ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Том 11

ВЫПУСКИ И ТОМА СЕРИИ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАНЕЕ:

Алгебра. Топология. 1962, М., 1964
Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964
Геометрия. 1963, М., 1965
Математический анализ. 1963, М., 1965
Теория вероятностей. 1963, М., 1965
Алгебра. 1964, М., 1966
Математический анализ. 1964, М., 1966
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибериетика. 1964, М., 1966
Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967
Математический анализ. 1965, М., 1966
Алгебра. Топология. Геометрия. 1966, М., 1968
Математический анализ. 1966, М., 1967
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибериетика. 1966, М., 1967
Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969
Математический анализ. 1967, М., 1969
Теория вероятностей. Математическая статистика Теоретическая кибернетика. 1967, М., 1969
Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970
Математический анализ. 1968, М., 1969
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1968, М., 1970
Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 1970
Математический анализ. 1969, М., 1971
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетнка. 1969, М., 1970
Алгебра. Топология. Геометрия. 1970, М., 1971
Математический анализ. 1970, М., 1971
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1970, М., 1971
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 10, М., 1972
Математический анализ. Том 10, М., 1973
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 10, М., 1972
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 11, М., 1974
Математический анализ. Том 11, М., 1973
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 11, М., 1974
Современные проблемы математики. Том 1, М., 1973
Современные проблемы математики. Том 2, М., 1973
Современные проблемы математики. Том 3, М., 1974
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 12, М., 1974
Математический анализ. Том 12, М., 1974
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 12, М., 1975
Современные проблемы математики. Том 4, М., 1975
Современные проблемы математики. Том 5, М., 1975
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 13, М., 1975
Математический анализ. Том 13, М., 1975
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 13. М., 1976
Современные проблемы математики. Том 6, М., 1976
Современные проблемы математики. Том 7, М., 1975
Проблемы геометрии. Том 7, М., 1975
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 14, М., 1977
Математический анализ. Том 14, М., 1977
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 14, М., 1977
Современные проблемы математики. Том 8, М., 1977
Современные проблемы математики. Том 9, М., 1976
Проблемы геометрии. Том 8, М., 1977

МОСКВА 1978

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Том 11

Научный редактор
профессор *Р. В. Гамкрелидзе*

МОСКВА 1978

СОДЕРЖАНИЕ

Технический редактор *И. Н. Гусева*

Сдано в набор 24/VIII-1977 г. Подписано в печать 16/I-1978 г. Формат 60×90$^{1}/_{16}$

Печ. л. 14,75 Уч.-изд. л. 14,11 Тираж 700 экз. Цена 1 р. 74 к. Заказ 6932

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ, Люберцы, Октябрьский проспект, 403

Индекс 02776

soliton solutions and conserved quantities for the «boomeron» nonlinear evolution equation. Lettere Nuovo Cimento, 1976, *16*, № 14, 434—438
30. *Choodnovsky D. V., Choodnovsky G. V.*, Pole expansions of nonlinear partial differential equations. Preprint, 1977
31. *Corones J.*, Solitions and simple pseudopotentials. J. Math. Phys, 1976, *17*, № 5, 1867—1872
32. *Estabrook F. B., Wahlquist H. D.*, Prolongation structures of nonlinear evolution equations. II. J. Math. Phys., 1976, *17*, № 7, 1293—1297 (РЖМат, 1977, 2Б612)
33. Exact treatment of nonlinear lattice waves (Progr. Theor. Phys., 1976, *59*) Kyoto, 1976
34. *Faddeev L. D.*, Quantization of solitons. Preprint, Inst. for Advanced Study. Princeton, 1976
35. —, Some comments on the manydimensional solitons. Preprint CERN TH 2188, 1976
36. *Gardner C. S.*, Korteweg-de Vries equation and generalizations. IV. The Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system. J. Math. Phys., 1971, *12*, № 8, 1548—1551
37. *Hasenfratz P., Ross D. A.*, Are quarks short range solitons? Phys. Lett., 1976, *64B*, № 1, 78—80
38. *Hirota R.*, Direct method of finding exact solutions of nonlinear evolution equations. Lect. Notes Math., 1976, *515*, 40—68 (РЖМат, 1977, 2Б587)
39. —, *Satsuma J.*, A variety of nonlinear network equations generated from the Backlund transformation for the Toda lattice. Progr. Theor. Phys, 1976, № 59, 64—100
40. *Kruskal M. D.*, The Korteweg-de Vries equation and related evolution equations. Lect. Appl. Math., 1974, *15*, 61—83
41. —, *Miura R. M., Gardner C. S.*, Korteweg-de Vries equation and generalizations. V. Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws. J. Math. Phys, 1970, *11*, 952—960
42. *Lax P. D.*, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Communs Pure and Appl. Math., 1968, *21*, № 5, 467—490
43. —, Periodic solutions of the KdV equation. Communs Pure and Appl. Math., 1975, *28*, № 1, 141—188
44. *Matveev V. B.*, Abelian functions and solitons. Inst. Theor. Phys., Univ. Wroclaw, Preprint № 373, 1976
45. *McKean H. P., Trubowitz E.*, Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points. Communs Pure and Appl. Math., 1976, *29*, № 2, 143—226 (РЖМат, 1976, 12Б759)
46. *Miura R. M.*, Conservation laws for the fully nonlinear long wave equations. Stud. Appl. Math., 1974, *53*, № 1, 45—56 (РЖМат, 1975, 5Б468)
47. —, The Korteweg-de Vries equation: a survey of results. SIAM Rev., 1976, *18*, № 3, 412—459 (РЖМат, 1977, 4Б514)
48. —, *Gardner C. S., Kruskal M. D.*, Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion. J. Math. Phys., 1968, *9*, № 8, 1204—1209 (РЖМат, 1969, 9Б333)
49. *Morris H. C.*, Prolongation structures and a generalized inverse scattering problem. J. Math. Phys., 1976, *17*, № 10, 1867—1869 (РЖМат, 1977, 6Б473)
50. Nonlinear waves (Lect. Appl. Math. 1974), AMS, Providence, 1974
51. *Patani A., Schlindwein M., Shafi Q.*, Topological charges in field theory. J. Phys. *A*: Math. and Gen., 1976, *9*, № 9, 1513—1520
52. *Pohlmeyer K.*, Integrable Hamiltonian systems and interaction through quadratic constraints. Communs Math. Phys., 1976, *46*, 207—221 (РЖМат, 1976, 9Б427)
53. *Scott A. C., Chu F. Y. F., Laughlin D. W.*, The soliton; a new concept in applied science. Proc. IEEE, 1973, *61*, 1443—1483
54. *Wahlquist H. D., Estabrook F. B.*, Prolongation structures of nonlinear evolution equations. I. J. Math. Phys., 1975, *16*, № 1, 1—7 (РЖМат, 1975, 2Б433)

УДК [517.948.34+517.946.6]:530.145.6

УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

В. П. Маслов

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей статье существенно обобщаются результаты той части книги автора «Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана» [9], которые относятся к уравнениям самосогласованного поля.

Нелинейные и нелокальные уравнения самосогласованного поля, уравнения Власова [3], [4], [5], [8], Хартри [7], [12], [14], [15] и др. становятся все более актуальными и завоевывают все большие области применимости. Уравнения Власова описывают как разряженную бесстолкновительную плазму, так и поведение звезд в галактиках. Уравнения типа Хартри нашли широкое применении в современной нелинейной оптике [2], [17], описывающей распространение лазерных лучей в нелинейной среде с учетом пространственной дисперсии и временной релаксации. Наконец, уравнения типа Хартри возникают в квантовой электродинамике и квантовой теории поля, когда число взаимодействующих частиц велико и коммутатор (или антикоммутатор) между операторами рождения и уничтожения пренебрежимо мал [9].

В статье основное внимание уделено точным решениям нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка типа Власова и асимптотическим решениям уравнений с унитарной нелинейностью типа Хартри. Теоремы существования носят лишь вспомогательный характер. При конструировании решений используются методы T-отображений [9], [11], метод упорядоченных операторов [10] и метод канонического оператора [10], разработанные автором ранее.

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность М. В. Карасеву, оказавшему неоценимую помощь при написании работы и аспирантке Ле Ву Ань, сделавшей ряд полезных замечаний.

Глава I

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. T-ОТОБРАЖЕНИЯ И МЕТОД ЛОМАНЫХ ЭЙЛЕРА

Рассмотрим некоторое банахово пространство B и обозначим через $C([0, t], B)$ банахово пространство непрерывных функций $\psi=\psi(t)$ на $[0, t]\subset \mathbf{R}$ со значениями в B, наделенное нормой

$$\|\psi\|_{C([0,t],B)}=\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|\psi(\tau)\|_B.$$

Пространство $C([0, 0]), B)$ отождествим с B.

Пусть $t\geqslant t'$. Каждой функции $\psi\in C([0, t], B)$ сопоставим ее сужение на $[0, t']$; получим новую функцию $\psi'\in C([0, t'], B)$. В дальнейшем мы будем опускать знак штриха и обозначать через ψ как саму исходную функцию, так и все ее сужения на меньшие отрезки.

Пусть заданы $\varepsilon_0>0$, $T_0>0$ и при любых t, ε таких, что $0\leqslant t\leqslant T_0$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, определено некоторое двупараметрическое семейство отображений $W_{t,\varepsilon}: C([0, t], B)\to B$ такое, что при любом $t\in[0, T_0]$ и любом $v\in C([0, t], B)$ элемент $W_{t,\varepsilon}[v]$ непрерывно зависит от ε и $W_{t,0}[v]=v(t)$. Положим

$$(S_{t,\varepsilon}[v])(\tau)=\begin{cases}W_{t,\tau-t}[v], & t\leqslant\tau\leqslant t+\varepsilon,\\ v(\tau), & \tau\leqslant t.\end{cases}\tag{1.1}$$

Получим отображение

$$S_{t,\varepsilon}: C([0. t], B)\to C([0, t+\varepsilon], B).$$

Обозначим через $0\equiv t_0<\ldots<t_N\equiv T_0$ точки разбиения отрезка $[0, T_0]$ на интервалы $\Delta t_j=t_{j+1}-t_j$, где $j=0, \ldots, N$. Максимальную длину этих интервалов обозначим $\delta_N=\max\limits_j\Delta t_j$.

Пусть $v_0\in B$. Положим

$$v_N=S_{t_{N-1},\,\Delta t_{N-1}}\circ\ldots\circ S_{t_0,\Delta t_0}[v_0].\tag{1.2}$$

Здесь кружок $\circ$ обозначает композицию нелинейных отображений.

Вообще говоря, предел $\lim\limits_{\delta_N\to 0}v_n$ по норме пространства $C([0, T_0], B)$ существует не при всех $v_0\in B$. Пусть D — подмножество в B, на котором этот предел существует.

Определение 1.1. Пусть $v_0\in D$ и $v=\lim\limits_{\delta_N\to 0}v_N$. Отображение $v_0\to v$ назовем T-отображением с образующей $S_{t,\varepsilon}$ и обозначим

$$v(t)=\left(\prod_{\tau=0}^{t}\circ\overset{\tau}{S}_{\tau,d\tau}\right)[v_0].\tag{1.3}$$

Будем говорить, что T-отображение с образующей $S_{t,\varepsilon}$ существует на элементе v_0 на отрезке времени $[0, T_0]$ в норме пространства $C([0, T_0], B)$.

Пример 1.1. Пусть $\tau\in[0, T_0]$ и R_τ — непрерывное отображение $C([0, \tau], B)$ в B. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered}\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}=R_\tau[\psi],\quad \psi\in C([0, T_0], B),\\ \psi(\tau)|_{\tau=t}=v(t),\quad v\in C([0, t], B).\end{gathered}\tag{1.4}$$

Здесь t — фиксированная точка из отрезка $[0, T_0-\varepsilon_0]$. Решение этой задачи Коши $\psi(\tau)$ при каждом τ есть элемент пространства B.

Рассмотрим семейство отображений

$$W_{t,\varepsilon}: v\to\psi(t+\varepsilon),\quad \varepsilon\leqslant\varepsilon_0,$$

соответствующее семейство $S_{t,\varepsilon}$ действует по формуле

$$(S_{t,\varepsilon}[v])(\tau)=\begin{cases}\psi(\tau), & t\leqslant\tau\leqslant t+\varepsilon,\\ v(\tau), & \tau\leqslant t.\end{cases}\tag{1.5}$$

Очевидно, что элемент

$$v_N=S_{t_{N-1},\Delta t_{N-1}}\circ\ldots\circ S_{t_0,\Delta t_0}[\psi_0]$$

является решением задачи Коши

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}=R_\tau[\psi],\quad \psi|_{\tau=0}=\psi_0\in B.$$

Следовательно, при любом N $\psi=v_N$, т. е.

$$\psi=S_{t_{N-1},\Delta t_{N-1}}\circ\ldots\circ S_{t_0,\Delta t_0}[\psi_0].$$

При $N\to\infty$, $\delta_N\to 0$ получаем: $\psi=\lim v_n$ и, значит, $S_{t,\varepsilon}$ является образующей T-отображения $\psi_0\to\psi$. Ясно, что любой оператор $S'_{t,\varepsilon}$ такой, что $S_{t,\varepsilon}-S'_{t,\varepsilon}=O(\varepsilon^2)$, будет служить образующей этого же T-отображения.

Рассмотрим теперь T-отображение, ассоциированное с более общим эволюционным уравнением.

Пример 1.2. Пусть $B_1\subset B_2$ — два банаховых пространства с нормами $\|\cdot\|_1\geqslant\|\cdot\|_2$. Обозначим через $C_j(t)=C([0, t], B_j)$ пространство непрерывных отображений $[0, t]\to B_j$ $(j=1, 2)$. Тогда $C_1(t)\subset C_2(t)$.

Пусть при каждом $t\in[0, T_0]$ задано непрерывное отображение

$$R_t: C_1(t)\to B_2,$$

причем для любого $v \in C_1(t)$ $R_t(v)$ есть непрерывная функция аргумента $t \in [0, T_0]$.

Задачей Коши для оператора R_t с начальным условием $\psi_0 \in B_1$ называется система уравнений для функции $\psi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T_0)$:

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = R_t(\psi), \quad \psi(0) = \psi_0, \tag{1.6}$$

причем производная берется в норме B_2:

$$\lim_{\Delta t \to +0} \left\| \frac{d}{dt}\psi(t) - \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} \right\|_2 = 0.$$

Пусть задана образующая T-отображения:

$$S_{t,\varepsilon}: C_1(t) \to C_1(t+\varepsilon).$$

Определение 1.2. Если при любом $t \in [0, T_0]$ образующая $S_{t,\varepsilon}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left\| \frac{(S_{t,\varepsilon}[v])(\varepsilon) - v(t)}{\varepsilon} - R_t(v) \right\|_2 = 0 \tag{1.7}$$

локально равномерно по $v \in C_1(t)$, то $S_{t,\varepsilon}$ называется инфинитезимальным разрешающим оператором для задачи Коши (1.6).

Лемма 1.1. Пусть $S_{t,\varepsilon}$ — инфинитезимальный разрешающий оператор для задачи Коши (1.6) и пусть T-отображение $\psi(t) = \left(\prod_{\tau=0}^{t} \circ \overset{\tau}{S}_{\tau, d\tau}\right)[\psi_0]$ существует на элементе $\psi_0 \in B_1$ на отрезке времени $[0, T_0]$ в норме $C_1(T_0)$. Тогда функция ψ является решением задачи (1.6).

Доказательство. Пусть Δ_N — некоторое разбиение $[0, T_0]$ и

$$\psi_N = S_{t_{N-1}, \Delta t_{N-1}} \circ \ldots \circ S_{t_0, \Delta t_0}[\psi_0].$$

Тогда если $t_{j+1} \geqslant t \geqslant t_j$, то

$$\psi_N(t) = (S_{t_j, t-t_j}[\psi_N])(t).$$

Поэтому, в силу (1.7), найдется N_0 такое, что

$$\lim_{\Delta t \to +0} \left\| \frac{\psi_N(t_j + \Delta t) - \psi_N(t_j)}{\Delta t} - R_{t_j}[\psi_N] \right\|_2 = 0$$

равномерно по $N \geqslant N_0$.

Зафиксируем точку $t \in [0, T_0]$ и выберем последовательность разбиений $\{\Delta_N\}$ так, чтобы при каждом N один из узлов t_j совпадал с t.

Тогда, в силу того, что R_t непрерывен и T-отображение с образующей $S_{t,\varepsilon}$ существует на ψ_0, имеем:

$$\lim_{\Delta t \to +0} \left\| \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} - R_t[\psi] \right\|_2 = 0.$$

Лемма доказана.

Предположим теперь, что нелинейный оператор R_t в задаче Коши (1.6) имеет специальный вид

$$R_t(\psi) = A_t(\psi)\,\psi(t),$$

где $A_t(\psi)$ при каждом $\psi \in C_1(t)$ есть линейный непрерывный оператор из B_1 в B_2, являющийся инфинитезимальной образующей для однопараметрической полугруппы $e^{\varepsilon A_t(\psi)}$. В качестве инфинитезимального разрешающего оператора задачи

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = A_t(\psi)\,\psi(t), \quad \psi(0) = \psi_0, \tag{1.8}$$

можно выбрать оператор

$$(S_{t,\varepsilon}[v])(\tau) = \begin{cases} e^{(\tau - t)A_t(v)}v(t), & t \leqslant \tau \leqslant t+\varepsilon, \\ v(t), & \tau \leqslant t. \end{cases} \tag{1.9}$$

T-отображение с такой образующей записывается следующим образом:

$$\psi(t) = \prod_{\tau=0}^{t} e^{\tau A_\tau(\psi)d\tau}\psi_0. \tag{1.10}$$

В случае, когда показатель экспоненты не зависит от ψ, это T-отображение переходит в T-произведение [9].

Проследим теперь аналогию между методом T-отображений и методом ломаных Эйлера. При решении обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве эта аналогия оказывается полной (лемма 1.2).

Пусть B — банахово пространство, $\Theta: B \times \mathrm{R} \to B$ — непрерывное отображение. Через $\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$ будем обозначать производную $\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ функции $t \to x(t) \in B$. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x}(t) = \Theta(x(t), t), \quad x(0) = x^0 \in B. \tag{1.11}$$

Построим T-отображение, отвечающее этой задаче. Образующую $S_{t,\varepsilon}$ зададим формулой;

$$(S_{t,\varepsilon}[x])(\tau) = \begin{cases} x(\tau), & \tau \leqslant t, \\ x(t) + (\tau - t)\,\Theta(x(t), t), & t \leqslant \tau \leqslant t+\varepsilon. \end{cases}$$

Образующая $S_{t,\varepsilon}$ является инфинитезимальным разрешающим оператором задачи Коши (1.11). Докажем существование T-отображения с этой образующей.

Определение 1.3. Отображение $\omega: B_1 \to B_2$ банаховых пространств B_1 и B_2 будем называть липшиц-непрерывным, если существует такая непрерывная функция γ на $\mathbf{R}^2$, что для любых $x, y \in B_1$

$$\|\omega(x) - \omega(y)\|_{B_2} \leqslant \|x - y\|_{B_1}\gamma(\|x\|_{B_1}, \|y\|_{B_1}). \tag{1.12}$$

Обозначим через $\|\cdot\|$ норму в банаховом пространстве B.

Лемма 1.2. Пусть отображение Θ липшиц-непрерывно и при любом $T>0$ существует константа $c\geqslant 0$ такая, что при $|t|\leqslant T$ и при любом $x\in B$ справедливо неравенство

$$\|\Theta(x, t)\|\leqslant c(1+\|x\|). \tag{1.13}$$

Тогда T-отображение $x(t)=\prod_{\tau=0}^{t}\circ\overset{\tau}{S}_{\tau,\,d\tau}[x^0]$ существует при любом $x^0\in B$ на любом отрезке $[0, T]$ и дает решение $x(t)$ задачи Коши (1.11). Это решение единственно.

Мы приведем подробное доказательство леммы 1.2. В [11] (см. также [9], гл. III, § 1) показано, что это доказательство почти без изменений переносится на нелинейные интегро-дифференциальные уравнения, содержащие частные производные.

Доказательство леммы 1.2. Пусть $0=t_0<t_1<\ldots\ldots<t_N=t$ — некоторое разбиение отрезка $[0, t]$. Определим функцию $x^{(N)}$ на $[0, t]$ следующим равенством:

$$x^{(N)}=S_{t_{N-1},\,\Delta t_{N-1}}\circ\ldots\circ S_{t_0,\,\Delta t_0}[x^0].$$

На каждом отрезке $\tau\in[t_k, t_{k+1}]$ $(k=0, 1, \ldots, N-1)$ значения функции $x^{(N)}$ вычисляются по формуле

$$x^{(N)}(\tau)=x^{(N)}(t_k)+(\tau-t_k)\,\Theta(x^{(N)}(t_k), t_k). \tag{1.14}$$

Таким образом, функция $x^{(N)}$ есть ломаная Эйлера для задачи (1.11) в банаховом пространстве B. Сходимость T-отображения с образующей $S_{t,\varepsilon}$ означает существование предела $\lim\limits_{\delta_N\to 0}x^{(N)}$ последовательности ломаных Эйлера (когда диаметр разбиения $\delta_N=\max\limits_k\Delta t_k$ стремится к нулю). Докажем существование этого предела.

Из формулы (1.14) и оценки (1.13) следует:

$$\|x^{(N)}(\tau)\|\leqslant\|x^{(N)}(t_k)\|(1+(\tau-t_k)c)\quad\text{при }\tau\in[t_k, t_{k+1}].$$

Константа c не зависит от τ и выбора точек разбиения t_k. Из этого неравенства по индукции получим оценку:

$$\|x^{(N)}(\tau)\|\leqslant\|x^0\|(1+c\Delta t_0)\cdot\ldots\cdot(1+c\Delta t_{k-1})(1+c(\tau-t_k))\leqslant$$
$$\leqslant\|x^0\|e^{\tau c}\leqslant\|x^0\|e^{tc}. \tag{1.15}$$

Тем самым доказана равномерная ограниченность последовательности ломаных Эйлера. Из (1.12), (1.14) и (1.15) следует оценка разности

$$\|x^{(N)}-x^{(N)}(t_k)\|\leqslant c(\tau-t_k)\|x^{(N)}(t_k)\|\leqslant c(\tau-t_k)\|x^0\|e^{tc}. \tag{1.16}$$

Докажем фундаментальность последовательности $\{x^{(N)}\}$ в пространстве $C([0, t], B)$. В силу (1.16), достаточно рассмотреть случай, когда точки t_k в (1.14) имеют вид

$$t_k=k\frac{t}{N}.$$

Пусть $M=Nl$, где l — натуральное число. Достаточно доказать, что разность $x^{(N)}-x^{(N)}$ стремится к нулю в норме $C([0, t], B)$ при $N\to\infty$ равномерно по l.

Обозначим $\varepsilon=\frac{t}{M}$. Пусть $\tau\in[0, t]$. Найдется номер $k\in\{0, 1, \ldots, N-1\}$ и номер $j\in\{0, 1, \ldots, l-1\}$ такие, что

$$t_k+j\varepsilon\leqslant\tau<t_k+(j+1)\varepsilon.$$

Из формулы (1.14) (записанной для функции $x^{(M)}$ вместо $x^{(N)}$) следует, что

$$x^{(M)}(\tau)=x^{(M)}(t_k)+\sum_{s=0}^{j-1}\varepsilon\Theta(x^{(M)}(t_k+s\varepsilon), t_k+s\varepsilon)+$$
$$+(\tau-t_k-j\varepsilon)\,\Theta(x^{(M)}(t_k+j\varepsilon), t_k+j\varepsilon). \tag{1.17}$$

Вычтем из равенства (1.17) равенство (1.14). Оценим норму получившейся разности:

$$\|x^{(M)}(\tau)-x^{(N)}(\tau)\|\leqslant\|x^{(M)}(t_k)-x^{(N)}(t_k)\|+$$
$$+\varepsilon\sum_{s=0}^{j}\|\Theta(x^{(M)}(t_k+s\varepsilon), t_k+\varepsilon s)-\Theta(x^{(N)}(t_k), t_k)\|. \tag{1.18}$$

Как было показано в (1.15), последовательность $\{x^{(N)}\}$ равномерно ограничена на отрезке $[0, t]$. Отсюда и из липшиц-непрерывности отображения Θ следует оценка:

$$\|\Theta(x^{(M)}(t_k+s\varepsilon), t_k+s\varepsilon)-\Theta(x^{(N)}(t_k), t_k)\|\leqslant$$
$$\leqslant c_1(\|x^{(M)}(t_k+s\varepsilon)-x^{(N)}(t_k)\|+s\varepsilon), \tag{1.19}$$

где c_1 — некоторая константа, зависящая лишь от t и от нормы $\|x^0\|$ начальной точки x^0.

Обозначим $\alpha(\tau)=\|x^{(M)}(\tau)-x^{(N)}(\tau)\|$. Используя формулы (1.19) и (1.16), перепишем неравенство (1.18) в следующем виде:

$$\alpha(\tau)\leqslant\alpha(t_k)+\varepsilon\sum_{s=0}^{j}c_1\alpha(t_k+s\varepsilon)+c_2\varepsilon^2\frac{j(j+1)}{2},$$

где

$$c_2=c_1c\|x^0\|e^{tc}+c_1,\quad \varepsilon^2\frac{j(j+1)}{2}\leqslant\frac{\delta^2}{l^2}\cdot\frac{l(l+1)}{2}\leqslant\delta^2.$$

Отсюда по индукции получается оценка

$$\alpha(\tau)\leqslant[\alpha(t_k)(1+\varepsilon c_1)+c_2\delta^2](1+\varepsilon c_1)^{l-1},\quad \tau\in[t_k, t_{k+1}].$$

Снова, применяя индукцию к этому неравенству, получим

$$\alpha(\tau)\leqslant c_2\delta^2[(1+\varepsilon c_1)^l+(1+\varepsilon c_1)^{2l}+\ldots+(1+\varepsilon c_1)^{Nl}]\leqslant$$
$$\leqslant Nc_2\frac{t^2}{N^2}\left(1+\frac{tc_1}{M}\right)^M\leqslant\frac{c_2t^2}{N}e^{tc_1}.$$

Таким образом, мы доказали, что $\alpha(\tau)=\|x^{(M)}(\tau)-x^{(N)}(\tau)\|\to 0$ при $N\to\infty$ равномерно по l и по $\tau\in[0, t]$. Следовательно, последовательность $\{x^{(N)}\}$ фундаментальна в пространстве $C([0, t], B)$. Обозначим через $x(\tau)$ ее предел $x(\tau)=\lim\limits_{N\to\infty} x^{(N)}(\tau)$.

Из (1.14) следует, что

$$x^{(N)}\left(k\frac{t}{N}\right)=x^0+\sum_{s=0}^{k-1}\frac{t}{N}\Theta\left(x^{(N)}\left(s\frac{t}{N}\right), s\frac{t}{N}\right), 1\leqslant k\leqslant N. \quad (1.20)$$

Пусть $0<\tau<t$. Положим в формуле (1.20) $k=\left[N\frac{\tau}{t}\right]$, где квадратные скобки обозначают целую часть. Учитывая, что $\left[N\frac{\tau}{t}\right]\frac{t}{N}\to\tau$ при $N\to\infty$, получим из (1.20) интегральное уравнение для $x(\tau)$:

$$x(\tau)=x^0+\int_0^\tau\Theta(x(\mu), \mu)\, d\mu.$$

Следовательно, функция $x(\tau)$ всюду на $[0, t]$ является решением задачи Коши (1.11). Единственность решения этой задачи следует из липшиц-непрерывности отображения θ. Этим доказана сходимость T-отображения с образующей $S_{t,\varepsilon}$ к решению задачи (1.11) при всех $t\in(0, \infty)$. Лемма доказана.

В заключение параграфа рассмотрим обобщение задачи (1.11). Пусть задано некоторое отображение Ω пространства $C(\mathbb{R}, B)$ в себя. Каждой непрерывной функции $x:\mathbb{R}\to B$ отображение Ω сопоставляет непрерывную функцию $\Omega[x]:\mathbb{R}\to B$. Предположим, что Ω удовлетворяет следующему условию:

(A) если $x, y\in C(\mathbb{R}, B)$ и $x(\tau)=y(\tau)$ при $0\leqslant\tau\leqslant t$, то $\Omega[x](t)=\Omega[y](t)$.

Иными словами, значение $\Omega[x](t)$ не зависит от поведения функции $x=x(\tau)$ при $\tau>t$. Символически это можно записать так

$$\frac{\delta\Omega[x](t)}{\delta x(\tau)}=0 \text{ при } \tau>t.$$

Если $x\in C([0, T], B)$, то, доопределив функцию x подходящей константой при $t>T$, мы получим непрерывную функцию на $\mathbb{R}$ (обозначив ее снова x) и, следовательно, сможем построить функцию $\Omega[x](\tau)$. Таким образом, отображение Ω индуцирует при каждом $T>0$ отображение Ω: $C([0, T], B)\to\to C([0, T], B)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x}(t)=\Omega[x](t), \quad t\in[0, T],$$
$$x(0)=x^0\in B. \quad (1.21)$$

В силу того, что отображение Ω удовлетворяет условию (A), решение задачи (1.21) можно искать методом ломаных Эйлера.

Каждому разбиению $0\equiv t_0<t_1<\ldots<t_N\equiv T$ отрезка $[0, T]$ сопоставим непрерывную функцию $x^{(N)}$ на $[0, T]$ (ломаную Эйлера), которая определяется рекуррентной формулой:

$$x^{(N)}(0)=x^0,$$
$$x^{(N)}(t)=x^{(N)}(t_k)+(t-t_k)\Omega[x^{(N)}](t_k), \quad t\in[t_k, t_{k+1}].$$

Предел $\lim\limits_{N\to\infty} x^{(N)}(t)=x(t)$, если он существует, можно представить в виде T-отображения:

$$x(t)=\left(\prod_{\tau=0}^{t}\circ\overset{\tau}{S}_{\tau,d\tau}[x]\right)(x^0), \quad (1.22)$$

где образующая $S_{t,\varepsilon}$ задана формулой

$$(S_{t,\varepsilon}[x])(\tau)=\begin{cases}x(\tau), & \tau\leqslant t,\\ x(\tau)+(\tau-t)\Omega[x](t), & t\leqslant\tau\leqslant t+\varepsilon.\end{cases}$$

Лемма 1.3 (а). Пусть при каждом $R>0$ отображение Ω пространства $C([0, R], B)$ в себя липшиц-непрерывно. Тогда найдется отрезок $[0, T_0]$, на котором решение задачи Коши (1.21) существует, единственно и равно T-отображению (1.22).

(б) Если, кроме условия пункта (а), отображение Ω при каждом $R>0$ удовлетворяет оценке

$$\|\Omega[x]\|_{C([0,R],B)}\leqslant \mathrm{const}_R(1+\|x\|_{C([0,R],B)}),$$

то T-отображение (1.22) существует на любом отрезке $[0, T]$ и равно решению задачи (1.21).

Доказательство леммы почти дословно повторяет доказательство леммы 1.2 и мы его опускаем.

§ 2. УРАВНЕНИЯ ТИПА ВЛАСОВА

В этом и следующем параграфах мы будем рассматривать лишь вещественные функции, не оговаривая этого обстоятельства каждый раз особо. Через $\frac{\partial a}{\partial p}\frac{\partial b}{\partial q}$ обозначается скалярное произведение $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial a}{\partial p_k}\frac{\partial b}{\partial q_k}$.

Пусть

$$\mathcal{H}(q, p, [F])=H_0(q, p)+\iint V(q, p, q', p')F(q', p', t)\,dq'dp',$$

где $q, p\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$, H_0 и V — некоторые гладкие функции.

