В.П.Маслов

КОМПЛЕКСНЫЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ И КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ФЕЙНМАНА

В книге вводится понятие *T*-отображения, обобщающее понятие *T*-произведения и фейнмановского операторного континуального интеграла на нелинейный случай; оно может служить удобным аппаратом для полуклассического описания взаимодействия квантованных и неквантованных частиц в квантовой теории поля. Показывается, что обобщение формул «выпутывания» Фейнмана на *T*-отображение приводит к построению квазиклассической асимптотики для нелинейных уравнений квантовой механики. Развивается дискретная аппроксимация фейнмановских траекторий и на основе развитого аппарата строится комплексная мера фейнмановского интеграла.

Книга рассчитана на специалистов в области функционального анализа и теоретической физики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	9
Глава I. *T*-отображения для уравнений Власова	**13**
§ 1. *T*-отображения	14
§ 2. Интегро-дифференциальные квазилинейные уравнения первого порядка	19
§ 3. Общие интегро-дифференциальные уравнения первого порядка	30
Глава II. Квазиклассическая асимптотика матрицы плотности и квантование уравнения Власова	**42**
§ 1. Операторы с унитарной нелинейностью	46
§ 2. Асимптотика матрицы плотности	53
§ 3. Квантование кинетических уравнений	62
Глава III. *T*-отображение для операторов с унитарной нелинейностью	**72**
§ 1. Теорема существования *T*-отображения	72
§ 2. Формулы выпутывания на примере квазилинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка	78
§ 3. Выпутывание в *T*-отображении с унитарной нелинейностью	82
Глава IV. Квазиклассическая асимптотика для нелинейных уравнений квантовой механики	**87**
§ 1. Постановка задачи	87
§ 2. Построение асимптотики в малом с помощью формул выпутывания	89
§ 3. Асимптотика в целом	93
§ 4. Вычисление средних	95
§ 5. Решение уравнений с применением операторных методов	99
Глава V. Квазиклассическая асимптотика для систем уравнений с унитарной нелинейностью	**104**
§ 1. Уравнения Хартри	104
§ 2. Температурные уравнения Хартри	109

§ 3. Квазиклассическая асимптотика решений системы уравнений нелинейной квантовой механики 116
Глава VI. Континуально-интегральные уравнения 130
§ 1. Континуально-интегральное уравнение, отвечающее *T*-отображению 132
§ 2. Континуально-интегральное уравнение для функции плотности 134
§ 3. Асимптотика решения континуально-интегрального уравнения 136
Глава VII. Аппроксимация ломаными траекторий интеграла Фейнмана и ее вероятностная модель 142
§ 1. Эвристические соображения 142
§ 2. Определение комплексной марковской цепи 150
§ 3. Марковские свойства комплексных цепей 152
§ 4. Лагранжиан КМ-цепи 156
§ 5. Виртуальные события 160
Глава VIII. Комплексные нелинейные цепи 168
§ 1. Неаддитивная амплитуда 168
§ 2. Комплексные нелинейные цепи 168
§ 3. КН-цепь для нелинейного уравнения квантовой механики 173
§ 4. Статистический ансамбль квазичастиц 178
§ 5. Амплитуда трубки траекторий в фазовом пространстве 182
Глава IX. Комплексная мера в интеграле Фейнмана 184
§ 1. Комплексная мера в интеграле Фейнмана 184
§ 2. Преобразование Фурье комплексной меры 188
Литература 190

Памяти
Сергея Васильевича
ФОМИНА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уравнения классической механики получаются, как известно, из соответствующих квантованных уравнений (в гейзенберговском представлении) путем предельного перехода по малому параметру. Аналогичную процедуру можно проделать для вторично квантованных уравнений квантовой электродинамики. Именно, записывая эти уравнения в предельном случае большого числа частиц, когда коммутатор (антикоммутатор *) между операторами рождения и уничтожения можно считать равным нулю, мы получим некоторые, нелинейные, вообще говоря, уравнения, которые будем называть нелинейными уравнениями квантовой механики.

Получение решений этих нелинейных уравнений необходимо для изучения асимптотического поведения решений уравнений квантовой электродинамики, квантовой теории поля и вторично квантованных уравнений для большого числа частиц. Все известные линейные уравнения квантовой механики получаются из этих нелинейных в пределе для малых по норме начальных данных.

Указанные нелинейные уравнения широко используются в физической литературе, однако поскольку для них не выполнен один из основных принципов квантовой механики 20-х годов — принцип суперпозиции — в учебниках по квантовой механике они пока не содержатся. Эти уравнения имеют весьма сложный вид, и поэтому обычно рассматриваются различные упрощенные их модели. Между тем оказывается, что сами эти уравнения (а не их упрощенные модели) обладают рядом замечательных

*) См. замечание 1 введения.

свойств и на них могут быть перенесены важнейшие методы решения линейных уравнений.

Оказывается также, что остальные основные принципы старой квантовой механики (например, принцип унитарной эквивалентности) сохраняются для таких уравнений.

В настоящей книге мы определим класс нелинейных уравнений, для решения которых выполняются эти принципы. К этому классу относятся также уравнения Хартри — Фока, температурные уравнения Хартри, нелинейные уравнения оптики с пространственной дисперсией и временной релаксацией и уравнения, описывающие взаимодействие (многих) классических и квантовых частиц. Книга призвана так модифицировать различные методы приближенных решений линейных уравнений, чтобы эти методы переносились на решения данного класса нелинейных уравнений.

В частности, на эти нелинейные уравнения без труда переносится теория разностных схем. В настоящей книге решения разностных схем понимаются как матрицы, аппроксимирующие континуальный интеграл, подобно тому как цепи Маркова аппроксимируют марковский процесс. На примере такого комплексного аналога марковских цепей лучше всего прослеживается вероятностная трактовка квантовой механики и основные законы вычисления амплитуд вероятности.

Отметим, что дискретная аппроксимация континуальных интегралов, развитая в гл. VII, VIII, лучше всего позволяет заметить комплексную меру в континуальном интеграле в p-представлении, так как на дискретном случае (так называемых комплексных марковских цепях) могут быть проверены формулы замены переменных и интегрирования по частям для предельного фейнмановского интеграла.

Важнейшим моментом линейной квантовой механики является ее связь с соответствующими нелинейными уравнениями классической механики. Имеет место соответствие уравнения Шредингера и классического уравнения Лиувилля (или эквивалентной ему системы уравнений Гамильтона):

$$\text{уравнение Шредингера} \leftrightarrow \text{уравнение Лиувилля.}$$

Это соответствие взаимно в том смысле, что известная процедура квантования уравнений классической механики приводит к уравнению Шредингера, а асимптотика решения уравнения Шредингера при $h \to 0$ приводит в свою очередь к уравнению классической механики. Оказывается, что аналогичное явление имеет место и в нелинейной квантовой механике, причем роль уравнения Лиувилля играет фундаментальное уравнение теории плазмы — уравнение Власова:

$$\begin{matrix}\text{уравнение нелинейной} \\ \text{квантовой механики}\end{matrix} \leftrightarrow \text{уравнение Власова.}$$

В этой связи в гл. I изучаются уравнение Власова и аналог уравнения Гамильтона — Якоби, отвечающий уравнению Власова. В гл. II вводится естественная процедура квантования уравнений Власова, которая приводит к уравнениям нелинейной квантовой механики. Асимптотическое решение этих уравнений в нулевом приближении удовлетворяет уравнению Власова. В гл. III строится нелинейный аналог T-произведения для уравнений квантовой механики и формулы выпутывания для него. В гл. IV и V строится глобальная *) квазиклассическая асимптотика нелинейных квантовых уравнений без спина и со спином, а также системы уравнений Хартри. Получено уравнение вращения спина и поляризации в классическом пределе. В гл. VI строится нелинейный аналог фейнмановского континуального интеграла, точнее — нелинейное континуально-интегральное уравнение для решения нелинейных уравнений квантовой механики. Для этого интеграла приводится аналог метода стационарной фазы, в частности доказывается, что формальные асимптотические решения глав IV, V являются асимптотиками точных решений нелинейных квантовых уравнений.

В гл. VII, дается аппроксимация путей в континуальном интеграле с помощью ломаных и аппроксимация самого континуального интеграла конечной суммой по этим ломаным. Делается попытка дать вероятностную интерпретацию суммам по путям. В гл. VIII эти результаты обобщаются на нелинейный случай.

В гл. IX (результаты которой получены совместно с А. М. Чеботаревым) рассматривается аппроксимация

*) То есть включающая окрестности фокальных точек и точек поворота

фейнмановского интеграла в импульсном представлении. Пути в этом интеграле аппроксимируются уже ступенчатыми кривыми, поскольку ломаной траектории в координатном пространстве отвечает ступенчатая траектория в импульсном пространстве. В результате получается комплексная мера в континуальном интеграле, сосредоточенная на ступенчатых траекториях. Доказывается, что континуальный интеграл Фейнмана можно представить как интеграл по этой мере и что он удовлетворяет уравнению Шредингера в p-представлении. Это позволяет на основе предыдущей вероятностной трактовки комплексных марковских цепей дать новый аксиоматический подход к квантовой механике.

Отметим, что первоначально последние главы были расположены в начале, причем роль T-отображения играло континуально-интегральное (по комплексной мере) уравнение, вместо формул выпутывания приводились формулы замены переменных. Однако в процессе редактирования решено было вынести все приложения в начало, доказав их с помощью техники T-отображений.

Настоящий текст написан так, чтобы развитый аппарат мог быть применен к нелинейным полуклассическим уравнениям теории поля (например, при взаимодействии поля материи с гравитационным полем). Однако, поскольку в этой ситуации не удается построить строгую математическую теорию, мы избрали в качестве модели нелинейные уравнения квантовой механики, несмотря на то, что построения квазиклассической асимптотики их решений можно было бы провести в рамках уже развитого формализма [13, 16].

В заключение автор выражает благодарность А. М. Самарскому за плодотворные беседы. Автор глубоко признателен также М. В. Карасеву, А. М. Чеботареву и В. П. Белавкину, оказавшим огромную помощь в работе над книгой.

В. П. Маслов

ВВЕДЕНИЕ

Основной результат настоящей книги заключается в получении глобальных асимптотических разложений по степеням h для решений целого класса нелинейных уравнений, включающего нелинейные уравнения квантовой механики. Доказательство этого результата рассредоточено по всей первой части книги: в гл. I к нему относится представление решений уравнений Власова через решение соответствующих уравнений характеристик, в гл. II — квазиклассическая асимптотика матрицы плотности, в гл. IV и V — получение формальных асимптотических решений. Наконец, в гл. VI получены оценки разности между точным решением и формальным асимптотическим рядом.

Нелинейные уравнения, рассмотренные в книге, делятся на три типа:

1) Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения первого порядка, включающие уравнения Власова (гл. I, II).

2) Уравнения с унитарной нелинейностью, включающие нелинейные уравнения квантовой механики, уравнения Хартри и др. (гл. II, VI, VIII).

3) Уравнения, получаемые с помощью «разностного квантования» (§ 4 гл. II), включающие уравнения для матрицы плотности, отвечающей уравнению Хартри.

Методическая задача заключается в перенесении операторного метода Фейнмана и метода континуального интеграла на нелинейный случай, причем последнего в той мере, в которой он приводит к построению диаграмм Фейнмана, а для этого, как выяснено в [2], можно ограничиться установлением аппроксимируемости интеграла комплексными марковскими цепями.

Предложенный в § 4 гл. II метод частичного квантования может быть применен при квантовании нелинейных уравнений теории поля в случае, когда из физических соображений следует, что для части частиц можно коммутатор (антикоммутатор) между операторами рождения и уничтожения считать равным нулю.

В квантовой теории поля проводится аналогичное частичное квантование [26], когда считают, что частица в каком-то естественном смысле классична. Например, в полуклассической теории взаимодействия поля материи с гравитационным полем в правую часть классического уравнения Эйнштейна ставят вакуумное ожидание тензора энергии-импульса квантованного поля материи. Перенесение аппарата Фейнмана, в особенности формул выпутывания, на нелинейный случай должно быть полезно в этой связи.

В настоящей книге мы в основном не будем рассматривать конкретных уравнений нелинейной квантовой механики — нам удобнее рассматривать целый класс уравнений, к которому они относятся. (Хотя бы по той причине, что к этому классу относятся и нелинейные уравнения оптики, учитывающие пространственную дисперсию [25].) Поэтому мы приведем ниже те конкретные уравнения со всеми физическими константами, к которым применимы полученные в книге результаты.

Приведем вначале простейшее вторично квантованное уравнение для бозе-частиц с парным взаимодействием в гейзенберговском представлении:

$$ih\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{h^2}{2m}\Delta\Psi(x,t)+\Psi(x,t)\int dy\,\Psi^*(y,t)V(x-y)\Psi(y,t),$$

$$-ih\frac{\partial\Psi^*(x,t)}{\partial t}=-\frac{h^2}{2m}\Delta\Psi^*(x,t)+$$
$$+\Psi^*(x,t)\int dy\,\Psi^*(y,t)V(x-y)\Psi(y,t), \qquad (2)$$

где $x, y \in \mathrm{R}^3$, h — постоянная Планка, m — масса бозе-частицы, $V(x-y)=V(y-x)$ — потенциал парного взаимодействия; $\Psi^*(x,t)$, $\Psi(x,t)$ — операторы рождения и уничтожения в координатном представлении.

В случае, когда коммутатор $[\Psi(x,t), \Psi^*(y,t)]$ равен нулю, мы получаем нелинейное уравнение квантовой механики вида

$$ih\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{h^2}{2m}\Delta\psi(x,t)+\psi(x,t)\int dy\,|\psi(y,t)|^2V(x-y), \qquad (3)$$

где $\psi(x,t)$ — комплекснозначная функция. (Асимптотика решения уравнения (3) строится в гл. IV).

В теории квантованных полей гейзенберговские уравнения для операторов взаимодействующих бозе- и ферми-частиц имеют вид

$$\left(\gamma^n ih \frac{\partial}{\partial x^n} - \frac{e}{c}\,\Gamma\Phi - McI\right)\Psi(x, t) = 0, \tag{4}$$

$$\overline{\Psi}\left(\gamma^n ih \frac{\partial}{\partial x^n} - \frac{e}{c}\,\Gamma\Phi + McI\right) = 0, \tag{5}$$

$$\Box\Phi = \frac{4\pi}{c}\,ej, \tag{6}$$

$$j = \overline{\Psi}\Gamma\Psi, \qquad \overline{\Psi} = \Psi^*\gamma^0. \tag{7}$$

Здесь Ψ и Φ — гейзенберговские операторы ферми- и бозе-поля, M — масса ферми-частиц, e — константа взаимодействия, h — постоянная Планка, c — скорость света в вакууме, γ^n ($n = 0, 1, 2, 3$) — матрицы Дирака, I — единичная матрица.

Для квантовой электродинамики $\Gamma = \{\gamma_n\}$, $\Phi = \{A^n(x, t)\}$, где $\{A^n\}$ — 4-потенциал электромагнитного поля.

Пусть G — функция Грина уравнения (6). Тогда, выражая операторы бозе-поля Φ через спинорный ток j

$$\Phi = G \circ \frac{4\pi}{c}\,e\overline{\Psi}\Gamma\Psi, \tag{8}$$

подставляя (8) в (4) и (5), и полагая, что $\overline{\Psi}$ и Ψ уже не операторы, а комплекснозначные функции, получаем *систему уравнений нелинейной квантовой механики*

$$\left(\gamma^n ih \frac{\partial}{\partial x^n} - \frac{4e\pi}{c^2}\left[\Gamma \int G(x, t; y, \tau)\,\overline{\psi}(y, \tau)\,\Gamma\psi(y, \tau)\,dy\,d\tau\right] - McI\right)\psi(x, t) = 0, \tag{9}$$

$$\left(\gamma^n ih \frac{\partial}{\partial x^n} - \frac{4\pi e}{c^2}\,\Gamma \int G(x, t; y, \tau)\,\overline{\psi}(y, \tau)\,\Gamma\psi(y, \tau)\,dy\,d\tau + McI\right) \times \overline{\psi}(x, t) = 0.$$

Замечание 1. Мы рассматриваем уравнения (4), (5), полагая, что ψ и Φ — комплекснозначные функции, в то время как для ферми-частиц нужно полагать антикоммутатор равным нулю, и следовательно, ψ должно быть функцией со значениями на грассмановой алгебре [3]. Но, как известно, переход от комплекснозначных функций к функциям на грассмановой алгебре не представляет труда [3].

Замечание 2. Функции $V(x - \xi)$ в уравнении (3) и функция G в уравнении (9) имеют особенности.

Мы будем в дальнейшем рассматривать регуляризованные ядра в интегральных членах нелинейных уравнений, т. е. предполагать, что эти ядра не имеют особенностей. Это существенное ограничение не сказывается, вообще говоря, на основных результатах книги, в частности на главном члене квазиклассической асимптотики в целом для уравнений (3), (9). Однако в следующих членах разложения по h особенности функции G будут сказываться. Учет этих поправок может быть произведен в рамках предложенного здесь метода, хотя это и представляет, по мнению автора, большие технические трудности. Грубо говоря, если разложить интеграл в правой части уравнения (3) на гладкую и быстро осциллирующую части по параметру h, то, когда эта быстро осциллирующая часть не попадает в резонанс с собственными колебаниями волнового уравнения (т. е. в общей ситуации), она дает вклад порядка $O(h^2)$; если попадает, то ее вклад имеет порядок $O(h)$. Весьма громоздкий аппарат, который позволил бы учесть поправки, вносимые этими членами, имело бы смысл развить, если бы было ясно, что эти поправки приводят к некоторым физическим эффектам. Во всяком случае здесь мы этого вопроса касаться не будем.

Важный результат книги состоит в конструкции меры для континуального интеграла Фейнмана, которая проводится во второй части книги. В гл. VII проводится большая подготовительная работа, связанная с вероятностной трактовкой суммы по путям. Окончательная теорема доказана в гл. IX. Эта теорема опирается на § 1 гл. III о существовании T-отображения и на некоторые определения из гл. VI.

При изложении мы пользовались некоторыми терминами, взятыми из физической литературы — они всегда заключаются в кавычки. Отметим также, что для согласования с обозначениями физиков мы понимаем ниже под $\varphi(\overset{1}{p}, \overset{2}{x}) \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi(-ih\overset{1}{d}/dx, \overset{2}{x})$ функцию от упорядоченных операторов, в которой $p = -ih\overset{1}{d}/dx$ есть оператор дифференцирования, умноженный на $-i$ и на вещественный параметр h, в отличие от $f(\overset{1}{p}, ih\,\overset{2}{\partial}/\partial p)$, где под $\overset{1}{p}$ понимается — оператор умножения на p, действующий первым.

ГЛАВА I

T-ОТОБРАЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА

Самосогласованные уравнения плазмы без учета столкновений описывают взаимодействие частицы с усредненными полями других частиц. Эти нелинейные уравнения обычно содержат производные первого порядка, а их коэффициенты зависят от свертки неизвестной функции $u(x, t)$ с некоторыми заданными потенциалами. Из физических соображений следует, что коэффициенты зависят от значения неизвестной функции в некоторый предшествующий момент: $u(x, t - \varepsilon)$ (эффект запаздывания или релаксации). Однако параметр ε настолько мал, что в уравнении мы им пренебрегаем. Но при составлении разностной схемы для таких уравнений этот факт по существу учитывается, поскольку значения коэффициентов берутся на предыдущем шаге по сравнению с решением.

Мы введем специальное понятие T-отображения, в котором на самом деле отражается факт запаздывания коэффициентов уравнения и которое дает метод построения решения нелинейного уравнения шагами по t. В этом смысле T-отображение иногда стоит ближе к реальным физическим процессам, чем само уравнение. С другой стороны, как будет показано ниже, метод T-отображений обобщает метод ломаных Эйлера. Таким образом, метод T-отображений может служить конструктивным методом доказательства существования решений. Кроме того, T-отображения тесно связаны с понятием нелинейного континуального интеграла (см. гл. VI) и с нашей точки зрения естественно решения «характеристических уравнений» для континуального интеграла записывать в виде T-отображения, поскольку континуальный интеграл может быть также интерпретирован как метод построения решения шагами по t.

T-отображения, ассоциированные с нелинейными уравнениями квантовой механики (гл. II, III), являются естественным обобщением T-произведений, причем в этом случае формулы выпутывания Фейнмана переносятся на T-отображения. Именно это фундаментальное обстоятельство позволяет построить квазиклассическую асимптотику нелинейных уравнений квантовой механики и нелинейный континуальный интеграл, отвечающий им.

Уравнение Власова, как уже говорилось, играет в наших построениях такую же роль, как уравнение Лиувилля классической механики для фейнмановского континуального интеграла. Но в фейнмановском континуальном интеграле непосредственно участвует не решение уравнения Лиувилля, а действие, т. е. решение эквивалентного уравнения Гамильтона — Якоби.

В настоящей главе вводится нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, которое относится к уравнению Власова так же, как уравнение Гамильтона — Якоби относится к уравнению Лиувилля. Решения интегро-дифференциальных уравнений строятся с помощью T-отображений. Эти решения понадобятся нам в дальнейшем как для построения квазиклассической асимптотики, так и для построения нелинейного континуального интеграла.

§ 1. T-отображения

Многие уравнения математической физики и, в частности, квантовой механики являются эволюционными уравнениями вида

$$-i\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}+\hat{H}(t)\psi(t)=0,$$

где $\psi(t)$ — функция со значениями в гильбертовом пространстве H, $\hat{H}(t)$ — заданный линейный неограниченный самосопряженный оператор в этом же пространстве. Формально решение такого уравнения записывают в виде T-произведения следующим образом:

$$\psi(t)=\exp\left\{-i\int_{t_0}^{t}\hat{H}(\tau)\,d\tau\right\}\psi(t_0).$$

Под этим понимается следующий предел «хронологического» произведения:

$$\psi(t) = \lim_{\delta_N \to 0} \exp\{-i\Delta t_{N-1}\hat{H}(t_{N-1})\}\dots$$
$$\dots\exp\{-i\Delta t_0\hat{H}(t_0)\}\psi(t_0), \qquad (1.1)$$

где $t_0 < t_1 < \dots < t_N \equiv t$ — некоторое разбиение отрезка $[t_0, t]$ на N интервалов длины $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, а $\delta_N = \max\limits_j \Delta t_j$.

Таким образом, для получения функции ψ в «момент времени» $t + dt$ нужно применить «инфинитезимальный» оператор $\exp\{-i\,dt\hat{H}(t)\}$ к функции ψ в «момент времени» t:

$$\psi(t + dt) = \exp\{-i\,dt\hat{H}(t)\}\psi(t).$$

Предел (1.1) мы иногда будем обозначать

$$\psi(t) = \left[\prod_{\tau=t_0}^{t} \exp\{-i\,d\tau\,\hat{H}(\tau)\}\right]\psi(t_0).$$

Пусть теперь B — некоторое банахово пространство функций, а H — нелинейный непрерывный оператор в нем: $\psi \to H[\psi]$.

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\hat{H}[\psi])\psi, \qquad (1.2)$$

где $\hat{H}[\psi] = (H[\psi])(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$.

Решение эволюционного уравнения (1.2) будем формально представлять в виде

$$\psi(t) = \lim_{\delta_N \to 0} \psi_N, \qquad (1.3)$$

где ψ_N определяется из следующей рекуррентной системы равенств:

$$\psi_{k+1} = \exp\{-i\Delta t_k\hat{H}[\psi_k]\}\psi_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$
$$\psi_0 = \psi(t_0),$$

или, в дифференциальной форме,

$$\psi(t + dt) = \exp\{-i\,dt\hat{H}[\psi(t)]\}\psi(t).$$

Такое представление функции $\psi(t)$ мы будем записывать в виде

$$\psi(t) = \left[\prod_{\tau=t_0}^{t} \exp\{-i\,d\tau \hat{H}[\psi(\tau)]\}\right]\psi(t_0). \qquad (1.4)$$

Таким образом, значение функции ψ в момент $t + dt$ может быть получено применением инфинитезимального оператора $\exp\{-i\,dt\hat{H}[\psi(t)]\}$ к функции $\psi(t)$.

Отображение $\psi(t_0) \to \psi(t)$, построенное по формулам (1.3), мы назовем *T-отображением* по аналогии с термином «T-произведение», которым обычно обозначают мультипликативный интеграл (1.1). Таким образом, T-произведение есть частный случай T-отображения, когда оператор H линеен.

1. Рассмотрим некоторое банахово пространство B и обозначим через $C([0, t], B)$ банахово пространство непрерывных функций $\psi = \psi(t)$ на $[0, t] \subset \mathbf{R}$ со значениями в B, наделенное нормой

$$\|\psi\|_{C([0,t],B)} = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \|\psi(\tau)\|_B.$$

Пространство $C([0, 0], B)$ отождествим с B.

Пусть $t \geqslant t'$. Каждой функции $\psi \in C([0, t], B)$ сопоставим ее сужение на $[0, t']$; получим новую функцию $\psi' \in C([0, t'], B)$. В дальнейшем мы будем опускать знак штриха и обозначать через ψ как саму исходную функцию, так и все ее сужения на меньшие отрезки.

Пусть заданы $\varepsilon_0 > 0$, $T_0 > 0$ и при любых t, ε таких, что $0 \leqslant t \leqslant T_0$, $(-t) \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, определено некоторое двупараметрическое семейство отображений

$$S_{t,\varepsilon} : C([0, t], B) \to B \qquad (1.5)$$

такое, что при любом $v \in C([0, t], B)$ и любом $t \in [0, T_0]$ элемент $S_{t,\varepsilon}[v]$ непрерывно зависит от ε, и если $\varepsilon \leqslant 0$, то $S_{t,\varepsilon}[v] = v(t)$.

Рассмотрим разбиение Δ_N отрезка $[0, T_0]$:

$$\Delta_N = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T_0\}.$$

Пусть $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ и $\delta_N = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant N-1} \Delta t_j$. Для каждого v_0 (принадлежащего B) определим последовательность функций

$$v_{j+1}(t) = S_{t_j, t-t_j}[v_j] \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_{j+1}),$$

где $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Обозначим

$$v_N = S_{t_{N-1}, \Delta t_{N-1}} \circ \ldots \circ S_{t_0, \Delta t_0}[v_0].$$

Вообще говоря, предел $\lim\limits_{\delta_N \to 0} v_N$ по норме пространства $C([0, T_0], B)$ существует не при всех $v_0 \in B$. Пусть D — подмножество в B, на котором этот предел существует.

Определение 1.1. Пусть $v_0 \in D$ и $v = \lim\limits_{\delta_N \to 0} v_N$. Отображение $v_0 \to v$ назовем *T-отображением с образующей* $S_{t,\varepsilon}$ и обозначим

$$v(t) = \left(\prod_{\tau=0}^{t} S_{\tau, d\tau} \right) [v_0].$$

Рассмотрим частный случай T-отображения, ассоциированного с нелинейным эволюционным уравнением.

Пусть $B_1 \subset B_2$ — два банаховых пространства с нормами $\|\cdot\|_1 \geqslant \|\cdot\|_2$. Рассмотрим пространства $C_j(t) = C([0, t], B_j)$ непрерывных отображений $[0, t] \to B_j$, $j = 1, 2$. Тогда $C_1(t) \subset C_2(t)$. Пусть при каждом $t \in [0, T_0]$ задан нелинейный непрерывный оператор

$$R_t : C_1(t) \to B_2,$$

причем для любого $v \in C_1(t)$ $R_t(v)$ есть непрерывная функция аргумента $t \in [0, T_0]$.

Задачей Коши для оператора R_t с начальным условием $\psi_0 \in B_1$ называется система уравнений для функции $\psi(t)$, $0 \leqslant t < T_0$,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\psi(t) = R_t(\psi), \\ &\psi(0) = \psi_0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

причем производная берется в норме B_2:

$$\lim_{\Delta t \to +0} \left\| \frac{d}{dt}\psi(t) - \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} \right\|_2 = 0.$$

Пусть задана образующая T-отображения:

$$S_{t,\varepsilon} : C_1(t) \to B_1.$$

Определение 1.2. Если при любом $t \in [0, T_0]$ образующая $S_{t,\varepsilon}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left\| \frac{S_{t,\varepsilon}[v] - v(t)}{\varepsilon} - R_t(v) \right\|_2 = 0 \tag{1.7}$$

локально равномерно по $v \in C_1(t)$, то $S_{t,\varepsilon}$ называется *инфинитезимальным разрешающим оператором* для задачи Коши (1.6).

2. Лемма 1.1. *Пусть $S_{t,\varepsilon}$ — инфинитезимальный разрешающий оператор для задачи Коши (1.6) и для $\psi_0 \in B_1$ определено T-отображение* $\psi(t) = \left(\prod_{\tau=0}^{t} S_{\tau,\,d\tau}\right)[\psi_0]$, $\psi \in C_1(T_0)$. *Тогда функция ψ является решением задачи* (1.6).

Доказательство. Пусть Δ_N — некоторое разбиение $[0, T_0]$ и

$$\psi_N = S_{t_{N-1},\,\Delta t_{N-1}} \circ \ldots \circ S_{t_0,\,\Delta t_0}[\psi_0].$$

Тогда, если $t_{j+1} \geqslant t \geqslant t_j$, то

$$\psi_N(t) = S_{t_j,\,t-t_j}[\psi_N].$$

Поэтому в силу (1.7) найдется N_0 такое, что

$$\lim_{\Delta t \to +0} \left\| \frac{\psi_N(t_j + \Delta t) - \psi_N(t_j)}{\Delta t} - R_{t_j}[\psi_N] \right\|_2 = 0$$

равномерно по $N \geqslant N_0$.

Зафиксируем точку $t \in [0, T_0)$ и выберем последовательность разбиений $\{\Delta_N\}$ так, чтобы при каждом N один из узлов t_j совпадал с t.

Тогда в силу того, что R_t непрерывен и T-отображение с образующей $S_{t,\varepsilon}$ сходится,

$$\lim_{\Delta t \to +0} \left\| \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} - R_t[\psi] \right\|_2 = 0.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда нелинейный оператор R_t в задаче Коши (1.6) имеет специальный вид

$$R_t(\psi) = A_t(\psi)\,\psi(t),$$

где $A_t(\psi)$ при каждом $\psi \in C_1(t)$ есть линейный непрерывный оператор из B_1 в B_2, являющийся инфинитезимальной образующей для однопараметрической полугруппы $e^{\varepsilon A_t(\psi)}$.

Инфинитезимальный разрешающий оператор задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = A_t(\psi)\psi(t), \qquad \psi(0) = \psi_0 \tag{1.8}$$

будем искать в виде

$$S_{t,\varepsilon}[v] = e^{\varepsilon A_t(v)} v(t). \tag{1.9}$$

T-отображение, отвечающее такой образующей, может быть записано следующим образом:

$$\psi(t) = \prod_{\tau=0}^{t} e^{A_\tau(\psi)\,d\tau}\,\psi_0 = \exp\left\{\int_0^t A_\tau(\psi)\,d\tau\right\}\psi_0. \tag{1.10}$$

В случае, когда показатель экспоненты не зависит от ψ, это T-отображение обычно называют *T-произведением.* Отметим, что в дальнейшем под T-отображением мы будем понимать случай специальной интегральной зависимости A_t от ψ.

§ 2. Интегро-дифференциальные квазилинейные уравнения первого порядка

1. Рассмотрим некоторое отображение (функцию)

$$f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times C^{(0)}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}) \to \mathbf{C},$$

которая каждой точке $x \in \mathbf{R}^n$, каждому «моменту времени» $t \in \mathbf{R}$ и каждой функции $F \in C^{(0)}(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}_t)$ ставит в соответствие комплексное число $f(x, t; [F])$.

Определение 2.1. Будем говорить, что функция $f = f(x, t; [F])$ *интегрально зависит* от F, если f является гладкой *) функцией от x, t и от конечного числа интегралов вида

$$\int \ldots \int \rho_1(x, t; y_1, \ldots, y_m; F(y_1, t), \ldots, F(y_m, t))\,dy_1, \ldots, dy_m,$$

$$\int_0^t d\tau_1 \ldots \int_0^t d\tau_m \int \ldots \int \rho_2(x, t; y_1, \ldots, y_m, \tau_1, \ldots, \tau_m; F(y_1, \tau_1), \ldots$$
$$\ldots, F(y_m, \tau_m))\,dy_1, \ldots, dy_m,$$

---

*) То есть функция класса C^∞; ниже мы нигде не касаемся вопроса о минимально необходимой гладкости тех или иных функций и всегда предполагаем существование у них достаточного числа производных.

где $\rho_1(x, t; y_1, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m)$ и $\rho_2(x, t; y_1, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m)$ — гладкие функции, носитель которых по переменным $y_1, \ldots, y_m$ содержится в фиксированной ограниченной области $K^m \subset \mathbf{R}^{mn}$, не зависящей от остальных аргументов x, t, z.

Интегралы такого вида в дальнейшем будем обозначать

$$\int_0^t d\tau \int dy \rho(x, t; y, \tau, F(y, \tau)).$$

Рассмотрим функции $a_1, \ldots, a_n, b$, интегрально зависящие от F.

Определение 2.2. *Квазилинейным интегро-дифференциальным уравнением* назовем нелинейное уравнение вида

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, t, [F]) \frac{\partial F}{\partial x_i} + b(x, t, [F]) F = 0.$$

Обозначим

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = a \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad a = (a_1, \ldots, a_n).$$

2. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered} \frac{\partial F}{\partial t} + a(x, t, [F]) \frac{\partial F}{\partial x} + b(x, t, [F]) F = 0, \\ F|_{t=0} = F_0, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где F_0 — гладкая финитная функция на $\mathbf{R}^n$, a_j ($j = 1, \ldots, n$) — вещественнозначные функции. Рассмотрим двупараметрическое семейство нелинейных операторов

$$\begin{aligned} G_{t,\varepsilon}[v] = \exp\{-\varepsilon b(x, t, [v])\} \times \\ \times \exp\{-\varepsilon a(\overset{2}{x}, t, [v]) \overset{1}{\partial/\partial x}\} v(x, t) = \\ = \exp\{-\varepsilon b(x, t, [v])\} v(x - \varepsilon a(x, t, [v]), t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $v \in C^{(0)}(\mathbf{R}^{n+1})$.

Пусть $B_1 = C^{(2)}(\mathbf{R}^n)$, $B_2 = C^{(0)}(\mathbf{R}^n)$.

Лемма 2.1. *Оператор $G_{t,\varepsilon}[v]$ является инфинитезимальным разрешающим оператором для задачи* (2.1) *в паре банаховых пространств $B_1 \subset B_2$.*

Доказательство. Оператор задачи (2.1) имеет вид

$$R_t(v) = -a(x, t, [v])\frac{\partial v}{\partial x} - b(x, t, [v])v.$$

Поэтому

$$\frac{G_{t,\varepsilon}[v] - v(x, t)}{\varepsilon} - R_t(v) = \left(\frac{e^{-\varepsilon b} - 1}{\varepsilon} + b\right)v(x, t) +$$
$$+ e^{-\varepsilon b}\varepsilon a\int_0^1\left[\frac{\frac{\partial}{\partial x}v(x, t) - \frac{\partial}{\partial x}v(x - \tau\varepsilon a, t)}{\varepsilon}\right]d\tau.$$

Очевидно, правая часть по норме $B_2 = C^{(0)}(\mathbf{R}^n)$ сходится к нулю при $\varepsilon \to +0$ локально равномерно по $v \in C([0, t], B_1)$.

3. Докажем, что T-отображение с образующей $G_{t,\varepsilon}$ сходится к решению задачи Коши (2.1).

Теорема 2.1. *Пусть M — любой компакт, содержащий K и* supp F_0. *Тогда существует число $T_0 > 0$ такое, что в норме $C([0, T_0], C^{(0)}(M))$ сходится T-отображение с образующей $G_{t,\varepsilon}$, определенной в* (2.2):

$$^{T}F(x, t) = \left(\prod_{\tau=0}^{t} G_{\tau,d\tau}\right)[F_0], \qquad (2.3)$$

причем функция $F: M \times [0, T_0] \to \mathbf{C}$ является гладким решением задачи Коши (2.1).

Доказательство. 1) Коэффициенты $a(x, t, [F])$, $b(x, t, [F])$ по условию интегрально зависят от F, т. е. являются гладкими функциями от интегралов вида

$$\int_0^t d\mu\int\rho(x, t, z, \mu, F(z, \mu))\,dz.$$

Сделаем в этих интегралах замену $z = X(y, \mu)$ и обозначим

$$\tilde{F}(y, \mu) = F(X(y, \mu), \mu),$$

$$J(y, \mu) = \det\left\|\frac{\partial X_i(y, \mu)}{\partial y_j}\right\|.$$

Получим

$$\int_0^t d\mu\int\rho(x, t, X(y, \mu), \mu, \tilde{F}(y, \mu))\,|J(y, \mu)|\,dy. \qquad (2.4)$$

После такого преобразования коэффициенты a, b будут интегрально зависеть от X, $\tilde{F}$, $|J|$. Обозначим их через $\tilde{a}(x, t;\ [X, \tilde{F}, J])$, $\tilde{b}(x, t;\ [X, \tilde{F}, J])$.

2) Выпишем систему характеристик для задачи (2.1):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{X}(y, t)}{\partial t} = \tilde{a}(X(y, t), t;\ [X, \tilde{F}, J]),\ X(y, 0) = y;\\
&\frac{\partial \tilde{F}(y, t)}{\partial t} + \tilde{b}(X(y, t), t;\ [X, \tilde{F}, J])\tilde{F} = 0,\\
&\qquad\qquad \tilde{F}(y, 0) = F_0(y);\\
&\frac{\partial J(y, t)}{\partial t} = \operatorname{div}\tilde{a}(X(y, t), t;\ [X, \tilde{F}, J])J(y, t),\\
&\qquad\qquad J(y, 0) = 1.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $\operatorname{div}\tilde{a}(x, \tau;\ [X, \tilde{F}, J]) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{a}_i}{\partial x_i}(x, \tau;\ [X, \tilde{F}, J])$.

Если решение этой системы существует, то отображение g_t: $y \to X(y, t)$ есть локальный гомеоморфизм, так как его якобиан отличен от нуля:

$$J(y, t) = \exp\left\{\int_0^t \operatorname{div}\tilde{a}(X(y, \tau), \tau;\ [X, \tilde{F}, J])\,d\tau\right\} > 0. \tag{2.6}$$

3) Рассмотрим разбиение Δ_N отрезка $[0, T_0]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T_0$. Определим функцию $X^{(N)}(y, t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&X^{(N)}(y, 0) \equiv y,\\
&X^{(N)}(y, t) - (t - t_j)\,\tilde{a}(X^{(N)}(y, t), t_j;\ [X^{(N)}, \tilde{F}^{(N)}, J^{(N)}]) =\\
&\qquad\qquad = X^{(N)}(y, t_j)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

при $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Здесь $J^{(N)}(y, t) = \det\left\|\frac{\partial X_i^{(N)}(y, t)}{\partial y_j}\right\|$, а функция $\tilde{F}^{(N)}(y, t)$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned}
&\tilde{F}^{(N)}(y, 0) = F_0(y),\\
&\tilde{F}^{(N)}(y, t) = \tilde{F}^{(N)}(y, t_j)\,e^{-(t-t_j)\tilde{b}}(X^{(N)}(y, t), t_j;\ [X^{(N)}, \tilde{F}^{(N)}, J^{(N)}])
\end{aligned} \tag{2.8}$$

при $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Систему (2.7), (2.8) решаем следующим образом. Вначале решим (2.7) при $j = 0$, затем (2.8) при $j = 0$, затем опять (2.7) при $j = 1$ и т. д. Легко видеть, что $X^{(N)}(y, t)$, а значит и $\tilde{F}^{(N)}(y, t)$ являются гладкими функциями от y, причем их производные локально ограничены равномерно по $N = 1, 2, \ldots$ и $t \in [0, T_0]$.

4) Рассмотрим уравнение

$$X^{(N)}(y, t) = x \tag{2.9}$$

и найдем его решение $y = Y^{(N)}(x, t)$. В силу (2.7) имеем при $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$:

$$x - (t - t_j)\,\tilde{a}(x, t_j) = X^{(N)}(Y^{(N)}(x, t), t_j).$$

Здесь опущены аргументы $[X^{(N)}, \tilde{F}^{(N)}, J^{(N)}]$ у функции $\tilde{a}$. Отсюда

$$Y^{(N)}(x, t) = Y^{(N)}(x - (t - t_j)\,\tilde{a}(x, t_j), t_j), \; t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1},$$
$$Y^{(N)}(x, 0) = x. \tag{2.10}$$

Решая последовательно при $j = 0, 1, \ldots, N - 1$ уравнения (2.10), найдем функцию $y = Y^{(N)}$, удовлетворяющую (2.9).

Подставим $y = Y^{(N)}(x, t)$ в (2.8) и обозначим

$$F^{(N)}(x, t) = \tilde{F}^{(N)}(Y^{(N)}(x, t), t). \tag{2.11}$$

Получим, учитывая (2.10),

$$F^{(N)}(x, 0) = F_0(x),$$
$$F^{(N)}(x, t) =$$
$$= F^{(N)}(x - (t - t_j)\,\tilde{a}(x, t_j), t_j)\, e^{-(t-t_j)\tilde{b}(x, t_j)} \tag{2.12}$$

при $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, N - 1$.

Но в силу (2.11) и (2.9) имеем

$$\tilde{F}^{(N)}(y, t) = F^{(N)}(X^{(N)}(y, t), t).$$

Поэтому, согласно определению $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ (см. 1)), из (2.12) получим следующую систему уравнений для функции $F^{(N)}$:

$$F^{(N)}(x, 0) = F_0(x),$$
$$F^{(N)}(x, t) = \exp\{-(t - t_j)\, b(x, t_j;\ [F^{(N)}])\} \times$$
$$\times \exp\left\{(t_j - t)\, a(\overset{2}{x}, t_j; [F^{(N)}])\, \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right\} F^{(N)}(x, t_j)$$

при $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$. Таким образом, $F^{(N)}(x, t)$ является аппроксимацией T-отображения (2.3) с образующей $G_{t,\varepsilon}$ (см. (2.2)).

5) В силу (2.11) для доказательства теоремы нам необходимо установить, что существует

$$\lim_{\delta_N \to \infty} F^{(N)}(x, t) = \lim_{\delta_N \to \infty} \tilde{F}^{(N)}(Y^{(N)}(x, t), t) \qquad (2.13)$$

в норме $C([0, T_0], B)$, где $B = C(M)$. Для этого достаточно доказать существование в указанной норме пределов

$$\lim_{\delta_N \to \infty} \tilde{F}^{(N)}, \qquad \lim_{\delta_N \to \infty} Y^{(N)}. \qquad (2.14)$$

Но $Y^{(N)} = [X^{(N)}]^{-1}$ (см. (2.9)). Поэтому можно доказывать сходимость $X^{(N)}$.

6) Выпишем теперь уравнения для якобиана $J^{(N)}(y, t)$. Из формулы (2.7) получим (при $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$)

$$J^{(N)}(y, t) =$$

$$= \frac{J^{(N)}(y, t_j)}{\det \left\| \delta_{i_k} - (t - t_j) \dfrac{\partial \tilde{a}_i}{\partial x_k} (X^{(N)}(y, t), t_j; [X^{(N)}, \tilde{F}^{(N)}, J^{(N)}]) \right\|}, \qquad (2.15)$$

$$J^{(N)}(y, 0) = 1.$$

7) Рассмотрим систему уравнений (2.7), (2.8), (2.15). Обозначим

$$f^{(N)}(t) = \{X^{(N)}(\cdot, t), \tilde{F}^{(N)}(\cdot, t), J^{(N)}(\cdot, t)\}.$$

Таким образом, $f^{(N)}(t)$ — непрерывная функция со значениями в пространстве непрерывных $(n+2)$-мерных вектор-функций B'.

Введем отображение $Q_{t,\varepsilon} : C([0, T_0], B') \to B'$ по формуле

$$Q_{t,\varepsilon}[f^{(N)}] = \{X^{(N)}(\cdot, t) + \varepsilon\tilde{a}(X^{(N)}(\cdot, t+\varepsilon), t),$$
$$F^{(N)}(\cdot, t)\exp\{-\varepsilon\tilde{b}(X^{(N)}(\cdot, t+\varepsilon), t)\},$$
$$\left.\frac{J^{(N)}(\cdot, t)}{\det \left\| \delta_{ik} - \varepsilon \dfrac{\partial \tilde{a}_i}{\partial x_k} (X^{(N)}(\cdot, t+\varepsilon), t) \right\|}\right\},$$

где у $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ опущены аргументы $X^{(N)}$, $\tilde{F}^{(N)}$, $J^{(N)}$, от которых $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ зависят интегрально.

Кроме того, пусть

$$P_t[f^{(N)}] = \{\tilde{a}(X^{(N)}(\cdot, t), t), \ -\tilde{b}(X^{(N)}(\cdot, t), t),$$
$$\operatorname{div}\tilde{a}\ (X^{(N)}(\cdot, t), t)\},$$
$$Q_{t,\varepsilon}^{(0)}[f^{(N)}] = f^{(N)}(t) + \varepsilon P_t[f^{(N)}].$$

Тогда уравнения (2.7), (2.8), (2.15) можно записать в виде

$$f^{(N)}(0) = f_0, \tag{2.16}$$
$$f^{(N)}(t) = Q_{t_j, t-t_j}[f^{(N)}]$$

при $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$, $j = 0, \ldots, N-1$, $f_0(y) = \{y, F_0(y), 1\}$.

Используя вместо $Q_{t,\varepsilon}$ образующую $Q_{t,\varepsilon}^{(0)}$, построим систему

$$\tilde{f}^{(N)}(0) = f_0, \tag{2.17}$$
$$\tilde{f}^{(N)}(t) = Q_{t_j, t-t_j}^{(0)}[\tilde{f}^{(N)}]$$

при $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$.

Система (2.17) есть система ломаных Эйлера для задачи

$$\frac{df}{dt} = P_t[f], \qquad f(0) = f_0. \tag{2.18}$$

Существование предела $f = \lim\limits_{\delta_N \to 0} \tilde{f}^{(N)}$ доказывается, как и в классическом случае [16, 18]. Оказывается, что этот предел существует в норме $C([0, T_0], B')$ при достаточно малом $T_0 > 0$ и удовлетворяет задаче (2.18). С другой стороны, образующая $Q_{t,\varepsilon}$ отличается от $Q_{t,\varepsilon}^{(0)}$ на $O(\varepsilon^2)$. Поэтому на $[0, T_0]$ существует $\lim\limits_{\delta_N \to 0} f^{(N)} = f$.

Итак, доказана сходимость схемы (2.7), (2.8). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Задача Коши (2.18), аппроксимацией которой являются схемы (2.16) и (2.17), совпадает с системой уравнений характеристик (2.5).

С л е д с т в и е. *Решение* $F(x, t)$ *задачи Коши* (2.1) *существует на том отрезке* $[0, T]$, *на котором существует решение* $(X, \tilde{F}, J)$ *системы характеристик* (2.5), *и задается формулой*

$$F(x, t) = \tilde{F}(Y(x, t), t),$$

где $Y(x, t)$ *есть решение уравнения*

$$x = X(y, t).$$

4. Обобщенное уравнение Власова. Пусть вещественная функция $H(q, p, t; [f])$ интегрально зависит от f и $q, p \in \mathbf{R}^n$, $t \geqslant 0$. Рассмотрим частный случай уравнения (2.1):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t; [f]) \frac{\partial f}{\partial q} - \\ - \frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t; [f]) \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}(q, p, t; [f]) f = 0, \quad (2.19)$$

$$f(q, p, 0) = f_0(q, p) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n}),$$

где обозначено

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i}.$$

Это квазилинейное интегро-дифференциальное уравнение назовем *обобщенным уравнением Власова.*

Функция H по условию гладко зависит от интегралов вида

$$\int_0^t d\tau \int \rho(q, p, t; q', p', \tau; f(q', p', \tau)) \, dq' \, dp',$$

где $\rho \in C^\infty$ — финитная функция от (q', p').

В каждом таком интеграле сделаем замену переменных

$$q' \to Q(z, \omega, \tau), \; p' \to P(z, \omega, z), \quad (2.20)$$

где Q, P — неизвестные функции, причем

$$\frac{D(Q, P)}{D(z, \omega)} = 1, \qquad (z, \omega) \in \mathbf{R}^n.$$

Тогда функция $H(q, p, t; [f])$ перейдет в

$$\tilde{H}(q, p, t; [Q, P, \tilde{f}]), \quad (2.21)$$

где $\tilde{f}(z, \omega, \tau) = f(Q(z, \omega, \tau), P(z, \omega, \tau), \tau)$, причем $\tilde{H}$ гладко зависит от интегралов

$$\int_0^t d\tau \int \rho(q, p, t; Q(z, \omega, \tau), P(z, \omega, \tau); \tilde{f}(z, \omega, \tau)) \, dz \, d\omega. \quad (2.22)$$

Функции Q, P определим из следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau}(z, \omega, \tau) = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p}(Q(z, \omega, \tau), P(z, \omega, \tau), \tau;\ [Q, P, f_0]),$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau}(z, \omega, \tau) = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q}(Q(z, \omega, \tau), P(z, \omega, \tau), \tau;\ [Q, P, f_0]),$$

$$X(z, \omega, 0) = z,\ P(z, \omega, 0) = \omega, \tag{2.23}$$

где $f_0(q, p)$ — начальное условие в (2.19).

Из теоремы 2.1 вытекает следующая

Теорема 2.2. *Существует $T_0 > 0$ такое, что при $t \in [0, T_0]$ система уравнений* (2.23) *имеет единственное решение $Q, P \in C^\infty(\operatorname{supp} f_0 \times [0, T_0])$, и тогда:*

1) *Отображение g_t: $(z, \omega) \to (Q(z, \omega, t), P(z, \omega, t))$ является каноническим; в частности,*

$$\frac{D(Q, P)}{D(z, \omega)} = 1.$$

2) *Решение задачи Коши* (2.19) *при $t \in [0, T_0]$ существует, единственно и задается T-отображением:*

$$f(q, p, t) = \exp\left\{-\int_0^t \left[\frac{\partial H}{\partial p}(q, p, \tau;\ [f])\frac{\partial}{\partial q} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial H}{\partial q}(q, p, \tau;\ [f])\frac{\partial}{\partial p}\right] d\tau\right\} f_0(q, p).$$

3) *Система* (2.23) *является системой уравнений характеристик для задачи* (2.19), *т. е.*

$$f(Q(z, \omega, t), P(z, \omega, t), t) = f_0(z, \omega).$$

Иными словами, решение задачи Коши (2.19) получается с помощью сдвига начальной функции f_0 по траекториям системы (2.23).

Замечание. *Всюду в дальнейшем на гамильтониан H_0 мы будем налагать дополнительное условие вида*

$$\left|\frac{\partial H_0}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial H_0}{\partial p}\right| \leqslant C_1 + C_2(|x| + |p|),$$

где C_1 и C_2 — константы.

При этом ограничении, как это следует из теоремы 8.4 гл. I [16], система (2.23) разрешима на любом отрезке времени $[0, T]$.

Если же это условие не выполнено, то все результаты гл. IV—VI имеют место лишь на том отрезке времени $[0, T_0]$, на котором решение системы 2.23 существует.

Определим теперь действие и энтропию на лагранжевом многообразии, отвечающем уравнению Власова. Пусть Λ_0^n — некоторое лангранжево многообразие [13, 16] в $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_p^n$ относительно формы $dx \wedge dp$, $\varkappa_0$ — гладкая вещественная финитная функция на Λ_0^n, $d\alpha$ — мера на Λ_0^n, индуцированная мерой $dx\, dp$ на $\mathbf{R}^{2n}$.

Рассмотрим уравнение Власова с начальным условием, сосредоточенным на Λ_0^n:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p}(x, p, t;\ [F]) - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, t; [F]) = 0, \tag{2.24}$$

$$F(x, p, 0) = F_0(x, p),$$

$\operatorname{supp} F_0 \subset \Lambda_0^n$, где обобщенная функция F_0 действует по формуле

$$\langle F_0, \varphi\rangle = \int_{\Lambda_0^n} \varkappa_0(\alpha)\varphi(x(\alpha), p(\alpha))\, d\alpha,$$

α — координата на $\Lambda_0^n = \{x = x(\alpha),\ p = p(\alpha)\}$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$.

Рассмотрим характеристики $X(z, \omega, t)$, $P(z, \omega, t)$ этой задачи Коши. Обозначим $X(\alpha, t) = X(x(\alpha), p(\alpha), t)$, $P(\alpha, t) = P(x(\alpha), p(\alpha), t)$; сдвиг Λ_0^n по этим характеристикам есть лагражево многообразие Λ_t:

$$\Lambda_t^n = \{x = X(\alpha, t),\ p = P(\alpha, t),\ \alpha \in \Lambda_0\}.$$

Пусть S_0 — действие на Λ_0^n (см. [13, 16]). Определим *действие* на Λ_t^n формулой

$$\tilde{S}(\alpha, t) = S_0(\alpha) + \int_0^t \Big\{P(\alpha, \tau)\frac{\partial X}{\partial \tau}(\alpha, \tau) - \\ - H(X(\alpha, \tau), P(\alpha, \tau), \tau; [X; P])\Big\}\, d\tau.$$

Энтропией $H_0(t)$ на Λ_t^n — будем называть действие $\tilde{S}(\alpha, t)$, усредненное по функции $\varkappa_0$:

$$H_0(t) = \int_{\Lambda_0^n} \tilde{S}(\alpha, t)\varkappa_0(\alpha)\, d\alpha.$$

Таким образом, энтропия полностью определяется начальными данными задачи (2.24).

Пусть, например, многообразие Λ_0^n задано уравнением

$$p = \frac{\partial S_0(x)}{\partial x},$$

где $S_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Переменные $x = (x_1, \ldots, x_n)$ являются глобальными координатами на Λ_0^n. На многообразии Λ_0^n рассмотрим некоторую гладкую вещественную функцию $\varkappa_0$. Пусть $F(x, p, t)$ — решение задачи Коши уравнения Власова (—) с начальным условием

$$F(x, p, 0) = \varkappa_0(x)\,\delta\left(p - \frac{\partial S_0}{\partial x}(x)\right),$$

сосредоточенным на Λ_0^n. Пусть $X(z, t)$, $P(z, t)$ — соответствующие этой задаче Коши характеристики, выпущенные из Λ_0:

$$(X(z, 0), P(z, 0)) \in \Lambda_0^n,$$

а $\tilde{S}(z, t)$ — действие на $\Lambda_t^n = \{x = X(z, t),\ p = P(z, t)\}$. Рассмотрим энтропию $H_0(t) = \int \tilde{S}(z, t)\,\varkappa_0(z)\,dz$ на Λ_t^n. Легко доказать, что на том отрезке $[0, T_0]$, на котором $DX(z, t)/Dz > 0$, энтропию можно вычислить по следующей формуле:

$$H_0(t) = \iint S(x, t)\,F(x, p, t)\,dx\,dp, \tag{2.25}$$

где $S(x, t)$ — решение уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t; [F]\right) = 0,$$

$$S(x, 0) = S_0(x).$$

5. Система обобщенных уравнений Власова. Рассмотрим следующую систему квазилинейных уравнений:

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t; [f])\frac{\partial f_k}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t; [f])\frac{\partial f_k}{\partial p} + \sum_{j=1}^{r} b_{kj}(q, p, t; [f])\,f_j = 0, \tag{2.26}$$

$$f_k(q, p, 0) = f_{0k}(q, p), \quad k = 1, \ldots, r.$$

Здесь вещественная функция Гамильтона H и коэффициенты b_{ij} интегрально зависят от компонент вектор-функции $f = (f_1, \ldots, f_r)$. После замены переменных вида (2.20) функции H, b_{ij} перейдут в $\widetilde{H}(q, p, t; [Q, P, \tilde{f}])$ и в $\tilde{b}_{ij}(q, p, t; [Q, P, \tilde{f}])$ по формулам (2.21), (2.22).

Система уравнений характеристик для задачи (2.26) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial Q}{\partial t}(z, \omega, t) = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p}(Q(z, \omega, t), P(z, \omega, t), t; [Q, P, \tilde{f}]),\\
\frac{\partial P}{\partial t}(z, \omega, t) = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q}(Q(z, \omega, t), P(z, \omega, t), t; [Q, P, \tilde{f}]),\\
\frac{\partial \tilde{f}_k(z, \omega, t)}{\partial t} + \\
+ \sum_{j=1}^{r} \tilde{b}_{kj}(Q(z, \omega, t), P(z, \omega, t); [Q, P, \tilde{f}]) \tilde{f}_j(z, \omega, t) = 0,\\
Q(z, \omega, 0) = z,\ P(z, \omega, 0) = \omega,\ \tilde{f}_k(z, \omega, 0) = f_{0k}(z, \omega),\\
k = 1, \ldots, r.
\end{gathered} \tag{2.27}$$

Для задачи Коши (2.26) остаются справедливыми все утверждения теоремы 2.2 (с заменой системы характеристик (2.23) на (2.27)).

§ 3. Общие интегро-дифференциальные уравнения первого порядка

1. Определение 3.1. *Интегро-дифференциальным уравнением первого порядка* называется следующее нелинейное уравнение относительно функции $\Phi(x)$:

$$R\left(x, \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x), \Phi(x); \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \Phi\right]\right) = 0, \tag{3.1}$$

где $R(x, p, s; [P, \Phi])$ интегрально зависит от P, Φ и является гладкой функцией x, $p \in \mathbf{R}^m$, $s \in \mathbf{R}$.

В этом параграфе будет рассмотрен случай, когда в уравнении (3.1) одна из переменных (обозначаемая t) выделена по отношению к остальным. Кроме того, без уменьшения общности можно считать, что символ R в уравнении (3.1) зависит лишь от производных неизвестной функции.

