

В. П. МАСЛОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ  
МЕТОДЫ  
И ТЕОРИЯ  
ВОЗМУЩЕНИЙ



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1988

ББК 22.193  
М31  
УДК 519.6

Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.— 312 с.— ISBN 5-02-013784-7.

Содержит изложение основных результатов исследований автора по асимптотическим методам решения широкого круга задач физики, механики, информатики. Теория возмущений рассматривается самостоятельно и как инструмент, применяемый для уточнения и обоснования асимптотических формул. Примеры, которыми богата книга, позволяют читателю оценить большие возможности асимптотических методов, которые кроются в их глубокой связи с характерными особенностями, спецификой решаемой задачи.

За разработки этой тематики автор удостоен Ленинской премии 1986 г.

Для специалистов в области математики, физики, механики, а также для студентов старших курсов и аспирантов.

Табл. 2. Библиогр. 152 назв.

М 1602080000—177 31-88  
053(02)-88

ISBN 5-02-013784-7

© Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1988

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<b>ЧАСТЬ I. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ . . . . .</b>	<b>7</b>
Введение . . . . .	7
<b>Глава 1. Поведение собственных функций на бесконечности и теория возмущений для уравнений с операторными коэффициентами . . . . .</b>	<b>10</b>
§ 1. Некоторые сведения из теории операторов . . . . .	10
§ 2. Основной метод оценок решения . . . . .	13
§ 3. Дифференциальное уравнение второго порядка с операторными коэффициентами . . . . .	16
§ 4. Оператор первого порядка . . . . .	20
§ 5. Основная оценка для собственных функций . . . . .	21
§ 6. Две леммы абстрактной теории возмущений . . . . .	23
§ 7. Теория возмущений оператора первого порядка . . . . .	24
<b>Глава 2. Сильная сходимость решений операторных уравнений . . . . .</b>	<b>28</b>
§ 1. Слабая сходимость решений . . . . .	28
§ 2. Условия сильной сходимости решений . . . . .	31
§ 3. Ряды теории возмущений для обратного оператора . . . . .	41
<b>Глава 3. Возмущения однопараметрических полугрупп операторов и эволюционных уравнений . . . . .</b>	<b>43</b>
§ 1. Введение . . . . .	43
§ 2. Основная оценка решений эволюционного уравнения . . . . .	45
§ 3. Теория возмущений эволюционного уравнения . . . . .	49
§ 4. Теория возмущений полугрупп операторов . . . . .	51
<b>Глава 4. Слабая сходимость операторов . . . . .</b>	<b>59</b>
§ 1. Теорема о сходимости гомоморфизмов в топологических группах . . . . .	59
§ 2. Слабо предельная непрерывность . . . . .	63
§ 3. Теорема о сильной сходимости обратных операторов и ее применение . . . . .	66
§ 4. Регуляризация в теории возмущений слабо сходящихся операторов . . . . .	68
<b>ЧАСТЬ II. ТЕОРИЯ ХАРАКТЕРИСТИК В БОЛЬШОМ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ . . . . .</b>	<b>72</b>
<b>Глава 1. Постановка задачи . . . . .</b>	<b>72</b>
§ 1. Характеристики уравнений квантовой механики . . . . .	72
§ 2. Постановка задачи Коши для уравнений квантовой механики . . . . .	85
§ 3. Общее определение характеристик для уравнения с операторными коэффициентами . . . . .	89

Глава 2. Канонический оператор . . . . .	93
§ 1. Одномерный случай . . . . .	93
§ 2. Многомерный случай . . . . .	106
Глава 3. Асимптотика решений уравнений с частными производными . . . . .	113
§ 1. Квазиклассическая асимптотика . . . . .	113
§ 2. Асимптотика решений релятивистских уравнений . . . . .	115
§ 3. Примеры и следствия . . . . .	117
§ 4. Система уравнений теории упругости . . . . .	121
§ 5. Стационарный случай . . . . .	123
Глава 4. Уравнения с операторными коэффициентами . . . . .	127
§ 1. Уравнения в счетно-нормированных пространствах и задача многих тел в квантовой механике . . . . .	127
§ 2. Асимптотика решения задачи Коши уравнений с операторными коэффициентами . . . . .	130
§ 3. Гиперболическая система . . . . .	134
§ 4. Асимптотика собственных значений уравнения с операторными коэффициентами . . . . .	136
Глава 5. Характеристическое представление в малом для уравнений волнового типа . . . . .	140
§ 1. Асимптотика решения уравнения Шредингера в малом . . . . .	141
§ 2. Теорема вложения для абстрактных функций и оценки в счетно-нормированных пространствах . . . . .	146
§ 3. Релятивистские уравнения . . . . .	152
§ 4. Разложение произвольных начальных условий на компоненты, отвечающие различным корням характеристического многочлена . . . . .	159
§ 5. Решение уравнений переноса для некоторых уравнений (систем) волнового типа . . . . .	162
Глава 6. Асимптотика в малом операторных уравнений с частными производными . . . . .	169
§ 1. О корне квадратном из оператора в банаховом пространстве . . . . .	169
§ 2. Метод стационарной фазы для абстрактных функций . . . . .	176
§ 3. Асимптотика в малом решений абстрактных уравнений . . . . .	197
Глава 7. Асимптотика в большом решений абстрактных уравнений . . . . .	218
§ 1. Лемма о локальных координатах . . . . .	218
§ 2. Доказательство теорем об инвариантности . . . . .	220
§ 3. Асимптотика решения в большом . . . . .	229
Глава 8. Квазиклассические формулы для решений уравнений квантовой механики в целом . . . . .	233
§ 1. Метод шагов для построения асимптотики в целом . . . . .	234
§ 2. Леммы о решениях уравнений Гамильтона . . . . .	252
Глава 9. Асимптотика решений уравнений туннельного типа . . . . .	269
§ 1. Системы туннельных гамильтонианов . . . . .	269
§ 2. Примеры экспоненциальных асимптотик . . . . .	272
§ 3. Туннельный канонический оператор и асимптотика фундаментального решения . . . . .	277
§ 4. Задача о больших отклонениях . . . . .	285
Добавление. Асимптотика решения задач Коши для эволюционных уравнений с быстроубывающими начальными условиями . . . . .	288
Список основной литературы . . . . .	303
Список дополнительной литературы . . . . .	306
Список литературы к добавлению . . . . .	310

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее издание является переработанным вариантом книги автора «Теория возмущений и асимптотические методы», изданной малым тиражом издательством МГУ в 1965 г. Многие теоремы и доказательства звучат несколько наивно сейчас, но, во-первых, для определенного круга читателей они окажутся более доступными, а во-вторых, идеи, заложенные в этой книге, послужили отправной точкой обширного круга исследований в области асимптотических методов, например, в работах [13, 39, 44, 46, 54, 64] (см. дополнительную литературу), и, безусловно, могут стимулировать новые исследования в этой области.

По замыслу автора книга в известной степени связывает классические уравнения математической физики и уравнения квантовой механики, которые рассматриваются как частные случаи общих уравнений с операторными коэффициентами в функциональных пространствах. Такое обобщение оказывается полезным и в конкретных физических приложениях, поскольку оно устанавливает соответствие между асимптотическими формулами, относящимися к различным областям физики.

Достаточно простые формулы, полученные в книге, могут быть непосредственно использованы в теории дифракции и рефракции в электронной оптике, а также в акустике, теории ударных волн и квантовой теории молекул.

В первой части рассматривается, во-первых, теория возмущений самосопряженных операторов с дискретным спектром, а во-вторых, теория возмущений операторных уравнений. Эта последняя теория является тем аппаратом, который используется для уточнения оценок асимптотических формул и установления сходимости в тех или иных функциональных пространствах.

Применение абстрактных теорем иллюстрируется на примерах уравнений в частных производных.

Во второй части исследуется асимптотическое поведение решений уравнений в частных производных с осциллирующими и разрывными начальными данными, а также асимптотика собственных значений самосопряженных дифференциальных операторов. Постановка задач и формулировки основных теорем даны в гл. 1–4. Далее, в гл. 5–8, дается доказательство этих теорем. Из методических

соображений топологические утверждения доказываются в гл. 7 в формулировке, достаточной для приложений, но более ослабленной, чем та, которая дана в гл. 2. В гл. 9 рассматривается асимптотика решений уравнений туннельного типа.

В Добавлении исследуется асимптотическое поведение решений эволюционных уравнений с быстро убывающими начальными данными. Асимптотики решения линейных задач оказываются частным случаем асимптотик, полученных в гл. 1—4 части II, и вместе с тем интересны сами по себе, поскольку обладают свойством самоподобности. Это свойство оказывается присущим и ряду нелинейных задач, рассмотренных также в Добавлении.

## ЧАСТЬ I

### ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

#### ВВЕДЕНИЕ

Исходным пунктом обширного круга вопросов, который объединяется общим названием «теория возмущений», служит следующая задача. Пусть нам известны собственные значения и собственные векторы матрицы  $A$ . Требуется найти собственные векторы и собственные значения матрицы

$$A(\varepsilon) = A + \varepsilon B, \quad (0.1)$$

где  $B$  — фиксированная матрица,  $\varepsilon$  — малое число. Решение этой задачи хорошо известно. Оно состоит в том, что собственные значения  $\lambda_k(\varepsilon)$  матрицы  $A(\varepsilon)$  записываются в виде ряда

$$\lambda_k(\varepsilon) = \lambda_k + \varepsilon C_{1k} + \varepsilon^2 C_{2k} + \dots$$

по степеням  $\varepsilon$ , где  $\lambda_k$  — собственное значение невозмущенной матрицы  $A(0)$ , а  $c_{ik}$  — не зависящие от  $\varepsilon$  коэффициенты. Аналогичное представление имеет место и для собственных векторов  $\psi_k(\varepsilon)$ .

В некоторых задачах, также относящихся к теории возмущений, приходится искать представление в виде ряда по степеням  $\varepsilon$  для той или иной функции от  $A(\varepsilon)$ , например для  $(A + \varepsilon B)^{-1}$  или для  $\exp\{A + \varepsilon B\}$ . Все эти задачи, не вызывающие больших затруднений, когда речь идет о матрицах, становятся весьма сложными, если вместо матриц рассматриваются линейные операторы, действующие в том или ином бесконечномерном банаховом пространстве.

В конечномерном случае очевидно следующее. Если  $A(\varepsilon) = A + \varepsilon B$ , то при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют место предельные соотношения  $\lambda_k(\varepsilon) \rightarrow \lambda_k$ ,  $\psi_k(\varepsilon) \rightarrow \psi_k$ ,  $(A + \varepsilon B)^{-1} \rightarrow A^{-1}$  (если  $A^{-1}$  существует),  $\exp\{A + \varepsilon B\} \rightarrow \exp A$  и т. д., т. е. собственные значения, собственные векторы, обратная матрица и т. д., отвечающие невозмущенной матрице, служат нулевыми приближениями (т. е. приближениями с точностью до членов, стремящихся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) соответствующих величин, относящихся к возмущенной матрице  $A + \varepsilon B$ .

В противоположность этому, для операторов, действующих в бесконечномерном пространстве, вопрос о нулевом приближении (т. е. о сходимости при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) некоторой функции возмущенного оператора к той же функции невозмущенного оператора представляет существенную трудность, а иногда соответствующий предельный переход может оказаться вообще невыполнимым. В качестве примера можно указать известную теорему Г. Вейля, из которой, в частности, следует, что всякий ограниченный самосопряженный оператор  $A$ , действующий в гильбертовом пространстве, можно представить

соображений топологические утверждения доказываются в гл. 7 в формулировке, достаточной для приложений, но более ослабленной, чем та, которая дана в гл. 2. В гл. 9 рассматривается асимптотика решений уравнений туннельного типа.

В Добавлении исследуется асимптотическое поведение решений эволюционных уравнений с быстро убывающими начальными данными. Асимптотики решения линейных задач оказываются частным случаем асимптотик, полученных в гл. 1—4 части II, и вместе с тем интересны сами по себе, поскольку обладают свойством самоподобности. Это свойство оказывается присущим и ряду нелинейных задач, рассмотренных также в Добавлении.

## ЧАСТЬ I

### ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

#### ВВЕДЕНИЕ

Исходным пунктом обширного круга вопросов, который объединяется общим названием «теория возмущений», служит следующая задача. Пусть нам известны собственные значения и собственные векторы матрицы  $A$ . Требуется найти собственные векторы и собственные значения матрицы

$$A(\varepsilon) = A + \varepsilon B, \quad (0.1)$$

где  $B$  — фиксированная матрица,  $\varepsilon$  — малое число. Решение этой задачи хорошо известно. Оно состоит в том, что собственные значения  $\lambda_k(\varepsilon)$  матрицы  $A(\varepsilon)$  записываются в виде ряда

$$\lambda_k(\varepsilon) = \lambda_k + \varepsilon C_{1k} + \varepsilon^2 C_{2k} + \dots$$

по степеням  $\varepsilon$ , где  $\lambda_k$  — собственное значение невозмущенной матрицы  $A(0)$ , а  $c_{jk}$  — не зависящие от  $\varepsilon$  коэффициенты. Аналогичное представление имеет место и для собственных векторов  $\psi_k(\varepsilon)$ .

В некоторых задачах, также относящихся к теории возмущений, приходится искать представление в виде ряда по степеням  $\varepsilon$  для той или иной функции от  $A(\varepsilon)$ , например для  $(A + \varepsilon B)^{-1}$  или для  $\exp\{A + \varepsilon B\}$ . Все эти задачи, не вызывающие больших затруднений, когда речь идет о матрицах, становятся весьма сложными, если вместо матриц рассматриваются линейные операторы, действующие в том или ином бесконечномерном банаховом пространстве.

В конечномерном случае очевидно следующее. Если  $A(\varepsilon) = A + \varepsilon B$ , то при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют место предельные соотношения  $\lambda_k(\varepsilon) \rightarrow \lambda_k$ ,  $\psi_k(\varepsilon) \rightarrow \psi_k$ ,  $(A + \varepsilon B)^{-1} \rightarrow A^{-1}$  (если  $A^{-1}$  существует),  $\exp\{A + \varepsilon B\} \rightarrow \exp A$  и т. д., т. е. собственные значения, собственные векторы, обратная матрица и т. д., отвечающие невозмущенной матрице, служат нулевыми приближениями (т. е. приближениями с точностью до членов, стремящихся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) соответствующих величин, относящихся к возмущенной матрице  $A + \varepsilon B$ .

В противоположность этому, для операторов, действующих в бесконечномерном пространстве, вопрос о нулевом приближении (т. е. о сходимости при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) некоторой функции возмущенного оператора к той же функции невозмущенного оператора представляет существенную трудность, а иногда соответствующий предельный переход может оказаться вообще невыполнимым. В качестве примера можно указать известную теорему Г. Вейля, из которой, в частности, следует, что всякий ограниченный самосопряженный оператор  $A$ , действующий в гильбертовом пространстве, можно представить

как предел (по норме) последовательности операторов  $A_n$ , имеющих чисто точечный спектр.

Если рассматривать оператор вида (0.1), где  $A$  и  $B$  неограничены, то само понятие малости возмущения теряет определенный смысл: здесь нет оснований ожидать, что влияние возмущения  $\varepsilon B$  будет в каком-то смысле мало даже при сколь угодно малых  $\varepsilon$ . Для получения содержательных результатов обычно приходится требовать, чтобы возмущающий оператор был в некотором смысле «подчинен» невозмущенному оператору.

Другая возможность (именно ее мы будем рассматривать ниже) состоит в том, что можно наложить некоторые условия на поведение  $A(\varepsilon)$  как функции от  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При этом нет необходимости считать, что зависимость  $A(\varepsilon)$  от параметра  $\varepsilon$  определяется именно формулой (0.1).

Методы теории возмущений широко применяются в различных физических задачах, в частности в квантовой механике. Гамильтониан некоторой квантовомеханической системы часто можно рассматривать как сумму вида

$$H = H_1 + \varepsilon H_2, \quad (0.2)$$

где  $\varepsilon H_2$  представляет собой малую «поправку» к невозмущенному гамильтониану  $H_1$ , собственные функции и собственные значения которого считаются известными. (Такая ситуация возникает, например, в случае системы частиц, слабо взаимодействующих частиц, а  $\varepsilon H_2$  — их взаимодействие.)

Если рассматривается оператор вида (0.1), где  $B$  ограничен, то известно, что перечисленные задачи теории возмущений имеют решение при достаточно малом  $\varepsilon$ . Решение поставленных задач дается в виде сходящегося ряда по степеням  $\varepsilon$ .

Приведем соответствующие формулы (так называемые формулы теории возмущений)

$$(A + \varepsilon B)^{-1} = A^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k (BA^{-1})^k, \quad (0.3)$$

$$e^{i(A+\varepsilon B)} = e^{iA} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \varepsilon^k (iB)^k. \quad (0.4)$$

Пусть  $A$  и  $B$  — самосопряженные операторы,  $\lambda_0$  — изолированная  $m$ -кратная точка спектра оператора  $A$ ,  $d$  — расстояние от  $\lambda_0$  до остального спектра  $A$ .

Проекционный оператор  $E_{\lambda_0-d/2, \lambda_0+d/2}^A$  на подпространство собственных функций оператора  $A$ , отвечающих точке  $\lambda_0$ , имеет вид

$$E_{\lambda_0-d/2, \lambda_0+d/2}^A = \frac{1}{2\pi i} \oint (A - z)^{-1} dz, \quad (0.5)$$

где контур — кривая в комплексной плоскости, пересекающая действительную прямую в точках  $\lambda_0 - d/2$ ,  $\lambda_0 + d/2$ . При этом,

очевидно,

$$\lambda_0 = \frac{(g, AE_{\lambda_0-d/2, \lambda_0+d/2}^A g)}{(g, E_{\lambda_0-d/2, \lambda_0+d/2}^A g)}$$

для любого  $g$ , проекция которого на рассматриваемое подпространство собственных функций отлична от нуля. При достаточно малом  $\varepsilon$  проекционный оператор  $E^{A+\varepsilon B}$  имеет размерность  $m$  и

$$E_{\lambda_0-d/2, \lambda_0+d/2}^{A+\varepsilon B} = \frac{1}{2\pi i} \oint (A - z)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k [B(A - z)^{-1}]^k dz, \quad (0.6)$$

где контур — окружность с центром  $\lambda_0$  и радиусом  $d/2$ . Следовательно, собственные функции и собственные значения оператора  $A + \varepsilon B$  в  $d/2$ -окрестности точки  $\lambda_0$  совпадают с собственными функциями и собственными значениями оператора

$$(A + \varepsilon B) \frac{1}{2\pi i} \oint (A - z)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k [B(A - z)^{-1}]^k dz, \quad (0.7)$$

который можно рассматривать на подпространстве размерности  $m$ . Последняя задача сводится к отысканию собственных функций и собственных значений симметрической матрицы порядка  $m$ . Полученные таким образом ряды для собственных функций и собственных значений оператора  $A + \varepsilon B$  называются рядами теории возмущений. В учебниках квантовой механики [20, 48] приводятся обычно лишь первые два члена этих рядов.

Мы будем рассматривать в первых двух главах лишь случай, когда спектр оператора  $A$  дискретный или имеет по крайней мере одну изолированную точку  $\lambda$ .

Задача о возмущении унитарных операторов и однопараметрических полугрупп операторов рассматривается в гл. 3. Там же изучается более общая задача — поведение при  $n \rightarrow \infty$  решения уравнения

$$i \frac{du}{dt} - A_n(t) u = F(t),$$

удовлетворяющего начальному условию  $u(0) = u_0$ . Здесь  $A_n(t)$  — некоторый оператор в банаховом пространстве  $B$ , непрерывно зависящий от параметра  $t$  и сходящийся в некотором смысле при  $n \rightarrow \infty$ ,  $F(t)$  — заданная функция от  $t$  со значениями в  $B$ . В гл. 2, 4 изучается и более общая задача. Она ставится следующим образом.

Пусть семейство  $\{T_\varepsilon\}$  операторов (или последовательность операторов  $\{T_n\}$ ) в банаховом пространстве  $B$ , зависящее от параметра  $\varepsilon$ , сходится в том или ином смысле к предельному оператору  $T$ . Прямая задача теории возмущений заключается в построении аппроксимации оператора  $T_\varepsilon^{-1}$  (или  $T_n^{-1}$ ) с помощью известных операторов  $T$  и  $T^{-1}$ . Так же изучается и обратная задача теории возмущений — выяснение существования обратного оператора  $T^{-1}$  и аппроксимация его с помощью семейства  $T_\varepsilon^{-1}$ .

## ГЛАВА I

### ПОВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

#### § 1. Некоторые сведения из теории операторов

Мы будем рассматривать линейные операторы (вообще говоря, неограниченные), действующие из некоторого банахова пространства  $B_1$  в другое банахово пространство  $B_2$ . Таким образом, под *линейным оператором*  $A$  понимается функция

$$v = A(u),$$

определенная на некотором линейном многообразии  $D(A) \subset B_1$ , со значениями в  $B_2$ , удовлетворяющая условию

$$A(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha A(u_1) + \beta A(u_2).$$

Область значений оператора  $A$ , т. е. совокупность  $\{Au; u \in D(A)\}$ , обозначим через  $R(A)$ . Оператор  $A$  называется *непрерывным*, если из  $u_n \rightarrow u$  следует  $Au_n \rightarrow Au$ . Оператор  $A$  *ограничен*, если

$$\sup_{u \in D(A)} \frac{\|Au\|}{\|u\|} < \infty;$$

величина  $\sup_{u \in D(A)} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$  называется *нормой* оператора  $A$  и обозначается  $\|A\|$ . Как известно, непрерывность линейного оператора равносильна его ограниченности. Если оператор  $A$  непрерывен, то его можно продолжить по непрерывности на замкнутое подпространство  $\bar{D}(A)$ , рассмотрением которого (вместо всего  $B_1$ ) можно при этом и ограничиться. Таким образом, ограниченный линейный оператор естественно считать определенным на всем пространстве.

Некоторое семейство операторов  $\{A_\alpha\}$  мы будем называть *ограниченным в совокупности*, если существует такая константа  $M$ , что  $\|A_\alpha\| \leq M$  для всех  $A_\alpha$  из рассматриваемого семейства.

Оператор  $A$  называется *замкнутым*, если из того, что  $u_n \rightarrow u$  и  $Au_n \rightarrow v$ , следует  $u \in D(A)$  и  $Au = v$ . Всякий ограниченный оператор замкнут, но, вообще говоря, не наоборот.

Оператор  $\bar{A}$  называется *расширением* оператора  $A$ , если  $D(A) \subset D(\bar{A})$  и  $Au = \bar{A}u$  для всех  $u \in D(A)$ .

Ниже мы будем рассматривать, как правило, операторы или замкнутые, или такие, для которых существуют замкнутые расширения. Если оператор  $A$  имеет замкнутые расширения, то среди них существует наименьшее (т. е. имеющее наименьшую область определения), называемое *замыканием* оператора  $A$ . Мы обозначим его  $\bar{A}$ .

Если область определения  $D(A)$  оператора  $A$  всюду плотна в  $B_1$ , то существует однозначно определенный оператор  $A^*$ , действующий из  $B_2^*$  в  $B_1^*$  (\* означает сопряженность) и удовлетворяющий условию

$$(Au, \psi) = (u, A^*\psi) \quad (\text{где } \psi \in B_2)$$

для всех  $u \in D(A)$ .

Нетрудно проверить, что сопряженный оператор всегда замкнут. Если из  $Au = 0$  следует  $u = 0$ , то на  $R(A)$  определен *обратный* оператор  $A^{-1}$ , область значений которого есть  $D(A)$ . Из определения следует, что оператор  $A$  замкнут в том и только том случае, если замкнут оператор  $A^{-1}$ . Замкнутый оператор  $A$ , удовлетворяющий условию  $D(A) = \bar{B}_1$ , ограничен.

Пусть  $A$  — линейный замкнутый оператор в гильбертовом пространстве  $H$  с плотной областью определения  $D(A)$ . Тогда существует оператор

$$B = [1 + A^*A]^{-1},$$

являющийся ограниченным самосопряженным оператором, причем

$$\|B\| \leq 1.$$

Оператор  $AB$  также ограничен:  $\|AB\| \leq 1$ . Области определения  $D(A^*)$  и  $D(A^*A)$  операторов  $A^*$  и  $A^*A$  плотны в  $H$ . Оператор  $A^{**}$  существует и равен  $A$ .

Ниже нам придется все время пользоваться понятием сходящейся последовательности операторов. Можно определять различные виды сходимости линейных операторов. Для нас будут существенны следующие. Пусть  $\{A_n\}$  — последовательность ограниченных операторов. Говорят, что эта последовательность сходится равномерно к оператору  $A$ , если  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Последовательность  $\{A_n\}$  линейных операторов (вообще говоря, неограниченных) с общей областью определения  $D$  называется *сильно сходящейся* на  $D$  (к оператору  $A$ ), если для любого  $u \in D$

$$\|A_n u - Au\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Наконец, последовательность  $\{A_n\}$  называется *слабо сходящейся* (к  $A$ ), если для любого  $u \in D$  последовательность  $\{A_n u\}$  слабо сходится к  $Au$ . Иначе говоря, это означает, что  $(A_n u, \psi) \rightarrow (Au, \psi)$  для любого  $u \in D$  и любого  $\psi \in B_2^*$ .

Связь между этими тремя видами сходимости можно изобразить схемой

$$\text{равномерная} \rightarrow \text{сильная} \rightarrow \text{слабая.}$$

Применительно к линейным преобразованиям конечномерного пространства все эти три вида сходимости означают одно и то же; в бесконечномерном случае эти понятия различны.

Сформулируем известные результаты о сходящихся последовательностях линейных операторов, на которые нам придется опираться ниже.

1. Теорема Банаха—Штейнгауза. Пусть  $\{A_n\}$  — ограниченная последовательность линейных операторов, действующих из  $B_1$  в  $B_2$ , т. е. пусть  $\|A_n\| \leq M$  ( $M = \text{const}$ ) для всех  $n$  и пусть  $\|A_n f - A f\| \rightarrow 0$  для всех  $f$ , принадлежащих некоторому множеству, всюду плотному в  $B_1$ . Тогда  $\|A_n f - A f\| \rightarrow 0$  для всех  $f \in B_1$  и  $\|A\| \leq M$ .

2. Если последовательность  $\{f_n\}$  ( $f_n \in B_1$ ) слабо сходится, то  $\{\|f_n\|\}$  ограничена.

3. В рефлексивном банаховом пространстве всякая ограниченная последовательность слабо компактна.

4. Если в банаховом пространстве последовательность  $\{f_n\}$  слабо сходится к  $f$ , а  $\{\|f_n\|\}$  сходится к  $\|f\|$ , то  $\{f_n\}$  сильно сходится к  $f$ .

5. Теорема Лебега. Если последовательность измеримых на  $[0, 1]$  функций  $\{f_n(t)\}$  сходится почти всюду к  $f(t)$  и ограничена некоторой интегрируемой функцией, то  $\left\{ \int_0^1 f_n(t) dt \right\}$  сходится к

$$\int_0^1 f(t) dt.$$

Ниже придется рассматривать операторы, действующие в пространстве функций со значениями в банаховом (в частности, гильбертовом) пространстве. Для нас существенны будут три варианта такой конструкции.

а) Пусть  $B_1$  — банахово пространство и пусть  $C(B_1)$  — совокупность функций  $u(t)$  со значениями в  $B_1$ , определенных на отрезке  $[0, s]$  и непрерывных (т. е. таких, что  $\|u(t) - u(t_0)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow t_0$ ). Определим в  $C(B_1)$  норму

$$\|u(t)\| = \sup_t \|u(t)\|_{B_1};$$

при этом  $C(B_1)$  становится банаховым пространством.

б) Пусть  $H$  — гильбертово пространство и пусть  $L_2[H]$  — совокупность функций  $h(t)$  со значениями в  $H$ , измеримых (в том смысле, что  $(h(t), h_0)$  есть измеримая числовая функция при любом  $h_0 \in H$ ) и удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|h(t)\|_H^2 dt < \infty.$$

Если определить скалярное произведение в  $L_2[H]$  как

$$(h(t), g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} (h(t), g(t))_H dt,$$

то  $L_2[H]$  будет гильбертовым пространством, сепарабельным, если сепарабельно  $H$ .

Нам понадобится следующий факт: если функции  $h, g \in L_2[H]$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow \pm\infty$  и  $h', g' \in L_2[H]$ , то

$$\left( \frac{d}{dt} h(t), g(t) \right) = - \left( h(t), \frac{d}{dt} g(t) \right).$$

Для доказательства реализуем  $H$  в виде пространства последовательностей  $l_2$ . Тогда каждый элемент из  $L_2[H]$  есть последовательность  $\{a_n(t)\}$ , где  $a_n(t)$  — измеримые числовые функции и

$$\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} a_n^2(t) dt < \infty.$$

Скалярное произведение элементов  $a, b \in L_2[H]$  запишется в виде

$$(a, b) = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} a_n(t) b_n(t) dt.$$

Если все  $a_n(t)$  и  $b_n(t)$  стремятся к нулю при  $|t| \rightarrow \infty$ ,  $a'_n, b'_n$  — элементы из  $L_2[H]$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} a'_n(t) b_n(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} a_n(t) b'_n(t) dt$$

и, следовательно,

$$\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} a'_n(t) b_n(t) dt = - \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} a_n(t) b'_n(t) dt.$$

в) Пусть  $B$  — банахово пространство и пусть  $L_1(B)$  — совокупность функций  $u(t)$  со значениями в  $B$ , определенных на отрезке  $[0, s]$  и таких, что функция  $\|u(t)\|_B$  интегрируема по  $t$  на  $[0, s]$ . Определим норму в  $L_1(B)$ :

$$\|u(t)\|_{L_1(B)} = \int_0^1 \|u(t)\|_B dt;$$

при этом  $L_1(B)$  становится банаховым пространством. Функции со значениями в  $B$ , принадлежащие  $L_1(B)$ , называются функциями, интегрируемыми по Бохнеру.

Множество всех двузначных функций фундаментально в  $L_1(B)$ , т. е. линейная оболочка этого множества плотна в  $L_1(B)$ .

## § 2. Основной метод оценок решения

Основную идею метода мы изложим вначале на простом примере.

Пример. Рассмотрим в  $L_2[\mathbb{R}^2]$  оператор

$$\hat{L} = A \frac{\partial}{\partial x} + B = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \bar{B}_1(x, y, \frac{\partial}{\partial y}),$$



где  $B(x, y, \partial/\partial y)$  — линейный оператор, коммутирующий с  $x$ ,  $A(x, y)$  — числовая функция,  $|A(x, y)| \leq 1$ . Предположим вначале, что оператор  $\hat{L}^{-1}$  существует и ограничен:  $\|\hat{L}^{-1}\| \leq N$ . Пусть  $u \in L_2$  — решение уравнения

$$\hat{L}u = f(x, y), \quad f \in L_2, \quad f(x, y) = 0 \text{ при } x \geq \tilde{x}.$$

Очевидно, что если  $\varphi(x)$  — кусочно дифференцируемая функция, причем, если  $\varphi(x)f(x, y) = 0$ , то

$$\hat{L}(\varphi u) = \hat{L}(\varphi u) - \varphi f = A\varphi_x u.$$

Следовательно,

$$\|\varphi(x)u\|^2 \leq N^2 \|\varphi_x u\|^2.$$

Полагая

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x - \xi)^k & \text{при } x > \xi, \\ 0 & \text{при } x \leq \xi, \end{cases}$$

где  $k$  — любое целое,  $\xi > \tilde{x}$ , получаем

$$\int_{\xi}^{\infty} (x - \xi)^{2k} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy dx \leq N^2 k^2 \int_{\xi}^{\infty} (x - \xi)^{2k-2} dx \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy. \quad (2.1)$$

При  $k=1$  интегралы в правой части неравенства сходятся. Из этого неравенства следует сходимость интеграла в левой части. Предположим по индукции, что интеграл

$$\int_{\xi}^{\infty} (x - \xi)^{2k-2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy dx$$

сходится. Из (2.1) следует сходимость интеграла  $\int_{\xi}^{\infty} (x - \xi)^{2k} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy dx$ .

Отсюда следует, что все интегралы в (2.1) сходятся при  $k=n$ , где  $n$  — любое положительное число.

Обозначим

$$\Phi_n(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} (x - \xi)^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy dx.$$

Тогда из (2.1) имеем

$$\Phi_n(\xi) \leq N^2 \frac{n^2}{2n(2n-1)} \Phi_n''(\xi).$$

Это неравенство позволяет оценить интеграл  $\int_{\xi}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x, y) dy$  при

больших  $\xi$ .

Имеем

$$\Phi_n(\xi) \leq \frac{N^2}{4} (1 + \delta_n) \Phi_n''(\xi),$$

где  $\delta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Домножив обе части неравенства на  $\Phi_n' \geq 0$  и проинтегрировав от  $\xi$  до  $\infty$ , придем к неравенству

$$\Phi_n^2(\xi) \leq \frac{N^2}{4} (1 + \delta_n) (\Phi_n')^2.$$

Отсюда, учитывая, что  $\Phi_n(\infty) = 0$ , получим

$$\Phi_n(\xi) \leq e^{-\frac{2}{N} (1 + \delta_n) (\xi - \xi_0)} \Phi_n(\xi_0), \quad \xi_0 > \tilde{x}. \quad (2.2)$$

Приведем пример оценки решения обыкновенного дифференциального уравнения, когда (2.2) остается справедливым при  $\delta_n = 0$ .

Пусть  $\hat{L} = \frac{d}{dx} + 1$ . Тогда  $\|\hat{L}^{-1}\| < 1$ . Пусть  $\hat{L}u = 0$  при  $x > a$ ; тогда при  $x > a$ ,  $u = Ce^{-x}$

$$\int_{\xi}^{\infty} (x - \xi)^{2n} u^2 dx = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}} Ce^{-2\xi}.$$

Следовательно,

$$\Phi_n(\xi) = e^{-2(\xi - \xi_0)} \Phi_n(\xi_0).$$

Из (2.2) следует оценка для  $\int_{\xi}^{\infty} u^2 dx$ , поскольку

$$\int_{\xi+1}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy \leq \int_{\xi+1}^{\infty} (x - \xi)^{2n} dx \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy \leq \int_{\xi}^{\infty} (x - \xi)^{2n} dx \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = \Phi_n(\xi).$$

**З а м е ч а н и е 1.** Нетрудно видеть, что от оператора  $B$  требуется лишь, чтобы он коммутировал с  $\varphi(x)$ . От оператора  $A$ , помимо этого, требуется ограниченность. Следовательно,  $B$  может быть матрицей, содержащей производные по всем аргументам, за исключением  $x$ , с любыми коэффициентами, зависящими от всех переменных. Оператор  $A$  может быть матрицей с ограниченными элементами, зависящими от всех переменных. Иначе говоря,  $A(x)$  и  $B(x)$  — операторы в некотором гильбертовом пространстве  $H$ , зависящие от  $x$  как от параметра. Будем обозначать норму в  $H$  через  $\|g\|_H$ . Оператор  $\hat{L} = A \frac{\partial}{\partial x} + B(x)$  будем рассматривать в гильбертовом пространстве  $L_2[H]$  функций от  $x$  с интегрируемым квадратом, принимающих значения в  $H$ .

Если  $A(x)$ ,  $B(x)$  — матрицы, то элемент  $h \in L_2[H]$  будет столбцом  $h_v$  и в определение нормы войдет также сумма по индексу  $v$ . Поэтому (2.1) остается справедливым для систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка по  $x$ .

Аналогичный метод можно применить в банаховых пространствах.

**З а м е ч а н и е 2.** При выводе формул (2.1) мы требовали существования и ограниченности оператора  $\hat{L}^{-1}$ . Однако, если учесть,

что  $\varphi(x) = 0$  при  $x < \xi$ , то станет ясно, что достаточно потребовать существования и ограниченности оператора  $\hat{L}_\xi^{-1}$ , где  $\hat{L}_\xi$  — сужение оператора  $\hat{L}$  на множество функций, обращающихся в нуль при  $x < \xi$  ( $\hat{L}_\xi \subset L$ ). При этом норма обратного оператора  $\|\hat{L}_\xi^{-1}\| = N(\xi)$  будет зависеть от  $\xi$ , и в неравенствах (2.1) вместо  $N$  можно написать  $N(\xi)$ .

Это замечание будет особенно важно, когда мы перейдем к операторам вида

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + B(x),$$

например, не имеющих обратного. Здесь, если  $B(x) > 0$  при  $x > a$ , причем  $B(x) > N(\xi)$  при  $x > \xi \geq a$ , то на функциях, равных нулю при  $x < \xi$ , обратный оператор  $\hat{L}_\xi^{-1}$  будет существовать, причем  $\|\hat{L}_\xi^{-1}\| \leq N(\xi)$ .

### § 3. Дифференциальное уравнение второго порядка с операторными коэффициентами

Изложенный метод мы применим для получения оценок собственных функций самосопряженных операторов.

Рассмотрим пространство  $L_2(H)$  функций  $g(x)$  со значениями в некотором гильбертовом пространстве  $H$ :

$$\|g\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \|g(x)\|_H^2 dx, \quad (g_1, g_2) = \int_{-\infty}^{\infty} (g_1(x), g_2(x))_H dx.$$

Рассмотрим в  $L_2(H)$  самосопряженный оператор

$$\hat{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + B(x), \quad (3.0)$$

где  $B(x)$  коммутирует с оператором умножения на  $x$  и удовлетворяет условию

$$\int_{\xi}^{\infty} (B(x)g(x), g(x))_H dx \geq \alpha^2 \int_{\xi}^{\infty} \|g(x)\|_H^2 dx, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad \text{и } g(x) \in D(B(x)) \quad (3.1)$$

( $D(B)$  — область определения оператора  $B$ ).

**Теорема 1.1.** Пусть  $\lambda$  — точка дискретного спектра оператора  $\hat{L}$ ,  $d < \infty$  — расстояние от точки  $\lambda$  до предельного спектра оператора  $\hat{L}$ ,  $a = d^2 - \lambda$ . Каждая собственная функция  $\psi(x)$  оператора  $\hat{L}$ , отвечающая собственному значению  $\lambda$ , удовлетворяет неравенству

$$\int_{\xi}^{\infty} \|\psi(x)\|_H^2 dx \leq c(\delta) e^{-2(1-\delta)\omega\xi}, \quad (3.2)$$

где  $\delta > 0$  — любое заданное число,  $c(\delta)$  — константа, зависящая от  $\delta$ , а

$$\omega = [0,4a + (0,16a^2 + 0,2d^2)^{1/2}]^{1/2} \quad (3.3)$$

и является точной константой\*).

**Следствие.** Пусть  $\psi(x, y, z)$  — собственная функция уравнения Шредингера

$$-\Delta\psi + u(x, y, z)\psi = \lambda\psi$$

и пусть

$$\inf_{x \rightarrow \infty} u(x, y, z) \geq d^2.$$

Известно [10], что для этого случая

$$|\psi(x, y, z)|^2 = |\psi(\rho)|^2 \leq c \int_{PQ \leq 1} |\psi(Q)|^2 dQ, \quad (3.4)$$

где  $PQ$  — расстояние между точками  $P$  и  $Q$ . Тогда из (3.2) и (3.4) следует оценка

$$|\psi(x, y, z)|^2 \leq c \int_{x-1}^{\infty} dx' \iint_{-\infty}^{\infty} |\psi(x', y', z')|^2 dy' dz' \leq c(\varepsilon) e^{-2(1-\varepsilon)\omega x},$$

где  $\omega$  выражается формулой (3.3). Из этой оценки следует оценка  $\omega \sim \ln d$ .

**Замечание.** Пусть  $H$  — числовая прямая,  $B(x) = u(x) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Тогда  $a = d$ , и мы получим из (3.3)  $\omega/\sqrt{a} = \text{const}$ . На самом деле в этом случае  $\psi(x) \sim e^{-\sqrt{a}x}$ . Таким образом, в этом примере значение константы  $\omega$  достигается.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 1.1.** Пусть  $g(x) \in D(\hat{L})$ , причем  $g(x) = 0$ ,  $\hat{L}g(x) = 0$  при  $x \leq \xi$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\xi_\varepsilon$ , не зависящее от  $g$  и такое, что при  $\xi > \xi_\varepsilon$

$$(d - \varepsilon)^2 \|g(x)\|^2 \leq \|[\hat{L} - \lambda]g(x)\|^2. \quad (3.5)$$

**Доказательство.** Пусть  $\lambda$  —  $p$ -кратное собственное значение,  $\psi_i^{\lambda}$  ( $i = 1, \dots, p$ ) — его собственные функции, а  $\psi_{\lambda_k}$  — остальные собственные функции оператора  $\hat{L}$ .

Докажем неравенство

$$\begin{aligned} \|g(x)\|^2 &\leq \sum_{i=1}^p |(g, \psi_i^{\lambda})|^2 + \\ &+ \sum_{\substack{\lambda_k \neq \lambda \\ |\lambda_k - \lambda| \leq d - \varepsilon}} \left\{ (\psi_{\lambda_k}, [\hat{L} - \lambda]g)^2 \left[ \frac{1}{(\lambda - \lambda_k)^2} - \frac{1}{(d - \varepsilon)^2} \right] \right\} + \frac{1}{(d - \varepsilon)^2} \|[\hat{L} - \lambda]g\|^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

\*). См. замечание.

Пусть  $f = (\hat{L} - \lambda)g$  и пусть  $R_\lambda$  — резольвента оператора  $\hat{L}$  в точке  $\lambda$  (на подпространстве, ортогональном  $\psi_\lambda^i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ )); имеем

$$\begin{aligned} \|g\|^2 - \sum_{i=1}^p (g, \psi_\lambda^i)^2 &= \left\| g - \sum_{i=1}^p (g, \psi_\lambda^i) \psi_\lambda^i \right\|^2 = \|R_\lambda f\|^2 = \\ &= \left\| \sum_{|\lambda - \lambda_k| \leq d-\varepsilon} (\psi_{\lambda_k}, f) R_\lambda \psi_{\lambda_k} + R_\lambda \left\{ f - \sum_{|\lambda - \lambda_k| \leq d-\varepsilon} (\psi_{\lambda_k}, f) \psi_{\lambda_k} \right\} \right\|^2 = \\ &= \sum_{|\lambda - \lambda_k| \leq d-\varepsilon} \frac{(\psi_{\lambda_k}, f)^2}{(\lambda_k - \lambda)^2} + \left\| R_\lambda \left( f - \sum_{|\lambda - \lambda_k| \leq d-\varepsilon} (\psi_{\lambda_k}, f) \psi_{\lambda_k} \right) \right\|^2 \leq \\ &\leq \sum_{|\lambda - \lambda_k| \leq d-\varepsilon} \frac{(\psi_{\lambda_k}, f)^2}{(\lambda - \lambda_k)^2} + \frac{1}{(d-\varepsilon)^2} \left( \|f\|^2 - \sum_{|\lambda - \lambda_k| \leq d-\varepsilon} (\psi_{\lambda_k}, f)^2 \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует (3.6).  
По условию имеем

$$(g, \psi_\lambda^i)^2 \leq \int_{\xi}^{\infty} \|\psi_\lambda^i\|_H^2 dx \cdot \|g\|^2, \\ \|(\hat{L} - \lambda)g, \psi_{\lambda_k}\|^2 \leq \int_{\xi}^{\infty} \|\psi_\lambda^i\|_H^2 dx \cdot \|(\hat{L} - \lambda)g\|^2.$$

Отсюда и из (3.6) следует неравенство

$$\begin{aligned} \|g(x)\|^2 &\leq \|g\|^2 \sum_{i=1}^p \int_{\xi}^{\infty} \|\psi_\lambda^i\|_H^2 dx + \\ &+ \|(\hat{L} - \lambda)g\|^2 \sum_{\substack{\lambda_k \neq \lambda \\ |\lambda_k - \lambda| \leq d-\varepsilon}} \int_{\xi}^{\infty} \|\psi_{\lambda_k}\|_H^2 dx \left\{ \frac{1}{(\lambda - \lambda_k)^2} - \frac{1}{(d-\varepsilon)^2} \right\} + \\ &+ \frac{1}{(d-\varepsilon)^2} \|(\hat{L} - \lambda)g\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда при  $\xi > \xi_*$  получаем

$$\|g(x)\|^2 \leq O_1(\varepsilon) \|g\|^2 + O_2(\varepsilon) \|(\hat{L} - \lambda)g\|^2 + \frac{1}{d-\varepsilon} \|(\hat{L} - \lambda)g\|^2.$$

Следовательно,

$$(d-\varepsilon)^2 (1 - O_1(\varepsilon)) \|g(x)\|^2 \leq (O_3(\varepsilon) + 1) \|(\hat{L} - \lambda)g\|^2,$$

или

$$(d - O_4(\varepsilon))^2 \|g(x)\|^2 \leq \|(\hat{L} - \lambda)g\|^2.$$

Обозначив  $O_4(\varepsilon)$  снова через  $\varepsilon$ , получим утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть  $\varphi(x)$  — дважды дифференцируемая скалярная функция, обращающаяся в нуль при  $x < \xi$ .

Имеем

$$\|[\hat{L} - \lambda]\varphi(x)\psi(x)\|^2 = \|\varphi''\psi + 2\varphi'\psi'\|^2 = \|\varphi''\psi\|^2 + 4(\varphi''\psi, \varphi'\psi') + 4\|\varphi'\psi'\|^2. \quad (3.7)$$

Очевидны тождества

$$2(\varphi''\psi, \varphi'\psi') = -([\varphi''\varphi']', \psi, \psi), \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} 0 &= ([\varphi']^2 \psi, [\hat{L} - \lambda]\psi) = -([\varphi']^2 \psi, \psi'') + ([B - \lambda]\psi\varphi', \varphi'\psi) = \\ &= 2(\varphi'\varphi''\psi, \psi') + \|\varphi'\psi'\|^2 + ([B - \lambda]\varphi'\psi, \varphi'\psi). \end{aligned}$$

Из (3.8) в силу условия (3.1) при достаточно большом  $\xi$  следует неравенство

$$-\|\varphi'\psi'\|^2 - 2(\varphi'\varphi''\psi, \psi') \geq a\|\varphi'\psi\|^2. \quad (3.8')$$

Из (3.5), (3.8), (3.8') и (3.7) следует неравенство

$$(d-\varepsilon)^2 \|\varphi\psi\|^2 \leq \|\varphi''\psi\|^2 + 2([\varphi''\varphi']', \psi, \psi) - 4a\|\varphi'\psi\|^2. \quad (3.9)$$

Пусть теперь

$$\varphi(x) = \begin{cases} x - \xi, & x > \xi, \\ 0 & x < \xi. \end{cases}$$

По индукции из неравенства (3.9) следует, что функция

$$\Phi(\xi) = \|\varphi''\psi\|^2 = \int_{\xi}^{\infty} (x - \xi)^{2n} \|\psi\|_H^2 dx$$

существует при любом  $n$ . При достаточно большом  $n > n_*$ , неравенство (3.9) принимает вид

$$16d^2(1 - \varepsilon_1)\Phi \leq 5\Phi^{(IV)} - 16a\Phi''.$$

Отсюда следует, что  $\Phi(\xi)$  удовлетворяет неравенству

$$5\Phi^{(IV)} - 16a\Phi'' - 16d^2(1 - \varepsilon_1)\Phi \geq 0. \quad (3.10)$$

Корни характеристического многочлена, соответствующего оператору, имеют вид

$$\beta^2 = \frac{8a - \sqrt{64a^2 + 80d^2(1 - \varepsilon_1)}}{5},$$

$$\gamma^2 = \frac{8a + \sqrt{64a^2 + 80d^2(1 - \varepsilon_1)}}{5} = 4\omega^2(1 - \varepsilon_2).$$

Обозначим  $F(\xi) = \Phi'' - \beta^2\Phi = \Phi'' + |\beta|^2\Phi$ . Тогда из (3.10) следует неравенство

$$(F'' - \gamma^2 F) \geq 0. \quad (3.11)$$

Умножим обе части неравенства на  $F'$  и проинтегрируем с учетом равенств  $F(\infty) = F'(\infty) = 0$ ; получим

$$(F'(\xi))^2 \geq \gamma^2 (F(\xi))^2.$$

Отсюда в силу  $F'(\xi) < 0$  имеем

$$F(\xi) \leq c e^{-\tau \xi},$$

т. е.

$$\Phi'' + |\beta|^2 \Phi \leq c e^{-\tau \xi},$$

и, значит, в силу неравенств  $\Phi''(\xi) > 0$ ,  $\Phi(\xi) > 0$  имеем

$$\Phi(\xi) \leq c_1 e^{-\tau \xi}. \quad (3.12)$$

Отсюда в силу неравенства

$$\int_{\xi}^{\infty} \|\psi\|_H^2 dx \leq \Phi(\xi - 1) \quad (3.13)$$

получаем

$$\int_{\xi}^{\infty} \|\psi\|_H^2 dx \leq c_2(\varepsilon) e^{-\gamma \xi} = c_2(\varepsilon) e^{-2\omega(1-\varepsilon)\xi},$$

и теорема доказана.

#### § 4. Оператор первого порядка

Изложенный метод может быть применен также для оценки собственных функций самосопряженных операторов первого порядка по  $x$  вида

$$\hat{L} = A \frac{d}{dx} + B(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

где  $\|A\| \leq 1$ ,  $B(x)$  коммутирует с  $x$ ; в частности, для собственных функций стационарного уравнения Дирака \*).

Пусть  $\lambda$  — собственное значение,  $\psi$  — соответствующая собственная функция оператора  $\hat{L}$ ,  $\psi \in C^2$  и равна нулю при  $x < \xi$ ; тогда

$$\left[ A \frac{d}{dx} + B(x) - \lambda \right] \psi(x) = A \psi'(x),$$

т. е.  $[\hat{L} - \lambda] \psi(x) = A \psi'(x)$ . В силу леммы 1.1 для достаточно большого  $\xi > \xi_*$

$$(d - \varepsilon)^2 \|\psi\|^2 \leq \|A \psi'\|^2 \leq \|\psi'\|^2.$$

Аналогично предыдущему, полагая

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x - \xi)^n, & x > \xi, \\ 0, & x < \xi, \end{cases}$$

и  $\Phi(\xi) = \|\varphi\|^2$  при достаточно большом  $n > n_*$ , получаем  $\Phi'' \geq 4(d - \varepsilon_1)^2 \Phi$ . Аналогично (3.12) имеем

$$\Phi(\xi) \leq c_1 e^{-2(d - \varepsilon_1)\xi}.$$

\*) Если в уравнении Дирака [5, 47] коэффициенты не зависят от  $t$ , то с помощью замены  $\psi = e^{i\lambda t} \varphi$  мы придем к стационарному уравнению Дирака для функции  $\varphi$ .

Отсюда в силу (3.13)

$$\int_{\xi}^{\infty} \|\psi\|_H^2 dx \leq c_2(\varepsilon_1) e^{-2(d - \varepsilon_1)\xi}.$$

Нетрудно убедиться на примере обыкновенного дифференциального оператора, что эта оценка достигается при  $\varepsilon_1 = 0$ . Итак, доказана

**Теорема 1.2.** Для собственных функций оператора  $L$  справедлива теорема 1.1, причем  $\omega = d$  и является точной константой.

#### § 5. Основная оценка для собственных функций

Рассмотрим самосопряженный оператор

$$\hat{L} = A(\eta) \frac{d}{dx} + B(\eta, x), \quad \|A(\eta)\| \leq 1,$$

коэффициенты которого зависят от некоторого параметра  $\eta$ . Напомним, что если  $g \in L_2(H)$  обращается в нуль и  $\hat{L}g = 0$  при  $x < \xi$ , то в силу леммы 2.1 для заданного  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\xi_*$ , не зависящее от  $g$ , что при  $\xi \geq \xi_*$  выполняется неравенство

$$(d - \varepsilon)^2 \|g\|^2 \leq \|[\hat{L} - \lambda]g\|^2. \quad (5.1)$$

Фиксируем  $\xi_*$  для данного оператора  $\hat{L}$ .

Положим  $x_0^\gamma = (\xi_*)^\gamma$ , где  $\gamma > 1$  — любое число. Совершим перенос начала координат в точку  $x_0^\gamma$ . Рассмотрим в новой системе координат  $y = x - x_0^\gamma$  функцию

$$\varphi(y, \xi) = \begin{cases} (y^2 - \xi^2)^n, & \xi^2 \geq y^2, \\ 0, & y^2 > \xi^2. \end{cases}$$

Пусть  $\xi \leq x_0^\gamma - \xi_*$ ; тогда из  $x < \xi_*$  следует  $x < x_0^\gamma - \xi$ , т. е.  $(x - x_0^\gamma)^2 > \xi^2$ ; значит,  $y^2 > \xi^2$ . Следовательно,  $\varphi(y, x) = 0$  при  $x < \xi_*$ .

Оператор

$$\hat{L} = A(\eta) \frac{d}{dx} + B(\eta, x)$$

в новой системе координат будет иметь вид

$$\hat{L} = A(\eta) \frac{d}{dy} + B(\eta, y + x_0^\gamma).$$

Пусть  $u(y) \in H$  при условии  $|y| \leq x_0^\gamma - \xi_*$  удовлетворяет уравнению

$$A(\eta) \frac{du}{dy} + B(\eta, y + x_0^\gamma)u = \lambda u.$$

Очевидно, что неравенство (5.1) выполняется для функции  $g = \varphi(y, \xi)u(y)$ , поскольку при  $x < \xi_*$  имеем  $g = 0$  и  $\hat{L}g = 0$ . Таким

образом,

$$(d - \varepsilon)^2 \|\Phi u\|^2 \leq \|\Phi'_\nu u\|^2.$$

Обозначим

$$\Phi(\xi) = \|\Phi u\|^2 = \int_{-\xi}^{\xi} (\xi^2 - y^2)^{2n} \|u(y)\|_H^2 dy.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\|\Phi'_\nu u\|^2 = \frac{n}{2(2n-1)!} \left\{ \Phi'' - \frac{4n-1}{\xi} \Phi' \right\}.$$

Положив  $1/n = O(\varepsilon)$ , получим

$$(d - O_1(\varepsilon))^2 \Phi \leq \frac{1}{4} \Phi'' - \frac{n-1/4}{\xi} \Phi' \leq \frac{1}{4} \Phi'',$$

поскольку  $\Phi' > 0$  и  $\xi \geq 0$ . Отсюда, обозначив  $O_1(\varepsilon)$  снова через  $\varepsilon$ , имеем

$$\Phi' \Phi'' \geq 4(d - \varepsilon)^2 \Phi \Phi',$$

или

$$\frac{d}{d\xi} (\Phi') \geq 4(d - \varepsilon)^2 \frac{d}{d\xi} \Phi^2.$$

Проинтегрировав от 0 до  $\xi$ , получим

$$\Phi' \geq 2(d - \varepsilon) \Phi,$$

или

$$\frac{d}{d\xi} \ln \Phi \geq 2(d - \varepsilon).$$

Проинтегрировав это неравенство от  $a > 1$  до  $\xi$ , получим

$$\ln \frac{\Phi(\xi)}{\Phi(a)} \geq 2(d - \varepsilon)(\xi - a),$$

т. е.

$$\Phi(\xi) \geq e^{2(d-\varepsilon)(\xi-a)} \Phi(a).$$

Поскольку

$$\int_{-a+1}^{a-1} \|u(y)\|_H^2 dy \leq \int_{-a}^a (y^2 - a^2)^{2n} \|u(y)\|_H^2 dy,$$

$$\int_{-\xi}^{\xi} (y^2 - \xi^2)^{2n} \|u(y)\|_H^2 dy \leq \xi^{4n} \int_{-\xi}^{\xi} \|u(y)\|_H^2 dy,$$

то при  $\xi < x_0^\gamma - \xi_\varepsilon$  имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\xi}^{\xi} \|u(y)\|_H^2 dy &\geq \xi^{-4n} \Phi(\xi) \geq \xi^{-4n} e^{2(d-\varepsilon)(\xi-a)} \Phi(a) \geq \\ &\geq c(a, \varepsilon) e^{2(d-2\varepsilon)(\xi-b)} \int_{-b}^b \|u(y)\|_H^2 dy, \quad b = a - 1, \end{aligned}$$

поскольку  $\xi^{-4n} \geq c(b, \varepsilon) e^{-2\varepsilon(\xi-b)}$ .

Переходя к координатам  $x$  и обозначая  $2\varepsilon$  снова через  $\varepsilon$ , получаем

$$\int_{x_0^\gamma - b}^{x_0^\gamma + b} \|u(x)\|_H^2 dx \leq c_1(b, \varepsilon) e^{-2(d-\varepsilon)\xi} \int_{x_0^\gamma - \xi}^{x_0^\gamma + \xi} \|u(x)\|_H^2 dx.$$

Положим  $\xi = x_0^\gamma - \xi_\varepsilon$ , тогда

$$\begin{aligned} \int_{x_0^\gamma - b}^{x_0^\gamma + b} \|u\|_H^2 dx &\leq c_1(b, \varepsilon) e^{-2(d-\varepsilon)(x_0^\gamma - \xi_\varepsilon)} \int_{\xi_\varepsilon}^{2x_0^\gamma - \xi_\varepsilon} \|u(x)\|_H^2 dx \leq \\ &\leq c_2(b, \varepsilon) e^{-2(d-\varepsilon)x_0^\gamma} \int_{\xi_\varepsilon}^{x_0^\gamma} \|u(x)\|_H^2 dx. \quad (5.2) \end{aligned}$$

Константа  $c_2(b, \varepsilon) = c_1(b, \varepsilon) e^{2d\xi_\varepsilon}$  не зависит от  $\gamma$ . Таким образом, неравенство (5.2) выполняется при любом  $\gamma > 1$ .

Полагая

$$\gamma = \frac{\ln(\eta/2)}{\ln x_0},$$

мы приходим к следующему утверждению.

**Лемма 1.2.** Пусть  $\eta$  — некоторый параметр,  $\eta > 0$  и пусть  $u(x) \in H$  при  $x < \eta$  удовлетворяет уравнению

$$A(\eta) \frac{du}{dx} + B(\eta, x)u = \lambda u, \quad \|A(\eta)\|_H \leq 1.$$

Тогда для любого  $a > 0$  и  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $C(a, \varepsilon)$ , что

$$\int_{\eta/2-a}^{\eta/2+a} \|u\|_H^2 dx \leq C(a, \varepsilon) e^{-d(1-\varepsilon)\eta} \int_0^\eta \|u\|_H^2 dx. \quad (5.3)$$

(Заметим, что  $u(x)$ , вообще говоря, может и не принадлежать  $L_2[H]$ .)

## § 6. Две леммы абстрактной теории возмущений

Докажем теперь две нужные для дальнейшего леммы (см. [7]).

**Лемма 1.3.** Пусть  $A$  — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве  $H$ .

Пусть  $\mu$  — некоторая точка на вещественной прямой,  $d$  — расстояние от  $\mu$  до спектра оператора  $A$ .

Тогда для любого  $g \in D(A)$  справедливо неравенство

$$d\|g\| \leq \|(A - \mu)g\|. \quad (6.1)$$

**Доказательство.** Если  $\mu$  принадлежит спектру оператора  $A$ , то  $d=0$  и неравенство (6.1) очевидно. Пусть  $\mu$  не принадлежит

спектру оператора  $A$ . Тогда неравенство (6.1) следует непосредственно из известного неравенства

$$\|(A-\mu)^{-1}\| \leq 1/d$$

(см. [39]). Действительно, обозначив  $f = (A-\mu)g$ , получаем

$$\|g\| = \|(A-\mu)^{-1}f\| \leq \|(A-\mu)^{-1}\| \|f\| \leq \frac{1}{d} \|f\| \leq \frac{1}{d} \|(A-\mu)g\|.$$

**Лемма 1.4.** Пусть  $\lambda_0$  — некоторая изолированная точка спектра самосопряженного оператора  $A$ ,  $M_{\lambda_0}$  — оставшийся спектр (т. е.  $M_{\lambda_0}$  — множество, равное спектру  $\sigma_A$ , из которого выброшена одна точка  $\lambda = \lambda_0$ ) и пусть  $d_{\lambda_0}$  — расстояние от точки  $\mu$  до множества  $M_{\lambda_0}$ .

Пусть  $P_{\lambda_0}$  — проекционный оператор на подпространство собственных функций, соответствующих точке  $\lambda_0$ .

Тогда для  $g \in D(A)$  справедливо неравенство

$$d_{\lambda_0} \|(1-P_{\lambda_0})g\| \leq \|(A-\mu)g\|. \quad (6.2)$$

**Доказательство.** Ортогональное дополнение к подпространству собственных функций, соответствующих  $\lambda_0$ , инвариантно относительно оператора  $A$ . Поэтому неравенство (6.2), записанное для этого ортогонального дополнения, будет иметь вид

$$\|(A-\mu)^{-1}(1-P_{\lambda_0})f\| \leq \frac{1}{d_{\lambda_0}} \|(1-P_{\lambda_0})f\|, \quad f \in H.$$

Поэтому, положив  $f = (A-\mu)g$ , получим (поскольку  $P_{\lambda_0}$  коммутирует с  $A$ )

$$\begin{aligned} \|(1-P_{\lambda_0})g\| &= \|(1-P_{\lambda_0})(A-\mu)^{-1}f\| = \|(A-\mu)^{-1}(1-P_{\lambda_0})f\| \leq \\ &\leq \frac{1}{d_{\lambda_0}} \|(1-P_{\lambda_0})(A-\mu)g\| = \frac{\|(A-\mu)g\|}{d_{\lambda_0}}. \end{aligned}$$

## § 7. Теория возмущений оператора первого порядка

**Лемма 1.5.** Пусть  $u$  — решение уравнения

$$[\hat{L}_v - \lambda]u = A(\eta) \frac{du}{dx} + B(\eta, x)u + v(\eta, x)u - \lambda u = 0,$$

где операторы  $B(\eta, x)$ ,  $v(\eta, x)$  коммутируют с  $x$ ,  $\|A(\eta)\| \leq 1$ , удовлетворяющее условию  $\int_0^x \|u\|_H^2 dx \leq c e^{\epsilon x}$ , где  $c = c(\epsilon)$  не зависит от  $\eta$

при любом  $\epsilon > 0$ , и пусть  $v(\eta, x) = 0$  при  $|x| < \eta$ ,  $d$  — расстояние от точки  $\lambda$  до предельного спектра оператора  $\hat{L}_0$ :

$$\hat{L}\psi = A(\eta) \frac{d\psi}{dx} + B(\eta, x)\psi.$$

Тогда

$$1) \int_{\eta/2-a}^{\eta/2+a} \|u\|_H^2 \leq c(a, \epsilon) e^{-d(1-\epsilon)\eta}, \quad a > 0;$$

2) найдется такое собственное значение  $\mu$  оператора  $\hat{L}$ , что

$$a) |\mu - \lambda| \leq \frac{c(\epsilon) e^{-d(1-\epsilon)\eta}}{\left( \int_0^{\eta/2} \|u\|_H^2 dx \right)^{1/2}};$$

$$б) \int_0^{\eta/2} \left\| u - \sum_{i=1}^p \left[ \int_0^{\eta/2} (u, \psi_\mu^i)_H dx \right] \psi_\mu^i \right\|_H^2 dx \leq \frac{c(\epsilon)}{d_\mu} e^{-d(1+\epsilon)\eta},$$

где  $d_\mu$  — расстояние от точки  $\mu$  до остального спектра  $\hat{L}$ ,  $\psi_\mu^i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) — ортонормированный базис собственного подпространства оператора  $\hat{L}$ , отвечающего точке  $\mu$ .

**Доказательство.** Очевидно, что

$$\hat{L}u = A(\eta) \frac{du}{dx} + B(\eta, x)u = \lambda u, \quad |x| < \eta.$$

Поэтому в силу оценки (5.3) и условия леммы для достаточно больших  $\eta$  выполняется неравенство

$$\int_{\eta/2-a}^{\eta/2+a} \|u\|_H^2 dx \leq c(a, \epsilon) \int_0^\eta \|u\|_H^2 dx e^{-d(1-\epsilon)\eta}.$$

Отсюда и из условий леммы следует утверждение 1).

В силу  $\varphi(x)v(\eta, x) = 0$ ,  $\hat{L}_v u = \lambda u$  имеем

$$\varphi(x)\hat{L}u = \varphi(x)\hat{L}_v u, \quad \varphi(x)[\hat{L}_v - \lambda]u = 0.$$

Отсюда

$$[\hat{L}_v - \lambda]\varphi(x)u = A(\eta)\varphi'(x)u.$$

Из леммы 1.3 следует, что найдется такое собственное значение  $\mu$  оператора  $\hat{L}_0$ , что

$$|\mu - \lambda| \leq \frac{\|A(\eta)\varphi'(x)u\|}{\|\varphi(x)u\|} \leq \frac{\left( \int_{\eta/2}^{\eta/2+a} \|u\|_H^2 dx \right)^{1/2}}{\|\varphi(x)u\|} \leq \frac{c(a, \epsilon) e^{-d(1-\epsilon)\eta}}{\left( \int_0^{\eta/2} \|u\|_H^2 dx \right)^{1/2}}.$$

Возьмем функцию  $\varphi(x)$ , равную единице при  $|x| < \eta/2$ , равную нулю при  $|x| > \eta/2 + a$ , а в промежутке  $\eta/2 \leq |x| \leq \eta/2 + a$  линейную:  $\varphi(x) = 1 + 1/a(\eta/2 - x)$ . Кроме того, из леммы 1.4 получим

$$\left\| \varphi(x)u - \sum_{i=1}^p (\varphi(x)u, \psi_\mu^i) \psi_\mu^i \right\| \leq \frac{c(a, \epsilon)}{d_\mu} e^{-d(1-\epsilon)\eta},$$

т. е.

$$\int_0^{\eta/2} \left\| u - \sum_{i=1}^p (\varphi(x) u, \psi_\mu^i) \psi_\mu^i \right\|_H^2 dx \leq \frac{c(\alpha, \varepsilon)}{d_\mu} e^{-d(1-\alpha)\eta}.$$

Поскольку в силу теоремы 1.2

$$(\varphi(x) u, \psi_\mu^i) - \int_0^{\eta/2} (u, \psi_\mu^i)_H dx \leq c(\varepsilon) e^{-d(1-\alpha)\eta},$$

то отсюда следует утверждение леммы.

Рассмотрим теперь самосопряженный оператор

$$\hat{L}(\varepsilon) = A(\tau) \frac{d}{d\tau} + B(\tau) + \varepsilon v(\tau, \varepsilon),$$

где  $v(\tau, \varepsilon)$  — ограниченный оператор в  $H$ , непрерывный по  $\tau$ . Пусть  $\mu$  — изолированная точка спектра оператора

$$\hat{L}(0) = A(\tau) \frac{d}{d\tau} + B(\tau),$$

$d_\mu$  — расстояние от  $\mu$  до остального спектра оператора  $\hat{L}(0)$ .

Пусть  $\tau_\varepsilon$  таково, что если

$$\bar{v}(\tau, \varepsilon) = \begin{cases} v(\tau, \varepsilon), & \tau < 2\tau_\varepsilon, \\ 0, & \tau > 2\tau_\varepsilon, \end{cases}$$

то  $\|\varepsilon \bar{v}(\tau, \varepsilon)\| \leq \frac{d_\mu}{2+\alpha} (\alpha > 0)$ , и пусть  $\bar{v} = v(\tau, \varepsilon) - \bar{v}(\tau, \varepsilon)$ . Тогда оператор  $\hat{L}(\varepsilon)$  можно представить в виде

$$\hat{L}(\varepsilon) = \hat{L}(0) + \varepsilon \bar{v}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \bar{v}(\tau, \varepsilon).$$

Полагая в предыдущей лемме  $\eta = 2\tau_\varepsilon$ ,  $v(\tau, \eta) = \varepsilon \bar{v}(\tau, \varepsilon)$ , мы выводим в силу лемм абстрактной теории возмущений следующую ниже теорему.

Пусть  $0 < \delta < 1$ . Рассмотрим пространство непрерывных функций от  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ) и отождествим функции, разность между которыми не превосходит  $\sigma(\varepsilon) = C \exp\{-d(1-\delta)\tau_\varepsilon\}$ ; полученное факторпространство обозначим через  $S$ . Рассмотрим пространство  $L_2[H, S]$  функций из  $L_2[H]$  со значениями в  $S$ . Равенство  $a = b$  в этом пространстве будем записывать  $a \stackrel{S}{=} b$ .

Предположим, что оператор

$$\hat{L}(0) = A(\tau) \frac{d}{d\tau} + B(\tau)$$

самосопряжен в  $L_2[H]$ , а  $B(\tau)$  коммутирует с  $\tau$ . Оператор  $\varepsilon v(\tau, \varepsilon)$  коммутирует с  $\tau$  и стремится к нулю по норме  $H$  при любом фиксированном  $\tau$ .

Теорема 1.3. Пусть решение  $\psi_\lambda$  уравнения

$$[\hat{L}(0) + \varepsilon v(\tau, \varepsilon)] \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda$$

удовлетворяет условию

$$\int_{-\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon} \|\psi_\lambda\|_H^2 d\tau \leq C(\delta) e^{\delta x}, \quad (7.1)$$

где  $\delta$  — любое, константа  $C(\delta)$  не зависит от  $\varepsilon$ , а ближайшая к  $\lambda$  точка спектра оператора  $\hat{L}(0)$  есть собственное значение  $\mu$  этого оператора конечной кратности. Тогда

1) оператор

$$[\hat{L}(0) + \varepsilon \bar{v}(\tau, \varepsilon)] \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma [\hat{L}(0) - z]^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k [\bar{v}(\tau, \varepsilon) (\hat{L}(0) - z)^{-1}]^k dz,$$

где  $\Gamma$  — окружность с центром в точке  $\mu$  радиуса  $d/2$ , имеет  $l \leq m$  различных собственных значений  $\mu_i = \mu_i(\varepsilon)$  ( $i=1, 2, \dots, l$ ), а сумма проекционных операторов  $P_i(\varepsilon)$  ( $i=1, 2, \dots, l$ ) на собственные подпространства, отвечающие им, имеет размерность  $m$ ;

2) выполняется соотношение

$$\int_{-\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon} \left\| \left( 1 - \sum_{i=1}^l P_i(\varepsilon) \right) \psi_\lambda \right\|_H^2 d\tau \stackrel{S}{=} 0;$$

3) найдется такое  $i$  ( $0 \leq i \leq l$ ), что

$$\min \left( |\mu_i - \mu_{i+1}|, |\mu_i - \mu_{i-1}| \sqrt{\int_{-\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon} \|(1 - P_i) \psi_\lambda\|_H^2 d\tau} \right) \stackrel{S}{=} 0,$$

$$|\lambda - \mu_i(\varepsilon)| \sqrt{\int_{-\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon} \|\psi_\lambda\|_H^2 d\tau} \stackrel{S}{=} 0.$$

З а м е ч а н и е 1. Если ближайшими к точке  $\lambda$  являются два собственных значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  оператора  $\hat{L}(0)$ , то

$$\int_{-\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon} \|\psi_\lambda\|_H^2 d\tau \stackrel{S}{=} 0.$$

З а м е ч а н и е 2. Для действительных  $\lambda$  только решения, удовлетворяющие условию (7.1), имеют физический смысл. Известно, что собственные функции непрерывного спектра широкого класса дифференциальных операторов с частными производными удовлетворяют этому условию.

Для дифференциального оператора второго порядка вида (3.0), удовлетворяющего условиям теоремы 1.1, будет справедлива предыдущая теорема, если положить  $\sigma(\varepsilon) = \exp\{-(1-\delta)\omega\tau_\varepsilon\}$ , где  $\omega$  определяется формулой (3.3). Это утверждение доказывается аналогично предыдущей теореме.

## ГЛАВА 2

### СИЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

#### § 1. Слабая сходимость решений

Рассмотрим следующую задачу: пусть  $\{A_n\}$  — последовательность линейных операторов, действующих из  $B_1$  в  $B_2$  (где  $B_1$  и  $B_2$  — банаховы пространства) и имеющих одну и ту же область определения  $D(A_n) = D$ .

Рассмотрим последовательность уравнений

$$A_n x_n = v_n \quad (1.1)$$

и предположим, что как последовательность операторов  $\{A_n\}$ , так и последовательность  $\{v_n\}$  правых частей уравнений (1.1) сходятся (в том или ином смысле) к оператору  $A$  и элементу  $v$  соответственно. Рассмотрим наряду с уравнениями (1.1) предельное уравнение

$$Ax = v. \quad (1.2)$$

Возникает вопрос — какие условия должны быть наложены на последовательность операторных уравнений (1.1), чтобы последовательность их решений  $\{x_n\}$  сходилась (в том или ином смысле) к решению предельного уравнения (1.2)?

Установим прежде всего условия, при которых имеет место слабая сходимость решений, а потом перейдем к условиям сильной сходимости. При рассмотрении слабой сходимости мы ограничимся случаем операторов, действующих в гильбертовом пространстве.

**Теорема 2.1** [28, 29]. Пусть  $\{A_n\}$  — последовательность линейных операторов в гильбертовом пространстве  $H$ , имеющих одну и ту же область определения  $D$ , всюду плотную в  $H$ , пусть  $\{A_n\}$  сильно сходится к  $A$  и пусть  $\{f_n\}$  — последовательность элементов из  $H$ , слабо сходящаяся к  $f$ .

Если для последовательности уравнений

$$A_n x_n = f_n \quad (1.3)$$

существует ограниченная последовательность  $\{x_n\}$  их решений, то существует такая последовательность  $\{y_n\}$  решений предельного уравнения

$$A^* x = f, \quad (1.4)$$

что последовательность  $\{x_n - y_n\}$  слабо сходится к нулю.

**Доказательство.** Так как последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, то из нее можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ . Пусть  $v$  — предел этой последовательности. Покажем, что  $v$  — решение предельного уравнения (1.4). Действительно, для любого  $g \in D$  имеем

$$(Ag, x_{n_k}) = ([A - A_{n_k}]g, x_{n_k}) + (g, f_{n_k}) \rightarrow (g, f)$$

и в то же время  $(Ag, x_{n_k}) \rightarrow (Ag, v)$ , откуда

$$(Ag, v) = (g, f) \quad \forall g \in D. \quad (1.5)$$

Поскольку  $D$  всюду плотно в  $H$ , то (1.5) означает, что

$$A^* v = f.$$

Обозначим через  $H_1$  подпространство решений однородного уравнения  $A^* x = 0$ , а через  $H_2$  — его ортогональное дополнение, и пусть  $P_1, P_2$  — проекционные операторы, отвечающие этим подпространствам. Положим

$$\begin{aligned} z_n &= P_2(v - x_n), \\ y_n &= z_n + x_n. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Каждый элемент  $y_n$  будет решением уравнения (1.4); действительно,

$$A^* y_n = A^*(z_n + x_n) = A^*(P_2 v + P_1 x_n) = A^* P_2 v = A^*(P_1 + P_2)v = A^* v = f. \quad (1.7)$$

Поэтому для завершения доказательства остается показать, что последовательность  $\{z_n\}$  слабо сходится к нулю. Эта последовательность ограничена, так как

$$\|z_n\| \leq \|x_n\| + \|v\|,$$

а последовательность  $\{x_n\}$  ограничена по условию. Далее,  $z_n \in H_2$ , поэтому для всех  $x \in H_1$  имеем

$$(z_n, x) = 0. \quad (1.8)$$

Кроме того, если  $g \in D$ , то  $Ag \in H$ , поэтому

$$\begin{aligned} (Ag, z_n) &= (Ag, y_n - x_n) = ([A_n - A]g, x_n) + (Ag, y_n) - (A_n g, x_n) = \\ &= ([A_n - A]g, x_n) + (g, f - f_n) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \quad \forall g \in D. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Из (1.8) и (1.9) следует, что соотношение

$$(z_n, u) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (1.10)$$

выполнено для каждого  $u \in H_1 \oplus R(A)$ . Но  $R(A)$  всюду плотно в  $H_2$ , ибо иначе в  $H_2$  нашелся бы ненулевой элемент  $u_0$ ,



ортогональный  $R(A)$ , и мы имели бы

$$0 = (y_0, Ax) = (A^*y_0, x) \quad \forall x \in D,$$

откуда  $A^*y_0=0$ , т. е.  $y_0 \in H_1$ , что невозможно.

Итак, соотношение (1.10) выполнено на множестве, замкнутая линейная оболочка которого есть все пространство  $H$ . Отсюда следует, что ограниченная последовательность  $\{z_n\}$  слабо сходится к нулю. Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Если оператор  $A^{-1}$  существует (т. е. уравнение  $A^*x=0$  имеет лишь тривиальное решение), то утверждение теоремы 2.1 можно сформулировать так: всякая ограниченная последовательность  $\{x_n\}$  решений уравнений (1.3) сходится к решению предельного уравнения (1.9). Более того, если  $A^{-1}$  существует, то теорема 2.1 имеет место и для операторов, действующих из одного банахова пространства в другое, поскольку единственный пункт проведенного выше доказательства, использующий гильбертовость пространства  $H$ , — это возможность представить его в виде суммы подпространств  $H_1$  и  $H_2$ .

**С л е д с т в и е 1.** Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1 и, кроме того,  $(x_n, y_n - x_n) \rightarrow 0$ . Тогда  $\|y_n - x_n\| \rightarrow 0$ .

Действительно,

$$(y_n - x_n, y_n - x_n) \rightarrow (y_n, y_n - x_n) = (y_n, z_n) = (v, z_n) \rightarrow 0,$$

поскольку элемент  $y_n - v \in H_1$  ортогонален  $z_n$ .

**П р и м е р.** Рассмотрим задачу

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = -\varepsilon \Delta \left(1 + \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon + k^2(x, y) u_\varepsilon = F(x, y),$$

$$u_\varepsilon|_\Gamma = 0, \quad k^2(x, y) \geq \alpha > 0, \quad (1.11)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\Gamma$  — гладкий контур,  $u_\varepsilon \in L_2[\Omega]$  ( $\Omega$  — область, ограниченная  $\Gamma$ ).

Докажем, что  $u_\varepsilon(x, y)$  слабо сходится при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к  $F(x, y)/k^2(x, y)$  в области  $\Omega$ . Очевидно, что сопряженный оператор  $\varepsilon$  сходится при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к оператору умножения на  $k^2(x, y)$ . Для применения теоремы 2.1 остается доказать ограниченность  $\|u_\varepsilon\|$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Умножим (1.11) на  $\left(1 + \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}\right)$  и проинтегрируем по  $x, y$  в  $\Omega$ . Интегрированием по частям получаем

$$\varepsilon \iint_\Omega \left[ \nabla \left(1 + \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon \right]^2 dx dy + \iint_\Omega k^2 \left(1 + \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon^2 dx dy =$$

$$= \iint_\Omega F u_\varepsilon \left(1 + \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}\right) dx dy \leq \left\| F \left(1 + \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\| \|u_\varepsilon\| \leq C \|F\| \|u_\varepsilon\|.$$

Следовательно,  $\iint_\Omega k^2 u_\varepsilon^2 dx dy \leq c \|F\| \|u_\varepsilon\|$ ; значит,

$$\|u_\varepsilon\| \leq \frac{c}{\alpha} \|F\|.$$

## § 2. Условия сильной сходимости решений

Перейдем теперь к установлению условий, при которых последовательность решений уравнений вида (1.1) сходится к решению предельного уравнения (1.2) не только слабо, но и сильно. Но решение уравнения вида

$$Ax=f$$

— это обращение оператора  $A$ , поэтому нам удобнее будет сформулировать и доказать соответствующий результат не для уравнений, а для обратных операторов. Здесь мы рассмотрим общий случай операторов, действующих из одного банахова пространства в другое.

**1. Теорема о сильной сходимости решений.** Пусть  $\{A_n\}$  — последовательность линейных операторов из банахова пространства  $B_1$  в банахово пространство  $B_2$  с одной и той же областью определения  $D$  и пусть  $A$  — оператор, действующий из  $B_1$  в  $B_2$ , с той же областью определения  $D$  такой, что

$$Ag = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n g \quad \forall g \in D.$$

Операторы  $A_n$  мы предположим допускающими замкнутые расширения, обозначаемые  $\bar{A}_n$ .

**Т е о р е м а 2.2** [13, 46]. Пусть последовательность  $\{A_n^{-1}\}$  существует и ограничена в совокупности:

$$\|A_n^{-1}\| \leq c.$$

Тогда

1) существует обратный оператор  $A^{-1}$ , ограниченный на множестве  $\bar{R}(A)$ , где  $\bar{R}(A)$  — замыкание области определения оператора  $A^{-1}$ ;

$$2) \bar{A}^{-1}f = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{-1}f \quad (f \in \bar{R}(A)).$$

**Доказательство\*).** Для существования  $A^{-1}$  достаточно доказать, что уравнение  $Aq_0=0$  имеет единственное решение  $q_0=0$ . Итак, допустим, что  $Aq_0=0$ , где  $q_0 \in D(A)$ . Оценим  $\|q_0\|$ . Имеем в силу условия теоремы  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n q_0 = Aq_0$ ; следовательно,

$\|A_n q_0\| \leq \|Aq_0\| + \varepsilon = \varepsilon \quad (n < N_\varepsilon)$ . Отсюда в силу ограниченности  $A_n^{-1}$  имеем

$$\|q_0\| = \|A_n^{-1} A_n q_0\| \leq \|A_n^{-1}\| \|A_n q_0\| \leq \varepsilon c.$$

А поскольку  $\varepsilon$  — любое, то  $\|q_0\|=0$  и  $q_0=0$ .

Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{-1}f = A^{-1}f$  для  $f \in R(A)$ . Имеем

$$A^{-1}f \in D(A) \subset D(A_n), \quad f \in R(A).$$

Следовательно, оператор  $A_n A^{-1}f$  определен для всех  $f \in R(A)$ . По-

\*). Ср. гл. 4, § 1 (теорема 4.1).

строим последовательность

$$h_n = A_n(A_n^{-1} - A^{-1})f = f - A_n A^{-1} f.$$

В силу того, что  $A_n g \rightarrow A g$  для  $g = A^{-1} f \in D(A)$ , получаем  $\|h_n\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Для любого  $f \in R(A)$  имеем

$$\|(A_n^{-1} - A^{-1})f\| = \|A_n^{-1} h_n\| \leq \|A_n^{-1}\| \|h_n\| \leq c \|h_n\| \rightarrow 0,$$

что и доказывает сходимость  $A_n^{-1} \rightarrow A^{-1}$  на  $R(A)$ . Отсюда по теореме Банаха — Штейнгауза  $\{A_n^{-1}\}$  сходится к  $A^{-1}$  на  $\overline{R(A)}$  и  $\|A^{-1}\| \leq C$ .

## 2. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$\hat{L}u = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + c^2(x)u = F(x, t, \varepsilon), \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad c^2(x) \geq \alpha > 0, \quad (2.1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad \text{либо} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx < \infty,$$

и будем изучать поведение решения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . (К этому случаю сводится задача об асимптотическом поведении решения уравнения Клейна—Гордона—Фока при  $t \rightarrow \infty$ .) В уравнении (2.1) для этого надо сделать замену  $\tau = t/\varepsilon$  и положить  $F(x, t, \varepsilon) = F(x, t/\varepsilon)$ .

а) Чтобы понять, как может вести себя решение уравнения (2.1) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , рассмотрим частный случай обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + u = F(t)$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u'|_{t=0} = 0.$$

Если  $F(t)$  — непрерывно дифференцируемая функция, то решение  $u_\varepsilon(t)$  может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \sin \frac{t-\tau}{\varepsilon} F(\tau) d\tau = \int_0^t F(\tau) d\left(\cos \frac{t-\tau}{\varepsilon}\right) = \\ &= F(t) - F(0) \cos \frac{t}{\varepsilon} - \int_0^t F'(\tau) \cos \frac{t-\tau}{\varepsilon} d\tau; \end{aligned}$$

следовательно, если  $F(0) = 0$ ,  $F' \in L_2$ , то сходимость  $u_\varepsilon(t) \rightarrow F(t)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  будет сильная в  $L_2$ ; если же  $F(0) \neq 0$ , то сходимость будет слабая.

б) Обратимся теперь к общему уравнению (2.1). Рассмотрим его в пространстве  $L_2$  функций от  $x$  (либо в области, ограниченной  $\Gamma$  (если  $u|_{\Gamma} = 0$ ), либо (если  $\|u\|^2 = \int |u|^2 dx < \infty$ ) во всем пространстве  $R^3$ ).

Пусть  $\hat{L}u = F(x, t)$ . Умножим (2.1) скалярно на  $\partial u / \partial t$ . Имеем

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|cu\|^2 = \left( F(x, t), \frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

Проинтегрировав по  $t$ , в силу условий

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \|\nabla u\|_{t=0} = 0$$

получим равенство

$$\frac{\varepsilon}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|cu\|^2) = \int_0^t \left( F(x, t), \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt.$$

Проинтегрируем его по  $t$  от 0 до 1:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dt + \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 \|\nabla u\|^2 dt + \int_0^1 \|cu\|^2 dt \right] &= \int_0^1 dt \int_0^t \left( F(x, t), \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt \leq \\ \leq \int_0^1 (1-t) \left( F(x, t), \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt &\leq \sqrt{\int_0^1 \|F(x, t)\|^2 dt} \sqrt{\int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dt}; \quad (2.2) \end{aligned}$$

следовательно,

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dt \leq \int_0^1 \|F(x, t)\|^2 dt,$$

а значит,  $\int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dt$  существует, если только существует  $\int_0^1 \|F(x, t)\|^2 dt$ .

Пусть  $F$  принадлежит банахову пространству  $W$  с нормой

$$\|F(x, t)\|_W = \sqrt{\int_0^1 \left( \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|^2 + \|F\|^2 \right) dt}.$$

Тогда, интегрируя  $\int_0^1 dt \int_0^t \left( F(x, t), \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt$  по частям, получим

из (2.1)

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dt + \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \|\nabla u\|^2 dt + \int_0^1 \|cu\|^2 dt \right) = \\ = \int_0^1 (F(x, t), u) dt - \int_0^1 dt \int_0^t \left( \frac{\partial F}{\partial t}, u \right) dt \leq \\ \leq \sqrt{\int_0^1 \|F(x, t)\|^2 dt} \sqrt{\int_0^1 \|u\|^2 dt} + \sqrt{\int_0^1 \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|^2 dt} \sqrt{\int_0^1 \|u\|^2 dt}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_0^1 \|u\|^2 dt \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \|cu\|^2 dt \leq \frac{2}{\alpha} \sqrt{\int_0^1 \|u\|^2 dt} \|F\|_W.$$

Следовательно, оператор  $L_\varepsilon^{-1}$ , действующий из  $W$  в гильбертово пространство  $L_2$  функций от  $x, t$  с нормой

$$\|u\| = \sqrt{\int_0^1 \|u\|^2 dt},$$

равномерно ограничен при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\|u_\varepsilon\| \leq \frac{2}{\alpha} \|F\|_W. \quad (2.3)$$

Предельный оператор имеет вид

$$\hat{L}^0 v = -\Delta v + c^2(x)v = F(x, t).$$

По теореме 2.2  $u_\varepsilon$  сильно сходится к  $v$ , если правая часть  $F(x, t)$  принадлежит  $R(\hat{L}^0)$ . Область  $R(\hat{L}^0)$  состоит из дважды дифференцируемых по  $t$  функций, обращающихся в нуль при  $t=0$  вместе со своими первыми производными. Замыкание  $R(\hat{L}^0)$  в пространстве  $W$  сохраняет одно начальное условие  $F(x, 0)=0$ .

Таким образом, в случае уравнения (2.1), как и в примере а), если правая часть принадлежит  $R(\hat{L}^0)$  и обращается в нуль при  $t=0$ , то  $\int_0^1 \|u_\varepsilon - v\|^2 dt$  сходится к нулю. Это можно доказать и в

случае, когда правая часть зависит от  $\varepsilon$  и сильно сходится в  $W$  к некоторой функции  $F_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Предположим теперь, что  $F(x, t) \in W$ , но  $F(x, 0) \neq 0$ . Докажем, что в этом случае для любой функции  $\varphi(t)$  на  $[0, 1]$  с интегрируемым квадратом

$$\int_0^1 \|\varphi(t)(u_\varepsilon - v)\|^2 dt \rightarrow 0,$$

г. е. осуществляется смешанная сходимость — слабая по  $t$  и сильная по  $x$ .

Для доказательства умножим (2.1) на дважды дифференцируемую функцию  $\varphi(t)$ , обращающуюся в нуль на концах отрезка  $[0, 1]$  вместе со своей производной, и проинтегрируем по  $t$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(t) F(x, t) dt = \varepsilon \int_0^1 \varphi(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt + \hat{L}^0 \int_0^1 \varphi(t) u dt = \\ = \varepsilon \int_0^1 \varphi'(t) u dt + \hat{L}^0 \int_0^1 \varphi(t) u dt. \quad (2.4) \end{aligned}$$

Поскольку в силу (2.3)

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\| \int_0^1 \varphi'(t) u dt \right\| \leq \varepsilon \sqrt{\int_0^1 (\varphi'(t))^2 dt} \|u\|_{L_2} \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} \sqrt{\int_0^1 (\varphi'(t))^2 dt} \|F\|_W \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

а оператор  $\{L^0\}^{-1}$  существует и ограничен (как обратный к эллиптическому оператору  $L^0$ ; см. предыдущий пример), то из (2.4) вытекает равенство

$$\int_0^1 \varphi(t) u_\varepsilon dt - \{L^0\}^{-1} \int_0^1 \varphi(t) F(x, t) dt = -\varepsilon \{L^0\}^{-1} \int_0^1 \varphi'(t) u_\varepsilon dt.$$

Отсюда в силу равенств

$$\{L^0\}^{-1} \int_0^1 \varphi(t) F(x, t) dt = \int_0^1 \varphi(t) \{L^0\}^{-1} F(x, t) dt = \int_0^1 v \varphi(t) dt$$

имеем

$$\left\| \int_0^1 \varphi(t) [u_\varepsilon - v] dt \right\| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Поскольку множество  $\{|u_\varepsilon - v|\}$  ограничено в  $L_2$ , то это соотношение будет выполнено по замыканию для всех  $\varphi(t)$  с интегрируемым квадратом.

**3. Теорема Реллиха.** Сейчас мы укажем одно применение теоремы 2.2 к спектральной теории самосопряженных операторов, а именно получим из нее с помощью элементарных рассуждений следующую теорему Реллиха [68, 35, 70].

**Теорема 2.3 (Реллиха).** Пусть  $\{A_n\}$  — последовательность самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве  $H$ , сходящаяся к самосопряженному оператору  $A$  (в том смысле, что  $A$  есть замыкание оператора  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ ). Если  $\{E_\lambda^{(n)}\}$ ,  $\{E_\lambda\}$  — спектраль-

ные семейства, отвечающие  $A_n$ ,  $A$  соответственно, то  $\{E_\lambda^{(n)}\}$  сильно сходятся при  $n \rightarrow \infty$  к  $E_\lambda$  в каждой точке  $\lambda$ , не принадлежащей точечному спектру оператора  $A$ .

Доказательство элементарно, если последовательность  $\{A_n\}$  равномерно ограничена по норме. Действительно, в этом случае можно, не ограничивая общности, считать, что  $\|A_n\| \leq 1$ . Для любого многочлена  $P(t)$  имеем  $P(A_n) \rightarrow P(A)$ . С помощью теоремы Вейерштрасса это переносится на любые функции, непрерывные на отрезке  $[-1, 1]$ . Возьмем, в частности, функцию

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Соответствующей функцией от оператора  $A$  будет  $E_0 A$ .

Таким образом, получаем  $E_0^{(n)} A_n \rightarrow E_0 A$ . Отсюда следует, что

$$E_0^{(n)} A \rightarrow E_0 A. \quad (2.5)$$

Действительно, для любого  $f \in H$  имеем

$$\begin{aligned} \|E_0^{(n)} A f - E_0 A f\| &\leq \|E_0^{(n)} (A - A_n) f\| + \|E_0^{(n)} A_n f - E_0 A f\| \leq \\ &\leq \|(A - A_n) f\| + \|E_0^{(n)} A_n f - E_0 A f\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Если нуль не есть собственное значение оператора  $A$ , то  $R(A)$  всюду плотно в  $H$  и на  $R(A)$  определен обратный оператор  $A^{-1}$  (вообще говоря, неограниченный). Для всякого  $f \in R(A)$  в силу (2.5) имеем

$$E_0^{(n)} f = E_0^{(n)} A A^{-1} f = E_0 f.$$

Множество  $R(A)$  всюду плотно в  $H$ , поэтому

$$E_0^{(n)} f \rightarrow E_0 f \quad \forall f \in H,$$

т. е.  $E_0^{(n)} \rightarrow E_0$ .

Если теперь  $\lambda$  — произвольная точка, не являющаяся собственным значением оператора  $A$ , то достаточно те же рассуждения применить к оператору  $(A - \lambda)$ ; получим  $E_\lambda^{(n)} \rightarrow E_\lambda$ . Таким образом, для равномерно ограниченной последовательности  $\{A_n\}$  теорема доказана.

Рассмотрим общий случай. Из условия

$$A_n \rightarrow A \text{ на } D$$

следует, что

$$A_n \pm i \rightarrow A \pm i \text{ на } D.$$

Операторы  $[A_n + i]$  существуют и равномерно ограничены (норма каждого из них не превосходит 1); в силу теоремы 2.2

$$[A_n + i]^{-1} \rightarrow [A + i]^{-1}.$$

Аналогично,  $(A_n - i)^{-1} \rightarrow (A - i)^{-1}$  и, следовательно,

$$\frac{1}{A_n + i} + \frac{1}{A_n - i} = \frac{2A_n}{A_n^2 + 1} \rightarrow \frac{2A}{A^2 + 1}.$$

Проекционные операторы  $E_0, E_0^{(n)}$ , отвечающие операторам  $A_n, A$ , совпадают с соответствующими операторами, отвечающими  $A/(A^2 + 1)$ , поэтому общий случай теоремы Реллиха сводится с помощью теорем § 2 к уже рассмотренному частному случаю ограниченной последовательности операторов.

**4. Критерий дискретности спектра уравнения с операторными коэффициентами.** Рассмотрим оператор

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + Q(x),$$

действующий в пространстве  $H_1$  функций, определенных на  $R$ , со значениями в гильбертовом пространстве  $H$ . Норму в  $H_1$  определим формулой

$$\|f\|_{H_1} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|_H^2 dx \right)^{1/2}.$$

Предположим, что почти для всех  $x$  самосопряженный оператор  $Q(x)$  имеет чисто дискретный спектр и положительно определен.

Пусть  $\mathcal{F}$  — линейное подпространство в  $H_1$  функций, удовлетворяющих неравенству

$$\int_{\Omega} \left\| \frac{d}{dx} y(x) \right\|_H^2 dx \leq \frac{1}{16\omega^2} \int_{\Omega} \|y(x)\|_H^2 dx,$$

где  $\Omega$  — любое ограниченное измеримое множество,  $\omega = \int_{\Omega} dx$ .

Определим на  $\mathcal{F}$  функционал

$$\Phi(\omega) = \inf_{y \in \mathcal{F}} \int_{\Omega} \frac{(y, Qy)}{\|y\|_H^2} dx.$$

**Теорема 2.4.** Спектр оператора  $L$  дискретный тогда и только тогда, когда

$$\inf_{y \in \mathcal{F}} \int_{x_0 + \Omega} \frac{(y, Qy)}{(y, y)} dx \rightarrow \infty$$

при  $|x_0| \rightarrow \infty$  для любой ограниченной области  $\Omega$ , где  $x_0 + \Omega = \{x : x = x_0 + x', x' \in \Omega\}$ .

В дальнейшем слабую сходимость последовательности  $z_n$  в  $H$  или  $H_1$  обозначим  $z_n \rightharpoonup z$ , или  $z_n \rightharpoonup_{H_1} z$ .

Для доказательства теоремы воспользуемся следующими леммами.

Лемма 2.1. Если  $A$  — такой вполне непрерывный оператор, что  $A^{-1}$  существует и  $D(A^{-1})$  плотна в  $H$ , то для любой последовательности  $\{y_n\} \subset D(A^{-1})$  и  $y_m \xrightarrow{H} 0$  последовательность  $\sigma_m = \beta_m \|y_m\|$ , где  $\beta_m^{-1} = \max\{\|A^{-1}y_m\|, \alpha\}$ , сходится к нулю для любого  $\alpha > 0$ .

Доказательство. Пусть  $g \in D((A^{-1})^*)$ ; тогда

$$(g, \beta_m A^{-1}y_m) = \beta_m ((A^{-1})^* g, y_m) \leq \frac{1}{\alpha} ((A^{-1})^* g, y_m).$$

Отсюда последовательность  $\beta_m A^{-1}y_m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$  в силу того, что  $D(A^{-1})$  плотна в  $H$ .

Так как  $A$  вполне непрерывен, то

$$\sigma_m = \beta_m \|y_m\| = \|A\beta_m A^{-1}y_m\| \leq \|A\| \beta_m A^{-1}y_m \rightarrow 0$$

при  $m \rightarrow \infty$ .

Лемма 2.2 (критерий вполне непрерывности). Ограниченный обратимый оператор  $A$ , для которого  $D(A^{-1})$  плотна в  $H$ , вполне непрерывен тогда и только тогда, когда для любой последовательности  $\{y_m\} \subset D(A^{-1})$  такой, что  $\|y_m\| = 1$  и  $y_m \xrightarrow{H} 0$ , последовательность  $\|A^{-1}y_m\| \rightarrow \infty$  при  $m \rightarrow \infty$ .

Доказательство. Необходимость следует из леммы 2.1. Докажем достаточность. Для подпоследовательности  $m_k$  такой, что

$$\|Ay_{m_k}\| \geq \varepsilon, \text{ выполняется неравенство } \left\| A^{-1} \frac{Ay_{m_k}}{\|Ay_{m_k}\|} \right\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|y_{m_k}\| = \frac{1}{\varepsilon},$$

а поскольку очевидно, что  $Ay_{m_k}/\|Ay_{m_k}\| \xrightarrow{H} 0$ , то по условию это неравенство невозможно при  $m_k \rightarrow \infty$ ; значит,  $\|Ay_m\| \rightarrow 0$ . Пусть дана последовательность  $f_n \in H$ ,  $\|f_n\| = 1$  и  $f_n \xrightarrow{H} 0$ . Возьмем такие  $y_n \in D(A^{-1})$ , что  $\|y_n - f_n\| \leq \varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Имеем  $\|Af_n\| \leq \|A(f_n - y_n)\| + \|Ay_n\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а значит,  $A$  вполне непрерывен.