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение (Власова):

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}(q, p, [F])\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}(q, p, [F])\frac{\partial F}{\partial p}=0. \quad (2.1)$$

Мы докажем в теореме 2.2, что задача Коши для уравнения Власова обладает следующим свойством: ее решения $F(q, p, t')$

и $F(q, p, t'')$ в любые два момента времени t' и t'' связаны между собой каноническим преобразованием. Это фундаментальное свойство сохраняется и для существенно более общих уравнений.

Введем ряд обозначений, которые мы будем использовать в дальнейшем. Обозначим через $C^k(\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n)$ пространство k раз дифференцируемых отображений v: $R^m \to \mathbf{R}^n$, наделенное следующей нормой

$$\| v \|_{C^{(k)}(\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbf{R}^m} \left\{ \sum_{|\alpha|=1}^{k} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} v(x) \right| \right\} + \sup_{x \in \mathbf{R}^m} \frac{|v(x)|}{1+|x|}.$$

Пусть $C^\infty(\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n) = \bigcap_k C^{(k)}(\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n)$ — соответствующее счетно-нормированное пространство гладких отображений.

Кроме того, введем шкалу гильбертовых пространств $H^l_s(\mathbf{R}^m)$, каждое из которых является пополнением пространства Шварца $S(\mathbf{R}^m)$ по норме

$$\| u \|_{H^l_s} = \left(\int (1+|x|^2)^{-l} |(1-\Delta)^{s/2} u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Пространство

$$S_{-\infty}(\mathbf{R}^m) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_s \bigcap_l H^l_s(\mathbf{R}^m)$$

наделим естественной сходимостью: скажем, что $u_n \to 0$, если $\exists s \forall l \ \| u_n \|_{H^l_s} \to 0$.

Двойственное к $S_{-\infty}$ пространство обозначим

$$S^\infty(\mathbf{R}^m) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_l \bigcap_s H^l_s(\mathbf{R}^m)$$

и наделим его следующей сходимостью: $u_n \to 0$, если $\exists l \forall k = 0, 1, \ldots$

$$\| u_n \|_{S^k_l} \overset{\text{def}}{=} \sup_x \left\{ (1+|x|)^{-l} \sum_{|\alpha|=0}^{k} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} u_n(x) \right| \right\} \to 0.$$

И, наконец, последний объект, который нам понадобится, — фазовое пространство $\mathbf{R}^{2n}$, т. е. четномерное евклидово пространство, наделенное симплектической структурой, которую задает невырожденная 2-форма $\Omega = \frac{1}{2} J dz \wedge dz$, где $z \in \mathbf{R}^{2n}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, I — единичная $n \times n$-матрица. Скобка Пуассона двух функций H, f на $\mathbf{R}^{2n}$ задается формулой $\{H, f\} = \langle J \frac{\partial H}{\partial Z}, \frac{\partial f}{\partial z} \rangle$, где скобки $\langle \ldots, \ldots \rangle$ обозначают скалярное произведение в $\mathbf{R}^{2n}$. Напомним, что диффеоморфизм $\gamma: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ называется каноническим преобразованием, если он сохраняет форму Ω, т. е. $\gamma^*\Omega = \Omega$. Через γ^* здесь обозначено отображение дифференциальных форм, индуцированное γ.

Рассмотрим теперь некоторое отображение

$$H: S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}) \times C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}) \to S^\infty(\mathbf{R}^{2n}), \tag{2.2}$$
$$H: (f, v) \to H[f, v].$$

При фиксированных f и v функция $H[f, v]$ есть гладкая функция на фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$, ее значение в точке z обозначим $H[f, v](z)$. Везде ниже будем предполагать, что $\operatorname{Im} H[f, v] = 0$, если $\operatorname{Im} f = 0$.

Определение 2.1. Отображение H назовем отображением Гамильтона*, если оно инвариантно относительно канонических преобразований, т. е. $H[\gamma^* f, v \circ \gamma] = H[f, v]$ для любого канонического преобразования $\gamma \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$.

Пример 2.1. Положим

$$H[f, v](z) = H_0(z) + \iint V(z, v(z')) f(z') dz', \tag{2.3}$$

где $H_0 \in S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, $V \in S(\mathbf{R}^{4n})$ — некоторые вещественные функции. Отображение H, определенное этой формулой, является отображением Гамильтона.

Пусть id — тождественное отображение $\mathbf{R}^{2n}$ на себя. Отображению Гамильтона H сопоставим следующее уравнение:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left\langle J \frac{\partial H[F, \mathrm{id}]}{\partial z}(z), \frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle = 0 \tag{2.4}$$

и назовем его уравнением Власова — Лиувилля.

В случае, когда отображение Гамильтона H задано формулой (2.3), уравнение Власова — Лиувилля совпадает с уравнением Власова (2.1), поскольку в этом случае $H[F, \mathrm{id}](z) = \mathcal{H}(q, p, [F])$, где $z = (q, p)$, $q \in \mathbf{R}^n$, $p \in \mathbf{R}^n$.

Общее уравнение Власова — Лиувилля (2.4) будет занимать центральное место в последующих главах книги. В этом параграфе мы получим теорему существования решения задачи Коши для этого уравнения и проследим его аналогию с классическим уравнением Лиувилля.

Сопоставим отображению Гамильтона H и некоторой вещественной функции $F_0 \in S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ следующую задачу Коши:

$$\dot{Z} = J \frac{\partial H[F_0, Z]}{\partial z} \circ Z, \quad Z|_{t=0} = \mathrm{id} \tag{2.5}$$

в пространстве $C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$. Уравнение (2.5) назовем уравнением Власова — Гамильтона.

Решением задачи (2.5) является семейство гладких отобра-

* По аналогии с термином «функция Гамильтона» в классической механике. Ниже мы увидим, что отображение Гамильтона описывает движение частиц в самосогласованном поле.

жений $Z[t]$: $\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$, совпадающее при $t=0$ с тождественным отображением. Значение отображения $Z[t]$ в точке $w\in\mathbf{R}^{2n}$ будем обозначать $Z(w, t)=Z[t](w)$.

Правая часть дифференциального уравнения задачи (2.5) есть отображение $J\dfrac{\partial H[F_0, Z[t]]}{\partial z}\circ Z[t]$, принимающее в точке w значение $J\dfrac{\partial H[F_0, Z[t]]}{\partial z}(Z(w, t))$. В этих обозначениях задача (2.5) имеет вид

$$\frac{\partial Z(w, t)}{\partial t}=J\frac{\partial H[F_0, Z[t]]}{\partial z}(Z(w, t)), \quad Z(w, 0)=w.$$

Пример 2.2. Выпишем уравнение Власова — Гамильтона в том случае, когда отображение H задано формулой (2.3). Имеем из (2.5):

$$\frac{\partial Z(w, t)}{\partial t}=J\frac{\partial H_0}{\partial z}(Z(w, t))+ + \int J\frac{\partial V}{\partial Z}(Z(w, t), Z(w', t))f(w')\,dw'. \tag{2.6}$$

Это интегро-дифференциальное уравнение в $\mathbf{R}^{2n}$. Начальное условие имеет вид $Z(w, 0)=w$. Мы рассматриваем уравнение (2.6) как обыкновенное дифференциальное в пространстве отображений $C^\infty(\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n})$.

Предположим теперь, что отображение Гамильтона H и функция F_0 удовлетворяют следующим двум условиям.

Условие (A). Отображение $v\to\dfrac{\partial H[F_0, v]}{\partial z}$ расширяется до липшиц-непрерывного отображения пространства $C(\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n})$ в себя

Условие (B). Существуют константы $c_\alpha\geqslant 0$ такие, что для всех $z\in\mathbf{R}^{2n}$, $v\in C(\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n})$ выполнены неравенства

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha H[F_0, v](z)\right|\leqslant c_\alpha \text{ при } |\alpha|\geqslant 2.$$

Если отображение H задано формулой (2.3), а функция F_0 порождает меру $F_0(z)\,dz$ с компактным носителем в $\mathbf{R}^{2n}$, то условия (A), (B) будут выполнены при следующих ограничениях на функции H_0 и V:

$$\left|\frac{\partial H_0}{\partial z}(z)\right|+\left|\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)V(z, z')\right|\leqslant c_1(1+|z|),$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha H_0(z)\right|+\left|\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha V(z, z')\right|\leqslant c_\alpha, \quad |\alpha|\geqslant 2.$$

Как мы увидим ниже, при построении квазиклассических асимптотик, функция F_0 имеет вид $F_0(z)=|\varphi(z)|^2\delta_\Lambda(z)$, где $\varphi\in C_0^\infty$, а δ_Λ есть δ-функция, сосредоточенная на лагранжевом подмногообразии $\Lambda\in\mathbf{R}^{2n}$.

Сейчас мы покажем, что условия (A), (B) обеспечивают существование решения задачи (2.5) при всех $t\in\mathbf{R}$.

Теорема 2.1. Если отображение Гамильтона H и функция F_0 удовлетворяют условиям (A), (B), то решение $Z[t]$ задачи (2.5) существует в $C^\infty(\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n})$ при всех t. Это решение единственно и является каноническим преобразованием фазового пространства $\mathbf{R}^{2n}$.

Доказательство. Определим отображение Ξ пространства $C(\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n})$ в себя следующей формулой:

$$\Xi(v)\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial H[F_0, v]}{\partial z}\circ v.$$

Задача (2.5) имеет вид

$$\dot Z \doteq \Xi(Z), \quad Z[0]=\mathrm{id}. \tag{2.7}$$

Докажем разрешимость (2.7) в пространстве $C(\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n})$. Имеем оценку в норме $C(\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n})$

$$\|\Xi(v)\|\leqslant\mathrm{const}(1+\|v\|).$$

Кроме того, в силу условий (A), (B), отображение Ξ пространства $C(\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n})$ в себя липшиц-непрерывно. Лемма 1.2 гарантирует в этом случае однозначную разрешимость задачи (2.7) в пространстве $C(\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n})$ при всех $t\in\mathbf{R}$. Пусть $Z[t](w)=Z(w, t)$ — значение решения задачи (2.7) в точке w. Мы имеем

$$\frac{\partial Z}{\partial t}(w, t)=f(Z(w, t), t), \quad Z(w, 0)=w\in\mathbf{R}^{2n}, \tag{2.7'}$$

где

$$f(z, t)\overset{\text{def}}{=}\Xi[Z[t]](z), \quad f(z, t)\leqslant a_0(t)<\infty.$$

Из (2.7') дифференцированием по w получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Z}{\partial w}\right)=\frac{\partial f}{\partial Z}(Z, t)\frac{\partial Z}{\partial w}, \quad \left.\frac{\partial Z}{\partial w}\right|_{t=0}=\mathrm{id}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial Z(w, t)}{\partial w}=\prod_{\mu=0}^{t}\exp\left\{\frac{\partial f}{\partial z}(Z(w, \mu), \mu)\,d\mu\right\}.$$

Отсюда получаем оценку:

$$\left|\frac{\partial Z}{\partial w}(w, t)\right|\leqslant\exp\left\{\int_0^t\left|\frac{\partial f}{\partial z}(Z(w, \mu), \mu)\right|d\mu\right\}\leqslant e^{\int_0^t a_0(\mu)d\mu}.$$

Таким образом, доказано, что $Z[t]\in C^{(1)}(\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n})$. Точно так же, используя индукцию, можно доказать, что $Z[t]\in C^{(k)}(\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n})$ для любого $k=0, 1, 2, \ldots$ Следовательно, $Z[t]$ — это единственное решение задачи (2.7) в $C^\infty(\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n})$.

Обозначим $L(z, t) = H[F_0, Z[t]](z)$ и перепишем задачу (2.5) (или (2.7)) следующим образом:

$$\dot{Z} = J\frac{\partial L}{\partial Z}(Z, t), \quad Z|_{t=0} = \mathrm{id}.$$

Решением этой задачи Коши, как хорошо известно, является семейство канонических преобразований. Поэтому $Z[t]$ — канонично. Теорема доказана.

Следствие. Пусть Λ_0 — лагранжево многообразие в $\mathbf{R}^{2n}$. Тогда многообразие $\Lambda_t \overset{\mathrm{def}}{=} Z[t]\Lambda_0 = \{Z(w, t) \mid w \in \Lambda_0\}$, полученное сдвигом Λ_0 вдоль решений уравнения Власова — Гамильтона, также лагранжево.

Замечание. Построенное в теореме 2.1 семейство канонических преобразований $Z[t]$ не является, вообще говоря, группой преобразований, т. е. $Z[t_1+t_2] \neq Z[t_1]Z[t_2]$. Однако если функция F_0 такова, что $H[Z[t]^*F_0, v] = H[F_0, v]$ для всех $t \in \mathbf{R}$, $v \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$, то $Z[t]$ — группа. В частности, это так, если функция F_0 есть δ-функция, сосредоточенная на лагранжевом многообразии, инвариантном относительно всех преобразований $Z[t]$. Пример такой ситуации разбирается в § 1 гл. III.

Рассмотрим теперь уравнение Власова — Лиувилля (2.4) и поставим для него задачу Коши:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left\langle J\frac{\partial H[F, \mathrm{id}]}{\partial z}(z), \frac{\partial F}{\partial z}\right\rangle = 0, \qquad F|_{t=0} = F_0. \tag{2.8}$$

Теорема 2.2. Пусть отображение Гамильтона H и функция F_0 удовлетворяют условиям (А), (В). Тогда решение $F(t) \in S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ задачи (2.8) существует и имеет вид

$$F(t) = (Z[t]^{-1})^*F_0, \tag{2.9}$$

где $Z[t]$ — семейство канонических преобразований, заданное уравнениями (2.5).

Доказательство. Определим функцию $F(t)$ равенством (2.9). Так как отображение H инвариантно относительно канонических преобразований, то

$$H[F_0, Z[t]] = H[Z[t]^{-1*}F_0, \mathrm{id}] = H[F(t), \mathrm{id}]. \tag{2.10}$$

Далее, поскольку

$$F_0(w) = Z[t]^*F(t), \tag{2.11}$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t}[Z[t]^*F(t)] = 0 \tag{2.12}$$

или

$$Z[t]^*\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \left\langle \dot{Z}, \frac{\partial F}{\partial z}\right\rangle\right) = 0. \tag{2.13}$$

Используя (2.5) и (2.10), заменим здесь $\dot{Z}$ на $J\dfrac{\partial H[F, \mathrm{id}]}{\partial z}$.

Получим

$$Z[t]^*\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \left\langle J\frac{\partial H[F, \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial z}\right\rangle\right) = 0.$$

Следовательно, функция F удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.8). Начальное условие (2.8) также выполнено, так как $Z[0] = \mathrm{id}$.

Теорема доказана.

С помощью теоремы 2.2 решение задачи (2.8) иногда удается построить явно. Рассмотрим пример.

Пример 2.3. Решим следующую задачу Коши для уравнения Власова:

$$\begin{gathered}\frac{\partial F}{\partial t} + p\frac{\partial F}{\partial q} - q\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\iint q'F(q', p', t)\,dq'dp' = 0,\\ F(q, p, t)|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-q^2}\delta(p - \cos q),\end{gathered} \tag{2.14}$$

где δ есть δ-функция Дирака.

Напишем уравнения Власова — Гамильтона, отвечающие задаче (2.14) при $z = (q, p)$, $Z[t] = (Q[t], P[t])$, $Z(z, t) = (Q(z, t), P(z, t))$:

$$\begin{gathered}\dot{Q} = P, \quad \dot{P} = -Q - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int Q(q_0, \cos q_0, t)\,e^{-q_0^2}dq_0,\\ Q(q, p, t)|_{t=0} = q, \quad P(q, p, t)|_{t=0} = p.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Для функции Q получаем уравнение второго порядка:

$$\ddot{Q} + Q + f(t) = 0, \quad Q(0) = q, \quad \dot{Q}(0) = p,$$

где

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int Q(q, \cos q, t)\,e^{-q^2}dq.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$Q(q, p, t) = q\cos t + p\sin t - \int_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{2.16}$$

Положим $p = \cos q$, затем умножим все равенство (2.16) на $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-q^2}$ и проинтегрируем по dq. Учитывая, что

$$\int qe^{-q^2}dq = 0, \quad \int e^{-q^2}dq = \sqrt{\pi}, \quad \int \cos q\cdot e^{-q^2}dq = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{e}},$$

получим:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\sin t - \int_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда

$$\ddot{f}+2f=0,\quad f(0)=0,\quad \dot{f}(0)=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}.$$

Решая это уравнение, найдем $f(t)$, а из (2.16) найдем функцию Q:

$$Q(q,\ p,\ t)=q\cos t+p\sin t+\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\left(\frac{\sin t\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\sin t\right).$$

Функция P определяется из уравнения $\dot{Q}=P$. Из общей формулы (2.9) теперь получим решение задачи (2.14):

$$F(q,\ p,\ t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-q_0(q,p,t)^2}\delta(p_0(q,\ p,\ t)-\cos q_0(q,\ p,\ t)),$$

где

$$q_0(q,\ p,\ t)=q\cos t-p\sin t+\frac{\sin t}{\sqrt[4]{e}}(\cos t\sqrt{2}-\cos t)-$$
$$-\frac{\cos t}{\sqrt[4]{e}}\left(\frac{\sin t\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\sin t\right),$$
$$p_0(q,\ p,\ t)=q\sin t+p\cos t-\frac{\cos t}{\sqrt[4]{e}}(\cos t\sqrt{2}-\cos t)-$$
$$-\frac{\sin t}{\sqrt[4]{e}}\left(\frac{\sin t\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\sin t\right).$$

Введем теперь два новых понятия: действие и энтропию для уравнения Власова — Лиувилля.

Пусть $\Lambda_0=\{(q(\alpha),\ p(\alpha))\}$ — некоторое лагранжево многообразие в $\mathbf{R}^{2n}=\mathbf{R}^n_q\times\mathbf{R}^n_p$, α — локальные координаты на Λ_0.

Предположим, что Λ_0 односвязно. Пусть $d\mu_0$ — некоторая мера на Λ_0, а F_0 — обобщенная функция на $\mathbf{R}^{2n}$, сосредоточенная на Λ_0 и определяемая мерой μ_0:

$$\langle F_0,\ \varphi\rangle\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{\Lambda_0}\varphi(q(\alpha),\ p(\alpha))\,d\mu_0(\alpha),\quad \varphi\in C(\mathbf{R}^{2n}).$$

Предположим, что функция F_0 и отображение Гамильтона H удовлетворяют условиям (A), (B). Построим решение $F(t)=(Z[t]^{-1})^*F_0$ задачи Коши (2.8) для уравнения Власова-Лиувилля, где $Z[t]=(Q[t],\ P[t])$ — каноническое преобразование, заданное уравнениями Власова-Гамильтона (2.5). Это преобразование переводит Λ_0 в некоторое лагранжево многообразие $\Lambda_t=Z[t](\Lambda_0)$. Мера $d\mu_0$ индуцирует меру $d\mu_t=(Z[t]^{-1})^*d\mu_0$ на Λ_t, так что для любой непрерывной функции χ на Λ_0 справедливо равенство

$$\int\limits_{\Lambda_0}\chi d\mu_0=\int\limits_{\Lambda_t}(Z[t]^{-1})^*\,\chi d\mu_t.$$

Поскольку многообразие Λ_0, по предположению, односвязно, на нем существует глобальное действие S_0, т. е. такая гладкая функция, для которой

$$dS_0=pdq|_{\Lambda_0}. \tag{2.17}$$

Этим условием действие S_0 определено с точностью до произвольной аддитивной константы. Рассмотрим далее при каждом t следующую функцию $\tilde{S}(t)$ на Λ_0.

$$\tilde{S}(t)=S_0+\int\limits_0^t(P[\tau]\dot{Q}[\tau]-H[F_0,\ Q[\tau],\ P[\tau]](Q[\tau],P[\tau]))_{\Lambda_0}d\tau. \tag{2.18}$$

Определение 2.2. Функцию

$$S(t)\overset{\text{def}}{=}(Z[t]^{-1})^*\tilde{S}(t) \tag{2.19}$$

будем называть действием, отвечающим задаче Коши (2.8) для уравнения Власова — Лиувилля. Энтропией $H_0(t)$ этой же задачи будем называть среднее от действия по мере $d\mu_t$:

$$H_0(t)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{\Lambda_t}S(t)\,d\mu_t. \tag{2.20}$$

Пример 2.4. Рассмотрим многообразие Λ_0, заданное уравнением

$$p=\frac{\partial\Phi_0}{\partial q}(q),$$

где $\Phi_0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Заметим, что в этом случае переменные $q=(q_1,\ldots,q_n)$ могут служить глобальными координатами на $\Lambda_0\subset\mathbf{R}^n_q\times\mathbf{R}^n_p$. Рассмотрим начальное распределение, сосредоточенное на Λ_0 с весом $\varkappa_0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$:

$$F_0(q,\ p)=\varkappa_0(q)\,\delta\left(p-\frac{\partial\Phi_0}{\partial q}(q)\right), \tag{2.21}$$

т. е. $d\mu_0=\varkappa_0dq$. Мы вновь обозначим через $F(q,\ p,\ t)$ решение задачи Коши (2.8) с начальным условием (2.21). Для энтропии этой задачи Коши на том отрезке времени $t\in[0,T]$, на котором проекция $\pi_q:\Lambda_t\to\mathbf{R}_q{}^n$ многообразия Λ_t на координатную q-гиперплоскость является диффеоморфизмом (т. е. вплоть до фокальной точки), имеет место следующая формула:

$$H_0(t)=\iint\Phi(q,\ t)\,F(q,\ p,\ t)\,dqdp, \tag{2.22}$$

где Φ — решение задачи Коши

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + H[F(t), \mathrm{id}]\left(q, \frac{\partial \Phi}{\partial q}\right) = 0, \quad \Phi|_{t=0} = \Phi_0. \tag{2.23}$$

Докажем это утверждение. Обозначим через $(Q(q, p, t), P(q, p, t))$ значение отображения $Z[t] = (Q[t], P[t])$ в точке $(q, p) \in \mathbf{R}^{2n}$.

Функции

$$X(q^0, t) \overset{\mathrm{def}}{=} Q\left(q^0, \frac{\partial \Phi_0}{\partial q}(q^0), t\right)$$

и

$$\Xi(q, t) = P\left(q^0, \frac{\partial \Phi_0}{\partial q}(q^0), t\right)$$

удовлетворяют следующей гамильтоновой системе уравнений:

$$\dot{X} = \frac{\partial H[F(t), \mathrm{id}]}{\partial p}(X, \Xi), \quad X|_{t=0} = q_0,$$

$$\dot{\Xi} = -\frac{\partial H[F(t), \mathrm{id}]}{\partial q}(X, \Xi), \quad \Xi|_{t=0} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial q}(q^0).$$

С другой стороны, по определению (2.18), (2.19), имеем:

$$(\pi_q^{-1})^* S(t) = [\Phi_0(q^0) + \int_0^t (\Xi(q^0, \tau)\dot{X}(q_0, \tau) -$$

$$- H[F(\tau), \mathrm{id}](X(q^0, \tau), \Xi(q^0, \tau)))\, d\tau]_{q^0 = q^0(q, t)}, \tag{2.24}$$

где $q^0(q, t)$ — решение неявного уравнения

$$q = X(q^0, t).$$

Через π_q^{-1} мы обозначили здесь отображение, обратное к проекции $\pi_q : \Lambda_t \to \mathbf{R}_q^n$. В силу предположения о невырожденности этой проекции, такое обратное отображение существует.

Хорошо известно (в теореме 3.1 доказано более общее утверждение), что функция $\Phi(q, t) = (\pi_q^{-1})^* S(t)$, заданная формулой (2.24), является решением задачи (2.23). Остается доказать, что энтропия вычисляется по формуле (2.22).

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части (2.22):

$$\iint \Phi(q, t) F(q, p, t)\, dq dp =$$

$$= \int [(\pi_q^{-1})^* (Z[t]^{-1})^* \tilde{S}(t)] [(Z[t]^{-1})^* F_0]\, dp dq =$$

$$= \int \chi_0(q^0) [Z[t]^* (\pi_q^{-1})^* (Z[t]^{-1})^* \tilde{S}(t)]|_{p^0 = \frac{\partial \Phi}{\partial q}(q^0)} dq. \tag{2.25}$$

Функция, стоящая в квадратных скобках в последнем интеграле, равна

$$(\pi_{q^0}^{-1})^* [\pi_{q^0}^* Z[t]^* (\pi_q^{-1})^* (Z[t]^{-1})^* \tilde{S}(t)] = (\pi_{q^0}^{-1})^* \tilde{S}(t).$$

Здесь $\pi_{q_0}^{-1}$ — это обратное отображение к $\pi_{q_0} : \Lambda_0 \to \mathbf{R}^n_{q^0}$. Таким образом, из (2.25) получаем:

$$\iint \Phi(q, t) F(q, p, t)\, dq dp = \int \varkappa_0(q^0) [(\pi_{q_0}^{-1})^* \tilde{S}(t)](q^0)\, dq^0 =$$

$$= \int_{\Lambda_0} \tilde{S}(t)\, d\mu_0. \tag{2.26}$$

В последнем равенстве мы использовали формулу $d\mu_0 = \pi_{q^0}^* (\varkappa(q^0)\, dq^0)$, которая следует из (2.21). Остается заметить, что интеграл $\int_{\Lambda^0} \tilde{S}(t)\, d\mu_0$ совпадает с энтропией $H_0(t)$, заданной формулой (2.20). Утверждение доказано.

В заключение параграфа мы укажем на одно естественное обобщение рассмотренного уравнения Власова-Лиувилля. Это обобщение связано с тем, что отображение Гамильтона $H[f, v]$ может быть определено на функциях f и v, явно зависящих от времени, например, так:

$$H[f, v](z, t) = H_0(z, t) + \int_0^t d\tau \int V(z, t, v(z', \tau), \tau) f(z', \tau) dz'. \tag{2.27}$$

Такому отображению отвечает следующее уравнение Власова — Лиувилля:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left\langle J \frac{\partial H[F, \mathrm{id}]}{\partial z}(z, t), \frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle = 0$$

и уравнение Власова — Гамильтона:

$$\dot{Z}(w, t) = J \frac{\partial H[F_0, Z]}{\partial z}(Z(w, t), t).$$

Вся теория, развитая в этом параграфе, может быть почти автоматически перенесена на отображения H вида (2.27), или, более общим образом, на такие отображения, которые инвариантны относительно канонических преобразований и удовлетворяют условию $\frac{\delta H[f, v]}{\delta v(z', t')}(z, t) = 0$ при $t' > t$, т. е. зависят от значений функции v лишь в моменты времени, предшествующие t. С точки зрения T-отображений и обыкновенных дифференциальных уравнений, такое обобщение уже обсуждалось в конце § 1 и здесь мы не будем на нем подробнее останавливаться.

§ 3. ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Мы предъявим в этом параграфе решение задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений с частыми производными первого порядка и, в частности, для уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, t)+F\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, t)\right)+$$

$$+\int_0^t dt' \int dq' V\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, t), t, q', \frac{\partial S}{\partial q'}(q', t'), t'\right)=0.$$

1. Обозначения. Через $C^{(k)}(\mathbf{R}^m)$ обозначим пространство k раз дифференцируемых вещественных функций на $\mathbf{R}^m$. При $k=0$ индекс (k) будем опускать. Пусть задано $T>0$. Будем рассматривать тройки функций (J, Q, P), где $J\in C(R^n\times[0, T])$, Q, $P\in C(\mathbf{R}^n\times[0, T]\to\mathbf{R}^n)$. Каждая такая тройка дает элемент пространства $C(\mathbf{R}^n\times[0, T]\to\mathbf{R}^{2n+1})$. Координаты в $\mathbf{R}^n\times[0, T]$ будем обозначать (q, t), а в $\mathbf{R}^{2n}\times[0, T]$ — (q, p, t). Ниже нам понадобятся специальные тройки функций. Первая — это тройка вида $\left(1, \mathrm{id}, \frac{\partial S}{\partial q}\right)$, где 1 — единичная функция, id — отображение $\mathbf{R}^n\times[0, T]\to\mathbf{R}^n$, заданное формулой $\mathrm{id}(q, t)=q$, а $\frac{\partial S}{\partial q}(q, t)$ — вектор из частных производных некоторой функции $S\in C^{(1)}(\mathbf{R}^n\times[0, T])$.

Далее, пусть $\gamma_t:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — семейство дифференцируемых преобразований, непрерывно зависящее от t и Q, $P\in C(\mathbf{R}^n\times[0, T]\to\mathbf{R}^n)$. Обозначим через $(\det d\gamma)(q, t)$ якобиан $\det\frac{\partial\gamma_t(q)}{\partial q}$. Образуем следующие две тройки функций

$$(\det d\gamma, \gamma^*Q, \gamma^*P) \text{ и } (1, Q, P).$$

Теперь рассмотрим некоторое отображение $\mathscr{H}$, определенное на всевозможных тройках:

$$\mathscr{H}: C(\mathbf{R}^n\times[0, T]\to\mathbf{R}^{2n+1})\to C^{(2)}(\mathbf{R}^{2n+1}). \tag{3.1}$$

Каждую тройку (J, Q, P) это отображение переводит в функцию $\mathscr{H}[J, Q, P]$, заданную на $\mathbf{R}^{2n+1}$. Значение этой функции в точке $(q, p, t)\in\mathbf{R}^{2n}\times[0, T]$ будем обозначать $\mathscr{H}[J, Q, P](q, p, t)$.

Сопоставим отображению $\mathscr{H}$ еще одно отображение $\Omega_{\mathscr{H}}$ пространства $C([0, T]\to C(\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{2n+2n^2}))$ в себя, определенное следующим образом. Пусть $Q(t)$, $P(t)\in C(\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n)$, $Y(t)$, $I(t)\in C(\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n^2})$, где $t\in[0, T]$. Тогда набор функций (Q, P, Y, I) принадлежит пространству $C([0, T]\to C(\mathbf{R}^n\to R^{2n+2n^2}))$, причем всякий элемент из этого пространства можно представить в виде указанного набора функций. Последние два элемента Y, I такого набора будем рассматривать как $n\times n$-матричнозначные функции. Положим

$$\Omega_{\mathscr{H}}(Q, P, Y, I)=(U, V, L, M),$$

где

$$U=\frac{\partial\mathscr{H}[\det Y, Q, P]}{\partial p}(Q, P, t), \quad V=-\frac{\partial\mathscr{H}[\det Y, Q, P]}{\partial q}(Q, P, t),$$

$$L=\frac{\partial^2\mathscr{H}}{\partial p\partial q}\cdot Y+\frac{\partial^2\mathscr{H}}{\partial p\partial p}\cdot I, \quad M=-\frac{\partial^2\mathscr{H}}{\partial q\partial q}\cdot Y-\frac{\partial^2\mathscr{H}}{\partial q\partial p}\cdot I. \tag{3.2}$$

Здесь через $\frac{\partial^2\mathscr{H}}{\partial p\partial q}, \ldots,$ обозначены $n\times n$-матрицы из вторых производных функций $\mathscr{H}[\det Y, Q, P](q, p, t)$, взятые в точке $q=Q$, $p=P$. Таким образом, отображение $\Omega_{\mathscr{H}}$ определено.

2. Теперь мы можем сформулировать основную теорему этого параграфа. Пусть задано отображение $\mathscr{H}$ вида (3.1). Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, t)+\mathscr{H}\left[1, \mathrm{id}, \frac{\partial S}{\partial q}\right]\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, t), t\right)=0,$$
$$S(q, 0)=S_0(q), \tag{3.3}$$

где $S_0\in C^{(2)}(\mathbf{R}^n)$, причем носитель $\operatorname{supp} S_0$ — компакт в $\mathbf{R}^n$.