Рассмотрим следующую задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x, t) + L\left(x, t, \frac{\partial S}{\partial x}(x, t); \left[\frac{\partial S}{\partial x}\right]\right) = 0, \quad (3.2)$$
$$S(x, 0) = S_0(x),$$

где $L(x, t, p; [P])$ — вещественная функция, гладкая по $x, p \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$, и интегрально зависящая от $P(x, t)$.

Таким образом, нелинейный член в (3.2) есть гладкая функция от интегралов вида

$$I = \int_0^t dt \int_{\mathbf{R}^n} \rho\left(x, t, \frac{\partial S}{\partial x}(x, t); y, \tau, \frac{\partial S}{\partial y}(y, \tau)\right) dy, \quad (3.3)$$

где $\rho \in C^\infty$, причем носитель $\operatorname{supp}_y \rho(x, t, p; y, \tau, \xi)$ содержится в ограниченном множестве K, не зависящем от остальных переменных (x, t, ρ, τ, ξ).

В этом параграфе будет получена теорема существования решения задачи (3.2); предъявлен метод сведения задачи (3.2) к квазилинейному интегро-дифференциальному уравнению, исследованному в § 2; получена основная формула для решения задачи (3.2) через решения соответствующей системы характеристик. (Формулировки теорем приведены в п. 6).

В п. 8 рассматривается специальный класс интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, также допускающих решение методом характеристик.

2. Построим функцию Гамильтона, отвечающую задаче (3.2). Сделаем формальную замену

$$\begin{gathered} \frac{\partial S}{\partial x}(x, t) = p, \\ y = X(z, \tau), \frac{\partial S}{\partial y}(X(z, \tau), \tau) = P(z, \tau), \\ S(X(z, \tau), \tau) = \tilde{S}(z, \tau). \end{gathered} \quad (3.4)$$

Пусть, кроме того,

$$J_{ij} = \partial X_i / \partial z_j, \quad J = \| J_{ij} \|.$$

После замены (3.4) интеграл (3.3) перейдет в интеграл

$$\tilde{I} = \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^n} \rho(x, t, p; X(z, \tau), \tau, P(z, \tau)) \,|\det J(z, \tau)|\, dz. \quad (3.5)$$

Подставим в $L(x, t, p, [\partial S/\partial x])$ вместо каждого интеграла I вида (3.3) интеграл $\tilde{I}$ из (3.5). Получим функцию

$$H(x, t, p; [X, P, J]), \tag{3.6}$$

которая гладко зависит от x, $p \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$ и интегрально от X, P, J. Функцию (3.6) назовем *функцией Гамильтона*, отвечающей задаче (3.2).

3. Введем единые обозначения для всех функций X, P, J, от которых зависит функция Гамильтона (3.6). Введем якобиан $I_{kj} = \partial P_k/\partial z_j$. Пусть

$$\begin{aligned}
&Y_1 = X_1, \ldots, Y_n = X_n,\\
&Y_{n+1} = P_1, \ldots, Y_{2n} = P_n,\\
&Y_{2n+1} = J_{11}, \ldots, Y_{3n} = J_{1n},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&Y_{n(n+1)+1} = J_{n1}, \ldots, Y_{n(n+2)} = J_{nn},\\
&Y_{n^2+2n+1} = I_{11}, \ldots, Y_{n^2+3n} = I_{1n},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&Y_{2n^2+n+1} = I_{n1}, \ldots, Y_{2n^2+2n} = I_{nn}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Всего получаем $m = 2n^2 + 2n$ функций $Y_1(z, \tau), \ldots, Y_m(z, \tau)$. Пусть, кроме того,

$$\begin{aligned}
&Y^{(1)} = (Y_1, \ldots, Y_n),\\
&Y^{(2)} = (Y_{n+1}, \ldots, Y_{2n}),\\
&Y^{(3)} = \begin{pmatrix} Y_{2n+1}, & \ldots, & Y_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ Y_{n^2+n+1}, & \ldots, & Y_{n^2+2n}\end{pmatrix},\\
&Y^{(4)} = \begin{pmatrix} Y_{n^2+2n+1}, & \ldots, & Y_{n^2+3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ Y_{2n^2+n+1}, & \ldots, & Y_{2n^2+2n}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Функция Гамильтона H из (3.6) в этих обозначениях примет вид $H(x, t, p; [Y^{(1)}, Y^{(2)}, Y^{(3)}])$.

4. Выпишем *систему характеристик* для задачи (3.2):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial Y^{(1)}(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p}(Y^{(1)}(z, t), t, Y^{(2)}(z, t), [Y^{(1)}, Y^{(2)}, Y^{(3)}]),\\
&\frac{\partial Y^{(2)}(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial Y^{(3)}(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial x} Y^{(3)}(z, t) + \frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial p} Y^{(4)}(z, t),$$
$$\frac{\partial Y^{(4)}(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial p} Y^{(4)}(z, t) - \frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial x} Y^{(3)}(z, t), \tag{3.8}$$

где у функции H и ее производных опущены аргументы, выписанные в первой строке (3.8); через $\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial x}$ обозначена $n\times n$-матрица $\left\|\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_j}\right\|$ и аналогично $\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial p}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial x}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial p}$ — это матрицы из вторых производных функции H.

Начальные данные для (3.8) определяются из формул (3.7), (3.4) и начальных данных (3.2):

$$\begin{aligned} Y^{(1)}(z, 0) &= z, \\ Y^{(2)}(z, 0) &= \frac{\partial S_0}{\partial x}(z), \\ Y^{(3)}(z, 0) &= \| \delta_{ij} \|, \\ Y^{(4)}(z, 0) &= \left\| \frac{\partial^2 S_0(z)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ниже будет доказано, что система (3.8), (3.9) является системой уравнений характеристик для задачи Коши (3.2). Пусть

$$Y_0(z) = (Y^{(1)}(z, 0), \ldots, Y^{(4)}(z, 0)). \tag{3.10}$$

Перепишем систему (3.8), (3.9) в компактном виде:

$$\frac{\partial Y(z, t)}{\partial t} = a(Y(z, t), t;\ [Y]),\quad Y(z, 0) = Y_0(z). \tag{3.11}$$

Здесь вектор-функция $a(y, t;\ Y)$ интегрально зависит от Y и задается формулами (см. (3.8))

$$\begin{aligned} &a = (a^{(1)}, \ldots, a^{(4)}),\quad y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(4)}), \\ &a^{(1)}(y, t, [Y]) = \frac{\partial H}{\partial p}(y^{(1)}, t, y^{(2)};\ [Y^{(1)}, Y^{(2)}, Y^{(3)}]), \\ &a^{(2)} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ &a^{(3)} = \frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial x} y^{(3)} + \frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial p} y^{(4)}, \\ &a^{(4)} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial p} y^{(4)} - \frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial x} y^{(3)}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

где у функции H и ее производных опущены аргументы, выписанные во второй строке.

5. Как уже отмечалось, функция L в уравнении (3.2) гладко зависит от интегралов вида (3.3). Каждый такой интеграл I после замены (3.4) переходит в $\tilde{I}$ (см. (3.5)). Сопоставим теперь каждому интегралу $\tilde{I}$ функцию

$$\tilde{\tilde{I}} = \int_0^t d\tau \int_{\mathrm{R}^m} \rho(x, t, p;\ y^{(1)}, \tau, y^{(2)}) \,|\det y^{(3)}|\, F(y,\ \tau)\, dy. \quad (3.13)$$

Здесь F — неизвестная функция

$$\begin{gathered} dy = dy_1, \ldots, dy_m, \quad y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(4)}), \\ y^{(1)} = (y_1, \ldots, y_n), \quad y^{(2)} = (y_{n+1}, \ldots, y_{2n}), \\ y^{(3)} = \begin{pmatrix} y_{2n+1}, & \ldots, & y_{3n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ y_{n^2+n+1}, & \ldots, & y_{n^2+2n} \end{pmatrix}, \\ y^{(4)} = \begin{pmatrix} y_{n^2+2n+1}, & \ldots, & y_{n^2+3n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ y_{2n^2+n+1}, & \ldots, & y_{2n^2+2n} \end{pmatrix}, \\ m = 2n^2 + 2n. \end{gathered} \quad (3.13')$$

Подставим в функцию $L(x,\ t,\ p;\ [\partial S/\partial x])$ вместо каждого интеграла I вида (3.3) интеграл $\tilde{\tilde{I}}$ из (3.13). Получим функцию

$$\mathscr{H}(x,\ t,\ p;\ [F]), \quad (3.14)$$

интегрально зависящую от F.

Используя функцию $\mathscr{H}$, по формулам, аналогичным (3.12), построим вектор-функцию $\tilde{a} = (\tilde{a}^{(1)}, \ldots, \tilde{a}^{(4)})$:

$$\begin{aligned} \tilde{a}^{(1)}(y, t; F) &= \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p}(y^{(1)}, t, y^{(2)};\ [F]), \\ \tilde{a}^{(2)} &= -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x}, \\ \tilde{a}^{(3)} &= \frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial p\, \partial x} y^{(3)} + \frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial p\, \partial p} y^{(4)}, \\ \tilde{a}^{(4)} &= -\frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial x\, \partial p} y^{(4)} - \frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial x\, \partial x} y^{(3)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Функция $\tilde{a}\,(y,\ t;\ [F])$ интегрально зависит от F.

6. Сформулируем теперь основные результаты о разрешимости задачи Коши (3.2). Напомним, что, по предположению, носители функций $\rho(x, t, p, y, \tau, \xi)$ по переменной y в интегралах (3.3), от которых зависит функция $L(x, t, p; [\partial S/\partial x])$, содержатся в фиксированном компактном множестве $K \subset \mathbf{R}^n$.

Рассмотрим банахово пространство B_M непрерывных функций на компакте $M \subset \mathbf{R}^n$ со значениями в $\mathbf{R}^m$, $m = 2n^2$. Пусть $M \supset K$ и $M \supset \operatorname{supp} S_0$. Уравнение (3.11) будем рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для функции со значениями в B_M (см. § 2):

$$\frac{dY}{dt} = a(Y, t; [Y]).$$

Здесь $Y(\cdot, t) \in B_M$, $Y(z, t) = (X(t, z), P(t, z), J_{ij}(t, z), I_{ij}(t, z))$. Задача Коши для этого уравнения с начальными условиями $Y(z, 0) = Y_0(z)$ из (3.9) разрешима на некотором отрезке времени $[0, T_M]$. Пусть для всех $t \in [0, T_M]$ справедливо включение

$$K \subset \{x \mid x = X(t, z),\ z \in M\}.$$

Решение $Y(z, t)$ задачи Коши (3.11) бесконечно дифференцируемо. Кроме того, легко доказать следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Для любого компакта $G \subset \mathbf{R}^n$ такого, что $G \supset K$, $G \supset \operatorname{supp} S_0$, существует число $T_0 > 0$ и гладкая функция $z = z(x, t)$ на $G \times [0, T_0]$ со значениями в $\mathbf{R}^n$ такие, что*

$$x = X(z(x, t), t),$$
$$\det \| J_{ij}(z(x, t), t) \| > 0, \tag{3.16}$$

$$P(z(x, t), t) = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{S}(z(x, t), t),$$

где

$$\tilde{S}(z, t) = S_0(z) + \int_0^t \Big\{P(z, \tau) \frac{\partial X}{\partial \tau}(z, \tau) - H(X(z, \tau), \tau, P(z, \tau); [X, P, J]\Big\} d\tau. \tag{3.17}$$

При помощи этой леммы непосредственным вычислением доказывается следующая

Теорема 3.1. *Функция* $S : (G \times [0, T_0]) \to \mathbf{R}$, *задаваемая формулой*

$$S(x, t) = \tilde{S}(z(x, t), t),$$

где $\tilde{S}$ *определено в* (3.17), *является гладким решением задачи Коши* (3.2).

Эта теорема сводит решение задачи Коши (3.2) к решению системы характеристик (3.11). Можно также свести задачу Коши (3.2) к квазилинейному интегро-дифференциальному уравнению, изученному в § 2.

Теорема 3.2. *Пусть функция* F *удовлетворяет задаче Коши для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения*:

$$\begin{gathered}\frac{\partial F(y, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_i} [\tilde{a}_i(y, t;\ [F]) F(y, t)] = 0, \\ F(y, 0) = \prod_{j=2}^{4} \delta(y^{(j)} - Y_0^{(j)}(y^{(1)})),\end{gathered} \tag{3.18}$$

где $m = 2n^2 + 2n$, *а функции* $\tilde{a}_i$, $Y_0^{(j)}$ *определены в* (3.15), (3.9), (3.10), (3.13′). *Пусть* $S(x, t)$ — *решение следующей задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби*:

$$\begin{gathered}\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}\left(x, t, \frac{\partial S}{\partial x};\ [F]\right) = 0, \\ S(x, 0) = S_0(x).\end{gathered} \tag{3.19}$$

Тогда функция S *удовлетворяет задаче* (3.2).

Доказательство. Рассмотрим систему из m обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial t} = \tilde{a}(\tilde{Y}, t;\ [F]), \quad \tilde{Y}|_{t=0} = u \in \mathbf{R}^m. \tag{3.20}$$

Пусть $\tilde{Y}(u, t)$ — ее решение. Тогда

$$\frac{D(\tilde{Y}(u, t))}{D(u)} = \exp\left\{\int_0^t \tilde{a}(\tilde{Y}(u, \tau), \tau;\ [F])\, d\tau\right\}. \tag{3.21}$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{F}(u, t) = F(\tilde{Y}(u, t), t).$$

В силу (3.18), (3.20) она удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \tilde{F}(u, t)}{\partial t} + \tilde{F}(u, t)\,\mathrm{div}_y \tilde{a}(\tilde{Y}(u, t), t, [F]) = 0,\\ \tilde{F}(u, 0) = \prod_{i=2}^{4} \delta(u^{(i)} - Y_0^{(i)}(u^{(1)})).\end{gathered} \tag{3.22}$$

Здесь использовано представление вектора $u \in \mathrm{R}^m$ в виде $u = (u^{(1)}, \ldots, u^{(4)})$, где $u^{(1)}$, $u^{(2)} \in \mathrm{R}^n$, а компоненты $u^{(3)}$, $u^{(4)}$ суть $n \times n$-матрицы (ср. (3.13′)).

Решение задачи (3.22) выписывается явно:

$$\tilde{F}(u, t) = \prod_{i=2}^{4} \delta(u^{(i)} - Y_0^{(i)}(u^{(1)})) \times \\ \times \exp\left\{-\int_0^t \mathrm{div}_y \tilde{a}(\tilde{Y}(u, \tau), \tau;\ [F])\, d\tau\right\}. \tag{3.23}$$

Сделаем теперь в каждом интеграле $\tilde{\tilde{I}}$ вида (3.13) замену переменных $y = \tilde{Y}(u, \tau)$. Получим

$$\tilde{\tilde{I}} = \int_0^t d\tau \int_{\mathrm{R}^m} \rho(x, t, p, \tilde{Y}^{(1)}(u, \tau), \tau, \tilde{Y}^{(2)}(u, \tau)) \times \\ \times |\det \tilde{Y}^{(3)}(u, \tau)|\, \tilde{F}(u, \tau) \left|\frac{D(\tilde{Y}(u, \tau))}{D(u)}\right| du.$$

Воспользуемся формулами (3.21), (3.23). Тогда интеграл $\tilde{\tilde{I}}$ после интегрирования по $u^{(2)}, \ldots, u^{(4)}$ будет иметь вид

$$\tilde{\tilde{I}} = \int_0^t d\tau \int_{\mathrm{R}^m} \rho(x, t, p;\ \tilde{\tilde{Y}}^{(1)}(z, \tau), \tau, \tilde{\tilde{Y}}^{(2)}(z, \tau))\,|\det \tilde{\tilde{Y}}^{(3)}(z, \tau)|\, dz, \tag{3.24}$$

где

$$\tilde{\tilde{Y}}(z, \tau) = \tilde{Y}(Y_0(z), \tau). \tag{3.25}$$

Формула (3.24) и определение функций $\tilde{a}$, a (см. (3.15), (3.12)) показывают, что

$$\tilde{a}(y, t;\ [F]) = a(y, t;\ [\tilde{\tilde{Y}}]). \tag{3.26}$$

Воспользуемся теперь уравнением (3.20). Положим $u = Y_0(z)$. Тогда из (3.20), (3.25), (3.26) получим

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{\tilde{Y}}}(z,t)}{\partial t} = a(\tilde{\tilde{\tilde{Y}}}(z,t), t; [\tilde{\tilde{\tilde{Y}}}]), \quad \tilde{\tilde{\tilde{Y}}}(z,0) = Y_0(z).$$

Эта задача Коши совпадает с системой характеристик (3.11) и в силу единственности ее решения мы имеем

$$\tilde{\tilde{\tilde{Y}}}(z, t) \equiv Y(z, t).$$

Из (3.7), (3.24) вытекает, что интеграл $\tilde{\tilde{I}}$ совпадает с $\tilde{I}$ (см. (3.5)). Следовательно,

$$\mathcal{H}(x, t, p, [F]) = H(x, t, p, [X, P, J]).$$

Из этой формулы, а также в силу теоремы 3.3 и определения (3.6) функции H получим

$$\mathcal{H}(x, t, p, [F]) = L\left(x, t, p, \left[\frac{\partial S}{\partial x}\right]\right).$$

Таким образом, решение задачи (3.19) удовлетворяет также задаче (3.2). Теорема доказана.

7. В заключение рассмотрим задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения, содержащего вторые производные неизвестной функции. Эти производные входят в уравнения таким образом, что удается написать систему уравнений характеристик и с ее помощью решить исходную задачу.

Пусть $L_{[s]}(x, t, p)$ — гладкая вещественная функция, зависящая от x, $p \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$ и от конечного числа интегралов вида

$$I_1 = \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^{2n}} f\left(x, t, p; y, \omega, \tau; \frac{\partial S}{\partial \omega}(y, \omega, \tau), \frac{\partial S}{\partial y}(y, \omega, \tau)\right) \times \\ \times \det\left\| \frac{\partial^2 S(y, \omega, \tau)}{\partial y_i \, \partial \omega_j} \right\|^{-1} d\omega \, dy, \tag{3.27}$$

где f — гладкая функция, носитель которой по y и ω содержится в фиксированном компакте K.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered} \frac{\partial S(x, \omega, t)}{\partial t} + L_{[S]}\left(x, t, \frac{\partial S}{\partial x}(x, \omega, t)\right) = 0, \\ S(x, \omega, 0) = x\omega. \end{gathered} \tag{3.28}$$

Требуется найти ее решение на некотором отрезке времени $[0, T_0]$, на котором

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \omega_j} (x, \omega, t) \right\| \geqslant \varepsilon > 0. \tag{3.29}$$

При условии (3.29) подынтегральное выражение в (3.27) конечно.

Выпишем функцию Гамильтона, отвечающую задаче (3.28). Пусть $X(z, \omega, t)$, $P(x, \omega, t)$ — некоторые гладкие вещественные функции со значениями в $\mathbf{R}^n$. Пусть

$$\tilde{I}_1 = \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^{2n}} f(x, t, p; X(z, \omega, \tau), \omega, \tau; z, P(z, \omega, \tau))\, d\omega\, dz. \tag{3.30}$$

Заменим в функции $L_{[s]}(x, t, p)$ каждый интеграл I_1 вида (3.27) (от которого она зависит) на интеграл $\tilde{I}_1$ из (3.30). Получим функцию Гамильтона

$$H(x, t, p; [X; P]), \tag{3.31}$$

интегрально зависящую от X, P.

Рассмотрим систему характеристик задачи (3.28):

$$\begin{gathered} \frac{\partial X(z, \omega, t)}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p}(X(z, \omega, t), t, P(z, \omega, t); [X; P]), \\ \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{gathered} \tag{3.32}$$

$$X(z, \omega, 0) = z,\ P(z, \omega, 0) = \omega,\ (z, \omega) \in M,$$

где у функций X, P и их производных опущены аргументы (z, ω, t), а у функции H и ее производных опущены аргументы, выписанные в первой строке (3.32); M — компакт в $\mathbf{R}^{2n}$.

Все утверждения п. 6 этого параграфа остаются справедливыми для задачи (3.28) и ее системы характеристик (3.32).

Для любого компакта $M \supset K$ существует $T_M > 0$ такое, что при $t \in [0, T_M]$ решение $\{X(\cdot, \cdot, t), P(\cdot, \cdot, t)\}$ системы (3.32), рассматриваемой как задача Коши в банаховом пространстве $C(M, \mathbf{R}^{2n+1})$, существует, причем для любого $t \in [0, T_M]$ справедливо включение

$$K \subset \{(x, \omega) \mid x = X(z, \omega, t),\ (z, \omega) \in M\}.$$

С л е д с т в и е. *Преобразование*

$$(z,\ \omega) \to (X\ (z,\ \omega,\ t),\ P\ (z,\ \omega,\ t))$$

при любом $t \in [0,\ T_M]$ *является каноническим относительно формы* $dz \wedge d\omega$.

Определим функцию $\tilde{S}$: $M \times [0,\ T_M] \to \mathbf{R}$ формулой

$$\tilde{S}(z,\ \omega,\ t) = z\omega + \int_0^t \Big\{P(z,\ \omega,\ \tau)\frac{\partial X}{\partial \tau}(z,\ \omega,\ \tau) -$$

$$- H(X(z,\ \omega,\ \tau),\ \tau P(z,\ \omega,\ \tau);\ [X;\ P])\Big\}\, d\tau. \quad (3.33)$$

Л е м м а 3. 2. *Пусть* G *— любой компакт в* $\mathbf{R}^{2n}$, *содержащий* K. *Существует число* $T_0 > 0$ *и гладкая функция* $z = z\ (x,\ \omega,\ t)$, *определенная на* $G \times [0,\ T_0]$ *и принимающая значения в* $\mathbf{R}^n$ *такие, что*

$$\begin{gathered} x = X\ (z\ (x,\ \omega,\ t),\ \omega,\ t), \\ J(x,\ \omega,\ t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{DX}{Dz}(z\,(x,\ \omega,\ t),\ \omega,\ t) > 0. \end{gathered} \quad (3.34)$$

Рассмотрим теперь функцию $S\ (x,\ \omega,\ t) = \tilde{S}\ (z\ (x,\ \omega,\ t),\ \omega,\ t)$. Из классической теории уравнений первого порядка известно, что функция S удовлетворяет задаче

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x,\ t,\ \frac{\partial S}{\partial x};\ [X;\ P]\right) = 0, \quad (3.35)$$

$$S\ (x,\ \omega,\ 0) = x\omega.$$

Кроме того, справедливы тождества

$$z(x,\ \omega,\ t) = \frac{\partial S\ (x,\ \omega,\ t)}{\partial \omega},$$

$$P(z(x,\ \omega,\ t),\ \omega,\ t) = \frac{\partial S\ (x,\ \omega,\ t)}{\partial x}, \quad (3.36)$$

$$\det\left\| \frac{\partial^2 S\ (x,\ \omega,\ t)}{\partial x_i\, \partial \omega_j} \right\|^{-1} = J\,(x,\ \omega,\ t).$$

Сделаем в интеграле $\tilde{I}_1$ из (3.30) замену переменных $y = X\ (z,\ \omega,\ t)$. Тогда в силу (3.34), (3.36) интеграл $\tilde{I}_1$

совпадает с I_1 (см. (3.27)). Следовательно,

$$H(x, t, p; [X; P]) = L_{[s]}(x, t, p).$$

Сравнивая это тождество с (3.35), получим, что функция S удовлетворяет задаче (3.28).

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.3. *Функция* $S\colon G \times [0, T_0] \to \mathbf{R}$, *задаваемая равенством*

$$S(x, t) = \tilde{S}(z(x, \omega, t), \omega, t),$$

где $\tilde{S}(z, \omega, t)$ *и* $z(x, \omega, t)$ *определены соответственно в* (3.33) *и* (3.34), *является гладким решением задачи Коши* (3.28).

ГЛАВА II

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ И КВАНТОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

Квантованием обычно называют некоторый формальный способ сопоставления величинам классической механики некоммутирующих операторов в гильбертовом пространстве. В настоящее время проблема квантования потеряла свою остроту. В 20-е годы нашего столетия после открытия квантований Гейзенберга и Шредингера и установления Дираком их эквивалентности эта проблема была очень актуальна.

Напомним кратко схему квантования Гейзенберга, Шредингера и Фейнмана.

1. Квантование Гейзенберга. Пусть $x(t)$, $p(t)$ — решение уравнений Ньютона

$$\dot{x} = p, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}, \tag{1}$$

удовлетворяющее некоторым начальным данным $x(0) = x^0$, $p(0) = p^0$. Рассмотрим те же уравнения (1), но с операторнозначными начальными данными $\hat{x}^0$, $\hat{p}^0$, коммутатор которых $[\hat{x}^0, \hat{p}^0]$ равен ih, где h — постоянная Планка. Нетрудно видеть, что решение $\hat{X}(t)$, $\hat{P}(t)$ уравнений (1) с такими начальными данными существует, причем соотношение коммутации сохраняется во времени:

$$[\hat{X}(t), \hat{P}(t)] = ih.$$

Соответствие

$$(x(t), p(t)) \to (\hat{X}(t), \hat{P}(t))$$

называют *квантованием Гейзенберга.*

2. Квантование Шредингера. Сопоставим координатным функциям $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_p$ следующие операторы в $L^2(\mathbf{R}^n)$:

$$x_j \to \hat{x}_j \text{ — оператор умножения на } x_j,$$

$$p_j \to \hat{p}_j = -ih\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Функции Гамильтона $H(x, p) = p^2/2 + V(x)$, отвечающей уравнениям (1), при этом будет сопоставлен оператор $\hat{H} = \hat{p}^2/2 + V(\hat{x})$. Напишем уравнение Шредингера для гамильтониана $\hat{H}$:

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t} + \hat{H}\psi = 0. \tag{2}$$

Квантование Шредингера — это переход от уравнений Ньютона (1) к уравнению Шредингера.

Нетрудно видеть, что операторы Гейзенберга $\hat{X}(t)$, $\hat{P}(t)$, построенные в п. 1, имеют вид

$$\hat{X}(t) = e^{\frac{i}{h}\hat{H}t}\hat{x}^0 e^{-\frac{i}{h}\hat{H}t}, \quad \hat{P}(t) = e^{\frac{i}{h}\hat{H}t}\hat{p}^0 e^{-\frac{i}{h}\hat{H}t}.$$

3. Квантование Фейнмана. Рассмотрим оператор $T_{\Delta t}$ в $L^2(\mathbf{R}^n)$, действующий по формуле

$$T_{\Delta t}u(x) = \iint \exp\left\{\frac{i}{h}\left[p(x-y) - \left(\frac{\|p\|^2}{2} + V\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\Delta t\right]\right\} u(y)\,dy\,dp, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Положим

$$\psi(x, t) = \lim_{N\to\infty}(T_{t/N})^N\psi_0(x).$$

Этот предел может быть интерпретирован как континуальный интеграл по траекториям:

$$\psi(x, t) = \iint\limits_{q(t)=x} D_p D_q \exp\left\{\frac{i}{h}\int_0^t p(\tau)\,dq(\tau) - \left(\frac{|p(\tau)|^2}{2} + V(q(\tau))\right)d\tau\right\}\psi_0(q(0)).$$

Можно показать, что $\psi(x, t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера (2) и начальному условию $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$.

Таким образом, мы видим, что все эти способы квантования эквивалентны. Однако в случае более общей функции Гамильтона $H(x, p)$ такой, что $\partial^2 H/\partial p\,\partial x \neq 0$, эти способы зависят от действия операторов $\hat{p}$ и $\hat{x}$ в уравнениях (1) или (2) (см. [4, 16]).

Например, релятивистскому уравнению для функции Гамильтона

$$(H - e\varphi(x))^2 = (p - eA(x))^2 + mc^2, \qquad (3)$$

$$\varphi(x),\ A(x) \in C^\infty,\ e,\ m,\ c = \mathrm{const},$$

отвечает квантовое уравнение Клейна — Гордона

$$\left(ih\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi(x)\right)^2 \psi(x, t) = \left(ih\frac{\partial}{\partial x} - eA(x)\right)^2 \psi(x, t) + mc^2\psi(x, t). \qquad (4)$$

С другой стороны, можно найти из уравнения (3) функцию H явно:

$$H = e\varphi(x) \pm \sqrt{(p - eA(x))^2 + mc^2},$$

и сопоставить ей квантовые уравнения

$$ih\frac{\partial\psi_t}{\partial t} = e\varphi(x)\psi \pm \sqrt{\left(ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x} + eA(\overset{2}{x})\right)^2 + mc^2}\, \psi(x, y). \qquad (5)$$

Квантование в этом случае не единственно (с точностью до $O(h^2)$) и выбор уравнения (4) (а не (5)) диктуется дополнительными соображениями релятивистской инвариантности.

В квазиклассическом приближении автором был предложен способ квантования не уравнений или гамильтониана, а поверхностей в фазовом пространстве, названных автором лагранжевыми [13, 32]. Тот факт, что уравнения характеристик, отвечающие уравнению Власова, сохраняют лагранжевость поверхностей, позволяет применить этот способ для квантования решений уравнения Власова.

В настоящей главе будет обобщен формализм квантования на уравнения Власова и получены уравнения нелинейной квантовой механики, как квантованные уравнения Власова. Будет установлено соответствие между (классическим) уравнением Власова и (квантовым) уравнением для матрицы плотности, отвечающей уравнению Хартри. В одну сторону это соответствие формализуется с помощью разностного квантования (§§ 1,4). Переход при $h \to 0$ от матрицы плотности к решению уравнения Власова (§ 2) обосновывает это соответствие в другую сторону.

В главе приводится также способ квантования части классических частиц. Например, пусть имеются две частицы с координатами $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$, и пусть $V(x, y)$ — потенциал взаимодействия между ними, так что классический лагранжиан равен

$$L(\dot{x}, \dot{y}, x, y) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} - V(x, y).$$

Если первая частица — квантовая, а вторая — классическая, то уравнения Ньютона, проквантованные по первой частице и классические по второй, имеют вид

$$-ih\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} - \frac{h^2}{2}\Delta\psi + V(x, y(y_0, \dot{y}_0, t, [\psi]))\psi = 0, \qquad (6)$$

$$\begin{gathered}\ddot{y} = -\int |\psi(x, t)|^2 \frac{\partial V}{\partial y}(x, y)\,dx, \\ y(0) = y_0, \qquad \dot{y}(0) = \dot{y}_0.\end{gathered} \qquad (7)$$

Эти уравнения также входят в класс уравнений с унитарной нелинейностью, рассмотренных в этой книге. Если задана функция распределения классических частиц $\rho(y_0, \dot{y}_0)$ в начальный момент, то в уравнении (6) последний член нужно проинтегрировать по y_0 и $\dot{y}_0$ с весом $\rho(y_0, \dot{y}_0)$. Система уравнений (6) (7), так же как и нелинейные уравнения квантовой механики, относится к единому классу операторов с унитарной нелинейностью, введенных в § 1.

Уравнения типа (6) (7) в последнее время используются в полуклассической теории взаимодействия квантовых и классических частиц в квантовой теории поля (например, при взаимодействии с гравитационным полем). Отметим еще раз, что методы, развитые здесь для операторов с унитарной нелинейностью, изложены с таким расчетом, чтобы их можно было применить (на нестрогом уровне) к подобным уравнениям квантовой теории поля.

§ 1. Операторы с унитарной нелинейностью

В этом параграфе вводится класс нелинейных псевдодифференциальных операторов, исследованию которых будет посвящена остальная часть данной главы, а также главы III—VI.

Предварительно напомним определение гладкого отображения*) банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2. Обозначим через $C_1 = \mathrm{Hom}\,(B_1, B_2)$ банахово пространство линейных ограниченных отображений из B_1 в B_2. Пусть

$$C_{k+1} = \mathrm{Hom}\,(B_1, C_k) \text{ при } k = 1,2,\ldots$$

Отображение $r\colon B_1 \to B_2$ называется *гладким*, если оно амо и все его дифференциалы

$$D^k r\colon \quad B_1 \to C_k,\ k = 1,2,\ldots$$

ограничены, т. е. для любого $M \geqslant 0$

$$\sup_{\|v\|_{B_1} \leqslant M} \|(D^k r)[v]\|_{C_k} < \infty.$$

Пример 1.1. Пусть $L = L^2(\mathbf{R}^k, m)$ — гильбертово пространство функций на $\mathbf{R}^k$ со значениями в множестве $m \times m$-матриц с комплексными коэффициентами, наделенное скалярным произведением

$$(g, f)_{L^2(\mathbf{R}^k, m)} = \int_{\mathbf{R}^k} \mathrm{tr}\,[g(x) f(x)^*]\, dx,$$

где звездочкой обозначена эрмитово-сопряженная матрица, а через tr обозначен след матрицы.

Пусть $\rho(x, y)$ — некоторая $m \times m$-матрица, коэффициенты которой гладко зависят от $x, y \in \mathbf{R}^k$ и финитны. Кроме того, пусть $\mathcal{R}(x, z)$ — полином по z с коэффициентами из L^2. Отображение из $L^2(\mathbf{R}^k, m)$ в себя, заданное формулой

$$g \to \mathcal{R}\Big(x, \int_{\mathbf{R}^k} \mathrm{tr}\,[\rho(x, y)^* g(y)]\, dy\Big),$$

является гладким.

---

*) Общее определение оператора с унитарной нелинейностью можно пропустить при первом чтении. В приложениях используется оператор, определенный в замечании 2.

Напомним теперь некоторые определения теории линейных псевдодифференциальных операторов. Пусть $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$ — гильбертово пространство вектор-функций $\psi = (\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(m)})$ со скалярным произведением

$$(\psi, \varphi)_{L^{2,m}(\mathbf{R}^n)} = \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbf{R}^n} \psi^{(j)}(x)\overline{\varphi^{(j)}(x)}\, dx.$$

Пусть $0 < h < 1$. Обозначим через $\widetilde{\psi}(p)$ преобразование Фурье вектор-функции $\psi(x)$:

$$\widetilde{\psi}^{(j)}(p) = (2\pi h)^{-n/2} \int \psi^{(j)}(x) e^{-\frac{i}{h}xp}\, dx, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Формула

$$\psi \to f\left(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)\psi = (2\pi h)^{-n/2} \int e^{\frac{i}{h}xp} f(x, p)\widetilde{\psi}(p)\, dp \quad (1.1)$$

задает линейный $1/h$-псевдодифференциальный оператор $\hat{f} = f(\overset{2}{x}, -ih\,\overset{1}{\partial/\partial x})$ в $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$ для любого гладкого финитного символа $f \in L^2(\mathbf{R}^{2n}, m)$. Сопряженный оператор $\hat{f}^+$ дается формулой $\hat{f}^+ = \hat{f}^*(\overset{1}{x}, -ih\overset{2}{\partial}/\partial x)$. Кроме того, справедливо тождество

$$\operatorname{tr}[\hat{f}\hat{g}^+] = \frac{1}{(2\pi h)^n}(f, g)_{L^2(\mathbf{R}^{2n}, m)}, \qquad (1.2)$$

где через tr обозначен след оператора в $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$. Из (1.2) следует, что соответствие $\mu: f \to \hat{f}$ расширяется до изометрического отображения пространства $L^2(\mathbf{R}^{2n}, m)$ на пространство $H_2(L^{2,m}(\mathbf{R}^n))$ операторов Гильберта — Шмидта, действующих в $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$. Обратное отображение

$$\mu^{-1} : H_2(L^{2,m}(\mathbf{R}^n)) \to L^2(\mathbf{R}^{2n}, m)$$

сопоставляет каждому оператору Гильберта — Шмидта $\hat{f}$ его символ $f = \operatorname{smb}\hat{f}$. Таким образом,

$$\mu(f) = \hat{f} = f\left(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right).$$

Будем в дальнейшем сокращенно обозначать: $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$ через $L^{2,m}$ и $L^2(\mathbf{R}^{2n}, m)$ через $L^2(m)$. Каждой вектор-функции $\psi \in L^{2,m}$ сопоставим *матрицу плотности*

$g_{(\psi)} \in L^2(m)$, (j, k)-й, элемент которой задается формулой

$$g_{(\psi)}(x, p)_{jk} = \psi^{(j)}(x)\overline{\tilde{\psi}^{(k)}(p)}\, e^{-\frac{i}{h}xp}(2\pi h)^{-\frac{n}{2}}. \qquad (1.3)$$

Определим теперь псевдодифференциальный оператор с унитарной нелинейностью в пространстве $L^{2,m}$.

Определение 1.1. Пусть H — гладкое отображение $L^2(m)$ в себя: $g(x, p) \to H[g](x, p)$. *Оператором с унитарной нелинейностью* назовем отображение $\hat{H}$ пространства $L^{2,m}$ в себя, определенное формулой

$$\hat{H}[\psi] = H[g_{(\psi)}]\left(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)\psi.$$

Функцию $H[g_{(\psi)}](x, p)$ назовем *линейным символом оператора $\hat{H}$ в состоянии* ψ.

Рассмотрим свойство операторов с унитарной нелинейностью.

Пусть V — линейный унитарный оператор в $L^{2,m}$. Определим оператор Ad_V в пространстве $H_2(L^{2,m})$ операторов Гильберта — Шмидта:

$$\mathrm{Ad}_V(\hat{f}) \overset{\mathrm{def}}{=} V\hat{f}V^{-1}.$$

Лемма 1.1. *Для оператора $\hat{H}$ с унитарной нелинейностью справедлива формула*

$$V^{-1} \circ \hat{H} \circ V = \hat{H}_U, \quad H_U = U^{-1} \circ H \circ U,$$

где U — линейный унитарный оператор в $L^2(m)$, заданный равенством

$$U = \mu^{-1} \cdot \mathrm{Ad}_V \cdot \mu. \qquad (1.4)$$

Утверждение леммы следует из определения.

Если $g(x)$ и $f(x, p)$ — некоторые $m \times m$-матрицы, то обозначим через $f(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\, g(x)$ и $g(x)\, f(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$ матрицы, у которых (i, j)-й элемент равен соответственно

$$(f(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\, g(x))_{ij} = \sum_{k=1}^{m} f_{ik}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\, g_{kj}(x),$$

$$(g(x)\, f(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}))_{ij} = \sum_{k=1}^{m} f_{kj}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\, g_{ik}(x).$$

Рассмотрим задачу Коши для оператора с унитарной нелинейностью:

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t}+\widehat{H}[\psi]=0,$$
$$\psi(x,t,h)|_{t=0}=\psi_0(x,h),\ \ \psi_0(\cdot,h)\in L^{2,m}. \qquad (1.5)$$

Лемма 1.2. *Матрица плотности*

$$g_{(\psi)}(x,p,t,h)=(\psi^{(j)}(x,t,h)\overline{\widetilde{\psi}^{(k)}(p,t,h)}\,e^{-\frac{i}{h}xp}(2\pi h)^{-n/2}),$$

отвечающая решению ψ *задачи Коши* (1.5), *удовлетворяет уравнению*

$$-ih\frac{\partial g_{(\psi)}}{\partial t}+H[g_{(\psi)}]\left(\overset{2}{x},-ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}+p\right)g_{(\psi)}-$$
$$-g_{(\psi)}H[g_{(\psi)}]^*\left(x-ih\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial p},\overset{1}{p}\right)=0. \qquad (1.6)$$

Доказательство. Выпишем уравнения для $\psi(x,t,h)$ и $\overline{\widetilde{\psi}(p,t,h)}$:

$$-ih\frac{\partial\psi^{(j)}}{\partial t}+\sum_{l=1}^{m}H[g_{(\psi)}]\left(\overset{2}{x},-ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x},t\right)_{jl}\psi^{(l)}=0,$$
$$-ih\frac{\partial\overline{\widetilde{\psi}^{(k)}}}{\partial t}-\sum_{s=1}^{m}\overline{H[g_{(\psi)}]}\left(-ih\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial p},\overset{1}{p},t\right)_{ks}\overline{\widetilde{\psi}^{(s)}}=0$$
$$(j,k=1,\ldots,m).$$

Умножив первое из этих уравнений на $(2\pi h)^{-n/2}\times\times\overline{\widetilde{\psi}^{(k)}(p,t,h)}e^{-\frac{i}{h}xp}$, а второе на $\psi^{(j)}(x,t,h)e^{-\frac{i}{h}xp}(2\pi h)^{-n/2}$, использовав формулу

$$e^{-\frac{i}{h}xp}\circ r\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)=r\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}+p\right)\circ e^{-\frac{i}{h}xp}$$

и сложив оба уравнения, получим (1.6). Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Матрица плотности* $g_{(\psi)}$, *определенная для каждого* $\psi\in L^{2,m}$ *формулой* (1.3), *обладает следующими свойствами*:

а) *Для любого символа* $f\in L^2(m)$ *справедлива формула*

$$(\psi,\hat{f}\psi)_{L^{2,m}}=(g_{(\psi)},f)_{L^2(m)}. \qquad (1.7)$$

б) *Оператор* $\hat{g}_{(\psi)}$ *самосопряжен в* $L^{2,m}$, *имеет норму* $\| \hat{g}_{(\psi)} \|_{L^{2,m} \to L^{2,m}} = (2\pi h)^{-n} \|\psi\|^2_{L^{2,m}}$ *и действует по формуле*

$$\hat{g}_{(\psi)} v = (2\pi h)^{-n} (v, \psi)_{L^{2,m}} \psi, \qquad v \in L^{2,m};$$

при дополнительном условии $\| \psi \|_{L^{2,m}} = (2\pi h)^{n/2}$ *этот оператор является ортогональным проектором на одномерное подпространство в* $L^{2,m}$, *порожденное элементом* ψ.

в) *Норма* $g_{(\psi)}$ *как элемента пространства* $L^2(m)$ *равна*

$$\| g_{(\psi)} \|_{L^2(m)} = (2\pi h)^{-n/2} \| \psi \|^2_{L^{2,m}}. \tag{1.8}$$

Эта лемма непосредственно вытекает из определений и формулы (1.2).

Теперь рассмотрим норму матрицы плотности, отвечающей решению задачи Коши. Пусть при $0 < h < 1$, $t \in \mathbf{R}$, задано семейство гладких отображений $H_{h,t}$ пространства $L^{2,m}$ в себя такое, что оператор $H_{h,t}[g_{(\psi)}](\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial/\partial x})$ самосопряжен при любом $\psi \in L^{2,m}$. Пусть $\psi = \psi(x, t, h)$ — решение задачи Коши (1.5), с оператором $H = H_{h,t}$, а $g_{(\psi)}(x, p, t, h)$ — отвечающая ψ матрица плотности.

Лемма 1.4. *Нормы*

$$\| \psi(\cdot, t, h) \|_{L^{2,m}}, \quad \| g_{(\psi)}(\cdot, \cdot, t, h) \|_{L^2(m)}$$

не зависят от «времени» t.

Доказательство. Сохранение со временем нормы ψ есть прямое следствие самосопряженности оператора $H_{h,t}[g_{(\psi)}](\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial/\partial x})$, а сохранение нормы $g_{(\psi)}$ следует из (1.8).

Замечание 1. Согласно определению 1.1 линейный символ оператора $\hat{H}$ с унитарной нелинейностью есть функция из пространства $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$. Легко обобщить эту ситуацию и допустить рост символа $H[g_{(\psi)}](x, p)$ по переменной $p \in \mathbf{R}^n$. Оператор $H[g_{(\psi)}](\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial/\partial x})$ при этом станет неограниченным в $L^{2,m}$.

Кроме того, часто бывает недостаточно рассматривать оператор $\hat{H}$ в пространстве $L^{2,m}$ и требуется определить $\hat{H}$ на обобщенных функциях. Этого можно достигнуть, если нелинейное отображение H определить на некотором классе $\mathscr{X}_g$ обобщенных функций:

$$H\colon\quad \mathscr{X}_g \to C^\infty(\mathbf{R}^{2n}),$$

затем найти класс обобщенных функций $\mathscr{X}_\psi \subset S'(\mathbf{R}^n)$ такой, что

$$\psi \in \mathscr{X}_\psi \Rightarrow g_{(\psi)} \in \mathscr{X}_g,$$

и задать оператор с унитарной нелинейностью в $\mathscr{X}_\psi$ той же формулой, что и в определении 1.1:

$$\widehat{H}[\psi] = H[g_{(\psi)}]\left(\overset{2}{x},\ -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)\psi.$$

Замечание 2. Везде ниже мы будем для наглядности рассматривать операторы с унитарной нелинейностью следующего частного вида.

Пусть $S^\infty(\mathbf{R}^k)$ — пространство гладких комплексных функций f на $\mathbf{R}^k$, растущих со всеми производными на бесконечности не быстрее некоторой степени $k = k(f)$ своего аргумента. Через $S(\mathbf{R}^k, m)$ обозначим класс $m \times m$-матриц, элементы которых принадлежат $S^\infty(\mathbf{R}^k)$. Пусть $H(x, p, t, h, \mu)$ — некоторый символ класса $S^\infty(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_p \times \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_h \times \mathbf{R}^M_\mu;\ m)$, ограниченный со всеми производными при $h \to 0$ и вещественный при $h = 0$.

Рассмотрим также $M \times m^2 \times s$ символов класса S^∞: $L^{(k)}_{i_1 j_1 \ldots i_s j_s}(x, p, t; y, \xi)$, где $k = 1, \ldots, M$; $i_1, \ldots, j_s = 1, \ldots, m$; $y, \xi \in \mathbf{R}^{ns}$, причем $y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(s)})$, $\xi = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(s)})$, где $y^{(i)}, \xi^{(i)} \in \mathbf{R}^n$. Пусть носители $\operatorname{supp}_{y,\xi} L^{(k)}_{i_1, j_s}(x, p, t; y, \xi, h)$ заключены в фиксированное ограниченное множество, не зависящее от x, p, t, h. Обозначим $-ih\dfrac{\partial}{\partial y} = \left(-ih\dfrac{\partial}{\partial y^{(1)}}, \ldots, -ih\dfrac{\partial}{\partial y^{(s)}}\right)$.

Пусть $\psi(x, t)$ — некоторая m-мерная вектор-функция. Построим интегралы

$$a^{(k)}(x, p, t; [\psi]) = \sum_{i_1, j_1, \ldots, i_s, j_s = 1} \int dy^{(1)} \ldots \int dy^{(s)} \psi^{(i_1)}(y_1, t) \ldots \psi^{(i_s)}(y_s, t) \times$$
$$\times \overline{L^{(k)}_{i_1, j_1, \ldots, i_s j_s}\left(x, p, t; \overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, h\right)\psi^{(j_1)} \ldots \psi^{(j_s)}}. \quad (1.9)$$

Будем упрощенно записывать это равенство в виде
$a(x, p, t; [\psi]) =$

$$= \int dy \psi(y, t) \overline{L\left(x, p, t; \overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, h\right)} \psi(y, t), \quad (1.10)$$

где $a = (a^{(1)}, \ldots, a^{(M)})$.
Введем теперь матричнозначный символ

$$\mathcal{H}(x, p, t, h; [\psi]) \overset{\text{def}}{=} H(x, p, t, h, a(x, p, t; [\psi])).$$

Используя символ $\mathcal{H}$, определение оператора с унитарной нелинейностью можно сформулировать следующим образом.

Определение 1.2. *Оператором с унитарной нелинейностью в* $L^{2,m}(\mathrm{R}^n)$ назовем оператор, действующий по формуле

$$\hat{H}[\psi](x, t) = \mathcal{H}\left(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t, h; [\psi]\right)\psi(x, t).$$

Функцию $\mathcal{H}(x, p, t, h; [\psi])$ назовем *линейным символом* оператора $\hat{H}$ в состоянии ψ. Ниже мы будем в основном пользоваться именно этим частным определением оператора с унитарной нелинейностью. Введем ряд обозначений.

Перейдем в формуле (1.10) от функции ψ к матрице плотности $g_{(\psi)}(x, p, t)$:

$$a(x, p, t; [g_{(\psi)}]) = \iint g_{(\psi)}(y, \xi, t) L(x, p, t; y, \xi, h)^* \, dy \, d\xi. \quad (1.11)$$

Аналогично будем обозначать

$$\mathcal{H}(x, p, t, h; [g]) = H(x, p, t, h, a(x, p, t; [g])). \quad (1.12)$$

Сделаем в каждом интеграле (1.11) замену переменных $y = X(z, \omega, t)$, $\xi = P(z, \omega, t)$ с единичным якобианом, а функцию $g_{(\psi)}(X(z, \omega, t), P(z, \omega, t), t)$ заменим на $g_0(z, \omega)$. Каждый интеграл (1.11) при этом перейдет в следующий интеграл:

$$a(x, p, t; [X, P, g_0]) =$$
$$= \iint g_0(z, \omega) L(x, p, t; X(z, \omega, t), P(z, \omega, t), h)^* \, dz \, d\omega.$$

Будем обозначать

$$\mathcal{H}(x, p, t, h; [X, P, g_0]) =$$
$$= H(x, p, t, h, a(x, p, t; [X, P, g_0])). \quad (1.13)$$

§ 2. Асимптотика матрицы плотности

1. Случай общего оператора с унитарной нелинейностью. Пусть $\hat{H}[\psi] = H[g_{(\psi)}](\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial}/\partial x)\psi$ — оператор с унитарной нелинейностью на некотором пространстве скалярных ($m = 1$) функций $\psi = \psi(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$. Матрицу плотности $g_{(\psi)}(x, p)$, отвечающую ψ, в скалярном случае будем называть *функцией плотности*.

Рассмотрим уравнение (1.6) для функции $g = g_h(x, p, t)$:

$$-ih\frac{\partial g_h}{\partial t} + H[g_h]\left(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}} + p\right)g_h - \\ - \overline{H[g_h]}\left(x - ih\overset{2}{\frac{\partial}{\partial p}}, \overset{1}{p}\right)g_h = 0. \quad (2.1)$$

Пусть $H[g_h](x, p)$ — гладкая вещественная функция. В первом приближении при $h \to 0$ получим уравнение

$$\frac{\partial g_h}{\partial t} + \frac{\partial H[g_h]}{\partial p}(x, p)\frac{\partial g_h}{\partial x} - \frac{\partial H[g_h]}{\partial x}(x, p)\frac{\partial g_h}{\partial p} - \\ - \frac{\partial^2 H[g_h]}{\partial p\,\partial x}(x, p)g_h + O(h) = 0.$$

Мы покажем ниже, что понимаемый в некотором обобщенном смысле предел

$$g_0(x, p, t) = \lim_{h\to 0} g_h(x, p, t)$$

удовлетворяет предельному уравнению

$$\frac{\partial g_0}{\partial t} + \Lambda_0(g_0, t)g_0 = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\Lambda_0(g, t) = \frac{\partial H[g]}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H[g]}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial^2 H[g]}{\partial x\,\partial p}.$$

Это утверждение будет ниже доказано без ограничения общности для операторов с унитарной нелинейностью частного вида. Уравнение (2.2) назовем *обобщенным уравнением Власова*.

Характеристики $X(x, p, t)$, $P(x, p, t)$ для уравнения (2.2) задают отображение

$$\Gamma_t\colon (x, p) \to (X(x, p, t), P(x, p, t))$$

области фазового пространства $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_p^n$ и соответствующее отображение гладких функций на этой области:

$$(\Gamma_t^* f)(x, p) = f(X(x, p, t), P(x, p, t)),$$

удовлетворяющее уравнениям

$$\frac{d}{dt}(\Gamma_t^* f) = \Gamma_t^* \{H[(\Gamma_t^*)^{-1} g_0(x, p, 0)], f\}, \qquad \Gamma_0^* f = f, \tag{2.3}$$

где $\{k, f\}$ означает скобку Пуассона

$$\{k, f\} = \frac{\partial k}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}.$$

Взяв в качестве функции f в (2.3) координатные функции $x = (x_1, \ldots, x_n)$ или $p = (p_1, \ldots, p_n)$, получим систему уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\Gamma_t^* x_j = \frac{\partial H[(\Gamma_t^*)^{-1} g_0(x, p, 0)]}{\partial p_j}(\Gamma_t^* x, \Gamma_t^* p), \\
\frac{d}{dt}\Gamma_t^* p_j = -\frac{\partial H[(\Gamma_t^*)^{-1} g_0(x, p, 0)]}{\partial x_j}(\Gamma_t^* x, \Gamma_t^* p), \\
\Gamma_0^* x = x, \qquad \Gamma_0^* p = p.
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Пусть существует решение

$$\Gamma_t^* x = X(x, p, t), \quad \Gamma_t^* p = P(x, p, t)$$

этой системы. Отображение Γ_t, очевидно, является каноническим относительно формы $\sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dp_j$, а отображение Γ_t^* унитарно относительно скалярного произведения в $L^2(\mathbf{R}^{2n})$.

Унитарное отображение Γ_t^* есть предел при $h \to 0$ унитарного отображения $U_{t,h}$, удовлетворяющего системе уравнений

$$\frac{d}{dt}U_{t,h}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = U_{t,h}\left\{H[U_{t,h}^{-1} g_h(x, p, 0)], \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}\right\} \tag{2.5}$$

(всего здесь содержится $2n$ уравнений, отвечающих компонентам вектор-столбца $\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$).

Отметим, что каноническое отображение Γ_t^* сохраняет скобку Пуассона, а отображение $U_{t,h}$ сохраняет скобку

$\{k, f\}_h$, индуцированную на пространстве символов операцией коммутирования в пространстве операторов:

$$\{k, f\}_h \overset{\text{def}}{=} \frac{i}{h} \operatorname{smb}[\hat{k}, \hat{f}].$$

В пределе при $h \to 0$ скобка $\{\cdot, \cdot\}_h$ переходит в скобку Пуассона.

2. Оператор с унитарной нелинейностью специального вида. В этом пункте мы установим сходимость решения g_h уравнения для функции плотности (2.1) к решению g_0 обобщенного уравнения Власова в случае оператора с унитарной нелинейностью специального вида (см. определение 1.2):

$$H[\psi] = \mathcal{H}(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial}/\partial x, t, h; [\psi])\psi.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial g_h}{\partial t} + \Lambda_h(g_h, t)\, g_h = 0, \quad g_h(x, p, t)|_{t=0} = \rho_h(x, p), \tag{2.6}$$

где

$$\Lambda_h(g, t) = \frac{i}{h}\{[\mathcal{H}(\overset{2}{x}, p - ih\overset{1}{\partial}/\partial x, t, h; [g]) - \\ - \overline{\mathcal{H}}(x - ih\overset{2}{\partial}/\partial p, \overset{1}{p}, t, h; [g])]\}, \tag{2.7}$$

а функция $\mathcal{H}(x, p, t, h; [g])$ определена в (1.12). Предположим, что функция ρ_h сходится в пространстве Соболева W_2^{-s}, $s > 0$ к финитной обобщенной функции ρ_0. Выберем эту предельную функцию в качестве начальных данных для обобщенного уравнения Власова:

$$\frac{\partial g_0}{\partial t} + \Lambda_0(g_0, t)\, g_0 = 0, \quad g_0(x, p, 0) = \rho_0(x, p). \tag{2.8}$$

Рассмотрим систему характеристик для (2.8) (см. § 2 гл. I):

$$\frac{\partial X}{\partial t}(z, \omega, t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(X(z, \omega, t), P(z, \omega, t), t, 0; [X, P, \rho_0]), \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}(z, \omega, t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(X(z, \omega, t), P(z, \omega, t), t, 0; [X, P, \rho_0]),$$

$$X(z, \omega, 0) = z, \; P(z, \omega, 0) = \omega,$$

где $(z, \omega) \in K$, K — компакт в $\mathbf{R}^{2n}$ (ср. (1.13)).

Компакт K выберем так, чтобы он содержал носитель функции ρ_0 и носители $\operatorname{supp}_{y,\xi} L(x, p, t; y, \xi, h)$ всех функций L, от которых зависят интегралы в (1.10).

Пусть решение системы характеристик (2.9) существует на некотором отрезке $t \in [0, T_1]$. На том же отрезке существует решение $g_0(x, p, t)$ задачи Коши (2.8); это решение задается формулой

$$\iint g_0(x, p, t)\,\varphi(x, p)\,dx\,dp = \\ = \iint \rho_0(z, \omega)\,\varphi(X(z, \omega, t), P(z, \omega, t))\,dz\,d\omega, \\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n}).$$

Теорема 2.1. *Пусть символ* $\mathscr{H}(x, p, t, h; [g])$ *со всеми производными растет при* $|p| \to \infty$ *не быстрее* $C(1 + |p|)^m$, *оператор*

$$\mathscr{H}(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial}/\partial x, t, h; [g])$$

самосопряжен в $L^2(\mathbf{R}^n)$ *и начальные данные задачи* (2.6) *сходятся в* $W_2^{-s}(\mathbf{R}^{2n})$:

$$\rho_h \to \rho_0 \text{ при } h \to 0.$$

Пусть решение

$$g_h(\cdot, \cdot, t) \in W_2^{-s}(\mathbf{R}^{2n})$$

задачи (2.6) *существует на некотором отрезке* $t \in [0, T_0] \subset \subset [0, T_1]$ *и*

$$\sup_h \sup_{0 \leqslant t \leqslant T_0} \|g_h(\cdot, \cdot, t)\|_{W_2^{-s}(\mathbf{R}^{2n})} \leqslant \text{const}, \ s \geqslant 0.$$

При этих условиях функция плотности $g_h(\cdot, \cdot, t)$ *равномерно сходится в* $W_2^{-r}(\mathbf{R}^{2n})$ *на отрезке* $t \in [0, T_0]$ *к решению* $g_0(\cdot, \cdot, t)$ *задачи Коши* (2.8) *для обобщенного уравнения Власова; здесь* $r \geqslant s + m + 1$.