Доказательство теоремы 2.4. Необходимость. Предположим, что  $L$  (а значит, и  $\sqrt{L}$ ) имеет дискретный спектр, т. е.  $(\sqrt{L})^{-1}$  вполне непрерывен в  $H_1$ . Пусть последовательность  $\{y_k\} \subset \mathcal{F}$  такова, что

$$\left| \int_{\Omega_k} \frac{(y_k, Qy_k)}{(y_k, y_k)} dx - \Phi_k(\omega) \right| < \varepsilon, \text{ где } \Omega_k = x_k + \Omega, |x_k| \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

$$\Phi_k(\omega) = \inf_{y \in \mathcal{F}} \int_{\Omega_k} \frac{(y, Qy)}{(y, y)} dx.$$

Пусть  $y \in C^1$  — финитная функция с носителем в  $\Omega$  такая, что  $|\varphi(x)| \leq 1$ . Введем обозначения  $c_1(\omega) = \max_x |\varphi(x)|$ ,  $c_2(\omega) = \int \varphi^2(x) dx$ ,  $\Phi_k(x) = \varphi(x + x_k)$ . Так как  $|x_k| \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , то  $\Phi_k = \frac{\Phi_k y_k}{\|\Phi_k y_k\|_{H_1}} \xrightarrow{H_1} 0$ . В силу критерия вполне непрерывности необ-

ходимо, чтобы  $\|\sqrt{L}\Phi_k\|_{H_1} \rightarrow \infty$ , т. е.

$$\chi_k = \left\{ \|(\Phi_k y_k)'\|_{H_1}^2 + \int_{\Omega_k} \Phi_k^2(y_k, Qy_k) dx \right\} \|y_k \Phi_k\|_{H_1}^{-2} \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Так как  $\Phi_k y_k \in \mathcal{F}$ , то

$$\begin{aligned} \|(\Phi_k y_k)'\|_{H_1}^2 &= \int_{\Omega_k} \|\Phi_k(x) y_k(x)\|_H^2 dx \leq 2 \int_{\Omega_k} \{(\Phi_k)'^2 \|y_k\|^2 + \Phi_k^2 \|y_k'\|^2\} dx \leq \\ &\leq c_3(\omega) \int_{\Omega_k} \|y_k\|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Оценим снизу  $\|y_k \Phi_k\|_{H_1}^2$ . Применяя теорему о среднем, для любого  $x \in \Omega_k$  получим

$$\begin{aligned} \left| \|y_k(x)\|_H^2 - \frac{1}{\omega} \int_{\Omega_k} \|y_k(\xi)\|_H^2 d\xi \right| &= \left| \|y_k(x)\|_H^2 - \|y_k(x^1)\|_H^2 \right| = \\ &= 2 \left| \int_{x^1}^x (y_k', y_k) d\xi \right| \leq \sqrt{4 \int_{\Omega_k} \|y_k'\|^2 d\xi \cdot \int_{\Omega_k} \|y_k\|^2 d\xi} \leq \frac{1}{2\omega} \int_{\Omega_k} \|y_k\|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда, раскрывая модуль, получим  $\frac{1}{2\omega} \int_{\Omega_k} \|y_k\|^2 d\xi \leq \|y_k\|^2 \leq$

$$\leq \frac{3}{2\omega} \int_{\Omega_k} \|y_k\|^2 d\xi. \text{ Следовательно, умножая это неравенство на}$$

$\Phi_k^2(x)$  и интегрируя его, получим

$$\int_{\Omega_k} \|\Phi_k y_k\|^2 dx \geq \frac{1}{2\omega} \int_{\Omega_k} \Phi_k^2(x) dx \cdot \int_{\Omega_k} \|y_k\|^2 d\xi = c_4(\omega) \int_{\Omega_k} \|y_k\|^2 d\xi.$$

Отсюда и из (2.8) следует  $\|(\Phi_k y_k)'\|_{H_1}^2 \|\Phi_k y_k\|_{H_1}^{-2} \leq c_3(\omega)/c_2(\omega)$ . Отсюда же следует, что  $\|y_k(x)\|_H^2 \leq \frac{3}{2\omega} \frac{1}{c_2(\omega)} \|\Phi_k y_k\|_{H_1}^2$ . Поэтому из (2.7) следует, что

$$\int_{\Omega_k} \Phi_k^2(y_k, Qy_k) \|y_k\|^2 dx \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

а поскольку  $|\varphi_k(x)| \leq 1$ , первый, а следовательно, и второй члены левой части неравенства (2.6) стремятся к  $\infty$ . Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть  $\Phi_k(\omega) \rightarrow \infty$  при всех  $0 < \omega < 1$ . Нам нужно показать, что для любой последовательности  $y_n \in D(\sqrt{L})$  такой, что  $y_n \xrightarrow{H_1} 0$ ,  $\|y_n\|_{H_1} = 1$ , выполняется  $\|\sqrt{L}y_n\|_{H_1} \rightarrow \infty$  (тогда в силу приведенного критерия оператор  $(\sqrt{L})^{-1}$  будет вполне непрерывным, а следовательно,  $\sqrt{L}$  (а значит, и  $L$ ) имеет дискретный

спектр). Предположим противное: пусть существует такая последовательность указанного вида, что

$$\| \sqrt{L} y_n \|_{H_1}^2 = \| y_n' \|_{H_1}^2 + \int (y_n, Q y_n) dx \leq c < \infty, \quad (2.9)$$

а следовательно,  $\int (y_n, Q y_n) dx \leq c$  и  $\| y_n' \|_{H_1}^2 \leq c$ . Из последнего неравенства в силу теоремы вложения следует  $\| y_n(x) \|^2 \leq c$ . Выберем из  $y_n'$  слабо сходящуюся подпоследовательность  $y_{n_i} \rightharpoonup y \in H_1$ . Поскольку  $y_{n_i} \rightharpoonup 0$ , то  $y=0$ . Пусть  $P(\xi)$  — функция, равная 1 при  $0 \leq \xi \leq x$  и 0 вне этого интервала. Для любой  $f \in H_1$  (поскольку  $fP \in H_1$ , а  $y_{n_i} \rightharpoonup 0$ ) имеем

$$(f, y_{n_i}(x) - y_{n_i}(0)) = \left( f, \int_0^x y_{n_i}' d\xi \right) = \int (fP, y_{n_i}') d\xi \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

Выберем из  $y_{n_i}(0)$  слабо сходящуюся подпоследовательность  $y_{n_{i_k}}(0) \rightharpoonup h$ . Из (2.10) следует, что и  $y_{n_{i_k}}(x) \rightharpoonup h$ ; следовательно, так как  $y_{n_{i_k}} \rightharpoonup 0$ , то  $h=0$ . Пусть  $0 < \varepsilon < 1/(72c)$ . По условию найдется  $k_0$  такое, что  $\Phi_k(\varepsilon) > 1$  при  $k > k_0$ . Положим  $N = k_0 \varepsilon$ ,  $m = n_{i_k}$ ,  $h_m = \sqrt{Q} y_m$ . Поскольку  $(\sqrt{Q})^{-1}$  вполне непрерывен почти для всех  $x$ , то в силу леммы 2.1  $\| y_m \|^2 = \sigma_m^2 \beta_m^{-2}$ , где  $\sigma_m^2 \rightarrow 0$  почти для всех  $x$ . Очевидно,  $\sigma_m^2$  измерима на интервале  $\Delta = (-N, N)$  и на этом интервале  $\sigma_m^2$  стремится к нулю по мере. Значит, для произвольных  $\delta > 0$ ,  $\eta > 0$  можно указать  $p = p(\eta, \delta)$  такое, что для каждого  $m > p$  найдется множество  $F_m \subset \Delta$ , удовлетворяющее условию  $\text{mes}(\Delta \setminus F_m) \leq \eta$  и  $\sigma_m^2 \leq \delta$  для  $x \in F_m$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{F_m} \| y_m \|^2 dx &\leq \delta \int_{F_m} \max(\| h_m \|^2, \alpha) dx \leq \\ &\leq \delta \int_{F_m} (\| h_m \|^2 + \alpha) dx \leq \delta c + \delta \alpha \text{mes} F_m \leq \delta(c + 2\alpha N). \end{aligned}$$

С другой стороны,  $\int_{\Delta \setminus F_m} \| y_m \|^2 dx \leq c \text{mes}(\Delta \setminus F_m) \leq c\eta$ . Таким образом,  $\int_{|x| \leq N} \| y_m \|^2 dx \leq \frac{1}{4}$  при  $m > p$ , если  $\eta < \frac{1}{8c}$ ,  $\delta < (8c + 16\alpha N)^{-1}$ .

Рассмотрим теперь  $\int_{|x| > N} \| y_m \|^2 dx$ . Если на  $\Omega_k$  при  $|k| > k_0$  и  $\omega = \varepsilon$  функция  $y_m \in \mathcal{F}$ , то, используя теорему о среднем, для некоторой точки  $x_{km} \in \Omega_k$  получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} (y_m, Q y_m) dx &= \| y_m(x_{km}) \|^2 = \int_{\Omega_k} \frac{(y_m, Q y_m)}{(y_m, y_m)} dx \geq \\ &\geq \| y_m(x_{km}) \|^2 \Phi_k(\omega) \geq \| y_m(x_{km}) \|^2; \end{aligned}$$

если же  $y_m$  не принадлежит  $\mathcal{F}$ , то найдется такая точка  $x_{km}$ , что

$$\| y_m(x_{km}) \|^2 = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_k} \| y_m \|^2 dx \leq 16\varepsilon \int_{\Omega_k} \| y_m' \|^2 dx.$$

Отсюда следует, что всегда найдется точка  $x_{km}^0 \in \Omega_k$  такая, что

$$\| y_m(x_{km}^0) \|^2 \leq 16 \int_{\Omega_k} \{ \| y_m' \|^2 + (y_m, Q y_m) \} dx.$$

Вместе с тем для любой точки  $x \in \Omega_k$

$$\begin{aligned} \| \| y_m(x) \|^2 - \| y_m(x_{km}^0) \|^2 \| &= 2 \left| \int_{x_{km}^0}^x (y_m, y_m') d\xi \right| \leq \\ &\leq \int_{\Omega_k} (\| y_m' \|^2 + \| y_m \|^2) dx \leq \int_{\Omega_k} (\| y_m' \|^2 + (y_m, Q y_m)) dx. \quad (2.11) \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} \| y_m(x) \|^2 dx &\leq \int_{\Omega_k} \| y_m(x_{km}^0) \|^2 dx + \int_{\Omega_k} (\| y_m(x) \|^2 - \| y_m(x_{km}^0) \|^2) dx \leq \\ &\leq 17\varepsilon \int_{\Omega_k} (\| y_m' \|^2 + (y_m, Q y_m)) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\int_{|x| \geq N} \| y_m(x) \|^2 dx \leq 17c\varepsilon \leq 1/4.$$

Следовательно, при  $m > p$  имеем

$$\| y_m \|_{H_1} \leq 1/2,$$

что противоречит условию  $\| y_m \|_{H_1} = 1$ . Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Если заменить константу  $1/(16\omega^2)$  на  $c(\omega) \leq 1/(16\omega^2)$  такую, что  $c(\omega) \rightarrow \infty$  при  $\omega \rightarrow 0$ , то теорема 2.4 остается в силе.

### § 3. Ряды теории возмущений для обратного оператора

**Т е о р е м а 2.5.** Пусть линейные операторы  $A, B$ , действующие из банахова пространства  $B_1$  в банахово пространство  $B_2$ , удовлетворяют следующим условиям:

- 1) замыкание  $A + \varepsilon B$  существует;
- 2) область  $D(A + \varepsilon B)$  плотна в  $B_1$ ;
- 3)  $A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{(A + \varepsilon B)}$ ;

- 4) оператор  $[\overline{A + \varepsilon B}]^{-1}$  равномерно ограничен при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;
- 5) существуют элементы

$$A^{-1}(BA^{-1})^k f, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad f \in B_2. \quad (3.1)$$

Тогда

$$\| \overline{[A + \varepsilon B]^{-1}} f - A^{-1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \varepsilon^k (BA^{-1})^k f \| = O(\varepsilon^n).$$

Доказательство. Заметим вначале, что поскольку  $n$  элементов вида (3.1) существуют, то  $(n-1)$  первых элементов принадлежат  $D(A)$  и  $D(B)$ , а следовательно, и  $D(A + \varepsilon B) \subset D(\overline{A + \varepsilon B})$ .

Докажем тождество

$$\overline{(A + \varepsilon B)^{-1}} f = A^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-\varepsilon)^k (BA^{-1})^k f + \overline{(A + \varepsilon B)^{-1}} (-\varepsilon)^n (BA^{-1})^n f.$$

Действительно, подействовав на обе его части оператором  $\overline{A + \varepsilon B}$  (это возможно в силу сделанного выше замечания), получим

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} (-\varepsilon)^k (BA^{-1})^k f + \varepsilon BA^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-\varepsilon)^k (BA^{-1})^k f + (-\varepsilon)^n (BA^{-1})^n f \equiv f.$$

Поскольку оператор  $\overline{(A + \varepsilon B)^{-1}}$  существует и ограничен, то тем самым тождество доказано.

Имеем

$$\begin{aligned} \left\| (A + \varepsilon B)^{-1} f - A^{-1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \varepsilon^k (BA^{-1})^k f \right\| &= \\ &= \varepsilon^n \| \{ (A + \varepsilon B)^{-1} - A^{-1} \} (BA^{-1})^n f \|. \end{aligned}$$

По предположению  $A^{-1} (BA^{-1})^n f$  существует, т. е.

$$(BA^{-1})^n f \in R(A).$$

Следовательно, в силу теоремы 3.2

$$\| \{ \overline{[A + \varepsilon B]^{-1}} - A^{-1} \} (BA^{-1})^n f \| \rightarrow 0$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Теорема доказана.

## ГЛАВА 3

### ВОЗМУЩЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ И ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

#### § 1. Введение

В этой главе мы будем рассматривать однопараметрические полугруппы операторов  $T_t$ ,  $0 \leq t < \infty$ , определенные в некотором банаховом пространстве  $B$  и удовлетворяющие следующим условиям:

1) ограниченность:

$$\| T_t \| \leq k, \quad 0 \leq t \leq s$$

(постоянная  $k$  зависит, вообще говоря, от  $s$ );

2) сильная непрерывность, т. е.

$$\| T_{t+\varepsilon} f - T_t f \| \rightarrow 0, \quad f \in B, \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

при всех  $t$ , включая  $t=0$ .

При этих условиях предел

$$A = \lim_{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} (T_\varepsilon - I)$$

(здесь  $I$  — единичный оператор, а предел понимается в смысле сильной сходимости операторов) существует и представляет собой замкнутый оператор, имеющий всюду плотную в  $B$  область определения\*). Он называется *производящим оператором* полугруппы  $T_t$ .

Нас будет интересовать связь между сходимостью производящих операторов и сходимостью отвечающих этим операторам полугрупп. Для того чтобы сама постановка такого вопроса имела определенный смысл, нужно предварительно установить, что полугруппа  $T_t$  однозначно восстанавливается по своему производящему оператору  $A$ . Если оператор  $A$  ограничен, то это непосредственно ясно, ибо тогда

$$T_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = e^{At}, \quad (1.1)$$

причем ряд сходится при всех  $t$ . Если же оператор  $A$  неограничен, то ряд (1.1) непосредственного смысла не имеет; тем не менее по-

\*) См., например, [35, 46].

Тогда

$$\| \overline{[A + \varepsilon B]^{-1} f} - A^{-1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \varepsilon^k (BA^{-1})^k f \| = O(\varepsilon^n).$$

Доказательство. Заметим вначале, что поскольку  $n$  элементов вида (3.1) существуют, то  $(n-1)$  первых элементов принадлежат  $D(A)$  и  $D(B)$ , а следовательно, и  $D(A + \varepsilon B) \subset D(A + \varepsilon B)$ .

Докажем тождество

$$\overline{(A + \varepsilon B)^{-1} f} = A^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-\varepsilon)^k (BA^{-1})^k f + \overline{(A + \varepsilon B)^{-1} (-\varepsilon)^n (BA^{-1})^n f}.$$

Действительно, подействовав на обе его части оператором  $\overline{A + \varepsilon B}$  (это возможно в силу сделанного выше замечания), получим

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} (-\varepsilon)^k (BA^{-1})^k f + \varepsilon BA^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-\varepsilon)^k (BA^{-1})^k f + (-\varepsilon)^n (BA^{-1})^n f \equiv f.$$

Поскольку оператор  $\overline{(A + \varepsilon B)^{-1}}$  существует и ограничен, то тем самым тождество доказано.

Имеем

$$\begin{aligned} \left\| (A + \varepsilon B)^{-1} f - A^{-1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \varepsilon^k (BA^{-1})^k f \right\| &= \\ &= \varepsilon^n \| \{ (A + \varepsilon B)^{-1} - A^{-1} \} (BA^{-1})^n f \|. \end{aligned}$$

По предположению  $A^{-1} (BA^{-1})^n f$  существует, т. е.

$$(BA^{-1})^n f \in R(A).$$

Следовательно, в силу теоремы 3.2

$$\| \{ [A + \varepsilon B]^{-1} - A^{-1} \} (BA^{-1})^n f \| \rightarrow 0$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Теорема доказана.

## ГЛАВА 3

### ВОЗМУЩЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ И ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

#### § 1. Введение

В этой главе мы будем рассматривать однопараметрические полугруппы операторов  $T_t$ ,  $0 \leq t < \infty$ , определенные в некотором банаховом пространстве  $B$  и удовлетворяющие следующим условиям:

1) ограниченность:

$$\|T_t\| \leq k, \quad 0 \leq t \leq s$$

(постоянная  $k$  зависит, вообще говоря, от  $s$ );

2) сильная непрерывность, т. е.

$$\|T_{t+\varepsilon} f - T_t f\| \rightarrow 0, \quad f \in B, \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

при всех  $t$ , включая  $t=0$ .

При этих условиях предел

$$A = \lim_{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} (T_\varepsilon - I)$$

(здесь  $I$  — единичный оператор, а предел понимается в смысле сильной сходимости операторов) существует и представляет собой замкнутый оператор, имеющий всюду плотную в  $B$  область определения\*). Он называется *производящим оператором* полугруппы  $T_t$ .

Нас будет интересовать связь между сходимостью производящих операторов и сходимостью отвечающих этим операторам полугрупп. Для того чтобы сама постановка такого вопроса имела определенный смысл, нужно предварительно установить, что полугруппа  $T_t$  однозначно восстанавливается по своему производящему оператору  $A$ . Если оператор  $A$  ограничен, то это непосредственно ясно, ибо тогда

$$T_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = e^{At}, \quad (1.1)$$

причем ряд сходится при всех  $t$ . Если же оператор  $A$  неограничен, то ряд (1.1) непосредственного смысла не имеет; тем не менее по-

\*) См., например, [35, 46].



лугруппа  $T_t$ , ограниченная и сильно непрерывная, восстанавливается по  $A$  однозначно. Существует несколько явных формул, выражающих  $T_t$  через  $A$ . Например,

$$T_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( I - \frac{t}{k} A \right)^{-k},$$

или  $T_t = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{A_n t}$ , где  $A_n$  ограничены, коммутируют между собой и  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ .

Сводка такого рода формул имеется, например, в книге Э. Хилле и Р. Филлипса [46, 13]. Обобщение этих формул дано в § 4.

Полугруппы операторов, действующих в банаховом пространстве, тесно связаны с дифференциальными уравнениями с операторными коэффициентами. Если  $A$  — производящий оператор ограниченной сильно непрерывной полугруппы  $T_t$  и  $f_0 \in D(A)$ , то функция  $f(t) = T_t f_0$  со значениями в  $B$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$df/dt = Af$$

в том смысле, что

$$\|(f(t+\varepsilon) - f(t))/\varepsilon - Af(t)\| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Мы рассмотрим более общее уравнение вида

$$du(t)/dt - A(t)u(t) = F(t), \quad 0 \leq t \leq a, \quad (1.2)$$

где  $u(t)$  — элемент комплексного банахова пространства  $B$ , зависящий от действительного параметра  $t$ ,  $F(t)$  — заданный элемент из  $B$ ,  $A(t)$  — заданный, вообще говоря, неограниченный, зависящий от  $t$ , линейный оператор в  $B$ .

Если оператор  $A(t)$  не зависит от  $t$ , а  $F=0$ , то решение уравнения (4.2) формально дается формулой  $e^{At}u(0)$ , где  $u(0) \in B$ . Строгое определение и свойство такой экспоненты дается в теории полугрупп. В теории полугрупп найдены необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на *инфинитезимальный* оператор  $A$  с всюду плотной областью определения, чтобы полугруппа  $T_t = e^{At}$  была сильно непрерывна. Нужно, чтобы существовали такие вещественные числа  $\omega$  в  $M$ , что все  $\lambda > \omega$  принадлежат резольвентному множеству оператора  $A$  и

$$\|(A - \lambda)^{-n}\| \leq M(\lambda - \omega)^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

(см. [13], теорема Хилле — Филлипса — Иосиды).

Мы обобщим это условие (как достаточное, но не необходимое!) на случай, когда оператор  $A$  зависит от  $t$ .

В дальнейшем нам понадобится менее общее необходимое условие: если полугруппа  $T_t = e^{At}$  ограничена единицей, то при всех  $\varepsilon > 0$  оператор  $(1 - \varepsilon A)^{-1}$  определен всюду в  $B$  и ограничен единицей.

## § 2. Основная оценка решений эволюционного уравнения

Введем следующее определение. Будем говорить, что оператор  $A(t)$  в  $B$  обладает *свойством  $P$* , если выполнены следующие условия:

- 1) оператор  $A$  замкнут и имеет плотную область определения  $D(A(t)) \subset B$ ;
- 2) существует такое  $\omega$ , что все  $\lambda > \omega$  принадлежат резольвентному множеству оператора  $A(t)$ ;
- 3) функция  $[A(t) - \lambda]^{-1}h$  ( $\lambda > \omega$ ,  $h \in B$ ) интегрируема по Бохнеру;
- 4) существует такое  $M > 0$ , что для любого разбиения  $s \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0$

$$\|[A(t_1) - \lambda]^{-1}[A(t_2) - \lambda]^{-1} \dots [A(t_n) - \lambda]^{-1}\|_B \leq M(\lambda - \omega)^n.$$

*Лемма 3.1.* Пусть  $A(t)$  обладает свойством  $P$ . Пусть  $u(t)$  — некоторая непрерывная функция параметра  $t$  со значениями в  $D(A(t)) \subset B$  и такая, что функции  $du/dt$  и  $F(t) = du/dt - A(t)u$  интегрируемы по Бохнеру. Тогда

$$\max_{0 \leq t \leq s} \|u(t)\|_B \leq M e^{\omega_1 s} \left\{ \|u(0)\|_B + \int_0^s \|F(t)\|_B dt \right\}, \quad \omega_1 > \omega. \quad (2.1)$$

*Следствие 1.* В предположениях леммы решение  $u(t)$  уравнения (1.2) однозначно определяется начальным значением  $u(0)$  и правой частью  $F(t)$ .

В случае  $F(t) = 0$  и  $M = 1$  лемма 3.1 является следствием теоремы Като [59]. Метод, излагаемый ниже, отличается от метода Като и примыкает к методам Иосиды [35].

*Доказательство леммы 3.1.* Введем следующие обозначения. Обозначим через  $C(B)$  пространство непрерывных функций на  $[0, s]$  со значениями в  $B$ ; норму введем следующим образом:

$$\|\varphi(t)\|_{C(B)} = \max_{0 \leq t \leq s} \|\varphi(t)\|_B, \quad \varphi \in C(B).$$

$L_1(B)$  — банахово пространство абсолютно интегрируемых (интегрируемых по Бохнеру) функций со значениями в  $B$ ; норму определим следующим образом:

$$\|f(t)\|_{L_1(B)} = \int_0^s \|f(t)\|_B dt, \quad f(t) \in L_1(B).$$

Через  $L_1 \oplus B$  обозначим банахово пространство пар функций  $\{g, f(t)\}$ , где  $g \in B$ ,  $f \in L_1(B)$ , с нормой

$$\|\{g, f(t)\}\|_{L_1 \oplus B} = \|g\|_B + \int_0^s \|f(t)\|_B dt.$$

Обозначим через  $L$  оператор, который переводит элемент из  $C(t, B)$  в элемент из  $L_1 \oplus B$  (будем обозначать это действие сле-

дующим образом:  $L \in C(B) \rightarrow L_1(B) \oplus B$ . При этом, если  $u(t) \in D(L) \subset C(B)$ , то  $Lu = \left\{ u(0), \frac{du}{dt} - A(t)u \right\}$ . Таким образом, область определения оператора  $L$  есть пересечение областей определения операторов

$$d/dt \in C(B) \rightarrow L_1(B), \quad A(t) \in C(B) \rightarrow L_1(B).$$

Введем операторы

$$I_\delta(t) = (1 - \delta A(t))^{-1}, \quad B_\delta(t) = A(t)I_\delta(t).$$

Оператор  $I_\delta(t)$  ограничен. Действительно,

$$I_\delta(t) = \left[ \frac{1}{\delta} - A(t) \right]^{-1} \delta^{-1},$$

а так как  $\|[\lambda - A(t)]^{-1}\| \leq M/(\lambda - \omega)$ , то

$$\|I_\delta\| \leq M\delta^{-1} \left( \frac{1}{\delta} - \omega \right)^{-1}.$$

Положим раз и навсегда  $\delta \leq 1/(2\omega)$ , тогда  $\|I_\delta(t)\| \leq 2M$ . Оператор  $B_\delta(t)$  также ограничен, так как

$$\begin{aligned} B_\delta(t) &= A(t)I_\delta(t) = A(t) \frac{1}{1 - \delta A(t)} = \\ &= \frac{1}{\delta} \left( \frac{1}{1 - \delta A(t)} - 1 \right) = \frac{I_\delta(t)}{\delta} - \frac{1}{\delta}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|B_\delta(t)\| \leq (2M+1)/\delta.$$

Из теоремы 2.2 следует, что  $I_\delta(t) \rightarrow 1$  при  $\delta \rightarrow 0$  на  $D(A(t)) \subset B$ ; значит,  $B_\delta(t) \rightarrow A(t)$  на  $D(A(t)) \subset B$ . Обозначим, далее, через  $L_\delta(t): C(B) \rightarrow L_1 \oplus B$  оператор, действующий следующим образом на

$$\begin{aligned} u(t) \in D\left(\frac{d}{dt}\right) \subset C(B) \left(\frac{d}{dt}: C(B) \rightarrow L_1(B)\right): L_\delta(t)u(t) &= \\ &= \left\{ u(0), \frac{du}{dt} - B_\delta(t)u(t) \right\}. \end{aligned}$$

Докажем, что  $L_\delta \rightarrow L$  в смысле нормы  $L_1 \oplus B$  на  $D(L) \subset C(B)$ . По определению имеем

$$L_\delta(t)u(t) = \left\{ u(0), \frac{du}{dt} - B_\delta(t)u \right\}, \quad (2.2)$$

$$L(t)u(t) = \left\{ u(0), \frac{du}{dt} - A(t)u \right\}.$$

Вычтем одно равенство из другого и возьмем нормы

$$\|L_\delta u - Lu\|_{L_1 \oplus B} = \|\{0, B_\delta u - Au\}\|_{L_1 \oplus B} = \int_0^s \| [B_\delta(t) - A(t)]u \|_B dt.$$

Докажем, что этот интеграл стремится к 0 при  $\delta \rightarrow 0$ . Выражение, стоящее под интегралом, как доказывалось выше, стремится к 0 при  $\delta \rightarrow 0$ . Остается доказать (см. § 1 гл. 2), что это выражение ограничено интегрируемой функцией. Но  $A(t) - B_\delta(t) = [1 - I_\delta(t)]A(t)$ , и так как  $\|I_\delta\| \leq 2M$ , то  $\|1 - I_\delta(t)\| \leq 2M + 1$ ; следовательно,

$$\|[1 - I_\delta(t)]A(t)u(t)\|_B \leq (2M + 1)\|A(t)u(t)\|_B.$$

Поскольку  $u(t) \in D(L) \subset D(A(t))$ , где  $A(t) \in C(B) \rightarrow L_1(B)$ , то  $\|A(t)u(t)\|_B$  интегрируема. По теореме Осгуда можем утверждать, что

$$\int_0^s \|[A(t) - B_\delta(t)]u(t)\|_B dt \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Итак,  $L_\delta \rightarrow L$  в  $L_1 \oplus B$  на  $D(L) \subset C(B)$ .

Докажем, что операторы  $L_\delta^{-1} \in L_1 \oplus B \rightarrow C(B)$  ограничены в совокупности, т. е.

$$\max_{0 \leq t \leq s} \|u_\delta(t)\|_B \leq c \left\{ \|u(0)\|_B + \int_0^s \|F(t)\|_B dt \right\}, \quad (2.3)$$

если  $L_\delta u_\delta = \{u(0), F(t)\}$ . Это и будет означать, что  $\|L_\delta^{-1}\| \leq c$ .

Для доказательства (2.3) рассмотрим задачу

$$du_\delta(t)/dt - B_\delta(t)u_\delta(t) = F(t), \quad u_\delta(0) = u_0. \quad (2.4)$$

Сделаем замену  $u_\delta = e^{-t/\delta}v$ . Задача (2.4) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} - \frac{1}{\delta}v - B_\delta(t)v &= F(t)e^{t/\delta}, \\ v|_{t=0} &= u_0. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $B_\delta(t) + \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta}I_\delta(t)$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} - \frac{1}{\delta}I_\delta(t)v &= F(t)e^{t/\delta}, \\ u|_{t=0} &= u_0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Докажем, что решение этого уравнения можно записать в виде ряда

$$\begin{aligned} v &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} \int_0^t I_\delta(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} I_\delta(t_2) dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} I_\delta(t_n) u_0 dt_n + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} \int_0^t e^{\tau/\delta} d\tau \int_\tau^t I_\delta(t_1) dt_1 \int_\tau^{t_1} I_\delta(t_2) dt_2 \dots \int_\tau^{t_{n-1}} I_\delta(t_n) F(\tau) dt_n. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Нетрудно убедиться, что формальная подстановка (2.6) в (2.5) действительно обращает уравнение (2.5) в тождество.

Остается доказать, что ряд (2.6) и ряд из производных от его членов по  $t$  сходятся. В силу условия 4)

$$\left\| \int_{\tau}^t I_{\delta}(t_1) dt_1 \int_{\tau}^{t_1} I_{\delta}(t_2) dt_2 \dots \int_{\tau}^{t_{n-1}} I_{\delta}(t_n) F(\tau) dt_n \right\|_B \leq \frac{M(t-\tau)^n}{[1-\delta\omega]^n n!} \|F(\tau)\|_B. \quad (2.7)$$

Аналогично (2.7) имеем

$$\left\| \int_0^t I_{\delta}(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} I_{\delta}(t_2) dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} I_{\delta}(t_n) u_0 dt_n \right\|_B \leq \frac{M t^n}{(1-\delta\omega)^n n!} \|u_0\|_B.$$

Отсюда следует, что ряд (2.6) сходится, причем

$$\begin{aligned} \|v\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} \left\{ \left\| \int_0^t I_{\delta}(t_1) dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} I_{\delta}(t_n) dt_n u_0 \right\|_B + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t e^{\tau/\delta} d\tau \left\| \int_{\tau}^t I_{\delta}(t_1) dt_1 \dots \int_{\tau}^{t_{n-1}} I_{\delta}(t_n) F(\tau) dt_n \right\|_B \right\} \leq \\ &\leq M \|u_0\|_B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\delta^n (1-\delta\omega)^n n!} + M \int_0^t e^{\tau/\delta} \|F(\tau)\|_B d\tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^n}{\delta^n (1-\delta\omega)^n n!} = \\ &= M e^{\frac{t}{\delta(1-\delta\omega)}} \left\{ \|u_0\|_B \int_0^t e^{\tau/\delta} \left(1 - \frac{1}{1-\delta\omega}\right) \|F(\tau)\|_B d\tau \right\} \leq \\ &\leq M e^{\frac{t}{\delta(1-\delta\omega)}} \left\{ \|u_0\|_B + \int_0^t \|F(\tau)\|_B d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается сходимость ряда из производных. Таким образом, ряд (2.6) удовлетворяет уравнению (2.5). Единственность этого решения следует из интегрального уравнения

$$v(t) = u_0 + \int_0^t F(\tau) e^{\tau/\delta} d\tau + \frac{1}{\delta} \int_0^t I_{\delta}(\tau) v(\tau) d\tau,$$

соответствующего (2.5), и доказывается методом сжатых отображений.

Теперь получим требуемую оценку для  $u_{\delta}(t)$ . Вспомним, что равенство  $u_{\delta}(t) = e^{-t/\delta} v(t)$  может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \|u_{\delta}(t)\|_B &= e^{-t/\delta} \|v(t)\|_B \leq M e^{\left(\frac{1}{1-\delta\omega} - 1\right) t/\delta} \left\{ \|u_0\|_B + \int_0^t \|F(\tau)\|_B d\tau \right\} = \\ &= M e^{\frac{\omega}{1-\delta\omega} t} \left\{ \|u_0\|_B + \int_0^t \|F(\tau)\|_B d\tau \right\}. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Возьмем  $\omega_1 > \omega$ . Тогда при всех достаточно малых  $\delta$   $\omega_1 > \omega/(1-\delta\omega)$ . Учитывая это, можем записать

$$\|u_{\delta}(t)\|_B \leq M e^{\omega_1 t} \left\{ \|u_0\|_B + \int_0^t \|F(\tau)\|_B d\tau \right\} \leq M e^{\omega_1 t} \left\{ \|u_0\|_B + \int_0^s \|F(t)\|_B dt \right\}.$$

Выражение в правой части последнего неравенства не зависит от  $t$ , поэтому та же оценка будет справедлива и для  $\max_{0 \leq t \leq s} \|u_{\delta}(t)\|_B$ , т. е.

$$\max_{0 \leq t \leq s} \|u_{\delta}(t)\|_B \leq M e^{\omega_1 s} \left\{ \|u_0\|_B + \int_0^s \|F(t)\|_B dt \right\};$$

итак,  $\|L_{\delta}^{-1}\| \leq M e^{\omega_1 s}$ .

Таким образом, операторы  $L_{\delta}$ ,  $L$  удовлетворяют всем условиям теоремы 2.2 об обратных операторах, на основании которой мы можем утверждать, что  $\lim_{\delta \rightarrow 0} L_{\delta}^{-1} = L^{-1}$  существует и ограничен той же величиной.

Итак, решение задачи

$$\frac{du}{dt} - A(t)u = F(t), \quad u(0) = u_0,$$

которая соответствует  $Lu = \{u_0, F(t)\}$ , единственно, и имеет место оценка (2.1).

Лемма доказана.

### § 3. Теория возмущений эволюционного уравнения

Пусть  $A(t)$  ( $0 \leq t \leq t_0$ ) — семейство операторов из банахова пространства  $B$  в  $B'$  с общей плотной в  $B$  областью определения  $D$ . Пусть

$$\| [1 - \varepsilon A(t)]^{-1} \| \leq 1 \quad \forall t, \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (3.0)$$

Рассмотрим последовательность таких семейств  $A_n(t)$ , удовлетворяющую условию (3.0), что

$$\int_0^t \| [A_n(t) - A(t)] g(t) \| dt \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (3.1)$$

на некотором плотном в  $C(B)$  множестве  $D_i$  дифференцируемых в  $L_1(B)$  функций  $g(t)$ .

Теорема 3.1. Решение  $u_n(t)$  уравнения

$$du_n/dt - A_n(t)u_n(t) = F_n(t),$$

удовлетворяющее условию  $u_n(0) = g_n$ , где  $g_n \rightarrow g$  в  $B$ ,

$$\int_0^t \|F_n(t) - F(t)\|_B dt \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

сходится сильно в  $B$  равномерно по  $t$  к решению  $u(t)$  задачи

$$Lu(t) = F(t), \quad u(0) = g$$

(если таковое существует), где  $L$  есть замыкание оператора  $d/dt - A(t)$ , заданного на множестве  $D_i$ .

Доказательство. Рассмотрим операторы  $L_n$  и  $\tilde{L}$  из  $C(B)$  в  $L_1 \oplus B$ :

$$L_n u_n(t) = \left\{ u_n(0), \frac{du_n(t)}{dt} - A_n(t)u_n(t) \right\},$$

$$\tilde{L}u(t) = \{u(0), Lu(t)\}.$$

Из условия (3.1) следует, что последовательность  $\{L_n\}$  сходится к оператору  $\tilde{L}$ . Из леммы 3.1 следует, что  $\|L_n^{-1}\| \leq 1$ , поэтому в силу теоремы 2.2 получаем требуемое утверждение.

Пример (из теории дифференциальных уравнений). Рассмотрим задачу

$$i \frac{\partial u_n^2(t, x)}{\partial t} - n^{1-\delta} t^n \Delta u_n(t, x) + c^2(x, t) u_n(t, x) = F_n(t, x),$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad c^2(x, t) \leq 1;$$

функция  $u_n(0) = 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $F_n(x, t) \in C(L_2)$  ( $c^2(x, t)$  — непрерывная функция). Очевидно, что для дважды дифференцируемой по  $x$  и один раз дифференцируемой по  $t$  функции  $v(x, t)$

$$\int_0^1 \|n^{1-\delta} t^n \Delta v(t)\|_{L_2} dt \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Кроме того, оператор  $n^{1-\delta} t^n \Delta$  удовлетворяет условию (3.0). Все условия теоремы 3.1 выполнены; следовательно, решение  $u_n(t, x)$  сходится в среднем по  $x$  и равномерно по  $t$  при  $0 \leq t \leq 1$  к функции

$$\int_0^t e^{-\int_{\tau}^t c^2(x, \tau) d\tau} F(x, \tau) d\tau,$$

где  $F(x, \tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, \tau)$ .

## § 4. Теория возмущений полугрупп операторов

1. Основная лемма. Пусть  $A(t)$  — однопараметрическое ( $0 \leq t \leq s$ ) семейство операторов банахова пространства  $B$  с общей плотной в  $B$  областью определения  $D \subset B$ . Пусть  $A(t)$  зависит от параметра  $t$  непрерывно, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow t_1} A(t)g = A(t_1)g \quad \forall g \in D.$$

Пусть, далее,  $F(t)$  — некоторая интегрируемая по Бохнеру функция со значениями в  $B$ .

Рассмотрим уравнение

$$\frac{du}{dt} - A(t)u = F(t). \quad (4.1)$$

От решения  $u(t)$  потребуем, чтобы это была непрерывная функция, удовлетворяющая нулевому начальному условию

$$u(0) \in B. \quad (4.2)$$

Иначе говоря, мы рассмотрим оператор  $L$  из банахова пространства  $C(B)$  непрерывных функций  $g(t)$  со значениями в  $B$  в банахово пространство  $V = B \oplus L_1(B)$ :

$$Lu(t) = \left\{ u(0), \frac{du}{dt} - A(t)u \right\}, \quad Lu(t) \in V.$$

Классическим решением будем называть функцию  $u(t)$ , принадлежащую пересечению  $D\left(\frac{d}{dt}\right) \cap D$  и удовлетворяющую уравнению (4.1) и начальному условию (4.2). Решением будем называть функцию  $u(t)$ , если существует последовательность  $\{u_n(t)\}$  классических решений уравнений

$$du_n/dt - A(t)u_n = F_n(t),$$

сходящихся в  $C(B)$  к  $u(t)$ , т. е.

$$\max_{0 \leq t \leq s} \|u(t) - u_n(t)\|_B \rightarrow 0;$$

соответствующие правые части при этом сходятся в  $L_1(B)$ , начальные условия сходятся в  $B$ :  $u_n(0) \rightarrow u(0)$ .

Будем говорить, что оператор  $A(t)$  удовлетворяет условию (P), если

- 1)  $A(t_1)$  коммутирует с  $A(t_2)$  при всех  $t_1, t_2 \in (0, s)$ ;
- 2) оператор  $(1 - \varepsilon A(t))^{-1}$  существует, ограничен единицей и определен всюду.

Если  $A(t)$  удовлетворяет условию (P), то будем писать  $A(t) \in (P)$ .

Известно, что если при этих условиях  $u_0 \in D$  и  $F(t) \in D$ , то классическое решение уравнения (4.1) существует [59].

Лемма 3.2. Пусть  $A_n(t), A(t) \in (P), F_n(t), F(t) \in L_1(B), g_n, g \in B, D$  — некоторая область, плотная в  $B$ , и пусть

$$\int_0^s \|F_n(t) - F(t)\|_B dt \rightarrow 0, \quad (4.3)$$

$$g_n \rightarrow g, \quad (4.4)$$

$$\int_0^s \|[1 - \varepsilon A_n(t)]^{-1} g - [1 - \varepsilon A(t)]^{-1} g\|_B dt \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

при  $n \rightarrow \infty$  для всех  $g \in B$  и при любом фиксированном  $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$ . Тогда последовательность решений задачи

$$\begin{aligned} du_n(t)/dt - A_n(t)u_n(t) &= F_n(t), \\ u_n(0) &= g \end{aligned}$$

сходится к решению задачи

$$\begin{aligned} du(t)/dt - A(t)u(t) &= F(t), \\ u(0) &= g \end{aligned}$$

равномерно по  $t$ , т. е.

$$\max_{0 \leq t \leq s} \|u_n(t) - u(t)\|_B \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Из условия следует, что последовательность  $I_{n\varepsilon}(t) = (1 - \varepsilon A_n(t))^{-1}$  сходится в  $L_1(B)$  к  $I_\varepsilon(t) = (1 - \varepsilon A(t))^{-1}$ . Следовательно, и  $B_{n\varepsilon} = A_n I_{n\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} (1 - I_{n\varepsilon})$  сходится к  $B_\varepsilon = A I_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (1 - I_\varepsilon)$  на всех элементах  $L_1(B)$  (т. е. сильно в  $L_1(B)$ ). Отсюда в силу вложения  $C(B) \subset L_1(B)$  следует, что операторы  $L_\varepsilon^{(n)}: C(B) \rightarrow V$ :

$$L_\varepsilon^{(n)} u(t) = \{u(0), du/dt - B_{n\varepsilon} u\}$$

сходятся к оператору  $L_\varepsilon: C(B) \rightarrow V$ :

$$L_\varepsilon u(t) = \{u(0), du/dt - B_\varepsilon u\}$$

на множестве дифференцируемых в  $L_1(B)$  функций из  $C(B)$  (т. е. непрерывных функций с производной из  $L_1(B)$ ). Это и есть область определения оператора  $L_\varepsilon$  в пространстве  $C(B)$ . По формуле (2.1) имеем

$$\|[L_\varepsilon^{(n)}]^{-1}\| \leq 1.$$

Следовательно, на области значений оператора  $L_\varepsilon$ , которая совпадает с  $V$ , в силу теоремы 2.2 имеем

$$[L_\varepsilon^{(n)}]^{-1} \rightarrow L_\varepsilon^{-1} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Иначе говоря, для  $\delta > 0$  найдется такое  $n_{\delta, \varepsilon}(\varepsilon)$ , что при  $n > n_{\delta, \varepsilon}(\varepsilon)$

для любого элемента  $\varphi \in V$

$$\max_{0 \leq t \leq s} \|L_\varepsilon^{(n)-1} \varphi - L_\varepsilon^{-1} \varphi\|_B \leq \delta. \quad (4.6)$$

Кроме того (см. доказательство леммы 3.1),

$$\max_{0 \leq t \leq s} \|L_\varepsilon^{-1} \varphi - L^{-1} \varphi\|_B \leq \delta \text{ при } \varepsilon \leq \varepsilon \delta.$$

Как известно, множество двузначных функций фундаментально (т. е. их линейная оболочка плотна) в  $L_1(B)$  (см. гл. 1, § 1). Пусть  $\varphi = \{f(t), g\}$  и пусть  $f(t)$  — двузначная функция со значениями в  $D$ :

$$f(t) = \begin{cases} f_1 \in D & \text{при } t < t_0, \\ f_2 \in D & \text{при } t > t_0. \end{cases}$$

Рассмотрим оператор  $L^{(n)}: C(B) \rightarrow V$ :

$$L^{(n)} u(t) = \{u(0), du/dt - A_n(t)u\} \in V.$$

Обозначим

$$[L_\varepsilon^{(n)}]^{-1} \{g, f(t)\} - [L^{(n)}]^{-1} \{g, f(t)\} = u_{n\varepsilon} - u_n.$$

Отсюда следует, что  $u_{n\varepsilon}$  и  $u_n$  принадлежат  $D(d/dt) \cap D(A_n(t))$ . Имеем

$$\begin{aligned} L^{(n)}(u_{n\varepsilon} - u_n) &= \{0, du_{n\varepsilon}/dt - A_n(t)u_{n\varepsilon} - f - B_{n\varepsilon}(t) + B_{n\varepsilon}(t)u_{n\varepsilon}\} = \\ &= \{0, [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)]u_{n\varepsilon}\} = \\ &= \left\{0, [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] \int_0^t \exp \left\{ \left[ \int_\tau^t B_{n\varepsilon}(x) dx \right] f(\tau) d\tau \right\} = \right. \\ &= \left. \left\{0, \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t B_{n\varepsilon}(x) dx \right\} [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] f(\tau) d\tau \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|L^{(n)}(u_{n\varepsilon} - u)\| &\leq \int_0^t \left\| \exp \left\{ \int_\tau^t B_{n\varepsilon}(x) dx \right\} [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] f(\tau) \right\|_B \times d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t \left\| \exp \left\{ \int_\tau^t B_{n\varepsilon}(x) dx \right\} \right\|_B \| [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] f(\tau) \|_B d\tau \leq \\ &\leq \int_0^s \| [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] f(\tau) \|_B d\tau, \quad (4.7) \end{aligned}$$

поскольку в (2.1) в данном случае полагаем  $M=1, \omega=0$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^s \|L^{(n)}(u_{n\varepsilon} - u_n)\|_B dt &\leq \int_0^s dt \int_0^s \| [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] f(\tau) \|_B d\tau \leq \\ &\leq t_0 \int_0^s dt \| [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] f_1 \|_B + (s - t_0) \int_0^s \| [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)] f_2 \|_B dt \leq \\ &\leq s \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] A_n(t) f_1 \|_B dt + s \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] A_n(t) f_2 \|_B dt. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно

$$J = \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] A_n(t) f \|_B dt, \quad f \in D.$$

Имеем

$$\begin{aligned} J &= \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] [A_n(t) - A(t) + A(t)] f \|_B dt \leq \\ &\leq \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] [A_n(t) - A(t)] \|_B dt + \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] A(t) f \|_B dt. \end{aligned}$$

Первый член правой части не превосходит

$$2 \int_0^s \| [A_n(t) - A(t)] f \|_B dt$$

и, следовательно, при  $n > n_\delta$  может быть сделан меньше  $\delta$  ( $A_n(t) \rightarrow A(t)$ ). Следовательно, при  $n > n_\delta$

$$J \leq \delta + \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] A(t) f \|_B dt.$$

Оценим второй член. Пусть  $q(t)$  — конечнозначная функция, удовлетворяющая неравенству

$$\int_0^s \| q(t) - A(t) f \|_B dt \leq \delta,$$

и пусть она принимает значение  $q_k$  ( $k=1, 2, \dots, k_\delta$ ):  $q(t) = q_k$  при  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ . Возьмем  $r_k \in D$  так, чтобы  $\|r_k - q_k\| \leq \delta$ . Положив  $r_\varepsilon(t) = r_k$  при  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ , получим

$$\int_0^s \| r_\varepsilon(t) - q(t) \| dt = \sum_{k=1}^{k_\delta} (r_k - q_k) (t_{k+1} - t_k) \leq \delta \cdot s.$$

Следовательно,

$$\int_0^s \| r_\varepsilon(t) - A(t) f \| dt \leq \delta(1 + s). \quad (4.9)$$

Имеем

$$\begin{aligned} J &\leq \delta + \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] A(t) f \| dt \leq \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] [Af - r_\varepsilon(t)] \| dt + \\ &+ \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] r_\varepsilon(t) \| dt + \delta. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} [I_{n\varepsilon}(t) - 1] r_\varepsilon(t) &= \{I_{n\varepsilon}(t) - I_{n\varepsilon}(t) (1 - \varepsilon A_n(t))\} r_\varepsilon(t) = \varepsilon I_{n\varepsilon} A_n(t) r_\varepsilon(t). \\ \text{Следовательно, } \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] r_\varepsilon(t) \| &\leq \varepsilon \| A_n(t) r_\varepsilon(t) \|. \text{ Отсюда в силу} \\ (4.10) \text{ имеем} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &\leq \delta + 2 \int_0^s \| A(t) f - r_\varepsilon(t) \| dt + \varepsilon \int_0^s \| A_n(t) r_\varepsilon(t) \| dt \leq \\ &\leq \delta + 2\delta(1 + s) + \varepsilon \int_0^s \| A_n(t) r_\varepsilon(t) \| dt. \end{aligned}$$

Следовательно, при  $n > n'_\delta$  и

$$\varepsilon \leq \varepsilon'_\delta = \frac{\delta}{2 \int_0^s \| A(t) r_\varepsilon(t) \| dt} \leq \frac{\delta}{\int_0^s \| A_n(t) r_\varepsilon(t) \| dt}$$

имеем  $J \leq 4\delta + 2\delta s$ . Отсюда в силу (4.8) следует

$$\int_0^s \| L^{(n)}(u_{n\varepsilon} - u_n) \| dt \leq 2s(4\delta + 2\delta s) = 4\delta s(2 + s).$$

Поскольку  $\| [L^{(n)}]^{-1} \| \leq 1$ , то при  $n > n'_\delta$ ,  $\varepsilon \leq \varepsilon'_\delta$  имеем

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq s} \| u_{n\varepsilon} - u_n \| &= \max_{0 \leq t \leq s} \| [L^{(n)}]^{-1} \{ [L^{(n)}] (u_{n\varepsilon} - u_n) \} \| \leq \\ &\leq \int_0^s \| L^{(n)}(u_{n\varepsilon} - u_n) \| dt \leq 4\delta s(2 + s), \end{aligned}$$

т. е. при  $n > n'_\delta$  и  $\varepsilon \leq \varepsilon'_\delta$

$$\max_{0 \leq t \leq s} \| [ [L_{\varepsilon_0}^{(n)}]^{-1} - [L^{(n)}]^{-1} ] \{ f(t) \} \| \leq \delta \cdot \text{const.}$$

Следовательно, в силу (4.6) и (4.7) при  $n > n'_\delta$  и  $n > n_{\delta, \varphi}(\varepsilon_0)$ , где  $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_\delta, \varepsilon'_\delta\}$ , имеем

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq s} \| [ (L^{(n)})^{-1} - L^{-1} ] \{ f(t), g \} \| &\leq \max_{0 \leq t \leq s} \| [ (L^{(n)})^{-1} - (L_{\varepsilon_0}^{(n)})^{-1} ] \{ f(t), g \} \| + \\ &+ \max_{0 \leq t \leq s} \| [ (L_{\varepsilon_0}^{(n)})^{-1} - L_{\varepsilon_0}^{-1} ] \{ f(t), g \} \| + \\ &+ \max_{0 \leq t \leq s} \| [ (L_{\varepsilon_0}^{-1})^{-1} - L^{-1} ] \{ f(t), g \} \| \leq \delta \cdot \text{const.} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq s} \|(L^{(n)})^{-1} - L^{-1}\| \{f(t), g\} = 0 \quad (4.11)$$

для любой двузначной функции  $f(t)$  со значениями в  $D$ . Поскольку  $D$  плотно в  $B$ , то для любой двузначной функции  $g(t)$  со значениями в  $B$  и  $\varepsilon > 0$  найдется такая функция  $f(t)$ , что

$$\int_0^s \|g(t) - f(t)\| dt \leq \varepsilon.$$

Но множество двузначных функций фундаментально в  $L_1(B)$ , поэтому и множество двузначных функций со значениями в  $D$  фундаментально в  $L_1(B)$ . Соотношение (4.11), очевидно, имеет место на линейном многообразии, натянутом на это множество, т. е. на некотором множестве, плотном в  $L(B)$ . Поскольку  $\|(L^{(n)})^{-1}\| \leq 1$  для всех  $n$ , то по теореме Банаха — Штейнгауза (4.11) выполняется для всех  $F(t) \in L(B)$ .

Пусть, наконец,  $\{g_n, F_n(t)\}$  — последовательность, сходящаяся в  $V$  к  $\{g, F(t)\}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq s} \|(L^{(n)})^{-1} \{g_n, F_n(t)\} - (L^{(n)})^{-1} \{g, F(t)\}\| &\leq \\ &\leq \int_0^s \|F_n(t) - F(t)\| dt + \|g_n - g\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.11) следует окончательно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq s} \|(L^{(n)})^{-1} \{F_n(t), g_n\} - L^{-1} \{F(t), g\}\| = 0.$$

## 2. Обобщение теоремы Хилле.

**Теорема 3.2.** Пусть  $T(t)$  — сильно непрерывная полугруппа, удовлетворяющая условию

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad (4.12)$$

и  $A$  — ее производящий оператор. Пусть, далее,  $\{A_n\}$  — последовательность операторов, сходящихся на общей плотной области определения  $D$ , причем  $A = \lim A_n$ , и тоже удовлетворяющих условию (P) 2). Тогда последовательность  $(1 - A_n t/n)^{-n}$  при  $n \rightarrow \infty$  сильно сходится к  $T(t)$  на всем пространстве  $B$ .

**Доказательство.** Рассмотрим элемент

$$u_n = (1 - A_n t/n)^{-n} u_0, \quad u_0 \in D,$$

и составим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет  $u_n$ . Это будет уравнение в банаховом пространстве  $B$ :

$$\frac{du_n}{dt} - (1 - A_n t/n)^{-1} A_n u_n = 0, \quad u_n(0) = u_0. \quad (4.13)$$

В силу условия (P) 2) оператор  $(1 - A_n t/n)^{-1}$  существует на всем  $B$  и ограничен единицей, поэтому из теоремы 2.2 следует, что

$$(1 - A_n t/n)^{-1} \rightarrow 1.$$

Значит, для  $g \in D$  имеем

$$\begin{aligned} \left\| \left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} A_n g - A g \right\|_B &\leq \left\| \left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} (A_n - A) g \right\|_B + \\ &+ \left\| \left\{ \left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} - 1 \right\} A g \right\|_B \leq \| (A_n - A) g \|_B + \\ &+ \left\| \left\{ \left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} - 1 \right\} A g \right\|_B \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно,  $(1 - A_n t/n)^{-1} A_n \rightarrow A$ . В силу (2.1)  $\|e^{B_s t}\| \leq 1$ , поэтому (см. § 1)  $\|[1 - \delta B_s]^{-1}\| \leq 1$  и, значит,

$$[1 - \delta A_n (1 - A_n t/n)^{-1}]^{-1} = [1 - \delta B_{t/n}]^{-1} \leq 1.$$

Таким образом, условия леммы 3.2 для задачи (4.13) выполнены. Отсюда следует, что решение  $u_n(t)$  уравнения (4.13) сходится к решению  $u(t)$  задачи

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = u_0,$$

и теорема доказана.

Заметим, что для случая ограниченных операторов  $A_n$  теорема 3.2 была доказана Хилле [46].

**3. Сходимость производящих операторов и сходимость полугрупп.**

**Теорема 3.3.** Пусть операторы  $A_n$  сходятся к  $A$  на плотной области  $D$  и последовательность  $\{(1 - \varepsilon A_n)^{-1}\}$  ограничена единицей, определена всюду и сходится сильно к  $(1 - \varepsilon A)^{-1}$  для любого  $\varepsilon_0 \geq \varepsilon > 0$ . Тогда операторы  $e^{A_n t}$  сходятся сильно к  $e^{A t}$ .

Доказательство этого утверждения следует из леммы 3.2, если положить  $A_n(t) = A_n$ ,  $A(t) = A$ ,  $F(t) = 0$ ,  $g_n = g$ .

Из теоремы 3.3 вытекает следующая

**Теорема 3.4** [29]. Пусть  $\{T_i^{(n)}\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) и  $\{T_i\}$  — сильно непрерывные полугруппы линейных операторов в  $B$  с производящими операторами  $A_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) и  $A$ . Если  $\|T_i^{(n)}\| \leq 1$  и если  $A$  есть замыкание оператора

$$\lim A_n (D(\lim A_n) = D(A_n)),$$

то  $\{T_i^{(n)}\}$  сильно сходится к  $T_i$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $t$  ( $0 \leq t \leq s$ ).

Действительно, из  $\|T_i^{(n)}\| \leq 1$  имеем  $\|[1 - \varepsilon A_n]^{-1}\| \leq 1$ . Поэтому из теоремы 2.2 следует, что  $(1 - \varepsilon A_n)^{-1} \rightarrow (1 - \varepsilon A)^{-1}$  при всех  $\varepsilon > 0$ . Условия теоремы 3.3 выполнены. Утверждение доказано.

Пример. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - h\Delta u - \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 u = F(x, y),$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x^2+y^2=1} = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (4.14)$$

в классе непрерывных функций от  $t$  с интегрируемым по  $x, y$  квадратом (в области, ограниченной  $\Gamma$ ). Обозначим

$$A_h(t)u = h\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} - c^2 u,$$

$$Au = -c^2 u + \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Операторы  $(1 - A_h(t))^{-1}$  ограничены единицей; кроме того, как известно, решение задачи

$$-u + h\varepsilon\Delta u + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon c^2 u = F(x, y),$$

$$u|_{\Gamma} = 0$$

при  $h \rightarrow 0$  сходится к решению задачи

$$-v + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon c^2 v = F(x, y),$$

$$v|_{x=\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Значит, в силу теоремы 3.3 решение уравнения (4.14) сходится равномерно по  $t$  и сильно в  $L_2$  к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 u = F,$$

$$u|_{x=\sqrt{1-y^2}} = 0, \quad u|_{t=0} = 0$$

## ГЛАВА 4

### СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ ОПЕРАТОРОВ

#### § 1. Теорема о сходимости гомоморфизмов в топологических группах

Вначале напомним некоторые понятия теории топологических групп [33].

Множество  $G$  элементов называется *группой*, если в нем введена операция, ставящая в соответствие каждой паре элементов  $a, b \in G$  некоторый элемент  $c \in G$ , так, что выполнены перечисленные ниже условия 1), 2), 3), называемые групповыми аксиомами. Операция эта по большей части называется умножением, и результат ее записывается  $ab$  (произведение  $ab$  может зависеть от порядка сомножителей:  $ab$ , вообще говоря, не равно  $ba$ ).

1) Ассоциативность: для любых трех элементов  $a, b, c \in G$  выполнено соотношение  $(ab)c = a(bc)$ .

2) В  $G$  имеется *левая единица*, общая для всех элементов группы, т. е. такой элемент  $e$ , что  $ea = a$  для любого  $a \in G$ .

3) Для всякого элемента  $a \in G$  существует *левый обратный* элемент, т. е. такой элемент  $a^{-1}$ , что  $a^{-1}a = e$ .

Если  $A$  и  $B$  — два подмножества группы  $G$ , то через  $AB$  обозначим подмножество, составленное из всех элементов вида  $xu$ , где  $x \in A, u \in B$ . Через  $A^{-1}$  обозначим подмножество, составленное из всех элементов вида  $x^{-1}$ , где  $x \in A$ . При натуральном  $m$  подмножество  $A^{m+1}$  определим индуктивно, считая, что  $A^1 = A$  и  $A^{m+1} = A^m A$ . Подмножество  $A^{-m}$  определим, положив  $A^{-m} = (A^{-1})^m$ . Пользуясь установленными обозначениями, можно составить произведение произвольного числа подмножеств, возведенных в произвольные целые степени. В дальнейшем мы иногда не будем делать различия между множеством, содержащим один элемент, и самим этим элементом, поэтому для нас имеет теперь смысл обозначение  $Ab$ , где  $A \in G, b \in G$ . Отметим, что если  $A$  непусто, то

$$AG = GA = G,$$

$$G^{-1} = G,$$

$$Ae = eA = A.$$

Множество  $H$  элементов некоторой группы  $G$  называется *подгруппой* или делителем группы  $G$ , если  $H$  есть группа в силу того же закона перемножения, который имеет место в  $G$ .



Пример. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - h\Delta u - \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 u = F(x, y),$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x^2+y^2=1} = 0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

в классе непрерывных функций от  $t$  с интегрируемым по  $x, y$  квадратом (в области, ограниченной  $\Gamma$ ). Обозначим

$$A_h(t)u = h\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} - c^2 u,$$

$$Au = -c^2 u + \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Операторы  $(1 - A_h(t))^{-1}$  ограничены единицей; кроме того, как известно, решение задачи

$$-u + h\varepsilon\Delta u + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon c^2 u = F(x, y),$$

$$u|_{\Gamma} = 0$$

при  $h \rightarrow 0$  сходится к решению задачи

$$-v + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon c^2 v = F(x, y),$$

$$v|_{x=\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Значит, в силу теоремы 3.3 решение уравнения (4.14) сходится равномерно по  $t$  и сильно в  $L_2$  к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 u = F,$$

$$u|_{x=\sqrt{1-y^2}} = 0, \quad u|_{t=0} = 0$$

## ГЛАВА 4

### СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ ОПЕРАТОРОВ

#### § 1. Теорема о сходимости гомоморфизмов в топологических группах

Вначале напомним некоторые понятия теории топологических групп [33].

Множество  $G$  элементов называется *группой*, если в нем введена операция, ставящая в соответствие каждой паре элементов  $a, b \in G$  некоторый элемент  $c \in G$ , так, что выполнены перечисленные ниже условия 1), 2), 3), называемые групповыми аксиомами. Операция эта по большей части называется умножением, и результат ее записывается  $ab$  (произведение  $ab$  может зависеть от порядка сомножителей:  $ab$ , вообще говоря, не равно  $ba$ ).

1) Ассоциативность: для любых трех элементов  $a, b, c \in G$  выполнено соотношение  $(ab)c = a(bc)$ .

2) В  $G$  имеется *левая единица*, общая для всех элементов группы, т. е. такой элемент  $e$ , что  $ea = a$  для любого  $a \in G$ .

3) Для всякого элемента  $a \in G$  существует *левый обратный элемент*, т. е. такой элемент  $a^{-1}$ , что  $a^{-1}a = e$ .

Если  $A$  и  $B$  — два подмножества группы  $G$ , то через  $AB$  обозначим подмножество, составленное из всех элементов вида  $xu$ , где  $x \in A, u \in B$ . Через  $A^{-1}$  обозначим подмножество, составленное из всех элементов вида  $x^{-1}$ , где  $x \in A$ . При натуральном  $m$  подмножество  $A^{m+1}$  определим индуктивно, считая, что  $A^1 = A$  и  $A^{m+1} = A^m A$ . Подмножество  $A^{-m}$  определим, положив  $A^{-m} = (A^{-1})^m$ . Пользуясь установленными обозначениями, можно составить произведение произвольного числа подмножеств, возведенных в произвольные целые степени. В дальнейшем мы иногда не будем делать различия между множеством, содержащим один элемент, и самим этим элементом, поэтому для нас имеет теперь смысл обозначение  $Ab$ , где  $A \in G, b \in G$ . Отметим, что если  $A$  непусто, то

$$AG = GA = G,$$

$$G^{-1} = G,$$

$$Ae = eA = A.$$

Множество  $H$  элементов некоторой группы  $G$  называется *подгруппой* или делителем группы  $G$ , если  $H$  есть группа в силу того же закона перемножения, который имеет место в  $G$ .

Образование  $g$  группы  $G$  в группу  $G^*$  называется *гомоморфным* отображением или *гомоморфизмом*, если оно сохраняет операцию умножения, т. е. если

$$g(x \cdot y) = g(x) \cdot g(y)$$

для любых двух элементов  $x, y \in G$ . Множество  $g^{-1}(e^*)$  всех элементов группы  $G$ , отображающихся в единицу  $e^*$  группы  $G^*$  при гомоморфизме  $g$ , называется *ядром* гомоморфизма  $g$ .

Множество  $R$  называется *топологическим пространством*, если каждому множеству  $M$  элементов пространства  $R$  поставлено в соответствие множество  $\bar{M}$ , называемое *замыканием* множества  $M$ , так, что выполнены следующие условия:

1) если  $M$  содержит только один элемент  $a$ , то  $\bar{M} = M$  или, что то же,  $\bar{a} = a$ ;

2) если  $M, N$  — два множества в  $R$ , то  $\overline{M \cup N} = \bar{M} \cup \bar{N}$ , т. е. замыкание суммы равно сумме замыканий;

3)  $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$ , т. е. двукратное применение операции замыкания дает тот же результат, что и однократное.

Множество  $\Gamma$  элементов топологического пространства  $R$  называется *замкнутым*, если  $\bar{\Gamma} = \Gamma$ . Множество  $G$  элементов из  $R$  называется *открытым* или *областью*, если  $R \setminus G$  есть замкнутое множество.

Множество  $G$  пространства  $R$  называется *всюду плотным*, если  $\bar{G} = R$ .

Система  $\Sigma$  областей пространства  $R$  называется *базисом* пространства  $R$ , если всякая непустая область из  $R$  может быть получена как сумма некоторого множества областей, входящих в  $\Sigma$ . Базис  $\Sigma$  пространства  $R$ , а каждая область системы  $\Sigma$  — *окрестностью* всякой точки, содержащейся в этой области.

Система  $\Sigma'$  окрестностей точки  $a$  называется *базисом в точке  $a$*  или *полной системой окрестностей точки  $a$* , если для каждой области  $G$ , содержащей точку  $a$ , найдется такая окрестность  $U \in \Sigma'$ , что  $U \subset G$ . Задание полной системы окрестностей в пространстве  $R$  дает возможность однозначно определить операцию замыкания в этом пространстве.

Образование  $f$  топологического пространства  $R$  на топологическое пространство  $R'$  называется *гомеоморфным* или *топологическим*, если оно 1) взаимно однозначно и 2) сохраняет операцию замыкания:  $f(\bar{M}) = \overline{f(M)}$  для всякого  $M \subset R$ .

Легко видеть, что если отображение  $f$  гомеоморфно, то обратное ему отображение  $f^{-1}$  также гомеоморфно. Два топологических пространства  $R$  и  $R'$  называются гомеоморфными, если одно из них можно гомеоморфно отобразить на другое.

Образование  $g$  топологического пространства  $R$  в топологическое пространство  $R'$  называется *непрерывным*, если для всякого множества  $M \subset R$  выполнено соотношение

$$g(\bar{M}) \subset \overline{g(M)}.$$

Множество  $G$  называется *топологической группой*, если

- 1)  $G$  есть группа;
- 2)  $G$  есть топологическое пространство;
- 3) групповые операции в  $G$  непрерывны в топологическом пространстве  $G$ .

Более полное требование это формулируется так: групповые операции в множестве  $G$  непрерывны в  $G$  как топологическом пространстве.

а) Если  $a, b \in G$ , то для любой окрестности  $W$  элемента  $ab$  найдутся такие окрестности  $U$  и  $V$  элементов  $a$  и  $b$ , что  $UV \subset W$ .

б) Если  $a$  есть некоторый элемент множества  $G$ , то для любой окрестности  $V$  элемента  $a^{-1}$  найдется такая окрестность  $U$  элемента  $a$ , что  $U^{-1} \subset V$ .

Пусть  $G$  — топологическая группа,  $\Sigma^*$  — некоторая полная система окрестностей ее единицы  $e$  и  $M$  — некоторое множество, всюду плотное в  $G$ . Тогда совокупность  $\Sigma$  всех множеств вида  $U_x$ , где  $U \in \Sigma^*$ ,  $x \in M$ , есть полная система окрестностей пространства  $G$ , а система  $\Sigma^*$  удовлетворяет следующему условию:

для всякого множества  $U$  системы  $\Sigma^*$  найдется такое множество  $V$  той же системы, что  $VV^{-1} \subset U$ .

Образование  $g$  топологической группы  $G$  в топологическую группу  $G^*$  называется *гомоморфным*, если 1)  $g$  является гомоморфным отображением алгебраической группы  $G$  в алгебраическую группу  $G^*$ ; 2)  $g$  является непрерывным отображением топологического пространства  $G$  в топологическое пространство  $G^*$ . Гомоморфизм  $g$  называется *мономорфизмом*, если он имеет своим ядром единицу.

Последовательность  $\{g_n\}$  гомоморфных отображений топологической группы  $\mathcal{H}_1$  в топологическую группу  $\mathcal{H}_2$  называется *предельно непрерывной*, если для любой окрестности  $\varepsilon$  единицы  $e^*$  группы  $\mathcal{H}_2$  найдутся такое число  $n_\varepsilon$  и такая окрестность  $\delta$  единицы  $e$  группы  $\mathcal{H}_1$ , что при  $n > n_\varepsilon$ ,  $x \in \delta$

$$g_n x \in \varepsilon;$$

в частности, если  $x_k \rightarrow e$ , то

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} g_n x_k = e^*.$$

Теорема 4.1. Пусть  $\{g_n\}$  — предельно непрерывная последовательность мономорфных отображений топологической группы  $\mathcal{H}_1$  в топологическую группу  $\mathcal{H}_2$ . Пусть  $R = \bigcap_n g_n(\mathcal{H}_1)$  и для  $x^* \in R$  существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{-1}(x^*)$ . Тогда существует подгруппа  $\bar{D} \subset \mathcal{H}_1$  и гомоморфное отображение  $g$  подгруппы  $\bar{D}$  в  $\mathcal{H}_2$ , обладающее свойствами:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} g(g_n^{-1}(x^*)) = x^*, x^* \in R; g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x), x \in \bar{D};$$

$$2) \text{ если } a_k \in \mathcal{H}_1, x_i \in \bar{D}, \lim_{k \rightarrow \infty} a_k x_i = e, \text{ то } \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty \\ i \rightarrow \infty}} g_n(a_k) g(x_i) = e^*.$$

Доказательство. Обозначим через  $T$  оператор, определенный на  $R$  и такой, что  $Tx^* = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{-1}x^*$ . Оператор  $T$  есть гомоморфизм алгебраической группы  $R$ . Действительно,

$$T(x_1^*x_2^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{-1}(x_1^*x_2^*) = (\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{-1}x_1^*)(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{-1}x_2^*) = Tx_1^*Tx_2^*, \quad x_1^*, x_2^* \in R,$$

в силу непрерывности групповых операций в  $\mathcal{H}_1$ . Докажем, что ядро гомоморфизма  $T$  состоит из единицы. Действительно, пусть  $Tx^* = e$ . Значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{-1}(x^*) = e$ . При  $k > K(\delta[\varepsilon])$  имеем  $x_k = g_k^{-1}(x^*) \in \delta[\varepsilon]$ ; при  $n > N(\varepsilon, \delta[\varepsilon])$  имеем  $g_n(x_k) \in \varepsilon$ ; значит, при  $n > \max(K, N)$   $g_n(x_n) \in \varepsilon$ , т. е.  $x^* = g_n(x_n) \in \varepsilon$ . Следовательно,  $x^* = e^*$ , так как  $\varepsilon$  — любая окрестность  $e$ .

Докажем, что при  $x \in D = \{x \in \mathcal{H}_1: x = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{-1}(x^*), x^* \in R\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = T^{-1}(x).$$

Действительно, поскольку  $T^{-1}x \in R$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^{-1}(T^{-1}(x)) = x$ . Следовательно, при  $k > K(\delta[\varepsilon])$

$$y_k = g_k^{-1}(T^{-1}(x))x^{-1} = g_k^{-1}(T^{-1}(x)[g_k(x)]^{-1}) \in \delta[\varepsilon],$$

и при  $n > N(\varepsilon, \delta[\varepsilon])$  имеем  $g_n y_k \in \varepsilon$ . Значит, при  $n > \max(K, N)$

$$g_n y_n = T^{-1}(x)[g_n^{-1}(x)]^{-1} \in \varepsilon.$$

Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = T^{-1}(x)$ .

Докажем, что оператор  $T^{-1}$  непрерывен. Пусть  $\varepsilon_1 \varepsilon_1^{-1} \subset \varepsilon$ . При  $n > N[\varepsilon_1, \delta_1[\varepsilon_1]]$  имеем  $g_n x \in \varepsilon$ , если  $x \in \delta_1[\varepsilon_1]$ . Кроме того, при  $n > N_1[\varepsilon_1^{-1}, \delta[\varepsilon_1^{-1}], x]$

$$T^{-1}(x)[g_n(x)]^{-1} \in \varepsilon_1^{-1}.$$

Следовательно, при  $n > \max(N, N_1)$

$$T^{-1}(x)[g_n(x)]^{-1}g_n(x) \in \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_1 \subset \varepsilon.$$

Значит, при  $x \in \delta_1[\varepsilon_1]$  имеем  $T^{-1}(x) \in \varepsilon$ .

Обозначим через  $g$  гомоморфизм из  $\bar{D}$  в  $\mathcal{H}_2$ , совпадающий с  $T^{-1}$  на  $D$ . Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n \bar{D} = g \bar{D}.$$

Пусть  $y \in \bar{D}$ ,  $x \in D$ ,  $x^{-1}y \in \delta$ . Поскольку

$$g_n(yx^{-1}) = g_n(y)[g_n(x)]^{-1} \text{ и } g[yx^{-1}] = g(y)[g(x)]^{-1} = g(y)[T^{-1}(x)]^{-1},$$

то

$$g_n(y)[g(y)]^{-1} = g_n(yx^{-1})g_n(x)[T^{-1}(x)]^{-1}[g(yx^{-1})]^{-1}.$$

Пусть  $\varepsilon_1 \varepsilon_1^{-1} \subset \varepsilon$ ,  $\varepsilon_2 \varepsilon_2^{-1} \subset \varepsilon_1^{-1}$ ; при  $n > N[\varepsilon_1, \delta[\varepsilon_1]]$ ,  $\delta \subset \delta[\varepsilon_1]$  имеем  $g_n(yx^{-1}) \in \varepsilon_1$ ; при  $n > N_1(x_1, \varepsilon_2)$  имеем  $g_n(x)[T^{-1}(x)]^{-1} \in \varepsilon_2$ ; при

$\delta \subset \delta[\varepsilon_2]$  имеем  $g(yx^{-1}) \in \varepsilon_2$ . Следовательно, при  $n > N[\varepsilon_1, \delta(\varepsilon_1)]$ ,  $n > N_1(x, \varepsilon_2)$  и  $\delta \delta[\varepsilon_1] \cap \delta[\varepsilon_2]$  получаем

$$g_n(y)[g(y)]^{-1} \in \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_2^{-1} \subset \varepsilon_1 \varepsilon_1^{-1} \subset \varepsilon.$$

Таким образом, при  $N > N(\varepsilon)$  выполняется включение

$$g_n(y)[g(y)]^{-1} \in \varepsilon.$$

Докажем 2). Заметим, во-первых, что из условия  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_k x_i = e$

следует, что  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i^{-1} x_k = e$ . Действительно, пусть  $\delta_1^{-1} \delta \subset \delta$ . При  $n > N(\delta_1)$ ,  $k, k' > k(\delta_1)$  имеем  $a_n x_k \in \delta_1, a_n x_{k'} \in \delta_1$ . Отсюда  $(a_n x_k)^{-1} a_n x_{k'} \in \delta_1^{-1} \delta_1 \subset \delta$ , т. е. при  $k_1 k' > k(\delta_1)$   $x_k^{-1} x_{k'} \in \delta$ ; значит,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i^{-1} x_k = e.$$

Пусть  $x_i \in \bar{D}$ ,  $a_k \in \mathcal{H}_1$  и  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_k x_i = e$ ; имеем

$$g_n(a_k)g(x_m) = g_n(a_k x_i)[g_n(x_i)]^{-1}g(x_i)g(x_i^{-1}x_m).$$

При  $k > K(\delta, [\varepsilon_1], \varepsilon_1)$ ,  $i > I(\delta[\varepsilon_1], \varepsilon_1)$ ,  $n > N(\delta[\varepsilon_1], \varepsilon_1)$  имеем  $g_n(a_k x_i) \in \varepsilon_i$ ; при  $n > N_1(\varepsilon_2, i)$  имеем  $g_n(x_i)[g(x_i)]^{-1} \in \varepsilon_2$ . Отсюда при  $n > N = \max[N(\delta[\varepsilon_1], \varepsilon_1), N_1(\varepsilon_2, i)]$ ,  $k > K(\delta[\varepsilon_1], \varepsilon_1)$ ,  $m > M(\varepsilon_2)$  получаем

$$g_n(a_k)g(x_m) \in \varepsilon_i \varepsilon_2^{-1} \varepsilon_2 \subset \varepsilon_1 \varepsilon_1^{-1} \subset \varepsilon.$$

Таким образом,  $N, K, M$  не зависят друг от друга и зависят лишь от  $\varepsilon$ . Значит,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} g_n(a_k)g(x_m) = e^*,$$

и теорема доказана.

## § 2. Слабо предельная непрерывность

1. **Равномерная ограниченность слабо непрерывной последовательности операторов.** Пусть  $B, B'$  — банаховы пространства. Рассмотрим множество замкнутых операторов  $\mathcal{T} = \{T_n\}$ , отображающих  $B$  в  $B'$ .

Будем обозначать знаком  $\Rightarrow$  слабую сходимость.

Множество  $\mathcal{T}$  называется *слабо предельно непрерывным*, если для любой последовательности  $f_k \in B$   $f_k \Rightarrow 0$  и любой последовательности  $T_{n_k} \in \mathcal{T}$  имеем  $T_{n_k} f_k \Rightarrow 0$  в  $B'$ .

**Лемма 4.1.** Если  $\mathcal{T}$  слабо предельно непрерывно на рефлексивном пространстве  $B$ , то оно равномерно ограничено по норме.

Доказательство. Поскольку операторы  $T_n$  заданы на всем пространстве  $B$ , то каждый из них ограничен (см. гл. 1, § 1). Допу-

стим, что не существует такой константы  $c$ , что  $\|T_n\| \leq c \forall n$ . Значит, в  $\mathcal{T}$  можно выбрать такую последовательность  $\{\tilde{T}_m\}$ , что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{T}_m\| = \infty.$$

Поскольку  $\|\tilde{T}_m^*\| = \|\tilde{T}_m\|$ , имеем также

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{T}_m^*\| = \infty.$$

Введем семейство непрерывных полуаддитивных функционалов на  $B'^*$ :

$$F_m(\varphi) = \|\tilde{T}_m^* \varphi\|.$$

По предположению

$$\sup F_m(\varphi) = \|\tilde{T}_m^*\| \rightarrow \infty \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Если бы  $\sup_{1 \leq m < \infty} F_m(\varphi) < \infty \forall \varphi$ , то по известной теореме [6]  $\sup F_m(\varphi)$  был бы ограничен (для всех  $m$ ), что противоречит (2.1). Следовательно, найдется такое  $\varphi_0 \in B'^*$ , что

$$F_{m'}(\varphi_0) = \|\tilde{T}_{m'}^* \varphi_0\| \rightarrow \infty \text{ при } m' \rightarrow \infty.$$

Здесь  $F_{m'}$  — некоторая подпоследовательность последовательности  $F_m$ . Введем последовательность

$$f_{m'} = \frac{g_{m'}}{\|\tilde{T}_{m'}^* \varphi_0\|^{3/2}},$$

где  $g_{m'} \in B$ , причем  $\|g_{m'}\| = \|\tilde{T}_{m'}^* \varphi_0\|$ ,  $(g_{m'}, \tilde{T}_{m'}^* \varphi_0) = \|g_{m'}\|^2$ .

В силу рефлексивности  $B$  можно положить  $g_{m'} = (\tilde{T}_{m'}^* \varphi_0)^*$ . Отсюда  $\|f_{m'}\| = \|\tilde{T}_{m'}^* \varphi_0\|^{-1/2} \rightarrow 0$  при  $m' \rightarrow \infty$ . Из сильной сходимости последовательности в  $B$  следует слабая сходимость к тому же элементу, поэтому

$$f_{m'} \Rightarrow 0 \text{ при } m' \rightarrow \infty.$$

Из слабой предельной непрерывности  $\mathcal{T}$  следует, что

$$(\varphi_0, \tilde{T}_{m'}^* f_{m'}) \rightarrow 0 \text{ при } m' \rightarrow \infty.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (\varphi_0, \tilde{T}_{m'}^* f_{m'}) &= \\ &= (\tilde{T}_{m'}^* \varphi_0, f_{m'}) = (\tilde{T}_{m'}^* \varphi_0, g_{m'}) \frac{1}{\|\tilde{T}_{m'}^* \varphi_0\|^{3/2}} = \frac{\|\tilde{T}_{m'}^* \varphi_0\|^2}{\|\tilde{T}_{m'}^* \varphi_0\|^{3/2}} \xrightarrow{m' \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

**2. Необходимое и достаточное условие слабо предельной непрерывности последовательности операторов.**

**Лемма 4.2.** Для слабой предельной непрерывности множества  $\mathcal{T}$  на рефлексивном банаховом пространстве  $B$  необходима и до-

статочна компактность  $\mathcal{T}^* = \{T_n^*\}$  на каждом элементе  $\varphi \in B'$ . Если  $\mathcal{T}$  слабо предельно непрерывно, то из слабой сходимости  $\{T_n^* \varphi\}$  следует сильная сходимость этой последовательности.

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $\mathcal{T}$  слабо предельно непрерывно. Тогда в силу леммы 4.1

$$\|T_n\| = \|T_n^*\| \leq c \forall n.$$

Значит, множество  $T_n^* \varphi (\varphi \in B')$  ограничено в  $B$ . Следовательно (см. § 1 гл. 1), оно слабо компактно. Выберем из этого множества слабо сходящуюся подпоследовательность  $T_{n'}^* \varphi \Rightarrow g$ . Поскольку  $\|(T_{n'}^* \varphi)^*\| = \|T_{n'}^* \varphi\| \leq c \|\varphi\|$ , то множество  $\{(T_{n'}^* \varphi)^*\}$  слабо компактно в  $B$ .

Пусть  $\{(T_{n'}^* \varphi)^*\}$  — слабо сходящаяся подпоследовательность:  $(T_{n'}^* \varphi)^* \Rightarrow h$ . Из слабой предельной непрерывности  $\mathcal{T}$  следует

$$(\varphi, T_{n''} [T_{n'}^* \varphi]^* - T_{n''} h) \rightarrow 0 \text{ при } n'' \rightarrow \infty$$

и по критерию Коши

$$(\varphi, T_{n''} [T_{n'}^* \varphi]^* - T_{n_p} [T_{n_p}^* \varphi]^*) \rightarrow 0 \text{ при } n_p > n'' \rightarrow \infty.$$

Перебрасывая операторы  $T_{n''}$ ,  $T_{n_p}$  на  $\varphi$ , получаем

$$(T_{n''}^* \varphi, [T_{n'}^* \varphi]^*) - (T_{n_p}^* \varphi, [T_{n_p}^* \varphi]^*) \rightarrow 0,$$

или, что то же самое,

$$\|T_{n''}^* \varphi\|^2 - \|T_{n_p}^* \varphi\|^2 \rightarrow 0$$

при  $n_p > n'' \rightarrow \infty$ , откуда

$$\|T_{n''}^* \varphi\| - \|T_{n_p}^* \varphi\| \rightarrow 0 \text{ при } n_p > n'' \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

По известной теореме (см. гл. 1, § 1) из  $T_{n''}^* \varphi \Rightarrow g$  и (2.2) следует сильная сходимость

$$T_{n''}^* \varphi \rightarrow g \text{ при } n'' \rightarrow \infty.$$

**Достаточность.** Пусть  $\mathcal{T}^*$  компактно на каждом элементе  $\varphi \in B'$ . Предположим, что  $\mathcal{T}$  не является слабо предельно непрерывным. Это значит, что существуют такие  $\varphi \in B'$  и  $\alpha > 0$ , что  $|(\varphi, T_{n_k} f_{k'})| > \alpha$ , где  $\{k'\}$  — некоторая последовательность индексов, а  $\{f_k\}$  — некоторая слабо сходящаяся последовательность.

Пусть  $\{T_{n_k}^* \varphi\}$  — сильно сходящаяся подпоследовательность:

$$T_{n_k}^* \varphi \rightarrow g \text{ при } k'' \rightarrow \infty, \{k''\} \subset \{k'\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\varphi, T_{n_k} f_{k'}) &= (T_{n_k}^* \varphi, f_{k'}) = (T_{n_k}^* \varphi - g, f_{k'}) + (g, f_{k'}) \leq \\ &\leq \|T_{n_k}^* \varphi - g\| \|f_{k'}\| + (g, f_{k'}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Поскольку  $T_{n_k}^* \varphi \rightarrow g$ , то  $\|T_{n_k}^* \varphi - g\| \rightarrow 0$ . Нормы  $\|f_{k'}\|$  ограничены (см. гл. 2, § 1), поэтому

$$\|T_{n_k}^* \varphi - g\| \|f_{k'}\| \rightarrow 0 \text{ при } k' \rightarrow \infty.$$

Имеем  $\{g, f_{k'}\} \rightarrow 0$  в силу слабой сходимости  $\{f_{k'}\}$ . Из (2.3) получаем

$$(\varphi, T_{n_k} f_{k'}) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

что противоречит предположению.

### § 3. Теорема о сильной сходимости обратных операторов и ее применение

Из доказанных лемм вытекает следующая

**Теорема 4.2.** Пусть  $\{T_n\}$  — последовательность замкнутых операторов с общей областью определения  $D \subset B$  и областью значений  $R(T_n) = B'$ , где  $B'$  рефлексивно.

Пусть последовательность  $\{T_n g\}$  для  $g \in D$  слабо сходится к элементу  $Tg$ . Пусть, далее,  $T_n^{-1}$  и  $T_n^{-1*}$  существуют и последовательности  $\{T_n^{-1}\}$  и  $\{T_n^{-1*}\}$  слабо предельно непрерывны.

Тогда оператор  $T^{-1}$  существует и ограничен на своей области определения  $\bar{R} = \bar{T}(D)$  и последовательность  $T_n^{-1}$  сильно сходится к  $T^{-1}$  на  $\bar{R}$ .

**Доказательство.** В силу теоремы 4.1 оператор  $T^{-1}$  существует и  $\{T_n^{-1}\}$  слабо сходится к  $T^{-1}$  на  $\bar{R}$ . Поскольку последовательность  $\{T_n^{-1*}\}$  слабо предельно непрерывна, то из слабой сходимости  $\{T_n^{-1}\}$  в силу леммы 4.2 следует сильная сходимость этой последовательности операторов.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = -\varepsilon \left( \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z^2} + \sin^2 \frac{z}{\varepsilon} c^2(x, y, z) u_\varepsilon(x, y, z) = F(x, y, z), \quad (3.1)$$

$$u_\varepsilon|_\Gamma = 0, \quad c^2 \geq \alpha > 0, \quad c \in W_2^1,$$

где  $\Gamma$  — выпуклая поверхность. Рассмотрим пространство  $L_2[\Omega]$  функций в области  $\Omega$ , ограниченной  $\Gamma$ . Очевидно, что оператор  $L_\varepsilon$  слабо сходится к оператору

$$L_0 = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{c^2(x, y, z)}{2},$$

определенному на функциях, обращающихся в нуль на  $\Gamma$ . Пока-

жем, что из теоремы 4.2 вытекает, что  $\{u_\varepsilon\}$  сильно сходится к решению задачи

$$L_0 w = F(x, y, z), \quad w|_\Gamma = 0.$$

Заметим прежде всего, что обратный оператор  $L_\varepsilon^{-1}$  ограничен. Действительно, умножим уравнения (3.1) на  $u_\varepsilon$  и проинтегрируем по  $x, y, z$ ; получим

$$\begin{aligned} \int \left\{ \varepsilon \left[ \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz + \\ + \int \sin^2 \frac{z}{\varepsilon} c^2 u_\varepsilon^2 dx dy dz = \int F(x, y, z) u_\varepsilon dx dy dz \leq \\ \leq \sqrt{\int F^2 dx dy dz} \sqrt{\int u_\varepsilon^2 dx dy dz}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу  $\|u\| \leq c \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|$  ( $\| \cdot \|$  — норма в  $L_2(\Omega)$ ) имеем

$$\|u\|^2 \leq c \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|^2 \leq c \|F\| \|u\|;$$

следовательно,  $\|u\| \leq c \|F\|$  и  $\left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\| \leq c \|F\|$ .

Покажем, что обратный оператор  $L_\varepsilon^{-1}$  слабо предельно непрерывен. Пусть правая часть  $F_n(x, y, z)$  уравнения

$$L_\varepsilon u_{\varepsilon n} = F_n(x, y, z), \quad u|_\Gamma = 0,$$

слабо сходится к нулю. Надо показать, что  $u_{\varepsilon n}$  слабо сходится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Умножим уравнения (3.1) на гладкую функцию  $\varphi(x, y, z)$ , обращающуюся в нуль на  $\Gamma$ , и проинтегрируем по области  $\Omega_r$ :

$$\begin{aligned} -\varepsilon \iiint_{\Omega_r} \varphi \Delta_2 u_{\varepsilon n} d\Omega - \iiint_{\Omega_r} \varphi \frac{\partial^2 u_{\varepsilon n}}{\partial z^2} d\Omega + \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_r} c^2 \varphi u_{\varepsilon n} d\Omega - \\ - \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_r} c^2 \cos^2 \frac{z}{\varepsilon} \varphi u_{\varepsilon n} d\Omega = \iiint_{\Omega_r} F_n(x, y, z) \varphi d\Omega. \end{aligned}$$

Имеем

$$\varepsilon \iiint_{\Omega_r} \varphi \Delta_2 u_{\varepsilon n} d\Omega = \varepsilon \iiint_{\Omega_r} \Delta_2 \varphi u_{\varepsilon n} d\Omega \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

равномерно по  $n$ , поскольку  $\{u_{\varepsilon n}\}$  ограничена по норме.

Из ограниченности  $\partial u_{\varepsilon n} / \partial z$  в  $L_2$  следует

$$\int c^2 \cos^2 \frac{z}{\varepsilon} \varphi u_{\varepsilon n} d\Omega = -\frac{\varepsilon}{2} \int \sin \frac{2z}{\varepsilon} \frac{\partial (u_{\varepsilon n} c^2 \varphi)}{\partial z} dx dy dz \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

равномерно по  $n$ . Отсюда

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int \varphi(x, y, z) \left\{ \frac{\partial^2 u_{\varepsilon n}}{\partial z^2} - \frac{c^2(x, y, z)}{2} u_{\varepsilon n} \right\} dx dy dz = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int u_{en} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{c^2}{2} \varphi \right) dx dy dz = 0.$$

Сопряженный оператору  $A = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{c^2}{2}(x, y, z)$ , заданному на гладких функциях, обращающихся в нуль на  $\Gamma$ , есть, очевидно, самосопряженный оператор  $\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{c^2}{2}(x, y, z)$ , заданный в области  $\Omega$ . Он не имеет нулевого собственного значения, поэтому область значений исходного оператора  $A$  всюду плотна. Следовательно, сходимость  $\{u_{ne}\} \rightarrow 0$  осуществляется на всюду плотном множестве, поскольку из ограниченности по норме  $\{u_{ne}\}$  следует слабая сходимость  $u_{ne}$  к нулю. Мы доказали, таким образом, что оператор  $L_\varepsilon^{-1}$  слабо предельно непрерывен. Из теоремы следует, что семейство  $\{L_\varepsilon^{-1}\}$  сильно сходится к  $L_0^{-1}$ , что и требовалось.

#### § 4. Регуляризация в теории возмущений слабо сходящихся операторов

Рассмотрим пространство  $W_p^N[\rho^2]$  — банахово пространство функций  $g(x)$  ( $x \in R^n$ ) ( $\rho(x)$  непрерывна) с нормой

$$\|g\|_{W_p^N[\rho^2]} = \int_{-\infty}^{\infty} |D^N g(x)|^p \rho^2(x) dx, \quad \rho(x) \geq 1.$$

Мы будем рассматривать в  $L_2$  некоторое семейство линейных операторов  $\{L_\varepsilon\}$  с плотной областью определения такое, что  $L_\varepsilon^{-1}$  существует, его область определения содержит  $W_p[\rho^2]$  и его сужение как семейство операторов из  $W_1^N[\rho^2]$  в  $L_2$  равномерно ограничено.

Рассмотрим положительную функцию  $G(y) = G\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)$  такую, что  $\int_{-\infty}^{\infty} G(y) dy = 1$ . Относительно  $G(y)$  сделаем дополнительные предположения:

- 1)  $\int_{-\infty}^{\infty} G(y) |y|^2 dy < \infty$ ;
- 2)  $G(y) \in W_p^N[\rho^2]$ ;
- 3)  $|\xi|^{n+1} \rho^2(x-\xi) |D^N G(\xi)|^p \leq c_0(x)$  при  $|\xi| > 1$ ;
- 4)  $\frac{\alpha^{n/p} |D^N \cdot G(\alpha \xi)|}{D^N G(\xi)} \leq c_1$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ .

При  $\rho(x) = \text{const}$  условия 3) и 4) можно опустить.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве  $L_2[R^n]$  оператор  $L_\varepsilon = A + \varepsilon B_\varepsilon$  и семейство  $\{f_\varepsilon\}$  ( $f_\varepsilon \in L_2[R^n]$ ), сильно сходящееся к  $f \in L_2[R^n]$ . Обозначим  $\delta(\varepsilon) = \|f_\varepsilon - f\|_{L_2}$ .

Теорема 4.3. Предположим, что

- 1)  $L_\varepsilon^{-1}$  существует;
- 2)  $A^{-1}f$  — непрерывно дифференцируемая функция;
- 3) операторы  $A^{-1}B_\varepsilon^*L_\varepsilon^{-1}$  и  $L_\varepsilon^{-1}$  как операторы, действующие из  $W_p^N[\rho^2]$  в  $L_2[R^n]$ , ограничены, т. е.

$$\|L_\varepsilon^{-1}g\|_{L_2} \leq c_1 \|g\|_{W_p^N[\rho^2]},$$

$$\|A^{-1}B_\varepsilon^*L_\varepsilon^{-1}g\|_{L_2} \leq c_2 \|g\|_{W_p^N[\rho^2]}.$$

Тогда

$$\left| \frac{1}{(\delta(\varepsilon) + \varepsilon)^{n\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{x-\xi}{[\delta(\varepsilon) + \varepsilon]^\alpha}\right) L_\varepsilon^{-1}f_\varepsilon(\xi) d\xi - A^{-1}f(x) \right| \leq c(x) [\delta(\varepsilon) + \varepsilon]^{2\alpha},$$

где  $\alpha = (2 + N + n/q)^{-1}$  ( $1/q + 1/p = 1$ ),  $c(x)$  — непрерывная функция.

Доказательство. Имеем  $\varphi \in W_p^N[\rho^2]$ ,

$$\begin{aligned} (\varphi, L_\varepsilon^{-1}f_\varepsilon - A^{-1}f) &= (\varphi, L_\varepsilon^{-1}f_\varepsilon - L_\varepsilon^{-1}(A + \varepsilon B_\varepsilon)A^{-1}f) = \\ &= (L_\varepsilon^{-1}\varphi, f_\varepsilon) - (A^{-1}(A + \varepsilon B_\varepsilon)^*L_\varepsilon^{-1}\varphi, f) = (L_\varepsilon^{-1}\varphi, f_\varepsilon - f) - \\ &\quad - \varepsilon (A^{-1}B_\varepsilon^*L_\varepsilon^{-1}\varphi, f) \leq \|L_\varepsilon^{-1}\varphi\| \|f_\varepsilon - f\| + \varepsilon \|A^{-1}B_\varepsilon^*L_\varepsilon^{-1}\varphi\| \|f\|. \end{aligned}$$

Учитывая неравенства

$$\|L_\varepsilon^{-1}\varphi\| \leq c_1 \|\varphi\|_{W_p^N[\rho^2]},$$

$$\|A^{-1}B_\varepsilon^*L_\varepsilon^{-1}\varphi\| \leq c_2 \|\varphi\|_{W_p^N[\rho^2]},$$

получим

$$(\varphi, L_\varepsilon^{-1}f_\varepsilon - A^{-1}f) \leq c(\delta(\varepsilon) + \varepsilon) \|\varphi\|_{W_p^N[\rho^2]}.$$

Утверждение теоремы будет следовать из следующей леммы.

Лемма 4.3. Пусть семейство обобщенных функций  $\{f_\varepsilon(x)\}$  является семейством функционалов на  $W_p^N[\rho^2]$  и

$$(f_\varepsilon(x) - f(x), \varphi(x))_{L_2} \leq \varepsilon \|\varphi\|_{W_p^N[\rho^2]} \quad *),$$

где  $f(x)$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда

\*) То есть  $\|f_\varepsilon - f\|_{W_p^N} \leq \varepsilon$ , поскольку именно так определяется норма в  $W_p^N$ .

для любой фиксированной точки  $x$  выполняется соотношение

$$f(x) = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) f_{\varepsilon}(\xi) d\xi + O(\varepsilon^{2\alpha}).$$

Доказательство. Сделаем в интеграле

$$\left\| G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) \right\|_{W_p^N[\rho^2]}^p = \int_{-\infty}^{\infty} \left| D^N G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) \right|^p \rho^2(\xi) d\xi$$

замену  $\eta = (x-\xi)/\varepsilon^{\alpha}$ :

$$\left\| G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) \right\|_{W_p^N[\rho^2]}^p = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha(N-p-n)}} \int_{-\infty}^{\infty} |D^N G(\eta)|^p \rho^2(x - \eta\varepsilon^{\alpha}) d\eta.$$

Представим этот интеграл в виде суммы  $I = I_1 + I_2 + I_3$ :

$$I_1(\varepsilon^{\alpha}, x) = \int_{-\infty}^{-1/\varepsilon^{\alpha}} |D^N G(\eta)|^p \rho^2(x - \eta\varepsilon^{\alpha}) d\eta,$$

$$I_2(\varepsilon^{\alpha}, x) = \int_{-1/\varepsilon^{\alpha}}^{1/\varepsilon^{\alpha}} |D^N G(\eta)|^p \rho^2(x - \eta\varepsilon^{\alpha}) d\eta,$$

$$I_3(\varepsilon^{\alpha}, x) = \int_{1/\varepsilon^{\alpha}}^{\infty} |D^N G(\eta)|^p \rho^2(x - \eta\varepsilon^{\alpha}) d\eta.$$

Имеем

$$I_2(\varepsilon^{\alpha}, x) \leq \max_{|\xi| \leq 1} \rho^2(x - \xi) \int_{-1/\varepsilon^{\alpha}}^{1/\varepsilon^{\alpha}} |D^N G(\eta)|^p d\eta \leq \max_{|\xi| \leq 1} \rho^2(x - \xi) \|G(\xi)\|_{W_p^N[\rho^2]}^p,$$

$$\begin{aligned} I_3(\varepsilon^{\alpha}, x) &= \int_{1/\varepsilon^{\alpha}}^{\infty} |D^N G(\eta)|^p \rho^2(x - \eta\varepsilon^{\alpha}) d\eta = \\ &= \int_{1/\varepsilon^{\alpha}}^{\infty} |D^{\alpha} G(\xi)|^p \rho^2(x - \varepsilon^{\alpha}\eta) (|\eta| \varepsilon^{\alpha})^{n+1} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha(n+1)}} \left| \frac{D^N G(\eta)}{D^N G(\xi)} \right|^p \frac{d\eta}{|\eta|^{n+1}} \leq \\ &\leq \frac{c_0(x) c_1^p}{\varepsilon^{\alpha}} \int_{1/\varepsilon^{\alpha}}^{\infty} \frac{d\eta}{|\eta|^{n+1}} \leq C_2(x), \quad \xi = \eta\varepsilon^{\alpha}. \end{aligned}$$

Аналогичное неравенство, очевидно, имеет место и для  $I_1(\varepsilon^{\alpha}, x)$ . Таким образом,

$$\left\| G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) \right\|_{W_p^N[\rho^2]} \leq \frac{c_3(x)}{\varepsilon^{\alpha(N-n/p)}}. \quad (4.1)$$

Очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) (x-\xi)^2 d\xi = \varepsilon^{\alpha(n+2)} \int_{-\infty}^{\infty} G(\eta) \eta^2 d\eta = C\varepsilon^{\alpha(n+2)}. \quad (4.2)$$

Пусть

$$f_{\varepsilon}^{\alpha}(x) = \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) f_{\varepsilon}(\xi) d\xi, \quad M = \frac{1}{2} \max_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ 0 \leq |\xi| \leq \infty}} \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - f_{\varepsilon}^{\alpha}(x)| &\leq \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) |f(x) - f(\xi)| d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) |f(\xi) - f_{\varepsilon}(\xi)| d\xi \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \left\{ M \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) (x-\xi)^2 d\xi + \varepsilon \left\| G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) \right\|_{W_p^N[\rho^2]} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.1), (4.2) следует неравенство

$$|f(x) - f_{\varepsilon}^{\alpha}(x)| \leq c\varepsilon^{2\alpha} + c_3(x) \varepsilon^{1-\alpha(N+n/q)}. \quad (4.3)$$

Полагая  $\alpha^{-1} = 2 + N + n/q$ , получаем

$$|f(x) - f_{\varepsilon}^{\alpha}(x)| \leq c(x) \varepsilon^{2\alpha}, \quad f_{\varepsilon}^{\alpha} = \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) f_{\varepsilon}(\xi) d\xi,$$

что и требовалось.

Полученная теорема может быть применена к интегро-дифференциальным уравнениям с параметром, например, к таким, которые встречаются в специальной теории регуляризации некорректных задач. Кроме того, при  $B_{\varepsilon} = 0$  она может быть использована для решения некорректных задач

$$Tu = f,$$

если  $T^{-1}$  — ограниченный оператор из  $W_p^N[\rho^2]$  в  $L_2$ .

С помощью леммы 4.3 можно «улучшать» слабую и сильную сходимость решений, доказанную в этой главе. В частности, если

$$\|f_k - f\|_{L_2} = \sigma_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad f \in C^2,$$

то

$$\left| f(x) - \frac{1}{\sigma_k^{2n/(4+n)}} \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{x-\xi}{\sigma_k^{2/(4+n)}}\right) f_k(\xi) d\xi \right| \cong \sigma_k^{4/(4+n)}.$$

## ЧАСТЬ II

### ТЕОРИЯ ХАРАКТЕРИСТИК В БОЛЬШОМ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

#### ГЛАВА I

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

#### § 1. Характеристики уравнений квантовой механики

Свойства волнового уравнения, соответствие между волновой и геометрической оптикой были положены в основу классификации уравнений с частными производными, выделив среди них гиперболические уравнения. С этой классификацией связаны такие глубокие понятия, как характеристики и бихарактеристики гиперболического уравнения. Строящиеся формальным образом бихарактеристики и характеристики квантовых уравнений, в отличие от гиперболических уравнений, не совпадают с траекториями и поверхностями постоянного действия классической механики. Тем не менее в квантовой физике именно решения уравнений Гамильтона считают бихарактеристиками соответствующего уравнения Шредингера.