Подчиним $\mathscr{H}$ следующим трем условиям:

Условие А. Значения функции $\mathscr{H}[J, Q, P](q, p, t)$ не зависят от поведения функций $J=J(q', t')$, $Q=Q(q', t')$, $P=P(q', t')$ при $t'>t$, т. е.

$$\frac{\delta}{\delta J(q', t')}\mathscr{H}[J, Q, P](q, p, t)=0,$$

$$\frac{\delta}{\delta Q(q', t')}\mathscr{H}[J, Q, P](q, p, t)=\frac{\delta}{\delta P(q', t')}\mathscr{H}[J, Q, P](q, p, t)=0.$$

Условие В. Для любого непрерывного семейства γ_t дифференцируемых невырожденных, не меняющих ориентацию преобразований $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ справедливо равенство

$$\mathscr{H}[\det d\gamma, \gamma^*Q, \gamma^*P]=\mathscr{H}[1, Q, P]$$

(обозначения см. в п. 1).

Условие С. Отображение $\Omega_{\mathscr{H}}$ пространства $C([0, T]\to C(\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{2n+2n^2}))$ в себя, заданное формулами (3.2), липшиц-непрерывно.

Сопоставим теперь задаче Коши (3.3) следующее уравнение характеристик

$$\dot{\mathfrak{X}}=\Omega_{\mathscr{H}}(\mathfrak{X}) \tag{3.4}$$

и поставим начальное условие:

$$\mathfrak{X}(0)=\left(\mathrm{id}, \frac{\partial S_0}{\partial q}, \|\delta_{ij}\|, \left\|\frac{\partial^2 S_0}{\partial q_i\partial q_j}\right\|\right)\in C([0, T]\to C(\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{2n+2n^2})). \tag{3.4'}$$

В силу леммы 1.3 (а), из условий (А) и (С) следует, что задача Коши (3.4), (3.4') имеет единственное решение $\mathfrak{X}(q, t)=(Q(q, t), P(q, t), Y(q, t), I(q, t))$ на некотором отрезке времени t. Поскольку в начальный момент матрица Y — единичная, то найдется такое $T_0>0$, что при $t\in[0, T_0]$, $q\in\operatorname{supp} S_0$ выполняется неравенство

$$\det Y(q, t)>0.$$

Теорема 3.1. Если отображение $\mathscr{H}$ удовлетворяет условиям (А), (В), (С), то при $t\in[0, T_0]$ решение задачи Коши (3.3) существует и представимо в виде

$$S(q, t)=\Bigg[S_0(q^0)+\int_0^t (\dot Q(q^0, \tau)P(q^0, \tau)-$$
$$-\mathscr{H}[\det Y, Q, P](Q(q^0, \tau), P(q^0, \tau), \tau))\,d\tau\Bigg]\Bigg|_{q^0=q^0(q,t)}, \qquad (3.5)$$

где $q^0(q, t)$ — решение неявного уравнения

$$q=Q(q^0, t).$$

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 3.1. Пусть функция S определена формулой (3.5). Тогда

$$\frac{\partial S}{\partial q}(Q(q^0, t), t)=P(q^0, t). \qquad (3.6)$$

Доказательство. Равенство (3.6) проверяется непосредственным дифференцированием. Действительно, подставим в (3.5) $q=Q(q^0, t)$ и продифференцируем обе части (3.5) по q_k^0, т. е. по k-ой компоненте вектора $q^0=(q_1^0, \dots, q_n^0)$. Получим равенство:

$$\sum_l \frac{\partial S}{\partial q_l}\cdot\frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0}=\frac{\partial S_0}{\partial q_k^0}+\int_0^t \frac{\partial}{\partial q_k^0}[\dot Q P-\mathscr{H}[\det Y, Q, P](Q, P, r)]\,d\tau, \quad (3.7)$$

где $Q_1, \dots, Q_n$ — компоненты вектор-функции $Q=Q(q^0, t)$. Вычислим производную под знаком интеграла в (3.7)

$$\frac{\partial}{\partial q_k^0}[\dot Q P-\mathscr{H}]=\sum_l\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0}\right)\cdot P_l+\dot Q_l\frac{\partial P_l}{\partial q_k^0}-\frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0}\cdot\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_l}-\frac{\partial P_l}{\partial q_k^0}\cdot\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_l}\right].$$

Используя (3.4), получаем отсюда

$$\frac{\partial}{\partial q_k^0}[\dot Q P-\mathscr{H}]=\sum_l\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0}P_l\right).$$

Подставляя этот результат в (3.7), найдем:

$$\sum_l \frac{\partial S}{\partial q_l}\cdot\frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0}=\frac{\partial S_0}{\partial q_k^0}+\sum_l\int_0^t\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0}P_l\right)d\tau. \qquad (3.8)$$

Из начальных условий (3.4′) следует, что

$$P_l|_{\tau=0}=\frac{\partial S_0}{\partial q_l}(q^0), \quad \left.\frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0}\right|_{\tau=0}=\delta_{lk}.$$

Отсюда и из (3.8) получаем:

$$\sum_l\frac{\partial S}{\partial q_l}(Q, t)\frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0}=\sum_l P_l\frac{\partial Q_l}{\partial q_k^0}. \qquad (3.9)$$

Из (3.4) следует, что матрицы Якоби $\frac{\partial Q}{\partial q^0}$ и $\frac{\partial P}{\partial q^0}$ совпадают с Y и I, соответственно. Поэтому при тех t, при которых $\det Y(q^0, t)>0$, из (3.9) следует искомое равенство (3.6).

Доказательство теоремы 3.1. Из равенства (3.6) и условия (В) получим:

$$\mathscr{H}[\det Y, Q, P]=\mathscr{H}\left[1, \mathrm{id}, \frac{\partial S}{\partial q}\right].$$

Обозначим $f(q, p, t)=\mathscr{H}\left[1, \mathrm{id}, \frac{\partial S}{\partial q}\right](q, p, t)$. Уравнения для компонент Q, P функции $\mathfrak{X}$ и формула (3.3) в новых обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned}\dot Q&=\frac{\partial f}{\partial p}(Q, P, t), \quad Q|_{t=0}=q^0,\\ \dot P&=-\frac{\partial f}{\partial q}(Q, P, t), \quad P|_{t=0}=\frac{\partial S_0}{\partial q}(q^0)\end{aligned} \qquad (3.10)$$

и

$$S(q, t)=[S_0(q^0)+\int_0^t(\dot Q(q^0, \tau)P(q^0, \tau)-$$
$$-f(Q(q^0, \tau), P(q^0, \tau), \tau))\,d\tau]|_{q^0=q^0(q,t)}. \qquad (3.11)$$

Известно, что на отрезке времени, на котором $\det\frac{\partial Q(q^0, t)}{\partial q^0}>0$, функция S, задаваемая формулой (3.11), удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial S}{\partial t}+f\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right)=0, \quad S|_{t=0}=S_0. \qquad (3.12)$$

Для полноты изложения приведем здесь доказательство этого утверждения.

Подставляя $q=Q(q^0, t)$ в (3.11) и дифференцируя обе части равенства (3.11) по t, получим

$$\frac{\partial S}{\partial t}(Q, t)+\frac{\partial S}{\partial q}(Q, t)\cdot\dot Q=\dot Q\cdot P-f(Q, P, t).$$

В силу (3.6), отсюда следует, что

$$\frac{\partial S}{\partial t}(Q(q^0, t), t)+f(Q(q^0, t), P(q^0, t), t)=0.$$

Полагая в этом равенстве $q^0=q^0(q, t)$ и вновь используя (3.6), придем к уравнению (3.12). Начальное условие (3.12), очевидно, выполнено. Остается заметить, что задача (3.12) совпадает с (3.3). Теорема доказана.

Пример 3.1. Решим задачу Коши

$$\frac{\partial S}{\partial t}+q\frac{\partial S}{\partial q}+\int_{-1}^{1}\frac{\partial S}{\partial q'}(q',t)\,dq'=0, \quad S|_{t=0}=S_0. \tag{3.13}$$

Здесь $q\in\mathbf{R}$, $S_0\in C^{(2)}(\mathbf{R})$. Применим метод теоремы 3.1. Система характеристик (3.4) имеет в данном случае простой вид:

$$\dot Q=Q, \quad Q|_{t=0}=q^0,$$
$$\dot P=-P, \quad P|_{t=0}=S_0'(q^0),$$
$$\dot Y=Y, \quad Y|_{t=0}=1,$$
$$\dot I=-I, \quad I|_{t=0}=S_0''(q^0).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} Q&=q^0e^t, \quad P=S_0'(q^0)\,e^{-t}, \\ Y&=e^t, \quad I=S_0''(q^0)\,e^{-t}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Следовательно,

$$q^0(q,t)=qe^{-t}.$$

Теперь вычислим интеграл

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial S}{\partial q}(q,t)\,dq=\int_{q^0(-1,t)}^{q^0(1,t)}\frac{\partial S}{\partial q}(Q(q^0,t),t)\frac{\partial Q(q^0,t)}{\partial q^0}dq^0.$$

Используя равенства (3.6) и (3.14), получим:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial S}{\partial q}(q,t)\,dq=\int_{q^0(-1,t)}^{q^0(1,t)}S_0'(q^0)\,dq^0=S_0(e^t)-S_0(-e^t)\stackrel{\text{def}}{=}\Psi(t).$$

Из формулы (3.5) найдем:

$$S(q,t)=\left[S_0(q^0)+\int_0^t[\dot QP-(QP+\Psi))\,d\tau\right]\Big|_{q^0=q^0(q,t)}=$$
$$=S_0(qe^{-t})+\int_0^t(S_0(-e^{-\tau})-S_0(e^{-\tau}))\,d\tau.$$

Мы получили искомое решение задачи Коши (3.13).

В заключение параграфа рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение, относящееся к уравнению Власова—Лиувилля так же, как уравнение Гамильтона—Якоби относится к уравнению Лиувилля. Для простоты, рассмотрим лишь следующий частный случай уравнения Власова—Лиувилля:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\left\langle J\frac{\partial H[F,\mathrm{id}]}{\partial z},\frac{\partial F}{\partial z}\right\rangle=0, \tag{3.15}$$
$$F|_{t=0}=F_0,$$

где

$$H[f,Z](z)=H_0+\int V(z,Z(z'))\,j(z')\,dz'. \tag{3.15'}$$

Будем предполагать, что функция F_0 и отображение Гамильтона H удовлетворяют условиям (A), (B) из § 2.

Как и раньше, обозначим $z=(q,p)$, $V(z,Z)=V(q,p,Q,P)$, $H_0(z)=H_0(q,p)$.

Сопоставим задаче Коши (3.15) следующую задачу:

$$\frac{\partial S(q,\omega,t)}{\partial t}+H_0\left(q,\frac{\partial S(q,\omega,t)}{\partial q}\right)+$$
$$+\iint f\left(q,\frac{\partial S(q,\omega,t)}{\partial q},q',\frac{\partial S(q',\omega',t)}{\partial q'}\right)\cdot F_0\left(\frac{\partial S(q',\omega',t)}{\partial\omega'},\omega'\right)\times$$
$$\times\det\left\|\frac{\partial^2S(q',\omega',t)}{\partial q'_i\partial\omega'_j}\right\|^{-1}dq'd\omega'=0, \tag{3.16}$$
$$S(q,\omega,0)=q\omega.$$

Здесь $q,\omega\in\mathbf{R}^n$.

Мы построим решение задачи (3.16) на отрезке времени $[0,T]$ таком, что

$$J_S\stackrel{\text{def}}{=}\det\left\|\frac{\partial^2S(q,\omega,t)}{\partial q'_i\partial\omega'_j}\right\|\geqslant\varepsilon>0 \text{ при } t\in[0,T].$$

Будем обозначать

$$\left(\left(\frac{\partial S}{\partial\omega}\right)^*F_0\right)(q,\omega)\stackrel{\text{def}}{=}F_0\left(\frac{\partial S(q,\omega,t)}{\partial\omega},\omega\right).$$

В этих обозначениях задача (3.16) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S}{\partial t}+H\left[J_S\left(\frac{\partial S}{\partial\omega}\right)^*F_0,\pi_q,\frac{\partial S}{\partial q}\right]\left(q,\frac{\partial S}{\partial q}\right)=0, \\ &S(q,\omega,0)=q\omega, \end{aligned} \tag{3.16'}$$

где проекция $\pi_q:\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^n$ определена формулой $\pi_q(q,p)\stackrel{\text{def}}{=}q$.

Сопоставим задаче Коши (3.16′) систему уравнений Власова—Гамильтона:

$$\begin{aligned} \dot Q&=\frac{\partial H[F_0,Q,P]}{\partial p}(Q,P), \quad Q|_{t=0}=q^0, \\ \dot P&=-\frac{\partial H[F_0,Q,P]}{\partial q}(Q,P), \quad P|_{t=0}=\omega. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Эта система разрешима при всех t, в силу предположений, наложенных на отображение Гамильтона H. Обозначим решение (3.17) через

$$Q(\tau)=Q(q^0,\omega,t), \quad P(\tau)=P(q^0,\omega,t).$$

12—6932

Теорема 3.2. Пусть $T_0>0$ таково, что при $t\in[0, T_0]$, $q^0, \omega\in\mathbf{R}^n$

$$\frac{\mathscr{D}Q(q^0, \omega, t)}{\mathscr{D}q^0}\neq 0.$$

Тогда при $t\in[0, T_0]$ решение задачи Коши (3.16) существует и имеет вид

$$S(q, \omega, t)=\Big[q^0\omega+\int_0^t\Big(P(q^0, \omega, \tau)\frac{\partial Q}{\partial\tau}(q^0, \omega, \tau)-$$

$$-H[F_0, Q(\tau), P(\tau)](Q(q^0, \omega, \tau),\ P(q^0, \omega, \tau))\Big)d\tau\Big]\Big|_{q^0=q^0(q, \omega, t)}, \quad (3.18)$$

где $q^0(q, \omega, t)$ — решение неявного уравнения

$$q=Q(q^0, \omega, t).$$

Доказательство. Обозначим $f(t, q, p)\overset{\text{def}}{=}H[F_0, Q(t), P(t)](q, p)$. Выше было установлено (см. доказательство теоремы 3.1), что функция S, определенная формулой (3.18), является решением следующей задачи

$$\frac{\partial S}{\partial t}+f\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right)=0, \quad S|_{t=0}=q\omega. \quad (3.19)$$

Функции Q, P удовлетворяют гамильтоновой системе:

$$\begin{aligned}\dot Q&=\frac{\partial f}{\partial p}(t, Q, P), \quad Q|_{t=0}=q_0,\\ \dot P&=-\frac{\partial f}{\partial q}(t, Q, P), \quad P|_{t=0}=\omega.\end{aligned} \quad (3.20)$$

Докажем, что решение задачи (3.19) и решение уравнений (3.20) связаны следующими формулами:

$$P(q^0(q, \omega, t), \omega, t)=\frac{\partial S}{\partial q}(q, \omega, t),$$

$$q^0(q, \omega, t)=\frac{\partial S}{\partial\omega}(q, \omega, t),$$

$$\frac{\mathscr{D}Q}{\mathscr{D}q^0}(q^0(q, \omega, t), \omega, t)=\det\left\|\frac{\partial^2 S(q, \omega, t)}{\partial q_i\partial\omega_j}\right\|^{-1}. \quad (3.21)$$

Первая из этих формул совпадает с формулой (3.6), третья следует из второй. Остается доказать вторую формулу (3.21). Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial S}{\partial\omega}(Q(q^0, \omega, t), \omega, t)\right]=\frac{\partial^2 S}{\partial\omega\partial q}\cdot\dot Q+\frac{\partial^2 S}{\partial\omega\partial t}. \quad (3.22)$$

Из (3.19) следует, что

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\omega\partial t}=-\frac{\partial}{\partial\omega}\left[f\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, \omega, t)\right)\right]=-\frac{\partial^2 S}{\partial\omega\partial q}\cdot\frac{\partial f}{\partial p}\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right).$$

Из этого равенства и первого уравнения (3.20) мы видим, что

правая часть равенства (3.22) равна нулю. Значит величина

$$\frac{\partial S}{\partial\omega}(Q(q^0, \omega, t), \omega, t)$$

не зависит от времени и, в силу начальных условий (3.19), (3.20), равна

$$\frac{\partial S}{\partial\omega}(Q(q^0, \omega, 0), \omega, 0)=q^0.$$

Формулы (3.21) доказаны.

Из (3.21) с помощью замены переменных в интеграле (3.15′) получим соотношение

$$H[F_0, Q, P](q, p)=H\left[J_S\left(\frac{\partial S}{\partial\omega}\right)^*F_0, \pi_q, \frac{\partial S}{\partial q}\right](q, p),$$

которое устанавливает идентичность задач (3.16) и (3.19). Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

В процессе доказательства теоремы было установлено, что решение S задачи (3.16) удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H[F(t), \mathrm{id}]\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right)=0, \quad (3.23)$$

где $F(t)$ — решение задачи Коши (3.15) для уравнения Власова — Лиувилля.

Отметим, что решение уравнения (3.23) с произвольными начальными условиями $S|_{t=0}=\Phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ может быть получено из решения задачи (3.16) с помощью преобразования Лежандра. Для этого решим систему неявных уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial\omega}(q, \omega, t)=y, \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial y}(y)=\omega$$

относительно y и ω. При достаточно малом t эта система разрешима; обозначим ее решение через $y=y(q, t)$, $\omega=\omega(q, t)$. Тогда функция

$$\Phi(q, t)\overset{\text{def}}{=}S(q, \omega(q, t), t)+\Phi_0(y(q, t))-y(q, t)\,\omega(q, t)$$

удовлетворяет уравнению (3.23) и начальному условию $\Phi|_{t=0}=\Phi_0$.

Глава II

УНИТАРНО-НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Решение $F(x, p, t)$ уравнения Власова, рассмотренного в предыдущей главе, может быть интерпретировано как плотность распределения классических частиц по координатам и

Теорема 3.2. Пусть $T_0>0$ таково, что при $t\in[0, T_0]$, $q^0, \omega\in\mathbf{R}^n$

$$\frac{\mathscr{D}Q(q^0, \omega, t)}{\mathscr{D}q^0}\neq 0.$$

Тогда при $t\in[0, T_0]$ решение задачи Коши (3.16) существует и имеет вид

$$S(q, \omega, t)=\left[q^0\omega+\int\limits_0^t\left(P(q^0, \omega, \tau)\frac{\partial Q}{\partial\tau}(q^0, \omega, \tau)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-H[F_0, Q(\tau), P(\tau)](Q(q^0, \omega, \tau), P(q^0, \omega, \tau))\right)d\tau\right]\Big|_{q^0=q^0(q, \omega, t)}, \quad (3.18)$$

где $q^0(q, \omega, t)$ — решение неявного уравнения

$$q=Q(q^0, \omega, t).$$

Доказательство. Обозначим $f(t, q, p)\overset{\text{def}}{=}H[F_0, Q(t), P(t)](q, p)$. Выше было установлено (см. доказательство теоремы 3.1), что функция S, определенная формулой (3.18), является решением следующей задачи

$$\frac{\partial S}{\partial t}+f\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right)=0, \quad S|_{t=0}=q\omega. \quad (3.19)$$

Функции Q, P удовлетворяют гамильтоновой системе:

$$\dot{Q}=\frac{\partial f}{\partial p}(t, Q, P), \quad Q|_{t=0}=q_0,$$
$$\dot{P}=-\frac{\partial f}{\partial q}(t, Q, P), \quad P|_{t=0}=\omega. \quad (3.20)$$

Докажем, что решение задачи (3.19) и решение уравнений (3.20) связаны следующими формулами:

$$P(q^0(q, \omega, t), \omega, t)=\frac{\partial S}{\partial q}(q, \omega, t),$$

$$q^0(q, \omega, t)=\frac{\partial S}{\partial\omega}(q, \omega, t),$$

$$\frac{\mathscr{D}Q}{\mathscr{D}q^0}(q^0(q, \omega, t), \omega, t)=\det\left\|\frac{\partial^2 S(q, \omega, t)}{\partial q_i\partial\omega_j}\right\|^{-1}. \quad (3.21)$$

Первая из этих формул совпадает с формулой (3.6), третья следует из второй. Остается доказать вторую формулу (3.21). Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial S}{\partial\omega}(Q(q^0, \omega, t), \omega, t)\right]=\frac{\partial^2 S}{\partial\omega\partial q}\cdot\dot{Q}+\frac{\partial^2 S}{\partial\omega\partial t}. \quad (3.22)$$

Из (3.19) следует, что

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\omega\partial t}=-\frac{\partial}{\partial\omega}\left[f\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, \omega, t)\right)\right]=-\frac{\partial^2 S}{\partial\omega\partial q}\cdot\frac{\partial f}{\partial p}\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right).$$

Из этого равенства и первого уравнения (3.20) мы видим, что правая часть равенства (3.22) равна нулю. Значит величина

$$\frac{\partial S}{\partial\omega}(Q(q^0, \omega, t), \omega, t)$$

не зависит от времени и, в силу начальных условий (3.19), (3.20), равна

$$\frac{\partial S}{\partial\omega}(Q(q^0, \omega, 0), \omega, 0)=q^0.$$

Формулы (3.21) доказаны.

Из (3.21) с помощью замены переменных в интеграле (3.15′) получим соотношение

$$H[F_0, Q, P](q, p)=H\left[J_S\left(\frac{\partial S}{\partial\omega}\right)^* F_0, \pi_q, \frac{\partial S}{\partial q}\right](q, p),$$

которое устанавливает идентичность задач (3.16) и (3.19). Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

В процессе доказательства теоремы было установлено, что решение S задачи (3.16) удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H[F(t), \mathrm{id}]\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right)=0, \quad (3.23)$$

где $F(t)$ — решение задачи Коши (3.15) для уравнения Власова — Лиувилля.

Отметим, что решение уравнения (3.23) с произвольными начальными условиями $S|_{t=0}=\Phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ может быть получено из решения задачи (3.16) с помощью преобразования Лежандра. Для этого решим систему неявных уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial\omega}(q, \omega, t)=y, \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial y}(y)=\omega$$

относительно y и ω. При достаточно малом t эта система разрешима; обозначим ее решение через $y=y(q, t)$, $\omega=\omega(q, t)$. Тогда функция

$$\Phi(q, t)\overset{\text{def}}{=}S(q, \omega(q, t), t)+\Phi_0(y(q, t))-y(q, t)\omega(q, t)$$

удовлетворяет уравнению (3.23) и начальному условию $\Phi|_{t=0}=\Phi_0$.

Глава II

УНИТАРНО-НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Решение $F(x, p, t)$ уравнения Власова, рассмотренного в предыдущей главе, может быть интерпретировано как плотность распределения классических частиц по координатам и импульсам. Так, например, среднее значение импульса частиц в момент t равно

$$\langle p \rangle = \iint p \cdot F(x, p, t)\, dx dp, \qquad (1.1)$$

а среднее значение энергии частиц с функцией Гамильтона $\frac{p^2}{2m} + V(x)$ равно

$$\langle E \rangle = \iint \left(\frac{p^2}{2m} + V(x) \right) F(x, p, t)\, dx dp. \qquad (1.2)$$

В квантовой механике состояние системы описывается некоторой «волновой» функцией $\psi = \psi(x, t)$, непрерывной по t и принадлежащей $L^2(\mathbf{R}^n)$ по аргументу x. Среднее значение $\langle \hat{p} \rangle_{\text{кв}}$ оператора импульса $\hat{p} = -ih \frac{\partial}{\partial x}$ в этом квантовом случае определяется интегралом вида

$$\langle \hat{p} \rangle_{\text{кв}} = \int \psi(x, t) \overline{\hat{p}\psi(x, t)}\, dx, \qquad (1.3)$$

а среднее значение оператора энергии $\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$ — интегралом вида

$$\langle \hat{E} \rangle_{\text{кв}} = \int \psi(x, t) \overline{\hat{E}\psi(x, t)}\, dx. \qquad (1.4)$$

Говорят, что $\langle \hat{p} \rangle_{\text{кв}}$ и $\langle \hat{E} \rangle_{\text{кв}}$ — это средние значения операторов $\hat{p}$ и $\hat{E}$ в состоянии ψ.

По волновой функции ψ можно построить такую квантовую функцию распределения $F_{\text{кв}}(x, p, t)$, чтобы, например, средние $\langle \hat{p} \rangle_{\text{кв}}$ и $\langle \hat{E} \rangle_{\text{кв}}$ определялись по формулам (1.1) и (1.2), в которых вместо F стоит $F_{\text{кв}}$. Такая квантовая функция распределения имеет вид:

$$(2\pi h)^{-n/2} \psi(x, t) \overline{\tilde{\psi}(p, t)}\, e^{-\frac{ixp}{h}}$$

и называется функцией плотности ρ_ψ, отвечающей волновой функции ψ. Таким образом, имеем

$$F_{\text{кв}} = \rho_\psi.$$

Формулы (1.3) и (1.4) (см. [9]) можно переписать следующим образом:

$$\langle \hat{p} \rangle_{\text{кв}} = \iint p \cdot \rho_\psi(x, p, t)\, dx dp,$$

$$\langle \hat{E} \rangle_{\text{кв}} = \iint \left(\frac{p^2}{2m} + V(x) \right) \rho_\psi(x, p, t)\, dx dp.$$

Вообще, среднее оператора $\hat{f} = f(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}})$ в состоянии ψ равно

$$\langle \hat{f} \rangle_{\text{кв}} \overset{\text{def}}{=} \int \psi(x, t) \overline{\hat{f}\psi(x, t)}\, dx = \iint \overline{f(x, p)}\, \rho_\psi(x, p, t)\, dx dp \qquad (1.5)$$

$$(\overset{1}{p} = \overset{1}{\hat{p}},\ \hat{p} = ih\partial/\partial x\ [10],\ [9]).$$

Волновая функция ψ в линейной теории подчиняется обычно некоторому линейному дифференциальному уравнению в частных производных. Мы будем рассматривать такие нелинейные уравнения, которые получаются из этих линейных, если считать, что их коэффициенты являются функциями от средних значений вида (1.5) в состоянии, определяемом решением ψ. Примером таких уравнений могут служить уравнения типа Хартри, а также уравнения, полученные в [9] при «квантовании» уравнений Власова. Все они имеют следующий вид:

$$\dot{H}[\rho_\psi](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi = 0,$$

$$H[\rho_\psi](x, p) = F(x, p, I_1[\rho_\psi], \ldots, I_r[\rho_\psi]), \qquad (1.6)$$

где $F(x, p, \lambda)$ — заданная функция от переменных x, $p \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}^r$, а функционалы $I_1, \ldots, I_r$ имеют вид средних (1.5):

$$I_j[\rho_\psi] = \int \overline{k_j(x, p, x', p')}\, \rho_\psi(x', p')\, dx', dp' =$$

$$= \int \psi(x') \overline{k_j(x, p, \overset{2}{x'}, -i\partial/\overset{1}{\partial x'}) \psi(x')}\, dx'.$$

Уравнения типа (1.6) мы будем называть унитарно-нелинейными уравнениями, а операторы $\psi \to H[\rho_\psi](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi$ — унитарно-нелинейными операторами (или кратко UN-операторами). Это название связано с тем обстоятельством, что при унитарных преобразованиях в пространстве волновых функций ψ символ UN-оператора преобразуется с помощью унитарного канонического преобразования (определение символа UN-оператора и точная формулировка этого уравнения приведены в § 2.

После определения общего UN-оператора, которое будет дано в § 2, мы рассмотрим задачу Коши для такого оператора

$$-ih\partial\psi/\partial t + H[\rho_\psi](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi = 0, \quad \psi|_{t=0} = \psi_{0,h}(x). \qquad (1.7)$$

В [11, 9] при некоторых предположениях на символ H методом T-отображений была доказана теорема существования решения задачи (1.7). В § 3 изучаются способы представления решения этой задачи с помощью формул «выпутывания» (по терминологии Фейнмана).

Далее, в главе III будут изучаться асимптотические решения (при $h \to 0$) задачи (1.7). Эти асимптотические решения для широкого класса символов H строятся явно. Будет рассмотрен вопрос о сходимости при $h \to 0$ функции плотности ρ_ψ, отвечающей решению ψ, к решению предельного классического уравнения Власова. В главе IV эти же вопросы поставлены и решены для систем унитарно-нелинейных уравнений.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УНИТАРНО-НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Начнем с определения унитарно-нелинейных операторов типа Гильберта-Шмидта.

Определение 2.1. Пусть H — гладкое отображение [10], [16] пространства $L^2(\mathbf{R}^{2n})$ в себя:

$$\rho(x, p) \to H[\rho](x, p).$$

Унитарно-нелинейным оператором (или кратко UN-оператором) типа Гильберта — Шмидта назовем отображение $\mathscr{H}$ пространства $L^2(\mathbf{R}^n)$ в себя, определенное формулой:

$$\mathscr{H}[\psi] = H[\rho_\psi](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi, \tag{2.1}$$

где ρ_ψ — функция плотности, отвечающая ψ. Отображение H назовем нелинейным символом оператора $\mathscr{H}$, а функцию $H[\rho_\psi]$ — линейным символом оператора $\mathscr{H}$ в состоянии ψ.

Пример 2.1. Пусть нелинейный символ H является постоянным отображением: $H[\rho] = f_0$, f_0 — фиксированная функция из $L^2(\mathbf{R}^{2n})$. Унитарно-нелинейный оператор $\hat{H}$ с таким символом является линейным псевдодифференциальным оператором

$$\mathscr{H}[\psi] = f_0(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi.$$

Таким образом, класс UN-операторов включает в себя линейные псевдодифференциальные операторы.

Пример 2.2. Пусть символ H является линейным ограниченным отображением $L^2(\mathbf{R}^{2n})$ в себя. Представим его в виде интегрального оператора с обобщенным ядром $K(x, p, x', p')$, т. е.

$$H[\rho](x, p) = \int \overline{K(x, p; x', p')}\,\rho(x', p')\,dx'dp'.$$

UN-оператор $\hat{H}$ с таким символом действует по формуле

$$(\mathscr{H}[\psi])(x) = \left(\int \overline{\psi(y) K(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\partial/\partial x}, \overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\partial/ y})\psi(y)\,\partial y}\right)\psi(x).$$

Если $H = 1$ — единичный оператор, то

$$\mathscr{H}[\psi] = (2\pi h)^{-n}\|\psi\|^2 \cdot \psi(x).$$

Рассмотрим, как изменяется нелинейный символ UN-оператора при унитарных преобразованиях.

Имеется изометрия [9]:

$$\mu: L^2(\mathbf{R}^{2n}) \to H_2, \quad \mu(f) \equiv f(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$$

на класс H_2 линейных операторов Гильберта — Шмидта, действующих в пространстве $L^2(\mathbf{R}^2)$. Пусть V — некоторый линейный унитарный оператор в $L^2(\mathbf{R}^2)$. Определим в H_2 оператор Ad_V

по формуле

$$\mathrm{Ad}_V(T) = VTV^{-1}. \tag{2.2}$$

Сопоставим также оператору V следующий линейный унитарный оператор $\tilde{V}$ в пространстве $L^2(\mathbf{R}^{2n})$:

$$\tilde{V} = \mu^{-1} \circ \mathrm{Ad}_V \circ \mu. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. Пусть $\mathscr{H}$ есть UN-оператор типа Гильберта — Шмидта, а V — линейное унитарное преобразование пространства $L^2(\mathbf{R}^n)$. Тогда отображение $V^{-1} \circ \mathscr{H} \circ V$ является UN-оператором и его нелинейный символ H_V связан с символом H каноническим унитарным преобразованием:

$$H_V = \tilde{V}^{-1} \circ H \circ \tilde{V}.$$

Доказательство. Требуется показать, что $V^{-1}\mathscr{H}[V\psi] = \mathscr{H}_V[\psi]$ для любой функции $\psi \in L^2(\mathbf{R}^n)$, где $\mathscr{H}_V$ есть UN-оператор с символом H_V. Имеем, по определению:

$$\mathscr{H}_V[\psi] = f(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi,$$

где

$$f = H_V[\rho_\psi] = \tilde{V}^{-1}H[\tilde{V}\rho_\psi].$$

В силу формул (2.2), (2.3),

$$f \equiv \mu^{-1}(V \cdot H[\tilde{V}\rho_\psi] \cdot (\overset{2}{x}, \overset{1}{p}) \cdot V^{-1})$$

и

$$\tilde{V}\rho_\psi = \mu^{-1}(V \cdot \rho_\psi(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}) \cdot V^{-1}).$$

Поэтому остается доказать, что

$$V \cdot \rho_\psi(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}) \cdot V^{-1} = \rho_{V\psi}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}).$$

Это равенство следует из унитарности оператора V и формулы (б) леммы 1.3 главы II [9]. Лемма доказана.