Доказательство. Вычтем (2.8) из (2.6):

$$\frac{\partial(g_h - g_0)}{\partial t} + \Lambda_h(g_h, t)\,g_h - \Lambda_0(g_0, t)\,g_0 = 0.$$

После тождественных преобразований получим уравнение

$$\frac{\partial(g_h - g_0)}{\partial t} + \Lambda_0(g_0, t)(g_h - g_0) + \\ + (\Lambda_h(g_h, t) - \Lambda_h(g_0, t))\,g_h + (\Lambda_h(g_0, t) - \Lambda_0(g_0, t))\,g_h = 0. \tag{2.10}$$

Теперь заметим, что

$$(\Lambda_h(g_0, t) - \Lambda_0(g_0, t))g_h = (-ih)\int_0^1 (1-\tau)\,d\tau \times$$
$$\times \sum_{k,j=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial p_k \partial p_j}\left(\overset{2}{x}, p - ih\tau\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}, t, h; [g_0]\right)\frac{\partial^2 g_h}{\partial x_k \partial x_j} - \right.$$
$$\left. - \frac{\overset{2}{\partial}}{\partial p_k}\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial p_j}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial x_k \partial x_j}\left(x - ih\tau\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial p}, \overset{1}{p}, t, h; [g_0]\right)g_h\right\}. \tag{2.11}$$

Преобразуем также третье слагаемое в формуле (2.10):

$$(\Lambda_h(g_h, t) - \Lambda_h(g_0, t))g_h =$$
$$= \int_0^1 d\tau \int_0^1 d\mu \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{M}\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial a_k}\left(\overset{2}{x}, p - ih\tau\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}, t, h;\right.\right.$$
$$\mu a\left(\overset{2}{x}, p - ih\tau\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}, t; [g_h]\right) + (1-\mu)\times$$
$$\left.\times a\left(\overset{2}{x}, p - ih\tau\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}, t; [g_0]\right)\right)\left[\iint (g_h(y, \xi, t) - g_0(y, \xi, t))\times\right.$$
$$\left.\times \overline{L^{(k)}}\left(\overset{2}{x}, p - ih\tau\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}, t; y, \xi\right)dy\,d\xi\right]\frac{\partial g_h(x, p, t)}{\partial x_j} -$$
$$- \frac{\partial^2\overline{H}}{\partial x_j \partial a_k}\left(x - ih\tau\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial p}, \overset{1}{p}, t, h; \mu a\left(x - ih\tau\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial p}, \overset{1}{p}, t; [g_h]\right) + \right.$$
$$\left. + (1-\mu)\,a\left(x - ih\tau\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial p}, \overset{1}{p}, t; [g_0]\right)\right)\times$$
$$\times\left[\iint (g_h(y, \xi, t) - g_0(y, \xi, t))\times\right.$$
$$\left.\left.\times \overline{L^{(k)}}\left(x - ih\tau\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial p}, \overset{1}{p}, t; y, \xi\right)dy\,d\xi\right]\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial p_j}g_h(x, p, t)\right\}. \tag{2.12}$$

Введем более простые обозначения:

$$\alpha = (x, p), \qquad \gamma^t(\alpha) = (X(\alpha, t), P(\alpha, t)).$$

Подставляя в (2.10) формулы (2.11), (2.12), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(g_h - g_0)(\gamma^t(\alpha), t) +$$
$$+ \int Q_h(\alpha, \acute{\alpha}', t)(g_h - g_0)(\gamma^t(\acute{\alpha}'), t)\,d\acute{\alpha}' + (-ih)F_h(\acute{\alpha}, t) = 0, \tag{2.13}$$

где

$$Q_h(\alpha, \alpha', t) = [L(\gamma^t(\alpha'), t, h)_\gamma g_h(\gamma, t)]_{\gamma=\gamma^t(\alpha)},$$

$$F_h(\alpha, t) = [M(t, h)_\gamma g_h(\gamma, t)]_{\gamma=\gamma^t(\alpha)}, \tag{2.14}$$

а операторы L и M имеют вид

$$L(\gamma', t, h)_\gamma = \sum_{|\pi|=0}^{1} L_\pi\left(\gamma', \overset{2}{\gamma}, -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\gamma}, t\right)\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^\pi.$$

$$M(t, h)_\gamma = \sum_{|\pi|=0}^{2} M_\pi\left(\overset{2}{\gamma}, -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\gamma}, t\right)\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^\pi;$$

$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_{2n})$ — мультииндекс, L_π, M_π — некоторые гладкие функции; функция $L_\pi(\gamma', \gamma, \delta, t)$ финитна по γ' (явный вид L_π и M_π может быть легко найден из (2.11), (2.12)).

В результате интегрирования (2.13) получаем

$$(g_h - g_0)(\gamma^t(\alpha), t) = \exp\left\{-\int_0^t Q_h(\tau)\,d\tau\right\}(\rho_h - \rho_0)(\alpha) +$$

$$+ ih\int_0^t \exp\left\{-\int_\mu^t Q_h(\tau)\,d\tau\right\} F(\alpha, \mu)\,d\mu,$$

где через $Q_h(\tau)$ обозначен интегральный оператор в (2.13) с ядром $Q_h(\alpha, \alpha', \tau)$. Отсюда для любой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ получим

$$\int (g_h - g_0)(x, p, t)\,\varphi(x, p)\,dx\,dp =$$

$$= \int (\rho_h - \rho_0)(\alpha)\,\psi_L(\bar{\alpha}, t, h)\,d\bar{\alpha} + ih\int \psi_M(\bar{\alpha}, t, h)\,d\bar{\alpha}, \tag{2.15}$$

где

$$\psi_M(\alpha, t, h) = \int_0^t d\mu\, g_h(\alpha, \mu)\,(M(\mu)^*_\alpha \varphi(\gamma^{t-\mu}(\alpha))) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_0^t d\mu \int_\mu^t d\tau_k \ldots \int_\mu^{\tau_2} d\tau_1 g_n(\bar{\alpha}, \mu) \times$$

$$\times (M(\mu)^*_\alpha \varphi_k(\gamma^{\tau_1-\mu}(\alpha), \tau_1, \ldots, \tau_k, t, h)),$$

$$\psi_L(\bar{\alpha}, t, h) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_0^t d\tau_k \int_0^{\tau_k} d\tau_{k-1} \ldots$$

$$\ldots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \varphi_k(\gamma^{\tau_1}(\alpha), \tau_1, \ldots, \tau_k, t, h).$$

Здесь

$$\varphi_k(\gamma, \tau_1, \ldots, \tau_k, t, h) = \int \cdots \int g_h(\alpha_1, \tau_1) \ldots g_h(\alpha_k, \tau_k) \times$$
$$\times \Phi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \tau_1, \ldots, \tau_k, \gamma, t, h)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_k, \quad (2.16)$$

причем

$$\Phi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \tau_1, \ldots, \tau_k, \gamma, t, h) = L(\gamma, \tau_1, h)^*_{\alpha_1} \times$$
$$\times \Phi_{k-1}(\alpha_2, \ldots, \alpha_k, \tau_2, \ldots, \tau_k, \gamma^{\tau_k - \tau_1}(\alpha_1), t, h) \quad (k = 2, 3, \ldots),$$
$$\Phi_1(\alpha_1, \tau_1, \gamma, t, h) = L(\gamma, \tau_1, h)^*_{\alpha_1} \varphi(\gamma^{t-\tau_1}(\alpha_1), t, h).$$

Из этой рекуррентной формулы для Φ_k получаем оценку

$$\sup_{\gamma, \tau, t, h} \int \left| \left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^l \Phi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k; \tau_1, \ldots, \tau_k; \gamma, t, h) \right|^2 d\alpha \leqslant$$
$$\leqslant (C)^k \|\varphi\|^2_{W_2^r(\mathbf{R}^{2n})},$$

где C — некоторая константа, $l = (l^{(1)}, \ldots, l^{(k)})$ и $|m|$, $|l^{(j)}| = 0, 1, \ldots, s$ при $j = 1, \ldots, k$.

Кроме того, по условию

$$\sup_h \sup_{0 \leqslant t \leqslant T_0} \|g_h(\cdot, t)\|_{W_2^{-s}(\mathbf{R}^{2n})} \leqslant \mathrm{const}.$$

Таким образом, если $\varphi \in W_2^{-r}(\mathbf{R}^{2n})$, то из (2.16) получаем оценки

$$\sup_h \sup_{0 \leqslant t \leqslant T_0} \left| \int \psi_M(\alpha, t, h)\, d\alpha \right| \leqslant \mathrm{const},$$
$$\sup_h \sup_{0 \leqslant t \leqslant T_0} \sup_\alpha \left| \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^m \psi_L(\alpha, t, h) \right| \leqslant \mathrm{const}, \ |m| = 0, 1, 2, \ldots, s.$$

Теперь утверждение теоремы следует из (2.15) и сходимости $\rho_h \to \rho_0$.

Утверждение теоремы 2.1 можно обобщить следующим образом. Предположим, что начальные данные допускают разложение по степеням h в асимптотический ряд

$$\rho_h(x, p) = \rho_0(x, p) + \sum_{k=1}^{N-1} (-ih)^k \rho_k(x, p) +$$
$$+ (-ih)^N \rho_N(x, p, h), \quad (2.17)$$

где $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_N$ — некоторые обобщенные функции из $W_2^{-s}(\mathbf{R}^{2n})$.

Если получать решение лишь с точностью до $O(h^N)$, то в качестве начальных данных задачи (2.6) естественно взять лишь первые N членов разложения (2.17), отбросив остаток $(-ih)^N \rho_N$.

Предположим, что мы нашли асимптотическое решение $r_N(x, p, t, h)$ «укороченной» задачи Коши (2.6), т. е. задачи

$$-ih\frac{\partial r_N}{\partial t} + \mathscr{H}\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{p - ih\frac{\partial}{\partial x}}, t, h; [r_N]\right) r_N -$$
$$- \overline{\mathscr{H}}\left(\overset{2}{x - ih\frac{\partial}{\partial p}}, \overset{1}{p}, t, h; [r_N]\right) r_N = (-ih)^N Q_N(x, p, t, h), \tag{2.18}$$
$$r_N(x, p, 0, h) = \sum_{k=0}^{N-1} (-ih)^k \rho_k(x, p),$$

где Q_N — некоторый остаток.

Подставим функцию r_N в символ $\mathscr{H}(x, p, t, h; [g_h])$ вместо функции плотности g_h. Возникает вопрос, насколько символ $\mathscr{H}(x, p, t, h; [r_N])$ отличается от линейного символа оператора $\hat{H}$ в состоянии ψ, если ψ — решение задачи (1.5), удовлетворяющее условию $g_{(\psi_0(\cdot, h))} = \rho_h$.

Можно этот вопрос поставить иначе. Пусть, зная символ $\mathscr{H}(x, p, t, h; [r_N])$, мы построили асимптотическое решение (линейной) задачи Коши для оператора $\mathscr{H}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, h; [r_N])$, т. е. нашли такую функцию $\psi_N(x, t, h)$, что

$$-ih\frac{\partial \psi_N}{\partial t} + \mathscr{H}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, h; [r_N])\psi_N = (-ih)^N \mathscr{R}_N(x, t, h), \tag{2.19}$$
$$\psi_N(x, 0, h) = \psi_0(x, h),$$

где $\mathscr{R}_N$ — некоторый остаток. Функция ψ_N будет также асимптотическим решением исходной нелинейной задачи Коши (1.5).

Лемма 2.1. *Пусть* $Q_N(x, p, t, h)$,

$$\rho_N(x, p, h),$$
$$f_N(x, p, t, h) \overset{\text{def}}{=} [\mathscr{R}_N(x, t, h)\overline{\tilde{\psi}_N(p, t, h)} +$$
$$+ \psi_N(x, t, h)\overline{\tilde{\mathscr{R}}_N(p, t, h)}]\, e^{-\frac{i}{h}xp}(2\pi h)^{-\frac{n}{2}}$$

ограничены в $W_2^{-s}(\mathrm{R}^{2n})$ при $h \to 0$. Тогда

$$-ih\frac{\partial\psi_N}{\partial t} + \hat{H}[\psi_N] = (-ih)^N \mathcal{P}_N(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, h)\psi_N,$$
$$\psi_N(x, 0, h) = \psi_0(x, h), \tag{2.20}$$

где символ невязки $\mathcal{P}_N(x, p, t, h)$ является гладкой функцией степенного роста при $p \to \infty$.

Доказательство. Очевидно, функция ψ_N удовлетворяет уравнению

$$-ih\frac{\partial\psi_N}{\partial t} + H(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, h; a(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t; [\psi_N]) -$$
$$-(-ih)^N b_N(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t; h))\psi_N = 0, \tag{2.21}$$

где

$$b_N^{(k)}(x, p, t, h) =$$
$$= \iint q_N(y, \xi, t, h)\overline{L^{(k)}}(x, p, t; y, \xi)\,dy\,d\xi, \qquad k = 1, \ldots, M,$$

а функция q_N является решением задачи

$$-ih\frac{\partial q_N}{\partial t} + \mathcal{H}\left(\overset{2}{x}, p - ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t, h; [r_N]\right)q_N -$$
$$-\overline{\mathcal{H}}\left(x - ih\overset{2}{\frac{\partial}{\partial p}}, \overset{1}{p}, t, h; [r_N]\right)q_N =$$
$$= f_N(x, p, t, h) - Q_N(x, p, t, h),$$
$$q_N(x, p, 0, h) = \rho_N(x, p, h).$$

Решение этой (линейной) задачи ограничено в W_2^{-r} при $h \to 0$. Это доказывается аналогично теореме 2.1. Поэтому из (2.21) следует утверждение леммы.

Замечание. Способ построения асимптотических решений (2.18) и (2.19) будет подробно рассмотрен в следующих главах. Укажем здесь лишь на то, что решение r_N ищется в виде регулярного ряда по степеням h:

$$r_N(x, p, t, h) = \sum_{k=0}^{N-1}(-ih)^k r^{(k)}(x, p, t),$$

а решение ψ_N — в виде аналогичного ряда, умноженного на осциллирующую экспоненту:

$$\psi_N(x, t, h) = e^{\frac{i}{h}S(x, t)}\sum_{k=0}^{N-1}(-ih)^k\varphi^{(k)}(x, t).$$

По этой причине для оценки остатка в (2.20) существен рост символа $\mathcal{P}_N$ по аргументу $p \to \infty$. Если

$$\left|\frac{\partial H}{\partial a}(x, p, t; a)\right| \leqslant C(1+|p|)^k(1+|a|)^l,$$
$$\sup_{y,\xi} |L^{(k)}(x, p, t; y, \xi)| \leqslant C(1+|p|)^m,$$

то

$$|\mathcal{P}_N(x, p, t, h)| \leqslant C(1+|p|)^{k+(l+1)m}.$$

Следовательно, остаток в (2.20) имеет оценку

$$|\mathcal{P}_N(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, h)\psi_N| \leqslant \frac{C}{h^{k+(l+1)m}}.$$

Поэтому, если порядок асимптотики N достаточно велик, правая часть (2.20) достаточно мала при $h \to 0$.

Таким образом, для асимптотического решения нелинейной задачи Коши (1.5), начальные данные $\psi_0(x, h)$ которой порождают асимптотическое разложение (2.17) функции

$$\rho_h(x, p) = \overline{\psi_0(x, h)\widetilde{\psi}_0(p, h)\, e}^{-\frac{i}{h}xp}(2\pi h)^{-\frac{n}{2}},$$

достаточно решить регулярную задачу (2.18) и линейную задачу (2.19).

В гл. IV, V этот прием будет использован в конкретных задачах.

§ 3. Квантование кинетических уравнений

1. Квантование Гейзенберга. В предыдущем параграфе было показано, что кинетическое уравнение Власова является классическим пределом ($h \to 0$) нелинейного квантового уравнения для матрицы плотности (2.6). Оказывается, что и обратно — процедура квантования Гейзенберга позволяет получить из кинетического уравнения квантовые нелинейные уравнения.

Рассмотрим задачу Коши для кинетического уравнения Власова:

$$\begin{gathered}\frac{\partial g_0}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x, p, t; [g_0])\frac{\partial g_0}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x, p, t; [g_0])\frac{\partial g_0}{\partial p} = 0,\\ g_0(x, p, 0) = \rho_0(x, p),\end{gathered} \tag{3.1}$$

где ρ_0 — вещественная функция, $\mathcal{H}(x, p, t; [g_0])$ — гладкая вещественная функция Гамильтона, интегрально зависящая от g_0. Это означает, что $\mathscr{H}$ есть гладкая функция от интегралов вида

$$\iint dy_1\, d\xi_1 \ldots \iint dy_m\, d\xi_m V(x, p, t; y_1, \ldots$$
$$\ldots y_m, \xi_1, \ldots, \xi_m)\, g_0(y_1, \xi_1, t) \ldots g_0(y_m, \xi_m, t),$$

которые мы будем кратко записывать

$$\iint dy\, d\xi V(x, p, t; y, \xi)\, g_0(y, \xi, t). \tag{3.2}$$

Здесь функция $V(x, p, t; y, \xi)$ вещественна и финитна по (y, ξ). Предположим, кроме того, что все производные по (x, p) функции $\mathscr{H}(x, p, t; [g_0])$ входят в $L^2(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_p^n)$.

Сделаем в каждом интеграле (3.2) замену переменных

$$y = X(z, \omega, t), \qquad \xi = P(z, \omega, t)$$

с якобианом, равным единице, и заменим функцию g_0 на $\rho_0(z, \omega)$. В результате интеграл (3.2) примет вид

$$\iint dz\, d\omega V(x, p, t; X(z, \omega, t), P(z, \omega, t))\, \rho_0(z, \omega). \tag{3.3}$$

Обозначим через $\mathscr{H}(x, p, t; [X, P, \rho_0])$ функцию, получившуюся после замены каждого интеграла (3.2), входящего в $\mathscr{H}(x, p, t; [g_0])$, на интеграл (3.3).

Система характеристик для задачи (3.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p}(X, P, t; [X, P, \rho_0]), \qquad X(z, \omega, 0) = z, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x}(X, P, t; [X, P, \rho_0]), \quad P(z, \omega, 0) = \omega. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Квантованием Гейзенберга (уравнений (3.4) или (3.1)) назовем следующие правила сопоставления классическим величинам квантовых операторов, зависящих от параметра $h \in (0, 1)$.

I. Классическим характеристикам $X^{(j)}(z, \omega, t)$, $P^{(j)}(z, \omega, t)$, $j = 1, \ldots, n$, сопоставим семейства самосопряженных операторов $\hat{X}_h(t)$, $\hat{P}_h(t)$ в $L^2(\mathbf{R}^n)$ с коммутационными соотношениями

$$[\hat{X}_h^{(j)}(t), \hat{P}_h^{(k)}(t)] = ih\delta_{jk};$$
$$[\hat{X}_h^{(j)}(t), \hat{X}_h^{(k)}(t)] = [\hat{P}_h^{(j)}(t), \hat{P}_h^{(k)}(t)] = 0. \tag{3.5}$$

II. Каждой вещественной функции $f \in L^2(\mathbf{R}^{2n})$, $f = f(x, p)$ сопоставим самосопряженный оператор

Гильберта — Шмидта

$$f(\overset{2}{\hat{X}}(t),\ \overset{1}{\hat{P}}(t),\ h),$$

где

$$f(x,\ p,\ h) = \exp\left\{\frac{(-ih)}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial p_k}\right\} f(x,\ p).$$

III. Начальной функции ρ_0 (3.1) сопоставим некоторый самосопряженный оператор Гильберта — Шмидта $\hat{\rho}_h$ в $L^2(\mathbf{R}^n)$, а каждому интегралу вида (3.3) — скалярное произведение в пространстве Шмидта $H_2(L^2)$:

$$\int V(X,\ P)\,\rho_0 \to (2\pi h)^n\,\mathrm{tr}\,[V(\overset{2}{\hat{X}}_h,\ \overset{1}{\hat{P}}_h,\ h)\,\hat{\rho}_h]. \qquad (3.6)$$

Преобразуем каждый интеграл (3.3), входящий в функцию $\mathscr{H}(x,\ p,\ t;\ [X,\ P,\ \rho_0])$ по правилу (3.6). Получим некоторую новую функцию $\mathscr{H}(x,\ p,\ t;\ [\hat{X}_h,\ \hat{P}_h,\ \hat{\rho}_h])$. Обозначим

$$\mathscr{H}(x,\ p,\ t,\ h;\ [\hat{X}_h,\ \hat{P}_h,\ \hat{\rho}_h]) = \\ = \exp\left\{\frac{(-ih)}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial p}\right\}\mathscr{H}(x,\ p,\ t;\ [\hat{X}_h,\ \hat{P}_h,\ \hat{\rho}_h]).$$

Классическая система характеристик (3.4) после квантования I, II, III перейдет в систему операторных уравнений Гейзенберга

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{X}_h(t)}{dt} &= \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p}(\overset{2}{\hat{X}}_h(t),\ \overset{1}{\hat{P}}_h(t),\ t,\ h;\ [\hat{X}_h,\ \hat{P}_h,\ \hat{\rho}_h]), \\ \frac{d\hat{P}_h(t)}{dt} &= -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x}(\overset{2}{\hat{X}}_h(t),\ \overset{1}{\hat{P}}_h(t),\ t,\ h,\ [\hat{X}_h,\ \hat{P}_h,\ \hat{\rho}_h]). \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Пусть найдено решение уравнений (3.7) с начальными данными, удовлетворяющими соотношениям коммутации (3.5) (при $t = 0$). Тогда соотношения (3.5) остаются справедливыми при всех t.

По теореме Неймана существует унитарный оператор U_t в $L^2(\mathrm{R}^n)$ такой, что

$$\hat{X}_h(t) = U_t^{-1} x U_t, \quad \hat{P}_h(t) = U_t^{-1}\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)U_t.$$

Можно выбрать U_t так, чтобы было справедливо уравнение

$$-ih\frac{\partial U_t}{\partial t} + \mathscr{H}\left(\overset{2}{x},\ \overset{1}{-ih\frac{\partial}{\partial x}},\ t,\ h;\ [\hat{X}_h,\ \hat{P}_h,\ \hat{\rho}_h]\right)U_t = 0.$$

Пусть

$$g_h(x, p, t) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{smb} U_t \hat{\rho}_h U_t^{-1}.$$

Тогда

$$(2\pi h)^n \operatorname{tr}[V(\overset{2}{\hat{X}}_h, \overset{1}{\hat{P}}_h, h)\hat{\rho}_h] = \int V(y, \xi, h) g_h(y, \xi, t)\, dy\, d\xi.$$

Отсюда и из леммы 1.1 получим ряд простых следствий, которые мы сформулируем в виде двух лемм.

Лемма 3.1. *Функция g_h удовлетворяет уравнению для функции плотности:*

$$-ih\frac{\partial g_h}{\partial t} + \mathscr{H}\left(\overset{2}{x}, p - ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t, h; [g_h]\right) g_h -$$
$$- \overline{\mathscr{H}}\left(x - ih\overset{2}{\frac{\partial}{\partial p}}, \overset{1}{p}, t, h; [g_n]\right) g_h = 0. \qquad (3.8)$$

Предположим теперь, что начальные данные системы (3.7) имеют вид $\hat{X}_h(0) = x$, $\hat{P}_h(0) = -ih\partial/\partial x$, а оператор $\hat{\rho}_h$ в III действует по формуле

$$\hat{\rho}_h v = (2\pi h)^{-n}\, (v, \psi_0)_{L^2}\psi_0,$$

где $\psi_0 = \psi_0(\circ, h) \in L^2(\mathbf{R}^{2n})$. В этом случае из определения функции $g_h(x, p, t)$ получим следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Функция g_h имеет вид функции плотности*

$$g_n(x, p, t) = (2\pi h)^{-n/2}\, \psi(x, t, h)\overline{\tilde{\psi}(p, t, h)}\, e^{-\frac{i}{h}xp}, \qquad (3.9)$$

где функция ψ является решением задачи Коши для оператора с унитарной нелинейностью

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathscr{H}\left(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t, h; [\psi]\right)\psi = 0,$$
$$\psi(x, 0, h) = \psi_0(x, h). \qquad (3.10)$$

Здесь символ $\mathscr{H}(x, p, t, h; [\psi])$ получается из функции $\exp\left\{\frac{-ih}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial p}\right\}\mathscr{H}(x, p, t; [g_0])$ *заменой каждого интеграла вида* (3.2) *на интеграл*

$$\int \psi(y, t, h)\overline{V(x, p, t; \overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\partial}/\partial y, h)\psi(y, t, h)}\, dy,$$

где

$$V(x, p, t; y, \xi, h) = \exp\left\{\frac{-ih}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial \xi}\right\} V(x, p, t; y, \xi).$$

Таким образом, от уравнения Власова (3.1) и системы уравнений характеристик для него (3.4) мы перешли с помощью правил квантования I—III к квантовым уравнениям:

— системе Гейзенберга (3.7),

— уравнению для функции плотности (3.8),

— уравнению Шредингера для гамильтониана с унитарной нелинейностью (2.10).

2. Разностное квантование. Отметим еще один способ перехода от обобщенного уравнения Власова к уравнению для функции плотности.

Пусть H — некоторое отображение $L^2(\mathbf{R}^{2n})$ в $S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, причем для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ отображение $g \to \varphi H[g]$ является гладким в $L^2(\mathbf{R}^{2n})$. Напомним (см. § 2), что обобщенным уравнением Власова мы называем следующее уравнение:

$$\frac{\partial g_0}{\partial t} + \frac{\partial H[g_0](x, p)}{\partial p}\frac{\partial g_0}{\partial x} - \frac{\partial H[g_0](x, p)}{\partial x}\frac{\partial g_0}{\partial p} - \frac{\partial^2 H[g_0](x, p)}{\partial x\,\partial p} g_0 = 0. \tag{3.11}$$

Пусть $\Phi(z)$ — аналитическая функция двух комплексных переменных z_1, z_2, растущая на вещественной плоскости $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 = 0$ не быстрее степени. Обозначим $\hat{x} = i\,\partial/\partial p$, $\hat{p} = -i\,\partial/\partial x$, и пусть

$$\varkappa(x, y, p, \xi; [g]) = \Phi(\xi\hat{x}, y\hat{p})\, H[g](x, p).$$

Рассмотрим следующее обобщение уравнения (3.11):

$$\frac{\partial g_0}{\partial t} + \varkappa(\overset{2}{x}, \overset{2}{\hat{x}}, \overset{1}{p}, \overset{1}{\hat{p}}; [g_0])\, g_0 = 0. \tag{3.12}$$

В случае $\Phi(z_1, z_2) \equiv z_1 - z_2$ уравнение (3.12) совпадает с (3.11).

В общем случае символ Φ назовем *производящим символом* уравнения (3.12). *Разностным квантованием* назовем следующее преобразование производящего символа:

$$\Phi(z) \to \Phi_h(z) = \Phi\left(\frac{e^{-ihz_1} - 1}{-ih}, \frac{e^{-ihz_2} - 1}{-ih}\right).$$

Здесь h — некоторый вещественный параметр. Очевидно,

$$\lim_{h\to 0} \Phi_h(z) = \Phi(z).$$

Разностное квантование $\Phi \to \Phi_h$ переводит уравнение (3.12) в уравнение

$$\frac{\partial g_h}{\partial t} + \varkappa_h(\overset{2}{x}, \overset{2}{\hat{x}}, \overset{1}{p}, \overset{1}{\hat{p}}; [g_h])g_h = 0, \tag{3.13}$$

где

$$\varkappa_h(x, y, p, \xi; \ [g]) = \Phi_h(\xi\hat{x}, y\hat{p}) H[g](x, p).$$

В случае производящего символа $\Phi(z) = z_1 - z_2$ квантованное уравнение (3.13) имеет вид

$$(-ih)\frac{\partial g_h}{\partial t} + H[g_h]\left(\overset{2}{x}, - p - ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}\right) g_h -$$
$$- H[g_h]\left(x - ih\frac{\overset{2}{\partial}}{p\partial}; \overset{1}{p}\right) g_h = 0.$$

Таким образом, разностное квантование переводит уравнение Власова (3.11) в уравнение для функции плотности.

Интересным свойством разностного квантования является возможность его вторичного применения. Пусть θ еще один вещественный параметр. Рассмотрим «вторичное» разностное квантование:

$$\Phi_h(z) \to \Phi_{h,\theta}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_h\left(\frac{e^{-i\theta z_1} - 1}{-i\theta}, \frac{e^{-i\theta z_2} - 1}{-i\theta}\right).$$

Пусть

$$\varkappa_{h,\theta}(x, y, p, \xi; [g]) = \Phi_{h,\theta}(\xi\hat{x}, y\hat{p}) H[g](x, p).$$

«Вторично разностно квантованное» уравнение имеет вид

$$\frac{\partial g_{h,\theta}}{\partial t} + \varkappa_{h,\theta}(\overset{2}{x}, \overset{2}{\hat{x}}, \overset{1}{p}, \overset{1}{\hat{p}}; [g_{h,\theta}]) g_{h,\theta} = 0.$$

Указанный метод квантования может быть применен многократно.

3. Частичное квантование. В качестве примера использования методов квантования из п. 1 получим уравнения для системы, состоящей из двух частиц — легкой (квантовой) и тяжелой (классической).

Рассмотрим уравнения Ньютона

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}(x, q), \quad x|_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=0} = p_0,$$
$$\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q}(x, q), \quad q|_{t=0} = q_0, \quad \dot{q}|_{t=0} = \xi_0, \tag{3.14}$$

где x_0, $p_0 \in \mathbf{R}^n$, q_0, $\xi_0 \in \mathbf{R}^k$.

Проквантуем эту систему по первой группе переменных x. Для этого выпишем систему уравнений Власова, отвечающую (3.14):

$$\frac{\partial g_0}{\partial t} + p\frac{\partial g_0}{\partial x} - \frac{\partial g_0}{\partial p}\iint \frac{\partial V}{\partial x}(x, q') f_0(q', \xi', t)\, dq'\, d\xi' = 0,$$
$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \xi\frac{\partial f_0}{\partial q} - \frac{\partial f_0}{\partial \xi}\iint \frac{\partial V}{\partial q}(x', q)\, g_0(x', p', t)\, dx'\, dp' = 0,$$
$$g_0(x, p, 0) = \delta(x - x_0)\,\delta(p - p_0),$$
$$f_0(y, \xi, 0) = \delta(q - q_0)\,\delta(\xi - \xi_0). \tag{3.15}$$

Проквантуем отдельно первое уравнение системы (3.15) по правилам п. 1. Получим

$$-ih\frac{\partial g_h}{\partial t} + H\left(\overset{2}{x}, p - ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t\right) g_h -$$
$$- H\left(x - ih\overset{2}{\frac{\partial}{\partial p}}, \overset{1}{p}, t\right) g_h = 0, \tag{3.16}$$
$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \xi\frac{\partial f_0}{\partial q} - \frac{\partial f_0}{\partial \xi}\iint \frac{\partial V}{\partial q}(x', q)\, g_h(x', p', t)\, dx'\, dp' = 0,$$

где

$$H(x, p, t) = \frac{|p|^2}{2} + \iint V(x, q') f_0(q', \xi', t)\, dq'\, d\xi'.$$

Для того чтобы решение g_h системы (3.16) слабо сходилось к g_0 при $h \to 0$, нужно потребовать, чтобы в начальный момент функция $g_h(x, p, 0)$ слабо сходилась к $\delta(x - x_0)\cdot\delta(p - p_0)$.

Уравнения (3.16) являются искомыми частично квантованными уравнениями. Можно переписать их в виде уравнений Шредингера и Ньютона:

$$-ih\frac{\partial \psi_h}{\partial t} - h^2\Delta\psi_h + \psi_h V(x, q(t)) = 0,$$
$$\ddot{q} = -\int \frac{\partial V}{\partial q}(x', q)\,|\psi_h(x', t)|^2\, dx', \tag{3.17}$$

причем

$$\lim_{h\to 0}(2\pi h)^{-n/2}\psi_h(x,0)\overline{\widetilde{\psi}_h(p,0)}\,e^{-\frac{i}{h}xp}=\delta(x-x_0)\,\delta(p-p_0),$$

$$q(0)=q_0,\quad \dot q(0)=\xi_0.$$

При этом функция g_h из (3.16) является функцией плотности, отвечающей ψ_h.

Рассмотрим теперь более общую систему уравнений Власова

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial F_1}{\partial x}-\frac{\partial H_1}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial p}-\frac{\partial F_1}{\partial p}\int\limits_{\mathbf{R}^{2m}}\frac{\partial\rho_1}{\partial x}(x;y,\xi)\times$$

$$\times F_2(y,\xi,t)\,dy\,d\xi=0, \qquad (3.18)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}+\frac{\partial H_2}{\partial\xi}(y,\xi,t)\frac{\partial F_2}{\partial y}-\frac{\partial H_2}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial\xi}-\frac{\partial F_2}{\partial\xi}\int\limits_{\mathbf{R}^{2n}}\frac{\partial\rho_2}{\partial y}(y;x,p)\times$$

$$\times F_1(x,p,t)\,dx\,dp=0$$

где $x,\ p\in\mathbf{R}^n,\ y,\ \xi\in\mathbf{R}^m$, а $H_1,\ H_2,\ \rho_1,\ \rho_2$ — заданные вещественные функции. Поставим некоторые начальные условия

$$F_1(x,\ p,\ 0)=F_{10}(x,\ p),\quad F_2(y,\ \xi,\ 0)=F_{20}(y,\ \xi).$$

Проквантуем первое уравнение системы (3.18). Аналогично предыдущему примеру получим уравнение Шредингера

$$-ih\frac{\partial\psi_h}{\partial t}+H_1\left(\overset{2}{x},-ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},t\right)\psi_h+$$

$$+\psi_h\int\rho_1(x;y,\xi)\,F_2(y,\xi,t)\,dy\,d\xi=0, \qquad (3.19)$$

причем начальные данные $\psi_h(x,\ 0)$ удовлетворяют следующему условию:

$$\lim_{h\to 0}(2\pi h)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{i}{h}xp}\psi_h(x,0)\overline{\widetilde{\psi}_h(p,0)}=F_{10}(x,p)$$

(предел берется в некотором пространстве Соболева W_2^{-s}).

Второе уравнение системы (3.18) после такого квантования перейдет в следующее:

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}+\frac{\partial H_2}{\partial\xi}\frac{\partial F_2}{\partial y}-\frac{\partial H_2}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial\xi}-$$

$$-\frac{\partial F_2}{\partial\xi}\int\psi_h(x,t)\,\overline{\frac{\partial\rho_2}{\partial y}\left(y;\overset{2}{x},-ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)\psi_h(x,t)}\,dx=0. \qquad (3.20)$$

Система, состоящая из уравнения Шредингера (3.19) и уравнения Власова (3.20), является результатом частичного квантования системы (3.18).

Можно также переписать уравнение (3.19), введя характеристики уравнения (3.20). В результате мы придем к следующей системе:

$$-ih\frac{\partial\psi_h}{\partial t}+H_1\left(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t\right)\psi_h+\psi_h\int\rho_1\,(x; Y_h(y,\xi,t),$$

$$\Xi_h(y,\xi,t))\,F_{20}(y,\xi)\,dy\,d\xi=0,$$

$$\frac{\partial Y_h}{\partial t}=\frac{\partial H_2}{\partial\xi}(Y_h,\Xi_h,t),\qquad Y_h(y,\xi,0)=y,$$

$$\frac{\partial\Xi_h}{\partial t}=-\frac{\partial H_2}{\partial y}(Y_h,\Xi_h,t)-\int\psi_h(x,t)\times$$

$$\times\overline{\frac{\partial\rho_2}{\partial y}\left(Y_h;\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)\psi_h(x,t)}\,dx,$$

$$\Xi_h(y,\xi,0)=\xi.$$

Пример 3.1. Частичное квантование электрона в классической системе электрон — осцилляторы поля.

Рассмотрим классическое движение электрона в электромагнитном поле с учетом самодействия. Пусть $(q\,(t), p\,(t))$ — координата и импульс электрона, удовлетворяющие системе Гамильтона

$$\dot q=\frac{\partial H}{\partial p},\qquad \dot p=-\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{3.21}$$

где

$$H\,(q,\ p)=\varphi\,(q,\ t)+|\,p+A\,(q,\ t)\,|^2,$$

φ, $A=(A_1,\ A_2,\ A_3)$ — скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля. Имеет место разложение

$$\varphi=\varphi'+\varphi'',\quad A=A'+A'',$$

где $(\varphi',\ A')$ — потенциалы внешнего поля, $(\varphi'',\ A'')$ — потенциалы собственного поля электрона. Уравнения для потенциалов $\varphi\,(x,\ t)$, $A\,(x,\ t)$ имеют вид

$$\Box\varphi=\alpha\delta\,(x-q\,(t)),\quad \Box A=\beta\delta\,(x-q\,(t)), \tag{3.22}$$

где $\Box=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\Delta$ — оператор Даламбера, c — скорость света, α — некоторая константа, $\beta=\alpha\dot q$.

Уравнения (3.22) будем рассматривать как бесконечномерную гамильтонову систему с функцией Гамильтона

$$\mathscr{H}(\varphi, A, \dot{\varphi}, \dot{A}) = \int \Big\{ \frac{1}{2}(|\dot{\varphi}|^2 + c^2 |\nabla\varphi|^2) - \alpha\varphi\delta(x - q(t)) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(|\dot{A}_i|^2 + c^2 |\nabla A_i|^2) - \beta A\delta(x - q(t))\Big\} dx.$$

Гамильтоново представление уравнений (3.22) имеет вид

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\varphi}, \qquad \ddot{A} = -\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta A}. \tag{3.23}$$

Проквантуем частично первую пару уравнений (3.21) в системе (3.21), (3.23). Получим квантовое уравнение для электрона

$$-ih\frac{\partial\psi_h(q,t)}{\partial t} + \varphi(q,t)\psi_h(q,t) + \left| -ih\frac{\partial}{\partial q} + A(q,t)\right|^2 \times \\ \times \psi_h(q,t) = 0 \tag{3.24}$$

и уравнения поля

$$\ddot{\varphi} = -\int |\psi_h|^2 \frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\varphi} dq, \qquad \ddot{A} = -\int \overline{\psi}_h \frac{\delta\mathscr{H}}{\delta A}\psi_h dq.$$

Используя явный вид функции $\mathscr{H}$, уравнения поля перепишем в следующем виде:

$$\Box\varphi = \alpha\overline{\psi}_h(x,t)\psi_h(x,t), \\ \Box A = -\operatorname{Re} 2ih\alpha\overline{\psi}_h(x,t)\nabla\psi_h(x,t). \tag{3.25}$$

Полученная система (3.24), (3.25) является нелинейным уравнением квантовой механики (см. введение). Таким образом, нелинейные уравнения квантовой механики могут быть интерпретированы также, как частично квантованные. Стало быть, чтобы получить уравнение квантовой электродинамики (4)—(7) из системы (3.21), (3.23), нужно сначала частично проквантовать уравнение (3.21) (для электрона), и только потом провести полное вторичное квантование частично проквантованных уравнений.

ГЛАВА III

T-ОТОБРАЖЕНИЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С УНИТАРНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В теории фейнмановского операторного исчисления существенную роль играет так называемый процесс выпутывания для T-произведений. Формулы выпутывания Фейнмана в настоящей главе обобщаются на широкий класс T-отображений, в том числе и тех, которые отвечают всем рассматриваемым в этой книге уравнениям.

§ 1. Теорема существования T-отображения

Рассмотрим задачу Коши для следующего уравнения с унитарной нелинейностью:

$$\begin{gathered}
-i\frac{\partial\psi_k(x,t)}{\partial t}-\Delta\psi_k(x,t)+\sum_{l=1}^{m}V_{kl}(x)\psi_l(x,t)+\\
+\sum_{l,\,j=1}^{m}\psi_l(x,t)\int\rho_{kl}^{(j)}(x,y)\,|\psi_j(y,t)|^2\,dy=0,\\
\psi_k(x,0)=\psi_{0k}(x),\qquad k=1,\ldots,m.
\end{gathered}\tag{1.1}$$

Здесь $\psi_0=(\psi_{01},\ldots,\psi_{0m})\in L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$, а функции V_{kl}, $\rho_{kl}^{(j)}$ непрерывны, ограничены и симметричны:

$$V_{kl}(x)=\overline{V_{lk}(x)},\qquad \rho_{kl}^{(j)}(x,y)=\overline{\rho_{lk}^{(j)}(x,y)}.$$

Напомним, что $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$ — пространство m-мерных вектор-функций с нормой

$$\|\psi\|^2=\sum_{j=1}^{m}\int|\psi_j(x)|^2\,dx.$$

Аналогично определяется пространство Соболева $W_2^{k,m}(\mathbf{R}^n)$ с нормой

$$\|\psi_0\|^2_{W_2^{k,m}} = \sum_{j=1}^{m} \|\psi_{0j}\|^2_{W_2^k}.$$

Введем следующие сокращенные обозначения. Пусть $\psi(t)$ — функция на $\mathbf{R}$ со значениями в $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$

$$\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t)), \quad \psi(t) \in L^{2,m}(\mathbf{R}^n).$$

Пусть $v \in L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$. Рассмотрим непрерывную матричнозначную функцию с матричными элементами вида

$$V_{ij}(\cdot) + \sum_{l=1}^{m} \int \rho_{ij}^l(\cdot, y)\,|v_l(y)|^2\,dy,$$

которую мы обозначим через $A[v]$. Обозначим через $\hat{A}[v]$ ограниченный линейный оператор в $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$, действующий по формуле

$$(\hat{A}[v]u)_i = \sum_{j=1}^{m} A[v]_{ij} u_j \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где $u \in L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$. Используя введенные обозначения, перепишем задачу (1.1) в виде

$$-i\frac{d}{dt}\psi(t) - \Delta\psi(t) + \hat{A}[\psi(t)]\psi(t) = 0, \tag{1.2}$$
$$\psi(0) = \psi_0.$$

Докажем, что решение $\psi(t) \in L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$ этой задачи Коши существует и задается T-отображением

$$\psi(t) = \left(\prod_{\tau=0}^{t} G_{d\tau}[\psi(\tau)]\right)[\psi_0]$$

с образующей

$$G_\varepsilon[v] = \exp\{i\varepsilon\Delta\}\exp\{i\varepsilon\hat{A}[v]\}, \quad v \in L^{2,m}(\mathbf{R}^n),$$

где Δ — оператор Лапласа.

Пусть $\delta = t/N$, $N = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим последовательность функций

$$\psi_{N,0} = \psi_0,$$
$$\psi_{N,k+1} = G_\delta[\psi_{N,k}]\psi_{N,k}, \ k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Обозначим $\psi_N(t) = \psi_{N,N}$. Докажем существование T-отображения $\psi_0 \to \lim\limits_{N\to\infty} \psi_N(t)$.

Теорема *) 1.1 [17] *Пусть* $\psi_0 \in W_2^{2,m}(\mathbf{R}^n)$. *Тогда в норме* $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$ *равномерно на любом отрезке* $t \in [0, T_0]$ *существует предел* $\psi(t) = \lim\limits_{N\to\infty} \psi_N(t)$, *удовлетворяющий задаче Коши* (1.2).

Доказательство. 1) Прежде всего заметим, что последовательность $\{\psi_{N,k}\}$ ограничена равномерно по N и k. Действительно, имеют место равенства

$$\|\exp\{i\varepsilon\hat{A}[v]\}\| = 1, \qquad \|\exp\{i\varepsilon\Delta\}\| = 1$$

(нормы всех операторов — это обычные операторные нормы $L^{2,m} \to L^{2,m}$). Поэтому

$$\|\psi_{N,k}\| = \|\psi_0\|. \tag{1.3}$$

2) Докажем формулу

$$\psi_{N,k} = \exp\{ik\delta\Delta\}\psi_0 + \\ + i\delta\sum_{j=0}^{k-1} \exp\{i(k-j-1)\delta\Delta\}\hat{A}[\psi_{N,j}]\psi_{N,j} + O\left(\frac{1}{N}\right). \tag{1.4}$$

Заметим, что последовательность операторов $\hat{A}[v]$ равномерно ограничена на любом шаре $\|v\| \leqslant r$, т. е. существует константа C_r такая, что

$$\|\hat{A}[v]\| \leqslant C_r. \tag{1.5}$$

Поэтому (см. (1.3))

$$\exp\{i\delta\hat{A}[\psi_{N,j}]\} = 1 + i\delta\hat{A}[\psi_{N,j}] + O(1/N^2).$$

Отсюда получаем следующую рекуррентную формулу для $\psi_{N,k}$:

$$\psi_{N,k} = \\ = \exp\{i\delta\Delta\}\psi_{N,k-1} + i\delta\exp\{i\delta\Delta\}\hat{A}[\psi_{N,k-1}]\psi_{N,k-1} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \tag{1.6}$$

---

*) Идея доказательства содержится в работе [30], посвященной линейному случаю.

После того, как книга была сдана в печать, автор познакомился с работой [29], в которой доказана теорема существования для более широкого, чем (1.2), класса нелинейных уравнений.

где остаток $O(1/N^2)$ имеет оценку $\| O(1/N^2) \| \leqslant C/N^2$, причем C не зависит от $k = 1, \ldots, N$. Из (1.6) элементарными вычислениями получим (1.4).

3) Докажем неравенство

$$\| \psi_{N,\, l+k} - \psi_{N,\, l} \| \leqslant C_0 e^{C_1 t} (k\delta + \| \exp\{i\delta k \Delta\} \psi_0 - \psi_0 \|), \quad (1.7)$$

где C_0, C_1 — некоторые постоянные, $l + k \leqslant N$. Из формулы (1.4) следует, что

$$\psi_{N,\, l+k} - \psi_{N,\, l} = \exp\{il\delta\Delta\} (\exp\{ik\delta\Delta\} \psi_0 - \psi_0) +$$
$$+ i\delta \sum_{j=0}^{k-1} \exp\{i\delta(k + l - j - 1)\Delta\} \hat{A} [\psi_{N,\, j}] \psi_{N,\, j} +$$
$$+ i\delta \sum_{j=0}^{l-1} \exp\{i\delta(l - j - 1)\Delta\} (\hat{A} [\psi_{N,\, j+k}] \psi_{N,\, j+k} -$$
$$- \hat{A} [\psi_{N,\, j}] \psi_{N,\, j}) + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Отсюда и из (1.5) получаем систему неравенств

$$a_0 \leqslant C\varepsilon,$$
$$a_l \leqslant C\left(\varepsilon + k\delta + \sum_{j=0}^{l-1} \delta a_j\right), \qquad l = 1, \ldots, N,$$

где

$$a_j = \| \psi_{N,\, j+k} - \psi_{N,\, j} \|, \qquad \varepsilon = \| \psi_0 - \exp\{ik\delta\Delta\} \psi_0 \|.$$

Из этих неравенств следует оценка (1.7).

4) Докажем, что последовательность $\{\psi_N(t)\}$ фундаментальна. Зафиксируем, помимо N, еще одно целое число $M \geqslant 1$. Отметим, что

$$\frac{j}{M} - \left[\frac{j}{M}\right] \leqslant 1,$$

где через $[j/M]$ обозначена целая часть рационального числа j/M. Поэтому из (1.7) получим

$$\psi_{MN,\, j} = \psi_{MN,\, M[j/M]} + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad (1.8)$$

где $\| O(1/N) \| \leqslant (\delta + \| \psi_0 - \exp\{i\delta(j/M - [j/M])\Delta\} \psi_0 \|) \leqslant \leqslant \delta \, \|\psi_0\|_{W_2^{2,m}(\mathrm{R}^n)}$. Обозначим $\gamma_N = \delta \, \| \psi_0 \|_{W_2^{2,m}(\mathrm{R}^n)}$.

Итак, мы имеем два разбиения отрезка $[0, t]$: первое — на отрезки длины t/N, а второе — на отрезки длины

$t/(MN)$. Ясно, что узлы первого разбиения содержатся в множестве узлов второго разбиения. При этом узлы первого разбиения выделяются среди узлов второго разбиения тем, что их номер кратен M. Формула (1.8) означает, что для любого узла второго разбиения с номером $j \in \in \{1, \ldots, MN\}$ найдется узел первого разбиения с номером $j_0 = M\,[j/M]$ такой, что функции $\psi_{MN,j}$ и ψ_{MN,j_0} отличаются друг от друга по норме $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$ на величину порядка $O(\gamma_N)$ равномерно по j.

Запишем формулу (1.4), заменяя N на MN для номера $k_0 = Ml$, кратного M, причем в правой части все функции в узлах второго разбиения аппроксимируем функциями в узлах первого разбиения, используя (1.8). В результате получим

$$\psi_{MN,\,Ml} = \exp\{il\delta\Delta\}\,\psi_0 + i\delta \sum_{j=0}^{l-1} \exp\{i\delta(l-j-1)\,\Delta\} \times$$
$$\times \hat{A}\,[\psi_{MN,\,Mj}]\,\psi_{MN,\,Mj} + O(\gamma_N), \qquad (1.9)$$
$$l = 1, \ldots, N.$$

Обозначим

$$b_j = \|\psi_{N,\,j} - \psi_{NM,\,Mj}\|.$$

Вычитая равенство (1.4) из (1.9) и оценивая норму левой части получившейся разности, придем к следующей системе оценок:

$$b_0 \leqslant \alpha_N,$$
$$b_l \leqslant \alpha_N + c\delta \sum_{j=0}^{l-1} b_j, \qquad l = 1, \ldots, N,$$

где $\alpha_N \leqslant C_1\gamma_N$. Отсюда получим равномерную по l оценку

$$b_l \leqslant \alpha_N e^{C_2 t}. \qquad (1.10)$$

В частности, при $l = N$ имеем

$$\|\psi_N(t) - \psi_{NM}(t)\| \leqslant \frac{t}{N}\,C_1 e^{C_2 t}\,\|\psi_0\|_{W_2^{2,\,m}(\mathbf{R}^n)}.$$

Тем самым доказана равномерная сходимость последовательности $\{\psi_N(t)\}$ на любом отрезке $[0, T_0]$ к некоторой функции $\psi = \psi(t)$ со значениями в $L^{2,m}(\mathbf{R}^n)$.

5) Поскольку каждая функция ψ_N непрерывна на $[0, T_0]$, то ψ непрерывна на $[0, T_0]$.

Из (1.10) следует, что при $\tau \leqslant t$ и $\frac{k(N)t}{N} \to \tau$ последовательность функций $\{\psi_{N,k(N)}\}$ сходится к $\psi(\tau)$. Следовательно, римановы суммы

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{t}{N} \exp\left\{i \frac{t}{N}(N-k-1)\Delta\right\} \hat{A}(\psi_{N,k})\psi_{N,k}$$

сходятся при $N \to \infty$ в норме $L^{2,m}(\mathrm{R}^n)$ к интегралу от непрерывной функции со значениями в банаховом пространстве:

$$\int_0^t d\tau \exp\{i(t-\tau)\Delta\} \hat{A}(\psi(\tau))\psi(\tau).$$

Перейдем к пределу при $N \to \infty$ в равенстве (1.4). Получим интегральное уравнение для функции $\psi(t)$

$$\psi(t) = \exp\{it\Delta\}\psi_0 + i\int_0^t d\tau \exp\{i(t-\tau)\Delta\} \hat{A}(\psi(\tau))\psi(\tau). \tag{1.11}$$

Отсюда следует, что функция $\psi(t)$ удовлетворяет задаче (1.2). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1.1. Предположим, что коэффициенты V_{kl} и $\rho_{kl}^{(j)}$ уравнения (1.1) являются гладкими функциями, ограниченными со всеми своими производными. В этом случае теорема 1.1 допускает следующее уточнение.

Пусть $\psi_0 \in W_2^{k+2,m}(\mathrm{R}^n)$, где k — некоторое вещественное число. Тогда T-отображение $\psi_0 \to \psi(t) = \lim \psi_N(t)$ существует в $W_2^{k,m}(\mathrm{R}^n)$, причем сходимость $\psi_N(t) \to \psi(t)$ равномерна на любом отрезке $t \in [0, T_0]$, а предельная функция имеет оценку

$$\|\psi(t)\|_{W_2^{k,m}} \leqslant \|\psi_0\|_{W_2^{k,m}} e^{Ct}.$$

Для матрицы плотности (см. § 1 гл. II) $g(t)_{jk} = \psi_j(t)\overline{\psi_k(t)}e^{-\frac{i}{h}xp}(2\pi h)^{-n/2}$ справедлива аналогичная оценка: если $g_{jk}(0) \in W_2^s(\mathrm{R}^{2n})$ и $\sup\limits_x \int \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta \rho_{kl}^{(j)}(x,y)\right|^2 \times dy < \infty$, то

$$\|g_{jk}(t)\|_{W_2^s} \leqslant \|g_{jk}(0)\|_{W_2^s} e^{C_1 t}.$$

Оба этих утверждения доказываются так же, как и теорема 1.1.

§ 2. Формулы выпутывания на примере квазилинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка

Рассмотрим T-отображение $\prod_{\mu=\tau}^{t} e^{iA_\mu d\mu} = \exp\left\{i\int_\tau^t A_\mu\, d\mu\right\}$ с образующей $e^{iA_\mu \varepsilon}$, порожденной линейным оператором A_μ (т. е. T-произведение).

Пусть U_μ — некоторое дифференцируемое семейство обратимых линейных операторов на отрезке $[\tau, t]$.

Определение 2.1 *Выпутыванием* оператора U_t из T-произведения $\exp\left\{i\int_\tau^t A\mu d\mu\right\}$ назовем преобразование производящего оператора A_μ в новый оператор $\tilde{A}_\mu$ такой, что

$$\exp\left\{i\int_\tau^t A_\mu d\mu\right\} = U_t \exp\left\{i\int_\tau^t \tilde{A}_\mu d\mu\right\} U_\tau^{-1}. \tag{2.1}$$

Явная формула для указанного преобразования производящего оператора имеет вид

$$\tilde{A}_\mu = U_\mu^{-1} A_\mu U_\mu + iU_\mu^{-1}\frac{dU_\mu}{d\mu}. \tag{2.2}$$

Можно сформулировать это утверждение иначе. Пусть заданы производящие операторы A_μ и B_μ, порождающие T-произведения $\exp\left\{i\int_\tau^t A_\mu d\mu\right\}$ и $\exp\left\{i\int_\tau^t B_\mu d\mu\right\}$. Если семейство U_μ удовлетворяет уравнению

$$i\frac{dU_\mu}{d\mu} + (A_\mu U_\mu - U_\mu B_\mu) = 0, \qquad \mu \in [\tau, t],$$

то выпутывание оператора U_t переводит производящий оператор A_μ в B_μ. В частности, выпутывание оператора U_t, удовлетворяющего уравнению

$$i\frac{dU_\mu}{d\mu} + [A_\mu, U_\mu] = 0, \quad \mu \in [\tau, t],$$

не изменяет производящего оператора T-произведения.

Пример 2.1. Пусть $\{A_\mu\}$ — семейство несамосопряженных линейных операторов в гильбертовом пространстве, удовлетворяющее условию

$$\operatorname{Im} A_\mu = \frac{1}{2i}(A_\mu - A_\mu^*) \geqslant 0.$$

Обозначим

$$\operatorname{Re} A_\mu = \frac{1}{2}(A_\mu + A_\mu^*).$$

Пусть это семейство самосопряженных операторов порождает T-произведение $U_\mu = \exp\left\{i\int_0^\mu \operatorname{Re} A_\mu\, d\mu\right\}$. Тогда U_μ — унитарный оператор и $U_\mu^{-1} = \exp\left\{-i\int_0^\mu \operatorname{Re} A_\mu\, d\mu\right\}$.

Выпутывание оператора U_t из T-произведения $\exp\left\{i\int_\tau^t A_\mu\, d\mu\right\}$ приводит к формуле

$$\exp\left\{i\int_\tau^t A_\mu\, d\mu\right\} = U_t \exp\left\{-\int_\tau^t \widetilde{\operatorname{Im} A_\mu}\, d\mu\right\} U_\tau^{-1},$$

где новый производящий оператор $\widetilde{\operatorname{Im} A_\mu}$ равен $\widetilde{\operatorname{Im} A_\mu} = U_\mu^{-1} \operatorname{Im} A_\mu U_\mu$.

Заметим, что $\widetilde{\operatorname{Im} A_\mu} \geqslant 0$ и оператор $\exp\left\{-\int_\tau^t \widetilde{\operatorname{Im} A_\mu}\, d\mu\right\}$ самосопряжен.

Пример 2.2. Формула выпутывания для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка. В гл. I мы изучали нелинейные уравнения первого порядка

$$\begin{gathered} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + a(x, t; [f])\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + f(x, t)\, b(x, t; [f]) = 0, \\ f(x, 0) = f_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \end{gathered} \tag{2.3}$$

где функции $a(x, t; [f]) = (a_1(x, t; [f]), \ldots, a_n(x, t; [f]))$ и $b(x, t; [f])$ интегрально зависят от f, т. е. являются гладкими функциями от интегралов вида

$$\int_0^t d\tau_1 \ldots \int_0^t d\tau_m \int dy_1 \ldots \int dy_m \rho(x, t; y_1, \ldots, y_m, \tau_1, \ldots, \tau_m) \times \\ \times f(y_1, \tau_1) \ldots f(y_m, \tau_m), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

Кроме того, предполагалось, что a_j — вещественные функции ($j = 1, \ldots, n$).