Анализ специфики постановки задач квантовой механики позволяет обобщить классическое понятие характеристики и с единых позиций рассматривать волновые уравнения и уравнения квантовой механики.

#### 1. Распределение разрывов решений некоторых задач.

1.1. Задача о распространении разрывов решений гиперболических систем непосредственно приводит к определению характеристик. Пусть  $u(x, t)$  — обобщенное разрывное решение, а  $\varphi(x, t)$  — такая функция, что  $u(x, t) - \varphi(x, t)$  — достаточно гладкая. Тогда  $\varphi(x, t)$  и будет характеризовать поведение разрыва.

При достаточно малом  $t$  задача построения функций  $\varphi(x, t)$  может быть сведена к более простой задаче решения уравнения характеристик.

Рассмотрим в качестве примера волновое уравнение

$$\partial^2 u / \partial t^2 = c^2(x, t) \Delta u, \quad (1.1)$$

$$c(x, t) \neq 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

где  $u(x, t)$  удовлетворяет разрывным\*) начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x) f^+(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (1.1a)$$

$f^+(x) = f(x)$  при  $f(x) > 0$ ;  $f^+(x) = 0$  при  $f(x) < 0$ . Функции  $\varphi(x)$ ,  $f(x)$ ,  $c(x, t)$  предполагаются достаточно гладкими; кроме того,  $\varphi(x)$  — финитная функция с компактным носителем.

Характеристическое уравнение для (1.1) имеет вид

$$(\partial S / \partial t)^2 = c^2(x, t) (\nabla S)^2.$$

Положим  $S(x, 0) = f(x)$ . Чтобы выделить одну из ветвей решения характеристического уравнения, зададим

$$\partial S_v / \partial t |_{t=0} = (-1)^v c(x, 0) |\nabla S_v(x, t) |_{t=0} = (-1)^v c(x, 0) |\text{grad } f(x)|.$$

Двум ветвям решения характеристического уравнения

$$\partial S_v / \partial t = (-1)^v H(x, \nabla S_v, t), \quad v = 1, 2,$$

$$H(x, p, t) = c(x, t) |p|,$$

$$p = (p_1, \dots, p_n),$$

соответствуют решения  $p^v = P^v(t, x_0)$ ,  $x^v = X^v(t, x_0)$  ( $v = 1, 2$ ) двух систем бихарактеристических уравнений:

$$\dot{p}_i^v = (-1)^v \frac{\partial H(x^v, p^v, t)}{\partial x_i^v},$$

$$\dot{x}_i^v = (-1)^{v+1} \frac{\partial H(x^v, p^v, t)}{\partial p_i^v}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = (-1)^v \left( H(x^v, p^v, t) - \sum_i p_i^v H_{p_i^v}(x^v, p^v, t) \right), \quad v = 1, 2,$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$x^v(0) = x_0,$$

$$p^v(0) = \nabla f(x_0),$$

$$x_0 \in \Omega.$$

При достаточно малом  $t \leq t_0$  кривые  $X^v(t, x_0)$  при всевозможных  $x_0 \in \Omega$  и при фиксированном  $v$  образуют  $n$ -параметрическое семейство, причем

$$Y^v(t, x_0) = \det \left[ \frac{\partial X_k^v(t, x_0)}{\partial x_{0j}} \right] > 0,$$

поскольку  $Y^v(0, x_0) = 1$ . Поэтому неявное уравнение

$$X^v(t, x_0) = x, \quad x_0 \in \Omega,$$

имеет не более одного решения  $x_0 = x_0^v(x, t)$  при всех  $t \leq t_0$ .

Нетрудно видеть, что решение исходной задачи может быть представлено в виде полусуммы двух решений  $u(x, t) =$

\*) Здесь рассматривается слабый разрыв, т. е. разрыв производной.



$= \frac{1}{2} [u_1(x, t) + u_2(x, t)]$  волнового уравнения, удовлетворяющих начальным условиям

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \varphi(x) f^+(x),$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = -\frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = c(x, 0) |\operatorname{grad} f(x)| \varphi(x) \theta[f(x)], \quad (1.3)$$

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geq 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

Каждое из решений  $u_1, u_2$ , как мы сейчас видим, отвечает одной из ветвей  $S_\nu(x, t)$  решения характеристического уравнения.

При высказанных предположениях имеет место следующее

Предложение [19]. Решение  $u_\nu(x, t)$  ( $\nu=1, 2$ ) задачи (1.1), (1.3) может быть представлено в виде

$$u_\nu(x, t) = \frac{\varphi[x_0^\nu(x, t)] c(x, t)}{c(x_0^\nu(x, t), 0) \sqrt{Y^\nu[t, x_0^\nu(x, t)]}} f^+[x_0^\nu(x, t)] + F^\nu(x, t), \quad \nu=1, 2$$

где  $F^\nu(x, t)$  — непрерывно дифференцируемая функция.

Следствие. Поскольку решение задачи (1.1), (1.1a) представимо в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^2 u_\nu(x, t),$$

то решение  $u(x, t)$  непрерывно дифференцируемо вне суммы двух областей  $\Omega_\nu^\pm = X^\nu(t, \Omega)$  ( $\nu=1, 2$ ). Действительно, если  $x \notin \Omega_\nu^\pm$ , то  $x_0^\nu \notin \Omega$ ; следовательно,  $\varphi(x_0^\nu) = 0$ .

1.2. Рассмотрим теперь смешанную задачу. Пусть  $u(x, y, t)$  удовлетворяет линейному уравнению четвертого порядка

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial y^2} + a(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0,$$

краевым условиям

$$u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0$$

и разрывным начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x) f^+(x) \sin y, \quad u'|_{t=0} = 0,$$

где  $\varphi$  — финитная функция. Если бы коэффициент  $a(x, y, t)$  не зависел от  $y$ , т. е.  $a(x, y, t) = c(x, t)$ , то можно было бы применить метод разделения переменных. В этом случае замена  $u(x, y, t) = v(x, t) \sin y$  приводила бы к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} (1 + b_i^2(x, t)) - c(x, t) \frac{\partial v}{\partial x_1},$$

характеристики которого удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 (1 + b_i^2(x, t)). \quad (1.4)$$

Но когда  $a(x, y, t)$  зависит от  $y$ , такой метод, разумеется, неприменим. Тем не менее и в этом случае, как мы увидим в дальнейшем, распространение разрыва решения  $u(x, y, t)$  определяется решением уравнения (1.4), которое мы будем считать характеристическим\*). В гл. 4 будет приведена общая формула, определяющая распространение разрыва решений широкого класса задач, с помощью которой решение исходной задачи может быть представлено в виде

$$u = \frac{1}{2} (u_+(x, y, t) + u_-(x, y, t)),$$

$$u_\pm = 2H_\pm(x, P(x_0^\pm(x, t)), t) \varphi(x_0^\pm(x, t)) \left| \frac{\partial x_0^\pm}{\partial x} \right|^{1/2} \sin y \times$$

$$\times \exp \left\{ \int_0^t dt \frac{P_1(x_0^\pm, t)}{2H_\pm(X(x_0^\pm, t), P(x_0^\pm, t), t)} \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \sin^2 ya(x, y, t) dy \right\} \times$$

$$\times f^+(x_0^\pm) + F(x, y, t),$$

где

$$x_0^\pm = x_0^\pm(x, t),$$

$$H_\pm(x, p, t) = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n (1 + b_i^2(x, t)) p_i^2},$$

$X_\pm(x_0, t), P_\pm(x_0, t)$  — решение системы

$$\dot{x}_i = \partial H_\pm / \partial p_i, \quad \dot{p}_i = -\partial H_\pm / \partial x_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad p(0) = \nabla f(x_0),$$

$x_0^\pm(x, t)$  — решение уравнений  $X_\pm(x_0, t) = x$ ,  $F(x, y, t)$  — непрерывно дифференцируемая функция.

1.3. Рассмотрим теперь другой пример, в котором разрыв распространяется не по характеристикам, понимаемым в обычном смысле.

Пусть  $u(x, y, z, t)$  — решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1 + tz^2) \frac{\partial u}{\partial x} + z^2 \frac{\partial u}{\partial y} + xz^4 u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2 \partial y},$$

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x) \theta(y) e^{-z^2/4},$$

\*) Напомним, что обычно уравнение характеристик определяется лишь членом, содержащим четвертую производную.

$\varphi(x)$  — финитная бесконечно дифференцируемая функция. В этом случае, как мы увидим ниже, решение может быть представлено в виде

$$u(x, y, z, t) = \varphi \left[ x - t - \frac{t^2}{4} \right] \theta [y + t] \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{z^2}{4} + \sqrt{3\pi} \left( xt - \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{6} \right) \right\} + F(x, y, z, t),$$

где  $F(x, y, z, t)$  — непрерывная функция.

Здесь разрыв распространяется вдоль поверхностей, определяемых уравнением

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} + \sqrt{t \frac{\partial S}{\partial x} + 1} = 0,$$

которое естественно считать в данном случае характеристическим.

1.4. Аналогичную задачу мы поставим для более общих уравнений, несколько видоизменив условия на разность  $u(x, t) - \varphi(x, t)$ . Потребуем, чтобы некоторое число производных от этой разности принадлежало банахову пространству  $B$  (не обязательно пространству  $C$ ).

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2(x, t) \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \quad (1.5)$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x) \delta(y - y_0), \quad u_t(x, y, 0) = 0, \quad (1.5a)$$

где коэффициенты уравнения достаточно гладкие ( $a^2(x, t) + b^2(x, t) \neq 0$ ), а функция  $\varphi(x)$  финитна и имеет компактный носитель  $\Omega$ .

Требуется найти функции  $\varphi(x, y, t)$ , для которых разность  $u(x, y, t) - \varphi(x, y, t)$  принадлежит  $L_2[\mathbb{R}^2]$ . Класс функций  $\varphi(x, y, t)$  может быть построен с помощью решений уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \left[ a^2(x, t) \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + b^2(x, t) \right]^{1/2},$$

которое мы и назовем характеристическим. (Ниже будет дано общее определение характеристик.)

Соответственно имеем систему Гамильтона

$$\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial p}, \quad H = \sqrt{a^2 p^2 + b^2}, \\ \frac{dS}{dt} = [H - p H_p].$$

Решения  $x(t)$ ,  $p(t)$ ,  $S(t)$  при достаточно малых  $t \leq t_0$  и при начальных условиях

$$x(0) = x_0, \quad p(0) = 0, \quad S(0) = 0$$

образуют однопараметрическое семейство. Обозначим, как и

прежде,

$$x(t) = X(t, x_0), \\ p(t) = P(t, x_0), \\ S(t) = S(t, x_0).$$

При достаточно малых  $t \leq t_0$  имеем

$$Y(t, x_0) = \frac{\partial X(t, x_0)}{\partial x_0} > 0;$$

решение уравнения  $X(t, x_0) = x_0$  единственно:  $x_0 = x_0(x, t)$ . Имеет место следующее

Предложение. Решение  $u(x, y, t)$  задачи (1.5), (1.5a) при  $t \leq t_0$  может быть представлено в виде

$$u(x, y, t) = \frac{\varphi(x_0) \cos \frac{(y - y_0)^2}{2S(t, x_0)}}{\sqrt{S(t, x_0) Y(t, x_0)}} + F(x, y, t), \\ x = x_0(x, t),$$

где  $F(x, y, t) \in L_2[\mathbb{R}^2]$  при любом фиксированном  $t \leq t_0$ .

Следствие. Сужение решения задачи (1.5), (1.5a) на область  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_t$ , где  $\Omega_t = X(t, \Omega) \times (-\infty, \infty)$ , принадлежит  $L_2[\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_t]$ .

1.5. Основное уравнение нерелятивистской квантовой механики — уравнение Шредингера — имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \psi + v(x, t) \psi, \quad x = (x_1, \dots, x_n); \quad (1.6)$$

здесь  $\hbar$ ,  $\mu$  — константы ( $\hbar$  — постоянная Планка,  $\mu$  — масса частицы).

Предположим, что  $\psi(x, t)$  удовлетворяет условию

$$\psi(x, 0) = \delta(x - x_0). \quad (1.7)$$

Если  $v(x, t)$  ограничена и  $v(x, t) \in C^\infty$ , то решение  $\psi(x, t)$  в любой момент  $t > 0$  является бесконечно дифференцируемой функцией в каждой точке  $x$ . Однако как само решение  $\psi(x, t)$  при фиксированном  $t$ , так и его производные по  $x$  не принадлежат  $L_2[\mathbb{R}^n]$ . Следовательно, задача о нахождении функций  $\psi_0(x, t)$ , для которой разность  $\psi(x, t) - \psi_0(x, t)$  дифференцируема в  $L_2[\mathbb{R}^n]$ , нетривиальна.

Мы наложим еще более ограничительные условия на разность  $\psi(x, t) - \psi_0(x, t)$ . Забегая вперед, заметим, что нам будет важна зависимость решения уравнения Шредингера от параметра  $\hbar$ , поэтому мы будем считать  $\psi$  функцией не только от  $x$  и  $t$ , но и от  $\hbar$ :  $\psi = \psi(x, t, \hbar)$ . Предположим, что решение  $\psi$  при каждом фиксированном  $t$  принадлежит пространству  $L_2[\mathbb{R}^{n+1}]$  функций  $F(x, \hbar)$  с нормой

$$\|x\|_{L_2} = \left( \int_0^1 d\hbar \int |F(x, \hbar)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.8)$$

Функция

$$F(x, h) = \varphi(x) \exp \left\{ \frac{i}{h} f(x) \right\} \quad (1.9)$$

финитна, если  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Однако  $\partial F / \partial x_i \notin L_2[\mathbb{R}^{n+1}]$ .

Решение уравнения (1.6), удовлетворяющее начальному условию

$$\psi(x, 0, h) = F(x, h), \quad (1.10)$$

при  $t > 0$  также не будет дифференцируемо в  $L_2[\mathbb{R}^{n+1}]$ . Поэтому можно поставить задачу о построении функции  $\psi_0(x, t, h)$ , для которой разность  $\psi - \psi_0$  дифференцируема в  $L_2[\mathbb{R}^{n+1}]$ . Уравнением, позволяющим получить функцию  $\psi_0(x, t, h)$ , является уравнением Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2\mu} (\nabla S)^2 + v(x, t) = 0.$$

Его характеристиками служат решения системы Гамильтона

$$\mu \dot{x} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{dS}{dt} = \frac{p^2}{2\mu} - v(x, t). \quad (1.11)$$

Поставим начальные условия

$$x(0) = x_0, \quad p(0) = \nabla f(x_0), \quad S(0) = f(x_0).$$

Обозначим, как и ранее,

$$x(t) = X(t, x_0),$$

$$p(t) = P(t, x_0), \quad S(t) = S(t, x_0).$$

При  $t \leq t_0$  решение уравнения  $X(t, x_0) = x$  для  $x \in \text{supp } \varphi = \Omega$  единственно и якобиан

$$Y(t, x_0) = \det \left[ \frac{\partial X_i(t, x_0)}{\partial x_{0j}} \right]$$

отличен от нуля.

**Предложение.** Решение задачи (1.6), (1.9), (1.10) может быть представлено в виде

$$\psi(x, t, h) = \frac{\varphi[x_0(x, t)]}{V|Y[t, x_0(x, t)]|} \exp \left\{ \frac{i}{h} S[t, x_0(x, t)] \right\} + \Phi(x, t, h), \quad (1.12)$$

где  $\Phi(x, t, h), \frac{1}{h} \Phi(x, t, h), \frac{\partial \Phi(x, t, h)}{\partial x_i}$  принадлежат  $L_2[\mathbb{R}^{n+1}]$ .

Заметим, что оператор умножения на  $1/h$  в  $L_2[\mathbb{R}^{n+1}]$  неограничен и в некотором смысле «равноправен» с оператором  $\partial/\partial x$ .

**Следствие.** Решение задачи (1.6), (1.10) вне области  $X(t, \Omega)$  дифференцируемо в  $L_2[\mathbb{R}^{n+1} \setminus X(t, \Omega) \times [0, 1]]$ .

Рассмотрим теперь пространство  $\mathcal{S}[\mathbb{R}^{n+1}]$  непрерывных функций от  $h$  ( $0 \leq h \leq 1$ ) с интегрируемым квадратом по  $x$  и с нормой

$$\|g\| = \max_{0 \leq h \leq 1} \sqrt{\int |g(x, h)|^2 dx}.$$

Оказывается, что функция  $\Phi(t, x, h)$  в формуле (1.12) такова, что  $\Phi(x, t, h), \frac{1}{h} \Phi(x, t, h), \frac{\partial \Phi(x, t, h)}{\partial x_i}$  ( $i=1, \dots, n$ ) принадлежат  $\mathcal{S}[\mathbb{R}^{n+1}]$ .

2. Обобщенная задача о «распространении разрыва» для уравнения с операторным коэффициентом. Пусть функция  $u(t)$  со значениями в гильбертовом пространстве  $H$  удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad (1.13)$$

где  $A$  — неограниченный оператор в гильбертовом пространстве, и  $D(A^N), D(A^{*N})$  плотны в  $H$  ( $N$  — любое целое число).

Предположим, что

$$u(t) \notin D(A^N).$$

Задача, аналогичная проблеме распространения разрыва решения гиперболического уравнения, заключается в том, чтобы построить такой элемент  $u_N(t)$ , что

$$u(t) - u_N(t) \in D(A^N). \quad (1.14)$$

Обобщенным решением уравнения (1.13) будем называть непрерывный функционал на  $D(A^{*N})$ , удовлетворяющий условию

$$(\omega(t), g) = (u(t), A^{*N}g), \quad (1.15)$$

где  $g \in D(A^{*N})$ , а  $u(t)$  удовлетворяет (1.13).

Пусть  $\omega(t)$  — обобщенное решение уравнения (1.13), определенное как функционал на  $D(A^{*N})$ . Задача о выделении его «сингулярной части» заключается в следующем. Требуется построить такую обобщенную функцию  $\omega_0(t)$ , чтобы разность  $\omega(t) - \omega_0(t)$  принадлежала  $H$ .

Очевидно, что, не уменьшая общности, мы можем ставить задачу (1.14), (1.15) и рассматривать лишь классические решения  $u(t) \in D(A)$  уравнения (1.13). Если  $-iA$  — самосопряженный оператор,  $E_\lambda$  — его спектральная функция, то очевидно, что

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{At}u(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dE_\lambda u(0) = \\ &= \int_{\lambda_0}^{\infty} e^{i\lambda t} dE_\lambda u(t) + \int_{-\infty}^{-\lambda_0} e^{i\lambda t} dE_\lambda u(0) + \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} e^{i\lambda t} dE_\lambda u(0). \end{aligned}$$

Последний интеграл при любом конечном  $\lambda_0$  принадлежит  $D(A^N)$ , т. е.

$$u(t) - \int_{\lambda_0}^{\infty} [e^{i\lambda t} dE_\lambda - e^{-i\lambda t} dE_\lambda] u(0) \in D(A^N).$$

Отсюда следует, что эта задача связана с задачей об асимптотике  $E_\lambda$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

3. Классификация уравнений второго порядка. Общие свойства решений уравнений (1.1), (1.4), (1.6) могут служить основой для классификации широкого класса уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Мы рассмотрим наиболее простой случай, охватывающий, однако, все уравнения квантовой механики.

Рассмотрим пространство вектор-функций  $\psi(x, t)$  ( $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\psi = (\psi_1(x, t), \dots, \psi_n(x, t))$ ) со значениями в гильбертовом пространстве  $H$ .

Пусть  $B_i(x, t)$  ( $i=1, \dots, n$ ),  $R(x, t)$  — ограниченные бесконечно дифференцируемые матрицы порядка  $s$ , зависящие от параметров  $x, t$ ,  $a_k(x, t)$  ( $k=1, 2, 3$ ),  $b(x, t) = (b_1(x, t), \dots, b_n(x, t))$  — заданные комплексные бесконечно дифференцируемые функции от  $x$  и  $t$  ( $b(x, t)$  — вектор-функция) со значениями на действительной прямой,  $A$  — самосопряженный неограниченный оператор в гильбертовом пространстве  $H$ , не зависящий от  $x$  и  $t$ . Векторное  $s$ -мерное пространство мы обозначим через  $R^s$ .

Рассмотрим уравнение

$$\left[ a_1(x, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + iAa_2(x, t) \frac{\partial}{\partial t} + A^2a_3(x, t) + \{ \nabla + iAb(x, t) \}^2 + \sum_{k=1}^n B_k(x, t) + iAR(x, t) \right] \psi(x, t) = 0. \quad (1.16)$$

После подстановки  $\psi = \exp \{ iAS(x, t) \}$ , приравняв нулю коэффициенты при  $A^2$ , получим уравнение, которое назовем характеристическим:

$$a_1(x, t) \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + a_2(x, t) \frac{\partial S}{\partial t} - a_3(x, t) + [\nabla S + b(x, t)]^2 = 0. \quad (1.17)$$

Если корни характеристического многочлена

$$Q(p_0) = a_1 p_0^2 + a_2 p_0 + \sum_{i=1}^n (p_i + b_i)^2 - a_3 \quad (1.18)$$

действительны при любых  $p_1, \dots, p_n, x$ , то будем говорить, что уравнение (1.16) *волнового типа*; если чисто мнимы — *туннельного типа*; если в некоторой области действительны, а в оставшейся чисто мнимы — *смешанного типа*. Остальные типы уравнений мы рассматривать не будем.

4. Преобразование типа Фурье для абстрактных функций. Введем понятие импульсного представления ( $p$ -представления). Если оператор  $A$  неотрицательно определен, переход к импульсному представлению совершается при помощи унитарного оператора  $\Phi_A^x$ :

$$\tilde{\psi}(p) = \Phi_A^x \psi(x) = \frac{A^{n/2}}{(2\pi i)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \psi(x) dx. \quad (1.19)$$

Обратно,

$$\psi(x) = \Phi_A^p \tilde{\psi}(p) = \frac{A^{n/2}}{(-2\pi i)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \tilde{\psi}(p) dp. \quad (1.20)$$

Если оператор  $A$  неотрицательно определен, то

$$\psi(x) = \Phi_A^p \tilde{\psi}(p) = \frac{(-A)^{n/2}}{(2\pi i)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \tilde{\psi}(p) dp. \quad (1.21)$$

Пусть оператор  $A$  не является знакоопределенным. Разложим пространство  $H$  на сумму  $H = H^+ + H^-$  таких подпространств, что сужение оператора  $A$  на  $H^+$  есть неотрицательно определенный оператор, который мы обозначим через  $A^+$ , а сужение оператора  $-A$  на  $H^-$  есть неотрицательно определенный оператор; обозначим его через  $A^-$ .

Пусть  $\psi(p)$  — функция со значениями в  $H$ . Положим

$$\tilde{\psi}(p) = \tilde{\psi}^+(p) + \tilde{\psi}^-(p), \quad \tilde{\psi}^+(p) \in H^+, \quad \tilde{\psi}^-(p) \in H^-.$$

Тогда по определению

$$\Phi_A^p \tilde{\psi}(p) = \Phi_{A^+}^p \tilde{\psi}^+(p) + \Phi_{A^-}^p \tilde{\psi}^-(p). \quad (1.22)$$

Аналогично определяется оператор  $\Phi_A^x$ .

Введем теперь аналогичный оператор в пространстве функций от  $x$  со значениями в банаховом пространстве  $B$ .

Рассмотрим оператор  $A$  с всюду плотной областью определения  $D(A)$ . Пусть  $(1 + \varepsilon A)^{-1}$  и  $A^{-1}$  существуют и определены всюду в  $B$ , причем  $\| (1 + \varepsilon A)^{-1} \| \leq 1$  при  $\varepsilon > 0$  и  $\varepsilon$  чисто мнимом. Рассмотрим оператор

$$T = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{iAx^2} dx, \quad \text{заданный на } D(A). \text{ Этот оператор}$$

обладает следующими свойствами (см. гл. 6, § 1):

- а)  $T^2 = A$  на  $D(A)$ ;
- б)  $T = \bar{T}$ ,

где  $\bar{T}$  — комплексно сопряженный оператор,

$$\bar{T} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-iAx^2} dx.$$

Таким образом, оператор  $T$  существует как оператор в действительном банаховом пространстве. Обозначив  $T = \sqrt{A}$ , определим преобразование типа Фурье формулами (1.19), (1.20) для функций со значениями в  $B$ .

Можно также рассматривать оператор  $A$ , для которого  $-A$  обладает перечисленными выше свойствами. В этом случае в качестве преобразования типа Фурье введем формулу (1.21).

5. Инвариантность типа уравнения относительно перехода к  $p$ -представлению. Тип уравнения (1.16) инвариантен относительно перехода к  $p$ -представлению с помощью преобразования  $\Phi_A^x$ . В самом деле, после подстановки  $e^{iAS(p,t)}$  в уравнение (1.16), записанное в  $p$ -представлении (т. е. в уравнение для функции  $\psi(p, t)$ ), мы вновь получим (приравняв коэффициент при  $A^2$  нулю) уравнение Гамильтона — Якоби

$$a_1(x, t) \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} \right)^2 + a_2(x, t) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} - a_3(x, t) + |p + b(x, t)|^2 = 0,$$

где  $\tilde{S} = S(p, t)$ ,  $x_i = \partial \tilde{S} / \partial p_i$ .

6. Уравнения волновой механики и оптики. Приведем таблицу специальных значений коэффициентов уравнения (1.16), при которых получаются уравнения волновой механики и оптики. Заметим, что большая часть конкретных применений развиваемой далее теории относится именно к этим уравнениям. Нетрудно проверить, что все они принадлежат волновому типу в смысле проведенной перед этим классификации.

Здесь  $\bar{E} = \bar{E}(x, t)$  — электрическое поле,  $\Phi_0 = \Phi_0(x, t)$  — скалярный потенциал,  $A_\mu = A_\mu(x, t)$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ) — компоненты векторного потенциала,  $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$ ,  $\mu = \mu(x, t)$  — диэлектрическая и магнитная проницаемость среды,  $c$  — скорость света в пустоте,  $m$  — масса частицы,  $e$  — заряд,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $\bar{\sigma}_2$  — матрица Паули второго порядка:

$$\bar{\sigma}_2 = (\sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{24}),$$

$$\sigma_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\alpha}$  — матрицы Дирака четвертого порядка [53]:

$$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \bar{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3),$$

$$\alpha_k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{2k} \\ \sigma_{2k} & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_k = \begin{bmatrix} \sigma_{2k} & 0 \\ 0 & \sigma_{2k} \end{bmatrix}.$$

Если  $a_1 = a_2 \neq 0$ ,  $b = 0$ ,  $B_k = 0$ ,  $R = 0$ , то мы имеем уравнение Гельмгольца. При  $A = \omega$  имеем уравнение туннельного типа с чисто мнимыми характеристиками: если сделать замену  $S \rightarrow iS'$ , то мы получим действительные решения для  $S'$ . Характеристическую систему для уравнения, определяющего  $S'$ , будем называть бихарактеристической для данного туннельного уравнения.

Уравнение (1.4) получается из (1.16), если положить

$$a_1 = \frac{1}{a^2(x, t)}, \quad a_2 = 0,$$

$$a_3 = \frac{b^2(x, t)}{a^2(x, t)}, \quad A = -\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

а остальные коэффициенты уравнения (1.16) принять равными нулю.

Начальные данные для уравнений 2 и 3 табл. 1 (уравнения Максвелла и Дирака) не являются произвольными; они удовлетворяют определенным соотношениям, обладающим свойством инвариантности, т. е. если они выполнены в начальный момент, то решение уравнений будет удовлетворять им в любой момент времени.

Пусть

$$\bar{E}(x, 0) = \bar{E}_0(x), \quad \bar{H}(x, 0) = \bar{H}_0(x),$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}(x, 0) = \bar{E}'_0(x), \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}(x, 0) = \bar{H}'_0(x)$$

— начальные условия для уравнения Максвелла. Указанные соотношения имеют вид

$$\operatorname{div} \varepsilon \bar{E}_0 = 0, \quad \operatorname{div} \mu \bar{H}_0 = 0, \quad (1.23a)$$

$$\frac{\varepsilon}{c} \bar{E}'_0 = \operatorname{rot} \bar{H}_0, \quad \frac{\mu}{c} \bar{H}'_0 = -\operatorname{rot} \bar{E}_0.$$

Пусть решение  $\psi(x, t)$  уравнений Дирака удовлетворяет условиям

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = \psi'_0(x). \quad (1.23b)$$

Соотношения, наложенные на эти условия, имеют вид

$$\frac{\hbar}{c} \psi'_0 + \frac{1}{c} \Phi(x, 0) \psi_0 = -\hbar \left( \bar{\alpha} \left( \operatorname{grad} \psi_0 - \frac{1}{c} A \psi_0 \right) \right) + m c \alpha_4 \psi_0, \quad (1.24)$$

$$\alpha_4 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку соотношения (1.23) и (1.24) инвариантны и выполняются в любой момент времени  $t$ , то можно записать уравнения Дирака и Максвелла, как это принято, в виде системы уравнений первого порядка. При этом условия (1.23a) можно наложить непосредственно на решения уравнения (1.23b).

Заметим, что скалярное волновое уравнение и уравнение Максвелла вообще не зависят от оператора  $A$ . Тем не менее начальное условие может зависеть от оператора  $A$ . Действительно, в первом примере (1.1) начальное условие (1.2) может быть представлено в виде

$$u(x, 0) = \varphi(x) f^+(x) = \varphi(x) [\xi + f(x)]_{\xi=0}^+ = \varphi(x) [e^{f(x)} \frac{d}{d\xi} \xi^+ ]_{\xi=0}.$$

Таким образом, здесь  $u(x, 0) = e^{-iAf(x)} g$ , где  $A = i \frac{\partial}{\partial \xi}$ ,  $g = \xi^+$ . Кроме того, может быть поставлено «осциллирующее» начальное условие

$$u(x, 0) = \varphi(x) e^{imf(x)}$$

(т. е.  $g = 1$ ,  $A = \omega$ ).

Таблица 1

Уравнение	Общепринятое обозначение для решения $\Psi$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$b$	$E_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}$	R	T
1. Скалярное волновое	$\psi$	$1/c^2(x, t)$ — скорость в свете в веществе	0	0	0	0	0	0	$i \frac{\partial}{\partial t}$
2. Максвелла	$\bar{E}$ $\bar{H}$	$\frac{e\mu}{c^2}$	0	0	0	0	$(\text{grad ln } \mu) \text{ rot } \bar{E} +$ $+\text{ grad } (\bar{E} \text{ grad ln } e)$ $(\text{grad ln } e) \text{ rot } \bar{H} +$ $+\text{ grad } (\bar{H} \text{ grad ln } \mu)$	0	$i \frac{\partial}{\partial t}$ или $\omega$
3. Дирака	$\psi$	1	$2\Phi_0$	$\Phi_0^2 + m^2 c^2$	$A_\mu$ $\mu=1, 2, 3$	0	0	$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} + \frac{e}{c} \{(\sigma \bar{H}) - i(\sigma, \bar{E})\}$	1/h
4. Клейна — Гордона — Яока	$\psi$	1	$2\Phi$	$\Phi_0^2 + m^2 c^2$	$A_\mu$ $\mu=1, 2, 3$	0	0	$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}$	1/h
5. Паули	$\psi$	0	1	$\Phi_0$	$A_\mu$ $\mu=1, 2, 3$	0	0	$e(\sigma_3, \bar{H})$	1/h
6. Шредингера	$\psi$	0	1	$\Phi_0$	$A_\mu$ $\mu=1, 2, 3$	0	0	0	1/h

Во всех рассмотренных примерах начальные условия зависят от  $A$  специальным образом. Мы увидим в следующем параграфе, что специальный вид начальных условий не случаен. Он продиктован самой физической постановкой задачи.

## § 2. Постановка задачи Коши для уравнений квантовой механики

Квантовая механика, как известно, основывается на целом ряде физических принципов. Не будем касаться тех, которые постулируют связь математического аппарата с экспериментом. Не будем касаться также и правил, служащих для написания уравнений.

Весь известный математический аппарат квантовой механики может быть построен на основе нескольких эволюционных (нестационарных) уравнений в частных производных, приведенных в табл. 1. Поэтому, чтобы аксиоматизировать математическую теорию квантовой механики, надо еще знать, каким условиям должны удовлетворять начальные значения решений этих уравнений. Итак, мы сформулируем лишь те постулаты квантовой механики, которые могут быть использованы для определения вида начальных условий. Такими постулатами являются принцип тождественности частиц и принцип соответствия квантовой и классической механики. Им удовлетворяют далеко не все решения уравнений, отвечающие произвольным начальным данным, принадлежащим  $L_2$ .

Сформулируем аксиому, которой может быть заменен принцип тождественности.

Пусть уравнение Шредингера зависит от двух троек переменных  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$  так, что при перестановке индексов уравнение не изменяется. Тогда начальное условие при перестановке индексов может изменить только знак.

Нетрудно доказать, что решение уравнения будет обладать этим свойством не только в начальный момент, но и в любой момент времени  $t$ . Это и означает выполнение принципа тождественности в общепринятой формулировке [20, 48].

Другое ограничение, сказывающееся на начальных условиях, формулируется следующим образом\*). «Мы всегда будем требовать, чтобы при соответствующем предельном переходе результаты любых вычислений совпадали с классическими выражениями. Это требование выражает принцип соответствия Бора...» [48].

Поясним, что означает термин «предельный переход». Пусть  $l_0$ ,  $t_0$ ,  $v_0 = l_0/t_0$ ,  $V_0$  — постоянные: длина, время, скорость и потенциал, характерные для данной квантовой системы. Предельный переход квантовомеханических величин в классические осуществляется при таком изменении этих параметров, когда безразмерная константа  $v = \frac{h}{l_0 m v_0}$  стремится к нулю. Это означает, что так называемая де-бройлевская длина волны  $h/(m v_0)$  мала сравнительно с харак-

\*) См. Ш и ф Л. Квантовая механика.— М.: ИЛ.

терной длины системы. Остальные безразмерные параметры

$$\eta = \frac{c}{v_0}, \quad \kappa = \frac{eV_0}{mv_0^2}$$

( $c$  — скорость света,  $e$  — заряд,  $V_0$  — характерный потенциал) не зависят от  $\hbar$  и  $l_0$ . А поскольку  $\hbar$  постоянно, то  $v$  может стремиться к нулю лишь за счет увеличения  $l_0$  (или при одновременном стремлении  $V_0$  и  $v_0$  к  $\infty$ , если  $eV_0 \sim v_0^2 m$ ). Однако для удобства обычно полагают  $\hbar \rightarrow 0$  вместо  $v \rightarrow 0$  или  $l_0 \rightarrow \infty$ .

Таким образом, принцип соответствия может быть применен лишь к системам, которые содержат малый параметр  $\hbar$ . Этим он отличается от принципа тождественности.

Теперь разберемся, о какой задаче классической механики идет речь. Всякой конкретной квантовомеханической задаче, содержащей параметр  $\hbar$  и имеющей физический смысл, соответствует в классической механике вполне определенная задача. Эта задача может быть поставлена как обычная вариационная: ищутся экстремали функционала с закрепленным правым концом и левым концом, трансверсальными к некоторому  $k$ -мерному ( $k \leq n$ ) многообразию (в частности, при  $k=0$  левый конец закреплен).

Рассмотрим, например, уравнение Шредингера. Уравнениями Эйлера соответствующей ему классической вариационной задачи будут уравнения Ньютона

$$\mu \ddot{x}_i = - \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i=1, \dots, n.$$

Рассмотрим  $k$ -мерное многообразие  $x_0 = x_0(\alpha)$  ( $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ,  $k \leq n$ ), вложенное в  $\mathbb{R}^n$ . Обобщение условия трансверсальности может быть представлено в виде

$$\frac{\partial x_0(\alpha)}{\partial \alpha_i} \frac{\partial x_0(\alpha)}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial x_0(\alpha)}{\partial \alpha_j} \frac{\partial x_0(\alpha)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i, j \leq k, \quad (2.1)$$

$$p_0(\alpha) = \mu \dot{x}_0(\alpha).$$

Удобнее рассматривать в фазовом пространстве  $q=x$ ,  $p=\mu \dot{x}$   $n$ -мерное неособое дифференцируемое многообразие  $q=q(\alpha)$ ,  $p=\mu \dot{q}(\alpha)$  ( $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ). Условие (2.1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha_i} \frac{\partial p}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha_j} \frac{\partial p}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i, j \leq n, \quad (2.2)$$

т. е. в любой локальной системе координат многообразия скобки Лагранжа равны нулю. Такое многообразие называется лагранжевым.

Квантовый переход системы из состояния  $\psi_1(x)$  при  $t=0$  в состояние  $\psi_2(x)$  при  $t=\tau$  описывается формулой

$$c_{12}(\tau) = \int \psi_2(x) K(x, \xi, \tau) \psi_1(\xi) dx d\xi, \quad (2.3)$$

где  $K(x, \xi, \tau)$  — фундаментальное решение (функции Грина) уравнения Шредингера (1.6). Вероятность этого перехода равна  $|c_{12}(\tau)|^2$ .

Решение задачи Коши для (1.6) получается из формулы (2.3), если положить  $\psi_2(x) = \delta(x-x')$ , что соответствует задаче с закрепленным правым концом.

Само фундаментальное решение можно получить из (2.3), если положить  $\psi_1(x) = \delta(x-\xi')$ ,  $\psi_2(x) = \delta(x-x')$ . Следовательно, фундаментальное решение описывает квантовый переход частицы из точки  $x=\xi'$  за время  $\tau$  в точку  $x=x'$ , что соответствует вариационной задаче с закрепленными концами.

Начальное лагранжево многообразие в этом случае имеет вид  $x=\xi'$  и представляет собой поверхность, расположенную параллельно координатной плоскости  $x=0$ .

Начальному условию вида

$$\psi(x, 0) = \exp\{ip_0 x/\hbar\}$$

( $p_0 = p_{01}, \dots, p_{0n}$  — константы) соответствует лагранжево многообразие  $p=p_0$ . Условию, не зависящему от  $\hbar$ , соответствует многообразие  $p=0$ .

С помощью принципа соответствия Бор получил квантование классической механики, которое, как оказалось, дает лишь первый член асимптотики при  $\hbar \rightarrow 0$  решения истинного квантового уравнения Шредингера (1.6). Квантование Шредингера заключалось в том, что он поставил в соответствие классическому импульсу оператор  $-i\hbar \partial/\partial x$ , энергии  $E$  — оператор  $i\hbar \partial/\partial t$ , сопоставив тем самым уравнению Гамильтона — Якоби линейное уравнение в частных производных второго порядка. Квантование, таким образом, тесно связано с принципом соответствия; в приведенной выше формулировке Шиффа это есть понятие, обратное квантованию. Квантование ставит в соответствие классическому объекту квантовый объект, зависящий от  $\hbar$ , а принцип соответствия требует, чтобы результаты вычисления имели классический предел при  $\hbar \rightarrow 0$ . Естественно, что принцип соответствия был призван «помогать квантовать».

Оказывается, однако, что для произвольного решения уравнения Шредингера принцип соответствия, вообще говоря, не выполняется. Например, пусть  $\psi(x, t)$  — решение уравнения Шредингера, удовлетворяющее начальному условию  $\psi(x, 0) = \varphi(x) e^{ix/\hbar^2}$ ; тогда среднее значение импульса, равное (см. [48])

$$- \int \bar{\psi}(x, t) i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) dx,$$

будет стремиться к  $\infty$  при  $\hbar \rightarrow 0$ . Значит, чтобы удовлетворить принципу соответствия, нужно прежде всего проквантовать начальное условие для уравнений Ньютона — условие трансверсальности, т. е. каждому лагранжево многообразию поставить в соответствие векторную функцию от  $x$  и  $\hbar$  — начальное условие для решения урав-

нения Шредингера (иначе говоря, проквантовать скобки Лагранжа (2.2)). И лишь после этого доказать принцип соответствия.

Итак, задача заключается в том, чтобы найти класс  $K$  функций от  $x$  и  $\hbar$ , удовлетворяющий следующим условиям:

1) Асимптотичность. Две функции от  $x$  и  $\hbar$  из  $K$  считаются эквивалентными, если их разность стремится к нулю при  $\hbar \rightarrow 0$  в среднем (т. е. по норме в  $L_2[\mathbb{R}^n]$ ).

2) Выполнение принципа соответствия. Если в начальный момент решение принадлежит классу  $K$ , то в любой момент выполняется принцип соответствия, т. е. все квантовомеханические величины, имеющие физический смысл, переходят при  $\hbar \rightarrow 0$  в классические.

3) Инвариантность. Если в начальный момент решение  $\psi(x, 0)$  принадлежит классу  $K$ , то и в любой фиксированный момент оно принадлежит этому же классу.

4) Полнота. Каждому многообразию  $x_0 = x_0(\alpha)$ ,  $\dot{x}_0 = \dot{x}_0(\alpha)$ , удовлетворяющему условию (2.2), соответствует функция  $\varphi_0 \in K$ . Квантовомеханические величины, отвечающие решению  $\psi(x, t)$  уравнения (1.6) с условием  $\psi(x, 0) = \varphi_0$ , сходятся при  $\hbar \rightarrow 0$  к классическим величинам, отвечающим задаче

$$\ddot{x} = -\partial v / \partial x^i, \quad x_i(0) = x_{0i}(\alpha), \quad \dot{x}_i(\alpha) = p_{0i}(\alpha). \quad (2.4)$$

Таким образом, для наших целей достаточно провести квантование скобок Лагранжа в квазиклассическом приближении — приближении старой квантовой механики Бора. Забегая вперед, заметим, что условия квантования скобок Лагранжа будут совпадать с условиями Бора — Зоммерфельда старой квантовой теории в случае, когда лагранжиано многообразие является инвариантным относительно динамической системы (2.4).

Свойство асимптотичности для класса  $K$  мы заменим более сильным условием, учитывающим «равноправность» оператора умножения на  $1/\hbar$  и оператора дифференцирования по  $x$ . Рассмотрим в  $L_2[\mathbb{R}^{n+1}]$  область  $D$  — пересечение областей определения оператора умножения на  $1/\hbar$  и оператора дифференцирования по  $x$ . Область  $D$  незамкнута в норме  $L_2[\mathbb{R}^{n+1}]$ . отождествим элементы из  $L_2[\mathbb{R}^{n+1}]$ , разность между которыми принадлежит  $D$ . Полученное пространство (фактор-пространство \*) обозначим через  $S = L_2/D$ . Требование асимптотичности будет выполнено, если класс  $K$  принадлежит  $S$ . В дальнейшем мы будем записывать равенство в пространстве  $S$  в виде  $f_1 \stackrel{S}{=} f_2$ , т. е. с точностью до элемента, принадлежащего  $D$ . Так,  $\psi(x, t) \stackrel{S}{=} \psi_0(x, t)$ .

Задача о построении инвариантного класса функций может быть поставлена и для задачи о разрывах скалярного волнового

\*) Пространство  $L_2[\mathbb{R}^n]$  есть группа по сложению,  $D$  — его подгруппа. Пусть  $L_2/D$  — класс смежности в  $L_2$  по подгруппе  $D$ . Совокупность классов смежности и является фундаментальным множеством элементов линейного пространства  $S$ . Фактор-пространство  $L_2/D$  незамкнуто.

уравнения. Если рассматривать решение задачи (1.1) при  $t > t_0$ , то якобиан  $Y(t, x_0)$  может обратиться в нуль в некоторой точке  $t = t'$ . При  $n=2$  для аналитических коэффициентов уравнения (1.1) в простейшем случае (простая каустика) было исследовано поведение разрыва в точке  $t = t'$ . Оказалось, что разрыв решения описывается весьма сложным интегралом.

Вопрос заключается в том, чтобы построить инвариантный класс разрывов  $K$ , т. е. такой класс, что если  $\psi(x, 0) \in K$ , то и  $\psi(x, t) \in K$  в любой момент времени  $t$ . Таким образом, здесь идет речь, в частности, о решении задачи (1.1) в целом для любого  $t$ .

Рассмотрим пространство  $L_2[\mathbb{R}^n, H]$  функций от  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$  со значениями в гильбертовом пространстве. Пусть  $A$  — самосопряженный оператор в  $H$ , а область  $D(A^N)$  плотна в  $H$  при любом  $N$ . Будем рассматривать в  $L_2[\mathbb{R}^n, H]$  обобщенные функции, т. е. функции вида  $A^N f(x)$ , где  $f \in L_2[\mathbb{R}^n, H]$ . Не ограничивая общности, можно считать  $f(x) \notin D(A)$ . Поэтому, оставаясь в пространстве  $L_2[\mathbb{R}^n, H]$ , мы выделим класс функций, не принадлежащий пересечению областей определения оператора  $A$  и операторов  $\partial/\partial x_i$  ( $i=1, \dots, n$ ); в дальнейшем все результаты будем формулировать для функции из пространства  $L_2[\mathbb{R}^n, H]$ . Если на эти функции подействовать оператором  $A^N$ , или  $(\partial/\partial x_i)^N$ , то мы придем к обобщенным функциям.

Все теоремы гл. 2 переносятся очевидным образом на обобщенные функции, поэтому в части примеров, служащих для иллюстрации теорем, мы будем использовать именно обобщенные функции. Для выделения «сингулярной части» функции  $f \notin D$  рассмотрим фактор-пространство  $S = L_2[\mathbb{R}^n, H]/D$ , т. е. отождествим между собой элементы пространства  $L_2[\mathbb{R}^n, H]$ , разность между которыми принадлежит

$$D = D(\partial/\partial x) \cap D(A).$$

Для общего уравнения (1.16) задача также заключается в том, чтобы построить класс  $K \subset S$ , инвариантный относительно уравнения (1.16), т. е. такой, что если  $\psi(x, 0) \in K$ , то и  $\psi(x, t) \in K$  для любого  $t$ .

### § 3. Общее определение характеристик для уравнения с операторными коэффициентами

Пусть  $\mathcal{H}(B)$  — банахово пространство функций от  $x = (x_1, \dots, x_n)$  со значениями в абстрактном банаховом пространстве  $B$  (например,  $C^N(B)$  или  $W_p^N(B)$ ).

Рассмотрим пространство  $\mathcal{H}'(B)$  с нормой

$$\|g(x)\|_{\mathcal{H}'(B)} = \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \right\|_{\mathcal{H}(B)} + \|g(x)\|_{\mathcal{H}(B)}.$$

Обозначим через  $S$  фактор-пространство  $\mathcal{H}(B)/\mathcal{H}'(B)$ .



Пусть  $L: \mathcal{H}_1(B_1) \rightarrow \mathcal{H}_2(B_2)$  — линейный ограниченный оператор. Предположим, что  $L$  отображает  $\mathcal{H}'_1(B_1)$  в  $\mathcal{H}'_2(B_2)$ . Пусть  $S_1 = \mathcal{H}_1(B_1)/\mathcal{H}'_1(B_1)$ ,  $S_2 = \mathcal{H}_2(B_2)/\mathcal{H}'_2(B_2)$ . Оператор  $L$  порождает линейный оператор  $L_S: S_1 \rightarrow S_2$ , называемый характеристическим оператором. Пусть для некоторой функции  $\chi(x_1)$  уравнение  $L_S \chi(\varphi(x)) = 0$  разрешимо в том и только том случае, когда  $\varphi \in C$  удовлетворяет некоторому уравнению типа Гамильтона — Якоби. Будем говорить, что оператор  $L$  имеет характеристики, а уравнение первого порядка для определения функции  $\varphi(x)$  назовем характеристическим. Оператор  $L$  может иметь, вообще говоря, не одно характеристическое уравнение.

Когда оператор  $L: C^k \rightarrow C$  — гиперболически оператор  $k$ -го порядка, определение характеристик совпадает с общепринятым.

Пусть  $iA$  — некоторый неограниченный оператор в  $B$ , порождающий группу.

Если функция  $\chi(x_1)$  имеет вид

$$\chi_g(x_1) = e^{iAx_1} g,$$

где  $g \in B$ , то уравнение будем называть  $A$ -характеристическим и будем говорить, что оператор  $L$  имеет  $A$ -характеристики. Если при этом характеристическое уравнение имеет один и тот же вид для всех неограниченных операторов  $iA$ , порождающих группу, то будем называть его сильно характеристическим и говорить, что оператор  $L$  имеет сильные характеристики. Легко видеть, что классические характеристические уравнения для гиперболических систем являются сильно характеристическими, если считать, что решение уравнения есть функция со значениями в некотором банаховом пространстве  $B$  (например, зависит от некоторого параметра).

Для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(x) \Delta u$$

уравнение

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = c^2(x) (\nabla S)^2 \quad (3.1)$$

является сильно характеристическим, а уравнение

$$c^2(x) (\nabla S)^2 = 1 \quad (3.2)$$

является  $\partial/\partial t$ -характеристическим. Если начальное условие для уравнения (3.1) удовлетворяет уравнению (3.2), то сильные характеристики в данном случае будут совпадать с  $\partial/\partial t$ -характеристиками.

Перейдем теперь к конструктивному определению  $A$ -характеристик.

Пусть  $\mathcal{L}(x, p, t, h)$  — самосопряженный (неограниченный, вообще говоря) оператор в гильбертовом пространстве  $H$ , зависящий от параметров  $x, p, h, t$  ( $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $0 \leq |x| < \infty$ ,  $0 \leq |p| < \infty$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ ,  $0 \leq h$ ) и бесконечно дифференцируемый по

всем этим параметрам. Пусть  $\lambda(x, p, t)$  — изолированная равномерно по всем параметрам точка спектра оператора  $\mathcal{L}(x, p, t, 0)$ .

Пусть  $L_2[\mathbb{R}^{n+1}, H]$  — пространство функций от  $x$  и  $h$  со значениями в  $H$ , с нормой

$$\|F\|_{L_2[\mathbb{R}^{n+1}, H]} = \sqrt{\int_0^{h_0} dh \int_{-\infty}^{\infty} \|F(x, h)\|_H^2 dx}.$$

Рассмотрим в  $L_2[\mathbb{R}^{n+1}, H]$  оператор  $\mathcal{L}(x, \hat{p}, t, h)$ , где  $\hat{p}_j = -ih \partial/\partial x_j$ ,  $t$  — параметр, причем в операторе вначале действует  $\hat{p}_j$ , затем  $x_j$ ; иначе говоря,

$$\mathcal{L}(x, \hat{p}, t, h) F(x, h) = \frac{1}{(2\pi i h)^n} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-ipx/h} \mathcal{L}(x, p, t, h) \int e^{ip\xi/h} F(\xi, h) d\xi.$$

Рассмотрим в пространстве непрерывных функций от  $t$  со значениями в  $L_2[\mathbb{R}^{n+1}, H]$  оператор

$$ih \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}(x, \hat{p}, t, h). \quad (3.3)$$

Для этого оператора одно из  $i/h$ -характеристических уравнений имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \lambda\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) = 0. \quad (3.4)$$

Оно отвечает собственному значению  $\lambda(x, p, t)$ . Вместо  $1/h$  в этом примере можно взять резольвенту самосопряженного оператора  $A$ , действующего в пространстве  $L_2$  функций от  $\tau$ . При этом норма элемента  $F(x, \tau) \in L_2[\mathbb{R}^{n+1}, H]$  должна иметь вид

$$\|F\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, \tau)|^2 dx}.$$

Тогда уравнение (3.4) будет  $iA$ -характеристическим для оператора (3.3), где  $h = (A - z)^{-1}$  ( $z \in \rho(A)$ ) ( $\rho(A)$  — резольвентное множество оператора  $A$ ). Это определение  $iA$ -характеристик, как мы покажем ниже, согласуется с приведенным выше определением.

Дадим общее конструктивное определение характеристик для дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами; с помощью этого определения будет проведена классификация уравнений.

Рассмотрим замкнутый оператор  $\mathcal{L}$  с всюду плотной областью определения в гильбертовом пространстве  $H$  и областью значений в  $H$ , зависящий от  $2n+3$  параметров  $p_1, \dots, p_n, p_0, x_1, \dots, x_n, t, \omega$  и являющийся полиномом  $m$ -й степени параметра  $p$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(i\omega p, i\omega p_0, x, t, \omega) = \sum_{j=0}^m \mathcal{L}_j(i\omega p, x, t, \omega) (i\omega p_0)^j. \quad (3.5)$$

Предположим, что существует сильный предел

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega' \mathcal{L}(i\omega p, i\omega p_0, x, t, \omega) = \mathcal{L}^0(p, p_0, x, t) = \sum_{i=0}^m \mathcal{L}_i^0(p, x, t) p_0^i, \quad (3.6)$$

где  $l$  — некоторое действительное число.

Пусть  $\lambda(p, p_0, x, t)$  — равномерно по всем параметрам  $a \leq p \leq b$ ,  $\alpha \leq x \leq \beta$ ,  $c \leq p_0 \leq d$ ,  $0 \leq t \leq T$  изолированная точка спектра\*) оператора  $\mathcal{L}^0(p, p_0, x, t)$  кратности  $r < \infty$ . Пусть  $A$  — некоторый неограниченный самосопряженный оператор в  $H$ , коммутирующий с оператором  $\mathcal{L}$ .

Рассмотрим в пространстве бесконечно дифференцируемых функций от  $x$  и  $t$  со значениями в  $H$  оператор  $\hat{\mathcal{L}}$  вида

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t, A\right) = \sum_{i=0}^m \mathcal{L}_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, x, t, A\right) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i = \sum_{i=0}^m \hat{\mathcal{L}}_i \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i, \quad (3.7)$$

где операторы  $\hat{\mathcal{L}}_i$  действуют следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_i \varphi &\equiv \mathcal{L}_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, x, t, A\right) \varphi = \\ &= \frac{A^h}{(2\pi)^h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \mathcal{L}_i(-ipA, x, t, A) dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\xi} \varphi(\xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Уравнение

$$\lambda(p, p_0, x, t) = 0, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad p_0 = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$a \leq p \leq b, \quad c \leq p_0 \leq d, \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad 0 \leq t \leq T,$$

будем называть характеристическим уравнением (одним из характеристических, поскольку изолированных точек спектра у оператора  $\hat{\mathcal{L}}$  может быть много) для уравнения

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}\psi(x, t) &= F(x, t), \\ \psi(x, t), \quad F(x, t) &\in C^\infty[H]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Если уравнение (3.9) имеет  $m$  действительных корней относительно  $p_0$ , то мы будем говорить, что уравнение (3.9) имеет характеристику волнового типа; если все  $m$  корней  $p_0$  чисто мнимы — то характеристику туннельного типа.

Мы увидим из дальнейшего, что приведенное конструктивное определение  $A$ -характеристик совпадает с определением, данным в начале этого параграфа (см. теоремы 4.1, а и 4.2). Нетрудно убедиться, что определение характеристик, данное в примерах § 1, следует из приведенного здесь общего определения.

\*) Функцию  $\lambda(p, p_0, x, t)$  будем называть термом.

## ГЛАВА 2

### КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР

#### § 1. Одномерный случай

Для построения класса  $K$  асимптотических формул, равномерных по переменной  $x$  на всей числовой оси, нам придется вначале построить некоторый оператор, зависящий от параметра  $h$ , отображающий пространство функций на заданной кривой  $\Gamma$  в фазовой плоскости в пространство функций на прямой. Для построения этого оператора, называемого каноническим, вводится понятие индекса пути на кривой, и кривая покрывается интервалами, взаимно однозначно проектируемыми\*) на одну из координатных осей ( $p$  или  $q$ ). Вначале канонический оператор определяется локально — для каждого из таких интервалов, а затем с помощью разбиения единицы строится оператор для всей кривой  $\Gamma$ . Канонический оператор, вообще говоря, зависит от способа покрытия кривой  $\Gamma$  интервалами и от способа разбиения единицы. Оказывается, однако, что если кривая незамкнута, то эта зависимость проявляется лишь на величинах первого порядка малости относительно параметра  $h$ . То же справедливо и для замкнутой кривой при условии, что данная кривая удовлетворяет некоторому соотношению — так называемому условию квантования Бора. При помощи канонического оператора мы выразим известную асимптотику собственной функции стационарного уравнения Шредингера, а также асимптотику решения задачи Коши для временного уравнения Шредингера. Приводимые в этом параграфе теоремы — частный случай более общих теорем для произвольного числа измерений. Теоремы формулируются в §§ 2—4.

1. Топологические предположения. Рассмотрим на фазовой плоскости\*\*) ограниченную гладкую несамопересекающуюся кривую  $\Gamma$  (не обязательно замкнутую), определяемую уравнениями  $q = q(\alpha)$ ,  $p = p(\alpha)$ . Параметром можно считать, например, длину дуги, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки. Точку кривой  $\Gamma$  с координатами  $q(\alpha)$ ,  $p(\alpha)$  будем также обозначать  $\alpha$ . Точки кривой  $\Gamma$ , в которых выполняется условие  $dq/d\alpha \neq 0$ , назовем неосо-

\*) Под этим понимается, что проекции являются диффеоморфизмами (гладкие взаимно однозначные отображения с невырожденными якобианами).

\*\*) Точнее, одномерное гладкое подмногообразие (возможно, открытое).

Предположим, что существует сильный предел

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^l \mathcal{L}(i\omega p, i\omega p_0, x, t, \omega) = \mathcal{L}^0(p, p_0, x, t) = \sum_{i=0}^m \mathcal{L}_i^0(p, x, t) p_0^i, \quad (3.6)$$

где  $l$  — некоторое действительное число.

Пусть  $\lambda(p, p_0, x, t)$  — равномерно по всем параметрам  $a \leq p \leq b$ ,  $\alpha \leq x \leq \beta$ ,  $c \leq p_0 \leq d$ ,  $0 \leq t \leq T$  изолированная точка спектра \*) оператора  $\mathcal{L}^0(p, p_0, x, t)$  кратности  $r < \infty$ . Пусть  $A$  — некоторый неограниченный самосопряженный оператор в  $H$ , коммутирующий с оператором  $\mathcal{L}$ .

Рассмотрим в пространстве бесконечно дифференцируемых функций от  $x$  и  $t$  со значениями в  $H$  оператор  $\hat{\mathcal{L}}$  вида

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t, A\right) = \sum_{i=0}^m \mathcal{L}_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, x, t, A\right) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i = \sum_{i=0}^m \hat{\mathcal{L}}_i \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i, \quad (3.7)$$

где операторы  $\hat{\mathcal{L}}_i$  действуют следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_i \varphi &\equiv \mathcal{L}_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, x, t, A\right) \varphi = \\ &= \frac{A^h}{(2\pi)^h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \mathcal{L}_i(-ipA, x, t, A) dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\xi} \varphi(\xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Уравнение

$$\lambda(p, p_0, x, t) = 0, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad p_0 = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$a \leq p \leq b, \quad c \leq p_0 \leq d, \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad 0 \leq t \leq T,$$

будем называть характеристическим уравнением (одним из характеристических, поскольку изолированных точек спектра у оператора  $\hat{\mathcal{L}}$  может быть много) для уравнения

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}\psi(x, t) &= F(x, t), \\ \psi(x, t), \quad F(x, t) &\in C^\infty[H]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Если уравнение (3.9) имеет  $m$  действительных корней относительно  $p_0$ , то мы будем говорить, что уравнение (3.9) имеет характеристику волнового типа; если все  $m$  корней  $p_0$  чисто мнимы — то характеристику туннельного типа.

Мы увидим из дальнейшего, что приведенное конструктивное определение  $A$ -характеристик совпадает с определением, данным в начале этого параграфа (см. теоремы 4.1, а и 4.2). Нетрудно убедиться, что определение характеристик, данное в примерах § 1, следует из приведенного здесь общего определения.

\*) Функцию  $\lambda(p, p_0, x, t)$  будем называть термом.

## ГЛАВА 2

### КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР

#### § 1. Одномерный случай

Для построения класса  $K$  асимптотических формул, равномерных по переменной  $x$  на всей числовой оси, нам придется вначале построить некоторый оператор, зависящий от параметра  $h$ , отображающий пространство функций на заданной кривой  $\Gamma$  в фазовой плоскости в пространство функций на прямой. Для построения этого оператора, называемого каноническим, вводится понятие индекса пути на кривой, и кривая покрывается интервалами, взаимно однозначно проектируемыми \*) на одну из координатных осей ( $p$  или  $q$ ). Вначале канонический оператор определяется локально — для каждого из таких интервалов, а затем с помощью разбиения единицы строится оператор для всей кривой  $\Gamma$ . Канонический оператор, вообще говоря, зависит от способа покрытия кривой  $\Gamma$  интервалами и от способа разбиения единицы. Оказывается, однако, что если кривая незамкнута, то эта зависимость проявляется лишь на величинах первого порядка малости относительно параметра  $h$ . То же справедливо и для замкнутой кривой при условии, что данная кривая удовлетворяет некоторому соотношению — так называемому условию квантования Бора. При помощи канонического оператора мы выразим известную асимптотику собственной функции стационарного уравнения Шредингера, а также асимптотику решения задачи Коши для временного уравнения Шредингера. Приводимые в этом параграфе теоремы — частный случай более общих теорем для произвольного числа измерений. Теоремы формулируются в §§ 2—4.

1. Топологические предложения. Рассмотрим на фазовой плоскости \*\*) ограниченную гладкую несамопересекающуюся кривую  $\Gamma$  (не обязательно замкнутую), определяемую уравнениями  $q = q(\alpha)$ ,  $p = p(\alpha)$ . Параметром можно считать, например, длину дуги, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки. Точку кривой  $\Gamma$  с координатами  $q(\alpha)$ ,  $p(\alpha)$  будем также обозначать  $\alpha$ . Точки кривой  $\Gamma$ , в которых выполняется условие  $dq/d\alpha \neq 0$ , назовем неосо-

\*) Под этим понимается, что проекции являются диффеоморфизмами (гладкие взаимно однозначные отображения с невырожденными якобианами).

\*\*) Точнее, одномерное гладкое подмногообразие (возможно, открытое).

быми или, подробнее, неособыми относительно операции проектирования кривой  $\Gamma$  на координатную ось параллельно оси  $p$ . Остальные точки назовем особыми.

Пусть множество  $M$  особых точек конечно и особые точки таковы, что при переходе через них производная  $dq/dp$  вдоль  $\Gamma$  меняет знак. Сопоставим каждой такой точке  $\alpha \in M$  единичный касательный вектор  $\bar{e}_\alpha$  в направлении возрастания  $dq/dp$  (т. е. в сторону положительного значения  $dq/dp$ ).

Определим индекс пути  $l[\alpha^1, \alpha^2] \subset \Gamma$  с началом в неособой точке  $\alpha^1$  и концом в неособой точке  $\alpha^2$  следующим образом: если путь проходит особую точку  $\alpha$  в направлении вектора  $e_\alpha$ , то к индексу прибавляется 1; если в противоположном направлении — то вычитается 1. Индекс пути  $l[\alpha^1, \alpha^2]$  обозначается символом  $\text{Ind } l[\alpha^1, \alpha^2]$ .

Итак, индекс пути определен при некоторых ограничениях на множество  $M$  и на точки  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$ , выполняемых, когда кривая и путь находятся «в общем положении» [33].

Определим индекс произвольного пути на произвольной кривой  $\Gamma$ , приведя ее и путь в общее положение малым поворотом осей по часовой стрелке. Имеет место следующее важное предложение, доказательство которого почти очевидно из наглядных соображений.

*Предложение. Индекс замкнутого пути (цикла), проходящего в направлении часовой стрелки, является инвариантом относительно диффеоморфизмов.*

Рассмотрим систему Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q}, \quad (1.1)$$

где  $H(q, p, t)$  — достаточно гладкая функция. Пусть  $\{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$  — несамопересекающаяся гладкая кривая в фазовой плоскости,  $Q(\alpha, t) = q(t), P(\alpha, t) = p(t)$  — решение системы (1.1) с начальными данными  $q^0(\alpha), p^0(\alpha)$ , лежащими на  $\Gamma$ . Функции  $Q(\alpha, t), P(\alpha, t)$  задают отображение  $u_t$  кривой  $\Gamma$  в некоторую кривую  $\Gamma_t$ :  $u_t \Gamma = \Gamma_t$ .

Всякий путь  $l[\alpha^1, \alpha^2]$  переходит при этом в некоторый путь  $u_t l[\alpha^1, \alpha^2] = l_t[\alpha^1, \alpha^2] \subset \Gamma_t$ . Возникает вопрос — как выражается  $\text{Ind } l_t[\alpha^1, \alpha^2]$  через  $\text{Ind } l[\alpha^1, \alpha^2]$ ? Чтобы ответить на него, напомним некоторые определения, относящиеся к решению системы (1.1).

1) Множество точек  $Q(\alpha^0, \tau)$  ( $0 \leq \tau \leq t$ ) называется траекторией (путем) и обозначается  $Q(\alpha^0; 0, t)$ .

2) Точка  $Q(\alpha^0, \tau)$  на траектории  $Q(\alpha^0; 0, t)$  называется фокальной, если  $\partial Q(\alpha^0, \tau)/\partial \alpha^0 = 0$ .

3) Пусть  $\partial^2 H/\partial p^2 > 0$ . Индексом траектории  $Q(\alpha^0; 0, t)$  назовем число фокальных точек на полуинтервале  $0 < \tau \leq t$  (так называемый индекс по Морсу [64]).

Имеет место следующее соотношение, которое решает вопрос об изменении индекса пути при отображении  $u_t$ :

$$\text{Ind } l[\alpha^1, \alpha^2] + \text{Ind } Q(\alpha^2; 0, t) = \text{Ind } l_t[\alpha^1, \alpha^2] + \text{Ind } Q(\alpha^2; 0, t). \quad (1.2)$$

Положим  $H = p^2/2 + v(q)$ , где  $v(q)$  — дважды дифференцируемая функция, тогда для достаточно малого  $t$  имеем

$$Q(\alpha, t) \cong p^0(\alpha)t + q^0(\alpha), \quad P(\alpha, t) \cong p^0(\alpha) - v'(q^0(\alpha))t.$$

Произведем сначала деформацию

$$p_1 = p^0(\alpha), \quad q_1 = p^0(\alpha)\tau + q^0(\alpha), \quad 0 \leq \tau \leq t.$$

Обозначим образ кривой  $\Gamma$  при этой деформации через  $\Gamma_t$ . Теперь, оставляя  $q = q_1$  постоянным, произведем деформацию  $p = p^0(\alpha) - v'(q^0(\alpha))\tau$  ( $0 \leq \tau \leq t$ ). Таким образом,  $\Gamma_t'$  переходит в  $\Gamma_t$ . Но эта последняя деформация, очевидно, не меняет соотношения (1.2) между индексами.

**2. Канонический оператор.** Рассмотрим пространство  $L_2[\Gamma, H]$  функций с интегрируемым квадратом по мере  $d\alpha$  на кривой  $\Gamma$ , со значениями в гильбертовом пространстве  $H$  и пространство  $L_2[\mathbb{R}^1, H]$  функций от  $x$  с интегрируемым квадратом на прямой  $-\infty < x < \infty$ , со значениями в гильбертовом пространстве  $H$ . Пусть  $A$  — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, причем спектр  $A$  содержит сколь угодно большие собственные числа.

Нас будут интересовать значения функций из  $L_2[\Gamma, H]$  лишь с областью определения в фактор-пространстве

$$S = L_2[\Gamma, H]/D(A) \cap D(d/d\alpha).$$

Рассмотрим случай, когда кривая  $\Gamma$  взаимно однозначно проектируется на ось  $q$ . Таким образом, из уравнения  $q = q(\alpha)$  находим  $\alpha = \alpha(q)$ . Обозначим через  $K_{A, \Gamma}^{\gamma, \alpha^0}$  линейный оператор, определенный на финитных бесконечно дифференцируемых функциях  $\varphi(\alpha)$ ,  $\varphi \in L_2[\Gamma, H]$ :

$$(K_{A, \Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \varphi)(x) = K_{A, \Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha) = \left\{ e^{i\gamma} \left| \frac{dq(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha(q)}^{-1/2} \exp \left\{ iA \int_{\alpha^0}^{\alpha(q)} p dq \right\} \varphi[\alpha(q)] \right\}_{q=x}, \quad (1.3)$$

где  $\gamma$  — константа, не зависящая от  $\alpha$ ,  $\alpha^0$  — точка на кривой  $\Gamma$ .

Пусть теперь кривая  $\Gamma$  не проектируется взаимно однозначно на прямую  $q$ , но зато взаимно однозначно проектируется на прямую  $p$ . Таким образом, из  $p = p(\alpha)$  следует  $\alpha = \alpha(p)$ . В этом случае обозначим через  $K_{A, \Gamma}^{\gamma, \alpha^0}$  оператор, действующий на  $\varphi(\alpha)$  следующим образом:

$$(K_{A, \Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \varphi)(x) = \frac{\exp \left\{ i \left( \gamma - \frac{\pi}{4} \sqrt{A} \right) \right\}}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ipx} A \left| \frac{dp(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha(p)}^{-1/2} \times \exp \left\{ -iA \int_{\alpha^0}^{\alpha(p)} q dp \right\} \varphi(\alpha(p)) dp, \quad (1.4)$$

где  $\gamma$  — константа,  $\alpha^0$  — точка на  $\Gamma$ , в которой  $dq(\alpha)/d\alpha=0$ . Интеграл берется по отрезку, на котором  $\varphi[\alpha(p)]$  отлична от нуля. Если  $x$  лежит вне отрезка  $\alpha$  оси  $q$ , на который проектируется носитель  $\varphi(\alpha)$ , то

$$(K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi)(x) \stackrel{S}{=} 0. \quad (1.4')$$

Теперь рассмотрим произвольную кривую  $\Gamma$  описанного типа. Покроем ее конечным числом открытых интервалов  $\Omega^i$  так, чтобы в каждом интервале  $\Omega^i$  либо  $dq(\alpha)/d\alpha \neq 0$  для всех точек интервала, либо  $dp(\alpha)/d\alpha \neq 0$  для всех его точек, а  $dq(\alpha)/d\alpha$  обращается в нуль в некоторой точке. Области первого типа назовем неособыми; области второго типа — особыми. В неособой области зададим в качестве локальных координат  $q$ ; в особой области —  $p$ . Обозначим через  $\Omega_0^i$  неособую область  $\Omega^i$  с введенными в ней координатами  $q$  (неособая локальная карта), а через  $\Omega_1^i$  — особую область  $\Omega^i$  с введенными в ней координатами  $p$  ( $\Omega_1^i$  — особая локальная карта). Пусть  $\Omega_1^i$  — совокупность всех особых карт,  $\Omega_0^i$  — совокупность всех неособых карт. Одну из точек  $\alpha^j \in \Omega^j$ , в которой  $dq(\alpha)/d\alpha=0$ , назовем центральной точкой особой карты \*). Возьмем произвольную точку  $\alpha^j \in \Omega_0^i$  и назовем ее центральной точкой карты. Совокупность карт  $\Omega_1^i, \Omega_0^i$  образует атлас  $\mathcal{H}$  кривой.

Сопоставим действительное число  $\gamma$  центральной точке одной из карт атласа  $\mathcal{H}$ ; эту точку назовем начальной и обозначим  $\alpha^0$ .

Пусть носитель  $R$  функции  $\varphi \in C^\infty$  лежит в области  $\Omega^j$ . Определим действие канонического оператора на функцию  $\varphi(\alpha)$  формулой (1.3), если  $\Omega^j$  — неособая, и формулой (1.4), если  $\Omega^j$  — особая, положив в этих формулах  $\gamma = \gamma^0 - \frac{\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \alpha^j]$ , где  $\gamma^0$  — не зави-

сящее от  $j$  число,  $\alpha^j$  — центральная точка карты,  $l[\alpha^0, \alpha^j]$  — некоторый путь из  $\alpha^0$  в  $\alpha^j$ . В общем случае можно определить канонический оператор с помощью разложения единицы по локальным картам. Обозначим через  $e^i(\alpha)$  ( $i=1, \dots, N$ ) разложение единицы, отвечающее покрытию  $\{\Omega^i\}$  компакта  $R$ . Это означает, что  $e^i(\alpha)$  удовлетворяет условиям: 1)  $e^i \in C^\infty$  и  $e^i=0$  вне  $\Omega^i$ ; 2)  $\sum_{i=1}^N e^i(\alpha) = 1$ , если

$\alpha \in R$ .

Для финитной функции  $\varphi(\alpha)$  имеем  $\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^N e^i(\alpha)\varphi(\alpha)$ . Но-

ситель каждого члена суммы принадлежит лишь одной локальной карте, поэтому на каждой функции  $e^i(\alpha)\varphi(\alpha)$  ( $i=1, \dots, N$ ) канонический оператор определен выше. Отсюда в силу линейности получим общий вид канонического оператора, действующего на финитную функцию  $\varphi(\alpha)$ .

\*) Если их несколько, то можно взять любую из них.

Пусть  $j(x)$  — совокупность номеров всех карт атласа  $\mathcal{H}$ , которые содержат множество пересечений прямой  $q=x$  с отрезком  $R \subset \Gamma$ . Отрезок  $R \subset \Gamma$  покрывается конечным числом карт  $\Omega^1, \dots, \Omega^N$  атласа  $\mathcal{H}$ . В общем случае канонический оператор  $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$  имеет вид

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}(\alpha) = e^{i\gamma} \sum_{i,j' \in j(x)} \left[ \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \alpha^{j'}] \right\} \times \right. \\ \times e^{i'}[\alpha(q)] \left| \frac{dq}{d\alpha}[\alpha(q)] \right|^{-1/2} \exp \left\{ iA \int_{l[\alpha^0, \alpha(q)]} p dq \right\} \varphi[\alpha(q)] + \\ + \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \alpha^j] \right\} \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2\pi i}} \int e^{ipqA} e^i[\alpha(p)] \times \\ \times \left| \frac{dp}{d\alpha}[\alpha(p)] \right|^{-1/2} \exp \left\{ -iA \int_{l[\alpha^0, \alpha(p)]} q dp \right\} \varphi[\alpha(p)] dp \Big]_{q=x}, \quad (1.5)$$

где  $l[\alpha^0, \alpha^j]$  — некоторые пути из  $\alpha^0$  в  $\alpha^j$ .

**З а м е ч а н и е.** Если  $\Gamma$  — неограниченная кривая  $A=1/h$ , то заменяя в формуле (1.5)  $\varphi(\alpha)$  на  $\xi(\alpha, h) \cdot \varphi(\alpha)$ , где  $\xi(\alpha, h)$  — функция-регуляризатор, равная единице с точностью до  $O(h^\infty)$  в любой ограниченной области и достаточно быстро стремящаяся к нулю при  $\alpha \rightarrow \infty$  (например,  $\xi(\alpha, h) = \exp\{-\alpha^2 e^{-1/h}\}$ ), приходим к тому, что ряды в (1.5) сходятся для любой ограниченной функции  $\varphi(\alpha)$ . Нетрудно убедиться, что для определенного таким образом канонического оператора справедливы (при некоторых ограничениях) в любой ограниченной области все сформулированные ниже теоремы. Аналогично и в многомерном случае.

**3. Инвариантность канонического оператора.** Пусть кривая  $\Gamma$  незамкнута. Тогда канонический оператор  $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$  не зависит от вида атласа и от способа разбиения единицы, т. е. выражения  $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} \varphi(\alpha)$  для различных атласов и разбиений единицы отличаются лишь на функции вида  $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} F(\alpha)$ , где  $F \in D(A) \cap D(\partial/\partial\alpha)$ .

Подразумевается, что точка  $\alpha^0$  при новом разбиении осталась начальной точкой атласа, а значит, осталась центральной точкой некоторой карты.

Если же точка  $\alpha = \alpha^0$  не осталась при новом разбиении центральной точкой карты, а стала принадлежать карте с центральной точкой  $\alpha_1^0$ , то в качестве начальной точки нового атласа должна быть взята какая-либо другая точка, например  $\alpha_1^0$ . Тогда прежний канонический оператор при новом разбиении равен (в  $S$ )  $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ , где

$$\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \alpha_1^0] + A \int_{l[\alpha^0, \alpha_1^0]} p dq.$$

Если кривая  $\Gamma$  замкнута, то канонический оператор  $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$  не зависит от способа разбиения единицы, но зависит, вообще говоря,

от выбора путей  $l[\alpha^0, \alpha^h]$  из начальной точки в центральные точки карт.

В этом случае, для того чтобы канонический оператор  $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$  не зависел от выбора канонического атласа и путей  $l[\alpha^0, \alpha^h]$ , необходимо и достаточно, чтобы точки спектра оператора  $A$  удовлетворяли соотношению

$$\lambda = \frac{2\pi(n+1/2)}{\oint p dq} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (1.6)$$

Заметим, что если положить  $\lambda=1/h$ , то эта формула совпадает по форме с известной формулой квантования Бора.

Замечание относительно начальной точки атласа остается в силе и для случая замкнутой кривой.

Условие (1.6), а следовательно, и инвариантность канонического оператора сохраняется при каноническом преобразовании (сохраняющем площадь).

4. Квазиклассическая асимптотика. Рассмотрим на прямой задачу на собственные значения для уравнения

$$y'' + vQ(x)y = 0, \quad (1.7)$$

$$Q(x) = \lambda - v(x), \quad \int y^2 dx < \infty,$$

где  $Q \in C^\infty$ ,  $Q(\pm\infty) = -\infty$ .

Рассмотрим в фазовой плоскости  $p, q$  кривую  $p^2/2 - Q(q) = 0$ . Известно, что собственные значения  $v = v_n$  задачи (1.7) — (1.8) будут удовлетворять условию (1.6) [18, 41].

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2 \psi''}{2\mu} + v(x)\psi = \lambda\psi, \quad \int \psi^2 dx < \infty, \quad (1.8)$$

где  $v \in C^\infty$ ,  $v(\pm\infty) = \infty$ .

Предложение. Пусть  $\Gamma_n = \{q_n(\alpha), p_n(\alpha)\}$  — последовательность замкнутых кривых, удовлетворяющих уравнениям

$$\mu \frac{dq_n}{d\alpha} = p_n(\alpha), \quad \frac{dp_n}{d\alpha} = -\frac{\partial v(q_n)}{\partial q_n}, \quad \frac{p_n^2}{2\mu} + v(q_n) = E_n,$$

где  $E_n$  — множество (зависящее от  $h$ ), определяемое условием

$$\oint p dq = 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)h.$$

Существует (зависящий от  $h$ ) набор собственных значений  $\lambda = \lambda_n$  уравнения (1.8) такой, что

$$\lambda_n - E_n = O(h^2), \quad \|\psi_n - K_{1/h,\Gamma_n}^{\gamma,\alpha^0} \cdot 1\|_{L_2} = O(h),$$

где  $\psi_n$  — собственные функции, отвечающие  $\lambda_n$ .

Выписанная здесь асимптотика сводится к общеизвестной с помощью формул, приведенных в [42].

Приведенная запись первого члена асимптотики собственной функции в определенном смысле инвариантна относительно перехода к  $p$ -представлению.

Предложение. Пусть функции  $v(x, t)$ ,  $\varphi(\alpha)$  удовлетворяют условиям  $v \in C^3$ ,  $\varphi \in C^2$ . Решение  $\psi(x, t)$  уравнения (1.6) гл. 1 с начальным условием

$$\psi(x, 0) = K_{1/h,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} \varphi(\alpha), \quad \Gamma = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}, \quad (1.9)$$

имеет вид

$$\psi(x, t) = K_{1/h,\Gamma_t}^{\gamma,\alpha^0} \varphi(\alpha) + z_h(x, t), \quad (1.10)$$

$$\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\},$$

где  $Q(\alpha, t)$ ,  $P(\alpha, t)$  — решение задачи Коши для системы уравнений Гамильтона

$$\mu \dot{Q}(\alpha, t) = P(\alpha, t), \quad Q(\alpha, 0) = q^0(\alpha), \quad (1.11)$$

$$\dot{P}(\alpha, t) = -\frac{\partial v(Q, t)}{\partial Q}, \quad P(\alpha, 0) = p^0(\alpha),$$

$$\gamma = \frac{1}{h} \int_0^t \left\{ \frac{\mu \dot{Q}^2}{2}(\alpha^0, \tau) - v[Q(\alpha^0, \tau)] \right\} d\tau - \frac{\pi}{2} \text{Ind } Q(\alpha^0; 0, t),$$

$$\int |z_h(x, t)|^2 dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Таким образом, решение уравнения (1.6) гл. 1 в любой момент  $t$  принадлежит с точностью до функций  $z_h(x, t)$  одному и тому же классу функций вида  $K_{1/h,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} \varphi(\alpha)$ , где  $\gamma, \Gamma$  переменны. Это означает, что условие инвариантности в определении класса  $K$  (см. § 2 гл. 1) выполнено.

Принцип соответствия также будет выполнен для решений такого вида.

Следствие. Пусть носитель  $R$  функции  $\varphi(\alpha)$  достаточно мал:  $R = \{\alpha_0 - \varepsilon \leq \alpha \leq \alpha_0 + \varepsilon\}$  и выполнены все условия предыдущего предложения. Тогда, если образ  $R_t$  носителя  $R$  на  $\Gamma_t$  состоит из особых точек, то

$$\int_{\alpha(x) \in R_t} |\psi(x, t)|^2 dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int \varphi^2(\alpha) d\alpha \quad (1.12)$$

и стремится к нулю вне этой области.

Если же  $R_t$  целиком принадлежит особой карте, то

$$\int_{\alpha(p) \in R_t} |\bar{\psi}(p, t)|^2 dp \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int \varphi^2(\alpha) d\alpha$$

и стремится к нулю вне этой области.

Это означает, что интеграл от  $|\psi|^2$  либо в  $x$ -, либо в  $p$ -представлении ведет себя при  $h \rightarrow 0$  как классическая вероятность

$\int \varphi^2(\alpha) d\alpha$ , оставаясь в пределе постоянной вдоль классических траекторий. Аналогично можно показать, что все квантовомеханические величины в пределе при  $h \rightarrow 0$  переходят в классические, т. е. принцип соответствия выполняется. Таким образом, все условия, требуемые в § 2 гл. 1 от класса  $K$ , выполнены для  $K_{1/h, \Gamma}^{\nu, \alpha^0} \varphi(\alpha)$ .

Таким образом, мы получаем переход в классическую механику в любой точке  $x, t$ . Значит, предельный переход существует и в фокальных точках (точках поворота), только в этих точках функцию  $\varphi$  нужно рассматривать в  $p$ -представлении.

Итак, мы видим (и увидим далее в многомерном случае), что переход в классическую механику (а аналогично и в геометрическую оптику) совершается в любой точке. Чтобы в этом убедиться, нужно лишь перейти к соответствующему представлению функции  $\varphi$ .

**5. Асимптотические ряды.** Поскольку в дальнейшем речь всегда будет идти об асимптотических рядах, то и знак равенства мы условимся понимать в некотором «асимптотическом» смысле, который мы сейчас определим.

Будем говорить, что функция  $\mathcal{F}(x, t)$  со значениями в  $H$  эквивалентна нулю, если для любых целых  $N_1, N_2, N_3$  функция  $A^{N_1 - N_2 - N_3} \frac{\partial^{N_2 + N_3} \mathcal{F}(x, \tau)}{\partial x^{N_2} \partial \tau^{N_3}}$  ограничена по норме в  $H$  равномерно по  $x \in \mathbb{R}^n, \tau \in [t - \varepsilon, t + \varepsilon], \varepsilon > 0$ . Будем отождествлять функции, разность между которыми эквивалентна нулю.

Таким образом, функции от  $x$  и  $t$  факторизуются по подпространству функций, имеющих бесконечно много ограниченных производных и принадлежащих  $D(A^\infty)$ . Мы будем рассматривать также функции со значениями в банаховом и счетно-нормированном пространстве. И в этом случае осуществим такую же факторизацию, т. е. функций, принадлежащие  $D(A^N)$  при любом  $N$  и бесконечно дифференцируемые, полагаем эквивалентными нулю.

Все равенства, которые в дальнейшем будут написаны для функций от  $x$  со значениями в банаховом или счетно-нормированном пространстве, справедливы лишь с точностью до функций, эквивалентных нулю.

Далее, если мы говорим, что функция  $f(x, t, h)$  дифференцируема  $N$  раз, то это значит, что все ее  $N$  производных по  $x, t$  ограничены при  $h \rightarrow 0$ . Если  $f(x, t, \alpha)$  — функция со значениями в банаховом (или счетно-нормированном) пространстве, то  $N$ -кратная дифференцируемость функции означает, что ее  $N$  производных ограничены по норме в этом пространстве (или соответственно ограничены все нормы счетно-нормированного пространства) равномерно по  $h$  при  $h \rightarrow 0$ .

Рассмотрим функцию  $e^i(\alpha, h)$  ( $\alpha \in \Gamma$ ) в окрестности точки  $h=0$ , принадлежащую  $C^\infty(\alpha, h)$ . Иначе говоря,

$$\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^i(\alpha, h) = \sum_{j=0}^{\infty} h^j \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e_j^i(\alpha) + O(h^\infty). \quad (1.13)$$

Слагаемое  $O(h^\infty)$  означает, что написанные ряды асимптотические при  $h \rightarrow 0$ . Пусть, далее,  $e^i(\alpha, 0) = e^i(\alpha)$  ( $i=1, \dots, N$ ), где  $e^i(\alpha)$  принадлежит разложению единицы по атласу  $\mathcal{H}$ . Заменим теперь в выражении  $K_{1/h, \Gamma}^{\nu, \alpha^0} \varphi(\alpha)$  функцию  $e^i(\alpha)$  на  $e^i(\alpha, h)$ . Получается семейство операторов, зависящих от  $h$ . Мы будем их обозначать через  $K_{1/h, \Gamma, h}^{\nu, \alpha^0}, \tilde{K}_{1/h, \Gamma, h}^{\nu, \alpha^0}, \tilde{\tilde{K}}_{1/h, \Gamma, h}^{\nu, \alpha^0}$ . Таким образом, запись  $K_{1/h, \Gamma, L}^{\nu, \alpha^0} \varphi(\alpha)$  не определяет вида  $e^i(\alpha, h)$  при  $h \neq 0$ . Заметим, что два члена указанного семейства равны, вообще говоря, лишь с точностью до  $O(h)$ :

$$\tilde{K}_{1/h, \Gamma, h}^{\nu, \alpha^0} \varphi(\alpha) = \tilde{\tilde{K}}_{1/h, \Gamma, h}^{\nu, \alpha^0} \varphi(\alpha) [1 + O(h)].$$

Аналогичным образом определяется оператор  $K_{A, \Gamma, R_z}^{\alpha^0, \Gamma}$ , где  $A$  — положительно определенный оператор,  $R_z$  — его резольвента  $(A - z)^{-1}$ . В этом случае в формулах (1.13) надо заменить  $h$  на  $R_z$ . При этом  $e^i(\alpha, R_z)$  и все их производные по  $\alpha$  будут ограниченными операторами в  $H$ , зависящими от параметра  $\alpha$ .

Аналогично, если  $\varphi(\alpha)$  — функция со значениями в счетно-нормированном пространстве, которое является пересечением банаховых пространств  $B_1, \dots, B_N, \dots, B_{i+1} \subseteq B_i$ , а  $A$  — оператор, удовлетворяющий в каждом из этих пространств условиям п. 4 § 1 гл. 1, то  $e^i(\alpha, R_z)$ , где  $R_z = (A - z)^{-1}$  являются непрерывными операторами в  $B^\infty$ , причем  $e^i(\alpha, 0)$  — числовые функции, являющиеся элементами разложения единицы.

**6. Квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши.** Пусть функции  $v(x, t), \varphi(\alpha)$  принадлежат  $C^\infty$ ,  $\varphi(\alpha)$  финитна и пусть решение  $\psi(x, t)$  уравнения Шредингера

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ -\frac{h^2}{2\mu} \frac{d}{dx^2} + v(x, t) \right] \psi = \hat{H} \psi \quad (1.14)$$

удовлетворяет начальному условию

$$\psi(x, 0) = K_{1/h, \Gamma, h}^{\nu, \alpha^0} \varphi(\alpha). \quad (1.14')$$

Тогда  $\psi(x, t)$  представимо в виде

$$\psi(x, t) = \tilde{K}_{1/h, \Gamma, t, h}^{\nu, \alpha^0} \varphi(\alpha), \quad \Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}, \quad (1.15)$$

где

$$\Gamma_0 = \Gamma, \quad \mu \dot{Q} = P, \quad \dot{P} = -\partial v / \partial Q,$$

$$\gamma = \gamma^0 - \frac{\pi}{2} \text{Ind } Q(\alpha^0; 0, t) + \frac{1}{h} \int_0^t \left\{ \frac{P^2(\alpha^0, \tau)}{2\mu} - v[Q(\alpha^0, \tau), \tau] \right\} d\tau.$$

**Пример.** Теперь мы покажем, какой вид имеет в конкретных случаях выписанная выше асимптотика решения уравнения Шредингера.

Предположим, что начальное условие для уравнения (1.14) имеет вид

$$\psi(x, 0) = \varphi(x) \exp \left\{ \frac{i}{h} f(x) \right\}, \quad (1.16)$$

где  $\varphi(x)$  — финитная функция с носителем  $[-1, 1]$ ,  $f \in C^2$ ,  $f(0) = 0$ . Это есть условие вида (1.14) при

$$\Gamma = \{q^0(\alpha) = \alpha, p^0(\alpha) = f'(\alpha)\}, \\ \alpha \in [-1-\varepsilon, 1+\varepsilon], \varepsilon > 0, \alpha^0 = 0, \gamma^0 = 0.$$

Канонический атлас состоит из одной неособой карты,  $e^1(\alpha, h) \neq 0$  при  $-1 \leq \alpha \leq 1$ .

Пусть пересечение прямой  $q=x$  с кривой  $\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}$  при всех  $x \in (x' - \delta, x' + \delta)$  не содержит особых точек; тогда оно состоит лишь из конечного числа точек  $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ . Пусть  $\gamma^j$  — индекс пути  $Q(\alpha^j; 0, t)$ , т. е. число нулей функции  $\partial Q(\alpha^j, \tau)/\partial \alpha^j$  при  $0 \leq \tau \leq t$ ,  $S(\alpha^j, t)$  — решение уравнения

$$dS/dt = \mu Q^2/2 - v(Q, t),$$

удовлетворяющее условию  $S(\alpha^j, 0) = f(\alpha^j)$ .

Поскольку  $f(\alpha) = \int_{t_0[0, \alpha]} p dq$  и

$$S(\alpha, t) = \int_{t_0[0, \alpha]} p dq + \int_0^t \left\{ \frac{P^2(\alpha, \tau)}{2\mu} - v[Q(\alpha, \tau), \tau] \right\} d\tau = \\ = \int_0^t \left\{ \frac{P^2(0, \tau)}{2\mu} - v[Q(0, \tau), \tau] \right\} d\tau + \int_{t_1[0, \alpha]} p dq,$$

то решение можно записать в виде

$$\psi(x, t) = \sum_{j=1}^k \exp \left\{ -\frac{i\pi\gamma^j}{2} \right\} \varphi[\alpha^j(x, t)] \left| \frac{\partial Q}{\partial \alpha^j}(\alpha^j(x, t), t) \right|^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{h} S[\alpha^j(x, t), t] \right\} + h\Phi(x, t, h), \quad (1.17)$$

где  $\Phi(x, t, h)$  ограничена при  $h \rightarrow 0$  в окрестности точки  $x=x'$ .

Этот результат может быть сформулирован еще двумя различными способами.

Пусть точка  $(x, t)$  не является фокальной ни для одной из экстремалей функционала

$$\Phi(q) = f(q^0) + \int_{q^0}^{x, t} \left\{ \frac{q^2}{2\mu} - v(q, t) \right\} dt, \quad (1.18)$$

т. е. все решения задачи

$$\mu \ddot{q} = -\frac{\partial v(q, t)}{\partial q}, \\ \mu \dot{q}(0) = f'[q(0)], \quad q(t) = x \quad (1.19)$$

удовлетворяют условию  $(dq(0)/dx)^{-1} \neq 0$ . Тогда задача (1.19) име-

ет лишь конечное число решений

$$q_1(\tau), \dots, q_k(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq t,$$

$$\psi(x, t) = \sum_{v=1}^k \exp \left\{ -\frac{i\gamma_v \pi}{2} \right\} \varphi[q_v(0)] \left| \frac{dq_v(0)}{dx} \right|^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{h} \Phi(q_v(\tau)) \right\} + O(h), \quad (1.20)$$

где  $\gamma_v$  — число фокальных точек на пути  $q_v(\tau)$  при  $0 < \tau \leq t$ .

Предположим, что решение уравнения  $\mu \ddot{X} = -\frac{\partial v}{\partial X}(X, t)$  удовлетворяет условиям

$$X(0) = x_0, \quad \mu \dot{X}(0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Рассмотрим множество  $M(x)$  решений уравнения  $X(x_0, t) = x$ . Если  $M(x)$  не содержит фокальных точек (т. е. точек, в которых  $\frac{\partial X(x_0, t)}{\partial x_0} = 0$ ), то оно состоит лишь из конечного числа точек  $x_0', \dots$

$\dots, x_0^k$ , которые являются функциями от  $x$  и  $t$ :  $x_0' = x_0'(x, t), \dots$

$\dots, x_0^k = x_0^k(x, t)$ . Пусть  $\gamma^j$  — индекс пути  $X(x_0^j, 0, t)$ , т. е. число нулей производной  $\frac{\partial X}{\partial x_0^j}(x_0^j, \tau)$  при  $0 \leq \tau \leq t$ ,  $S(x_0, t)$  — решение

$$\psi(x, t) = \sum_{j=1}^k \exp \left\{ -\frac{i\pi\gamma^j}{2} \right\} \varphi[x_0^j(x, t)] \left| \frac{\partial X}{\partial x_0^j}(x_0^j(x, t), t) \right|^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{h} S(x_0^j(x, t), t) \right\} + O(h). \quad (1.21)$$

Пусть теперь пересечение прямой  $q=x'$  с кривой  $\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}$  есть отрезок  $p' \leq p \leq p''$ . Следовательно, для  $p \in [p' - \varepsilon, p'' + \varepsilon]$  из  $P(\alpha, t) = p$  получаем  $\alpha = \alpha(p, t)$ . Тогда решение  $\psi(x, t)$  представимо в виде

$$\psi(x, t) = \frac{\exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \right\}}{\sqrt{2\pi h}} \int_{p' - \varepsilon}^{p'' + \varepsilon} \mathcal{F}(p) \exp \left\{ \frac{ip}{h} [x - Q(\alpha(p, t), t)] \right\} \left| \frac{\partial P}{\partial \alpha} \right. \times \\ \times [\alpha(p, t), t] \left. \right|^{-1/2} \exp \left\{ \frac{i}{h} S[\alpha(p, t), t] \right\} dp + \sqrt{h} \Phi(x, t, h), \quad (1.22)$$

где

$$F(p) = \begin{cases} 1, & p \in [p', p''], \\ 0, & p \notin [p' - \varepsilon, p'' + \varepsilon], \end{cases}$$

— гладкая функция,  $\gamma$  — число фокальных точек на какой-либо траектории  $Q(\alpha(p, t); 0, t)$  при  $p \in [p', p'']$ , а  $\Phi(x, t, h)$  равномерно ограничена при  $h \rightarrow 0$  в окрестности точки  $x=x'$ .



Заметим, что если  $p' = p''$ , а точка  $q = x'$  — особая, то интеграл (1.22) можно упростить, разложив подынтегральное выражение в ряд в окрестности точки  $p = p'$  и ограничившись первыми членами (см. [42]).

7. Асимптотика решения системы уравнений. В общем случае можно считать, что функция  $\varphi(\alpha)$  на многообразии  $\Gamma$  есть суммируемая по Бохнеру функция со значениями в банаховом пространстве  $B$ . (Впрочем, во всех конкретных случаях табл. 1  $\varphi(\alpha)$  есть просто вектор-функция, т. е.  $B$  конечномерно.)

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + hR(x, t)\psi + v(x, t)\psi, \quad (1.23)$$

где  $R(x, t)$  — ограниченная бесконечно дифференцируемая  $r \times r$ -матрица,  $v \in C^\infty$ . Пусть

$$\psi(x, 0) = K_{1/h, \Gamma, h}^{0, \alpha^0} \varphi(\alpha) e(\alpha), \quad (1.24)$$

где  $\varphi(\alpha)$  — финитная суммируемая функция,  $l(\alpha) = \{l_1(\alpha), \dots, l_r(\alpha)\}$  — вектор-функция,  $|l(\alpha)| = 1$ . Тогда

$$\psi(x, t) = K_{1/h, \Gamma, h}^{y, \alpha^0} \varphi(\alpha) \exp \left\{ i \int_0^t R[Q(\alpha, \tau), \tau] d\tau \right\} l(\alpha), \quad (1.25)$$

где выражение  $\exp \left\{ i \int_0^t R[Q(\alpha, \tau), \tau] d\tau \right\} l(\alpha)$  обозначает функцию  $f(\alpha, t)$  со значениями в  $B$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{df(\alpha, t)}{dt} = iR[Q(\alpha, t), t]f(\alpha, t), \quad f(\alpha, 0) = l(\alpha) \in B, \quad (1.26)$$

$\Gamma$ ,  $Q$ ,  $P$  определены выше; а

$$\gamma = \frac{1}{h} \int_0^t \left\{ \frac{\mu Q^2(\alpha^0, \tau)}{2} - v(Q(\alpha^0, \tau), \tau) \right\} d\tau - \frac{\pi}{2} \text{Ind } Q(\alpha^0; 0, t).$$

8. Поведение разрывов решений гиперболического уравнения. Чтобы получить асимптотическое разложение разрыва решения гиперболического уравнения, необходимо определить канонический оператор  $K_{A, \Gamma, h}^{y, \alpha^0}$  для случая, когда оператор  $A$  равен  $i \frac{\partial}{\partial \tau}$  (см. § 1 гл. 1), т. е. не является положительно определенным.

Рассмотрим теперь случай, когда оператор  $A$  отрицательно определен. Полагаем

$$K_{A, \Gamma}^{y, \alpha^0} = K_{-A, \Gamma}^{y, \alpha^0}.$$

Если оператор  $A$  не является знакоопределенным, то разложим пространство  $H$  на сумму  $H = H^+ + H^-$  таких, что сужение оператора  $A$  на  $H^+$  есть неотрицательно определенный оператор  $A^+$ ,

а сужение оператора  $-A$  на  $H^-$  — неотрицательно определенный оператор  $A^-$ .

Пусть  $\varphi(\alpha) = \varphi^+(\alpha) + \varphi^-(\alpha)$ , где

$$\varphi^+(\alpha) \in H^+, \quad \varphi^-(\alpha) \in H^-.$$

По определению положим

$$K_{A, \Gamma}^{y, \alpha^0} \varphi(\alpha) = K_{A^+, \Gamma}^{y, \alpha^0} \varphi^+(\alpha) + K_{A^-, \Gamma}^{y, \alpha^0} \varphi^-(\alpha).$$

Например, когда  $A = i \frac{d}{d\tau}$  — оператор в пространстве  $H = L_2[-\infty, \infty]$  функций от  $\tau$ ,  $\Gamma$  — прямая  $p=0$ ,  $\varphi(\alpha) = \delta(\tau)f(q)$ , то  $\delta(\tau) = \delta_+(\tau) + \delta_-(\tau)$ , где  $\delta_+(\tau) = \int_0^\infty i e^{i\tau} d\tau$ , а  $\delta_-(\tau) = \delta_+^*(\tau)$ . Поэтому

$$K_{i \frac{d}{d\tau}, \Gamma}^{y, \alpha^0} f(q) \delta(\tau) = 2f(x) \text{Re } e^{i\gamma} \delta_+(\tau).$$

Перейдем теперь к изучению поведения разрыва решения гиперболического уравнения.