Дадим теперь определение более общих унитарно-нелинейных операторов. Рассмотрим некоторое отображение

$$r: S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}) \to S^\infty(\mathbf{R}^{2n}).$$

Положим $\mathscr{L}_0 = S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ и обозначим через $\mathscr{L}_k$ пространство всех непрерывных отображений из $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ в $\mathscr{L}_{k-1}$ (где $k = 1, 2, \ldots$). Наделим $\mathscr{L}_k$ непрерывной сходимостью [10], [16]. Отображение r называется гладким, если оно само и все его дифференциалы $D_r^k: \mathscr{L}_0 \to \mathscr{L}_k$ ограничены, т. е. переводят ограниченные множества в ограниченные.

Определение 2.2 Пусть $H: S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}) \to S^{\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ — гладкое отображение. Оператор

$$\mathscr{H}: S(\mathbf{R}^n) \to S(\mathbf{R}^n),$$

заданный формулой

$$\mathscr{H}[\psi] = H[\rho_\psi](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi, \quad \psi \in S(\mathbf{R}^n),$$

назовем унитарно-нелинейным (или кратко, UN-оператором).

Как и выше, функцию $H[\rho_\psi]$ будем называть линейным символом UN-оператора $\mathscr{H}$ в состоянии ψ, а отображение H — нелинейным символом этого оператора.

Пример 2.3. Пусть нелинейный символ задается формулой

$$H[\rho](x, p) = \frac{|p|^2}{2} + V_0(x) + \iint \overline{V(x-x')}\,\rho(x', p')\,dx'dp',$$

где V, $V_0 \in S^\infty(\mathbf{R}^n)$. Отвечающий этому символу UN-оператор действует по следующему правилу:

$$\hat{H}[\psi] = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi(x) + V_0(x)\psi(x) + \psi(x)\iint \psi(y)\,\overline{V(x-y)\,\psi(y)}\,dy. \quad (2.4)$$

Унитарно-нелинейные операторы вида (2.4) будут в дальнейшем находиться в центре нашего внимания.

§ 3. ФОРМУЛЫ ВЫПУТЫВАНИЯ

В этом параграфе мы покажем, как работают известные формулы выпутывания (терминология Фейнмана) в случае T-отображений, порожденных унитарно-нелинейными операторами, а также T-отображений, отвечающих уравнению Власова.

Процесс выпутывания состоит в следующем. Пусть $A(\mu)$ при каждом $\mu \in \mathbf{R}$ есть инфинитезимальный оператор для однопараметрической полугруппы $e^{A(\mu)t}$ $(t \geqslant 0)$ в банаховом пространстве B. Предположим, что при τ, $t \in [0, T]$ существует T-произведение $\prod\limits_{\mu=\tau}^{t} \exp\{\overset{\mu}{A}(\mu)\,d\mu\}$.

Пусть также в пространстве B задано некоторое семейство обратимых линейных ограниченных операторов $U(\mu)$, $\mu \in [0, T]$.

Определение 3.1. Выпутыванием оператора $U(\mu)$ из T-произведения $\prod\limits_{\mu=\tau}^{t} \exp\{\overset{\mu}{A}(\mu)\,d\mu\}$ назовем преобразование оператора $A(\mu)$ в новый оператор $\tilde{A}(\mu)$ такой, что

$$\prod_{\mu=\tau}^{t} \exp\{\overset{\mu}{A}(\mu)\,d\mu\} = U(t)\cdot\prod_{\mu=\tau}^{t} \exp\{\overset{\mu}{\tilde{A}}(\mu)\,d\mu\}\cdot U(\tau)^{-1}. \quad (3.1)$$

Приведем явную формулу для оператора $\tilde{A}(\mu)$. Выпишем задачи Коши, разрешающими операторами которых служат T-произведения

$$\Omega(t, \tau) = \prod_{\mu=\tau}^{t} \exp\{\overset{\mu}{A}(\mu)\,d\mu\} \quad \text{и} \quad \tilde{\Omega}(t, \tau) = \prod_{\mu=\tau}^{t} \exp\{\overset{\mu}{\tilde{A}}(\mu)\,d\mu\}.$$

Эти задачи имеют вид

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = A(t)\Omega, \quad \Omega|_{t=\tau} = 1, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial t} = \tilde{A}(t)\tilde{\Omega}, \quad \tilde{\Omega}|_{t=\tau} = 1. \quad (3.2')$$

Лемма 3.1. Пусть $\mathscr{D}$ — плотное линейное многообразие, инвариантное относительно $U(t)$ и $A(t)$, $t \in [0, T]$, и пусть на $\mathscr{D}$ оператор $U(t)$ обратим и сильно дифференцируем при $t \in [0, T]$. Обозначим

$$\tilde{A}(t) \overset{\text{def}}{=} U(t)^{-1}\cdot A(t)\cdot U(t) - U(t)^{-1}\cdot\frac{dU(t)}{dt}. \quad (3.3)$$

Предположим, что задачи Коши (3.2), (3.2′) имеют на $\mathscr{D}$ единственные решения. Тогда на $\mathscr{D}$ имеет место равенство

$$\Omega(t, \tau) = U(t)\cdot\tilde{\Omega}(t, \tau)\cdot U(\tau)^{-1}. \quad (3.4)$$

Лемма доказывается постановкой оператора $U(t)^{-1}\cdot\Omega\cdot U(\tau)$ в дифференциальное уравнение задачи (3.2′). В силу единственности решения этой задачи, указанный оператор должен совпадать с $\tilde{\Omega}$ на $\mathscr{D}$, что и доказывает формулу (3.4).

Сравнивая (3.1), (3.4), мы видим, что формула (3.3) дает явное представление для преобразования выпутывания $A(t) \to \tilde{A}(t)$. Можно сформулировать полученное утверждение следующим образом: если семейство $U(\mu)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dU(\mu)}{d\mu} = A(\mu)\cdot U(\mu) - U(\mu)\cdot\tilde{A}(\mu),$$

то выпутывание оператора $U(t)$ переводит оператор $A(\mu)$ в $\tilde{A}(\mu)$. В частности, выпутывание оператора $U(t)$, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{dU(\mu)}{d\mu} = [A(\mu), U(\mu)],$$

не изменяет оператора $A(\mu)$.

Применим теперь формулы выпутывания к T-отображению, отвечающему уравнению Власова — Лиувилля.

Пусть задано отображение Гамильтона $H[f, v](z)=H_0(z)+H_1[\rho, v](z)$, где функция H_0 не зависит от f, v и удовлетворяет условиям

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} H_0(z)\right| \leqslant c(1+|z|), \quad \left|\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha} H_0(z)\right| \leqslant c_{\alpha}, \quad |\alpha| \geqslant 2.$$

Пусть, далее, функция $F_0 \in S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ такова, что пара (F_0, H_1) удовлетворяет условиям (A), (B) § 2 гл. I.

Как показано в теореме 2.2 гл. I, при любом $t \in \mathbf{R}$ существует решение

$$F(t)=\prod_{\tau=0}^{t} \circ \exp\left\{-\overset{\tau}{\overline{\left\langle J \frac{\partial H[F(\tau), \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right\rangle}} d\tau\right\} F_0 \qquad (3.5)$$

задачи Коши для уравнения Власова — Лиувилля

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\left\langle J \frac{\partial H[F, \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial z}\right\rangle=0, \quad F|_{t=0}=F_0. \qquad (3.5')$$

Если решение $F(\tau)$ найдено, то, подставив его в показатель экспоненты в правой части формулы (3.5), мы получим выражение для $F(t)$ в виде T-произведения. Применим к этому T-произведению формулу выпутывания из леммы 3.1. Будем выпутывать оператор

$$U(t)=\prod_{\tau=0}^{t} \exp\left\{-\overset{\tau}{\overline{\left\langle J \frac{\partial H_0}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right\rangle}} d\tau\right\}.$$

Этот оператор представляет собой обратный сдвиг за время t вдоль траекторий уравнения Гамильтона

$$\frac{d}{dt} Z^{(0)}=J \frac{\partial H_0}{\partial z} \circ Z^{(0)}, \quad Z^{(0)}|_{t=0}=\mathrm{id}. \qquad (3.6)$$

Таким образом,

$$U(t)=Z^{(0)}[t]^{*-1}. \qquad (3.7)$$

Выпутывание $U(t)$ из T-произведения (3.5) дает следующий результат:

$$F(t)=U(t) f(t), \qquad (3.8)$$
$$f(t)=\prod_{\tau=0}^{t} \exp\{-\overset{\tau}{\tilde{A}}(\tau) d\tau\} F_0,$$

где

$$\tilde{A}(\tau)=U(\tau)^{-1} \circ \left\langle J \frac{\partial H[F(\tau), \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right\rangle \circ U(\tau)+U(\tau)^{-1} \frac{dU(\tau)}{d\tau}=$$
$$=U(\tau)^{-1}\left\langle J \frac{\partial H_1[F(\tau), \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right\rangle \circ U(\tau), \quad z \in \mathbf{R}^{2n}.$$

Используя формулу (3.7), преобразуем оператор $\tilde{A}(\tau)$ к следующему виду:

$$\tilde{A}(\tau)=\left\langle J \frac{\partial H_{1,0}[f(\tau), \mathrm{id}]}{\partial z}(z, t), \frac{\partial}{\partial z}\right\rangle, \qquad (3.9)$$

где

$$H_{1,0}[f, v](z, t) \overset{\mathrm{def}}{=} H_1[f, Z^{(0)}[\tau] \circ v](Z^{(0)}(z, t)).$$

Действительно, в силу инвариантности H_1 относительно канонических преобразований и формул (3.8), (3.7), мы имеем

$$H_1[F(t), \mathrm{id}]=H_1[Z^{(0)}[t]^{*-1} f(t), \mathrm{id}]=H_1[f(t), Z^{(0)}[t]]. \qquad (3.10)$$

Далее, для любой гладкой функции $a(z)$ справедлива формула:

$$Z^{(0)}[t]^* \circ \left\langle J \frac{\partial a(z)}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right\rangle \circ Z^{(0)}[t]^{*-1}=\left\langle J \frac{\partial}{\partial z}[a(Z^{0}(z, t))], \frac{\partial}{\partial z}\right\rangle, \qquad (3.11)$$

поскольку отображение $z \rightarrow Z^{(0)}(z, t)$ канонично.

Из (3.10) и (3.11) следует искомое равенство (3.9). Таким образом, мы получили следующую формулу выпутывания:

$$F(t)=Z^{(0)}[t]^{*-1} f(t),$$
$$f(t)=\prod_{\tau=0}^{t} \exp\left\{-\overset{\tau}{\overline{\left\langle J \frac{\partial H_{1,0}[f(\tau), Z^{(0)}[\tau]]}{\partial z}(z, \tau), \frac{\partial}{\partial z}\right\rangle}} d\tau\right\} F_0.$$

На языке дифференциальных уравнений этот результат выглядит следующим образом.

Теорема 3.1. Решение задачи Коши (3.5′) для уравнения Власова — Лиувилля, отвечающего отображению Гамильтона

$$H[f, v](z)=H_0(z)+H_1[f, v](z), \qquad (3.12)$$

имеет вид

$$F(t)=Z^{(0)}[t]^{*-1} f(t), \qquad (3.13)$$

где $Z^{(0)}$ — решение уравнения Гамильтона (3.6), а функция $f(t)$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t}+\left\langle J \frac{\partial H_{1,0}[f(t), \mathrm{id}]}{\partial z}(z, t), \frac{\partial f(z, t)}{\partial z}\right\rangle=0, \qquad (3.14)$$
$$f(z, 0)=F_0(z).$$

Отображение Гамильтона $H_{1,0}$, которому отвечает уравнение Власова — Лиувилля (3.14), определено следующей формулой:

$$H_{1,0}[f, v]=Z^{(0)}[t]^*(H_1[f, Z^{(0)}[t] \cdot v]). \qquad (3.15)$$

Таким образом, процесс выпутывания привел нас от уравнения Власова — Лиувилля (3.5′5) к новому уравнению Власова — Лиувилля (3.14).

Определение 3.2. Отображение Гамильтона $H_{1,0}$, заданное формулой (3.15), назовем отображением Гамильтона в представлении взаимодействия (отвечающем разложению исходного отображения H на функцию Гамильтона H_0 свободного движения и на взаимодействие H_1). Дифференциальное уравнение (3.14) и соответствующее ему уравнение Власова — Гамильтона будем называть уравнениями Власова — Лиувилля и Власова — Гамильтона в представлении взаимодействия.

Из формул (3.13), (3.14) и теоремы 2.2 гл. I получаем

Следствие 3.1. Решение задачи (3.5′) имеет вид

$$F(t)=(Z[t]^{-1})^*F_0, \tag{3.16}$$

где $Z[t]$ — каноническое преобразование, заданное формулой

$$Z[t]=Z^{(0)}[t]\circ W[t], \tag{3.17}$$

причем $W[t]$ — решение уравнения Власова — Гамильтона в представлении взаимодействия с начальным условием $W[0]=\mathrm{id}$.

Полезно сравнить формулу (3.16) с формулой (2.9) из главы I и убедиться в том, что $Z[t]$ — это решение уравнения Власова — Гамильтона, отвечающего исходному отображению Гамильтона H. Таким образом, (3.17) также можно воспринимать как формулу выпутывания на языке канонических отображений.

В заключение параграфа рассмотрим применение формулы выпутывания к T-отображениям, отвечающим унитарно-нелинейным операторам.

Пусть задан унитарно-нелинейный оператор $\psi\to H[\rho_\psi](\overset{2}{x},\overset{1}{p})\psi$, причем

$$H[\rho_\psi](z)=H_{\text{своб}}(z)+H_1[\rho_\psi](z), \tag{3.18}$$

где функция $H_{\text{своб}}$ не зависит от ρ_ψ и определяет линейный, самосопряженный в $L^2(\mathbf{R}^n)$ псевдодифференциальный оператор

$$\hat H_{\text{своб}}=H_{\text{своб}}(\overset{2}{x},\overset{1}{p}).$$

Будем кратко обозначать

$$\hat H[\rho_\psi]\overset{\text{def}}{=}H[\rho_\psi](\overset{2}{x},\overset{1}{p}).$$

Предположим, что задача Коши

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t}+\hat H[\rho_\psi]\psi=0,\quad \psi|_{t=0}=\psi_0\in S(\mathbf{R}^n) \tag{3.19}$$

разрешима [11] в $L^2(\mathbf{R}^n)$ и решение задается T-отображением:

$$\psi(t)=\prod_{\tau=0}^{t}\circ\exp\left\{-\frac{i}{h}\overset{\tau}{\hat H}[\rho_{\psi(\tau)}]\right\}\psi_0. \tag{3.20}$$

Обозначим через $U(t)$ унитарный оператор

$$U(t)=\exp\left\{-\frac{i}{h}\hat H_{\text{своб}}t\right\}.$$

Предположим, что решение задачи (3.19) найдено и подставлено в показатель экспоненты в правой части (3.20). Из полученного T-произведения выпутаем оператор $U(t)$. Получим:

$$\psi(t)=U(t)\cdot\chi(t),$$
$$\chi(t)=\prod_{\tau=0}^{t}\exp\left\{-\frac{i}{h}\overset{\tau}{\tilde A}(\tau)\,d\tau\right\}\psi_0, \tag{3.21}$$

где

$$\tilde A(\tau)=U(\tau)^{-1}\circ\hat H[\rho_{\psi(\tau)}]\circ U(\tau)-ihU(\tau)^{-1}\frac{dU(\tau)}{d\tau}=$$
$$=U(\tau)^{-1}\circ\hat H_1[\rho_{\psi(\tau)}]\circ U(\tau).$$

В силу теоремы 2.1 о каноническом преобразовании символа унитарно-нелинейного оператора, мы имеем:

$$\tilde A(\tau)=\hat H_{1,h}[\rho_{\chi(\tau)}]\equiv H_{1,h}[\rho_{\chi(\tau)}](\overset{2}{x},\overset{1}{p},\tau),$$

где

$$H_{1,h}=\tilde U(\tau)^{-1}\circ H_1\circ\tilde U(\tau). \tag{3.22}$$

Здесь использованы обозначения § 2:

$$\tilde U(\tau)\overset{\text{def}}{=}\mu^{-1}\circ\mathrm{Ad}_{U(\tau)}\circ\mu,$$
$$\mu: f\to f(\overset{2}{x},\overset{1}{p}),\quad \mathrm{Ad}_{U(\tau)}\hat f\overset{\text{def}}{=}U(\tau)\hat fU(\tau)^{-1}.$$

Из (3.21) получаем следующую формулу выпутывания:

$$\psi(t)=U(t)\chi(t),$$
$$\chi(t)=\prod_{\tau=0}^{t}\exp\left\{-\frac{i}{h}\overset{\tau}{\hat H}_{1,h}[\rho_{\chi(\tau)}]\,d\tau\right\}\psi_0. \tag{3.23}$$

Сформулируем этот результат на языке дифференциальных уравнений.

Теорема 3.2. Решение задачи Коши (3.19) имеет вид $\psi(t)=\exp\left\{-\frac{i}{h}\hat H_{\text{своб}}t\right\}\chi(t)$, где функция χ удовлетворяет соотношениям

$$-ih\frac{\partial\chi}{\partial t}+\hat H_{1,h}[\rho_{\chi(\tau)}]\chi=0,\quad \chi|_{t=0}=\psi_0. \tag{3.24}$$

Таким образом, от унитарно-нелинейного уравнения (3.19) в результате выпутывания мы пришли к унитарно-нелинейному уравнению (3.24) с новым нелинейным символом $H_{1,h}$.

Определение 3.3. Символ $H_{1,h}$, заданный формулой (3.22), в которой $U(\tau)=\exp\left\{-\frac{i}{h}\hat H_{\text{своб}}\tau\right\}$, назовем нелинейным символом в представлении взаимодействия (отвечающем разбиению

(3.18) символа H на символ свободного движения $H_{\text{своб}}$ и символ взаимодействия H_1). Функцию плотности ρ_χ назовем функцией плотности задачи (3.19) в представлении взаимодействия.

Пример применения полученных формул выпутывания для асимптотического решения задачи Коши вида (3.19) при $h\to 0$ будет рассмотрен в § 1, гл. III. В § 3 гл. III на том же примере будет установлено, что если унитарно-нелинейный оператор $\psi\to\hat{H}[\rho_\psi]\psi$ ассоциирован с отображением Гамильтона H, т. е. имеет вид

$$\psi\to\hat{H}[\rho_\psi, \mathrm{id}]\psi,$$

причем, как и в (3.12), имеет место разложение

$$H[f, v](z)=H_0(z)+H_1[f, v](z),$$

то нелинейный символ в представлении взаимодействия $H_{1,h}$ в пределе при $h\to 0$ переходит в отображение Гамильтона в представлении взаимодействия $H_{1,0}$, заданное формулой (3.15), а функция плотности $\rho_{\chi(\tau)}$ переходит при $h\to 0$ в решение уравнения Власова — Лиувилля в представлении взаимодействия (3.14).

Глава III

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ УНИТАРНО-НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

В этой главе будет изложен метод построения квазиклассической асимптотики решений общих унитарно-нелинейных уравнений. В данном параграфе мы, в частности, построим асимптотическое решение задачи Коши для конкретного унитарно-нелинейного уравнения, а именно — уравнения Шрёдингера для парного взаимодействия. Кроме того, в конце параграфа рассматривается пример вычисления квазиклассической асимптотики собственных чисел и собственных значений нелинейного уравнения Шрёдингера.

Будем решать следующую задачу Коши:

$$\begin{gathered}-ih\partial\psi/\partial t-h^2\Delta\psi+\left(\int V(x-y)\,|\psi(y, t)|^2dy\right)\psi=0,\\ \psi|_{t=0}=\exp\left\{\frac{i}{h}S_0\right\}\chi_0,\end{gathered}\qquad(1.1)$$

где $\psi=\psi(x, t)$ — подлежащая определению «волновая функция», $x\in\mathbf{R}^n$, χ_0, $S_0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $V\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, функции χ_0, S_0, V — вещественные, Δ — оператор Лапласа.

Таким образом, задача (1.1) отличается от обычного уравнения Шрёдингера квантовой механики тем, что потенциал поля зависит от волновой функции ψ. Поэтому уравнение (1.1) можно назвать уравнением самосогласованного поля. Параметр h в (1.1) считается малым. Нашей задачей будет отыскание приближенного (асимптотического) решения (1.1) при $h\to 0$.

Будет доказано, что задача (1.1) и целый ряд подобных ей нелинейных задач, которые мы рассмотрим ниже, имеют асимптотические решения вида

$$\psi(x, t)=e^{\frac{i}{h}S(x,t)}\varphi(x, t, h),\qquad(1.2)$$

где амплитуда φ регулярна при $h\to 0$ (в отличие от экспоненты $e^{iS/h}$, производные которой сингулярны при $h\to 0$). Точнее, асимптотическое решение имеет вид (1.2) лишь при достаточно малом времени t; в целом же оно строится с помощью более сложной конструкции канонического оператора [10].

Наличие у дифференциального уравнения решений типа (1.2) тесно связано с существованием у него характеристик и бихарактеристик. Если же таковые существуют, то представление решения в виде (1.2) является непосредственным следствием формул выпутывания, полученных в главе II. Продемонстрируем справедливость этого утверждения на примере решения задачи Коши (1.1).

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}X(z, t, h)+2\int\frac{\partial V}{\partial x}(X(z, t, h)-X(y, t, h))|\chi(y, t, h)|^2dy=0,\quad(1,3)$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}(z, t, h)=ih\left(\frac{\mathfrak{D}X(z, t, h)}{\mathfrak{D}z}\right)^{1/2}\left[\Delta\left(\frac{\chi(z, t, h)}{\left(\frac{\mathfrak{D}X(z, t, h)}{\mathfrak{D}z}\right)^{1/2}}\Bigg|_{z=X^{-1}(x, t, h)}\right)\right]_{x=X}$$

с начальными условиями

$$\begin{gathered}X(z, 0, h)=z,\quad \frac{\partial X}{\partial t}(z, 0, h)=\nabla S_0(z),\\ \chi(z, 0, h)=\chi_0(z).\end{gathered}\qquad(1.3')$$

Здесь через X^{-1} обозначена функция, обратная к X, т. е.

$$X(X^{-1}(x, t, h), t, h)=X.$$

Система (1.3) рассматривается на том интервале времени $t\in[0, T_0]$, где якобиан $\frac{\mathfrak{D}X(z, t, h)}{\mathfrak{D}z}$ положителен.

С помощью формул выпутывания мы докажем следующую теорему.

Теорема 1.1. Решение задачи Коши (1.1) на отрезке

(3.18) символа H на символ свободного движения $H_{\text{своб}}$ и символ взаимодействия H_1). Функцию плотности ρ_χ назовем функцией плотности задачи (3.19) в представлении взаимодействия.

Пример применения полученных формул выпутывания для асимптотического решения задачи Коши вида (3.19) при $h \to 0$ будет рассмотрен в § 1, гл. III. В § 3 гл. III на том же примере будет установлено, что если унитарно-нелинейный оператор $\psi \to \hat{H}[\rho_\psi]\psi$ ассоциирован с отображением Гамильтона H, т. е. имеет вид

$$\psi \to \hat{H}[\rho_\psi, \mathrm{id}]\psi,$$

причем, как и в (3.12), имеет место разложение

$$H[f, v](z) = H_0(z) + H_1[f, v](z),$$

то нелинейный символ в представлении взаимодействия $H_{1,h}$ в пределе при $h \to 0$ переходит в отображение Гамильтона в представлении взаимодействия $H_{1,0}$, заданное формулой (3.15), а функция плотности $\rho_{\chi(\tau)}$ переходит при $h \to 0$ в решение уравнения Власова — Лиувилля в представлении взаимодействия (3.14).

Глава III

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ УНИТАРНО-НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

В этой главе будет изложен метод построения квазиклассической асимптотики решений общих унитарно-нелинейных уравнений. В данном параграфе мы, в частности, построим асимптотическое решение задачи Коши для конкретного унитарно-нелинейного уравнения, а именно — уравнения Шрёдингера для парного взаимодействия. Кроме того, в конце параграфа рассматривается пример вычисления квазиклассической асимптотики собственных чисел и собственных значений нелинейного уравнения Шрёдингера.

Будем решать следующую задачу Коши:

$$\begin{gathered} -ih\partial\psi/\partial t - h^2\Delta\psi + \left(\int V(x-y)\,|\psi(y, t)|^2 dy\right)\psi = 0, \\ \psi|_{t=0} = \exp\left\{\frac{i}{h}S_0\right\}\chi_0, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\psi = \psi(x, t)$ — подлежащая определению «волновая функция», $x \in \mathbf{R}^n$, χ_0, $S_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $V \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, функции χ_0, S_0, V — вещественные, Δ — оператор Лапласа.

Таким образом, задача (1.1) отличается от обычного уравнения Шрёдингера квантовой механики тем, что потенциал поля зависит от волновой функции ψ. Поэтому уравнение (1.1) можно назвать уравнением самосогласованного поля. Параметр h в (1.1) считается малым. Нашей задачей будет отыскание приближенного (асимптотического) решения (1.1) при $h \to 0$.

Будет доказано, что задача (1.1) и целый ряд подобных ей нелинейных задач, которые мы рассмотрим ниже, имеют асимптотические решения вида

$$\psi(x, t) = e^{\frac{i}{h}S(x,t)}\varphi(x, t, h), \tag{1.2}$$

где амплитуда φ регулярна при $h \to 0$ (в отличие от экспоненты $e^{iS/h}$, производные которой сингулярны при $h \to 0$). Точнее, асимптотическое решение имеет вид (1.2) лишь при достаточно малом времени t; в целом же оно строится с помощью более сложной конструкции канонического оператора [10].

Наличие у дифференциального уравнения решений типа (1.2) тесно связано с существованием у него характеристик и бихарактеристик. Если же таковые существуют, то представление решения в виде (1.2) является непосредственным следствием формул выпутывания, полученных в главе II. Продемонстрируем справедливость этого утверждения на примере решения задачи Коши (1.1).

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}X(z, t, h) + 2\int \frac{\partial V}{\partial x}(X(z, t, h) - X(y, t, h))|\chi(y, t, h)|^2 dy = 0, \quad (1,3)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}(z, t, h) = ih\left(\frac{\mathfrak{D}X(z, t, h)}{\mathfrak{D}z}\right)^{1/2}\left[\Delta\left(\frac{\chi(z, t, h)}{\left(\frac{\mathfrak{D}X(z, t, h)}{\mathfrak{D}z}\right)^{1/2}}\Bigg|_{z = X^{-1}(x, t, h)}\right)\right]_{x=X}$$

с начальными условиями

$$\begin{gathered} X(z, 0, h) = z, \quad \frac{\partial X}{\partial t}(z, 0, h) = \nabla S_0(z), \\ \chi(z, 0, h) = \chi_0(z). \end{gathered} \tag{1.3'}$$

Здесь через X^{-1} обозначена функция, обратная к X, т. е.

$$X(X^{-1}(x, t, h), t, h) = X.$$

Система (1.3) рассматривается на том интервале времени $t \in [0, T_0]$, где якобиан $\frac{\mathfrak{D}X(z, t, h)}{\mathfrak{D}z}$ положителен.

С помощью формул выпутывания мы докажем следующую теорему.

Теорема 1.1. Решение задачи Коши (1.1) на отрезке времени $[0, T_0]$, на котором $\mathscr{D}X/\mathscr{D}z>0$, имеет вид

$$\psi(x, t, h)=\left(\exp\left\{\frac{i}{h}\tilde{S}(z,t,h)\right\}\frac{\chi(z, t, h)}{\left(\frac{\mathscr{D}X(z, t, h)}{\mathscr{D}z}\right)^{1/2}}\right)_{z=X^{-1}(x, t, h)}, \quad (1.4)$$

где функции X, χ являются решением задачи (1.3), (1.3'), а функция $\tilde{S}$ определена формулой

$$\tilde{S}(z, t, h)=S_0(z)+\int_0^t\left(\frac{1}{4}\left|\frac{\partial X}{\partial\tau}(z, \tau, h)\right|^2-\right.$$

$$\left.-\int V(X(z, \tau, h)-X(y, \tau, h))|\chi(y, \tau, h)|^2dy\right)d\tau. \quad (1.5)$$

Доказательство. Как было показано в [11] (см. теорему 1.1. гл. III [9]), решение задачи (1.1) существует и задается T-отображением

$$\psi(t)=\prod_{\tau=0}^{t}\exp\left\{-\frac{i}{h}d\tau\overset{\tau}{B}[\psi(\tau)]\right\}\psi(0), \quad \psi(t)=\psi(x, t, h), \quad (1.6)$$

где

$$B[\psi(\tau)]=-h^2\Delta+\int V(x-y)|\psi(y, \tau, h)|^2dy.$$

Применим к (1.6) формулу выпутывания из § 3 гл. II, «выпутаем» осциллирующий множитель $\exp\left\{\frac{i}{h}S(t)\right\}$ с произвольной вещественной фазой $S(t)=S(x, t, h)$ такой, что $S(t)|_{t=0}=S_0(x)$. Получим

$$\psi(t)=e^{\frac{i}{h}S(t)}\varphi(t), \quad \varphi(t)=\varphi(x, t, h), \quad (1.7)$$

где

$$\varphi(t)=\prod_{\tau=0}^{t}\circ\exp\{d\tau\overset{\tau}{B}_1[\varphi(\tau)]\}\varphi(0), \quad \varphi(0)=\chi_0$$

и образующая B_1 определена формулой

$$B_1[\varphi(\tau)]=-\frac{i}{h}\left(\frac{\partial S}{\partial\tau}+\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\int V(x-y)|\varphi(y, \tau, h)|^2dy\right)-$$

$$-2\frac{\partial S}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}-\Delta S+ih\Delta. \quad (1.8)$$

Функцию S мы выберем ниже так, чтобы член порядка $1/h$ в формуле (1.8) был равен нулю. А сейчас повторно применим формулу выпутывания к T-отображению (1.7), определяющему функцию φ. «Выпутаем» оператор

$$U(t)=\prod_{\tau=0}^{t}\exp\{-d\tau\overset{\tau}{A}(\tau)\},$$

где

$$A(\tau)=2\frac{\partial S}{\partial x}(x, \tau, h)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Получим

$$\varphi(t)=U(t)f(t),$$

$$f(t)=\prod_{\tau=0}^{t}\circ\exp\{d\tau\overset{\tau}{B}_2[f(\tau)]\}f(0), \quad (1.9)$$

где $f(t)=f(x, t, h)$, $f(0)=\chi_0$, а образующая B_2 определена формулой

$$B_2[f(\tau)]=-\frac{i}{h}a_0(\tau, [f])-a_1(\tau)+ih\hat{U}(\tau)^{-1}\circ\Delta\circ\hat{U}(\tau). \quad (1.10)$$

Здесь мы обозначили:

$$a_1(t)\equiv a_1(x, t, h)=\Delta S(X(x, t, h), t, h),$$

$$a_0(t, [f])\equiv a_0(x, t, h, [f])=\frac{\partial S}{\partial t}(X(x, t, h), t, h)+$$

$$+|\nabla S(X(x, t, h), t, h)|^2+\int V(X(x, t, h)-X(y, t, h))\times$$

$$\times\exp\left\{2\int_0^t a_1(y, \tau, h)d\tau\right\}|f(y, t, h)|^2dy, \quad X_j(x, t, h)=U_t^{-1}\circ x_j\circ U_t,$$

$$j=1, \ldots, n, \quad X=(X_1, \ldots, X_n).$$

Очевидно, вектор-функция X, определенная по этим формулам, удовлетворяет следующим равенствам:

$$\frac{\partial X}{\partial t}=2\nabla S(X, t, h), \quad X|_{t=0}=x. \quad (1.11)$$

Отметим следующее очевидное тождество:

$$\frac{\mathscr{D}X}{\mathscr{D}z}\equiv\exp\left\{2\int_0^t a_1(\tau)d\tau\right\},$$

и еще один раз применим формулу выпутывания — на этот раз к T-отображению (1.9). «Выпутаем» множитель $\exp\left\{-\int_0^t a_1(\tau)d\tau\right\}$.