Решение задачи (2.3) можно записать в виде T-отображения:

$$f(x, t) = \exp\left\{-\int_0^t \left[a(x, \tau; [f])\frac{\partial}{\partial x} + b(x, \tau; [f])\right] d\tau\right\} f_0(x). \tag{2.5}$$

Будем выпутывать в правой части этой формулы оператор

$$\exp\left\{-\int_0^t \left[a(x, \tau; [f])\frac{\partial}{\partial x}\right] d\tau\right\}.$$

По формулам (2.1), (2.2) получим

$$f(x, t) = \exp\left\{-\int_0^t \left[a(x, \tau; [f])\frac{\partial}{\partial x}\right] d\tau\right\} r(x, t), \tag{2.6}$$

где

$$r(x, t) = \exp\left\{-\int_0^t \hat{b}'_\tau \, d\tau\right\} f_0(x),$$

а оператор $\hat{b}'_\tau$ равен

$$\hat{b}'_\tau = \exp\left\{-\int_0^\tau a\frac{\partial}{\partial x}\right\}^{-1} b(x, \tau; [f]) \exp\left\{-\int_0^\tau a\frac{\partial}{\partial x}\right\}. \tag{2.7}$$

Имеет место тождество

$$\exp\left\{-\int_0^t a(x, \tau; [f])\frac{\partial}{\partial x}\right\} \varphi(x) \equiv \varphi(g_t^{-1}(x)),$$

где g_t — сдвиг вдоль траекторий системы

$$\frac{\partial X(x, t)}{\partial t} = a(X(x, t), t; [f]), \quad X(x, 0) = x, \tag{2.8}$$

т. е. $g_t(x) = X(x, t)$. Поэтому оператор $\hat{b}'_\tau$ из (2.7) есть оператор умножения на функцию $b(X(x, \tau), \tau; [f])$. Теперь совершим преобразование (2.6) в каждом интеграле (2.4) и воспользуемся характеристиками (2.8). В результате интеграл (2.4) перейдет в следующий:

$$\int_0^t d\tau_1 \ldots \int_0^t d\tau_m \int dy_1 \ldots \int dy_m \rho(x, t; X(y_1, \tau_1), \ldots$$
$$\ldots, X(y_m, \tau_m), \tau_1, \ldots, \tau_m) r(y_1, \tau_1) \ldots r(y_m, \tau_m) \times$$
$$\times |J(y_1, \tau_1) \ldots J(y_m, \tau_m)|, \qquad (2.9)$$

где обозначено

$$J(y, \tau) = \det \left\| \frac{\partial X(y, \tau)}{\partial y} \right\|.$$

Напомним, что

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J(\operatorname{div} a)(X, t; [f]); \; J(x, 0) = 1. \qquad (2.10)$$

После замены каждого интеграла вида (2.4) на интеграл (2.8) функции $a(x, t; [f])$, $b(x, t; [f])$ перейдут в $\tilde{a}(x, t; [r, X, J])$, $\tilde{b}(x, t; [r, X, J])$, а уравнения (2.8), (2.10) примут вид

$$\frac{\partial X(x, t)}{\partial t} = \tilde{a}(X(x, t), t; [r, X, J]), \quad X(x, 0) = x,$$
$$(2.11)$$
$$\frac{\partial J(x, t)}{\partial t} = J(x, t)(\operatorname{div} \tilde{a})(X(x, t), t; [r, X, J]), \quad J(x, 0) = 1.$$

Кроме того, формула (2.6) в новых обозначениях имеет вид

$$f(x, t) = \exp\left\{-\int_0^t \left[\tilde{a}(x, \tau; [r, X, J]) \frac{\partial}{\partial x}\right] d\tau\right\} r(x, t), \quad (2.12)$$

где

$$r(x, t) = \exp\left\{-\int_0^t \tilde{b}(X(x, \tau), \tau; [r, X, J])\, d\tau\right\} f_0(x). \qquad (2.13)$$

Этим закончен процесс выпутывания. Мы доказали, что исходное T-отображение (2.5) эквивалентно системе уравнений (2.11), (2.13), которая представляет собой систему характеристик для задачи (2.3) (см. § 2 гл. I).

Для того чтобы сформулировать этот результат на языке T-отображений, введем следующие обозначения. Пусть $\varphi(t) = (r(\cdot, t), X(\cdot, t), J(\cdot, t))$ — функция со значениями в пространстве непрерывных $(n+2)$-мерных вектор-функций на $\mathbf{R}^n$. Определим образующую T-отображения:

$$G_{t,\varepsilon}[\varphi] = (\exp\{-\varepsilon\tilde{b}(X(\cdot, t), t; [\varphi])\}, X(\cdot, t) + \\ + \varepsilon\tilde{a}(X(\cdot, t), t; [\varphi]), \exp\{\varepsilon \operatorname{div}\tilde{a}(X(\cdot, t), t; [\varphi])\}).$$

Пусть, кроме того,

$$\varphi(0) = (f_0, X(\cdot, 0), 1),$$

где $X(x, 0) = x$.

Теорема 2.1. *Рассмотрим T-отображение*

$$f(x, t) = \exp\left\{-\int_0^t \left(a(x, \tau; [f])\frac{\partial}{\partial x} + b(x, \tau, [f])\right) d\tau\right\} f_0(x),$$

а также T-отображение

$$\varphi(t) = \left(\prod_{\tau=0}^{t} G_{\tau, d\tau}[\varphi]\right)\varphi(0) \quad (\textit{где}\ \varphi = (r, X, J)). \quad (2.14)$$

Имеет место формула (выпутывания)

$$f(x, t) = \exp\left\{-\int_0^t \left(\tilde{a}(x, \tau; [\varphi])\frac{\partial}{\partial x}\right) d\tau\right\} \varphi(x, t). \quad (2.15)$$

Можно также рассматривать (2.14) как систему T-отображений, отвечающих (2.11), (2.13). Выпутывание (2.15) преобразует исходное T-отображение (2.5) в систему T-отображений (2.14).

§ 3. Выпутывание в T-отображении с унитарной нелинейностью

Пусть $\hat{H}$ — оператор с унитарной нелинейностью (см. § 2 гл. II):

$$\hat{H}[\psi] = \mathcal{H}_h(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial/\partial x}, t; [\psi])\psi,$$
$$\psi = \psi(x, t),\ x \in \mathbf{R}^n.$$

Напомним, что символ $\mathcal{H}_h(x, p, t; [\psi])$ является гладкой функцией от x, p, t, h медленного роста при $|x|, |p| \to \infty$, $1/h \to \infty$ и гладкой функцией от интегралов вида

$$\int_0^t d\tau \int dy\, \overline{\psi(y, \tau)}\rho(x, p, t, \overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, \tau)\psi(y, \tau),\ \rho \in C_0^\infty. \quad (3.1)$$

Пусть при каждом ψ оператор

$$\hat{\mathscr{H}}_h(t, [\psi]) = \mathscr{H}_h(\overset{2}{x} - ih\overset{1}{\partial}/\partial x, t; [\psi])$$

самосопряжен в $L^2(\mathbf{R}^n)$. В дальнейшем будем опускать индекс h у символа $\mathscr{H}_h$.

Предположим, что $\hat{\mathscr{H}}$ $(t, [\psi])$ является производящим оператором T-отображения

$$\psi(x, t) = \left[\prod_{\tau=0}^{t} \exp\left\{-\frac{i}{h}\hat{\mathscr{H}}(\tau, [\psi])\,d\tau\right\}\right]\psi(x, 0). \quad (3.2)$$

Преобразуем это T-отображение с помощью формул выпутывания. Рассмотрим еще один оператор $\hat{B}$ с унитарной нелинейностью:

$$\hat{B}[\psi] = \mathscr{B}_h(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial}/\partial x, t; [\psi])\psi.$$

Линейный оператор $\mathscr{B}_h(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial}/\partial x, \tau; [\psi])$ при фиксированном ψ будем также обозначать через $\hat{\mathscr{B}}_h(t, [\psi])$. Предположим, что оператор

$$\mathscr{B}_h(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial}/\partial x, t; [\psi])$$

при фиксированном ψ самосопряжен. Индекс h ниже будем опускать. Символ $\mathscr{B}$ $(x, p, t, [\psi])$ является гладкой функцией от интегралов вида (3.1).

Используя формулы выпутывания (2.1), (2.2), получим из (3.2)

$$\psi(x, t) = \exp\left\{-\frac{i}{h}\int_0^t \hat{\mathscr{B}}(\mu, [\psi])\,d\mu\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{i}{h}\int_0^t \hat{\mathscr{K}}(\tau, [\psi])\,d\tau\right\}\psi(x, p),$$

где

$$\hat{\mathscr{K}}(\tau, [\psi]) = \mathscr{H}(\overset{2}{\hat{X}}_h(\tau), \overset{1}{\hat{P}}_h(\tau), \tau; [\psi]) -$$
$$- \mathscr{B}(\overset{2}{\hat{X}}_h(\tau), \overset{1}{\hat{P}}_h'(\tau), \tau; [\psi]),$$

а операторы $\hat{X}_h(\tau)$, $\hat{P}_h(\tau)$ определяются по следующим формулам:

$$\hat{X}_h(\tau)=\left(\exp\left\{-\frac{i}{h}\int_0^\tau \hat{\mathscr{B}}(\mu,[\psi])\,d\mu\right\}\right)^{-1}\times$$
$$\times x\left(\exp\left\{-\frac{i}{h}\int_0^\tau \hat{\mathscr{B}}(\mu,[\psi])\,d\mu\right\}\right),$$

$$\hat{P}_h(\tau)=\left(\exp\left\{-\frac{i}{h}\int_0^\tau \hat{\mathscr{B}}(\mu,[\psi])\,d\mu\right\}\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\exp\left\{-\frac{i}{h}\int_0^\tau \hat{\mathscr{B}}(\mu,[\psi])\,d\mu\right\}\right).$$

Формула (3.2), таким образом, принимает вид

$$\psi(x,t)=\exp\left\{-\frac{i}{h}\int_0^t \hat{\mathscr{B}}(\mu,[\psi])\,d\mu\right\}\varphi(x,t), \tag{3.3}$$

где

$$\varphi(x,t)=\exp\left\{-\frac{i}{h}\int_0^t \hat{\mathscr{K}}(\tau,[\psi])\,d\tau\right\}\psi(x,0). \tag{3.4}$$

Используя (3.3) и самосопряженность $\hat{\mathscr{B}}(\mu,[\psi])$, преобразуем каждый интеграл вида (3.1) в интеграл

$$\int_0^t d\tau\int dy\,\overline{\varphi(y,\tau)}\,[\rho(x,p,t;\overset{2}{\hat{X}}_h(\tau),\overset{1}{\hat{P}}_h(\tau),\tau)\,\varphi(\cdot,\tau)](y). \tag{3.5}$$

Заменим каждый интеграл (3.1), входящий в функции $\mathscr{H}$ или $\mathscr{B}$, на интеграл (3.5). Получим новые функции $\mathscr{H}_1(x,p,t;[\hat{X}_h,\hat{P}_h,\varphi])$ и $\mathscr{B}_1(x,p,t;[\hat{X}_h,\hat{P}_h,\varphi])$, являющиеся функционалами от операторных семейств $\hat{X}_h$, $\hat{P}_h$ и функции φ.

Обозначим (здесь оператор $\hat{P}(\tau)$ действует первым):

$$\hat{\mathscr{K}}_1(\tau,[\hat{X},\hat{P},\varphi])=\mathscr{H}_1(\hat{X}(\tau),\hat{P}(\tau),\tau;[\hat{X},\hat{P},\varphi])-$$
$$-\mathscr{B}_1(\hat{X}(\tau),\hat{P}(\tau),\tau;[\hat{X},\hat{P},\varphi]),$$

В этих обозначениях формулы (3.3), (3.4) приводят к следующей теореме.

Теорема 3.1. *Рассмотрим T-отображение*

$$\begin{aligned}&\varphi(x, t) = \exp\left\{-\frac{i}{h}\int_0^t \hat{\mathscr{K}}_1(\tau, [\hat{X}_h, \hat{P}_h, \varphi])\, d\tau\right\}\varphi(x, 0),\\ &\varphi(x, 0) = \psi(x, 0),\end{aligned} \tag{3.6}$$

где $\hat{X}_h$, $\hat{P}_h$ *удовлетворяют системе уравнений Гейзенберга*

$$\begin{aligned}&\frac{d\hat{X}_h(t)}{dt} = \frac{\partial \mathscr{B}_1}{\partial p}(\overset{2}{\hat{X}_h}(t), \overset{1}{\hat{P}_h}(t), t; [\hat{X}_h, \hat{P}_h, \varphi]),\\ &\frac{d\hat{P}_h(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{B}_1}{\partial x}(\overset{2}{\hat{X}_h}(t), \overset{1}{\hat{P}_h}(t), t; [\hat{X}_h, \hat{P}_h, \varphi]),\\ &\hat{X}_h(0) = x,\ \hat{P}_h(0) = -ih\frac{\partial}{\partial x}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Имеет место следующая формула выпутывания:

$$\psi(x, t) = \exp\left\{-\frac{i}{h}\int_0^t \hat{\mathscr{B}}_1(\mu, [\hat{X}_h, \hat{P}_h, \varphi])\, d\mu\right\}\varphi(x, t), \tag{3.8}$$

где

$$\hat{\mathscr{B}}_1(\mu, [\hat{X}_h, \hat{P}_h, \varphi]) = \mathscr{B}_1(\overset{2}{x}, -ih, \overset{1}{\partial}/\partial x, t; [\hat{X}_h, \hat{P}_h, \varphi]).$$

Пример 3.1. T-отображение в представлении взаимодействия. Предположим, что символ $\mathscr{B}(x, p, t; [\psi])$ не зависит от ψ, т. е.

$$\hat{\mathscr{B}}(t) = \mathscr{B}(\overset{2}{x}, ih\overset{1}{\partial}/\partial x, t)$$

— линейный оператор (назовем его *свободным гамильтонианом*). Пусть

$$\mathscr{H}(x, p, t; [\psi]) = \mathscr{B}(x, p, t) + \mathscr{K}(x, p, t; [\psi]).$$

Оператор $\mathscr{K}(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial}/\partial x, t; [\psi])$ назовем *гамильтонианом взаимодействия*.

Формулы теоремы 3.1 позволяют представить решения уравнения

$$-ih\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} + \mathscr{H}\left(\overset{2}{x}, -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}, t; [\psi_h]\right)\psi_h(x, t) = 0$$

в следующем виде:

$$\psi_h(x, t) = \exp\left\{-\frac{i}{h}\int_0^t \widehat{\mathscr{B}}(\mu)\, d\mu\right\} \varphi_h(x, t),$$

где

$$\varphi_h(x, t) = \exp\left\{-\frac{i}{h}\int_0^t \widehat{\mathscr{K}}_1(\tau, [\widehat{X}_h, \widehat{P}_h, \varphi_h])\, d\tau\right\} \varphi_h(x, 0),$$

$$\varphi_h(x, 0) = \psi_h(x, 0).$$

Оператор $\widehat{\mathscr{K}}_1$ (оператор $\widehat{\mathscr{K}}$ в представлении взаимодействия) задается формулой

$$\widehat{\mathscr{K}}_1(\varepsilon, \widehat{X}_h, \widehat{P}_h, \varphi_h) = \mathscr{K}_1(\overset{2}{\widehat{X}}_h(\tau), \overset{1}{\widehat{P}}_h(\tau), \tau; [\widehat{X}_h, \widehat{P}_h, \varphi]),$$

где операторы $\widehat{X}_h(t)$, $\widehat{P}_h(t)$ удовлетворяют системе уравнений Гейзенберга

$$\frac{d\widehat{X}_h(t)}{dt} = \frac{\partial \mathscr{B}}{\partial p}(\overset{2}{\widehat{X}}_h(t), \overset{1}{\widehat{P}}_h(t), t), \ \widehat{X}_h(0) = x,$$

$$\frac{d\widehat{P}_h(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{B}}{\partial x}(\overset{2}{\widehat{X}}_h(t), \overset{1}{\widehat{P}}_h(t), t), \ \widehat{P}_h(0) = -ih\frac{\partial}{\partial x}.$$

ГЛАВА IV

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Постановка задачи

В этой и следующих главах построена квазиклассическая асимптотика решения конкретных уравнений с унитарной нелинейностью, возникающих в квантовой электродинамике и теории поля. К этому типу относятся также уравнения Хартри и нелинейные уравнения Максвелла с пространственной дисперсией. В данной главе мы подробно рассмотрим простейшее, но в то же время характерное уравнение с унитарной нелинейностью: уравнение Шредингера для парного взаимодействия.

Будем решать следующую задачу Коши:

$$-ih\frac{\partial\psi_h}{\partial t}-h^2\Delta\psi_h+V_h\psi_h=0,\quad t>0,\quad x\in\mathbf{R}^n,$$
$$\psi_h\big|_{t=0}=e^{iS_0/h}\chi_0, \tag{1.1}$$

где $\psi_h=\psi_h(x,t)$ — неизвестная функция, $\chi_0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $S_0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, S_0 и χ_0 — вещественные функции. Потенциал V_h задается формулой

$$V_h(x,t)=\int\rho(x,y)\,|\psi_h(y,t)|^2\,dy, \tag{1.1'}$$

где $\rho\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, ρ — вещественная функция.

Таким образом, задача (1.1) отличается от обычного уравнения Шредингера квантовой механики тем, что потенциал поля зависит от волновой функции ψ частицы. Поэтому уравнение (1.1) можно назвать *уравнением самосогласованного поля*: частица сама изменяет поле, в котором движется. Параметр h в (1.1) считается малым. Нашей задачей будет отыскание приближенного (асимптотического) решения (1.1) при $h \to 0$.

Будет показано, что задача (1.1) и целый ряд подобных ей нелинейных задач, которые мы рассмотрим ниже, имеют асимптотические решения вида

$$\psi_h(x, t) = e^{\frac{i}{h} S(x, t)} \varphi(x, t, h), \tag{1.2}$$

где амплитуда φ регулярна при $h \to 0$ (в отличие от экспоненты $e^{iS/h}$, производные которой сингулярны при $h \to 0$). Точнее, асимптотическое решение имеет вид (1.2) лишь при достаточно малом «времени» t; в целом же оно строится с помощью более сложной конструкции канонического оператора [13, 16] (см. ниже).

Наличие у дифференциального уравнения решений типа (1.2) тесно связано с существованием у него характеристик и бихарактеристик. Напомним, что для линейных уравнений теория разрешимости и построение асимптотических решений развивается именно на базе понятия характеристики и бихарактеристики. Обычный путь асимптотического решения линейного дифференциального уравнения таков:

1) Выделяется функция Гамильтона H, т. е. символ старшей части дифференциального оператора.

2) Строится система Гамильтона (уравнения бихарактеристик):

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p}(X, P, t), \qquad \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}(X, P, t). \tag{1.3}$$

3) С помощью бихарактеристик (X, P) явно вычисляется фаза (характеристика) S и амплитуда φ в выражении (1.2).

Основным моментом здесь является наличие у системы (1.3) гладких решений, «хорошо» зависящих от начальных данных.

Как было показано в гл. I, II, для нелинейных уравнений вида (1.1) также можно определить понятие характеристик и бихарактеристик. Рассмотрим с этой точки зрения более подробно задачу (1.1).

Прежде всего мы покажем, что представление решения в виде (1.2) является непосредственным следствием формул выпутывания, полученных в гл. III.

§ 2. Построение асимптотики в малом с помощью формул выпутывания

Задача (1.1) эквивалентна следующему T-отображению:

$$\psi_h(x, t) =$$
$$= \exp\left\{-\frac{i}{h}\int_0^t d\tau\left(-h^2\Delta + \int\rho(x, y)\,|\psi_h(y, \tau)|^2\,dy\right)\right\}\psi_h(x, 0), \tag{2.1}$$
$$\psi_h(x, 0) = \exp\left\{\frac{i}{h}S_0(x)\right\}\chi_0(x).$$

Применим к нему формулу выпутывания из §§ 2, 3 гл. III. «Выпутаем» осциллирующий множитель $\exp\left\{\frac{i}{h}S(x, t, h)\right\}$, где $S(x, 0, h) = S_0(x)$. Получим

$$\psi_h(x, t) = e^{\frac{i}{h}S(x,\, t,\, h)}\varphi(x, t, h),$$

где

$$\varphi(x, t, h) = \exp\left\{\int_0^t d\tau\left(-\frac{i}{h}\frac{\partial S}{\partial\tau} - \frac{i}{h}\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right|^2 - \right.\right.$$
$$-\frac{i}{h}\int\rho(x, y)\,|\varphi(y, \tau, h)|^2\,dy -$$
$$\left.\left.-2\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} - \Delta S + ih\Delta\right)\right\}\varphi(x, 0, h), \tag{2.2}$$
$$\varphi(x, 0, h) = \chi_0(x).$$

Функцию S в этих формулах мы выберем ниже так, чтобы член порядка $1/h$ в показателе экспоненты (2.2) был равен нулю. А сейчас повторно применим формулу выпутывания к T-отображению (2.2), определяющему функцию $\varphi(x, t, x)$. «Выпутаем» оператор

$$\hat{U}_t = \exp\left\{-\int_0^t\left(2\frac{\partial S}{\partial x}(x, \tau, h)\frac{\partial}{\partial x}\right)d\tau\right\}.$$

Получим

$$\varphi(x, t, h) = \hat{U}_t f(x, t, h),$$

где

$$f(x, t, h) = \exp\left\{\int_0^t \left(-\frac{i}{h} a_0(x, \tau[f]) - a_1(x, \tau) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (ih)\, \widehat{U}_\tau^{-1} \circ \Delta \circ \widehat{U}_\tau\right)\right\} f(x, 0, h), \quad (2.3)$$

$$f(x, 0, h) = \chi_0(x).$$

Здесь мы обозначили:

$$a_1(z, t, h) = \Delta S(X(z, t, h), t, h),$$

$$a_0(z, t, h, [f]) =$$

$$= \left(\frac{\partial S}{\partial t}(X(z, t, h), t, h) + |\nabla S(X(z, t, h), t, h)|^2 + \right.$$

$$+ \int \rho\left(X(z, t, h, X(y, t, h)\right) \times$$

$$\left. \times \exp\left\{2\int_0^t a_1(y, \tau, h)\, d\tau\right\} |f(y, t, h)|^2\, dy\right),$$

$$X_j(x, t, h) = \widehat{U}_t^{-1} \circ x_j \circ \widehat{U}_t, \quad j = 1, \ldots, n, \quad X = (X_1, \ldots, X_n).$$

Отметим следующее очевидное тождество:

$$\frac{DX(z, t, h)}{Dz} \equiv \exp\left\{2\int_0^t a_1(z, \tau, h)\, d\tau\right\},$$

и еще один раз применим формулу выпутывания к T-отображению (2.3). «Выпутаем» множитель $\exp\left\{-\int_0^t a_1(x, \tau, h)\, d\tau\right\}$.

Получим

$$f(x, t, h) = \exp\left\{-\int_0^t a_1(x, \tau, h)\, d\tau\right\} \chi(x, t, h),$$

где

$$\chi(x, t, h) =$$

$$= \exp\left\{\int_0^t \left(-\frac{i}{h} b(x, \tau, h, [\chi]) + (ih)\, \widetilde{\Delta}_\tau\right) d\tau\right\} \chi(x, 0, h), \quad (2.4)$$

$$\chi(x, 0, h) = \chi_0(x).$$

Здесь мы обозначили:

$$b(z, t, h, [\chi_h]) = \\ = \frac{\partial S}{\partial t}(X(z, t, h), t, h) + |\nabla S(X(z, t, h), t, h)|^2 + \\ + \int \rho(X(z, t, h), X(y, t, h))\,|\chi(y, t, h)|^2\,dy, \quad (2.5)$$

$$\widetilde{\Delta}_t = \sqrt{\frac{DX(x, t, h)}{Dx}} \circ \hat{U}_t^{-1} \circ \Delta \circ \hat{U}_t \circ \frac{1}{\sqrt{\frac{DX(x, t, h)}{Dx}}}.$$

Выберем теперь функцию S так, чтобы коэффициент при $(-i/h)$ в показателе экспоненты (2.4) был равен нулю. Получим уравнения (см. (2.4), (2.5))

$$\chi(x, t, h) = \exp\left\{ih \int_0^t \widetilde{\Delta}_\tau\,d\tau\right\}\chi_0(x), \\ \frac{\partial S}{\partial t} + |\nabla S|^2 + \int \rho\,|\chi|^2\,dy = 0. \quad (2.6)$$

Решение второго уравнения легко выразить через функцию X:

$$S(x, t, h) = \widetilde{S}(X^{-1}(x, t, h),\ t, h),$$

$$\widetilde{S}(z, t, h) = S_0(z) + \int_0^t \Big(\frac{\partial X}{\partial \tau}(z, \tau, h)^2/4 - \\ - \int \rho(X(z, \tau, h), X(y, \tau, h))\,|\chi(y, \tau, h)|^2\,dy\Big)\,d\tau, \quad (2.7)$$

Здесь через $X^{-1}(\cdot,\ t, h)$ обозначена функция, обратная к $X(\cdot,\ t, h)$.

В свою очередь функция X может быть получена как решение уравнения

$$\frac{\partial^2 X(z, t, h)}{\partial t^2} = -\int \frac{\partial \rho}{\partial x}(X(z, t, h), X(y, t, h))\,|\chi(y, t, h)|^2\,dy, \\ X(z, 0, h) = z, \quad \frac{\partial X}{\partial t}(z, 0, h) = \nabla S_0(z). \quad (2.8)$$

Уравнение для функции χ получим из (2.6):

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = ih\widetilde{\Delta}_t\chi, \quad \chi(z, 0, h) = \chi_0(z). \quad (2.9)$$

Оператор $\widetilde{\Delta}_t$ в (2.9) действует по формуле

$$\widetilde{\Delta}_t f(z) = \\ = \sqrt{\frac{DX(z, t, h)}{Dz}} \left[\Delta \left(\frac{f(z)}{\sqrt{\frac{DX(z, t, h)}{Dz}}} \Bigg|_{z=X^{-1}(x, t, h)} \right) \right]_{x=X(z, t, h)}.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Решение* *) $\psi_h(x, t)$ *задачи Коши* (1.1) *на отрезке* $[0, T_0]$, *на котором* $DX/Dz > 0$, *имеет вид*

$$\psi_h(x, t) = \left(\exp\left\{ \frac{i}{h} \widetilde{S}(z, t, h) \right\} \frac{\chi(z, t, h)}{\sqrt{\frac{DX(z, t, h)}{Dz}}} \right)_{z=X^{-1}(x, t, h)},$$

где функции $\widetilde{S}$, X, χ *определяются из* (2.7) — (2.9).

Замечание 2.1. Решение задачи (2.9) регулярно при $h \to 0$ и имеет вид

$$\chi(z, t, h) = \chi_0(z) + (-ih)\chi_1(z, t) + O(h^2),$$

где χ_1 — вещественная функция. Подставляя это разложение в (2.8), получим аналогичное разложение для функции X

$$X(z, t, h) = X_0(z, t) + O(h)^2,$$

где функция X_0 удовлетворяет уравнениям

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 X_0}{\partial t^2} = -\int \frac{\partial \rho}{\partial x}(X_0, X_0(y, t))\chi_0^2(z)\,dz, \\ X_0(z, 0) = z, \qquad \frac{\partial X}{\partial t}(z, 0) = \nabla S_0(z). \end{gathered} \tag{2.10}$$

Следовательно, в силу леммы 2.1 решение задачи (1.1) имеет вид

$$\psi_h(x, t) = \\ = \left[\exp\left\{ \frac{i}{h} \widetilde{S}(z, t, 0) \right\} \left(\frac{\chi_0^2(z)}{\sqrt{\frac{DX_0(z, t)}{Dz}}} \right) \right] \Bigg|_{z=X_0^{-1}(x, t)} + O(h)$$

(подробнее см. § 3 гл. VI).

Замечание 2.2. Уравнения (2.10) являются характеристическими для следующего уравнения Власова,

---

*) Существование решения задачи (1.1) было доказано в § 1 гл. III.

отвечающего задаче (1.1):

$$\frac{\partial F}{\partial t}+2p\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\iint\rho(x,y)F(y,\xi,t)dy\,d\xi=0, \qquad (2.11)$$
$$F(x,p,0)=\chi_0^2(x)\delta(p-\nabla S_0(x)).$$

Решение задачи (2.11) легко выписать явно с помощью функции X_0:

$$F(x,p,t)=\left(\frac{\chi_0^2(z)\,\delta\left(p-\dfrac{\partial X_0}{\partial t}(z,t)\right)}{\dfrac{DX_0(z,t)}{Dz}}\right)_{z=X_0^{-1}(x,t)}.$$

Энтропия задачи (2.11) (см. § 2 гл. I) равна

$$H_0(t)=\iint S(x,t,0)F(x,p,t)\,dx\,dp=\int\tilde{S}(z,t,0)\chi_0^2(z)\,dz.$$

С другой стороны, из формулы леммы 2.1 получим

$$\int(-ih)(\ln\psi_h(x,t))\,|\psi_h(x,t)|^2\,dx=$$
$$=\int\left(\tilde{S}(z,t,h)-ih\ln\chi(z,t,h)+\right.$$
$$\left.+\frac{ih}{2}\ln\frac{DX(z,t,h)}{Dz}\right)\chi^2(z,t,h)\,dz.$$

Следовательно, имеет место следующая формула для энтропии уравнения Власова:

$$H_0(t)=\lim_{h\to0}(-ih)\int\overline{\psi_h(x,t)}\,(\ln\psi_h(x,t))\,\psi_h(x,t)\,dx.$$

§ 3. Асимптотика в целом

В предыдущем параграфе асимптотическое решение задачи (1.1) было построено лишь на отрезке времени $0\leqslant t\leqslant T$, в то время как решения системы (2.10) существуют глобально. Причина такого ограничения заключена в невозможности обратить функцию X при всех $t\geqslant0$. Действительно, якобиан $J(z,t)=DX(z,t)/Dz$ лишь в исключительных случаях может быть отличен от нуля при всех $t\geqslant0$, а, вообще говоря, $J(z,t)=0$ — в некоторые моменты времени t_1, t_2, . . . Соответствующие точки $X(z,t_1)$, $X(z,t_2)$, . . . называются фокальными. Асимптотическое решение в окрестности фокальной точки не имеет вида (1.2), а строится с помощью канонического оператора. Этот оператор позволяет выписать формулу для асимптотического разложения сразу при всех $t \geqslant 0$.

Рассмотрим $(n+1)$-мерное многообразие Λ в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n+2} = \{(x, t; p, p^t); x, p \in \mathbf{R}^n; t, p^t \in \mathbf{R}\}$, задаваемое формулами

$$x = X(z, t), p = P(z, t), p^t = -|P(z, t)|^2 - V_0(X(z, t), t),$$

$$V_0(x, t) = \int \rho(x, X(z, t)) \chi_0^2(z)\, dz, \qquad (3.1)$$

где X, P — решения системы характеристик для уравнения Власова (2.11). Многообразие Λ лагранжево относительно формы $dx \wedge dp + dt \wedge dp^t$ (см. § 2 гл. I).

Пусть $\mathcal{K}_\Lambda^{1/h}$ — канонический оператор на Λ, определенный с точностью до $O(h)$ по мере $d\sigma = dz \wedge dt$ [13, 16]. Глобальное решение задачи (1.1) будем искать в виде

$$\psi_h(x, t) = [\mathcal{K}_\Lambda^{1/h} \chi_0](x, t). \qquad (3.2)$$

По лемме 12.2 гл. V книги [16] найдем

$$V_h(x, t) = \int \rho(x, y) |[\mathcal{K}_\Lambda^{1/h}\chi_0](x, t)|^2\, dy =$$
$$= \int \rho(x, X(z, t)) \chi_0^2(z)\, dz + O(h^2).$$

Таким образом, формула (3.1) для $V_0(x, t)$ имеет место при всех $t \in [0, \infty)$. Подставим теперь $\psi_h(x, t)$ в уравнение (1.1). Используя теорему 11.1 гл. V книги [16], получим

$$\left[-ih\frac{\partial}{\partial t} - h^2\Delta + V_h(x, t)\right](\mathcal{K}_\Lambda^{1/h}\chi_0)(x, t) =$$
$$= (-ih)\left(\mathcal{K}_\Lambda^{1/h}\frac{\partial \chi_0}{\partial t}\right)(x, t) + O(h^2) = O(h^2), \qquad (3.3)$$

так как $\partial\chi_0/\partial t = 0$.

Таким образом, формула (3.2) задает при всех $t \geqslant 0$ асимптотическое решение задачи (1.1), которое удовлетворяет начальным данным (1.1) и уравнению (3.3), причем функция $O(h^2)$ в (3.3) имеет оценку

$$\left(\int \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha O(h^2)\right|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant C_\alpha h^{-|\alpha|}, \qquad |\alpha| = 0, 1, \ldots \qquad (3.4)$$

§ 4. Вычисление средних

Волновая функция ψ_h удовлетворяет задаче

$$-ih\frac{\partial\psi_h}{\partial t}+H(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t)\psi_h=0,$$
$$\psi_h(x,0)=\chi_0(x)\exp\left\{-\frac{i}{h}S_0(x)\right\},$$

где

$$\begin{aligned} H(x,p,t)&=p^2+V_h(x,t),\\ V_h&=(\rho\psi_h,\ \psi_h)_{L^2(\mathbf{R}^n)}. \end{aligned}\tag{4.1}$$

Вычислим асимптотическое разложение V_h при $h\to 0$ с помощью методов § 2 гл. II. Функция плотности

$$g(x,p,t,h)=\psi_h(x,t)\,\overline{\tilde{\psi}_h(p,t)}\,e^{-\frac{i}{h}xp}(2\pi h)^{-n/2},$$

составленная из ψ_h и ее $1/h$-преобразования Фурье $\tilde{\psi}_h$, удовлетворяет уравнению (см. § 1 гл. II)

$$-ih\frac{\partial g}{\partial t}+H\left(\overset{2}{x},p-ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},t\right)g-$$
$$-H\left(x-ih\overset{2}{\frac{\partial}{\partial p}},\overset{1}{p},t\right)g=0\tag{4.2}$$

и позволяет вычислить среднее от любого псевдодифференциального оператора $\hat{f}=f(\overset{2}{x},\overset{1}{p})$:

$$(\psi_h,\hat{f}\psi_h)_{L^2(\mathbf{R}^n)}=\iint\overline{f(x,p)}\,g(x,p,t,h)\,dx\,dp.\tag{4.3}$$

По формуле коммутации с экспонентой [16]

$$f(\overset{2}{x},\overset{1}{p})e^{\frac{i}{h}S_0(x)}\chi_0(x)=e^{\frac{i}{h}S_0(x)}\sum_{k=0}^{N-1}(-ih)^kL_k\left(\overset{2}{x},\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)\chi_0(x)+$$
$$+e^{\frac{i}{h}S_0(x)}(-ih)^N\hat{Q}_N\chi_0(x),\tag{4.4}$$

где

$$L_k(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=k}^{2k}\sum_{|\beta|=0}^{k}\frac{\partial^\alpha f}{\partial p^\alpha}(x,\nabla S_0(x))\,\Phi_{\alpha,\beta}(x)\xi^\beta,$$

$\Phi_{\alpha,\beta}$ — вещественные полиномы от производных функции S_0, $\xi^\beta \equiv \xi_1^{\beta_1} \ldots \xi_n^{\beta_n}$; остаток $\hat{Q}_N$ имеет оценку

$$(\chi_0, \hat{Q}_N \quad \chi_0)_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leqslant \text{const}.$$

Определим обобщенную функцию

$$\gamma_n(x, p) = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k(x, p)(-ih)^k,$$

$$\gamma_k(x, p) = \sum_{|\alpha|=k}^{2k} \sum_{|\beta|=0}^{k} (-1)^{|\alpha|+k} \times \delta^{|\alpha|}(p - \nabla S_0(x)) \Phi_{\alpha,\beta}(x) \chi_0(x) \frac{\partial^\beta \chi_0(x)}{\partial x^\beta}. \tag{4.5}$$

Как показано в § 1 гл. II, среднее $1/h$-псевдодифференциального оператора $\hat{f} = f(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$ на волновой функции ψ_h вычисляется по формуле

$$(\psi_h, \hat{f}\psi_h)_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \iint \overline{f(x, p)}\, r_h(x, p, t)\, dx\, dp + O(h^N), \tag{4.6}$$

где функция r_h является решением следующей задачи Коши:

$$-ih\frac{\partial r_h}{\partial t} + H\left(\overset{2}{x}, p - ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}, t\right) r_h - H\left(x - ih\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial p}, \overset{1}{p}, t\right) r_h = 0, \tag{4.7}$$

$$r_h(x, p, 0) = \gamma_h(x, p).$$

В случае гамильтониана (4.1) r_h удовлетворяет задаче

$$-ih\frac{\partial r_h}{\partial t}(x, p, t) + 2(-ih)p\frac{\partial r_h}{\partial x}(x, p, t) - h^2\Delta_x r_h(x, p, t) + \left(\iint\left[\rho(x, y) - \rho\left(x - ih\frac{\partial}{\partial p}, y\right)\right] \times r_h(y, \xi, t)\, dy\, d\xi\right) r_h(x, p, t) = 0, \tag{4.8}$$

$$r_h(x, p, 0) = \gamma_h(x, p).$$

Асимптотическое решение задачи (4.8) имеет вид

$$r_h = r_0 + (-ih)r_1 + \ldots + (-ih)^{N-1} r_{N-1} + O(h^N), \tag{4.9}$$

где функции $r_0, r_1, \ldots$ определяются из (4.8) стандартным образом.

Для формулировки окончательного результата наших вычислений введем обозначение:

$$L_{m,l}^{(k)}(x, p, t; r) =$$
$$= \sum_{|\alpha|=k-l-m} \frac{1}{\alpha!} \iint \frac{\partial^\alpha \rho}{\partial x^\alpha}(x, y) r_m(y, \xi, t)\, dy\, d\xi \frac{\partial^\alpha r_l(x, p, t)}{\partial p^\alpha},$$
$$M_k(x, p, t; r) = \sum_{l=1}^{k-2} \sum_{m=0}^{k-l-1} L_{m,l}^{(k)} + \sum_{m=0}^{k-2} L_{m,0}^{(k)}, \qquad k \geqslant 2.$$

Л е м м а 4.1. *Коэффициенты r_j из (4.9) удовлетворяют следующей рекуррентной системе уравнений:*

$$\frac{\partial r_0}{\partial t} + 2p \frac{\partial r_0}{\partial x} - \left(\iint \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, y) r_0(y, \xi, t)\, dy\, d\xi \right) \frac{\partial r_0}{\partial p} = 0$$

и при $k \geqslant 2$:

$$\frac{\partial r_{k-1}}{\partial t} + 2p \frac{\partial r_{k-1}}{\partial x} - \left(\iint \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, y) r_0(y, \xi, t)\, dy\, d\xi \right) \frac{\partial r_{k-1}}{\partial p} -$$
$$- \left(\iint \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, y) r_{k-1}(y, \xi, t)\, dy\, d\xi \right) \frac{\partial r_0}{\partial p} + \Delta r_{k-2} - M_k = 0; \quad (4.10)$$

при этом

$$r_j(x, p, 0) = \gamma_j(x, p), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Заметим, что для функции r_0 получается квазилинейное интегро-дифференциальное уравнение типа Власова, исследованное в гл. I.

Введем характеристики для (4.10):

$$\frac{\partial X(z, \omega, t)}{\partial t} = 2P(z, \omega, t), \quad X(z, \omega, 0) = z \in \mathbf{R}^n;$$
$$\frac{\partial P(z, \omega, t)}{\partial t} =$$
$$= \iint \frac{\partial \rho}{\partial x}(X(z, \omega, t), X(z', \omega', t)) \tilde{r}_0(z', \omega', t)\, dz' d\omega' = 0, \quad (4.11)$$
$$P(z, \omega, 0) = \omega \in \mathbf{R}^n;$$
$$\frac{\partial \tilde{r}_0}{\partial t}(z, \omega, t) = 0, \qquad \tilde{r}_0(z, \omega, 0) = \gamma_0(z, \omega).$$

В силу (4.5)

$$\gamma_0(z, \omega) = \chi_0^2(z) \delta(\omega - \nabla S_0(z)).$$

Поэтому система характеристик переходит в задачу Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения в банаховом пространстве $C(\mathbf{R}^{2n})$:

$$\frac{\partial^2 X(z,\omega,t)}{\partial t^2}+2\int\frac{\partial\rho}{\partial x}(X(z,\omega,t),X(z',\nabla S_0(z'),t))\chi_0^2(z')\,dz'=0,$$

$$X(z,\omega,0)=z,\qquad \frac{\partial X}{\partial t}(z,\omega,0)=2\omega. \tag{4.12}$$

Функция r_0 определяется через решение (4.12) следующим образом:

$$r_0(x,p,t)=\chi_0^2(z(x,p,t))\delta(\omega(x,p,t)-\\ -\nabla S_0(z(x,p,t))), \tag{4.13}$$

где $\{z(x,p,t),\ \omega(x,p,t)\}$ — решение уравнений

$$X(z,\omega,t)=x,\quad P(z,\omega,t)=p.$$

Остальные коэффициенты r_k, $k=1,2,\ldots$, вычисляются из линейных уравнений (4.10):

$$r_k(x,p,t)=\tilde r_k(z(x,p,t),\ \omega(x,p,t),\ t),$$

$$\tilde r_k(z,\omega,t)=\gamma_k(z,\omega)+\int_0^t M_{k+1}(X(z,\omega,\tau),P(z,\omega,\tau),\tau;r)\,d\tau-\\ -\int_0^t(\Delta_x r_{k-1})(X(z,\omega,\tau),P(z,\omega,\tau)),\tau)\,d\tau+\\ +\int_0^t d\tau\iint\frac{\partial\rho}{\partial x}(X(z,\omega,\tau),X(z',\omega',\tau))\tilde r_k(z',\omega',\tau)\,dz'd\omega'\times\\ \times\frac{\partial r_0}{\partial p}(X(z,\omega,t),P(z,\omega,t),t). \tag{4.14}$$

Таким образом, функция $\tilde r_k$ удовлетворяет линейному уравнению вида

$$\tilde r_k=f_0+I(\tilde r_k),$$

где f_0 — заданная функция, а I — интегральный оператор типа оператора Вольтерра. Отметим также, что в (4.14) интегралы по «импульсам» ω' берутся явно за счет δ-функции в начальных условиях для r_j (см. (4.5)).

Лемма 4.2. *Потенциал V_h в формуле (4.1) имеет асимптотическое разложение*

$$V_h(x,t)=\sum_{k=0}^{N-1}(-ih)^k V_k(x,t)+O(h^N), \qquad (4.15)$$

где $O(h^N)$ — гладкая финитная функция по $x\in\mathbf{R}^n$, равномерно ограниченная величиной $h^N\cdot\mathrm{const}$. При этом

$$V_0(x,t)=\int\rho(x,X(z,\nabla S_0(z),t))\chi_0^2(z)\,dz,$$

$$V_1(x,t)\equiv 0,$$

$$V_k(x,t)=\iint\rho(x,X(z,\omega,t))\tilde r_k(z,\omega,t)\,dz\,d\omega,\quad k\geqslant 2.$$

§ 5. Решение уравнений с применением операторных методов

Формула (4.15) позволяет вычислить асимптотику среднего $(\rho\psi,\psi)$ на решении ψ задачи Коши (1.1). Таким образом, задача (1.1) сведена к линейной.

При малых $t\geqslant 0$ решение получившейся линейной задачи будем искать в виде

$$\psi_h(x,t)=\hat T(t)\,e^{\frac{i}{h}S_0(x)}\chi_0(x), \qquad (5.1)$$

где

$$\hat T(t)=\varphi(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t,h)\exp\left\{\frac{i}{h}S(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t)\right\},$$

S — вещественная функция, $S,\ \varphi\in C_0^\infty$, функция φ регулярно зависит от h:

$$\varphi(x,p,t,h)=\sum_{j=0}^{N-1}(-ih)^j\varphi_j(x,p,t). \qquad (5.2)$$

Для того чтобы функция (5.1) удовлетворяла уравнению (1.1), достаточно, чтобы

$$-ih\frac{d\hat T(t)}{dt}+H(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t)\hat T(t)=0. \qquad (5.3)$$

По формуле композиции [16]

$$H(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t)\hat T(t)=Q(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t,h)\,e^{\frac{i}{h}S(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t)},$$

где

$$Q(x, p, t, h) =$$

$$= e^{-\frac{i}{h} S(x, p, t)} H\left(\overset{2}{x}, p - ih \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t\right) e^{\frac{i}{h} S(x, p, t)} \varphi(x, p, t, h) =$$

$$= H\left(\overset{2}{x}, p + \nabla S \overset{1}{-} ih \frac{\partial}{\partial x}, t\right) \varphi(x, p, t, h).$$

Поэтому уравнение (5.3) выполняется, если

$$-ih \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) \varphi + Q = 0. \tag{5.4}$$

Используя формулу коммутации с экспонентой [16] и явный вид функции Гамильтона $H = p^2 + V_h$, получим из (5.4)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + (p + \nabla S)^2 + V_h\right) \varphi + (-ih)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2p \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (\Delta_x S) \varphi\right) + (-ih)^2 \Delta \varphi = 0. \tag{5.5}$$

Введем начальные условия:

$$S(x, p, 0) = 0, \quad \varphi(x, p, 0, h) = e_0(x, p), \tag{5.6}$$

где $e_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ — любая финитная функция, тождественно равная единице в окрестности компактного множества Q в $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_p^n$:

$$Q = \{(x, p) \mid p = \nabla S_0(x),\ x \in \operatorname{supp} \chi_0\}.$$

Уравнения (5.5), (5.6) решаются по схеме, приведенной в [13]. Для функции S получаем уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (p + \nabla S)^2 + V_0(x, t) = 0, \qquad S(x, p, 0) = 0.$$

Система характеристик этой задачи имеет вид (4.11). Решение $S(x, p, t)$ записывается явной формулой

$$S(x, p, t) = p(z - x) + \int_0^t [P^2(z, p, \tau) - V_0(X(z, p, \tau), \tau)]\, d\tau, \tag{5.7}$$

где $z = z(x, p, t)$ — решение уравнения

$$x = X(z, p, t).$$

Отметим, что

$$z(x, p, t) = x + \frac{\partial S}{\partial p}(x, p, t). \tag{5.8}$$

Для коэффициентов разложения функции φ_j по степеням $(-ih)$ получим из (5.5) систему уравнений

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + 2p\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + (\Delta_x S)\varphi_0 + V_1\varphi_0 = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + 2p\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + (\Delta_x S)\varphi_j + \Delta\varphi_{j-1} + \sum_{k=0}^{j} V_{k+1}\varphi_{j-k} \qquad (j \geqslant 1),$$

$$\varphi_0(x, p, 0) = e_0(x, p), \quad \varphi_j(x, p, 0) = 0 \qquad (j \geqslant 1)$$

(функции V_k берутся из (4.15)).

Как было показано в гл. I, система такого вида легко решается с помощью характеристик X, P. Пусть

$$\varphi_j(x, p, t) = \frac{u_j(z(x, p, t), p, t)}{\sqrt{J(z(x, p, t), p, t)}}, \qquad j \geqslant 0, \tag{5.9}$$

где

$$J(z, p, t) = \frac{DX(z, p, t)}{Dz} = \left[\det\left\| \delta_{ij} + \frac{\partial^2 S(X(z, p, t), p, t)}{\partial x_i \partial p_j}\right\|\right]^{-1}. \tag{5.10}$$

Время t считаем малым, так что $J > 0$. Функции u_j определяются из следующей системы:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - V_1 u_0 = 0, \qquad u_0(z, p, 0) = e_0(z, p),$$

$$(5.11)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \widetilde{\Delta} u_{j-1} + \sum_{k=0}^{j} V_{k+1}u_{j-k} = 0, \; u_j(z, p, 0) = 0 \qquad (j \geqslant 1),$$

где

$$\widetilde{\Delta} u(z, p, t) = \sqrt{J(z, p, t)}\left[\Delta_x \frac{u(z(x, p, t), p, t)}{\sqrt{J(z(x, p, t), p, t)}}\right]\Bigg|_{x = X(z, p, t)}.$$

Отсюда найдем все функции u_j; например,

$$u_0(z, p, t) = e_0(z, p)\exp\left\{-\int_0^t V_1(X(z, p, \tau), \tau)\, d\tau\right\}.$$

Формулы (5.7), (5.9), (5.11) полностью определяют асимптотическое решение ψ_h. Сформулируем полученный результат. Прежде всего, в силу теоремы 2.2 гл. I существует $T_0 > 0$ такое, что при $0 \leqslant t \leqslant T_0$, $(z, \omega) \in \operatorname{supp} e_0$ система уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial X(z,\omega,t)}{\partial t} = 2P(z,\omega,t), \qquad X(z,\omega,0) = z, \\
\frac{\partial P(z,\omega,t)}{\partial t} = \int \frac{\partial \rho}{\partial x}(X(z,\omega,t), X(y,\nabla S_0(y),t)\chi_0^2(y)\,dy, \\
P(z,\omega,0) = \omega
\end{gathered} \tag{5.12}$$

имеет гладкое решение (X, P), причем $\frac{DX(z,\omega,t)}{Dz} > 0$. На отрезке $0 \leqslant t \leqslant T_0$ построим функцию

$$\psi_h(x,t) = \left[e^{\frac{i}{h}S(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t)}\left(\det\left\|\delta_{ij} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial p_j}(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t)\right\|\right)^{1/2} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{k=0}^{N-1}(-ih)^k u_k\left(\overset{2}{x} + \frac{\partial S}{\partial p}(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t),\overset{1}{p},t\right)\right] e^{\frac{i}{h}S_0(x)}\chi_0(x), \tag{5.13}$$

где функция $S(x, p, t)$ определяется по формуле

$$S(x,p,t) = \left[p(z-x) + \int_0^t |P(z,p,\tau)|^2\,d\tau - \int_0^t d\tau \int \rho(X(z,p,\tau),\right.$$
$$\left. X(y,\nabla S_0(y),\tau)\chi_0^2(y)\,dy\right]\bigg|_{z=z(x,p,t)},$$

причем $z(x,p,t) = x + \frac{\partial S}{\partial p}(x,p,t)$ есть решение уравнения

$$x = X(z, p, t).$$

Пусть в формуле (5.13) $u_0(x, p, t) \equiv e_0(x, p)$, а функции u_k при $k \geqslant 1$ определяются из рекуррентной системы (5.11).

Лемма 5.1. *Функция ψ_h из* (5.13) *является асимптотическим решением задачи* (1.1):

$$\psi_h(x,0) = e^{\frac{i}{h}S_0(x)}\chi_0(x) + O(h^\infty),$$
$$-ih\frac{\partial \psi_h(x,t)}{\partial t} - h^2\Delta\psi_h(x,t) + \psi_h(x,t)\int \rho(x,y)|\psi_h(y,t)|^2 dy =$$
$$= h^{N+1} f_N(x,t,h) \tag{5.14}$$

где через $O(h^\infty)$ обозначена гладкая функция, имеющая следующую оценку для любых $k = 1, 2, \ldots$ и $|\alpha| = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha O(h^\infty)\right| \leqslant C_{\alpha, k} h^k.$$

Правая часть f_N в (5.14) — это некоторая гладкая функция, имеющая оценку (3.4).

Замечание. Применяя метод стационарной фазы, легко доказать, что функция (5.13), построенная с помощью операторного метода, совпадает в рассматриваемом частном случае по mod $O(h)$ с найденной ранее в § 2 асимптотикой. Преимущество представления (5.13) состоит в том, что оно почти без изменений переносится на более сложные задачи, в которых начальные данные не имеют такого простого вида, как в (1.1) (см. подробнее следующую главу).

Асимптотическое решение сохраняет вид (5.13) на отрезке времени, где якобиан $J > 0$. В окрестности фокальных точек формула (5.13) неприменима.

Для того чтобы написать глобальную формулу, рассмотрим семейство лагранжевых многообразий

$$\Lambda^n_{\omega,t} = \{x = X(z, \omega, t);\ p = P(z, \omega, t) - \omega;\ z \in \mathbf{R}^n\}$$

и канонический оператор $\mathcal{K}^{1/h}_{\omega,t}$ на нем. Здесь X, P — решение системы (5.12) характеристик для уравнения Власова.

Повторяя построения § 3, можно доказать, что функция

$$\psi_h = \left[\mathcal{K}^{1/h}_{\omega,t} \sum_{k=0}^{N-1} (-ih)^k u_k\right](\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)\, e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \chi_0(x),$$

где $u_0 = e_0$, u_1, u_2, ... определяются из системы уравнений типа (5.11), является асимптотическим решением задачи (1.1) по mod $O(h^N)$.

Подробные вычисления будут продемонстрированы в следующей главе на примере системы уравнений Хартри.

ГЛАВА V

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С УНИТАРНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

§ 1. Уравнения Хартри

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему из m частиц с волновыми функциями

$$\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(m)}.$$

Пусть взаимодействие описывается потенциалом

$$V_h(x, t) = \{V_h^{(k)}(x, t), \qquad k = 1, \ldots, m\},$$

причем

$$V_h^{(k)}(x, t) = \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbf{R}^n} f_{kj}(x, y, t) \, | \, \psi^{(j)}(y, t) \, |^2 \, dy, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

где $f_{kj}(\cdot, \cdot, t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ — некоторые гладкие вещественные функции.

Пусть задана функция Гамильтона

$$F(x, p, t, V, h) = \sum_{k=0}^{l} (-ih)^k F_k(x, p, t, V), \quad h \in (0, 1) \qquad (1.1)$$

класса $S^\infty(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_p^n \times \mathbf{R}_V^m)$*), гладко зависящая от $t \in \mathbf{R}$. Пусть $F_0(x, p, t, V)$ — вещественная функция.

---

*) Класс $S^\infty(\mathbf{R}^m)$ состоит из комплексных функций, все производные которых растут не быстрее одной и той же степени $|x|$.

Рассмотрим следующую нелинейную задачу Коши (уравнения Хартри):

$$
\begin{gathered}
-ih\frac{\partial\psi^{(j)}}{\partial t}+F(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t,V_h(\overset{2}{x},t),h)\psi^{(j)}=0,\\
\psi^{(j)}(x,0)=\chi^{(j)}(x,h),\quad j=1,\ldots,m;\quad \overset{1}{p}=-ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}.
\end{gathered}\tag{1.2}
$$

Здесь начальные данные $\chi^{(j)}$ удовлетворяют условиям:

а) финитности: функции $\chi^{(j)}$ и их $1/h$-преобразования Фурье со всеми производными имеют порядок $O(h^\infty)$ вне компактной области, т. е. существует вещественная функция $e_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ такая, что

$$
\chi^{(j)}(x,h)=e_0(\overset{2}{x},\overset{1}{p})\chi^{(j)}(x,h)+O(h^\infty); \tag{1.3}
$$

б) предельности: для любого символа $f \in S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ выполняется равенство

$$
\begin{gathered}
\int\overline{\chi^{(j)}(x,h)}\,f(\overset{2}{x},\overset{1}{p})\chi^{(j)}(x,h)\,dx=\\
=\sum_{k=0}^{N}(-ih)^k\iint\rho_k^{(j)}(x,p)f(x,p)\,dp+O(h^{N+1}),
\end{gathered}\tag{1.4}
$$

где $\rho_k^{(j)}$ — некоторые обобщенные функции с компактными носителями, причем $\rho_0^{(j)}$ — вещественные; число N определяет точность, с которой мы будем решать задачу (1.2).

2. Вычисление средних. Будем искать асимптотику при $h\to 0$ решения задачи (1.2). Прежде всего найдем разложение потенциала V_h в асимптотический степенной ряд по h. Точно так же, как это было сделано в § 4 гл. IV, получим следующее утверждение:

Лемма 1.1. *Справедлива формула*

$$
V_h^{(k)}(x,t)=\sum_{s=0}^{N}(-ih)^sV_s^{(k)}(x,t)+O(h^{N+1}), \tag{1.5}
$$

где

$$
\operatorname{Re}V_1^{(k)}=0,
$$

$$
V_s^{(k)}(x,t)=\sum_{j=1}^{m}\iint f_{kj}(x,y,t)\,r_s^{(j)}(y,p,t)\,dy\,dp,
$$

причем ряд

$$\sum_{s=0}^{N}(-ih)^s r_s^{(j)}(x,p,t)$$

является асимптотическим разложением при $h \to 0$ *решения* $r^{(j)}(x, p, t, h)$ *задачи Коши*

$$-ih\frac{\partial r^{(j)}}{\partial t}+F\left(\overset{2}{x}, p-ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}, t, V_h(\overset{2}{x}, t), h\right)r^{(j)}-$$

$$-\bar{F}\left(x-ih\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial p}, \overset{1}{p}, t, V_h\left(x-ih\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial p}, t\right), h\right)r^{(j)}=0,$$

$$r^{(j)}(x,p,0,h)=\sum_{k=0}^{N}(-ih)^k\rho_k^{(j)}(x,p).$$

Следствие. *Функции* $r_0^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, m)$ *удовлетворяют системе уравнений Власова*

$$\frac{\partial r_0^{(j)}}{\partial t}+\frac{\partial r_0^{(j)}}{\partial x}\cdot\frac{\partial F_0}{\partial p}-\frac{\partial r_0^{(j)}}{\partial p}\left(\frac{\partial F_0}{\partial x}+\frac{\partial F_0}{\partial V}\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)+$$

$$+(2\operatorname{Re}F_1-Q)r_0^{(j)}=0, \tag{1.6}$$

$$r_0^{(j)}(x,p,0)=\rho_0^{(j)}(x,p),$$

где

$$Q(x,p,t,V_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 F_0(x,p,t,V_0)}{\partial x_i\partial p_i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 F_0(x,p,t,V_0)}{\partial p_i\partial V^{(k)}}\cdot\frac{\partial V_0^{(k)}(x,t)}{\partial x_i}; \tag{1.7}$$

потенциал V_0 *зависит от* $r_0^{(j)}$:

$$V_0^{(k)}(x,t)=\sum_{j=1}^{m}\iint f_{kj}(x,y,t)r_0^{(j)}(y,p,t)\,dy\,dp, \quad k=1,\ldots,m;$$

а функции Q, F_1, $\partial F_0/\partial p$, $\partial F_0/\partial x$, $\partial F_0/\partial V$ *в* (1.6) *рассматриваются в точке* $(x, p, t, V_0(x, t))$.

Аналогично вычисляются и остальные функции $r_s^{(j)}$, $s = 1, \ldots, N-1$ (ср. § 4 гл. IV).