Рассмотрим решение  $u(x, y, t)$  уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(x, t) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (1.27)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, y, 0) = \delta(y - y_0) \varphi(x), \quad u_t'(x, y, 0) = 0. \quad (1.28)$$

Пусть коэффициенты уравнения достаточно гладки,  $\varphi(x)$  финитна и имеет компактный носитель. Положим  $A = i\partial/\partial y$ . Тогда  $A$ -характеристическое уравнение имеет вид

$$\left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - c^2(x, t) \left( \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) = 0.$$

Оно распадается на два уравнения

$$\frac{\partial S^v}{\partial t} = - (1)^v c(x, t) \sqrt{\left( \frac{\partial S^v}{\partial x} \right)^2 + 1}, \quad v = 1, 2.$$

Пусть  $Q^v(\alpha, t)$ ,  $P^v(\alpha, t)$ ,  $S^v(\alpha, t)$  ( $v=1, 2$ ) — решения систем

$$\dot{p}^v = (-1)^v \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q}^v = (-1)^{v+1} \frac{\partial H}{\partial p}, \quad H = c(q, t) \sqrt{p^2 + 1},$$

$$\frac{\partial S^v}{\partial t} = (-1)^v \left[ H - p^v \frac{\partial H}{\partial p^v} \right] = (-1)^v \frac{c(q, t)}{\sqrt{p^2 + 1}}, \quad (1.29)$$

удовлетворяющие условиям

$$q^v(0) = \alpha, \quad p^v(0) = 0, \quad S^v(0) = 0.$$

\*) Об обобщенных функциях см. [9].

Решение задачи (1.27) — (1.28) можно представить в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{\nu=1}^2 K_i^{\nu, \alpha^0} \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Gamma_i^{\nu} \varphi(\alpha) \delta(y - y_0) + F(x, y, t),$$

где  $F(x, y, t)$  — ограниченная функция, а  $\Gamma_i^{\nu}$  ( $\nu=1, 2$ ) есть многообразие  $p=0$ ,  $\Gamma_i^{\nu}$  ( $\nu=1, 2$ ) — соответственно сдвинутое многообразие  $p=0$  вдоль траекторий системы (1.29),

$$\gamma^{\nu}(t) = \frac{1}{h} S^{\nu}(\alpha^0, t) + \frac{1}{2} \pi \text{Ind } Q^{\nu}[\alpha^0; 0, t].$$

Далее, если точка  $x, t$  не является фокальной ни для одной из траекторий  $Q^{\nu}(\alpha; 0, t)$  ( $\nu=1, 2$ ), то существует конечное число решений  $\alpha_j^{\nu}(x, t)$  ( $j=1, \dots, k^{\nu}$ ) уравнения

$$Q^{\nu}(\alpha, t) = x$$

и решение  $u(x, y, t)$  может быть представлено в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{\nu=1}^r \sum_{j=1}^{k^{\nu}} \frac{\varphi(\alpha_j^{\nu})}{\sqrt{\left| \frac{\partial Q^{\nu}(\alpha_j^{\nu}, t)}{\partial \alpha_j^{\nu}} \right|}} \text{Re exp} \left\{ -\frac{i\pi\gamma_j^{\nu}}{2} \right\} \delta_+(y - y_0) + S(\alpha_j^{\nu}, t) |_{\alpha_j^{\nu} = \alpha_j^{\nu}(x, t)} + F(x, y, t),$$

где  $F(x, y, t)$  — ограниченная функция.

Таким образом, мы видим, что если число фокальных точек на траектории  $Q^{\nu}(\alpha_j^{\nu}; 0, t)$  нечетно, то разрыв решения имеет вид полюса первого порядка; если же число фокальных точек четно, то разрыв имеет вид  $\delta$ -функции.

## § 2. Многомерный случай

Многомерный случай мы будем исследовать по тому же плану, что и одномерный.

**1. Топологические предложения.** Мы будем рассматривать гладкую  $n$ -мерную поверхность  $q=q(\alpha)$ ,  $p=p(\alpha)$ ,  $\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  в  $2n$ -мерном фазовом пространстве  $q, p$  или, точнее, гладкое  $n$ -мерное подмногообразие (возможно, открытое)  $\Gamma=\{q(\alpha), p(\alpha)\}$   $2n$ -мерного евклидова пространства, для которого выполняется условие (2.2) гл. 1 в каждой локальной системе координат  $\alpha$ . Такую поверхность мы будем называть лагранжевым подмногообразием  $\Gamma$ . Условие (2.2) гл. 1 означает, что  $\oint p dq$  на  $\Gamma$  локально не зависит от пути.

Множество  $M$  многообразия  $\Gamma$ , удовлетворяющее условию  $Dq/D\alpha=0$  (как обычно,  $Dq/D\alpha$  обозначает  $\det\|\partial q_i/\partial \alpha_j\|$ ), называется особым \*).

\* Относительно проектирования на плоскость  $\mathbb{R}_x^2$ .

Лагранжево подмногообразие  $\Gamma=\{q(\alpha), p(\alpha)\}$  обладает замечательным свойством, которое позволяет обобщить понятие канонического оператора на многомерный случай. Это свойство выражается следующей леммой о локальных координатах.

**Лемма 2.1.** Для любой точки  $\alpha^0$  на лагранжевом подмногообразии  $\Gamma$  существует поворот осей  $\tilde{q}=Aq$ ,  $\tilde{p}=Ap$  такой, что некоторая окрестность точки  $\alpha^0$  взаимно однозначно проектируется на одну из  $n$ -мерных координатных плоскостей вида  $\tilde{q}_1=\tilde{q}_2=\dots=\tilde{q}_k=\tilde{p}_{k+1}=\dots=\tilde{p}_n=0$ .

Заметим, что преобразование вида

$$\tilde{q}=Aq, \quad \tilde{p}=Ap, \quad (2.1)$$

где  $A$  — унитарная матрица, является каноническим. Напомним, что каноническим преобразованием является такое преобразование, которое оставляет инвариантным условие (2.2) гл. 1. Координаты вида  $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$ , в которых  $D\tilde{y}_k/D\alpha \neq 0$ , будем называть фокальными координатами точки  $\alpha$ . Например, в двумерном случае утверждение леммы означает, что если ранг  $\|\partial q_i/\partial \alpha_j\|$  равен нулю, то  $\det \left\| \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0$ . Если же ранг  $\|\partial q_i/\partial \alpha_j\|$  равен 1 и много-

образии  $\Gamma$  находится в общем положении, то проекция подмногообразия особенностей  $M$  на плоскость  $q$  может иметь вид кривой  $\gamma$ . В этом случае  $\tilde{q}_1$  ортогонально  $\gamma$ , а  $\tilde{q}_2$  направлено по касательной к  $\gamma$ . Утверждение леммы в данном случае означает, что отображение окрестности точки  $\alpha \in M$  на плоскость  $\tilde{p}_1, \tilde{q}_2$  взаимно однозначно.

Эта лемма может быть использована при выборе локальных координат (локальных карт лагранжева подмногообразия). Действительно, мы можем в качестве локальной системы координат окрестности точки  $\alpha \in \Gamma$  всегда вместо  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  брать фокальные координаты этой точки  $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$ . (Для произвольного подмногообразия это не имеет места.) Всякий компакт на подмногообразии  $\Gamma$  мы сможем покрыть конечным числом областей, каждая из которых взаимно однозначно проектируется на одну из координатных плоскостей вида  $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$ . В качестве локальных координат в такой области примем  $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$  (локальная карта  $\tilde{\Omega}_k$ ). В каждой локальной карте  $\tilde{\Omega}_k$  существует точка, в которой

$$\frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial \alpha_i} = \dots = \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i=1, \dots, n.$$

(При  $k=0$  это любая точка карты.)

Выбрав произвольно одну из таких точек, назовем ее центром локальной карты. Система локальных карт такого вида, покрывающих компакт  $R$ , составляет канонический атлас  $\mathcal{H}$  компакта  $R$ . Множество центральных точек обозначим через  $\mathcal{Z}$ .

Назовем точки, в которых якобиан  $J \begin{pmatrix} q_1, \dots, q_n \\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \end{pmatrix} \neq 0$ , особыми, так же как и карты, у которых  $k=0$ . Остальные точки и карты назовем особыми.

Введем индекс пути  $l[\alpha^1, \alpha^2]$  на лагранжевом многообразии. Рассмотрим лагранжево многообразие в общем положении относительно проектирования вдоль координат  $p$ . Оказывается, что в этом случае подмногообразие особенностей  $M$  имеет размерность не более  $n-1$  и ранг матрицы  $\|dq_i(\alpha)/d\alpha_j\|$  при  $\alpha \in M$  меньше  $n-1$  лишь для размерности, меньшей\*)  $n-2$ . Фиксируем точку  $\alpha^0 \in M$ . Произведем канонический поворот вида (2.1) и в качестве локальных координат будем рассматривать ее фокальные координаты  $\tilde{p}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n$ .

Иначе говоря, мы возьмем каноническую карту с центром в точке  $\alpha^0$ . Таким образом, локально  $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_1(\tilde{p}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n)$  на подмногообразии. Проведем в этой точке единичный вектор  $e$ , касательный к многообразию, параллельно  $\tilde{p}_1$  в направлении возрастания  $\partial \tilde{q}_1 / \partial \tilde{p}_1$ , т. е. изменения  $\partial \tilde{q}_1 / \partial \tilde{p}_1$  от отрицательных значений к положительным. Заметим, что в общем положении производная  $\partial \tilde{q}_1 / \partial \tilde{p}_1$  будет менять знак вдоль  $\tilde{q}_1$  при переходе через  $\alpha^0$ .

Таким образом, получаем нормальное поле на подмногообразии  $M$ .

Пусть точки  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$  — неособые. В качестве индекса (одномерного) пути  $l[\alpha^1, \alpha^2]$  мы будем брать индекс пересечения этого пути с подмногообразием  $M$ . Таким образом, если путь пересекает подмногообразие  $M$  в направлении вектора  $l$ , то значение индекса пути увеличивается на единицу. Если же он пересекает  $M$  в противоположном направлении, то значение индекса пути уменьшается на единицу.

Мы введем сейчас другое определение индекса пути, которое использует лишь тот факт, что в общем положении размерность  $M$  не превосходит  $n-1$ .

Пусть точки  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$ , принадлежащие одной и той же карте  $\tilde{\Omega}_k$ , являются неособыми. Мы определим индекс пути  $l[\alpha^1, \alpha^2]$  как разность индекса инерции матрицы

$$B_k = \left\| \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \tilde{p}_j} \right\|_{i,j \leq k} = \left\| \frac{\partial^2 S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial \tilde{q}_i \partial \tilde{q}_j} \right\|_{i,j \leq k}^{-1}$$

в точке  $\alpha = \alpha^1$  и индекса инерции той же матрицы в точке  $\alpha = \alpha^2$ .

Индекс пути  $l[\alpha^1, \alpha^2]$ , если  $\alpha^2$  — центральная точка карты  $\tilde{\Omega}'_k$ , а  $\alpha^1$  — неособая точка этой карты, равен индексу инерции матрицы  $B_k$  в точке  $\alpha^1$ .

\*) Если ранг матрицы  $\|dq_i(\alpha)/d\alpha_j\|$  равен  $n-r$ , то  $\dim M = n-r$ , если  $\Gamma$  находится в общем положении. В доказательстве теорем, однако, используется лишь тот факт, что  $\dim M \leq n-1$ . Все остальные свойства подмногообразия в общем положении используются лишь для иллюстрации.

Теорема 2.1.  $\text{Ind } l[\alpha^1, \alpha^2]$ , где  $l[\alpha^1, \alpha^2] \subset \tilde{\Omega}_k$ , не зависит от карты  $\tilde{\Omega}_k$ , т. е. если  $l[\alpha^1, \alpha^2]$  принадлежит одновременно  $\tilde{\Omega}_k$ ,  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$  — неособые, то

$$\text{Ind } \tilde{B}_{k_1}(\alpha^1) - \text{Ind } \tilde{B}_{k_1}(\alpha^2) = \text{Ind } \tilde{B}_{k_2}(\alpha^1) - \text{Ind } \tilde{B}_{k_2}(\alpha^2). \quad (2.2)$$

Произвольный путь  $l[\alpha^1, \alpha^2]$  можно покрыть картами. В каждой карте определен индекс отрезка пути\*). Индекс  $l[\alpha^1, \alpha^2]$  определяется в силу аддитивности индекса. Из теоремы 2.1 следует, что  $\text{Ind } l[\alpha^1, \alpha^2]$  не зависит от покрытия и не меняется при непрерывной деформации пути  $l[\alpha^1, \alpha^2]$  в путь  $l[\alpha^1, \alpha^2]$ , т. е.  $\text{Ind } l[\alpha^1, \alpha^2]$  является гомотопическим инвариантом.

Теорема 2.2. Индекс одномерного цикла есть целочисленный инвариант инфинитезимальных канонических преобразований.

Пусть  $q(t), p(t)$  — решение системы Гамильтона  $\dot{q} = H_p, \dot{p} = -H_q$ , удовлетворяющее условию  $q(0) = q^0(\alpha), p(0) = p^0(\alpha)$ , где  $q^0(\alpha), p^0(\alpha)$  определяют лагранжево подмногообразие  $\Gamma$ . Обозначим  $q(t) = Q(\alpha, t), p(t) = p(\alpha, t)$ . Подмногообразие  $\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), p(\alpha, t)\}$ , где  $t$  фиксировано, является лагранжевым подмногообразием фазового пространства. Всякий путь  $l[\alpha^1, \alpha^2] \subset \Gamma$  отобразится на путь  $l_t[\alpha^1, \alpha^2] \subset \Gamma_t$ . Определим индекс траектории  $Q(\alpha; 0, t)$ . Предполо-

жим вначале, что форма  $\sum_{i,j=1}^n H_{p_i p_j} z_i z_j$  строго положительна. Известно, что в этом случае число нулей якобиана  $DQ(\alpha, \tau)/d\alpha$  при  $0 < \tau \leq t$  с учетом их кратности конечно. Это число мы будем называть индексом траектории  $Q(\alpha; 0, t)$  (индекс по Морсу). Мы введем индекс пути и для произвольного гамильтониана  $H$ , не удовлетворяющего условию  $\sum_{i,j=1}^n H_{p_i p_j} z_i z_j > 0$ . Рассмотрим в  $(2n+1)$ -

мерном пространстве  $p, q, t$   $(n+1)$ -мерную пленку  $R_t$ , являющуюся объединением семейства  $n$ -мерных многообразий  $\Gamma_\tau$  при  $\tau$ , меняющемся от 0 до  $t$ . В каждой точке пленки  $R_t$  в силу леммы невырождена некоторая матрица типа  $B_k$ . Поэтому мы можем покрыть пленку  $R_t$  каноническими картами  $\tilde{\Omega}_k$  размерности  $n+1$ . Мы определим индекс одномерного пути, лежащего в пленке, в том числе и индекс траектории  $Q(\alpha; 0, t)$ . Рассмотрим отрезок пути  $l[\alpha^1, \alpha^2]$ , целиком принадлежащий одной канонической карте  $\tilde{\Omega}_k$  с локальными каноническими координатами  $\tilde{y}_{k,t}$ , концы которого являются неособыми точками. Аналогично тому, как это было сделано для лагранжева многообразия, определим индекс пути  $\text{Ind } l[\alpha^1, \alpha^2]$  как разность индексов инерции матрицы  $B_k$ , взятых последовательно в точках  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$ . Аналогично предыдущему определяется централь-

\*) При условии, что подмногообразие особенностей имеет размерность, меньшую, чем  $n$ ; например, многообразие  $\Gamma$  находится в общем положении по отношению к проекции. Этого достаточно, поскольку общего положения можно достичь сколь угодно малым каноническим поворотом.

ная точка карты и индекс пути  $\text{Ind} l[\alpha_k^1, \alpha_k^2]$ , где  $\alpha^3$  — неособая точка и  $\alpha_k^1$  — центральная точка, как индекс инерции матрицы  $B_k$  в точке  $\alpha^2$ .

Доказательство теорем об инвариантности будет дано в гл. 7. Там же мы определим индекс пути, соединяющего две произвольные точки  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$ . Для пленки имеет место аналог теоремы 2.1, и индекс любого пути в  $R_i$  определяется в силу аддитивности.

Мы докажем, что в случае, когда путь есть траектория  $Q(\alpha; 0, t)$  и условие  $\sum_{i,j=1}^n H_{p_i p_j} z_i z_j > 0$  при  $z_i \neq 0$  выполнено, так определенный индекс совпадает с индексом по Морсу.

**2. Определение канонического оператора.** Пусть на лагранжевом многообразии  $\Gamma$  задана финитная функция  $\varphi(\alpha) \in C^\infty$  со значениями в гильбертовом пространстве, носитель которой есть некоторый компакт  $R$ . Обозначим снова через  $\varphi(\alpha)$  класс, эквивалентный  $\varphi(\alpha)$  в фактор-пространстве  $S$ . Обозначим через  $\mathcal{H}$  канонический атлас, отвечающий конечному покрытию  $\{\Omega^i\}$  ( $i=1, \dots, N$ ) компакта  $R$ , а через  $e^i(\alpha)$  ( $i=1, \dots, N$ ) — разложение единицы, отвечающее покрытию  $\{\Omega^i\}$ . Напомним, что локальной карте  $\tilde{\Omega}_k^i$  отвечает  $\alpha = a^i(\tilde{y}_k)$ , где  $\tilde{y}_k = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n)$ . Обозначим через  $\sigma(\alpha)$  некоторую меру на многообразии  $\Gamma$ , а через  $D\sigma(\alpha)/D\tilde{y}_k$  — производную от нее по мере  $d\tilde{p}_1 \dots d\tilde{p}_k, d\tilde{q}_{k+1} \dots d\tilde{q}_n$ . В частности, если на  $\Gamma$  можно ввести глобальные координаты  $\alpha$ , то можно положить, например,

$$\sigma(\alpha) = d\alpha_1 \dots d\alpha_n, \quad \frac{D\sigma(\alpha)}{D\tilde{y}_k} = \frac{D\alpha}{D\tilde{y}_k} \equiv \det \left\| \frac{\partial \alpha_i}{\partial (\tilde{y}_k)_j} \right\|.$$

Обозначим через  $j(x)$  совокупность номеров всех тех карт атласа  $\mathcal{H}$ , которые содержат точки плоскости  $q=x$ . Пусть  $A$  — самосопряженный положительно определенный неограниченный оператор в гильбертовом пространстве  $H$ ,  $S$  — фактор-пространство  $L_2(\Gamma, H)/D(A)$ ,  $S'$  — фактор-пространство  $L_2(R^n, H)/D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \cap D(A)$ .

Определим канонический оператор  $K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0}$  из  $S$  в  $S'$ . Этот оператор можно рассматривать так же, как оператор из  $L_2(\Gamma, H)$  (пространство функций с интегрируемым квадратом на  $\Gamma$ , со значениями в  $H$ ) в фактор-пространство  $S'$ . Иными словами, мы определяем  $K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0} \varphi(\alpha)$  ( $\varphi \in L_2(\Gamma, H)$ ) с точностью до дифференцируемых функций, принадлежащих  $D(A)$ :

$$K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0} \varphi(\alpha) = e^{i\nu} \sum_{j \in j(x)} \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} \text{Ind} l[\alpha^0, \alpha_j^1] \right\} \Phi_A^{\tilde{p}_k} e^j(\bar{y}_k), \quad (2.3)$$

$$\left| D(\sigma)/D\tilde{y}_k \right|^{1/2} \exp \left\{ iA \left[ \int_{l[\alpha^0, q^1(\bar{y}_k)]} \tilde{p} d\tilde{q} - \sum_{i=1}^k \tilde{p}_i \tilde{q}_i [\alpha^1(\bar{y}_k)] \right] \right\} \varphi(a^j(\bar{y}_k)) \Big|_{q=x},$$

$\Phi_A^{\tilde{p}_k}$  — преобразование типа Фурье по первым  $k$  переменным функции, финитной по этим переменным с носителем  $R$ , т. е.

$$\Phi_A^{\tilde{p}_k} \psi(\tilde{y}_k) = \frac{e^{i\pi k/4} A^{k/2}}{(2\pi)^{k/2}} \int_R \exp \left\{ iA \sum_{j=1}^k \tilde{p}_j \tilde{q}_j \right\} \psi(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n) d\tilde{p}_1 \dots d\tilde{p}_k,$$

а  $\gamma$  — некоторая линейная функция оператора  $A$ . В случае отрицательно определенного  $A$  по определению полагаем

$$K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0} = \text{компл. сопряж.} (K_{-A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0}). \quad (2.4)$$

Если оператор  $A$  не является знакоопределенным и  $A^{-1}$  существует, то поступаем согласно п. 1.8 гл. 2.

**Теорема 2.3.** Для того чтобы канонический оператор  $K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0}$  не зависел от выбора канонического атласа, путей  $l[\alpha^0, \alpha_k^1]$  и от способа разбиения единицы, необходимо и достаточно, чтобы для точек спектра  $\lambda$  оператора  $A$  выполнялись соотношения \*)

$$\frac{2\lambda}{\pi} \oint p dq = l_k \pmod{4} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad k=1, \dots, k_0, \quad (2.5)$$

где интеграл берется по  $k$ -му базисному циклу подмногообразия  $\Gamma$ ,  $l_k$  — индекс этого цикла,  $k_0$  — одномерное число Бетти подмногообразия  $\Gamma$ .

Заметим, что условия (2.5) накладывают ограничения на значения величин  $l_k = \oint p dq$ . При  $k_0=2$  для существования такого  $A$ , чтобы выполнялось (2.5), достаточна несоизмеримость  $l_1$  и  $l_2$ .

Поскольку  $\oint p dq$  и  $l_k$  инвариантны относительно канонических преобразований, то, очевидно, указанное свойство оператора  $K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0}$  также сохраняется при канонических преобразованиях.

Если начальную точку  $\alpha^0$  атласа заменить на точку  $\tilde{\alpha}^0$  и одновременно величину  $\nu$  заменить на

$$\tilde{\nu} = \nu + A \int_{\alpha^0}^{\tilde{\alpha}^0} p dq - \frac{\pi}{2} \text{Ind} l[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0],$$

то канонический оператор останется неизменным.

**З а м е ч а н и е.** Для получения значений выражения  $K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0} \varphi(\alpha)$  в окрестности точки  $x=\bar{x}$  удобно пользоваться следующим специальным атласом  $\mathcal{H}(\bar{x})$ .

Пусть пересечение плоскости  $q=\bar{x}$  и  $\Gamma$  состоит из конечного числа точек  $\alpha^i(\bar{x})$  ( $i=1, \dots, i_0$ ). Выберем атлас  $\mathcal{H}(\bar{x})$  так, чтобы каждая из этих точек была центральной точкой некоторой карты  $\tilde{\Omega}_k^i(\bar{x})$ .

\*) Символ  $l \pmod{4}$  означает любое число вида  $l+4n$ , где  $n$  — целое.

Канонический оператор, отвечающий атласу  $\mathcal{H}(\bar{x})$  в окрестности точки  $x=\bar{x}$ , будет состоять из суммы  $i_0$  членов.

Заметим далее, что при выполнении условий (2.5)

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} \varphi(\alpha) = K_{A,\Gamma}^{\tilde{\gamma},\tilde{\alpha}^0} \varphi(\alpha), \quad \tilde{\gamma} = -\frac{\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0] + A \int_{\alpha}^{\tilde{\alpha}^0} p dq.$$

Условия (2.5) независимости оператора  $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$  от вида канонического атласа в пространстве  $S$  в силу теоремы 2.1 и инвариантности  $I_h$  сохраняются при сдвиге вдоль траекторий динамической системы Гамильтона:  $\Gamma \rightarrow \Gamma_1$ . Мы будем всегда полагать, что  $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$  не зависит от разбиения на канонические карты в пространстве  $S$ , т. е. что соотношения (2.5) выполнены.

Пусть теперь  $\varphi(\alpha)$  ( $\alpha \in \Gamma$ ) является бесконечно дифференцируемой функцией  $\alpha$  со значениями в некотором счетно-нормированном пространстве.

Рассмотрим линейные непрерывные операторы  $e^i(\alpha, h)$  ( $\alpha \in \Gamma$ ,  $h \in (0, 1)$ ) в этом пространстве, зависящие от параметров  $\alpha$  и  $h$ , а также от пути  $l[\alpha^0, \alpha]$  и бесконечно дифференцируемые по  $\alpha$  и  $h$  при  $h=0$ , т. е. предположим, что выполняются соотношения вида (1.13). Пусть при  $h=0$  эти операторы обращаются в финитные числовые функции  $e^i(\alpha, 0) = e^i(\alpha)$ , которые являются элементами разложения единицы по атласу  $\mathcal{H}$ .

Подобно п. 5 § 1 заменим в операторе  $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$  функции  $e^i(\alpha)$  на операторы  $e^i(\alpha, R_2)$ . Мы получим семейство операторов  $K_{A,\Gamma,R_2}^{\gamma,\alpha^0}$ ,  $\tilde{K}_{A,\Gamma,R_2}^{\gamma,\alpha^0}$ , зависящих от  $e^i(\alpha, R_2)$ .

Теорема 2.4. Пусть лагранжеву подмногообразию  $\Gamma$  сопоставлен канонический атлас  $\mathcal{H}$  с начальной точкой  $\alpha^0$  и некоторый оператор  $K_{A,\Gamma,R_2}^{\gamma,\alpha^0}$ . Пусть  $\tilde{\mathcal{H}}$  — другой канонический атлас подмногообразия  $\Gamma$  с начальной точкой  $\tilde{\alpha}^0$ . Тогда существует единственный оператор вида  $K_{A,\Gamma,R_2}^{\tilde{\gamma},\tilde{\alpha}^0}$  равный  $K_{A,\Gamma,R_2}^{\gamma,\alpha^0}$ . При этом

$$\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{2} \text{Ind } e[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0] + A \int_{e[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0]} p dq.$$

## ГЛАВА 3

### АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

#### § 1. Квазиклассическая асимптотика

Теорема 3.1. Пусть  $\Gamma$  — компактное лагранжево многообразие, инвариантное относительно динамической системы

$$\dot{x}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad v \in C^\infty,$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{v(x)}{\sqrt{|x|}^\alpha} = \infty, \quad \alpha > 0.$$

Тогда существуют собственные значения  $\lambda_N$  уравнения

$$\{-\Delta + \lambda_N [v(x) - E]\} \psi_N = 0, \quad \psi_N \in L_2[R^n],$$

удовлетворяющие соотношениям (2.5) \*).

Теорема 3.2. Пусть  $v(x, t)$  в уравнении Шредингера (1.6) гл. 1 —  $[n/2] + 4$  раза дифференцируемая функция,  $\varphi(\alpha)$  дважды дифференцируема.

Пусть решение  $\psi(x, t)$  уравнения (1.16) гл. 1 удовлетворяет начальному условию

$$\psi(x, 0) = K_{1/h, \Gamma}^{\alpha^0} \varphi(\alpha), \quad (1.1)$$

$$\Gamma = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad p = (p_1, \dots, p_n);$$

тогда решение  $\psi(x, t)$  имеет вид

$$\psi(x, t) = K_{1/h, \Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha) + z_h(x, t), \quad (1.2)$$

$$\gamma = -\frac{\pi}{2} \text{Ind } Q(\alpha^0; 0, t) + \frac{1}{h} \int_0^t \left\{ \frac{P^2(\alpha^0, \tau)}{2\mu} - v[Q(\alpha^0, \tau), \tau] \right\} d\tau,$$

\*) Таким образом, при  $E = E_n^0$ ,  $\lambda_n = 1/n$  удовлетворяются условия  $\oint_k p dq = 2\pi(m_k + l_k/4)h + O(h^2)$ ,  $k = (1, \dots, k_0)$ , где  $k_0$  — число Бетти многообразия  $\Gamma$ ,  $\oint_k$  — интеграл по  $k$ -му независимому циклу,  $l_k$  — его индекс,  $m_k$  — любые целые числа. Эти формулы носят название в физической литературе формул Бора — Зоммерфельда, или формул квантования старой квантовой теории. В физической литературе, однако, не были найдены значения констант  $l_k$ . Было известно лишь, что  $l_k \leq 4$  [17, 51].

Канонический оператор, отвечающий атласу  $\mathcal{H}(\bar{x})$  в окрестности точки  $x=\bar{x}$ , будет состоять из суммы  $i_0$  членов.

Заметим далее, что при выполнении условий (2.5)

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} \varphi(\alpha) = K_{A,\Gamma}^{\tilde{\gamma},\tilde{\alpha}^0} \varphi(\alpha), \quad \tilde{\gamma} = -\frac{\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0] + A \int_{\alpha}^{\tilde{\alpha}^0} p dq.$$

Условия (2.5) независимости оператора  $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$  от вида канонического атласа в пространстве  $S$  в силу теоремы 2.1 и инвариантности  $I_h$  сохраняются при сдвиге вдоль траекторий динамической системы Гамильтона:  $\Gamma \rightarrow \Gamma_i$ . Мы будем всегда полагать, что  $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$  не зависит от разбиения на канонические карты в пространстве  $S$ , т. е. что соотношения (2.5) выполнены.

Пусть теперь  $\varphi(\alpha)$  ( $\alpha \in \Gamma$ ) является бесконечно дифференцируемой функцией  $\alpha$  со значениями в некотором счетно-нормированном пространстве.

Рассмотрим линейные непрерывные операторы  $e^i(\alpha, h)$  ( $\alpha \in \Gamma$ ,  $h \in (0, 1)$ ) в этом пространстве, зависящие от параметров  $\alpha$  и  $h$ , а также от пути  $l[\alpha^0, \alpha]$  и бесконечно дифференцируемые по  $\alpha$  и  $h$  при  $h=0$ , т. е. предположим, что выполняются соотношения вида (1.13). Пусть при  $h=0$  эти операторы обращаются в финитные числовые функции  $e^i(\alpha, 0) = e^i(\alpha)$ , которые являются элементами разложения единицы по атласу  $\mathcal{H}$ .

Подобно п. 5 § 1 заменим в операторе  $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$  функции  $e^i(\alpha)$  на операторы  $e^i(\alpha, R_2)$ . Мы получим семейство операторов  $K_{A,\Gamma,R_2}^{\gamma,\alpha^0}$ ,  $\tilde{K}_{A,\Gamma,R_2}^{\gamma,\alpha^0}$ , зависящих от  $e^i(\alpha, R_2)$ .

Теорема 2.4. Пусть лагранжеву подмногообразию  $\Gamma$  сопоставлен канонический атлас  $\mathcal{H}$  с начальной точкой  $\alpha^0$  и некоторый оператор  $K_{A,\Gamma,R_2}^{\gamma,\alpha^0}$ . Пусть  $\tilde{\mathcal{H}}$  — другой канонический атлас подмногообразия  $\Gamma$  с начальной точкой  $\tilde{\alpha}^0$ . Тогда существует единственный оператор вида  $K_{A,\Gamma,R_2}^{\tilde{\gamma},\tilde{\alpha}^0}$  равный  $K_{A,\Gamma,R_2}^{\gamma,\alpha^0}$ . При этом

$$\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{2} \text{Ind } e[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0] + A \int_{\alpha^0}^{\tilde{\alpha}^0} p dq.$$

## ГЛАВА 3

### АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

#### § 1. Квазиклассическая асимптотика

Теорема 3.1. Пусть  $\Gamma$  — компактное лагранжево многообразие, инвариантное относительно динамической системы

$$\dot{x}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad v \in C^\infty,$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{v(x)}{\sqrt{|x|^\alpha}} = \infty, \quad \alpha > 0.$$

Тогда существуют собственные значения  $\lambda_N$  уравнения

$$\{-\Delta + \lambda_N [v(x) - E]\} \psi_N = 0, \quad \psi_N \in L_2[R^n],$$

удовлетворяющие соотношениям (2.5) \*).

Теорема 3.2. Пусть  $v(x, t)$  в уравнении Шредингера (1.6) гл. 1 —  $[n/2] + 4$  раза дифференцируемая функция,  $\varphi(\alpha)$  дважды дифференцируема.

Пусть решение  $\psi(x, t)$  уравнения (1.16) гл. 1 удовлетворяет начальному условию

$$\psi(x, 0) = K_{1/h, \Gamma}^{\alpha^0, \alpha^0} \varphi(\alpha), \quad (1.1)$$

$$\Gamma = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad p = (p_1, \dots, p_n);$$

тогда решение  $\psi(x, t)$  имеет вид

$$\psi(x, t) = K_{1/h, \Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha) + z_h(x, t), \quad (1.2)$$

$$\gamma = -\frac{\pi}{2} \text{Ind } Q(\alpha^0; 0, t) + \frac{1}{h} \int_0^t \left\{ \frac{P^2(\alpha^0, \tau)}{2\mu} - v(Q(\alpha^0, \tau), \tau) \right\} d\tau,$$

\*) Таким образом, при  $E = E_n^0$ ,  $\lambda_n = 1/n$  удовлетворяются условия  $\oint_k p dq = 2\pi(m_k + l_k/4)h + O(h^2)$ ,  $k = (1, \dots, k_0)$ , где  $k_0$  — число Бетти многообразия  $\Gamma$ ,  $\oint_k$  — интеграл по  $k$ -му независимому циклу,  $l_k$  — его индекс,  $m_k$  — любые целые числа. Эти формулы носят название в физической литературе формул Бора — Зоммерфельда, или формул квантования старой квантовой теории. В физической литературе, однако, не были найдены значения констант  $l_k$ . Было известно лишь, что  $l_k \leq 4$  [17, 51].

где  $Q(\alpha, t)$ ,  $P(\alpha, t)$  — решение уравнений Гамильтона

$$\mu \dot{Q}_i = P_i, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \sigma(Q, t)}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$Q(\alpha, 0) = q^0(\alpha), \quad P(\alpha, 0) = p^0(\alpha),$$

$$\Gamma_i = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\},$$

$a \int |z_h(x, t)|^2 dx \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 3.2 и пусть носитель  $R$  функции  $\varphi(\alpha)$  достаточно мал, настолько, что его образ  $R_i$  на  $\Gamma_i$  целиком лежит в одной из карт атласа  $\mathcal{H}$  с локальными координатами  $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$ . Пусть

$$\tilde{\Psi}(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_n) = \Phi_{1/h}^{\tilde{x}_k} \Psi(\tilde{x}, t),$$

т. е. мы рассматриваем решение  $\Psi(\tilde{x}, t)$  в  $p$ -представлении по переменным  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ . Тогда

$$\int |\tilde{\Psi}(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_n)|^2 d\tilde{p}_1 \dots d\tilde{p}_k \times \\ \times d\tilde{x}_{k+1} \dots d\tilde{x}_n \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_R \varphi^2(\alpha) d\alpha$$

и стремится к нулю вне этой области (ср. гл. 2, п. 3 § 1).

Обобщение понятия канонического оператора на случай, когда оператор  $A$  не является положительно определенным, и на случай, когда  $\varphi(\alpha)$  есть вектор-функция со значениями в гильбертовом или счетно-нормированном пространстве, проводится совершенно аналогично тому, как это было сделано в одномерном случае.

Рассмотрим уравнение (1.13) гл. 1 при  $a_1=0, a_2=1, B=0, A=1/h$ . В частности, при  $R=(\bar{\sigma}_2, H)$  оно совпадает с уравнением Паули (табл. 1, п. 5).

Теорема 3.3. Пусть решение  $\Psi(x, t)$  (функция со значениями в  $B$ ) уравнения (1.16) гл. 1 при  $a_1=0, a_2=1, B=0, A=1/h$  удовлетворяет начальному условию

$$\Psi(x, 0) = K_{1/h, \Gamma, h}^{\alpha^0} \varphi(\alpha) g(\alpha), \quad \Gamma = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$$

(уравнение Паули; см. табл. 1),  $\varphi(\alpha) \in C^\infty$  и финитна,  $g(\alpha)$  — единственный бесконечно дифференцируемый вектор. Тогда

$$\Psi(x, t) = K_{1/h, \Gamma, h}^{\alpha^0} \varphi(\alpha) \exp \left\{ i \int_0^t R[Q(\alpha, t), t] dt \right\} g(\alpha),$$

где  $\alpha^0$  — начальная точка на многообразии  $\Gamma$ ,

$$\gamma = -\frac{\pi}{2} \text{Ind } Q(\alpha^0, 0, t) + \frac{1}{h} S(\alpha^0, t),$$

$Q(\alpha, t)$ ,  $P(\alpha, t)$ ,  $S(\alpha, t)$  — решение системы Гамильтона

$$\dot{q}_i = H_{p_i}, \quad \dot{p}_i = -H_{q_i}, \quad \dot{S} = -H + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i,$$

$$q(0) = q^0(\alpha), \quad p(0) = p^0(\alpha), \quad S(0) = 0,$$

$$H(q, p, t) = [p + A(q, t)]^2 - \Phi_0(q, t),$$

$$\Gamma_i = (Q(\alpha, t), P(\alpha, t)),$$

$$R(Q, t) = ie(\bar{\sigma}_2, \bar{H}(Q, t)).$$

Для интеграла от квадрата модуля вектор-функции  $\Psi(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_n)$  при начальных условиях, локализованных в окрестности точки  $x_0$ , справедливо следствие теоремы 3.2. Однако для интеграла от каждой компоненты вектора  $\Psi$  следствие выполняться не будет. Для уравнения Паули это означает, что классической частице соответствует некий вектор (спиновая ось), который меняется вдоль траектории по закону

$$\bar{r}(\alpha, t) = \exp \left\{ i \int_0^t R[Q(\alpha, \tau), \tau] d\tau \right\} \bar{r}(\alpha, 0),$$

т. е. спиновая поляризация имеет классический предел.

## § 2. Асимптотика решений релятивистских уравнений

Рассмотрим уравнение (1.16) гл. 1 и предположим, что его коэффициенты принимают значения, приведенные в табл. 2 с 1-й по 4-ю строку (уравнения: волновое, Максвелла, Дирака, Клейна — Гордона — Фока).

Таблица 2

Уравнение	$\Phi(x, t)$	$c^2(x, t)$	$A(x, t)$	$\gamma$	$\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}$ $B_k(x, t)$	$R(x, t)$
Волновое	0	$c^2(x, t) > 0$	0	0	0	0
Максвелла	$c^2(x, t) > 0$	0	0	0	см. табл. 1	1
Дирака	$\Phi(x, t)$ потенциал	$c^2 = \text{const}$	$A(x, t) = A_1(x, t), \dots, A_n(x, t)$	$mc - \text{const}$	0	$\frac{e}{c} (\bar{\sigma}, \bar{H}) - i(\alpha, E)$
Клейна — Гордона — Фока	»	»	»	»	0	0

В этом случае уравнение (1.16) гл. 1 можно переписать в виде

$$\left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial t} - iA\Phi(x, t) \right]^2 - c^2(x, t) [(\nabla + iA A(x, t))^2 + A^2 \gamma^2] + \sum_{k=1}^n B_k(x, t) \frac{\partial}{\partial x_k} + iAR(x, t) \right\} \psi(x, t) = 0, \quad (2.1)$$

где  $\psi(x, t)$  — вектор-функция:  $\psi(x, t) = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ , а коэффициенты принимают одно из четырех значений табл. 2.

Характеристическое уравнение для (2.1) имеет вид

$$\left[ \frac{\partial S}{\partial t} - \Phi(x, t) \right]^2 - c^2(x, t) \{[\nabla S + A(x, t)]^2 + \gamma^2\} = 0. \quad (2.2)$$

Двум ветвям решения этого уравнения (относительно  $\partial S/\partial t$ )

$$\frac{\partial S^v}{\partial t} = H^v(x, \nabla S^v, t), \quad (2.3)$$

$$H^v(x, p^v, t) = \Phi(x, t) + (-1)^v c(x, t) \sqrt{|p^v + A(x, t)|^2 + \gamma^2}$$

соответствуют две ( $v=1, 2$ ) системы бихарактеристических уравнений

$$\dot{q}_i^v = - \frac{\partial H^v(q^v, p^v, t)}{\partial p_i^v}, \quad (2.4)$$

$$\dot{p}_i^v = \frac{\partial H^v(q^v, p^v, t)}{\partial q_i^v}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$q = (q_1, \dots, q_n), \quad p = (p_1, \dots, p_n), \quad v=1, 2,$$

$$\dot{S}^v = H^v = \sum_i^{\dot{p}_i^v} p_i^v \dot{q}_i^v.$$

Пусть  $q(0) = q^0(\alpha)$ ,  $p(0) = p^0(\alpha)$ ,  $S^v(0) = 0$ ,  $\Gamma\{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$  — лагранжево многообразие. Обозначим

$$Q^v(\alpha, t) = q^v(t), \quad P^v(\alpha, t) = p^v(t), \quad (2.5)$$

$$S^v(\alpha, t) = s^v(t), \quad \Gamma_t^v = \{Q^v(\alpha, t), P^v(\alpha, t)\}.$$

Имеет место следующая

**Теорема 3.4.** Пусть  $r^v(\alpha)$  ( $v=1, 2$ ) — две произвольные единичные бесконечно дифференцируемые вектор-функции, а  $\varphi^v(\alpha)$  ( $v=1, 2$ ) — произвольные финитные функции на  $\Gamma$  со значениями \* в  $H$ .

\*) Можно также брать  $\varphi(\alpha)$  со значениями в пространстве обобщенных функций в  $H$ . Если  $A = i \frac{\partial}{\partial \tau}$ , то  $\varphi^v(\alpha)$  может быть равно обобщенной функции  $\tau: \delta(\tau), \theta(\tau), \tau^+, \dots$

Существуют решения уравнения (2.1), которые могут быть представлены в виде

$$\psi^v(x, t) = K_{A, \Gamma, R_2}^{\gamma, \alpha^0} \frac{c[Q^v(\alpha, t), t] \left\{ \frac{|p^0(\alpha) + A[q^0(\alpha), 0]|^2 + \gamma^2}{|p^v(\alpha, t) + A[Q^v(\alpha, t), t]|^2 + \gamma^2} \right\}^{1/2} \varphi^v(\alpha) \times \exp \left\{ i \left[ \int_0^t \left\{ \sum_{k=1}^n P_k^v(\alpha, t) B_k[Q^v(\alpha, t), t] + R[Q^v(\alpha, t), t] \right\} dt \right] \right\} r^v(\alpha), \quad v=1, 2,$$

$$\gamma^v = \frac{1}{h} S^v(\alpha^0, t) - \frac{\pi}{2} \text{Ind } Q^v(\alpha^0, 0, t).$$

Коэффициенты ( $s \times s$ -матриц  $e_{ij}^v(\alpha)$ ) для  $\psi^v(x, t)$ , зависящие от  $t$  как от параметра, могут быть найдены после подстановки  $\psi^v(x, t)$  в уравнение (2.1) и приравнивания нулю коэффициентов при степенях  $R_2$ . Такая процедура возможна в силу теоремы 3.4.

Элементарным образом может быть найдено решение  $\psi(x, t)$  уравнения (2.1) как линейная комбинация  $\sum_{v=1}^2 c_v \psi^v(x, t)$  указанных решений  $\psi^v(x, t)$ , удовлетворяющее начальным условиям вида

$$\psi(x, 0) = K_{A, \Gamma, R_2}^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha) r(\alpha), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = 0$$

(при произвольных ограниченных  $s \times s$ -матрицах  $e_{ij}(\alpha)$ ), или

$$\psi(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = K_{A, \Gamma, R_2}^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha) r(\alpha)$$

(при произвольных ограниченных  $s \times s$ -матрицах  $e_{ij}(\alpha)$ ).

В пространстве  $S$  (т. е. в нулевом приближении по  $R_2$ ) в первом случае, например, нужно положить

$$\varphi^v(\alpha) = \Phi(q^0(\alpha), 0) + (-1)^v c(q^0(\alpha), 0) \sqrt{|p^0(\alpha) + A(q^0(\alpha), 0)|^2 + \gamma^2}$$

и взять полусумму решений  $\psi^v(x, t)$  ( $v=1, 2$ ).

### § 3. Примеры и следствия

Если  $H = L_2[1, \infty]$  — пространство функций от  $\omega$ , а  $A$  — оператор умножения на  $\omega$ , то поставленная задача в случае уравнений, волнового и Максвелла, является задачей о коротковолновой асимптотике решений этих уравнений. В частности, когда  $\Gamma_t$  при  $t=0$  есть плоскость  $p=p_0$ , параллельная координатной плоскости  $q$ , то решение  $\psi^1(x, t)$  соответствует случаю, когда в начальный момент имеется плоская волна импульса  $p_0$ . Подробно физический смысл такой постановки и связь ее с приближением геометрической оптики изложены в 5-м издании книги Куранта и Гильберта \*). Там речь идет о постановке и решении задачи в малом, т. е. при таких

\*) Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. — М.—Л.: Гостехиздат, 1951.



$t \leq t_0$ , при которых бихарактеристики не пересекаются и якобиан  $DX/Dx_0$  не обращается в нуль (ср. п. 1 § 1 гл. 1).

Из (2.6) следует переход от волновой оптики к геометрической в целом. В частности, для  $\psi(x, t)$  справедливо утверждение, аналогичное § 1, п. 1. Получается также, что поляризация решения уравнения Максвелла имеет коротковолновый предел, а значит, может наблюдаться в геометрооптическом приближении. Каждому геометрооптическому лучу нужно поставить в соответствие вектор  $e(t)$ , который меняется вдоль луча. Для электрического поля  $E$  вектор  $e$  имеет вид  $e_E = \sqrt{\mu/\epsilon} u$ , для магнитного  $H$   $e_H = \sqrt{\epsilon/\mu} u$ , где  $u$  — единичный вектор, удовлетворяющий уравнению (ср. [52, 37])

$$\frac{du}{dt} = -(u \operatorname{grad} \ln n) p(\alpha, t), \quad (3.1)$$

где  $n = c\sqrt{\mu\epsilon}$ . Эта формула справедлива для любого времени  $t$ . Таким образом, наличие фокальных точек не сказывается на классической поляризации: поляризация не меняется при переходе через фокальные точки.

Аналогичное утверждение справедливо и относительно поляризации спина уравнения Дирака (см. [6.63]). Два решения  $\psi^v(x, t)$  ( $v=1, 2$ ) в уравнении Дирака соответствуют электрону и позитрону [45, 47].

Начальные условия уравнения Дирака удовлетворяют соотношениям (1.24) п. 6 § 1 гл. 1. Эти соотношения накладывают ограничения на векторы  $\bar{r}^v(\alpha)$  ( $v=1, 2$ ) в формуле (2.6). Именно, оказывается, что вектор  $\bar{r}^v(\alpha)$  является нуль-вектором характеристической матрицы

$$C^v = (-1)^v \sqrt{(c\nabla S_0 + cA)^2 + m^2 c^4} \cdot I - \sum_{k=1}^3 \alpha_k \left( c \frac{\partial S}{\partial x_k} - cA_k \right) + \alpha_4 m c^2, \quad (3.2)$$

где  $I$  — единичная матрица.

Ранг матрицы  $C^v$  равен 2, поэтому существуют два линейно независимых вектора  $\bar{r}_i^v$  ( $i=1, 2$ ), которые она переводит в нуль.

Система векторов  $\bar{r}_i^v$  ( $i=1, 2, v=1, 2$ ) образует базис в четырехмерном векторном пространстве, поэтому любое решение уравнения Дирака, удовлетворяющее начальному условию  $\psi(x, 0) = K_{1/h, \Gamma, h}^{\alpha} \Phi(\alpha)$ , можно представить в виде линейной комбинации выражений (2.6), если положить в этой формуле

$$\bar{r}_i^v = r_v \quad (v=1, 2, i=1, 2).$$

Рассмотрим решение  $\psi^1(x, t)$  волнового уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$\psi(x, 0) = \Phi(x) \exp\{iAf(x)\} g, \quad A = i \frac{\partial}{\partial \tau};$$

$g$  — обобщенная функция.

Пусть начальное многообразие  $\Gamma = \{g = \alpha, p = \operatorname{grad} f(\alpha)\}$  удовлетворяет соотношению

$$|p^0(\alpha)|^2 c^2(\alpha, 0) = \operatorname{const}. \quad (3.3)$$

Пусть плоскость  $q = x$  пересекается с  $\Gamma$ , только в неособых точках. Тогда число этих точек конечно. Иначе говоря, точка  $(x, t)$  не является фокальной, и уравнение  $Q(\alpha, t) = x$  имеет конечное число решений  $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ . Поскольку они зависят от  $x, t$ , будем писать  $\alpha^i(x, t)$  ( $1 \leq i \leq k$ ).

В силу (2.6) решение  $\psi^1(x, t)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \psi^1(x, t) = & c(x, t) \sum_{i=1}^k \varphi[\alpha^i(x, t)] c^{-1}[\alpha^i(x, t), 0] \times \\ & \times \left| \det \left\| \frac{\partial Q}{\partial \alpha_e^i} [\alpha^i(x, t), t] \right\| \right|^{-1/2} \operatorname{Re} \left[ \exp \left\{ -\frac{i\pi\gamma^i}{2} + iAf[\alpha^i(x, t)] \right\} \right] \times \\ & \times \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m[\alpha^i(x, t), t] R_z^m \right] g, \quad (3.4) \end{aligned}$$

где  $\gamma^j$  — индекс по Морсу пути  $Q(\alpha^j, 0, t)$ , т. е. число нулей

$$J(\alpha^j, \tau) = \det \left\| \frac{\partial Q(\alpha^j, \tau)}{\partial \alpha_e^j} \right\| \quad \text{при } 0 < \tau < t.$$

После подстановки выражения (3.4) в волновое уравнение и приравнивания нулю коэффициентов при степенях  $R_z$  получим, что  $\varphi_m[\alpha^j(x, t), t]$  удовлетворяют уравнениям

$$iA_z \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = \frac{c(\alpha^j, 0)}{c[Q(\alpha^j, t), t]} \sqrt{|J(\alpha^j, t)|} \square_{\alpha^j, t} \frac{c[Q(\alpha^j, t), t]}{c(\alpha^j, 0) \sqrt{|J(\alpha^j, t)|}} \varphi_{m-1},$$

где  $\square_{\alpha^j, t}$  — оператор Д'Ламбера в «криволинейных» координатах  $\alpha^j, t$ .

Пусть  $g = \theta(\tau)$ ; тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} \gamma^j \right\} \exp \left\{ i f[\alpha^j(x, t)] \frac{d}{d\tau} \right\} \theta(\tau) \right] = \\ = \begin{cases} (-1)^{-\gamma^j/2} \theta[\tau - f[\alpha^j(x, t)]] & \text{при } \gamma^j \text{ четном,} \\ \frac{(-1)^{-(\gamma^j-1)/2}}{\pi} \ln |\tau - f[\alpha^j(x, t)]| & \text{при } \gamma^j \text{ нечетном.} \end{cases} \end{aligned}$$

Совершенно аналогичное утверждение справедливо относительно  $\psi^{(2)}(x, t)$ . Отсюда получается решение задачи (1.1) — (1.2) гл. 1 в целом в случае, когда точка  $(x, t)$  не является фокальной.

Если точка  $(x, t)$  — фокальная, то асимптотика решения по теореме 3.3 представляется в виде интеграла такой кратности, каков

дефект (порядок минус ранг) матрицы  $\left\| \frac{\partial Q_i(\alpha, t)}{\partial \alpha_j} \right\|$  в точке  $(x, t)$ . Рассмотрим здесь случай, когда многообразие  $\Gamma_t$  находится в общем положении и дефект равен 1.

Пусть задано волновое уравнение с коэффициентом, не зависящим от времени. Предположим, что носитель  $R$  функции  $\varphi(\alpha)$  столь мал, что его образ  $R_t$  принадлежит только одной карте атласа  $\mathcal{H}$ . Пусть

$$\psi(x, 0) = \varphi(x) \exp \{i\omega f(x)\}$$

и

$$c^2(x) |\text{grad } f(x)|^2 = \text{const.}$$

Пусть  $\tilde{p}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$  — локальные координаты канонической карты.

Обозначим через  $\tilde{p}'_1$  значение импульса  $\tilde{p}'$  в центральной точке карты.

Асимптотика при  $\omega \rightarrow \infty$  функции  $\psi'(x, t)$  имеет вид

$$\psi'(x, t) = \frac{e^{-i\gamma\pi/2} \sqrt{i\omega}}{\sqrt{2\pi}} c(x) \int_{\tilde{p}'_1 - \varepsilon}^{\tilde{p}'_1 + \varepsilon} F(\tilde{p}_1) \varphi(\alpha) \left| \frac{\partial \tilde{p}_1 \partial \tilde{x}_2 \dots \partial \tilde{x}_n}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_n} \right|^{-1/2} \times \\ \times c^{-1}(\alpha) \exp \{i\omega f(\alpha)\} \exp \{i\omega (\tilde{x}_1 - \tilde{X}_1(\alpha, t)) \tilde{p}_1\} d\tilde{p}_1 + O(1/\sqrt{\omega}),$$

где

$$\alpha = \alpha(\tilde{p}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, t)$$

находится из уравнений

$$\tilde{p}_1 = \tilde{P}_1(\alpha, t),$$

$$\tilde{x}_i = Q_i(\alpha, t), \quad n \geq i \geq 2,$$

функция  $F(\tilde{p}_1) = 1$  при  $\tilde{p}'_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq \tilde{p}_1 \leq \tilde{p}'_1 + \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $F(\tilde{p}_1) = 0$  при

$\tilde{p}_1 > \tilde{p}'_1 + \varepsilon$ ,  $\tilde{p}_1 < \tilde{p}'_1 - \varepsilon$  и является достаточно гладкой,  $\gamma$  — число нулей  $\det \left\| \frac{\partial Q_i(\alpha, \tau)}{\partial \alpha_j} \right\|$  вдоль полуинтервала  $0 < \tau \leq t$ .

В двумерном случае, например, при наших условиях ранг матрицы  $\left\| \frac{\partial Q_i(\alpha, t)}{\partial \alpha_j} \right\|$  не может быть меньше 1. Поэтому любая фокальная точка выражается с помощью одномерного интеграла. Например, если проекция многообразия особенностей на плоскость (каустика) имеет вид неособой главной кривой,  $x = x'$  — проекция центра карты, то оси  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{x}_2$  направлены соответственно по касательной и нормали к кривой в точке  $x'$ . Интеграл в этом случае можно упростить: разлагая подынтегральное выражение по степеням  $\varepsilon$ , мы придем к сумме функции Эйри и ее производной.

#### § 4. Система уравнений теории упругости

Рассмотрим систему уравнений теории упругости:

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \bar{u} + \mu \Delta \bar{u} + \text{grad} (\lambda \text{div } \bar{u}) + 2D \text{grad } \mu = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}, \\ \bar{u}(u_1, u_2, u_3),$$

где  $\lambda = \lambda(x) > 0$ ,  $\mu = \mu(x) > 0$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$  (коэффициенты Ламэ);  $\rho = \rho(x)$  (плотность среды) — заданные функции  $x$ , принадлежащие  $C^\infty$ ,

$$D = \|e_{ij}\| = \left\| \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\|$$

— тензор деформации.

Характеристический многочлен имеет четыре действительных корня. Им соответствуют следующие характеристические уравнения [30, 48]:

$$\frac{\partial S_1^\sigma}{\partial t} = (-1)^\sigma \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} |\text{grad } S_1^\sigma|, \quad \sigma = 1, 2,$$

$$\frac{\partial S_2^\sigma}{\partial t} = (-1)^\sigma \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} |\text{grad } S_2^\sigma|, \quad \sigma = 1, 2.$$

Эти уравнения в свою очередь определяют системы уравнений би-характеристик:

$$\frac{dx_\beta^\sigma}{dt} = (-1)^\sigma a_\beta(x_\beta^\sigma) \frac{\rho_\beta^\sigma}{|\rho_\beta^\sigma|}, \quad \sigma = 1, 2, \quad \beta = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{d\rho_\beta^\sigma}{dt} = (-1)^{\sigma+1} \text{grad } a_\beta(x_\beta^\sigma) |\rho_\beta^\sigma|,$$

$$x_\beta^\sigma = (x_{\beta 1}^\sigma, x_{\beta 2}^\sigma, x_{\beta 3}^\sigma), \quad \rho_\beta^\sigma = (\rho_{\beta 1}^\sigma, \rho_{\beta 2}^\sigma, \rho_{\beta 3}^\sigma),$$

$$a_\beta(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} & \text{при } \beta = 1, \\ \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} & \text{при } \beta = 2. \end{cases}$$

Пусть  $\Gamma_\beta^\sigma$  — некоторое трехмерное лагранжево многообразие в шестимерном фазовом пространстве:

$$\Gamma_\beta^\sigma = \{\dot{x}_\beta^\sigma(\alpha), \dot{\rho}_\beta^\sigma\}.$$

Положим в выписанной системе Гамильтона

$$x_\beta^\sigma(0) = \dot{x}_\beta^\sigma(\alpha), \quad \rho_\beta^\sigma(0) = \dot{\rho}_\beta^\sigma(\alpha)$$

и обозначим, как обычно,

$$x_{\beta}^{\sigma}(t) = X_{\beta}^{\sigma}(t, \alpha), \quad p_{\beta}^{\sigma}(t) = P_{\beta}^{\sigma}(t, \alpha), \quad \Gamma_{\beta}^{\sigma} = \{X_{\beta}^{\sigma}(t, \alpha), P_{\beta}^{\sigma}(t, \alpha)\}$$

образ лагранжева многообразия  $\Gamma_{\beta}^{\sigma}$  при свиге вдоль решений системы Гамильтона, отвечающей функции  $S_{\beta}^{\sigma}$ .

**Теорема 3.5.** *Существуют решения  $u_1^{\sigma}$  ( $\sigma=1, 2$ ) уравнения упругости, имеющие следующий вид:*

$$u_1^{\sigma} = K_{A, \Gamma_1^{\sigma}, R_2}^{\gamma^{\alpha}, \alpha^0} \varphi_1^{\sigma}(\alpha) \frac{\sqrt{\lambda [X_1^{\sigma}(\alpha, t)] + 2\mu [X_1^{\sigma}(\alpha, t)]}}{\rho(X_1^{\sigma}(\alpha, t))} P_1^{\sigma}(\alpha, t),$$

где  $\varphi_1^{\sigma}(\alpha) \in C^{\infty}$  ( $\sigma=1, 2$ ) — две произвольные финитные функции на  $\Gamma$  со значениями в  $H$ , а

$$\gamma^{\sigma} = -\frac{\pi}{2} \text{Ind} l[\alpha^0, \alpha_i^0] - A \int_{l[\alpha^0, \alpha_i^0]} \left( H dt - \sum_{i=1}^n P_i dq_i \right).$$

Пусть  $n^{\sigma}(\alpha, t)$  и  $v^{\sigma}(\alpha, t)$  — единичные векторы в трехмерном пространстве, ортогональные между собой и ортогональные вектору  $R_2^{\sigma}(\alpha, t)$ . Существуют решения уравнения упругости, имеющие следующий вид:

$$u_2^{\sigma} = K_{A, \Gamma_2^{\sigma}, R_2}^{\gamma^{\alpha}, \alpha_i^0} \varphi_2^{\sigma}(\alpha) \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho[X_2^{\sigma}(\alpha, t)]}} \times \\ \times \left\{ n^{\sigma}(\alpha, t) \cos \int_0^t \left( \frac{\partial n^{\sigma}(\alpha, t)}{\partial t}, v^{\sigma}(\alpha, t) \right) dt + \right. \\ \left. + v^{\sigma}(\alpha, t) \cdot \sin \int_0^t \left( \frac{\partial v^{\sigma}(\alpha, t)}{\partial t}, n^{\sigma}(\alpha, t) \right) dt \right\},$$

где

$$\gamma^{\sigma} = -\frac{\pi}{2} \text{Ind} l[\alpha^0, \alpha_i^0] - A \int_{l[\alpha^0, \alpha_i^0]} \left( H dt - \sum_{i=1}^n P_i dq_i \right),$$

а  $\varphi_2^{\sigma} \in C^{\infty}$  ( $\sigma=1, 2$ ) — любые финитные бесконечно дифференцируемые функции со значениями в  $H$ .

Обычно оператор  $A = i \frac{\partial}{\partial \tau}$ , а  $\varphi(\alpha)$  — некоторая «разрывная» функция  $\tau$  (например,  $\tau^+$ ,  $\delta(\tau)$ ,  $\theta(\tau)$  и т. д.), умноженная на финитную бесконечно дифференцируемую функцию  $\alpha$  со значениями на

прямой. Линейная комбинация решений  $u_i^{\sigma}$  в силу произвольности функции  $\varphi_i^{\sigma}$  ( $i=1, 2, \sigma=1, 2$ ) может удовлетворить произвольным начальным условиям вида

$$\bar{u}(x, 0) = K_{A, \Gamma_1, R_2}^{\alpha^0, \alpha^0} \bar{\varphi}_0(\alpha), \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x, 0) = K_{A, \Gamma_2, R_2}^{\alpha^0, \alpha^0} \bar{\psi}_0(\alpha).$$

## § 5. Стационарный случай

Пусть выполнено условие (3.3). Если мы положим  $A = i \frac{d}{dt}$ , то можно будет записать волновое уравнение в виде

$$c^2(x) \Delta \psi - A^2 \psi = 0. \quad (5.1)$$

Это также волновое уравнение по нашей классификации. Если положить  $A = \omega$ , то мы приходим к уравнению Гельмгольца. Переход от  $i \frac{\partial}{\partial t}$  к оператору умножения на  $\omega$  совершается с помощью преобразования Фурье.

Поскольку в физике постановка задачи для уравнения Гельмгольца восходит всегда к постановке задачи Коши для волнового уравнения, естественно говорить о решении уравнения Гельмгольца, индуцированном решением данной задачи Коши для волнового уравнения.

Аналогичная ситуация имеет место для стационарного и нестационарного уравнений Шредингера.

Таким образом, формально можно определить решение  $\psi(x, \omega)$  уравнения (5.1) при  $A = \omega$ , индуцированное задачей (1.1), (1.2) гл. 1, как преобразование Фурье по  $t$  ( $0 \leq t < \infty$ ) от решения  $u(x, t)$  задачи (1.1), (1.2) гл. 1 как от обобщенной функции  $t$ , принадлежащей некоторому пространству обобщенных функций  $K$ . Пространство  $K$  при этом определяется поведением функции  $u(x, t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда асимптотическое разложение  $u(x, t)$  по степеням  $R_2$  перейдет в асимптотическое разложение решения  $\psi(x, \omega)$  как обобщенной функции  $\omega$  пространства  $\bar{K}$  (по степеням  $1/\omega$ ). Не уточняя пространство  $K$  и пространства основных функций, мы можем сформулировать очевидное следствие из (2.6):

$$\psi(x, \omega) = c(x) K_{\omega, \Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \frac{\varphi(\alpha)}{c[x(\alpha)]} + \Phi(x, \omega),$$

где  $\Phi(x, \omega)$  такова, что  $\omega \Phi(x, \omega)$  принадлежит данному пространству обобщенных функций  $\bar{K}$ .

В точках, не являющихся фокальными, мы можем использовать формулу (3.4). Однако при  $t \rightarrow \infty$  число  $k^0$  может, вообще говоря, стремиться к  $\infty$ . Поэтому для улучшения сходимости ряда добавим под знак суммы член  $\left(1 - \frac{1}{1 + A^2}\right)^t$ . От этого первый член асимптотики не изменяется. Тогда преобразование Фурье по  $t$  первого члена

для функции Грина в нефокальных точках будет иметь вид

$$G(x, \xi) = c(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp \left\{ i\omega \left[ \int_0^{t^k} c^{-2}(Q(\alpha^k, \tau)) d\tau - \frac{i\pi\gamma^k}{2} \right] \right\}}{\sqrt{\left| \det \left\| \frac{\partial Q_i(\alpha^k, t^k)}{\partial \alpha_j^k} \right\| \right|}} c[Q(\alpha^k, 0)] \left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right)^k, \quad (5.2)$$

где  $Q(\alpha, t)$  — решение системы

$$\dot{Q}_i = P_i, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial c^{-2}(Q)}{\partial Q}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$P(\alpha, 0) = \alpha, \quad Q(\alpha, 0) = \xi, \quad |\alpha|^2 = c^2(\xi),$$

а  $\alpha^k = \alpha^k(x, \xi)$ ,  $t^k = t^k(x, \xi)$  находятся из уравнения  $X(\alpha_0^k, \xi, t^k) = x$ . По-видимому, эта асимптотика справедлива и в случае, когда  $c^{-2}(x) = E - v(x)$ , и мы имеем стационарное уравнение Шредингера (уравнение смешанного типа). На примерах можно показать, что полюса функции (5.2) (т. е. точки  $E = E_n^0$ , в которых ряд (5.2) расходится) и вычеты в этих точках определяют (приблизительно) не только собственные значения и собственные функции уравнения Шредингера, как это следовало бы ожидать, но и так называемые квазистационарные уровни и резонансные точки (ср. [24]).

Эта формула может быть получена другим методом, который дает более точную оценку. Кроме того, можно написать также и асимптотику функции Грина в фокальных точках. В настоящей работе мы, однако, не будем этого делать, поскольку это требует дополнительных конструкций.

Формула (5.2), точнее ее аналог для граничной задачи первого рода, является обобщением известного метода «отражений», применяемого при построении функций Грина для прямоугольника.

Задача о коротковолновом асимптотическом разложении решения уравнения (5.1), когда  $c^{-2}(x) = E - v(x)$ , эквивалентна задаче о квазиклассической асимптотике решения задачи на собственные функции оператора Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \psi + v(x) \psi = \lambda_k \psi, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (5.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx = 1.$$

Асимптотика здесь ищется по двум параметрам одновременно:

$$h \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (5.4)$$

причем так, что  $kh \rightarrow \text{const}$ . В случае, когда  $v(x)$  растет как полином, такая асимптотика совпадает с асимптотикой по одному параметру:  $k \rightarrow \infty$ .

Эта задача эквивалентна задаче об асимптотике решения уравнения (5.1) при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $c^{-2} = E - v(x)$  — эту последнюю задачу мы уже ставили в теореме 3.1. Мы сформулируем сейчас более общую теорему относительно решения задачи (5.3).

**Теорема 3.6.** Пусть семейство компактных канонических многообразий  $\Gamma(E)$  непрерывно зависит от параметра  $E \in \{E^0 - \varepsilon, E^0 + \varepsilon\}$  и является инвариантным относительно динамической системы

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial v(q)}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = p_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2\mu} + v(q), \quad (5.5)$$

$$H|_{\Gamma} = E,$$

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad q = (q_1, \dots, q_n),$$

где  $v(q)$  при  $|q| \rightarrow \infty$  стремится к  $\infty$  и является бесконечно дифференцируемой функцией. Пусть  $\mu(E)$  — собственная функция унитарного оператора сдвига динамической системы (5.5), отвечающего инвариантной мере  $\sigma(\alpha)$ , т. е.

$$i \frac{\delta}{\delta t} \chi(\alpha) = \mu(E) \chi(\alpha), \quad \frac{\delta}{\delta t} = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Тогда существуют собственные значения  $\lambda^k(\hbar)$  оператора Гамильтона

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + v(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (5.6)$$

такие, что  $\lambda^k(\hbar) - E^k + \mu(E^k)\hbar = O(\hbar^2)$ , где  $E^k$  — некоторый набор из  $[E^0 - \varepsilon, E^0 + \varepsilon]$ , зависящий от  $\hbar$  и такой, что на  $\Gamma(E^k)$  удовлетворяются условия

$$\frac{2}{\pi \hbar} \oint_i p dq = l_i \pmod{4}, \quad i = 1, \dots, i_0,$$

где  $i_0$  — число Бетти многообразия  $\Gamma(E^k)$ ,  $\oint_i$  — интеграл по  $i$ -му независимому циклу,  $l_i$  — его индекс.

Пусть  $E_{\Delta\lambda}$  — спектральная функция интервала  $\Delta\lambda$ ; тогда

$$\| [E_{\Delta\lambda} - 1] K_{1/\hbar, \Gamma(E^k)}^{0, \alpha^0} \chi(\alpha) \|_{L_2} = O(\hbar), \quad (5.7)$$

где  $\Delta\lambda = \{E^k - o(\hbar), E^k + o(\hbar)\}$ .

Изложенный ниже метод позволяет также найти приближения собственных значений с точностью до  $O(\hbar^N)$ , где  $N$  — любое целое число, и сузить в соотношении (5.7) интервал  $\Delta\lambda$  до величины  $O(\hbar^N)$ . Таким образом, если точка  $E^k$  — простая и интервал

$E^{\pm} O(\hbar^N)$  не содержит точек спектра, то получается асимптотика собственной функции  $\psi_{\hbar}$  оператора  $\hat{H}$ .

Рассмотрим уравнение Паули

$$\hat{H}_n \psi = \{(-i\hbar \nabla + A(x))^2 - \Phi_0(x) - i\hbar e(\bar{\sigma}_2, \bar{H}(x))\} \psi = E\psi. \quad (5.8)$$

Пусть  $\Gamma(E)$  удовлетворяет условиям предыдущей теоремы при

$$H(x, p) = [p + A(x)]^2 - \Phi(x). \quad (5.9)$$

Оператор вида

$$R = i \frac{d}{dt} + ie(\bar{\sigma}_2, \bar{H}) \quad (5.10)$$

самосопряжен в пространстве функций с интегрируемым квадратом на  $\Gamma(E)$  по инвариантной мере  $\sigma(\alpha)$ . Предположим, что  $\mu(E)$  — его собственное значение, а  $\chi(\alpha)$  — соответствующая ему собственная функция. (Заметим, что в случае, когда  $R = i \frac{d}{dt}$  (например, для уравнения Шредингера), то можно положить, в частности,  $\mu = 0$ ,  $\chi(\alpha) \equiv 1$ .)

**Теорема 3.6, а.** При высказанных предположениях выполняется теорема 3.6, если положить в (5.5)  $H(p, q) = (p + A(q))^2 - \Phi_0(q)$  и заменить оператор Гамильтона оператором

$$\hat{H}_n = [-i\hbar \nabla + A(x)]^2 - \Phi_0(x) - i\hbar e(\bar{\sigma}_2, \bar{H}(x)).$$

Мы видим, что для уравнения Паули к обычному оператору сдвига вдоль динамической системы добавляется матрица, характеризующая изменение спиновой поляризации вдоль траектории. Таким образом, спин в классической механике существует, но не сказывается на классической траектории\*). Однако при наличии спина необходимо изучать спектральные свойства не оператора сдвига вдоль траектории, а оператора (5.10), поскольку собственные функции и собственные значения оператора  $R$  отвечают задаче о классической частице, обладающей спином.

\*) О существовании классического предела у спиновой поляризации см. [54, 37, 66, 69]. В настоящей работе дано строгое доказательство этого факта, получена связь с оператором сдвига динамической системы и изучено поведение спина как вблизи фокусов, так и вдали от них.

## ГЛАВА 4

### УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

#### § 1. Уравнения в счетно-нормированных пространствах и задача многих тел в квантовой механике

Мы остановимся на наиболее общей и наиболее актуальной с точки зрения квантовой физики и химии задаче, когда в линейном уравнении с частными производными малый параметр стоит лишь при производных по некоторым выделенным переменным. Этому случаю отвечает задача, связанная с взаимодействием тяжелых и легких частиц, которая, например, имеет место в квантовой теории молекул или в теории столкновений.

Таким образом, дифференциальный оператор будет зависеть от двух систем переменных. Пусть переменные, при производных по которым стоит малый параметр (например, описывающий систему тяжелых частиц), имеют размерность  $n$ . Тогда в дифференциальном уравнении зависимость от остальных переменных мы можем записать в виде операторных коэффициентов, зависящих от выделенных переменных.

Например, уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + v(x_1, x_2) \psi = \lambda \psi, \quad (1.1)$$

где  $m_1 \gg m_2$ , мы представим в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + A(x_1) \psi = \lambda \psi,$$

где  $A(x_1)$  — оператор:

$$A(x_1) = -\frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + v(x_1, x_2),$$

зависящий от  $x_1$  как от параметра. Оператор  $A(x_1)$  неограничен. В случае, если  $v(x_1, x_2) \in C^\infty$ , мы можем сказать, что он переводит пространство  $W_2^k[\mathbf{R}]$  функций от  $x_2$  в  $W_2^{k-2}[\mathbf{R}]$ . Таким образом, если рассмотреть счетно-нормированное пространство  $W_2^\infty[\mathbf{R}]$ , то очевидно, что оператор  $A(x_1)$  переводит это пространство в себя.

Функция  $\psi(x_1, x_2)$  может быть рассмотрена как функция от  $x_1$  со значениями в пространстве  $W_2^\infty[\mathbf{R}]$  функций от  $x_2$ . В общем слу-

$E^{\pm} \pm O(\hbar^N)$  не содержит точек спектра, то получается асимптотика собственной функции  $\psi_{\pm}$  оператора  $\hat{H}$ .

Рассмотрим уравнение Паули

$$\hat{H}_n \psi = \{(-i\hbar \nabla + A(x))^2 - \Phi_0(x) - i\hbar e(\bar{\sigma}_2, \bar{H}(x))\} \psi = E\psi. \quad (5.8)$$

Пусть  $\Gamma(E)$  удовлетворяет условиям предыдущей теоремы при

$$H(x, p) = [p + A(x)]^2 - \Phi(x). \quad (5.9)$$

Оператор вида

$$R = i \frac{d}{dt} + ie(\bar{\sigma}_2, \bar{H}) \quad (5.10)$$

самосопряжен в пространстве функций с интегрируемым квадратом на  $\Gamma(E)$  по инвариантной мере  $\sigma(\alpha)$ . Предположим, что  $\mu(E)$  — его собственное значение, а  $\chi(\alpha)$  — соответствующая ему собственная функция. (Заметим, что в случае, когда  $R = i \frac{d}{dt}$  (например, для уравнения Шредингера), то можно положить, в частности,  $\mu = 0$ ,  $\chi(\alpha) \equiv 1$ .)

**Теорема 3.6, а.** При высказанных предположениях выполняется теорема 3.6, если положить в (5.5)  $H(p, q) = (p + A(q))^2 - \Phi_0(q)$  и заменить оператор Гамильтона оператором

$$\hat{H}_n = [-i\hbar \nabla + A(x)]^2 - \Phi_0(x) - i\hbar e(\bar{\sigma}_2, \bar{H}(x)).$$

Мы видим, что для уравнения Паули к обычному оператору сдвига вдоль динамической системы добавляется матрица, характеризующая изменение спиновой поляризации вдоль траектории. Таким образом, спин в классической механике существует, но не сказывается на классической траектории\*). Однако при наличии спина необходимо изучать спектральные свойства не оператора сдвига вдоль траектории, а оператора (5.10), поскольку собственные функции и собственные значения оператора  $R$  отвечают задаче о классической частице, обладающей спином.

\*) О существовании классического предела у спиновой поляризации см. [54, 37, 66, 69]. В настоящей работе дано строгое доказательство этого факта, получена связь с оператором сдвига динамической системы и изучено поведение спина как вблизи фокусов, так и вдали от них.

## ГЛАВА 4

### УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

#### § 1. Уравнения в счетно-нормированных пространствах и задача многих тел в квантовой механике

Мы остановимся на наиболее общей и наиболее актуальной с точки зрения квантовой физики и химии задаче, когда в линейном уравнении с частными производными малый параметр стоит лишь при производных по некоторым выделенным переменным. Этому случаю отвечает задача, связанная с взаимодействием тяжелых и легких частиц, которая, например, имеет место в квантовой теории молекул или в теории столкновений.

Таким образом, дифференциальный оператор будет зависеть от двух систем переменных. Пусть переменные, при производных по которым стоит малый параметр (например, описывающий систему тяжелых частиц), имеют размерность  $n$ . Тогда в дифференциальном уравнении зависимость от остальных переменных мы можем записать в виде операторных коэффициентов, зависящих от выделенных переменных.

Например, уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + v(x_1, x_2) \psi = \lambda \psi, \quad (1.1)$$

где  $m_1 \gg m_2$ , мы представим в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + A(x_1) \psi = \lambda \psi,$$

где  $A(x_1)$  — оператор:

$$A(x_1) = -\frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + v(x_1, x_2),$$

зависящий от  $x_1$  как от параметра. Оператор  $A(x_1)$  неограничен. В случае, если  $v(x_1, x_2) \in C^\infty$ , мы можем сказать, что он переводит пространство  $W_2^k[\mathbf{R}]$  функций от  $x_2$  в  $W_2^{k-2}[\mathbf{R}]$ . Таким образом, если рассмотреть счетно-нормированное пространство  $W_2^\infty[\mathbf{R}]$ , то очевидно, что оператор  $A(x_1)$  переводит это пространство в себя.

Функция  $\psi(x_1, x_2)$  может быть рассмотрена как функция от  $x_2$  со значениями в пространстве  $W_2^\infty[\mathbf{R}]$  функций от  $x_2$ . В общем слу-

чае мы не будем конкретизировать счетно-нормированное пространство, в котором действуют операторные коэффициенты, но во всех приложениях это пространство есть пространство векторов, нормы которых принадлежат  $W_2^\infty[\mathbb{R}^s]$ , где  $s$  — некоторое целое число.

Рассмотрим в качестве примера еще одну задачу

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left[ h^2 \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - v(x_1, x_2) \right] \psi = F(x_1, x_2, t, h), \quad (1.2)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x_1, x_2, h).$$

Предположим, что все заданные функции принадлежат  $C^\infty$  по всем аргументам, а выражения

$$\max_{\substack{0 \leq t \leq t_0 \\ 0 \leq h \leq 1}} \left( \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^j}{\partial x_i^j} F(x_1, x_2, t, h) \right|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2}, \quad (1.3)$$

$$\max_{0 \leq h \leq 1} \left( \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^j}{\partial x_i^j} \psi_0(x_1, x_2, h) \right|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \quad (1.4)$$

ограничены при  $k=1, 2, \dots$ . Это означает, что  $F(x_1, x_2, t, h)$  как функция аргументов  $x_1$  и  $x_2$  принадлежит  $W_2^\infty(\mathbb{R}^2)$  и непрерывна по  $t$  и  $h$ . Пространство функций со счетным числом норм вида (1.3) или вида (1.4) мы будем обозначать соответственно  $W_2^\infty[\mathbb{R}^2, C_2]$  и  $W_2^\infty[\mathbb{R}^2, C_1]$ .

Мы убедимся (см. гл. 5), что решение  $\psi(x_1, x_2, t, h)$  задачи (1.2) удовлетворяет условию

$$h\psi(x_1, x_2, t, h) \in W_2^\infty[\mathbb{R}^2, C_2].$$

Иначе говоря, найдется такое  $N$ , что если

$$F(x_1, x_2, t, h) \in W_2^N[\mathbb{R}^2, C_2], \quad \psi_0(x_1, x_2, h) \in W_2^N[\mathbb{R}^2, C_1],$$

то

$$h\psi(x_1, x_2, t, h) \in W_2^{m(N)}[\mathbb{R}^2, C_2],$$

причем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m(N) = \infty.$$

Мы здесь не выделяли переменных  $t$  и  $x_1$ , при производных по которым стоит малый параметр  $h$ . Однако мы можем рассматривать пространство  $W_2^N[\mathbb{R}^2, C_2]$  как пространство  $W_2^N[\mathbb{R}, C_2]$  функций от  $x_1, t, h$  со значениями в пространстве  $W_2^N[\mathbb{R}]$  функций от  $x_2$ .

Таким образом  $W_2^N[\mathbb{R}^2, C_2] \supseteq W_2^N[\mathbb{R}, C_2, W_2^N[\mathbb{R}]]$ .

Действительно,

$$\|F\|_{W_2^N[\mathbb{R}, C_2; W_2^N[\mathbb{R}]]} = \max_{\substack{0 \leq t \leq t_0 \\ 0 \leq h \leq 1}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^N \left\| \frac{\partial^i}{\partial x_i^i} F(x_1, x_2, t, h) \right\|_{W_2^N[\mathbb{R}]}^2 dx_1}. \quad (1.5)$$

Пусть  $\{B^N\}$  — некоторая последовательность банаховых пространств:

$$B^{N+1} \subset B^N, \quad N=1, 2, \dots,$$

определяющая счетно-нормированное пространство  $B^\infty$ .

В общем случае мы будем рассматривать пространство функций от  $x_1, x_2, \dots, x_n, t, h$ , принадлежащих  $W_2^\infty[\mathbb{R}^n, C_2]$ , со значениями в некотором абстрактном счетно-нормированном пространстве  $B^\infty$ , которое мы обозначим через

$$W_2^\infty[\mathbb{R}^n, C_2, B^\infty],$$

со счетным числом норм вида

$$\max_{\substack{0 \leq t \leq t_0 \\ 0 \leq h \leq 1}} \left( \sum_{\substack{i \leq n+1 \\ k \leq N}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} F(x_1, \dots, x_n, t, h) \right\|_{B^N}^2 dx \right)^{1/2}, \quad (1.6)$$

$$dx = dx_1 \dots dx_n, \quad x_{n+1} = t.$$

Аналогично, через  $C^\infty[\mathbb{R}^{n+1}, C_1, B^\infty]$  мы обозначим пространство со счетным числом норм вида

$$\max_{\substack{0 \leq t \leq t_0 \\ |x| < \infty \\ 0 \leq h \leq 1}} \sum_{\substack{i \leq n+1 \\ k \leq N}} \left\| \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} F(x, t, h) \right\|_{B^N}, \quad x_{n+1} = t. \quad (1.7)$$

Пусть на многообразии  $\Gamma$  задан некоторый набор базисных векторов  $\chi_\nu(\alpha)$  ( $\nu=1, \dots, r$ ), принадлежащих некоторому счетно-нормированному пространству  $B^\infty$  и бесконечно дифференцируемых по параметру  $\alpha$ , в том смысле, что производные этих векторов по  $\alpha$  вновь принадлежат  $B^\infty$ .

Канонический оператор  $K_{1/h, \Gamma, h}^{\nu, \alpha}$ , переводящий функцию вида

$$\sum_{\nu=1}^r \varphi_\nu(\alpha) \chi_\nu(\alpha)$$

со значениями в  $B^\infty$  в некоторую функцию от  $x_1, \dots, x_n$  со значениями в  $B^\infty$ , определяется обычным образом.

Напомним, что  $e^i(\alpha, 0) = e^i(\alpha)I$ , где  $I$  — единичная матрица в этом подпространстве. Функции  $\{e^i(\alpha)\}$  являются разложением единицы по каноническому атласу  $\mathcal{H}$ .

## § 2. Асимптотика решения задачи Коши уравнений с операторными коэффициентами

Мы будем изучать асимптотику решения уравнения (3.7) гл. 1. Рассмотрим в счетно-нормированном пространстве  $B^\infty$ , являющемся пересечением банаховых пространств  $B^1, B^2, \dots, B^N, \dots$  таких, что  $B^{i+1} \subseteq B^i$ , оператор

$$\mathcal{L}(p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, x_1, \dots, x_n, t, h),$$

зависящий от  $2n+3$  параметров и отображений  $B^\infty$  в себя. Мы предположим, что оператор  $\mathcal{L}$  бесконечно дифференцируем по всем этим параметрам в области  $p \in \Omega_p, x \in \Omega_x, 0 \leq t \leq T$  и что все его частные производные отображают  $B^\infty$  в себя.

1) Предположим, что  $B^1$  — гильбертово пространство.

Мы предположим, что существует собственное значение  $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$  операторов  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(p, p_{n+1}, x, t, 0)$  и  $\mathcal{L}_0^* = \mathcal{L}^*(p, p_{n+1}, x, t, 0)$ , зависящее от параметров  $p, p_{n+1}, x, t$ . Пусть кратность этого собственного значения одинакова для  $\mathcal{L}_0$  и  $\mathcal{L}_0^*$ , не зависит от параметров и либо конечна, либо  $\mathcal{L}_0 \equiv \mathcal{L}_0^* \equiv \lambda(p, p_{n+1}, x, t)$ . Пусть собственные функции операторов  $\mathcal{L}(p, p_{n+1}, x, t, 0)$  и  $\mathcal{L}^*(p, p_{n+1}, x, t, 0)$ , соответственно

$$\chi_1(p, p_{n+1}, x, t), \chi_2(p, p_{n+1}, x, t), \dots, \chi_r(p, p_{n+1}, x, t),$$

$$\chi_1^+(p, p_{n+1}, x, t), \chi_2^+(p, p_{n+1}, x, t), \dots, \chi_r^+(p, p_{n+1}, x, t),$$

отвечающие  $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$ , принадлежат  $B^\infty$  и

$$\det \|\chi_i^+ \chi_j\| \neq 0.$$

Из последнего неравенства следует, что можно выбрать  $\chi_i^+$  ( $i=1, \dots, r$ ) таким образом, что  $(\chi_i^+, \chi_j) = \delta_{ij}$ . Обозначим через  $P_\lambda$  проекционный оператор на собственное подпространство оператора  $\mathcal{L}_0$ , отвечающее  $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$ , а через  $P_\lambda^+$  — проекционный оператор на подпространство, натянутое на векторы  $\chi_1^+, \chi_2^+, \dots, \chi_r^+$ .

Предположим, что оператор

$$[\mathcal{L}(p, p_{n+1}, x, t, 0) - \lambda(p, p_{n+1}, x, t)] [1 - P_\lambda]^{-1} [1 - P_\lambda^+]$$

существует в  $B^\infty$  и определен всюду в  $B^\infty$ , а

$$\mathcal{L}(p, p_{n+1}, x, t, h) = \sum_{k=0}^m \Lambda_k(p, x, t, h) p_{n+1}^k.$$

Положим

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}\psi &= \widehat{\mathcal{L}}\left(-ih \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -ih \frac{\partial}{\partial x_n}, -ih \frac{\partial}{\partial t}, x_1, \dots, x_n, t, h\right)\psi = \\ &= \sum_{k=0}^m \Lambda_k\left(-ih \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -ih \frac{\partial}{\partial x_n}, x_1, \dots, x_n, t, h\right) \left(-ih \frac{\partial}{\partial t}\right)^k \psi, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где операторы  $\Lambda_k$  определяются формулой

$$\begin{aligned} \Lambda_k\left(-ih \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -ih \frac{\partial}{\partial x_n}, x_1, \dots, x_n, t, h\right)\psi &= \Lambda_k(\widehat{p}, x, t, h)\psi = \\ &= (2\pi\hbar)^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/\hbar} dp \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_k(p, x, t, h) e^{-ip\xi/\hbar} \psi(\xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (2.2)$$

2) Мы предположим, что решение задачи

$$\widehat{\mathcal{L}}\psi = h^r F, \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \psi|_{t=0} = h^{s_k} \psi_0, \quad k=0, \dots, m-1,$$

где  $r$  и  $s_k$  ( $k=0, \dots, m-1$ ) — некоторые фиксированные числа, а  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, t, h)$  и  $\psi_0 = \psi_0(x, h)$  — произвольные бесконечно дифференцируемые функции  $x$  и непрерывные функции  $h$  и  $t$  со значениями в  $B^\infty$ , существует и единственно в классе таких же функций\*). Наконец, предположим, что характеристическое (в смысле § 3 гл. 1) уравнение  $\lambda(p, p_{n+1}, x, t) = 0$  имеет действительный корень  $p_{n+1} = H(p, x, t)$  постоянной кратности и, следовательно,  $\frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}} \neq 0$ .

Пусть  $Q(\alpha, t), P(\alpha, t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ) — решения уравнений

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}, \quad i=1, \dots, n, \quad (2.4)$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$Q|_{t=0} = q^0(\alpha), \quad P|_{t=0} = p^0(\alpha), \quad (2.5)$$

принадлежат  $C^\infty$  и лежат соответственно в областях  $\Omega_x$  и  $\Omega_p$ .

Заметим, что из этих условий практически в конкретных квантовомеханических задачах нужно проверять лишь условие постоянной кратности и изолированности точки  $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$ . Из остальных условий нетривиальными для дифференциальных операторов являются: а) принадлежность собственных функций  $\chi_i, \chi_i^+$  пространству  $B^\infty$ ; б) существование решения  $\chi \in B^\infty$  уравнения

$$[\mathcal{L}(p, p_{n+1}, x, t, 0) - \lambda]\chi = F,$$

где  $F \in B^\infty$ ; в) существование и единственность решения уравнения (2.3). Эти условия проверяются для уравнений квантовой механики с помощью энергетических неравенств.

При этих предположениях справедлива следующая

\*) Этот класс функций  $F(x, t, h)$  есть пространство со счетным числом норм

$$\text{вида } \max_{\substack{x, 0 \leq t \leq T \\ 0 \leq n \leq 1}} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k F(x, t, h) \right\|_{B^k} \quad (k=1, 2, \dots).$$



Теорема 4.1. Пусть  $\Gamma_0 = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$  — лагранжево многообразие,  $\alpha^0$  — его начальная точка.

Для каждой финитной бесконечно дифференцируемой по  $\alpha$  и ограниченной при  $0 \leq h \leq 1$  вместе со всеми производными вектор-функции

$$\varphi_0(\alpha, h) = \{\varphi_{01}(\alpha, h), \dots, \varphi_{0r}(\alpha, h)\}$$

существует решение уравнения

$$\widehat{\mathcal{L}}\psi = 0, \quad (2.6)$$

представимое в виде

$$\psi = K_{1/h, \Gamma_1, h}^{\gamma, \alpha_i^0} \sum_{v=1}^r \varphi_v(\alpha, t, h) \chi_v [P(\alpha, t), Q(\alpha, t), t], \quad (2.7)$$

где  $\Gamma_1 = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}$ ,  $\alpha_i^0$  — начальная точка на многообразии  $\Gamma_1$ ,

$$\gamma = -\frac{\pi}{2} \text{Ind} l[\alpha^0, \alpha_i^0] + \frac{1}{h} \int_{l[\alpha^0, \alpha_i^0]} \left( -H dt + \sum_{i=1}^n p_i dq_i \right), \quad (2.8)$$

$a \varphi = \{\varphi_1(\alpha, t, h), \varphi_2(\alpha, t, h), \dots, \varphi_r(\alpha, t, h)\}$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} d \left( \sqrt{\frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}}} \varphi \right) &= \left\| - \left( \chi_v^+, \frac{d\chi_\mu}{dt} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}} - \sum_{i=1}^{n+1} \left( \chi_v^+, \left( \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial p_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} \right) \frac{\partial \chi_\mu}{\partial x_i} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_i \partial x_i} (\chi_v^+, \chi_\mu) - i \left( \chi_v^+, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} \chi_\mu \right) \right\|_{h=0} \left\| \left( \frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}} \right)^{-1/2} \varphi_1 \right. \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $x_{n+1} = t$ ,  $p = P(\alpha, t)$ ,  $x = Q(\alpha, t)$ , и начальному условию  $\varphi|_{t=0} = \varphi_0(\alpha, h)$ .

В случае, когда  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0^* = \lambda(p, p_{n+1}, x, t)$  в предположении, что  $\exp \left\{ i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} \Big|_{h=0} \right\}$  — отображение  $B^\infty$  в себя,  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{\frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}}} \frac{d}{dt} \sqrt{\frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}}} \varphi = \left[ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_j \partial x_j} - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} \Big|_{h=0} \right] \varphi.$$

Напомним, что равенство (2.7) справедливо с точностью до функций, бесконечно дифференцируемых по  $x$  и  $t$  и вместе со всеми своими производными имеющих порядок  $O(h^\infty)$ .

Укажем на следующее важное обобщение теоремы 4.1.

Пусть  $A$  — замкнутый оператор с плотной областью определения  $D(A) \subset B^i$  ( $i=1, 2, \dots$ ).

Пусть  $(1 + \varepsilon A)^{-1}$  существует и определен всюду в  $B^i$  ( $i=1, 2, \dots$ ), причем

$$\|(1 + \varepsilon A)^{-1}\|_{B^i} \leq 1, \quad i=1, 2, \dots,$$

при всех  $\varepsilon > 0$  и при всех  $\varepsilon$  чисто мнимых, и пусть  $A^{-1}$  существует.

Заменим формально в операторе  $\widehat{\mathcal{L}}$  параметр  $1/h$  на оператор  $A$ . Теорема 4.2. В предположениях теоремы 4.1 существует\*) решение уравнения

$$\widehat{\mathcal{L}} \left( -\frac{i}{A} \frac{\partial}{\partial x}, -\frac{i}{A} \frac{\partial}{\partial t}, x, t, A \right) \psi = 0,$$

представимое в виде

$$\psi = K_{A, \Gamma_1, (1 + \varepsilon A)^{-1}}^{\gamma, \alpha_i^0} \sum_{v=1}^r \varphi_v(\alpha, t) \chi_v [P(\alpha, t), Q(\alpha, t), t], \quad (2.10)$$

где  $\gamma$ ,  $\alpha_i^0$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\chi_v$ ,  $P(\alpha, t)$ ,  $Q(\alpha, t)$  определены в предыдущей теореме, а  $\varphi_v(\alpha, t)$  удовлетворяет уравнению (2.9) и начальному условию  $\varphi_v(\alpha, 0) = \varphi_v^0(\alpha)$ , где  $\varphi_v^0(\alpha)$  ( $v=1, \dots, r$ ) — произвольные финитные бесконечно дифференцируемые функции.

Из этой теоремы следуют все предыдущие результаты относительно асимптотики задачи Коши.

Положим в теореме 4.1  $m=1$ ,  $\Lambda_i \equiv 1$ , а  $\Lambda_0(p, x, t, h) = \mathcal{L}(p, x, t, h)$ . Пусть  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(p, x, t, 0)$  самосопряжен в  $B^1$ . Мы придем к следствию.

Теорема 4.1, а. В предположениях теоремы 4.1 решение задачи

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{L}(\hat{p}, x, t, h) \psi, \quad (2.11)$$

$$\psi|_{t=0} = K_{1/h, \Gamma_1, h}^{\gamma, \alpha_i^0} \sum_{v=1}^r \varphi_v^0(\alpha, h) \chi_v(p^0(\alpha), q^0(\alpha), 0), \quad (2.11a)$$

где

$$\varphi_v^0(\alpha, h) \in C^\infty[C_1],$$

может быть представлено в виде

$$\psi = K_{1/h, \Gamma_1, h}^{\gamma, \alpha_i^0} \sum_{v=1}^r \varphi_v(\alpha, t, h) \chi_v(P(\alpha, t), Q(\alpha, t), t), \quad (2.12)$$

где  $\alpha_i^0$ ,  $\Gamma_1$ ,  $P(\alpha, t)$ ,  $Q(\alpha, t)$  определены ранее, а

$$\varphi(\alpha, t, h) = \{\varphi_1(\alpha, t, h), \dots, \varphi_r(\alpha, t, h)\}$$

\*) Заметим, что в этом случае в (3.3) надо заменить  $h$  на  $1/A$ , а  $F$  и  $\varphi_0$ , очевидно, не зависят от  $h$  и принадлежат пространству функций со счетным числом

норм  $\max_{x, 0 \leq t \leq T} \left\| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^k F(x, t) \right\|_{B^k} \quad (k=1, 2, \dots)$ .

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left\| -\left(\chi_\nu, \frac{d\chi_\mu}{dt}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\chi_\nu, \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) \frac{\partial \chi_\mu}{\partial x_i}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_i} \delta_{\mu\nu} - i \left(\chi_\nu, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} \chi_\mu\right) \right\|_{h=0} \Bigg|_{\substack{p=P(\alpha, t) \\ x=Q(\alpha, t)}} \varphi \quad (2.13)$$

и начальному условию

$$\varphi_\nu(\alpha, t, h)|_{t=0} = \varphi_\nu^0(\alpha, h), \quad \nu = 1, \dots, r.$$

Из общей теоремы могут быть без труда получены асимптотические формулы (в целом) для решения гиперболических систем с осциллирующими или разрывными начальными данными.

В качестве примера рассмотрим слабо связанные гиперболические системы. Теорема 3.4 и все примеры гл. 1 также следуют из теоремы 4.2.

### § 3. Гиперболическая система

Рассмотрим слабо связанную гиперболическую по Петровскому систему вида

$$Lu = \frac{\partial^s u}{\partial t^s} + \sum_{k_1 + \dots + k_{n+1} \leq s} a_{k_1 \dots k_{n+1}}(x, t) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_{n+1}}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n} \partial t^{k_{n+1}}} = 0, \quad (3.1)$$

$k_{n+1} \neq s, \quad u = (u_1, \dots, u_r),$

где  $a_{k_1 \dots k_{n+1}}(x, t)$  при  $k_1 + \dots + k_{n+1} < s$  — матрицы порядка  $r$ . Введем следующие обозначения: через

$$\Lambda \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t \right)$$

обозначим главную часть оператора  $L$ :

$$\Lambda \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t \right) = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_{n+1} = s \\ k_{n+1} \neq s}} a_{k_1 \dots k_{n+1}} \frac{\partial^s}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n} \partial t^{k_{n+1}}} + \frac{\partial^s}{\partial t^s}, \quad (3.2)$$

а через

$$B \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t \right)$$

— матричный оператор вида

$$B \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t \right) = \sum_{k_1 + \dots + k_{n+1} = s-1} a_{k_1 \dots k_{n+1}}(x, t) \frac{\partial^{s-1}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n} \partial t^{k_{n+1}}}. \quad (3.3)$$

Мы предполагаем, что

1) корни  $H = H^\nu(x, p, t)$  многочлена  $\Lambda(p, H, x, t) = 0$  относительно  $H$  действительны и различны;

2) многочлен по  $p$ :  $\Lambda(p, 0, x, t)$  неотрицателен, причем, если  $|p| \geq \delta > 0$ , то  $\Lambda(p, 0, x, t) \geq \varepsilon > 0$ ;

3) коэффициенты уравнения принадлежат  $C^\infty$ .

Характеристическое уравнение для (3.1) имеет вид

$$\Lambda \left( \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial t}, x, t \right) = 0. \quad (3.4)$$

Корням

$$\frac{\partial S^\nu}{\partial t} = H^\nu \left( x, \frac{\partial S^\nu}{\partial x}, t \right), \quad \nu = 1, \dots, s, \quad (3.5)$$

этого уравнения отвечает  $s$  бихарактеристик, удовлетворяющих уравнениям Гамильтона вида (1.2) гл. 1 при  $\nu = 1, \dots, s$ .

**Теорема 4.3.** Пусть  $A$  — произвольный самосопряженный оператор гильбертова пространства  $H$ ,  $\varphi(\alpha)$  — произвольная финитная бесконечно дифференцируемая вектор-функция на многообразии  $\Gamma$  со значениями в  $H$ . При высказанных предположениях относительно гиперболического уравнения (3.1) существуют такие его решения  $u(x, t)$  вектор-функции со значениями в  $H$ , которые могут быть представлены в виде

$$u(x, t) = K_{A, \Gamma, R_2}^{\gamma^\nu, \alpha_i^0} \left\{ \left[ \frac{\partial \Lambda(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t)}{\partial H^\nu} \right]_{t=0}^{1/2} \times \right. \\ \times \left[ \frac{\partial \Lambda(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t)}{\partial H^\nu} \right]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \left[ \frac{\partial \Lambda(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t)}{\partial H^\nu} \right]^{-1} \times \right. \\ \left. \left. \times \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \Lambda(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t)}{\partial p_i^\nu \partial p_i^\nu} + \frac{\partial^2 \Lambda(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t)}{\partial H^\nu \partial t} - 2B(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t) \right] dt \right\} \varphi(\alpha), \quad (3.6)$$

где

$$\gamma^\nu = -\frac{\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \alpha_i^0] + A \int_{l[\alpha^0, \alpha_i^0]} \left( -H^\nu dt + \sum_{i=1}^n p_i dq_i \right),$$

$$p^\nu = P^\nu(\alpha, t), \quad q^\nu = Q^\nu(\alpha, t), \quad H^\nu = H^\nu[Q^\nu(\alpha, t), P^\nu(\alpha, t), t],$$

$\alpha_i^0$  — начальная точка атласа  $\mathcal{H}_i$ ,  $l[\alpha^0, \alpha_i^0]$  — путь, соединяющий точки  $\alpha^0$  и  $\alpha_i^0$  и принадлежащий пленке  $R_i$ .

Этот запас решений достаточно велик, и их линейная комбинация отвечает решению рассматриваемого уравнения (3.1), удовлетворяющему произвольным начальным условиям вида

$$\frac{\partial^{i-1} u}{\partial t^{i-1}} = K_{A, \Gamma, R_2}^{\alpha^0, \alpha_i^0} \varphi_i(\alpha), \quad i = 1, \dots, s,$$

где  $\Gamma^i$  ( $i=1, \dots, s$ ) — произвольные лагранжевы подмногообразия,  $\varphi_i(\alpha)$  — произвольные финитные бесконечно дифференцируемые вектор-функции на  $\Gamma^i$  со значениями в пространстве  $H$ . Сюда, в частности, включаются случаи осциллирующих и разрывных начальных условий, рассматриваемых в книге Куранта [19]. Это вытекает из следующего замечания.

Как и ранее, на обе части равенства в теореме 4.3 можно подействовать оператором  $A^N$ . При этом мы получим в правой и левой частях равенства обобщенные в смысле § 1 гл. 1 функции. Функция  $A^N u(x, t)$  будет являться обобщенным решением рассматриваемого уравнения. Поэтому, если  $A = i \frac{\partial}{\partial \tau}$ , а  $H$  — пространство  $L_2[\mathbb{R}]$

функций от  $\tau$ , то мы можем положить  $\varphi(\alpha) = g(\tau) f(\alpha)$ , где  $g(\tau)$  — обобщенная функция, равна  $N$ -й производной от непрерывной функции, а  $f(\alpha)$  — финитная функция со значениями на прямой.

