное множество C, такие, что $B \subseteq A \subseteq C$, $\mu(C - B) = 0$, *и, далее, любое измеримое множество, которое отличается от A не более чем на нулевое множество, также содержится между B и C.*

Возьмем B и C, построенные в конце п. 33, и модифицируем их, вычтя максимальное нулевое множество из B и добавив максимальное нулевое множество к C. Модифицированные таким образом B и C очевидно удовлетворяют условиям теоремы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Цель этого приложения — коротко объяснить смысл, который мы придаем термину конструктивный.

Все рассматриваемые нами объекты должны быть *конструктивными объектами*, т. е. конечными конфигурациями знаков. Эти знаки, которые могут быть непосредственно распознаны как равные или различные, рассматриваются как далее неразложимые атомы. Конструктивные объекты должны рассматриваться как конкретные объекты, т. е. в конечном счете как существующие во времени и пространстве. Например, формулы и доказательства в формальной системе являются конструктивными объектами в этом смысле, а произвольные осмысленные утверждения и неформальные доказательства не являются. Также и множества в обычном интуитивном смысле, безусловно, не являются конструктивными объектами.

Мы принимаем анализ оперирования над конструктивными объектами по механическим правилам, данный Постом [1] и Тьюрингом [1]. В соответствии с этим анализом *правила* вычислений, так же как и сами *вычисления*, снова являются конструктивными объектами и оказывается разрешимым вопрос о корректности вычисления по данным правилам. Точнее, имеется разрешимый предикат $T(e, m, n)$, выражающий, что n — корректное вычисление по правилу e с начальными данными m, и в этом случае мы можем считывать результат $U(n)$ вычисления n. Так как конструктивные объекты — это просто конфигурации знаков, их можно закодировать натуральными числами.

Мы скажем, что e *применимо* к m, если существует n, такое, что $T(e, m, n)$;

$$\bigvee n T(e, m, n).$$

Отсюда немедленно получается, что не может быть правила, которое позволило бы нам решать для любого правила m, применимо ли оно к самому себе. Действительно, тогда имелось бы правило e, применимое к m тогда и только тогда, когда m не применимо к самому себе:

$$\bigvee n T(e, m, n) \leftrightarrow -\bigvee n T(m, m, n).$$

В частности, e применимо к себе тогда и только тогда, когда e не применимо к себе:

$$\bigvee n T(e, e, n) \leftrightarrow -\bigvee n T(e, e, n),$$

что противоречиво.

Любая теорема конструктивной математики, после того как она до конца проанализирована, имеет утвердительную форму: найден конструктивный объект с определенным свойством. Критический вопрос состоит в том, какие свойства мы собираемся считать конструктивно осмысленными.

Простейший случай представляет разрешимое свойство $P(n)$. Это просто правило, позволяющее нам вычислять истинностное значение для любого натурального n. В применении к таким свойствам классические пропозициональные связки $\wedge$ (и), $\vee$ (или), $-$ (не), $\rightarrow$ (влечет) имеют четкий вычислительный смысл, который задается обычными таблицами истинности, и применима классическая логика высказываний. Например, $P(n) \vee -P(n)$ — разрешимое свойство, которое имеет место для всех натуральных n.

Классически произвольные логические формулы, построенные из разрешимых предикатов с помощью пропозициональных связок и кванторов $\wedge$ (для всякого) и $\vee$ (существует) по числовым переменным, считаются осмысленными в терминах классического понятия истинности, и законы классической логики предикатов истинны при такой интерпретации. Например, формула

$$\bigwedge e \bigvee m \bigwedge n (T(e, e, m) \vee -T(e, e, n))$$

истинна в классическом смысле.

Конструктивно произвольные формулы, построенные из разрешимых предикатов с помощью $\vee$, $\wedge$; $-$, $\rightarrow$, $\bigwedge$ и $\bigvee$, не считаются осмысленными без дальнейшего анализа, и только после того, как такой анализ проведен, имеет смысл спрашивать, какие законы логики верны.