Как было показано в § 2 гл. I, система (1.6) может быть решена с помощью характеристик:

$$\begin{gathered}\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial F_0}{\partial p},\ X(z,\omega,0)=z\in\mathbf{R}^n,\\ \frac{\partial P}{\partial t}=-\frac{\partial F_0}{\partial x}-\left(\frac{\partial F_0}{\partial V}\right)\frac{\partial\tilde{V}_0}{\partial x},\ P(z,\omega,0)=\omega\in\mathbf{R}^n,\\ \frac{\partial\tilde{r}_0^{(j)}}{\partial t}+Q\tilde{r}_0^{(j)}=0,\ \tilde{r}_0^{(j)}(z,\ \omega,\ 0)=\rho_0^{(j)}(z,\omega),\end{gathered}\tag{1.8}$$

где

$$\tilde{V}_0=\{\tilde{V}_0^{(1)},\ldots,\tilde{V}_0^{(m)}\},$$

$$\tilde{V}_0^{(k)}(x,\ t)\overset{\text{def}}{=\!=}\sum_{j=1}^{m}\iint f_{kj}(x,X(z',\omega',t))\,\tilde{r}_0^{(j)}(z',\omega',t)\,dz'\,d\omega',$$

а у функций Q, $\partial F_0/\partial x$, $\partial F_0/\partial p$ опущены аргументы (X, P, t, $\tilde{V}_0$ (X, t)).

Система (1.8) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве непрерывных вектор-функций $\{X_1,\ \ldots,\ X_n;\ P_1,\ \ldots,\ P_n;\ \tilde{r}_0^{(1)},\ \ldots,\ \tilde{r}_0^{(m)}\}$. Достаточно решить (1.8) на компактном множестве начальных данных (z, ω), содержащем внутри себя носители функций $\rho_0^{(j)}$ (z, ω) и e_0 (z, ω) (см. (1.3), (1.4)). Пусть такое решение существует при любом $t\in\mathbf{R}$ (см. теорему 2.2 гл. I и замечание к ней). Оно задает каноническое преобразование

$$g_t:\quad (z,\ \omega)\to(X\ (z,\ \omega,\ t),\ \ P\ (z,\ \omega,\ t)).$$

Пусть z (x, p, t), ω (x, p, t) — функции, задающие обратное преобразование g_t^{-1}. Тогда

$$r_0^{(j)}\ (x,\ p,\ t)=\tilde{r}_0^{(j)}\ (z\ (x,\ p,\ t),\ \ \omega\ (x,\ p,\ t),\ t).$$

3. Асимптотическое решение. Определив все коэффициенты разложения (1.5) потенциала V_h, мы сведем задачу (1.2) к распадающейся системе линейных уравнений. Пусть

$$\Lambda_{\omega,t}^n=\{(x,\ p)\mid x=X\ (z,\ \omega,\ t),\qquad p=P\ (z,\ \omega,\ t)-\omega;\quad z\in\mathbf{R}^n\}$$

— семейство лагранжевых многообразий в $\mathbf{R}_x^n\times\mathbf{R}_p^n$. Построим по $\operatorname{mod} h^N$ канонический оператор $\mathcal{K}_{\omega,t}^{1/h}$ на $\Lambda_{\omega,t}^n$

[16]. Пусть

$$\psi_h^{(j)}(x,t) = [\mathcal{K}^{1/h}_{\omega,t}\varphi](\overset{2}{x},\overset{1}{p},t)\chi^{(j)}(x,h), \tag{1.9}$$

$$\varphi(z,\omega,t,h) = \sum_{k=0}^{N}(-ih)^k\varphi_k(z,\omega,t), \tag{1.10}$$

$$\varphi_0(z,\omega,0) = e_0(z,\omega),\ \varphi_k(z,\omega,0) = 0 \quad (k \geqslant 1). \tag{1.11}$$

Из (1.9) — (1.11) следует, что при $t = 0$

$$\psi_h^{(j)}(x,0) = e_0(\overset{2}{x},\overset{1}{p})\chi^{(j)}(x,h) = \chi^{(j)}(x,h) + O(h^\infty)$$

(см. (1.3)), т. е. функция (1.9) удовлетворяет начальным условиям (1.2) с точностью до $O(h^\infty)$.

Подставим (1.9) в уравнение (1.2). Используя формулу коммутации $1/h$-псевдодифференциального оператора с каноническим оператором (см. [16], гл. V), а также разложения (1.1), (1.5), получим

$$\begin{gathered}\left[-ih\frac{\partial}{\partial t} + F(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t,V_h(\overset{2}{x},t),h)\right]\psi_h^{(j)}(x,t) = \\ = (-ih)[\mathcal{K}^{1/h}_{\omega,t}\mathcal{P}\varphi](\overset{2}{x},\overset{1}{p},t)\chi^{(j)}(x,h) + (-ih)^{N+1}\mathcal{R}_{N,j}(x,t,h),\end{gathered} \tag{1.12}$$

где оператор $\mathcal{P}$ имеет вид

$$\begin{gathered}\mathcal{P} = \sum_{k=0}^{N}(-ih)^k\mathcal{P}_k, \\ \mathcal{P}_0 = \frac{\partial}{\partial t} + F_1(X,P,t,V_0(X,t)) - \frac{1}{2}Q(X,P,t,V_0(X,t));\end{gathered} \tag{1.13}$$

$\mathcal{P}_k$ при $k \geqslant 1$ есть дифференциальный оператор на $\Lambda^n_{\omega,t}$ с гладкими, не зависящими от h коэффициентами.

Остаток $\mathcal{R}_{N,j}$ в формуле (1.12) имеет следующую оценку в норме пространства Соболева (при $k = 0, 1, 2, \ldots$):

$$\|\mathcal{R}_{N,j}(\cdot,t,h)\|_{W_2^k} \leqslant h^{-k}C_k(t). \tag{1.14}$$

Из формул (1.12) — (1.14) вытекает следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть функции φ_k удовлетворяют начальным условиям* (1.11) *и системе уравнений* *)

$$\begin{gathered}\mathcal{P}_0\varphi_0 = 0, \\ \mathcal{P}_0\varphi_k + \sum_{j=1}^{k}\mathcal{P}_j\varphi_{k-j} = 0,\quad k = 1,\ldots,N.\end{gathered} \tag{1.15}$$

*) Учитывая явный вид (1.13) оператора $\mathcal{P}_0$, систему (1.15), (1.11) легко решить.

Тогда функция

$$\psi_h^{(j)}(x, t) = \left[\mathscr{K}_{\omega, t}^{1/h} \sum_{k=0}^{N} (-ih)^k \varphi_k\right](\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)\, \chi^{(j)}(x, h)$$

является асимптотическим решением системы уравнений Хартри, т. е.

$$\left[-ih\frac{\partial}{\partial t} + F(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, V_h(\overset{2}{x}, t), h)\right]\psi_h^j(x, t) = \\ = (-ih)^{N+1}\mathscr{R}_{N, j}^{(1)}(x, t, h),$$

$$\psi_h^j(x, 0) = \chi^{(j)}(x, h) + O(h^\infty),$$

где остаток $\mathscr{R}_{N,j}^{(1)}$ *удовлетворяет оценке* (1.14).

§ 2. Температурные уравнения Хартри

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечномерное обобщение задачи Коши (1.2). Пусть $\hat{H} = -h^2\Delta + U(x)$ — оператор Шредингера $L^2(\mathbf{R}^n)$ с гладким вещественным потенциалом U, причем функция $U(x)$ достаточно сильно растет при $|x| \to \infty$, так, что спектр $\hat{H}$ дискретен

$$E_1(h) < E_2(h) < \ldots < E_j(h) < \ldots$$

и регулярен при $h \to 0$:

$$\sup_{0 \leqslant h < 1} E_j(h) < \infty,$$

оператор $e^{-t\hat{H}}$ и все его коммутаторы с x и $-i\partial/\partial x$ при любом $t > 0$ являются операторами Гильберта — Шмидта в $L^2(\mathbf{R}^n)$, а собственные функции $\chi_j = \chi_j(x, h)$ оператора $\hat{H}$:

$$\hat{H}\chi_j = E_j\chi_j, \quad j = 1, 2, \ldots$$

и их преобразования Фурье $\tilde{\chi}_j(p, h)$ со всеми производными имеют по mod $O(h^\infty)$ носители, ограниченные в $\mathbf{R}^n$ равномерно по j (см. условие а) § 1).

Обозначим

$$\sigma(h) = \sum_{j=1}^{\infty} \exp\{-\beta E_j(h)\}, \quad \beta = \frac{1}{RT} = \text{const} > 0$$

(R — постоянная Больцмана, T — температура). Сходимость и асимптотика ряда $\sigma(h)$ будут получены ниже.

Рассмотрим бесконечный набор волновых функций

$$\{\psi_1(x, t, h), \quad \psi_2(x, t, h), \ \ldots\}$$

и построим набор потенциалов

$$\begin{gathered} V_h(x, t) = \{V_h^{(k)}(x, t), \ k = 1, 2, \ldots\}, \\ V_h^{(k)}(x, t) = \frac{1}{\sigma(h)} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\beta E_j(h)} \int L_k(x, y, t) \, |\psi_j(y, t, h)|^2 dy, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $L_k \in S^\infty$ равномерно по $k = 1, 2, \ldots$; функции L_k — вещественные.

Обозначим через l^∞ пространство вещественных последовательностей $v = \{v_n\}$ с нормой

$$\|v\|_\infty = \sup_n |v_n|.$$

Предположим, что

$$F(x, p, t, h, V) = \sum_{k=0}^{l} (-ih)^k F_k(x, p, t, V), \tag{2.2}$$

где $x, p \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$, $V \in l^\infty$, $h \in (0, 1)$, F_0 — вещественная функция; для любых мультииндексов α, β и $\gamma = (\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_s})$

$$\begin{gathered} \sum_{i_1, \ldots, i_s=0}^{\infty} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial V}\right)^\gamma F \right| \leqslant \\ \leqslant C_{\alpha, \beta, \gamma}(t) (1 + |x|)^{r_1} (1 + |p|)^{r_2} (1 + \|V\|_\infty)^{r_3}, \\ j = 1, 2, \ldots, l. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Температурными уравнениями Хартри называется [23] следующая нелинейная задача Коши:

$$\begin{gathered} -ih \frac{\partial \psi_j}{\partial t} + F(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t; V_h(\overset{2}{x}, t, h)) \psi_j = 0, \\ \psi_j(x, 0, h) = \chi_j(x, h), \qquad j = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{2.4}$$

где вектор-функция V_h зависит от ψ по формулам (2.1).

Нашей задачей будет построение асимптотического (при $h \to 0$) решения уравнений (2.4).

Будем искать решение (2.4) в виде

$$\psi_j(x,t,h) = e^{\frac{\beta}{2}E_j(h)} G_h(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)\chi_j(x,h), \tag{2.5}$$

где

$$G_h(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t) = R_h(\overset{3}{x}, \overset{1}{p}, t)\exp\left\{-\frac{\beta}{2}\overset{2}{\hat{H}}\right\}. \tag{2.6}$$

Подставив функции (2.5) в формулу (2.1), получим

$$V_h^{(k)}(x,t) = \frac{1}{\sigma(h)}\sum_{j=1}^{\infty}(\hat{L}_k\hat{G}_h\chi_j, \hat{G}_h\chi_j)_{L^2}.$$

Поскольку система $\{\chi_j\}$ образует базис в $L^2(\mathbf{R}^n)$, то для любых $1/h$-псевдодифференциальных операторов $\hat{f} = f(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$ и $\hat{g} = g(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$ с достаточно быстро убывающими символами справедлива формула для следа $\mathrm{tr}\,(\hat{f}\hat{g}^*)$

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\hat{f}\chi_j, \hat{g}\chi_j)_{L^2} = \frac{1}{(2\pi h)^n}\iint f(x, p)\,\overline{g(x, p)}\,dx\,dp.$$

Как будет показано ниже, символ G_h быстро убывает по (x, p), и поэтому

$$V_h^{(k)}(x,t) = \frac{1}{\sigma(h)(2\pi h)^n}\iint L_k(x, y, t)\,|G_h(y, \xi, t)|^2\,dy\,d\xi. \tag{2.7}$$

Для того чтобы функция ψ_j из (2.5) удовлетворяла уравнению (2.4), достаточно потребовать, чтобы

$$-ih\frac{\partial G_h}{\partial t}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t) + F(\overset{4}{x}, \overset{3}{p}, t, V_h(\overset{4}{x}, t), h)\,G_h(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t) = 0.$$

Используя формулу для символа композиции двух $1/h$-псевдодифференциальных операторов ([16], стр. 340), получим уравнение в символах

$$-ih\frac{\partial G_h}{\partial t}(x,\omega,t) + F(\overset{2}{x}, \omega + \overset{1}{p}, t, V_h(\overset{2}{x}, t))\,G_h(x, \omega, t) = 0, \tag{2.8}$$

где V_h зависит от G_h по формуле (2.7); $\omega \in \mathbf{R}^n$.

Выберем начальные условия для G_h. Положим

$$R_h(x, p, 0) = e_0(x, p),$$

где $e_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, причем

$$e^{-\frac{\beta}{2}\overset{2}{\hat{H}}} e_0(\overset{3}{x}, \overset{1}{p})\chi_j = e^{-\frac{\beta}{2}E_j}(\chi_j + O(h^\infty)), \quad j = 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$
$$\|O(h^\infty)\|_{L^2} \leqslant h^k C_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Такая функция e_0 найдется в силу условий, наложенных на оператор $\hat{H}$.

Из (2.5), (2.6), (2.9) следует, что

$$\psi_j(x, 0, h) = \chi_j(x, h) + O(h^\infty), \tag{2.10}$$

так что начальные условия на ψ_j удовлетворяются с точностью до $O(h^\infty)$.

2. Вычисление средних. Рассмотрим символ T_h оператора $\exp\left\{-\frac{\beta}{2}\hat{H}\right\}$, т. е.

$$T_h(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial}/\partial x) = \exp\left\{-\frac{\beta}{2}\hat{H}\right\}.$$

В силу условий, наложенных на оператор $\hat{H}$, символ T_h и его производные принадлежат пространству $L^2(\mathbf{R}^{2n})$. По формуле для символа сложной функции ([16], стр. 340) получим

$$T_h(x, \omega) = \exp\left\{-\frac{\beta}{2}\hat{H}_\omega\right\} 1,$$

где $\hat{H}_\omega = |\omega - ih\partial/\partial x|^2 + U(x)$. Далее из формулы для сложной функции ([16], стр. 40) следует асимптотическое разложение

$$T_h(x, \omega) = \exp\left\{-\frac{\beta}{2}H(x, \omega)\right\} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{N-1}(-ih)^k f_k(x, \omega) + O(h^N), \tag{2.11}$$

где функция $\frac{1}{h^N}O(h^N)$ и все ее производные принадлежат $L^2(\mathbf{R}^{2n})$ и ограничены при $h \to 0$, а коэффициенты f_k могут быть явно вычислены:

$$f_0(x, \omega) = 1,$$
$$f_1(x, \omega) = \frac{\beta^2}{4}\frac{\partial U(x)}{\partial x}\omega, \tag{2.12}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Полагая в (2.7) $L_k \equiv 1$, $t = 0$, получим

$$\sigma(h) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \iint |T_h(\boldsymbol{x}, \omega)|^2 \, dx \, d\omega. \tag{2.13}$$

Теперь мы в состоянии вычислить потенциалы $V_h^{(k)}$. Из формул (2.8), (2.12) и § 2 гл. II вытекает, что

$$\iint L_k(x, t, y) \, |G_h(y, \xi, t)|^2 \, dy \, d\xi =$$
$$= \sum_{j=0}^{N-1} (-ih)^j \iiint L_k(x, y, t) \, r_j(y, \xi, \omega, t) \, dy \, d\xi \, d\omega + O(h^N), \tag{2.14}$$

где ряд

$$\sum_j (-ih)^j r_j(x, p, \omega, t)$$

является асимптотическим разложением решения $r(x, p, \omega, t, h)$ уравнения

$$-ih\frac{\partial r}{\partial t} + F\left(\overset{2}{x}, p - ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t, V_h(\overset{2}{x}, t), h\right) r -$$
$$- \bar{F}\left(x - ih\overset{2}{\frac{\partial}{\partial p}}, \overset{1}{p}, t, V_h\left(x - ih\overset{2}{\frac{\partial}{\partial p}}, t\right), h\right) r = 0, \tag{2.15}$$

причем

$$r_j(x, p, \omega, 0) = \sum_{s=0}^{j} \sum_{m=0}^{s} \frac{(-1)^s \exp\{-\beta H(x, \omega)\}}{s!} \delta^{(s)}(p - \omega) \times$$
$$\times f_{j-s-m}(x, \omega) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\beta}{2}\frac{\partial H}{\partial x}(x, \omega)\right)^s f_m(x, \omega). \tag{2.16}$$

За счет интеграла по $d\omega$ в (2.14) достаточно учесть лишь слагаемые с индексом $s = 0$ в (2.16). Таким образом, начальные условия для r_j примут вид

$$r_j(x, p, \omega, 0) = \exp\{-\beta H(x, \omega)\} f_j(x, \omega)^2 \delta(p - \omega). \tag{2.17}$$

Так же, как и в гл. IV, для функций r_j получим из (2.15) рекуррентную систему уравнений. Уравнение для r_j при $j \geqslant 1$ сводится к линейному интегральному уравнению типа Вольтерра (см. § 4 гл. IV), а для r_0 получаем уравнение Власова

$$\frac{\partial r_0}{\partial t}+\frac{\partial r_0}{\partial x}\frac{\partial F_0}{\partial p}-\frac{\partial r_0}{\partial p}\left(\frac{\partial F_0}{\partial x}-\frac{\partial F_0}{\partial V}\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)+$$
$$+\left[2\operatorname{Re}F_1-\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial x\,\partial p}+\frac{\partial^2 F_0}{\partial p\,\partial V}\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)\right]r_0=0, \quad (2.18)$$
$$r_0(x,p,\omega,0)=\exp\{-\beta H(x,\omega)\}\,\delta(p-\omega).$$

Здесь функции F_0, F_1 берутся в точке $(x,\ p,\ t;\ V_0(x,\ t))$, а потенциал V_0 равен

$$V_0^{(k)}(x,\ t)=\frac{1}{\sigma_0}\iiint L_k(x,y,t)\,r_0(y,\xi,\omega,t)\,dy\,d\xi\,d\omega,$$
$$\sigma_0=\iint\exp\{-\beta H(x,\omega)\}\,dx\,d\omega$$

(последняя формула для σ_0 следует из (2.11), (2.13)).

Как известно (§ 2 гл. I), уравнение (2.18) решается с помощью системы характеристик

$$\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial F_0}{\partial p},\ \frac{\partial P}{\partial t}=-\frac{\partial F_0}{\partial x}-\frac{\partial F_0}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x},$$
$$\frac{\partial\tilde r_0}{\partial t}+\left[2\operatorname{Re}F_1-\frac{\partial^2 F_0}{\partial x\,\partial p}-\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial V}\frac{\partial V_0}{\partial x}\right]\tilde r_0=0, \quad (2.19)$$
$$X(z,\ \xi,\ \omega,\ 0)=z,\ P(z,\ \xi,\ \omega,\ 0)=\xi,$$
$$\tilde r_0(z,\ \xi,\ \omega,\ 0)=\exp\{-\beta H(z,\ \omega)\}\delta(\xi-\omega).$$

При этом

$$r_0(x,\ p,\ \omega,\ t)=\tilde r_0(z(x,\ p,\ \omega,\ t),\ \xi(x,\ p,\ \omega,\ t),\ \omega,\ t),$$

где функции $z(\ldots)$, $\xi(\ldots)$ задают обратное отображение к каноническому отображению

$$g_t\colon\quad (z,\ \xi)\to(X(z,\ \xi,\ \omega,\ t),\ P(z,\ \xi,\ \omega,\ t)).$$

3. Построение асимптотического решения. Мы вычислили асимптотическое разложение потенциала:

$$V_h^{(k)}(x,t)=\left(\sum_{j=0}^{N-1}(-ih)^j\iint e^{-\beta H(y,\omega)}f_j(y,\omega)\,dy\,d\omega\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(\sum_{m=0}^{N-1}(-ih)^m\iiint L_k(x,y,t)\,r_m(y,\xi,\omega,t)\,dy\,d\xi\,d\omega\right)+O(h\quad).$$

При этом

$$V_0^{(k)}(x, t) = \frac{1}{\sigma_0}\iint L_k(x, X_0(z, \xi, t), t)\, r_{00}(z, \xi, t)\, dz\, d\xi,$$

где $X_0(z, \xi, t) \overset{\text{def}}{=} X(z, \xi, \xi, t)$, $r_{00}(z, \xi, t) = \tilde{r}_0(z, \xi, \xi, t)$. Пусть, кроме того, $P_0(z, \xi, t) = P(z, \xi, \xi, t)$. Функции X_0, P_0, r_{00} удовлетворяют уравнениям (2.19) для X, P, $\tilde{r}_0$ и начальным условиям

$$X_0(z, \xi, 0) = z,\ P_0(z, \xi, 0) = \xi,\ r_{00}(z, \xi, 0) = e^{-\beta H(z, \xi)} \tag{2.20}$$

Задача Коши (2.4) сведена к линейной. Найдем ее асимптотическое решение. Пусть

$$\Lambda_{\omega, t} = \{x = X_0(z, \omega, t),\ p = P_0(z, \omega, t) - \omega;\ z \in \mathbf{R}^n\}$$

— семейство n-мерных лагранжевых многообразий в $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_p^n$. Обозначим через $\mathcal{K}_{\omega, t}^{1/h}$ канонический оператор по $\mathrm{mod}\ h^N$ на нем [13, 16]. Решение (2.4) ищем в виде (2.6), где

$$G_h(x, \omega, t) = [\mathcal{K}_{\omega, t}^{1/h}\varphi](x, \omega, t),$$

$$\varphi(z, \omega, t, h) = \sum_{k=0}^{N-1}(-ih)^k \varphi_k(z, \omega, t),$$

$$\varphi_0(z, \omega, 0) = \exp\left\{-\frac{\beta}{2}H(z, \omega)\right\}\cdot e_0(z, \omega), \tag{2.21}$$

$$\varphi_k(z, \omega, 0) = \exp\left\{-\frac{\beta}{2}H(z, \omega)\right\} f_k(z, \omega)\, e_0(z, \omega), \quad k \geqslant 1.$$

Начальные условия здесь выбраны с учетом (2.6), (2.9), (2.11), (2.20).

Точно так же, как и в § 1, найдем из (2.21) и уравнения (2.8) рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций φ_k. Например, для φ_0 получим задачу

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} + \left[F_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial x\,\partial p} - \frac{\partial^2 F_0}{\partial p\,\partial V}\frac{\partial V_0}{\partial x}(X_0, t) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial F_0}{\partial V}V_1(X_0, t)\right]\varphi_0 = 0,$$

$$\varphi_0(z, \omega, 0) = \exp\left\{-\frac{\beta}{2}H(z, \omega)\right\}e_0(z, \omega),$$

где у функций F_0, F_1 опущены аргументы X_0, P_0, t, $V_0(X_0, t)$.

Таким образом, построено асимптотическое решение температурных уравнений Хартри (2.4). Именно, имеет место

Теорема 2.1. *Функции*

$$\psi_j(x,t,h) = \\ = \exp\left\{\frac{\beta}{2} E_j(h)\right\}\left[K^{1/h}_{\omega,t}\left(\sum_{k=0}^{N-1}(-ih)^k\varphi_k\right)\right](\overset{2}{x},\overset{1}{p},t)\chi_j(x,h)$$

удовлетворяют начальным условиям (2.10) *и соотношению*

$$-ih\frac{\partial\psi_j}{\partial t} + F(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t,V_h(\overset{2}{x},t),h)\psi_j = (-ih)^{N+1}\mathcal{R}_{N,j}(x,t,h),$$

где остаток $\mathcal{R}_{N,j}$ *оценивается в* W_2^s ($\mathbf{R}^n$) *следующим образом*:

$$\|\mathcal{R}_{N,j}(\cdot,t,h)\|_{W_2^s} \leqslant C_{N,s}(t)\,h^{-s}.$$

§ 3. Квазиклассическая асимптотика решений системы уравнений нелинейной квантовой механики

1. Постановка задачи. В этом параграфе мы изучим асимптотические решения систем нелинейных уравнений, не распадающихся, в отличие от уравнений Хартри, на отдельные скалярные уравнения после вычисления потенциала взаимодействия V.

Символы операторов, которые мы теперь будем рассматривать, являются матричнозначными функциями. Пусть

$$V = (V^{(1)}, \ldots, V^{(M)}) \in \mathbf{R}^M,\ x \in R^n,\ t \in \mathbf{R},\ h \in (0, 1).$$

Рассмотрим матричнозначную функцию $F(x, p, t, V, h)$ класса $S^\infty(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_p^n \times \mathbf{R}_V^M, m)$ *), гладко зависящую от t и h. Пусть

$$F(x,p,t,V,h) = \sum_{j=0}^{s}(-ih)^j F_j(x,p,t,V) \qquad (3.1)$$

и матрица $F_0(x, p, t, V)$ имеет l различных вещественных собственных значений $\mu_k(x, p, t, V)$ постоянной кратности r_k и не имеет жордановых клеток.

---

*) Все элементы матрицы класса $S^\infty(\mathbf{R}^n, m)$ принадлежат $S^\infty(\mathbf{R}^n)$ (см. сноску на стр. 104); m — это размер матрицы.

Положим

$$V_h^{(k)}(x,t) = \sum_{\nu=1}^{M} \int_0^t d\tau \int_{R^n} f_{k\nu}(x,\ t,\ y,\tau)\,|\,\psi_\nu(y,\tau)\,|^2 dy, \tag{3.2}$$

где $f_{k\nu}(\cdot,\ t,\ \cdot,\ \tau) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ — гладкие вещественные функции t, $\tau \in \mathbf{R}$. Потенциалы $V_h^{(k)}$ квадратично зависят от M вектор-функций $\psi_\nu = (\psi_\nu^{(1)}, \ldots, \psi_\nu^{(m)})$.

Рассмотрим задачу Коши для системы нелинейных уравнений, обобщающих уравнения нелинейной оптики с пространственной и временной дисперсией (в частном случае — уравнений Максвелла) [25]:

$$\begin{gathered} -ih\,\frac{\partial\psi_\nu}{\partial t} + F(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, V_h(\overset{2}{x}, t),\ h)\,\psi_\nu = 0, \\ \psi_\nu(x,\ 0) = \psi_{0\nu}(x,\ h),\ \ \nu = 1, \ldots, M. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Найдем ее асимптотическое решение при $h \to 0$ с произвольной точностью $O(h^N)$ (для уравнений оптики $h = 1/\omega$, где ω — частота).

Наложим следующие условия на начальные данные (3.3):

а) финитность: все компоненты $\psi_{0\nu}^{(j)}(x,\ h)$ и их $1/h$-преобразования Фурье $\hat{\psi}_{0\nu}^{(j)}(p,\ h)$ вместе со всеми производными вне компактной области $(x,\ p)$ имеют порядок $O(h^\infty)$; т. е. существует функция $e_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ такая, что

$$\begin{gathered} \psi_{0\nu}^{(j)}(x,\ h) = e_0(x)\,e_0(\hat{p})\,\psi_{0\nu}^{(j)} + O(h^\infty); \\ \hat{p} = -ih\,\frac{\partial}{\partial x}; \end{gathered} \tag{3.4}$$

б) условные предельности: для любого матричнозначного символа $A \in S^\infty(\mathbf{R}^{2n},\ m)$

$$(A(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\,\psi_{0\nu},\ \psi_{0\nu}) = \sum_{k=0}^{N-1} (-ih)^k \iint \operatorname{tr}(A(x,p)\,\rho_\nu^{(k)}(x,p)^*)\,dx\,dp + O(h^N), \tag{3.5}$$

где $(\chi,\ \psi) = \int \sum_{i=1}^{m} \chi^{(i)}(x)\,\overline{\psi^{(i)}(x)}\,dx$; tr обозначает след, $*$ — эрмитово сопряжение матрицы, $\rho_\nu^{(k)}$ — некоторые $m \times m$-матрицы из финитных обобщенных функций, матрица $\rho_\nu^{(0)}$ эрмитова.

2. Вычисление средних. В отличие от предыдущих примеров, здесь мы не будем сводить вычисление потенциала взаимодействия к асимптотическому разложению матрицы плотности. Используем другой метод.

Пусть $X^{(j)}(z, \omega, t)$, $P^{(j)}(z, \omega, t)$ — гладкие функции со значениями в $\mathbf{R}^n$ ($j = 1, \ldots, l$; $z, \omega \in \mathbf{R}^n$; $t \in \mathbf{R}$), удовлетворяющие гамильтоновой системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^{(j)}}{\partial t} &= \frac{\partial \lambda_j}{\partial p}(X^{(j)}, P^{(j)}, t), \quad X^{(j)}(z, \omega, 0) = z, \\ \frac{\partial P^{(j)}}{\partial t} &= -\frac{\partial \lambda_j}{\partial x}(X^{(j)}, P^{(j)}, t), \quad P^{(j)}(z, \omega, 0) = \omega, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $\lambda_j \in C^\infty$ — вещественные функции, причем

$$\lambda_i(x, p, t) \neq \lambda_j(x, p, t), \ i \neq j. \tag{3.7}$$

Рассмотрим $(n+1)$-мерные лагранжевы многообразия в $(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}_t) \times (\mathbf{R}^n_p \times \mathbf{R}_{p^t})$:

$$\Lambda_j(\omega) = \{(x, t, p, p^t) \mid x = X(z, \omega, t), p = P(z, \omega, t) - \omega, \\ p^t = -\lambda_j(X, P, t);\ z \in \mathbf{R}^n\}.$$

Пусть $\mathcal{K}_j = \mathcal{K}^{1/h}_{j,\omega}$ — канонический оператор на семействе Λ_j по $\operatorname{mod} h^N$ [13, 16]. Будем искать асимптотическое решение задачи (3.3) в виде

$$\psi_\nu(x, t, h) = \sum_{j=1}^{l} [\mathcal{K}_j a_j](\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)\, \psi_{0\nu}(x, h), \tag{3.8}$$

где

$$a_j(z, \omega, t, h) = \sum_{k=0}^{N-1} (-ih)^k a_j^{(k)}(z, \omega, t), \tag{3.9}$$

$a_j^{(k)}$ — гладкие $m \times m$-матричнозначные функции. Подставим (3.8) в формулу (3.2) для потенциала взаимодействия

$$V_h^{(k)}(y, t) = \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{i, j=1}^{l} \int_0^t d\tau\, ([\mathcal{K}_i a_i^*](\overset{2}{x}, \overset{3}{p}, \tau)\, f_{\nu k}(y, t, \overset{2}{x}, \tau) \times \\ \times [\mathcal{K}_j a_j](\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, \tau)\, \psi_{0\nu}, \psi_{0\nu}), \tag{3.10}$$

где $\overset{*}{a_i}$ — сопряженная к матрице a_i. В этой сумме останутся лишь слагаемые при $i = j$, а остальные члены имеют порядок $O(h^\infty)$. В силу условия (3.5) для этого достаточно доказать, что при $i \neq j$

$$\int_0^t \overline{[\mathcal{K}_i\varphi_i]}(\overset{2}{x}, \overset{3}{p}, \tau) f_{\nu,k}(y, t, \overset{2}{x}, \tau)[\mathcal{K}_j\varphi_j](\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, \tau)\,d\tau = O(h^\infty) \tag{3.11}$$

для любых скалярных функций φ_i, φ_j, причем правая часть $O(h^\infty)$ есть оператор $\varkappa_h(y, \overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)$, символ которого является гладким и быстро убывает по x, p и по $1/h$ со всеми производными. Формула (3.11) вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.1. *При $i \neq j$ и любом $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ имеет место соотношение*

$$\int_0^t d\tau \int e^{\frac{i}{h}x(p'-p)}\overline{[\mathcal{K}_i\varphi_i](x, p, \tau)}[\mathcal{K}_j\varphi_j](x, p', \tau)u(x)\,dx = O(h^\infty), \tag{3.12}$$

где остаток $O(h^\infty) = \varkappa_h'(p', p, t)$ является гладким и быстро убывает при $(1/h, p', p) \to \infty$ со всеми производными.

Доказательство. Подставим вместо канонических операторов $\mathcal{K}_i$, $\mathcal{K}_j$ в (3.12) их разложения по особым и неособым картам [13, 16]. Вычислим затем стационарные точки получившихся интегралов. Оказывается, что при условии (3.7) стационарных точек у этих интегралов нет, и поэтому они равны $O(h^\infty)$. Продемонстрируем это лишь в случае неособых карт. Аналогично рассматривается общий случай.

С точностью до несущественных множителей интеграл (3.12) переписывается (в неособых картах) в виде

$$\int_0^t d\tau \int \exp\left\{\frac{i}{h}[x(p'-p) + S_j(x, p', \tau) - S_i(x, p, \tau)]\right\} \times$$
$$\times \frac{\varphi_j(x_0^{(j)}(x, p', \tau), p', \tau)\,\bar{\varphi}_i(x_0^{(i)}(x, p, \tau), p, \tau)}{\sqrt{|J_j(x, p', \tau)J_i(x, p, \tau)|}}u(x)\,dx, \tag{3.13}$$

где $x_0^{(s)}(x, p, \tau)$ — решение уравнения $x = X^{(s)}(x_0, p, \tau)$, $s = i, j$, а $J_s(x, p, \tau) = \frac{DX^{(s)}}{Dx_0}(x^{(s)}(x, p, \tau), p, \tau) \neq 0$. Действия S_i и S_j удовлетворяют уравнениям Гамильтона —

Якоби

$$\frac{\partial S_k(x,\,p,\,t)}{\partial t} + \lambda_k\left(x,\ \frac{\partial S_k(x,\,p,\,t)}{\partial x} + p,\ t\right) = 0,\ \ k = i,\ j. \quad (3.14)$$

Вычислим стационарную точку $(\tilde{x},\ \tilde{\tau})$ интеграла (3.13). Она определяется из уравнений

$$\frac{\partial S_j}{\partial x}(\tilde{x},\ p',\ \tilde{\tau}) + p' = \frac{\partial S_i}{\partial x}(\tilde{x},\ p,\ \tau) + p \overset{\text{def}}{=} \tilde{p},$$

$$\frac{\partial S_j}{\partial \tau}(\tilde{x},\ p',\ \tilde{\tau}) = \frac{\partial S_i}{\partial \tau}(\tilde{x},\ p,\ \tilde{\tau}).$$

Отсюда и из (3.14) вытекает равенство

$$\lambda_i(\tilde{x},\ \tilde{p},\ \tilde{\tau}) = \lambda_j(\tilde{x},\ \tilde{p},\ \tilde{\tau}),$$

которое при $i \neq j$ не может иметь места в силу (3.7). Следовательно, интеграл (3.13) не имеет стационарных точек и равен $O(h^\infty)$. Лемма 3.1 доказана.

Теперь в формуле (3.10) остаются лишь слагаемые с индексами $i = j$. Они преобразуются с помощью теорем § 12 гл. V [16]. Главный член получившейся асимптотики V_h имеет вид

$$V_h^{(k)}(y,\,t) = \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{j=1}^{l} \int_0^t d\tau\, (a_j^*(\overset{2}{x},\ \overset{3}{p},\ \tau) \times$$

$$\times f_{\nu,\,k}\left(y,\ t,\ X^{(j)}\left(\overset{2}{x},\ \frac{\overset{1}{p} + \overset{3}{p}}{2},\ \tau\right),\ \tau\right) a_j(\overset{2}{x},\ \overset{1}{p},\ \tau)\,\psi_{0\nu},\ \psi_{0\nu}) + O(h).$$

Используя (3.5) и (3.9), отсюда найдем окончательное выражение для асимптотики V_h^k. Сформулируем этот результат в виде леммы.

Л е м м а 3.2. *Имеет место разложение*

$$V_h(x,\,t) = V_0(x,\,t) + \sum_{r=1}^{N-1} (-ih)^r V_r(x,\,t) + O(h^N), \quad (3.15)$$

где коэффициенты $V_0, \ldots, V_{N-1}$ — *некоторые функции, интегрально зависящие от* $a_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$; $j = 1, \ldots, l$. *Для* V_0 *имеется явное выражение*

$$V_0^{(k)}(x,\,t) = \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{i=1}^{l} \int_0^t d\tau \iint \operatorname{tr}\,[a_i^{(0)}(z,\,\omega,\,\tau)^*\, a_i^{(0)}(z,\,\omega,\,\tau) \times$$

$$\times \rho_\nu^{(0)}(z,\,\omega)]\, f_{k\nu}(x,\ t,\ X^{(i)}(z,\,\omega,\,\tau),\ \tau)\, dz\, d\omega. \quad (3.16)$$

3. **Построение асимптотического решения.** Подставим разложение (3.15) в уравнение (3.3). Нелинейный оператор $\hat{F}$ в (3.3) примет вид

$$\hat{F} = F(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, V_0(\overset{2}{x}, t)) + (-ih) F_1(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, V_0(\overset{2}{x}, t)) + \\ + (-ih) \frac{\partial F_0}{\partial V}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, V_0(\overset{2}{x}, t)) V_1(x, t) + O(h^2). \quad (3.17)$$

Напомним, что через $\mu_j(x, p, t, V)$, $j = 1, \ldots, l$, мы обозначаем собственные числа матрицы $F_0(x, p, t, V)$. Пусть $P_j(x, p, t, V)$ — соответствующие операторы проектирования в C^m на j-е собственное подпространство, причем

$$P_j P_k = \delta_{j,k} P_j, \quad \sum_{j=1}^{l} P_j = I, \quad \sum_{j=1}^{l} \mu_j P_j = F_0, \\ (F_0 - \mu_j) P_j = P_j (F_0 - \mu_j) = 0. \quad (3.18)$$

Кратность r_j собственного числа μ_j по условию не зависит от (x, p, t, V) и $\sum_{j=1}^{l} r_j = m$.

Из (3.17) видно, что главную роль при коммутации оператора $\hat{F}$ с каноническими операторами (3.8) будет играть матричный символ $F^{(0)}$, где

$$F^{(j)}(x, p, t) = F_j(x, p, t, V_0(x, t)), \quad j = 0, 1, \ldots$$

Обозначим

$$\lambda_j(x, p, t) = \mu_j(x, p, t, V_0(x, t)), \\ E_j(x, p, t) = P_j(x, p, t, V_0(x, t)), \quad j = 1, \ldots, l. \quad (3.19)$$

Тогда E_j и λ_j удовлетворяют соотношениям вида (3.18) с заменой F_0 на $F^{(0)}$.

Формула (3.19) задает функцию Гамильтона λ_j для системы уравнений (3.6). Отметим, что λ_j зависит от V_0, а V_0 есть функционал от $X^{(i)}$, $i = 1, \ldots, l$ (см. (3.16)). Таким образом, $\lambda_j(x, p, t)$ интегрально зависит от функций $X^{(i)}$, т. е. система (3.6) представляет собой систему интегро-дифференциальных уравнений, рассмотренную в гл. I.

Отметим, что в формуле (3.16) для V_0 участвуют еще невычисленные матрицы $a_i^{(0)}$. Для их нахождения подставим функцию (3.8) в уравнение (3.3) и воспользуемся теоремой [16] о коммутации $1/h$-псевдодифференциального оператора с каноническим оператором:

$$-ih\frac{\partial\psi_\nu}{\partial t}+F(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t,V_h(\overset{2}{x},t),h)\psi_\nu=$$
$$=\sum_{j=1}^{l}[\mathcal{K}_jR_ja_j](\overset{2}{x},\overset{1}{p},t)\psi_{0\nu}(x,h)+(-ih)^NQ_N(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t,h)\psi_{0\nu},\tag{3.20}$$

где символ остатка Q_N имеет оценку

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^\beta Q_N(x,p,t,h)\right|\leqslant\frac{C_{\alpha,\beta,r_1,r_2}(t)\,h^{-|\alpha|-|\beta|-n}}{(1+|x|)^{r_1}(1+|p|)^{r_2}}\tag{3.21}$$

для любых α, β, r_1, r_2. Операторы R_j в (3.20) разлагаются по степеням h:

$$R_j=\sum_{r=0}^{N-1}(-ih)^kR_j^{(r)}.\tag{3.22}$$

Здесь $R_j^{(r)}$ — дифференциальный оператор порядка j с гладкими, не зависящими от h матричнозначными $(m\times\times m)$-коэффициентами,

$$\begin{gathered}R_j^{(0)}=\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{l}(\lambda_k-\lambda_j)E_k,\\ E_jR_j^{(1)}E_j=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Gamma_j\right)E_j,\end{gathered}\tag{3.23}$$

причем все функции в (3.23) вычисляются в точке $x==X^{(j)}$, $p=P^{(j)}$. Матрица Γ_j задается формулами

$$\Gamma_j=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_j}{\partial x\,\partial p}E_j+\frac{\partial L_j}{\partial p}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial x}E_j-\frac{\partial L_j}{\partial\mu}\frac{\partial F^{(0)}}{\partial t}E_j+$$
$$+E_jF^{(1)}E_j+E_j\frac{\partial F_0}{\partial V}V_1E_j,\tag{3.24}$$

где $L_j(\mu,x,p)=(\mu-\lambda_j(x,p,t))(\mu-F^{(0)}(x,p,t))^{-1}$, причем производные от L_j в (3.24) берутся в точке $\mu==-\lambda_j(X^{(j)},P^{(j)},t)$.

Кроме того, справедливы тождества

$$\Gamma_jE_j=\Gamma_j,\quad E_j\Gamma_j=\Gamma_j+(1-E_j)\frac{dE_j}{dt_j},\tag{3.25}$$

где $\frac{d}{dt_j}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\lambda_j}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial\lambda_j}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}$ — производная вдоль траекторий (3.6).

Подставим в (3.20) разложение (3.9) и потребуем, чтобы в правой части коэффициенты при степенях $(-ih)^k$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, были равны нулю. Получим систему уравнений для матриц $a_j^{(k)}$:

$$\begin{aligned}
&R_j^{(0)}a_j^{(0)} = 0,\\
&R_j^{(0)}a_j^{(1)} + R_j^{(1)}a_j^{(0)} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&R_j^{(0)}a_j^{(N-1)} + \ldots + R_j^{(N-1)}a_j^{(0)} = 0.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Потребуем, чтобы в начальный момент $t = 0$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{l} a_j^{(0)}(z, \omega, 0) = e_0(z)\,e_0(\omega)\,I,\\
&\sum_{j=1}^{l} a_j^{(k)}(z, \omega, 0) = 0, \quad k \geqslant 1,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

где I — единичная матрица.

Тогда из (3.8) и начальных условий (3.6) получим

$$\psi_\nu(x, 0, h) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=0}^{N-1}(-ih)^k a_j^{(k)}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, 0)\,\psi_{0\nu}(x, h) = \\
= e_0(x)\,e_0(\hat{p})\psi_{0\nu}(x, h) = \psi_{0\nu}(x, h) + O(h^\infty).$$

В последнем равенстве мы использовали формулу (3.4).

Таким образом, условия (3.27) гарантируют удовлетворение начальным данным (3.3) с точностью до $O(h^\infty)$.

Решим систему уравнений (3.26), (3.27). Из первого уравнения (3.26) и формулы (3.23) имеем

$$\sum_{k\neq j}(\lambda_k - \lambda_j)\,E_k a_j^{(0)} = 0,$$

или, учитывая, что $\sum_k \lambda_k E_k = F^{(0)}$,

$$F^{(0)}a_j^{(0)} = \lambda_j a_j^{(0)}.$$

Отсюда следует, что область значений $a_j^{(0)}$ (как оператора в C^m) должна принадлежать собственному подпространству $F^{(0)}$, отвечающему собственному числу λ_j, т. е.

$$E_j a_j^{(0)} = a_j^{(0)}. \tag{3.28}$$

Второе уравнение (3.26) запишем в виде

$$E_j R_j^{(1)} E_j a_j^{(1)} + R_j^{(0)} a_j^{(1)} + (1 - E_j)\, R_j^{(1)} a_j^{(0)} + \\ + E_j R_j^{(1)} (1 - E_j) a_j^{(0)} = 0.$$

В силу (3.23) и (3.28) отсюда получаем два равенства:

$$\begin{gathered} E_j R_j^{(1)} a_j^{(0)} = 0, \\ R_j^{(0)} a_j^{(1)} + (1 - E_j)\, R_j^{(1)} a_j^{(0)} = 0. \end{gathered} \tag{3.29}$$

Первое из этих равенств дает *уравнение переноса* для $a_j^{(0)}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_j\right) a_j^{(0)} = 0. \tag{3.30}$$

Начальное условие выберем, исходя из (3.28) и начальных условий (3.27):

$$a_j^{(0)} (z, \omega, 0) = e_0 (z) e_0 (\omega) E_j (X^{(j)} (z, \omega, 0), P^{(j)} (z, \omega, 0), 0). \tag{3.31}$$

Покажем, что решение уравнений (3.30), (3.31) удовлетворяет условию (3.28). Действительно, положим

$$a_j^{(0)} = E_j b_j^{(0)}.$$

Тогда для матрицы $b_j^{(0)}$ получим уравнение

$$E_j \frac{\partial b_j^{(0)}}{\partial t} + \left(\frac{d}{dt_j} E_j\right) b_j^{(0)} + \Gamma_j E_j b_j^{(0)} = 0. \tag{3.32}$$

Выберем матрицу $b_j^{(0)}$ так, чтобы она удовлетворяла задаче

$$\begin{gathered} \frac{\partial b_j^{(0)}}{\partial t} + \left(\frac{d}{dt_j} E_j\right) b_j^{(0)} + \Gamma_j b_j^{(0)} = 0, \\ b_j^{(0)} (z, \omega, 0) = e_0 (z) e_0 (\omega) I. \end{gathered} \tag{3.33}$$

Тогда в силу (3.25) матрица $b_j^{(0)}$ автоматически будет удовлетворять и уравнению (3.32), а следовательно, решение задачи (3.30), (3.31) обязательно имеет вид

$$a_j^{(0)}(z, \omega, t) = E_j(X^{(j)}(z, \omega, t),\ P^{(j)}(z, \omega, t),\ t) b_j^{(0)}(z, \omega, t),$$

т. е. условие (3.28) выполнено. Остальные коэффициенты $a_j^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots,$ вычисляются аналогично из системы (3.26).

В качестве примера найдем матрицу $a_j^{(1)}$. Используя (3.29) и (3.23), получим

$$E_k a_j^{(1)} = \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_k)} E_k R_j^{(1)} a_j^{(0)}, \quad k \neq j. \tag{3.34}$$

Для того чтобы определить саму матрицу $a_j^{(1)} = E_j a_j^{(1)} + \sum_{k \neq j} E_k a_j^{(1)}$, остается найти компоненту $E_j a_j^{(1)}$. Она вычисляется из третьего уравнения системы (3.26):

$$R_j^{(0)} a_j^{(2)} + R_j^{(1)} a_j^{(1)} + R_j^{(2)} a_j^{(0)} = 0.$$

Действительно (см. (3.23)),

$$E_j R_j^{(1)} E_j a_j^{(1)} + E_j R_j^{(2)} a_j^{(0)} + \sum_{k \neq j} E_j R_j^{(1)} E_k a_j^{(1)} = 0,$$

или

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_j\right)(E_j a_j) = -E_j R_j^{(2)} a_j^{(0)} + \sum_{k \neq j} \frac{1}{(\lambda_k - \lambda_j)} E_j R_j^{(1)} E_k R_j^{(1)} a_j^{(0)}. \tag{3.35}$$

Поставим начальные условия

$$E_j a_j^{(1)}\Big|_{t=0} = \sum_{k \neq j} \left(\frac{E_j R_k^{(1)} a_k^{(0)}}{\lambda_j - \lambda_k}\right)\Bigg|_{t=0}. \tag{3.36}$$

Тогда условия (3.27) автоматически выполняются. Как и при переходе от (3.30) к (3.33), рассмотрим матрицу $b_j^{(1)}(z, \omega, t)$, удовлетворяющую задаче

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{dE_j}{dt_j} + \Gamma_j\right) b_j^{(1)} = \left(\sum_{k \neq j} \frac{R_j^{(1)} E_k R_j^{(1)} E_j}{\lambda_k - \lambda_j} - R_j^{(2)} E_j\right) b_j^{(0)},$$
$$b_j^{(1)}(z, \omega, 0) = \sum_{k \neq j} \left(\frac{R_k^{(1)} E_k b_k^{(0)}}{\lambda_j - \lambda_k}\right)(z, \omega, 0). \tag{3.37}$$

Тогда решение (3.35), (3.36) имеет вид

$$E_j a_j^{(1)} = E_j b_j^{(1)}.$$

Таким образом, в силу (3.34)

$$a_j^{(1)} = E_j b_j^{(1)} + \sum_{k \neq j} \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_k)} E_k R_j^{(1)} E_j b_j^{(0)}.$$

Аналогично вычисляются и остальные матрицы $a_j^{(k)}$, $k = 2, \ldots, N-1$; при этом

$$a_j^{(k)} = E_j b_j^{(k)} + \sum_{s \neq j} E_s a_j^{(k)}, \tag{3.38}$$

где матрицы $E_s a_j^{(k)}$ определяются явно через $a_j^{(k-1)}, \ldots, a_j^{(0)}$ аналогично (3.34):

$$E_s a_j^{(k)} = \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_s)} E_s f_j^{(k)} (a_j^{(0)}, \ldots, a_j^{(k-1)}),$$

а матрица $b_j^{(k)}$ удовлетворяет задаче Коши вида

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{dE_j}{dt} + \Gamma_j\right) b_j^{(k)} = D_j^{(k)} (b_j^{(0)}, \ldots, b_j^{(k-1)}), \\ b_j^{(k)}\big|_{t=0} = \sum_{s=j} \left(\frac{f_s^{(k)} (a_s^{(0)}, \ldots, a_s^{(k-1)})}{\lambda_j - \lambda_s} \right)\Bigg|_{t=0} \end{gathered} \tag{3.39}$$

с известными функциями $D_j^{(k)}$ в правой части и $f_s^{(k)}$ в начальных данных.

Подведем итог. Считая известными решения $X^{(j)}$, $P^{(j)}$ системы (3.6), мы определили потенциалы $V_0^{(k)}$ (см. (3.16)) и свели вычисление матриц

$$a_j^{(k)}, k = 0, \ldots, N-1, j = 1, \ldots, l,$$

к решению обыкновенных дифференциальных уравнений вида (3.39).

Таким образом, из (3.6), (3.16), (3.19), (3.33) получаем следующую систему уравнений для функций X^j, P^j:

$$\text{(I)} \quad \begin{aligned} \frac{\partial X^{(j)}}{\partial t} &= \frac{\partial \lambda_j}{\partial p}(X^{(j)}, P^{(j)}, t), \ X^{(j)}(z, \omega, 0) = z; \\ \frac{\partial P^{(j)}}{\partial t} &= -\frac{\partial \lambda_j}{\partial x}(X^{(j)}, P^{(j)}, t), \ P^{(j)}(z, \omega, 0) = \omega, \end{aligned}$$

и матриц $b_j^{(0)}$:

$$\frac{\partial b_j^{(0)}}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial t} E_j(X^{(j)}(z, \omega, t), P^{(j)}(z, \omega, t), t)\right] b_j^{(0)} + \Gamma_j b_j^{(0)} = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad b_j^{(0)}(z, \omega, 0) = e_0(z) e_0(\omega) I,$$

где

$$\lambda_j(x, p, t) = \mu_j(x, p, t, V_0(x, t)),$$

$$E_j(x, p, t) = P_j(x, p, t, V_0(x, t)); \; j = 1, \ldots, l,$$

а потенциал взаимодействия V_0 задается формулами

$$V_0^{(k)}(x, t) = \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{i=1}^{l} \int_0^t d\tau \iint f_{k\nu}(x, t, X^{(i)}(z, \omega, \tau), \tau) \times$$

$$\times \operatorname{tr}[b_i^{(0)}(z, \omega, \tau)^* E_i(X^{(i)}(z, \omega, \tau) P^{(i)}(z, \omega, \tau), \tau)^* \times$$

$$\times E_i(X^{(i)}(z, \omega, \tau), P^{(i)}(z, \omega, \tau), \tau) \times$$

$$\times b_i^{(0)}(z, \omega, \tau) \rho_\nu^{(0)}(z, \omega)] \, dz \, d\omega, \quad k = 1, \ldots, M.$$

Матрица Γ_j здесь определена формулой (3.24).

Система (I), (II) является системой обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка, изученных в гл. I. Она имеет решение на некотором отрезке $[0, T_0]$. На этом отрезке времени из формулы (3.38) мы определим все коэффициенты $a_j^{(k)}$ разложения (3.9), т. е. вычислим функции ψ_ν из (3.8). Итак, доказана

Теорема 3.1. *Вектор-функции* $\psi_\nu(x, t, h) = \sum_{j=1}^{l} [\mathcal{K}_j a_j](\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t) \psi_{0\nu}(x, h)$ *удовлетворяют задаче*

$$-ih \frac{\partial \psi_\nu}{\partial t} + F(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t, V_h(\overset{2}{x}, t), h) \psi_\nu = (-ih)^N R_{N,\nu}(x, t, h),$$

$$\psi_\nu(x, 0, h) = \psi_{0\nu}(x, h) + O(h^\infty), \; \nu = 1, \ldots, M,$$

причем «невязки» $R_{N,\nu}$ имеют следующую оценку в пространстве W_2^k:

$$\int_0^t \| R_{N,\nu}(\cdot, \tau, h) \|_{W_2^k} d\tau \leqslant C_k(t) h^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\nu = 1, \ldots, M.$$

Пример. Рассмотрим систему уравнений нелинейной квантовой механики:

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t}+e\Phi+c\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}-\frac{e}{c}A\right)\alpha\psi+mc^2\beta\psi=0, \tag{3.40}$$

$$\Box\Phi=\frac{4\pi e}{c}|\psi|^2, \quad \Box A=\frac{4\pi e}{c}\bar{\psi}\alpha\psi, \tag{3.41}$$

где Φ, A — скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля, $\alpha=\begin{pmatrix}0 & \sigma\\ \sigma & 0\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ — 4×4-матрицы, $\sigma=(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3)$ — матрицы Паули, ψ — четырехкомпонентная вектор-функция. Гамильтониан уравнения (3.40) имеет два собственных числа $\lambda_\pm\ (x,p,t)\ =e\Phi(x,t)\mp\mp c\sqrt{m^2c^2+\left|p-\frac{e}{c}A(x,t)\right|^2}$, $x,p\in\mathbf{R}^3$; знаки $\pm$ соответствуют уравнениям для электрона и позитрона. Поставим начальные условия для (3.40), отвечающее электрону:

$$\psi(x,0)=e^{\frac{i}{h}S_0(x)}\chi_0(x)e_0(x), \tag{3.42}$$

где $e_0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$, $\chi_0=\begin{pmatrix}\chi_0'\\ \chi_0''\end{pmatrix}$ — собственная функция, отвечающая $\lambda_+(x,\ \nabla S_0(x),\ 0)$, т. е.

$$\chi_0'(x)\left(mc+\sqrt{m^2c^2+\left|\nabla S_0(x)-\frac{e}{c}A(x,0)\right|^2}\right)+ +\left(\nabla S_0(x)-\frac{e}{c}A(x,0)\right)\sigma\chi_0''(x)=0.$$

Выпишем систему Гамильтона:

$$\begin{gathered}\dot{x}=H_p,\quad \dot{p}=-H_x,\quad \dot{t}=H_{p^t},\quad \dot{p}^t=-H_t,\\ x|_{\tau=0}=x_0,\ p|_{\tau=0}=\nabla S_0(x_0),\ t|_{\tau=0}=0,\\ p^t|_{\tau=0}=\lambda_+(x_0,\ \nabla S_0(x_0),\ 0),\end{gathered} \tag{3.43}$$

где $H(x,\ t,\ p,\ p^t)=(p^t-e\Phi(x,\ t))^2-c^2\left|p-\frac{e}{c}A(x,t)\right|^2-m^2c^2$, а точка обозначает дифференцирование по τ. Кроме того, рассмотрим уравнение вращения спина для (3.40) (см. выше уравнение (II) или [13], стр. 323):

$$i\frac{\partial\chi}{\partial\tau}=\frac{e}{2mc}(\mathscr{B}\sigma'+i\mathscr{E}\alpha)\chi,\ \ |\chi_{\tau=0}=\chi_0(x_0)e_0(x_0), \tag{3.44}$$

где $\sigma' = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ — 4-рядные матрицы Паули, $\mathscr{B} = \operatorname{rot} A$ — магнитная индукция, $\mathscr{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$ — электрическая напряженность, причем вектор-функции $\mathscr{B}$ и $\mathscr{E}$ берутся в точке $x = x(x_0, t)$. Уравнения для потенциалов электромагнитного поля (3.41) в пределе $(h \to 0)$ примут вид:

$$\Box\Phi = \frac{4\pi e}{c}|\chi^2|/|J|, \quad \Box A = \frac{4\pi e}{c}\bar{\chi}\alpha\chi/|J|, \tag{3.45}$$

где $J = Dx/Dx_0$.

Пусть Φ, A, χ, x, t, p, p^t — решение характеристической системы (3.43) — (3.45). Рассмотрим лагранжево многообразие в $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_p^n \times \mathbf{R}_{p^t}$:

$$\Lambda^{n+1} = \{x = x(x_0, \tau),\ t = t(x_0, \tau),\ p = p(x_0, \tau),$$
$$p^t = p^t(x_0, \tau),\ x_0 \in \operatorname{supp} e_0,\ \tau \in \mathbf{R}\}.$$

Пусть $\mathscr{K}^{1/h}$ — канонический оператор на нем с точностью до $O(h)$. Из теоремы 3.I получим следующий результат.

Теорема 3.2. *Существует отрезок* $[0, T_0]$, *на котором функция*

$$\psi(x, t) = \mathscr{K}^{1/h}(\chi)$$

удовлетворяет системе уравнений (3.40), (3.41) *с точностью до* $O(h^2)$ (*в норме* L^2).

Аналогичный результат можно получить при всех $t \in \mathbf{R}$, накладывая некоторые условия «общего положения» на многообразие Λ.