Получим

$$f(t)=\exp\left\{-\int_0^t a_1(\tau)d\tau\right\}\chi(t), \quad \chi(t)=\chi(x, t, h), \quad (1.12)$$

$$\chi(t)=\prod_{\tau=0}^{t}\circ\exp\{d\tau\overset{\tau}{B}_3[\chi(\tau)]\}\chi(0),$$

где $\chi(0)=\chi_0$, а образующая B_3 определена формулой:

$$B_3[\chi(\tau)] = -\frac{i}{h}\Big[\frac{\partial S}{\partial \tau}(X(x,\tau,h),\tau,h)+|\nabla S(X(x,\tau,h),\tau,h)|^2+$$
$$+\int V(X(x,\tau,h)-X(y,\tau,h))|\chi(y,\tau,h)|^2\,dy\Big]+ih\tilde{\Delta}(\tau). \quad (1.13)$$

Оператор $\tilde{\Delta}(\tau)$ есть оператор Лапласа Δ в обкладках оператора

$$W(\tau)=U(\tau)\circ\Big(\frac{\mathcal{D}X(x,\tau,h)}{\mathcal{D}x}\Big)^{-1/2}, \text{ т. е. } \tilde{\Delta}(\tau)=W^{-1}(\tau)\circ\Delta\circ W(\tau).$$

Выберем функцию S так, чтобы коэффициент при $(-i/h)$ в правой части (1.13) был равен нулю. Получим:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+|\nabla S|^2+\int V(x\quad -X\quad (y,\tau,h))|\chi(y,\tau,h)|^2\,dy=0.$$

Решение этого уравнения Гамильтона—Якоби легко выразить через функцию X. Учитывая (I.II), найдем

$$S(x,t,h)=\tilde{S}(X^{-1}(x,t,h),t,h)=U(t)\,\tilde{S}(x,t,h),$$

где функция $\tilde{S}$ определена формулой (1.5).

В свою очередь, для функции X получим первое из уравнений системы (1.3), а также начальные условия (1.3′). Уравнение для функции χ следует из (1.12), (1.13)

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}=ih\tilde{\Delta}(t)\chi,\quad \chi|_{t=0}=\chi_0.$$

Исходная функция ψ после трехкратного «выпутывания» записывается следующим образом

$$\psi=e^{\frac{i}{h}S}\,U(t)\Big(\Big(\frac{\mathcal{D}X}{\mathcal{D}x}\Big)^{-1/2}\chi\Big).$$

Отсюда следует формула (1.4).

Решение системы (1.3), (1.3′) существует, поскольку существует решение задачи (3.1). Действительно, функцию X можно определить, решая обычное уравнение Ньютона

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}+2\int\frac{\partial V}{\partial x}(X-y)|\psi(y,t,h)|^2\,dy=0,$$

а затем вычислить функцию χ по формуле

$$\chi(x,t,h)=\psi(X(x,t,h),t,h)\exp\Big\{-\frac{i}{h}\tilde{S}(x,t,h)\Big\}\Big(\frac{\mathcal{D}X(x,t,h)}{\mathcal{D}x}\Big)^{1/2},$$

где

$$\tilde{S}(x,t,h)=S_0(x)+\int_0^t\Big(\frac{1}{4}\Big|\frac{\partial X}{\partial\tau}(x,\tau,h)\Big|^2-$$
$$-\int V(X(x,\tau,h)-y)|\psi(y,\tau,h)|^2\,dy\Big)\,d\tau.$$

Выше было проверено, что найденная таким образом пара функций X, χ удовлетворяет системе (1.3), (1.3′) на том отрезке времени, где положителен якобиан $\mathcal{D}X/Dx$. Теорема доказана.

Следствие. Решение задачи (1.1) на отрезке $[0, T_0]$ имеет следующую асимптотику

$$\psi(x,t,h)=$$
$$=\Big[\exp\Big\{\frac{i}{h}\tilde{S}(q,t)\Big\}\frac{\chi_0^2(q)}{\Big(\frac{\mathcal{D}X^0(q,t)}{\mathcal{D}q}\Big)^{1/2}}\Big]_{q=(X^0)^{-1}(x,t)}+O(h), \quad (1.14)$$

где $\|O(h)\|_{L^2}\leqslant c\cdot h$, функция $X^0(q,t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 X^0(q,t)}{\partial t^2}+2\int\frac{\partial V}{\partial x}(X^0(q,t)-X^0(y,t))\,\chi_0^2(y)\,dy=0,$$
$$X^0(q,0)=q,\quad \frac{\partial X^0}{\partial t}(q,0)=\nabla S_0(q), \quad (1.15)$$

а функция $\tilde{S}$ определяется формулой

$$\tilde{S}(q,t)=S_0(q)+\int_0^t\Big(\frac{1}{4}\Big|\frac{\partial X^0}{\partial\tau}(q,\tau)\Big|^2-$$
$$-\int V(X^0(q,\tau)-X^0(y,\tau))\,\chi_0^2(y)\,dy\Big)\,d\tau. \quad (1.16)$$

Доказательство. Решение задачи (1.3), (1.3′) имеет вид

$$X(q,t,h)=X^0(q,t)+O(h^2),$$
$$\chi(q,t,h)=\chi_0(q)+(-ih)\chi_1(q,t)+O(h^2),$$

где $\operatorname{Im}\chi_1=0$, а функция $X^0(q,t)$ является решением задачи (1.15). Поэтому формула (1.14) следует из (1.4).

Замечание. Уравнение (1.15) является уравнением Власова—Гамильтона, изученным в гл. I. Отвечающая ему задача Коши для уравнения Власова имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+2p\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\iint\frac{\partial V}{\partial x}(x-y)\,F(y,\xi,t)\,dy\,d\xi=0,$$
$$F(x,p,0)=\chi_0^2(x)\,\delta(p-\nabla S_0(x)). \quad (1.17)$$

Решение задачи (1.17) легко выписать, явно зная решение задачи (1.15):

$$F(x,p,t)=\Big[\chi_0^2(q)\Big(\frac{\mathcal{D}X^0(q,t)}{\mathcal{D}q}\Big)^{-1}\delta\Big(p-\frac{\partial X^0}{\partial t}(q,t)\Big)\Big]_{q=(X^0)^{-1}(x,t)}.$$

Энтропия задачи (1.17), которая была определена в § 2 гл. I, равна

$$H_0(t)=\int\tilde{S}(q,t)\,\chi_0^2(q)\,dq,$$

где функция $\tilde{S}(q,t)$ задана формулой (1.16). С другой стороны, из формулы (1.4) получим:

$$\int(-ih)[\ln\psi(x,t,h)]\cdot|\psi(x,t,h)|^2dx=$$

$$=\int\left(\tilde{S}(q,t,h)-ih\ln\chi(q,t,h)+\frac{ih}{2}\ln\frac{\mathscr{D}X(q,t,h)}{\mathscr{D}q}\right)\chi^2(q,t,h)\,dq.$$

Следовательно, имеет место следующая формула для энтропии уравнения Власова:

$$H_0(t)=\lim_{h\to 0}(-ih)((\ln\psi)\cdot\psi,\psi),$$

где ψ — решение задачи (1.1), а скобки $(\ldots,\ldots)$ обозначают скалярное произведение в L^2.

Рассмотрим теперь вопрос о получении глобальных (при всех t) формул для асимптотики решения задачи (1.1).

В теореме 1.1 асимптотика решения задачи (1.1) была построена лишь на отрезке времени $0\leqslant t\leqslant T_0$, в то время как решения характеристической системы (1.15) существуют глобально. Причина такого ограничения заключена в невозможности обратить функцию X при всех $t\geqslant 0$. Действительно, якобиан $J(q,t)=\mathscr{D}X^0(q,t)/\mathscr{D}q$, лишь в исключительных случаях может быть отличен от нуля при всех $t\geqslant 0$ а, вообще говоря, $J(q,t)=0$ — в некоторые моменты времени $t_1, t_2, \ldots$. Соответствующие точки $X^0(q,t_1)$, $X^0(q,t_2)$, ... называют фокальными. Асимптотическое решение в окрестности фокальной точки не имеет вида (1.2), а строится с помощью канонического оператора. Этот оператор позволяет выписать формулу для асимптотического решения сразу при всех t.

Рассмотрим $(n+1)$-мерное многообразие Λ в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n+2}=\{(x,t;p,p^t)\,|\,(x,p)\in\mathbf{R}^{2n},\ t,\ p^t\in\mathbf{R}\}$, задаваемое формулами

$$x=X^0(q,t),\quad p=\frac{1}{2}\frac{\partial X^0}{\partial t}(q,t),$$

$$p^t=-\frac{1}{4}\left|\frac{\partial X^0}{\partial t}(q,t)\right|^2-\int V(X^0(q,t)-X^0(y,t))\,\chi_0^2(y)\,dy,$$

где X^0 — решение задачи (1.15). Многообразие Λ лагранжево относительно формы $dx\wedge dp+dt\wedge dp^t$ в $\mathbf{R}^{2n+2}$ (определение лагранжевости было дано в § 2 гл. I).

Пусть $\mathscr{K}^{1/h}$ — канонический оператор на Λ, определенный с точностью $O(h)$ по мере $d\sigma=dq\wedge dt$ [10].

Лемма 1.1. Функция

$$\psi(x,t,h)=[\mathscr{K}^{1/h}\chi_0](x,t) \qquad (1.18)$$

является асимптотическим решением задачи Коши (1.1) по модулю $O(h^2)$, т. е.

$$-ih\partial\psi/\partial t-h^2\Delta\psi+\psi\int V(x-y)\,|\psi(y,t,h)|^2\,dy=O(h^2),$$

$$\psi(x,0,h)=\chi_0(x)\,e^{\frac{i}{h}S_0(x)},$$

где

$$\|O(h^2)\|_{L^2}\leqslant h^2\cdot c(t).$$

Доказательство. По лемме 12.2 книги [10] найдем

$$\int V(x-y)\,|[\mathscr{K}^{1/h}_\Lambda\chi_0](y,t)|^2dy=\int V(x-X^0(q,t))\,\chi_0^2(q)\,dq+O(h^2).$$

Обозначим эту функцию через $W(x,t,h)$.

Подставим функцию $\psi=\mathscr{K}^{1/h}\chi_0$ в уравнение (1.1). Используя теорему 11.1 гл. V книги [10], получим

$$[-ih\partial/\partial t-h^2\Delta+W(x,t,h)]\,[\mathscr{K}^{1/h}\chi_0](x,t)=$$

$$=(-ih)\left[\mathscr{K}^{1/h}\frac{\partial\chi_0}{\partial t}\right](x,t)+O(h^2)=O(h^2),$$

так как $\partial\chi_0/\partial t=0$. Лемма доказана.

Ниже в § 3 будет доказано, что функция (1.18) является не только асимптотическим решением задачи (1.1), но и асимптотикой по модулю $O(h)$ точного решения этой задачи.

Теперь мы построим асимптотическое решение задачи (1.1) еще одним методом. Используем исчисление псевдодифференциальных операторов и его более общий вариант, разработанный в [10].

Решение задачи (1.1) при малых t будем искать в виде

$$\psi(x,t,h)=\hat{T}(t)\,e^{\frac{i}{h}S_0(x)}\chi_0(x), \qquad (1.19)$$

где

$$\hat{T}(t)=\varphi(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t)\exp\left\{\frac{i}{h}S(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t)\right\}. \qquad (1.19')$$

Для того, чтобы предъявить функции S и φ, рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения Власова — Гамильтона:

$$\frac{\partial^2X(q,\omega,t)}{\partial t^2}+2\int\frac{\partial V}{\partial x}(X(q,\omega,t)-$$

$$-X(y,\nabla S_0(y),t))\,\chi_0^2(y)\,dy=0, \qquad (1.20)$$

$$X(q,\omega,0)=q,\quad \frac{\partial X}{\partial t}(q,\omega,0)=2\omega.$$

Здесь $q,\omega\in\mathbf{R}^n$.

Пусть $e_0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ — любая вещественная финитная функция, тождественно равная единице в окрестности следующего компакта в $\mathbf{R}^{2n}$:

$$Q=\{(x,p)|,\ p=\nabla S_0(x),\ x\in\operatorname{supp}\chi_0\}.$$

В силу леммы 2.1 гл. I, существует глобальное решение $X(q,\omega,t)$ задачи (1.20). Найдем такое $T_0>0$, что $\mathscr{D}X/\mathscr{D}z\geqslant\geqslant\varepsilon>0$ при $(q,\omega)\in\operatorname{supp}e_0$, $t\in[0,T_0]$. На отрезке $[0,T_0]$ построим две функции:

$$S(x, p, t) = p(q-x) + \int_0^t d\tau \left(\frac{1}{4} \left| \frac{\partial X}{\partial \tau}(q, p, \tau) \right|^2 - \right.$$

$$\left. - \int V(X(q, p, \tau) - X(y, \nabla S_0(y), \tau)) \chi_0^2(y)\, dy \right) \Big|_{q = X^{-1}(x, p, t)},$$

$$\varphi(x, p, t) = e_0\left(x + \frac{\partial S}{\partial p}(x, p, t),\ p\right) \times$$

$$\times \det \left\| \delta_{ij} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial p_j}(x, p, t) \right\|^{1/2}, \qquad (1.21)$$

где $q = X^{-1}(x, p, t)$ есть решение уравнения $X(q, p, t) = x$.

Лемма 1.2. Функция ψ, заданная на отрезке $t \in [0, T_0]$ формулами (1.19), (1.19′), где φ и S определены равенствами (1.21), является асимптотическим решением задачи (1.1) по модулю $O(h^2)$.

Доказательство. По теореме 1.8 гл. V книги [10] имеем

$$\hat{T}(t)^* \circ \rho(x) \circ \hat{T}(t) =$$

$$= \rho\left(\frac{X(\overset{2}{x}, \overset{3}{p}, t) + X(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)}{2} \right) e_0(\overset{2}{x}, \overset{3}{p})\, e_0(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}) + O(h^2)$$

для любой функции $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Отсюда получим:

$$\int V(x' - x) \,|\psi(x, t, h)|^2\, dx =$$

$$= \int \left[e^{-\frac{i}{h} S_0(x)} \chi_0(x) \right] V\left(x' - \frac{X(\overset{2}{x}, \overset{3}{p}, t) + X(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)}{2} \right) \times$$

$$\times e_0(\overset{2}{x}, \overset{3}{p})\, e_0(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\, e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \chi_0(x)\, dx + O(h^2).$$

Здесь $x' \in \mathbf{R}^n$ — параметр.

Используя формулу коммутации с экспонентой [10], имеем:

$$\int V(x' - x)\, |\psi(x, t, h)|^2\, dx =$$

$$= \int \chi_0(x)\, V\left(x' - \frac{X\left(\overset{2}{x}, -ih \overset{3}{\frac{\partial}{\partial x}} + \nabla S_0, t\right) + X\left(\overset{2}{x}, -ih \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}} + \nabla S_0, t\right)}{2} \right) \times$$

$$\times e_0\left(\overset{2}{x}, -ih \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}} + \nabla S_0\right) e_0\left(\overset{2}{x}, -ih \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}} + \nabla S_0\right) \chi_0(x)\, dx. \quad (1.22)$$

Для любого символа $f \in S^\infty(\mathbf{R}^n)$ справедливо разложение [10]:

$$f\left(-ih \frac{\partial}{\partial x} + \nabla S_0 \right) = f(\nabla S_0) + (-ih) \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_k}(\nabla S_0) \frac{\partial}{\partial x_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial p_j}(\nabla S_0) \frac{\partial^2 S_0}{\partial x_k \partial x_j} \right] + O(h^2). \qquad (1.23)$$

С помощью этой формулы разложим подынтегральное выражение в (1.22) по степеням параметра h. При этом ограничимся точностью $O(h^2)$. Член, содержащий множитель $(-ih)$, в этом разложении будет отсутствовать, в силу вещественности функций V, e_0, χ_0 и правой части (1.22). Таким образом, получим:

$$\int V(x' - x)\, |\psi(x, t, h)|^2\, dx = \int \chi_0(x)^2\, V(x' - X(x, \nabla S_0(x), t)) \times$$

$$\times e_0^2(x, \nabla S_0(x))\, dx + h^2 \cdot O(1). \qquad (1.23')$$

Остаток $O(1)$ здесь представляет собой гладкую финитную функцию, все производные которой ограничены при $h \to 0$. Функцию e_0^2 в (1.23′) можно заменить единицей, так как $e_0(x, \nabla S_0(x)) = 1$ при $x \in \operatorname{supp} \chi_0$.

Подставим теперь функцию ψ, заданную формулой (1.19), в уравнение (1.1). Для того чтобы эта функция удовлетворяла уравнению, достаточно, чтобы было выполнено равенство

$$-ih \frac{d\hat{T}(t)}{dt} + H(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t) \circ \hat{T}(t) = 0, \qquad (1.24)$$

где

$$H(x, p, t) \overset{\text{def}}{=} p^2 + \int V(x - y)\, |\psi(y, t, h)|^2\, dy.$$

По формуле композиции [10]:

$$[H(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)] \cdot \left[\left(e^{\frac{i}{h} S} \varphi \right)(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t) \right] = \left(e^{\frac{i}{h} S} Q \right)(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t),$$

где

$$Q(x, p, t) = e^{-\frac{i}{h} S(x,p,t)} H(\overset{2}{x}, p - ih \overset{1}{\partial}/\partial x, t)\, e^{\frac{i}{h} S(x,p,t)} \varphi(x, p, t) =$$

$$= H(\overset{2}{x}, p + \nabla S - ih \overset{1}{\partial}/\partial x, t)\, \varphi(x, p, t).$$

Поэтому уравнение (1.24) выполняется, если

$$-ih \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial t} \cdot \varphi + Q = 0. \qquad (1.25)$$

Функцию Q разложим в ряд по степеням h, используя (1.2.3):

$$Q = H(x, p + \nabla S, t) \varphi + (-ih) \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_k}(x, p + \nabla S, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} +$$

$$+ \frac{(-ih)}{2} \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_j}(x, p + \nabla S, t) \frac{\partial^2 S}{\partial x_k \partial x_j} \varphi + O(h^2).$$

Учитывая явный вид функции H, получим из (1.25) следующее уравнение:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + |p + \nabla S|^2 + \int \chi_0^2(y)\, V(x - X(y, \nabla S_0(y), t))\, dy \right) \varphi +$$

$$+(-ih)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+2(p+\nabla S)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\Delta S\cdot\varphi\right)+O(h^2)=0.$$

Функции S и φ, определенные формулами (1.21), таковы, что в левой части этого уравнения остается единственное ненулевое слагаемое $O(h^2)$ (подробное доказательство можно найти в [10]). Лемма доказана.

Замечание. Применяя метод стационарной фазы, легко доказать, что функция (1.19), построенная с помощью операторного метода, совпадает в рассматриваемом частном случае по $\mathrm{mod}\,O(h)$ с найденной ранее в теореме 1.1 асимптотикой. Преимущество представления (1.19) состоит в том, что оно почти без изменений переносится на более сложные задачи, в которых начальные данные не имеют такого простого вида, как в (1.1). Подробнее мы изучим этот вопрос в § 3.

В заключение этого параграфа рассмотрим пример асимптотического решения задачи на собственные значения для нелинейного уравнения квантовой механики.

Пример 1.1. Задача состоит в следующем: требуется найти число λ и функцию $\psi\in H_2^0(\mathbf{R})$ такие, что

$$\|\psi\|_{L^2}=1, \tag{1.26}$$

$$-\frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+\frac{1}{2}\psi(x)\int(x-y)^2\varkappa(y)|\psi(y)|^2\,dy=\lambda\psi(x). \tag{1.27}$$

Здесь $h>0$ — параметр, $x, y\in\mathbf{R}$, $\varkappa\in C(\mathbf{R})'$ — некоторая плотность меры на $\mathbf{R}$, причем $\varkappa(-x)=\varkappa(x)$, $\mathrm{Im}\,\varkappa=0$.

Уравнение (1.27) представляет собой уравнение самосогласованного квантового осциллятора. Мы решим это уравнение с точностью до $O(h^2)$, точнее мы найдем серию чисел $\lambda_m=\lambda_m(h)$, $m=0, 1, 2, \ldots$, и функций $\psi_m(x, h)$, для которых уравнения (1.26), (1.27) выполнены с точностью до $O(h^2)$.

Как и в линейном случае [10], решение будем искать в виде

$$\psi=\mathscr{K}_\Lambda^{1/h}\varphi,$$

где Λ — некоторое лагранжево многообразие (т. е гладкая кривая) на плоскости $\mathbf{R}^2$, $\mathscr{K}_\Lambda^{1/h}$ — канонический оператор на Λ, φ — гладкая функция на Λ. Многообразие Λ подберем так, чтобы оно было должным образом квантованно [10] и инвариантно относительно канонических преобразований $Z[t]$, порождаемых уравнением Власова — Гамильтона.

Пусть кривая Λ задается уравнениями $\Lambda=\{(x, p)\,|\,x=x(\alpha), p=p(\alpha)\}$, где α — параметр. В силу унитарности канонического оператора [10], мы имеем:

$$\int(x-y)^2\varkappa(y)\,|(\mathscr{K}_\Lambda^{1/h}\varphi)(y)|^2\,dy=$$
$$=\int(x-x(\alpha))^2\varkappa(x(\alpha))\,|\varphi(\alpha)|^2\,d\alpha+O(h^2)$$

и

$$\int|(\mathscr{K}_\Lambda^{1/h}\varphi)(y)|^2\,dy=\int|\varphi(\alpha)|^2\,d\alpha+O(h^2),$$

где $d\alpha$ — мера на Λ, участвующая в определении канонического оператора [10]. Подставляя эти выражения в (1.26) и (1.27), найдем $\varphi=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{mes}\,\Lambda}}$ и выпишем систему уравнений Гамильтона, отвечающую преобразованному уравнению (1.27):

$$\dot X=P,$$
$$\dot P=-\frac{1}{\mathrm{mes}\,\Lambda}\int_\Lambda(X-x(\alpha))\,\varkappa(x(\alpha))\,d\alpha.$$

Поскольку кривая $(X(t), P(t))$ должна совпадать с Λ, то естественно считать, что $\alpha=t$, $d\alpha=dt$ и $x(\alpha)=X(t)$, $p(\alpha)=P(t)$, где $X(t), P(t)$ — периодические функции с некоторым периодом T. Таким образом, многообразие Λ мы ищем в виде

$$\Lambda=\{(x, p)\,|\,x=X(t),\ p=P(t)\}, \tag{1.28}$$

где X, P — периодическое с периодом T решение системы уравнений Власова — Гамильтона

$$\dot X(t)=P(t),$$
$$\dot P(t)=-\frac{1}{T}\int_0^T(X(t)-X(\tau))\,\varkappa(X(\tau))\,d\tau.$$

Отсюда получаем уравнение для функции X:

$$\ddot X+\omega^2X=\gamma,\quad X(t+T)=X(t), \tag{1.29}$$

где $\omega=\omega[X]\stackrel{\mathrm{def}}{=}\left(\frac{1}{T}\int_0^T\varkappa(X(\tau))\,d\tau\right)^{1/2}$,

$$\gamma=\gamma[X]\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{T}\int_0^T X(\tau)\,\varkappa(X(\tau))\,d\tau. \tag{1.30}$$

Функция Гамильтона, отвечающая дифференциальному уравнению (1.29), имеет вид

$$H(x, p)=\frac{p^2}{2}+\frac{1}{2T}\int_0^T(x-X(\tau))^2\varkappa(X(\tau))\,d\tau.$$

В силу (1.27), мы должны потребовать, чтобы $H|_\Lambda=\lambda$, т. е. $H(X(t), P(t))=\lambda$. Достаточно этого потребовать при $t=0$:

$$\frac{1}{2}(\dot X(0))^2+\frac{1}{2T}\int_0^T(X(0)-X(\tau))^2\varkappa(X(\tau))\,d\tau=\lambda. \tag{1.31}$$

Если уравнения (1.29) и (1.31) выполнены, многообразие Λ задано формулой (1.28) и на нем выполнены условия квантования (см. ниже), то функция

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{T}}\left(\mathscr{K}_{\Lambda}^{1/h}1\right)(x)$$

удовлетворяет уравнениям (1.26), (1.27) с точностью до $O(h^2)$ т. е. является искомой асимптотикой собственной функции самосогласованного осциллятора.

Из (1.29) мы имеем:

$$T=\frac{2\pi}{\omega},$$

$$X(t)=r\cos(\omega t)+\frac{\gamma}{\omega^2},$$

где $r>0$ — некоторая константа. Подставим эти выражения в формулы (1.30). Получим

$$\omega^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varkappa\left(r\cos t+\frac{\gamma}{\omega^2}\right)dt,$$

$$0=\int_0^{2\pi}\cos t\cdot\varkappa\left(r\cos t+\frac{\gamma}{\omega^2}\right)dt.$$

Поскольку $\varkappa$ по условию является четной функцией, то последнее равенство будет выполнено, если положить

$$\gamma=0.$$

Остается условие

$$\omega^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varkappa(r\cos t)\,dt \tag{1.32}$$

и условие (1.31), которое теперь приобретает следующий вид:

$$\omega^2+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\varkappa(r\cos t)\,dt=\frac{2\lambda}{r^2}. \tag{1.33}$$

Помимо этих двух уравнений, для определения неизвестных величин ω, r, λ у нас имеется еще условие квантования, которому должно удовлетворять многообразие Λ для того, чтобы на нем существовал канонический оператор $\mathscr{K}_{\Lambda}^{1/h}$. Это условие выглядит следующим образом:

$$\int_{\Lambda}p\,dx=(2m+\nu)\pi h,$$

где $m=0, 1, 2,\ldots$, ν — индекс (в смысле [10]) цикла, образованного многообразием Λ. В нашем случае Λ есть эллипс

$$x=X(t)=r\cos(\omega t),\quad p=P(t)=-r\omega\sin(\omega t)$$

и потому $\nu=1$. Следовательно, условие квантования выглядит так:

$$r^2\omega^2=(2m+1)h. \tag{1.34}$$

Из уравнений (1.32), (1.33), (1.34) найдем:

$$\lambda\equiv\lambda_m=\left(m+\frac{1}{2}\right)h+g\left(f^{-1}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)h\right)\right), \tag{1.35}$$

где

$$g(r)=\frac{r^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t)\varkappa(r\cos t)\,dt,$$

$$f(r)=\frac{r^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\varkappa(r\cos t)\,dt,$$

и предполагается, что отображение $r\to f(r)$ имеет обратное f^{-1} при $r>0$.

Формула (1.35) дает серию асимптотических собственных значений уравнения (1.27), а соответствующие асимптотические собственные функции имеют вид

$$\psi(x)=\psi_m(x, h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathscr{K}_{\Lambda(m,h)}^{1/h}1\right)(x), \tag{1.36}$$

где $\Lambda(m, h)$, $m=0, 1, 2,\ldots$, — серия эллипсов в плоскости (x, p), заданных уравнениями

$$\frac{x^2}{f^{-1}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)h\right)^2}+\frac{p^2}{2\left(m+\frac{1}{2}\right)h}=1.$$

Канонический оператор в формуле (1.36) строится по мере dt, где t пробегает $[0, 2\pi]$ и параметризует эллипс $\Lambda(m, h)$ по формуле

$$x=f^{-1}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)h\right)\cdot\cos t.$$

§ 2. АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ

Мы построили в предыдущем параграфе асимптотическое решение унитарно-нелинейного уравнения (1.1) с точностью до $O(h^2)$. Построение тем же методом асимптотики с точностью до $O(h^N)$, где $N>2$ наталкивается на трудности при сшивании локальных решений в окрестностях фокальных точек. Мы укажем здесь путь, позволяющий обойти эти трудности и легко построить асимптотическое решение унитарно-нелинейного уравнения с любой точностью $O(h^N)$.

Постановка задачи такова. Рассматривается задача Коши для UN-оператора:

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t}+H[\rho_\psi,\ \mathrm{id}]\left(\overset{2}{x},\ -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)\psi=0,$$
$$\psi|_{t=0}=\psi_{0,h}. \tag{2.1}$$

(Обозначения см. в § 2, гл. II; $x\in\mathbb{R}^n$). Предполагается, что начальная функция $\psi_{0,h}$ такова, что отвечающая ей функция плотности $\rho_{\psi_{0,h}}$ разлагается при $h\to0$ в асимптотический ряд по степеням h, коэффициенты которого $F_0^{(j)}$ суть обобщенные функции на $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\rho_{\psi_{0,h}}=F_0+(-ih)F_0^{(1)}+(-ih)^2F_0^{(2)}+\ldots. \tag{2.2}$$

Требуется построить гладкую функцию ψ_N, отличающуюся от решений ψ задачи (2.1) на $O(h^N)$. Схема построения ψ_N такова:

(I). Рассматриваем задачу Коши для функции плотности ρ_ψ, отвечающей решению ψ. Эта задача, как было показано в [9] (§ 1, гл. II), имеет вид:

$$\frac{\partial\rho_\psi}{\partial t}+\frac{i}{h}\left\{H[\rho_\psi,\ \mathrm{id}]\left(\overset{2}{x},\ p-ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)-H[\rho_\psi,\ \mathrm{id}]\left(x-ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial p}},\ \overset{2}{p}\right)\right\}\rho_\psi=0,$$
$$\rho_\psi|_{t=0}=\rho_{\psi_{0,h}}. \tag{2.3}$$

При $h=0$ задача (2.3) переходит в задачу Коши для уравнения Власова — Лиувилля:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\left\langle J\frac{\partial H[F,\ \mathrm{id}]}{\partial z},\ \frac{\partial F}{\partial z}\right\rangle=0, \tag{2.4}$$
$$F|_{t=0}=F_0,$$

где F_0 — первый коэффициент в разложении (2.2).

Естественно искать решение задачи (2.3) в виде асимптотического ряда по степеням h:

$$\rho_\psi=F+(-ih)F^{(1)}+(-ih)^2F^{(2)}+\ldots. \tag{2.5}$$

Уравнения, которые получатся для коэффициентов $F^{(j)}$, легко решаются.

(II). После того, как функция ρ_ψ вычислена с точностью до $O(h^N)$: $\rho_\psi\underset{\mathrm{def}}{=}\rho^{(N)}+O(h^N)$, можно построить символ $H_N=H[\rho^{(N)},\ \mathrm{id}]$, который будет отличаться от линейного символа UN-оператора задачи (2.1) в состоянии ψ на величину порядка $O(h^N)$. Таким образом, с точностью до $O(h^N)$ задача (2.1) заменится на следующую линейную задачу:

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t}+H_N\left(\overset{2}{x},\ -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},\ t\right)\psi=0,\quad \psi|_{t=0}=\psi_{0,h}. \tag{2.6}$$

Решение задачи (2.6) строится методом канонического оператора с любой точностью $O(h^N)$. Полученная в результате

функция ψ_N и является искомой асимптотикой решения задачи (2.1). Доказательство этого утверждения будет приведено в данной главе.

Первый параграф мы начнем с примера явного построения асимптотики вида (2.5) для функции плотности нелинейного уравнения квантовой механики.