В случае осциллирующих начальных условий надо положить  $H = L_2[\mathbb{R}]$  — пространству функций от  $\omega$  на отрезке  $[1, \infty]$ ,  $A = \omega$  — оператору умножения на  $\omega$ ,  $\varphi(\alpha) = g f(\alpha)$ ,  $g = \frac{1}{\omega} \in L_2[\mathbb{R}]$ . Тогда  $Ag = 1$ ,  $Au(x, t)$  есть функция, зависящая от параметра  $\omega$ , а

$$K_{A, \Gamma^i, R_2}^{\nu, \alpha^0} = K_{\omega, \Gamma^i, 1/\omega}^{\nu, \alpha^0}.$$

#### § 4. Асимптотика собственных значений уравнения с операторными коэффициентами

Рассмотрим пространство  $B^\infty$ , где  $B^1$  гильбертово. Рассмотрим оператор

$$\hat{L} = L \left( x_1, \dots, x_n, -ih \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -ih \frac{\partial}{\partial x_n}, h \right),$$

введенный в § 2. При этом дополнительно мы полагаем, что этот оператор не зависит от  $t$ . Предположим, что этот оператор самосопряжен в гильбертовом пространстве  $L_2[B^1] = W_2^0[\mathbb{R}^n, B^1]$  функций от  $x_1, \dots, x_n$  со значениями в  $B^1$  и что условия 1), наложенные на этот оператор в § 2, выполнены. Сверх того, мы предположим, что спектр оператора  $\hat{L}$  не является предельным при  $\lambda = E^0$ .

Предположим, что существует семейство компактных замкнутых лагранжевых многообразий  $\Gamma(E)$  без края при

$$E \in \mathcal{E} = (E^0 - \varepsilon, E^0 + \varepsilon),$$

где  $\varepsilon > 0$ , такое, что

- 1)  $\Gamma(E)$  непрерывно зависит от  $E$ ;
- 2)  $H(p(\alpha), q(\alpha)) = E$  при  $\alpha \in \Gamma(E)$  ( $H(p, q)$  — гамильтониан оператора  $L$ );
- 3)  $\Gamma_i(E) = \Gamma(E)$ .

В качестве меры  $\sigma(\alpha)$  на многообразии  $\Gamma(E)$  мы возьмем меру, инвариантную относительно сдвигов вдоль траекторий гамильтоновой системы. В пространстве функций с интегрируемым квадратом

на  $\Gamma$  по этой мере оператор \*)

$$R = i \frac{d}{dt} + i \left\| \left( \chi^\nu, \frac{d\chi^\mu}{dt} \right) + \left( \chi^\nu, \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L^0}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] \frac{\partial \chi^\mu}{\partial p_i} \right) \right\| - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_i} \delta_{\mu\nu} - i \left( \chi^\nu, \frac{\partial L}{\partial h} \right) \Bigg|_{h=0} \chi^\mu$$

на многообразии  $\Gamma(E)$  самосопряжен. Предположим, что  $\mu(E)$  — его собственное значение, а  $\xi(\alpha)$  — соответствующая ему собственная функция.

Теорема 4.4. Пусть  $\{E^i\} \subset \mathcal{E}$  ( $i=1, \dots, i_0$ ) — зависящее от  $h$  множество из  $\mathcal{E}$  такое, что на  $\Gamma(E^i)$  удовлетворяется система уравнений

$$\frac{2}{\pi h} \oint_k p(\alpha) dq(\alpha) = l_k \pmod{4}, \quad 1 \leq k \leq k_0, \quad (4.1)$$

где  $\oint_k$  обозначает интеграл по  $k$ -му базисному циклу многообразия  $\Gamma(E^i)$ ,  $l_k$  — индекс этого базисного цикла,  $k_0$  — одномерное число Бетти многообразия  $\Gamma(E^i)$ . Тогда существует подпоследовательность  $\lambda^i$  собственных значений оператора  $\hat{L}$  такая, что

$$\lambda^i = E^i - h\mu(E^i) + O(h^2), \quad (4.2)$$

а спектральная функция  $E_{\Delta\lambda}$  интервала

$$\Delta\lambda = \{\lambda^i - o(h), \lambda^i + o(h)\}$$

оператора  $\hat{L}$  удовлетворяет соотношению

$$\left\| [1 - E_{\Delta\lambda}] K_{1/\alpha, \Gamma(E^i), h}^{\nu, \alpha^0} \sum_{\nu=1}^r \xi_\nu(\alpha) \chi^\nu(\alpha) \right\|_{L_2[\mathbb{R}^n, B^1]} = O(h). \quad (4.3)$$

Заметим, что в случае, когда  $r=1$ , а  $\chi(x, p)$  действительна, задача сводится к отысканию собственных функций и собственных значений оператора сдвига вдоль гамильтоновой системы (или оператора  $i \frac{d}{dt}$  на многообразии  $\Gamma$ . Эта задача широко изучена \*\*). Кроме того, мы можем взять в этом случае  $\mu=0$ ,  $\xi(\alpha) = 1$ .

В качестве примера рассмотрим оператор Гамильтона вида

$$H = -\frac{h^2}{2M} \Delta_1 - \frac{h^2}{2M} \Delta_2 + \frac{e}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|} + \hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|), \quad (4.4)$$

\*) Напомним, что скалярные произведения здесь берутся в  $B^1$ .

\*\*\*) В противном случае см. [1].

где

$$\bar{r}_i = (x_i, y_i, z_i), \quad \bar{r}_2 = (x_2, y_2, z_2),$$

$$\Delta_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^2, \quad i = 1, 2,$$

$e$  — заряд, а  $\hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$  — оператор Гамильтона общего вида для системы  $N$  электронов в поле двух неподвижных протонов (см., например, [48]).

Оператор Гамильтона  $\hat{H}$  отвечает двухатомной молекуле. Пусть  $E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$  — некоторое собственное значение оператора  $\hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$  (так называемый электронный терм). Мы предположим, что функция

$$u(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) = \frac{e}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|} + E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$$

имеет минимум (т. е. терм  $E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$  — устойчивый (см., например, [20]). Для простоты будем полагать, как это обычно имеет место, что этот минимум единствен. (Это условие несущественно.)

Будем искать асимптотику собственных значений оператора  $\hat{H}$ , расположенных вблизи точки  $\lambda^0$ , лежащей между минимумом и абсолютным максимумом функции  $u(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ . В этом промежутке спектр  $\hat{H}$  дискретен (см. [10]).

Мы предположим, что кратность собственного значения  $E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$  остается постоянной в области  $(r_1 - r_2) \in \Omega$ , для которой  $u(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) \leq \lambda^0$ , т. е. что в этой области терм  $E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$  не пересекается ни с каким другим. Пусть эта кратность равна 1. Нетрудно доказать, что при этих ограничениях оператор  $\hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$  удовлетворяет условиям 1), если в качестве  $B^\infty$  взять  $W_2^\infty[\mathbb{R}^{3N}]$ , а оператор  $\hat{H}$  — условиям теоремы 4.4.

Обозначим через  $a$  линейные размеры молекулы.

Перейдем в (4.4) к безразмерным переменным. Положим  $\rho_1 = r_1/a$ ,  $\rho_2 = r_2/a$  и разделим (4.4) на  $V_0 = \min_{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2| \in \Omega} E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ . Мы по-

лучим оператор

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{v^2}{2} \Delta_1 - \frac{v^2}{2} \Delta_2 + \frac{\alpha_1}{|\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2|} + \hat{\mathcal{H}}_N[|\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2|, \alpha_1, \alpha_2],$$

где

$$v = \frac{h}{a\sqrt{MV_0}}, \quad \alpha_1 = \frac{e}{aV_0}, \quad \alpha_2 = \frac{h}{a\sqrt{mV_0}}$$

( $m$  — масса электрона). Здесь  $\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial \rho_{\sigma i}^2}$  ( $\sigma = 1, 2$ ) снова обозначена

через  $\Delta_\sigma$ . Поскольку для реальных молекул  $v \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ , а  $\alpha_1$  и  $\alpha_2 \sim 1$ , можно рассматривать  $v$  как малый параметр и искать асимптотику уравнения

$$\hat{\mathcal{H}}\psi_n = \lambda_n \psi_n$$

при  $v \rightarrow 0$ . Гамильтониан оператора  $\hat{\mathcal{H}}$  имеет вид

$$\frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{\alpha_1}{\rho_1 - \rho_2} + \frac{E(a(\rho_1 - \rho_2))}{V_0}.$$

Ему отвечает следующее уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\left\{ \frac{1}{2} (\nabla_1 S)^2 + \frac{1}{2} (\nabla_2 S)^2 \right\} + \frac{\alpha_1}{|\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2|} + \frac{E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)}{V_0} = \lambda^0. \quad (4.5)$$

Введем новые переменные

$$\bar{r} = \bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2, \quad \bar{R} = \bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2.$$

Мы получим, обозначая через  $\nabla_{\bar{R}}$  и  $\nabla_{\bar{r}}$  операторы  $\nabla$  по переменным  $\bar{R}$  и  $\bar{r}$  соответственно,

$$\frac{1}{2} \{ (\nabla_{\bar{R}} S)^2 + (\nabla_{\bar{r}} S)^2 \} + \frac{\alpha_1}{r} + \frac{E(ar)}{V_0} = \lambda^0.$$

Таким образом, переменные разделяются, и, полагая  $S = S(\bar{r})$ , получаем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{2\alpha_1}{r} + \frac{2E(ar)}{V_0} = 2\lambda^0.$$

Нетрудно убедиться, что условия (4.1) в данном случае будут иметь вид

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{2 \left[ \lambda^0 - \frac{\alpha_1}{r} - \frac{E(ar)}{V_0} \right] - \alpha_0^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = \sqrt{\alpha_0^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \theta}},$$

$$J_\varphi = 2\pi\alpha_\varphi = 2\pi m, \quad J_\theta = \oint \sqrt{\alpha_0^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta = 2\pi(\alpha_0 - \alpha_\varphi) = \pi(2l+1),$$

$$J_r = 2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2 \left[ \lambda^0 - \frac{\alpha_1}{r} - \frac{E(ar)}{V_0} \right] - \frac{(J_\theta + J_\varphi)^2}{4\pi^2 r^2}} dr = \pi(2n+1),$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — нули подкоренного выражения.

Таким образом,

$$\lambda_k = \lambda_k^0 + O(v^2),$$

где  $\lambda_k^0$  удовлетворяет уравнению

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2\lambda_k^0 - \frac{2\alpha_1}{r} + \frac{2E(ar)}{V_0} - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 v^2}{r^2}} dr = \pi \left(k + \frac{1}{2}\right) v.$$

Заметим, что известный метод Борна — Опенгеймера (адиабатический метод) может быть применен к решению поставленной задачи лишь при дополнительном условии  $k \sim 1$  (см. [48]).

## ГЛАВА 5

### ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В МАЛОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВОЛНОВОГО ТИПА

Асимптотика в малом, т. е. при достаточно малом  $t$ , для решения системы уравнений гиперболического типа с разрывными и быстро осциллирующими начальными условиями была доказана в математической литературе (см., например, [55, 4, 60, 53, 19, 62, 57, 3]).

Формально квазиклассическое разложение в малом для уравнений квантовой механики, совершенно аналогичное асимптотическому разложению вышеуказанных задач, было выписано в физической литературе [11, 56] (см. также [50, 22, 55]).

Настоящая глава посвящена доказательству этих формул, которое основывается, с одной стороны, на теореме 2.2 теории возмущений; с другой стороны, на оценке обратного оператора в том или ином пространстве\*). Математическое обоснование этих формул может быть проведено следующим образом: 1) Доказывается, что подстановка этих априори взятых асимптотических формул в уравнение дает выражение порядка  $\left(\frac{1}{\omega^N}\right)$  (так называемая «невязка»).

2) Оценивается обратный оператор. Отсюда получится оценка разности между точным решением и данной асимптотической формулой. Заметим, что в фокальных точках и сами асимптотические формулы, и невязка обращаются в бесконечность. Для уравнений туннельного типа такая схема, однако, не годится. Мы здесь приведем несколько измененную схему доказательства, которая будет в дальнейшем нами перенесена и на уравнения туннельного типа.

\*) Заманчиво было бы (см. [14]), заменив  $\frac{1}{h}$  на  $i \frac{\partial}{\partial S}$  (переход к «пятиоптике»; см. [36, 34]), свести задачу о квазиклассической асимптотике к задаче, рассмотренной Людвигом [62], об асимптотике гиперболических систем с осциллирующими начальными данными. Нетрудно убедиться, однако, что полученная таким способом задача отнюдь не удовлетворяет условиям теорем Людвига и Лакса. Более того, задача о квазиклассической асимптотике сводится, таким образом, для уравнения Шредингера, например, к весьма сложной задаче с начальными данными, лежащими на характеристике. Эта задача не охватывается даже теорией «униформизации» Лере [55]. Для релятивистского случая плоскость  $t=0$  может не быть даже (при некоторых соотношениях коэффициентов) пространственноподобной. Эти дополнительные затруднения связаны с тем, что точка  $\lambda=0$  является точкой спектра для оператора  $i \frac{\partial}{\partial S}$ , в то время как  $\frac{1}{h} \neq 0$ .

Кроме того, приведенные нами доказательства дают возможность опираться на теоремы 2.2 и 2.6 абстрактной теории возмущений. Это, с одной стороны, упрощает доказательство; с другой стороны, снижает требования на гладкость коэффициентов уравнения.

## § 1. Асимптотика решения уравнения Шредингера в малом

1. Квазиклассическое представление. Вначале построим характеристическое (квазиклассическое) представление для уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi + v(x) \psi, \quad x = (x_1, \dots, x_n). \quad (1.1)$$

Соответствующая система бихарактеристик (в смысле § 2 гл. 1) имеет вид уравнений Гамильтона

$$\dot{x}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Предварительно докажем лемму. Рассмотрим общую систему Гамильтона

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H. \quad (1.2)$$

Предположим, что третьи производные непрерывны и что система (1.2) имеет  $n$ -параметрическое непересекающееся семейство решений

$$x(\beta, t), \quad p(\beta, t), \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Лемма 5.1. Якобиан  $Y^{-1} = \det \left\| \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i} \right\|$  удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial Y^{-1}}{\partial t} + \operatorname{div} (Y^{-1} \operatorname{grad} S) = 0. \quad (1.3)$$

Доказательство. Рассмотрим  $Y = \det \left\| \frac{\partial x_i}{\partial \beta_j} \right\|$ . Очевидно, что

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \sum_{i=1}^n D_i,$$

где определитель  $D_i$  получен из  $Y$  заменой элементов  $i$ -й строки на  $\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial \beta_j}$  ( $j=1, \dots, n$ ). Но  $\frac{\partial x_i}{\partial t}(\beta, t) = \frac{\partial S}{\partial x_i}$  и, значит,

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial \beta_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \beta_j}.$$

От остальных строк определителя  $D_i$  линейно не зависит только  $i$ -й член суммы, поэтому

$$D_i = \frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2} Y,$$

т. е.  $dY/dt = Y\Delta S$ ; следовательно,

$$dY^{-1}/dt + Y^{-1}\Delta S = 0.$$

Отсюда  $\partial Y^{-1}/\partial t + \text{grad } Y^{-1} \text{ grad } S + Y^{-1}\Delta S = 0$ .

Для  $\sqrt{Y^{-1}}$  получаем уравнение

$$2 \frac{\partial \sqrt{Y^{-1}}}{\partial t} + \text{div} (\sqrt{Y^{-1}} \text{ grad } S) + \text{grad } S \text{ grad } \sqrt{Y^{-1}} = 0.$$

Перейдем к выводу характеристического представления для уравнения (1.1). Подставляя

$$\psi(x, t) = \sqrt{Y^{-1}} \exp \left\{ \frac{i}{h} S(x, t) \right\} \varphi(x, t) \quad (1.4)$$

в (1.1) и учитывая, что для любой дифференцируемой функции  $R(x_i)$

$$-ih \frac{\partial}{\partial x_i} R(x_i) e^{iS/h} = e^{iS/h} \left( -ih \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial S}{\partial x_i} \right) R(x_i),$$

а  $S$  удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } S)^2 + v(x) = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} ih \frac{\partial}{\partial t} (Y^{-1/2} \varphi) = \\ = -\frac{1}{2} h^2 \Delta (Y^{-1/2} \varphi) - \frac{1}{2} ih [\text{div} (Y^{-1/2} \varphi \text{ grad } S) + \text{grad } S \text{ grad } Y]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} ih \left\{ \frac{\partial Y^{-1/2}}{\partial t} + \frac{1}{2} [\text{div} Y^{-1/2} \text{ grad } S + \text{grad } S \text{ grad } Y^{-1/2}] \right\} \varphi + \\ + ih Y^{-1/2} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{grad } S \text{ grad } \varphi \right\} = -\frac{h^2}{2} \Delta (Y^{-1/2} \varphi) \quad (1.5) \end{aligned}$$

Сделаем замену  $\varphi(x, t) = \varphi(x(\beta, t), t) = \tilde{\varphi}(\beta, t)$ . Очевидно, что

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{grad } \varphi \text{ grad } S. \quad (1.6)$$

Из (1.6) и (1.15) получаем окончательно

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = \frac{ih}{2} Y^{1/2} \Delta_{\beta} Y^{-1/2} \tilde{\varphi}(\beta, t), \quad (1.7)$$

где  $\Delta_{\beta}$  – оператор Лапласа в «криволинейных» координатах  $\beta$ . Это и есть характеристическое представление уравнения Шредингера в малом.

2. Оценка обратного оператора. Рассмотрим оператор Гамильтона

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2} \Delta + v(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (1.8)$$

в пространстве  $L_2[\mathbb{R}^n]$ .

Обозначим через  $L_1[L_2]$  пространство интегрируемых по Бохнеру функций от  $t$  на отрезке  $[0, t_0]$  со значениями в  $L_2[\mathbb{R}^n]$ . Через  $V$  обозначим прямую сумму  $L_1[L_2] \oplus L_2$ . Пусть  $C[L_2]$  – пространство непрерывных функций на  $[0, t_0]$  со значениями в  $L_2$ .

Нормы в этих пространствах имеют вид

$$\|g\|_{L_1[L_2]} = \int_0^{t_0} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |g(t, x)|^2 dx} dt, \quad g \in L_1[L_2],$$

$$\|g\|_{C[L_2]} = \max_{0 \leq t \leq t_0} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |g(t, x)|^2 dx}.$$

Для  $g \in L_1[L_2]$ ,  $f \in L_2$ ,  $\{g, f\} \in V$  имеем

$$\|\{g, f\}\|_V = \|g\|_{L_1[L_2]} + \|f\|_{L_2}.$$

Рассмотрим оператор  $\hat{L}$  с областью определения в  $V$  и областью значений в  $C[L_2]$ , действующий следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{L}g(t, x) = \left\{ \frac{\partial g(t, x)}{\partial t} + \frac{i}{h} \hat{H}g(t, x), g(0, x) \right\} \in V, \\ g(t, x) \in D(\hat{L}) \subset C[L_2]. \end{aligned}$$

В силу леммы 3.1 ч. I, в частности, имеем  $\|\hat{L}^{-1}\| \leq \text{const}$ . Если  $v(x, t)$  не зависит от  $t$ , это следует из самосопряженности оператора  $\hat{H}$ . Действительно, если  $\hat{L}u(t, x) = \{f(x), \mathcal{F}(x, t)\}$ , то

$$\begin{aligned} u(t, x) = \hat{L}^{-1} \{f(x), \mathcal{F}(x, t)\} = \\ = \exp \left\{ \frac{i}{h} \hat{H}t \right\} f + \int_0^t \exp \left\{ \frac{i}{h} \hat{H}(t - \tau) \right\} \mathcal{F}(x, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|u(t, x)\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2} + \int_0^t \|\mathcal{F}(x, \tau)\|_{L_2} d\tau, \quad (1.9)$$

$$\max_{0 \leq t \leq t_0} \|u(t, x)\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2} + \|\mathcal{F}\|_{L_1[L_2]}. \quad (1.10)$$

Рассмотрим пространство  $L_2[\mathbb{R}^n]$  функций от  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  с нормой

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int |f(\beta)|^2 d\beta}.$$

Ему соответствуют пространства  $L_1[L_2]$ ,  $C[L_2]$ .

Оператор  $M$ :

$$Mf(\beta, t) = Y^{-1/2}(\beta(x, t), t) \exp\left\{\frac{i}{h} S(\beta(x, t), t)\right\} f(\beta(x, t), t)$$

унитарно отображает пространство  $L_2$  на  $L_2$ .

Действительно, пусть  $g(x, t) = Y^{-1/2} \exp\left\{\frac{i}{h} S(x, t)\right\} f(\beta, t)$ ;

тогда

$$\int |g(x, t)|^2 dx = \int |f(\beta, t)|^2 Y^{-1} dx = \int |f(\beta, t)|^2 d\beta.$$

Точно так же оператор  $M$  отображает  $V$  на  $V$ ,  $L_1[L_2]$  на  $L_1[L_2]$  и  $C[L_2]$  на  $C[L_2]$  с сохранением нормы.

Оператор  $\hat{L}$  при таком отображении переходит в оператор  $\hat{L}_1$  с областью определения в  $C[L_2]$  и областью значений в  $V$ . Очевидно, что  $\|\hat{L}^{-1}\| \leq t_0$ . В силу изложенного выше оператор  $\hat{L}_1$  действует следующим образом:

$$\hat{L}_1 u(t, \beta) = \left\{ u(0, \beta), \frac{\partial u}{\partial t} + ih \hat{H}_1 u \right\},$$

где

$$\hat{H}_1 = -\frac{Y^{1/2}}{2} \Delta_\beta Y^{-1/2}$$

( $\Delta_\beta$  — оператор Лапласа в координатах  $\beta$ ).

**3. Ряд теории возмущений.** Рассмотрим теперь оператор  $L_0: C[L_2] \rightarrow V$  вида

$$\hat{L}_0 u(t, \beta) = \left\{ u(0, \beta), \frac{\partial u}{\partial t} \right\}$$

и оператор  $\hat{H}_1: C[L_2] \rightarrow V$  вида

$$\hat{H}_1 u(t, \beta) = \{0, \hat{H}_1 u(t, \beta)\}.$$

Имеем  $\hat{L}_1 = \hat{L}_0 + ih \hat{H}_1$ , причем

$$\|\hat{L}_0^{-1}\| \leq t_0, \quad \|\hat{L}_1^{-1}\| \leq t_0.$$

Кроме того, если функции  $f(\beta)$ ,  $\mathcal{F}(\beta, t)$   $2k$  раз дифференцируемы по  $\beta$  и потенциал  $v(x, t)$   $2k$  раз дифференцируем по  $x$ , то выражение  $L_0^{-1} (\hat{H}_1 \hat{L}_0^{-1})^k \{f(\beta), \mathcal{F}(\beta, t)\}$  существует и принадлежит  $C[L_2]$ . Следовательно, все условия теоремы 2.5 выполнены, и мы имеем

для  $g \in V$ :

$$\hat{L}_1^{-1} g = \sum_{i=0}^k h^i \hat{L}_0^{-1} (\hat{H}_1 \hat{L}_0^{-1})^i g + h^k z_h(t, \beta),$$

где  $\|z_h(t, \beta)\|_{C[L_2]} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . В частности, если  $g = \{0, \mathcal{F}(\beta, t)\}$ , то

$$\hat{L}_0^{-1} g(\beta, t) = \int_0^t \mathcal{F}(\beta, t) dt, \quad \hat{H}_1 \hat{L}_0^{-1} g = \left\{ 0, \hat{H}_1 \int_0^t \mathcal{F}(\beta, t) dt \right\},$$

$$(\hat{H}_1 \hat{L}_0^{-1})^2 g = \int_0^t \hat{H}_1 dt \int_0^{t'} \hat{H}_1 dt' \int_0^{t''} \mathcal{F}(\beta, t'') dt'',$$

$$\hat{L}_1^{-1} \{0, \mathcal{F}(\beta, t)\} =$$

$$= \sum_{i=0}^k h^i \int_0^t \hat{H}_1 dt_1 \dots \int_0^{t_{i-1}} \hat{H}_1 dt_{i-1} \int_0^{t_i} \mathcal{F}(\beta, t_i) dt_i + h^k z_R(t, \beta).$$

Аналогично,

$$\hat{L}_1^{-1} \{f(\beta, 0)\} = \sum_{i=0}^k h^i \int_0^t \hat{H}_1 dt_1 \int_0^{t_1} \hat{H}_1 dt_2 \dots \int_0^{t_{i-1}} dt_i \hat{H}_1 f(\beta) + h^k z_h(t, \beta).$$

Следовательно, решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \beta) = ih \hat{H}_1 u(t, \beta),$$

$$u(0, \beta) = f(\beta)$$

имеет вид

$$u(t, \beta) = \sum_{i=0}^k h^i \int_0^t \hat{H}_1 dt_1 \dots \int_0^{t_{i-1}} dt_i \hat{H}_1 f(\beta) + h^k z_h(t, \beta),$$

где  $\max \|z_h(t, \beta)\|_{\tau_2} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , если выражение, стоящее под знаком суммы, является непрерывной функцией от  $t$  и интегрируемой с квадратом функцией от  $\beta$ .

Аналогичное утверждение справедливо и в случае, когда  $f(\beta) = f(\beta, h)$  есть аналитическая функция от  $h$ .

Рассмотрим теперь задачу

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h}{2} \Delta \psi + \frac{v(x)}{h} \psi, \quad (1.11)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0 = \varphi(x, h) \exp\left\{\frac{i}{h} S_0(x)\right\}. \quad (1.12)$$

**Теорема 5.1.** Решение задачи (1.11), (1.12) при условии, что  $v \in C^4$ ,  $\varphi \in C^2$ ,  $f \in C^4$ , представимо в виде

$$\psi = J^{-1/2} \exp\left\{\frac{i}{h} \tilde{S}(\beta, t)\right\} \varphi(\beta, h) + z_h(\beta, t).$$

Этот результат, так же как и результаты § 2, очевидным образом переносится на случай, когда потенциал зависит от времени.

§ 2. Теорема вложения для абстрактных функций и оценки в счетно-нормированных пространствах

1. Теорема вложения. Для дальнейшего нам понадобится следующая

Теорема. Пусть  $A$  — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве  $B$  такой, что  $A^{-1}$  существует,  $\|(1+\varepsilon A^{-1})\| < 1$  при  $\varepsilon > 0$  и  $\varepsilon$  чисто мнимом. Пусть  $\Phi \in L_2[\mathbb{R}^n, B]$  принадлежит области определения оператора  $(\partial/\partial x_i)^{[n/2]+1}$  ( $i=1, \dots, n$ ) и  $A^{[n/2]+1}$ . Положим  $a_n = ((-1)^n + 3)/4$ . Тогда  $\forall \text{gr} \sup \|A^{a_n} \Phi(x)\|_B \leq \text{const}$ .

Доказательство. Обозначим

$$\mathcal{F}(x) = (1+A)^{[n/2]+1} \Phi.$$

Имеем  $\Phi(x) = (R_{-1}^A)^{[n/2]+1} \mathcal{F}(x)$ , где  $R_{-1}^A = (1+A)^{-1}$ . Заметим, что  $\|AR_{-1}^A\| \leq 2$ , поскольку  $AR_{-1}^A = 1 - R_{-1}^A$ .

Обозначим  $\|\mathcal{F}(x)\|_B = |\mathcal{F}|$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}(p) = \Phi^* \mathcal{F}(x)$  фурье-образ  $\mathcal{F}(x)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|A^{a_n} (R_{-1}^A)^{[n/2]+1} \mathcal{F}(x)\| &= \left| \frac{(R_{-1}^A)^{[n/2]+1} A^{[n/2]+1}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-iApx\} \tilde{\mathcal{F}}(p) dp \right| \leq \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} |(AR_{-1}^A)^{[n/2]+1} \tilde{\mathcal{F}}(p)| dp = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + (p^2)^{[n/2]+1}} \frac{(AR_{-1}^A)^{[n/2]+1} \tilde{\mathcal{F}}(p)}{\sqrt{1 + (p^2)^{[n/2]+1}}} \leq \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (1 + (p^2)^{[n/2]+1}) [(AR_{-1}^A)^{[n/2]+1} \tilde{\mathcal{F}}(p)]^2 dp} \times \\ &\quad \times \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(p^2)^{[n/2]+1} + 1}}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |(AR_{-1}^A)^{[n/2]+1} \tilde{\mathcal{F}}(p)|^2 &\leq 2^{n+2} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\mathcal{F}}(p)|^2 dp = 2^{n+2} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(x)|^2 dx, \\ \int_{-\infty}^{\infty} |[p(AR_{-1}^A)]^{[n/2]+1} \tilde{\mathcal{F}}(p)|^2 dp &= \int_{-\infty}^{\infty} |[R_{-1}^A (-\Delta)^{1/2}]^{[n/2]+1} \mathcal{F}(x)|^2 dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |[( -\Delta)^{1/2}]^{[n/2]+1} \Phi(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Если  $[n/2]+1$  четно, то ограниченность правой части равенства сле-

дует из условия теоремы вложения. Если же  $[n/2]+1$  нечетно, то, используя тождество

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{1/2} f(x)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |(-\Delta)^{1/2} f(x)|^2 dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Delta f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla f(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |(-\Delta)^{1/2} (-\Delta)^{1/2 [n/2]} \Phi(x)|^2 dx &= \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} (-\Delta)^{1/2 [n/2]} \Phi(x) \Delta [(-\Delta)^{1/2 [n/2]} \Phi(x)] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla (-\Delta)^{1/2 [n/2]} \Phi(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Ограниченность последнего интеграла следует из условия теоремы вложения. Аналогично, доказательство проводится и для  $A$ , удовлетворяющего условию  $\|(1-\varepsilon A)^{-1}\| \leq 1$  при  $\varepsilon > 0$  и  $\varepsilon$  чисто мнимом. Общий случай получается с помощью разложения  $A = A^+ + A^-$ , где  $A^+$  и  $A^-$  — неотрицательные операторы.

Замечание 1. Если оператор  $A$  положительно определен,  $A^{-1}$  существует и ограничен, то в этом случае в теореме вложения вместо  $R_{-1}^A$  мы можем брать

$$R_0^A = A^{-1}.$$

2. Операторы в счетно-нормированных пространствах. Рассмотрим пространство  $S_h$  со счетным числом норм вида

$$\|\mathcal{F}\|_{k,l,m} = \max_{\substack{0 \leq t \leq t_0 \\ 0 < h \leq h_0 \\ |x| < \infty}} \left| \left( ih \frac{\partial}{\partial t} \right)^k x^m \hat{p}^l \mathcal{F}(x, t, h) \right|, \quad k, m, l = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} x^m &= \prod_{j=1}^n x_j^{l_j}, \\ \sum l_j &= m, \\ \hat{p}^l &= \prod_{\nu=1}^n \left( -i \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)^{l_\nu}, \\ \sum_{\nu=1}^n l_\nu &= l \end{aligned}$$



Рассмотрим также пространство  $R_h$  со счетным числом норм вида

$$\|\mathcal{F}\|_{k,m,l}^2 = \max_{\substack{0 \leq l \leq l_0 \\ 0 < h \leq h_0, -\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left( ih \frac{\partial}{\partial t} \right)^k x^m \hat{p}^l \mathcal{F}(x, t, h) \right|^2 dx.$$

Лемма 5.2, а. Пусть  $\mathcal{F} \in R_h$ ; тогда

$$\Phi_{1/h}^x \mathcal{F} \in R_h.$$

Доказательство. Обозначим

$$\tilde{\mathcal{F}}(p, t, h) = \Phi_{1/h}^x \mathcal{F}(x, t, h).$$

Очевидно, что

$$p^\beta \left( ih \frac{\partial}{\partial p} \right)^\alpha \tilde{\mathcal{F}}(p, t, h) = \Phi_{1/h}^x \left( -ih \frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta x^\alpha \mathcal{F}(x, t, h).$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| p^\beta \left( ih \frac{\partial}{\partial p} \right)^\alpha \tilde{\mathcal{F}}(p, t, h) \right|^2 dp = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta x^\alpha \mathcal{F}(x, t, h) \right|^2 dx.$$

Отсюда следует утверждение леммы 5.2, а. Очевидно, что  $S_h$  вложено в  $R_h$ .

Лемма 5.2. Пусть  $g \in R_h$ ; тогда \*

$$h^{k/2} g \in S_h. \quad (2.2)$$

Доказательство. В силу теоремы вложения

$$\left| \left( ih \frac{\partial}{\partial t} \right)^k x^m \hat{p}^l g(x, t, h) \right| \leq \frac{1}{h^{n/2}} (C_n \|g\|_{k,m,l} + C_n \|g\|_{k,m,l+n/2+1}).$$

Следовательно,  $h^{n/2} g \in S_h \subset R_h$ . Лемма доказана.

Рассмотрим следующие пространства:  $W_2^l(\hat{p})$  с нормой

$$\|g\|_{W_2^l}^2 = \sum_{i=0}^l \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{p}^i g(x)|^2 dx$$

и  $K_l(x, \hat{p})$  с нормой

$$\|g\|_{K_l}^2 = \sum_{i+j \leq l} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{p}^i x^j g(x)|^2 dx.$$

Теорема 5.2. Если  $y \in S_h$ , то

$$h^{n/2} \exp \left\{ \frac{i}{h} \hat{H} t \right\} y \in S_h.$$

Предварительно докажем две леммы.

\* Точнее,  $g(x, t, h)$  можно изменить на множестве меры нуль так, чтобы выполнялось включение (2.2).

Лемма 5.3. Пусть существует  $l$  ограниченных производных  $v(x)$ ; тогда оператор  $\exp \left\{ \frac{i}{h} \hat{H} t \right\}$  равномерно ограничен в пространстве  $W_2^l(\hat{p})$  при  $0 < h \leq h_0, 0 \leq t \leq t_1$ .

Доказательство. Нетрудно убедиться в том, что имеет место тождество

$$\left[ \hat{B}, \exp \left\{ \frac{i}{h} \hat{H} t \right\} \right] = \frac{i}{h} \int_0^t \exp \left\{ \frac{i}{h} \hat{H} (t-t') \right\} [\hat{B}, \hat{H}] \exp \left\{ \frac{i}{h} \hat{H} t' \right\} dt'. \quad (2.3)$$

(Здесь  $[ \ , \ ]$  — коммутатор, т. е.  $[A, B] = AB - BA$ .) Оно приводит к неравенству

$$\|\hat{B}g\|_{L_2} \leq \|\hat{B}y\|_{L_2} + \frac{i}{h} \max_{0 \leq t' \leq t_1} \|[\hat{B}, \hat{H}]g\|_{L_2}, \quad (2.4)$$

где

$$g = \exp \left\{ \frac{i}{h} \hat{H} t \right\} y, \|g\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g|^2 dx.$$

Предположим, что лемма справедлива при  $l=k$ . Очевидно, что коммутатор  $[\hat{p}^{k+1}, \hat{H}] = [\hat{p}^{k+1}, v(x)]$  в силу ограниченности производных  $v(x)$  будет ограничен в  $W_2^k$ . Из (2.4) вытекает, что если  $y \in W_2^{k+1}$ , то норма  $\|\hat{p}^{k+1}g\|_{L_2}$  ограничена, поскольку по индуктивному предположению  $g \in W_2^k$ . Лемма доказана.

Лемма 5.4. Пусть  $l$  производных  $v(x)$  равномерно ограничены. Тогда оператор  $\exp \left\{ \frac{i}{h} \hat{H} t \right\}$  равномерно ограничен в пространстве  $K_l(x, \hat{p})$  при  $0 < h \leq h_0, 0 \leq t \leq t_1$ .

Доказательство. Сделаем индуктивное предположение. Предположим, что  $g \in K_{l-1}$  и что норма  $\|x^{m-1} \hat{p}^{l-m+1}g\|_{L_2}$  ограничена. Докажем, что  $g \in K_l$ , тогда норма  $\|x^m \hat{p}^{l-m}g\|_{L_2}$  тоже будет ограничена. При  $m=1$  индуктивное предположение выполняется в силу леммы 5.3. Первый член правой части тождества

$$[x^m \hat{p}^{l-m}, \hat{H}]g = x^m [\hat{p}^{l-m}, v(x)] - ihm x^{m-1} \hat{p}^{l-m+1}g$$

ограничен по норме в  $L_2$ , поскольку  $g \in K_{l-1}$ , а второй — в силу нашего индуктивного предположения. Из (2.4) следует, что норма  $\|x^m \hat{p}^{l-m}g\|_{L_2}$  также будет ограничена. При  $l=1$  индуктивное предположение очевидно. Лемма доказана.

Докажем теперь, что если  $g \in R_h$ , то  $g = \exp \left\{ \frac{i}{h} \hat{H} t \right\} y \in R_h$  (тогда из леммы 5.2 будет следовать утверждение теоремы). Для этого остается доказать, что норма  $\left\| \left( ih \frac{\partial}{\partial t} \right)^k g \right\|_{L_2}$  равномерно ограничена при  $0 < h \leq h_0, 0 \leq t \leq t_1$ , если  $y \in R_h$ . Это следует из

тождества

$$\left\| \left( i h \frac{\partial}{\partial t} \right)^k g \right\|_{L_2} = \left\| \exp \left\{ \frac{i}{h} \hat{H} t \right\} \hat{H}^k y \right\|_{L_2} = \left\| \hat{H}^k y \right\|_{L_2}.$$

Теорема доказана.

Из последнего рассуждения следует также следующая важная для дальнейшего

Теорема 5.1, а. Оператор  $\left[ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{h} \hat{H} \right]^{-1}$  отображает  $R_h$  в  $R_h$ .

Аналогичная теорема может быть доказана в случае, когда потенциал  $v(x)$  зависит также и от времени. При этом следует опираться на оценку (2.1) леммы 3.1 ч. I.

Теорема 5.1, а справедлива и в случае, когда оператор  $\hat{H}$  есть оператор Дирака первого порядка. Доказательство этого проводится аналогично доказательству теоремы 4.1, а.

Из теоремы 5.1 вытекает следующее предложение.

Теорема 5.2. Решение задачи (1.11), (1.12) может быть представлено в виде (1.10), где  $z \in S_h$ .

Доказательство. Переход к квазиклассическому представлению совершается с помощью замены

$$\psi = Y^{-1/2} \left[ \exp \left\{ \frac{i}{h} S \right\} \right] u.$$

Очевидно, что если  $u \in S_h$ , то и  $\psi \in S_h$ , и обратно.

Доказательство теоремы проводится с помощью следующей леммы, относящейся вообще к абстрактной теории возмущений.

Лемма 5.5. Пусть  $A, C, U_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) — линейные операторы с областями определения и областями значений, лежащими в счетно-нормированном пространстве  $B^\infty$ . Оператор  $C$  имеет обратный, коммутирует с  $A$  и  $U_i$ , определен на всем  $B^\infty$ , сужение  $\tilde{A}$  оператора  $A$  имеет обратный\*, а область значений оператора

$$C^{-m} \left( A - \sum_{i=1}^N C^i U_i \right) \text{ равна } B^\infty.$$

Предположим, что существуют решения  $x_0, \dots, x_{N_1+m+1}$  уравнения  $Ax=0$  такие, что  $f_0=x_0$ ,

$$f_k = x_k + \tilde{A}^{-1} \sum_{i=1}^k U_i f_{k-i}$$

при  $k=1, \dots, N_1+m+1$  принадлежат области определения оператора  $B = \sum_{i=1}^N C^{i-1} U_i$ . Тогда существует решение уравнения

$$\left( A - \sum_{i=1}^N C^i U_i \right) y = \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} \in B^\infty,$$

\* То есть уравнение  $Ax=0$  при  $x \in D(A)$  может иметь и нетривиальное решение, а при  $x \in D(\tilde{A})$  имеет лишь тривиальное решение.

которое может быть представлено в виде

$$y = \sum_{k=0}^{N_1} C^k f_k + \sum_{k=0}^{N_1} C^k \tilde{A}^{-1} (B \tilde{A}^{-1})^k \mathcal{F} + C^{N_1+1} f,$$

где  $f$  — некоторый элемент из  $B^\infty$ , при условии, что

$$\sum_{k=0}^{N_1+m} C^k \tilde{A}^{-1} (B \tilde{A}^{-1})^k \mathcal{F} \in D(B).$$

Доказательство. Подействуем оператором  $A-CB$ , где  $B = \sum_{i=1}^N C^{i-1} U_i$ , на элемент вида

$$\psi = \sum_{k=0}^{N_1+m} C^k f_k + \sum_{k=0}^{N_1+m} C^k \tilde{A}^{-1} (B \tilde{A}^{-1})^k \mathcal{F}.$$

Поскольку  $A \tilde{A}^{-1} B = B$  и  $A x_j = 0$ , то  $A f_k = \sum_{i=1}^k U_i f_{k-i}$  и

$$\begin{aligned} A \psi &= \sum_{n=1}^{N_1+m} C^n \sum_{i=1}^n U_i f_{n-i} + \sum_{k=0}^{N_1+m} C^k (B \tilde{A}^{-1})^k \mathcal{F} = \\ &= \sum_{k=0}^{N_1+m+1} C^{k+1} \sum_{i=0}^k U_{i+1} f_{k-i} + \sum_{k=0}^{N_1+m} C^k (B \tilde{A}^{-1})^k \mathcal{F}, \end{aligned}$$

где полагаем  $U_j = 0$  при  $j > N$ . Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^N C^i U_i \psi = C \sum_{i=0}^{N-1} C^i U_{i+1} \psi = \sum_{k=0}^{N+m+N_1+1} C^{k+1} \sum_{i=0}^k U_{i+1} f_{k-i} - \sum_{k=0}^{N_1+m+1} C^k (B \tilde{A}^{-1})^k \mathcal{F}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left[ A - \sum_{i=1}^N C^i U_i \right] \psi &= \sum_{k=N_1+m}^{N+m+N_1-1} C^{k+1} \sum_{i=0}^k U_{i+1} f_{k-i} + \\ &+ (B \tilde{A}^{-1})^{N_1+m+1} C^{N_1+m+1} \mathcal{F} + \mathcal{F} = C^{N_1+m+1} g + \mathcal{F}, \end{aligned}$$

где  $g \in B^\infty$  в силу условия леммы. Таким образом,

$$(A + CB) \psi = C^{N_1+m+1} g + \mathcal{F}.$$

В силу условия леммы существует решение  $v$  уравнения

$$C^{-m} (A + CB) v = g.$$

Очевидно, что

$$y = \psi - C^{N_1+1} v$$

служит решением уравнения

$$(A + CB) y = \mathcal{F}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.  
Положим в лемме 5.5

$$B^\infty = S_h, \quad A = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \bar{A} = i \frac{\partial}{\partial t}$$

на функциях, обращающихся в нуль при  $i=0$ ,  $B=H_1$ ,  $C=h$ . Условия леммы для оператора  $i \frac{\partial}{\partial t} + hH_1$  выполнены, поскольку область его значений, как мы доказали, равна  $S_h$ .

Решениями уравнения

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

служат функции, зависящие лишь от  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ . Отсюда следует, что решение уравнения

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} + hH_1 \right) u = 0$$

может быть представлено в виде

$$u = \sum_{k=0}^N (-1)^k R^k \sum_{i=0}^k \left( -i \int_0^t dt H_1 \right)^i \varphi_{k-i} + \sum_{k=0}^N (-h)^k \left( -i \int_0^t dt \right) \left( -H_{1i} \int_0^t dt \right)^k \mathcal{F} + h^{N+1} f,$$

где  $f \in S_h$ .

Следовательно, решение  $\psi$  задачи (1.8), (1.9) может быть представлено в виде (1.10), где

$$z = \sqrt{J} f \exp\{-iS/h\} \in S_h,$$

что и требовалось доказать.

### § 3. Релятивистские уравнения

1. Уравнение Дирака. Рассмотрим уравнение Дирака

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} - \hat{H}_m \psi = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\hat{H}_m = e\Phi(x, t) + c\gamma \left( ih\nabla + \frac{e}{c} A(x, t) \right) + m^2 c,$$

$$\psi = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}, \quad x = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$A(x, t) = \{A_1, A_2, A_3\}$  и  $\Phi(x, t)$  — векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля, которые являются здесь заданными функциями  $x, t$ .

Предположим, что решение уравнения (3.1) удовлетворяет начальному условию вида

$$\psi|_{t=0} = \varphi_0(x) \exp\left\{ \frac{i}{h} S_0(x) \right\}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим соответствующее уравнению (3.1) классическое уравнение Гамильтона — Якоби

$$\left( \frac{\partial S}{\partial t} + e\Phi \right)^2 - c^2 \left( \nabla S - \frac{e}{c} A \right)^2 - m^2 c^4 = 0. \quad (3.3)$$

Из (3.3) видно, что  $\partial S / \partial t$  имеет два значения. Решения

$$x^\pm(t) = X^\pm(x_0, t), \quad p^\pm(t) = P^\pm(x_0, t), \quad S^\pm(t) = S^\pm(x_0, t)$$

системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_i^\pm}{dt} &= \frac{\partial H^\pm}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i^\pm}{dt} &= -\frac{\partial H^\pm}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$x^\pm|_{t=0} = x_0,$$

$$p^\pm|_{t=0} = \nabla S_0(x_0),$$

$$\frac{\partial S^\pm}{\partial t} = -H^\pm + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial H^\pm}{\partial p_i^\pm} p_i^\pm, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$H^\pm(x, p, t) = e\Phi \mp c \sqrt{\left( p - \frac{e}{c} A \right)^2 + m^2 c^2},$$

соответствующие знакам « $\pm$ », отвечают двум ветвям решения уравнения Гамильтона — Якоби. Предположим, что  $A(x, t)$  и  $\Phi(x, t)$  ограничены вместе со своими двумя производными и вторые производные от  $S_0(x)$  также ограничены. Тогда (см. гл. 8, § 2) при  $t$ , меньшем некоторого  $t_0$ , семейства решений системы (3.4), соответствующие знаку « $+$ » (так же как и знаку « $-$ »), не пересекаются, якобиан

$$J^\pm(x_0, t) = \det \left\| \frac{\partial X^\pm(x_0, t)}{\partial x_{0j}} \right\|$$

отличен от нуля и решение уравнения  $X^\pm(x_0, t) = x$  единственно:  $x_0^\pm = x_0^\pm(x, t)$ .

Пусть  $S^\pm(x, t) = S_\pm(x_0, t)$  — две ветви решения уравнения (3.3), удовлетворяющие условию  $S^\pm(x, 0) = S_0(x)$ . Квадрированное уравнение Дирака (см. [47, 45]) имеет вид

$$\left[ \left( ih \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right)^2 - c^2 \left( ih\nabla + \frac{e}{c} A \right)^2 - m^2 c^4 + hR(x, t) \right] \chi = 0, \quad (3.5)$$

где  $R(x, t)$  — четырехрядная матрица вида

$$R(x, t) = ec[\sigma, \bar{H}] + i(\alpha \bar{E}),$$

$\bar{E}(x, t)$ ,  $\bar{H}(x, t)$  — векторы электромагнитного поля, а  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  — четырехрядные матрицы Паули [47].

Полагая

$$\chi|_{t=0} = \varphi_0(x) \exp\left\{\frac{i}{h} S_0(x)\right\},$$

$$ih \frac{\partial \chi}{\partial t}\Big|_{t=0} = \left\{e\Phi + c\gamma\left(ih\nabla - \frac{e}{c}\bar{A}\right) + mc^2\right\} \varphi_0 \exp\left\{\frac{i}{h} S_0(x)\right\}, \quad (3.6)$$

мы получим, что  $\chi = \psi$ , где  $\psi$  — решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условию (3.2) (см. гл. 1). Обозначим через  $\beta(x_0, t)$  функцию  $\frac{1}{c} \frac{\partial X}{\partial t}(x_0, t)$ , а через

$$f = \exp\left\{-i \frac{1}{2mc^2} \int_0^\tau R[\chi(x_0, t), t]\Big|_{t=t(\tau)} d\tau\right\} f,$$

где

$$\tau = \tau(x_0, t) = \int_0^t \sqrt{1 - \beta^2(x_0, t)} dt,$$

— решение задачи

$$i \frac{df}{d\tau} = \frac{1}{2mc^2} R[X(x_0, t), t]\Big|_{t=t(\tau)} f, \quad f(0) = f.$$

Заменяя

$$\chi^\pm = \varphi^\pm |J^\pm|^{-1/2} \sqrt{\frac{c^2 - [\dot{X}^\pm(x_0, 0)]^2}{c^2 - [\dot{X}^\pm(x_0, t)]^2}} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{h} S^\pm(x, t)\right\} \varphi^\pm [X^\pm(x_0, \tau), t^\pm(x_0, \tau)] = \theta_\pm(x_0, \tau),$$

$$\mathcal{H}_\pm(x_0, \tau) = \exp\left\{-\frac{i}{2mc^2} \int_0^\tau R[X^\pm(x_0, t), t]\Big|_{t=t(\tau)} d\tau\right\} \theta_\pm(x_0, \tau) \quad (3.6a)$$

уравнение (3.5) приводится к виду («квазиклассические представления» уравнения Дирака для электрона («+») и позитрона («-»))

$$\frac{\partial \mathcal{H}_\pm}{\partial \tau} = -\frac{ih}{2mc^2} \sigma_\pm(x_0, \tau) \square_{x_0, \tau} |J|^{-1/2} \bar{\sigma}_\pm(x_0, \tau) \mathcal{H}_\pm,$$

где

$$\sigma_\pm(x_0, \tau) = \sqrt{\frac{c^2 - [\dot{X}^\pm(x_0, 0)]^2}{c^2 - [\dot{X}^\pm(x, t)]^2}} \exp\left\{\frac{i}{2mc^2} \int_0^\tau R[X^\pm(x_0, t), t]\Big|_{t=t(\tau)} d\tau\right\}, \quad (3.6b)$$

$\square_{x_0, \tau}$  — оператор Даламбера в «криволинейных» координатах  $x_0, \tau$ . Этот результат следует аналогично из дополнения (см. § 5 «Решение уравнений переноса»). Пусть  $A(x, t)$ ,  $\Phi(x, t)$ ,  $S_0(x)$  бесконечно дифференцируемы. Пусть

$$\frac{\partial \mathcal{H}_n^\pm}{\partial \tau} = -\frac{ih}{2mc^2} \exp\left\{-\frac{i}{2mc^2} \int_0^\tau R^\pm d\tau\right\} \sigma_\pm |J^\pm|^{1/2} \square_{x_0, \tau} |J^\pm|^{-1/2} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{i}{2mc^2} \int_0^\tau R^\pm d\tau\right\} \sigma_\pm \mathcal{H}_{n-1}^\pm,$$

$$\mathcal{H}_0^\pm|_{\tau=0} = \mathcal{F}^\pm(x_0, h), \quad \mathcal{H}_n^\pm|_{\tau=0} = 0, \quad n > 0, \quad \mathcal{H}_{-1} = 0,$$

где  $\mathcal{F}^\pm(x_0, h)$  — бесконечно дифференцируемые функции  $x_0$  и  $h$ . Обозначим

$$\chi_N^\pm = \exp\left\{\frac{i}{h} S^\pm(x, t)\right\} \sigma_\pm |J^\pm|^{-1/2} \times$$

$$\times \left\{\exp\left\{\frac{i}{2mc^2} \int_0^\tau R^\pm d\tau\right\} \sum_{n=0}^N \mathcal{H}_n^\pm\right\}_{x_0=x_0^\pm(x, t)}. \quad (3.6в)$$

Доказательство того, что существуют решения  $\psi^+$  и  $\psi^-$  уравнения Дирака (3.1) такие, что

$$\psi^+ - \chi_N^+ = h^{N+1} z(x, t, h), \quad \psi^- - \chi_N^- = h^{N+1} z_1(x, t, h), \quad (3.6г)$$

где  $z \in S_h$ ,  $z_1 \in S_h$ , проводится совершенно аналогично доказательству теоремы 5.2. При этом надо воспользоваться оценками решения уравнения (3.5), аналогичными тем, которые были получены для уравнения Шредингера. Все рассуждения относительно уравнения Шредингера, как мы уже говорили в замечаниях к теореме 4.1, переносятся на случай неквадратированного уравнения Дирака (3.1).

2. Оценки для решений квадратированного уравнения Дирака и уравнения Клейна — Гордона — Фока. Обозначим через  $Q_m$  оператор (3.5), определенный на достаточно гладких вектор-функциях  $u(x, t) \in C(L_2)$ , удовлетворяющих условию  $u(x, 0) = u_t'(x, t) = 0$ . Здесь  $L_2$  — пространство вектор-функций с интегрируемым квадратом. Обозначим, далее, через  $L_{\pm m}$  замкнутый оператор из  $C(L_2)$  в себя вида

$$L_{\pm m} u(x, t) = ih \frac{\partial u}{\partial t} + \hat{H}_{\pm m} u,$$

где  $\hat{H}_{\pm m}$  определено в (3.1), определенный на достаточно гладких функциях  $u(x, t) \in C(L_2)$ , удовлетворяющих условию  $u(x, 0) = 0$ .

Теорема 5.3. Операторы  $hL_m^{-1}$  и  $hL_{-m}^{-1}$  отображают  $R_h$  в  $R_h$ . Эта теорема доказывается аналогично теореме 5.1, а. Нетрудно убедиться (см. [47]), что

$$Q_m = L_m \cdot L_{-m} = L_{-m} \cdot L_m.$$

Очевидно, что на  $D(L_m) = D(L_{-m})$  справедливо тождество

$$2mc^2 = L_{-m} - L_m.$$

Отсюда

$$Q_m^{-1} = L_m^{-1} L_{-m}^{-1} = \frac{1}{2mc^2} (L_m^{-1} - L_{-m}^{-1}).$$

Теорема 5.4. Справедлива оценка

$$\max \sqrt{\int |Q_m^{-1} f(x, t)|^2 dx} \leq \frac{1}{h} \int_0^t \sqrt{\int |f(x, t)|^2 dx}.$$

Обозначим через  $L_{\pm m}$  оператор из пространства  $C(L_2)$  в прямую сумму  $L_{2\oplus} C(L_2)$  вида

$$\tilde{L}_{\pm m} u(x, t) = \left\{ u(x, 0), ih \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - H_{\pm m} u(x, t) \right\},$$

а через  $\tilde{Q}_m$  — оператор из пространства  $C[L_2]$  в прямую сумму  $L_2 \oplus L_2 \oplus C(L_2)$  вида

$$\tilde{Q}_m u(x, t) = \left\{ u(x, 0); ih \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}; \left[ \left( ih \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right)^2 - c^2 \left( ih \nabla - \frac{e}{c} A \right)^2 - m^2 c^2 + hR(x, t) \right] u(x, t) \right\}.$$

Справедливо тождество

$$\tilde{Q}_m^{-1} \{y_1, y_2, 0\} = \frac{1}{2mc^2} [\tilde{L}_m^{-1} \{y_2 - \hat{H}_{-m} y_1, 0\} + \tilde{L}_{-m}^{-1} \{-y_2 + \hat{H}_m y_1, 0\}]. \quad (3.7)$$

В нем можно убедиться, подействовав на обе части равенства (3.7) оператором  $\tilde{Q}_m$ . Действительно, поскольку

$$ih \frac{\partial \tilde{L}_{\pm m}^{-1} \{y, 0\}}{\partial t} \Big|_{t=0} = \hat{H}_{\pm m} \tilde{L}_{\pm m}^{-1} \{y, 0\} \Big|_{t=0} = \hat{H}_{\pm m} y,$$

то

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_m [\tilde{L}_m^{-1} \{y_2 - \hat{H}_{-m} y_1, 0\} + \tilde{L}_{-m}^{-1} \{-y_2 + \hat{H}_m y_1, 0\}] = \\ = \{y_2 - \hat{H}_{-m} y_1 - y_2 - \hat{H}_m y_1, \hat{H}_m (y_2 - \hat{H}_{-m} y_1) + \\ + \hat{H}_{-m} (-y_2 + \hat{H}_m y_1), 0\} = 2mc^2 \{y_1, y_2, 0\}. \end{aligned}$$

Аналогично теореме 5.2 можно получить теоремы:

Теорема 5.5. Если  $y \in S_h$ , то  $h^{n/2} L_m^{-1} \{y, 0\} \in S_h$ .

Отсюда и из равенства (3.7) получаем:

Теорема 5.6. Если  $y, y_1 \in S_h$ , то  $n^{n/2} \tilde{Q}_m^{-1} \{y, y_1, 0\} \in S_h$ .

Теорема 5.5, а. Если  $y \in R_h$ , то  $\tilde{L}_m^{-1} \{y, 0\} \in R_h$ .

Теорема 5.6, а. Если  $y, y_1 \in R_h$ , то  $\tilde{Q}_m \{y, y_1, 0\} \in R_h$ .

Теорема 5.7. Существуют решения  $\psi^+$  и  $\psi^-$  уравнения (3.1) такие, что

$$\psi^+ - \chi_N^+(x, t) = h^{N+1} z(t, x, h)$$

и

$$\psi^- - \chi_N^-(x, t) = h^{N+1} z_1(t, x, h),$$

где  $z_1$  и  $z \in S_h$ .

Аналогичные утверждения мы докажем для решений уравнений Клейна — Гордона — Фока.

Рассмотрим оператор Клейна — Гордона — Фока

$$K = Q_m - hR(x, t).$$

Формальное разложение  $K^{-1}$  в ряд по степеням  $hRQ_m^{-1}$  имеет вид

$$K^{-1} = Q_m^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} h^k (RQ_m^{-1})^k. \quad (3.8)$$

Последний ряд сходится. Действительно, для оператора  $RL_m^{-1}$  справедлива оценка (см. лемму 4.1 ч. I)

$$\|RL_m^{-1} f\|_{L_2} \leq \|R\| \frac{1}{h} \int_0^t \|f\|_{L_2} dt.$$

Поскольку

$$Q_m^{-1} = \frac{1}{2mc^2} (L_m^{-1} - L_{-m}^{-1}),$$

из предыдущего неравенства следует

$$\|RQ_m^{-1} f\|_{L_2} \leq \frac{\|R\|}{mc^2 h} \int_0^t \|f\|_{L_2} dt.$$

Отсюда получаем оценку

$$\|Q_m^{-k} f\|_{L_2} \leq \frac{\|R\|^k}{(mc^2 h)^k} \int_0^{t_0} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{k-1}} \|f\|_{L_2} dt_k \leq \frac{\|R\|^k}{(mc^2 h)^k} \frac{t_0^k}{k!},$$

из которой следуют сходимость ряда в (3.8) и неравенство

$$\|K^{-1}\| \leq \text{const}/h.$$

Рассмотрим пространство  $S_h$  со счетным числом норм вида

$$\|\varphi(x, t, h)\|_k = \max_{\substack{0 \leq t \leq t_0 \\ 0 < x \leq l}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{p}^k \varphi(x, t, h)|^2 dx},$$

где  $\hat{p} = -ih \frac{\partial}{\partial x}$ .

Теорема 5.8. Если коэффициенты уравнения Клейна — Гордона — Фока бесконечно дифференцируемы, то оператор  $hK^{-1}$  опре-

делен всюду в  $\mathcal{S}_h$ , т. е. для любого  $f \in \mathcal{S}_h$  справедливо включение  $hK^{-1}f \in \mathcal{S}_h$ .

Доказательство. Сначала докажем, что

$$\|\hat{p}^i R L_m^{-1} \varphi\|_{L_2} \leq \frac{\text{const}}{h} \int_0^t \sum_{j=1}^i \|\hat{p}^j \varphi\|_{L_2} dt,$$

где const зависит только от  $i$ .

Доказательство проведем по индукции. При  $i=0$  сделанное утверждение верно. Пусть оно верно при  $i \leq N-1$ . Оценим  $\|\hat{p}^N R L_m^{-1} \varphi\|_{L_2}$ .

Учитывая тождество  $[A, B^{-1}] = -B^{-1}[A, B]B^{-1}$ , получим

$$\|\hat{p}^N R L_m^{-1} \varphi\|_{L_2} \leq \|R L_m^{-1} \hat{p}^N \varphi\|_{L_2} + \|[\hat{p}^N, R] L_m^{-1} \varphi\|_{L_2} + \|R L_m^{-1} [\hat{p}^N, L_m] L_m^{-1} \varphi\|_{L_2}.$$

Для первого слагаемого имеет место оценка

$$\|R L_m^{-1} \hat{p}^N \varphi\|_{L_2} \leq \frac{\text{const}}{h} \int_0^t \|\hat{p}^N \varphi\|_{L_2} dt.$$

Для суммы остальных слагаемых из условий теоремы и индуктивного предположения следует

$$\|[\hat{p}^N, R] L_m^{-1} \varphi\|_{L_2} + \|R L_m^{-1} [\hat{p}^N, L_m] L_m^{-1} \varphi\|_{L_2} \leq \frac{\text{const}}{h} \int_0^t \sum_{j=0}^{N-1} \|\hat{p}^j \varphi\|_{L_2} dt.$$

Таким образом, индукция завершена. Из доказанного утверждения получаем

$$\|\hat{p}^i R Q_m^{-1} \varphi\|_{L_2} \leq \frac{\text{const}}{h} \int_0^t \sum_{j=0}^i \|\hat{p}^j \varphi\|_{L_2} dt$$

и так же, как при доказательстве (3.8), делаем вывод, что

$$\|\hat{p}^i h^k (R Q_m^{-1})^k \varphi\|_{L_2} \leq \frac{\text{const} \cdot i^k}{h^k} \sum_{j=0}^i \|\hat{p}^j \varphi\|_{L_2}.$$

Подставляя эту оценку в (3.8) и учитывая (см. теорему 5.4), что если  $\varphi \in \mathcal{S}_h$ , то  $h Q_m^{-1} \varphi \in \mathcal{S}_h$ , получаем, что  $h K^{-1} \varphi \in \mathcal{S}_h$ .

Пусть теперь  $\varphi \in R_h$  и  $u = h K^{-1} \varphi$ . Имеем

$$K x_i u = [k, x_i] u + h \varphi x_i = h f + h \varphi(x), \quad i=1, \dots, n.$$

По доказанному  $f \in \mathcal{S}_h$ . По условию  $x_i \varphi \in \mathcal{S}_h$ . Значит,  $x_i u \in \mathcal{S}_h$ . По индукции получаем, что  $x_i^n u \in \mathcal{S}_h$  и, значит,  $u \in R_h$ , т. е.  $h K^{-1} : R_h \rightarrow R_h$ . Обозначим через  $\tilde{K}$  оператор из пространства

$C(L_2)$  в прямую сумму  $L_2 \oplus L_2 \oplus C[L_2]$  вида

$$\begin{aligned} \tilde{K} u(x, t) = \\ = \left\{ u(x, 0), i h \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0), \left( i h \frac{\partial u}{\partial t} + e \Phi \right)^2 - c^2 \left( i h \nabla - \frac{e}{c} A \right)^2 u - m^2 c^4 u \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущей теореме, из тождества (3.7) получаем теорему.

Теорема 5.8, а. Если  $y_1 \in R_h, y_2 \in R_h$ , то

$$\tilde{K}^{-1} \{y_1, y_2, 0\} \in R_h.$$

#### § 4. Разложение произвольных начальных условий на компоненты, отвечающие различным корням характеристического многочлена

Покажем теперь, что начальное условие вида

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi(x) \exp \left\{ \frac{i}{h} S_0(x) \right\}, \\ u'|_{t=0} &= \varphi_1(x) \exp \left\{ \frac{i}{h} S_0(x) \right\} \end{aligned}$$

может быть разложено на слагаемые, соответствующие различным корням характеристического многочлена.

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} \left( i \frac{\partial}{\partial t} - A \Phi(x, t) \right)^2 - c^2 [-\nabla^2 + \gamma^2 A^2] + (\bar{B}(x, t), \text{grad}) + \\ + AR(x, t) \Big\} u(x, t) = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

На общий случай уравнения (1.16) гл. 1 все рассуждения непосредственно переносятся, однако получаются более громоздкие выражения. Характеристическое уравнение для (4.1) имеет вид

$$\left( \frac{\partial S}{\partial t} + \Phi(x, t) \right)^2 - c^2 [(\nabla S)^2 + \gamma^2] = 0. \quad (4.2)$$

Двум ветвям решения этого уравнения

$$\frac{\partial S^\pm}{\partial t} = -H^\pm(x, \nabla S^\pm, t), \quad (4.3)$$

$$H^\pm(x, p, t) = +\Phi(x, t) \mp c \sqrt{p^2 + \gamma^2} \quad (4.4)$$

соответствуют две системы бихарактеристических уравнений

$$\frac{dx_i^\pm}{dt} = \frac{\partial H^\pm}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H^\pm}{\partial x_i}, \quad i=1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Пусть  $\{X(x_0, t), P(x_0, t)\}$  — решение бихарактеристической системы (4.5), удовлетворяющее начальным условиям вида

$$X(x_0, 0) = x_0, \quad P(x_0, 0) = \text{grad } S_0(x_0),$$

и пусть уравнение  $X(x_0, t) = x$  однозначно разрешимо относительно  $x_0$ :  $x_0 = x_0(x, t)$ .

Введем обозначение

$$S^\pm(x, t) = S_\pm(x_0, t).$$

Введем функцию  $v^\pm(x, t)$  с помощью соотношения

$$v^\pm(x, t) = u(x, t) \exp\{-iS^\pm(x, t)A\}. \quad (4.6)$$

Подставив в уравнение (4.1)  $u = v^\pm \exp\{iS^\pm(x, t)A\}$ , получим следующее уравнение для  $v^\pm(x, t)$ :

$$A \left\{ 2 \frac{\partial S^\pm}{\partial t} \frac{\partial v^\pm}{\partial t} + \frac{\partial \Phi v^\pm}{\partial t} + \Phi \frac{\partial v^\pm}{\partial t} - 2c^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial v^\pm}{\partial x_i} \frac{\partial S^\pm}{\partial x_i} - \right. \\ \left. - [(\bar{B}(x, t), \text{grad } S^\pm) + \square S^\pm - iR(x, t)] v^\pm \right\} = \\ = -i[\square v^\pm + (\bar{B}(x, t), \text{grad } S^\pm)], \quad (4.7)$$

$$\text{где } \square = c^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Рассмотрим уравнение (4.7) в представлении, в котором оператор  $A$  диагонален и является оператором умножения на  $\omega$ :

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \omega dE_\omega^A.$$

Решение  $v^\pm(x, t, \omega)$  представим формально в виде ряда по степеням  $1/\omega$ :

$$v^\pm(x, t, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^\pm(x, t) \frac{1}{\omega^k}. \quad (4.8)$$

Теперь формально выпишем для функций

$$v_j^\pm = \sum_{\alpha=0}^j b_\alpha^\pm(x, t) \omega^{-\alpha}$$

рекуррентные соотношения

$$2 \frac{\partial S^\pm}{\partial t} \frac{\partial v_j^\pm}{\partial t} + \frac{\partial \Phi v_j^\pm}{\partial t} + \Phi \frac{\partial v_j^\pm}{\partial t} - 2c^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_j^\pm}{\partial x_k} \frac{\partial S^\pm}{\partial x_k} - \\ - [(\bar{B}, \text{grad } S^\pm) + \square S^\pm - iR(x, t)] v_j^\pm = \\ = -i[\square v_{j-1}^\pm + (\bar{B}, \text{grad } v_{j-1}^\pm)]. \quad (4.9)$$

Пусть при  $t=0$   $S^\pm = S_0(x)$ ,  $\Phi = \Phi_0(x)$ . Положив в соотношении

(4.9)  $j=0$ ,  $v_{-1}^\pm = 0$ ,  $t=0$ , получим

$$\frac{\partial v_0^\pm}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S^\pm}{\partial t} \Big|_{t=0} + \Phi_0(x) \right)^{-1} \left\{ 2c^2 (\nabla S_0, \nabla) + (\bar{B}(x, 0), \nabla S_0) + \right. \\ \left. + \square S^\pm \Big|_{t=0} - iR(x, 0) - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=0} \right\} v_0^\pm(x, 0) = B_1^\pm v_0^\pm(x, 0). \quad (4.10)$$

Мы будем называть начальные условия вида

$$u_N^\pm \Big|_{t=0} = \varphi_0^\pm(x, \omega) e^{i\omega S_0(\omega)}, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial u_N^\pm}{\partial t} \Big|_{t=0} = \left\{ i\omega \frac{\partial S^\pm}{\partial t} \Big|_{t=0} \varphi_0^\pm + \frac{\partial v_N^\pm}{\partial t} \Big|_{t=0} \right\} e^{i\omega S_0(x)}, \quad (4.12)$$

где  $\varphi_0^\pm(x, \omega)$  — две произвольные аналитические функции  $\omega$  и бесконечно дифференцируемые функции  $x$ , соответственно положительными и отрицательными. Они отвечают двум корням характеристического многочлена.

Л е м м а 5.6. Начальное условие вида

$$u \Big|_{t=0} = \psi(x, \omega) e^{i\omega S_0(x)}, \\ u_t \Big|_{t=0} = 0$$

или же вида

$$u \Big|_{t=0} = 0, \\ u_t \Big|_{t=0} = \tilde{\psi}(x, \omega) e^{i\omega S_0(x)}$$

может быть представлено с точностью до  $O(\omega^{-(N+1)})$  в виде суммы положительного и отрицательного начальных условий

$$u \Big|_{t=0} = u_N^+ \Big|_{t=0} + u_N^- \Big|_{t=0} + O(\omega^{-(N+1)}), \\ u_t \Big|_{t=0} = 0,$$

либо

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \left( \frac{\partial u_N^+}{\partial t} + \frac{\partial u_N^-}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} + O(\omega^{-(N+1)}), \\ u \Big|_{t=0} = 0,$$

где  $\frac{\partial u^\pm}{\partial t} \Big|_{t=0}$  и  $u_N^\pm \Big|_{t=0}$  определяются формулами (4.4) и (4.12).

Доказательство. Для доказательства леммы необходимо найти такие функции  $\varphi^+(x, \omega)$  и  $\varphi^-(x, \omega)$ , что

$$u \Big|_{t=0} = (u_N^+ + u_N^-) \Big|_{t=0} + O(\omega^{-(N+1)}), \\ u_t \Big|_{t=0} = \left( \frac{\partial u_N^+}{\partial t} + \frac{\partial u_N^-}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} + O(\omega^{-(N+1)}),$$

т. е.

$$\psi(x, \omega) = \varphi^+ + \varphi^- + O(\omega^{-(N+1)}),$$

$$i\omega \left( \frac{\partial S^+}{\partial t} \Big|_{t=0} \varphi^+ + \frac{\partial S^-}{\partial t} \Big|_{t=0} \varphi^- \right) + \frac{\partial v_N^+}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\partial v_N^-}{\partial t} \Big|_{t=0} = O(\omega^{-(N+1)}).$$

Разлагая  $\psi(x, \omega)$ ,  $\varphi^\pm(x, \omega)$  в ряды по степеням  $1/\omega$  и приравнявая коэффициенты при  $1/\omega$  в нулевой степени, получаем

$$\varphi_0^+ + \varphi_0^- = \psi_0,$$

$$(\Phi_0 + c\sqrt{(\nabla S_0)^2 + \gamma^2})\varphi_0^+ + (\Phi_0 - c\sqrt{(\nabla S_0)^2 + \gamma^2})\varphi_0^- = 0.$$

Отсюда

$$\varphi_0^\pm = \frac{\mp \Phi_0 + c\sqrt{(\nabla S_0)^2 + \gamma^2}}{2c\sqrt{(\nabla S_0)^2 + \gamma^2}} \psi_0.$$

Приравнявая коэффициенты при  $\omega^{-1}$ , получаем

$$\varphi_1^+ + \varphi_1^- = \psi_1,$$

$$i(\Phi_0 + c\sqrt{(\nabla S_0)^2 + \gamma^2})\varphi_1^+ + i(\Phi_0 - c\sqrt{(\nabla S_0)^2 + \gamma^2})\varphi_1^- = B_1^+\psi_0 + B_1^-\psi_0,$$

поскольку  $v_0(x, 0) = \psi_0(x)$ . Отсюда

$$\varphi_1^\pm = \mp \frac{(\Phi_0 \mp c\sqrt{(\nabla S_0)^2 + \gamma^2})\psi_1 + B_2\psi_0}{2c\sqrt{(\nabla S_0)^2 + \gamma^2}},$$

где  $B_2\psi_0 = i(B_1^+ + B_1^-)\psi_0$ . Аналогичным образом могут быть получены и  $\Phi_k^\pm(x)$  при  $k \leq N$ . Подобные формальные разложения начальных условий налагаемые, соответствующие различным корням характеристического многочлена, могут быть произведены и для произвольного уравнения с операторными коэффициентами вида (1.16) гл. 1.

### § 5. Решение уравнений переноса для некоторых уравнений (систем) волнового типа

Важным для решения уравнений переноса будет являться следующее вспомогательное

Предложение 5.1. Пусть уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x), \quad x = (x_1, \dots, x_{n+1}),$$

имеет семейство интегральных кривых  $x(\tau, a_1, \dots, a_n)$ . Тогда справедливо равенство

$$\frac{d}{d\tau} \ln \frac{D(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})}{D(a_1, \dots, a_n, \tau)} = \text{div } F.$$

Это предложение легко получается с помощью небольшой модификации леммы С. Л. Соболева.

Обратимся теперь к рассмотрению конкретных уравнений волнового типа.

Рассмотрим слабо связанную гиперболическую систему с различными характеристиками.

$$L\psi = \frac{\partial^m}{\partial t^m} \psi + \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_{n+1} \leq m \\ k_{n+1} \neq m}} a_{k_1, \dots, k_{n+1}}(x, t) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_{n+1}}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n} \partial t^{k_{n+1}}} \psi = 0. \quad (5.1)$$

Здесь  $\psi = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  — вектор-функция с  $N$  компонентами и матрицы  $a_{k_1, \dots, k_{n+1}}$  при  $k_1 + \dots + k_{n+1} = m$  пропорциональны единичной матрице. Введем следующие обозначения:

$$\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} x, t\right) \equiv \sum_{k_1 + \dots + k_{n+1} = m} a_{k_1, \dots, k_{n+1}}(x, t) \frac{\partial^m}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial t^{k_{n+1}}} + \frac{\partial^m}{\partial t^m},$$

$$\sum a_{k_1, \dots, k_{n+1}} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial t^{k_{n+1}}} = B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} x, t\right).$$

Пусть  $S(x, t)$  — решение одной из ветвей характеристического по отношению к (5.1) уравнения. Подставим в систему  $\varphi = ue^{i\omega S}$  и приравняем нулю коэффициент при  $\omega^{-m+1}$ . Полученное уравнение называется уравнением переноса для (5.1).

Уравнение переноса можно представить в виде

$$\frac{du}{d\tau} + \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho_i \partial \rho_j} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} + B \right) u = 0. \quad (5.2)$$

Здесь  $\tau$  — параметр ( $t|_{\tau=0} = 0, x_{n+1} = t$ ). Вместо  $x, \rho, t$  нужно подставить соответствующие функции  $\tau$ , вычисленные вдоль бихарактеристик системы (5.1), т. е. вдоль характеристик характеристического уравнения.

Сделав замену  $u = \exp\left\{-\int_0^\tau B d\tau\right\} v$ , перепишем уравнение переноса в виде

$$\frac{dv}{d\tau} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho_i \partial \rho_j} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} v = 0.$$

Очевидно, что направление вектора  $v$  не меняется вдоль бихарактеристики. Поэтому можно искать  $v$  в виде

$$v = v_0 e^{J^{-1/2}},$$

где

$$v_0 = \text{const}, \quad J = \frac{D(t, x)}{D(\tau, x_0)}.$$

Получим

$$\frac{d\varphi}{d\tau} - \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \ln J + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho_i \partial \rho_j} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$



Воспользуемся предложением 5.1. Для того чтобы использовать это предложение, выпишем уравнения для  $x(\tau)$ ,  $t(\tau)$ :

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial \Lambda}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial \Lambda}{\partial p_{n+1}}.$$

Имеем

$$\frac{d}{d\tau} \ln J = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Lambda}{\partial p_i} \left( \nabla S, \frac{\partial S}{\partial t}, x, t \right) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Lambda}{\partial p_{n+1}} \left( \nabla S, \frac{\partial S}{\partial t}, x, t \right).$$

Подставляя в уравнение переноса полученное выражение для

$$\frac{d}{d\tau} \ln J,$$

получаем

$$\frac{d\varphi}{d\tau} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_i \partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_{n+1} \partial t} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\tau \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_i \partial x_i} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_{n+1} \partial t} \right) d\tau \right\}.$$

Переходя к интегрированию по  $t$  и учитывая, что

$$J = \frac{D(t, x)}{D(\tau, x_0)} = \frac{Dx}{Dx_0} \frac{dt}{d\tau} = \frac{Dx}{Dx_0} \frac{\partial \Lambda}{\partial p_{n+1}},$$

получим результат, который сформулируем в виде леммы.

**Лемма 5.7.** *Решение уравнения (5.2) имеет вид*

$$u = u(0) \sqrt{\frac{\partial \Lambda}{\partial p_{n+1}} \Big|_{t=0}} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial p_{n+1}} \right)^{-1} \frac{Dx_0}{Dx} \times$$

$$\times \exp \left\{ \int_0^t \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial p_{n+1}} \right)^{-1} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_i \partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_{n+1} \partial t} - B \right] dt \right\}. \quad (5.3)$$

**Пример.** Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(x, t) \Delta u = 0.$$

Здесь

$$\Lambda(p, p_{n+1}, x, t) = p_{n+1}^2 - c^2(x, t) p^2, \quad B \equiv 0.$$

Уравнение переноса имеет вид

$$\frac{du}{d\tau} + u \left( \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - c^2 \Delta S \right) = 0,$$

где  $t$  и  $\tau$  связаны уравнением

$$\frac{dt}{d\tau} = 2p_{n+1},$$

и так как  $p_{n+1}^2 - c^2 p^2 = 0$ , то

$$\frac{dt}{d\tau} = \pm 2c|p|.$$

Вычисляя производные от  $\Lambda$  и подставляя их в (5.3), получаем

$$u = \sqrt{\frac{c_0 |p_0|}{c |p|}} u_0 \sqrt{\frac{Dx_0}{Dx}} \exp \left\{ \int_0^t (\nabla c \cdot p) dt \right\}.$$

Рассмотрим уравнение волнового типа

$$\left\{ \left[ i \frac{\partial}{\partial t} + A\Phi(x, t) \right]^2 + c^2(x, t) \left[ (\nabla - iAA(x, t))^2 - A^2 \gamma^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_k B_k(x, t) \frac{\partial}{\partial x_k} + iAR(x, t) \right\} \psi(x, t) = 0, \quad (5.4)$$

введенное в ч. II, гл. 1, § 2 и включающее в качестве частных случаев различные уравнения квантовой механики. Потребуем, чтобы выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{iS(x,t)A} (-iA^{-1})^k \psi_k(x, t),$$

где  $S(x, t)$  — решение характеристического для (5.4) уравнения, формально удовлетворяло уравнению (5.4). Уравнение, которому должна при этом удовлетворять функция  $\psi_0$ , назовем уравнением переноса для (5.4). Для решения уравнения переноса, соответствующего уравнению (5.4), применим следующий прием. Заменяем в уравнении (5.4) оператор  $iA$  на оператор  $\partial/\partial y$  ( $y$  — новая переменная, которую мы вводим в дополнение к  $x$  и  $t$ ). Тогда (5.4) превратится в слабо связанную гиперболическую систему

$$\left\{ - \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \Phi \right]^2 + c^2 \left[ \left( \nabla - \frac{\partial}{\partial y} A \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \gamma^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_k B_k(x, t) \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial y} R \right\} \psi = 0. \quad (5.4)^*$$

Используя решение уравнения переноса для (5.4)\*, данное выше, и подставляя в конечном результате 1 вместо  $P_v$ , получаем следующий результат.

**Лемма 5.8.** *Решение уравнения переноса для (5.4) имеет вид*

$$\psi_0 = \psi_0(0) \sqrt{\frac{Dx_0}{Dx} \frac{c(x_0, 0)}{c(x, t)}} \sqrt{\frac{(p_0 - A(x_0, 0))^2 - \gamma_0^2}{(p - A(x, t))^2 - \gamma^2}} \times$$

$$\times \exp \left\{ \int_0^t \frac{(1)^v}{2c \sqrt{(p - A)^2 - \gamma^2}} \left[ (p - A)^2 \nabla c^2 - B_k p_k - R \right] dt \right\}.$$

Рассмотрим теперь систему уравнений теории упругости:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda(x) + \mu(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu \Delta u_i + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \operatorname{div} u + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Характеристическое уравнение для (5.5) распадается на ветви, которые имеют вид

$$\frac{\partial S_1^\pm}{\partial t} = \pm a |\nabla S_1^\pm|, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}},$$

$$\frac{\partial S_2^\pm}{\partial t} = \pm b |\nabla S_2^\pm|, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Уравнение переноса для (5.5) определим аналогично тому, как мы это сделали для предыдущих уравнений.

Решения уравнения переноса для  $S_1^\pm$  будем называть продольными волнами, а для  $S_2^\pm$  — поперечными волнами. Характеристическое и бихарактеристическое уравнения будем называть также уравнением Гамильтона—Якоби и системой Гамильтона соответственно. Рассмотрим в отдельности случай продольных и поперечных волн.

а) Продольные волны. Уравнение переноса после подстановки  $u = \varphi \nabla S$ , где  $\varphi$  — скалярная функция, принимает вид  $\nabla S M \varphi \nabla S = 0$ .

Здесь  $M$  — следующий оператор:

$$Mu = \rho u \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + 2\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial t} - (\lambda + \mu) [\operatorname{div} u \nabla S + \nabla(u \nabla S)] - \mu(u \Delta S + 2\nabla u \nabla S) - \nabla \lambda(u \nabla S) - \nabla S(u \nabla \mu) - u(\nabla \mu \nabla S)$$

(мы использовали обозначение

$$\{\nabla u \nabla S\} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial S}{\partial x_j}.$$

Используя уравнение Гамильтона—Якоби, можно получить следующие тождества (здесь и далее без уменьшения общности рассматривается волна, соответствующая  $S^+$ , знаки «+», «-» опускаются):

$$\nabla \frac{\partial S}{\partial t} = -\nabla a |\nabla S| - \frac{a}{2|\nabla S|} \nabla (\nabla S)^2,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = a^2 \frac{\nabla (\nabla S)^2 \nabla S}{2|\nabla S|} + a \nabla a \nabla S.$$

Подставляя  $\varphi \nabla S$  в уравнение переноса и используя предыдущие

равенства и уравнение Гамильтона—Якоби, получаем

$$-(\lambda + 2\mu) [\varphi \Delta S |\nabla S|^2 + 2\nabla \varphi \nabla S |\nabla S|^2 + \varphi \nabla S \nabla (\nabla S)^2] - 2\varphi \nabla \mu \nabla S |\nabla S|^2 - (\nabla \lambda \nabla S) |\nabla S|^2 \varphi + \frac{3}{2} a^2 \rho \varphi \nabla S \Delta (\Delta S)^2 + \rho a \nabla a \nabla S |\nabla S|^2 \varphi - 2a \rho |\nabla S|^3 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2\nabla a \nabla S a |\nabla S|^2 \rho \varphi = 0.$$

Напоминаем, что  $a = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ . Для дальнейшего упрощения уравнения воспользуемся леммой Л. С. Соболева (см. предложение 5.1); если  $x$  удовлетворяет уравнению  $dx/dt = X(t, x)$ , то

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{Dx}{Dx_0} = \operatorname{div} X.$$

Применительно к траекториям данной системы эта лемма дает

$$\Delta S = \frac{|\nabla S|}{a} \left[ \frac{d}{dt} \ln \frac{Dx}{Dx_0} - \frac{\nabla a \nabla S}{|\nabla S|} + \frac{a \nabla S \nabla (\nabla S)^2}{2|\nabla S|^3} \right].$$

Используя это выражение для  $\Delta S$ , а также вытекающее из системы Гамильтона равенство

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\nabla f \nabla S}{|\nabla S|}$$

и тот факт, что  $\rho$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  не зависят явно от времени, приводим уравнение переноса к виду

$$\frac{d}{dt} \ln \left( \frac{Dx}{Dx_0} \frac{1}{a^2} \sqrt{\lambda + 2\mu \varphi} \right) = 0,$$

откуда

$$\varphi = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \frac{\varphi_0}{\sqrt{Dx/Dx_0}} \frac{a}{a_0}.$$

Точно такое же решение получается для волны, соответствующей  $S^-$ . Полученный результат сформулируем в виде леммы.

Лемма 5.9. Вектор-функция

$$u = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \frac{\varphi_0}{\sqrt{Dx/Dx_0}} \frac{a}{a_0} \nabla S$$

удовлетворяет уравнению переноса для уравнения упругости в случае продольных волн.

б) Поперечные волны. Положим  $u = nv_n + v v_v$ , где  $v_n$  и  $v_v$  скалярны,  $n$  и  $v$  — два непрерывно дифференцируемых векторных поля такие, что

$$nv = n \nabla S = v \Delta S = 0 \quad \text{и} \quad n^2 = v^2 = 1.$$

Уравнение переноса имеет вид

$$nM(v_n \cdot n + v_v \cdot v) = 0,$$

$$vM(v_n \cdot n + v_v \cdot v) = 0.$$

Эти уравнения приводятся с использованием тех же тождеств, что и в случае продольных волн, к виду

$$\frac{dv_n}{dt} + v_n \frac{d}{dt} \ln \sqrt{\rho \frac{Dx}{Dx_0}} + v_v \frac{dv}{dt} n = 0,$$

$$\frac{dv_v}{dt} + v_v \frac{d}{dt} \ln \sqrt{\rho \frac{Dx}{Dx_0}} + v_n \frac{dn}{dt} v = 0.$$

Из  $nv=0$  вытекает

$$\frac{dn}{dt} v = - \frac{dv}{dt} n = T.$$

Полагая  $z = v_n + iv_v$ , получаем

$$z = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} z_0 \sqrt{\frac{Dx_0}{Dx}} \exp \left\{ -i \int_0^t T dt \right\}.$$

Окончательный результат формулируем в виде леммы.

**Лемма 5.10. Функция**

$$u = n \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho} \frac{Dx_0}{Dx}} \frac{v_{n_0}}{\cos \gamma} \cos \left[ \int_0^t v \frac{dn}{dt} dt + \gamma \right] +$$

$$+ v \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho} \frac{Dx_0}{Dx}} \frac{v_{n_0}}{\cos \gamma} \sin \left[ - \int_0^t v \frac{dn}{dt} dt + \gamma \right],$$

где  $\gamma$  — константа, удовлетворяет уравнению переноса для уравнения упругости в случае поперечных волн

$$\left( \text{Если } \cos \gamma = 0, \text{ то нужно положить } u = v \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho} \frac{Dx_0}{Dx}} \times \right.$$

$$\left. \times v_{n_0} \cos \left[ \int_0^t v \frac{dn}{dt} dt \right] \right).$$

## ГЛАВА 6

### АСИМПТОТИКА В МАЛОМ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИИ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В этой главе исследуется асимптотика решений уравнений в частных производных  $n$ -го порядка по временной координате с операторными коэффициентами, зависящими от  $x \in \mathbb{R}^n$ . Результаты этой главы будут использованы для построения асимптотики в целом решений гиперболических уравнений.

Первые два параграфа носят вспомогательный характер. Они посвящены асимптотическому разложению интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{iA(x)} g(x) dx, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

где  $g(x)$  — функция со значениями в банаховом пространстве  $B$ ,  $f(x)$  — функция со значениями на прямой, а  $iA$  — производящий оператор группы в  $B$ . Задача заключается в том, чтобы вычислить этот интеграл с точностью до функций, принадлежащих  $D(A^n)$ . На основе полученных в § 2 формул и леммы 5.5 (ч. II) теории возмущений строится асимптотика в малом решений операторных уравнений. При этом предполагается существование, единственность и гладкость решений таких уравнений.

#### § 1. О корне квадратном из оператора в банаховом пространстве

Рассмотрим производящий оператор  $A$  в банаховом пространстве  $B$ , обладающий следующими свойствами:

- 1) оператор  $(1 + \gamma^2 A)^{-1}$  существует, определен всюду в  $B$  и ограничен единицей;
- 2) оператор  $A^{-1}$  существует;
- 3)  $\|e^{iA t}\| \leq M, \quad -\infty < t < \infty.$

Все утверждения лемм, доказанных ниже, непосредственно переносятся и на случай, когда оператор  $A$  удовлетворяет вместо условия 1) условию:

- 1, а) оператор  $(1 - \gamma^2 A)^{-1}$  существует, определен всюду и ограничен единицей.

Эти уравнения приводятся с использованием тех же тождеств, что и в случае продольных волн, к виду

$$\begin{aligned} \frac{dv_n}{dt} + v_n \frac{d}{dt} \ln \sqrt{\rho \frac{Dx}{Dx_0}} + v_v \frac{dv}{dt} n &= 0, \\ \frac{dv_v}{dt} + v_v \frac{d}{dt} \ln \sqrt{\rho \frac{Dx}{Dx_0}} + v_n \frac{dn}{dt} v &= 0. \end{aligned}$$

Из  $nv=0$  вытекает

$$\frac{dn}{dt} v = - \frac{dv}{dt} n = T.$$

Полагая  $z = v_n + i v_v$ , получаем

$$z = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} z_0 \sqrt{\frac{Dx_0}{Dx}} \exp \left\{ -i \int_0^t T dt \right\}.$$

Окончательный результат формулируем в виде леммы.

**Лемма 5.10. Функция**

$$\begin{aligned} u = n \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho} \frac{Dx_0}{Dx}} \frac{v_{n_0}}{\cos \gamma} \cos \left[ \int_0^t v \frac{dn}{dt} dt + \gamma \right] + \\ + v \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho} \frac{Dx_0}{Dx}} \frac{v_{n_0}}{\cos \gamma} \sin \left[ - \int_0^t v \frac{dn}{dt} dt + \gamma \right], \end{aligned}$$

где  $\gamma$  — константа, удовлетворяет уравнению переноса для уравнения упругости в случае поперечных волн

$$\left( \text{Если } \cos \gamma = 0, \text{ то нужно положить } u = v \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho} \frac{Dx_0}{Dx}} \times \right. \\ \left. \times v_{v_0} \cos \left[ \int_0^t v \frac{dn}{dt} dt \right]. \right)$$

## ГЛАВА 6

### АСИМПТОТИКА В МАЛОМ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИИ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В этой главе исследуется асимптотика решений уравнений в частных производных  $n$ -го порядка по временной координате с операторными коэффициентами, зависящими от  $x \in \mathbb{R}^n$ . Результаты этой главы будут использованы для построения асимптотики в целом решений гиперболических уравнений.

Первые два параграфа носят вспомогательный характер. Они посвящены асимптотическому разложению интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{iA(x)} g(x) dx, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

где  $g(x)$  — функция со значениями в банаховом пространстве  $B$ ,  $f(x)$  — функция со значениями на прямой, а  $iA$  — производящий оператор группы в  $B$ . Задача заключается в том, чтобы вычислить этот интеграл с точностью до функций, принадлежащих  $D(A^N)$ . На основе полученных в § 2 формул и леммы 5.5 (ч. II) теории возмущений строится асимптотика в малом решении операторных уравнений. При этом предполагается существование, единственность и гладкость решений таких уравнений.

#### § 1. О корне квадратном из оператора в банаховом пространстве

Рассмотрим производящий оператор  $A$  в банаховом пространстве  $B$ , обладающий следующими свойствами:

- 1) оператор  $(1 + \gamma^2 A)^{-1}$  существует, определен всюду в  $B$  и ограничен единицей;
- 2) оператор  $A^{-1}$  существует;
- 3)  $\|e^{iAt}\| \leq M, \quad -\infty < t < \infty.$

Все утверждения лемм, доказанных ниже, непосредственно переносятся и на случай, когда оператор  $A$  удовлетворяет вместо условия 1) условию:

- 1, а) оператор  $(1 - \gamma^2 A)^{-1}$  существует, определен всюду и ограничен единицей.

В силу теоремы Хилле — Филлипса — Йосиды (см. ч. I, гл. 3, § 1) следует, в частности, что

$$\left\| \frac{1}{1 - i\alpha A_\gamma} \right\| \leq 1 \quad \forall \alpha.$$

Кроме того, имеем

$$\left\| \frac{1}{1 - i\alpha A + \gamma^2 A} \right\| \leq \left\| \frac{1}{1 + \gamma^2 A} \right\| \left\| \frac{1}{1 - i\alpha \frac{A}{1 + \gamma^2 A}} \right\| \leq 1, \quad (1.1)$$

поскольку в силу (2.8) ч. I, гл. 4, § 2

$$\|e^{iB_\gamma t}\| \leq 1,$$

где  $B_\gamma = A/(1 + \gamma^2 A)$ , а значит, в силу той же теоремы Хилле — Филлипса — Йосиды

$$\left\| \frac{1}{1 - i\alpha B_\gamma} \right\| \leq 1.$$

Мы будем пользоваться следующей очевидной формулой «интегрирования по частям»:

$$\int_0^1 e^{iAf(t)} \left( \frac{g(t)}{f'(t)} \right)' dt = -e^{iAf(0)} \frac{g(0)}{f'(0)} - iA \int_0^1 e^{iAf(t)} \frac{g(t)}{f'(t)} df(t). \quad (1.2)$$

Здесь  $g(t)$  — дифференцируемая функция со значениями в  $B$ , обращающаяся в нуль при  $t=1$ . Эта формула справедлива при условии, что интеграл в левой части существует.

**Лемма 6.1. Оператор**

$$T = \frac{2e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} A \int_0^\infty e^{iAx^2} dx$$

существует как оператор в  $B$  на области  $D(A)$ .

**Доказательство.** Пусть  $g \in D(A)$ . Докажем, что

$$f = \int_0^\infty e^{iAx^2} Ag dx \in B. \quad (1.3)$$

Разобьем интеграл (1.3) на сумму двух интегралов:

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty.$$

Очевидно, что  $f_1 = \int_0^1 e^{iAx^2} Ag dx \in B$ :

$$\|f_1\| \leq \int_0^1 \|e^{iAx^2} Ag\| dx \leq \|Ag\|. \quad (1.4)$$

Теперь оценим норму

$$f_2 = \int_1^\infty e^{iAx^2} Ag dx.$$

Сделаем замену  $x^2 = t$ . Имеем

$$f_2 = \int_1^\infty e^{iAx^2} Ag dx = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{e^{iAt} Ag}{\sqrt{t}} dt.$$

Применив формулу интегрирования по частям (1.2), получим

$$\frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{e^{iAt} Ag}{\sqrt{t}} dt = \frac{i}{2} e^{iAg} - \frac{i}{4} \int_1^\infty \frac{e^{iAt} g}{t^{3/2}} dt. \quad (1.5)$$

Первый член правой части, очевидно, не превосходит  $\frac{1}{2} \|g\|$ , а для второго члена справедлива оценка

$$\frac{1}{4} \left\| \int_1^\infty \frac{e^{iAt} g}{t^{3/2}} dt \right\| \leq \frac{1}{4} \int_1^\infty \left\| \frac{e^{iAt} g}{t^{3/2}} \right\| dt \leq \frac{M \|g\|}{4} \left| \int_1^\infty \frac{dt}{t^{3/2}} \right| = M_1 \|g\|.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\|f\| \leq c_1 \|Ag\| + c_2 \|g\|. \quad (1.6)$$

Определим оператор  $P_\alpha$  следующим образом:

$$P_\alpha g = \frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^\infty e^{iA\xi^2} e^{-\alpha\xi^2} g d\xi, \quad (1.7)$$

где  $g \in B$ ,  $\alpha > 0$  — действительное число.

Очевидно, что этот оператор ограничен и определен на всем  $B$ . Действительно,

$$\left\| \int_0^\infty e^{iA\xi^2} e^{-\alpha\xi^2} g d\xi \right\| \leq \int_0^\infty \|e^{iA\xi^2} e^{-\alpha\xi^2} g\| d\xi \leq M \|g\| \int_0^\infty e^{-\alpha\xi^2} d\xi = M_1 \|g\|.$$

**Лемма 6.2. Имеет место равенство**

$$P_\alpha^2 g = \frac{1}{A + i\alpha} g \quad \forall g \in B, \quad \alpha > 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} P_\alpha^2 g &= \frac{4}{\pi i} \int_0^\infty e^{iA\xi^2} e^{-\alpha\xi^2} d\xi \int_0^\infty e^{iA\eta^2} e^{-\alpha\eta^2} g d\eta = \frac{4}{\pi i} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{iAr^2} e^{-\alpha r^2} g r dr d\varphi = \\ &= -i \int_0^\infty e^{i(A+i\alpha)t} g dt = \frac{1}{A + i\alpha} g \end{aligned}$$

(см. [13]).

Лемма 6.3. Для любого  $g \in D(A)$  справедливо равенство

$$T^2 g = Ag.$$

Доказательство. Обозначим  $T_\alpha = AP_\alpha$ ,  $D(T_\alpha) = D(A)$ . Прежде всего докажем, что

$$T_\alpha g \rightarrow Tg \quad (1.8)$$

при  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $g \in D(A)$  в смысле сильной сходимости в  $B$ .

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^\infty e^{iAx^2} e^{-\alpha x^2} Ag \, dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{N^{1/2}} e^{iAx^2} e^{-\alpha x^2} Ag \, dx + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_N^\infty \frac{e^{iAt} e^{-\alpha t} Ag}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{N^2} e^{iAx^2} e^{-\alpha x^2} Ag \, dx - \\ &- \sqrt{\frac{i}{\pi}} \frac{e^{-N\alpha} e^{iAN}}{\sqrt{N}} g - \sqrt{\frac{i}{4\pi}} \int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t^3}} e^{iAt} g \, dt - \\ &- \alpha \sqrt{\frac{i}{\pi}} \int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} e^{iAt} g \, dt. \quad (1.9) \end{aligned}$$

Очевидно, что предел первого члена правой части при  $\alpha \rightarrow 0$ , а затем при  $N \rightarrow \infty$  равен  $Tg$ . Из следующих ниже неравенств следует, что остальные члены правой части (1.9) при  $\alpha \rightarrow 0$ , а затем при  $N \rightarrow \infty$  стремятся к нулю:

- 1)  $\left\| \frac{e^{-N\alpha} e^{iAN} g}{\sqrt{N}} \right\| \leq \frac{M \|g\|}{\sqrt{N}};$
- 2)  $\left\| \int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{t^{1/2}} e^{iAt} g \, dt \right\| \leq \int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{t^{1/2}} \|e^{iAt} g\| dt \leq M \|g\| / \sqrt{N};$
- 3)  $\alpha \left\| \int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t} e^{iAt}}{\sqrt{t}} g \, dt \right\| \leq \alpha M \|g\| \left\| \int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} dt \right\| \leq 2\alpha M \|g\| \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\alpha \pi} M \|g\|.$

Таким образом, (1.8) доказано.

Рассмотрим теперь  $T_\alpha^2$  и докажем, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} T_\alpha^2 = T^2 \text{ на } D(A^2). \quad (1.10)$$

Для  $g \in D(A^2)$  имеем

$$T_\alpha^2 g = T_\alpha (T_\alpha - T) g + T_\alpha T g. \quad (1.10a)$$

Очевидно, что  $A(T_\alpha - T)g = (T_\alpha - T)Ag \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Аналогично доказанному выше неравенству (1.6) имеем

$$\|T_\alpha g_1\| \leq C_1 \|Ag_1\| + C_2 \|g_1\| \text{ для } g_1 \in D(A).$$

Полагая  $(T_\alpha - T)g = g_1$ , получаем

$$\|T_\alpha (T_\alpha - T)g\| \leq C_1 \|A(T_\alpha - T)g\| + C_2 \|(T_\alpha - T)g\| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0. \quad (1.10b)$$

Поскольку  $ATg = TAG \in B$ , ибо  $Ag \in D(A)$ , а значит,  $Tg \in D(A)$ , то в силу (1.8)  $T_\alpha Tg \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} T^2g$ . Отсюда и из (1.10a), (1.10b) следует (1.10).