Замечание. Нетрудно убедиться, что система (3.43)—(3.45) является записанной в лагранжевых координатах системой уравнений релятивистской полевой гидродинамики заряженной жидкости:

$$m\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\nabla\right)\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = e\mathscr{E} + \frac{e}{c}[v \times \mathscr{B}],$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho v = 0,$$

$$\Box\Phi = 4\pi\rho, \quad \Box A = 4\pi\rho v.$$

ГЛАВА VI

КОНТИНУАЛЬНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе вводится континуально-интегральное уравнение, которому удовлетворяет T-отображение, отвечающее нелинейным уравнениям квантовой механики. Правая часть этого уравнения может быть интерпретирована как нелинейный континуальный интеграл.

Асимптотическое решение этого континуально-интегрального уравнения проводится методом, обобщающим известный метод стационарной фазы для континуального интеграла Фейнмана [14]. Как известно, метод стационарной фазы применим к интегралу вида:

$$I = \int e^{\frac{i}{h} F(x)} \varphi(x)\, dx, \quad \varphi \in C_0^\infty, \quad F \in C^\infty$$

при условии, что стационарные точки $x = x_1, \ldots, x_n$ решения уравнения $dF(x) = 0$ — невырождены, т. е. матрица A формы d^2F невырождена в стационарных точках. Формула метода стационарной фазы имеет вид

$$I \approx (2\pi i h)^{n/2} \sum_k |D(x^k)|^{-1/2} \exp\left\{\frac{i}{h}\left(F(x_k) - \frac{i\pi\gamma_k}{2}\right)\right\} \varphi(x_k),$$

где $D(x) = \det A$, а γ_k — индекс Морса стационарной точки x_k. Эта формула была перенесена автором в 1965 г. [13, 14] на случай континуального интеграла Фейнмана. Интеграл Фейнмана представляется в виде

$$I = \int \exp\left\{\frac{i}{h} S[q(\tau)]\right\} dq(\tau), \tag{1}$$

где $S[q(\tau)] = \int\limits_0^t L(\dot q, q, \tau)\, d\tau$, $q = q(\tau)$, $q(0) = y$, $q(t) = x$, $L(\dot q, q, \tau) = \frac{\dot q^2}{2} - V(q, \tau)$. Если $\delta S[q(\tau)] = 0$ имеет невырожденные решения $q^k = q^k(\tau)$, т. е. $\delta^2 S$ при $q(\tau) = q^k(\tau)$ не имеет нулевого собственного значения, то

$$I \approx (2\pi i h)^{n/2} \sum_k |D(q^k)|^{-1/2} \exp\left\{\frac{i}{h}\left(S[q^k(\tau)] - \frac{i\pi\gamma_k}{2}\right)\right\}, \quad (2)$$

где γ_k — индекс Морса экстремали $q^k(\tau)$, а

$$D(q^k) = \det \frac{\partial^2 S[q^k(\tau)]}{\partial x\, \partial y}.$$

Этот ответ может быть переписан в виде канонического оператора, отвечающего лагранжеву многообразию $\Lambda^n(t)$ в фазовом пространстве p, x. Это многообразие в областях, хорошо проектируемых на x-плоскость, задается уравнением $p = \frac{\partial S(q^k(\tau))}{\partial x}$. В целом $\Lambda^n(t)$ задается уравнениями $p = P(t, y, p_0)$, $x = X(t, y, p_0)$, где P, X удовлетворяют уравнениям Ньютона $\dot{X} = P$, $\dot{P} = -\frac{\partial V(X, t)}{\partial x}$, и начальным условиям $X|_{t=0} = y$, $P|_{t=0} = p_0$. Уравнение $X(t, y, p_0) = x$ относительно p_0 для фиксированных y, x и t определяет точки p_0^k такие, что $q^k(\tau) = X(\tau, y, p_0^k)$, а $D(q^k) = \det\left\|\frac{\partial X_i}{\partial p_{0j}^k}(t, y, p_0^k)\right\|$.

Если вырожденные экстремали отсутствуют, то окрестность точки x на $\Lambda^n(t)$ хорошо проектируется на плоскость x. При этом условии в окрестности точки x канонический оператор равен правой части выражения (2). В окрестности точек, в которых матрица $\left\|\frac{\partial X_i}{\partial p_{0j}}\right\|$ вырождена. Эта формула для канонического оператора сохраняется, если часть координат (вырожденных) заменить на импульсы и совершить по ним преобразование Фурье *).

Канонический оператор $\mathcal{K}^{1/h}_{\Lambda^n(t)}$ на $\Lambda^n(t)$ дает асимптотику при $h \to 0$ континуального интеграла (1) как в невырожденных, так и в вырожденных стационарных точках — траекториях. Таким образом соотношение $I \approx \mathcal{K}^{1/h}_{\Lambda^n(t)}$, обобщает (2) и это соотношение можно считать формулой метода стационарной фазы.

*) То есть в таком смешанном p, x представлении формула для канонического оператора сохраняет вид (2).

Нелинейный континуальный функционал Φ, который мы получим в этой главе, обобщает континуальный интеграл Фейнмана. Роль уравнений Ньютона в нем играет система уравнений характеристик для уравнения Власова. Траекторий (в фазовом пространстве) у этой системы нет, но начальное лагранжево многообразие $\{(x, p) | x = y\}$ она переводит в некоторое лагранжево многообразие $\Lambda^n(t)$. Для функционала Φ также имеет место соотношение $\Phi \approx \approx \mathcal{K}^{1/h}_{\Lambda^n(t)}$, которое естественно трактовать как формулу метода стационарной фазы для него.

§ 1. Континуально-интегральное уравнение, отвечающее T-отображению

Рассмотрим T-отображение с образующей

$$G_{t,\varepsilon}[v] = G_{t,\varepsilon}(\overset{2}{x}, -\overset{1}{ih\partial/\partial x}, \ t; \ [v]) \ v(x, t),$$

являющейся псевдодифференциальным оператором с унитарной нелинейностью. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < < t_{N+1} = t$ — некоторое разбиение отрезка $[0, t]$, $\Delta t_j = = t_{j+1} - t_j$, $\delta_N = \max_j \Delta t_j$, $x \in \mathbf{R}^n$. T-отображение

$$\psi_0(x) \to \psi(x, t) = \left(\prod_{\tau=0}^{t} G_{\tau, d\tau}\right)[\psi_0] \tag{1.1}$$

строится по формулам

$$\psi(x, t) = \lim_{\delta_N \to 0} \psi_{N+1}(x, t),$$

$$\psi_0(x, t) = \psi_0(x),$$

где $\psi_{k+1}(x, t) = \psi_k(x, t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_k$ и

$$\psi_{k+1}(x, t) = G_{t_k, t-t_k}(\overset{2}{x}, -ih\,\overset{1}{\partial/\partial x}; \ [\psi_k])\,\psi_k(x, t_k)$$

при $t_k \leqslant \leqslant t_{k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$. Из этих формул и из определения псевдодифференциального оператора *)

$$f\left(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right) u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int dp\, e^{\frac{i}{h}xp} f(x, p) \int e^{-\frac{i}{h}yp} u(y)\, dy$$

получим следующую лемму.

*) Интегралы здесь и ниже понимаются в смысле теории обобщенных функций.

Л е м м а 1.1. *Пусть в норме некоторого пространства Соболева* $W_2^k(\mathbf{R}^n)$, $k \geqslant 0$ *существует* T*-отображение* (1.1). *Тогда справедливо равенство*

$$\psi(x,t) =$$
$$= \lim_{\delta_N \to 0} \frac{1}{(2\pi h)^{(N+1)n}} \int \ldots \int \exp\left\{\frac{i}{h} \sum_{k=0}^{N} (x_{k+1} - x_k)\,\xi_k\right\} \times$$
$$\times \prod_{k=0}^{N} G_{t_k,\,\Delta t_k}(x_{k+1},\ \xi_k;\,[\psi])\,\psi_0(x_0)\,dx\,d\xi, \qquad (1.2)$$

где $x_{N+1} = x$ *и* $dx = dx_0 \ldots dx_N$, $d\xi = d\xi_0 \ldots d\xi_N$, x_j, $\xi_j \in \mathbf{R}^n$; *предел берется в норме* $W_2^k(\mathbf{R}^n)$.

Запишем равенство (1.2) в следующей (континуальной) форме:

$$\psi(x,t) =$$
$$= \int\limits_{q(t)=x} \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p\,\psi_0(q(0)) \exp\left\{\frac{i}{h} \int_0^t p(\tau)\,dq(\tau)\right\} \times$$
$$\times \prod_{\tau=0}^{t} G_{\tau,\,d\tau}(q(\tau), p(\tau);\,[\psi]), \qquad (1.3)$$

где формально обозначено $\mathcal{D}q = \prod\limits_{\tau=0}^{t} \dfrac{dq(\tau)}{(2\pi h)^{n/2}}$, $q(\tau) \in \mathbf{R}^n$.

Равенство (1.3) назовем *континуально-интегральным уравнением*, отвечающим T-отображению (1.1). Это есть уравнение относительно неизвестной функции ψ. Лемма 1.1 дает метод вычисления функции $\psi(x,\ t)$ по ее значениям в предыдущие моменты времени.

Из леммы 1.1 и скалярного ($m = 1$) варианта теоремы 1.1 гл. III получим следующий результат.

С л е д с т в и е. *Пусть* $V(x)$ *и* $a(x,\ y)$ — *вещественные непрерывные ограниченные функции соответственно на* $\mathbf{R}^n$ *и* $\mathbf{R}^{2n}$. *Тогда решение задачи Коши*

$$-ih \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} - h^2\Delta\psi(x,t) + V(x)\,\psi(x,t) +$$
$$+ \psi(x,t) \int a(x,y)\,|\psi(y,t)|^2\,dy = 0, \qquad (1.4)$$
$$\psi(x,\ 0) = \psi_0(x)$$

удовлетворяет при каждом $\psi_0 \in W_2^2(\mathbf{R}^n)$ *уравнению*

$$\psi(x,t) = \lim_{N\to\infty} (4\pi i h)^{-\frac{(N+1)}{2}n} \int \frac{\psi_0(x_0)\,dx_0 \ldots dx_N}{(\sqrt{\Delta t_0 \ldots \Delta t_N})^n} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{h}\sum_{k=0}^{N}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{\Delta t_k}\right)^2 - V(x_{k+1}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int a(x_{k+1}, y)\,|\psi(y, t_k)|^2\,dy\right]\Delta t_k\right\}, \qquad (1.5)$$

где $x_{N+1} \equiv x$.

Континуальной записью формулы (1.5) назовем следующее континуально-интегральное уравнение:

$$\psi(x,t) = \int\limits_{q(t)=x} Dq\psi_0(q(0)) \exp\left\{\frac{i}{h}\int\limits_0^t \left[\frac{|\dot q(\tau)|^2}{4} - V(q(\tau)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int a(q(\tau), y)\,|\psi(y,\tau)|^2\,dy\right]d\tau\right\}, \qquad (1.6)$$

где формально обозначено

$$Dq = \prod_{\tau=0}^{t} \frac{dq(\tau)}{(d\tau 4\pi i h)^{n/2}}.$$

§ 2. Континуально-интегральное уравнение для функции плотности

Рассмотрим T-отображение $\psi_0(x) \to \psi(x, t)$ с образующей $G_{t,\varepsilon}$, построенное по формуле (1.1). Сопоставим функции ψ функцию плотности (см. § 1 гл. II)

$$(2\pi h)^{-n/2} e^{-\frac{i}{h}xp}\, \psi(x,t)\, \overline{\tilde\psi(p,t)}. \qquad (2.1)$$

Пусть

$$P_{t,\varepsilon}(x,\xi,\omega,z;[g]) = G_{t,\varepsilon}(x,\xi+\omega;[g])\,\overline{G_{t,\varepsilon}(x+z,\xi;[g])}.$$

С помощью образующей

$$P_{t,\varepsilon}[g] = P_{t,\varepsilon}\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\xi}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, -ih\overset{2}{\frac{\partial}{\partial \xi}}; [g]\right) g(x,\xi,t)$$

построим T-отображение

$$g(x,\xi,t) = \left(\prod_{\tau=0}^{t} P_{t,\varepsilon}\right)[g_0],\; g_0(x,\xi) = g(x,\xi,0). \qquad (2.2)$$

Лемма 2.1. *Пусть существует T-отображение* (1.1), *определяющее функцию* ψ. *Тогда существует T-отображение* (2.2), *причем* $g(x, \xi, t)$ *совпадает с функцией плотности* (2.1).

Лемма доказывается аналогично лемме 1.1 гл. II.

Перепишем T-отображение (2.2) в форме континуально-интегрального уравнения:

$$g(x, \xi, t) = \lim_{\delta_N \to 0} \frac{1}{(2\pi h)^{n(2N+2)}} \iint g_0(x_0, \xi_0) \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{i}{h} \sum_{k=0}^{N} [(x_{k+1} - x_k)\omega_k + (\xi_{k+1} - \xi_k) z_{k+1}]\right\} \times$$
$$\times \prod_{k=0}^{N} P_{t_k, \Delta t_k}(x_{k+1}, \xi_k, \omega_k, z_{k+1}; [g])\, dx\, d\xi\, dz\, d\omega, \qquad (2.2')$$

где

$$x_{N+1} = x, \quad \xi_{N+1} = \xi, \quad dx = dx_0 \ldots dx_N,$$
$$d\xi = d\xi_0 \ldots d\xi_N, \quad dz = dz_1 \ldots dz_{N+1},$$
$$d\omega = d\omega_0 \ldots d\omega_N.$$

В континуальных обозначениях (см. § 1) уравнение (2.2) имеет вид

$$g(x, \xi, t) = \int_{q(t)=x} \mathcal{D}q \int_{p(t)=\xi} \mathcal{D}p \int \mathcal{D}y \int \mathcal{D}\eta\, g_0(q(0), p(0)) \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{i}{h} \int_0^t [y(\tau)\, dq(\tau) + \eta(\tau)\, dp(\tau)]\, d\tau\right\} \times$$
$$\times \prod_{\tau=0}^{t} P_{\tau, d\tau}(q(\tau), p(\tau), y(\tau), \eta(\tau); [g]). \qquad (2.3)$$

Пример 2.1. Рассмотрим задачу Коши (1.4). В силу леммы 2.1 гл. II справедливо равенство

$$\int a(x, y)\, |\psi(y, t)|^2\, dy = \int g(y, \xi, t)\, a(x, y)\, dy\, d\xi.$$

Введем специальное обозначение для этого интеграла:

$$\Phi(x, t) = \int g(y, \xi, t)\, a(x, y)\, dy\, d\xi.$$

Из формулы (2.2′) получим следующее уравнение для функции Φ:

$$\Phi(x, t) = \lim_{\delta_N \to 0} \frac{(4\pi i h)^{-n(N+1)}}{(\Delta t_0 \ldots \Delta t_N)^n} \int a(x, y)\, dy \times$$

$$\times \psi_0(x_0)\overline{\psi_0(z_0)} \left(\exp\left\{ \frac{i}{h} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\dot{x}_k^2 - \dot{z}_k^2}{4} \right) \Delta t_k \right\} \exp\left\{ \frac{i}{h} \sum_{k=0}^{N} [V(z_{k+1}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - V(x_{k+1}) + \Phi(z_{k+1}, t_k) - \Phi(x_{k+1}, t_k)]\, \Delta t_k \right\} \right) \Big|_{x_{k+1} = z_{k+1} = y} dx\, dz,$$

где $\dot{x}_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t_k}$, $\dot{z}_k = \frac{z_{k+1} - z_k}{\Delta t_k}$ и $dx = dx_0 \ldots dx_N$, $dz = dz_0 \ldots dz_N$.

Аналогично (1.6) это уравнение запишем в континуальной форме:

$$\Phi(x, t) = \int a(x, y) \int\limits_{q(t)=y} Dq \int\limits_{\eta(t)=y} D\eta \psi_0(q(0)) \overline{\psi_0(\eta(0))} \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{i}{h} \int_0^t \left[\frac{|\dot{q}(\tau)|^2}{4} - \frac{|\dot{\eta}(\tau)|^2}{4} + V(\eta(\tau)) - V(q(\tau)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \Phi(\eta(\tau), \tau) - \Phi(q(\tau), \tau) \right] d\tau \right\}. \qquad (2.4)$$

Решение задачи Коши (1.4) выражается через решение континуально-интегрального уравнения (2.4) с помощью интеграла Фейнмана (см. (1.6)):

$$\psi(x, t) = \int\limits_{q(t)=x} Dq \psi_0(q(0)) \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{i}{h} \int_0^t \left[\frac{|\dot{q}(\tau)|^2}{4} - V(q(\tau)) - \Phi(q(\tau), \tau) \right] d\tau \right\}.$$

§ 3. Асимптотика решения континуально-интегрального уравнения

Рассмотрим задачу Коши для оператора с унитарной нелинейностью:

$$\begin{gathered} -ih \frac{\partial \psi_h}{\partial t}(x, t) + \mathscr{H}_h\left(\overset{2}{x}, -ih \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t; [\psi_h] \right) \psi_h(x, t) = 0, \\ \psi_h(x, 0) = e_0\left(\overset{2}{x}, -ih \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}} \right) \chi(x, h), \end{gathered} \qquad (3.1)$$

где $\mathscr{H}_h(x, p, t; [\psi])$ — гладкий символ медленного роста по x, p, оператор $\mathscr{H}_h(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial/\partial x}, t; [\psi])$ самосопряжен в L^2, $e_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, $\chi \in L^2(\mathbf{R}_x^n)$.

Континуально-интегральное уравнение для функции ψ имеет вид (см. (1.3))

$$\psi_h(x, t) = \int\limits_{q(t)=x} \mathscr{D}q \int \mathscr{D}p\psi_h(q(0), 0) \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{i}{h}\int\limits_0^t [p(\tau)\dot{q}(\tau) - \mathscr{H}_h(q(\tau), p(\tau), \tau; [\psi_h])]\, d\tau\right\}. \qquad (3.2)$$

Найдем асимптотику при $h \to 0$ решения уравнения (3.2) или, что то же, асимптотику решения задачи Коши (3.1). Предположим, что функция плотности, отвечающая начальным данным (3.1), имеет асимптотическое разложение

$$\psi_h(x, 0)\overline{\tilde{\psi}_h(p, 0)\, e^{-\frac{i}{h}xp}}(2\pi h)^{-n/2} =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} (-ih)^k \delta_k(x, p) + (-ih)^{N+1}\delta_{N+1}(x, p, h), \qquad (3.3)$$

где $\delta_0, \ldots, \delta_{N+1}$ — обобщенные функции из $W_2^{-s}(\mathbf{R}^{2n})$, причем

$$\sup_h \|\delta_{N+1}(\cdot, \cdot, h)\|_{W_2^{-s}(\mathbf{R}^{2n})} \leqslant \mathrm{const}, \qquad (3.4)$$

Пусть δ_0 — вещественная финитная функция. Символ $\mathscr{H}_h(x, p, t; \psi)$ по определению оператора с унитарной нелинейностью (§ 2 гл. II) гладко зависит от интегралов вида

$$\int\limits_0^t d\tau \int \overline{\psi(y, \tau)}\, \rho\left(x, p, t; \overset{2}{y}, -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial y}, \tau\right)\psi(y, \tau)\, dy, \qquad (3.5)$$

где функция $\rho(x, p, t, y, \xi, \tau)$ вещественна и финитна по x, p, y, ξ. Каждый такой интеграл заменим на выражение

$$\int\limits_0^t d\tau \int \delta_0(y, \xi)\, \rho(x, p, t; X(y, \xi, \tau), P(y, \xi, \tau), \tau)\, dy\, d\xi, \qquad (3.6)$$

где X, P — некоторые гладкие функции.

После такой замены функция $\mathscr{H}_0(x, p, t; [\psi])$ перейдет в некоторую функцию $\mathscr{H}_0(x, p, t; [X; P])$. Рассмотрим систему Гамильтона

$$\frac{\partial X(x, p, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial p}(X(x, p, t), P(x, p, t), t; [X; \ P]), X(x, p, 0) = x$$

$$\frac{\partial P(x, p, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial x}(X(x, p, t), P(x, p, t), t; [X; \ P]), P(x, p, 0) = p. \tag{3.7}$$

Из теоремы 2.2 гл. I и замечания к ней получим лемму:

Л е м м а 3.1. *Существует компакт* $V \subset \mathbf{R}^{2n}$ *такой, что* $\operatorname{supp} \delta_0 \subset V$, $\operatorname{supp} e_0 \subset V$ *и при* $(x, p) \in V$ *система* (3.7) *разрешима на любом отрезке* $[0, T]$.

Построим семейство лагранжевых многообразий $\Lambda = \{\Lambda^n_{\omega,t}\}$ в $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_p$ по формуле

$$\Lambda^n_{\omega,t} = \{(x, p) | x = X(z, \ \omega, t), p = P(z, \ \omega, t), (z, \omega) \in V\}, \quad t \in [0, \ T].$$

Пусть $\mathscr{K}^{1/h}_{\Lambda}$ — канонический оператор [13, 16] на семействе Λ, т. е. отображение

$$\mathscr{K}^{1/h}_{\Lambda}\colon \quad C^\infty_0(V \times [0, T_0]) \to S(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_p \times [0, T]),$$

где S — пространство Шварца. Пусть N — любое целое положительное число, а g_N — любая обобщенная функция, удовлетворяющая оценке (3.4).

Л е м м а 3.2. *Существует функция* φ_N *вида*

$$\varphi_N(z, \omega, t, h) = \sum_{k=0}^{N} (-ih)^k \varphi_k(z, \omega, t), \quad \varphi_k \in C^\infty_0(V \times [0, \ T]), \tag{3.8}$$

удовлетворяющая начальным условиям

$$\varphi_0(z, \ \omega, \ 0) = e_0(z, \ \omega),$$
$$\varphi_k(z, \ \omega, \ 0) = 0, \ k \geqslant 1,$$

и такая, что функция

$$\psi^{(N)}_h(x, p, t) = [\mathscr{K}^{1/h}_{\Lambda} \varphi_N](x, p, t)$$

удовлетворяет уравнению

$$-ih\frac{\partial \psi^{(N)}_h}{\partial t} + \mathscr{H}_h\left(\overset{2}{x}, \ p - ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t; [g_N]\right)\psi^{(N)}_h,$$
$$\psi^{(N)}_h = (-ih)^{N+1} \mathscr{R}_N(x, p, t, h). \tag{3.9}$$

Здесь правая часть $\mathcal{R}_N$ имеет оценку (для любого вещественного r)

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{\beta}\mathcal{R}_N(x,\,p,t,h)\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}\leqslant\frac{C_{\alpha,\,\beta,\,r,\,N}}{(1+|p|)^r}.\qquad(3.10)$$

Утверждение этой леммы доказано в гл. V книги [16].

Отметим, что функции φ_h в (3.8) строятся явно как решения рекуррентной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (примеры см. в гл. IV, V).

Теорема 3.1. *На любом отрезке* $[0,\,T]$, *на котором существует* *) *решение* $\psi_h(\cdot,\,t)\in L^2(\mathbf{R}^n)$ *задачи* (3.1), *оно представимо в виде*

$$\psi_h(x,\,t)=[\mathcal{K}_\Lambda^{1/h}\varphi_N]\left(\overset{2}{x},\,-ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},\,t\right)\chi(x,h)+$$
$$+(-ih)^N\mathcal{B}_N(x,t,h),\qquad(3.11)$$

где

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathcal{B}_N(\cdot,t,h)\|_{L^2}\leqslant TC_{N,T}\qquad(\textit{норма в } L^2),$$

а функция φ_N *обладает свойствами, указанными в лемме* 3.2.

Доказательство. Выразим каждый интеграл (3.6) в $\mathcal{H}_h(x,\,p,\,t;\,[\psi])$ через функцию плотности $g(x,\,p,\,t,\,h)$ (см. гл. II). Получившуюся функцию мы обозначаем $\mathcal{H}_h(x,\,p,\,t;\,[g])$. Построим асимптотическое решение задачи Коши для функции плотности (см. (2.6) гл. II). Это решение g_N имеет вид (см. подробнее гл. IV)

$$g_N(x,p,t,h)=\sum_{k=0}^{N}(-ih)^k g^{(k)}(x,p,t)$$

и удовлетворяет задаче

$$-ih\frac{\partial g_N}{\partial t}+\mathcal{H}_h(\overset{2}{x},p-ih\overset{1}{\partial/\partial x},t;[g_N])\,g_N-$$
$$-\mathcal{H}_h\left(x-ih\overset{2}{\frac{\partial}{\partial p}},\overset{1}{p},\,t;\;[g_N]\right)g_N=(-ih)^{N+1}Q_N(x,\,p,t,h),$$
$$g_N(x,p,0,h)=\sum_{k=0}^{N}(-ih)^k\,\delta_k(x,\,p).$$

---

*) См. гл. III, § 1.

Здесь остаток Q_N ограничен в W_2^{-s-r} (R^{2n}) при некотором $r \geqslant 0$. Как показано в § 2 гл. II, функция

$$\frac{1}{h^{N+1}}\,[g(x, p, t, h) - g_N(x, p, t, h)] = \gamma_N(x, p, t, h)$$

ограничена в W_2^{-s-r}. Для функции $\psi_h(x,\ t)$ получаем следующее уравнение:

$$-ih\,\frac{\partial\psi_h}{\partial t} + \mathcal{H}_h(\overset{2}{x}, -ih\,\overset{1}{\partial/\partial x},\ t;\ [g_N + (-ih)^{N+1}\gamma_N]\,\psi_h = 0. \tag{3.12}$$

Предварительно построив функцию g_N, с помощью леммы 3.2 построим асимптотическое решение $\psi_h^{(N)}(x,\ p,\ t) = [\mathcal{K}_\Lambda^{1\,h}\,\varphi_N](x,\ p,\ t)$, удовлетворяющее формулам (3.9), (3.10). Далее заметим, что

$$\mathcal{H}_h(x,\ p,\ t;\ [g_N + (-ih)^{N+1}\gamma_N]) = \\ = \mathcal{H}_h(x,\ p,\ t;\ [g_N]) + (-ih)^{N+1}\,\mathcal{H}_h^{(1)}(x,\ p,\ t), \tag{3.13}$$

где символ $\mathcal{H}_h^{(1)}$ финитен по x, p (так как функция ρ в интеграле (3.6) финитна), а поэтому оператор $\hat{\mathcal{H}}^{(1)}(\tau) = \mathcal{H}_h^{(1)}(\overset{2}{x}, -ih\,\overset{1}{\partial/\partial x},\ t)$ ограничен в $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Из представления (3.13) уравнений (3.12), (3.9) и из самосопряженности $\mathcal{H}_h(\overset{2}{x}, -ih\,\overset{1}{\partial/\partial x},\ t;[g_N])$ следует, что разность $\mathcal{B}_N = \left(\dfrac{\psi_h - \psi_h^{(N)}}{(-ih)^N}\right)$ в (3.11) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\mathcal{B}_N(\cdot, t, h)\|^2 = (-1)^N(\mathcal{B}_N, \hat{\mathcal{H}}^{(1)}\psi) + (-1)^N(\mathcal{B}_N, \hat{\mathcal{R}}_N\chi) - \\ - (\hat{\mathcal{H}}^{(1)}\psi,\ \mathcal{B}_N) - (\hat{\mathcal{R}}_N\chi,\ \mathcal{B}_N). \tag{3.14}$$

Здесь скобки $(\cdot,\ \cdot)$ обозначают скалярное произведение в $L^2(\mathbf{R}^n)$. Из уравнения (3.14) следует, что

$$\|\mathcal{B}_N(\cdot, t, h)\| \leqslant 2\int_0^t (\|\hat{\mathcal{H}}^{(1)}(\tau)\|_{L^2\to L^2}\|\psi(\cdot, \tau)\| + \\ + \|\mathcal{R}_N(\overset{2}{x}, -ih\,\overset{1}{\partial/\partial x}, \tau, h)\|_{L^2\to L^2}\|\chi\|)\,d\tau \leqslant t\cdot C_{N,\,t}.$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть функция* $\psi_h(x, 0)$ *удовлетворяет условиям* (3.1), (3.3), (3.4). *Тогда решение континуально-интегрального уравнения* *)

$$\psi_h(x,t) = \int\limits_{q(t)=x} Dq\psi_h(q(0), 0)\exp\left\{\frac{i}{h}\int\limits_0^t\left[\frac{|\dot q(\tau)|^2}{4} - V(q(\tau)) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int a(q(\tau),\ y)\,|\psi_h(y,\ \tau)|^2\,dy\right]d\tau\right\} \qquad (3.15)$$

представимо в виде

$$\psi_h(x,\ t) = [\mathcal{K}_\Lambda^{1/h}\varphi_N]\left(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t\right)\chi(x,\ h) + O(h^N), \qquad (3.16)$$

где $\varphi_N = \sum\limits_{k=0}^{N}(-ih)^k\varphi_k, \quad \varphi_0 = e_0,$ *а* $\mathcal{K}_\Lambda^{1/h}$ — *канонический оператор на семействе многообразий* $\{\Lambda_{\omega,t}^n\}$, *построенном по решению* (X, P) *интегро-дифференциальной системы Гамильтона*

$$\frac{\partial X(x,p,t)}{\partial t} = 2P(x,p,t), \quad X(x,p,0) = x,$$
$$\frac{\partial P(x,p,t)}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial x}(X(x,\ p,t)) - \qquad (3.17)$$
$$-\int\frac{\partial a}{\partial x}(X(x,\ p,\ t),\ X(y,\xi,\ t))\,\delta_0(y,\ \xi)\,dy\,d\xi,$$
$$P(x,\ p,\ 0) = p.$$

Формула (3.16) представляет собой обобщенный метод стационарной фазы для интеграла (3.15). Действительно, стационарные траектории показателя экспоненты (3.15) — это классические траектории X, P системы (3.17). Но именно на них и сосредоточен (по модулю $O(h^\infty)$) канонический оператор $\mathcal{K}_\Lambda^h$ (см. введение к данной главе).

---

*) Функции V и a — вещественные ограниченные и гладкие (см. следствие из леммы 1.1).

ГЛАВА VII
АППРОКСИМАЦИЯ ЛОМАНЫМИ ТРАЕКТОРИЙ ИНТЕГРАЛА ФЕЙНМАНА И ЕЕ ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ

В предыдущей главе мы определили нелинейное континуальное уравнение. Однако возникает вопрос: на каком основании мы назвали полученное выражение интегралом. Этот вопрос может быть отнесен и к фейнмановскому интегралу, пока комплексная мера в нем не определена. С большим правом можно было бы фейнмановский интеграл по путям назвать интегралом, если бы он аппроксимировался суммами по ломаным путям. Именно такой аппроксимацией и ее обобщением мы и будет заниматься во второй части книги. Мы попытаемся дать суммам по различным совокупностям ломаных путей вероятностную трактовку. Непосредственное отношение к вопросу о мере в континуальном интеграле имеет задача о «фейнмановской трубке», т. е. об определении континуального интеграла не по всему пространству, а по некоторой «трубке» в пространстве траекторий. Мы увидим ниже, что «трубки» не исчерпывают всех множеств путей, меру которых нам нужно было бы определить, чтобы ответить на вопрос о мере в континуальном интеграле Фейнмана. Подмножество «трубок» образует лишь подмножество «событий», которое мы называем ниже псевдоистинными. Тем не менее в § 1 мы начнем именно с интерпретации «трубок» Фейнмана, как «трубок» с абсолютно черной границей.

§ 1. Эвристические соображения

1. Дискретный аналог интеграла по путям. Задача о случайном блуждании броуновской частицы есть пример цепи Маркова. По аналогии мы вводим для задачи о колебаниях решетки с дискретным временем понятие комплексной марковской цепи. Это понятие и есть дискретный аналог интеграла по путям. Теорема о том, что комплексная марковская цепь удовлетворяет уравнению в конечных разностях, является аналогом теоремы Фейнмана о том, что континуальный интеграл удовлетворяет уравнению Шредингера.

Амплитуда однородной марковской цепи, которой является, например, решение однородной по t разностной схемы, за один шаг τ по времени может быть представлена в виде

$$u(\tau) = Au(0), \quad A = \| a_{ij} \|, \quad i, j \leqslant s,$$
$$u(0) = (u_1(0), \ldots, u_s(0)),$$

где A — матрица, не зависящая от t. Для шага $n\tau$ получаем

$$u(n\tau) = A^n u(0).$$

Теперь определим амплитуду виртуального пути. Пусть в момент 0 колебался i_0-й атом кристаллической решетки (все остальные покоились). В момент τ оставим колеблющимся только i_1-й атом, а все остальные остановим, т. е. положим все компоненты вектора $u(\tau)$, за исключением i_1-й, равными нулю. Далее действуем вновь матрицей A, затем положим все компоненты полученного вектора, за исключением i_2-й, равными нулю, и т. д. В результате мы получим амплитуду виртуального пути $(i_0, i_1, \ldots, i_N, k)$ (N — число шагов по t), равную $u_{i_0}(0)\, a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{N-1} i_N} a_{i_N k}$. Очевидно, что

$$u_k(N\tau) = \sum_{i_0, i_1, \ldots, i_{N-1}} u_{i_0}(0)\, a_{i_0 i_1} \ldots a_{i_{N-1} i_N} a_{i_N k}$$

с единственной отличной от нуля k-компонентой. Пусть $b_{i_k i_{k+1}} = \ln a_{i_k i_{k+1}}$, и пусть $u_{i_0}(0)$ — единичный вектор. Тогда

$$u_k(N\tau) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_N} \exp\{i(b_{(i_0, i_1)} + \ldots + b_{(i_N, k)})\}. \tag{1.1}$$

Обозначим через $\mathscr{L}(i_0, k)$ множество всех виртуальных путей, приходящих из i-го узла в k-й, а через $l = l_{i_1, \ldots, i_N}$ — виртуальный путь $(i_0, i_1, \ldots, i_{N,k})$. Пусть

$$\sum b_l = \sum_{i_1, \ldots, i_N} (b_{i_0, i_1} + b_{(i_1, i_2)} + \ldots + b_{(i_N, k)}).$$

Тогда формулу (1.1) можно будет переписать в виде

$$u_k(N\tau) = \sum_{l \in \mathscr{L}(i_0, k)} \exp\left\{i \sum b_l\right\}.$$

Сумму в экспоненте нетрудно представить как криволинейный интеграл по ломаной от некоторого функционала, который мы будем называть *лагранжианом* данной разностной схемы (или комплексной марковской цепи). В частности, если схема однородна по x, т. е. $a_{kj} = a(k - j)$, то, полагая $L(z) = -i \ln a(z)$, получим *)

$$u_k(N\tau) = \sum_{l \in \mathscr{L}(i_0, k)} \exp\left\{\frac{i}{\tau} \int_l L(\dot{x})\, dt\right\},$$

где l — путь по ломаной, соединяющей i_0-й и k-й узлы.

Мы получили дискретный аналог интеграла по путям Фейнмана. Ясно, что дискретная аппроксимация T-произведения также приводит к интегралу Фейнмана. С точки зрения получения квазиклассических асимптотик такое представление T-произведения представляется весьма удобным, так как к континуальному интегралу Фейнмана может быть применен метод стационарной фазы.

---

*) Величина $\ln a(z)$ имеет связь с аналогом энтропии в комплексной теории вероятностей.

2. Вероятностная трактовка подмножества множества путей. Мы попытаемся здесь дать некоторую физическую интерпретацию различных подмножеств множества путей в сумме (1.1). Прежде всего возникает вопрос о том, можно ли на каком-нибудь эксперименте получить «событие», отвечающее любому подмножеству множества путей $\mathscr{L}(i_0, k)$. Для важного класса подмножеств ответ на этот вопрос содержится, по существу, в первоначальной работе Фейнмана о континуальном интеграле для уравнения Шредингера. Для того чтобы перенести соображения Фейнмана на дискретный случай, мы повторим их вначале применительно к задаче о распространении света.

Совершенно ясно, как поставить эксперимент, который был бы ответом на вопрос, распространяется ли солнечный луч прямо. Очевидно, что нужно поставить перпендикулярно по отношению к направлению на Солнце черные плоскости с отверстиями (черные диафрагмы), центры которых находятся на этой прямой. Если (при радиусе отверстий, много большем длины волны) интенсивность света I_1 вблизи прямой, проходящей через диафрагмы, не отличается (с заданной степенью точности) от интенсивности света I_2 без диафрагмы, то можно сказать, что солнечный луч прямой. Этот эксперимент покажет одновременно применимость в данных условиях геометро-оптического подхода.

Математическое описание постановки эксперимента с черными поглощающими диафрагмами в стационарном случае весьма сложно. В случае же света, распространяющегося от мгновенного источника, задача с установкой черных диафрагм в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ставится следующим образом. Решаем задачу Коши для момента t_1 и полученное решение и его производные по t умножаем на характеристическую функцию диафрагмы χ, равную единице в отверстии диафрагмы и нулю вне его. Полученные функции принимаем вновь в качестве начальных условий и решаем задачу Коши до момента t_2, затем снова умножаем полученное решение на характеристическую функцию второй диафрагмы χ и т. д. Умножение на функцию χ означает, что вся часть решения, за исключением отверстия, поглощается.

Если наш эксперимент настолько точен или отверстия настолько малы, что интенсивности I_1 и I_2 не равны, то очевидно, что, вообще говоря, будет отлична от нуля и интенсивность света, распространяющегося вдоль кривой. Иными словами, если мы вдоль некоторой кривой поставим черные диафрагмы, то интенсивность прошедшего через них света будет отлична от нуля. Интенсивность света пропорциональна числу фотонов, поэтому мы можем интенсивность света, прошедшего через диафрагму, трактовать как вероятность прохождения фотонов вдоль данной кривой, или, точнее, трубки вокруг этой кривой. При этом чем больше мы поставим диафрагм вдоль кривой, тем точнее мы вычислим вероятность того, что фотон проходит вдоль этой трубки. В пределе, когда промежутки между диафрагмами устремятся к нулю, мы получим черную трубку, т. е. такую трубку, стенки которой поглощают, как абсолютно черное тело.

Интуитивно ясно, что если трубка прямая, то вычисление интенсивности света, прошедшего через эту трубку, дает нам вероятность того, что фотоны распространяются по прямой. Менее очевиден следующий логический переход: если трубка кривая, то интенсивность света, прошедшего через эту трубку, дает нам вероятность того, что фотон распространяется вдоль этой кривой.

Проделаем такой же опыт для диффундирующих частиц. Иными словами, поставим «черные» ворота для диффундирующих частиц вдоль некоторой кривой: пусть стенки ворот обладают тем свойством, что любая частица, дотрагивающаяся до них, прилипает к ним. Это означает полное поглощение частиц на стенках, т. е. аналог абсолютно черного тела. По аналогии мы будем говорить об этих воротах как о черных диафрагмах. Математически их можно описать, умножая решение уравнения диффузии на функцию χ, равную нулю вне ворот в момент t_1, затем, снова решая с этим новым начальным условием уравнение диффузии до момента t_2 и т. д., словом, совершенно аналогично случаю волнового уравнения. Полученное решение (а не квадрат его, как в случае волнового уравнения) определяет вероятность прохождения диффузионных частиц через ворота — диафрагмы. Если промежутки между диафрагмами устремить к нулю, мы получим черную трубку, на стенках которой частица прилипает.

Как известно, условия прилипания на стенках трубки равносильны нулевым краевым условиям на этой стенке для решения уравнения диффузии. Аналогично для уравнения теплопроводности условием полного поглощения является, очевидно, абсолютный нуль температуры. Таким образом, в этом случае, в отличие от волнового уравнения, проблема абсолютно черного тела решается просто. В случае волнового уравнения эта проблема не решена (см. [10]).

Отметим, что вероятность для диффузионной частицы пройти черную трубку равна мере Винера этой трубки. По аналогии можно сказать, что решение соответствующей задачи для уравнения Шредингера дало бы «меру Фейнмана» трубки для фейнмановского континуального интеграла. Таким образом, проблема определения «меры Фейнмана» трубки эквивалентна проблеме математического описания «абсолютно черного тела» на границе трубки. Последняя проблема поставлена еще в прошлом веке, а первая возникла после работ Фейнмана в 50-х годах нашего столетия.

Есть еще одно существенное и глубокое физическое различие в волновой и диффузионной задачах. Диффундирующая частица, которая проходит через ворота, «не знает» о том, что рядом ворота, а фотон «знает». Иначе говоря, для диффундирующей частицы мы можем поставить мысленно ворота и следить только за теми частицами, которые через них проходят. Это невозможно сделать для света в силу его волновой природы. Таким образом, ставя диафрагмы в случае света, мы существенно влияем экспериментом на процесс распространения света, а в случае диффундирующих частиц — несущественно. Эти рассуждения становятся ясными при переходе к дискретному аналогу процесса диффузии — случайному блужданию броуновской частицы и дискретному аналогу волнового уравнения — системе уравнений колебаний кристаллической решетки. В то время как в задаче о случайном блуждании частица может проходить любой путь с некоторой вероятностью, в случае, например, одномерной кристаллической решетки из n центров x_i, $i = 1, \ldots, n$, лежащих на окружности *), ситуация иная. Эту последнюю задачу, для простоты, будем рассматривать с дискретным временем $t_1, t_2, \ldots, t_N$ (например, если бы мы считали задачу на ЭВМ,

*) То есть n шариков, соединенных пружинками. Эта задача полностью детерминирована. Но по аналогии с волновой механикой мы ниже придаем ей вероятностную интерпретацию.

то мы рассматривали бы разностную аппроксимацию производной по времени). Ситуация, при которой в момент t_1 отклоняется центр x_{i_1}, а остальные остаются в покое, в момент t_2 — центр x_{i_2}, а остальные покоятся, и вообще — в момент t_k отклоняется центр x_{i_k}, остальные в покое, разумеется, невозможна — такого события не существует. Поэтому такое явление мы будем называть *виртуальным событием* (*виртуальным путем* x_{i_k}). Такое виртуальное событие мы можем осуществить лишь насильственно, останавливая в каждый момент t_k колебания всех центров, за исключением x_{t_k}. Математически это означает, что в моменты t_k мы действуем на решение матрицей, у которой все элементы a_{ij} равны нулю и лишь $a_{i_k i_k} = 1$. Эта операция является дискретным аналогом умножения на характеристическую функцию диафрагмы.

В случае задачи о случайном блуждании, складывая вероятности путей частицы, мы можем получить вероятность любого события. В случае колебаний решетки, разумеется, сумма вероятностей виртуальных путей x_{t_k}, $k = 1, \ldots, n$, не равна вероятности суммы. Если первая сумма по путям является дискретным аналогом винеровского континуального интеграла, то вторая сумма по путям есть дискретный аналог фейнмановского континуального интеграла *). По существу, уравнение, описывающее случайные блуждания, является разностной схемой, аппроксимирующей уравнение диффузии, а задача о колебании решетки с дискретным временем — разностной схемой, аппроксимирующей волновое уравнение.

Многие свойства интегралов имеют точный дискретный аналог и могут быть проверены на суммах по путям. Если мы рассматриваем сумму по всем путям (x_{i_k}, t_k), лежащим в некоторой заданной трубке, то получаем дискретный аналог абсолютно черной трубки и «меры Фейнмана». Оказывается более удобным рассматривать именно такую аппроксимацию черной трубки; а не конечно-диафрагменную, как это делал сам Фейнман.

Простейшей черной трубкой будет описанный ранее виртуальный путь x_{t_k}, который естественно принять в качестве элементарного виртуального события.

Аналогом черной трубки, не зависящей от t, служит произведение

$$u_{\text{тр}} = (PA)^n u(0),$$

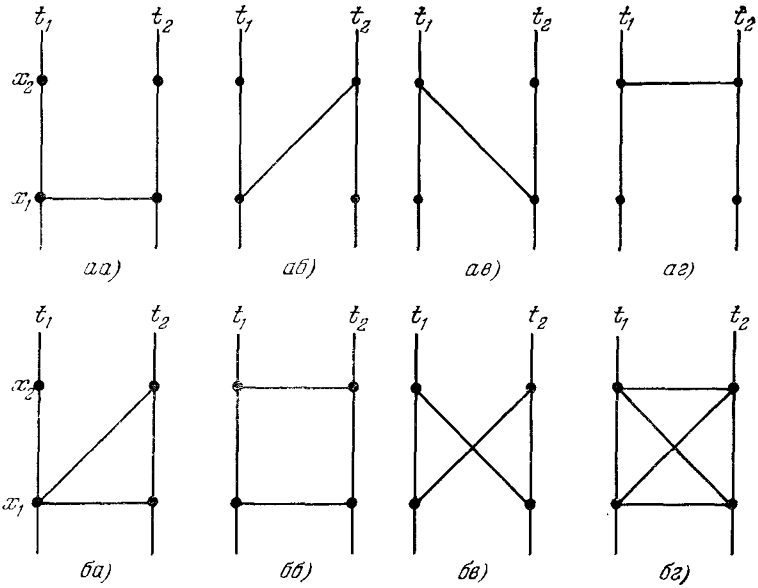
где P — матрица, у которой все элементы нули и лишь на диагонали, в части, отвечающей отверстию трубки, стоят единицы. Если выбросить из матрицы A все те строки и столбцы, которые соответствуют нулевым строкам и столбцам матрицы P, то мы получим некоторую квадратную матрицу B порядка, равного рангу A. Ясно, что ненулевые элементы вектора $u_{\text{тр}}$ равны $B^n P u_0$ (под $P u_0$ понимаем те элементы u_0, которые отвечают единицам матрицы P). Таким образом, дискретная аппроксимация черной трубки легко поддается численному счету.

Кроме фейнмановской трубки, необходимо рассматривать всевозможные подмножества множества элементарных виртуальных

*) Точнее, обобщение фейнмановского интеграла на релятивистский случай волнового уравнения, который мы здесь даем.

путей для того, чтобы получить дискретный аналог не только трубки, но и любого множества.

Рассмотрим примеры таких подмножеств в случае $n = 2$, т. е. кристаллическую решетку из двух центров x_1, x_2 и два момента времени: t_1 — начальный момент и t_2 — конечный. В этом случае путь $(x_1 \to x_2)$ является событием, означающим, что в начальный момент времени мы отклонили лишь атом x_1, а в конечный момент t_2 смотрим, как отклонился атом x_2 (мысленно остановив все остальные). Рассмотрим также пути $(x_1 \to x_1)$, $(x_1 \to x_2)$, $(x_2 \to x_1)$, $(x_2 \to \to x_2)$ (см. рисунок).



Объединение двух первых событий $(x_1 \to x_1) + (x_1 \to x_2)$ состоит в том, что мы отклонили в первый момент t_1 атом x_1 и наблюдаем в момент t_2 отклонения двух атомов x_1 и x_2. Точно также объединение $(x_1 \to x_1) + (x_2 \to x_1)$ есть событие, состоящее в том, что мы отклонили атомы x_1 и x_2 в момент t_1 и наблюдаем отклонение атома x_1 в момент t_2. Но событие, состоящее в объединении $(x_1 \to x_1) + + (x_2 \to x_2)$, вообще никоим образом не может быть осуществлено на одной решетке даже с помощью вмешательства наблюдателя в процесс колебаний (о котором мы говорили ранее *)). Эти события могут быть одновременно осуществлены лишь на двух экземплярах решетки **). Это объединение — виртуальное событие. Точно так же объединение $(x_1 \to x_2) + (x_2 \to x_1)$ виртуальное.

* Так как в этом событии отклонение x_1 в момент t_1 не влияет на отклонение x_2 в момент t_2, а отклонение x_2 в момент t_1 не влияет на отклонение x_1 в момент t_2.

**) Значит, вероятность суммы таких событий может быть (вообще говоря) больше единицы, или, точнее, должна быть нормирована уже по-другому (перенормирована).

Замечательно, что объединение двух последних виртуальных событий уже будет истинным событием *); оно состоит в том, что мы отклонили в момент t_1 атомы x_1 и x_2 и наблюдаем их же в момент t_2.

Аналогичный пример можно привести, взяв два последующих момента времени t_k и t_{k+1} и рассматривая совокупность всевозможных путей, приводящих из фиксированной начальной точки x_s, t_1 в фиксированную конечную x_r, t_n, а в моменты t_k, t_{k+1}, проходящих один из отрезков рисунка. Событие, отвечающее рисунку *аб*, состоит в том, что мы вмешиваемся в процесс колебания атомов, останавливая в момент t_k (t_{k+1}) все атомы, кроме x_1 (x_2). Совокупность двух таких событий (*ба*) уже невозможно осуществить на одной решетке с помощью диафрагм. Чтобы отличать виртуальные события, которые могут осуществляться на одной решетке с помощью вмешательства наблюдателя, от виртуальных событий, которые вообще не могут быть осуществлены на одной решетке, мы будем первые называть псевдоистинными. Таким образом, элементарные виртуальные события — пути — псевдоистинные **).

В теории цепей Маркова часто говорят о некоторой физической системе S, которая в каждый момент времени может находиться в одном из состояний $A_1, \ldots, A_k$ и меняет свое состояние только в моменты $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ Такая же терминология может быть естественным образом принята для следующей задачи в случае комплексных марковских цепей. Рассматривается эволюционирующая квантовая система в энергетическом представлении некоторого оператора H, причем производная по времени заменяется конечно-разностной в моменты $t = t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ В этом случае задача о черной трубке, т. е. об определении амплитуды псевдоистинных событий, еще более актуальна. Здесь речь идет об эволюции квантовой системы при наличии энергетического фильтра, т. е. резонансного поглощения некоторых энергий (или частот).

Введем теперь строгое определение виртуального события для простого частного случая. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Шредингера ($x \in \mathrm{R}$, $t \geqslant 0$):

$$i\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \qquad \psi(x,0) = \psi_0(x),$$

где $\psi = \psi(x, t)$, $\psi_0 \in C_0^\infty(\mathrm{R})$. Пусть $G(x, \xi, t)$ — функция Грина этого уравнения и $\chi_{a,b}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[a, b]$:

$$\chi_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in [a,b], \\ 0 & \text{для } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Функция

$$\psi_{a,b}(x,t,s) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\,\chi_{a,b}(y)\,dy \int_{-\infty}^{\infty} G(y,\xi,s)\,\psi_0(\xi)\,d\xi$$

---

*) А значит, его вероятность не больше единицы: происходит интерференция.

**) Их вероятности не превосходят единицы.

описывает состояние в момент $t+s$ электрона, пролетавшего через черную диафрагму в момент s. Очевидно, что для любой точки $c \in [a, b]$ имеет место равенство $\psi_{a,b} = \psi_{a,c} + \psi_{c,b}$.

Обозначим через $\psi_\Omega(x)$, где $\Omega = [a, b] \times [\alpha, \beta]$, функцию, равную $\psi_{a,b}(x, t, s)$ при $x \in [\alpha, \beta]$ и нулю при $x \in R \setminus [\alpha, \beta]$. Вероятность обнаружить на отрезке $[\alpha, \beta]$ частицу, прошедшую через диафрагму $[a, b]$, равна

$$P = \| \psi_\Omega \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | \psi_\Omega(x) |^2 dx.$$

Таким образом, прямоугольнику Ω плоскости R^2 можно сопоставить (виртуальное) событие, состоящее в том, что электрон, пройдя черную диафрагму $[a, b]$, попал на экран $[\alpha, \beta]$. Вероятность этого события равна $\| \psi_\Omega \|^2$. Это соответствие может быть естественным образом обобщено.

Плоскость R^2 есть прямое произведение прямой x, на которой расположен экран, и прямой y, на которой расположена диафрагма. Первую прямую будем называть *базой*, а вторую — *слоем*.

Множество всех подмножеств из R^2 составляет булеву алгебру относительно естественных операций объединения и пересечения. Элементы этой алгебры мы будем называть *виртуальными событиями*, а всю плоскость — *пространством элементарных виртуальных событий*. Функцию $\psi_\Omega(x)$, следуя Фейнману, будем называть (комплексной) *амплитудой* события Ω. Аналогично, обозначая через $\chi_g(x, y)$ характеристическую функцию области $g \in R^2$, положим

$$\psi_g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy G(x, y, t)\, \chi_g(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} G(y, \xi, s)\, \psi_0(\xi)\, d\xi$$

и, если эти интегралы сходятся, будем называть $\psi_g(x)$ амплитудой события g. *Интенсивностью* $P(g)$ события g будем называть квадрат нормы амплитуды. (Моменты времени t и s здесь фиксированы).

Элементарному виртуальному событию — точке $w \in R^2$, с координатами (x, ξ) — сопоставим комплексное число

$$z(w) = G(x, \xi, t) \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, y, s)\, \psi_0(y)\, dy,$$

которое будем называть *амплитудой* элементарного виртуального события.

Среди виртуальных событий выделим важный класс псевдоистинных событий, а среди псевдоистинных — класс истинных событий. Виртуальные события содержат псевдоистинные, которые в свою очередь содержат истинные. *Псевдоистинным* событием будем называть событие, отвечающее прямому произведению отрезка слоя на отрезок базы. Такие события могут быть осуществлены с помощью черных диафрагм с отверстиями, отвечающими отрезкам слоя, и экранов, отвечающих отрезкам базы. Пересечение (произведение) двух псевдоистинных событий — псевдоистинное событие. Ему отвечают наложенные друг на друга диафрагмы и экран, равный пересечению экранов. Объединение псевдоистинных событий, очевидно, уже не является псевдоистинным, что мы уже видели на примере колебаний кристаллической решетки.

Примем в качестве суммы двух псевдоистинных событий наименьшую (несвязную, вообще говоря) область, составленную из прямоугольников, которая их заключает. Тогда множество псевдоистинных событий образует структуру *). Сумме отвечает событие, которое получается, если объединить диафрагмы и экраны членов суммы. Интенсивность псевдоистинного события, как нетрудно убедиться, не превосходит единицы и имеет смысл вероятности (см. [19, 22]).

Истинным событием будем называть прямоугольник $\{(x, y) : \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \quad -\infty \leqslant y \leqslant \infty\}$. Амплитуда такого истинного события равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} dyG(x, y, t) \int_{-\infty}^{\infty} G(y, \xi, s)\, \psi_0(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t+s)\, \psi_0(y)\, dy$$

при $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ и нулю вне этого отрезка. Таким образом, при $x \in [\alpha, \beta]$ амплитуда совпадает с решением уравнения Шредингера, а интеграл от ее квадрата определяет (истинную) вероятность нахождения электрона на интервале (α, β) в момент $t+s$. Множество истинных событий, очевидно, составляет подалгебру алгебры виртуальных событий.

Введем теперь понятие виртуальных несовместных событий, отвечающее классическому понятию теории вероятности. События называются *несовместными*, если их проекции на x (базу) не пересекаются (в отличие от классического случая, где требуется, чтобы не пересекались лишь сами события). Очевидно, что для двух несовместных событий интенсивность их суммы равна сумме интенсивностей.

В алгебре виртуальных событий отдельно выделяется важный случай непересекающихся событий. Будем называть виртуальные события *непересекающимися*, если отвечающие им области не пересекаются. Амплитуда суммы двух непересекающихся событий равна сумме амплитуд каждого из событий, но интенсивность суммы таких событий, вообще говоря, не равна сумме интенсивностей. Как нетрудно видеть, имеет место лишь грубое неравенство

$$P\left(\sum_{1}^{n} g_i\right) \leqslant n \sum_{1}^{n} P(g_i),$$

если $g_i \cap g_k = \phi$, $i \neq k$.

§ 2. Определение комплексной марковской цепи

Пусть задано конечное множество $K = \{a_1, \ldots, a_k\}$, элементы которого называются *элементарными состояниями*, и целое положительное N. Рассмотрим множество Ω всевозможных

*) Эта структура называется ортомодулярной и впервые была рассмотрена Нейманом в другой ситуации для определения логики квантовых систем.

последовательностей N состояний

$$\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_N}\} = \omega_i \qquad i = (i_1, \ldots, i_N),$$

называемых *элементарными виртуальными событиями*, и предположим, что каждой последовательности состояний ω_i сопоставлен комплексный вектор $\psi(\omega_i)$, имеющий k компонент:

$$\psi(\omega_i) = (\psi_1(\omega_i, \ldots \psi_k(\omega_i)),$$

причем $\psi_k(\omega_i) = 0$, если $k \neq i_N$. Определим функцию ψ на алгебре $\mathfrak{A}$ всех подмножеств множества Ω, полагая

$$\psi(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} \psi(\omega_i), \qquad A \in \mathfrak{A}. \tag{2.1}$$

Таким образом, на алгебре $\mathfrak{A}$, элементы которой называются *виртуальными* событиями, задана аддитивная функция множества ψ: $\mathfrak{A} \to C^k$ *). Виртуальные события A и A' называются *ортогональными*, если ортогональны векторы $\psi(A)$ и $\psi(A')$. Виртуальное событие, обозначаемое через A_j^m, состоящее из всех последовательностей состояний, удовлетворяющих условию $a_{i_m} = a_j$, будем называть *состоянием a_j в момент m*, или короче — *состоянием*.

Функция ψ называется *амплитудой*, если она нормирована: $\|\psi(\Omega)\|^2 = \sum_{j=1}^{k} |\psi_j(\Omega)|^2 = 1$ и в любой фиксированный момент m различные состояния попарно ортогональны: $\langle\psi(A_l^m), \psi(A_j^m)\rangle = 0$, если $j \neq l$.

Предложение 2.1. *Квадрат нормы амплитуды объединения состояний $\bigcup_{j \in J} A_j^m$ равен сумме квадратов норм их амплитуд. Квадрат нормы амплитуды любого состояния не превосходит единицы.*

Доказательство. Для любого $m \leqslant N$ амплитуда множества $\bigcup_{j \in J} A_j^m$ равна сумме амплитуд виртуальных событий A_j^m ($j \in J$). Поскольку амплитуды этих событий попарно ортогональны, то

$$\|\psi(\bigcup_{j \in J} A_j^m)\|^2 = \Big\|\sum_{j \in J} \psi(A_j^m)\Big\|^2 = \sum_{j \in J} \|\psi(A_j^m)\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k} \|\psi(A_j^m)\|^2 = 1.$$

Предложение доказано.

---

*) Через C^k обозначено конечномерное линейное пространство векторов $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$ со скалярным произведением $\langle\varphi, \psi\rangle = \sum_{i=1}^{k} \bar{\varphi}_i \psi_i$ и нормой $\|\psi\| = (\langle\psi, \psi\rangle)^{1/2}$. Черта сверху означает комплексное сопряжение.