Начнем с того, что будем считать конструктивно осмысленными свойствами вида Π_2^0

$$\bigwedge m \bigvee n P(m, n),$$

где P разрешимо. Частными случаями являются Π_1^0, т. е. $\bigwedge n P(n)$ и Σ_1^0, т. е. $\bigvee n P(n)$. Самый типичный пример Π_2^0-свойства — это применимость правила e ко всем числам m:

$$\bigwedge m \bigvee n T(e, m, n).$$

Утверждая. $\bigwedge m \bigvee n P(m, n)$, мы имеем в виду, что мы нашли метод, позволяющий нам каждый раз, когда нам дано натуральное число m, найти такое натуральное n, что верно $P(m, n)$. Заметим, что подразумеваемый смысл Π_2^0- утверждения — тот же самый и при классической интерпретации. Действительно, если $\bigwedge m \bigvee n P(m, n)$ истинно классически, то мы действительно имеем метод нахождения для каждого m натурального числа n, такого, что истинно $P(m, n)$. Мы просто вычисляем одно за другим истинностные значения

$$P(m, 1),\ P(m, 2),\ \ldots,$$

пока не обнаружим n, для которого верно $P(m, n)$. Таким образом, между классической и конструктивной интерпретациями Π_2^0-утверждений нет разницы в отношении подразумеваемого смысла. Разница заключается в допускаемых методах доказательства. Например, пусть $P(n)$ — утверждение, что n есть гёделевский номер некоторого доказательства в аксиоматической теории множеств (или даже в арифметике второго порядка) с последней формулой $0 = 1$. Тогда P — разрешимый предикат, а утверждение

$$\bigwedge n - P(n),$$

выражающее непротиворечивость этой формальной системы, имеет место классически, хотя в настоящее время мы не обладаем его конструктивным доказательством.

Рассмотрим теперь произвольную предваренную формулу

$$\bigwedge m_1 \bigvee n_1 \ldots \bigwedge m_j \bigvee n_j P(m_1, n_1, \ldots, m_j, n_j)$$

с разрешимым P. Мы скажем, что эта формула *конструктивно истинна*, если мы нашли правила $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_j$, такие, что f_i применима ко всем i-членным системам натуральных чисел, $i = 1, \ldots, j$, и

$$\bigwedge m_1 \ldots m_j P(m_1, f_1(m_1), \ldots, m_j, f_j(m_1, \ldots, m_j)).$$

В полной записи это значит, что мы нашли правила $f_1, f_2, \ldots, f_j$, такие, что

$$\bigwedge m_1 \ldots m_j \bigvee n_1 \ldots n_j (T(f_1, m_1, n_1) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge T(f_j, (m_1, \ldots, m_j), n_j) \wedge P(m_1, U(n_1), \ldots, m_j, U(n_j))).$$

Это свойство считается конструктивно осмысленным, так как оно имеет вид Π_2^0.

Формула

$$\bigwedge e \bigvee m \bigwedge n (T(e, e, m) \vee - T(e, e, n))$$

не является конструктивно истинной, хотя она истинна классически. Действительно, предположим, что f — правило, применимое ко всем натуральным числам и удовлетворяющее

$$\bigwedge en (T(e, e, f(e)) \vee - T(e, e, n)).$$

Тогда

$$T(e, e, f(e)) \leftrightarrow \bigvee n T(e, e, n),$$

так что мы имели бы разрешающую процедуру для предиката $\bigvee n\, T(e, e, n)$, что невозможно. Этот пример показывает, что законы классической логики, в частности закон исключенного третьего, могут вести к заключениям, не являющимся конструктивно истинными.

Первые две главы основаны на некритическом принятии Π_2^0-утверждений как конструктивно осмыслен-

ных, а нужные рудименты логики можно понимать в терминах конструктивной истинности.

Мы уже видели, что классическое понятие истины отличается от понятия конструктивной истинности. Тем не менее оказывается, что понятие арифметической истины может быть конструктивно понято совершенно иным способом, с помощью *интерпретации отсутствием контрпримера* (которая была намечена Эрбраном [1] для случая логики предикатов и распространена на теорию чисел Крайзелем [1]; последнему принадлежит и терминология). Рассмотрим снова предваренную формулу

$$\bigwedge m_1 \bigvee n_1 \ldots \bigwedge m_j \bigvee n_j P(m_1, n_1, \ldots, m_j, n_j),$$

которую мы обозначим через A. Тогда

$$-A \leftrightarrow \bigvee m_1 \bigwedge n_1 \ldots \bigvee m_j \bigwedge n_j - P(f_1, n_1, \ldots, m_j, n_j) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \bigvee f_1 \ldots f_j \bigwedge n_1 \ldots n_j -$$
$$- P(f_1, n_1, \ldots, f_j(n_1, \ldots, n_{j-1}), n_j),$$

где область значений f_i — все теоретико-числовые функции от $i-1$ аргумента, $i = 1, \ldots, j$. Следовательно,

$$A \leftrightarrow \bigwedge f_1 \ldots f_j \bigvee n_1 \ldots n_j P(f_1, n_1, \ldots, f_j(n_1, \ldots, n_{j-1}), n_j),$$