Очевидно, что

$$\begin{aligned} T_\alpha^2 g &= \frac{4}{\pi i} \int_0^\infty e^{iA\xi^2} e^{-\alpha \xi^2} d\xi \int_0^\infty e^{iA\eta^2 - \alpha \eta^2} d\eta A^2 g = \\ &= -i \int_0^\infty e^{iAt - \alpha t} dt A^2 g = \frac{A^2}{A + i\alpha} g = \left( A - i\alpha - \frac{\alpha^2}{A + i\alpha} \right) g. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\left\| \frac{1}{A + i\alpha} \right\| \leq \frac{M}{\alpha},$$

то отсюда следует, что  $T_\alpha^2 g \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} Ag$  при  $g \in D(A^2)$ . Таким образом,

$$T^2 g = Ag$$

для  $g \in D(A^2)$ . По замыканию в норме  $\|g\| + \|Ag\|$  это тождество продолжается на область  $D(A)$ . Лемма доказана.

Обозначим через  $\bar{P}_\alpha$  комплексно сопряженный к  $P_\alpha$  оператор зиде

$$\bar{P}_\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} \int_0^\infty e^{-iAx^2} e^{-\alpha x^2} dx.$$

Лемма 6.4. Для любой функции  $g \in B$  и  $\alpha > 0$  справедливо равенство

$$P_\alpha \bar{P}_\alpha g = \frac{1}{A + i\alpha} \left\{ \sum_{k=0}^N \frac{c_k \alpha^k}{(A + i\alpha)^k} g + \alpha^N g_N \right\},$$

где  $g_N \in D(A^N)$ , а  $c_k$  — некоторые константы.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} P_\alpha \bar{P}_\alpha g &= \bar{P}_\alpha P_\alpha g = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty e^{-iA\xi^2 - \alpha \xi^2} d\xi \int_0^\infty e^{iA\eta^2 - \alpha \eta^2} g \, d\eta = \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty e^{iAr^2 - \alpha r^2} e^{-2iAr^2 \cos^2 \varphi} g r \, dr = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty e^{iAt - \alpha t} e^{-2iAt \cos^2 \varphi} g \, dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\alpha - iA(1 - 2\cos^2 \varphi)} g = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\alpha + iA \cos 2\varphi} g = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\alpha + iA \cos \varphi} g = \frac{1}{\pi} \int_{C_\delta} \frac{dz}{\alpha + iA \cos z} g, \quad (1.10\text{в})
\end{aligned}$$

где контур  $C_\delta$  состоит из точек

$$z = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \\ \frac{\pi}{2} + \delta e^{i\varphi} & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ x & \text{при } \frac{\pi}{2} + \delta \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Таким образом, на полуокружности

$$\begin{aligned}
i \cos z &= i \cos \left( \frac{\pi}{2} + \delta e^{i\varphi} \right) = \\
&= i \cos \left( \frac{\pi}{2} + \delta \cos \varphi \right) \text{ch}(\delta \sin \varphi) + \sin \left( \frac{\pi}{2} + \delta \cos \varphi \right) \text{sh}(\delta \sin \varphi),
\end{aligned}$$

причем  $\sin \left( \frac{\pi}{2} + \delta \cos \varphi \right) \text{sh}(\delta \sin \varphi) \geq 0$  при  $\delta < \delta_0$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Отсюда следует в силу (1.1)

$$\|(\alpha + i \cos z A)^{-1}\| \leq M/\alpha,$$

когда  $z \in C_\delta$ .

Из (1.10в) следует

$$\begin{aligned}
P_\alpha \bar{P}_\alpha g &= \frac{1}{\pi (iA - \alpha)} \int_{C_\delta} \frac{dz}{\cos z \left[ 1 + \frac{\alpha (1 + \cos z)}{(iA - \alpha) \cos z} \right]} g = \\
&= \frac{1}{\pi (iA - \alpha)} \left\{ \sum_{n=0}^N \int_{C_\delta} \frac{\alpha^n}{\cos z} \left[ \frac{1 + \cos z}{(\alpha - iA) \cos z} \right]^n g dz + \right. \\
&\quad \left. + \int_{C_\delta} \frac{\alpha^{N+1}}{\cos z + \frac{\alpha (1 + \cos z)}{iA - \alpha}} \left[ \frac{1 + \cos z}{(\alpha - iA) \cos z} \right]^{N+1} g dz \right\}.
\end{aligned}$$

Поскольку интеграл

$$\frac{(-i)^n}{\pi} \int_{C_\delta} \frac{1}{\cos z} \frac{(1 + \cos z)^n}{(\cos z)^n} dz$$

существует и равен некоторой константе  $c_n$ , то можно записать

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{C_\delta} \frac{dz}{\cos z + \frac{\alpha (1 + \cos z)}{iA - \alpha}} g &= \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{c_n \alpha^n}{(i\alpha + A)^n} g - \frac{\alpha^{N+1}}{(\alpha - iA)^N} \int_{C_\delta} \frac{(1 + \cos z)^{N+1} dz g}{(iA \cos z + \alpha) (\cos z)^{N+1}}.
\end{aligned}$$

Докажем теперь, что

$$\frac{\alpha}{(\alpha - iA)^N} \int_{C_\delta} \frac{(1 + \cos z)^{N+1}}{(iA \cos z + \alpha) (\cos z)^{N+1}} g dz \in D(A^N).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{A^N \alpha}{(\alpha - iA)^N} \int_{C_\delta} \frac{(1 + \cos z)^{N+1}}{(iA \cos z + \alpha) (\cos z)^{N+1}} g dz \right\| &\leq \\
&\leq \alpha \left\| \left[ i \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha - iA} \right) \right]^N \right\| \cdot \max_{C_\delta} \left| \frac{(1 + \cos z)^{N+1}}{(\cos z)^{N+1}} \right| \times \\
&\quad \times \int_{C_\delta} \|(iA \cos z + \alpha)^{-1} g\| dz \leq M (1 + M)^N \|g\| c(N, \delta).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Заметим, что если  $A$  удовлетворяет условию 1, а), то нужно брать  $-\pi \leq \varphi \leq 0$ .

Лемма 6.5. Для любого  $g \in D(A)$  справедливо равенство

$$T \cdot \bar{T} = Ag. \quad (1.11)$$

Доказательство. Имеем

$$T \bar{T} g = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty e^{iAx^2} A dx \int_0^\infty e^{-iAy^2} Ag dy.$$

Аналогично тому, как было доказано в лемме 6.3 соотношение (1.10), получаем

$$\int_0^\infty e^{iAx^2} A dx \int_0^\infty e^{-iAy^2} Ag dy = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{iAx^2 - \alpha x^2} A dx \int_0^\infty e^{-iAy^2 - \alpha y^2} Ag dy. \quad (1.12)$$

Аналогично тому, как это было проделано в леммах 6.3 и 6.4, получаем

$$\begin{aligned}
1) \quad \frac{4}{\pi} \int_0^\infty e^{iAx^2 - \alpha x^2} dx \int_0^\infty e^{-iAy^2 - \alpha y^2} A^2 g dy &= \frac{1}{\pi} \int_{C_\delta} \frac{dz}{\alpha + iA \cos z} A^2 g = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{C_\delta} \left\{ \frac{A}{i \cos z} + \frac{\alpha}{\cos^2 z} - \frac{\alpha}{\cos^2 z \left( 1 + \frac{iA}{\alpha} \cos z \right)} \right\} g dz;
\end{aligned}$$

$$2) \quad \left\| \frac{1}{1 + \frac{iA \cos z}{\alpha}} \right\| \leq M.$$

Поскольку

$$\frac{1}{i} \int_{C_\delta} \frac{dz}{\cos z} = \pi, \quad \left\| \int_{C_\delta} \frac{dz}{\cos^2 z} g \right\| \leq c_1(\delta) \|g\|,$$

$$\left\| \int_{C_\delta} \frac{dz}{\cos^2 z \left(1 + \frac{iA \cos z}{\alpha}\right)} g \right\| \leq c_2(\delta) M \|g\|,$$

то

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{4}{\pi} \int_0^\infty e^{iAx^2 - \alpha x^2} dx \int_0^\infty e^{-iAy^2 - \alpha y^2} A^2 g dy = Ag.$$

Отсюда и из (1.12) следует равенство (1.11). По замыканию в норме  $\|g\| + \|Ag\|$  оно остается справедливым для всех  $g \in D(A)$ . Лемма доказана.

Лемма 6.6. *Имеет место равенство*

$$\bar{T} = T.$$

Доказательство. Для  $g \in D(A^2)$  по предыдущей лемме

$$T\bar{T}g = Ag.$$

С другой стороны, в силу леммы 6.3

$$T^2g = Ag.$$

Следовательно,

$$T\bar{T}g = T^2g$$

для  $g \in D(A)$ . Значит, для  $g \in D(A^2)$

$$T^2\bar{T}g = T^2g,$$

т. е.

$$A\bar{T}g - ATg = 0.$$

Отсюда в силу условия 3)

$$\bar{T}g = Tg$$

для  $g \in D(A^2)$ : По замыканию в норме  $\|g\| + \|Ag\|$  это равенство сохраняется для всех  $g \in D(A)$ . Лемма доказана.

В дальнейшем оператор  $T$  мы будем обозначать  $T = \sqrt{A}$ , а оператор  $P_\alpha = (A + i\alpha)^{-1/2}$ . Такие обозначения определены доказанными выше леммами.

В случае, когда  $A$  — «отрицательный», т. е. удовлетворяет условию 1, а), под  $\sqrt{|A|}$  мы будем понимать  $\sqrt{-A}$ .

## § 2. Метод стационарной фазы для абстрактных функций

В этом параграфе будут выведены асимптотические формулы метода стационарной фазы применительно к интегралам от абстрактных функций. Метод стационарной фазы для функций со значениями на прямой обоснован, например, в работах [43, 49].

Приведем вначале известный формальный способ получения асимптотических формул метода стационарной фазы. При этом выводе, как мы увидим, встречаются расходящиеся интегралы, которые мы совершенно формально регуляризуем. Заметим, что обоснование метода стационарной фазы, которое здесь будет дано, ни в какой мере не опирается на приведенный ниже прием.

1. **Формальный прием вычисления членов асимптотического ряда.** Рассмотрим интеграл

$$I(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{h} f(x) \right\} \varphi(x) dx, \quad (2.1)$$

где  $\varphi, f \in C^\infty$ ,  $\varphi(x)$  финитна. Для вычисления членов асимптотики  $I(h)$  при  $h \rightarrow 0$  применяем следующий формальный метод.

Пусть  $x = x_0$  — единственная стационарная точка, т. е. точка, в которой  $\text{grad } f(x) = 0$ . Разложим  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  в асимптотические ряды Тейлора в окрестности точки  $x = x_0$ :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0) (x_i - x_0) (x_j - x_0) + \dots,$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial x_j} (x_j - x_{0j}) + \dots$$

Сделаем в интеграле (2.1) замену переменных:

$$x_j - x_{0j} = \sqrt{h} \xi_j.$$

Тогда

$$I(h) = \exp \left\{ \frac{i}{h} f(x_0) \right\} h^{n/2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon |\xi|^2} \exp \left\{ \frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^n f_{jk}(x_0) \xi_j \xi_k \right\} \times$$

$$\times \exp \{ i \sqrt{h} [f_3(x_0, \xi) + \sqrt{h} f_4(x_0, \xi) + \dots] \} (\varphi(x_0) + \varphi_1(x_0, \xi) \sqrt{h} + \dots) d\xi, \quad (2.2)$$

где

$$f_k(x_0, \xi) = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} (x_0) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k},$$

$$f_{jk}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} (x_0),$$

$$\varphi_k(x_0, \xi) = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k}^n \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} (x_0) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}.$$

Поскольку

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(\xi) = \varphi(x_0) + \sqrt{h} \varphi_1(x_0, \xi) + \dots + h^{v/2} \varphi_v(x_0, \xi) + \dots,$$



то имеем

$$\begin{aligned} \psi(x_0, \xi) &= \exp \{i \sqrt{h} f_3(x_0, \xi) + \sqrt{h} f_4(x_0, \xi) + \dots\} \tilde{\psi}(\xi) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} h^{\nu/2} Q_{\nu}(x_0, \xi), \quad (2.3) \end{aligned}$$

где  $Q_{\nu}(x_0, \xi)$  — полином  $\nu$ -й степени относительно  $\xi_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) с коэффициентами, являющимися линейными функциями производных  $f(x)$  до  $\nu$ -го порядка в стационарной точке  $x=x_0$ . Подставив  $\psi(x_0, \xi)$  из (2.3) в (2.2), получим

$$I(h) = \exp \left\{ \frac{i}{h} f(x_0) \right\} h^{n/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} h^{\nu/2} C_{\nu}(x_0), \quad (2.4)$$

где

$$C_{\nu}(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon |\xi|^2} \exp \left\{ \frac{i}{2} \sum_{k,j=1}^n f_{kj}(x_0) \xi_j \xi_k \right\} Q_{\nu}(x_0, \xi) d\xi.$$

При нечетных  $\nu$  функция  $Q_{\nu}(x_0, \xi)$  нечетна и коэффициенты при полных степенях  $h$  обращаются в нуль. Следовательно,

$$I(h) = \exp \left\{ \frac{i}{h} f(x_0) \right\} h^{n/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} h^{\nu} C_{2\nu}(x_0),$$

где  $C_{2\nu}(x_0)$  — линейная функция  $f(x)$  и ее производных по  $x$  до  $2\nu$ -го порядка в точке  $x=x_0$ .

Обоснование этого разложения мы получим, опираясь в основном лишь на формулу интегрирования по частям\*). Как уже было указано в предыдущем параграфе, эта формула для абстрактных функций  $g(x)$  со значениями в гильбертовом пространстве  $B$  и оператора  $A$ , порождающего группу в этом пространстве, имеет следующий вид:

$$\int_a^b e^{iAf(x)} \left( \frac{g(x)}{f'(x)} \right)' dx = - e^{iAf(a)} \frac{g(a)}{f'(a)} - iA \int_a^b e^{iAf(t)} \frac{g(t)}{f'(t)} df(t) \quad (2.5)$$

при условии, что  $g(b)=0$ ,  $g(a)/f'(a) \in B$  и интеграл, стоящий в левой части равенства, существует. Эта формула позволяет перенести известные результаты метода стационарной фазы на абстрактные функции.

Рассмотрим в качестве наиболее простой иллюстрации следующую очевидную лемму.

\*) Нетрудно получить и непосредственное обоснование вышеизложенного метода разложения и регуляризации интегралов, взяв вне носителя функции  $\varphi(x)$  область интегрирования в комплексном пространстве так, чтобы интеграл в формуле (2.4) сходил.

Лемма 6.7. Пусть  $\varphi \in C_0^{\infty}$ ,  $f \in C^{\infty}$ ,  $\Omega$  — носитель  $\varphi(x)$  и  $\text{grad } f(x) \neq 0$  при  $x \in \Omega$ ; тогда  $I(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{i}{h} f(x) \right\} \varphi(x) dx = O(h^N)$ , где  $N$  — любое число.

Доказательство. Очевидно, что

$$I(h) = \frac{h}{i} \int_{\Omega} \frac{1}{\partial f / \partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \exp \left\{ \frac{i}{h} f(x) \right\} \right) \varphi(x) dx. \quad (2.6)$$

Тогда, интегрируя (2.6) по частям, получим, что

$$I(h) = O(h).$$

Продолжая этот процесс, получим утверждение леммы. Для абстрактных функций такая лемма может быть сформулирована следующим образом.

Лемма 6.8. Пусть  $\varphi \in C^{\infty}(B)$  ( $x=(x_1, \dots, x_n)$ ) и финитна,  $\Omega$  — носитель  $\varphi(x)$ ,  $f \in C^{\infty}$  и  $\text{grad } f(x) \neq 0$  при  $x \in \Omega$ ,  $A$  — самосопряженный оператор; тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{iAf(x)} \varphi(x) dx \in D(A^N),$$

где  $N$  — любое целое число.

Доказательство, аналогично лемме 6.7, проводится с помощью формулы (2.5) интегрирования по частям.

2. Одномерный случай. Разложение в асимптотический ряд. В этом пункте мы будем рассматривать интеграл вида

$$\int_a^b e^{iAf(t)} g(t) dt, \quad (2.7)$$

где  $h \in C^{\infty}$ , а  $g \in C^{\infty}[B]$  — бесконечно дифференцируемая функция со значениями в банаховом пространстве  $B$ ,  $A$  — производящий оператор, обладающий свойствами 1)–3), перечисленными в предыдущем параграфе.

В частности, можно рассматривать  $g(t)$  как непрерывную функцию параметра  $h$ :  $g(t) = g(t, h)$  такую, что все ее производные по  $t$  ограничены при  $0 \leq h \leq 1$ , а оператор  $A$  — как оператор умножения на  $1/h$ . В этом случае вся развитая теория будет совпадать с обычным общеизвестным методом стационарной фазы, изложенным, например, в книге Эрдейи «Асимптотические разложения» [49].

Мы будем опираться здесь на результаты предыдущего параграфа и на формулу интегрирования по частям (2.5).

Лемма 6.9. Пусть  $f \in C^{\infty}$ ,  $f'(a)=0$ ,  $f''(a) > 0$ ,  $f'(t) \neq 0$  при  $a < t \leq b$ ,  $g(t)$  — бесконечно дифференцируемая функция со значениями в  $B$ , обращающаяся в нуль вместе со всеми производными при  $t=b$ . Тогда в случае нечетного  $m$  при всех  $\alpha \geq 0$  выполняется

соотношение

$$\begin{aligned} (A + i\alpha)^{(m+1)/2} \int_a^b e^{iAf(t)} (t-a)^m g(t) dt = \\ = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{f''(a)} \right]^{(m+1)/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \exp\left\{\frac{i(m+1)\pi}{4}\right\} e^{iAf(a)} g(a) + \\ + (A + i\alpha)^{-1/2} \exp\{i(A + i\alpha)f(a)\} \varphi_1(a) + \\ + (A + i\alpha)^{-1} \exp\{i(A + i\alpha)f(a)\} \varphi_2(a) + \\ + (A + i\alpha)^{-1} \int_a^{b_1} \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \psi_1(\xi) d\xi + \chi(a), \quad (2.8) \end{aligned}$$

где  $\varphi_1(a)$ ,  $\varphi_2(a)$  — бесконечно дифференцируемые функции от  $a$  со значениями в  $B$ ,  $\psi_1(\xi)$  — бесконечно дифференцируемая функция от  $\xi$  со значениями в  $B$ , обращающаяся в нуль вместе со всеми производными в точке  $b$ ,  $\chi(a) \in D(A^\infty)$  и бесконечно дифференцируема по  $a$ . В случае четного  $m$  при всех  $\alpha \geq 0$  имеет место соотношение

$$\begin{aligned} (A + i\alpha)^{(m+1)/2} \int_a^b e^{iAf(t)} (t-a)^m g(t) dt = \\ = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{f''(a)} \right]^{(m+1)/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \exp\left\{\frac{i(m+1)\pi}{4}\right\} e^{iAf(a)} g(a) + \\ + (A + i\alpha)^{-1/2} e^{iAf(a)} \varphi_3(a) + \\ + (A + i\alpha)^{-1/2} \int_a^{b_1} \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \psi_2(\xi) d\xi + \chi_1(a), \quad (2.9) \end{aligned}$$

где  $\varphi_3(a)$ ,  $\chi_1(a)$  — бесконечно дифференцируемые функции со значениями в  $B$ ,  $\psi_2(\xi)$  — бесконечно дифференцируемая функция  $\xi$  со значениями в  $B$ ,  $\psi_2^{(n)}(b) = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $\chi_1(a) \in D(A^\infty)$ .

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{aligned} I_m = \int_a^b e^{iAf(t)} (t-a)^m g(t) dt = \\ = \int_a^b \exp\{i(A + i\alpha)f(t)\} (t-a)^m e^{\alpha i t} g(t) dt = \\ = \int_a^b \exp\{i(A + i\alpha)f(t)\} (t-a)^m g_1(t) dt = \\ = (i)^{[m/2]} (A + i\alpha)^{-[m/2]} \int_a^b \exp\{i(A + i\alpha)f(t)\} \left[ \frac{d}{dt} \frac{1}{f'(t)} \right]^{[m/2]} g_2(t) dt, \quad (2.10) \end{aligned}$$

где  $g_2(t) = (t-a)^m e^{\alpha i t} g(t)$ , поскольку при  $m > 1$

$$\begin{aligned} \int_a^b \exp\{i(A + i\alpha)f(t)\} \frac{g_1(t) (t-a)^m}{f'(t)} df(t) = \\ = i(A + i\alpha)^{-1} \int_a^b \exp\{i(A + i\alpha)f(t)\} \left( \frac{(t-a)^m g_1(t)}{f'(t)} \right)' dt. \end{aligned}$$

Обозначим

$$f_1(t) = \left( \frac{d}{dt} \frac{1}{f'(t)} \right)^{[m/2]} (t-a)^m g(t) e^{\alpha i t}.$$

Очевидно, что в случае, если  $m$  четно, то  $f_1(a) \neq 0$ , а в случае нечетного  $m$   $f_1(t)$  имеет нуль первого порядка в точке  $t=a$ . Предположим, что  $m$  нечетно. Тогда, интегрируя (2.10) один раз по частям, получаем

$$\begin{aligned} I_m = \left( \frac{i}{f''(a)} \right)^{(m+1)/2} c(m) (A + i\alpha)^{-(m+1)/2} e^{iAf(a)} g(a) + \\ + i^{(m+1)/2} (A + i\alpha)^{-(m+1)/2} \int_a^b \exp\{i(A + i\alpha)f(t)\} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{f'(t)} f_1(t) \right] dt, \quad (2.11) \end{aligned}$$

где  $c(m) = (m-1)!!$ , поскольку

$$\begin{aligned} i \int_a^b \exp\{i(A + i\alpha)f(t)\} f_1(t) dt = \\ = (A + i\alpha)^{-1} \left\{ \exp\{i(A + i\alpha)f(t)\} \frac{f_1(t)}{f'(t)} \Big|_a^b - \int_a^b \exp\{i(A + i\alpha)f(t)\} \left[ \frac{d}{dt} \frac{f_1(t)}{f'(t)} \right] dt \right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что равенство (2.11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{iAf(t)} (t-a)^m g(t) dt = \\ = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{f''(a)} \right]^{(m+1)/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \exp\left\{\frac{i(m+1)\pi}{4}\right\} (A + i\alpha)^{-(m+1)/2} e^{iAf(a)} g(a) + \\ + i^{(m+1)/2} (A + i\alpha)^{-(m+1)/2} \int_a^b \exp\{i(A + i\alpha)f(t)\} \frac{d}{dt} \left[ \frac{f_1(t)}{f'(t)} \right] dt. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Таким образом, задача сводится к изучению интеграла вида

$$I_0 = \int_a^b \exp\{i(A + i\alpha)f(t)\} \varphi(t) dt,$$

где  $\varphi \in C^\infty[B]$ ,  $\varphi(a) \neq 0$ ,  $\varphi^{(k)}(b) = 0$  ( $k=0, 1, \dots$ ). Имеем

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_a^b \exp\{i(A + i\alpha)f(t)\} \varphi(t) dt = \\ &= \exp\{i(A + i\alpha)f(a)\} \int_a^{b_1} \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \varphi(t(\xi)) \frac{dt}{d\xi} d\xi = \\ &= \exp\{i(A + i\alpha)f(a)\} \int_a^{b_1} \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \varphi(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где  $(\xi - a)^2 = f(t) - f(a)$ .

Пусть  $l \in C^\infty$  и при этом

$$l(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi - a > \frac{b_1 - a}{2}, \\ 1 & \text{при } \xi - a \leq \frac{b_1 - a}{4}. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{aligned} I_0 &= \exp\{i(A + i\alpha)f(a)\} \int_a^b \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} l(\xi) \varphi(a) d\xi + \\ &+ \exp\{i(A + i\alpha)f(a)\} \int_a^{b_1} l(\xi) \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} (\varphi_1(\xi) - \varphi(a)) d\xi + \\ &+ \exp\{i(A + i\alpha)f(a)\} \int_a^{b_1} [1 - l(\xi)] \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \varphi_1(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

В силу свойств  $l(\xi)$  получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \varphi(a) l(\xi) d\xi &= \\ &= \int_a^\infty \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \varphi(a) l(\xi) d\xi = \\ &= \int_a^\infty \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \varphi(a) d\xi + \\ &+ \int_a^\infty [l(\xi) - 1] \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \varphi(a) d\xi = \\ &= \int_0^\infty \exp\{i(A + i\alpha)\eta^2\} \varphi(a) d\eta + \int_a^\infty [l(\xi) - 1] \times \\ &\times \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \varphi(a) d\xi = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{A + i\alpha}} \varphi(a) + \int_a^\infty [l(\xi) - 1] \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \varphi(a) d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_a^b \exp\{i(A + i\alpha)f(t)\} \varphi(t) dt &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{A + i\alpha}} \exp\{i(A + i\alpha)f(a)\} \varphi(a) + \\ &+ \exp\{i(A + i\alpha)f(a)\} \int_a^\infty [l(\xi) - 1] \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \varphi(a) d\xi + \\ &+ \exp\{i(A + i\alpha)f(a)\} \left[ \int_a^{b_1} l(\xi) \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} (\varphi_1(\xi) - \varphi(a)) d\xi + \right. \\ &\left. + \int_a^{b_1} [1 - l(\xi)] \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \varphi_1(\xi) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что для любого  $q \in B$  имеет место тождество

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} q(1 - l(\xi)) d\xi &= \\ &= \int_a^\infty \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} q(1 - l(\xi)) d\xi = \\ &= \frac{1}{2i(A + i\alpha)} \int_c^\infty \frac{1 - l(\xi)}{\xi - a} d \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} q = \\ &= \frac{i}{2(A + i\alpha)} \int_c^\infty \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} q \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1 - l(\xi)}{\xi - a} \right) d\xi = \\ &= \left[ \frac{i}{2(A + i\alpha)} \right]^N \int_c^\infty \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} q \left[ \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\xi - a} \right]^N (1 - l(\xi)) d\xi, \end{aligned}$$

где  $c = a + \frac{b_1 - a}{4}$ .

Таким образом,

$$\int_a^\infty \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \varphi(a) (1 - l(\xi)) d\xi \in D(A^\infty).$$

Кроме того, поскольку

$$\begin{aligned} \int_a^{b_1} [1 - l(\xi)] \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \varphi_1(\xi) d\xi &= \\ &= \int_c^\infty [1 - l(\xi)] \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \varphi_1(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

а последний интеграл в силу леммы 6.8 принадлежит  $D(A^\infty)$ , то,

следовательно,

$$\int_a^b \exp \{i(A + i\alpha) f(t)\} \varphi(t) dt = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{A + i\alpha}} \exp \{i(A + i\alpha) f(a)\} \varphi(a) + \exp \{i(A + i\alpha) f(a)\} \int_a^{b_1} l(\xi) d\xi + \\ + \exp \{i(A + i\alpha) (\xi - a)^2\} (\varphi_1(\xi) - \varphi(a)) d\xi + \chi(a),$$

где  $\chi(a) \in D(A^\infty)$  и бесконечно дифференцируема по  $a$ . Очевидно, что

$$\int_a^{b_1} l(\xi) \exp \{i(A + i\alpha) (\xi - a)^2\} (\varphi_1(\xi) - \varphi(a)) d\xi = \frac{i}{2} (A + i\alpha)^{-1} \varphi_1'(a) + \\ + i(A + i\alpha)^{-1} \int_a^{b_1} \exp \{i(A + i\alpha) (\xi - a)^2\} \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{l(\xi) [\varphi_1(\xi) - \varphi(a)]}{2(\xi - a)} \right\} d\xi = \\ = \frac{i}{2} (A + i\alpha)^{-1} \varphi_1'(a) + i(A + i\alpha) \int_a^{b_1} \exp \{i(A + i\alpha) (\xi - a)^2\} \frac{d\psi}{d\xi} d\xi,$$

где

$$\psi(\xi) = \frac{l(\xi) (\varphi_1(\xi) - \varphi(a))}{2(\xi - a)}.$$

Отсюда

$$\int_a^b \exp \{i(A + i\alpha) f(t)\} \varphi(t) dt = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{A + i\alpha}} \exp \{i(A + i\alpha) f(a)\} \varphi_1(a) + \\ + \frac{i}{2} \exp \{i(A + i\alpha) f(a)\} (A + i\alpha)^{-1} \varphi_1'(a) + \\ + i(A + i\alpha)^{-1} \int_a^{b_1} \exp \{i(A + i\alpha) (\xi - a)^2\} \frac{d\psi}{d\xi} d\xi, \quad (2.13)$$

где  $\psi(\xi)$  — бесконечно дифференцируемая функция  $\xi$  со значениями в  $B$  и  $\psi^{(k)}(b_1) = 0, k = 0, 1, \dots, \psi(a) \neq 0$ .

Подставив

$$I_0 = \int_a^b \exp \{i(A + i\alpha) f(t)\} \varphi(t) dt$$

из (2.13) в (2.12), получим

$$\{A + i\alpha\}^{(m+1)/2} \int_a^b e^{iAf(t)} (t-a)^m g(t) dt = \\ = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{f''(a)} \right]^{(m+1)/2} \Gamma \left( \frac{m+1}{2} \right) \exp \left\{ \frac{i(m+1)\pi}{4} \right\} e^{iAf(a)} g(a) + \\ + (A + i\alpha)^{-1/2} \exp \{i(A + i\alpha) f(a)\} \varphi_1(a) + \\ + (A + i\alpha)^{-1} \exp \{i(A + i\alpha) f(a)\} \varphi_2(a) + \\ + (A + i\alpha)^{-1} \int_a^{b_1} \exp \{i(A + i\alpha) (\xi - a)^2\} \psi_1(\xi) d\xi + \chi(a), \quad (2.14)$$

где  $\varphi_1(a), \varphi_2(a), \chi(a)$  — бесконечно дифференцируемые функции  $a$  со значениями в  $B, \chi(a) \in D(A^\infty), \psi_1(\xi)$  — бесконечно дифференцируемая функция  $\xi$  со значениями в  $B$ . Пусть теперь  $m$  четно; тогда

$$\int_a^b e^{iAf(t)} (t-a)^m dt = i^{m/2} (A + i\alpha)^{-m/2} \int_a^b \exp \{i(A + i\alpha) f(t)\} f_1(t) dt, \quad (2.15)$$

где  $f_1(t)$  — бесконечно дифференцируемая функция  $t$ ,

$$f_1(a) = \frac{c_1(m) g_1(a)}{[f''(a)]^{m/2}} \neq 0.$$

Используя (2.13), получим

$$\{A + i\alpha\}^{(m+1)/2} \int_a^b e^{iAf(t)} (t-a)^m g(t) dt = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (i)^{(m+1)/2} \exp \{i(A + i\alpha) f(a)\} \varphi_3(a) + \\ + (A + i\alpha)^{-1/2} \exp \{i(A + i\alpha) f(a)\} \varphi_4(a) + (A + i\alpha)^{-1/2} \times \\ \times \int_a^{b_1} \exp \{i(A + i\alpha) (\xi - a)^2\} \psi_2(\xi) d\xi + \chi_1(a), \quad (2.16)$$

где

$$\varphi_3(a) = e^{iAf(a)} f_1(a) \sqrt{\frac{2}{f''(a)}},$$

$\psi_2(\xi)$  — бесконечно дифференцируемая функция  $\xi$  со значениями в  $B, \varphi_3(a), \varphi_4(a), \chi_1(a)$  — бесконечно дифференцируемые функции  $a$  со значениями в  $B$ ,

$$\chi_1(a) \in D(A^\infty).$$

Поскольку  $f_1(a) = \frac{c_1(m)g(a)}{[f''(a)]^{m/2}}$ , то в случае четного  $m$  имеем

$$\begin{aligned} (A + i\alpha)^{(m+1)/2} \int_a^b e^{iAf(t)} (t-a)^m g(t) dt = \\ = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{f''(a)} \right]^{(m+1)/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \exp\left\{\frac{i(m+1)\pi}{4}\right\} e^{iAf(a)} g(a) + \\ + (A + i\alpha)^{-1/2} e^{iAf(a)} \varphi_4(a) + \\ + (A + i\alpha)^{-1/2} \int_a^{b_1} \exp\{i(A + i\alpha)(\xi - a)^2\} \psi_2(\xi) d\xi + \chi_1(a), \quad (2.17) \end{aligned}$$

где  $\varphi_4(a)$  — бесконечно дифференцируемая функция  $a$  со значениями в  $B$ ,  $\psi_2(\xi)$  — бесконечно дифференцируемая функция  $\xi$  со значениями в  $B$ , обращающаяся в нуль со всеми производными в точке  $\xi = b_1$ ,  $\chi_1(a) \in D(A^\infty)$  и бесконечно дифференцируемая. Лемма доказана.

Положим теперь в формулах (2.8), (2.9)  $\alpha = 0$  и применим эти же формулы к интегралам, стоящим в правых частях равенств (2.8), (2.9), но уже при  $\alpha = \alpha_0 > 0$ . К полученным интегралам вновь применяем формулы (2.8), (2.9) при  $\alpha = \alpha_0$ . Продолжая этот процесс, мы придём к асимптотическому разложению интеграла (2.7) по степеням оператора  $(A + \alpha_0 i)^{-1/2}$ .

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_{-b}^b e^{iAf(t)} g(t) dt,$$

где  $g^{(j)}(-b) = g^{(j)}(b) = 0$  ( $j = 0, 1, \dots$ ),  $f'(a) = 0$ ,  $f''(a) > 0$ ,  $f'(t) \neq 0$  при  $t \neq a$ . Разбив этот интеграл на сумму двух:  $\int_{-b}^a + \int_a^b$ , мы к

каждому из интегралов, стоящих в правой части, можем применить лемму 6.9 и, следовательно, асимптотическое разложение по степеням  $(A + i\alpha_0)^{-1/2}$ . Нетрудно видеть, что при этом останутся лишь четные степени этого оператора, и получаем окончательно

$$\sqrt{A} \int_{-b}^b e^{iAf(t)} g(t) dt = \sum_{j=0}^N \frac{1}{(A + i\alpha_0)^j} e^{iAf(a)} g_j(a) + \mathcal{F}_{N+1}(a), \quad (2.18)$$

где  $\mathcal{F}_{N+1}(a) \in D(A^{N+1})$  и  $N+1$  раз дифференцируемая\*) функция  $a$  со значениями в  $B$ , а  $g_j(a)$  — бесконечно дифференцируемая функция  $a$  со значениями в  $B$ , причем

$$g_0(a) = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{f''(a)} \right]^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \exp\left\{\frac{i\pi}{4} \operatorname{sign} f''(a)\right\} g(a).$$

В случае, когда оператор  $A^{-1}$  ограничен, можно положить  $\alpha_0 = 0$ .

\*) То есть ее  $N+1$  производная принадлежит  $B$ .

**3. Одномерный случай. Первый член разложения.** В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 6.10.** Пусть  $g(t)$  — дифференцируемая  $[m/2] + 1$  раз функция со значениями в банаховом пространстве  $B$  и все ее производные обращаются в нуль в точке  $t = a$ ,  $g(0) \neq 0$ .

Пусть

$$\psi(k) = \int_0^a e^{ikf(t)} t^m g(t) dt, \quad (2.19)$$

где  $a > 0$ ,  $f(t) \in C_{[0,a]}^{[m/2]+3}$  — функция со значениями на прямой,  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) \neq 0$ ,  $f'(t) \neq 0$  при  $t \in (0, a]$ .

Тогда функция  $\psi(k)$  при  $k \rightarrow \infty$  может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \psi(k) = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{|f''(0)|} \right]^{(m+1)/2} \Gamma\left[\frac{m+1}{2}\right] \times \\ \times \exp\left\{\frac{i(m+1)}{4} \pi \operatorname{sign} f''(0)\right\} k^{-(m+1)/2} e^{ikf(0)} g(0), \quad (2.20) \end{aligned}$$

где  $\|\sigma_k\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Очевидно, что функция  $f'(t)$  может быть представлена в виде

$$f'(t) = t\varphi(t),$$

где

$$\varphi(t) \in C_{[0,a]}^{[m/2]+1}.$$

Проинтегрируем (2.19) по частям  $[m/2]$  раз:

$$\begin{aligned} \psi(k) = \int_0^a e^{ikf(t)} \frac{t^m g(t)}{f'(t)} df(t) = \\ = \frac{1}{ik} \int_0^a \frac{t^m g(t)}{f'(t)} de^{ikf(t)} = \frac{(-1)^{[m/2]}}{(ik)^{[m/2]}} \int_0^a e^{ikf(t)} \frac{1}{f'(t)} \left[ \frac{d}{dt} \frac{1}{f'(t)} \right]^{[m/2]} t^m g(t) df(t). \end{aligned}$$

Функция

$$\psi(t) = \frac{1}{f'(t)} \left[ \frac{d}{dt} \frac{1}{f'(t)} \right]^{[m/2]} t^m g(t) \quad (2.21)$$

со значениями в  $B$  при четном  $m$  имеет вид

$$\psi(t) = \frac{c_1(m) \varphi_1(t)}{f'(t)}, \quad c_1(m) = (m-1)!!, \quad (2.22)$$

где  $\varphi_1(t)$  — непрерывно дифференцируемая функция, причем  $\varphi_1(0) = \frac{g(0)}{[f''(0)]^{[m/2]}}$ , и при четном  $m$   $\psi(t)$  имеет полюс первого порядка при  $t=0$ . При нечетном  $m$  функция  $\psi(t)$  может быть

представлена в виде

$$\psi(t) = \frac{c_1(m) \varphi_2(t) t}{f'(t)},$$

где  $\varphi_2 \in C^1$ , причем  $\varphi_2(0) = \frac{g(0)}{[f''(0)]^{(m+1)/2}}$ , а

$$\psi(0) = \frac{c_1(m) g(0)}{[f''(0)]^{(m+1)/2}}. \quad (2.23)$$

Следовательно, при нечетном  $m$   $\psi \in C^1$ . При четном  $m$ , таким образом,

$$\psi(k) = \frac{(-1)^{m/2}}{(ik)^{m/2}} c_1(m) \int_0^a e^{ikf(t)} \varphi_1(t) dt. \quad (2.24)$$

При нечетном  $m$  имеем

$$\begin{aligned} \psi(k) &= \left(\frac{i}{k}\right)^{(m+1)/2} e^{ikf(0)} \psi(0) + \left(\frac{i}{k}\right)^{(m+1)/2} \int_0^a e^{ikf(t)} \psi'(t) dt = \\ &= \left(\frac{i}{k f''(0)}\right)^{(m+1)/2} c_1(m) e^{ikf(0)} g(0) (1 + \sigma_k) = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{|f''(0)|} \right]^{(m+1)/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \times \\ &\quad \times \exp\left\{i \frac{(m+1)\pi}{4} \operatorname{sign} f''(0)\right\} k^{-(m+1)/2} e^{ikf(0)} g(0) (1 + \sigma_k), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где  $\|\sigma_k\|_B \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . При четном  $m$  имеем

$$(k)^{(m+1)/2} \psi(k) = \sqrt{k} \int_0^a e^{ikf(t)} \varphi_3(t) dt = I(k),$$

где  $\varphi_3(t) = i^{m/2} c_1(m) \varphi_1(t)$ .

Поскольку  $f''(0) \neq 0$ , то выберем  $\alpha > 0$  столь малым, что  $f''(t) = 0$  при  $t \in [0, \alpha]$ . Разобьем  $I(k)$  на сумму трех интегралов:

$$I(k) = \sqrt{k} \int_0^{N/\sqrt{k}} e^{ikf(t)} \varphi_3(t) dt + \sqrt{k} \int_{N/\sqrt{k}}^a e^{ikf(t)} \varphi_3(t) dt + \sqrt{k} \int_{N/\sqrt{k}}^a e^{ikf(t)} \varphi_3(t) dt.$$

Оценим последний интеграл:

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{k} \int_{N/\sqrt{k}}^a e^{ikf(t)} \varphi_3(t) dt \right| &= \left| \frac{e^{ikf(t)} \varphi_3(t)}{\sqrt{k} f'(t)} \right|_{N/\sqrt{k}}^a + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{N/\sqrt{k}}^a e^{ikf(t)} \frac{d}{dt} \frac{\varphi_3(t)}{f'(t)} dt \leq \frac{c_1}{\sqrt{k}} \frac{1}{f'(N/\sqrt{k})} + \frac{c_2}{\sqrt{k}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{N/\sqrt{k}}^a \left| \frac{d}{dt} \frac{\varphi_3(t)}{f'(t)} \right| dt \leq \frac{c_3}{N} + \frac{c_4}{\sqrt{k}}, \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} \int_{N/\sqrt{k}}^a \left| \frac{d}{dt} \frac{\varphi_3(t)}{f'(t)} \right| dt &\leq c \int_{N/\sqrt{k}}^a \frac{1}{(f'(t))^2} dt \leq \\ &\leq c_1 \int_{N/\sqrt{k}}^a \frac{|f''(t)|}{(f'(t))^2} dt = \frac{c_1}{|f'(t)|} \Big|_{N/\sqrt{k}}^a \leq \frac{c_2 \sqrt{k}}{N}. \end{aligned}$$

Оценим предпоследний интеграл:

$$\sqrt{k} \int_{N/\sqrt{k}}^a e^{ikf(t)} \varphi_3(t) dt = \frac{1}{i \sqrt{k}} \int_{N/\sqrt{k}}^a \frac{\varphi_3(t)}{f'(t)} d e^{ikf(t)} = O_\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right).$$

Таким образом, переходя последовательно к пределу при  $k \rightarrow \infty$  и  $N \rightarrow \infty$ , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} k^{(m+1)/2} \psi(k) e^{-ikf(0)} &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^N \exp\left\{ik \left[ f\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right) f(0) \right]\right\} \varphi_3\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right) d\xi = \\ &= \varphi_3(0) \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{if''(0)\xi^2/2} d\xi = \varphi_3(0) \sqrt{\frac{2}{|f''(0)|}} \int_0^\infty \exp\{i\xi^2 \operatorname{sign} f''(0)\} d\xi = \\ &= \varphi_3(0) \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(0)|}} \exp\left\{\frac{i\pi}{4} \operatorname{sign} f''(0)\right\} = \\ &= \frac{i^{m/2} c_1(m) g(0)}{|f''(0)|^{m/2}} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(0)|}} \exp\left\{\frac{i\pi}{4} \operatorname{sign} f''(0)\right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \psi(k) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{|f''(0)|} \right]^{(m+1)/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \times \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{i(m+1)\pi}{4} \operatorname{sign} f''(0)\right\} k^{-(m+1)/2} e^{ikf(0)} g(0) (1 + \sigma_k), \end{aligned}$$

где  $\|\sigma_k\|_B \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , что и требовалось.

**З а м е ч а н и е 1.** Из предыдущих оценок следует, что если выполнены все условия предыдущей леммы, за исключением  $f''(0) \neq 0$ , т. е. если  $f''(0) = 0$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\psi(k)| k^{(m+1)/2} = \infty$ .

**4. Многомерный случай.** Пусть теперь  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $g(x) = g(x_1, \dots, x_n)$  — дифференцируемые  $[n/2] + 1$  раз функции со значениями в банаховом пространстве  $B$ , обращающиеся в нуль на границе области  $\Omega_0 = \{ |x_i - x_i^0| \leq \delta, i = 1, \dots, n \}$  вместе со всеми производными,  $x = x_0$  — единственная стационарная точка

функции  $f(x)$ , т. е.

$$\text{grad } f(x_0) = 0.$$

Пусть, далее,

$$\psi(k) = \int_{\Omega_1} e^{ikf(x)} g(x) dx,$$

матрица  $R = \left\| \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{i,j=1}^n$  невырождена и индефинитна,  $f(x) \in C^{[n/2]+4}(\Omega_0)$ .

Лемма 6.11. При высказанных предположениях справедливо равенство

$$\psi(k, x_0) = \frac{e^{i\pi\delta/4} (2\pi)^{n/2}}{k^{n/2} \sqrt{|J|}} e^{ikf(x_0)} g(x_0) (1 + o_k), \quad (2.26)$$

где  $\delta$  — сигнатура квадратичной формы с матрицей  $R$ ,  $J = \det R$ ,  $\|o_k\|_E \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Доказательство. Очевидно, что

$$\psi(k) = \int_{-\delta}^{\delta} \dots \int_{-\delta}^{\delta} \exp\{ikf(x_0 + \eta)\} g(x_0 + \eta) d\eta, \quad \eta = x - x_0. \quad (2.27)$$

При малых  $\eta$

$$f(x_0 + \eta) = f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \eta_i \eta_j + \dots \quad (2.28)$$

Сделаем замену переменных  $\xi_i = \xi_i(\eta)$  ( $i=1, \dots, n$ ), приводящую квадратичную форму

$$Q(\eta) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \eta_i \eta_j$$

к каноническому виду

$$Q(\eta) = \tilde{Q}(\xi) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2.$$

Отсюда следует, что при малых  $\xi$

$$f(\eta + x_0) = f_1(\xi) = f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 + \dots \quad (2.29)$$

Поскольку  $D\xi/D\eta = 1$ , то

$$\psi(k) = \int_{\delta_1}^{\delta} \dots \int_{-\delta_n}^{\delta_n} e^{ikf_1(\xi)} g_1(\xi) d\xi, \quad (2.30)$$

$$g_1(\xi) = g(\eta(\xi) + x_0).$$

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$ ,  $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n < 0$ . Положим  $y_j = |\lambda_j|^{1/2} \xi_j$ , обозна-

чим через  $f_2(y)$ ,  $g_2(y)$  функции

$$f_2(y) = f_1(\xi(y)) - f(x_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p y_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=p+1}^n y_j^2 + \dots,$$

$$g_2(y) = g_1(\xi) = g_1\left(\frac{y_1}{\sqrt{|\lambda_1|}}, \dots, \frac{y_n}{\sqrt{|\lambda_n|}}\right).$$

Поскольку  $dy = \prod_{i=1}^n |\lambda_i|^{1/2} d\xi_i$ , то

$$\psi(k, x_0) = \frac{e^{ikf(x_0)}}{\prod_{i=1}^n |\lambda_i|^{1/2}} \int_{-\delta'_1}^{\delta'_1} \dots \int_{-\delta'_n}^{\delta'_n} e^{ikf_2(y)} g_2(y) dy = \frac{e^{ikf(x_0)}}{\sqrt{|J|}} I(k), \quad (2.31)$$

$$J = \det R = \det \left\| \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{i,j \leq n}.$$

Перейдем к биполярным координатам

$$y_i = rQ_i(\alpha), \quad y_j = \rho Q_j(\beta),$$

$$i=1, \dots, p, \quad j=p+1, \dots, n.$$

Полагая  $g_2(y) = g_3(r, \rho, \alpha, \beta)$ ,  $f_2(y) = f_3(r, \rho, \alpha, \beta)$ , получаем

$$I(k) = \iint d\Omega_1 d\Omega_2 \int_0^a \int_0^b \exp\{ikf_3(r, \rho, \alpha, \beta)\} g_3(r, \rho, \alpha, \beta) r^{p-1} \rho^{n-p-1} d\rho dr, \quad (2.32)$$

где

$$f_3(r, \rho, \alpha, \beta) = \frac{r^2}{2} - \frac{\rho^2}{2} + \dots$$

Очевидно, что  $f_3(r, \rho, \alpha, \beta)$  имеет столько же непрерывных производных по своим аргументам, сколько  $f(t)$ . Имеем (угловые переменные опускаем)

$$f_3(r, \rho) = f_3(r, \rho) - f_3(r, 0) + f_3(r, 0),$$

$$f_3(r, 0) = r^2 f_4(r),$$

$$f_3(r, \rho) - f_3(r, 0) = \rho \frac{\partial f_3(r, 0)}{\partial \rho} - \rho^2 f_5(r, \rho),$$

$$\rho \frac{\partial f_3(r, 0)}{\partial \rho} = \rho r^2 f_6(r).$$

Окончательно

$$f_3(r, \rho) = r^2 [f_4(r) + \rho f_6(r)] - \rho^2 f_5(r, \rho).$$

Полагая

$$\begin{aligned}\xi_1^2 &= r^2 [f_4(r) + \rho f_6(r)], \\ \xi_2^2 &= \rho^2 f_6(r, \rho), \quad \xi_j = \alpha_j, \quad j=3, \dots, p+1, \\ \xi_{p+1+i} &= \beta_i, \quad i=1, \dots, n-p-1,\end{aligned}$$

получаем

$$I(k) = \iint d\Omega_1 d\Omega_2 \int_0^{a_1} \int_0^{b_1} \exp \{ik [\xi_1^2 - \xi_2^2]\} \xi_1^{p-1} \xi_2^{n-p-1} g_4(\xi) d\xi_1 d\xi_2, \quad (2.33)$$

$$g_4(\xi) = g_3[r(\xi), \rho(\xi), \xi_3, \dots, \xi_n] \frac{D(r, \rho)}{D(\xi_1, \xi_2)} [f_4 + \rho f_6]^{-(p-1)/2} (f_6)^{-(n+p+1)/2}.$$

Обозначим через  $f(r, \rho)$  и  $\varphi(r, \rho)$  функции вида

$$f(r, \rho) = r^2 (f_4(r) + \rho f_6(r)), \quad \varphi(r, \rho) = \rho^2 f_6(r, \rho).$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dr} &= \frac{f_r'}{2\sqrt{f}}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial r} &= \frac{\varphi_r'}{2\sqrt{\varphi}}, \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial \rho} &= \frac{f_\rho'}{2\sqrt{f}}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial \rho} &= \frac{\varphi_\rho'}{2\sqrt{\varphi}}\end{aligned}$$

и  $\frac{D(r, \rho)}{D(\xi_1, \xi_2)}$  отличен от нуля при малых  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , то функция

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{D(r, \rho)}{D(\xi_1, \xi_2)} = \left( \frac{D(\xi_1, \xi_2)}{D(r, \rho)} \right)^{-1}$$

является  $[n/2] + 2$  раза дифференцируемой. Следовательно,  
 $g_4 \in C^{[n/2]+1}$ .

Рассмотрим

$$I_1(k) = \int_0^{a_1} \int_0^{b_1} e^{ik(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \xi_1^{p-1} \xi_2^{n-p-1} g_4(\xi) d\xi_1 d\xi_2.$$

Поскольку  $g_4(\xi)$  при  $\xi_1 = a_1$  и  $\xi_2 = b_1$  обращается в нуль со всеми производными, то, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}I_1(k) &= \left(\frac{i}{2k}\right)^q (-1)^{-(n-p-1)/2} \int_0^{a_1} d\xi_1 \int_0^{b_1} \exp \{ik (\xi_1^2 - \xi_2^2)\} \times \\ &\times \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{\xi_1}\right)^{[(p-1)/2]} \xi_1^{p-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{1}{\xi_2}\right)^{[(n-p-1)/2]} \xi_2^{n-p-1} g_4 d\xi_2,\end{aligned} \quad (2.34)$$

где

$$q = [(p-1)/2] + [(n-p-1)/2],$$

функция

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{\xi_1}\right)^{[(p-1)/2]} \xi_1^{p-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{1}{\xi_2}\right)^{[(n-p-1)/2]} \xi_2^{n-p-1} g_4(\xi)$$

имеет нуль в точке  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  не выше первого порядка. Оценим интеграл вида

$$I_2(k, \xi_2) = \int_0^{b_1} e^{-ik\xi_2^2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{\xi_1}\right)^{[(p-1)/2]} \xi_1^{p-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{1}{\xi_2}\right)^{[(n-p-1)/2]} \xi_2^{n-p-1} g_4(\xi) d\xi_2. \quad (2.35)$$

При этом возможны два случая: либо  $n-p-1$  четно, либо  $n-p-1$  нечетно. Пусть  $n-p-1$  четно; тогда

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{\xi_1}\right)^{[(p-1)/2]} \xi_1^{p-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{1}{\xi_2}\right)^{[(n-p-1)/2]} \xi_2^{n-p-1} g_4(\xi) = \\ = (n-p-2)!! \varphi(\xi_1, \xi_2) = c_1(n, p) \varphi(\xi_1, \xi_2).\end{aligned}$$

Функция

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) \in C_{[0, b_1]}^2,$$

$$\begin{aligned}\varphi(\xi_1, 0, \xi_3, \dots, \xi_n) = \varphi(\xi_1, 0) = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{\xi_1}\right)^{[(p-1)/2]} \xi_1^{p-1} g_4(\xi_1, 0, \xi_3, \dots, \xi_n).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_2(k, \xi_1) = c_1(n, p) \int_0^{b_1} e^{-ik\xi_2^2} \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_2.$$

В силу лемм 6.7, 6.10 имеем

$$\begin{aligned}I_2(k, \xi_1) = \frac{1}{2} \frac{c_1(n, p)}{\sqrt{k}} \sqrt{\pi} e^{-i\pi/4} \varphi(\xi_1, 0) + \\ + c_1(n, p) \int_0^{b_1} e^{-ik\xi_2^2} e(\xi_2) \xi_2 \psi(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 + O\left(\frac{1}{k^\infty}\right),\end{aligned}$$

где  $e \in C^\infty$  и к тому же

$$e(\xi_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi_2 \leq \frac{b_1}{4}, \\ 0 & \text{при } \xi_2 \geq \frac{b_1}{2}, \end{cases}$$

$$\xi_2 \psi(\xi_1, \xi_2) = \varphi(\xi_1, \xi_2) - \varphi(\xi_1, 0).$$



Оценим

$$I_3(k, \xi_1) = \int_0^{b_1} e^{-ik\xi_2^2} e(\xi_2) \xi_2 \psi(\xi_1, \xi_2) d\xi_2,$$

$$I_3(k, \xi_1) = -\frac{i}{2k} \psi(\xi_1, 0) - \frac{i}{2k} \int_0^{b_1} e^{-ik\xi_2^2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} (e(\xi_2) \psi(\xi_1, \xi_2)) d\xi_2.$$

Следовательно,

$$I_2(k, \xi_1) = \frac{c_1(n, p)}{\sqrt{k}} \sqrt{\pi} e^{-i\pi/4} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{\xi_1} \right)^{[(p-1)/2]} \xi_1^{p-1} g_4(\xi_1, 0) + \\ + c_2(n, p) \frac{\psi(\xi_1, 0)}{k} + \frac{c}{k} \int_0^{b_1} e^{-ik\xi_2^2} \psi_1(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 + O\left(\frac{1}{k^\infty}\right).$$

Отсюда

$$I_1(k) = \left(\frac{i}{2k}\right)^q (-1)^{[(n-p-1)/2]} \frac{c_1(n, p)}{\sqrt{k}} \sqrt{\pi} e^{-i\pi/4} \times \\ \times \int_0^{a_1} e^{ik\xi_1^2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{\xi_1}\right)^{[(p-1)/2]} \xi_1^{p-1} g_4(\xi_1, 0) d\xi_1 + \frac{c_2(n, p)}{k^{q+1}} \int_0^{a_1} e^{ik\xi_1^2} \psi(\xi_1, 0) d\xi_1 + \\ + \frac{c_3(n, p)}{k^{q+1}} \int_0^{a_1} \int_0^{b_1} \exp\{ik(\xi_1^2 - \xi_2^2)\} \psi_1(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Очевидно, что для

$$I_3(k) = \int_0^{a_1} \int_0^{b_1} \exp\{ik(\xi_1^2 - \xi_2^2)\} \psi_1(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

имеем

$$I_3(k) = \int_0^{a_1} e^{ik\xi_1^2} \psi_1(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 \int_0^b e^{-ik\xi_2^2} d\xi_2 \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ .

Оценим интеграл

$$I_4(k) = \int_0^{a_1} e^{ik\xi_1^2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{\xi_1}\right)^{[(p-1)/2]} \xi_1^{p-1} g_4(\xi_1, 0) d\xi_1.$$

Пусть  $p-1$  четно; тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{\xi_1}\right)^{[(p-1)/2]} \xi_1^{p-1} g_4(\xi_1, 0) = c_4(p) \varphi(\xi_1),$$

где

$$c_4(p) = (p-2)!!, \quad \varphi(\xi_1) \in C^2, \quad \varphi_2(0) = g_4(0).$$

Следовательно, в силу леммы 6.10

$$I_4(k) = c_4(p) \int_0^{a_1} e^{ik\xi_1^2} \varphi(\xi_1) d\xi_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{i\pi/4} g_4(0, 0) (1 + \sigma_k). \quad (2.36)$$

Очевидно, что

$$\int_0^{a_1} e^{ik\xi_1^2} \psi(\xi_1, 0) d\xi_1 = \sigma_k. \quad (2.37)$$

Из (2.36) и (2.37) следует, что

$$I_1(k) = \left(\frac{i}{2k}\right)^q \frac{(-1)^{-(n-p-1)/2}}{k} c_1(n, p) c_4(p) g_4(0, 0) (1 + \sigma_k).$$

Поскольку

$$\sqrt{\pi} c_1(n, p) = \Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right) 2^{(n-p-1)/2},$$

$$\sqrt{\pi} c_4(p) = \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) 2^{(p-1)/2},$$

$$g_4(0, 0) = g(x_0) 2^{n/2},$$

$$i^q (-1)^{-(n-p-1)/2} = e^{i\pi\delta/4},$$

$\delta$  — сигнатура квадратичной формы с матрицей

$$R = \left\| \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|,$$

то

$$I_1(k) = \frac{e^{i\pi\delta/4} 2^{n/2}}{k^{n/2}} \Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) g(x_0) (1 + \sigma_k).$$

Отсюда и из того, что

$$\iint d\Omega_1 d\Omega_2 = (\pi)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right),$$

следует

$$I(k) = \frac{e^{i\pi\delta/4} (2\pi)^{n/2}}{k^{n/2} \sqrt{|J|}} g(x_0) e^{ikf(x_0)} (1 + \sigma_k),$$

где  $\|\sigma_k\|_{B \rightarrow 0}$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Все остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Аналогично, опираясь на лемму 6.9, можно получить асимптотическое разложение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{iAf(x)} g(x) dx, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (2.38)$$

где  $f(x) \in C^\infty$ ,  $\text{grad } f(x_0) = 0$ ,  $\text{grad } f(x) \neq 0$  при  $x \neq x_0$ ,  $g(x) \in C^\infty(B)$

и финитна, оператор  $A$  удовлетворяет условиям 1)–3) § 1. Именно, справедлива

Лемма 6.12. При высказанных предположениях имеет место разложение

$$A^{n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{iA f(x)} g(x) dx = e^{i f(x_0) A} \sum_{j=0}^N \frac{1}{(A + i\alpha)^j} g_j(x_0) + \mathcal{F}_{N+1}(x_0), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (2.39)$$

где  $g_j(x_0)$  ( $J \leq N$ ) — бесконечно дифференцируемая функция  $x_0$  со значениями в  $B$ :  $\mathcal{F}_{N+1}(x_0) \in D(A^{N+1})$  и  $N+1$  раз дифференцируема в  $B$ , а

$$g_0(x) = \frac{(2\pi)^{n/2} e^{i\pi\delta/4}}{\sqrt{|J|}}.$$

Заметим, что здесь, так же как и в одномерном случае (2.19), разложение ведется по целым степеням резольвенты  $(A + i\alpha)^{-j}$ . Нетрудно убедиться, что члены, содержащие  $1/(A + i\alpha)$  в полужелых степенях, обращаются в нуль, вследствие интегрирования по угловым координатам в представлении (2.33), точно так же, как это имеет место и для асимптотического разложения по методу стационарной фазы для обычных функций [42, 43].

Аналогичная формула имеет место и для оператора  $A$ , удовлетворяющего условиям 1), 1, а), 2) § 1. При этом функции  $g_j(x_0)$  в формуле (2.39) будут комплексно сопряжены с соответствующими функциями, получаемыми при асимптотических разложениях интеграла (2.38), с «положительным» оператором  $A$ , удовлетворяющим условиям 1), 2), 3) § 1, и вместо  $A^{n/2}$  нужно взять  $|A|^{n/2}$ , т. е.  $(-A)^{n/2}$ .

Очевидно, что асимптотическое разложение можно получить в случае, когда  $A$  не удовлетворяет условию 1) или 1, а) и 2), но можно разложить  $g(t)$  на сумму  $g_+(t)$  и  $g_-(t)$ :

$$g_+(t) \in B_+ \subset B, \quad g_-(t) \in B_- \subset B,$$

причем сужение оператора  $A$  на  $B_+$  удовлетворяет условиям 1) и 2), а сужение оператора  $A$  на  $B_-$  удовлетворяет условиям 1, а) и 2). Кроме того, разложение можно применить также в случае, когда  $g(t)$  есть обобщенная функция в смысле п. 2 § 1 гл. 1. Для этого достаточно подействовать на обе части равенства (2.39) оператором  $A^l$ , где  $l$  — любое целое положительное число, и учесть, что

$$A^l D(A^m) = D(A^{m-l}).$$

Пример. Пусть  $B = L_2[-\infty, \infty]$  — гильбертово пространство функций от  $\tau$ ,  $-\infty \leq \tau < \infty$ ,  $A = \frac{\partial}{i \partial \tau}$ ,  $g(t, \tau) = g_0(t) \delta(\tau)$  (см. гл. 2, § 1, п. 6),  $g_0(t) \in C^\infty$ . Тогда  $g_0(t) \delta_+(\tau) \in B_+$ , а  $g_0(t) \delta_-(\tau) \in B_-$ .

Пусть  $f(t) \in C^\infty$ ,  $\text{grad } f(t) = 0$  лишь при  $t=0$ . Имеем

$$e^{iA f(t)} g_0(t) \delta(\tau) = g_0(t) \delta(\tau - f(t)).$$

Таким образом, при  $n$  четном имеем

$$\int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a g_0(t) \delta^{(n/2)}(\tau - f(t)) dt = \frac{(2\pi)^{n/2} g_0(0)}{\sqrt{|J|}} \{ e^{i\pi\delta/4} \delta_+[\tau - f(0)] + e^{-i\pi\delta/4} \delta_-^*[\tau - f(0)] \} + \mathcal{F}(\tau) = \frac{2(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{|J|}} g_0(0) \text{Re} \{ e^{i\pi\delta/4} \delta_+[\tau - f(0)] \} + \mathcal{F}(\tau),$$

где  $\mathcal{F}(\tau) \in L_2$ ,  $\delta$  и  $J$  определены выше.

Заметим, наконец, что в многомерном случае имеет место утверждение, аналогичное замечанию к лемме 6.10. Это эквивалентно следующему утверждению. Пусть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{n/2} I(k) < \infty$$

для любой функции  $g(x)$ ; тогда

$$\det \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$$

отличен от нуля в стационарной точке и метод стационарной фазы применим.

### § 3. Асимптотика в малом решений абстрактных уравнений

1. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами. Пусть дана последовательность вложенных друг в друга банаховых пространств  $B^{v+1} \subset B^v$  ( $v=1, 2, \dots$ ), которая определяет линейное пространство  $B^\infty$  со счетным числом норм вида

$$\|\cdot\|_{B^v}, \quad v=1, 2, \dots$$

Рассмотрим оператор

$$L = \sum_{i=0}^m L_i(\rho_1, \dots, \rho_n, x_1, \dots, x_{n+1}, h) \rho_{n+1}^i, \quad x_{n+1} = t,$$

зависящий от  $2n+2$  параметров и отображающий счетно-нормированное пространство  $B^\infty$  в себя. Предположим, что оператор  $L$  бесконечно дифференцируем по всем параметрам, т. е. все его частные производные отображают  $B^\infty$  в себя.

Теперь рассмотрим счетно-нормированное пространство  $R_h$  функций  $x_1, \dots, x_{n+1}, h$  со значениями в  $B^\infty$ . Пространство  $R_h$

определяется счетным множеством норм вида

$$\max_{\substack{0 \leq x_{n+1} \leq T \\ 0 \leq h \leq 1}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \prod_{v,m} \left( ih \frac{\partial}{\partial x_v} \right)^{l_v} x_m^{l_m} f(x_1, \dots, x_{n+1}, h) \right\|_{B^k}^2 dx_1 \dots dx_n \leq \leq \text{const}, \quad 1 \leq v, m \leq n+1.$$

Пусть  $V_h$  — некоторое счетно-нормированное пространство, объемлющее  $R_h$ :  $V_h \supseteq R_h$ . Обозначим через  $R_h^0$  подпространство  $R_h$  функций, не зависящих от  $x_{n+1}$ .

**З а м е ч а н и е.** В этой главе мы будем проводить доказательства для случая, когда пространства  $B^i$  ( $i=1, \dots, \infty$ ) гильбертовы, используя тот факт, справедливый лишь в этом случае, что  $\Phi_{1/h}^0 R_h \subset R_h$ . Если же пространства  $B^i$  банаховы, то мы можем утверждать лишь, что  $h^{n/2} \Phi_{1/h}^0 R_h \subset R_h$ . Это обстоятельство не влияет на ход доказательства приводимых здесь теорем, но сказывается на оценке, которая понадобится при доказательстве теоремы 4.4. В пространстве  $R_h$  рассмотрим оператор

$$\hat{L} = \sum_{j=0}^m \hat{L}_j \left( -ih \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -ih \frac{\partial}{\partial x_n}, x_1, \dots, x_{n+1}, h \right) \left( ih \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \right)^j,$$

причем операторы  $-ih \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -ih \frac{\partial}{\partial x_n}$  действуют первыми, т. е. \*)

$$\begin{aligned} \hat{L}_j(\hat{p}, x, t, h) \varphi(x) &= \\ &= \hat{L}_j \left( -ih \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -ih \frac{\partial}{\partial x_n}, x_1, \dots, x_{n+1}, h \right) \varphi(x) = \\ &= \Phi^{p_1, \dots, p_n} L(p, x, t, h) \Phi^{\xi_1, \dots, \xi_n} \varphi(\xi). \end{aligned}$$

Пусть сужение  $\tilde{L}$  оператора  $\hat{L}$ , определенное на множестве элементов из  $R_h$ , обращающихся в нуль при  $x_{n+1}=0$  вместе со своими  $m-1$  производными по  $x_{n+1}$ , имеет обратный  $\tilde{L}^{-1}$ .

Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1)  $h \tilde{L}^{-1} R_h \subseteq V_h$ ;
- 2) существует единственное решение уравнения

$$\hat{L}\psi = 0, \quad (3.0)$$

\*) Здесь при  $A = 1/h$  (см. гл. 2, § 2)  $\Phi^{p_1, \dots, p_k} \varphi(p) = (-2\pi i h)^{-k/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i p x / h} \times \times \varphi(p) d(p)$ ,  $\Phi^{\xi_1, \dots, \xi_k} = \Phi_A^{\xi_k}$  при  $A = 1/h$ , т. е.  $\Phi^{\xi_1, \dots, \xi_k} \varphi(\xi) = (2\pi i h)^{-k/2} \times \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i p \xi / h} \varphi(\xi) d(\xi)$ .

удовлетворяющее при  $x_{n+1}=t_0$  условиям

$$\frac{\partial^J \psi}{\partial t^J} \in R_h^0, \quad J = 0, \dots, m-1, \quad t = x_{n+1}$$

при  $t_0 \leq x_{n+1} \leq T$ , такое, что

$$h^r \psi \in V_h, \quad T > t_0 \geq 0.$$

Очевидно, что если выполнены условия теоремы 4.1, то выполнены и условия 1), 2). Это следует из леммы 5.2.

Пусть

$$\begin{aligned} \psi(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}, h) &= \\ &= \varphi(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, x_{n+1}, h) \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p, x) \right\}, \end{aligned}$$

где  $S(p, x) = S(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}) \in C^\infty$ , а  $\varphi(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}, h)$  — бесконечно дифференцируемая ограниченная функция при

$$0 \leq h \leq 1, \quad 0 \leq x_{k+1} \leq T$$

и финитная функция аргументов  $p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n$  со значениями в счетно-нормированном пространстве  $B^\infty$ . Для упрощения формул обозначим  $p_{k+1}, \dots, p_{n+1}$  через  $\xi_{k+1}, \dots, \xi_{n+1}$ , а  $x_1, \dots, x_k$  — через  $\eta_1, \dots, \eta_k$  соответственно,  $\hat{p}_i = \xi_i$  при  $i > k$ . Теперь мы можем обозначить

$$\begin{aligned} \psi(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}, h) &= \psi(p, x, h), \\ \hat{L} &= \hat{L}(\eta, x, \hat{p}, \hat{\xi}, h) = \\ &= \hat{L} \left( \eta_1, \dots, \eta_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}, -ih \frac{\partial}{\partial \eta_1}, \dots, -ih \frac{\partial}{\partial \eta_k}, -ih \frac{\partial}{\partial x} h \right), \end{aligned}$$

где  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$ .

**2. Асимптотическое разложение линейного дифференциального оператора с частными производными и операторными коэффициентами.**

**Л е м м а 6.13.** *Имеет место следующее соотношение:*

$$\begin{aligned} \hat{L}(\eta, x, \hat{p}, \hat{\xi}, h) \Phi^{p_1, \dots, p_k} \psi(p, x, h) &= \\ &= \Phi^{p_1, \dots, p_k} \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p, x) \right\} \left\{ L(\eta^0, x, p, \xi^0, 0) \varphi + \right. \\ &\quad \left. + ih \left[ \sum_{j=1}^k \frac{\partial L^0}{\partial \eta_j^0} \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} - \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial L}{\partial \xi_j^0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial x_j} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0} + \sum_{i,j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_j^0} - \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$-2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial x_j} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \xi_j^0} - 2 \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial p_i} \left) \varphi - i \frac{\partial L}{\partial L} \Big|_{h=0} \varphi \right] +$$

$$+ \sum_{i=2}^N h^i p_i \left( p, \frac{\partial}{\partial p}, x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi \Big] + L^{N+1} z_h(\eta, x, h), \quad (3.1)$$

где  $\eta_i^0 = -\frac{\partial S}{\partial p_i}$  ( $i = 1, \dots, k$ ),  $\xi_j^0 = \frac{\partial S}{\partial x_j}$  ( $j = k+1, \dots, n+1$ ),

$p_i \left( x, \frac{\partial}{\partial x}, p, \frac{\partial}{\partial p} \right)$  — полином  $2i$ -го порядка по  $\partial/\partial x$  и  $\partial/\partial p$ ,

$$Z_h(\eta, x, h) \in R_h, \quad L^0 = L(\eta^0, x, p, \xi^0, h) |_{h=0}.$$

Доказательство. Обозначим через  $L_J = \tilde{L}_J(\hat{\eta}, x, p, \hat{\xi}, h)$  оператор, действующий следующим образом:

$$\tilde{L}_J \psi = \tilde{L}_J \left( ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_k}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}, p_1, p_k, -ih \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}, \dots \right.$$

$$\left. \dots, -ih \frac{\partial}{\partial x_n}, h \right) \psi(p, x, h) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{J=k+1}^n d\xi_J \times$$

$$\times \prod_{i=1}^k d\eta_i \exp \left\{ \frac{i}{h} \left( \sum_{J=k+1}^n \xi_J x_J - \sum_{i=1}^k \eta_i p_i \right) \right\} \times$$

$$\times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{h} \left( \sum_{J=1}^k \eta_J p'_J - \sum_{J=k+1}^n \xi_J x'_J \right) \right\} \times \right.$$

$$\times L_J(\eta_1, \dots, \eta_k, x_{k+1}, \dots, x_n, p'_1, \dots, p'_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n, h) \times$$

$$\left. \times \psi(p', x', h) \prod_{J=k+1}^n dx'_J \prod_{i=1}^k dp'_i \right].$$

Очевидно, что

$$\tilde{L} = \sum_{J=0}^m \tilde{L}_J \hat{\xi}_{n+1}^J = \Phi^{x_1 \dots x_k} L \Phi^{p_1 \dots p_k}.$$

Рассмотрим пространство  $C^\infty[\mathbf{R}^{n+2}, B^\infty]$  функций от

$$p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}, h, \quad 0 \leq h \leq 1,$$

$$0 \leq \alpha_{n+1} \leq a, \quad 0 \leq |p| < \infty, \quad 0 \leq |x| < \infty,$$

со значениями в  $B^\infty$  и пространство  $C_0^\infty[\mathbf{R}^{n+2}, B^\infty]$  функций тех же аргументов в области

$$0 \leq h \leq 1, \quad -\infty < x_{n+1} < \infty, \quad 0 \leq |p| < \infty,$$

$$0 \leq |x| < \infty$$

со значениями в  $B^\infty$ , обращающихся в нуль вне интервала

$$-\delta \leq x_{n+1} \leq a + \delta.$$

Пусть  $\varphi \in C^\infty[\mathbf{R}^{n+2}, B^\infty]$ , а  $\varphi_0 \in C_0^\infty[\mathbf{R}^{n+2}, B^\infty]$  и  $\varphi_0 = \varphi$  при  $0 \leq x_{n+1} \leq a$ . Положим

$$\psi = \varphi(p, x, h) \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p, x) \right\},$$

$$p = (p_1, \dots, p_k),$$

$$x = (x_{k+1}, \dots, x_{n+1}).$$

Очевидно, что  $\tilde{L}\psi_0 = \tilde{L}\psi$  при  $0 \leq x_{n+1} \leq a$  и функция  $L\psi_0$  может быть представлена интегралом вида

$$\tilde{L}\psi_0 = I(x, p, h) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi h)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{J=k+1}^{n+1} d\xi_J \prod_{i=1}^k d\eta_i \exp \left\{ \frac{i}{h} \left( \sum_{J=k+1}^{n+1} \xi_J x_J - \sum_{i=1}^k \eta_i p_i \right) \right\} \times$$

$$\times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[ \sum_{J=1}^k \eta_J p'_J - \sum_{J=k+1}^{n+1} \xi_J x'_J \right] \right\} L(\eta, x, p', \xi, h) \varphi_0(p', x', h) \times \right.$$

$$\left. \times \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p', x') \right\} \prod_{J=k+1}^{n+1} dx'_J \prod_{i=1}^k dp'_i \right].$$

Обозначим через  $I_1(\eta, x, \xi, h)$  интеграл вида

$$I_1(\eta, x, \xi, h) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[ \sum_{J=1}^k \eta_J p'_J - \sum_{J=k+1}^{n+1} \xi_J x'_J \right] \right\} L(\eta, x, p', \xi, h) \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p', x') \right\} \varphi_0(p', x', h) \prod_{J=k+1}^{n+1} dx'_J \prod_{i=1}^k dp'_i. \quad (3.2)$$

Пусть  $\Omega$  — носитель функции  $\varphi_0(p', x', h)$ . Обозначим

$$\Omega_{\xi_j^0} = \frac{\partial S}{\partial x_j}(\Omega), \quad \Omega_{\eta_j^0} = -\frac{\partial S}{\partial p_i}(\Omega),$$

$$j = k+1, \dots, n+1, \quad i = 1, \dots, k.$$

Возьмем финитную функцию  $\Phi(\eta, \xi)$ , носитель которой содержит область  $\Omega_0 = \prod_{i,j} \Omega_{\eta_j^0} \times \Omega_{\xi_j^0}$ , причем  $\Phi(\eta, \xi) = 1$  при  $\eta, \xi \in \Omega_0$ .

Рассмотрим интеграл

$$I_2(x, p, h) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{J=k+1}^{n+1} d\xi_J \prod_{i=1}^k d\eta_i (1 - \Phi(\eta, \xi)) \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{h} \left( \sum_{J=k+1}^{n+1} \xi_J x_J - \sum_{i=1}^k \eta_i p_i \right) \right\} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{h} \sum_{j=1}^k \eta_j p'_j \right\} \times \right.$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{i}{h} \sum_{j=k+1}^{n+1} \xi_j x_j' \right\} L(\eta, x, p', \xi, h) \exp \left\{ -\frac{i}{h} S(p', x') \right\} \varphi_\delta(p', x', h) \times \\ \times \prod_{j=k+1}^{n+1} dx_j' \prod_{j=1}^k dp_j' \Big].$$

Из определения  $\Phi(\eta, \xi)$  следует, что  $I_2(x, p, h)$  отличен от нуля лишь при  $\eta, \xi \in \Omega_0$ , т. е. при

$$\xi \neq \text{grad}_x S(p', x'), \quad \eta \neq -\text{grad}_p S(p', x').$$

Но если  $\eta, \xi \notin \Omega_0$ , то  $I_1(\eta, x, \xi, h)$  не имеет стационарных точек. В силу леммы 5.7

$$I(x, p, h) = I_3(x, p, h) + O(h^N),$$

где

$$I_3(x, p, h) = \frac{1}{(2\pi h)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta, \xi) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{h} \left( \sum_{j=k+1}^{n+1} \xi_j x_j - \sum_{i=1}^k \eta_i p_i \right) \right\} L(\eta, x, p', \xi, h) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{h} \left( \sum_{j=1}^k \eta_j p_j - \sum_{j=k+1}^{n+1} \xi_j x_j' \right) \right\} \varphi_\delta(p', x', h) \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p', x') \right\} \times \\ \times \prod_{j=k+1}^{n+1} dx_j' d\xi_j' \prod_{i=1}^k dp_i' d\eta_i, \quad (3.3)$$

$N$  — любое целое число.

Для вычисления  $I_3(x, p, h)$  применяем метод стационарной фазы. Стационарными точками

$$\xi_j^0, x_j^0, p_i^0, \eta_i^0, \quad j = k+1, \dots, n+1, \quad i = 1, \dots, k,$$

являются решения системы

$$x_j^0 = x_j, \quad \frac{\partial S(p^0, x^0)}{\partial x_j^0} = \xi_j^0, \quad j = k+1, \dots, n+1,$$

$$\frac{\partial S(p^0, x^0)}{\partial p_i^0} = -\eta_i^0, \quad p_i^0 = p_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Эта система, очевидно, имеет единственное решение

$$\xi_j^0 = \frac{\partial S(p, x)}{\partial x_j}, \quad j = k+1, \dots, n+1,$$

$$x_j^0 = x_j,$$

$$\eta_i^0 = -\frac{\partial S(p, x)}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$p_i^0 = p_i.$$

Поскольку определитель

$$\det \begin{vmatrix} 0 & \|\delta_{ij}\| & 0 & 0 \\ \|\delta_{ij}\| & \left\| \frac{\partial^2 S(p, x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \right\| & \|\delta_{ij}\| \\ 0 & 0 & \|\delta_{ij}\| & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

то можно непосредственно применить метод стационарной фазы к  $I_3(x, p, h)$ .

Применяя метод стационарной фазы к  $I_3(x, p, h)$  и учитывая, что

$$I(x, p, h) = I_3(x, p, h) + O(h^N),$$

получим

$$I(x, p, h) = \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p, x) \right\} \left\{ L(\eta^0, x, p, \xi^0, 0) \varphi_\delta(p, x, h) + \right. \\ \left. + ih [a_0 L(\eta^0, x, p, \xi^0, 0) + \sum_{j=1}^k a_j \frac{\partial L^0}{\partial \eta_j^0} + \sum_{j=k+1}^{n+1} b_j \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^k c_i \frac{\partial L^0}{\partial p_i} + \sum_{i,j=1}^k a_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0} + \sum_{i,j=k+1}^{n+1} b_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_j^0} + \right. \\ \left. + \sum_{i,j=1}^k c_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial p_i \partial p_j} + \sum_{i,j=1}^k d_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial p_j} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{n+1} e_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \xi_j^0} + \right. \\ \left. + \sum_{j=k+1}^{n+1} \sum_{i=1}^k f_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial p_i \partial \xi_j^0} - i \frac{\partial L}{\partial h}(\eta^0, x, p, \xi, h) \Big|_{h=0} \varphi_\delta(x, p, h) \right\} + \\ \left. + \sum_{i=2}^N h^i p_i(x, \xi, p, \hat{\eta}) \varphi_\delta(p, x, h) + h^{N+1} z_h(p, x, h) \right\}. \quad (3.4)$$

Здесь

$$L^0 = L(\eta^0, x, p, \xi^0, h)|_{h=0}, \quad \eta_i^0 = -\frac{\partial S}{\partial p_i},$$

$$\xi_j^0 = \frac{\partial S}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = k+1, \dots, n+1,$$

$p_i(x, \xi, p, \hat{\eta})$  — полином  $2i$ -й степени относительно  $\hat{\xi}, \hat{\eta}$ ,  $a_i, b_i, c_i, a_{ij}, b_{ij}, d_{ij}, e_{ij}, f_{ij}$  — коэффициенты, зависящие от  $p$  и  $x$ . Определим их. Пусть  $\tilde{L}(\hat{\eta}, x, p, \hat{\xi}, h) = c_0 = \text{const}$ ; тогда, очевидно,

$$I(x, p, h) = c_0 \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p, x) \right\} \varphi_\delta(p, x, h).$$

Из (3.4) следует, что  $a_0 = 0$ . Пусть теперь

$$\tilde{L}(\hat{\eta}, x, p, \hat{\xi}, h) = \hat{\eta}_i + \hat{\xi}_j + p_v.$$

В этом случае очевидно, что  $I(x, p, h)$  можно представить в виде

$$I(x, p, h) = \left[ ih \left( \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + p_\nu \right] \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p, x) \right\} \varphi_\delta(p, x, h).$$

Следовательно,

$$I(x, p, h) = \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p, x) \right\} \left[ p_\nu \varphi_\delta + \varphi_\delta \left( \frac{\partial S}{\partial x_j} - \frac{\partial S}{\partial p_i} \right) + ih \left( \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_j} \right) \right].$$

Поскольку

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \xi_i} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \hat{\eta}_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p_j} = \delta_{\nu j},$$

то из (3.4) получаем

$$a_j = \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial p_j}, \quad j = 1, \dots, k, \quad (3.5)$$

$$b_j = - \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_j}, \quad j = k+1, \dots, n+1, \quad (3.6)$$

$$c_j = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.7)$$

Пусть, далее,  $\tilde{L}(\hat{\eta}, x, p, \hat{\xi}, h) = \hat{\eta}_i \hat{\eta}_j + \hat{\xi}_i \hat{\xi}_m$ . В этом случае

$$I(x, p, h) = -h^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_l} + \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right) \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p, x) \right\} \varphi_\delta(p, x, h).$$

Следовательно,

$$I(x, p, h) = \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p, x) \right\} \left[ \frac{\partial S}{\partial x_l} \frac{\partial S}{\partial x_m} \varphi_\delta + \frac{\partial S}{\partial p_i} \frac{\partial S}{\partial p_j} \varphi_\delta - ih \left( \frac{\partial S}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_m} + \frac{\partial S}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_l} \right) - ih \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x_m \partial x_l} + \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \right) \varphi_\delta - h^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_\delta}{\partial x_m \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varphi_\delta}{\partial p_i \partial p_j} \right) - ih \left( \frac{\partial S}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial p_j} + \frac{\partial S}{\partial p_j} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial p_i} \right) \right]. \quad (3.8)$$

Из (3.4) и (3.8) следует

$$a_{ij} + a_{ji} = - \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \varphi_\delta, \quad (3.9)$$

$$b_{ij} + b_{ji} = - \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \varphi_\delta. \quad (3.10)$$

Подставив  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  из (3.9), (3.10) в (3.4), получим

$$\sum_{i,j=1}^k a_{ij} \frac{\partial^2 L}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0} = - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial^2 L}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0}, \quad (3.11)$$

$$\sum_{i,j=k+1}^{n+1} b_{ij} \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_j^0} = - \frac{1}{2} \sum_{i,j=k+1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_j^0}. \quad (3.12)$$

Пусть теперь  $\tilde{L}(\hat{\eta}, x, p, \hat{\xi}, h) = p_i p_j + \hat{\eta}_m p_l$ . В этом случае

$$I(x, p, h) = \left( ih \frac{\partial}{\partial p_m} p_l + p_i p_j \right) \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p, x) \right\} \varphi_\delta(p, x, h) = p_i p_j \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p, x) \right\} \varphi_\delta(p, x, h) + e^{iS/h} \left( ih \delta_{ml} \varphi_\delta - p_l \frac{\partial S}{\partial p_m} \varphi_\delta + ih p_l \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial p_m} \right).$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 \tilde{L}(\eta, x, p, \xi, h)}{\partial \eta_i \partial p_j} = \delta_{mi} \delta_{lj},$$

то из (3.4) следует, что

$$\sum_{i,j=1}^k d_{ij} \delta_{mi} \delta_{lj} = \delta_{ml} \varphi_\delta, \quad (3.13)$$

$$d_{mi} = \delta_{mi} \varphi_\delta, \quad c_{ij} = 0.$$

Предположим, что  $\tilde{L} = \hat{\eta}_i \hat{\xi}_m + p_\nu \hat{\xi}_l$ . Следовательно,

$$(x, p, h) = h^2 \frac{\partial^2}{\partial p_l \partial x_m} \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p, x) \right\} \varphi_\delta(p, x, h) - ih p_\nu \frac{\partial}{\partial x_l} \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p, x) \right\} \varphi(p, x, h) = \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p, x) \right\} \times \left[ - \frac{\partial S}{\partial x_m} \frac{\partial S}{\partial p_l} \varphi_\delta + ih \left( \frac{\partial S}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial p_l} + \frac{\partial S}{\partial p_l} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_m} \right) + ih \frac{\partial^2 S}{\partial p_l \partial x_m} \varphi_\delta + h^2 \frac{\partial^2 \varphi_\delta}{\partial p_l \partial x_m} - ih p_\nu \left( \frac{i}{h} \frac{\partial S}{\partial x_l} \varphi_\delta + \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_l} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Отсюда и из (3.4) получаем

$$\sum_{j=k+1}^{n+1} \sum_{i=1}^k l_{ij} \delta_{mi} \delta_{lj} = \frac{\partial^2 S}{\partial p_l \partial x_m} \varphi_\delta. \quad (3.15)$$

Следовательно,

$$l_{lm} = \frac{\partial^2 S}{\partial p_l \partial x_m} \varphi_\delta.$$

Из (3.14) и (3.4) следует, что  $f_{ij} = 0$ . Из соотношений (3.5) — (3.7),

(3.9) — (3.13), (3.15) при  $0 \leq x_{n+1} \leq a$  следует равенство

$$\begin{aligned} \tilde{L}\psi_\delta = \tilde{L}\psi = \tilde{L} \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p, x) \right\} \varphi(p, x, h) = \\ = \frac{1}{(2\pi i h)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=k+1}^{n+1} d\xi_j \prod_{i=1}^k d\eta_i \exp \left\{ \frac{i}{h} \sum_{j=k+1}^{n+1} \xi_j x_j \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{i}{h} \sum_{j=1}^k \eta_j p_j \right\} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{h} \left( \sum_{j=1}^k \eta_j p'_j - \sum_{j=k+1}^{n+1} \xi_j x'_j \right) \right\} \times \right. \\ \left. \times L(\eta, x, p', \xi, h) \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p', x') \right\} \varphi_\delta(p', x', h') \prod_{j=k+1}^{n+1} dx'_j \prod_{i=1}^k dp'_i \right] = \\ = e^{iS/h} \left\{ L^0 \varphi + i h \left[ \sum_{j=1}^k \frac{\partial L^0}{\partial \eta_j^0} \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} - \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0} + \sum_{i,j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_j^0} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial x_j} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \xi_j^0} - 2 \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial p_i} \right) \varphi - \right. \\ \left. - i \frac{\partial L}{\partial h}(\eta^0, x, p, \xi^0, h) \right]_{h=0} \varphi \Big|_{\substack{\eta^0 = -\text{grad}_p S(p, x) \\ \xi^0 = \text{grad}_x S(p, x)}} + \\ + \sum_{i=2}^N h^i p_i \left( x, \frac{\partial}{\partial p}, p, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi + h^{N+1} z_i(p, x, h) \Big\}. \quad (3.16) \end{aligned}$$

В силу того, что

$$\tilde{L}(\eta, x, \hat{p}, \hat{\xi}, h) \Phi^{p_1, \dots, p_k} \psi(x, p, h) = \Phi^{p_1, \dots, p_k} \tilde{L}\psi,$$

а  $\Phi^{p_1, \dots, p_k}$  отображает  $R_h$  в  $R_h$ , мы получаем утверждение леммы.

3. Случай бесконечнократных термов. Рассмотрим оператор  $\hat{L}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}, h)$  в счетно-нормированном пространстве  $R_h$ . Напомним, что

$$\hat{L}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}, h) = \sum_{k=0}^m \hat{L}_k(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n, x_1, \dots, x_{n+1}, h) \hat{p}_{n+1}^k,$$

$$\hat{L}_m \equiv 1, \quad \hat{p}_j = -ih \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\hat{p}_{n+1} = ih \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, \quad x_{n+1} = t,$$

а операторы  $\hat{p}_j$  действуют «первыми», т. е.

$$\begin{aligned} \hat{L}_k(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n, x_1, \dots, x_{n+1}, h) \psi(x_1, \dots, x_n) = \\ = \Phi^{p_1, \dots, p_n} L_k(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_{n+1}, h) \Phi^{\xi_1, \dots, \xi_n} \psi(\xi_1, \dots, \xi_n). \end{aligned}$$

Мы предположим, что

$$L(p_1, \dots, p_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}, 0) \quad (3.16a)$$

является константой в  $B^1$  (зависящей, разумеется, от параметров  $x_1, \dots, x_{n+1}, p_1, \dots, p_{n+1}$ ) (т. е. собственное значение оператора (3.16a) (терм) является бесконечнократным). Здесь

$$\begin{aligned} L(p_1, \dots, p_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}, h) = \\ = \sum_{k=0}^m L_k(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_{n+1}, h) p_{n+1}^k. \end{aligned}$$

Возвращаясь к нашим прежним обозначениям, переобозначим  $L(p_1, \dots, p_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}, h)$  через  $L(\eta, x, p, \xi, h)$ , где

$$\eta = \eta_1, \dots, \eta_k \equiv x_1, \dots, x_k, \quad \xi = \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n+1} \equiv p_{k+1}, \dots, p_{n+1}.$$

Через  $L^0$  обозначим  $L(\eta, x, p, \xi, 0)$ , равный (3.16a) \*).

Таким образом,  $L^0(\eta, x, p, \xi)$  есть многочлен порядка  $m$  относительно  $\xi_{n+1} = p_{n+1}$ . Предположим, что

1) полином  $L^0(\eta, x, p, \xi)$  имеет действительный корень  $\xi_{n+1} \equiv p_{n+1} = \lambda(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, t)$  \*\*)

постоянной кратности и, следовательно,

$$\frac{\partial L^0}{\partial \lambda} = \frac{\partial L^0}{\partial p_{n+1}} \Big|_{p_{n+1} = \lambda(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, t)}$$

отлично от нуля;

2) оператор  $L(p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, x_1, \dots, x_n, t, h)$  вместе со всеми производными по параметрам и оператор  $\exp\{it\partial L/\partial h\}_{h=0}$  отображают  $B^\infty$  в  $B^\infty$ ;

3) выполняются предположения п. 1 § 3.

При этих предположениях для достаточно малого  $t$  существует, очевидно, решение

$$\begin{aligned} S(t) = S(x_0, p_0, t), \quad p(t) = p(x_0, p_0, t), \quad x(t) = x(x_0, p_0, t), \\ x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0k}), \quad p_0 = (p_{0k+1}, \dots, p_{0n}) \end{aligned}$$

системы

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial \lambda}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}, \quad \dot{S} = \lambda - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} p_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.17)$$

\*) В обозначениях § 1 гл. 4  $L^0 = \mathcal{L}_0 \equiv \mathcal{L}_0^* \equiv \lambda(\eta, x, p, \xi)$ .

\*\*) В отличие от обозначений § 1 гл. 4, где корень  $p_{n+1}$  обозначался через  $H(p, x, t)$ .

которое удовлетворяет начальным условиям, отвечающим локальной карте типа  $\tilde{\Omega}_k$  лагранжева подмногообразия, т. е.

$$S(0) = S^0(p_{01}, \dots, p_{0k}, x_{0k+1}, \dots, x_{0n}), \quad (3.18)$$

$$p_i(0) = p_{0i}, \quad i = 1, \dots, k, \quad x_j(0) = x_{0j}, \quad j = k+1, \dots, n,$$

$$x_i(0) = -\frac{\partial S^0}{\partial p_{0i}} = x_{0i}(p_{01}, \dots, p_{0k}, x_{0k+1}, \dots, x_{0n}), \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.19)$$

$$p_j(0) = \frac{\partial S^0}{\partial x_{0j}} = p_{0j}(p_{01}, \dots, p_{0k}, x_{0k+1}, \dots, x_{0n}), \quad j = k+1, \dots, n.$$

Для достаточно малого времени  $t$  существует также, очевидно, единственное решение

$$p_{0i} = p_{0i}(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t), \\ x_{0j} = x_{0j}(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t)$$

неявной системы уравнений

$$p_i(p_{01}, \dots, p_{0k}, x_{0k+1}, \dots, x_{0n}, t) = p_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ x_j(p_{01}, \dots, p_{0k}, x_{0k+1}, \dots, x_{0n}, t) = x_j, \quad j = k+1, \dots, n.$$

Сохраняя обозначения леммы 6.13, положим  $S(p, x) = \tilde{S}(x_0, p_0, t)$  для  $x_0 = x_0(x, p, t)$ ,  $p_0 = p_0(x, p, t)$ . Как известно, решения системы (3.17) — (3.19) в силу теоремы Гамильтона — Якоби удовлетворяют также системе

$$\frac{\partial x_j}{\partial \tau} = \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0}(\eta^0, x, p, \xi^0), \quad j = k+1, \dots, n+1,$$

где

$$\eta_i^0 = -\frac{\partial S}{\partial p_i}, \quad \xi_j^0 = \frac{\partial S}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = k+1, \dots, n+1.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$-\sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial L^0}{\partial \eta_i^0} + \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0} = \frac{d\varphi}{d\tau}. \quad (3.20)$$

Рассмотрим оператор, стоящий в правой части формулы (3.1) в фигурных скобках, на который действует оператор  $\Phi^{p_1, \dots, p_k}$ . Обозначим этот оператор через  $R$ . Таким образом, формула (3.1) переписывается в виде

$$L\Phi^{p_1, \dots, p_k}\psi = \Phi^{p_1, \dots, p_k} \exp\left\{\frac{i}{h}S\right\} R\varphi + h^{N+1}z_i. \quad (3.21)$$

Сделаем замену

$$\varphi = u\sqrt{J},$$

где

$$J = \frac{D(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t)}{D(p_{01}, \dots, p_{0k}, x_{0k+1}, \dots, x_{0n}, t)}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{J}} \left( \frac{du}{d\tau} - \frac{1}{2} u \frac{d}{d\tau} \ln J \right).$$

В силу леммы С. Л. Соболева (см. гл. 5, § 5)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \ln J &= -\sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ \frac{\partial L^0}{\partial \eta_i^0}(\eta^0, x, p, \xi^0) \right\} + \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0}(\eta^0, x, p, \xi^0) \right\} = \\ &= -\sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial p_i} + \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} + \sum_{i,j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_j^0} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} - \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \xi_j^0} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial x_j} + \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 L^0}{\partial x_j \partial \xi_j^0}. \quad (3.22) \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} R\varphi = \tilde{R}u &= \left\{ \frac{h}{\sqrt{J}} \left( -i \frac{du}{d\tau} + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 L^0}{\partial x_j \partial p_j} u + \frac{\partial L}{\partial h} \Big|_{h=0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^N h^i p_i \left( x, \frac{\partial}{\partial x}, p, \frac{\partial}{\partial p} \right) u \right\} = -ih(Au + hBu), \end{aligned}$$

поскольку в этом случае  $L(\eta^0, x, p, \xi^0, 0) = 0$ .

Рассмотрим оператор

$$Ru = -ih(Au + hBu), \quad (3.23)$$

где

$$A = \frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 L^0}{\partial x_j \partial p_j} + i \frac{\partial L}{\partial h} \Big|_{h=0}, \\ B = i \sum_{j=0}^{N-2} h^j P_{j+2} \left( x, \frac{\partial}{\partial p}, p, \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Обозначим через  $\tilde{A}$  сужение оператора  $A$  на множестве функций, обращающихся в нуль при  $\tau=0$ . Очевидно, что  $\tilde{A}^{-1}$  существует.

Поскольку  $P_i \left( x, \frac{\partial}{\partial x}, p, \frac{\partial}{\partial p} \right)$  выражаются линейно через производные от  $L$  по параметрам  $p, x, h$ , а последние по условию отображают  $B^\infty$  в себя, то и  $P_i \left( x, \frac{\partial}{\partial x}, p, \frac{\partial}{\partial p} \right)$  отображают  $B^\infty$  в себя. Очевидно, что если  $f \in R_h$  и бесконечно дифференцируемо в  $R_h$ , то  $P_i \left( x, \frac{\partial}{\partial x}, p, \frac{\partial}{\partial p} \right) f(x) \in R_h$  и бесконечно дифференцируемы в  $R_h$ .

Далее, поскольку  $\exp \left\{ i \frac{\partial L}{\partial h} \Big|_{h=0} t \right\}$  отображает  $B^\infty$  в  $B^\infty$ , то



существует решение уравнения

$$Av(t) = 0, \quad (3.24)$$

удовлетворяющее при  $t=0$  начальному условию  $v|_{t=0} = v_0 \in R_h$ , бесконечно дифференцируемому в  $R_h$ , и  $v \in R_h$  и бесконечно дифференцируемое в  $R_h$ . То же замечание справедливо и относительно оператора  $\tilde{A}^{-1}$ . Поэтому действительно  $(\tilde{A}^{-1}B)^N v(t) \in R_h$  для любого  $N$  и при этом бесконечно дифференцируемо в  $R_h$ . Пусть  $v^i(t)$  — решения уравнения (3.24), удовлетворяющие начальным условиям бесконечно дифференцируемым в  $R_h$ .

Аналогично тому, как это было сделано в лемме 5.5, можно доказать, что выражение

$$u_N = \sum_{h=0}^N (-h)^n \sum_{i=0}^n (\tilde{A}^{-1}B)^i v^{n-i}(t)$$

удовлетворяет уравнению

$$Au_N + hBu_N = h^{N+1}\tilde{z}_h,$$

где  $\tilde{z}_h \in R_h$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \hat{L}\Phi^{p_1, \dots, p_k} \frac{1}{\sqrt{J}} \exp\left\{\frac{i}{h} S(p, x)\right\} u_N &= \\ &= -i h^{N+2} \Phi^{p_1, \dots, p_k} \frac{1}{\sqrt{J}} \exp\left\{\frac{i}{h} S(p, x)\right\} \tilde{z}_h + h^{N+1} z_h(x, t, h) = \\ &= h^{N+1} \tilde{z}_h(x, t), \quad \tilde{z}_h(x, t) \in R_h, \end{aligned} \quad (3.25)$$

в силу того, что оператор  $\Phi^{p_1, \dots, p_k}$  отображает  $R_h$  на  $R_h$ . По условию существует решение  $\omega \in V_h$  уравнения

$$h^r \hat{L}\omega = \tilde{z}_h(x, t, h).$$

Поэтому

$$\hat{L}(\Phi^{p_1, \dots, p_k} \frac{1}{\sqrt{J}} e^{iS/h} u_N - h^{N+1-r} \omega) = 0. \quad (3.26)$$

Поскольку  $N$  сколь угодно велико, то отсюда следует

Теорема 6.1. При высказанных предположениях существует решение уравнения

$$L\psi(x, t) = 0,$$

представимое в виде

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \Phi^{p_1, \dots, p_k} \left\{ \frac{\exp\left\{\frac{i}{h} S(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t)\right\}}{\sqrt{\frac{D(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n)}{D(p_{01}, \dots, p_{0k}, x_{0k+1}, \dots, x_{0n})}} \sqrt{\frac{\partial L^0}{\partial \lambda}}} \right\} \times \\ &\times \exp\left\{ \int_0^t \left( \frac{\partial L^0}{\partial \lambda} \right)^{-1} \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 L^0}{\partial x_j \partial p_j} - i \frac{\partial L}{\partial h} \Big|_{h=0} \right) dt \right\} \times \\ &\times \sum_{i=0}^N h^i \varphi_i(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t) + h^{N+1} z_h(x, t, h). \end{aligned}$$

Здесь  $\frac{\partial L^0}{\partial \lambda}, \frac{\partial^2 L^0}{\partial x_j \partial p_j}, \frac{\partial L}{\partial h} \Big|_{h=0}$  — функции  $x = x(x_0, p_0, t), p = p_0(x_0, p_0, t),$

а

$$S(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t) = \mathcal{S}(x_0(p, x, t), p_0(p, x, t), t),$$

$u_j(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t)$  — некоторые бесконечно дифференцируемые функции, финитные по  $p$  и  $x$ , со значениями в  $V^\infty, z_h \in R_h,$  причем

$$u_0(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t) = f(p_{01}, \dots, p_{0k}, x_{0k+1}, \dots, x_{0n}),$$

где  $f$  — произвольная финитная функция.