Будем называть *интенсивностью* виртуального события A квадрат нормы его амплитуды. Предложение 2.1 показывает, что интенсивность любого состояния не превосходит единицы.

Определение 2.1. Пусть на алгебре $\mathfrak{A}$ виртуальных событий задана амплитуда ψ. Будем говорить, что она определяет *комплексную марковскую цепь* (КМ-цепь), если существует набор унитарных матриц $\{Z^l\}_1^{N-1}$ и единичный вектор ψ^0 *) такие, что амплитуда любого элементарного виртуального события $\omega_i = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_N}\}$ равна

$$\psi(\omega_i) = (\psi_1, \ldots, \psi_k)\colon \ \psi_i = 0, \text{ если } i = i_N$$

и

$$\psi_{i_N}(\omega_i) = \left(\prod_{l=1}^{N-1} z^l_{i_{l+1} i_l} \right) \psi^0_{i_1} \quad {}^{**)} . \tag{2.2}$$

Матрицы Z^l, $l = 1, 2, \ldots, N-1$, называются *матрицами перехода* КМ-цепи за один шаг, а матричные элементы Z^l_{ij} — *амплитудами перехода* из состояния a_j в состояние a_i. КМ-цепь называется *однородной*, если амплитуды перехода за один шаг не зависят от номера шага.

Множество K называется *множеством состояний* КМ-цепи.

§ 3. Марковские свойства комплексных цепей

Рассмотрим основные свойства амплитуды КМ-цепей. Пусть $I_1, \ldots, I_N$ — подмножества множества $\{1, 2, \ldots, k\}$. Вычислим амплитуду виртуального события

$$A_{I_1, \ldots, I_N} = \bigcup_{i\colon i_1 \in I_1, \ldots, i_N \in I_N} \omega_i .$$

Виртуальные события такого вида называются *псевдоистинными*.

Обозначим через $\hat{\chi}_I$ диагональную матрицу, у которой диагональный элемент равен единице, если $i \in I$, и нулю в противном случае.

Лемма 3.1. *Амплитуда псевдоистинного события* $A_{I_1, \ldots, I_N}$ *равна*

$$\psi(A_{I_1, \ldots, I_N}) = (\hat{\chi}_{I_N} \circ Z^{N-1} \circ \hat{\chi}_{i_{N-1}} \circ \ldots \circ Z^1 \circ \hat{\chi}_{I_1}) \psi^0. \tag{3.1}$$

Доказательство. Из определения функции ψ следует, что амплитуда элементарного виртуального события ω_i равна

$$\psi(\omega_i) = (\hat{\chi}_{i_N} \circ Z^{N-1} \circ \hat{\chi}_{i_N} \circ \ldots \circ Z^1 \circ \hat{\chi}_{i_1}) \psi^0.$$

*) Все матрицы имеют размер $k \times k$, а векторы — k компонент.

**) По аналогии с определением случайного процесса (см. [19]) можно дать более формальное определение КМ-цепи. Например, под КМ-цепью можно понимать набор функций $\{\xi_j\}_{j=1}^N$, где $\xi_j\colon \Omega \to K$, причем $\xi_j(\omega_i) = a_{i_j}$.

Суммируя амплитуды элементарных виртуальных событий, представленные в такой форме, получаем (3.1). Лемма доказана.

Если A и A' — два виртуальных события, то *условной интенсивностью* события A относительно A' назовем величину

$$I(A/A') = \frac{\|\psi(A \cap A')\|^2}{\|\psi(A')\|^2}.$$

Рассмотрим теперь виртуальное событие $A = A_{i_{l+1}, i_l, \ldots, i_j}^{l+1, l, \ldots, j}$, состоящее из объединения всех последовательностей состояний ω_i, принимающих фиксированные значения $a_{i_j}, \ldots, a_{i_l}, a_{i_{l+1}}$ в моменты $j, \ldots, l, l+1$. Аналогично определяем виртуальное событие $A' = A_{i_2, \ldots, i_j}^{l, \ldots, j}$. По аналогии со случаем цепей Маркова будем говорить, что виртуальному событию $A_{i_{l+1}, i_l, \ldots, i_j}^{l+1, l, \ldots, j}$ отвечает последовательность состояний КМ-цепи $a_{i_{l+1}}$ в момент $l+1$, a_{i_l} — в момент l, и т. д. a_{i_j} в момент j.

Теорема 3.1. *Условная интенсивность виртуального события $A = A_{i_{l+1}, i_l, \ldots, i_j}^{l+1, l, \ldots, j}$ относительно $A' = A_{i_l, \ldots, i_j}^{l, \ldots, j}$ зависит только от состояний КМ-цепи в моменты l и $l+1$ и равна квадрату модуля амплитуды перехода из состояния a_{i_l} в состояние $a_{i_{l+1}}$.*

Доказательство. Поскольку матрицы Z^l ($l = 1, 2, \ldots, N-1$) — унитарные, то из определения интенсивности и формулы (3.1) вытекает равенство

$$\|\psi(A \cap A')\|^2 = \|(\hat{\chi}_{i_{l+1}} \circ Z^l \circ \hat{\chi}_{i_l} \circ Z^{l-1} \circ \ldots \circ \hat{Z}^1 \circ \hat{\chi}_{i_1})\psi^0\|^2 = |z_{i_{l+1}, i_l}^l|^2 c_{i_l}^l,$$

где $c_{i_l}^l = \|\hat{\chi}_{i_l} \circ Z^{l-1} \circ \ldots \circ \hat{Z}^1 \circ \hat{\chi}_{i_1})\psi^0\|^2 = \|\psi(A')\|^2$. Поэтому $I(A/A') = |z_{i_{l+1}, i_l}^l|$. Теорема доказана.

Величину $|z_{ij}^l|^2$ будем называть *интенсивностью* перехода из a_j в a_i за один шаг.

Теорема 3.1 показывает, что интенсивность состояний КМ-цепи обладает марковским свойством: *если известно, что в момент l КМ-цепь находилась в состоянии a_{i_l} (событие $A_{i_l}^l$), а в момент $l+1$ — в состоянии $a_{i_{l+1}}$ (событие $A_{i_{l+1}}^{l+1}$), то условная интенсивность виртуального события $A_{i_{l+1}}^{l+1}$ относительно $A_{i_l}^l$ не зависит от того, в каких состояниях находилась КМ-цепь до момента l.* Аналогичным свойством обладает и амплитуда КМ-цепи.

Теорема 3.2. *Пусть φ и θ — произвольные единичные векторы. Если отношение*

$$\frac{\langle \varphi, \psi(A \cap A') \rangle}{\langle \theta, \psi(A') \rangle} = P(A, \varphi/A', \theta), \tag{3.2}$$

где $A = A_{i_{l+1}, i_l, \ldots, i_j}^{l+1, l, \ldots, j}$, $A' = A_{i_l, \ldots, i_j}^{l, \ldots, j}$, конечно, то оно зависит только от состояний КМ-цепи в моменты l и $l+1$.

Доказательство. Из формулы (3.1) следует

$$\langle\varphi, \psi(A \cap A')\rangle = \overline{\Phi}^l_{i_{l+1}} z^l_{i_{l+1}i_l} \psi^l_{i_l},$$

где

$$\Phi^l_{i_{l+1}} = (Z^{l+1} \circ \ldots \circ Z^{N-1}\varphi)_{i_{l+1}},$$

$$\psi^l_{i_l} = (Z^{l-1} \circ \hat{\chi}_{i_{l-1}} \circ \ldots \circ Z^1 \circ \hat{\chi}_{i_1}\psi^0)_{i_l}.$$

(Заметим, что зависимость от состояний, в которых находилась КМ-цепь до момента l, содержит только величина $\psi^l_{i_l}$.)

С другой стороны, $\langle\theta, \psi(A')\rangle = \overline{\Xi}^l_{i_l}\psi^l_{i_l}$, где $\Xi^l_j = (Z^l \circ \ldots \circ Z^{N-1}\theta)_j$. Если $\langle\theta, \psi(A')\rangle \neq 0$, то отношение $P(A, \varphi/A', \theta) = z^l_{i_{l+1}i_l}(\overline{\Phi}^l_{i_{l+1}}/\overline{E}^l_{i_l})$ очевидно, зависит только от состояний КМ-цепи в моменты l и $l+1$. Теорема доказана.

Если φ — единичный вектор гильбертова пространства H, то пространство H можно представить в виде ортогональной суммы подпространства $H_\perp(\varphi)$, ортогонального φ, и его ортогонального дополнения $H(\varphi)$: $H = H_\perp(\varphi) \dot{+} H(\varphi)$. Проекцией вектора ψ в $H(\varphi)$ называют скалярное произведение $\langle\varphi, \psi\rangle$.

По аналогии будем называть *амплитудой виртуального события A в $H(\varphi)$* ($H = \mathbb{C}^k$) величину $\langle\varphi, \psi(A)\rangle$, а отношение $J(A, \varphi/A', \theta)$ — будем называть *условной амплитудой* события A в $H(\varphi)$ относительно A' в $H(\theta)$.

Приняв утверждение теоремы 3.2 в качестве определения КМ-цепи в терминах условной амплитуды, можно в качестве следствия получить формулы (2.2) и, таким образом, прийти к исходному определению.

Наметим путь такого подхода к определению КМ-цепи *).

Пусть $\mathscr{A}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств множества Ω и z — σ-аддитивная функция множества, заданная на $\mathscr{A}$ и принимающая значения в гильбертовом пространстве H. Функцию z назовем *гильбертовым зарядом*, если: а) для любого $\theta \in H$ и любой убывающей последовательности $g_1 \supset g_2 \supset \ldots, \bigcap_{i\geqslant 1} g_1 = \Phi$, $g_i \in \mathscr{A}$, существует предел: $\lim\limits_{i\to\infty}\langle\theta, z(g_i)\rangle = 0$; б) для любого $\theta \in H$ и любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\{g_i\}_1^\infty$ выполнена оценка

$$\sum_{i\geqslant 1} |\langle\theta, z(g_i)\rangle| \leqslant \|\theta\|_H \,\mathrm{const}.$$

Пространством с амплитудой называется тройка $(\Omega, \mathscr{K}, \psi)$, состоящая из пространства элементарных виртуальных событий Ω, полукольца виртуальных событий $\mathscr{K}$, содержащего множество Ω в качестве элемента, и аддитивной функции множества $\psi: \mathscr{K} \to H$ (называемой амплитудой) такой, что $\|\psi(\Omega)\|_H = 1$, где H — гильбертово пространство.

---

*) Это замечание содержит попытку наметить аксиоматический подход и в дальнейшем использоваться не будет.

Пусть I — некоторое множество индексов; семейство операторов $\{\pi_i\}_{i\in I}$, действующих в $\mathcal{K}$, называется *проекционным*, если для любого $i \in I$ выполнены четыре условия: а) $\pi_i^2 = \pi_i$; б) образ $\pi_i\mathcal{K}$ полукольца $\mathcal{K}$ является σ-алгеброй, содержащей Ω; в) сужение амплитуды ψ на σ-алгебру $\pi_i\mathcal{K}$ является гильбертовым зарядом на $\pi_i\mathcal{K}$; г) амплитуды непересекающихся виртуальных событий из $\pi_i\mathcal{K}$ ортогональны.

Четверка $W = (\Omega, \mathcal{K}, \psi, \{\pi_i\}_{i\in I})$ называется *пространством с проекционным семейством.*

Нетрудно определить интеграл на $\pi_i\mathcal{K}$, доказав, что для любого $\theta \in H$ сужение функции множества $\langle\theta, \psi(g)\rangle$: $\mathcal{K} \to C$ на σ-*алгебру* $\pi_i\mathcal{K}$ является зарядом на $\pi_i\mathcal{K}$.

Можно обобщить понятие случайной величины и случайного процесса. Для этого достаточно установить, что сужение интенсивности $I(g) = \|\psi(g)\|_H^2$ на $\pi_i\mathcal{K}$ является вероятностной мерой.

Пусть $(E, \mathcal{B})$ — измеримое пространство. Пара (π_j, φ), где $\pi_j \in \{\pi_i\}$, а φ — $(\pi_j\mathcal{K}, \mathcal{B})$ — измеримая функция, называется *обобщенной случайной величиной* на W со значениями в $(E, \mathcal{B})$. Пусть T — некоторое множество. *Обобщенным случайным процессом* на W со значениями в $(E, \mathcal{B})$ называется пара $\xi_t = \{\pi_{i(t)}, \varphi_t\}$, $t \in T$, являющаяся при каждом фиксированном t обобщенной случайной величиной. Функция $\psi^{t_1,\ldots,t_n}_{\varphi_{t_1},\ldots,\varphi_{t_n}}$, вычисляемая по формуле

$$\psi^{t_1,\ldots,t_n}_{\varphi_{t_1},\ldots,\varphi_{t_n}}(B_1,\ldots,B_n) = \psi(g^{t_1,\ldots,t_n}_{B_1,\ldots,B_n}), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где

$$g^{t_1,\ldots,t_n}_{B_1,\ldots,B_n} = \bigcap_{k=1}^{n} g^{t_k}_{B_k}, \quad g^{t_k}_{B_k} = \{\omega: \quad \varphi_{t_k}(\omega) \in B_k\},$$

называется конечномерным *распределением амплитуд* обобщенной случайной величины.

Если $i(t) = i$, то можно считать, что ξ_t — случайная величина, а функция $I^{t_1,\ldots,t_n}_{\varphi_{t_1},\ldots,\varphi_{t_n}} = \|\psi^{t_1,\ldots,t_n}_{\varphi_{t_1},\ldots,\varphi_{t_n}}\|_H^2$ — ее конечномерное распределение вероятностей.

Чем же является с этой точки зрения КМ-цепь? Пусть задано множество $E = E_k = (a_1, \ldots, a_k)$, элементы которого называются *состояниями*, и $\Omega = \Omega_N^k$ — множество последовательностей N состояний. Каждая последовательность

$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_N}) = \omega_{i_1,\ldots i_N} = \omega_{\boldsymbol{i}}, \qquad \boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_N)$$

называется *элементарным виртуальным событием.*

Рассмотрим множество унитарных матриц $\{Z^l\}$ размера $k \times k$ и единичный вектор $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, $\|\varphi\| = \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi_i|^2\right)^{1/2}$. Определим амплитуду ψ на полукольце $\mathcal{K}_N^k$, элементами которого являются множества

$$g_{I_1,\ldots,I_N}^{t_1,\ldots,t_N} = \bigcup_{i:i_1\in I_1,\ldots,i_N\in I_N} \omega_i,$$

$$\psi(g_{I_1,\ldots,I_N}^{t_1,\ldots,t_N}) = (\chi_{I_N}\circ Z^{N-1}\circ\chi_{I_{N-1}}\circ\ldots\circ\chi_{I_2}\circ Z^1\circ\chi_{I_1})\,\varphi.$$

Семейство операторов $\{\pi_i\}_1^N$, действующих в $\mathcal{K}_N^k$ по правилу

$$\pi_j g_{I_1,\ldots,I_j,\ldots,I_N}^{t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_N} = \bigcup_{i:i_j\in I_j} \omega_i,$$

является проекционным, поэтому четверка $W_N^k = (\Omega_N^k, \mathcal{K}_N^k, \psi, \{\pi_i\}_1^N)$ является пространством с проекционным семейством.

Определение 3.1. *КМ-цепью* на W_N^k со значениями в E_k называется обобщенный случайный процесс $\xi_i = \{\pi_i, \varphi_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, такой, что

$$\varphi_j\colon\quad \Omega_N^k \to E_k, \quad \varphi_j(\omega_i) = a_{ij}.$$

Если амплитуда любого состояния обобщенного случайного процесса ξ_i на W_N^k со значениями в E_k отлична от нуля, то можно дать следующее эквивалентное определение КМ-цепи в терминах определенной выше условной амплитуды.

Определение 3.2. Обобщенный случайный процесс на W_N^k со значениями в E_k называется *КМ-цепью*, если при $l = 1, 2, \ldots, N$ условная амплитуда виртуального события $g_{I_1,\ldots,I_{l-1},i,j}^{t_1,\ldots,t_{l-1},t_l,t_{l+1}}$ в h_φ относительно $g_{I_1,\ldots,I_{l-1},i}^{t_1,\ldots,t_{l-1},t_l}$ в h_θ не зависит от состояний процесса в моменты $t_1, \ldots, t_{l-1}$.

§ 4. Лагранжиан КМ-цепи

Предположим, что интенсивности переходов КМ-цепи отличны от нуля. Такая КМ-цепь называется КМ-цепью *без запрещенных переходов*.

Пусть элементарными состояниями КМ-цепи являются точки вещественной прямой: $K = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $a_j \in \mathrm{R}$. Для простоты будем считать, что $a_j = jh$, где $h > 0$. Через последовательность точек $\{(a_{i_l}, \tau l)\}_{l=1}^N$, $\tau > 0$, на плоскости (x, t) проведем непрерывную кривую $x(t)$, линейную при $t \in [(l-1)\tau, l\tau]$, называемую *траекторией*. Можно считать, что множество элементарных виртуальных событий Ω состоит из траекторий, так как эти множества совпадают с точностью до изоморфизма. Рассмотрим кусочно-линейную интерполяцию комплексной энтропии.

Обозначим через $\theta_l(t)$ непрерывную функцию, равную нулю при $t \leqslant \tau l$, единице при $t \geqslant \tau(l+1)$ и линейную при $t \in [\tau l, \tau(l+1)]$. Пусть при $l \leqslant x/h \leqslant l+1$, $m < y/h \leqslant m+1$

$$l(x, y, t) = \sum_{j=1}^{N-1} \theta_j(t) \sum_{l',\, m'=0} \frac{1}{i} \ln z^j_{l+l',\, m+m'} P^{lm}_{l'm'}(x, y), \tag{4.1}$$

где Z^j — матрицы перехода КМ-цепи, а *)

$$P_{l'm'}^{lm}(x, y) = \left[1-(2l'-1)\left(1+l'-\frac{x}{n}\right)\right]\left[1-(2m'-1)\left(m+m'-\frac{y}{n}\right)\right].$$

Определение 4.1. Кусочно-непрерывная комплексная функция $L(x, \dot x, t)$, определенная при почти всех t формулой

$$L(x, \dot x, t) = \frac{\partial}{\partial t} l(x, y, t)\,|_{y=x-\dot x(t-\tau l)}, \quad t \in [\tau l, \tau(l+1)], \qquad (4.2)$$

называется *лагранжианом* КМ-цепи. *Действием* КМ-цепи называется функционал на траекториях, вычисляемый по правилу

$$S[x(t)] = \int_{\tau}^{\tau N} L(x(t), \dot x(t), t)\,dt. \qquad (4.3)$$

Предложение 4.1. *Пусть S — действие КМ-цепи и $x_\omega(t)$ — траектория, отвечающая элементарному виртуальному событию $\omega_i = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_N}\}$. Тогда амплитуда элементарного виртуального события ω_i равна*

$$\begin{gathered}\psi(\omega_i) = (\psi_1(\omega_i), \ldots, \psi_k(\omega_i)); \ \psi_i = 0, \text{ если } i \neq i_N,\\ \psi_{i_N}(\omega_i) = \exp\left\{\frac{i}{\tau}\int_{\tau}^{\tau N} L(x_\omega(t), \dot x_\omega(t), t)\,dt\right\}\psi_{i_1}^0,\end{gathered} \qquad (4.4)$$

где ψ^0 — единичный вектор, определяющий амплитуду КМ-цепи.

Доказательство. Рассмотрим интеграл лагранжиана вдоль траектории $x_\omega(t)$:

$$\int_{\tau}^{\tau N} L(x_\omega(t), \dot x_\omega(t), t)\,dt = \sum_{l=1}^{N-1}\int_{t_l}^{t_{l+1}} L(x_\omega(t), \dot x_\omega(t), t)\,dt.$$

При $t \in (t_l, t_{l+1})$ функция $\dot x_\omega(t)$ постоянна: $\dot x_\omega(t) = (a_{i_{l+1}} - a_{i_l})/\tau$, и $x_\omega(t) = a_{i_l} + \dot x_\omega(t)(t - t_l)$.

Из определения лагранжиана (4.2) вытекает равенство $L(y + \dot x(t-t_l), \dot x, t) = \frac{\partial}{\partial t} l(x, y, t)$, поэтому

$$L(a_{i_l} + (a_{i_{l+1}} - a_{i_l})(t-t_l)/\tau, \dot x_\omega, t) = \frac{\partial}{\partial t} l(a_{i_{l+1}}, a_{i_l}, t).$$

---

*) Отметим, что $\ln z^j_{l+l', m+n'} P^{l\,m}_{l'm'}$ является аппроксимацией комплексной энтропии, введенной ниже, так как когда шаги сетки стремятся к нулю, модуль коэффициентов матрицы Z^j стремится к единице, а для «равно вероятных» событий логарифмы амплитуды совпадают с комплексной энтропией.

Таким образом,

$$\int_{t_l}^{t_{l+1}} L\,dt = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial}{\partial t}\, l\,(a_{i_{l+1}}, a_{i_l}, t)\,dt.$$

Теперь мы заметим, что из (4.1) следует, что при $t \in (t_l, t_{l+1})$

$$\frac{\partial}{\partial t}\, l\,(a_{i_{l+1}}, a_{i_l}, t) = \frac{1}{i} \ln z^l_{i_{l+1},\, i_l}.$$

Подставляя полученные соотношения в (4.3), находим

$$S\,[x_\omega(t)] = \int_\tau^{\tau N} L\,dt = \frac{\tau}{i} \sum_{l=1}^{N-1} \ln z^l_{i_{l+1} i_l}.$$

Поэтому

$$\exp\left\{\frac{i}{\tau} S\,[x_\omega(t)]\right\} = \prod_{l=1}^{N-1} z^l_{i_{l+1},\, i_l}.$$

Утверждение доказано.

Обозначим через $\psi^0(x)$ функцию, равную ψ^0_l, если $x = a_l$. Суммируя амплитуды элементарных виртуальных событий, записанные в виде (4.4), получаем

Следствие. *Амплитуда истинного события может быть представлена в виде*

$$\psi_l = \sum_{x(t):\; x(\tau N) = a_l} \exp\left\{\frac{i}{\tau} S\,[x(t)]\right\} \psi^0(x(\tau)), \quad l = 1, \ldots, k. \qquad (4.5)$$

Формула (4.5) является дискретным аналогом континуального интеграла Фейнмана [21, 22].

Сопоставим каждому вектору ψ^0 из C^k вектор ψ по формулам (4.5). Тем самым задается линейный оператор (матрица), действующий в C^k: $A\psi^0 = \psi$. Матричные элементы матрицы A можно вычислить по формуле

$$A_{l_j} = \sum_{x(t):\, x(\tau) = a_j,\; x(\tau N) = a_l} \exp\left\{\frac{i}{\tau} S\,[x(\tau)]\right\}.$$

Введем обозначение

$$A = \exp\left\{\frac{i}{\tau} S\right\}.$$

Рассмотрим дифференцируемую функцию $S_0(x, t)$, сопоставим ей функцию на сетке $S_0(jh, \tau l)$ и введем оператор умножения на функцию $\exp\left\{\frac{i}{\tau} S_0(\cdot, \tau l)\right\}$, действующий в $\mathbf{C}^k$:

$$\exp\left\{\frac{i}{\tau} S_0(\cdot, \tau l)\right\}\psi = \\ = \left(\exp\left\{\frac{i}{\tau} S_0(h, \tau l)\right\}\psi_1, \ldots, \exp\left\{\frac{i}{\tau} S_0(kh, \tau l)\right\}\psi_k\right).$$

Наша ближайшая цель — прокоммутировать операторы $\exp\left\{-\frac{i}{\tau}\times\right.$ $\left.\times S_0(\cdot, \tau l)\right\}$ и $\widehat{\exp}\left\{\frac{i}{\tau} S\right\}$. Используя формулу

$$S_0(x(t_{l+1}), t_{l+1}) - S_0(x(t_l), t_l) = \int\limits_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{d}{dt} S_0(x(t), t)\,dt = \\ = \int\limits_{t_l}^{t_{l+1}} \left[\frac{\partial S_0}{\partial t}(x(t), t) + \dot{x}(t)\frac{\partial S_0}{\partial x}(x(t), t)\right]dt,$$

преобразуем показатель экспоненты в (4.5):

$$\exp\left\{\frac{i}{\tau} S\,[x(t)]\right\}\psi^0(x(\tau)) = \exp\frac{i}{\tau}\left[S(x(\tau N), \tau N] + \right. \\ \left. + \int\limits_{\tau}^{\tau n} L'(x(t), \dot{x}(t), t)\,dt - S_0(x(\tau), \tau)\right]\Big\}\psi^0(x(\tau)), \quad (4.6)$$

где

$$L'(x, \dot{x}, t) = L(x, \dot{x}, t) - \frac{\partial S}{\partial t}(x, t) - \dot{x}\frac{\partial S}{\partial x}(x, t). \quad (4.7)$$

Лагранжианы, связанные соотношением (4.7), называются *эквивалентными*. Формула (4.6) дает правило вычисления амплитуды при переходе к эквивалентному лагранжиану. Из нее же следует *формула коммутации* с оператором умножения на $\exp\left\{-\frac{i}{\tau} S_0(\cdot, \tau N)\right\}$:

$$\exp\left\{-\frac{i}{\tau} S_0(\cdot, \tau N)\right\}\circ\widehat{\exp}\left\{\frac{i}{\tau} S\right\} = \\ = \widehat{\exp}\left\{\frac{i}{\tau} S'\right\}\circ\exp\left\{-\frac{i}{\tau} S_0(\cdot, 0)\right\}, \quad (4.8)$$

где

$$S'[x(t)] = \int\limits_{\tau}^{\tau N} L'(x(t), \dot{x}(t), t)\,dt.$$

Для сравнения рассмотрим два свойства эквивалентных преобразований функции Лагранжа в классической механике.

Если L — лагранжиан механической системы и $S_0(x(t))$ — вещественная дифференцируемая функция, то на множестве траекторий с фиксированными началом и концом экстремали действия

$$S[x(t)] = \int_0^t L(x(t), \dot{x}(t), t)\,dt \quad \text{и} \quad S'[x(t)] = \int_0^t L'(x(t), \dot{x}(t), t)\,dt,$$

$L'(x, \dot{x}, t) = L(x, \dot{x}, t) - \left(\frac{\partial S_0}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial S_0}{\partial x}(x(t))\right)$ совпадают. В самом деле,

$$\delta S'[x(t)] = \int_0^t \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)\right)\delta x(t)\,dt +$$

$$+ \delta\int_0^t \frac{d}{dt} S_0(x(t), t)\,dt =$$

$$= \int_0^t \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)\right)\delta x(t)\,dt = \delta S.$$

Поэтому $\delta S'[x(t)] = 0$ тогда и только тогда, когда $\delta S[x(t)] = 0$. Пусть $H(p, x, t)$ — функция Гамильтона механической системы, лагранжиан которой есть $L(x, \dot{x}, t)$. Преобразованию $L \to L' = L - \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial S}{\partial x}\right)$ функции Лагранжа отвечает *каноническое* преобразование гамильтоновых переменных $x \to X$, $p \to P$ с производящей функцией канонического преобразования

$$\Phi(x, P, t) = \langle P, x\rangle - S_0(x, t).$$

§ 5. Виртуальные события

1. **Полуизмеримые множества.** Множество виртуальных элементарных событий, рассматривавшееся выше в связи с КМ-цепями, может быть параметризовано множеством векторов.

Рассмотрим два множества: множество B, состоящее из чисел натурального ряда от 1 до k, и множество $A = B \times \ldots \times B = B^{N-1}$. Пусть $\omega_i = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_N})$. Сопоставим этому элементарному виртуальному событию точку $\xi(\omega_i) = (x, y)$ множества $\mathcal{N} \overset{\text{def}}{=\!=} A \times B$ с координатами

$$x = i_N \in B, \quad y = (i_1, \ldots, i_{N-1}) \in A.$$

Множество A назовем *слоем*, а множество B — базой множества $\mathcal{N}$.

С точностью до изоморфизма $\zeta\colon \Omega \to \mathcal{N}$ множество элементарных виртуальных событий Ω можно отождествить с множеством $\mathcal{N}$. В дальнейшем точки множества $\mathcal{N}$ мы также будем называть элементарными виртуальными событиями.

Псевдоистинным событиям при отображении ζ отвечают прямоугольные множества в $\mathcal{N}$, называемые *цилиндрическими*:

$$\{A = \bigcup_{i:\, i_1\in I_1,\ldots,\, i_N\in I_N} \omega_i\} \Rightarrow \{\zeta(A) = I_1 \times \ldots \times I_N\}, \tag{5.1}$$

они образуют полукольцо $\mathcal{K}_{\mathcal{N}}$ подмножеств множества $\mathcal{N}$.

Зададим амплитуду φ на $K_{\mathcal{N}}$:

$$\varphi(g) = \psi(A), \quad \text{где} \quad \zeta(A) = g.$$

Рассмотрим скалярную функцию f на $\mathcal{N}$:

$$f(x, y) = \psi_{i_N}(\omega_i), \qquad \omega_i = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_N}), \tag{5.2}$$

где ψ_{i_N} — компонента вектора $x = i_N$, $y = (i_1, \ldots, i_{N-1})$, $\psi(\omega_i)$ с номером i_N. Эта функция обладает очевидным свойством: если при каждом фиксированном x просуммировать ее значения по слою, а затем сложить квадраты модулей этих сумм, то в результате получим единицу:

$$\sum_{x\in\mathcal{A}} \left| \sum_{y\in\mathcal{B}} f(x, y) \right|^2 = \|\psi(\Omega)\|^2 = 1. \tag{5.3}$$

Определим класс множеств, более широкий, чем полукольцо псевдоистинных событий, и введем для него понятия амплитуды и интенсивности.

Пусть $(A, \mathcal{A}, \nu)$ и $(B, \mathcal{B}, \mu)$ — пространства с σ-конечными мерами *). Обозначим через $\mathcal{N}$ прямое произведение множеств A и B: $\mathcal{N} = A \times B$. Множество $\mathcal{N}$ будем называть *пространством*, множества A и B — *слоем* и *базой* соответственно. Рассмотрим банахово пространство функций

$$L_2(L_1) = L_2(L_1(A, \mathcal{A}, \nu);\ B, \mathcal{B}, \mu),$$

состоящее из измеримых функций, заданных на B, принимающих значения в $L_1(A, \mathcal{A}, \nu)$ и имеющих интегрируемый относительно меры μ квадрат нормы в пространстве L_1. Норма в $L_2(L_1)$ задается соотношением

$$\|\psi(\cdot)\| = \left(\int_B \mu(dx) \left(\int_A \nu(dy)\, |\psi(x, y)|\right)^2\right)^{1/2}. \tag{5.4}$$

Элементы этого пространства называются функциями из L_2 на базе со значениями в L_1 на слое.

Приведем два примера функций из $L_2(L_1)$. В пространстве с σ-конечной мерой существуют множества конечной меры. Следова-

*) Тройка $(X, \mathcal{X}, \rho)$, состоящая из множества X, σ-алгебры его подмножеств $\mathcal{X}$ и меры ρ на $\mathcal{X}$, называется *пространством с мерой*. Мера ρ называется σ-конечной, если $\exists \{x_i\} : X = \bigcup_{i\geq 1}^{\infty} x_i$, $\rho(x_i) < \infty$.

тельно, существуют множества $\alpha \in \mathscr{A}$ и $\beta \in \mathscr{B}$ такие, что $\nu(\alpha) < < \infty$ и $\mu(\beta) < \infty$. Характеристическая функция χ_g прямоугольника $g = \alpha \times \beta$, определяемая формулой

$$\chi_g(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in \alpha \text{ и } b \in \beta, \\ 0, & \text{если } a \notin \alpha \text{ и } b \notin \beta, \end{cases}$$

рассматриваемая как функция точки на $\mathscr{A}$ (т. е. как $\chi_g(a, \cdot)$) и принимающая значения в $L_1(B, \mathscr{B}, \mu)$, является простой функцией *). Ее норма в $L_2(L_1)$ конечна:

$$\| \chi_g \|_{L_2(L_1)} = \nu(\alpha)\, \mu(\beta)^{1/2} < \infty.$$

Следовательно, $\chi_g \in L_2(L_1)$.

Пусть множества A и B состоят из конечного числа точек и мера отдельной точки равна единице. Тогда вместо интегралов в (5.4) следует писать суммы (5.3), и в этом случае функция $f(x, y)$, определенная формулой (5.2), является элементом пространства $L_2(L_1)$.

Определение 5.1. Множество $g \in N$ называется *полуизмеримым*, если его характеристическая функция принадлежит $L_2(L_1)$. *Полумерой* полуизмеримого множества называется норма $L_2(L_1)$, его характеристической функции.

Охарактеризуем свойства класса полуизмеримых множеств G. Теорема об умножении функций $L_2(L_1)$ на характеристическую функцию полуизмеримого множества позволяет определить понятие амплитуды и интенсивности в значительно более общей ситуации, чем мы рассматривали до сих пор. Для доказательства этой теоремы понадобятся две леммы о простых функциях **).

Лемма 5.1. *Пусть $\varkappa(x, y)$ — простая функция по $x \in B$ со значениями в $L_1(A, \mathscr{A}, \nu)$ и $c \geqslant 0$, $d \leqslant 0$. Тогда функции* $\operatorname{Re}\varkappa(x, y)$, $\overline{\varkappa}(x, y) = \min\{\underline{\varkappa}(x, y), c\}$, $\underline{\varkappa}(x, y) = \max\{\varkappa(x, y), d\}$ *также являются простыми функциями на базе B со значениями в $L_1(A, \mathscr{A}, \nu)$.*

Доказательство. Ясно, что все три функции являются простыми. Так как класс измеримых функций замкнут относительно операций sup, inf и Re, то при каждом фиксированном x все три функции измеримы относительно σ-алгебры $\mathscr{A}$. Далее,

$$|\operatorname{Re}\varkappa(x, y)| \leqslant |\varkappa(x, y)|, \quad |\overline{\varkappa}(x, y)| \leqslant \leqslant |\varkappa(x, y)|, \quad |\underline{\varkappa}(x, y)| \leqslant |\varkappa(x, y)|,$$

поэтому в силу теоремы 3.7.9 из [24] все они являются элементами $L_1(A, \mathscr{A}, \nu)$.

Следствие 5.1. *Если $\widetilde{\varkappa}(x, y)$ — простая функция на B со значениями в $L_1(A, \mathscr{A}, \nu)$, то функция*

$$\varkappa(x, y) = \max\{\min\{\operatorname{Re}\widetilde{\varkappa}(x, y), 1\}, 0\}$$

также является простой функцией на B со значениями в $L_1(A, \mathscr{A}, \nu)$.

---

*) Функция называется простой, если она принимает не более счетного числа различных значений.

**) В последних двух случаях рассматриваются вещественные функции.

Лемма 5.2. *Если $\chi_g(x, y)$ — характеристическая функция полуизмеримого множества $g \in \mathcal{N}$, то существует последовательность функций $\{\chi_n(x, y)\}_1^\infty$ такая, что:* а) $0 \leqslant \chi_n \leqslant 1$; б) $\chi_n(x, y)$ — *простая функция из* $L_2(B, \mathscr{B}, \mu)$ *со значениями в* $L_1(A, \mathscr{A}, \nu)$; в) $\|\chi_n(x, \cdot) - \chi_g(x, \cdot)\|_{L_1} \to 0$ *при* $n \to \infty$ *для* μ-*почти всех* x.

Доказательство. В силу определения полуизмеримого множества и плотности в $L_2(L_1)$ класса простых функций из L_2 со значениями в L_1 (см. [24], гл. 3, § 1, п. 3.8) существует последовательность $\{\tilde{\chi}_n\}_1^\infty$ простых функций из L_2 *на* B со значениями в L_1 на A такая, что $\|\tilde{\chi}_n(x, \cdot) - \chi_g(x, \cdot)\|_{L_1} \to 0$ при μ-почти всех x.

Рассмотрим последовательность функций $\{\chi_n\}$, принимающих значения на отрезке $[0, 1]$:

$$\chi_n(x, y) \overset{\text{def}}{=} \max\{\min\{\operatorname{Re}\tilde{\chi}_n(x, y), 1\}, 0\}.$$

В силу следствия 5.1 это простые функции на B со значениями в L_1 на A, принадлежащие $L_2(L_1)$: $\|\chi_n\|_{L_2(L_1)} \leqslant \|\tilde{\chi}_n\|_{L_2(L_1)}$. Таким образом $\{\chi_n\}$ — последовательность простых функций из L_2 на B со значениями в L_1 на A.

Поскольку $\chi_g(x, y)$ — вещественная функция, принимающая только два значения — нуль и единица, то

$$|\chi_g(x, y) - \tilde{\chi}_n(x, y)| \geqslant |\chi_g(x, y) - \operatorname{Re}\tilde{\chi}_n(x, y)| \geqslant$$
$$\geqslant |\chi_g(x, y) - \chi_n(x, y)|.$$

Поэтому $\|\chi_g(x, \cdot) - \chi_n(x, \cdot)\|_{L_1} \leqslant \|\chi_g(x, \cdot) - \tilde{\chi}_n(x, \cdot)\|_{L_1} \to 0$ μ-почти всюду. Итак, последовательность $\{\chi_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям а) — в). Лемма доказана.

Теорема 5.1. *Если $\psi \in L_2(L_1)$ и χ_g — характеристическая функция полуизмеримого множества, то функция $\chi_g\psi$ также принадлежит $L_2(L_1)$.*

Доказательство. Сначала докажем, что функция $(\chi_g\psi)(x, \cdot)$ сильно измерима *), а затем убедимся, что квадрат ее нормы в $L_1(A, \mathscr{A}, \nu)$ — μ-интегрируем. Тем самым будет доказано, что $\chi_g\psi \in L_2(L_1)$.

Пусть $\{\psi_n\}$ и $\{\chi_n\}$ — последовательности простых функций из L_2 на B со значениями в L_1 на A такие, что

$$\|\psi_n(x, \cdot) - \psi(x, \cdot)\|_{L_1} \to 0, \quad \|\chi_n(x, \cdot) - \chi_g(x, \cdot)\|_{L_1} \to 0$$

при μ-почти всех $x \in B$. Не уменьшая общности, можно считать, что функции ψ_n и χ_n постоянны на одних и тех же множествах из $\mathscr{B}$ и функции χ_n удовлетворяют условиям а) —в) леммы 5.2.

Поскольку произведение двух функций из L_1, одна из которых ограничена по модулю, также принадлежит L_1, то при μ-почти всех x функции

$$(\chi_n\psi_n)(x, \cdot), (\chi_n\psi)(x, \cdot), (\chi_g\psi)(x, \cdot)$$

*) То есть существует последовательность простых функций, сходящаяся к $\chi_g\psi$ μ-почти всюду по норме L_1.

принадлежат $L_1(A, \mathscr{A}, \nu)$. Зафиксируем такое значение x и оценим норму разности в L_1 функций $\chi_n\psi_n$ и $\chi_g\psi$:

$$\|\chi_g\psi(x, \cdot) - \chi_n\psi_n(x, \cdot)\|_{L_1} \leqslant$$
$$\leqslant \|(\chi_g(x, \cdot) - \chi_n(x, \cdot))\psi(x, \cdot)\|_{L_1} + \|\psi(x, \cdot) - \psi_n(x, \cdot)\|_{L_1}.$$

Последнее слагаемое стремится к нулю μ-почти всюду при $n \to \infty$. Поэтому для доказательства сильной измеримости функции $\chi_g\psi$ достаточно убедиться, что $\|(\chi_g(x, \cdot) - \chi_n(x, \cdot))\psi(x, \cdot)\|_{L_1} \to 0$ μ-почти всюду при $n \to \infty$.

Функция $\psi(x, y)$, являющаяся при фиксированном x элементом из $L_1(A, \mathscr{A}, \nu)$, конечна при ν-почти всех y. Значит, последовательность $\{\varphi_n\}$:

$$\varphi_n(x, y) = (\chi_n - \chi_g)\psi(x, y)$$

— сходится к нулю при μ-почти всех x и ν-почти всех y. Кроме того, равномерно по n справедлива оценка

$$|\varphi_n(x, y)| \leqslant 2|\psi(x, y)|.$$

Следовательно, при μ-почти всех x выполнены условия теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла по мере ν:

$$\lim_{n\to\infty} \|(\chi_g - \chi_n)\psi(x, \cdot)\|_{L_1} = \lim \int_A |\varphi_n(x, y)|\,\nu(dy) =$$
$$= \int \lim |\varphi_n(x, y)|\,\nu(dy) = 0.$$

Отсюда вытекает сильная измеримость функций $\chi_g\psi$.

Докажем, что квадрат ее нормы в $L_1(A, \mathscr{A}, \nu)$ интегрируем относительно меры μ. Для доказательства воспользуемся тем фактом, что если f — неотрицательная измеримая функция и если существует интегрируемая функция Φ, такая что $f(x) \leqslant \Phi(x)$, то функция f интегрируема. Это утверждение следует, например, из [24], теорема 3.7.9.

Пусть $f(x) = \|\chi_g\psi(x, \cdot)\|^2_{L_1}$. Поскольку $\psi \in L_2(L_1)$ и $\|\chi_g \cdot \psi(x, \cdot)\|_{L_1} \leqslant \|\psi(x, \cdot)\|_{L_1}$, то в качестве функции Φ можно принять интегрируемую относительно меры μ функцию $\|\psi(x, \cdot)\|^2_{L_1}$.

Выше было доказано, что последовательность простых функций $(\chi_n\psi_n)(x, \cdot)$ со значениями в L_1 сходится μ-почти всюду к $(\chi_g\psi) \cdot (x, \cdot)$. Поэтому последовательность неотрицательных простых функций $\|(\chi_n\psi_n)(x, \cdot)\|_{L_1}$ сходится μ-почти всюду к $\|(\chi_g\psi)(x, \cdot)\|_{L_1}$. Следовательно, функция $f(x)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathscr{B}$.

Отсюда следует интегрируемость квадрата нормы в L_1 функции $\chi_g\psi$ относительно меры μ. Теорема доказана.

Обозначим через G класс полуизмеримых подмножеств множества Ω.

Следствие 5.2. *Класс G замкнут относительно операции пересечения.*

Доказательство. Характеристическая функция множества $g_1 \cap g_2$ есть произведение характеристических функций множеств g_1 и g_2. Поскольку характеристическая функция полуизмеримого множества принадлежит L_2 (L_1), то из теоремы, доказанной выше, следует, что произведение характеристических функций полуизмеримых множеств также принадлежит L_2 (L_1), что и требовалось. Следовательно, множество $g_1 \cap g_2$ полуизмеримо.

Следствие 5.3. *Класс G замкнут относительно операции объединения.*

Доказательство. Характеристическая функция объединения множеств g_1 и g_2 имеет вид

$$\chi_{g_1 \cup g_2} = \chi_{g_1} + \chi_{g_2} - \chi_{g_1 \cap g_2}.$$

Поскольку L_2 (L_1) — линейное пространство и все три слагаемых принадлежат L_2 (L_1), то $\chi_{g_1 \cup g_2} \in L_2$ (L_1) и множество $g_1 \cup g_2$ полуизмеримо.

Следствие 5.4. *Если $g \supset g'$, g, $g' \in G$, то $g \setminus g' \in G$.*

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что

$$\chi_{g \setminus g'} = \chi_g - \chi_{g \cap g'}.$$

Лемма 5.3. *Существует счетное множество попарно непересекающихся полуизмеримых множеств $\{g_i\}_1^\infty$ такое, что $\bigcup_{i=1} g_i = \mathcal{N}$.*

Доказательство. Поскольку меры μ и ν σ-конечны, то множества A и B можно представить в виде объединения счетного числа попарно непересекающихся множеств $\{\alpha_i\}_1^\infty$ и $\{\beta_i\}_1^\infty$, принадлежащих σ-алгебрам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно, таких, что $\nu(\alpha_i) < \infty$, $\mu(\beta_i) < \infty$. Все прямоугольники $\alpha_i \times \beta_j$ полуизмеримы, а их объединение совпадает с $A \times B = \mathcal{N}$. Множество таких прямоугольников счетно. Лемма доказана.

Следствие 5.5. *Класс G является кольцом.*

Доказательство. Следствия 5.2 и 5.4 и лемма 5.3 показывают, что класс G является полукольцом, а из следствия 5.3 следует, что G есть кольцо.

2. Амплитуда и интенсивность. Если $\varphi \in L_2$ (L_1), *то функция* $f(\cdot) = \int\limits_A \varphi(\cdot, y)\, \nu(dy)$ принадлежит $L_2(B, \mathcal{B}, \mu)$. Этот факт служит основой для двух определений.

Определение 5.2. Пусть φ — комплексная функция на $\mathcal{N}$ такая, что для любого полуизмеримого множества g функция $\chi_g \varphi$ принадлежит пространству L_2 (L_1). Ненормированной *амплитудой* множества $g \in G$ называется функция из $L_2(B, \mathcal{B}, \mu)$, вычисляемая по формуле

$$\psi(g) = \psi(g)(\cdot) = \int\limits_A (\chi_g \varphi)(\cdot, y)\, \nu(dt),$$

где χ_g — характеристическая функция полуизмеримого множества g. При фиксированном ψ функция $\psi: G \to L_2(A, \mathcal{A}, \nu)$ называется *амплитудой* на G. Пространство $\mathcal{N}$ называется пространством *элементарных виртуальных событий*, его элементы — *элементарными виртуальными* событиями, а элементы кольца G — *виртуальными* событиями.

Следствие 5.6. *Амплитуда является аддитивной функцией множества на кольце G.*

Определение 5.3. *Интенсивностью* полуизмеримого множества g называется квадрат нормы в $L_2(B, \mathcal{B}, \mu)$ его амплитуды:

$$I(g) \overset{\text{def}}{=} \| \psi(g) \|_2^2 = \int \mu(dx) \| \psi(g)(x, \cdot) \|_{L_1}^2.$$

Пусть либо меры μ и ν конечны, либо $\varphi(x, y) \in (L_1, L_2)$; тогда $\mathcal{N} \in G$, и следовательно, кольцо G является *алгеброй*.

Рассмотрим отображение ρ: $G \to G$, называемое *проекцией*, действующее по правилу

$$\rho(g) = A \times \operatorname*{supp}_B \int_A | \chi_g(x, y) | \nu(dy),$$

где χ_g — характеристическая функция множества $g \in G$.

Виртуальные события g и g' называются *непересекающимися*, если $g \cap g' = \varnothing$, и *несовместными*, если $\rho(g) \cap \rho(g') = \varnothing$. Различие между непересекающимися и несовместными виртуальными событиями состоит в том, что интенсивность объединения несовместных виртуальных событий равна, очевидно, сумме их интенсивностей, а для непересекающихся множеств это утверждение, вообще говоря, неверно.

Виртуальные события из образа ρG называются *истинными*. Множество истинных событий изоморфно σ-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств множества B. Таким образом, множество истинных событий является σ-алгеброй.

Предложение 5.1. *Сужение интенсивности на σ-алгебру истинных событий является конечной мерой.*

Доказательство этого утверждения следует из интегрального представления интенсивности; если $g \in \rho G$, то $g = A \times \beta$, $\beta \in \mathcal{B}$ и

$$I(g) = \int_\beta \mu(dx) \| \psi(x, \cdot) \|_{L_1}^2 \leqslant \| \psi \|_{L_2(L_1)}^2,$$

где $\| \psi(x, \cdot) \|_{L_1}^2$ — интегрируемая относительно меры μ функция.

В заключение определим комплексную энтропию. Пусть $\psi(x,y)$ — функция из $L_2(L_1)$ и $\| \psi \|_{L_2} = 1$, где $(x, y) \in A \times B$. Тогда величину

$$p(x) = | \varphi(x) |^2 = \left| \int_A \psi(x, y) \, d\nu(y) \right|^2$$

называют плотностью вероятности, а $\mathcal{H} = \int_B p(x) \ln p(x) \, d\mu(x)$ — энтропией распределения p.

Будем называть *комплексной энтропией* величину

$$H = \int_A d\mu(x) \left| \int_B \psi(x, y) \, d\nu(y) \right|^2 \ln \int_B \psi(x, y) \, d\nu(y).$$

Существует очевидная связь между энтропией $\mathscr{H}$ и комплексной энтропией H:

$$\frac{1}{2}\mathscr{H} = \operatorname{Re} H.$$

Пусть $(A_i, \mathscr{A}_i; \mu_i)$, $(B_i, \mathscr{B}_i, \nu_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ пространства с σ-конечными мерами и $\psi \in L_2(L_1(A_1 \times A_2), B_1 \times B_2)$, $\|\psi(N_1 \times N_2)\| = 1$, где $N_i = A_i \times B_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Будем обозначать через a_i точки множеств A_i и через b_i — точки множеств B_i. Для любых $\theta_i \in L_2(B_i)$ и $\alpha_i \in \mathscr{A}_i$ величины

$$\psi_1(a_1, b_1) = \int_{B_2} \theta_2(b_2)\, d\mu_2(b_2) \int_{\alpha_2} \psi(a_1, a_2; b_1, b_2)\, d\nu_2(a_2),$$

$$\psi_2(a_2, b_2) = \int_{B_1} \theta_1(b_1)\, d\mu_1(b_1) \int_{\alpha_1} \psi(a_1, a_2; b_1, b_2)\, d\nu_1(a_1)$$

называются *сужениями* амплитуды ψ на N_1 и N_2 соответственно. Сужения ψ_1 и ψ_2 называются *независимыми*, если существуют такие функции f_1 и f_2 из $L_2(L_1(A_1), B_1)$ и $L_2(L_1(A_2), B_2)$ соответственно, что

$$\psi(a_1, a_2; b_1, b_2) = f_1(a_1, b_1) f_2(a_2, b_2). \tag{5.5}$$

Без уменьшения общности будем считать, что

$$\| f_i(N_i) \|_{L_2} = 1;\ i = 1, 2, \ldots \tag{5.6}$$

Функции f_i, удовлетворяющие условиям (5.5) и (5.6), называются *независимыми составляющими* амплитуды ψ.

П р е д л о ж е н и е 5.2. *Если сужения амплитуды ψ на N_1 и N_2 независимы, то комплексная энтропия амплитуды ψ равна сумме энтропий ее независимых составляющих*:

$$H(\psi) = H(f_1 f_2) = H(f_1) + H(f_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения комплексной энтропии и нормировки функций f_1 и f_2 следует:

$$H(\psi) = \int\int d\mu_1\, d\mu_2 \left| \int\int d\nu_1\, d\nu_2 f_1 f_2 \right|^2 (\ln f_1 + \ln f_2) =$$

$$= \left(\int d\mu_1 \left| \int d\nu_1 f_1 \right|^2 \ln f_1\right) \left(\int d\mu_2 \left| \int d\nu_2 f_2 \right|^2\right) +$$

$$+ \left(\int d\mu_2 \left| \int d\nu_2 f_2 \right|^2 \ln f_2\right) \left(\int d\mu_1 \left| \int d\nu_1 f_1 \right|^2\right) =$$

$$= \int d\mu_1 \left| \int d\nu_1 f_1 \right|^2 \ln f_1 + \int d\mu_1 \left| \int d\nu_2 f_2 \right|^2 \ln f_2 = H(f_1) + H(f_2).$$

ГЛАВА VIII

КОМПЛЕКСНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

§ 1. Неаддитивная амплитуда

Пусть $(A, \mathscr{A}, \nu)$, $(B, \mathscr{B}, \mu)$ — пространства с σ-конечными мерами, $\mathscr{N} = A \times B$, G — кольцо полуизмеримых множеств и Φ — некоторая функция, отображающая G в множество ненормированных амплитуд на G.

При любых фиксированных $g, g' \in G$ функция $\Phi(g)\chi_{g'}(x, y)$ является элементом пространства $L_2(L_1)$. Поэтому по аналогии с определением ненормированной амплитуды можно дать следующее определение.

Определение 1.1. *Неаддитивной амплитудой* на G называется функция со значениями в $L_2(B, \mathscr{B}, \mu)$, вычисляемая по формуле

$$\psi(g)(\cdot) = \int_A \chi_g(\cdot, y)\,\Phi(\cdot, y, g)\,\nu(dy), \tag{1.1}$$

где $\chi_g(x, y)$ — характеристическая функция множества g.

Квадрат нормы в L_2 функции $\psi(g)(\cdot)$ называется *интенсивностью* множества g, отношение $I(g \cap g')/I(g') = I(g/g')$ называется *условной* интенсивностью множества g относительно g'.

Теперь мы перейдем к рассмотрению комплексных нелинейных цепей, определяемых неаддитивной амплитудой на множестве виртуальных событий, вычисляемой по формуле (1.1).

§ 2. Комплексные нелинейные цепи

1. Истинная амплитуда. Рассмотрим множество $\{a_i\}_{i=1}^k$, называемое *множеством состояний*, и пусть $\mathscr{K} = \mathscr{K}_N$ — полукольцо подмножеств множества элементарных виртуальных событий ω_i, являющихся последовательностями состояний

$$\omega_i = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_N}\}, \qquad i = (i_1, \ldots, i_N). \tag{2.1}$$

Обозначим через Ω_N множество элементарных виртуальных событий. В гл. VII, § 4, п. 1 мы отмечали, что с точностью до изоморфизма пространство элементарных виртуальных событий Ω_N можно отождествить с пространством $\mathcal{N}=A\times B$, где $A=B\times\ldots\times B=B^{N-1}$ и B — множество чисел натурального ряда от 1 до k. Таким образом, слой A и база B пространства Ω_N состоят из конечного числа точек, мера которых равна по определению единице. Поэтому класс G полуизмеримых множеств является алгеброй, содержащей все подмножества множества $\mathcal{N}$. Если на G определена неаддитивная амплитуда, ее можно сузить на любой класс подмножеств, принадлежащий алгебре G. Далее мы будем рассматривать неаддитивную амплитуду на полукольце $\mathcal{K}_N\subset G$, элементами которого являются множества вида

$$g=\bigcup_{i:\,i_1\in I_1\ldots i_N\in I_N}\omega_i;\ I_1\times\ldots\times I_{N-1}\in\mathcal{A},\ I_N\in\mathcal{B},\qquad(2.2)$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — алгебры всех подмножеств множеств слоя A и базы B соответственно.

Итак, предположим, что на полукольце $\mathcal{K}$ задана неаддитивная амплитуда Ф. Рассмотрим амплитуду виртуального события g как функцию множества точек базы:

$$\Phi(g(I_N))\overset{\text{def}}{=}z(I_N)=z.$$

При фиксированных $I_1\ldots I_{N-1}$ компоненты вектора $z=(z_1,\ldots,z_k)$ являются комплексными числами, аргументы и модули которых зависят, вообще говоря, от множества точек базы I_N *).

Определение 2.1. Пусть D — множество и $\mathcal{D}$ — кольцо его подмножеств. Функция $\varphi\colon\mathcal{D}\to\mathbf{C}$ называется *квазиаддитивной*, если для любых d' и d'' из $\mathcal{D}$ таких, что $a'\cap d''=d$, выполнено

$$\varphi(d')+\varphi(d'')-\varphi(d''\cup d')=\varphi(d)\ {}^{**}).$$

Обозначим через $\arg z_l(I_N)$ аргумент l-й компоненты вектора $z(I_N)$ и будем говорить, что Ф — амплитуда *с квазиаддитивной фазой*, если а) $\arg z_l(I_N)$ — квазиаддитивная функция множества; б) $|z_l(I_N)|$ не зависит от I_N при всех $l=1,2,\ldots,k$.

Пусть Ф — неаддитивная амплитуда с квазиаддитивной фазой. Если I'_N и I''_N — два непересекающихся подмножества множества индексов $\{1,2,\ldots,k\}$, то величина

$$\arg z_l(I'_N)+\arg z_l(I''_N)-\arg z_l(I'_N\cup I''_N)=$$
$$=\arg z_l(\phi)\overset{\text{def}}{=}\operatorname{vrai}\arg z_l$$

не зависит от множеств I'_N, I''_N и называется *истинным аргументом* комплексного числа z_l, функция $\arg I_N$, определяемая формулой

$$\arg z_l(I_N)-\operatorname{vrai}\arg z_l\overset{\text{def}}{=}(\arg I_N)(l),\qquad(2.3)$$

---

*) При фиксированных $I_1\ldots I_{N-1}$ класс множеств вида (2.2) является алгеброй.

**) Примером квазиаддитивной функции множества является сумма меры и константы.

— *аргументом множества* I_N, а вектор

$$\operatorname{vrai} z(I_N) = \\ = (|z_1| \exp\{i \operatorname{vrai} \arg z_1\}, \ldots, |z_k| \exp\{i \operatorname{vrai} \arg z_k\}) \quad (2.4)$$

— *истинной амплитудой* множества g, определенного в (2.2).

Обозначим через vrai Φ функцию на $\mathcal{K}_N$, вычисляемую по правилу

$$\operatorname{vrai} \Phi(g) = \operatorname{vrai} z(I_N),$$

где $\operatorname{vrai} z(I_N)$ — вектор, определяемый формулами (2.2 —2.4).

Лемма 2.1. *Если* Φ — *неаддитивная амплитуда на* $\mathcal{K}_N$ *с квазиаддитивной фазой и*

$$g = \bigcup_{i\,:\,i_1 \in I_1 \ldots i_N \in I_N} \omega_i,$$

то

$$\Phi(g) = (\exp\{i \arg I_N\}) \operatorname{vrai} \Phi(g), \quad (2.5)$$

где $\exp\{i \arg I_N\}$ — *диагональная матрица*, l-*й диагональный элемент которой равен* $\exp\{i (\arg I_N)(l)\}$, *а функция* vrai Φ, *аддитивная при фиксированных* $I_1, \ldots, I_{N-1}$, *является неаддитивной амплитудой на* $\mathcal{K}_N$.