Пример 2.1. Пусть ψ — решение задачи Коши (1.1) и

$$\rho_\psi(x,\ p,\ t)=\psi(x,\ t)\overline{\tilde{\psi}(p,\ t)e^{-\frac{i}{h}xp}}(2\pi h)^{-n/2}$$

— соответствующая функция плотности. Для того, чтобы вычислить асимптотическое разложение ρ_ψ при $h\to0$ в любой момент времени, получим вначале такое разложение в момент $t=0$. В силу [9] (лемма 1.3 гл. II), мы имеем:

$$(f,\ \rho_{\psi_{0,h}})=(\hat{f}\psi_{0,h},\ \psi_{0,h}), \tag{2.7}$$

где

$$\hat{f}=f(\overset{2}{x},\ \overset{1}{p}),\qquad f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$$

и начальная функция $\psi_{0,h}$ имеет вид $\psi_{0,h}=e^{\frac{i}{h}S_0}\chi_0$. Воспользуемся следующей формулой коммутации псевдодифференциального оператора с экспонентой [10]

$$f(\overset{2}{x},\ \overset{1}{p})e^{\frac{i}{h}S_0}\chi_0=e^{\frac{i}{h}S_0}\left(\sum_{k=0}^{N-1}(-ih)^kL_k\left(\overset{2}{x},\ \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)\chi_0+(-ih)^N\hat{Q}_N\chi_0\right), \tag{2.8}$$

где

$$L_k(x,\ \xi)=\sum_{|\alpha|=k}^{2k}\sum_{|\beta|=0}^{k}\frac{\partial^\alpha f}{\partial p^\alpha}\left(x,\ \frac{\partial S_0}{\partial x}(x)\right)\Phi_{\alpha,\beta}(x)\xi^\beta,$$

$\Phi_{\alpha,\beta}$ — вещественные полиномы от производных функции S_0, $\xi^\beta=\xi_1^{\beta_1}:\ldots:\xi_k^{\beta_k}$; остаток $\hat{Q}_N$ имеет оценку

$$(\chi_0,\ \hat{Q}_N\chi_0)_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leqslant\mathrm{const}.$$

Из формул (2.7), (2.8) мы получаем

$$(f,\ \rho_{\psi_{0,h}})=\sum_{k=0}^{N-1}(ih)^k\iint F_0^{(k)}(x,\ p)f(x,\ p)\,dx\,dp+(ih)^N(\chi_0,\ \hat{Q}_N\chi_0),$$

где обобщенные функции $F_0^{(k)}$ заданы равенствами:

$$F_0^{(k)}(x,\ p)=$$
$$=\sum_{|\alpha|=k}^{2k}\sum_{|\beta|=0}^{k}(-1)^{|\alpha|+k}\Phi_{\alpha,\beta}(x)\chi_0(x)\frac{\partial^\beta\chi_0(x)}{\partial x^\beta}\delta^{(\alpha)}\left(p-\frac{\partial S_0}{\partial x}(x)\right). \tag{2.9}$$

Таким образом, вычислены все коэффициенты разложения (2.2). Теперь вычислим разложение функции ρ_ψ при любом t. Уравнение (2.3) для ρ_ψ в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial\rho_\psi}{\partial t}+2p\frac{\partial\rho_\psi}{\partial x}-ih\Delta_x\rho_\psi+$$
$$+\left(\iint\frac{i}{h}\left[V(x-y)-V\left(x-y-ih\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\rho_\psi(y,\xi,t)\,dy\,d\xi\right)\rho_\psi=0.$$

Подставим сюда разложение (2.5) и получим уравнение для коэффициентов F, $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, ... Эти уравнения имеют следующий вид: при $k=0$

$$\frac{\partial F}{\partial t}+2p\frac{\partial F}{\partial x}-\left(\iint\frac{\partial V}{\partial x}(x-y)F(y,\xi,t)\,dy\,d\xi\right)\frac{\partial F}{\partial p}=0 \qquad (2.10)$$

и при $k\geqslant 1$

$$\frac{\partial F^{(k)}}{\partial t}+2p\frac{\partial F^{(k)}}{\partial x}-\left(\iint\frac{\partial V}{\partial x}(x-y)F(y,\xi,t)\,dy\,d\xi\right)\frac{\partial F^{(k)}}{\partial p}-$$
$$-\left(\iint\frac{\partial V}{\partial x}(x-y)F^{(k)}(y,\xi,t)\,dy\,d\xi\right)\frac{\partial F}{\partial p}=M_k. \qquad (2.11)$$

Здесь M_k — функция, зависящая от коэффициентов F и $F^{(j)}$ с номерами $j<k$. Явный вид M_k следующий:

$$M_k(x,p,t)=$$
$$=\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{|\alpha|=k+1-m}\frac{1}{\alpha!}\left(\iint\frac{\partial^\alpha V(x-y)}{\partial x^\alpha}F^{(m)}(y,\xi,t)\,dy\,d\xi\right)\frac{\partial^\alpha F^{(0)}(x,p,t)}{\partial p^\alpha}+$$
$$+\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=0}^{k-l}\sum_{|\alpha|=k+1-l-m}\frac{1}{\alpha!}\left(\iint\frac{\partial^\alpha V(x-y)}{\partial x^\alpha}F^{(m)}(y,\xi,t)\,dy\,d\xi\right)\frac{\partial^\alpha F^{(l)}(x,p,t)}{\partial p^\alpha}-$$
$$-\Delta_x F^{(k-1)}(x,p,t). \qquad (2.12)$$

Здесь $F^{(m)}\equiv F$ при $m=0$. Начальные условия для функций $F^{(k)}$ получаем из (2.9): $F^{(k)}|_{t=0}=F_0^{(k)}$, $k=0, 1, 2, \ldots$. Цепочка уравнений (2.10), (2.11) с такими начальными условиями решается следующим образом.

Для уравнения Власова (2.10) с начальным условием $F|_{t=0}=$ $=(\chi_0(x))^2\delta\left(p-\frac{\partial S_0}{\partial x}(x)\right)$ выписываем уравнения характеристик, т. е. уравнения Власова—Гамильтона (1.15):

$$\dot X=2P, \qquad X|_{t=0}=x,$$
$$\dot P=-\int\frac{\partial V}{\partial x}\left(X-X\left(y,\frac{\partial S_0(y)}{\partial y},t\right)\right)\chi_0^2(y)\,dy, \quad P|_{t=0}=p.$$

Пусть $Z(x,p,t)=(X(x,p,t),\ P(x,p,t))$ — решение этой задачи. Преобразование $Z[t]:(x,p)\to Z(x,p,t)$, как было показано в § 2 гл. I, является каноническим. Решив уравнения

$$x=X(x_0,p_0,t), \quad p=P(x_0,p_0,t)$$

относительно x_0, p_0, мы вычислим обратное преобразование $Z[t]^{-1}$: $(x,p)\to(x_0(x,p,t),\ p_0(x,p,t))$. Используя теорему 2.2 гл. I, получаем решение $F(x,p,t)$ уравнения Власова (2.10):

$$F(x,p,t)=$$
$$=\chi_0^2(x_0(x,p,t))\,\delta\left(p_0(x,p,t)-\frac{\partial S_0}{\partial x}(x_0(x,p,t))\right). \qquad (2.13)$$

Далее, последовательно решаем цепочку уравнений (2.11) при $k=1, 2, \ldots$. Положим

$$F^{(k)}(x,p,t)=f^{(k)}(x_0(x,p,t),\ p_0(x,p,t),\ t)$$

и получим для функций $f^{(k)}$ уравнение типа Вольтерра:

$$f^{(k)}(x,p,t)=\int_0^t d\tau\frac{\partial F}{\partial p}(X(x,p,\tau),P(x,p,\tau),\tau)\times$$
$$\times\iint\frac{\partial V}{\partial x}(X(x,p,\tau)-X(y,\xi,\tau))f^{(k)}(y,\xi,\tau)\,dy\,d\xi+$$
$$+M_k'(x,p,t), \qquad (2.14)$$

где $k=1,2\ldots,2N$,

$$M_k'(x,p,t)=\int_0^t M_k(X(x,p,\tau),P(x,p,\tau),\tau)\,d\tau+F_0^{(k)}(x,p).$$

Решения $f^{(k)}$ цепочки уравнений (2.14) являются обобщенными функциями. Существование таких решений в пространстве обобщенных функций $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ будет доказано в теореме 2.1. Сейчас мы покажем, как в реальных задачах решаются уравнения вида (2.14).

Заметим, что начальные условия $F_0^{(k)}$ имеют, в силу (2.9), следующий вид:

$$F_0^{(k)}(x,p)=\sum_{|\alpha|=k}^{2k}\delta^{(\alpha)}\left(p-\frac{\partial S_0(x)}{\partial x}\right)U_{0\alpha}(x),$$

где $U_{0\alpha}\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Будем искать $f^{(k)}$ в виде суммы

$$f^{(k)}(x,p,t)=\sum_{|\alpha|=0}^{\nu_k}\delta^{(\alpha)}\left(p-\frac{\partial S_0(x)}{\partial x}\right)U_\alpha(x,t), \quad \nu_k=(k+1)^2. \quad (2.15)$$

Найдем функции U_α.

Подставив выражение (2.15) для $f^{(k)}$ в формулу (2.12), убедимся, что функции M_k имеют вид такой же суммы:

$$M_k(X(x,p,t),\ P(x,p,t),\ t)=\sum_{|\alpha|=0}^{\nu_k}\delta^{(\alpha)}\left(p-\frac{\partial S_0(x)}{\partial x}\right)m_\alpha(x,t).$$

Здесь функции m_α известны, если известны функции $f^{(j)}$ при $j<k$. Подставим выписанные выражения для $f^{(k)}$ и M_k

в уравнение (2.14) и приравняем коэффициенты, стоящие слева и справа при одинаковых производных от δ-функции. Получим систему интегральных уравнений Вольтерра следующего вида:

$$U_\alpha(x, t)=\int_0^t d\tau\int\sum_{|\beta|=0}^{\nu k} A_{\alpha,\beta}(x, x', \tau)U_\beta(x', \tau)\,dx'+$$
$$+\int_0^t m_\alpha(x, \tau)\,d\tau+U_{0\alpha}(x), \qquad (2.16)$$

где $|\alpha|=0, 1, \ldots, \nu_k$, функции $A_{\alpha,\beta}$ — гладкие вещественные и явно вычисляемые из (2.14); кроме того, $A_{\alpha,\beta}\in S(\mathbb{R}^{2n}_{x,x'})\otimes C^\infty(\mathbb{R}_t)$.

Функции U_α стандартным образом вычисляются из (2.16) итерациями; при этом $U_\alpha\in S(\mathbb{R}^n_x)\otimes C^\infty(\mathbb{R}_t)$. Таким образом, мы решаем уравнения (2.14) последовательно: при $k=1$, при $k=2$, ..., при $k=2N$ и решение $f^{(k)}$ имеет вид (2.15).

Таким образом, будут вычислены все коэффициенты разложения (2.5) и нелинейное уравнение Шрёдингера (1.1) с точностью до $O(h^N)$ приобретает следующий линейный вид:

$$-ih\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t}-h^2\Delta\psi(x, t)+\left(\int V\left(x-X\left(y, \frac{\partial S_0}{\partial y}(y), t\right)\right)\chi_0^2(y)\,dy\right)\times$$
$$\times\psi(x, t)+\sum_{k=1}^N(-ih)^k\int\int V(x-X(y, \xi, t))f^{(k)}(y, \xi, t)\,dy\,d\xi\,\psi(x, t)=0.$$

Теперь мы вернемся к общим унитарно-нелинейным операторам и установим, прежде всего, что функция плотности ρ_ψ, удовлетворяющая задаче (2.3), в пределе при $h\to 0$ переходит в решение уравнения Власова — Лиувилля.

Пусть задано отображение

$$H: S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n})\times C^\infty(\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n})\times[0, 1]\to S^\infty(\mathbb{R}^{2n})$$

такое, что при $h=0$ отображение $H_0:(f, v)\to H[f, v, h]|_{h=0}$ из $S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n})\times C^\infty(\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n})$ в $S^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ является отображением Гамильтона. Кроме того, предположим, что отображение

$$(f, h)\to H[f, \mathrm{id}, h]$$

из $S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n})\times[0, 1]$ в $S^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ является гладким и для любой функции f, имеющей вид функции плотности $f=\rho_\varphi$, где $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$, оператор $H[\rho_\varphi, \mathrm{id}, h](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$ самосопряжен в $L^2(\mathbb{R}^n)$ при любом $h\in[0, 1]$.

Определим UN-оператор

$$\mathcal{H}[\psi]=H[\rho_\psi, \mathrm{id}, h]\left(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)\psi$$

и рассмотрим задачу Коши

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t}+\mathcal{H}[\psi]=0, \quad \psi|_{t=0}=\psi_{0,h}, \qquad (2.17)$$

где $\psi_{0,h}\in S(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.1. Пусть выполнены сформулированные выше условия на отображение H и пусть существует вещественная функция $F_0\in S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ такая, что $\rho_{\psi_{0,h}}\to F_0$ в $S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ при $h\to 0$, а пара (F_0, H_0) удовлетворяет условиям (A), (B) § 2 гл. I. Пусть, кроме того, решение $\psi(t)$ задачи (2.17) существует в $S(\mathbb{R}^n)$ при $t\in[0, T]$ и

$$\exists s\forall l \sup_{t\in[0,T]}\sup_{h\in[0,1]}\|\rho_{\psi(t)}\|_{H^{-l}_{-s}(\mathbb{R}^n)}<\infty.$$

Тогда функция плотности $\rho_{\psi(t)}$ сходится при $h\to 0$ в пространстве $S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ к решению $F(t)$ задачи Коши для уравнения Власова — Лиувилля

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\left\langle J\frac{\partial H_0[F, \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial z}\right\rangle=0, \quad F|_{t=0}=F_0, \qquad (2.18)$$

равномерно по $t\in[0, T]$.

Как было показано в [11], условиям этой теоремы удовлетворяет унитарно-нелинейный оператор уравнения квантовой механики ([9], III, § 1). Таким образом, получаем

Следствие 2.1. Пусть вещественные функции V_0, V ограничены на $\mathbb{R}^n$ со всеми производными, а функция $\psi_{0,h}\in S(\mathbb{R}^n)$ такова, что $\rho_{\psi_{0,h}}\to F_0$ при $h\to 0$ в пространстве $S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n})$, причем $\operatorname{Im}F_0=0$. Тогда функция плотности $\rho_{\psi(t)}$, отвечающая решению задачи Коши

$$-ih\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t}-h^2\Delta\psi(x, t)+V_0(x)\psi(x, t)+$$
$$+\psi(x, t)\int V(x-y)|\psi(y, t)|^2dy=0, \quad \psi(x, 0)=\psi_{0,h}(x), \quad (2.19)$$

сходится при $h\to 0$ в пространстве $S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ к решению задачи Коши для уравнения Власова

$$\frac{\partial F}{\partial t}+2p\frac{\partial F}{\partial x}-\left(\frac{\partial V_0(x)}{\partial x}+\int\int\frac{\partial V(x-y)}{\partial x}F(y, \xi, t)\,dy\,d\xi\right)\frac{\partial F}{\partial p}=0,$$
$$F|_{t=0}=F_0,$$

равномерно на любом отрезке $t\in[0, T]$.

Как мы видели выше в примере 2.1, если $\psi_{0,h}=e^{\frac{i}{h}S_0(x)}\chi_0(x)$, то $\rho_{\psi_{0,h}}\to F_0$ при $h\to 0$, где $F_0(x, p)=|\chi_0(x)|^2\delta\left(p-\frac{\partial S_0(x)}{\partial x}\right)$. Следовательно, функция плотности $\rho_{\psi(t)}$, отвечающая решению $\psi(t)$ задачи Коши (1.1), имеет пределом при $h\to 0$ обобщенную функцию

$$F(x, p, t)=|\chi_0(x_0(x, p, t))|^2\delta\left(p_0(x, p, t)-\frac{\partial S_0}{\partial x}(x_0(x, p, t))\right).$$

Здесь $x_0(x, p, t)$ и $p_0(x, p, t)$ — решения уравнений

$$x = X(x_0, p_0, t), \quad p = P(x_0, p_0, t),$$

где $P = \frac{1}{2}\frac{\partial X}{\partial t}$, а функция X удовлетворяет задаче (1.20). В частности, мы имеем

$$\int V(x-y)\,|\psi(y, t)|^2 dy \xrightarrow[h\to 0]{} \int V(x - X^0(y, t))\,|\chi_0(y)|^2 dy,$$

где X^0 — решение задачи (1.15).

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.1.

Доказательство теоремы 2.1. Функция плотности $\rho_{\psi(t)}(x, p) \overset{\text{def}}{=} \rho(x, p, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{i}{h}\Big\{H[\rho, \text{id}, h](\overset{2}{x}, p - ih\overset{1}{\partial}/\partial x) -$$

$$-\overline{H[\rho, \text{id}, h]}(x - ih\overset{2}{\partial}/\partial p, \overset{1}{p})\Big\}\rho = 0. \tag{2.20}$$

В силу условий, наложенных на отображение H, оператор в фигурных скобках можно переписать следующим образом:

$$(-ih)\,\Big\langle J\frac{\partial H_0[\rho, \text{id}]}{\partial z}(z), \frac{\partial}{\partial z}\Big\rangle + (-ih)^2\hat{H}_1[\rho, h],$$

где $z = (x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\hat{H}_1[\rho, h] \overset{\text{def}}{=} H_1[\rho, h]\Big(\overset{2}{z}, -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial z}\Big),$$

$$H_1 : S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}) \times [0, 1] \to S^\infty(\mathbb{R}^{4n}) -$$

гладкое отображение. Следовательно, уравнение для функции ρ имеет вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \Big\langle J\frac{\partial H_0[\rho, \text{id}]}{\partial z}(z), \frac{\partial\rho}{\partial z}\Big\rangle +$$

$$+ (-ih)\hat{H}_1[\rho, h]\rho = 0. \tag{2.21}$$

Преобразуем теперь функцию $H_0[\rho, \text{id}](z)$; разложим ее по формуле Тейлора в точке $\rho = F$, где $F = F(z, t)$ — решение задачи (2.18). Получим

$$H_0[\rho, \text{id}](z) = H_0[F, \text{id}](z) + (K_1[\rho](\rho - F))(z), \tag{2.22}$$

где

$$K_1[\rho] = \int_0^1 DH_0[\tau\rho + (1-\tau)F, \text{id}]\,d\tau,$$

DH_0 — дифференциал отображения $\rho \to H_0[\rho, \text{id}]$. Из формул (2.18), (2.21), (2.22) следует уравнение для разности $\rho - F$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho - F) + \Big\langle J\frac{\partial H_0[F, \text{id}]}{\partial z}, \frac{\partial(\rho - F)}{\partial z}\Big\rangle +$$

$$+ K[\rho](\rho - F) + (-ih)\hat{H}_1[\rho, h]\rho = 0, \tag{2.23}$$

где оператор $K[\rho]$ действует по следующей формуле:

$$K[\rho]u \overset{\text{def}}{=} \Big\langle J\frac{\partial}{\partial z}(K_1[\rho]u)(z), \frac{\partial\rho}{\partial z}\Big\rangle.$$

Пусть $Z[t]$ — решение уравнения Власова — Гамильтона

$$\dot{Z}[t] = J\frac{\partial H_0}{\partial z}[F_0, Z[t]] \circ Z[t]$$

с начальным условием $Z[0] = \text{id}$. В силу теоремы 2.1 гл. I, из условий доказываемой теоремы следует, что решение $Z[t] \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n})$ существует при всех $t \in \mathbb{R}$ и является каноническим преобразованием фазового пространства $\mathbb{R}^{2n}$:

$$Z[t] : w \to Z(w, t).$$

Обозначим

$$u(w, t) = (\rho - F)(Z(w, t), t).$$

В силу (2.23), уравнение для функции u выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{K}[\rho, t]u + (-ih)\tilde{\Omega}[\rho, t, h] = 0, \tag{2.24}$$

где

$$\tilde{K}[\rho, t] = Z[t]^* \circ K[\rho] \circ Z[t]^{-1*},$$

$$\tilde{\Omega}[\rho, t, h] = Z[t]^* \hat{H}_1[\rho, h]\rho.$$

Интегрируем (2.24) по dt и оценим норму $u(t)$ в шкале $H_s^l(\mathbb{R}^{2n})$. В результате получаем следующее утверждение: если ограничены нормы

$$\sup_{t\in[0, T]}\sup_{h\in[0, 1]} \|\tilde{K}[\rho, t]\|_{H_{-s}^{-l} \to H_{-s}^{-l}} \leqslant \tilde{k}_{l, s, T} < \infty,$$

$$\sup_{t\in[0, T]}\sup_{h\in[0, 1]} \|\tilde{\Omega}[\rho, t, h]\|_{H_{-s}^{-l}} \leqslant \tilde{\omega}_{l, s, T} < \infty, \tag{2.25}$$

где $l, s > 0$, то имеет место оценка

$$\sup_{t\in[0, T]} \|u(t)\|_{H_{-s}^{-l}} \leqslant \tilde{c}_{l, s, T}\Big(\sup_{t\in[0, T]} \|u(0)\|_{H_{-s}^{-l}} + h\Big),$$

где константа $\tilde{c}_{l, s, T}$ зависит только от чисел $\tilde{k}_{l, s, T}$, $\tilde{\omega}_{l, s, T}$, стоящих в оценках (2.25). Поскольку $Z[t] \in C^{(k)}(\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n})$ при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ (теорема 2.1 гл. I), то справедливы оценки

$$\|\rho(t) - F(t)\|_{H_{-s}^{-l}} \leqslant a_{l, s, t}\|u(t)\|_{H_{-s}^{-l}},$$

$$\|\tilde{\Omega}[\rho, t, h]\|_{H_{-s}^{-l}} \leqslant a_{l, s, t}\|\hat{H}_1[\rho]\rho\|_{H_{-s}^{-l}},$$

$$\|\tilde{K}[\rho, t]\|_{H_{-s}^{-l} \to H_{-s}^{-l}} \leqslant a_{l, s, t}\|K[\rho]\|_{H_{-s}^{-l} \to H_{-s}^{-l}},$$

где $a_{l, s, t}$ непрерывно зависит от $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, если мы установим оценки

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{h\in[0,1]}\|K[\rho]\|_{H_{-s}^{-l}\to H_{-s}^{-l}}\leqslant k_{l,s,T}<\infty,$$
$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{h\in[0,1]}\|\hat{H}_1[\rho,\ h]\rho\|_{H_{-s}^{-l}}\leqslant\omega_{l,s,T}<\infty, \tag{2.26}$$

то из них будет следовать, что

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\rho(t)-F(t)\|_{H_{-s}^{-l}}\leqslant c_{l,s,T}(h+\sup_{t\in[0,T]}\|\rho(0)-F(0)\|_{H_{-s}^{-l}}), \tag{2.27}$$

где константа $c_{l,s,T}$ зависит только от чисел $k_{l,s,T}$ и $\omega_{l,s,T}$. Мы сейчас докажем, что $\exists S_0\geqslant 0$ $\forall S\geqslant S_0\exists l_0\forall l\geqslant l_0$ выполнены оценки (2.26). Из этого будет следовать утверждение теоремы. Действительно, по условию теоремы

$$\rho(0)\equiv\rho_{\psi_{0},h}\to F_0\equiv F(0),\quad h\to 0,$$

т. е. $\exists S_1\forall l$

$$\|\rho(0)-F(0)\|_{H_{-s_1}^{-l}}\to 0,\quad h\to 0.$$

Если доказано упомянутое выше утверждение об оценках (2.26), то мы можем выбрать $s=\max\{s_0,s_1\}$ и получим из (2.27):

$$\lim_{h\to 0}\sup_{t\in[0,T]}\|\rho(t)-F(t)\|_{H_{-s}^{-l}}=0$$

для любого l, что и требовалось доказать.

Осталось получить оценки (2.26). По предположению,

$$\exists s_2\forall l\quad\sup_t\sup_h\|\rho(t)\|_{H_{-s_2}^{-l}}<\infty. \tag{2.28}$$

Кроме того, отображение $H_0[\rho,\mathrm{id}]$ — гладкое и, в частности, его дифференциал DH_0 ограничен. Множество функций

$$\{\tau\rho(t)+(1-\tau)F(t)|\tau\in[0,1],\quad t\in[0,T],\quad h\in[0,1]\}$$

ограничено в $S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n})$; следовательно, его образ при отображении DH_0 ограничен. Поэтому $\forall s\exists m\forall k\exists l_0\forall l\geqslant l_0$:

$$\sup_\tau\sup_t\sup_h\|DH_0[\tau\rho(t)+(1-\tau)F(t),\ \mathrm{id}]\|_{H_{-s}^{-l}\to S_m^{k+1}}<\infty. \tag{2.29}$$

Выберем здесь $k=s+1$ $s_0\overset{\mathrm{def}}{=}s_2+1$ и пусть $s\geqslant s_0$.

Имеем следующую оценку, вытекающую из определения оператора $K[\rho]$:

$$\|K[\rho]\|_{H_{-s}^{-l}\to H_{-s}^{-l}}\leqslant\|\rho\|_{H_{-s_2}^{-l-m}}\times$$
$$\times\int_0^1\|DH_0[\tau\rho+(1-\tau)F,\ \mathrm{id}]\|_{H_{-s}^{-l}\to S_m^{s+1}}\,d\tau.$$

Отсюда и из (2.28), (2.29) для любого $l\geqslant l_0$ получим:

$$\sup_t\sup_h\|K[\rho]\|_{H_{-s}^{-l}\to H_{-s}^{-l}}<\infty.$$

Этим доказана первая оценка (2.26). Аналогично: $\exists s'\forall l'\exists l$:

$$\|\hat{H}_1[\rho,\ h]\rho\|_{H_{-s'}^{-l'}}\leqslant\|\rho\|_{H_{-s_2}^{-l}}\cdot\|\hat{H}_1[\rho,\ h]\|_{H_{-s'}^{-l'}\to H_{-s_2}^{-l}},$$

причем

$$\sup_t\sup_h\|\hat{H}_1[\rho,\ h]\|_{H_{-s'}^{-l'}\to H_{-s_2}^{-l}}<\infty.$$

Этим доказана вторая оценка (2.26). Теорема доказана.

Итак, мы установили, что решение квантового уравнения для функции плотности сходится при $h\to 0$ к решению классического уравнения Власова—Лиувилля. Этот результат можно уточнить. Если предположить, что начальная функция плотности $\rho_{\psi_{0},h}$ разлагается в асимптотический ряд (2.2), то удается доказать, что и в любой момент t функция плотности $\rho_{\psi(t)}$ разлагается в асимптотический ряд (2.5), первый коэффициент которого является решением классического уравнения Власова—Лиувилля, а все последующие коэффициенты определяются из некоторой рекуррентной цепочки уравнений типа Вольтерра. Эта цепочка уравнений была нами вписана в примере 2.1 для случая унитарно-нелинейного оператора квантовой механики. Теперь мы сделаем то же самое в общем случае.

Разложим оператор $\hat{H}_1[\rho,\ h]=H_1[\rho,\ h]\left(\overset{2}{z},\ -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial z}}\right)$, определенный в доказательстве теоремы 2.1, в ряд по степеням $(-ih)$:

$$\hat{H}_1[\rho,\ h]=\sum_{k=1}^{2N}(-ih)^{k-1}\hat{f}_k[\rho]+(-ih)^{2N}\hat{H}_N[\rho,h], \tag{2.30}$$

где $N\geqslant 1$ — целое,

$$\hat{H}_N[\rho,\ h]=H_N[\rho,\ h]\left(\overset{2}{z},\ -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial z}}\right),$$

$H_N: S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n})\times[0,1]\to S^\infty(\mathbb{R}^{4n})$ — гладкое отображение, а операторы $\hat{f}_k[\rho]$ могут быть легко вычислены явно из (2.20):

$$\hat{f}_k[\rho]=\sum_{l=0}^{k+1}\sum_{|\alpha|=l+1}(i)^{k-l+1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^{k-l+1}\left(\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^\alpha H[\rho,\ \mathrm{id},\ h](\overset{2}{x},\ p)\left(\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)^\alpha-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\overline{H[\rho,\ \mathrm{id},\ h]}(x,\ \overset{1}{p})\left(\overset{2}{\frac{\partial}{\partial p}}\right)^\alpha\right)\right]_{h=0}. \tag{2.31}$$

Подставим разложение (2.30) в (2.20). Получим:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left\langle J\,\frac{\partial H_0[\rho,\ \mathrm{id}]}{\partial z},\ \frac{\partial\rho}{\partial z}\right\rangle+\sum_{k=1}^{2N}(-ih)^k\hat{f}_k[\rho]\rho+$$
$$+(-ih)^{2N+1}\hat{H}_N[\rho,\ h]\rho=0.$$

Подставим сюда разложение (2.5) для функции ρ, разложим все функции в ряды Тейлора по степеням h, соберем члены при одинаковых степенях $(-ih)^j$ и приравняем их к нулю. Получим рекуррентную цепочку уравнений:

$$\frac{\partial F^{(j)}}{\partial t}+\langle J\frac{\partial H_0[F, \mathrm{id}]}{\partial z}, \frac{\partial F^{(j)}}{\partial z}\rangle+K[F](F^{(j)})+$$
$$+\Phi_j[F, F^{(1)}, \ldots, F^{(j-1)}]=0, \qquad (2.32)$$

где $j=1, 2, \ldots, 2N$, оператор $K[F]$ был определен в доказательстве теоремы 2.1:

$$K[F](u)=\langle J\frac{\partial}{\partial z}(DH_0[F, \mathrm{id}]u)(z), \frac{\partial F}{\partial z}\rangle,$$

а функционалы Φ_j зависят от коэффициентов $F^{(m)}$ с номерами $m<j$. Явный вид Φ_j легко вычисляется из (2.31), но окончательные формулы слишком громоздки и мы их не будем выписывать. Укажем лишь, что при $j=1$ $\Phi_1[F]=f_1[F]F$.

Как при доказательстве теоремы 2.1 перейдем от уравнения (2.32) к уравнению для функции

$$\tilde{F}^{(j)}(w, t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}F^{(j)}(Z(w, t), t),$$

где $Z(w, t)$ — решение уравнения Власова — Гамильтона. Обозначим, как и раньше,

$$\tilde{K}[F, t]=Z[t]^*\circ K[F]\circ Z[t]^{-1*},$$
$$\tilde{\Phi}_j(t)=Z[t]^*\Phi_j[F, F^{(1)}, \ldots, F^{(j-1)}].$$

Получим следующее уравнение для $\tilde{F}^{(j)}$:

$$\frac{\partial\tilde{F}^{(j)}}{\partial t}+\tilde{K}[F, t](\tilde{F}^{(j)})+\tilde{\Phi}_j(t)=0. \qquad (2.33)$$

Начальное условие следует из (2.2):

$$\tilde{F}^{(j)}|_{t=0}=F_0^{(j)}.$$

Проинтегрируем (2.33):

$$\tilde{F}^{(j)}(t)+\int_0^t\tilde{K}[F, \tau](\tilde{F}^{(j)}(\tau))d\tau=\tilde{F}^{(j)}(0)-\int_0^t\tilde{\Phi}^{(j)}(\tau)d\tau. \qquad (2.34)$$

Как уже было доказано в (2.25), если $F_0\in S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n})$, то найдется такое $s_0\geqslant 0$, что для любого $l\geqslant 0$ и любого $T\geqslant 0$

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\tilde{K}[F, t]\|_{H^{-l}_{-s_0}\to H^{-l}_{-s_0}}<\infty.$$

Кроме того, существует $s_j\geqslant 0$, $s_j\geqslant s_0$, такое, что для любого $l\geqslant 0$ и любого $T\geqslant 0$

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\tilde{F}^{(j)}(0)-\int_t^0\tilde{\Phi}^{(j)}(\tau)d\tau\|_{H^{-l}_{-s_j}}<\infty.$$

Следовательно, уравнение типа Вольтерра (2.34) разрешимо в каждом пространстве $H^{-l}_{-s_j}(\mathbb{R}^{2n})$, $l\geqslant 0$, т. е. оно разрешимо в $S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n})$.