4. Случай конечнократных термов. Теперь мы предположим, что выполнено условие 1) теоремы 4.1, причем точка  $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$  (терм) конечнократна.

Мы сохраним обозначения и предположения 1), 2) п. 1 и предположение 1) гл. 4, § 2.

Основные тождества. Пусть  $\chi_1, \dots, \chi_r$  — нормированная система собственных векторов

$$L|_{h=0} \chi_i = L^0 \chi_i = \lambda \chi_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.27)$$

$$\chi_i = \chi_i(x_1, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_{n+1}),$$

$$\lambda = \lambda(x_1, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_{n+1}),$$

а  $\chi_1^+, \dots, \chi_r^+$  — нормированная система собственных векторов оператора  $(L^0)^*$ :

$$(L^0)^* \chi_i^+ = \lambda \chi_i^+, \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.28)$$

при том же значении  $\lambda = \lambda(x_1, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_{n+1}).$

Докажем следующие равенства:

$$a) \left( \chi_j^+, \frac{\partial L^0}{\partial p_\nu} \chi_i \right) = \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu} \delta_{ij};$$

$$б) \left( \chi_j^+, \frac{\partial L^0}{\partial x_\nu} \chi_i \right) = \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = (\chi_j^+, \chi_i).$$

Продифференцировав (3.27) по  $p_\nu$ , получим

$$\frac{\partial L^0}{\partial p_\nu} \chi_i + L^0 \frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu} = \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu} \chi_i + \lambda \frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu}. \quad (3.29)$$

Умножая скалярное это тождество на  $\chi_j^+$  и учитывая (3.28), получаем равенство а). Аналогично, из

$$\frac{\partial L^0}{\partial x_\nu} \chi_i + L^0 \frac{\partial \chi_i}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} \chi_i + \lambda \frac{\partial \chi_i}{\partial x_\nu}$$

получаем б).

Продифференцируем (3.29) по  $x_\mu$ . Мы получим

$$\frac{\partial^2 L^0}{\partial p_\nu \partial x_\mu} \chi_i + \frac{\partial L^0}{\partial x_\mu} \frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu} + \frac{\partial L^0}{\partial p_\nu} \frac{\partial \chi_i}{\partial x_\mu} + L^0 \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial p_\nu \partial x_\mu} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_\nu \partial x_\mu} \chi_i + \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu} \frac{\partial \chi_i}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} \frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu} + \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x_\mu \partial p_\nu}.$$

Умножая это равенство скалярно на  $\chi_j^+$ , получаем

$$в) \left( \chi_j^+, \frac{\partial^2 L^0}{\partial p_\nu \partial x_\mu} \chi_i \right) - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_\nu \partial x_\mu} \delta_{ij} + \left( \chi_j^+, \left[ \frac{\partial L^0}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} \right] \frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu} \right) + \left( \chi_j^+, \left[ \frac{\partial L^0}{\partial p_\nu} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu} \right] \frac{\partial \chi_i}{\partial x_\mu} \right) = 0$$

и аналогично

$$г) \left( \chi_j^+, \frac{\partial^2 L^0}{\partial p_\nu \partial p_\mu} \chi_i \right) - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_\nu \partial p_\mu} \delta_{ij} + \left( \chi_j^+, \left[ \frac{\partial L^0}{\partial p_\mu} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_\mu} \right] \frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu} \right) + \left( \chi_j^+, \left[ \frac{\partial L^0}{\partial p_\nu} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu} \right] \frac{\partial \chi_i}{\partial p_\mu} \right) = 0.$$

Обозначим, как и ранее, через  $R$  оператор, стоящий в правой части равенства (3.1) в фигурных скобках, так что равенство (3.1) переписывается в виде

$$L\Phi^{p_1, \dots, p_k} \psi = \Phi^{p_1, \dots, p_k} \exp \left\{ \frac{i}{h} S(p, x) \right\} R\varphi + h^{N+1} z_n(x, t).$$

В этом случае мы представим  $R$  в виде

$$R = A + \sum_{i=1}^N h^i u_i,$$

где

$$A = L(\eta^0, x, p, \xi^0, 0) = L^0,$$

$$u_1 = i \left[ \sum_{j=1}^k \frac{\partial L^0}{\partial \eta_j^0} \frac{\partial}{\partial p_j} - \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0} + \sum_{i,j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_j^0} - 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial x_j} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \xi_j^0} - 2 \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial p_i} \right) \right] + \frac{\partial L}{\partial h} \Big|_{h=0}.$$

Очевидно, что уравнению

$$A\chi = 0$$

удовлетворяет  $\chi$ , принадлежащая подпространству собственных векторов оператора  $L^0$ , т. е.  $S(p, x)$  удовлетворяет уравнению Га-

мильтона — Якоби

$$\lambda \left( \frac{\partial S}{\partial x}, x, p, \frac{\partial S}{\partial p} \right) = 0. \quad (3.30)$$

По условию

$$\tilde{A} = A(1 - p_\lambda)$$

имеет обратный в  $B^\infty$  и оператор

$$[A(1 - p_\lambda)]^{-1} (1 - p_\lambda^+)$$

определен на всем  $B^\infty$ ;  $\tilde{A}$  есть сужение оператора  $A$  на подпространстве  $(1 - p_\lambda)B^\infty$ , имеющее обратный. Для того чтобы можно было применить лемму 5.5 (ч. II) теории возмущений и найти такое  $\varphi$ , чтобы

$$R\varphi = h^{N+1} z_n,$$

нам нужно существование  $N$  членов теории возмущений. Так, для определения первого члена асимптотики в этой лемме требуется существование выражения вида  $\tilde{A}^{-1} u_1 \chi$ . Это означает, что  $u_1 \chi \in D(\tilde{A}^{-1})$ , т. е.

$$P_\lambda^+ u_1 \chi = 0.$$

Предположим вначале, что размерность  $r$  подпространства собственных функций оператора  $L^0$  равна 1, т. е. точка  $\lambda$  — простая. Тогда условие (3.30) примет вид

$$(\chi^+, u_1 \chi) = 0. \quad (3.31)$$

Скалярное произведение понимается здесь в объемлющем пространстве  $B^1$ . Поскольку  $\chi = \chi_0 \varphi_0$ , где  $\|\chi_0\| = 1$ , а  $\varphi_0 = \varphi_0(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1})$  — скалярная функция, а с другой стороны, оператор  $u_1$  есть оператор в  $R_n$ , включающий дифференцирование по аргументам  $p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$ , то уравнение (3.31), которое, очевидно, мы можем переписать в виде

$$(\chi_0^+, u_1 \chi_0) \varphi_0 = 0, \quad (3.31a)$$

есть дифференциальное уравнение для определения функции  $\varphi_0(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1})$ .

Совершенно аналогично в случае  $r$ -кратного собственного значения  $\lambda$ , если  $\chi_1, \dots, \chi_r$  — нормированная система собственных векторов, то уравнение (3.31a) можно переписать в виде системы дифференцированных уравнений для определения скалярных коэффициентов  $\varphi_{0i}, \dots, \varphi_{0r}$  при  $\chi_1, \dots, \chi_r$ . (Напомним снова, что хотя

$$\varphi_{0i} = \varphi_{0i}(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1})$$

являются функциями параметров  $p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$ , но являются функциями со значениями на прямой, т. е. скалярами в пространстве  $B^1$ . Векторы же  $\chi_1, \dots, \chi_r$  являются функциями  $p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$ , но со значениями в  $B^1$ , причем эти векторы по норме в  $B^1$  равны единице.)

Система уравнений, эквивалентная (3.31a), имеет вид

$$\sum_{j=1}^r (\chi_i^+, u_1 \chi_j) \varphi_{0j} = 0, \quad i=1, \dots, r.$$

В силу леммы 5.5 для вычисления следующего члена нужно, чтобы элемент

$$u_1 \left( \tilde{A}^{-1} u_1 \sum_{j=1}^r \varphi_{0j} \chi_j + \sum_{j=1}^r \varphi_{1j} \chi_j \right) + u_2 \sum_{j=1}^r \varphi_{0j} \chi_j$$

принадлежал области определения оператора  $\tilde{A}^{-1}$ , т. е.

$$p_k^+ \left\{ u_1 \left[ \tilde{A}^{-1} u_1 \sum_{j=1}^r \varphi_{0j} \chi_j + \sum_{j=1}^r \varphi_{1j} \chi_j \right] + u_2 \sum_{j=1}^r \varphi_{0j} \chi_j \right\} = 0.$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^r (\chi_i^+, u_1 \chi_j) \varphi_{1j} = - \left( \chi_i^+, [u_1 \tilde{A}^{-1} u_1 + u_2] \sum_{j=1}^r \varphi_{0j} \chi_j \right),$$

и мы получаем систему уравнений для определения

$$\varphi_{1j} = \varphi_{1j}(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}).$$

Аналогично, для  $k$ -го члена

$$f_k = x_k + \tilde{A}^{-1} \sum_{j=1}^k u_j f_{k-j}$$

мы должны потребовать, чтобы

$$\sum_{i=1}^{k+1} u_i f_{k+1-i} \in D(\tilde{A}^{-1}).$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^r (\chi_i^+, u_1 \chi_j) \varphi_{kj} = F, \quad (3.32)$$

где  $F$  зависит лишь от  $\varphi_{ij}$  при  $i < k$ , и мы получим уравнение для

$$\varphi_{kj} = \varphi_{kj}(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}).$$

Итак, задача сводится к отысканию дифференциального оператора  $L = (\chi_i, u_1 \chi_j)$  в пространстве  $C^\infty$  и доказательству существования решений  $\varphi$  уравнений  $L\varphi = 0$  и  $L\varphi = F$ , где

$$\varphi \in C^\infty \quad \text{и} \quad F \in C^\infty. \quad (3.33)$$

Заметим, что оператор  $u_1$  состоит из суммы вида

$$u_1 = i \sum_{v=1}^k \frac{\partial L^0}{\partial \eta_v^0} \frac{\partial}{\partial p_v} - i \sum_{\mu=k+1}^{n+1} \frac{\partial L^0}{\partial \xi_\mu^0} \frac{\partial}{\partial x_\mu} + R_1,$$

где оператор  $R_1$  не содержит операторов дифференцирования, а является оператором в  $B^\infty$ , зависящим от параметров  $p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^r (\chi_\beta^+, u_1 \chi_\alpha) \varphi_{i\alpha} &= \\ &= \sum_{\alpha=1}^r i \left\{ \sum_{v=1}^k \left( \chi_\beta^+, \frac{\partial L^0}{\partial \eta_v^0} \chi_\alpha \right) \frac{\partial \varphi_{i\alpha}}{\partial p_v} - \sum_{\mu=k+1}^{n+1} \left( \chi_\beta^+, \frac{\partial L^0}{\partial \xi_\mu^0} \chi_\alpha \right) \frac{\partial \varphi_{i\alpha}}{\partial x_\mu} \right\} + \sum_{i=1}^r a_{i\beta} \varphi_{ii}, \end{aligned}$$

где  $a_{i\beta}$  — известные функции параметров  $p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$ . В силу тождеств а, б)

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^r (\chi_\beta^+, u_1 \chi_\alpha) \varphi_{i\alpha} &= i \left( \sum_{v=1}^k \frac{\partial \lambda}{\partial x_v} \frac{\partial}{\partial p_v} \varphi_{i\beta} - \sum_{v=k+1}^{n+1} \frac{\partial \lambda}{\partial p_v} \frac{\partial}{\partial x_v} \varphi_{i\beta} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^r a_{i\beta} \varphi_{ii} = -i \frac{d\varphi_{i\beta}}{d\tau} + \sum_{i=1}^r a_{i\beta} \varphi_{ii}, \quad (3.34) \end{aligned}$$

где  $d/d\tau$  — производная вдоль траекторий системы Гамильтона, отвечающей (3.30). Отсюда следует, что решения уравнений (3.32), (3.33) существуют. Далее, применяя рассуждения (3.25), (3.26), мы приходим к асимптотике решения уравнения

$$\hat{L}\psi = 0.$$

Нам, однако, еще нужно получить решение уравнения (3.33) в «явном виде», т. е. выписать матрицу  $a_{i\beta}$  в (3.34). Для этого мы воспользуемся тождествами а) — г). Заметим прежде всего, что

$$\begin{aligned} (\chi_\nu^+, u_1 \chi_\mu) &= -i \delta_{\nu\mu} \frac{d}{d\tau} + i \left\{ \sum_{j=1}^k \left( \chi_\nu^+, \frac{\partial L^0}{\partial \eta_j^0} \frac{\delta \chi_\mu}{\delta p_j} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=k+1}^{n+1} \left( \chi_\nu^+, \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0} \frac{\delta \chi_\mu}{\delta x_j} \right) \right\} + R_2, \quad (3.35) \end{aligned}$$

$$R_2 = (\chi_\nu^+, R_1 \chi_\mu),$$

где  $\delta/\delta p_j$  и  $\delta/\delta x_j$  обозначают полные частные производные по независимым переменным  $p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$ , т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\delta \chi_\mu}{\delta p_j} &= \frac{\partial \chi_\mu}{\partial p_j} + \sum_{v=1}^k \frac{\partial \chi_\mu}{\partial \eta_v^0} \frac{\partial \eta_v^0}{\partial p_j} + \sum_{i=k+1}^{n+1} \frac{\partial \chi_\mu}{\partial \xi_i^0} \frac{\partial \xi_i^0}{\partial p_j} = \\ &= \frac{\partial \chi_\mu}{\partial p_j} - \sum_{v=1}^k \frac{\partial \chi_\mu}{\partial \eta_v^0} \frac{\partial^2 S}{\partial p_v \partial p_j} + \sum_{i=k+1}^{n+1} \frac{\partial \chi_\mu}{\partial \xi_i^0} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial p_j}, \quad j=1, \dots, n. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\frac{\delta \chi_\mu}{\delta x_J} = \frac{\partial \chi_\mu}{\partial x_J} + \sum_{\nu=1}^k \frac{\partial \chi_\mu}{\partial \eta_\nu^0} \frac{\partial \eta_\nu^0}{\partial x_J} + \sum_{i=k+1}^{n-1} \frac{\partial \chi_\mu}{\partial \xi_i^0} \frac{\partial \xi_i^0}{\partial x_J} =$$

$$= \frac{\partial \chi_\mu}{\partial x_J} - \sum_{\nu=1}^k \frac{\partial \chi_\mu}{\partial \eta_\nu^0} \frac{\partial^2 S}{\partial p_\nu \partial x_J} + \sum_{i=k+1}^{n+1} \frac{\partial \chi_\mu}{\partial \xi_i^0} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_J},$$

$$J=1, \dots, n+1, \quad x_{n+1}=t.$$

Подобно тому, как это было сделано в предыдущем пункте, положим

$$\varphi_{0J} = \frac{u_i}{\sqrt{J}},$$

где

$$J(p, x, t) = \frac{D(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t)}{D(p_{01}, \dots, p_{0k}, x_{0k+1}, \dots, x_{0n}, \tau)},$$

$(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t)$  — решение системы Гамильтона

$$\dot{p} = -\partial \lambda / \partial x, \quad \dot{x} = \partial \lambda / \partial p, \quad \dot{t} = \partial \lambda / \partial p_{n+1},$$

причем  $t(0)=0$ , а  $p$  и  $x$  удовлетворяют условиям (3.18), (3.19), в силу леммы А. С. Соболева удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{d\tau} \ln J = - \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \eta_i^0 \partial p_i} + \sum_{i,J=1}^k \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_J^0} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_J} + \sum_{i,J=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_J^0} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_J} -$$

$$- 2 \sum_{i=1}^k \sum_{J=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \eta_i^0 \partial \xi_J^0} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial x_J} + \sum_{i=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i \partial \xi_i^0}.$$

Подставляя

$$\frac{d\varphi_{0J}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{J}} \left( \frac{du_J}{d\tau} - \frac{1}{2} u_J \frac{d}{d\tau} \ln J \right)$$

в выражение для оператора  $u_1$  (см. (3.35)) и учитывая тождества  $B, \Gamma$ ) вида

$$\sum_{i,J=k+1}^{n+1} \left\{ \left( \chi_\nu^+, \frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_J^0} \chi_\mu \right) - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_J^0} \delta_{\mu\nu} \right\} =$$

$$= \sum_{i,J=k+1}^{n+1} \left\{ \left( \chi_\nu^+, \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial \xi_i^0} - \frac{\partial L^0}{\partial \xi_i^0} \right] \frac{\partial \chi_\mu}{\partial \xi_J^0} \right) + \left( \chi_\nu^+, \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial \xi_J^0} - \frac{\partial L^0}{\partial \xi_J^0} \right] \frac{\partial \chi_\mu}{\partial \xi_i^0} \right) \right\} =$$

$$= 2 \sum_{i,J=k+1}^{n+1} \left\{ \left[ \left( \chi_\nu^+, x_i \frac{\partial \chi_\mu}{\partial \xi_i^0} \right) - \left( \chi_\mu^+, \frac{\partial L^0}{\partial \xi_i^0} \frac{\partial \chi_\nu}{\partial \xi_i^0} \right) \right] \right\}$$

и аналогичные им, получим, используя равенства вида

$$\dot{x}_i \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_J} = \dot{x}_i \frac{\partial \xi_J^0}{\partial x_i},$$

$$- \frac{\partial \lambda}{\partial x_J} = \frac{\partial \xi_J^0}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \xi_J^0}{\partial p_i} p_i^0 + \sum_{i=k+1}^{n+1} \frac{\partial \xi_J^0}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

и аналогичные им, следующие уравнения для вектора  $u = (u_1, \dots, u_r)$ :

$$\frac{du}{d\tau} + Gu = 0,$$

где  $G$  — матрица вида

$$G = \left\| \left( \chi_\nu^+, \frac{d\chi_\mu}{d\tau} \right) + \sum_{i=1}^{n+1} \left( \chi_\nu^+, \left( \frac{\partial L^0}{\partial p_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} \right) \frac{\partial \chi_\mu}{\partial x_i} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_i \partial p_i} \delta_{\mu\nu} + i \left( \chi_\nu^+, \frac{\partial L}{\partial h} \chi_\mu \right)_{h=0} \right\|. \quad (3.36)$$

Оператор  $\sqrt{J} (\chi_\nu^+, u_1 x_\mu) \frac{1}{\sqrt{J}}$  соответственно имеет вид  $\frac{d}{d\tau} + G$ .

Отсюда следует

**Теорема 6.2.** При высказанных предположениях существует решение уравнения

$$\hat{L}\psi = 0,$$

представимое в виде

$$\psi(x, t) = \Phi^{p_1, \dots, p_k} \frac{\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(p, x, t) \right\}}{\sqrt{J}(p, x, t)} \sum_{\nu=1}^r \sum_{j=0}^N h^j \varphi_{j\nu}(p, x, t) \chi_\nu(p, \xi^0, \eta^0, x, t) +$$

$$+ h^{N+1} z_n(x, t, h),$$

где  $\varphi_j(p, x, t)$  — векторные бесконечно дифференцируемые функции, финитные по  $p$  и  $x$ , со значениями в  $B^\infty$ ,  $z_n \in \mathbb{R}_h$ , причем  $\Phi_{0\nu}(p, x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Phi_0}{d\tau} + G\Phi_0 = 0, \quad \Phi_0 = (\Phi_{01}, \dots, \Phi_{0r}).$$

(Напомним, что функция  $S(p, x, t)$  — действие — удовлетворяет уравнению (3.10), а производная  $d/d\tau$  берется вдоль траекторий системы Гамильтона, отвечающей  $S(p, x, t)$ .)

ГЛАВА 7

АСИМПТОТИКА В БОЛЬШОМ РЕШЕНИИ АБСТРАКТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе мы докажем теоремы, сформулированные в гл. 2—4. При этом в основном мы повторять эти формулировки не будем.

§ 1. Лемма о локальных координатах

Прежде всего мы докажем лемму о локальных координатах (лемма 2.1), которая использовалась при конструкции канонического оператора.

Лемму о локальных координатах мы сформулируем в виде двух лемм 7.1,а и 7.1,б.

Лемма 7.1,а. Пусть в точке  $\alpha = \alpha^0$  матрица  $B = \left\| \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right\|_{\substack{i \leq n \\ j \leq n}}$  име-

ет ранг  $r < n$ . Тогда существует такая ортогональная  $n \times n$ -матрица  $\|\beta_{ij}(\alpha^0)\|$ , что при каноническом преобразовании

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i(\alpha) &= \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(\alpha^0) q_j(\alpha), \\ \tilde{p}_i(\alpha) &= \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(\alpha^0) p_j(\alpha) \end{aligned} \quad (1.1)$$

равенство

$$\frac{\partial \tilde{q}_\sigma}{\partial \alpha_j}(\alpha^0) = 0$$

выполняется для всех  $1 \leq \sigma \leq k$ ,  $1 \leq j \leq n$ , где  $k = n - r$ .

Доказательство. Существуют такие ортогональные матрицы  $C_1 = C_1(\alpha^0)$  и  $C_2 = C_2(\alpha^0)$ , что матрица  $B_1 = C_1 B C_2$  диагональна при  $\alpha = \alpha^0$  (см. [8]), причем ее первые  $k$  строк состоят из нулей. Очевидно, что первые  $k$  строк матрицы  $B_2 = B_1 C_2^* = C_1 B$  тоже равны нулю.

Докажем, что  $C_1 = C_1(\alpha^0)$  и есть искомая ортогональная матрица  $\|\beta_{ij}(\alpha^0)\|$ . Положив  $\tilde{q}(\alpha) = C_1 q(\alpha)$ , получим

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \alpha} = C_1 \frac{\partial q}{\partial \alpha} = C_1 B = B_2.$$

Отсюда следует, что  $(\partial \tilde{q}_\sigma / \partial \alpha)_{\alpha = \alpha^0} = 0$  ( $\sigma = 1, \dots, k$ ). Преобразование (1.1) оставляет инвариантными скобки Лагранжа. Лемма доказана.

Лемма 7.1,б. Если ранг матрицы  $\left\| \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \alpha_j} \right\|_{\alpha = \alpha^0}$  равен  $r$ ,  $k = n - r$  и  $\partial \tilde{q}_\sigma(\alpha) / \partial \alpha_j(\alpha^0) = 0$  при  $\sigma \leq k$ ,  $1 \leq j \leq n$ , то матрица  $\tilde{D}_k = \|\partial(\tilde{y}_k)_i / \partial \alpha_j\|_{i,j \leq n}$ , где

$$(\tilde{y}_k)_i = \begin{cases} \tilde{p}_i(\alpha) & \text{при } i \leq k, \\ \tilde{q}_i(\alpha) & \text{при } i > k, \end{cases} \quad (1.2)$$

невыврождена.

Доказательство. Умножение матрицы  $B_2$  справа на  $C_2$  эквивалентно ортогональному преобразованию координат  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  вида  $\tilde{\alpha} = C_2^* \alpha$ . Поэтому  $B_1 = B_2 C_2 = \|\partial \tilde{q}_i / \partial \tilde{\alpha}_j\|$ .

Поскольку в матрице  $B_1$  при  $\alpha = \alpha^0$  отличны от нуля лишь члены  $(\partial \tilde{q}_i / \partial \tilde{\alpha}_i)_{\alpha = \alpha^0}$  при  $i > k$ , то из условия (2.2) гл. 1 следует, что

$$(\partial \tilde{p}_i / \partial \tilde{\alpha}_j)_{\alpha = \alpha^0} = 0 \text{ при } i > k \text{ и } j \leq k. \quad (1.3)$$

Докажем, что  $\det \left\| \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial \tilde{\alpha}_j} \right\|_{i,j \leq k} \neq 0$ . Предположим противное, тогда в силу (1.3) ранг прямоугольной матрицы  $A = \|\partial \tilde{p}_i / \partial \tilde{\alpha}_j\|_{\substack{i \leq n \\ j \leq k}}$  при  $\alpha = \alpha^0$  меньше  $k$ . Прямоугольная же матрица  $\|\partial \tilde{q}_\sigma / \partial \tilde{\alpha}_j\|_{\alpha = \alpha^0}$  ( $1 \leq \sigma \leq \leq n$ ) равна нулю. Отсюда следует, что ранг прямоугольной матрицы вида

$$\left\| \frac{\partial \tilde{q}_\sigma}{\partial \tilde{\alpha}_j} \right\|_{\alpha = \alpha^0} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} k \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} r \\ \hline A \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} n \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} n \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

меньше  $n$ , что невозможно, поскольку  $\{q(\alpha), p(\alpha)\}$  —  $n$ -мерное подмногообразие. Полученное противоречие доказывает, что

$$\det \tilde{D}_k |_{\alpha = \alpha^0} = \prod_{i=k+1}^n (\partial \tilde{q}_i / \partial \tilde{\alpha}_i)_{\alpha = \alpha^0} \det A |_{\alpha = \alpha^0} \neq 0,$$

что и требовалось.

Координаты точки  $\alpha^0$  вида  $\tilde{y} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n)$  ( $k = n - r$ ) будем называть фокальными координатами точки  $\alpha^0$ , а соответствующую плоскость — фокальной плоскостью.

## § 2. Доказательство теорем об инвариантности

1. Мы докажем теперь инвариантность индексов по модулю 4, поскольку для определения канонического оператора достаточно знать лишь такие индексы.

Если некоторая область  $\Omega \subset \Gamma$  взаимно однозначно проектируется на плоскость

$$\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \dots = \tilde{q}_{k_1} = \tilde{p}_{k_1+1} = \dots = \tilde{p}_n = 0,$$

то будем писать  $\Omega \subset \tilde{\Omega}_{k_1}$ , а если одновременно проектируется взаимно однозначно и на плоскость

$$\tilde{\tilde{q}}_1 = \tilde{\tilde{q}}_2 = \dots = \tilde{\tilde{q}}_{k_2} = \tilde{\tilde{p}}_{k_2+1} = \dots = \tilde{\tilde{p}}_n = 0,$$

то будем сокращенно писать  $\Omega \subset \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$ . Если точка  $\alpha$  принадлежит карте  $\tilde{\Omega}_k$  атласа  $\mathcal{H}$ , то будем писать  $\alpha \in \tilde{\Omega}_k$ .

Точки  $\alpha \in \tilde{\Omega}_k$  поставлены во взаимно однозначное соответствие со своими проекциями  $\tilde{y}_k$  на плоскость  $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \dots = \tilde{q}_k = \tilde{p}_{k+1} = \dots = \tilde{p}_n = 0$ ; при этом будем писать  $\tilde{y}_k = \tilde{y}_k(\alpha)$  и  $\alpha = \alpha(\tilde{y}_k)$ .

Последняя функция определена лишь на проекции области  $\Omega$ , отвечающей  $\tilde{\Omega}_k$ , на указанную плоскость. Обозначим

$$\tilde{J}_k = D\sigma(\alpha)/D\tilde{y}_k, \quad \tilde{\gamma}_k = \text{Ind } \tilde{B}_k.$$

Пусть  $S(\alpha)$  — некоторая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\partial S(\alpha)/\partial \alpha_j = p \partial q/\partial \alpha_j.$$

Обозначим

$$\tilde{I}_k = \tilde{I}_k(\tilde{y}_k) = \left[ |\tilde{J}_k|^{1/2} \exp \left\{ iA \left[ S(\alpha) - \sum_{j=1}^k \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\alpha) \right] \right\} \varphi(\alpha) \right]_{\alpha = \alpha(\tilde{y}_k)},$$

где  $\varphi(\alpha)$  — некоторая гладкая функция с носителем  $\Omega \subset \tilde{\Omega}_k$ .

Соответствующие величины, отвечающие  $\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$ , будем обозначать двумя волнами. Обозначим через  $\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_k}$  обратное преобразование Фурье:

$$\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_k} \psi = \frac{e^{-i\pi k/4} A^{k/2}}{(2\pi)^{k/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -iA \sum_{j=1}^k \tilde{\tilde{p}}_j \tilde{\tilde{q}}_j \right\} \psi(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_k) d\tilde{q}_1 \dots d\tilde{q}_k. \quad (2.1)$$

В случае, когда носитель функции  $\psi(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_k)$  равен  $R$ , интеграл нужно брать по  $R$ .

Доказательству трех сформулированных теорем мы предположим несколько лемм. Заранее условимся, что все равенства в леммах 7.2—7.5 и доказательстве теоремы 2.3 мы будем понимать в фактор-пространстве  $S$  (см. гл. 2, §§ 1, 2).

Лемма 7.2. Пусть носитель  $\Omega$  финитной функции  $\varphi(\alpha)$  принадлежит лагранжеву многообразию  $\Gamma = \{q(\alpha), p(\alpha)\}$  и проектируется взаимно однозначно на координатную плоскость  $q$  и на

плоскость  $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \dots = \tilde{q}_k = \tilde{p}_{k+1} = \dots = \tilde{p}_n = 0$ , а  $\Omega_k$  — его проекция на плоскость  $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \dots = \tilde{q}_k = \tilde{p}_{k+1} = \dots = \tilde{p}_n = 0$ . Тогда выражение  $\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_k} \tilde{I}_0(q)$  равно  $\tilde{I}_k \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} \tilde{\gamma}_k \right\}$  при  $\tilde{y}_k \in \Omega_k$  и равно нулю при  $\tilde{y}_k \notin \Omega_k$ .

Доказательство. Для вычисления интеграла  $\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_k} \tilde{I}_0(\tilde{q})$  применим метод стационарной фазы. Стационарные точки  $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i^0$  ( $i=1, \dots, k$ ) определяются из системы

$$\frac{\partial S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial \tilde{q}_i} = \tilde{p}_i, \quad i=1, \dots, k. \quad (2.2)$$

Положим в (2.2)

$$\tilde{p}_j = \tilde{p}_j(\tilde{\alpha}), \quad \tilde{q}_i = \tilde{q}_i(\tilde{\alpha}), \quad i=k+1, \dots, n, \quad j=1, \dots, k. \quad (2.3)$$

Поскольку

$$\frac{\partial S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial \tilde{q}} = \tilde{p}(\alpha(\tilde{q})) \quad \text{и} \quad \alpha(\tilde{q}(\tilde{\alpha})) = \tilde{\alpha} \quad \text{при} \quad \tilde{\alpha} \in \tilde{\Omega}_0,$$

то система (2.2) удовлетворяется при  $\tilde{q}_i^0 = \tilde{q}_i(\tilde{\alpha})$  ( $i=1, \dots, k$ ). Положим в системе (2.3)  $\tilde{\alpha} = \alpha(\tilde{y}_k)$

$$(\tilde{y}_k = \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \dots, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n).$$

Получим, что  $\tilde{q}_i^0 = \tilde{q}_i[\alpha(\tilde{y}_k)]$  ( $i=1, \dots, k$ ) являются решениями системы (2.2) при произвольных  $\tilde{y}_k \in \Omega_k$ , поскольку  $\tilde{p}_j[\alpha(\tilde{y}_k)] = \tilde{p}_j$  ( $j=1, \dots, k$ ) и

$$\tilde{q}_i[\alpha(\tilde{y}_k)] = \tilde{q}_i, \quad i=k+1, \dots, n.$$

Если  $\tilde{y}_k \notin \Omega_k$ , то стационарные точки  $\tilde{q}_i^0$  ( $i=1, \dots, k$ ) не принадлежат области, в которой подынтегральная функция отлична от нуля.

Единственность решения системы (2.2) в области  $\tilde{y}_k \in \Omega_k$  следует из того факта, что

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial \tilde{q}_i \partial \tilde{q}_j} \right\|_{i,j=1, \dots, k} = \det \tilde{B}_k^{-1} = \frac{D\sigma(\alpha)/D\tilde{q}}{D\sigma(\alpha)/D\tilde{y}_k} \neq 0, \quad (2.4)$$

$$\tilde{q} = \tilde{q}_i(\tilde{\alpha}).$$

Условия применимости метода стационарной фазы выполнены, откуда следует утверждение леммы.

Лемма 7.3. Пусть носитель функции  $\varphi(\alpha)$  принадлежит пересечению  $\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$ ; тогда в точках  $\tilde{y}_{k_2} \in \Omega_{k_2}$  таких, что  $\alpha(\tilde{y}_{k_2})$  является неособой, имеет место равенство \*)

$$\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}} \Phi^{\tilde{\tilde{p}}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1} = \exp \left\{ \frac{i\pi}{2} (\tilde{\gamma}_{k_1} - \tilde{\gamma}_{k_2}) \right\} \tilde{I}_{k_2}. \quad (2.5)$$

\*) Здесь  $\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}} \Phi^{\tilde{\tilde{p}}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1} = \Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}} [\Phi^{\tilde{\tilde{p}}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1}]_{\tilde{q} = \tilde{q}(\tilde{q})}$ .

Доказательство. В силу леммы 7.2 в неособых точках

$$\Phi^{\tilde{q}_{k_1}} \tilde{I}_0 = \exp \left\{ \frac{-i\tilde{\gamma}_{k_1}\pi}{2} \right\} \tilde{I}_{k_1}. \quad (2.6)$$

Отсюда

$$\tilde{I}_0 = \exp \left\{ \frac{-i\tilde{\gamma}_{k_1}\pi}{2} \right\} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1}. \quad (2.7)$$

Поэтому в силу леммы 7.2

$$\Phi^{\tilde{q}_{k_2}} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1} = \exp \left\{ \frac{i\pi}{2} \tilde{\gamma}_{k_1} \right\} \Phi^{\tilde{q}_{k_2}} \tilde{I}_0 = \exp \left\{ \frac{i\pi}{2} (\tilde{\gamma}_{k_1} - \tilde{\gamma}_{k_2}) \right\} \tilde{I}_{k_2}, \quad (2.8)$$

что и требовалось.

Лемма 7.4. Пусть носитель  $\varphi(\alpha)$  принадлежит  $\tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ ; тогда имеет место соотношение

$$\Phi^{\tilde{q}_{k_2}} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1} = e^{-i\pi t/2} \tilde{I}_{k_2},$$

где  $t$  — некоторое целое число, не зависящее от  $\tilde{y}_{k_2}$ .

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I(\tilde{y}_{k_2}) = \Phi^{\tilde{q}_{k_2}} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1},$$

имеющий вид

$$I(\tilde{y}_{k_2}) = \frac{\exp \left\{ \frac{i\pi}{4} (k_2 - k_1) \right\} A^{k_1+k_2}}{(2\pi)^{(k_1+k_2)/2}} \int \exp \left\{ iA \left[ S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j (\tilde{q}_j(\alpha) - \tilde{q}_j) \right] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -iA \sum_{i=1}^{k_2} \tilde{p}_i \tilde{q}_i \right\} \left| \frac{D\sigma(\alpha)}{D\tilde{y}_k} \right|^{1/2} \varphi(\bar{\alpha}) d\tilde{p}_1 \dots d\tilde{p}_k d\tilde{q}_1 \dots d\tilde{q}_{k_2}, \quad (2.9)$$

где

$$\tilde{q}_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \tilde{q}_j, \quad \det \|\beta_{ij}\| = 1,$$

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\tilde{y}_{k_2}) = \bar{\alpha} \left( \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \sum_{j=1}^n \beta_{k+1j} \tilde{q}_j, \dots, \sum_{j=1}^n \beta_{nj} \tilde{q}_j \right).$$

Для вычисления интеграла (2.9) применяем метод стационарной фазы. Стационарные точки  $\tilde{q}_i^0, \tilde{p}_j^0$  ( $i=1, \dots, k_2, j=1, \dots, k_1$ ) определяются из системы

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{p}_j} \left( S(\bar{\alpha}) - \sum_{i=1}^{k_1} \tilde{p}_i \tilde{q}_i(\bar{\alpha}) \right) = -\tilde{q}_j, \quad j=1, \dots, k_1, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{p}_v} \left( S(\bar{\alpha}) - \sum_{i=1}^{k_1} \tilde{p}_i \tilde{q}_i(\bar{\alpha}) \right) + \sum_{j=1}^{k_1} \beta_{vj} \tilde{p}_j - \tilde{p}_v = 0, \quad v=1, \dots, k_2. \quad (2.11)$$

Как известно,

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{p}_j} \left[ S(\bar{\alpha}) - \sum_{i=1}^{k_1} \tilde{p}_i \tilde{q}_i(\bar{\alpha}) \right] = -\tilde{q}_j(\bar{\alpha}), \quad j=1, \dots, k_1, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{q}_v} \left[ S(\bar{\alpha}) - \sum_{i=1}^{k_1} \tilde{p}_i \tilde{q}_i(\bar{\alpha}) \right] = \tilde{p}_v(\bar{\alpha}), \quad v=k_1+1, \dots, n. \quad (2.13)$$

Из (2.13) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{q}_v} \left[ S(\bar{\alpha}) - \sum_{i=1}^{k_1} \tilde{p}_i \tilde{q}_i(\bar{\alpha}) \right] = \\ = \sum_{l=k_1+1}^n \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_l} \left[ S(\bar{\alpha}) - \sum_{i=1}^{k_1} \tilde{p}_i \tilde{q}_i(\bar{\alpha}) \right] \beta_{lv} = \sum_{l=k_1+1}^n \tilde{p}_l \beta_{lv}. \quad (2.14)$$

В силу (2.12), (2.14) систему (2.10) — (2.11) можно переписать в виде

$$\tilde{q}_j(\bar{\alpha}) = \tilde{q}_j, \quad j=1, \dots, k_1, \quad (2.10')$$

$$\sum_{j=1}^n \beta_{vj} \tilde{p}_j = \tilde{p}_v, \quad v=1, \dots, k_2. \quad (2.11')$$

Можно убедиться, что система (2.10) — (2.11) имеет решение

$$\tilde{p}_j = \tilde{p}_j^0 = \tilde{p}_j^0(\bar{\alpha}), \quad \tilde{q}_i = \tilde{q}_i^0 = \tilde{q}_i^0(\bar{\alpha}),$$

где  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\tilde{y}_{k_2})$  — решение системы

$$\tilde{p}_j(\alpha) = \tilde{p}_j, \quad j=1, \dots, k_2, \quad \tilde{q}_i(\alpha) = \tilde{q}_i, \quad i=k_2+1, \dots, n.$$

Пусть, далее,  $D_{k_1, k_2}(\bar{\alpha})$  — определитель матрицы  $A(\bar{\alpha})$  вторых производных фазы интеграла (2.9). Из формулы (2.8) следует, что при  $\tilde{y}_{k_2}$  таком, что  $\alpha(\tilde{y}_{k_2})$  — неособая точка,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Phi^{\tilde{q}_{k_2}} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1} < \infty.$$

Следовательно (см. утверждение § 2 гл. 6),  $D_{k_1, k_2}(\alpha(\tilde{y}_{k_2})) \neq 0$ , и метод стационарной фазы применим. Отсюда и из соотношения (2.8) следует, что в неособых точках  $\bar{\alpha}$

$$|D_{k_1, k_2}(\bar{\alpha})| = \left| \frac{\tilde{J}_{k_2}(\bar{\alpha})}{\tilde{J}_{k_1}(\bar{\alpha})} \right|, \quad (2.15)$$

откуда по непрерывности получаем, что это равенство сохраняется и в особых точках  $\alpha \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ . Значит,  $D_{k_1, k_2}(\bar{\alpha}) \neq 0$  при  $\bar{\alpha} \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ .

С помощью метода стационарной фазы получаем

$$I(\tilde{y}_{k_2}) = \exp\left\{-\frac{i\pi}{2}m\right\} \tilde{I}_{k_2},$$

где  $m = \text{Ind } A(\bar{\alpha}) - k_2$ .

Из (2.15) следует, что  $D_{k_1, k_2}(\bar{\alpha})$  не обращается в нуль на пересечении карт  $\tilde{\Omega}_{k_1}$  и  $\tilde{\Omega}_{k_2}$ . Следовательно,  $\text{Ind } A(\alpha)$  не меняется при  $\alpha \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ . Лемма доказана.

Следствие. Разность  $\tilde{\gamma}_{k_1} - \tilde{\gamma}_{k_2}$  равна  $m$  для всех неособых  $\alpha \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ .

Отсюда, поскольку  $m$  не зависит от  $\alpha \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ ,

$$[\tilde{\gamma}_{k_2} - \tilde{\gamma}_{k_1}](\alpha_1) = [\tilde{\gamma}_{k_2} - \tilde{\gamma}_{k_1}](\alpha_2)$$

для любых неособых точек  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , принадлежащих пересечению  $\tilde{\Omega}_{k_1}$  и  $\tilde{\Omega}_{k_2}$ .

Следовательно,

$$\tilde{\gamma}_{k_2}(\alpha^1) - \tilde{\gamma}_{k_2}(\alpha^2) = \tilde{\gamma}_{k_1}(\alpha^1) - \tilde{\gamma}_{k_1}(\alpha^2) = \text{In}v.$$

Мы доказали, что индекс пути из  $\alpha^1$  в  $\alpha^2$  является инвариантом, не зависящим от того, в какую карту попали точки  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$ . Отсюда следует теорема 2.1 о гомотопической инвариантности индекса пути\*).

2. Доказательство теоремы 2.3. Обозначим через  $K_{A, \Gamma}^{v, \alpha^0}[\mathcal{X}, \mathcal{H}, \{e^i\}, \{l^i\}]$  канонический оператор вида (2.3) гл. 2, зависящий от атласа  $\mathcal{H}$ , совокупности центров  $\mathcal{X}$ , разбиения единицы  $\{e^i\}$  и путей  $\{l^i\}$ . Нетрудно убедиться, что в силу гомотопической инвариантности в малом  $\int pdq$  и  $\text{Ind } l[\alpha^0, \alpha]$  выполнение условий (2.5) гл. 2 необходимо и достаточно для того, чтобы (в факторпространстве  $S$ ) оператор  $K_{A, \Gamma}^{v, \alpha^0}$  однозначным образом определялся данным атласом  $\mathcal{H}$ , центрами  $\mathcal{X}$  и данным разбиением единицы. Таким образом,

$$K_{A, \Gamma}^{v, \alpha^0}[\mathcal{X}, \mathcal{H}, \{e^i\}, \{l^i\}] \sim K_{A, \Gamma}^{v, \alpha^0}[\mathcal{X}, \mathcal{H}, \{e^i\}, \{l^i\}],$$

и мы можем оператор (2.3) гл. 2 обозначить через

$$K_{A, \Gamma}^{v, \alpha^0}[\mathcal{X}, \mathcal{H}, \{e^i\}].$$

Прежде чем переходить к доказательству независимости канонического оператора от разбиения единицы, докажем лемму.

Лемма 7.5. Пусть области  $\Omega^i = \Omega^i(\beta)$  ( $i=1, \dots, N$ ) — элементы покрытия  $\mathcal{H}(\beta)$  с совокупностью центров  $\mathcal{X}(\beta)$  и  $\tilde{e}^i(\alpha) = \tilde{e}^i(\alpha, \beta)$

\*) По определению,  $\text{Ind } l[\tilde{\alpha}_{k_1}, \tilde{\alpha}_{k_2}] = m$ , где  $\tilde{\alpha}_{k_1}, \tilde{\alpha}_{k_2}$  — центральные точки карт  $\tilde{\Omega}_{k_1}, \tilde{\Omega}_{k_2}$ .

(элементы разложения единицы) зависят от некоторого параметра  $\beta \in [0, \varepsilon]$ , так что каждая область  $\Omega^i(\beta)$  при всех  $\beta \in [0, \varepsilon]$  взаимно однозначно проектируется на одну и ту же плоскость  $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$ , а  $e^i(\alpha, \beta)$  дважды дифференцируема по  $\beta$ . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \beta} K_{A, \Gamma}^{v, \alpha^0}[\mathcal{X}(\beta), \mathcal{H}(\beta), \{\tilde{e}^i(\alpha, \beta)\}] \varphi(\alpha) = 0.$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы для точки  $\beta=0$ . Пусть  $\tilde{e}_k^i(\alpha, \beta)$  — элемент разложения единицы, отвечающий некоторой карте  $\tilde{\Omega}_k^i(\beta)$ , и пусть карта  $\tilde{\Omega}_k^i(\beta)$  пересекается только с  $l$  картами  $\tilde{\Omega}_k^i(\beta)$  ( $i=1, \dots, l$ ). Рассмотрим

$$K_{A, \Gamma}^{v, \alpha^0} \varphi(\alpha) = K_{A, \Gamma}^{v, \alpha^0} \sum_{i=1}^N \tilde{e}_k^i(\alpha, 0), \varphi(\alpha). \quad (2.16)$$

Докажем, что

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \beta} K_{A, \Gamma}^{v, \alpha^0} \tilde{e}_k^i(\alpha, 0) \varphi(\alpha) \right]_{\beta=0} = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} K_{A, \Gamma}^{v, \alpha^0} \tilde{e}_k^i(\alpha, 0) \varphi(\alpha) \right]_{\beta=0} &= \left\{ \Phi^{\tilde{p}_k} \exp\left\{-\frac{i\tilde{\gamma}^i \pi}{2}\right\} \tilde{I}_k \frac{\partial \tilde{e}_k^i(\alpha, \beta)}{\partial \beta} + \right. \\ &+ \left. \sum_{v=1}^l \Phi^{\tilde{p}_{k_v}} \exp\left\{-\frac{i\tilde{\gamma}^v \pi}{2}\right\} \tilde{I}_{k_v} \frac{\partial \tilde{e}_k^v(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right\} \tilde{e}_k^i(\alpha, 0). \quad (2.17) \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{e}^v$  и  $\tilde{I}_{k_v}$  отвечают картам  $\tilde{\Omega}_{k_v}^v(\beta)$ , а

$$\Phi^{\tilde{p}_{k_v}} f(\alpha) \equiv \Phi^{\tilde{p}_{k_v}} f[\alpha(\tilde{y}_{k_v})].$$

В силу лемм 7.3 и 7.4

$$\begin{aligned} \Phi^{\tilde{p}_k} \exp\left\{-\frac{i\tilde{\gamma}_k^i \pi}{2}\right\} \tilde{I}_k \frac{\partial \tilde{e}_k^i(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} \tilde{e}_k^i(\alpha, 0) &= \\ = \exp\left\{-\frac{i\tilde{\gamma}_k^i \pi}{2}\right\} \Phi^{\tilde{p}_k} \tilde{I}_{k_v} \frac{\partial \tilde{e}_k^v(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} \tilde{e}_k^i(\alpha, 0), \quad (2.18) \end{aligned}$$

$$v = 1, \dots, l \text{ при } \alpha \in \tilde{\Omega}_k^i(\beta) \cap R, \quad \frac{(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0}$$

Поскольку

$$\tilde{e}_k^i(\alpha, \beta) + \sum_{i=1}^l \tilde{e}_k^i(\alpha, \beta) = 1,$$



$$\partial \left[ \tilde{e}_k^i(\alpha, \beta) + \sum_{i=1}^l \tilde{\tilde{e}}^i(\alpha, \beta) \right] / \partial \beta = 0$$

в указанных точках. Отсюда, из (2.17) и (2.18) следует утверждение леммы.

Пусть  $\overline{\mathcal{H}}$  и  $\overline{\tilde{\mathcal{H}}}$  — атласы с одной и той же совокупностью центров  $\mathcal{X}$ , т. е. одной центральной точке  $\alpha^i$  отвечают области  $\overline{\Omega^i} \in \overline{\mathcal{H}}$  и  $\overline{\tilde{\Omega}^i} \in \overline{\tilde{\mathcal{H}}}$ . Рассмотрим атлас  $\mathcal{H}$  с центрами  $\mathcal{X}$  и областями  $\Omega^i = \overline{\Omega^i} \cup \overline{\tilde{\Omega}^i}$ . Им отвечают разложения единицы  $\{e^i(\alpha)\}$ ,  $\{\tilde{e}^i(\alpha)\}$  и  $\{\tilde{\tilde{e}}^i(\alpha)\}$ . Рассмотрим разложение единицы  $\{e^i(\alpha, \beta)\}$ , где  $e^i(\alpha, \beta) = [\tilde{e}^i(\alpha) + \beta e^i(\alpha)](1 + \beta)^{-1}$ , отвечающее покрытию  $\Omega^i(\beta)$ , где  $\Omega^i(\beta) = \Omega^i$  при  $\beta \in (0, 1]$  и  $\Omega^i(0) = \overline{\Omega^i}$ . В силу леммы 7.5 получаем, что канонический оператор не меняется (в фактор-пространстве  $S$ ) от замены атласа  $\mathcal{H}$  на  $\overline{\mathcal{H}}$ . Аналогичное утверждение справедливо, очевидно, и относительно атласа  $\overline{\tilde{\mathcal{H}}}$ . Следовательно, замена атласа  $\overline{\mathcal{H}}$  на  $\overline{\tilde{\mathcal{H}}}$  сказывается в каноническом операторе лишь на величинах, эквивалентных нулю. Поэтому мы можем записать  $K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0}[\mathcal{X}, \mathcal{H}, \{e^i\}] = K_{\Gamma}^{\nu,\alpha^0}(\mathcal{X})$ .

Пусть теперь дан атлас  $\mathcal{H}$ . Возьмем некоторую точку  $\bar{\alpha} \in R$ ,  $\alpha \notin \mathcal{X}$ . Изменим покрытие  $\mathcal{H}$  (сохраняя его центры  $\mathcal{X}$ ) так, чтобы точка  $\bar{\alpha}$  принадлежала только одной карте  $\overline{\Omega_k^i}$  нового атласа  $\mathcal{H}'$  с теми же самыми центрами  $\mathcal{X}$ . По доказанному эта процедура оставляет  $K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0}$  инвариантным. Окружим точку  $\bar{\alpha}$  такой областью, которая пересекается только с  $\overline{\Omega_k^i}$  и целиком проектируется на факальную плоскость, отвечающую  $\bar{\alpha}$ . Таким образом, мы построим новую карту с центром в точке  $\bar{\alpha}$ , обозначим ее через  $\overline{\tilde{\Omega}_k^i}$ , а дополненный этой картой атлас  $\mathcal{H}$  и дополненный точкой  $\bar{\alpha}$  множество  $\mathcal{X}$  соответственно обозначим  $\mathcal{H}''$  и  $\mathcal{X}''$ . Пусть  $\{e_{(1)}^i(\alpha)\}$  — разбиение единицы по атласу  $\mathcal{H}'$ ; тогда можно построить следующее разбиение единицы  $\{e_{(2)}^i(\alpha)\}$  по атласу  $\mathcal{H}''$ :

$$\begin{aligned} e_{(2)}^i(\alpha) &\equiv e_{(1)}^i(\alpha), \\ e_{(1)}^{i_0}(\alpha) &= e_{(2)}^{i_0}(\alpha) + e_{(2)}^0(\alpha) \text{ при } i \neq i_0. \end{aligned}$$

Рассмотрим разность выражений  $K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0}\varphi(\alpha)$ , соответствующих атласам  $\mathcal{H}'$  и  $\mathcal{H}''$  с разбиениями единицы  $e_{(1)}^i$  и  $e_{(2)}^i$  соответственно. Очевидно, что

$$\begin{aligned} K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0}(\mathcal{X})\varphi(\alpha) - K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0}(\mathcal{X}'')\varphi(\alpha) &= \\ = \exp \left\{ i\gamma - \frac{i\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \alpha^{i_0}] \right\} \Phi^{\tilde{p}_k} [e_{(1)}^{i_0}(\alpha) - e_{(2)}^{i_0}(\alpha)] \tilde{I}_k - \\ - \exp \left\{ i\gamma - \frac{i\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \alpha^0] \right\} \Phi^{\tilde{p}_{k'}} e_{(2)}^0(\alpha) \tilde{I}_k. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Так как  $e_{(1)}^{i_0}(\alpha) - e_{(2)}^{i_0}(\alpha) = e_{(2)}^0(\alpha)$  и носитель  $e_{(2)}^0 \in \overline{\Omega_k^i} \cap \overline{\tilde{\Omega}_{k'}^0}$ , то в силу лемм 7.3 и 7.4 разность (2.19) эквивалентна нулю. Следовательно, к центрам  $\mathcal{X}$  атласа  $\mathcal{H}$  можно добавить новые центральные точки, и от этого оператор  $K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0}$  не будет изменяться. Пусть даны канонические атласы  $\mathcal{H}'$  и  $\mathcal{H}''$  с совокупностями центров  $\mathcal{X}'$  и  $\mathcal{X}''$ . Рассмотрим атлас  $\mathcal{H}$  с совокупностью центров  $\mathcal{X} = \mathcal{X}' \cup \mathcal{X}''$ . По доказанному

$$K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0}[\mathcal{X}'] \sim K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0}[\mathcal{X}], \quad K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0}[\mathcal{X}'] \sim K_{A,\Gamma}^{\nu,\alpha^0}[\mathcal{X}];$$

следовательно,  $K_{\Gamma}^{\nu,\alpha^0}[\mathcal{X}'] \sim K_{\Gamma}^{\nu,\alpha^0}[\mathcal{X}'']$ , что и требовалось.

Теорема 2.4 доказывается аналогично при учете, что в леммах 7.2—7.4 метод стационарной фазы дает асимптотические ряды по степеням  $R_2$ .

3. Доказательство теоремы 2.2. Пусть  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_t$  — лагранжевы многообразия, причем  $\Gamma_0$  может быть непрерывно деформировано в  $\Gamma_t$ , так что они включаются в однопараметрическое семейство  $\Gamma_\tau$  ( $0 \leq \tau \leq t$ ), где  $\Gamma_\tau$  — лагранжево многообразие при любом  $\tau$ .

Пусть, как обычно,  $\mathcal{H}_0$  — канонический атлас начального лагранжева подмногообразия  $\Gamma_0 = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$ . Обозначим через  $u_{\tau_1, \tau_2}$  отображение подмногообразия  $\Gamma_{\tau_1}$  на  $\Gamma_{\tau_2}$ :  $u_{\tau_1, \tau_2} \Gamma_{\tau_1} = \Gamma_{\tau_2}$ , через  $\mathcal{H}_\tau$  — канонический атлас подмногообразия  $\Gamma_\tau$ .

Пусть  $\Omega^j$  отвечает карте  $\overline{\Omega_k^i} \subset \mathcal{H}_0$ . По определению карты  $\overline{\Omega_k^i}$  область  $\Omega^j$  взаимно однозначно проектируется на плоскость  $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$ . Положим  $u_{\tau_0, \tau_0} \Omega^j$ . Очевидно, что при  $\tau_0 < \varepsilon$  область  $\Omega_{\tau_0}^j$  также будет взаимно однозначно проектироваться на ту же плоскость. Поскольку областей  $\Omega^j$  конечное число, то найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что при  $\tau_0 < \varepsilon$  во всех областях  $\Omega_{\tau_0}^j$  можно ввести те же локальные координаты  $\tilde{y}_h$ , что и в этих прообразах  $\Omega^j$ . Таким образом, в качестве атласа  $\mathcal{H}_{\tau_0}$  на  $\Gamma_{\tau_0}$  можно взять совокупность локальных карт  $(\Omega_{\tau_0}^i)_k = u_{0, \tau_0} \overline{\Omega_k^i}$ , отвечающих областям  $\overline{\Omega_k^i}$  и координатам  $\tilde{y}_h = \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$ , так, что при  $\tau_0 \leq \varepsilon$  можно по определению написать  $\mathcal{H}_{\tau_0} = u_{0, \tau_0} \mathcal{H}_0$ .

В силу леммы Бореля конечный интервал  $[0, t]$  мы можем разбить (точками  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m = t$ ) на конечное число интервалов длины  $\Delta$ , обладающих следующим свойством: на  $\Gamma_{\tau_i}$  может быть выбран такой атлас  $\mathcal{H}_{\tau_i}^i$ , что  $\mathcal{H}_{\tau_i}^i = u_{\tau_i, \tau} \mathcal{H}_{\tau_i}^i$  — атлас при  $\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$ . В свою очередь на  $\Gamma_{\tau_{i+1}}$  может быть выбран такой атлас  $\mathcal{H}_{\tau_{i+1}}^{i+1}$ , вообще говоря, отличный от атласа  $\mathcal{H}_{\tau_{i+1}}^i = u_{\tau_i, \tau_{i+1}} \mathcal{H}_{\tau_i}^i$ , что  $\mathcal{H}_{\tau_i}^{i+1} = u_{\tau_{i+1}, \tau} \mathcal{H}_{\tau_{i+1}}^{i+1}$  — атлас при  $\tau_{i+1} \leq \tau \leq \tau_{i+2}$ .

Рассмотрим цикл  $\gamma_{\tau_i}$  на подмногообразии  $\Gamma_{\tau_i}$ . Докажем инвариантность  $\text{Ind } \gamma_{\tau_i}$  относительно деформации  $\Gamma_{\tau_i} \rightarrow \Gamma_{\tau_{i+1}}$ , т. е. докажем, что при этой деформации

$$\text{Ind } \gamma_{\tau_i} = \text{Ind } \gamma_{\tau_{i+1}}.$$

Поскольку мы доказали инвариантность  $\text{Ind } \gamma$  при переходе от одного атласа к другому, то тем самым будет доказана инвариантность индекса любого цикла относительно деформации  $\Gamma \rightarrow \Gamma_i$ .

Вначале допустим, что цикл  $\gamma_{\tau_i}$  можно деформировать на  $\Gamma_{\tau_i}$  таким образом, чтобы он не проходил подряд через две особые карты атласа  $\mathcal{H}_{\tau_i}^i$ . Рассмотрим отрезок  $l_{\tau_i} = l_{\tau_i}[\alpha^1, \alpha^2]$  цикла  $\gamma_{\tau_i}$ , лежащий целиком в трех картах  $\Omega^1, \tilde{\Omega}_k, \Omega^2$ , где  $\tilde{\Omega}_k$  — особая, а  $\Omega^1$  и  $\Omega^2$  — неособые карты.

Карты  $u_{\tau_i, \tau} \Omega^\sigma$  ( $\sigma = 1, 2$ ),  $u_{\tau_i, \tau} \tilde{\Omega}_k$  при  $\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$  мы будем обозначать снова через  $\Omega^\sigma$  ( $\sigma = 1, 2$ ),  $\tilde{\Omega}_k$  соответственно.

Рассмотрим отрезок  $u_{\tau_i, \tau_{i+1}} l_{\tau_i} = l_{\tau_{i+1}} \subset \gamma_{\tau_{i+1}}$ . Докажем, что  $\text{Ind } l_{\tau_i} = \text{Ind } l_{\tau_{i+1}}$ . Тем самым будет доказана инвариантность  $\text{Ind } \gamma_{\tau_i}$ , поскольку по построению величина индекса может изменяться лишь при переходе через особые точки. В силу этого замечания, не уменьшая общности, мы можем предположить, что  $\alpha^1, \alpha^2 \in \tilde{\Omega}_k$ , т. е.  $\alpha^1 \in \tilde{\Omega}_k \cap \Omega^1$ , а  $\alpha^2 \in \tilde{\Omega}_k \cap \Omega^2$ . На каждом из пересечений  $\tilde{\Omega}_k \cap \Omega^1, \tilde{\Omega}_k \cap \Omega^2$  якобиан  $D\tilde{y}_0/D\tilde{y}_k$  по определению карт  $\Omega^{1,2}$  и  $\tilde{\Omega}_k$  не обращается в нуль. По построению он отличен от нуля и в точках  $u_{\tau_i, \tau} \alpha^\sigma$  ( $\sigma = 1, 2, \tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$ ). Следовательно, и равный ему определитель матрицы  $B_k = \|\partial \tilde{q}_i / \partial \tilde{p}_j\|_{i,j \leq k}$  отличен от нуля в этих точках. Поэтому индекс инерции матрицы  $B_k$  не меняется при переходе от  $\alpha^\sigma \subset \Gamma_{\tau_i}$  к  $u_{\tau_i, \tau_{i+1}} \alpha^\sigma \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$ . Следовательно,  $\text{Ind } l_{\tau_i} = \text{Ind } l_{\tau_{i+1}}$ , что и требовалось.

Рассмотрим теперь общий случай. Деформируем цикл  $\gamma_{\tau_i}$  и цикл  $\gamma_{\tau_{i+1}}$  таким образом, чтобы они проходили через центральные точки всех карт, которые эти циклы пересекают. Рассмотрим отрезок цикла  $\gamma_{\tau_i}$ , проходящий из центральной точки  $\tilde{\alpha}_{k_1}$  карты  $\tilde{\Omega}_{k_1}$  в центральную точку  $\tilde{\alpha}_{k_2}$  карты  $\tilde{\Omega}_{k_2}$  на многообразии  $\Gamma_{\tau_i}$ . Рассмотрим соответствующий отрезок пути цикла  $\gamma_{\tau_{i+1}}$  из центральной точки  $\tilde{\alpha}'_{k_1} \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$  карты  $\tilde{\Omega}'_{k_1} = u_{\tau_i, \tau_{i+1}} \tilde{\Omega}_{k_1}$  в центральную точку  $\tilde{\alpha}'_{k_2} \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$  карты  $\tilde{\Omega}'_{k_2} = u_{\tau_i, \tau_{i+1}} \tilde{\Omega}_{k_2}$ . Докажем, что индексы этих путей совпадают. Отсюда, очевидно, будет следовать, что индекс цикла  $\gamma_{\tau_i}$  равен индексу цикла  $\gamma_{\tau_{i+1}}$ .

Напомним, что мы определили индекс пути из неособой точки  $\alpha^1$  карты  $\tilde{\Omega}_k$  в центральную точку  $\tilde{\alpha}_k$  этой же карты как индекс инерции матрицы  $B_k$  в точке  $\alpha^1$ .

Пусть  $\alpha^1 \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$  и является неособой, а  $\tilde{\alpha}_{k_1}$  и  $\tilde{\alpha}_{k_2}$  — центральные точки карт  $\tilde{\Omega}_{k_1}$  и  $\tilde{\Omega}_{k_2}$  соответственно. Очевидно, что  $\text{Ind } l[\tilde{\alpha}_{k_1}, \tilde{\alpha}_{k_2}] = -\text{Ind } l[\alpha^1, \tilde{\alpha}_{k_1}] + \text{Ind } l[\alpha^1, \tilde{\alpha}_{k_2}]$ . Таким образом, индекс пути из  $\tilde{\alpha}_{k_1}$  в  $\tilde{\alpha}_{k_2}$  равен разности индексов инерции матриц  $B_{k_1}$

и  $B_{k_2}$ , взятых в точке  $\alpha^1 \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ . По доказанному в лемме 7.4 эта разность равна индексу инерции матрицы  $A(\alpha^1)$ .

Заметим, что мы всегда можем считать, что многообразия  $\Gamma_{\tau_i}$  и  $\Gamma_{\tau_{i+1}}$  находятся в общем положении. Однако при некоторых  $\tau \in \{\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}\}$  многообразие может и не находиться в общем положении [1].

Пусть  $\alpha^0 \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$  и лежит на  $\gamma_{\tau_i}$ , а  $\alpha_1^0 = u_{\tau_i, \tau_{i+1}} \alpha^0$  лежит на  $\gamma_{\tau_{i+1}}$ , причем точки  $\alpha^0$  и  $\alpha_1^0$  — неособые. Докажем, что индексы инерции матрицы  $A(\alpha)$  в точках  $\alpha^0$  и  $\alpha_1^0$  совпадают. Этим и в силу сказанного выше и будет исчерпано доказательство инвариантности индекса цикла  $\gamma_{\tau_i}$ .

Равенство (2.15), доказанное для случая, когда многообразие особенностей  $M$  имеет размерность не более чем  $n-1$ , по непрерывности продолжается на общий случай. Поэтому  $\det A(\alpha)$  не обращается в нуль на пересечении карт  $\tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ , а также вдоль пути  $u_{\tau_i, \tau} \alpha$  при  $\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$ . Следовательно, вдоль этого пути индекс инерции матрицы  $A(\alpha)$  не изменяется (в противном случае  $\det A(\alpha)$  обратился бы в нуль), что и требовалось. Отсюда следует и аналог теоремы 2.1 для пленки.

### § 3. Асимптотика решения в большом

1. Доказательство теоремы 4.1. Теорему 4.1 докажем в случае  $m=1$  и  $\Lambda_1=1$ , т. е. теорему 4.1, а. В общем случае произвольного  $m$  эта теорема и теорема 4.2 доказываются совершенно аналогично.

Прежде всего покажем, что теорема 4.1, а непосредственно следует из утверждений, доказанных в теореме 6.2 при условии, что время  $t$  достаточно мало (т. е. теорема 4.1, а справедлива в малом). Для этого получим из формулы (3.37) гл. 6 формулу (2.12) гл. 4. Предположим, что носитель вектор-функции  $\varphi^0(\alpha, h)$  (см. теорему 4.1, а) принадлежит области  $\Omega^1$ . В силу (2.13) гл. 4 носитель вектор-функции  $\varphi(\alpha, t, h)$  будет принадлежать  $\Omega^1$ . Поэтому выражение (2.12) в этом случае в силу определения канонического оператора может быть записано в форме (3.37) гл. 6 при учете равенства

$$S(p, x, t) = \int_{l[\alpha^0, \alpha^1]} \{-H dt + p dq\} + \int_{l[\alpha^0, \alpha^1(\tilde{y}_k)]} \tilde{p} d\tilde{q} - \sum_{i=1}^k \tilde{p}_i \tilde{q}_i [\alpha^1(\tilde{y}_k)].$$

Но формула (3.37) получена в предположении, что

$$D[\tilde{P}_1(\alpha, t), \dots, \tilde{P}_k(\alpha, t), \tilde{Q}_{k+1}(\alpha, t), \dots, \tilde{Q}_n(\alpha, t)]/D\alpha \neq 0$$

при  $t \leq \varepsilon$ . Поскольку канонический оператор может быть разложен на конечную сумму выражений вида (3.37), то мы получаем утверждение теоремы 4.1, а при  $t \leq \varepsilon$ . Все эти рассуждения, разумеется,

могут быть отнесены к произвольному начальному моменту  $t_0$ . Решение  $Q(\alpha, t)$ ,  $P(\alpha, t)$  задачи (2.4)–(2.5) гл. 4 задает отображение  $u_{0,t}$  подмногообразия  $\Gamma_0$  на подмногообразии  $\Gamma_t$ .

Применим к отображению  $u_{0,t}$  построение, приведенное в начале доказательства теоремы 2.2 (см. п. 3 § 2), и разобьем отрезок  $[0, T]$  на интервалы  $0 < t_1 < t_2 \dots < T$ . Сохраним введенные обозначения  $\mathcal{H}_t^0 = u_{0,t} \mathcal{H}^0$  при  $t \leq t_1$ ;  $\mathcal{H}_t^i = u_{t_i,t} \mathcal{H}_{t_i}^i$  при  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ . Пусть при  $t=0$  решение уравнения (2.11) гл. 4 удовлетворяет условию (2.11а) гл. 4. По доказанному при  $t \leq t_1$  это решение можно представить в виде (2.12) гл. 4, где

$$\alpha_t^0 = \alpha^0, \text{Ind } l[\alpha^0, \alpha_t^0] = 0, \mathcal{H}[\Gamma_t] = \mathcal{H}_t^0.$$

Таким образом,

$$\psi(x, t) = K_{1/h, \Gamma_t, h}^{\gamma_t, \alpha_t^0}[\mathcal{H}_t^0] \sum_{\nu=1}^r \varphi_\nu \chi^\nu.$$

Заметим, что из условий теоремы 4.4, а следует, что решение уравнения (2.11), удовлетворяющее начальному условию, эквивалентно нулю, эквивалентно нулю.

Для решения уравнения (2.11) вновь поставим начальное условие вида

$$\psi(x, t_1) = K_{1/h, \Gamma_{t_1}, h}^{\gamma_{t_1}, \alpha_{t_1}^0}[\mathcal{H}_{t_1}^0] \sum_{\nu=1}^r \varphi_\nu \chi^\nu \quad (3.1)$$

при  $t=t_1$ .

В силу единственности решения (см. условие теоремы 4.1) мы получим при  $t \geq t_1$  решение  $\psi(x, t)$  задачи (2.11), (2.11а).

Перейдем в начальном условии (3.1) к другому атласу  $\mathcal{H}_{t_1}^1$  тогда мы получим с точностью до функции, эквивалентной нулю,

$$\psi(x, t_1) = K_{1/h, \Gamma_{t_1}, h}^{\tilde{\gamma}_{t_1}, \alpha_{t_1}^0}[\mathcal{H}_{t_1}^1] \sum_{\nu=1}^r \varphi_\nu \chi^\nu,$$

где  $\alpha_{t_1}^0$  — начальная точка  $\mathcal{H}_{t_1}^1$ , а

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{h} \int_{l[\alpha^0, \alpha_{t_1}^0]} p dq + \gamma - \frac{\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \alpha_{t_1}^0].$$

Как было замечено, решение уравнения при  $t > t_1$  от этого не изменится с точностью до функции, эквивалентной нулю. Поэтому получим

$$\psi(x, t) = K_{1/h, \Gamma_t, h}^{\gamma_t, \alpha_{t_1}^0}[\mathcal{H}_t^1] \sum_{\nu=1}^r \varphi_\nu \chi^\nu$$

при  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Продолжая этот процесс по индукции, приходим к утверждению теоремы 4.1, а.

2. Доказательство теоремы 4.4. Сохраняя обозначения, введенные в доказательстве теоремы 4.1, рассмотрим

$$K_{1/h, \Gamma_t(E^j)}^{\tilde{\gamma}_t, \alpha_t^0}[\mathcal{H}_t^0] \sum_{\nu=1}^r \varphi_\nu(\alpha, t) \chi^\nu(\alpha)$$

при  $t \leq t_1$ , где

$$\alpha_t^0 = u_{0,t}^{-1} \alpha^0, \quad \tilde{\gamma}_t = \int_{l[\alpha^0, \alpha_t^0]} p dq - H dt,$$

$$\varphi_\nu(\alpha, t) = \xi_\nu(\alpha) e^{i\mu t}, \quad \mu = \mu(E^j).$$

В силу (3.2) гл. 6 при  $N=1$ ,  $i=0$  (см. также замечание в начале этого параграфа), поскольку  $\text{Ind } l[\alpha^0, \alpha_t^0] = 0$  по построению, имеем

$$\left(-ih \frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}\right) K_{1/h, \Gamma_t(E^j)}^{\tilde{\gamma}_t, \alpha_t^0}(H_t^0) \sum_{\nu=1}^r \varphi(\alpha, t) \chi^\nu(\alpha) = h^2 z(x, t, h),$$

где  $z(x, t, h) \in L_2(B^1, C_2)$  — пространству непрерывных по  $t$  и  $h$  и квадратично интегрируемых функций  $x \in R_h$  со значениями в  $B^1$ . В дальнейшем буквами  $z_1, z_2, z_3, \dots$  мы будем обозначать функции из  $L_2[B^1, C_2]$ .

Очевидно, что

$$K_{1/h, \Gamma_t(E^j)}^{\tilde{\gamma}_t, \alpha_t^0}(\mathcal{H}_t^0) = \exp\left\{-\frac{iE^j t}{h}\right\} K_{1/h, \Gamma(E^j)}^{\alpha^0, \alpha^0}(\mathcal{H}_t^0),$$

поскольку  $\Gamma_t(E^j) = \Gamma(E^j)$ ,  $H = E^j$ , точка  $\alpha_t^0$  на подмногообразии  $\Gamma_t(E^j)$  совпадает с точкой  $\alpha^0$  на подмногообразии  $\Gamma$  в объемлющем евклидовом пространстве и, следовательно,

$$\tilde{\gamma}_t = - \int_{l[\alpha^0, \alpha_t^0]} H dt = -E^j t.$$

Поскольку условия теоремы 2.3 в силу (4.1) гл. 4 выполнены, мы можем применить лемму 7.5 и на основании ее получить

$$\frac{\partial}{\partial t} K_{1/h, \Gamma(E^j)}^{\alpha^0, \alpha^0}(\mathcal{H}_t^0) = h z_1(x, t, h).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & -ih \frac{\partial}{\partial t} K_{1/h, \Gamma_t(E^j)}^{\gamma_t, \alpha_{t_1}^0}(\mathcal{H}_t^0) \sum_{\nu=1}^r \varphi_\nu(\alpha, t) \chi^\nu(\alpha) = \\ & = -ih \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \exp\left\{-\frac{iE^j t}{h}\right\} K_{1/h, \Gamma(E^j)}^{\alpha^0, \alpha^0}(\mathcal{H}_t^0) \sum_{\nu=1}^r \xi_\nu(\alpha) \chi^\nu(\alpha) e^{i\mu t} \right\} = \\ & = (-E^j + h\mu) \exp\left\{i\left(\mu - \frac{E^j}{h}\right)t\right\} K_{1/h, \Gamma(E^j)}^{\alpha^0, \alpha^0}(\mathcal{H}_t^0) \sum_{\nu=1}^r \xi_\nu(\alpha) \chi^\nu(\alpha) = h^2 z_2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$[\hat{L} - E^j + h\mu] K_{1/h, \Gamma(E^j)}^{0, \alpha^0}(\mathcal{H}_t^0) \sum_{\nu=1}^r \xi_\nu(\alpha) \chi^\nu(\alpha) = h^2 z_3, \quad (3.2)$$

причем либо  $E^j - h\mu(E^j)$  является точкой спектра оператора  $\hat{L}$ , либо

$$\left\| K_{1/h, \Gamma(E^j)}^{0, \alpha^0}(\mathcal{H}_t^0) \sum_{\nu=1}^r \xi_\nu(\alpha) \chi^\nu(\alpha) \right\|_{L_2} = \\ = h^2 \left\| [\hat{L} - E^j + h\mu]^{-1} z_3 \right\|_{L_2} \leq \left\| [\hat{L} - E^j + h\mu]^{-1} \right\|_{L_2} \|z_3\|,$$

где  $\| \cdot \|_{L_2}$  — норма в  $L_2[B^1]$ . Поскольку  $\| [\hat{L} - E^j + h\mu]^{-1} \|_{L_2} \leq 1/d$ , где  $d$  — расстояние от точки  $E^j - h\mu$  до спектра оператора  $\hat{L}$ , то отсюда получаем, что  $d \leq O(h^2)$ , что и требовалось.

Заметим, что соотношение (3.2) приводит также с помощью леммы 2.4 ч. I теории возмущений к асимптотике спектральной функции  $E_{\Delta\lambda}$  интервала  $\Delta\lambda \sim O(h)$  оператора  $\hat{L}$ , а именно,

$$\left\| [1 - E_{\Delta\lambda}] K_{1/h, \Gamma(E^j)}^{0, \alpha^0} \sum_{\nu=1}^r \xi_\nu(\alpha) \chi^\nu(\alpha) \right\|_{L_2[B^1]} = O(h), \quad (3.3)$$

где

$$\Delta\lambda = \{\lambda^j - O(h); \lambda^j + O(h)\}.$$

Теорема доказана.

3. Из теоремы 4.4 непосредственно следуют теоремы 3.1, 3.6 и 3.6, а. Из теорем 4.1, 4.1, а, 4.2 при учете теорем 5.2, а, 5.3, 5.5, а, 5.6, а следуют теоремы 3.3 и 3.4 (последняя теорема для уравнений 3 и 4 табл. 2).

Очевидно, что для гиперболической системы условие 1) § 2 гл. 4 выполняется, если в качестве пространства  $B^\infty$  взять конечномерное пространство. Известно, что из условий теорем 3.4 (для уравнений 1 и 2 табл. 2), 3.5 и 4.3 следует условие 2) § 2 гл. 4 (см. [12, 61, 19, 67, 32]). Из условий теорем 3.4, 3.5 и 4.3 следует существование при любом времени  $t$  решения задачи Коши для соответствующих бихарактеристических уравнений. Таким образом, все требования теоремы 4.2 выполняются при осуществлении условий теорем 3.4, 3.5 и 4.3.

## ГЛАВА 8

### КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ В ЦЕЛОМ

Задача квазиклассической асимптотики в целом, т. е. в случае, когда траектории пучка пересекаются, является весьма сложной. Аналогичная проблема в оптике была исследована в частных примерах в физической литературе (о переходе волны через каустику см., например, в книге Ландау и Лившица «Теория поля»). По аналогии с оптикой априори можно было заключить, что если траектории пересекаются и в одну точку  $x$  в момент времени  $t$  приходит  $k$  траекторий, по этому отвечает  $k$  различных волн, которые интерферируют в точке  $x$ . Эта интерференция зависит существенно от множителя вида  $\exp\{-i\pi\gamma_j/2\}$ , который стоит при  $j$ -й волне. Эти соображения приводятся в [56]. Там же указано, что из априорных соображений нельзя угадать величину  $\gamma_j$ . В случае оптической задачи в пустоте с отражающими зеркалами величина  $\gamma_j$  зависит от числа отражений, которые претерпела  $j$ -я траектория.

Мы видели, что для асимптотики решений уравнений квантовой механики роль таких отражающих зеркал играют огибающие семейства (пучка) траекторий классических частиц.

При этом, как указывалось в гл. 2, величина  $\gamma_j$  оказывается равной так называемому индексу Морса  $j$ -й траектории. Этот индекс был введен М. Морсом при изучении вариационной задачи для функционала и определен как число отрицательных собственных значений второй вариации функционала [64]. Теория Морса сыграла существенную роль в развитии топологии дифференцируемых многообразий [31] и в изучении задачи о числе геодезических, соединяющих две точки (вариационное исчисление в целом) [16]. Здесь мы видим, что индекс Морса имеет конкретное физическое содержание.

В предыдущей главе мы уже получили значение  $\gamma_j$ , однако еще не доказали, что значение  $\gamma_j$  совпадает с индексом Морса. Кроме того, мы и требовали, чтобы коэффициенты уравнения были бесконечно дифференцируемы. Большая гладкость коэффициентов существенна даже для получения первого члена квазиклассической асимптотики с помощью метода, который был дан выше. Но вопрос об установлении такой минимальной гладкости коэффициентов при такой  $\gamma_j$ , равной индексу Морса, является принципиальным. Легко

Отсюда

$$[\hat{L} - E^j + h\mu] K_{1/h, \Gamma(E^j)}^{0, \alpha^0} (\mathcal{H}_t^0) \sum_{\nu=1}^r \xi_\nu(\alpha) \chi^\nu(\alpha) = h^2 z_3, \quad (3.2)$$

причем либо  $E^j - h\mu(E^j)$  является точкой спектра оператора  $\hat{L}$ , либо

$$\left\| K_{1/h, \Gamma(E^j)}^{0, \alpha^0} (\mathcal{H}_t^0) \sum_{\nu=1}^r \xi_\nu(\alpha) \chi^\nu(\alpha) \right\|_{L_2} = \\ = h^2 \| [\hat{L} - E^j + h\mu]^{-1} z_3 \|_{L_2} \leq \| [\hat{L} - E^j + h\mu]^{-1} \|_{L_2} \| z_3 \|,$$

где  $\| \cdot \|_{L_2}$  — норма в  $L_2[B^1]$ . Поскольку  $\| (\hat{L} - E^j + h\mu)^{-1} \|_{L_2} \leq 1/d$ , где  $d$  — расстояние от точки  $E^j - h\mu$  до спектра оператора  $\hat{L}$ , то отсюда получаем, что  $d \leq O(h^2)$ , что и требовалось.

Заметим, что соотношение (3.2) приводит также с помощью леммы 2.4 ч. I теории возмущений к асимптотике спектральной функции  $E_{\Delta\lambda}$  интервала  $\Delta\lambda \sim O(h)$  оператора  $\hat{L}$ , а именно,

$$\left\| [1 - E_{\Delta\lambda}] K_{1/h, \Gamma(E^j)}^{0, \alpha^0} \sum_{\nu=1}^r \xi_\nu(\alpha) \chi^\nu(\alpha) \right\|_{L_2[B^1]} = O(h), \quad (3.3)$$

где

$$\Delta\lambda = \{\lambda^j - O(h); \lambda^j + O(h)\}.$$

Теорема доказана.

3. Из теоремы 4.4 непосредственно следуют теоремы 3.1, 3.6 и 3.6, а. Из теорем 4.1, 4.1, а, 4.2 при учете теорем 5.2, а, 5.3, 5.5, а, 5.6, а следуют теоремы 3.3 и 3.4 (последняя теорема для уравнений 3 и 4 табл. 2).

Очевидно, что для гиперболической системы условие 1) § 2 гл. 4 выполняется, если в качестве пространства  $B^\infty$  взять конечномерное пространство. Известно, что из условий теорем 3.4 (для уравнений 1 и 2 табл. 2), 3.5 и 4.3 следует условие 2) § 2 гл. 4 (см. [12, 61, 19, 67, 32]). Из условий теорем 3.4, 3.5 и 4.3 следует существование при любом времени  $t$  решения задачи Коши для соответствующих бихарактеристических уравнений. Таким образом, все требования теоремы 4.2 выполняются при осуществлении условий теорем 3.4, 3.5 и 4.3.

## ГЛАВА 8

### КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ В ЦЕЛОМ

Задача квазиклассической асимптотики в целом, т. е. в случае, когда траектории пучка пересекаются, является весьма сложной. Аналогичная проблема в оптике была исследована в частных примерах в физической литературе (о переходе волны через каустику см., например, в книге Ландау и Лившица «Теория поля»). По аналогии с оптикой априори можно было заключить, что если траектории пересекаются и в одну точку  $x$  в момент времени  $t$  приходит  $k$  траекторий, по этому отвечает  $k$  различных волн, которые интерферируют в точке  $x$ . Эта интерференция зависит существенно от множителя вида  $\exp\{-i\pi\gamma_j/2\}$ , который стоит при  $j$ -й волне. Эти соображения приводят в [56]. Там же указано, что из априорных соображений нельзя угадать величину  $\gamma_j$ . В случае оптической задачи в пустоте с отражающими зеркалами величина  $\gamma_j$  зависит от числа отражений, которые претерпела  $j$ -я траектория.

Мы видели, что для асимптотики решений уравнений квантовой механики роль таких отражающих зеркал играют огибающие семейства (пучка) траекторий классических частиц.

При этом, как указывалось в гл. 2, величина  $\gamma_j$  оказывается равной так называемому индексу Морса  $j$ -й траектории. Этот индекс был введен М. Морсом при изучении вариационной задачи для функционала и определен как число отрицательных собственных значений второй вариации функционала [64]. Теория Морса сыграла существенную роль в развитии топологии дифференцируемых многообразий [31] и в изучении задачи о числе геодезических, соединяющих две точки (вариационное исчисление в целом) [16]. Здесь мы видим, что индекс Морса имеет конкретное физическое содержание.

В предыдущей главе мы уже получили значение  $\gamma_j$ , однако еще не доказали, что значение  $\gamma_j$  совпадает с индексом Морса. Кроме того, мы и требовали, чтобы коэффициенты уравнения были бесконечно дифференцируемы. Большая гладкость коэффициентов существенна даже для получения первого члена квазиклассической асимптотики с помощью метода, который был дан выше. Но вопрос об установлении такой минимальной гладкости коэффициентов при такой  $\gamma_j$ , равной индексу Морса, является принципиальным. Легко

проверить на конкретных примерах в одномерном случае, что для разрывных коэффициентов величина  $\gamma_i$  отлична от индекса Морса.

Мы даем в этой главе вывод формулы квазиклассической асимптотики, существенно отличный от вывода, данного в предыдущей главе. Требование на гладкость коэффициентов уравнения оказывается зависящим от степени гладкости функций в интеграле вида

$$I(h) = \int \varphi(x, y) \exp \left\{ \frac{iF(x, y)}{h} \right\} dx,$$

достаточной для утверждения: «Если уравнение  $dF=0$  имеет единственное решение  $x=x_0$ , форма  $d^2F$  при  $x=x_0$  невырождена и имеет индекс инерции  $\gamma$ , то справедливо соотношение

$$\int \varphi(x, y) \exp \left\{ \frac{iF(x, y)}{h} \right\} dx = \\ = (2\pi i h)^{n/2} |D|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} \gamma \right\} e^{iF(x_0)} \varphi(x_0) + z_h(y),$$

где  $z_h(y)$  сильно сходится к нулю в  $L_2$  при  $h \rightarrow 0$ , а  $D$  — дискриминант формы  $d^2F$  в точке  $x_0$ .

В методе, который дан в предыдущей главе, требование на гладкость коэффициентов уравнения зависит от степени гладкости функций  $\varphi(x, y)$  и  $F(x, y)$ , которая достаточна для получения второго члена асимптотики в методе стационарной фазы.

По-видимому, утверждение, взятое в кавычки и доказанное в гл. 6, может быть улучшено. Вероятно, можно требовать, чтобы функции  $\varphi(x, y)$  и  $F(x, y)$  принадлежали пространствам  $W_2^{[n/2]}$  (вместо  $C^{[n/2]+1}$ ) и  $W^{[n/2]+3}$  (вместо  $C^{[n/2]+4}$ ) соответственно. Это улучшение теоремы о методе стационарной фазы немедленно повлечет за собой уточнение теорем, которые будут доказаны в этой главе.

### § 1. Метод шагов для построения асимптотики в целом

Асимптотика функции Грина  $G(x, \xi, t)$  уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi + V(x) \psi \quad (1.1)$$

при  $\hbar \rightarrow 0$  может быть представлена в виде

$$G(x, \xi, t) = C \sqrt{\left| \det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\| \right|} \exp \frac{i}{\hbar} S(x, \xi, t), \\ G(x, \xi, t_0) = \delta(x - \xi) \quad (1.2)$$

в том случае, когда через точки  $\xi$  и  $x$  за время  $t-t_0$  проходит только одна траектория  $x=X(x, \xi, t, t_0)$ , являющаяся решением задачи

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}(x), \\ x(t_0) = \xi, \quad x(t) = x. \quad (1.3)$$

При этом  $S(x, \xi, t)$  является решением соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби и определяется формулой

$$S(x, \xi, t) = \int_{t_0}^t \left( \frac{1}{2} \dot{X}^2(x, \xi, t, t_0, \tau) - V(X(x, \xi), t, t_0, \tau) \right) d\tau. \quad (1.4)$$

Однако физический интерес представляет как раз случай, когда существует «отражение», а следовательно, через две точки проходит более одного пути. Можно предполагать, что в этом общем случае асимптотика будет состоять из суммы выражений (1.2), соответствующих различным траекториям. Основная идея вывода общей асимптотической формулы заключается в следующем. Формула (1.2) оказывается верной для малого времени  $t \leq 1/\sqrt{2M}(n+1)$ , где

$$M = \max_{\substack{0 \leq |x| < \infty \\ 1 \leq i, j \leq n}} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right|,$$

поскольку для такого времени через две точки  $\xi$  и  $x$  может пройти лишь одна классическая траектория (1.3). На большой, и притом произвольной, отрезок времени формула (1.2) может быть продолжена с помощью свертки:

$$G(\xi_r, \xi_0, t_r - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^r G(\xi_i, \xi_{i-1}, t_i - t_{i-1}) d\xi_1 \dots d\xi_{r-1}, \quad (1.5)$$

$$\xi_r = x, \quad \xi_0 = \xi, \quad \xi_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{in}), \quad |t_i - t_{i-1}| \leq \frac{1}{\sqrt{2M}(n+1)},$$

причем асимптотика последнего интеграла вычисляется по методу стационарной фазы.

Пусть  $\tilde{\psi}(p, t)$  — преобразование Фурье решения  $\psi(x, t)$ :

$$\tilde{\psi}(p, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int e^{ipx/\hbar} \psi(x, t) dx, \quad p = (p_1, \dots, p_n). \quad (1.6)$$

Рассмотрим решение  $\psi(x, t)$  уравнения Шредингера (1.1), удовлетворяющее или начальным условиям вида

$$\psi(x, 0) = \varphi(x) \exp \left( \frac{i}{\hbar} f(x) \right), \quad (1.7)$$

где  $\varphi(x)$  и  $f(x)$  не зависят от  $\hbar$ , или условию вида

$$\psi_1(x, 0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int e^{-ipx/\hbar} \tilde{\psi}_1(p, 0) dp, \\ \tilde{\psi}_1(p, 0) = \varphi_1(p) e^{if_1(p)/\hbar}, \quad (1.8)$$

где  $\varphi_1(p)$  и  $f_1(p)$  не зависят от  $\hbar$ . (При  $\varphi_1(p) = 1/(2\pi\hbar)^{n/2}$ ,  $f_1(p) = p\xi$  имеем  $\psi(x, 0) = \delta(x - \xi)$ .) Начальными условиями вида (1.8), (1.7) исчерпываются в основном встречающиеся в физике случаи.

При этом оказывается, что задача (1.1); (1.7) связана с решением уравнений Ньютона

$$\ddot{X} = -\text{grad} V(X), \quad X = (X_1, \dots, X_n), \quad (1.9)$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$X|_{t=0} = x_0, \quad \dot{X}|_{t=0} = \text{grad} f(x_0), \quad (1.10)$$

а задача (1.1), (1.8) — с решением уравнений Ньютона (1.9), удовлетворяющим начальным условиям

$$X|_{t=0} = \text{grad} f_1(p_0), \quad \dot{X}|_{t=0} = p_0. \quad (1.11)$$

Предположим, что функции  $|\text{grad} V(x)|$ ,  $|\text{grad} f(x)|$ ,  $|\text{grad} f_1(p)|$  при всех действительных значениях  $x$  и  $p$  ограничены, а  $V(x) \geq 0$ ,  $f(x)$ ,  $f_1(x)$  — голоморфные функции в каждой точке. Отсюда, в частности, будет следовать существование в целом решения  $X(x_0, t)$  задачи (1.9), (1.10) и решения  $X_1(p_0, t)$  задачи (1.9), (1.11).

Пусть  $M_{x_0}(x)$  — множество точек  $x_0$ , для которых  $X(x_0, t) = x$ . Соответственно,  $M_{p_0}(x)$  — множество точек  $p_0$ , для которых  $X_1(p_0, t) = x$ .

1. Основные результаты. Сформулируем ряд определений, связанных с задачей (1.9), (1.10). На задачу (1.9), (1.11) они переносятся дословно, если заменить всюду  $x_0$  на  $p_0$ ,  $X(x_0, t)$  на  $X_1(p_0, t)$  и  $M_{x_0}(x)$  на  $M_{p_0}(x)$ .

Если

$$\det \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t)}{\partial x_{0j}} \right\|$$

обращается в нуль в какой-либо точке  $x_0$  множества  $M_{x_0}(x)$ , то соответствующая точка  $x, t$  называется *фокусом* задачи (1.10), (1.11).

Точка  $t'$  называется *фокусом на траектории*  $X(x_0, t)$ , если

$$\det \left[ \frac{\partial X_i(x_0, t')}{\partial x_{0j}} \right] = 0. \quad (1.12)$$

Заметим, что этот якобиан обращается в нуль, если две «бесконечно близкие» траектории пересекаются в точке  $X(x_0, t')$ ,  $t'$ .

Ниже будет доказано, что если  $x, t$  не является фокусом задачи (1.9), (1.10), то множество  $M_{x_0}(x)$  состоит не более чем из конечного числа точек  $x_0^{(k)}(x, t)$  ( $k=1, 2, \dots, k_0$ ), для которых

$$X(x_0^{(k)}(x, t), t) = x. \quad (1.13)$$

Если матрица

$$\left[ \frac{\partial X_i(x_0, t')}{\partial x_{0j}} \right]$$

в фокусе  $t'$  имеет ранг  $n-1$ , то будем говорить, что фокус *простой*.

*Сигнатурой фокуса* назовем сигнатуру  $\sigma$  квадратичной формы с матрицей

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t' + \varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t' - \varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\|^{-1}, \quad (1.14)$$

*индексом  $\gamma$  фокуса* назовем число отрицательных коэффициентов при квадратах координат в каноническом виде квадратичной формы с данной матрицей:  $\gamma = (n - \sigma)/2$ .

Очевидно, что в случае простого фокуса индекс фокуса равен числу (нулю или единице) перемен знака  $\det \|\partial X_i(x_0, t)/\partial x_{0j}\|$  при переходе вдоль траектории через фокус.

*Индексом  $m_{x_0, t}$  классического пути*  $X(x_0, \tau)$  ( $0 \leq \tau \leq t$ ) назовем сумму индексов всех фокусов, которые лежат на этом пути. Если все фокусы, лежащие на данном пути, простые, то индекс пути равен числу перемен знаков  $\det [\partial X_i(x_0, t)/\partial x_{0j}]$  при  $\tau$ , меняющемся от нуля до  $t$ .

Пусть  $\varphi(x)$  и соответственно  $\varphi_1(p)$  при  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $|p| \rightarrow \infty$  стремятся к нулю, так же как и их производные любого порядка, быстрее любой степени  $1/|x|$  и  $1/|p|$  (т. е. принадлежат пространству основных функций). Пусть  $\Omega_\varepsilon$  — область, состоящая из всех  $\varepsilon$ -окрестностей фокусов задачи (1.9), (1.10) (или задачи (1.9), (1.11)).

**Теорема 8.1.** *Решение  $\psi(x, t)$  задачи (1.1), (1.7) может быть представлено в виде*

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \sum_{k=0}^{k_0} \psi(x_0^{(k)}, 0) \exp \left\{ \frac{i}{h} \int_0^t \left[ \frac{1}{2} \dot{X}^2(x_0^{(k)}, \tau) - V(X(x_0^{(k)}, \tau)) \right] d\tau - \frac{\pi h}{2} m_{x_0^{(k)}, t} \right\} \times \\ & \times \left| \det \left[ \frac{\partial X_i(x_0^{(k)}, t)}{\partial x_{0j}} \right] \right|^{-1/2} \left\{ 1 + \sum_{q=1}^{N-1} (ih)^q z_q(x_0^{(k)}, t) + h^N C_\varepsilon z_k(x, t; h) \right\}, \quad (1.15) \end{aligned}$$

где  $x, t \notin \Omega_\varepsilon$ ,  $x_0^{(k)} = x_0^{(k)}(x, t) \in M_{x_0}(x)$ ,  $z_k \in S_h$ ,  $C_\varepsilon$  — константа,  $N$  — любое целое число, а  $z_q(x_0^{(k)}, t)$  определяется из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} z_q(x_0^{(k)}, t) \varphi(x_0^{(k)}) = & \int_0^t \left| \det \left\| \frac{\partial X_i(x_0^{(k)}, \tau)}{\partial x_{0j}} \right\| \right|^{1/2} \Delta_{x_0^{(k)}} \left\{ \left| \det \left\| \frac{\partial X(x_0^{(k)}, \tau)}{\partial x_{0j}} \right\| \right|^{-1/2} z_{q-1} \varphi(x_0^{(k)}) \right\} d\tau, \quad (1.16) \end{aligned}$$

где  $z_0 = 1$ ,  $\Delta_{x_0^{(k)}}$  — оператор Лапласа в «криволинейных» координатах  $x_0^{(k)}$ .

**Теорема 8.2.** Решение  $\psi_1(x, t)$  задачи (1.1), (1.8) может быть представлено в виде

$$\psi_1(x, t) = \sum_k \tilde{\psi}_1(p_0^{(k)}, 0) \left| \det \left[ \frac{\partial X_{1i}(p_0^{(k)}, t)}{\partial p_{0j}} \right] \right|^{-1} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[ -p_0^{(k)} x + \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} \dot{X}_1^2(p_0^{(k)}, \tau) - V(X_1(p_0^{(k)}, \tau)) \right\} d\tau - \frac{\pi h}{2} m_{p_0^{(k)}, t} \right] \right\} \times \\ \times \left\{ 1 + \sum_{q=1}^{N-1} (ih)^q z_{1q}(p_0^{(k)}, t) + h^N C_{z_{1k}}(x, \text{grad} f(p_0^{(k)}, t, h) \right\}, \quad (1.17)$$

где  $p_0^{(k)} = p_0^{(k)}(x, t) \in M_{z_0}(x)$ ,  $C_z$  — константа,  $(x, t) \notin \Omega_z$ ,  $N$  — любое целое число, причем  $z_{1q}(p_0^{(k)}, t)$  удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$z_{1q}\varphi_1(p_0^{(k)}) = \int_0^t Y^{1/2}(p_0^{(k)}, \tau) \Delta_{p_0^{(k)}} \{ Y^{-1/2}(p_0^{(k)}, \tau) z_{1, q-1}\varphi_1(p_0^{(k)}) \} d\tau, \quad (1.16')$$

где  $Y(p_0^{(k)}, t) = |\det [\partial X_{1i}(p_0^{(k)}, \tau) / \partial p_{0j}]|$ ,  $z_{10} = 1$ ,  $\Delta_{p_0^{(k)}}$  — оператор Лапласа в «криволинейных» координатах  $p_0^{(k)}$ ,  $z_{1k} \in S_h$ .

Решение  $G(x, \xi, t)$  уравнения (1.1) с начальным условием  $G(x, \xi, 0) = \delta(x - \xi)$  (функция Грина) может быть представлено в виде (1.17), если положить

$$\tilde{\psi}_1(p_0^{(k)}, 0) = \frac{1}{(2\pi i h)^{n/2}} \exp \left\{ \frac{i}{h} \xi p_0^{(k)} \right\}, \quad \varphi_1(p_0^{(k)}) = \frac{1}{(2\pi i h)^{n/2}}, \quad f_1(p) = p \xi,$$

причем  $z_{1k}(x, \xi, t, h)$  будет удовлетворять условию

$$\int z_{1k}(x, \eta, t, h) \delta_{\varepsilon_1}(\eta, h) d\eta \in S_h$$

для любого  $\delta_{\varepsilon_1} \in S_h$ , отличного от нуля в некоторой  $\varepsilon_1(\varepsilon)$ -окрестности точки  $\xi$ .

**2. Доказательство теоремы 8.1.** Пусть  $x, t$  — некоторая точка, не являющаяся фокусом задачи (1.9), (1.10). Ниже будет доказано, что на каждой траектории  $X(x_0^{(k)}, \tau)$  ( $0 \leq \tau \leq t$ ),  $x_0^{(k)} \in M_{z_0}(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, k_0$ ) лежит конечное число  $q_k$  фокусов (см. лемму 1.4), расположенных, например, в точках  $\tau = \tau_q^{(k)}$  ( $q = 1, 2, \dots, q_k$ ).

Разобьем отрезок  $[t_0, t]$  точками  $t_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) так, чтобы

$$1) \quad t_i - t_{i-1} \leq \min \left\{ \frac{1}{5nM}, \frac{1}{\sqrt{2M}(n+1)} \right\} \quad (1 \leq i \leq r, \quad t_r = t);$$

2) для каждой точки фокуса  $\tau_q^{(k)}$  нашлись  $t_j$  и  $t_{j+1}$  такие, что  $t_j = \tau_q^{(k)} - \varepsilon$ ,  $t_{j+1} = \tau_q^{(k)} + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  достаточно мало, прежде всего настолько, чтобы в промежутке  $[t_j, t_{j+1}]$  не было больше фокусов.

Обозначим через  $S(\xi_{i+1}, \xi_i, t_{i+1}, t_i)$ , где  $\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{in})$  ( $i \in \{0, 1, 2, \dots, r-1\}$ ) — действие (1.2) вдоль пути  $X(\xi_{i+1}, \xi_i, t_{i+1}, t_i, \tau)$ , проведенного из точки  $\xi_i$  в точку  $\xi_{i+1}$ , за время от  $t_i$  до  $t_{i+1}$ . Формулы

(1.4) и (1.5) и соображения, высказанные вначале, позволяют сформулировать лемму (ее доказательство будет приведено ниже).

**Лемма 8.1.** Справедливо соотношение

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi i h)^{nr/2}} \int \dots \int \varphi(\xi_0) \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[ \sum_{i=1}^{r-1} S(\xi_{i+1}, \xi_i, t_{i+1}, t_i) + f(\xi_0) \right] \right\} \times \\ \times \left\{ 1 + \sum_{q=1}^{nr+N} h^q u_q(\xi_0, \dots, \xi_r, t_0, \dots, t_r) \right\} \times \\ \times \prod_{i=0}^{r-1} \left| \det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_{i+1}} \right\|^{1/2} d\xi_i + h^{N+1} u(x, t_0, t, h) \right\}, \quad (1.18)$$

где  $\xi_r = x$ ,  $t_r = t$ ,  $u \in S_h$ ,  $u_q \in S$ ,  $N$  — любое целое число.

Система уравнений для определения стационарных точек в интеграле (1.18) имеет вид

$$\text{grad}_{\xi_i} \{ S(\xi_{i+1}, \xi_i, t_{i+1}, t_i) + S(\xi_i, \xi_{i+1}, t_i, t_{i-1}) \} = 0, \\ \text{grad}_{\xi_0} \{ S(\xi_1, \xi_0, t_1, t_0) + f(\xi_0) \} = 0. \quad (1.19)$$

Но  $\text{grad}_{\xi_i} S(\xi_{i+1}, \xi_i, t_{i+1}, t_i) = -\dot{X}(\xi_{i+1}, \xi_i, t_{i+1}, t_i, \tau) |_{\tau=t_i}$ .