причем последняя формула называется[1]) интерпретацией отсутствием контрпримера для A. Кодируя $f_1, \ldots, f_j$ в виде единой бесконечной последовательности натуральных чисел и $n_1, \ldots, n_j$ в виде одного натурального числа, мы видим, что интерпретация отсутствием контрпримера имеет вид Π_1^1,

$$\bigwedge m_1 m_2 \ldots m_n \ldots \bigvee n P(m_1 m_2 \ldots m_n),$$

---

[1]) Здесь автор неточен. Интерпретацией отсутствием контрпримера для A Крайзель называет не правую часть последней эквивалентности, а формулу

$$\bigvee N_1 \ldots N_j \bigwedge f_1 \ldots f_j P(f_1, N_1, \ldots, f_j(N_1, \ldots, N_{j-1}), N_j), \quad (*)$$

где $N_1, \ldots, N_j$ — переменные для функционалов и N_i обозначает $N_i(f_1, \ldots, f_j)$. Кандидатами на роль конструктивного истолкования доказанной классически формулы A являются, по Крайзелю, эффективные функционалы $N_1, \ldots, N_j$, удовлетворяющие условию, стоящему в (*) после кванторов при любых *финитных* функциях $f_1, \ldots, f_j$.

где P — разрешимое свойство конечных последовательностей натуральных чисел. Наиболее типичным примером Π_1^1- свойства является свойство быть ординалом конструктивного второго числового класса.

Мы определим сейчас отношение: $m_1m_2\ldots m_n$ *заперта* для P. Во-первых, если $P(m_1m_2\ldots m_n)$ верно, то $m_1m_2\ldots m_n$ заперта для P. Во-вторых, если $m_1m_2\ldots m_nm$ заперта для P при всех натуральных m, то $m_1m_2\ldots m_n$ заперта для P. Трансфинитные индуктивные определения этого рода будут считаться конструктивно осмысленными, и мы будем говорить, что Π_1^1-утверждение указанной выше формы имеет место, если пустая последовательность $\square$ заперта для P.

Как легко видеть, эквивалентность

$$\bigwedge m_1m_2\ldots m_n \bigvee nP(m_1m_2\ldots m_n) \leftrightarrow \square \text{ заперта для } P$$

имеет место классически. Таким образом, подразумеваемый смысл Π_1^1 утверждения один и тот же как для принятой нами конструктивной интерпретации, так и для классической интерпретации. Разница только в принимаемых методах доказательства. Это полностью аналогично рассмотренной ранее ситуации для Π_2^0-утверждений.

В интуиционистской математике обе части приведенной выше эквивалентности считаются осмысленными. При этом считается, что область изменения переменной, связанной левым квантором всеобщности,— это все свободно становящиеся последовательности натуральных чисел. Тот факт, что эта эквивалентность справедлива интуиционистски, является содержанием бар теоремы Брауэра. Мы рассматриваем рассуждение Брауэра [11] в доказательстве бар теоремы скорее как интуитивный анализ, оправдывающий наше определение истинности Π_1^1-утверждения.

Из того, что мы только что сказали, вытекает, что если ограничиться Π^1-утверждениями, мы можем понимать брауэровский континуум интуиционистски эквивалентным образом, не используя свободно становящихся последовательностей. Совершенно иной путь избавления от свободно становящихся последо-

вательностей — истолкование кванторов по теоретико-числовым функциям как кванторов по правилам, определяющим такие функции, т. е. по числам e, таким, что $\bigwedge m \bigvee n\, T(e, m, n)$. Это путь, избранный конструктивистской школой Маркова, а также Бишопом [1] в его недавней книге (которая не была доступна автору в процессе работы над рукописью). В случае Бишопа при помощи подходящих предположений о непрерывности удается избежать патологий, порожденных этой концепцией.

Интерпретация отсутствием контрпримера вместе с нашим анализом Π_1^1 утверждений позволяет нам понимать конструктивно классическое понятие истины в применении к арифметическим формулам. Так как этот способ понимания арифметической истины классически эквивалентен классическому способу, то не удивительно, что законы классической логики оказываются истинными при этой интерпретации.

В действительности, как только мы соглашаемся признавать Π_1^1-утверждения конструктивно осмысленными, мы можем понимать конструктивно гораздо больше, чем понятие арифметической истинности. Большая часть анализа, включая теорию ординалов второго числового класса, борелевских множеств и меры Лебега, может быть рассмотрена с использованием этих абстракций. Это показано в последних двух главах. Однако для конструктивного анализа теоремы Кантора — Бендиксона (Крайзель [2]) нужны более сильные методы, и то же верно для аналитических и, в еще большей мере, проективных множеств.