Доказательство. l-я компонента вектора $\exp\{i \arg I_N\} \times \times \operatorname{vrai} \Phi(g)$ равна

$$|z_l| \exp\{i (\arg I_N)(l) + i \operatorname{vrai} \arg z_l\} = |z_l| \exp\{i \arg z_l(I_N)\} = \\ = z_l(I_N) = \Phi_l(g).$$

Отсюда следует формула (2.5). Очевидно, что если Φ — неаддитивная амплитуда в смысле определения 2.1, то vrai Φ — также неаддитивная амплитуда.

Докажем, что

$$\operatorname{vrai} \Phi(g) = \hat{\chi}_{I_N} \operatorname{vrai} \Phi(\bar{g}),$$

где

$$g = \bigcup_{i:i_1 \in I_1, \ldots, i_N \in I_N} \omega_i, \quad \bar{g} = \bigcup_{i:i_1 \in I_1, \ldots, i_{N-1} \in I_{N-1}} \omega_i.$$

Из этой формулы следует аддитивность функции $\Phi(g)$ при фиксированных $I_1, \ldots, I_{N-1}$.

Прежде всего, из определения амплитуды, как функции со значениями в L_2 на фазе, следует равенство

$$\Phi(g) = \hat{\chi}_{I_N} \Phi(g).$$

Поэтому

$$\operatorname{vrai} \Phi(g) = \operatorname{vrai} \hat{\chi}_{I_N} \Phi(g) = \\ = (\chi_{I_N}(1)\, |z_1| \exp\{i \operatorname{vrai} \arg z_1\}, \ldots, \chi_{I_N}(N)\, |z_k| \exp\{i \operatorname{vrai} \arg z_k\}) = \\ = \hat{\chi}_{I_N} (|z_1| \exp\{i \operatorname{vrai} \arg z_1\}, \ldots, |z_k| \exp\{i \operatorname{vrai} \arg z_k\}) = \\ = \hat{\chi}_{I_N} \operatorname{vrai} \Phi(\bar{g}).$$

2. **Определение простой КН-цепи.** Обозначим через g_{l-1} множество из $\mathscr{K}_{l-1}$, а через $\bar{g}_{l-1}$ — множество из $\mathscr{K}_l$, связанные соотношением: если

$$g_{l-1} = \bigcup_{i_1 \in I_1, \ldots, i_{l-1} \in I_{l-1}} \omega_{i_1, \ldots, i_{l-1}},$$

то

$$\bar{g}_{l-1} = \bigcup_{i_1 \in I_1, \ldots, i_{l-1} \in I_{l-1}, i_l} \omega_{i_1, \ldots, i_l},$$

где $\omega_{i_1}, \ldots, {}_{i_l} = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}\}$.

Определение 2.2. Будем говорить, что неаддитивная амплитуда с квазиаддитивной фазой Φ, заданная на полукольце $\mathscr{K}_N$ определяет *простую* комплексную нелинейную цепь (*простую* КН-цепь), если существует набор унитарных матриц $\{Z^l\}_1^{N-1}$, называемых *матрицами перехода* простой КН-цепи, такой, что функции множества Φ^l, заданные на полукольцах $\mathscr{K}_l$ и связанные соотношением

$$\begin{gathered}\Phi^{l-1}(g_{l-1}) = (Z^{l-1})^* \operatorname{vrai} \Phi^l(\bar{g}_l), \quad l = n, n-1, \ldots, 2, \\ \Phi^n(g) = \Phi(g),\end{gathered} \tag{2.6}$$

являются неаддитивными амплитудами с квазиаддитивными фазами.

Теорема 2.1. *Если неаддитивная амплитуда с квазиаддитивной фазой Φ определяет простую КН-цепь, то существует вектор ψ' и квазиаддитивные функции множества* $\arg I_l$, *определенные из соотношений*

$$\Phi'(g_l) = (\exp\{i \arg I_l\}) \quad \operatorname{vrai} \quad \Phi^l(g_l), \quad l = N, N-1, \ldots, 1,$$

такие, что амплитуда события g_N равна

$$\Phi(g_N) = \\ = \hat{\chi}_{I_N} \circ (\exp\{i \arg I_N\}) \circ Z^{N-1} \circ \hat{\chi}_{I_{N-1}} \circ \ldots \circ \hat{\chi}_{I_1} \circ (\exp\{i \arg I_1\})\, \psi', \tag{2.7}$$

где $\{Z^l\}_1^{N-1}$ — набор матриц перехода простой КН-*цепи.*

Доказательство. Формула $\operatorname{vrai} \psi(g) = \chi_{I_N} \operatorname{vrai} \psi(\bar{g})$, доказанная в лемме 2.1 для неаддитивной амплитуды с квазиаддитивной фазой, и соотношения (1.5) дают

$$\Phi(g_N) = (\exp\{i \arg I_N\}) \operatorname{vrai} \Phi(g_N) = \\ = (\exp\{i \arg I_N\}) \circ \hat{\chi}_{I_N} \operatorname{vrai} \Phi(\bar{g}_N).$$

Поскольку диагональные матрицы коммутируют, то

$$\Phi(g_N) = \hat{\chi}_{I_N} \circ (\exp\{i \arg I_N\}) \operatorname{vrai} \Phi(\bar{g}_N).$$

Из формулы (2.6), справедливой для простой КН-цепи, имеем

$$\operatorname{vrai} \Phi(\bar{g}_N) = Z^{N-1}\Phi^{N-1}(g_{N-1}).$$

Таким образом,

$$\Phi(g_N) = \hat{\chi}_{I_N} \circ (\exp\{i \arg I_N\}) \circ Z^{l-1}\Phi^{N-1}(g_{N-1}).$$

Повторяя рассуждения для $\Phi^{N-1}(g_{N-1})$, $\Phi^{N-2}(g_{N-2}), \ldots$, получим формулу (2.7). Теорема доказана.

Поскольку матрицы $\exp\{i \arg I_l\}$ унитарны, то аналогично доказательству теоремы 2.1, воспользовавшись формулой (2.7), легко доказать теорему 2.2, описывающую в терминах условной интенсивности марковское свойство простой КН-цепи.

Т е о р е м а 2.2. *Если неаддитивная амплитуда* Φ *с квазиаддитивной фазой определяет простую* КН-*цепь, то условная интенсивность виртуального события* $\omega^{k+1,\,k,\ldots,\,j}_{i_{k+1},\,i_k,\ldots,i_j}$, *состоящего в том, что в моменты* $j, \ldots, k, k+1$ *простая* КН-*цепь находилась в состояниях* $a_{i_j}, \ldots, a_{i_k}, a_{i_{k+1}}$ *относительно виртуального события* $\omega^{k,\ldots,j}_{i_k,\ldots,i_j}$, *зависит только от состояний* КН-*цепи в моменты* k *и* $k+1$. *Если* $\{Z^l\}_1^{N-1}$ — *набор унитарных матриц перехода простой* КН-*цепи, то*

$$P(\omega^{k+1,\,k,\ldots,\,j}_{i_{k+1},\,i_k,\ldots,\,i_j}/\omega^{k,\ldots,\,j}_{i_k,\ldots,\,i_j}) = |\,z^k_{i_{k+1},\,i_k}|^2.$$

3. Пример простой КН-цепи. Пусть $\{Z^l\}_1^{N-1}$ — набор унитарных матриц и a — матрица с вещественными коэффициентами. Вектору $\psi \in \mathrm{C}^N$ сопоставим унитарную диагональную матрицу

$$U(\psi) = \begin{Vmatrix} \exp\left\{i \sum\limits_1^k a_{1j}\,|\psi_j|^2\right\} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp\left\{i \sum\limits_1^k a_{kj}\,|\psi_j|^2\right\} \end{Vmatrix}$$

и для произвольной последовательности множеств $\{I_k\}_1^N$, $I_N \in \in \{1, \ldots, k\}$ зададим рекуррентную последовательность векторов C^k:

$$\Phi^l = \hat{\chi}_l \circ U(\Phi^{l-1}) \circ Z^{l-1}\Phi^{l-1}$$

$l = 1, 2, \ldots, N$, Φ^0 — единичный вектор из C^k. Тогда для любого $A = \bigcup\limits_{i:\,i_1\in I_1,\ldots,\,i_N\in I_N} \omega_i$ определена функция Φ: $\Phi^N(A) \overset{\text{def}}{=} \Phi(A)$, являющаяся неаддитивной амплитудой на $\mathscr{K}_N$ с квазиаддитивной фазой. Нетрудно проверить, что амплитуда Φ определяет простую КН-цепь.

§ 3. КН-цепь для нелинейного уравнения квантовой механики

В этом параграфе мы ослабили требования к амплитуде, сформулированные при определении простой КН-цепи, сохранив лишь рекуррентное правило (2.7) вычисления амплитуды. Нашей целью является описание последовательности КН-цепей, амплитуды которых сходятся к решению задачи для уравнения с унитарной нелинейностью (см. гл. II, III):

$$\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) = \frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x, t) + A(\psi)\psi(x, t), \quad 0 < x < l,$$
$$\psi(0, l) = \psi(l, t) = 0, \tag{3.1}$$

где $A(\psi)$ — оператор умножения на функцию

$$-v(x) + \int_0^l a(x-y)\,|\psi(y)|^2\,dy.$$

Итак, пусть' $\Phi = \Phi^N$ — неаддитивная амплитуда на $\mathscr{K}_N$. Будем говорить, что амплитуда Φ *определяет* КН-*цепь* (если существует единичный вектор ψ^1 и такие матричнозначные функции на C^k $\{Z^l(\cdot)\}_1^{N-1}$, что для любого $\varphi \in C^N$ норма матрицы $Z^l(\varphi)$ ($l = 1, 2, \ldots, N-1$) не превосходит единицы, а амплитуда любого виртуального события $g_N = \bigcup_{i:\, i_1\in I_1,\ldots,\, i_N\in I_N} \omega_i$ может быть вычислена по рекуррентным формулам

$$\Phi^l(g_l) = \hat{\chi}_{I_l} \circ z^{l-1}(\Phi^{l-1}(g_{l-1}))\,\Phi^{l-1}(g_{l-1}), \quad l = 2, 3, \ldots, N.$$
$$\Phi^1(g_1) = \hat{\chi}_{I_1}\psi^1.$$

Рассмотрим КН-цепь, для которой

$$Z^l_{k,N}(\cdot) = Z_{k,N}(\cdot) = U_\tau(\cdot) \circ K^{-1}_{k,N} \circ K^*_{k,N}, \tag{3.2}$$

где $K_{k,N}$ — трехдиагональная матрица размера $k \times k$

$$K_{k,N} = \begin{pmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1+2\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{i\tau h}{4h^2 m},$$

а $U_\tau(\cdot)$ — диагональная унитарная матрица, l-й диагональный элемент матрицы $U_\tau(\psi)$ равен

$$\exp\frac{i\tau}{h}\left\{v(lh) + \sum_{l'=1}^{k} ha((l-l')h)\,|\psi_{l'}|^2\right\} = \exp\frac{i\tau}{\hbar}A(\psi),$$

где $v(x)$ и $a(x)$ — действительные функции.

Обозначим через $\|\cdot\|_{2,k}$ — норму в C^k, равную

$$\|\varphi\|_{2,\,k}=\left\{\sum_{i=1}^{k}|\varphi_i|^2\right\}^{1/2}.$$

Относительно матрицы $K_{k,N}^{-1}\circ K_{k,N}^{*}$ известно ([20], стр. 84—86), что в этой норме одна диссипативна, т. е.

$$\|\psi\|_{2,\,k}\geqslant\|K_{k,\,k}^{-1}\circ K_{k,\,k}^{*}\psi\|_{2,\,k}.$$

Пусть t и l — некоторые положительные числа $\tau=t/N$, $h=l/k$.

Определение 3.1. *Комплексной энтропией* КН-цепи с неаддитивной амплитудой Φ называется величина

$$H_N=-\;h\sum_{j=1}^{k}\{|\Phi_j(\Omega_N)|^2\ln\Phi_j(\Omega_N)\}\,l/k,$$

а *комплексной энтропией* задачи Коши (3.1) — функция

$$H(t)=-h\int\{|\psi(x,\,t)|^2\ln\psi(x,\,t\}\,dx.$$

Рассмотрим последовательность КН-цепей с амплитудами (3.2) при $k=1,\,2,\,\ldots,\,N=1,\,2,\,\ldots$

Теорема 3.1. *Пусть $v(x)$, $a(x)$ трижды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0,\,l]$ и $u_0(x)\in\mathring{H}_3[0,\,l]$ *). Тогда в каждой точке $x\in[0,\,l]$ существует предел*

$$\lim_{\substack{k,\,N\to\infty,\,kh\to x\\ k\tau\to t}} Z_{k,\,N}(\psi^{n-1})\circ Z_{k,\,N}(\psi^{n-2})\circ\ldots\circ Z_{k,\,N}(\psi')\,\psi'=\Phi(t,\,x),$$

причем функция (параметра t) $\Phi(t,\,x)$ принимает значения в $\mathring{H}_3[0,\,l]$ и является непрерывным решением нелинейного интегрального уравнения

$$\psi(t)=K(t)\,u_0+\frac{i}{h}\int_0^1 K(t-\tau)\circ A(\psi(\tau))\,\psi(\tau)\,d\tau, \qquad (3.3)$$

---

*) Через $H_r\,[0,\,l]$ обозначено пополнение множества функций из $C^\infty[0,\,l]$, удовлетворяющих условиям

$$u(0)=u^{(2)}(0)=\ldots=u^{(m)}(0)=u(l)=u^{(2)}(l)=\ldots=u^{(m)}(l)=0,$$

где $m=2\,[r/2]$, по норме

$$\|u\|_r=\left\{\int_0^l(|u(x)|^2+|u^{(r)}(x)|^2)\,dx\right\}^{1/2}.$$

где $K(l)$ — разрешающий оператор задачи Коши для уравнения Шредингера

$$\frac{h}{i}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u_0 \in H_0[0, l],$$
$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Доказательство. Из леммы 3.1, приводимой ниже, следует, что в классе непрерывных по t и ограниченных в $\mathring{H}_3[0, l]$ функций существует единственное решение задачи (3.3), причем функция непрерывно дифференцируема один раз по t и два раза по x. Попутно будет доказано, что $\|K(t)\|_{\mathring{H}_r \to \mathring{H}_r} = 1$.

Обозначим через $P_{N,k}$ оператор проектирования

$$P_{N,k}\psi(x, t) = \psi(qh, l\tau), \quad (q-1)h \leqslant x < qh, \quad (l-1)\tau < t < l\tau.$$

Из леммы 3.2, доказанной ниже, следует, что

$$P_{N,k}K(t)u_0(x) - (K_{k,N}^{-1} \circ K_{k,N}^*)^l P_{N,k}u_0 = \alpha_q^l(N, k),$$

причем $\alpha^l(N, k) \to 0$ в норме $\|\cdot\|_{2,k}$:

$$\|\alpha^l(N, n)\|_{2,k} = \left(\sum_{m=1}^{k} h\,|\alpha_m^l(N, n)|^2\right)^{1/2},$$

при $N, k \to \infty$ равномерно по l. Поэтому

$$P_{N,k}\psi(\tau) = (K_{k,N}^{-1} \circ K_{k,N}^*)^N P_{N,k}u_0 + \alpha^N(N, k) +$$
$$+ \frac{i}{h}\sum_{j=0}^{N-1} \tau(K_{k,N}^{-1} \circ K_{k,N})^{N-j-1} P_{N,k}(A(\psi(\tau)))\,\psi(\tau).$$

В аналогичном виде можно представить функцию $\Phi^l(\Omega_N^l)$ и, воспользовавшись непрерывностью функции $\psi(t, x)$ по x и t и априорной ограниченностью последовательности $\Phi(\Omega_N^k)$, вытекающей из диссипативности матриц Z и унитарности матриц $U_\tau(\Phi^l)$, получить рекуррентную систему оценок

$$a_{N,k}(l) = \|P_{N,k}\psi(\tau l) - \Phi^l(\Omega_N^l)\|_{2,k} \leqslant$$
$$\leqslant O(N^{-1}) + \|\alpha^l(N, k)\|_{2,k} + c\sum_{j=0}^{l-1}\tau a_{N,k}(j). \quad (3.4)$$

Поскольку величины $O(N^{-1})$ и $\|\alpha^l(N, k)\|_{2,k}$ стремятся к нулю при $N, k \to \infty$, то из (3.4) следует, что при любом φ

$$a_{N,k}(\varphi) \leqslant (O(N^{-1}) + \|\alpha^l(N, k)\|)\exp c\tau \to 0 \text{ при } N, k \to \infty.$$

Теорема доказана.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда в* $\mathring{H}_3$ $[0, l]$ *существует единственное непрерывное по* t *решение задачи* (3.3)

Доказательство. Методом разделения переменных можно доказать, что в уравнении (3.3) оператор $K(t)$ действует в $\mathring{H}_r[0, l]$ и его норма равна единице. В самом деле, пусть $\varphi \in C^\infty[0, l]$ и $\varphi(x) = 0$ при $x = 0$, $x = l$. Тогда по известной теореме о рядах Фурье ([6], стр. 295) функцию $\varphi(x)$ можно разложить в регулярно сходящийся ряд по собственным функциям задачи $u'' + \lambda u = 0$, $u(0) = u(l) = 0$

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \sin\frac{j\pi x}{l}, \quad \varphi_j = \frac{l}{2\pi}\int_0^l \sin\frac{j\pi x}{l}\,\varphi(x)\,dx. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в определение нормы и интегрируя по частям, получим

$$\|\varphi\|_r^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j|^2\left(1 + \left(\frac{j\pi}{l}\right)^{2r}\right),$$

решение задачи Коши можно представить в виде

$$\varphi(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \sin\frac{j\pi x}{l} \exp\left\{-i\left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 t\right\} = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\varphi}_j(t)\sin\frac{j\pi x}{l}.$$

Поскольку $|\bar{\varphi}_j(t)| = |\varphi_j|$, то $\|\varphi(\cdot, t)\|_r = \|\varphi\|_r$. На все пространство $\mathring{H}_r[0, l]$ оператор $K(t)$ продолжается по непрерывности. Оценим норму оператора умножения на гладкую функцию, действующего в $\mathring{H}_r[0, l]$. Пусть r производных функции $v(x)$ ограничены на отрезке $[0, l]$, и пусть $\|v\|_{C^r} = \sum_{i=1}^{r} \max_x |v^{(j)}(x)|$. В силу определения нормы имеем

$$\|vu\|_r^2 = \gamma\|v\|_{C^r}^2\|u\|_r.$$

Таким образом, если функция $v(x)$ три раза непрерывно дифференцируема, то оператор умножения на функцию $v(x)$ ограничен в $\mathring{H}_3[0, l]$. Рассмотрим теперь оператор $A(u)$. Он обладает следующими очевидными свойствами:

а) $\|A(u)\|_{\mathring{H}_3\to\mathring{H}_3} \leqslant \gamma(\|v\|_{C^3} + \|a\|_{C^3}\|u\|_0^2)$ (локальная ограниченность);

б) $\|A(u) - A(v)\|_{\mathring{H}_3\to\mathring{H}_3} \leqslant \gamma\|a\|_{C^3}(\|u\|_3 + \|v\|_3)\|u - v\|_3$ (липшиц-непрерывность);

в) $\|\exp(itA(u)/h)\|_{\mathring{H}_0\to\mathring{H}_0} = 1$ (равномерная ограниченность).

Эти свойства операторов K и A позволяют использовать теорему *) работы [17], из которой следует, что существует единственное непрерывное решение задачи (3.3). Лемма доказана.

---

*) Ее доказательство приведено в § 1 гл. III на частном примере.

Из теоремы вложения следует существование постоянной β_k такой, что

$$\|u\|_{C^k} \leqslant \beta_k \|u\|_{k+1}.$$

Таким образом, можно утверждать, что решение задачи (3.3) дважды непрерывно дифференцируемо по x. Вычислим производную по t. Поскольку $K(t)$ — разрешающий оператор задачи Коши и функция дважды непрерывно дифференцируема по x, то

$$\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) = \frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x, t) + A(\psi)\psi(x, t).$$

Следовательно, производная по t также непрерывна.

Лемма 3.2. *Пусть* $u_0 \in \mathring{H}_3[0, l]$ *и операторы* $K_{k,N}$ *и* $K(t)$ *определены выше. Тогда при* $(q-1)\delta \leqslant x < q\delta$, $(l-1)tN^{-1} \leqslant \tau < ltN^{-1}$

$$P_{N,k}K(t)u_0(x) = (K_{k,N}^{-1} \circ K_{k,N}^{*})^l P_{N,k}u_0(x) = \alpha_q^l(N, k),$$

где $\alpha_q^l(N, k) \to 0$ *при* $N, k \to \infty$.

Доказательство. Поскольку функция $u(\tau, x) = K(\tau)u_0(x)$ — непрерывно дифференцируемое решение задачи Коши, то разность

$$P_{N,k}u(\tau, x) - (K_{k,N}^{-1} \circ K_{k,N}^{*})^l P_{N,k}u_0(qb) = \psi_q^l$$

является решением рекуррентной системы

$$\frac{h}{i}\frac{\psi_q^{l+1} - \psi_q^l}{tN^{-1}} = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{1}{2}\frac{\psi_{q-1}^{l+1} - 2\psi_q^{l+1} + \psi_{q+1}^{l+1}}{b^2} + \frac{1}{2}\frac{\psi_{q-1}^{l} - 2\psi_q^{l} + \psi_{q+1}^{l}}{b^2}\right) + \varepsilon_{q,l}(k, N), \quad (3.6)$$

$$\psi_q^0 = 0,$$

где

$$b = l/k,$$

$$\varepsilon_{q,l}(k, N) = \frac{b}{i}\frac{u((l+1)tN^{-1}, qb) - u(ltN^{-1}, qb)}{tN^{-1}} - \frac{h^2}{2m}\left(\frac{1}{2}\frac{u((l+1)tN^{-1}, (q-1)b) - 2u((l+1)tN^{-1}, qb)}{b^2} + \frac{1}{2}\frac{u((l+1)tN^{-1}, (q-1)b)}{b^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{u(ltN^{-1}, (q-1)b) - 2u(ltN^{-1}, qb) + u(ltN^{-1}, (q+1)b)}{b^2}\right).$$

В силу «хорошей обусловленности» системы (3.6) для ее решения выполняются оценки (см. [8], стр. 38—41):

$$|\psi_q^{l+1}| \leqslant cltN^{-1}\max_{q,l}\varepsilon_{q,l}(k, N) \to 0, \quad k, N \to \infty.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Аналогичным образом можно рассмотреть КН-цепи, соответствующие системе уравнений.

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1 *и* $\{\Phi^N\}^\infty$ — *определенная выше последовательность амплитуд* КН-*граней, сходящаяся к решению задачи* (3.1). *Тогда энтропия* КН-*граней* H_N *сходится при* $N \to \infty$, $k \to \infty$ *к энтропии задачи Коши* (3.1) (*см. определение* 3.1).

Доказательство. Сумма

$$\sum_{j=1}^{k} h\{|\Phi_j^N(\Omega_N)|^2 \ln \Phi_j^N(\Omega_N)\} l/k = H_N$$

аппроксимирует интеграл Римана

$$h\int_0^l (|\Psi(x, t)|^2 \ln \Psi(x, t))\, dx = H(t).$$

Поскольку при $N \to \infty$, $k \to \infty$ существует предел

$$\lim_{N\to\infty,\ kj^{-1}l\to x} \Phi_j^N(\Omega_N) = \Psi(x, t)$$

и $\Psi(x, t)$ — непрерывная функция, то в силу теоремы 3.7.9 из [24] $\lim\limits_{N\to\infty, k\to\infty} H_N = H(t)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, мы проделали путь от простейших комплексных марковских цепей до нелинейных уравнений. В случае КМ-цепей амплитуда являлась аддитивной функцией множества, а в случае КН-цепей мы использовали новое рекуррентное правило вычисления амплитуд виртуальных событий (2.7). Как показывает приведенная выше теорема, это правило вычисления амплитуд естественным образом связано с нелинейным характером уравнения, к решению которого сходятся в пределе амплитуды множества всех элементарных виртуальных событий.

§ 4. Статистический ансамбль квазичастиц

Рассмотрим систему с r степенями свободы, описываемую в комплексных переменных $\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j + ip_j)$ системой квазилинейных уравнений вида

$$i\dot{\alpha}_j = \sum \alpha_m V_j^m(\alpha, \bar{\alpha}), \qquad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{4.1}$$

Здесь $V_j^m(\alpha, \bar{\alpha}) = \bar{V}_m^j(\alpha, \bar{\alpha})$ — компоненты эрмитовой матрицы размера $r \times r$, которые могут зависеть от α и $\bar{\alpha}$ следующим образом:

$$V_j^m(\alpha, \bar{\alpha}) = \sum_m \frac{1}{n!} V_{j_1,\ldots,j_n,j}^{m_1,\ldots,m_n,m} \alpha_{m_1}, \ldots, \alpha_{m_n} \bar{\alpha}_{j_1} \ldots \bar{\alpha}_{j_n}. \tag{4.2}$$

Такую систему будем называть униформизуемой. Униформизуемые системы это нелинейные гамильтоновы системы с гамильтонианами вида

$$\mathcal{H}(\alpha, \bar{\alpha}) = \sum_n \frac{1}{n!} V^{m_1, \ldots, m_n}_{j_1, \ldots, j_n} \alpha_{m_1} \ldots \alpha_{m_n} \bar{\alpha}_{j_1} \ldots \bar{\alpha}_{j_n}. \tag{4.3}$$

Система уравнений (4.1) может быть записана в виде комплексифицированной системы гамильтона:

$$i\dot{\alpha}_j = \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_j} \mathcal{H}(\alpha, \bar{\alpha}), \qquad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Такая система может быть получена предельным переходом из КН-цепей, когда шаг по времени стремится к нулю.

Пусть для любого комплексного вектора определена эрмитова матрица $V(\psi, \psi)$ размера $r \times r$:

$$V^j_m(\psi, \psi) = \\ = \sum_n \frac{1}{n!} V^{j_1, \ldots, j_n, j}_{m_1, \ldots, m_n, m} \psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_n}, \bar{\psi}_{m_1}, \ldots, \bar{\psi}_{m_n}, \quad 1 \leqslant j, m \leqslant r.$$

Рассмотрим последовательность КН-цепей, амплитуды которых вычисляются по рекуррентным формулам

$$\Phi^l_N(g_l) = \chi_{I_l} \circ Z_N(\Phi^{l-1}_N(g_{l-1}))\, \Phi^{l-1}_N(g_{l-1}); \qquad l = 2, 3, \ldots, N;$$

$$\Phi^1_N(g_1) = \chi_{I_1}\psi^1, \qquad \psi^1 \in \mathrm{C}^r, \qquad \|\psi^1\| = 1,$$

где $N = 2, 3, \ldots;$

$$Z_N(\psi) = \exp\frac{\tau}{i} V(\psi, \bar{\psi}),\ \tau = \frac{t}{N},\ g_l = \bigcup_{\substack{i: i_1 \in I_1, \ldots \\ \ldots, i_l \in I_l}} \omega_i \in K_l\ ^{*)}.$$

Обозначим через Ω_N истинное событие, состоящее из всех элементарных виртуальных событий. Аналогично доказательству теоремы 3.1 доказывается следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Для любого* $\psi^1 \in \mathrm{C}^r$ *существует предел*

$$\lim_{N \to \infty} \Phi^N_N(\Omega_N) = \alpha(t),$$

где $\alpha(t)$ *— непрерывная функция параметра* t *со значениями в* C^r, *являющаяся решением нелинейного уравнения* (4.1).

Определение 4.1. *Униформизацией* системы (4.1) называется система линейных уравнений

$$ih\dot{\varphi}_{j_1, \ldots, j_n} = W^{l_1, \ldots, l_n}_{j_1, \ldots, j_n} \varphi_{l_1, \ldots, l_n}, \tag{4.4}$$

$$j_1, \ldots, j_n = 1, \ldots, r; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

---

*) Здесь использованы те же обозначения, что и в § 2 настоящей главы.

где

$$W_{j_1,\ldots,j_n}^{l_1,\ldots,l_n} = \sum_{m=0}^{n} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_m=1 \\ i_1\geqslant\ldots\geqslant i_m}}^{n} h^m V_{j_{i_1},\ldots,j_{i_m}}^{l_{i_1},\ldots,l_{i_m}} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq i_1,\ldots,i_n}}^{n} \delta_{j_i}^{l_i} \tag{4.5}$$

(h — параметр, δ_k^l — символ Кронекера).

Систему уравнений (4.4) для каждого n удобно записывать в векторном виде

$$ih\dot{\varphi}^{(n)} = W^{(n)}\varphi^{(n)}, \tag{4.4$'$}$$

где $\varphi^n = \{\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\}$ — r^n-мерный комплексный вектор (точнее — тензор n-го ранга размерности r), а $W^{(n)} = \{W_{j_1,\ldots,j_n}^{l_1,\ldots,l_n}\}$ — оператор в пространстве C^{r^n} этих тензоров, который, как и операторы $V^{(m)} = \{V_{j_1,\ldots,j_m}^{l_1,\ldots,l_m}\}$ обладает свойством эрмитовости.

Набор номеров $(j_1, \ldots, j_n)$ будем называть *элементарным состоянием* n квазичастиц. Назовем вектор $\varphi^{(n)} = \{\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\}$, удовлетворяющий уравнению (4.4), *амплитудой* системы квазичастиц, а величину (4.5) — ее *гамильтонианом*. Далее рассматриваются амплитуды $\varphi_{j_1,\ldots,j_m}$, полностью симметричные относительно перестановок индексов $j_1, \ldots, j_n$, называемые амплитудами тождественных квазичастиц.

Обозначим через $C^{\binom{n+r-1}{n}}$ гильбертово пространство полностью симметричных тензоров $\varphi^{(n)} = \{\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\}$ ранга n и размерности r. Размерность этого пространства равна числу сочетаний из $n + r - 1$ по n.

Рассмотрим бесконечную прямую сумму

$$E = \bigoplus_{n=0}^{\infty} C^{\binom{n+r-1}{n}}.$$

Определение 4.2. Будем говорить, что каждый вектор этого пространства $\varphi = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}$, удовлетворяющий уравнению

$$ih\dot{\varphi} = E\varphi, \tag{4.6}$$

где $E = \bigoplus_{n=0}^{\infty} W^{(n)}$, $W^{(n)} = \{W_{j_1,\ldots,j_n}^{l_1,\ldots,l_n}\}$, определяет статистический ансамбль с переменным числом тождественных квазичастиц, отвечающих гамильтониану (4.3).

Функция $\varphi = \varphi(t)$, являющаяся решением уравнения (4.6), называется амплитудой ансамбля тождественных квазичастиц. Очевидно, что n-частичные подпространства инвариантны относительно разрешающего оператора задачи (4.6), который на каждом из этих подпространств имеет вид $\exp\left\{-\frac{i}{h} tW^{(n)}\right\}$.

Теорема 4.1. *Уравнение (4.6) для амплитуды ансамбля тождественных квазичастиц, отвечающих гамильтониану*

$$\mathscr{H}(\alpha, \bar{\alpha}) = \sum_m \frac{1}{m!} V^{i_1,\ldots,i_m}_{j_1,\ldots,j_m} \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m} \bar{\alpha}_{j_1}, \ldots, \bar{\alpha}_{j_m},$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip),$$

унитарно эквивалентно уравнению Шредингера

$$ih \frac{\partial}{\partial t} \psi = \mathscr{H}(\overset{1}{a}, \overset{2}{a^*}) \psi, \qquad \psi \in L_2(\mathbf{R}^n), \tag{4.7}$$

где $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + h\nabla)$, $a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - h\nabla)$. *Унитарное преобразование, преобразующее решение уравнения (4.7) в решение уравнения (4.6), имеет вид (4.8).*

Доказательство. Рассмотрим унитарное преобразование U: $L^2(\mathbf{R}^n) \to E$:

$$\varphi_{j_1,\ldots,j_n} = \frac{1}{\sqrt{(2h)^n n!}} \int \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \exp\left\{-\frac{1}{2h}\sum_1^n x_i^2\right\} \left(x_{j_1} + h\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\right) \ldots$$
$$\ldots \circ \left(x_{j_n} + h\frac{\partial}{\partial x_{j_n}}\right) \psi(x)\, dx = U\psi. \tag{4.8}$$

Обратное преобразование $\psi = U^+\varphi$ имеет вид

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2h)^n n!}} \sum_{j_1,\ldots,j_n} \varphi_{j_1,\ldots,j_n} \left(x_{j_1} - h\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\right) \ldots$$
$$\ldots \left(x_{j_n} - h\frac{\partial}{\partial x_{j_n}}\right) \frac{1}{\sqrt{(\pi h)^{n/2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2h}\sum_1^n x_i^2\right\}.$$

Докажем, что эрмитовы операторы E и $\mathscr{H}$, определяющие уравнения (4.6), (4.7), эквивалентны относительно указанного унитарного преобразования, т. е.

$$U \circ H \circ U^+ = E.$$

Для этого заметим, что матричные элементы $(U \circ H \circ U^+)^{j_1,\ldots,j_m}_{l_1,\ldots,l_n}$ при унитарном преобразовании (4.8) могут быть найдены дифференцированием:

$$(U \circ H \circ U^+)^{j_1,\ldots,j_m}_{l_1,\ldots,l_n} = \frac{1}{\sqrt{m!\,n!}} \frac{\partial^m}{\partial \beta^m} \frac{\partial^n}{\partial \bar{\beta}^n} \theta(\beta, \bar{\beta})\Big|_{\beta=\bar{\beta}=0}, \tag{4.9}$$

где

$$
0(\beta, \bar\beta) = (\psi_0, e^{\bar\beta_i b_i}\mathscr{H} e^{\beta_i b_i^*}\psi_0),
$$

$$
b_i = \frac{1}{\sqrt{2h}}\left(x_i + h\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \quad b_i^* = \frac{1}{\sqrt{2h}}\left(x_i - h\frac{\partial}{\partial x_i}\right),
$$

$$
\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi h}}\exp\left\{-\frac{1}{2h}\sum_1^n x_i^2\right\}.
$$

Учитывая следующие свойства векторов $\psi_\beta = e^{\beta_i b_i^*}\psi_0$:

$$
b\psi_\beta = \beta\psi_\beta, \ (\psi_\beta, \psi_\beta) = e^{\bar\beta_i\beta_i},
$$

справедливые при любом комплексном $\beta \in C^r$, найдем производящую функцию оператора

$$
\theta(\beta, \bar\beta) = e^{\bar\beta_i\beta_i}\sum_n \frac{h^n}{n!} V_{l_1,\ldots,l_n}^{j_1,\ldots,j_n}\bar\beta_{j_1}, \ldots, \bar\beta_{j_n}\beta_{l_1}, \ldots, \beta_{l_n}. \tag{4.10}
$$

Дифференцируя ряд (4.10) по $\bar\beta$ и β, получим, что элементы (4.9) при $n \neq m$ равны нулю, а при $n = m$ совпадают с $W_{l_1,\ldots,l_n}^{j_1,\ldots,j_n}$ — единственными ненулевыми элементами оператора.

Это и завершает доказательство теоремы 4.1.

§ 5. Амплитуда трубки траекторий в фазовом пространстве

В гл. VI мы изучали интеграл по траекториям в фазовом пространстве — континуальный интеграл Фейнмана в «гамильтоновой форме». Возникает естественно вопрос о вычислении амплитуды трубки траекторий в фазовом пространстве. Отметим, однако, что такая трубка в силу принципа неопределенности не имеет физического смысла «черной трубки». Действительно, разбивая интервал времени $[0, t]$ на промежутки Δt мы должны будем в каждый момент ставить по очереди диафрагму по координатам и диафрагму по импульсам и в результате в пределе ни по импульсам, ни по координатам мы не получим полного поглощения на границе трубки. Вычисление таких амплитуд представляет интерес лишь с точки зрения их колмогоровского продолжения на любые подмножества множества конечных траекторий.

Пусть $\hat H = H(\overset{1}{p}, \overset{2}{x})$, $p = i\partial/\partial x$ ($H(p, x)$ принадлежит C^∞ и ограничена со всеми производными) — производящий оператор полугруппы, а $e_1(x)$, $e_2(p)$ — характеристические функции некоторых ограниченных областей Ω_x и Ω_p в x- и p-пространствах соответственно. Амплитуда трубки траекторий, заключенных в области $\Omega_x \times \Omega_p$, очевидно, равна пределу при $N \to \infty$ выражения

$$
\Gamma_N = e_1(x)\,[\exp\{i\hat H\Delta t\}e_2(i\partial/\partial x)e_1(x)]^N\psi_0(x),
$$

$$
\Delta t = t/N, \ \psi_0 \in C^\infty.
$$

Очевидно, $\Upsilon_N \to 0$. Если же $\Omega_x \equiv \mathbf{R}$, то $e_1(x)\exp\{i\hat{H}\Delta t\}\, e_2(i\partial/\partial x) = e_1(x)e_2(i\partial/\partial x) + ie_1(x)\hat{H}e_2(i\partial/\partial x)\Delta t + O((\Delta t)^2)$. Поэтому $\Gamma_N = e_1(x)\exp\{ite_1(x)\hat{H}e_2(i\partial/\partial x)\}\; e_2(i\partial/\partial x)e_1(x)\psi_0(x) + O(\Delta t)$. Поэтому амплитуда трубки равна $e_1(x)\varphi(x, t)$, где $\varphi(x, t)$ — решение задачи $i\partial\varphi/\partial t = e_1(x)\hat{H}e_2(i\partial/\partial x)\varphi$, $\varphi(x, 0) = e_2(i\partial/x)e_1(x)\psi_0(x)$. Соответственно для оператора с унитарной нелинейностью $(i\partial/\partial t)\varphi = e_1(x)H(\overset{1}{p}, \overset{2}{x}, [\tilde{\varphi}^*(p)\varphi(x)e^{ipx}e_1(x)e_2(p)])e_2(i\partial/\partial x)\varphi$ мы получаем неаддитивную амплитуду. Процесс униформизации этого уравнения (эквивалентный переходу к шредингеровской картине вторичного квантования) приводит к аддитивной амплитуде, отвечающей вторично квантованному уравнению.

Асимптотика при $h \to 0$ решения последнего уравнения (если в производные ввести множитель h) строится аналогично гл. VI, если хотя бы одна классическая траектория попадает в «трубку»; если же ни одна классическая траектория не попадает в эту «трубку»; (т. е. прохождение электронов через трубку есть чисто диффракционный эффект), то возникает весьма актуальная проблема вычисления такой асимптотики (экспоненциально малой). По-видимому, в этом случае нужно искать экстремальную траекторию в классе траекторий, допускающем скользящие лучи вдоль границы трубки, и главный член асимптотики будет совпадать с асимптотикой решения краевой задачи с нулевыми условиями на части границы, вдоль которой скользит экстремаль.

Аналогом черного тела (или черной «трубки») конфигурационного пространства служит в импульсном пространстве так называемый сепаратор скоростей. Подобно тому как «черное тело» поглощает все частицы, которые в него попадают, сепаратор скоростей поглощает все частицы, скорости которых не принадлежат к данному сепарируемому интервалу скоростей. Аналогичную роль играют всевозможные фильтры радиочастот.

Сепаратор скоростей применяется обычно в молекулярных пучках, т. е. для классических частиц. Возникает вопрос о вычислении интенсивности электронного пучка, прошедшего через сепаратор скоростей, с учетом квантовых диффракционных эффектов. Из глав VII и VIII видно, что эта задача существенно более тонкая, чем те, которые мы решали с помощью T-отображения, и ее решение требует детального анализа амплитуды множества путей в пространстве скоростей, который мы проведем в следующей главе.

ГЛАВА IX

КОМПЛЕКСНАЯ МЕРА В ИНТЕГРАЛЕ ФЕЙНМАНА

§ 1. Комплексная мера в интеграле Фейнмана

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Шредингера в p-представлении:

$$\left\{-ih\frac{\partial}{\partial t}+\frac{|p|^2}{2m}+v(ih\nabla_p)\right\}\widetilde{\psi}(p,t)=0, \tag{1.1}$$

$$\widetilde{\psi}(p,\ 0)=\widetilde{\psi}_0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n). \tag{1.1}$$

Если потенциал $v(x)$ принадлежит $\mathscr{B}_0(\mathbf{R}^n)$, ([16] (гл. II, § 3)), то преобразование Фурье $\widetilde{v}$ принадлежит $C^+(\mathbf{R}^n)$, и решение задачи (1.1) можно представить в виде ряда теории возмущений, сходящегося в норме $C(\mathbf{R}^n)$:

$$\widetilde{\psi}(\xi,t)=\exp\left\{-\frac{i}{2mh}|\xi|^2t\right\}\widetilde{\psi}_0(\xi)+$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi h}\right)^{nl/2}\left(\frac{1}{ih}\right)^l\int ds\int dp\left\{\prod_{k=1}^{l}\widetilde{v}(p_k-p_{k-1})\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{-i}{2mh}\sum_{k=1}^{l}|p_j-\xi|^2(s_{j+1}-s_j)\right\}\widetilde{\psi}(\xi-p_l), \tag{1.2}$$

где $s=(s_1,\ldots,s_l)$ принадлежит l-мерному симплексу D_l: $\{s\,|\,0\leqslant s_1\leqslant\ldots\leqslant s_l\leqslant t\}$; $s_{l+1}=t$; $p=(p_1,\ldots$ $\ldots,p_l)\in\mathbf{R}^{nl}$, $p_k\in\mathbf{R}^n$, $p_0=0$.

В этом параграфе вводится комплексная мера m_v на некоторой σ-алгебре траекторий, имеющая ограниченную вариацию, и (1.2) может быть записана в виде интеграла по мере m_v:

$$\widetilde{\psi}(\xi,t)=\int\widetilde{\psi}_0(\xi-p_t)\exp\left\{\frac{-i}{2mh}\int_0^t|\xi-p_\tau|^2d\tau\right\}dm_v(p_\tau). \tag{1.3}$$

В конечномерных аппроксимациях континуального интеграла Фейнмана (см. гл. VI, §§ 1, 2 и гл. VII) траектория частицы является непрерывной кусочно линейной функцией. Следовательно, ее импульс будет ступенчатой функцией. Для определенности будем считать, что ступенчатые траектории, аппроксимирующие траекторию в импульсном пространстве, непрерывны справа. Множество таких траекторий, образующее линейное пространство, обозначим через $\mathscr{P}$.

Рассмотрим банахово пространство $\mathscr{X}_0$ непрерывных траекторий, заданных на $[0, t]$ и оканчивающихся в точке нуль: x_τ: $[0, t] \to \mathbf{R}^n$, $x_t = 0$, $\| x_\tau \| = \max | x_\tau |$. Обозначим через $\mathscr{P}_0$ подпространство $\mathscr{P}$, ограниченных ступенчатых траекторий, начинающихся в нуле и имеющих любое конечное число точек разрыва. Каждой траектории $p_\tau \in \mathscr{P}_0$ сопоставим непрерывный линейный функционал на $\mathscr{X}_0$: $\langle p, x\rangle = \int x_\tau dp_\tau$. Норма в $\mathscr{P}_0$ задается формулой $\| p_\tau \| = \sup | \langle p, x\rangle |$, $\| x_\tau \| \leqslant 1$, совпадающей с определением нормы сопряженного пространства.

Пусть N — целое положительное и $\mathscr{B}(\mathbf{R}^{nN})$ — σ-алгебра борелевских подмножеств $\mathbf{R}^{nN}$ (см. [19, 24]). Рассмотрим класс A подмножеств множества $\mathscr{P}_0$, элементами которого являются множества ступенчатых траекторий вида: $\{p_r \mid (p_{t_1}, \ldots, p_{t_N}) \in B\}$, $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^{nN})$ $(0 \leqslant t_1 < \ldots < t_N = t)$. При фиксированных t_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ класс $\mathfrak{A}_N$ подмножеств этого вида является алгеброй. Поскольку две произвольные алгебры $\mathfrak{A}_N$ и $\mathfrak{A}_M$ содержатся в некоторой третьей, то класс A является алгеброй. Через $\mathscr{A}$ мы будем обозначать σ-алгебру, порождаемую алгеброй A, а через $\chi_a(p_\tau)$ — характеристическую функцию множества $a \in \mathscr{A}$.

Обозначим через $p_{\tau,l}(p, s)$ непрерывную справа ступенчатую траекторию $[0, t] \to \mathbf{R}^n$, имеющую l скачков $p_1, p_2 - p_1, \ldots, p_l - p_{l-1}$ в точках $(s_1, \ldots, s_l$: $p_{\tau,l} = p_j$ при $s_j \leqslant \tau < s_{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, l$. При фиксированных $s_1, \ldots, s_l$ величина $\chi_a(p_{\tau,l}(\cdot, s))$ является характеристической функцией некоторого борелевского множества в $\mathbf{R}^{nl}$. Рассмотрим интеграл

$$m_f(a) = \int ds \int dp\, f(p)\, \chi_a(p_{\tau,l}(p, s)) \overset{\text{def}}{=} \int ds\, \langle \chi_a(p_{\tau,l}(\cdot, s)), f\rangle;$$

здесь $s \in D_l$, $a \in \mathscr{A}$, $f \in C^+(\mathbf{R}^{nl})$ ([16] гл. II, § 3); $v \in \mathscr{B}_0 \Leftrightarrow \tilde{v} \in C^+$ и пусть $\tilde{v}$ непрерывно в 0. Комплексная амплитуда $m_f(a, s) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \chi_a (p_{\tau,l}(\cdot, s)), f\rangle$ есть σ-аддитивная комплексная мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$. Она является простой функцией параметра $s \in D_l$, если $a \in A$, и измеримой, если $a \in \mathcal{A}$. Отсюда стандартным образом выводится, что $m_f(\cdot)$ также является σ-аддитивной комплексной мерой на σ-алгебре $\mathcal{A}$, причем $\operatorname{var} mf \leqslant ct^l \| f \|_{C^+}$, $c = \text{const}$. Значит, любая конечная сумма

$$m^k(a) = f_0\chi_a(0) + \sum_{l=1}^{k} \int ds \int dp f_l(p)\chi_a(p_{\tau,l}(p, s)),$$

где $f_l \in C^+(\mathbf{R}^{nl})$, является σ-аддитивной комплексной мерой на $\mathcal{A}$. Далее используем известную процедуру продолжения.

Известно, что если последовательность комплексных мер $\{m^k\}_1^\infty$ фундаментальна относительно нормы $\| m \| = \operatorname{var}(m)$, то $\lim\limits_{k\to\infty} m^k(a) = m(a)$, $a \in \mathcal{A}$, существует и является σ-аддитивной мерой на $\mathcal{A}$. Убедимся, что если (при $\tilde{v} \in C^+(\mathbf{R}^n)$, $p_0 = 0$)

$$f_l(p_1, \ldots, p_l) = \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^{nl/2} \left(\frac{1}{ih}\right)^l \prod_{k=1}^{l} \tilde{v}(p_k - p_{k-1}),$$

то последовательность мер $m^k(a)$ фундаментальна относительно нормы $\|\cdot\|$. Действительно, если $k \geqslant r$, то при $r \to \infty$

$$\operatorname{var}(m^k - m^r) \leqslant \sum_{l\geqslant r} \operatorname{var}(m^{l+1} - m^l) \leqslant \sum_{l\geqslant r} \frac{1}{l!}(ct)^l \| v \|^l_{\mathcal{B}_0} \to 0$$

Таким образом, мы установили, что если $v \in \mathcal{B}_0$, то комплекснозначная функция множества

$$m_v(a) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_a(0) + \sum_{l\geqslant l} \int ds \int dp f_l(p)\chi_a(p_{\tau,l}(p, s)).$$

есть σ-аддитивная функция на $\mathcal{A}$, причем $\operatorname{var} m_v \leqslant \exp\{c \| v \|_{\mathcal{B}_0} t\}$. Интеграл по этой мере будем ниже обозначать $\int \ldots dm_v$.

Теперь мы докажем, что мера $| m_v | \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{var} m_v$ сосредоточена на множестве ступенчатых траекторий, имеющих любое конечное число точек разрыва.

Ниже будет доказано *), что функции множества $|\mu_{v,k}|$ и $\mu_{v,k}$, равные по определению

$$\mu_{v,k}(a)=\int ds\int dp\prod_{r=1}^{k}\widetilde{v}(p_r-p_{r-1})\,\chi_a(p_{\tau,k}(p,s)),$$

$$|\mu_{v,k}|(a)=\operatorname{var}_a\mu_{v,k},$$

являются мерами, сосредоточенными на множестве ступенчатых траекторий, имеющих не более k точек разрыва.

Как мы видели выше, ряд $\sum\operatorname{var}\mu_{v,k}=\sum\operatorname{var}(m^k-m^{k-1})$ сходится. Поэтому для любого ε существует столь большое N, что $\sum\limits_{k>N}\operatorname{var}\mu_{v,k}\leqslant\varepsilon$. При этом мера $\sum\limits_{k\leqslant N}|\mu_{v,k}|$ и комплексная мера $\sum\limits_{k\leqslant N}\mu_{v,k}$ сосредоточены на ступенчатых траекториях, имеющих не более N точек разрыва. Следовательно, дополнение к множеству ступенчатых траекторий, имеющих любое конечное число точек разрыва, имеет меру $|m_v|$, равную нулю. Иными словами, мера $|m_v|$ и комплексная мера m_v сосредоточены на множестве ступенчатых траекторий, имеющих любое конечное число точек разрыва.

Покажем теперь, что мера $|\mu_{v,k}|$ сосредоточена на ступенчатых траекториях, имеющих не более k точек разрыва. Для этого нам достаточно убедиться, что если $C_1\supset C_2\supset\ldots$ — произвольная убывающая последовательность множеств из A и $|\mu_{v,k}|(C_r)\geqslant\delta>0$ при всех $r=1,2,\ldots$, то пересечение $\bigcap C_r$ не пусто и содержит хотя бы одну ступенчатую траекторию, имеющую не более k точек разрыва.

Поскольку плотным множеством в пространстве $C^+(\mathbf{R}^n)$ является множество линейных комбинаций δ-функций Дирака и функций из $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и характеристическая функция любого борелевского множества в $\mathbf{R}^{nk}$ имеет норму в $C^{**}(\mathbf{R}^{nk})$ равную единице, то существует такая функция $\widetilde{w}$, являющаяся линейной комбинацией δ-функции на $\mathbf{R}^n$ и функций из $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, что для любого множества $a\in A$ $\operatorname{var}_a(\mu_{v,k}-\mu_{w,k})\leqslant\delta/2$. В этом случае $\operatorname{var}_{C_r}\mu_{w,k}\geqslant\delta/2$. Поскольку $C_r\supset C_{r+1}\supset\ldots$, то существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\chi_{C_r}(p_\tau)=\inf_r\chi_{C_r}(p_\tau)=\chi(p_\tau).$$

Далее, в силу теоремы Лебега, можно совершить предельный переход под знаком интеграла**)

$$\int ds\int dp\prod_{j=1}^{k}|\widetilde{w}(p_j-p_{j-1})|\,\chi(p_{\tau,k}(p,s))\geqslant\lim_{r\to\infty}\operatorname{var}_{C_r}\mu_{w,k}\geqslant\frac{\delta}{2}>0.$$

*) Доказательство принадлежит А. М. Чеботареву.

** $|\widetilde{w}|$ понимается как предел модулей последовательности функций, из C_0^∞, слабо сходящейся к $\widetilde{w}$.

Следовательно, существуют такие $\bar p \in \mathbf{R}^{nk}$ и $\bar s \in D_k$, что функция $\chi\ (p_{\tau,k}(\bar p, \bar s)) = 1$. Но поскольку $C_{r+1} \subset C_r$, то $\chi_{C_r} \geqslant \chi_{C_{r+1}}$; следовательно, $p_{\tau,k}(\bar p, \bar s) \in C_r$ при всех $r = 1, 2, \ldots$.

Следовательно, существует траектория, имеющая не более k точек разрыва, принадлежащая пересечению множеств C_r.

§ 2. Преобразование Фурье комплексной меры

Вычислим сначала интеграл простой ограниченной функции φ, заданной на $\mathcal{P}_0$, относительно меры m_v. Пусть $\{a_k\}_1^\infty$ — набор попарно непересекающихся множеств из $\mathcal{A}$, и пусть $\varphi(p_\tau) = \varphi_k$, если $p_\tau \in a_k$. В этом случае

$$\int \varphi\, dm_v \overset{\text{def}}{=} \sum_k \varphi_k m(a_k) = \varphi(0) + \sum_{l\geqslant 1} \int ds \int dp f_l(p)\, \varphi(p_{\tau,l}(p, s)). \tag{2.1}$$

Ряд в (2.1) сходится абсолютно.

В силу комплексного аналога теоремы Лебега формула (2.1) остается справедливой и для любой измеримой относительно $\mathcal{A}$ ограниченной функции на $\mathcal{P}_0$.

Примером такой функции является следующая функция от $p_\tau \in \mathcal{P}_0$:

$$\exp\left\{\frac{i}{h}\int_0^t x_\tau\, dp_\tau\right\}, \qquad x_\tau \in \mathcal{X}_0.$$

Вычислим интеграл

$$\int \exp\left\{\frac{i}{h}\int_0^t x_\tau\, dp_\tau\right\} dm_v(p_\tau) = Fm_v,$$

называемый *преобразованием Фурье* комплексной меры m_v:

$$Fm_v = 1 + \sum_{l\geqslant 1} \int ds \int dp f_l(p) \exp\left\{\frac{i}{h}\sum_{j=1}^{l} x_{s_j}(p_j - p_{j-1})\right\}\Bigg|_{p_0=0} =$$

$$= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!}\int_0^t ds_1 \ldots \int_0^t ds_l \int_{\mathbf{R}^{nl}} dq \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{l} \tilde v(q_j) \exp\left\{\frac{i}{h}\sum_{j=1}^{l} q_j x_{s_j}\right\},$$

Итак,

$$Fm_v = \exp\left\{-\frac{i}{h}\int v(x_\tau)\,d\tau\right\}. \tag{2.2}$$

Аналогично получается формула (1.3), дающая представление решения уравнения Шредингера в виде интеграла по комплексной мере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арсеньев А. А., Существование обобщенных решений уравнения Власова, ЖВМ и МФ, 1975, 15, 1.
2. Белов В. В., Маслов В. П., Теория возмущений комплексных марковских цепей, приложение к книге: Белов В. В., Воробьев Е. М., Шаталов В. Е., Теория графов М., «Высшая школа», 1976.
3. Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., «Наука», 1965.
4. Березин Ф. А., Квантование, Изв. АН СССР, сер. матем., 1974, 38, 5, 1116—1175.
5. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., «Наука», 1973.
6. Владимиров В. С., Уравнения математической физики, М., «Наука», 1973.
7. Гельфанд И. М., Яглом А. М., Интегрирование в функциональных пространствах и его применения в квантовой физике, УМН, 1956, **XI**, 1, 77—114.
8. Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, М., «Наука», 1973.
9. Далецкий Ю. Л., Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями, УМН, 1962, **XVII**, 5, 3—115.
10. Зоммерфельд А., Гл. XIX в книге Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные уравнения математической физики, М.— Л., ОНТИ, 1937.
11. Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, М., «Наука», 1974.
12. Майков Е. В., Фомин С. В., Мера в функциональном пространстве и разностные схемы, ДАН СССР, 1963, **149**, 3, 525—526.
13. Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., МГУ, 1965.
14. Маслов В. П., К методу стационарной фазы для континуального интеграла Фейнмана, ТМФ, 1970, 2, 1, 30—35.
15. Маслов В. П., Определение комплексных марковских цепей и вывод уравнения Шредингера, ДАН СССР, 1970, **192**, 2, 272—275.
16. Маслов В. П., Операторные методы, М., «Наука», 1973.
17. Маслов В. П., Чеботарев А. М., Представления решения уравнения типа Хартри в виде T-отображения, ДАН СССР, 1975, **222**, 5, 1037—1040.

18. П е т р о в с к и й И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., «Наука», 1970.
19. П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А., Теория вероятностей, М., «Наука», 1973.
20. С а м а р с к и й А. А., Г у л и н А. В., Устойчивость разностных схем, М., «Наука», 1973.
21. Ф а д д е е в Л. Д., Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов, ЖТМФ, 1969, 1, № 1, 3—18.
22. Ф е й н м а н Р., Х и б б с А., Квантовая механика и интегралы по траекториям, М., «МИР», 1968.
23. Ф р а д к и н Е. С., Метод функций Грина в квантовой теории поля и в статистике, Тр. ФИАН, 1965, 29, 1—130.
24. Х и л л е Э., Ф и л л и п с Р., Функциональный анализ и полугруппы, М., ИЛ, 1962.
25. A c h m a n o v S. A., H o c h l o v R. V., S u c h o r u k o v A. P., Self — fokusing, self — defokusing and self — modulation in nonlinear medium, «Laserhandbuch» v. 2, Holland — press, 1972, 5—108.
26. D a s h e n R. F., H a s s l a c h e r B., N e v e n A., Non-perturbation methods and extended — hadron models in field theory. I. Semiclassical functional methods, Phys. Rev., 1974, D 10, 12, 4114—4129.
27. F a t e y e v V. A., S c h w a r z A. S., T y u p k i n U. S., Topologically nontrivial particlas in quantum field theory P. N. Lebedev, Phys. instit., Moskow, 1975, preprint, № 157.
28. F u j i w a r a D., Fundamental solution of partial dlifferential operators of Schrödinger's type. I, Proc. Jap. Acad., 1947, 50, 8, 566—569.
29. K a t o T., Quasilinelar equations of evolution nith application to partial differential equations, Lect. Notes. Math., 1975, 448, 25—70.
30. N e l s o n E., Feynman integrals and the Schroedinger equation, J. Math. Phys., 1964, 5, 3, 332—343.
31. R a j a r a m a n R., Some non-perturbative semi-classical methods in quantum field theory (a pedogogical review), Phys. reports, 1975, 21C, 5.
32. W e i n s t e i n A., On Maslov's quantization condition, Lect. Notes Math., 1975, 459, 341—372.
33. Y o s h i k a v a B., On Maslov's canonical operator, Hokkaido Math. J., 1975, 4, 1, 8—38.