Вычислив функции $\tilde{F}^{(j)}$ последовательно при $j=1$, при $j=2, \ldots$, при $j=2N$, мы вычислим тем самым $2N$-ую частичную сумму асимптотического ряда (2.5):

$$\rho_{\psi(t)}\sim\rho^{(N)}(t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sum_{j=0}^{2N}(-ih)^jF^{(j)}(t)=$$
$$=Z[t]^{*-1}\left(F_0+\sum_{j=1}^{2N}(-ih)^j\tilde{F}^{(j)}(t)\right). \qquad (2.35)$$

Тот факт, что эта частичная сумма $\rho^{(N)}(t)$ отличается на $O(h^{2N+1})$ от истинной функции плотности $\rho_{\psi(t)}$, доказывается точно так же, как и теорема 2.1. Таким образом, мы получаем следующий результат.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и, кроме того, существуют такие функции $F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(2N)}\in S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n})$, для которых справедливо равенство

$$\rho_{\psi_{0,h}}-F_0-\sum_{j=1}^{2N}(-ih)^jF_0^{(j)}=O(h^{2N+1}),$$

где $O(h^{2N+1})=h^{2N+1}\cdot\rho_{N,h}$ и семейство функций $\{\rho_{N,h}\mid h\in[0, 1]\}$ ограничено в $S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n})$. Тогда справедливо равенство

$$\rho_{\psi(t)}-\rho^{(N)}(t)=O(h^{2N+1})$$

(равномерно по $t\in[0, T]$), где функция $\rho^{(N)}(t)$ определена в (2, 35).

§ 3. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УНИТАРНО-НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Выполняя программу, намеченную в начале § 2, мы приступим теперь к построению асимптотики решения задачи Коши (2.17):

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t}+H[\rho_\psi, \mathrm{id}, h](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi=0, \qquad (3.1)$$
$$\psi|_{t=0}=\psi_{0,h}.$$

В теореме 2.2 была вычислена асимптотика функции плотности ρ_ψ, отвечающей решению этой задачи Коши:

$$\rho_\psi=\rho^{(N)}+(-ih)^{2N+1}\rho_{N,h},$$
$$\rho^{(N)}=\sum_{j=0}^{2N}(-ih)^jF^{(j)}, \quad F^{(0)}\equiv F. \qquad (3.2)$$

Предположим, что носители $\operatorname{supp} F_0^{(j)}$ всех функций $F^{(j)}$ при $t=0$ и $j=0, 1, 2, \ldots$ содержатся в фиксированном компакте $\Omega \subset \mathbf{R}^{2n}$. Выберем любую функцию $e_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, равную единице в окрестности Ω. Эта функция понадобится нам ниже.

Заменяя в задаче (3.1) ρ_ψ на $\rho^{(N)}$, мы получаем вместо (3.1) линейное уравнение

$$-ih\frac{\partial \psi'}{\partial t} + H[\rho^{(N)}, \mathrm{id}, h](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi' = 0. \tag{3.3}$$

Функция Гамильтона этого уравнения имеет вид:

$$H[\rho^{(N)}, \mathrm{id}, h]|_{h=0} = H_0[F, \mathrm{id}].$$

Выпишем соответствующие уравнения Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\partial H_0[F, \mathrm{id}]}{\partial p}(X, P), \quad X|_{t=0} = x_0, \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H_0[F, \mathrm{id}]}{\partial x}(X, P), \quad P|_{t=0} = p_0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Очевидно, решение $Z(x_0, p_0, t) = (X(x_0, p_0, t), P(x_0, p_0, t))$ задачи (3.4) совпадает с решением задачи Коши для уравнения Власова — Гамильтона, отвечающего отображению Гамильтона H_0. Построим в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{4n+2}$ (с координатами $(x, p) \in \mathbf{R}^{2n}$, $t \in \mathbf{R}$ и импульсами $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^{2n}$, $\theta \in \mathbf{R}$) следующее лагранжево многообразие:

$$\begin{aligned} \Lambda = \{(x, p, t; \xi, \eta, \theta) \mid x &= X(x_0, p_0, t), \quad p = p_0, \\ \xi &= P(x_0, p_0, t) - p_0, \quad \eta = 0, \\ \theta &= -H_0[F, \mathrm{id}](X(x_0, p_0, t), P(x_0, p_0, t)), \\ &(x_0, p_0) \in \operatorname{supp} e_0, \ |t| \leqslant T\}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathscr{K}_\Lambda^{1/h}$ канонический оператор на этом многообразии, построенный по мере $dx_0 \wedge dp_0 \wedge dt$ с точностью до $O(h^N)$. Из результатов работы [10] следует

Лемма 3.1. На многообразии Λ существует такая функция

$$\varphi^{(N)} = \sum_{k=0}^{N} (-ih)^k \varphi_k(x_0, p_0, t), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Lambda),$$

что

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_0, p_0, 0) &= e_0(x_0, p_0), \\ \varphi_k(x_0, p_0, 0) &= 0 \text{ при } k \geqslant 1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

и функция

$$\mathscr{K}_N(x, p, t) \overset{\text{def}}{=} (\mathscr{K}_\Lambda^{1/h}\varphi^{(N)})(x, p, t)$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} -ih\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{K}_N + H[\rho^{(N)}, \mathrm{id}, h]\left(\overset{2}{x}, p - ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)\mathscr{K}_N &= \\ = (-ih)^{N+1}\mathscr{R}_{N,h}&, \\ \mathscr{K}_N|_{t=0} = e_0&. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь правая часть $\mathscr{R}_{N,h}$ имеет оценку

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mathscr{R}_{N,h}(t)\|_{H_k^{-l}(\mathbf{R}^{2n})} \leqslant \frac{c_{k,l,T}}{h^k}$$

для любых k, l, $h > 0$.

Более того, функции φ_k, указанные в лемме 3.1, строятся явно как решения некоторой рекуррентной цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Например, функция φ_0 определяется из следующего уравнения

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + b(X, P, t)\varphi_0 = 0, \tag{3.7}$$

где

$$b(x, p, t) = i\frac{\partial H[F(t), \mathrm{id}, h](x, p)}{\partial h}\Big|_{h=0} - $$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial p_j}H_0[F(t), \mathrm{id}] + (DH_0[F(t), \mathrm{id}](F^{(1)}(t)))(x, p),$$

$F^{(1)}$ — коэффициент при $(-ih)$ в разложении (3.2).

Решение уравнения (3.7) с начальным условием (3.5) легко вычисляется*)

$$\varphi_0(x_0, p_0, t) = e_0(x_0, p_0)\, e^{-\int_0^t b(X(x_0, p_0, \tau), P(x_0, p_0, \tau), \tau)\,d\tau}.$$

Аналогичный вид имеют и остальные функции φ_k в лемме 3.1.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему этого параграфа.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия теорем 2.1, 2.2, а также сформулированное выше предположение о компактности носителей функций $F_0, F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(2N)}$. Тогда функция

$$\psi_N \overset{\text{def}}{=} (\mathscr{K}_\Lambda^{1/h}\varphi^{(N)})(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)\,\psi_{0,h} \tag{3.8}$$

является асимптотикой с точностью до $O(h^N)$ решения ψ задачи Коши (3.1) для унитарно-нелинейного оператора. Точнее:

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\psi_N(t) - \psi(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leqslant \mathrm{const} \cdot h^N.$$

*) Если оператор $\hat{H}[\rho_\psi, id, h]$ самосопряжен, то $b(x, p, t) \equiv 0$.

Доказательство. В силу (3.6), функция ψ_N удовлетворяет уравнению

$$-ih\frac{\partial\psi_N}{\partial t}+H[\rho^{(N)}, \mathrm{id}, h](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi_N=(-ih)^{N+1}r_{N,h}, \tag{3.9}$$

где

$$r_{N,h}\overset{\mathrm{def}}{=}\mathcal{R}_{N,h}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)\psi_{0,h}.$$

Кроме того,

$$\psi_N|_{t=0}=e_0(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi_{0,h}. \tag{3.10}$$

Из (3.1), (3.9) и условия самосопряженности оператора $H[\rho_\psi, \mathrm{id}, h](\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$ легко получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\psi-\psi_N\|^2+(-ih)^N[(\omega_{N,h}, \psi-\psi_N)+$$
$$+(-1)^N(\psi-\psi_N, \omega_{N,h})]=0, \tag{3.11}$$

где

$$\omega_{N,h}\overset{\mathrm{def}}{=}r_{N,h}+a_{N,h}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)\psi_N,$$

$$a_{N,h}\overset{\mathrm{def}}{=}\int_0^1 d\tau DH[\tau\rho_\psi+(1-\tau)\rho^{(N)}, \mathrm{id}, h](\rho_{N,h}),$$

функция $\rho_{N,h}$ определена в (3.2), а норма $\|\ldots\|$ и скалярное произведение $(\ldots,\ldots)$ берутся в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Из (3.11) немедленно следует оценка:

$$\left\|\frac{\psi(t)-\psi_N(t)}{h^N}\right\|\leqslant\left\|\frac{\psi(0)-\psi_N(0)}{h^N}\right\|+\int_0^t\|\omega_{N,h}(\tau)\|\,d\tau. \tag{3.12}$$

Таким образом, остается оценить разность $\psi(0)-\psi_N(0)$. В силу (3.10), имеем:

$$\psi(0)-\psi_N(0)=(1-e_0)(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi_{0,h}.$$

Пусть $e_1=(1-e_0)$ и $T=e_1(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$. Тогда

$$\|\psi(0)-\psi_N(0)\|^2=(T^*T\psi_{0,h}, \psi_{0,h})=(f_h(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})\psi_{0,h}, \psi_{0,h}),$$

где

$$f_h=\mathrm{smb}\{T^*T\}=e_1\left(\overset{2}{x}, p-ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)e_1(x, p). \tag{3.13}$$

Из леммы 1.3 гл. II [9] следует, что

$$\|\psi(0)-\psi_N(0)\|^2=\iint f_h(x, p)\overline{\rho_{\psi_{0,h}}(x, p)}\,dx\,dp.$$

Подставим сюда разложение (3.2) при $t=0$:

$$\|\psi(0)-\psi_N(0)\|^2=\iint f_h(x, p)\overline{\rho^N(x, p, 0)}\,dx\,dp+$$
$$+(-ih)^{2N+1}\iint f_h(x, p)\overline{\rho_{N,h}(x, p, 0)}\,dx\,dp. \tag{3.14}$$

С другой стороны, из (3.13) имеем:

$$f_h(x, p)=\sum_{|\alpha|=0}^{2N}\frac{1}{\alpha!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^\alpha e_1(x, p)\right]\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha e_1(x, p)\right](-ih)^{|\alpha|}+$$
$$+(-ih)^{2N+1}f_{N,h}(x, p),$$

где остаток $f_{N,h}$ ограничен на $\mathbb{R}^{2n}$ со всеми производными равномерно по $h\in[0, 1]$. Следовательно, учитывая, что носители e_1 и $\rho^{(N)}$ не пересекаются, мы получаем из (3.14):

$$\|\psi(0)-\psi_N(0)\|^2=$$
$$=(-ih)^{2N+1}\iint[f_{N,h}(x, p)\overline{\rho^{(N)}(x, p, 0)}+f_h(x, p)\overline{\rho_{N,h}(x, p, 0)}]\,dx\,dp$$

Интеграл в правой части ограничен равномерно по $h\in[0, 1]$; таким образом:

$$\|\psi(0)-\psi_N(0)\|^2\leqslant h^{2N+1}\cdot\mathrm{const}.$$

Из (3.12) теперь получаем, что

$$\sup_{h\in[0,1]}\ \sup_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\psi(t)-\psi_N(t)}{h^N}\right\|\leqslant\mathrm{const}. \tag{3.15}$$

Теорема доказана.

В случае нелинейного оператора квантовой механики (2.19) теорему 3.1 можно несколько уточнить.

Следствие 3.1. Пусть выполнены условия следствия 2.1 и функции $\varphi^{(N)}$, $\psi_N=(\mathcal{K}^{1/h}_\Lambda\varphi^{(N)})(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)\psi_{0,h}$ построены, как в лемме 3.1 и теореме 3.1 для унитарно-нелинейного оператора задачи (2.19). Тогда

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\psi(t)-\psi_N(t)\|_{H^{-l}_k(\mathbb{R}^{2n})}\leqslant c_{k,l,T}\cdot h^{N-k},\quad 0\leqslant k\leqslant N.$$

В заключение параграфа мы получим асимптотику при $h\to 0$ решения унитарно-нелинейного уравнения в представлении взаимодействия.

Пусть унитарно-нелинейный оператор $\mathcal{H}$ задачи (2.17) допускает разложение

$$\mathcal{H}[\psi]=\hat{H}_{\text{своб.}}\psi+\hat{H}_1[\rho_\psi, \mathrm{id}, h]\psi, \tag{3.16}$$

где

$$\hat{H}_{\text{своб.}}=H_{\text{своб.}}(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, h),\ \hat{H}_1[(\rho_\psi, \mathrm{id}, h]=H_1[\rho_\psi, \mathrm{id}, h](\overset{2}{x}, \overset{1}{p}).$$

Таким образом, оператор $\hat{H}_{\text{своб.}}$ здесь линеен, а нелинейный оператор $\hat{H}_1[\rho_\psi, \mathrm{id}, h]$ отвечает за взаимодействие.

Будем предполагать, что оба символа $H_{\text{своб.}}$ и H_1 удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Положим $H_0 \overset{\mathrm{def}}{=} H_{\text{своб.}}|_{h=0}$.

Рассмотрим уравнение Гамильтона

$$\dot{Z}^{(0)} = J\frac{\partial H_0}{\partial z}\circ Z^{(0)}, \quad Z^{(0)}|_{t=0} = \mathrm{id}. \tag{3.17}$$

Его решение $Z^{(0)}[t]$, в силу сделанных предположений, существует при всех $t \in \mathbf{R}$ в пространстве $C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$ и задает однопараметрическую группу канонических преобразований пространства $\mathbf{R}^{2n}$.

Положим, следуя формуле (3.15) гл. II,

$$H_{1,0}[f, v] = Z^{(0)}[t]^* H_1[f, Z^{(0)}[t]\circ v, 0]. \tag{3.18}$$

Теорема 3.2. Для любого целого $N \geqslant 1$ имеет место следующее разложение символа в представлении взаимодействия

$$H_{1,h}[f, \mathrm{id}] = H_{1,0}[f, \mathrm{id}] + \sum_{k=1}^{N}(-ih)^k M_k[f] + (-ih)^{N+1} R_N[f, h],$$

где $f \in S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$,

$$M_k : S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}) \to S^\infty(\mathbf{R}^{2n}), \quad k = 1, \ldots, N,$$

и $R_N : S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}) \times [0, 1] \to S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ — некоторые гладкие отображения, а $H_{1,0}$ — отображение Гамильтона в представлении взаимодействия (3.18). Кроме того, функция плотности задачи (2.17) в представлении взаимодействия сходится при $h \to 0$ в пространстве $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ к решению f задачи Коши для уравнения Власова — Лиувилля в представлении взаимодействия.

Теорема 3.2 доказывается аналогично теореме 2.1. Итак, главная часть символа в представлении взаимодействия найдена: она равна $H_{1,0}[f(t), \mathrm{id}]$. Выпишем соответствующее уравнение Власова — Гамильтона:

$$\dot{W}[t] = J\,\frac{\partial H_{1,0}[F_0, W[t]]}{\partial z}\circ W[t], \quad W|_{t=0} = \mathrm{id}. \tag{3.19}$$

В силу сделанных предположений, решение задачи (3.19) существует при любом $t \in \mathbf{R}$ в пространстве $C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n})$. Мы можем теперь, следуя теореме 3.1, построить асимптотику решения χ задачи Коши (2.17) в представлении взаимодействия:

$$\chi(t) = (\mathcal{K}^{1/h}_{\Lambda_1}\tilde{\varphi}^{(N)})(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)\,\psi_{0,h} + O(h^N),$$
$$\sup_{t\in[0,T]} \|O(h^N)\|_{L^2} \leqslant h^N \cdot \mathrm{const}.$$

Здесь функция $\tilde{\varphi}^{(N)}$ строится аналогично функции $\varphi^{(N)}$ из леммы 3.1, но вместо отображения H_0 теперь берется отображение $H_{1,0}$, а вместо лагранжева многообразия Λ — многообразие Λ_1, построенное по решению задачи (3.19) и отображению Гамильтона $H_{1,0}$, аналогично тому, как Λ строилось по решению задачи (3.4) и отображению Гамильтона H_0.

Пример 3.1. Запишем задачу (2.15) для нелинейного оператора квантовой механики в представлении взаимодействия:

$$-ih\frac{\partial\chi(x,t)}{dt} + \int dy\,\overline{\chi(y,t)}\,V(\hat{X}(t)_x - \hat{X}(t)_y)\chi(y,t))\chi(x,t) = 0. \tag{3.20}$$
$$\chi(x, 0) = \psi_{0,h}(x).$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, а через $\hat{X}(t)_x$ и $\hat{X}(t)_y$ обозначен один и тот же набор операторов $\hat{X}(t) = (\hat{X}_1(t), \ldots, \hat{X}_n(t))$, но действующий на функции от аргументов x и y, соответственно, и определенный следующей формулой:

$$\hat{X}_j(t)_x = e^{\frac{i}{h}\hat{H}_0 t}\circ x_j \circ e^{-\frac{i}{h}\hat{H}_0 t}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $H_0(x, p) = -p^2 + V_0(x)$, x_j — оператор умножения на аргумент x_j.

При разных номерах $j \neq k$ операторы $\hat{X}_j(t)$ и $\hat{X}_k(t)$ коммутируют, поэтому в уравнении (3.20) можно не указывать их взаимный порядок.

Функция от набора операторов $\hat{X}(t)$ задается следующей формулой:

$$f(\hat{X}(t)) = e^{\frac{i}{h}\hat{H}_0 t}\circ f(x)\circ e^{-\frac{i}{h}\hat{H}_0 t},$$

где $f(x)$ — оператор умножения на функцию $f \in S^\infty(\mathbf{R}^n)$. Для того, чтобы вычислить асимптотическое разложение $f(\hat{X}(t))$ при $h \to 0$, запишем дифференциальное уравнение Гейзенберга, которому удовлетворяет этот оператор:

$$-ih\frac{d}{dt}f(\hat{X}(t)) = [\hat{H}_0, f(\hat{X}(t))].$$

Решение этого уравнения можно искать в следующем виде:

$$f(\hat{X}(t)) = g(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t),$$

где

$$-ih\frac{\partial g}{\partial t} = H_0\Big(\overset{2}{x}, p - ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\Big)g - H_0\Big(x - ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial p}}, \overset{2}{p}\Big)g, \tag{3.21}$$
$$g|_{t=0} = f.$$

Решение задачи (3.21) в пространстве $S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ дается формулой

$$g(x, p, t) = e^{Rt}f(x, p),$$
$$R = 2p\frac{\partial}{\partial x} - \int_0^1 d\tau\,\frac{\partial V}{\partial x}\Big(x - ih\tau\frac{\partial}{\partial p}\Big)\frac{\partial}{\partial p} - ih\Delta.$$

Асимптотика функции g при $h \to 0$ вычисляется из уравнения (3.21), аналогично теореме 2.2:

$$g = g_0 + O(h),$$
$$g_0(x, p, t) = f(X^{(0)}(x, p, t)),$$

где $X^{(0)}$ — решение уравнения Ньютона

$$\ddot{X}^{(0)} + 2\frac{\partial V_0}{\partial x}(X^{(0)}) = 0$$

с начальными условиями

$$X^{(0)}|_{t=0} = x, \quad \dot{X}^{(0)}|_{t=0} = 2p.$$

Следовательно, с точностью до оператора с символом порядка $O(h)$ интеграл в уравнении (3.2) имеет вид

$$\int dy \Big(\overline{\chi(y, t)}\, V\Big(X^{(0)}\Big(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t\Big) -$$
$$- X^{(0)}\Big(\overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, t\Big)\Big)\chi(y, t)\Big)\chi(x, t).$$

Перепишем это выражение с помощью функции плотности в представлении взаимодействия ρ_χ. В результате уравнение (3.20) приобретает следующий вид:

$$-ih\frac{\partial\chi(x, t)}{\partial t} + \iint dy d\xi\, \overline{\rho_\chi(y, \xi, t)}\, V\Big(X^{(0)}\Big(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t\Big) -$$
$$- X^{(0)}(y, \xi, t)\Big)\chi(x, t) + O(h)\chi = 0.$$

Выпишем соответствующее уравнение Власова — Лиувилля в представлении взаимодействия:

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} + \langle J\frac{\partial}{\partial z}\iint f(z', t)\, V(X^{(0)}(z, t) -$$
$$- X^{(0)}(z', t))\, dz', \frac{\partial f(z, t)}{\partial z}\rangle = 0, \qquad (3.22)$$

где $z = (x, p)$, $z' = (y, \xi)$.

Пусть $f(z, 0) = F_0(z) = \lim\limits_{h\to 0}\rho_{\psi_{0,h}}(z)$. Решение уравнения (3.22) с этим начальным условием имеет вид

$$f(t) = W[t]^{*-1}F_0,$$

где $W[t]$ — решение задачи Коши (3.19) для уравнения Власова — Гамильтона в представлении взаимодействия, причем соответствующее отображение Гамильтона $H_{1,0}$ задано формулой:

$$H_{1,0}[f, v](z, v) = \iint f(z', t)\, V(X^{(0)}(z, t) - X^{(0)}(v(z'), t))\, dz',$$
$$v \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}), \quad f \in S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}).$$

В силу теоремы 3.2, функция плотности $\rho_{\chi(t)}$ при $h \to 0$ переходит в решение уравнения Власова — Лиувилля $f(t)$.

Глава IV

СИСТЕМЫ УНИТАРНО-НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе рассматриваются примеры построения квазиклассической асимптотики для некоторых систем уравнений с унитарной нелинейностью.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ХАРТРИ

Система уравнений Хартри имеет следующий вид:

$$-ih\frac{\partial\psi^{(j)}}{\partial t} - h^2\Delta\psi^{(j)} + V_0(x)\psi^{(j)} +$$
$$+\Big(\sum_{k=1}^{m}\int V_{jk}(x-y)\,|\psi^{(k)}(y, t)|^2\, dy\Big)\psi^{(j)} = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \qquad (1.1)$$

Будем в дальнейшем предполагать, что функции V_0 и V_{jk} вещественны и ограничены со всеми производными на $\mathbf{R}^n$.

Обозначим через M комплексное пространство $\mathbf{C}^m$ со стандартным скалярным произведением и нормой. Введем пространство $L^2(\mathbf{R}^n \to M)$ вектор-функций на $\mathbf{R}^n$ со значениями в M, а также пространства $H^l_k(\mathbf{R}^n \to M)$,

$$S(\mathbf{R}^n \to M), \quad S_{-\infty}(\mathbf{R}^n \to M), \quad S^\infty(\mathbf{R}^n \to M).$$

Рассмотрим T-отображение

$$\psi(t) = \prod_{\tau=0}^{t}\overset{\tau}{\circ}\Big[\exp(ih\Delta\, d\tau)\exp\Big\{-\frac{i}{h}A[\rho_{\psi(\tau)}](x)\, d\tau\Big\}\Big]\psi(0), \qquad (1.2)$$

где $\psi = (\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(m)})$, $\rho_\psi = (\rho_{\psi^{(1)}}, \ldots, \rho_{\psi^{(m)}})$ — вектор-функция плотности, $A[\rho_\psi]$ — диагональная матрица с коэффициентами

$$A[\rho_\psi](x)_{jk} = \delta_{jk}\Big(\sum_l \iint V_{jl}(x-y)\,\rho_{\psi^{(l)}\tau}(y, \xi)\, dy d\xi + V_0(x)\Big).$$

Теорема 1.1. [11] T-отображение (1.2) существует в пространстве $L^2(\mathbf{R}^n \to M)$ на любом отрезке времени $t \in [0, T_0]$ и для любой начальной функции $\psi(0) \in H^0_2(\mathbf{R}^n \to M)$. Функция $\psi(t)$, определяемая этим T-отображением, удовлетворяет уравнению Хартри (1.1).

Предположим теперь, что начальная вектор-функция $\psi(0) = \psi_{0,h} \in S(\mathbf{R}^n \to M)$ такова, что вектор-функция плотности $\rho_{\psi_{0,h}}$ сходится при $h \to 0$ в пространстве $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M)$ к некоторой вещественной вектор-функции $F^0 = (F^0_1, \ldots, F^0_m)$. В этом случае имеет место аналог следствия 2.1 из гл. III.

Асимптотика функции g при $h \to 0$ вычисляется из уравнения (3.21), аналогично теореме 2.2:

$$g = g_0 + O(h),$$
$$g_0(x, p, t) = f(X^{(0)}(x, p, t)),$$

где $X^{(0)}$ — решение уравнения Ньютона

$$\ddot{X}^{(0)} + 2\frac{\partial V_0}{\partial x}(X^{(0)}) = 0$$

с начальными условиями

$$X^{(0)}|_{t=0} = x, \quad \dot{X}^{(0)}|_{t=0} = 2p.$$

Следовательно, с точностью до оператора с символом порядка $O(h)$ интеграл в уравнении (3.2) имеет вид

$$\int dy \Big(\overline{\chi(y, t)}\, V \Big(X^{(0)} \Big(\overset{2}{x}, -ih \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t \Big) - X^{(0)} \Big(\overset{2}{y}, -ih \overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, t \Big) \Big) \chi(y, t) \Big) \chi(x, t).$$

Перепишем это выражение с помощью функции плотности в представлении взаимодействия ρ_χ. В результате уравнение (3.20) приобретает следующий вид:

$$-ih\frac{\partial \chi(x, t)}{\partial t} + \iint dy d\xi\, \overline{\rho_\chi(y, \xi, t)}\, V \Big(X^{(0)} \Big(\overset{2}{x}, -ih \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, t \Big) - X^{(0)}(y, \xi, t) \Big) \chi(x, t) + O(h)\chi = 0.$$

Выпишем соответствующее уравнение Власова — Лиувилля в представлении взаимодействия:

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} + \Big\langle J \frac{\partial}{\partial z} \iint f(z', t)\, V(X^{(0)}(z, t) - X^{(0)}(z', t))\, dz', \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} \Big\rangle = 0, \tag{3.22}$$

где $z = (x, p)$, $z' = (y, \xi)$.

Пусть $f(z, 0) = F_0(z) = \lim\limits_{h \to 0} \rho_{\psi_{0,h}}(z)$. Решение уравнения (3.22) с этим начальным условием имеет вид

$$f(t) = W[t]^{*^{-1}} F_0,$$

где $W[t]$ — решение задачи Коши (3.19) для уравнения Власова — Гамильтона в представлении взаимодействия, причем соответствующее отображение Гамильтона $H_{1,0}$ задано формулой:

$$H_{1,0}[f, v](z, v) = \iint f(z', t)\, V(X^{(0)}(z, t) - X^{(0)}(v(z'), t))\, dz',$$
$$v \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}), \quad f \in S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n}).$$

В силу теоремы 3.2, функция плотности $\rho_{\chi(t)}$ при $h \to 0$ переходит в решение уравнения Власова — Лиувилля $f(t)$.

Глава IV

СИСТЕМЫ УНИТАРНО-НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе рассматриваются примеры построения квазиклассической асимптотики для некоторых систем уравнений с унитарной нелинейностью.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ХАРТРИ

Система уравнений Хартри имеет следующий вид:

$$-ih\frac{\partial \psi^{(j)}}{\partial t} - h^2 \Delta \psi^{(j)} + V_0(x)\psi^{(j)} + \Big(\sum_{k=1}^{m} \int V_{jk}(x - y)\, |\psi^{(k)}(y, t)|^2\, dy \Big) \psi^{(j)} = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{1.1}$$

Будем в дальнейшем предполагать, что функции V_0 и V_{jk} вещественны и ограничены со всеми производными на $\mathbf{R}^n$.

Обозначим через M комплексное пространство $\mathbf{C}^m$ со стандартным скалярным произведением и нормой. Введем пространство $L^2(\mathbf{R}^n \to M)$ вектор-функций на $\mathbf{R}^n$ со значениями в M, а также пространства $H^l_k(\mathbf{R}^n \to M)$,

$$S(\mathbf{R}^n \to M), \quad S_{-\infty}(\mathbf{R}^n \to M), \quad S^\infty(\mathbf{R}^n \to M).$$

Рассмотрим T-отображение

$$\psi(t) = \overset{t}{\underset{\tau=0}{\prod}} \circ \overline{\overset{\tau}{\Big[\exp(ih\triangle d\tau) \exp\Big\{ -\frac{i}{h} A[\rho_{\psi(\tau)}](x)\, d\tau \Big\} \Big]}}\, \psi(0), \tag{1.2}$$

где $\psi = (\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(m)})$, $\rho_\psi = (\rho_{\psi^{(1)}}, \ldots, \rho_{\psi^{(m)}})$ — вектор-функция плотности, $A[\rho_\psi]$ — диагональная матрица с коэффициентами

$$A[\rho_\psi](x)_{jk} = \delta_{jk} \Big(\sum_l \iint V_{jl}(x - y)\, \rho_{\psi^{(l)}\tau}(y, \xi)\, dy d\xi + V_0(x) \Big).$$

Теорема 1.1. [11] T-отображение (1.2) существует в пространстве $L^2(\mathbf{R}^n \to M)$ на любом отрезке времени $t \in [0, T_0]$ и для любой начальной функции $\psi(0) \in H^0_2(\mathbf{R}^n \to M)$. Функция $\psi(t)$, определяемая этим T-отображением, удовлетворяет уравнению Хартри (1.1).

Предположим теперь, что начальная вектор-функция $\psi(0) = \psi_{0,h} \in S(\mathbf{R}^n \to M)$ такова, что вектор-функция плотности $\rho_{\psi_{0,h}}$ сходится при $h \to 0$ в пространстве $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M)$ к некоторой вещественной вектор-функции $F^0 = (F^0{}_1, \ldots, F^0{}_m)$. В этом случае имеет место аналог следствия 2.1 из гл. III.

Теорема 1.2. Вектор-функция плотности $\rho_{\psi(t)}$, отвечающая решению $\psi(t)$ уравнения (1.1), сходится при $h\to 0$ в пространстве $S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}\to M)$ равномерно на любом отрезке $t\in[0,T]$ к вектор-функции $F(t)=(F_1(t),\ldots,F_m(t))$, удовлетворяющей следующей задаче Коши:

$$\frac{\partial F_j}{\partial t}+2p\frac{\partial F_j}{\partial x}-$$
$$-\left(\frac{\partial V_0}{\partial x}+\sum_{k=1}^{m}\iint\frac{\partial V_{jk}}{\partial x}(x-y)F_k(y,\xi,t)\,dy\,d\xi\right)\frac{\partial F_j}{\partial p}=0, \quad (1.3)$$
$$F_j|_{t=0}=F^0{}_j,\quad j=1,\ldots,m.$$

Доказательство теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 2.1 гл. III. Существование решения задачи (1.3) будет установлено ниже.

Система дифференциальных уравнений (1.3) представляет собой векторный аналог уравнения Власова. Выпишем соответствующую систему уравнений Власова — Гамильтона:

$$\dot X^{(j)}=2P^{(j)},$$
$$\dot P^{(j)}=-\frac{\partial V_0}{\partial x}(X^{(j)})-$$
$$-\sum_{k=1}^{m}\iint\frac{\partial V_{jk}}{\partial x}(X^{(j)}-X^{(k)}(x',p',t))F^0{}_k(x',p')\,dx'dp', \quad (1.4)$$
$$X^{(j)}|_{t=0}=x,\quad P^{(j)}|_{t=0}=p,\quad j=1,\ldots,m.$$

Функции $Z^{(j)}[t]=(X^{(j)}[t],\ P^{(j)}[t])$ определяют некоторое преобразование $Z^{(j)}[t]:(x,p)\to Z^{(j)}(x,p,t)$ фазового пространства $\mathbb{R}^{2n}$. При $t=0$ это преобразование является тождественным: $Z^{(j)}[0]=\mathrm{id}$.