Более мощные средства, достаточные по крайней мере для рассмотрения теоремы Кантора — Бендиксона, получаются введением более высоких конструктивных числовых классов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Этот список литературы содержит только работы, действительно упомянутые в тексте. Более полная библиография имеется в Клини [3] и Клини и Весли [1] (а также Б. А. Кушнер. Лекции по конструктивному анализу, «Наука», М., 1973. — *Перев.*).

Банах и Мазур (Banach, Masur)

[1*] Sur les fonctions calculables, *Ann. Soc. Pologne de Mathématiques*, **16** (1937), 223.

Бишоп (Bishop E.)

[1] Foundations of constructive analysis, McGraw-Hill, New York, 1967.

Борель (Borel E)

[1] Les "Paradoxes" de la théorie des ensembles, *Ann Sci Ecole Norm Sup.*, 25 (1908), 443—448

[2] Leçons sur la théorie des fonctions, 2nd ed., Gauthier-Villars, Paris, 1914.

Брауэр (Brouwer L. E. J)

[1] De onbetrouwbaarheid der logische principes, Tijdschrift voor wijsbegeerte 2 (1908), 152—158.

[2] Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten, Erster Teil, Verh Nederl Akad Wetensch Afd Natuurk, Sect. 1, 12 (1918), 5, 3—43.

[3] Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten, Zweiter Teil, Verh Nederl Akad Westensch Afd Natuurk, Sect. 1, 12 (1919), 7, 3—33.

[4] Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung? *Math. Ann*, **83** (1920), 201—210.

[5] Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten, Verh Nederl Akad Wetensch Afd Natuurk, Sect 1, **13** (1923), 2, 3—24.

[6] Beweis, dass jede volle Funktion gleichmässig stetig ist, Nederl Akad Wetensch Proc., Ser. A, 27 (1924), 189—193.

[7] Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. I, *Math. Ann.*, **93** (1925), 244—257.

[8] Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. II, *Math. Ann.*, **95** (1926), 453—472.

---

* Звездочкой отмечены работы, добавленные редактором.

[9] Die intuitionistische Form des Heine — Borelschen Theorems, *Nederl Akad Wetensch Proc.*, Ser. A, **29** (1926), 866—867.
[10] Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik III, *Math. Ann.*, **96** (1927), 451—488.
[11] Über Definitionsbereiche von Funktionen, *Math. Ann.*, **97** (1927), 60—75.
[12] Points and spaces, *Canad J. Math*, **6** (1954), 1—17.

Гедель (Gödel K.)
[1] Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **37** (1930), 349—360.
[2] Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **38** (1931), 173—198.
[3] On undecidable propositions of formal mathematical systems, Напечатано в Девис [1].

Гейтинг (Heyting A.)
[1] Intuitionism. An introduction, North — Holland, Amsterdam (1956). [Русский перевод: Гейтинг А., Интуиционизм, М., 1965.]

Генкин (Henkin L.)
[1] Completeness in the theory of types, *J. Symbolic Logic*, 15 (1950) 81—91.

Генцен (Gentzen G.)
[1] Untersuchungen über das logische Schliessen, *Math. Z.*, **39** (1934), 176—210, 405—431. [Русский перевод: Генцен Г., Исследование логических выводов, в кн. «Математическая теория логического вывода», М, 1967, «Наука»]

Гжегорчик (Grzegorczyk A)
[1] Computable functionals, *Fund. Math.*, 42 (1955), 168—202.

Гудстейн Р. Л. (Goudstein R. L.)
[1*] Рекурсивный математический анализ, «Наука», М, 1970.

Девис (Davis M.)
[1] The undecidable, Raven Press, Hewlett N. Y., 1965.

Заславский И. Д.
[1] Опровержение некоторых теорем классического анализа в конструктивном анализе, *Успехи Математических Наук*, **10** (1956), 209—210.

Заславский И. Д, Цейтин Г. Е.
[1] Сингулярные покрытия и связанные с ними свойства конструктивных функций, *Труды МИАН*, 67 (1962), 458—502.

Клини (Kleene S. C.)
[1] On notation for ordinal numbers, *J. Symbolic Logic*, **3** (1938), 150—155
[2] Recursive functions and intuitionistic mathematics, Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1 (1950), 679—685. Amer. Math. Soc., Providence R. I.
[3] Введение в метаматематику, ИЛ, М., 1957.
[4] Countable functionals, Constructivity in mathematics, 81—100, North-Holland, Amsterdam, 1959.