Аналогично теоремам 2.1, 2.2 гл. I доказывается следующее утверждение:

Теорема 1.3. Решение $Z^{(1)}[t],\ldots,Z^{(m)}[t]\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n})$ системы (1.4) существует и единственно при всех t. Каждое отображение $Z^{(j)}[t]$ является каноническим. Решение задачи (1.3) существует в $S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}\to M)$ при всех t и дается формулой

$$F_j(t)=Z^{(j)}[t]^{*-1}F^0{}_j,\quad j=1,\ldots,m.$$

Предположим теперь, что начальная вектор-функция плотности $\rho_{\psi_{0,h}}$ разлагается в асимптотический ряд

$$\rho_{\psi_{0,h}}=F^0+\sum_{\mu=1}^{2N}(-ih)^{\mu}F^{(\mu)}+h^{2N+1}\rho^{(N,h)(0)}, \quad (1.5)$$

где $F_0^{(\mu)}\in S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}\to M)$, $\mu=1,\ldots,2N$, семейство функций $\{\rho^{(N,h)(0)}h\in[0,1]\}$ ограничено в $S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}\to M)$. Будем предполагать всюду ниже, что носители функции F^0, $F^{(0,\mu)}$, $\mu=1,\ldots,2N$, содержатся в фиксированном компакте в $\mathbb{R}^{2n}$. Построим разложение вектор-функции плотности $\rho_{\psi(t)}$ при $h\to 0$ в любой момент времени t, аналогично тому, как это было сделано в § 2 гл. III для скалярной функции плотности.

Выпишем уравнение для вектор-функции плотности

$$-ih\frac{\partial\rho_\psi}{\partial t}+\left[\left(p-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^2-p^2\right]\rho_\psi-\left(A[\rho_\psi]\left(x-ih\frac{\partial}{\partial p}\right)-\right.$$
$$\left.-A[\rho_\psi](x)\right)\rho_\psi=0 \quad (1.6)$$

и разложим оператор, стоящий в левой части, по степеням параметра h. Получим:

$$\frac{\partial\rho_\psi}{\partial t}+2p\frac{\partial\rho_\psi}{\partial x}-\frac{\partial A[\rho_\psi](x)}{\partial x}\frac{\partial\rho_\psi}{\partial p}+(-ih)\Delta\rho_\psi-$$
$$-\sum_{|\alpha|=2}^{2N+1}\frac{(-ih)^{|\alpha|-1}}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}A[\rho_\psi](x)\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{\alpha}\rho_\psi+ \quad (1.7)$$
$$+(-ih)^{2N+1}\lambda_{N,h}[\rho_\psi]=0,$$

где $\lambda_{N,h}[\rho_\psi]$ есть остаток в разложении функции $A[\rho_\psi]\left(x-ih\frac{\partial}{\partial p}\right)\rho_\psi$ по степеням $(-ih)$. Подставим в (1.7) разложение функции ρ_ψ по степеням h:

$$\rho_\psi=\sum_{\mu=1}^{2N}(-ih)^{\mu}F^{(\mu)}+O(h^{2N+1}) \quad (1.8)$$

с неизвестными пока функциями $F^{(1)},\ldots,F^{(2N)}$ и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях $(-ih)$. Получим цепочку уравнений

$$\frac{\partial F^{(\mu)}}{\partial t}+2p\frac{\partial F^{(\mu)}}{\partial x}-\frac{\partial A[F](x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial F^{(\mu)}}{\partial p}+K[F](F^{(\mu)})+\Phi^{(\mu)}=0, \quad (1.9)$$
$$\mu=1,\ldots,N.$$

Здесь оператор $K[F]:S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}\to M)\to S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}\to M)$ определен формулой:

$$K[F](u)_j\overset{\mathrm{def}}{=}-\sum_{l=1}^{m}\iint\frac{\partial V_{jl}(x-y)}{\partial x}u_l(y,\xi)\,dy\,d\xi\,\frac{\partial F_j}{\partial p}(x,p,t),$$

а функции $\Phi^{(\mu)}\in S_{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}\to M)$ имеют следующий вид:

$$(\Phi^{(\mu)})_j(x,p,t)=\sum_{\nu=0}^{\mu-1}\sum_{|\alpha|=\mu-\nu+1}\frac{(-1)}{\alpha!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}V_0(x)\right]\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{\alpha}F_j^{(\nu)}(x,p,t)-$$
$$-\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\sum_{\omega=0}^{\mu-\nu}\sum_{|\alpha|=\mu-\nu-\omega+1}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\alpha!}\iint\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}V_{jk}(x-y)\right]F_k^{(\nu)}(y,\xi,t)\,dy\,d\xi\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{\alpha} F_j^{(\omega)}(x, p, t)-\sum_{\nu=0}^{\mu-1} \sum_{|\alpha|=\mu-\nu+1} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\alpha!} \iint\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} V_{jk}(x-y)\right] \times$$

$$\times F_k(y, \xi, t)\, dy\, d\xi\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{\alpha} F_j^{(\nu)}(x, p, t)+\delta_{\mu, 1} \Delta_x F_j^{(\mu-1)}(x, p, t).$$

Важно отметить, что функция $\Phi^{(\mu)}$ зависит только от $F^{(\nu)}$ с номерами $\nu<\mu$. Перепишем векторное уравнение (1.9) покомпонентно:

$$\frac{\partial F_j^{(\mu)}}{\partial t}+2p\, \frac{\partial F_j^{(\mu)}}{\partial x}-\sum_{k=1}^{m} \iint \frac{\partial V_{jk}}{\partial x}(x-y) F_k(y, \xi, t)\, dy\, d\xi \times$$

$$\times \frac{\partial F_j^{(\mu)}}{\partial p}-\sum_{k=1}^{m} \iint \frac{\partial V_{jk}}{\partial x}(x-y) F_k^{(\mu)}(y, \xi, t)\, dy\, d\xi\, \frac{\partial F_j}{\partial p}+$$

$$+(\Phi^{(\mu)})_j=0, \quad f=1, \ldots m. \tag{1.10}$$

Сделаем в каждом k-ом слагаемом в левой части (1.10) под знаком интеграла замену переменных $(y, \xi) \to (X^{(k)}(y, \xi, t),\ P^{(k)}(y, \xi, t))$, а во всем уравнении (1.10) — замену $(x, p) \to \to (X^{(j)}(x, p, t),\ P^{(j)}(x, p, t))$, где $Z^{(j)}=(X^{(j)}, P^{(j)})$ — решение системы (1.4). В результате уравнение (1.10) перейдет в следующее

$$\frac{\partial \tilde{F}^{(\mu)}}{\partial t}+\tilde{K}(t)(\tilde{F}^{(\mu)}(t))+\tilde{\Phi}^{(\mu)}(t)=0, \tag{1.11}$$

где оператор $\tilde{K}(t): S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M) \to S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M)$ задан формулой

$$(\tilde{K}(t) u)_j(x, p, t)=-\sum_{k=1}^{m} \iint \frac{\partial V_{jk}}{\partial x}(X^{(j)}(x, p, t)-X^{(k)}(y, \xi, t)) \times$$

$$\times u(y, \xi)\, dy\, d\xi\, \frac{\partial F_j}{\partial p}(X^{(j)}(x, p, t), P^{(j)}(x, p, t), t),$$

а вектор-функции $\tilde{F}^{(\mu)}$, $\tilde{\Phi}^{(\mu)}$ определены следующими равенствами:

$$\tilde{F}_j^{(\mu)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} Z^{(j)}[t]^* F_j^{(\mu)}(t), \quad \tilde{\Phi}_j^{(\mu)}(t)=Z^{(j)}[t]^* \Phi_j^{(\mu)}(t),$$
$$j=1, \ldots, m.$$

Интегрируя (1.11) по dt, получим уравнение типа Вольтерра, аналогичное (2.34) из гл. III

$$\tilde{F}^{(\mu)}(t)+\int_0^t \tilde{K}(\tau)(\tilde{F}(\tau))\, d\tau=F^{(0, \mu)}-\int_0^t \tilde{\Phi}^{(\mu)}(\tau)\, d\tau, \tag{1.12}$$

$\mu=1, \ldots, N$.

Точно так же, как это было сделано в § 2 гл. III, доказывается существование решения каждого уравнения (1.12) в пространстве $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M)$. Цепочка уравнений (1.12) решается последовательно: сначала при $\mu=1$, затем при $\mu=2$ и т. д. На каждом шагу функция $\tilde{\Phi}^{(\mu)}$ в правой части (1.12) будет определена, так как она зависит от функций $F^{(\nu)}$ лишь с номерами $\nu<\mu$.

Таким образом, вычислены все коэффициенты разложения (1.8) и мы получаем следующий аналог теоремы 2.2 гл. III.

Теорема 1.4. Пусть имеет место разложение (1.5) и вектор-функции $\tilde{F}^{(\mu)}$ найдены из цепочки уравнений (1.12). Тогда при $j=1, \ldots, m$ справедлива формула

$$\rho_{\psi^{(j)}(t)}=Z^{(j)}[t]^{*-1}\left(F^0{}_j+\sum_{\mu=1}^{N}(-ih)^{\mu} \tilde{F}_j^{(\mu)}(t)\right)+h^{N+1} \rho_j^{(N, h)}(t), \tag{1.13}$$

где семейство вектор-функций

$$\{\rho^{(N, h)}(t) \mid h \in[0,1], \quad t \in[0, T]\}$$

ограничено в $S_{-\infty}(\mathbf{R}^{2n} \to M)$ при любом $T>0$.

Формула (1.13) дает нам асимптотику вектор-функции плотности $\rho_{\psi(t)}$ при $h \to 0$ и тем самым позволяет перейти с точностью $O(h^N)$ от нелинейной системы уравнений Хартри (1.1) к набору из m независимых линейных уравнений по схеме, изложенной в начале § 2 гл. III.

Линейные уравнения, о которых идет речь, в данном случае имеют вид:

$$-ih\, \frac{\partial \psi^{(j)}}{\partial t}-h^2 \Delta \psi^{(j)}+V_0(x) \psi^{(j)}+\psi^{(j)}\left(\sum_{k=1}^{m} \int V_{jk}(x-X^{(k)}(y, \xi, t)) \times\right.$$

$$\left.\times F_{0k}(y, \xi)\, dy\, d\right) \xi+\psi^{(j)}\left(\sum_{\mu=1}^{N}(-ih)^{\mu} \int V_{jk}(x-X^{(k)}(y, \xi, t)) \times\right.$$

$$\left.\times \tilde{F}_k^{(\mu)}(y, \xi, t)\, dy\, d\xi\right)+O(h^{N+1})=0, \quad j=1, \ldots, m. \tag{1.14}$$

Решение каждого из этих уравнений с начальным условием $\psi^{(j)}|_{t=0}=\psi_{0,h}^{(j)}$, для которого имеет место (1.5), строится методом канонического оператора (§ 3 гл. III).

Пусть лагранжево многообразие $\Lambda_j \subset \mathbf{R}^{4n+2}$ построено так же, как многообразие Λ в § 3 гл. III, но вместо функции Гамильтона $H_0[F, \mathrm{id}]$ взята функция

$$H_j(x, p, t) \stackrel{\text{def}}{=} p^2+V_0(x)+\sum_{k=1}^{m} \int V_{jk}(x-X^{(k)}(y, \xi, t)) F^0{}_k(y, \xi)\, dy\, d\xi.$$

Далее, пусть $\mathscr{K}_{\Lambda_j}^{1/h}$ — канонический оператор на Λ_j и функция $\varphi_j^{(N)}$ на Λ_j построена так, как это указано в лемме 3.1 гл. III, т. е. так, чтобы функция

$$\psi^{(j)}_{N,h}(x, t) \overset{\text{def}}{=} (\mathcal{K}^{1/h}_{\Lambda_j}\varphi^{(N)}_j)(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)\,\psi^{(j)}_{0,h} \tag{1.15}$$

удовлетворяла уравнению (1.14) с точностью до $O(h^{N+1})$ и было выполнено начальное условие

$$\varphi^{(N)}_j|_{t=0} = e_0(x, p),$$

где e_0 — фиксированная гладкая вещественная финитная функция, равная единице в окрестности носителей всех функций $F^0, F^{(0,\mu)}$ из (1.5).

После того, как функции $\psi^{(j)}_{N,h}$, $N=1, \ldots, m$, вида (1.15) найдены, мы можем аналогично теореме 3.1 гл. III доказать следующее утверждение:

Теорема 1.5. Функция $\psi_{N,h} = (\psi^{(1)}_{N,h}, \ldots, \psi^{(m)}_{N,h})$, построенная по формуле (1.15), отличается на $O(h^N)$ от точного решения ψ системы уравнений Хартри (1.1) с начальными условиями $\psi|_{t=0} = \psi_{0,h}$. Точнее, для любых $k, l, T \geqslant 0$ и любого $h \in [0, 1]$ справедлива оценка

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\psi_{N,h}(t) - \psi(t)\|_{H^{-l}_k(\mathbf{R}^n \to M)} \leqslant h^{N-k} \cdot \mathrm{const}_{T,k,l}.$$

§ 2. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ХАРТРИ

Рассмотрим бесконечномерное обобщение задачи Коши (1.1). Пусть $\hat{H} = -h^2\Delta + U(x)$ — оператор Шрёдингера $L^2(\mathbf{R}^n)$ с гладким вещественным потенциалом U, причем функция $U(x)$ достаточно сильно растет при $|x| \to \infty$, так что спектр $\hat{H}$ дискретен

$$E_1(h) < E_2(h) < \ldots < E_j(h) < \ldots$$

и регулярен при $h \to 0$:

$$\sup_{0 \leqslant h \leqslant 1} E_j(h) < \infty.$$

Пусть оператор $e^{-t\hat{H}}$ и все его коммутаторы с x и $-i\partial/\partial x$ при любом $t > 0$ являются операторами Гильберта—Шмидта в $L^2(\mathbf{R}^n)$, а собственные функции $\chi_j = \chi_j(x, h)$ оператора $\hat{H}$:

$$\hat{H}\chi_j = E_j\chi_j, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

образуют базис в пространстве $L^2(\mathbf{R}^n)$ и таковы, что соответствующие функции плотности ρ_{χ_j} имеют по модулю $O(h^\infty)$ компактный в $\mathbf{R}^{2n}$ носитель, т. е.

$$\rho_{\chi_j} = g_j + k_j,$$

$\operatorname{supp} g_j$ — компакт, не зависящий от h и от j, $|k_j(x, p, h)| \leqslant h^N \cdot c_{N,j}$ при любом N.

Обозначим

$$\sigma(h) = \sum_{j=1}^{\infty} \exp\{-\beta E_j(h)\}, \quad \beta = \frac{1}{R\theta} = \mathrm{const} > 0, \tag{2.1}$$

где R — постоянная Больцмана, θ — температура. Сходимость и асимптотика ряда $\sigma(h)$ будут изучены ниже.

Рассмотрим бесконечный набор функций $\psi_1, \psi_2, \ldots \in S(\mathbf{R}^n)$ и построим потенциал (статистическую сумму)

$$V[\rho_\psi](x) = \frac{1}{\sigma(h)} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\beta E_j(h)} \iint V(x-y)\,\rho_{\psi_j}(y, \xi)\,dy\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sigma(h)} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\beta E_j(h)} \int V(x-y)\,|\psi_j(y)|^2 dy, \tag{2.2}$$

где функция V вещественна и ограничена со всеми производными на $\mathbf{R}^n$, а через ρ_ψ обозначен бесконечномерный вектор, компонентами которого являются функции плотности ρ_{ψ_j}, $j = 1, 2, \ldots$.

Температурными уравнениями Хартри [15] называется следующая унитарно-нелинейная задача Коши:

$$\begin{gathered} -ih\frac{\partial\psi_j}{\partial t} - h^2\Delta\psi_j + V[\rho_\psi]\,\psi_j = 0, \\ \psi|_{t=0} = \chi_j, \quad j = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{2.3}$$

Нашей задачей будет построение асимптотического (при $h \to 0$) решения этой задачи.

Заметим, что начальные функции χ_j в задаче (2.3) не удовлетворяют, вообще говоря, асимптотическим условиям, типа наличия разложения (1.5) для функции плотности. Тем не менее, используя полноту системы $\{\chi_j\}$, удается получить регулярное асимптотическое разложение по степеням h для потенциала $V[\rho_\psi]$ и тем самым свести задачу (2.3) к набору незацепленных линейных уравнений.

Будем искать решение задачи (2.3) в следующем виде:

$$\psi_j(x, t) = e^{\frac{\beta}{2}E_j(h)}\, G(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t)\,\chi_j(x, h), \tag{2.4}$$

где

$$G(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, 0) = \exp\left\{-\frac{\beta}{2}\hat{H}\right\}. \tag{2.5}$$

Подставив функции (2.4) в формулу (2.2), получим:

$$V[\rho_\psi](q) = \frac{1}{\sigma(h)} \sum_{j=1}^{\infty} (V_q\hat{G}\chi_j, \hat{G}\chi_j)_{L^2(\mathbf{R}^n)},$$

где $q \in \mathbf{R}^n$, V_q — оператор умножения на $V(q-x)$ в пространстве $L^2(\mathbf{R}^n_x)$.

Поскольку система $\{\chi_j\}$ образует базис в $L^2(\mathbf{R}^n)$, то для любых $1/h$ — псевдодифференциальных операторов $\hat f = f(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$ и $\hat g = g(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$ — с достаточно быстро убывающими символами справедлива формула для следа $\mathrm{tr}\,(\hat f \hat g^*)$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\hat f \chi_j, \hat g \chi_j)_{L^2} = \frac{1}{(2\pi h)^n} \iint f(y, \xi)\, \overline{g(y, \xi)}\, dy d\xi.$$

По предположению, $\exp\{-\frac{\beta}{2}\hat{\mathrm{H}}\}$ есть оператор Гильберта-Шмидта; его символ G интегрируем с квадратом $\mathbf{R}^{2n}$; поэтому

$$V[\rho_{\psi(t)}](x) = \frac{1}{\sigma(h)(2\pi h)^n} \iint V(x-y)\, |G(y, \xi, t)|^2\, dy d\xi. \qquad (2.6)$$

В частности, сравнивая (2.1) и (2.2), получим следующую формулу для $\sigma(h)$:

$$\sigma(h) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int |G(y, \xi, 0)|^2\, dy d\xi.$$

Начальное условие для G найдем из (2.5):

$$G(x, p, 0) = \mathrm{smb}\left\{e^{-\frac{\beta}{2}\hat H}\right\},$$

где smb — это отображение, обратное к отображению μ: $f \to f(\overset{2}{x}, \overset{1}{p})$ (см. [9] § 1 гл. II). Таким образом, получаем

$$\sigma(h) = \frac{\lambda(h)}{(2\pi h)^n},$$

где

$$\lambda(h) = \iint \mathrm{smb}\left\{e^{-\frac{\beta}{2}\hat H}\right\}(x, p)\, dx dp \qquad (2.7)$$

(что, очевидно, следует и непосредственно из (2.1)).

Получим теперь дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет символ G. Для этого подставим функцию (2.4) в левую часть уравнения (2.3). Для того чтобы (2.3) было выполнено, достаточно потребовать выполнения следующего операторного равенства:

$$-ih\frac{\partial}{\partial t} G(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t) - h^2 \overset{3}{\Delta} \cdot G(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t) + V[\rho_\psi](\overset{2}{x})\, G(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t) = 0.$$

Символ оператора, стоящего слева, имеет вид

$$-ih\frac{\partial G}{\partial t}(x, p, t) + \left(p - ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 G(x, p, t) + V[\rho_\psi](x)\, G(x, p, t).$$

Он должен быть равен нулю при всех x, p, t. Это условие и дает искомое уравнение для G. Остается только выразить $V[\rho_\psi]$ через G. Это сделано в формуле (2.6), которую мы можем переписать следующим образом:

$$V[\rho_\psi](x, t) = \frac{1}{\lambda(h)} \iiiint V(x-y)\, \rho_G(y, \xi; \eta, \omega; t)\, dy d\xi d\eta d\omega \overset{\mathrm{def}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{def}}{=} V[\rho_{G(t)}](x), \qquad (2.8)$$

где x, y, ξ, η, $\omega \in \mathbf{R}^n$, а ρ_G — функция плотности на $\mathbf{R}^{4n}$, отвечающая G:

$$\rho_G(z; w; t) = (2\pi h)^{-n} e^{-\frac{i}{h}\langle z, w\rangle} G(z, t)\, \overline{\tilde G(w, t)},$$

z, $w \in \mathbf{R}^{2n}$, волна обозначает преобразование Фурье.

Итак, уравнение для G имеет вид:

$$-ih\frac{\partial G}{\partial t} + \left(p - ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 G + V[\rho_{G(t)}](x)\, G = 0, \qquad (2.9)$$

а начальное условие есть

$$G|_{t=0} = \mathrm{smb}\left\{e^{-\frac{\beta}{2}\hat H}\right\}. \qquad (2.10)$$

Уравнение (2.9) представляет собой изученное в гл. II и III нелинейное уравнение квантовой механики. Поэтому достаточно получить разложение по степеням h начальной функции плотности $\rho_{G(0)}$, а затем по схеме главы III мы легко вычислим асимптотику G при $h \to 0$.

По формуле для символа сложной функции ([10], стр. 340) получим:

$$\mathrm{smb}\left\{e^{-\frac{\beta}{2}\hat H}\right\}(x, p) = \exp\left\{-\frac{\beta}{2}\hat H_p\right\}(1), \qquad (2.11)$$

где

$$\hat H_p = \left(p - ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + U(x),$$

1 — единичная функция на $\mathbf{R}^n$.

Далее, из формулы для сложной функции ([10], стр. 40) получим разложение правой части (2.11) по степеням параметра h.

Лемма 2.1. Существуют вещественные функции $f_k \in S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ $k = 0, 1, 2, \ldots, N$ такие, что

$$\mathrm{smb}\left\{e^{-\frac{\beta}{2}\hat H}\right\}(x, p) = e^{-\frac{\beta}{2}(p^2 + U(x))} \sum_{k=0}^{N} (-ih)^k f_k(x, p) +$$

$$+ h^N f_{N,h}(x, p), \qquad (2.12)$$

где остаток $f_{N,h}$ для любого $k \geqslant 0$ удовлетворяет оценке

$$\sup_{h \in [0,1]} \| f_{N,h} \|_{H^0_k(\mathbf{R}^{2n})} \leqslant \mathrm{const}_k.$$

Первые два коэффициента f_0, f_1 имеют следующий вид

$$f_0(x, p) = 1,$$

$$f_1(x, p) = \frac{\beta^2}{4} \frac{\partial U(x)}{\partial x} p,$$

а остальные вычисляются по рекуррентной формуле, приведенной в [10], стр. 40.

Из формулы (2.12) и начального условия (2.10) немедленно получаем следующее разложение для функции плотности $\rho_{G(0)}$:

$$\rho_{G(0)}(z, w) = \sum_{m=0}^{2N} (-ih)^m \sum_{|\alpha|=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-|\alpha|} f_{m-k-|\alpha|}(z) \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\beta}{2}\frac{\partial H}{\partial z}\right)^{\alpha} f_k(z)\right] \times$$
$$\times e^{-\beta H(z)} \frac{(-1)^{|\alpha|+k}}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^{\alpha} \delta(w) + O(h^{2N+1}),$$

где обозначено $H(z) \equiv H(x, p) = p^2 + U(x)$, а $\delta(w)$ — есть δ-функция Дирака, сосредоточенная в нуле.

Теперь, повторяя рассуждения § 2 гл. III, мы вычислим разложение $\rho_{G(t)}$ при любом t. Формулы получаются, однако, очень громоздкими. Поэтому мы ограничимся нулевым приближением $N=0$. Имеем:

$$\rho_{G(0)}(z, w) = e^{-\beta H(z)} \delta(w) + O(h). \tag{2.13}$$

Отсюда и из (2.7) получаем:

$$\lambda(h) = \int e^{-\beta H(z)} dz + O(h) = \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{n/2} \int e^{-\beta U(x)} dx + O(h). \tag{2.14}$$

Обозначим $z = (x, \xi)$, $w = (p, \omega)$. Тогда система уравнений Власова — Гамильтона, отвечающая (2.9), в силу (2.13) имеет следующий вид:

$$\dot{X} = 2P, \quad \dot{\Xi} = 0, \quad \dot{\Omega} = -2\Xi, \quad \dot{P} = -\frac{1}{\lambda(0)} \times$$
$$\times \int V(X - X(x', p', t)) e^{-\beta H(x', \xi')} \delta(p') \delta(\omega') d\xi' dp' d\omega' dx';$$
$$X|_{t=0} = x, \quad \Xi|_{t=0} = \xi; \quad P|_{t=0} = p, \quad \Omega|_{t=0} = \omega.$$

Следовательно,

$$\Xi = \xi, \quad \Omega = \omega - 2t\xi,$$

а для пары $Z = (X(x, p, t);\ P(x, p, t))$ мы имеем следующую систему уравнений:

$$\dot{X} = 2P,$$
$$\dot{P} = \frac{(-1)}{\left(\int e^{-\beta U(y)} dy\right)} \int e^{-\beta U(x')} \frac{\partial V}{\partial x}(X - X(x', 0, t)) dx', \tag{2.15}$$
$$X|_{t=0} = x, \quad P|_{t=0} = p$$

(мы использовали формулу (2.4) для $\lambda(0)$).

Уравнения (2.15) являются искомыми уравнениями Власова — Гамильтона для системы температурных уравнений Хартри (2.3).

Подведем предварительный итог наших построений.

Теорема 2.1. Решение $\psi_j(t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \ldots$ задачи Коши (2.3) для температурных уравнений Хартри существует и задается формулой

$$\psi_j(t) = e^{-\frac{\beta}{2} E_j} G(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}, t) \chi_j,$$

где функция $G(x, p, t)$ является решением задачи Коши (2.9), (2.10). При этом потенциал (2.2) имеет следующий вид:

$$V[\rho_{\psi(t)}](x) = \sum_{k=0}^{N} (-ih)^k V_k(x, t) + (-ih)^{N+1} V_{N,h}(x, t), \tag{2.16}$$

где

$$V_0(x, t) = \int \frac{e^{-\beta U(y)} V(x - X(y, 0, t)) dy}{\int e^{-\beta U(y')} dy'},$$

X — решение системы (2.15), $V_k(t) \in S^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ явно вычисляемые вещественные функции, и при некотором $l \geqslant 0$ справедлива оценка

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{h \in [0, 1]} \|V_{N,h}(t)\|_{H^{-l}_{-k}} \leqslant \mathrm{const}_{k,T}$$

для любых $T \geqslant 0$, $k \geqslant 0$.

Разложение (2.16) делает задачу Коши (2.3) линейной с точностью до $O(h^{N+1})$ и, более того, все уравнения системы (2.3) расцепляются. Решение каждого из получившихся уравнений строится с помощью канонического оператора, как это было указано в § 3, гл. III.

Введем лагранжево многообразие Λ в $\mathbb{R}^{4n+2}$ по формуле

$$\Lambda = \{(x, p, t, \xi, \omega, \theta) | x = X(x_0, p_0, t),\ p = p_0,\ \xi = P(x_0, p_0, t) - p_0,$$
$$\theta = |P(x_0, p_0, t)|^2 - V_0(X(x_0, p_0, t), t),\quad (x_0, p_0) \in \mathrm{supp}\, e_0 |t| \leqslant T\},$$

где T — любое фиксированное положительное число, а $e_0 \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ — некоторая вещественная функция, равная 1 в окрестности носителя по $\mathrm{mod}(O(h^{\infty}))$ функций ρ_{χ_j} (ср. условие на ρ_{χ_j} в начале параграфа).

Построим на Λ функцию $\varphi^{(N)} = \sum_{k=0}^{N} (-ih)^k \varphi_k$ аналогично лемме 3.1 гл. III, так чтобы функция $(\mathcal{K}_{\Lambda}^{1/h} \varphi^{(N)})(x, p, t)$ удовлетворяла уравнению (2.9) с точностью до $O(h^{N+1})$ при $t \leqslant T$ и были выполнены начальные условия

$$\varphi_k|_{t=0} = e_0 f_k e^{-\frac{\beta}{2} H}, \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

В результате получим теорему

Теорема 2.2. Функции

$$\psi_j^{(N)}=e^{\frac{\beta}{2}E_j(h)}(\mathcal{K}_\Lambda^{1/h}\varphi^{(N)})(\overset{2}{x},\overset{1}{p},t)\chi_j(x,h)$$

отличаются от точного решения задачи (2.3) на $O(h^N)$; точнее имеет место оценка:

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\psi_j^{(N)}(t)-\psi_j(t)\|_{L^2}\leqslant h^N\cdot\mathrm{const}_{j,T},\quad j=1,2,\ldots.$$

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Арсеньев А. А.,* Существование обобщенных решений уравнения Власова. Ж. вычисл. матем. и мат. физ., 1975, *15,* 1
2. *Бломберген Н.,* Нелинейная оптика. М., «Мир», 1966
3. *Балеску Р.,* Статистическая механика заряженных частиц. М., «Мир», 1971
4. *Боголюбов Н. Н.,* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.—Л., 1946
5. *Гуров К. П.,* Основания кинетической теории. М., «Наука», 1966
6. *Далецкий Ю. Л.,* Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями. Успехи мат. наук, 1965, XVII, № 5, 3—115
7. *Демков Ю. Н.,* Вариационные принципы в теории столкновений. М., Физматгиз, 1958
8. *Климантович Ю. Л.,* Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М., «Наука», 1975
9. *Маслов В. П.,* Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана для нелинейных уравнений. М., «Наука», 1976 (РЖМат, 1976, 11Б972К)
10. Операторные методы. М., «Наука», 1973
11. *Чеботарев А. М.,* Представление решения уравнения типа Хартри в виде T-отображения. Докл. АН СССР, 1975, *222,* № 5, 1037—1040 (РЖМат, 1976, 1А616)
12. *Соколов А. А., Лоскутов Ю. М., Тернов И. М.,* Квантовая механика. М., Учпедгиз, 1962
13. *Фейнман Р., Хиббс А.,* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М., «Мир», 1968
14. *Фок В. А.,* Работы по квантовой теории поля. Л., изд. 4, 1957
15. *Фрадкин Е. С.,* Метод функций Грина в квантовой теории поля и в статистике. Тр. ФИАН, 1965, *29,* 1—130
16. *Хилле Э., Филлипс Р.,* Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1962
17. *Achmanov S. A., Hochlov R. V., Suchorukov A. P.,* Self-defokusing, and self-modulation in nonlinear medium. «Laserhandbuch». V. 2, Holland-press, 1972, 5—108
18. *Kato T.,* Quasilinear equations of evolution, with applications to partial differential equations. Lect. Notes. Math., 1975, *448,* 25—70 (РЖМат, 1975, 11Б879)
19. *Nelson E.,* Feynman integrals and the Schröedinger equation. J. Math. Phys., 1964, *5,* № 3, 332—343 (РЖМат, 1965, 3Б636)
20. *Trotter H. F.,* On the product of semi-groups of operators. Proc. Amer. Math. Soc., 1959, *10,* № 4, 545—551 (РЖМат, 1960, 13096)

СОДЕРЖАНИЕ

льных

ОПЕЧАТКИ

ИНТ «Современные проблемы математики» 1978 г. Том II

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
28	9 строка снизу	$X\in D_{\mathrm{ev}}$	$X\in D_{\mathrm{ev}}$
157	12 снизу	остроим	построим
157	11 снизу	ую	щую
177	2 сверху	j	f
177	9 сверху	f	V
2?6	8 сверху	$f=1,\ldots m.$	$j=1,\ldots,m.$
3?4	23 сверху	10. Операторные...	10. —, Операторные...
	24 сверху	11. Чеботарев А. М.,	11. —, Чеботарев А. М.,