Клини и Весли (Kleene S. C., Vesley R. E.)
[1] The foundations of intuitionistic mathematics, North-Holland, Amsterdam, 1965.
Крайзель (Kreisel G.)
[1] On the interpretation of non-finitist proofs. — Part I, *J. Symbolic Logic*, **16** (1951), 241—267.
[2] Analysis of the Cantor — Bendixson theorem by means of the analytic hierarchy, *Bull Acad. Polon. Sci.*, **7** (1959), 621—626.
[3] Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite types, Constructivity in mathematics, 101—128, North-Holland, Amsterdam, 1959.
Крайзель и Лакомб (Kreisel G, Lacombe D.)
[1] Ensembles récursivement mesurables et ensembles récursivement ouverts ou fermés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **245** (1957), 1106—1109.
Кушнер Б. А
[1*] Лекции по конструктивному математическому анализу, «Наука», М., 1973.
Лакомб (Lacombe D.)
[1] Extension de la notion de fonction récursive aux fonctions d'une ou plusieurs variables réelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **240** (1955), 2478—2480, 241, 13—14, 151—153.
[2] Remarques sur les opérateurs récursifs et sur les fonctions récursives d'une variable réelle, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **241** (1955), 1250—1252.
[3] Les ensembles récursivement ouverts ou fermés, et leurs applications à l'analyse récursive, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **245** (1957), 1040—1043, 246, 28—31.
[4] Quelques procédés de définition en topologie récursive, Constructivity in mathematics, 129—158, North-Holland, Amsterdam, 1959.
Марквальд (Markwald W.)
[1] Zur Theorie der konstruktiven Wohlordnungen, *Math. Ann.*, **127** (1954), 135—149
Марков А. А.
[1*] О конструктивной математике, *Тр. МИАН СССР им. Стеклова*, 67 (1962), 8—14
Мартин-Лёф (Martin-Löf P.)
[1] The definition of random sequences, *Information and Control*, **9** (1966), 602—619.
Пост (Post E. L.)
[1] Finite combinatory processes — formulation I, *J. Symbolic Logic*, **1** (1936), 103—105.
[2] Absolutely unsolvable problems and relatively undecidable propositions, Account of an anticipation, 1941. Напечатано в Девис [1].
Райс (Rice H. G.)
[1] Recursive real numbers, Proc. Amer. Math. Soc., **5** (1954), 784—791.

Ришар (Richard J.)
[1] Les principes des mathématiques et le problème des ensembles. *Acta Math.*, 30 (1905), 295—296.
Спектор (Spector C.)
[1] Recursive well-orderings, *J. Symbolic Logic*, 20 (1955), 151—163.
Тьюринг (Turing A. M.)
[1] On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, 42 (1936/37), 230—265.
[2] A correction, *Proc. London Math. Soc.*, 43 (1937), 544—546.
[3] Systems of logic based on ordinals, *Proc. London Math. Soc.*, 45 (1939), 161—228.
Цейтин Г. С.
[1] Теоремы о среднем в конструктивном анализе, *Труды МИАН*, 67 (1962), 362—384.
[2] Чёрч (Church A.)
[1] An unsolvable problem of elementary number theory, *Amer. J. Math.*, 58 (1936), 345—363.
[2] The constructive second number class, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 44 (1938), 224—232.
[3] On the concept of a random sequence, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46 (1940), 130—135.
Чёрч и Клини (Church A., Kleene S. C.)
[1] Formal definitions in the theory of ordinal numbers, *Fund. Math.*, 28 (1937), 11—21.
Шанин Н. А.
[1*] Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, *Тр. МИАН СССР им. Стеклова*, 67 (1962), 15—294.
Шпеккер (Specker E.)
[1] Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis, *J. Symbolic Logic*, 14 (1949), 145—158.
[2] Der Satz vom Maximum in der rekursiven Analysis, Constructivity in mathematics, 254—265, North-Holland, Amsterdam, 1959.
Эрбран (Herbrand J.)
[1] Recherches sur la théorie de la démonstration. (Thesis), University of Paris, 1930.

УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

П. МАРТИН-ЛЁФ
ОЧЕРКИ ПО КОНСТРУКТИВНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Редактор А. А. Бряндинская
Художник В. М. Новоселова Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор З. И. Резник Корректор Т. С. Лаврова

Сдано в набор 30/X 1974 г. Подписано к печати 26/II 1975 г.
Бумага № 2 84×108 1/32=2,13 бум. л. 7,14 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 5,73
Изд. № 1/8013. Цена 40 коп. Зак. 406

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29