Действительно,

$$\frac{\partial S}{\partial \xi_{im}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial \dot{X}_j}{\partial \xi_{im}} \dot{X}_j - \frac{\partial V}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial \xi_{im}} \right] d\tau = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_j}{\partial \xi_{im}} \dot{X}_j \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} = \\ = -\dot{X}_m(\xi_{i+1}, \xi_i, t_{i+1}, t_i, \tau) |_{\tau=t_i}.$$

В то же время  $\text{grad}_{\xi_{i+1}} S(\xi_{i+1}, \xi_i, t_{i+1}) = \dot{X}(\xi_{i+1}, \xi_i, t_{i+1}, t_i, \tau) |_{\tau=t_{i+1}}$ .

Пусть  $\xi_i^{(k)}(x, t)$  — «стационарные точки», являющиеся решением системы (1.19). Следовательно,

$$\dot{X}(\xi_{i+1}, \xi_i^{(k)}, t_{i+1}, t_i, \tau) |_{\tau=t_i} = \dot{X}(\xi_i^{(k)}, \xi_{i-1}, t_i, t_{i-1}, \tau) |_{\tau=t_i}, \\ \dot{X}(\xi_1, \xi_0^{(k)}, t_1, t_0, \tau) |_{\tau=t_0} = \text{grad}_{\xi_0^{(k)}} f(\xi_0^{(k)}). \quad (1.20)$$

Это означает, что траектория  $X(\xi_i, \xi_0^{(k)}, t_i, t_0, \tau)$  в момент  $\tau = t_0$  проходит через точку  $\xi_0^{(k)}$  с импульсом  $\text{grad} f(\xi_0^{(k)})$ . Следовательно,  $X(\xi_i, \xi_0^{(k)}, t_i, t_0, \tau)$  совпадает с решением  $X(\xi_0^{(k)}, \tau)$  задачи (1.9), (1.10). Из (1.20) по индукции следует равенство

$$X(\xi_{i+1}, \xi_i^{(k)}, t_{i+1}, t_i, \tau) = X(\xi_0^{(k)}, \tau), \\ t_i \leq \tau \leq t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, r-1, \quad (1.21)$$

поскольку обе части его удовлетворяют одним и тем же начальным условиям при  $\tau = t_i$  и одному и тому же уравнению (1.9).



Наконец, из равенства

$$X(\xi_0^{(k)}, t) = X(\xi_0^{(k)}, t_r) = X(\xi_r, \xi_{r-1}^{(k)}, t_r, t_{r-1}, \tau) |_{\tau=t_r} = x$$

(в силу (1.21) при  $i=r-1$ ) вытекает, что  $x_0^{(k)} \in M_{x_0}(x)$ . Значит,

$$\xi_i^{(k)} = X(\xi_{i+1}, \xi_i^{(k)}, t_{i+1}, t_i, \tau) |_{\tau=t_i} = X(x_0^{(k)}, t_i).$$

Интеграл (1.18), таким образом, в силу метода стационарной фазы будет с точностью до  $O(\hbar^{N+1})$ , где  $N$  — любое число, равен сумме  $k_0$  интегралов вида

$$\frac{1}{(2\pi i \hbar)^{n/2}} \int \dots \int_{|\xi_i - X(x_0^{(k)}, t_i)| \leq \delta} \varphi(\xi_0) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ f(\xi_0) + \sum_{i=0}^{r-1} S(\xi_{i+1}, \xi_i, t_{i+1}, t_i) \right] \right\} \times \\ \times \left\{ 1 + \sum_{q=1}^{N+rn} \hbar^q u_q \right\} \prod_{i=0}^{r-1} \left| \frac{D^2 S(\xi_{i+1}, \xi_i, t_{i+1}, t_i)}{D\xi_i D\xi_{i+1}} \right|^{1/2} \eta_i(\xi_i) d\xi_i, \quad (1.21')$$

$$x_0^{(k)} = x_0^{(k)}(x, t) \in M_{x_0}(x),$$

где  $\eta_i(\xi_i)$  — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице в  $\delta_i$ -окрестности стационарной точки  $\xi_i^{(k)} = X(x_0^{(k)}, t_i)$ ,  $\delta_i < \delta$ , и нулю вне  $\delta$ -окрестности этой точки (это утверждение доказывается в следствии 8.1).

Пусть по индуктивному предположению первые  $j$  интегралов в формуле (1.21') для  $j \leq l$  в области  $|\xi_j - X(x_0^{(k)}, t_j)| \leq \delta$  равны

$$I_j(\xi_j, t_j) = \frac{1}{(2\pi i \hbar)^{n/2}} \varphi(x_0^{(k)}(\xi_j, t_j)) \left| \frac{DX(x_0^{(k)}(\xi_j, t_j), t_j)}{Dx^{(k)}} \right|^{-1/2} \times \\ \times \left\{ 1 + \sum_{q=1}^{N+nr} \hbar^q y_{qj}(x_0^{(k)}) \right\} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ S(x_0^{(k)}(\xi_j, t_j), t_j) - \frac{\pi \hbar m}{2} m_{x_0^{(k)}, t_j} \right] \right\} + \\ + \hbar^{N+1} y(\xi_j, t_j, \hbar), \quad (1.22)$$

где

$$y_{qj} \in S, y(\xi_j, t_j, \hbar) \in S_{\hbar}, x_0^{(k)} = x_0^{(k)}(\xi_j, t_j) \in M_{x_0}(\xi_j), \quad (1.22a)$$

$$S(x_0, t) = f(x_0) + \int_0^t \left( \frac{\dot{X}^2(x_0, \tau)}{2} - V(X(x_0, \tau)) \right) d\tau$$

есть действие вдоль классической траектории  $X(x_0, t)$ .

Покажем, что формула (1.22) будет справедлива и для  $j=l+1$ .

Вычислим интеграл

$$I_{l+1} = \frac{1}{(2\pi i \hbar)^{n/2}} \int_{|\xi_l - X(x_0^{(k)}(x, t), t_l)| \leq \delta} \left| \frac{\partial^2 S(\xi_{l+1}, \xi_l, t_{l+1}, t_l)}{D\xi_{l+1} D\xi_l} \right|^{1/2} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(\xi_{l+1}, \xi_l, t_{l+1}, t_l) \right\} I_l(\xi_l, t_l) d\xi_l \quad (1.23)$$

по методу стационарной фазы.

Стационарные точки определяются из уравнения

$$\text{grad}_{\xi_l} \{ S(\xi_{l+1}, \xi_l, t_{l+1}, \tau) + S(x_0^{(k)}(\xi_l, \tau), \tau) \} = 0 \quad (1.24)$$

при  $|\xi_l - X(x_0^{(k)}(x, t), t_l)| \leq \delta$ ,  $|\xi_{l+1} - X(x_0^{(k)}(x, t), t_{l+1})| \leq \delta$  и  $\tau = t_l$ . Пусть  $\xi_l^0$  — стационарная точка; тогда

$$\dot{X}(\xi_{l+1}, \xi_l^0, t_{l+1}, t_l, \tau) |_{\tau=t_l} = \dot{X}(x_0^{(k)}(\xi_l^0, t_l), \tau) |_{\tau=t_l}. \quad (1.24a)$$

Из этого равенства вытекает, что

$$X(\xi_{l+1}, \xi_l^0, t_{l+1}, t_l, \tau) = X(x_0^{(k)}(\xi_l^0, t_l), \tau) \quad (1.25)$$

при  $t_l \leq \tau \leq t_{l+1}$ .

Следовательно,  $X(x_0^{(k)}(\xi_l^0, t_l), t_l) = \xi_{l+1}$ ; отсюда  $x_0^{(k)}(\xi_l^0, t_l) = x_0^{(k)}(\xi_{l+1}, t_{l+1}) \in M_{x_0}(\xi_{l+1})$ . Поэтому  $\xi_l^0 = X(x_0^{(k)}(\xi_{l+1}, t_{l+1}), t_l)$  и

$$X(\xi_{l+1}, \xi_l^0, t_{l+1}, t_l, \tau) = X(x_0^{(k)}(\xi_{l+1}, t_{l+1}), \tau). \quad (1.26)$$

Из равенства (1.26) и того, что точка  $t_{l+1}, \xi_{l+1}$  не является фокусом, следует, что при достаточно малом  $\delta$  стационарная точка единственна.

Допустим, что существует еще точка  $\xi_l^1$ :  $|\xi_l^1 - \xi_l^0| \leq \delta$ . Это означает, что из двух «близких» точек  $\xi_l^0$  и  $\xi_l^1$  за время от  $t_l$  до  $t_{l+1}$  в точку  $\xi_{l+1}$  приходят две классические траектории. Отсюда следует (в силу единственности и непрерывной зависимости от начальных условий решения задачи (1.3) для  $|t_{l+1} - t_l| \leq 1/\sqrt{2M}(n+1)$ ), что эти траектории «близки». Каждая из них в силу (1.25), (1.26) служит решением задачи (1.9), (1.10); значит, точка  $t_{l+1}, \xi_{l+1}$  является фокусом. Но в точке  $t_{l+1}, \xi_{l+1}$  якобиан  $DX/Dx_0$  не равен нулю. В силу непрерывности якобиан  $DX/Dx_0$  не равен нулю и в  $\delta$ -окрестности этой точки. Мы пришли к противоречию. Все рассмотрение ведется в окрестностях траектории  $X(x_0^{(k)}(x, t), \tau)$ . Следовательно, речь идет о фокусах на траектории  $X(x_0^{(k)}(x, t), \tau)$ .

В силу метода стационарной фазы

$$I_{l+1} = \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} \left[ \frac{n - \sigma'}{2} + m_{x_0^{(k)}, t_l} \right] \right\} \times \\ \times \left| \frac{D^2 \{ S(\xi_{l+1}, \xi_l^0, t_{l+1}, t_l) + S(x_0^{(k)}(\xi_l^0, t_l), t_l) \}}{D\xi_{l+1} D\xi_l^0} \right|^{-1/2} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left| \frac{D^2 S(\xi_{l+1}, \xi_l^0, t_{l+1}, t_l)}{D^2 \xi_{l+1} D \xi_l^0} \right|^{\frac{1}{2}} \left| \frac{DX(x_0^{(k)}(\xi_l^0, t_l), t_l)}{Dx_0^{(k)}} \right|^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \times \left\{ 1 + \sum_{q=1}^{N+nr} h^q \bar{y}_q \right\} \exp \left\{ \frac{i}{h} \{ S(\xi_{l+1}, \xi_l^0, t_{l+1}, t_l) + S(x_0^{(k)}(\xi_l^0, t_l), t_l) \} \right\} + \\ & \quad + h^{N+1} \bar{y}(\xi_{l+1}, t_{l+1}, h), \quad (1.27) \\ & \xi_l^0 = X(x_0^{(k)}(\xi_{l+1}, t_{l+1}), t_l), \quad \bar{y}_q \in S, \quad \bar{y} \in S_h, \end{aligned}$$

где  $\sigma'$  — сигнатура матрицы

$$\left[ \frac{\partial^2 \{ S(\xi_{l+1}, \xi_l, t_{l+1}, t_l) + S(x_0^{(k)}(\xi_l, t_l), t_l) \}}{\partial \xi_{li} \partial \xi_{lj}} \right] \Big|_{\xi_l = X(x_0^{(k)}(\xi_{l+1}, t_{l+1}), t_l)}. \quad (1.28)$$

В силу (1.25), (1.26)

$$\begin{aligned} S(\xi_{l+1}, \xi_l^0, t_{l+1}, t_l) + S(x_0^{(k)}(\xi_l^0, t_l), t_l) = \\ = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left[ \frac{1}{2} \dot{X}^2(x_0^{(k)}(\xi_l^0, t_l), \tau) - V(X(x_0^{(k)}(\xi_l^0, t_l), \tau)) \right] d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t_l} \left[ \frac{1}{2} \dot{X}^2(x_0^{(k)}(\xi_l^0, t_l), \tau) - V(x_0^{(k)}(\xi_l^0, t_l), \tau) \right] d\tau + f(x_0^{(k)}(\xi_l^0, t_l)). \quad (1.29) \end{aligned}$$

Кроме того, если продифференцировать уравнение для стационарной точки (1.24) по  $x_0$ , считая, что  $\xi_l$  и  $\xi_{l+1}$  зависят от  $x_0$ , то мы получим равенство

$$\begin{aligned} \sum \left\{ \frac{\partial^2 S(\xi_{l+1}, \xi_l, t_{l+1}, \tau)}{\partial \xi_{(l+1)j} \partial \xi_{li}} \frac{\partial X_j(x_0, t_{l+1})}{\partial x_{0m}} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \{ S(\xi_{l+1}, \xi_l, t_{l+1}, \tau) + S(x_0^{(k)}(\xi_l, \tau), \tau) \}}{\partial \xi_{lj} \partial \xi_{li}} \frac{\partial X_j(x_0, \tau)}{\partial x_{0m}} \right\} \Big|_{\substack{\xi_l = X(x_0, \tau) \\ x_0 = x_0^{(k)}(\xi_{l+1}, t_{l+1})}} = 0, \quad (1.30) \end{aligned}$$

которое справедливо для любого  $\tau < t_{l+1}$ . Отсюда следует

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 S(\xi_{l+1}, \xi_l, t_{l+1}, \tau)}{\partial \xi_{(l+1)j} \partial \xi_{li}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_{l+1})}{\partial x_{0j}} \right\| = \\ = - \left\| \frac{\partial^2 \{ S(\xi_{l+1}, \xi_l, t_{l+1}, \tau) + S(x_0^{(k)}(\xi_l, \tau), \tau) \}}{\partial \xi_{lj} \partial \xi_{li}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, \tau)}{\partial x_{0j}} \right\| \quad (1.31) \end{aligned}$$

при  $\xi_l = X(x_0^{(k)}(\xi_{l+1}, t_{l+1}), \tau)$ ,  $x_0 = x_0^{(k)}(\xi_{l+1}, t_{l+1})$ .

В силу (1.29) и (1.31) формула (1.27) приводится к виду

$$\begin{aligned} I_{l+1}(\xi_{l+1}, t_{l+1}) = \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} \left( \frac{n - \sigma'}{2} + m_{x_0^{(k)}, t_l} \right) \right\} \times \\ \times \varphi(x_0^{(k)}(\xi_{l+1}, t_{l+1})) \left| \frac{DX(x_0^{(k)}(\xi_{l+1}, t_{l+1}), t_{l+1})}{Dx_0^{(k)}} \right|^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\{ 1 + \sum_{q=1}^{N+nr} h^q \bar{y}_q \right\} \exp \left\{ \frac{i}{h} S(x_0^{(k)}(\xi_{l+1}, t_{l+1}), t_{l+1}) \right\} + h^{N+1} \bar{y}, \quad (1.32) \\ \bar{y}_q \in S, \quad \bar{y} \in S_h. \end{aligned}$$

Остается вычислить  $\sigma'$ . Предположим вначале, что на отрезке  $t_l \leq \tau \leq t_{l+1}$  траектория  $X(x_0^{(k)}(x, t), \tau)$  не имеет фокусов, т. е. якобиан

$$\frac{DX(x_0^{(k)}(x, t), \tau)}{Dx_0^{(k)}} = \frac{DX(x_0^{(k)}(\xi_{l+1}, t_{l+1}), \tau)}{Dx_0^{(k)}}$$

не обращается в нуль при  $t_l \leq \tau \leq t_{l+1}$ . В силу непрерывности это будет выполняться во всей области  $|\xi_{l+1} - \xi_{l+1}^{(k)}| \leq \delta$ . Как будет доказано ниже, при  $t_l < \tau < t_{l+1}$  определитель

$$\frac{D^2 S(\xi_{l+1}, \xi_l, t_{l+1}, \tau)}{D \xi_{l+1} D \xi_l}$$

не обращается ни в нуль, ни в бесконечность (следствие 8.1). Следовательно, в силу (1.31) и детерминант матрицы (1.28) не обращается на интервале  $t_l < \tau < t_{l+1}$  ни в нуль, ни в бесконечность. Отсюда в силу непрерывности матрицы (1.28) по  $\tau$  следует, что сигнатура ее тоже не меняется в указанном интервале. Но в точке  $\tau = t_{l+1}$  матрица (1.28) будет положительно определена в силу (1.31), поскольку матрица

$$\left\| \frac{\partial^2 S(\xi_{l+1}, \xi_l, t_{l+1}, t_{l+1} - \varepsilon)}{\partial \xi_{(l+1)j} \partial \xi_{li}} \right\|$$

при малом  $\varepsilon$  мало отличается от единичной, умноженной на отрицательную константу, а матрица

$$\left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_{l+1})}{\partial x_{0j}^{(k)}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_{l+1} - \varepsilon)}{\partial x_{0j}^{(k)}} \right\|^{-1}$$

мало отличается от единичной матрицы. Значит, матрица (1.28) будет положительно определена и в точке  $\tau = t_l$ . Из (1.32) в этом случае следует (1.22) при  $j = l+1$ , поскольку, если на отрезке  $t_l \leq \tau \leq t_{l+1}$  нет фокусов, то

$$m_{x_0^{(k)}, t_{l+1}} = m_{x_0^{(k)}, t_l}.$$

Предположим теперь, что на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  лежит фокус траектории  $X(x_0^{(k)}(x, t), \tau)$  в точке  $\tau'$ . В силу разбиения отрезка  $[t_0, t]$  имеем  $t_i = \tau' - \varepsilon$ ,  $t_{i+1} = \tau' + \varepsilon$ . Поскольку матрица

$$\left\| \frac{\partial^2 S(\xi_{i+1}, \xi_i, t_{i+1}, t_i)}{\partial \xi_{(i+1)l} \partial \xi_{ij}} \right\|$$

при достаточно малом  $\varepsilon$  мало отличается от единичной, умноженной на отрицательную константу, то в силу (1.31) сигнатура  $\sigma'$  матрицы (1.28) при  $\xi_{i+1} = \xi_{i+1}^{(k)}$  будет равно сигнатуре  $\sigma$  фокуса (1.14). Матрица (1.28) в точке  $\tau = t_i$ ,  $\xi_{i+1} = \xi_{i+1}^{(k)}$  отлична от нуля. Поэтому в силу непрерывности ее сигнатура не изменится, если вместо  $\xi_{i+1}^{(k)}$  взять  $\xi_{i+1}$  такое, что  $|\xi_{i+1} - \xi_{i+1}^{(k)}| \leq \delta$ . Следовательно, поскольку  $m_{x_0, t_{i+1}} = (n - \sigma)/2 + m_{x_0, t_i}$ , где  $\sigma$  — сигнатура фокуса, то формула (1.32) совпадает с формулой (1.22) при  $j = i + 1$ .

Остается еще доказать (1.22) для  $j = 1$ . Как будет доказано ниже, при

$$\tau \leq \frac{1}{(3M' + 5)Mn}, \quad M' = n \max \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right|$$

на траектории  $X(x_0^{(k)}(x, t), \tau)$  фокусов нет, а для этого случая формула (1.22) доказана в гл. 5.

Таким образом, мы получили формулу (1.15). Теперь нужно показать, что  $z_q$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям (1.16). Можно показать, что заменой

$$\psi(x, t) = \left[ \frac{DX(x_0^{(k)}(x, t), t)}{Dx_0^{(k)}} \right]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{i}{h} S(x_0^{(k)}(x, t), t) \right\} \theta(x_0^{(k)}(x, t), t, h) \quad (1.33)$$

уравнение (1.1) приводится к виду

$$ih \frac{\partial \theta(x_0^{(k)}, t)}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \sqrt{\frac{DX(x_0^{(k)}, t)}{Dx_0^{(k)}}} \Delta_{x_0^{(k)}} \theta(x_0^{(k)}, t) \left( \sqrt{\frac{DX(x_0^{(k)}, t)}{Dx_0^{(k)}}} \right)^{-1} \quad (1.34)$$

Следовательно, если мы подействуем оператором  $ih \frac{\partial}{\partial t} + \frac{h^2}{2} \Delta - V(x)$  на обе части равенства

$$\psi(x, t) = \sum \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} m_{x_0^{(k)}, t} + \frac{i}{h} S(x_0^{(k)}, t) \right\} \left( \sqrt{\frac{DX(x_0^{(k)}, t)}{Dx_0^{(k)}}} \right)^{-1} \times \left\{ \varphi(x_0^{(k)}) \left[ 1 + \sum_{q=1}^N h^q z_q \right] \right\} = h^{N+1} z(x, t, h), \quad z \in S_{h_n} \quad (1.35)$$

то в силу (1.33) и (1.34) получаем

$$-\sum \left( \frac{\partial X(x_0^{(k)}, t)}{Dx_0^{(k)}} \right)^{-1} \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} m_{x_0^{(k)}, t} + \frac{i}{h} S(x_0^{(k)}, t) \right\} \times \left\{ ih \frac{\partial}{\partial t} - \frac{h^2}{2} \sqrt{\frac{DX(x_0^{(k)}, t)}{Dx_0^{(k)}}} \Delta_{x_0^{(k)}} \left( \frac{\partial X(x_0^{(k)}, t)}{Dx_0^{(k)}} \right)^{-1/2} \right\} \times \left( \varphi(x_0^{(k)}) \left[ 1 + \sum_{q=1}^N h^q z_q \right] \right) = h^{N+1} z(x, t, h), \quad (1.36)$$

где  $z \in S_{h_n}$ . Приравнявая коэффициенты при степенях  $h^q$ , получим для  $z_q$  ( $q = 1, 2, \dots, N-1$ ) рекуррентные соотношения (1.16).

3. Доказательство леммы 8.1. Пусть

$$S(x, p, t, t_0) = px_0 + \int_{t_0}^t \left\{ \frac{1}{2} \dot{X}^2(x_0, p, t, t_0, \tau) - V(X(x_0, p, t, t_0, \tau)) \right\} d\tau, \quad (1.37)$$

где  $X(x_0, p, t, t_0, \tau)$  — решение уравнения (1.9), удовлетворяющее начальным условиям  $X|_{\tau=t_0} = x_0$ ,  $\dot{X}|_{\tau=t_0} = p$ ,  $x_0 = x_0(x, p, t)$  — решение уравнения

$$X(x_0, p, t, t_0, \tau)|_{\tau=t} = x.$$

Пусть  $u(x, p, t)$  — функция, ограниченная вместе со всеми производными. Обозначим через  $\hat{B}_u$  и  $\hat{\Phi}$  операторы вида

$$\hat{B}_u F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{h} S(x, p, t) \right\} u(x, p, t) F(x) dx, \\ \hat{\Phi} F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{h} px \right\} F(p) dp,$$

а через  $\hat{A}_z$  — операторы вида

$$\hat{A}_z F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} z(x, p, t, h) F(x) dx.$$

В работе [22] (см. § 3) было доказано, что решение  $\psi(x, p, t, t_0)$  уравнения (1.1), удовлетворяющее условию  $\psi(x, p, t, t_0)|_{t=t_0} = \exp \left\{ \frac{i}{h} px \right\}$ , при  $|t-t_0| \leq 1/(5nM)$  может быть представлено в виде

$$\psi(x, p, t, t_0) = \left| \frac{D^2 S(x, p, t, t_0)}{Dx Dp} \right|^{1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{h} S(x, p, t, t_0) \right\} \times \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{nr+N} h^i F_i(x, p, t, t_0) \right\} + h^{nr+N+1} z(x, p, t, h)$$

$(F_i(x, p, t, t_0) — некоторые ограниченные вместе со всеми своими производными функции). При этом$

$$\hat{A}_z = \int_{t_0}^{t_1} \hat{B}_n \exp \left\{ -\frac{i}{h} \hat{H}(t-t') \right\} dt', \quad \hat{H} = -\frac{h^2}{2} \Delta + V(x).$$

В гл. 5 мы показали, что  $h^n \exp \left\{ -\frac{i}{h} \hat{H}t \right\} : S_n \rightarrow S_n$  и  $\hat{B}_n : S_n \rightarrow S_n$ .

Отсюда  $h^n \hat{A}_z : S_n \rightarrow S_n$ . Очевидно, что  $\hat{\Phi} : S_n \rightarrow S_n$ . Как известно,

$$G(x, \xi, t, t_0) = \frac{1}{(2\pi i h)^n} \int \exp \left\{ -\frac{i}{h} px \right\} \psi(\xi, p, t, t_0) dp.$$

В силу (1.5) решение  $\psi(x, t)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi(\xi, t) = & \frac{1}{(2\pi i h)^{nr}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi_0, 0) \exp \left\{ \frac{i}{h} \sum_{i=0}^{r-1} [S(\xi_i, p_{i+1}, t_i, t_{i+1}) - p_{i+1} \xi_{i+1}] \right\} \times \\ & \times \prod_{i=0}^{r-1} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{nr+N} h^k F_k(\xi_i, p_{i+1}, t_i, t_{i+1}) \right\} \left| \frac{D^2 S(\xi_i, p_{i+1}, t_i, t_{i+1})}{D_{\xi_i} D p_{i+1}} \right|^{1/2} d\xi_i dp_{i+1} + \\ & + h^{N+1} \hat{R} \psi(\xi_0, 0). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Оператор  $\hat{R}$  является линейной комбинацией произведений операторов  $h^n \hat{A}_z$ ,  $\hat{B}_n$  и  $\hat{\Phi}$ . Отсюда следует, что  $\hat{R} : S_n \rightarrow S_n$  и  $\hat{R} \psi(\xi_0, 0) \in S_n$ .

Чтобы из (1.38) получить (1.18), нужно применить метод стационарной фазы. Докажем предварительно вспомогательную лемму.

**Лемма 8.2.** Пусть  $f(x, p, \xi, h)$  бесконечно дифференцируема по  $p$  и аналитична по  $h$  при  $0 \leq h \leq h_0$  и пусть  $\varphi(\xi, h) \in S_n$ ,  $|t-t_0| < < 1/\sqrt{2M}(n+1)$ ,  $p_0 = p_0(x, \xi, t, t_0)$  — решение уравнения

$$\text{grad}_{p_0} S(x, p_0, t, t_0) = \xi. \quad (1.39)$$

Наконец, пусть  $\eta_0 \in S$  отлично от нуля в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $p_0$ ; тогда

$$\begin{aligned} I = \int \exp \left\{ \frac{i}{h} S(x, p, t, t_0) - p\xi \right\} f(x, p, \xi, h) \varphi(\xi, h) [1 - \eta_0(p)] d\xi dp = \\ = h^N z(x, t, h), \end{aligned} \quad (1.40)$$

где  $z \in S_n$ ,  $N$  — любое целое число.

**Доказательство.** В силу теоремы 8.3 в интервале  $|t-t_0| \leq \leq 1/\sqrt{2M}(n+1)$  решение (1.39)  $p_0(x, \xi, t, t_0) = X(x, \xi, t, t_0, \tau) |_{\tau=t}$  единственно. Из (1.9) следует, что

$$x - \xi - p_0(t-t_0) \leq C(t-t_0)^2, \quad C > |\text{grad} V|,$$

$$|p_0| \leq C(t-t_0) + \left| \frac{x-\xi}{t-t_0} \right|,$$

поэтому в силу непрерывности, если  $|\text{grad}_p S(x, p, t, t_0) - \xi| < \delta$ , то  $|p-p_0| < \varepsilon$ . Отсюда следует, что в области  $|p-p_0| > \varepsilon$ , в любом круге радиуса  $\varepsilon_1$  хотя бы одна из производных  $\partial S/\partial p_i$  удовлетворяет условию  $|\partial S/\partial p_i - \xi_i| > \delta_1$ . Пусть  $1 = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i(p)$  — разложение еди-

ницы, причем при  $l > 0$  функция  $\eta_l \in S$  обращается в нуль вне области  $\Omega_l$ , границу которой можно заключить между концентрическими сферами радиусов  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ . Число областей  $\Omega_l$ , с которыми пересекается каждая фиксированная область  $\Omega_{i_0}$ , ограничено некоторой постоянной величиной  $d$  (одной и той же для всех  $\Omega_l$ ). В силу сказанного в области  $\Omega_l$  для одной из производных справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial}{\partial p_{i_l}} (S(x, p, t, t_0) - p\xi) \right| > \delta_1.$$

Интеграл  $I$  в (1.40) будет равен

$$\begin{aligned} I = \int \varphi(\xi, h) d\xi \int \exp \left\{ \frac{i}{h} (S - p\xi) \right\} f(x, p, \xi, h) \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(p) dp = \\ = (ih)^N \sum_{i=1}^{\infty} \int \varphi(\xi, h) d\xi \int_{\Omega_i} \exp \left\{ \frac{i}{h} (S - p\xi) \right\} \times \\ \times \left( \frac{\partial^N}{\partial p_{i_l}^N} \left\{ \eta_i(p) f \left( \frac{\partial(S-p\xi)}{\partial p_{i_l}} \right)^{-N} \right\} \right) dp. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^N}{\partial p_{i_l}^N} \left\{ \eta_i(p) f \left[ \frac{\partial(S-p\xi)}{\partial p_{i_l}} \right]^{-N} \right\} \leq d \max_i \frac{\partial^N}{\partial p_{i_l}^N} \left\{ \eta_i(p) f \left[ \frac{\partial(S-p\xi)}{\partial p_{i_l}} \right]^{-N} \right\} \leq \leq \frac{C_N}{\delta_1^{2N} \varepsilon_2^N}.$$

Так как  $i$ -й член суммы равен нулю вне  $\Omega_i$ , а производные выше первой от  $S(x, p, t, t_0)$  ограничены равномерно по  $p$ , отсюда и из гл. 5 следует (1.40). Лемма доказана.

В силу метода стационарной фазы

$$\begin{aligned} I = \int \exp \left\{ \frac{i}{h} [S(x, p, t, t_0) - p\xi] \right\} f(x, p, \xi, h) \varphi(\xi, h) \eta_0(p) d\xi dp = \\ = \int \varphi(\xi, h) \exp \left\{ \frac{i}{h} [S(x, p_0, t, t_0) - p_0\xi] \right\} \eta_0(p_0) f(x, p_0, \xi, h) \times \\ \times \left| \frac{D^2 S(p, \xi, t, t_0)}{DpDp} \right|_{p=p_0}^{-1/2} \left\{ 1 + \sum_{q=1}^N h^q f_q(p_0) + h^{N+1} \chi(x, \xi, t, t_0, h) \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (1.42)$$

$\chi \in S_h,$

где  $N$  — любое целое число,  $p_0 = p_0(x, \xi, t, t_0)$  — решение уравнения (1.39).

Аналогично формулам (1.29) — (1.31) получаем

$$1) \quad S(x, \xi, t, t_0) = S(x, p_0, t, t_0) - p_0 \xi, \quad p_0 = p_0(x, \xi, t, t_0); \quad (1.43)$$

$$2) \quad \left\| \frac{\partial^2 S(x, p, t, t_0)}{\partial p_i \partial p_j} \right\|_{p=p_0} = \left\| \frac{\partial^2 S(x, \xi, t, t_0)}{\partial x_i \partial \xi_j} \right\| = \left\| \frac{\partial^2 S(x, p, t, t_0)}{\partial x_i \partial p_j} \right\|_{p=p_0}. \quad (1.44)$$

Из (1.38), (1.42), (1.44) получаем (1.18).

**З а м е ч а н и е.** Из формулы (1.18) следует (1.21). Это доказывается совершенно аналогично лемме 1.2. Нужно лишь показать, что вне  $\varepsilon$ -окрестности стационарных точек левые и правые части уравнений (1.24), (1.24а) будут отличаться больше чем на  $\delta_\varepsilon$ ; иначе говоря, условия (1.24) не будут выполняться в пределе при  $|\xi_i| \rightarrow \infty$  (ни для какого  $i$ ). Это будет следовать из неравенств

$$|\dot{X}(t_{i+1}) - \dot{X}(t_i)| \leq C(t_{i+1} - t_i), \quad C = \max |\text{grad } V|,$$

и

$$|\xi_{i+1} - \xi_i - \dot{X}(t_i)(t_{i+1} - t_i)| \leq \frac{C(t_{i+1} - t_i)^2}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, r-1,$$

которые вытекают из (1.9). Поскольку  $|\text{grad } f| < C_1$ , то из первых неравенств по индукции следует ограниченность  $\dot{X}$ , а поскольку  $\xi_r = x$  ограничено, то из второй системы неравенств будет следовать по индукции ограниченность  $\xi_i$ .

**4. О существовании и единственности решения краевой задачи для уравнений Ньютона.**

**Т е о р е м а 8.3. Решение системы уравнений**

$$\dot{X}_i = -F_i(X, \tau), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.45)$$

удовлетворяющее условиям

$$X|_{\tau=0} = \xi, \quad X|_{\tau=t} = x, \quad (1.46)$$

существует и единственно при

$$0 < t \leq \frac{1}{\sqrt{2M}(n+1)}, \quad (1.47)$$

где

$$M = \max_{i,j,x} |\partial F_i / \partial X_j|.$$

При этом

1) все диагональные миноры матрицы

$$\left\| \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial \xi_j} \right\|_{\tau=t} \quad (1.48)$$

отрицательны;

$$2) \lim_{t \rightarrow 0} (-t^n \|\partial \dot{X}_i / \partial \xi_j\|_{\tau=t}) = E \quad (E \text{ — единичная матрица});$$

3) если  $F(x, \tau)$  бесконечно дифференцируема по  $x$ , то  $\dot{X}_i|_{\tau=t}$  бесконечно дифференцируема по  $x$  и  $\xi$ , причем все эти производные ограничены.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Представим систему (1.45) в виде

$$\dot{X}_i = P_i, \quad \dot{P}_i = -F_i(X, \tau). \quad (1.49)$$

Рассмотрим систему (1.45) с начальными условиями

$$X|_{\tau=0} = \xi_0, \quad P|_{\tau=0} = p_0. \quad (1.50)$$

Из [22] (лемма 3) следует, что решение (1.49), (1.50) существует при

$$\tau < t \leq \min_i \left( \frac{a}{\rho_{0i} + b}, \frac{b}{M(n\alpha + \alpha)} \right),$$

где

$$a = \max_{i, \tau \leq t} |X_i - \xi_{0i}|, \quad b = \max_{i, \tau \leq t} |P_i - p_{0i}|, \quad \alpha = \sum_{i=1}^n |\xi_{0i}|.$$

Нетрудно видеть, что  $a, b, t$ , определенные условиями

$$a = 2\alpha, \quad b = \alpha \sqrt{2M}, \quad t \leq \frac{1}{\sqrt{2M}(n+1)}, \quad |p_0| \leq \left( \frac{\alpha}{t} \right) + bn, \quad (1.51)$$

удовлетворяют этому неравенству. Предварительно докажем две леммы.

**Л е м м а 8.3. Решение уравнения (1.45) с условиями**

$$X|_{\tau=0} = \xi_0, \quad X|_{\tau=t} = 0 \quad (1.52)$$

существует, если  $t$  удовлетворяет неравенству (1.47).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим сначала задачу (1.49), (1.50). Пусть  $p_0$  удовлетворяет неравенству (1.51). Очевидно, что  $|X_i - \xi_{0i} - p_{0i}t| \leq bt$ , т. е.  $X = \xi_0 + p_0 t + \gamma$ , причем  $|\gamma| \leq bt\sqrt{n}$ .

Рассмотрим отображение шара  $\{p_0: |p_0| \leq \frac{\alpha}{t} + bn\}$  в  $\mathbb{R}^n$ :

$$C'(p_0) = p_0 - \frac{X(\xi_0, p_0, t)}{t}.$$

Если  $\bar{p}$  принадлежит поверхности шара, то

$$\rho(C'(\bar{p}), 0) = \left| \bar{p} - \frac{X(\xi_0, \bar{p}, t)}{t} \right| = \frac{1}{t} |\xi_0 + \gamma| \leq \frac{1}{t} (|\xi_0| + |\gamma|) \leq \frac{\alpha}{t} + bn = \rho(\bar{p}, 0).$$

Тем самым  $C'$  имеет неподвижную точку, т. е. найдется такое  $p_0'$ , удовлетворяющее (1.51), что  $C'(p_0') = p_0'$ , т. е.  $X(\xi_0, p_0', t) = 0$ . Лемма доказана.

Из леммы 8.3 следует, что решение задачи (1.45), (1.46) существует при условии (1.47). Действительно, положим  $\bar{X} = X - \xi$ ,  $\xi_0 = x - \xi$ . Тогда  $\bar{X}$  будет удовлетворять условиям леммы 8.3.

Для доказательства утверждения 1) заметим, что  $\partial X_i / \partial \xi_j$  и  $\partial P_i / \partial \xi_j$  удовлетворяют системе

$$\frac{\partial \dot{P}_i}{\partial \xi_j} = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i(X, \tau)}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial \xi_j}, \quad (1.53)$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial P_i}{\partial \xi_j}$$

и условиям

$$\left. \frac{\partial X_i}{\partial \xi_j} \right|_{\tau=0} = \delta_{ij}, \quad \left. \frac{\partial X_i}{\partial \xi_j} \right|_{\tau=t} = 0. \quad (1.54)$$

Если в (1.53) считать решение  $X(\tau)$  задачи (1.45), (1.46) заданной функцией  $\tau$ , то мы получим вновь систему вида (1.45), (1.46) при  $\xi_i = \delta_{ij}$ ,  $x_i = 0$ . Следовательно, решение задачи (1.53), (1.54) существует.

**Лемма 8.4.** *Решение системы (1.49) с условиями  $X_i|_{\tau=0} = \delta_{ij}$ ,  $X_i|_{\tau=t} = 0$  (где  $j$  фиксировано) при  $t \leq 1/\sqrt{2M}(n+1)$  удовлетворяет неравенствам*

$$|P_i|_{\tau=t} \leq \frac{1}{2nt} \text{ при } i \neq j \text{ и } |P_j|_{\tau=t} \geq \frac{1}{t} - \frac{1}{2nt}.$$

**Доказательство.** Пусть  $i \neq j$ , т. е.  $X_i(0) = 0$ ,  $X_i(t) = 0$ . Следовательно, в силу (1.45)  $|\dot{X}_i| \leq Mnat$ ; откуда

$$|\dot{X}(\tau) - \dot{X}(0)| \leq Mnat, \quad |X_i(t) - X_i(0) - \dot{X}_i(0)t| \leq \frac{Mnat^2}{2}, \quad (1.55)$$

а следовательно,

$$|\dot{X}_i(t)| \leq \frac{Mnat}{2} \leq \frac{1}{2nt}$$

в силу (1.47).

Пусть  $i = j$ , т. е.  $X_j(0) = 1$ ,  $X_j(t) = 0$ ; тогда из (1.55) следует  $|1 + X_j(0)t| \leq Mnat^2/2$ . Поэтому и  $|1 + \dot{X}_j(t)t| \leq Mnat^2/2$ , а следовательно,  $|\dot{X}_j(t)| \geq \frac{1}{t} - \frac{Mnat}{2} \geq \frac{1}{t} - \frac{1}{2nt}$ , что и требовалось доказать.

Из гл. 5 следует, что для задачи (1.53), (1.54) справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial P_i}{\partial \xi_j} \right|_{\tau=t} \leq \frac{1}{2nt} \quad \text{при } i \neq j,$$

$$\left| \frac{\partial P_i}{\partial \xi_j} \right|_{\tau=t} \geq \frac{1}{t} - \frac{1}{2nt} \quad \text{при } i = j.$$

Отсюда следует, что все диагональные миноры матрицы  $\|\partial P_i / \partial \xi_j\|_{\tau=t}$  не обращаются в нуль при условии (1.47).

Но  $P_i(t) = \partial S(x, \xi, t) / \partial x_i$ ; следовательно,

$$\left\| \frac{\partial P_i}{\partial \xi_j} \right\|_{\tau=t} = \left\| \frac{\partial^2 S(x, \xi, t)}{\partial \xi_j \partial x_i} \right\|.$$

Поскольку  $S(x, \xi, t)$  удовлетворяют уравнению Гамильтона — Якоби, а якобиан  $D^2 S / D x D \xi = 0$  при условии (1.47), то  $S(x, \xi, t)$  является полным интегралом уравнения Гамильтона — Якоби. Следовательно, решение системы  $P_i = \partial S / \partial x_i$ ,  $p_i = -\partial S / \partial \xi_i$  единственно.

Докажем утверждение 2). Сделав замену  $\tau' = \tau/t$ , в (1.53), (1.54) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau'} \frac{\partial P}{\partial \xi_j} &= -t \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial \xi_j}, \\ \frac{d}{d\tau'} \frac{\partial X_i}{\partial \xi_j} &= t \frac{\partial P_i}{\partial \xi_j}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\left. \frac{\partial X_i}{\partial \xi_j} \right|_{\tau'=0} = \delta_{ij}, \quad \left. \frac{\partial X_i}{\partial \xi_j} \right|_{\tau'=1} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Как известно, решение задачи (1.56) будет сходиться при  $t \rightarrow 0$  к решению «невозмущенного» уравнения

$$\frac{d^2}{(d\tau')^2} \frac{\partial X_i^0}{\partial x_j} = 0,$$

т. е. к

$$\frac{\partial X_i^0}{\partial x_j} = (1 - \tau') \delta_{ij} \quad \text{и} \quad \frac{\partial P_i^0}{\partial x_j} = -\frac{\delta_{ij}}{t}.$$

Отсюда следует, что в пределе при  $t \rightarrow 0$  матрица  $-t^n \|\partial P_i / \partial x_j\|_{\tau=t}$  стремится к единичной. Значит, характеристические миноры матрицы  $\|\partial P_i / \partial x_j\|_{\tau=t}$  отрицательны при  $0 < t \leq 1/\sqrt{2M}(n+1)$  (поскольку в этом промежутке они не меняют знака).

Утверждение 3) доказывается с помощью дифференцирования (1.45), (1.46) соответственно по параметрам  $x$  и  $\xi$ , затем дифференцирования (1.53), (1.54) по параметрам  $x$  и  $\xi$  и т. д. Теорема доказана.

**Следствие 8.1.** *При условии (1.47)*

$$1) |D^2 S(x, \xi, t) / D \xi D x| \geq \delta > 0;$$

$$2) \lim_{t \rightarrow 0} (-t^n \|\partial^2 S(x, \xi, t) / \partial x_i \partial \xi_j\|) = E.$$

## § 2. Леммы о решениях уравнений Гамильтона

Известно, что функции  $H(p, x, t)$  можно поставить в соответствие самосопряженный оператор  $\hat{H}(\hat{p}, x, t)$ , например, по формуле

$$\hat{H}(\hat{p}, x, t)\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right\} dp' \times \\ \times \int \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^n p_i' x_i'\right\} H(p', x', t) \varphi(x') dx'.$$

Если  $H(p, x, t)$  — достаточно гладкая функция своих аргументов, то, аналогично лемме 6.13 и теореме 6.1, можно получить для задачи

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \hat{H}(\hat{p}, x, t) \Psi = 0, \\ \Psi|_{t=0} = \varphi(x) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} f(x)\right\},$$

где  $\varphi(x)$  финитна, асимптотику при достаточно малом  $t$  с оценкой в  $L_2$ .

Метод шагов вдоль траектории переносится на этот случай непосредственно, и при условии достаточной гладкости  $H(p, x, t)$  мы получим формулу, аналогичную (1.15) для произвольного времени  $T$  в нефокальной точке.

Теперь мы докажем, что фаза, которую мы получаем методом шагов вдоль траектории, совпадает с индексом по Морсу, если форма

$$\sum_{i,j=1}^n H_{p_i p_j} z_i z_j > 0, \quad z_i \neq 0, \quad (2.0)$$

положительно определена.

В гл. 7 мы доказали, что фаза равна индексу траектории, введенному в гл. 2, § 2 для путей в пленке. Поэтому из доказанного будет следовать, что при условии (2.0) этот индекс совпадает (по модулю 4) с индексом Морса.

1. **Предварительные сведения.** В этом параграфе мы будем существенно использовать следующую теорему Морса:

Если  $H(p, q, t)$  — недостаточно гладкая функция, удовлетворяющая (2.0), то  $t=t_0$  является нулем функции  $J = DX(\alpha, t)/D\alpha$  кратности, равной дефекту матрицы  $\|\partial X_i(\alpha, t)/\partial \alpha_j\|$  при  $t=t_0$ .

Отсюда следует, что число фокусов на конечном отрезке траектории конечно. Поэтому для любой фиксированной точки  $x_0$ ,  $t$  при достаточно малом  $\varepsilon$  существует матрица

$$C(t, \varepsilon) = \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t - \varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t + \varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\|^{-1}.$$

Мы будем обозначать через  $\lambda_i(\varepsilon, t)$  ( $i=1, \dots, n$ ) ее собственные значения.

Введем с помощью матрицы еще одно определение индекса траектории  $X(x_0, 0, T)$  как

$$\gamma = \text{var}_{0 < t \leq T} \sum_{i=1}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\lambda_i(\varepsilon, t)}{|\lambda_i(\varepsilon, t)|} \right).$$

Мы докажем в лемме 8.10, что фазовый множитель в формуле (1.15) равен  $\exp\{i\pi\gamma\}/4$ . Затем в лемме 8.11 мы докажем, что  $-\gamma + n/2$  равно индексу Морса.

При этом лемму 8.10 мы докажем в такой форме, которая была бы пригодна и для бихарактеристик волнового уравнения, несмотря на то, что для гамильтониана волнового уравнения условие (2.0) не выполняется. Напомним, что метод шагов вдоль траектории, развитый в предыдущем параграфе, автоматически переносится на случай волнового уравнения при дополнительном условии конечности числа фокальных точек на траектории. Поэтому при этом условии введенное здесь понятие индекса может быть использовано для вычисления асимптотики решения волнового уравнения.

Для доказательства лемм 8.10 и 8.11 нам понадобится оценка решения краевой задачи для гамильтоновой системы и оценки производных решения уравнения Гамильтона — Якоби. Этим вопросам посвящены леммы 8.5 и 8.8.

В лемме 8.6 доказываем, что релятивистский гамильтониан удовлетворяет условию (2.0).

В лемме 8.5 мы будем опираться на следующую топологическую теорему:

Пусть  $C$  и  $C'$  — два непрерывных отображения замкнутого шара  $T^n \subset \mathbb{R}^n$  в пространство  $\mathbb{R}^n$ , имеющие на  $T^n$  лишь конечное число неподвижных точек, которые все лежат в  $T^n$ . Пусть, кроме того, для всех точек, принадлежащих границе шара, выполняется неравенство  $\rho(C_p, C_p') \leq \rho(C_p, p)$ , где  $\rho(p, p')$  — расстояние между точками  $p$  и  $p'$ . Тогда отображения  $C$  и  $C'$  имеют в  $T^n$  одно и то же алгебраическое число неподвижных точек (см. [4]).

### 2. О нечетном числе решений.

Лемма 8.5. Пусть  $x_i(t), y_i(t)$  ( $i=1, \dots, n$ ) удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{x}_i = F_i(x, y, t), \quad i=1, \dots, n, \quad (2.1)$$

$$\dot{y}_i = f_i(x, y, t), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n),$$

и краевым условиям

$$x_i(0) = x_i^0, \quad y_i(t_1) = y_i^0(x(t_1)), \quad (2.2)$$

где функции  $F_i(x, y, t)$  и  $f_i(x, y, t)$  удовлетворяют условиям

$$F_i(x, y, t) \leq c_1, \quad f_i(x, y, t) \leq c_2, \quad (2.3) \\ |\partial y_i^0 / \partial x_j| \leq c_3$$

при

$$|x_i| \leq |x_i^0 + b|, \quad |y_i| \leq |y_i^0| + (n+1)a, \quad t \leq T, \quad (2.4)$$

где  $b > 0$ ,  $a > 0$ ,  $T > 0$  — некоторые константы\*). Тогда при  $t_1 \leq \left\{ \frac{b}{c_1}, \frac{a}{c_2 + c_1 c_3 n}, T \right\}$  число решений либо нечетно, либо бесконечно (с учетом их кратности)\*\*), причем

$$\max |x_i(t) - x_i^0| \leq b, \quad \max |y_i(t) - y_i^0| \leq (n+1)a. \quad (2.5)$$

Доказательство\*\*\*). Задача (2.1) — (2.2) приводится с помощью замены

$$z = x - x^0, \quad (2.6)$$

$$U = y - y^0(x) = y - y^0(z + x^0)$$

к задаче

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = F_i(z + x^0, U + y^0, t), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(z + x^0, u + y^0, t) - \sum_{k=1}^n \frac{dy^0}{dx_k}(z + x^0) F_k(z + x^0, y^0 + u, t),$$

$$z(0) = 0, \quad u(t_i) = 0, \quad y^0 = y^0(z + x^0). \quad (2.8)$$

Рассмотрим сначала решение задачи Коши для уравнений (2.7) с начальными условиями

$$z(0) = 0, \quad u(0) = u^0. \quad (2.9)$$

\*) Вместо условия (2.4) можно потребовать, чтобы на решениях  $x(t)$ ,  $y(t)$  имели место априорные оценки (2.3). Тогда для любого конечного  $t$  будет существовать нечетное (с учетом кратности) или бесконечное число решений задачи (2.1) — (2.2). Для уравнений Гамильтона при весьма широких ограничениях (см. дополнение) могут быть получены априорные оценки для импульсов, а отсюда и для правых частей системы (2.1). Такая задача отвечает задаче об экстремалах для интеграла от соответствующей функции Дирака с одним закрепленным концом и другим концом, удовлетворяющим условию трансверсальности (см. [64]).

\*\*) Положив  $c_1 = b^{1-\delta}$  ( $1 > \delta > 0$ ),  $c_2 = c(b)$ ,  $a = b[c(b) + 1]$ ,  $b = t_1^{1/\delta}$ , придем к следствию.

Следствие. Пусть  $F_i(x, y, t)$ ,  $f_i(x, y, t)$  непрерывны,  $|F_i(x, y, t)| \leq c|x|^{1-\delta}$ ,  $|f_i(x, y, t)| \leq c(y)$ ,  $a|\partial y_i^0/\partial x_j| < c_3$ , где  $c(y)$  непрерывно. Тогда число решений задачи (2.1) — (2.2) либо нечетно, либо бесконечно (для любого конечного  $t_1$ ).

\*\*\*) Если  $\det \left\| \frac{\partial X_i}{\partial x_j^0} \right\| \neq 0$ , то кратность решения  $X(x_0, t)$  равна 1.

Кроме того, будем считать, что

$$|z_i| \leq b, \quad |u_i - u_i^0| \leq 0, \quad (2.10)$$

$$\sqrt{\sum |u_i^0|^2} < na$$

(отсюда  $|u_i| \leq (n+1)a$ ).

Из теоремы существования следует, что для

$$t \leq \min \left\{ \frac{b}{c_1}, \frac{a}{c_2 + c_1 c_3 n}, T \right\}$$

задача (2.7), (2.9) имеет решение, удовлетворяющее условиям (2.10) и непрерывно зависящее от  $u^0$ . Покажем далее, что существует (не обязательно одна) такая точка  $\tilde{u}^0$ , принадлежащая шару

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i^0)^2} \leq na, \quad \text{что если } u(0) = \tilde{u}^0, \text{ то } u(t_i) \equiv u(\tilde{u}^0, t_i) = 0. \text{ Для это-}$$

го рассмотрим два отображения шара.

В качестве первого — обозначим его через  $C$  — возьмем отображение шара в нуль.

Второе отображение  $C'$  зададим функцией  $u^0 - u(u^0, t_i)$ . Обозначим через  $\rho(p_1, p_2)$ , как обычно, расстояние между точками  $p_1$  и  $p_2$ . Пусть  $p$  принадлежит границе шара. Очевидно, что  $C(p) = 0$  и  $\rho(C(p), p) = na$ . Кроме того, в силу (2.10)

$$\rho(C'(p), C(p)) = \rho(C'(p), 0) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i^0 - u_i(u^0, t_i))^2} < na = \rho(C(p), p).$$

Так как  $C$  имеет одну неподвижную точку, то либо число неподвижных точек  $C'$  равно  $\infty$ , либо их алгебраическое число равно 1, т. е. существует нечетное (считая кратность точек  $u^0$ ) число точек  $\tilde{u}^0$ , принадлежащих шару, для которых

$$\tilde{u}^0 - u(\tilde{u}^0, t_i) = \tilde{u}^0.$$

Следовательно,  $u(\tilde{u}^0, t_i) = 0$ , что и требовалось.

### 3. Оценки решений.

Лемма 8.6. Пусть

$$H^\pm(x, p, t) = -\Phi(x, t) \mp c(x, t) \sqrt{[A(x, t) - p]^2 + m^2 c^2(x, t)};$$

тогда матрица

$$\mp \left\| \frac{\partial^2 H^\pm}{\partial p_i \partial p_j} \right\|$$

положительно определена при  $m \neq 0$  и неотрицательно определена\*) при  $m = 0$ .

\*) То есть ее определитель равен нулю, а все остальные диагональные миноры положительны.



Доказательство. Пусть

$$F(H, p, x, t) = [H + \Phi(x, t)]^2 - c^2(x, t) [p - A(x, t)]^2 - m^2 c^4(x, t);$$

тогда

$$\frac{\delta F(H, p, x, t)}{\delta p_i} = \frac{\partial F}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0, \quad (2.11)$$

т. е.

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = - \frac{\partial F / \partial p_i}{\partial F / \partial H}; \quad (2.12)$$

далее,

$$\frac{\delta^2 F}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial H^2} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial F}{\partial H} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}.$$

Подставляя (2.12), получим

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial p_j} \left( \frac{\partial F}{\partial H} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial H} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} - 2c^2(x, t) \delta_{ij} = 0.$$

Отсюда, обозначая  $P = p - A(x, t)$ , получим

$$\pm \left\{ \sqrt{c^2(x, t) |P|^2 + m^2 c^2(x, t)} \right\}^3 \left\| \frac{\partial^2 H^\pm}{\partial p_i \partial p_j} \right\| = \\ = c^4(x, t) \left\| \left\{ \frac{1}{2} P_i P_j - [P^2 + m^2 c^2] \delta_{ij} \right\} \right\|.$$

У матрицы

$$\|P_i P_j\| = \begin{vmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 & \dots & p_1 p_n \\ p_2 p_1 & p_2^2 & \dots & p_2 p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n p_1 & p_n p_2 & \dots & p_n^2 \end{vmatrix}$$

все строчки линейно зависимы, и, следовательно, ее ранг равен 1. Значит,  $n-1$  ее собственных значений равны нулю, и характеристический многочлен имеет вид  $\lambda^n - \alpha \lambda^{n-1} = 0$ . Очевидно, что  $\alpha = |P|^2$ . Следовательно, после вычитания из  $\|P_i P_j\|$  матрицы  $\{|P|^2 + m^2 c^2 \times \times(x, t)\} E$  мы получаем при  $m \neq 0$  положительно определенную матрицу, а при  $m = 0$  — неотрицательно определенную. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Лемма 8.7. Пусть в гамильтониане  $H^+(x, p, t, m)$   $m=0$ ,  $\Phi=0$ ,  $A=0$ . Тогда, если  $S(x, p)$  удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H^+(x, \nabla S, t, 0) = 0$$

и условию  $S|_{t=0} = px$ , то

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S(x, p, t)}{\partial p_i \partial p_j} \right\| \equiv 0. \quad (2.13)$$

Доказательство. Для действия  $S(x, p, t)$  имеем

$$\frac{dS(x, p, t)}{dt} = -H^+ + \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H^+}{\partial p_i} = |p| c(x, t) - \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{|p|} c(x, t) = 0$$

при условии  $S|_{t=0} = px$ . Следовательно,  $S(p, x, t) = \sum_{k=1}^n p_k x_{0k}(x, p, t)$ .

Отсюда

$$\frac{\partial S}{\partial p_i} = x_{0i} + \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x_{0k}}{\partial p_i}.$$

Но так как

$$\frac{\partial S(x, p, t)}{\partial p_j} = x_{0j}, \quad (2.14)$$

значит,

$$\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x_{0k}}{\partial p_j} = 0$$

при всех  $j=1, \dots, n$ . Поскольку  $p \neq 0$ , то  $\det \left\| \frac{\partial x_{0k}}{\partial p_j} \right\| = 0$ , что в силу (2.4) дает (2.13).

Мы будем теперь рассматривать два случая: либо

А) гамильтониан  $H(x, p, t)$ , удовлетворяет условию (2.0), либо

В) гамильтониан имеет вид  $\pm C(x, t) |p|$ .

Все дальнейшие результаты будут относиться к случаям А), В), если не будет сделано специальных оговорок.

Будем обозначать через  $\tilde{S}(x, p^0, t_1, t_2)$  решение задачи

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H(x, \nabla \tilde{S}, t) = 0,$$

$$\tilde{S}|_{t=t_1} = p^0 x,$$

а через  $S(x_0, t)$ ,  $X(x_0, t)$ ,  $P(x_0, t)$  — решение задачи

$$\dot{X}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial X_i}, \quad \dot{S} = H - \sum p_i H_{p_i},$$

$$x(0) = x_0, \quad p(0) = \text{grad } f(x_0), \quad S(0) = f(x_0).$$

Через  $x_0 = x_0(x, t)$  будем обозначать решение уравнения  $X(x_0, t) = x$ . Через  $E$  будем обозначать единичную матрицу.

Лемма 8.8. Пусть

$$|x_i| \leq a, \quad |p_i^0| \leq b; \quad (2.15)$$

тогда при  $|t_1 - t_2| < \varepsilon$  имеет место соотношение

$$\left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(x, p^0, t_1, t_2)}{\partial x_i \partial p_j^0} \right\| = E + D(\varepsilon), \quad (2.16)$$

где  $D(\varepsilon)$  — матрица, стремящаяся по норме к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Если, кроме того, в случае В) выполняется условие  $p_n^0 \neq 0$  \*), то при  $t_1 - t_2 < \varepsilon$  матрица

$$B_\beta = - \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(p^0, x, t_1, t_2)}{\partial p_i^0 \partial p_j^0} \right\| + \left\| \begin{array}{cccc} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \beta \end{array} \right\| \quad (2.17)$$

отрицательно определена при достаточно малом  $\beta > 0$ .

Доказательство. Из теоремы Гамильтона — Якоби следует, что

$$\frac{\partial \tilde{S}(p^0, x, t_1, t_2)}{\partial p_i^0} = q_i(t_1), \quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x_i} = p_i(t_2). \quad (2.18)$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i^0 \partial p_j^0} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j^0} \Big|_{\tau=t_1}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x_i \partial p_i^0} = \frac{\partial p_i}{\partial p_j^0} \Big|_{\tau=t_2}, \quad (2.19)$$

где  $q(\tau)$ ,  $p(\tau)$  — решения системы Гамильтона

$$\frac{dp_i}{d\tau} = - \frac{\partial H(p, q, \tau)}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial \tau} = \frac{\partial H(p, q, \tau)}{\partial p_i}, \quad (2.20)$$

$$i=1, \dots, n, \quad q=(q_1, \dots, q_n), \quad p=(p_1, \dots, p_n),$$

удовлетворяющие условиям

$$p_i(t_1) = p_i^0, \quad q_i(t_2) = x_i. \quad (2.21)$$

Краевые условия (2.21) удовлетворяют оценкам

$$|p_i^0| \leq b, \quad |x_i| \leq a. \quad (2.22)$$

Отсюда следует в силу леммы 8.5, что при

$$t_2 - t_1 \leq \max_i \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\}, \quad (2.23)$$

$$|p| \leq b+n+1, \quad |q| \leq a+1, \quad \tau \leq T_1$$

выполняются неравенства

$$|q(\tau)| \leq a+1, \quad |p(\tau)| \leq b+n+1. \quad (2.24)$$

Обозначим через  $M_1$  константу, которой не превосходят первые, вторые и третьи производные от  $H$  по  $p$  и  $q$  при  $\tau \leq T_1$ ,  $|p| \leq b+n+1$ ,  $|q| \leq a+1$ .

\*) Поскольку одно из  $p_i^0$  ( $i=1, \dots, n$ ) не равно нулю, можно полагать, не уменьшая общности,  $p_n^0 \neq 0$ .

Продифференцируем уравнения (2.20) и условия (2.21) по  $p_i^0$ , тогда для  $\partial q_k / \partial p_i^0$  и  $\partial p_k / \partial p_i^0$  получим систему

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial q_k}{\partial p_i^0} \right) = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_i^0} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p_i^0} \right\}, \quad (2.25)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial p_k}{\partial p_i^0} \right) = - \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_i^0} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p_i^0} \right\}$$

с условиями

$$\frac{\partial p_k}{\partial p_i^0} \Big|_{\tau=t_1} = \delta_{ki}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial p_i^0} \Big|_{\tau=t_2} = 0. \quad (2.26)$$

Положив

$$\left| \frac{\partial q_i}{\partial p_j^0} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial p_k}{\partial p_i^0} - \delta_{ki} \right| < \varepsilon, \quad (2.27)$$

мы получим существование решения задачи (2.25) — (2.26) при условиях (2.27) в силу леммы 8.5 для

$$t_2 - t_1 \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2M_1(1+O(\varepsilon))}, T_1 \right\} \leq \frac{\varepsilon}{3M} \quad (2.28)$$

при достаточно малом  $\varepsilon$ . Проинтегрировав по  $\tau$  уравнения (2.25), получим

$$\frac{\partial q_k}{\partial p_i^0} = - \sum_{j=1}^n \int_{\tau}^{t_2} \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_i^0} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p_i^0} \right] d\tau,$$

$$\frac{\partial p_k}{\partial p_i^0} = \sum_{j=1}^n \int_{\tau}^{t_1} \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p_i^0} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_i^0} \right] d\tau + \delta_{ik}.$$

Отсюда в силу (2.27), (2.28)

$$\frac{\partial p_k}{\partial p_i^0} \Big|_{\tau=t_1} = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_i} d\tau + O(\varepsilon^2), \quad \frac{\partial p_k}{\partial p_i^0} \Big|_{\tau=t_2} = \delta_{ki} + O(\varepsilon).$$

Из формул (2.19) и (2.31) следует первая часть утверждения леммы. По формуле Лагранжа, учитывая (2.20), имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_i} d\tau = (t_2 - t_1) \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_i} \Big|_{\tau=t_1} + \frac{(t_2 - t_1)^2}{2} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_i \partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k \partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right]_{\tau=\tau'},$$

где  $t_1 < \tau' < t_2$ .

Из (2.27), (2.28), (2.30), (2.32) следует

$$\left. \frac{\partial q_k}{\partial p_i^0} \right|_{\tau=t_1} = (t_1 - t_2) \left. \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} \right|_{\tau=0} + O(\varepsilon^2). \quad (2.33)$$

В оценку  $O(\varepsilon^2)$  войдут константы  $a, b, T$ . Отсюда вытекает, что знаки диагональных миноров матрицы

$$\left\| \frac{\partial q_k}{\partial p_i^0} \right\| \text{ при } \tau = 0$$

совпадают со знаками диагональных миноров матрицы

$$-\left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right\|_{\tau=0},$$

если  $\varepsilon$  достаточно мало по сравнению с ними.

Пусть все диагональные миноры матрицы  $-\left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right\|$  строго положительны. Отсюда и из (2.33) вытекает, что матрица

$$\left\| \frac{\delta q_i}{\delta p_j^0} \right\|_{\tau=0}$$

положительно определена, а следовательно, и матрица  $-B_\beta$  при достаточно малом  $\beta = O(\varepsilon^2)$  также будет положительно определена.

Пусть теперь  $H = c(x, t) |p|$ . В силу условия леммы  $p_n^0 \neq 0$ , а следовательно, в силу леммы 8.6 все диагональные миноры матрицы  $-\left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right\|$ , за исключением  $n$ -го порядка  $\left( \det \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right\| \right)$ ,

больше нуля. Отсюда в силу (2.33) следует, что при достаточно малом  $\varepsilon$  все диагональные миноры матрицы  $\left\| \frac{\partial q_i}{\partial p_j^0} \right\|_{\tau=t_1}$ , за исключением

детерминанта этой матрицы, строго положительны. В силу леммы 8.7 в этом случае

$$\det \left\| \frac{\partial q_i}{\partial p_i^0} \right\|_{\tau=t_1} = 0.$$

Поэтому

$$\det B_\beta = \beta \det \left\| \frac{\partial q_i}{\partial p_j^0} \right\|_{\tau=t_1, i, j \leq n-1} > 0$$

при всех  $\beta > 0$ . Остальные же диагональные миноры матрицы  $-B_\beta$  при достаточно малом  $\beta < O(\varepsilon^2)$  будут иметь тот же знак, что и

соответствующие миноры матрицы  $\left\| \frac{\partial q_i}{\partial p_j^0} \right\|_{\tau=0}$ , т. е. при достаточно малом  $\varepsilon$  будут положительны, что и требовалось доказать.

#### 4. Основные тождества.

Лемма 8.9. Имеет место равенство

$$\begin{aligned} \det \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(x, p, t_1, t_2)}{\partial p_i \partial x_j} \right\|_{\substack{p=P(x_0, t_1) \\ x=X(x_0, t_2)}} \det \left\| \frac{\partial X(x_0, t_2)}{\partial x_{0j}} \right\| = \\ = - \det \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial^2 \tilde{S}(x, p, t_1, t_2)}{\partial p_i \partial p_j} \\ - E \end{array} \right\|_{\substack{x=X(x_0, t_2) \\ p=P(x_0, t_1) \\ \xi=X(x_0, t_1)}} \det \left\| \frac{\partial X(x_0, t)}{\partial x_{0j}} \right\|. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial \tilde{S}(x, p, t_1, t_2)}{\partial p_i} = \xi_i, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial S(x_0(\xi, t_1), t_1)}{\partial \xi_i} - P_i = 0$$

при  $x = X(x_0, t_2)$ . Этой системе удовлетворяют точки

$$p_i = P_i(x_0, t_1), \quad \xi_i = X_i(x_0, t_1). \quad (2.36)$$

Продифференцируем систему (2.35) по  $x_{0k}$  с учетом (2.36). Мы получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial P_j(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial x_j} \frac{\partial X_j(x_0, t_2)}{\partial x_{0k}} + \frac{\partial X_i(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}}, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{\partial X_j(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}} = \frac{\partial P_i(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}}. \end{aligned}$$

Запишем эти равенства в матричной форме

$$\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial P_i(x_0, t)}{\partial x_{0k}} \right\| = - \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial x_j} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_2)}{\partial x_{0k}} \right\| + \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}} \right\|, \quad (2.37)$$

$$\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial X_j(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}} \right\| = \left\| \frac{\partial P_i(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}} \right\|. \quad (2.38)$$

Здесь индекс «0» при матрице означает, что

$$x = X(x_0, t_2), \quad \xi = X(x_0, t_1), \quad p = P(x_0, t_1).$$

Подставив (2.38) в (2.37), получим

$$\left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\| - E = - \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial x_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial X_j(x_0, t_2)}{\partial x_{0k}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}} \right\|^{-1}. \quad (2.39)$$

Следовательно,

$$\det \left\{ \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial q_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\|_0 - E \right\} = \\ = - \det \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial x_j} \right\| \det \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}} \right\| \det^{-1} \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}} \right\|. \quad (2.40)$$

Обозначим

$$B = \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \right\|, \quad A = \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\|_0.$$

В силу равенства (2.40)  $\det(BA - E)$  отличен от нуля.

Рассмотрим преобразование матрицы

$$\begin{bmatrix} B & -E \\ -E & A \end{bmatrix},$$

которое не меняет ее детерминанта: умножим ее справа на матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & -E \\ E & B \end{bmatrix},$$

в результате чего получим матрицу

$$\begin{bmatrix} E & -A \\ 0 & BA - E \end{bmatrix},$$

детерминант которой равен  $\det(BA - E)$ . Следовательно,

$$\det \begin{bmatrix} B & -E \\ -E & A \end{bmatrix} = \det(BA - E). \quad (2.41)$$

Из (2.41) и (2.40) получаем (2.34).

Рассмотрим промежуток  $[t_1, t_2]$ , столь малый, что внутри него лежит один фокус  $x_0, t^1$  траектории  $X(x_0, t)$ , и, кроме того, в этом промежутке

$$\det \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(x, p, t_1, t_2)}{\partial p_i \partial x_j} \right\| \neq 0.$$

Лемма 8.10. *Сигнатура матрицы*

$$R(t_1, t_2) = \left[ \begin{array}{c|c} \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(x, p, t_1, t_2)}{\partial p_i \partial p_j} \right\| & -E \\ \hline -E & \left\| \frac{\partial^2 S(x_0(\xi, t_1), t_1)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\| \end{array} \right]_{\substack{x=X(x_0, t_2) \\ p=P(x_0, t_1)}} \quad (2.42)$$

равна

$$\text{Var} \sum_{t_1 \leq \tau \leq t_2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_i(\varepsilon, \tau)}{|\lambda_i(\varepsilon, \tau)|}.$$

Доказательство. Обозначим сигнатуру матрицы  $R(t_1, t_2)$  через  $\gamma(t_1, t_2)$ .

Докажем вначале, что  $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1', t_2')$ , если  $t_1 < t_1' < t' < t_2' < t_2$  ( $t'$  — фокус).

Будем непрерывно менять  $t$  от  $t_1$  до  $t_1'$ . Если число  $\gamma(t, t_2)$  изменяется, то, следовательно,

$$\det \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t)}{\partial x_{0j}} \right\|$$

должен обратиться в нуль в некоторой точке  $t_1 \leq t_1'' \leq t_1'$  в силу непрерывной зависимости от  $t$ . Но это невозможно, поскольку

$\det R(t_1, t_2) =$

$$= - \det \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(x, p, t_1, t_2)}{\partial p_i \partial x_j} \right\|_0 \det \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_2)}{\partial x_{0j}} \right\| \det^{-1} \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t)}{\partial x_{0j}} \right\|. \quad (2.43)$$

Первый детерминант правой части равенства (2.43) отличен от нуля в силу выбора промежутка  $[t_1, t_2]$ , а

$$\det \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t)}{\partial x_{0j}} \right\|$$

не обращается ни в нуль, ни в  $\infty$ , если  $t$  не является точкой фокуса.

Аналогично,  $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1', t_2')$ , если  $t_1 < t_1' < t' < t_2' < t_2$ . Поэтому нам достаточно доказать утверждение леммы для промежутка  $[t_1', t_2']$ , где  $t_1'$  и  $t_2'$  сколь угодно близки к  $t'$ . Для этого промежутка мы будем обозначать

$$\tilde{S} = \tilde{S}(x, p, t_1', t_2'),$$

$$S = S(x_0(\xi, t_1'), t_1').$$

Возьмем промежуток  $[t_1', t_2']$  столь малым, чтобы все диагональные миноры матрицы

$$B_\beta(t_1', t_2') = \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \right\| + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

были положительны. Это можно сделать в силу леммы 8.8.

Обозначим

$$B = \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \right\|, \quad A = \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\|, \quad R_\beta = \begin{bmatrix} B_\beta & -E \\ -E & A \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу

$$R'_\beta = \begin{bmatrix} E & 0 \\ B_\beta^{-1} & E \end{bmatrix} R_\beta \begin{bmatrix} E & B_\beta \\ 0 & E \end{bmatrix}.$$

Индекс инерции квадратичной формы с данной матрицей  $R_\beta$  совпадает с индексом инерции квадратичной формы с матрицей  $R'_\beta$ , поскольку это та же квадратичная форма, но в другом базисе.

В результате умножения матриц получим

$$R'_\beta = \begin{vmatrix} B_\beta & 0 \\ 0 & A - B_\beta^{-1} \end{vmatrix}.$$

Поскольку  $B_\beta$  положительно определена, то индекс инерции  $R'_\beta$  совпадает с индексом инерции матрицы  $D(t'_1, t'_2) = A - B_\beta^{-1}$ . Таким образом,  $\gamma(t_1, t_2)$  равно индексу инерции матрицы  $D(t'_1, t'_2)$ . Но в силу (2.39)

$$D(t'_1, t'_2) = A - B_\beta^{-1} = B_\beta^{-1} \{ (BA - E) - (B - B_\beta) A \} = \\ = B_\beta^{-1} \left\{ \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial x_j} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t'_2)}{\partial x_{0j}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t'_1)}{\partial x_{0j}} \right\|^{-1} + (B_\beta - B) A \right\}.$$

Домножим  $D(t'_1, t'_2)$  слева и справа на  $B_\beta^{1/2}$ ; в силу самосопряженности  $B_\beta^{1/2}$  сигнатура полученной матрицы равна сигнатуре матрицы  $D(t'_1, t'_2)$ .

Следовательно, число  $\gamma(t'_1, t'_2)$  равно  $\text{sign } B_\beta^{1/2} D(t'_1, t'_2) B_\beta^{1/2}$ , т. е. разнице между числом положительных и отрицательных собственных значений матрицы

$$B_\beta^{1/2} D(t'_1, t'_2) B_\beta^{1/2}.$$

Но собственные значения этой матрицы совпадают с собственными значениями матрицы

$$B_\beta^{1/2} \{ B_\beta^{1/2} D(t'_1, t'_2) B_\beta^{1/2} \} B_\beta^{-1/2}.$$

Окончательно можно сказать, что  $\gamma(t'_1, t'_2)$  равно разности между числом положительных и числом отрицательных собственных значений матрицы

$$B_\beta D(t'_1, t'_2) = - \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial x_j} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t'_2)}{\partial x_{0j}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t'_1)}{\partial x_{0j}} \right\|^{-1} + I_\beta A,$$

где

$$I_\beta = B_\beta - B = \beta \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $A$  в силу равенства (2.38) ограничена, поскольку точка  $t'_1$  не является фокусом. Поэтому матрица  $I_\beta A$  стремится по норме к нулю при  $\beta \rightarrow 0$  и

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} B_\beta D(t'_1, t'_2) = BA + E.$$

Детерминант предельной матрицы отличен от нуля, а потому знаки собственных значений матриц  $\lim_{\beta \rightarrow 0} B_\beta D(t'_1, t'_2)$  и  $B_\beta D(t'_1, t'_2)$  при

достаточно малом  $\beta$  совпадают. Сигнатуры матриц  $R_\beta(t'_1, t'_2)$  и  $R(t'_1, t'_2)$  равны, поскольку  $\det R(t'_1, t'_2) \neq 0$ .

Следовательно, сигнатура матрицы  $R(t_1, t_2)$  (равная сигнатуре матрицы  $R(t'_1, t'_2)$ ) равна разности между числом положительных и числом отрицательных собственных значений матрицы

$$C(t'_1, t'_2) = - \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(x, p, t'_1, t'_2)}{\partial p_i \partial x_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t'_2)}{\partial x_{0j}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t'_1)}{\partial x_{0j}} \right\|^{-1}.$$

Обозначим  $t'_1 = t' - \varepsilon$ ,  $t'_2 = t' + \varepsilon$ ; будем иметь в силу леммы 8.8

$$C(t'_1, t'_2) = [-E + D(\varepsilon)] \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t' + \varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t' - \varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\|^{-1},$$

где  $D(\varepsilon)$  — некоторая стремящаяся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  матрица. Пусть  $\lambda_i(\varepsilon)$  ( $i=1, \dots, n$ ) — собственные значения и  $\psi_i(\varepsilon)$  ( $i=1, \dots, n$ ) — нормированные собственные функции матрицы  $C(t', \varepsilon)$ , где

$$C(t', \varepsilon) = \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t' + \varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t' - \varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\|^{-1}.$$

Следовательно,

$$|C(t'_1, t'_2) \psi(\varepsilon) - \lambda_i(\varepsilon) \psi(\varepsilon)| = |\lambda_i(\varepsilon) D(\varepsilon) \psi(\varepsilon)| \leq |\lambda_i(\varepsilon)| \|D(\varepsilon)\|.$$

Отсюда следует (лемма 1.3 ч. I), что

$$\left| \frac{\lambda_k(\varepsilon) - \mu_k}{\lambda_k(\varepsilon)} \right| \rightarrow 0 \quad (2.44)$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , где  $\mu_k(\varepsilon) = \mu_k(t'_1, t'_2)$  — собственное значение матрицы  $C(t'_1, t'_2)$ .

Пусть  $\lambda_k(\varepsilon) = a_k(\varepsilon) + ib_k(\varepsilon)$ ; тогда

$$\frac{\lambda_k(\varepsilon)}{|\lambda_k(\varepsilon)|} = \frac{\text{sign } a_k(\varepsilon)}{\sqrt{1 + \left(\frac{b_k(\varepsilon)}{a_k(\varepsilon)}\right)^2}} + i \frac{\text{sign } b_k(\varepsilon)}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_k(\varepsilon)}{b_k(\varepsilon)}\right)^2}}.$$

В силу (2.44)  $\left(1 + \left(\frac{a_k(\varepsilon)}{b_k(\varepsilon)}\right)^2\right)^{-1/2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ , поскольку  $\mu_k(\varepsilon)$  действительны в силу самосопряженности  $D(t'_1, t'_2)$ , т. е.  $\frac{b_k(\varepsilon)}{a_k(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ . Значит,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_k(\varepsilon)}{|\lambda_k(\varepsilon)|} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_k(\varepsilon)}{|\mu_k(\varepsilon)|} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu_k(\varepsilon)}{|\lambda_k(\varepsilon)|} = \text{sign } \mu_k(\varepsilon),$$

поскольку  $\text{sign } \mu_k(\varepsilon)$  не зависит от  $\varepsilon$  \*).

\*) Так как  $\mu_k(\varepsilon)$  не может обращаться в нуль при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в силу того, что  $\det R(t'_1, t'_2) \neq 0$ .

Таким образом, мы пришли к заключению, что  $\gamma(t_1, t_2)$  равно  $\sum_{k=1}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_k(\varepsilon)}{|\lambda_k(\varepsilon)|}$ , где  $\lambda_k(\varepsilon)$  — собственные значения матрицы  $C(t, \varepsilon)$ , так как это и есть разность между числом положительных и числом отрицательных  $\mu_k(\varepsilon)$ , что и требовалось доказать.

Лемма 8.11. Пусть выполнено условие

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} z_i z_j > 0$$

и пусть точка  $x_0, t_0$  фокальная; тогда дефект матрицы  $\left\| \frac{\partial x_i(x_0, t_0)}{\partial x_{0j}} \right\|$  равен числу отрицательных членов набора

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_i(\varepsilon, t_0)}{|\lambda_i(\varepsilon, t_0)|}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$A(t) = \left\| \frac{\partial x_i(x_0, t)}{\partial x_{0j}} \right\| = \|a_{ij}(t)\|$$

в точке  $t=t_0$ . Существуют матрицы  $C(t)$  и  $C_1(t)$ ,  $\det C = \det C_1 = 1$ , такие, что матрица  $\tilde{A}(t) = CAC_1$  диагональна при  $t=t_0$ .

Если фокус  $t=t_0$   $k$ -го порядка, то в силу теоремы Морса

$$\tilde{A}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & a_{k+1} & \dots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad a_i = a_{ii}(t_0) \text{ при } i > k.$$

Рассмотрим матрицу  $\tilde{A}_k(t) = \|a_{ij}\|$  ( $i, j \leq k$ ) и матрицу  $B_k(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} (t-t_0)^{-k} \tilde{A}_k(t)$ . Имеем  $|\tilde{A}_k(t)| = (t-t_0)^k |B_k(t_0)| + O[(t-t_0)^{k+1}]$

( $|A| = \det A$ ). Докажем, что  $|B_k(t_0)| \neq 0$ . Вычитая  $j$ -е столбцы (где  $j > k$ ) матрицы  $\tilde{A}(t)$ , умноженные на величины порядка  $O(t-t_0)$ , из первых  $k$  столбцов, мы можем добиться того, что все элементы  $a_{ij}(t)$ , где  $i > k, j \leq k$ , будут иметь порядок  $O[(t-t_0)^2]$ .

Аналогично, вычитая строки  $i > k$ , умноженные на величины  $O(t-t_0)$ , из первых  $k$  строк, получим второй порядок малости по  $t-t_0$  для коэффициентов  $a_{ij}(t)$  ( $i \leq k, j > k$ ).

Эта процедура не изменит матрицы  $B_k(t_0)$  и не изменит  $\det \tilde{A}(t)$ . Поэтому

$$|\tilde{A}(t)| = (t-t_0)^k |B_k(t_0)| \prod_{j=k+1}^n a_j + O[(t-t_0)^{k+1}].$$

Поскольку в силу теоремы Морса  $|\tilde{A}(t)| = O[(t-t_0)^k]$ , то  $|B_k(t_0)| \neq 0$ .

Пусть  $D_1$  и  $D_2$  — такие ортогональные матрицы, что матрица  $\tilde{B}_k(t_0) = D_1 B_k(t_0) D_2$  диагональна.

Взяв матрицы

$$\tilde{D}_1 = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \tilde{D}_2 = \begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C} = \tilde{D}_1 C_1, \quad \tilde{C}_1 = C_1 \tilde{D}_2,$$

получим матрицу  $\tilde{\tilde{A}}(t) = \tilde{C}A(t)\tilde{C}_1$ . Очевидно, что матрица  $\tilde{\tilde{A}}(t)$  может быть представлена в виде

$$\tilde{\tilde{A}}(t) = \begin{pmatrix} (t-t_0)a_1 & \dots & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & (t-t_0)a_k & & & \\ & & & a_{k+1} + O(t-t_0) & & \\ & & & O(t-t_0) & & \\ O(t-t_0) & & & & & a_n + O(t-t_0) \end{pmatrix} + \|O(t-t_0)^2\|,$$

где  $a_1, \dots, a_n$  не равны нулю.

Вычитая линейные комбинации (с постоянными коэффициентами) первых  $k$  строк из последних  $n-k$  строк, мы можем добиться того, что элементы  $\tilde{\tilde{a}}_{ij}(t)$  ( $i > k, j < k$ ) полученной матрицы будут иметь порядок  $O[(t-t_0)^2]$ . Аналогично, вычитая линейные комбинации (с постоянными коэффициентами) первых  $k$  столбцов из последних  $n-k$  столбцов, можно добиться того, что у полученной матрицы элементы  $\tilde{\tilde{a}}_{ij}(t)$  ( $i > k, j < k$ ) будут иметь порядок  $O[(t-t_0)^2]$ .

В дальнейшем мы условимся обозначать через  $D_i^k(t)$  некоторые неособые матрицы  $k$ -го порядка. Мы доказали, что существуют такие невырожденные постоянные матрицы  $S_1$  и  $S_2$ , что  $S_1 A(t) S_2$  имеет вид

$$S_1 A(t) S_2 = \begin{pmatrix} (t-t_0) \mathfrak{R}_k & & 0 \\ & \mathfrak{R}_{n-k} + (t-t_0) D_1^{n-k}(t) & \\ & & D_2^n(t)(t-t_0)^2 \end{pmatrix} + D_2^n(t)(t-t_0)^2,$$

где

$$\mathfrak{R}_k = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_k \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{R}_{n-k} = \begin{pmatrix} a_{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}.$$

Имеем \*)

$$[S_1 A(t) S_2]^{-1} = \begin{pmatrix} (t-t_0) \mathfrak{R}_k & & 0 \\ & \mathfrak{R}_{n-k} + (t-t_0) D_1^{n-k}(t) & \\ & & D_2^n(t)(t-t_0)^2 \end{pmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \left\{ E + (t-t_0) D_3^n(t) \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_k^{-1} & & 0 \\ & (t-t_0) \mathfrak{R}_{n-k}^{-1} & \\ & & D_4^n(t) \end{pmatrix} + (t-t_0)^2 D_4^n(t) \right\}^{-1}.$$

Отсюда

$$[S_1 A(t) S_2]^{-1} = \begin{pmatrix} (t-t_0)^{-1} \mathfrak{R}_k^{-1} & & 0 \\ & \mathfrak{R}_{n-k}^{-1} + (t-t_0) D_5^{n-k}(t) & \\ & & D_5^n(t) \end{pmatrix} \{E + (t-t_0) D_5^n(t)\}.$$

\*) Мы используем тождество, справедливое для произвольных матриц  $A$  и  $B$ :  $(A+B)^{-1} = \{(1+BA^{-1})A\} = A^{-1}(1+BA^{-1})^{-1}$  при условии, что обе части тождества существуют.

Собственные значения матрицы

$$C(\varepsilon, t_0) = A(t_0 - \varepsilon) [A(t_0 + \varepsilon)]^{-1}$$

совпадают с собственными значениями матрицы

$$\begin{aligned} S_1 A(t - \varepsilon) [A(t_0 + \varepsilon)]^{-1} S_1^{-1} &= S_1 A(t - \varepsilon) S_2 [S_1 A(t_0 + \varepsilon) S_2]^{-1} = \\ &= \begin{vmatrix} \varepsilon \mathfrak{N}_k & 0 \\ 0 & \mathfrak{N}_{n-k} + \varepsilon D_1(t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon^{-1} \mathfrak{N}_k^{-1} & 0 \\ 0 & \mathfrak{N}_{n-k}^{-1} + \varepsilon D_0^{n-k}(t) \end{vmatrix} [1 + \varepsilon D_7^n(t) + \varepsilon^2 D_8^n(t) = \\ &= \begin{vmatrix} -E_k & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{vmatrix} (1 + \varepsilon D_0^n(t)), \end{aligned}$$

где  $E_i$  — единичная матрица  $i$ -го порядка. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  число отрицательных членов последовательности  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_i(\varepsilon, t_0)}{(\lambda_i(\varepsilon, t_0))} (i=1, \dots, n)$  равно  $k$ , что и требовалось доказать.

Из лемм 8.10 и 8.11 следует в силу теоремы Морса, что фазовый множитель  $\exp\{i n \delta / 4\}$  в формуле (1.15) равен  $\exp\{i \pi n / 4\} \times \exp\{-i \pi \gamma / 2\}$ , где  $\gamma$  — индекс Морса траектории  $X(x_0; 0, T)$ .

## ГЛАВА 9

### АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТУННЕЛЬНОГО ТИПА

Для широкого круга задач теории вероятностей был получен первый член логарифмической асимптотики семейства вероятностей, зависящего от малого параметра. Оказывается, что аналогичная асимптотика имеет место и в некоторых других задачах математической физики, представляющих исключительный интерес. Это, прежде всего, задачи квантовой механики, связанные с туннельным эффектом, асимптотика уравнений магнитной гидродинамики и теории плазмы при малой вязкости и теплопроводности далеко впереди ударной волны. Подобная асимптотика возникает в современной квантовой теории поля и тесно связана с теорией инстантонов. Уравнения, описывающие перечисленные выше задачи, содержатся в классе уравнений туннельного типа.

#### § 1. Системы туннельных гамильтонианов

Рассмотрим систему псевдодифференциальных уравнений с малым параметром  $\hbar > 0$ :

$$\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = L \left( -\hbar \frac{\partial}{\partial x}, x, t \right) u, \quad (1.1)$$

$$L \left( -\hbar \frac{\partial}{\partial x}, x, t \right) u = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \exp \left\{ \frac{i \langle p, x - \xi \rangle}{\hbar} \right\} L(-ip, x, t) u(\xi, t) d\xi dp,$$

где  $u = u(x, t)$  —  $N$ -вектор (столбец),  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — вещественное скалярное произведение,  $L(p, x, t)$  —  $(2n+1)$ -параметрическая  $N \times N$ -матрица, элементы которой — целые функции аргумента  $p$ , бесконечно дифференцируемые по  $x$  и  $t$  и равномерно ограниченные по  $x$  вместе со всеми производными.

Собственные значения матрицы  $L(p, x, t)$  назовем *гамильтонианами* системы (1.1). Гамильтониан  $H(p, x, t)$  назовем *гамильтонианом туннельного типа* при  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ , если

1) При  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $p \in \mathbb{C}^n \setminus \left\{ \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Re} p_i = 0 \right\}$  функция  $H(p, x, t)$  гладко зависит от аргументов  $x, t$  и регулярно от аргумента  $p$ .

### Собственные значения матрицы

$$C(\varepsilon, t_0) = A(t_0 - \varepsilon) [A(t_0 + \varepsilon)]^{-1}$$

совпадают с собственными значениями матрицы

$$\begin{aligned} S_1 A(t - \varepsilon) [A(t_0 + \varepsilon)]^{-1} S_1^{-1} &= S_1 A(t - \varepsilon) S_2 [S_1 A(t_0 + \varepsilon) S_2]^{-1} = \\ &= \begin{vmatrix} \varepsilon \mathfrak{N}_k & 0 \\ 0 & \mathfrak{N}_{n-k} + \varepsilon D_1(t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon^{-1} \mathfrak{N}_k^{-1} & 0 \\ 0 & \mathfrak{N}_{n-k}^{-1} + \varepsilon D_6^{n-k}(t) \end{vmatrix} [1 + \varepsilon D_7^n(t) + \varepsilon^2 D_8^n(t) = \\ &= \begin{vmatrix} -E_k & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{vmatrix} (1 + \varepsilon D_9^n(t)), \end{aligned}$$

где  $E_i$  — единичная матрица  $i$ -го порядка. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  число отрицательных членов последовательности  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_i(\varepsilon, t_0)}{\lambda_i(\varepsilon, t_0)}$  ( $i=1, \dots, n$ ) равно  $k$ , что и требовалось доказать.

Из лемм 8.10 и 8.11 следует в силу теоремы Морса, что фазовый множитель  $\exp\{i\pi\delta/4\}$  в формуле (1.15) равен  $\exp\{i\pi n/4\} \times \exp\{-i\pi\gamma/2\}$ , где  $\gamma$  — индекс Морса траектории  $X(x_0; 0, T)$ .

## ГЛАВА 9

### АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТУННЕЛЬНОГО ТИПА

Для широкого круга задач теории вероятностей был получен первый член логарифмической асимптотики семейства вероятностей, зависящего от малого параметра. Оказывается, что аналогичная асимптотика имеет место и в некоторых других задачах математической физики, представляющих исключительный интерес. Это, прежде всего, задачи квантовой механики, связанные с туннельным эффектом, асимптотика уравнений магнитной гидродинамики и теории плазмы при малой вязкости и теплопроводности далеко впереди ударной волны. Подобная асимптотика возникает в современной квантовой теории поля и тесно связана с теорией инстантонов. Уравнения, описывающие перечисленные выше задачи, содержатся в классе уравнений туннельного типа.

#### § 1. Системы туннельных гамильтонианов

Рассмотрим систему псевдодифференциальных уравнений с малым параметром  $\hbar > 0$ :

$$\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = L\left(-\hbar \frac{\partial}{\partial x}, x, t\right) u, \quad (1.1)$$

$$L\left(-\hbar \frac{\partial}{\partial x}, x, t\right) u = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \exp\left\{\frac{i\langle p, x - \xi \rangle}{\hbar}\right\} L(-ip, x, t) u(\xi, t) d\xi dp,$$

где  $u = u(x, t)$  —  $N$ -вектор (столбец),  $\langle, \rangle$  — вещественное скалярное произведение,  $L(p, x, t)$  —  $(2n+1)$ -параметрическая  $N \times N$ -матрица, элементы которой — целые функции аргумента  $p$ , бесконечно дифференцируемые по  $x$  и  $t$  и равномерно ограниченные по  $x$  вместе со всеми производными.

Собственные значения матрицы  $L(p, x, t)$  назовем *гамильтонианами* системы (1.1). Гамильтониан  $H(p, x, t)$  назовем *гамильтонианом туннельного типа* при  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ , если

1) При  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $p \in \mathbb{C}^n \setminus \left\{ \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Re} p_i = 0 \right\}$  функция  $H(p, x, t)$  гладко зависит от аргументов  $x, t$  и регулярно от аргумента  $p$ .



II)  $\max_{\eta} \operatorname{Re} H(p+i\eta, x, t) = H(p, x, t)$ ,  $p \in \mathbf{R}^n$ ,  $\eta \in \mathbf{R}^n$ ,  $|p| \neq 0$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$ .

III) Лагранжиан  $\mathcal{L} = \langle p, H_p(p, x, t) \rangle - H(p, x, t) \geq 0$ .

IV)  $\det \|H_{pp}(p, x, t)\| \neq 0$  при  $|p| < \infty$ .

Гамильтониан  $H_1(p, x, t)$  называется подчиненным гамильтониану  $H_2(p, x, t)$ , если при  $x', x \in \mathbf{R}^n$ ,  $\eta \in \mathbf{R}^n$ ,  $0 \neq |p'| < \infty$  и  $0 \neq |p| < \infty$  справедлива оценка

$$\langle p, H_{2p}(p, x, t) \rangle - H_2(p, x, t) < \langle p', H_{1p}(p', x', t) \rangle - \max_{\eta} \operatorname{Re} H_1(p' + i\eta, x', t). \quad (1.2)$$

Система гамильтонианов называется туннельной, если все они удовлетворяют условиям I), III), IV), имеют постоянную кратность при  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $p \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  и для любого гамильтониана, не удовлетворяющего условию II), существует гамильтониан туннельного типа, которому он подчинен.

Систему (1.1) будем называть системой туннельного типа, если туннельна система ее гамильтонианов.

З а м е ч а н и е 1. Условия I)–IV) являются весьма жесткими. Например, среди полиномов по  $p$  им удовлетворяют, по-видимому, полиномы не выше второй степени. Очень сильным условием является и требование постоянной кратности при  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $p \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  гамильтонианов. Тем не менее ряд интересных физических и математических задач приводит к уравнениям туннельного типа.

З а м е ч а н и е 2. Класс уравнений туннельного типа можно расширить, включив в него уравнения, в которых вместо  $h \frac{\partial u}{\partial t}$  стоит

выражение  $L_0 \left( h \frac{\partial}{\partial t} \right) u$ , где производная  $dL_0(p_i)/dp_i \neq 0$  ( $p_i \in \mathbf{R}$ )

при  $|p_i| < \infty$  (см. ниже пример в)).

Приведем примеры уравнений туннельного типа.

а) Уравнение Колмогорова — Феллера:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left\langle b(x, t), \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle u + h^{-1} \int_{\mathbf{R}^n} \{u(x + h\xi, t) - u(x, t)\} \mu_{xt}(d\xi),$$

где  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $h > 0$  — малый параметр,  $\mu_{xt}(d\xi)$  — мера на  $\mathbf{R}^n$  при фиксированных  $x, t$ . Это уравнение представимо в виде

$$h \frac{\partial u}{\partial t} = h \left\langle b(x, t), \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle u + \int_{\mathbf{R}^n} \left( \exp \left\{ h \left\langle \xi, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle \right\} - 1 \right) u(x, t) \mu_{xt}(d\xi).$$

Его гамильтониан

$$H(p, x, t) = - \langle b(x, t), p \rangle + \int_{\mathbf{R}^n} (e^{-\langle p, \xi \rangle} - 1) \mu_{xt}(d, \xi)$$

является гамильтонианом туннельного типа. Проверка условий III)

и IV) элементарна. Проверим условие II). Имеем

$$\operatorname{Re} H(p + i\eta, x, t) = \int_{\mathbf{R}^n} (e^{-\langle p, \xi \rangle} \cos \langle \eta, \xi \rangle - 1) \mu_{xt}(d\xi).$$

Очевидно, что интеграл

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\langle p, \xi \rangle} \cos \langle \eta, \xi \rangle \mu_{xt}(d\xi)$$

достигает максимального значения при  $\eta = 0$ . Точка  $\eta = 0$  является, вообще говоря, не единственной точкой глобального максимума

$$\operatorname{Re} H(p + i\eta, x, t).$$

б) Приведем пример из теории марковских цепей. Пусть в момент времени  $t^k = kh$  процесс находится в точке  $x_j = jh$ , в момент времени  $t^{k+1}$  с вероятностью  $P_j^+$  происходит скачок вправо в точку  $x_{j+1} = (j+1)h$  и с вероятностью  $P_j^-$  — аналогичный скачок влево. Пусть  $P_j^+ + P_j^- = 1$ . Если  $u_j^k = u(jh, kh)$  — вероятность обнаружить процесс в момент времени  $t^k$  в точке  $x_j$ , то

$$u_j^{k+1} = P_{j+1}^+ u_{j+1}^k + P_{j-1}^- u_{j-1}^k.$$

Перейдем от функций  $u_j^k, P_j^+$  и  $P_j^-$ , заданных на сетке  $\{jh, kh\}$ , к функциям  $u(x, t)$ ,  $p^+(x)$ ,  $p^-(x)$ , заданным при всех  $(x, t) \in \mathbf{R}^2$  так, что  $u(x, t)|_{x=jh, t=kh} = u_j^k$ ,  $p^\pm(x)|_{x=jh} = P_j^\pm$ . Перепишем приведенное выше разностное уравнение в псевдодифференциальной форме

$$\exp \left\{ h \frac{\partial}{\partial t} \right\} u(x, t) = \left[ \exp \left\{ -h \frac{\partial}{\partial x} \right\} p^+(x) + \exp \left\{ h \frac{\partial}{\partial x} \right\} p^-(x) \right] u(x, t).$$

Заменяя оператор  $-h \frac{\partial}{\partial x}$  символом  $p$ , а оператор  $h \frac{\partial}{\partial x}$  — гамильтонианом  $H(p, x)$ , получим

$$H(p, x) = \ln \{p^+(x)e^p + p^-(x)e^{-p}\}.$$

Легко проверить, что  $H(p, x)$  — гамильтониан туннельного типа, если при  $x \in \mathbf{R}$  функции  $p^+(x)$  и  $p^-(x)$  строго положительны.

в) Примером системы туннельного типа может служить линеаризованная система Навье — Стокса с малой вязкостью:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \langle u, \nabla \rangle v + a^2 \nabla \rho - c_1 h \nabla^2 v - c_2 h \nabla \operatorname{div} v = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} v + \langle u, \nabla \rho \rangle = 0,$$

где  $v = (v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t))$  и  $\rho(x, t)$  — искомые функции;  $x \in \mathbf{R}^3$ ;  $u = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ ;  $u_j(x, t)$  ( $j=1, 2, 3$ ) — гладкие функции;  $a^2 = a^2(x, t)$  — скорость звука;  $h > 0$  — малый параметр;  $c_1 > 0, c_2 > 0$  — физические константы.

Гамильтонианы приведенной системы имеют вид

$$H_1 = \langle p, u \rangle + c_1 p^2, \\ H_{2,3} = \langle p, u \rangle + \frac{c_1 + c_2}{2} p^2 \pm \left( \frac{|c_1 + c_2|^2}{4} p^4 + a^2 p^2 \right)^{1/2}.$$

Кратность гамильтониана  $H_1$  равна двум. Выполнение условий I) — IV) для гамильтониана  $H_1$  очевидно, а для гамильтонианов  $H_2$  и  $H_3$  проверяется в результате несложных, но громоздких выкладок. Их мы опускаем.

г) Модель Максвелла в теории упругости:

$$h u_{,tt} + u_t = h E(x) \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

где  $E(x) > 0$  — гладкая функция,  $h > 0$  — малый параметр. Приведенному уравнению отвечают следующие гамильтонианы:

$$H_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{E p^2 + \frac{1}{4}}, \quad H_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{E p^2 + \frac{1}{4}}.$$

Можно показать, что система  $\{H_1, H_2\}$  является туннельной. Гамильтониан  $H_2$  (не удовлетворяющий условию II)) подчинен гамильтониану туннельного типа  $H_1$ .

Основной результат состоит в построении всех членов ряда, определяющего глобальную асимптотику фундаментального решения  $u(x, t)$  системы туннельного типа (1.1), т. е. решения, удовлетворяющего при  $t=0$  условию

$$u(x, \xi, t) |_{t=0} = \delta(x - \xi) I, \quad (1.3)$$

где  $I$  — единичная  $N \times N$ -матрица,  $\delta(x - \xi)$  —  $\delta$ -функция Дирака. Асимптотика решения поставленной задачи дается построенным ниже туннельным каноническим оператором и является экспоненциально-малой при  $h \rightarrow 0$  почти при всех  $x, \xi$ .

Отметим, что в «малом», т. е. при таких  $t \in (0, \delta]$ , что решения вариационных задач, отвечающих гамильтонианам системы (1.1), на полуинтервале  $(0, \delta]$  единственны, при отсутствии точек Якоби или фокальных точек, вычисления всех членов асимптотического ряда для некоторых задач теории вероятностей приводились в [28 доп. лит.]. В работе [45 доп. лит.] найдена глобальная асимптотика решения уравнения теплопроводности на римановом многообразии.

## § 2. Примеры экспоненциальных асимптотик

Прежде чем привести решение задачи (1.1), (1.3), рассмотрим два примера.

Пример 1. Сначала остановимся на простой задаче определения обобщенных решений простейшего гиперболического квазилинейного уравнения, исследованной Хопфом [58]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + p \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad p |_{t=0} = p_0(x). \quad (2.1)$$

В процессе ее решения Хопф фактически исследовал задачу о первом члене логарифмической асимптотики решения уравнения теплопроводности с малой диффузией.

Как известно, в «малом» задача (2.1) решается методом характеристик. Уравнение характеристик имеет вид

$$\dot{p} = 0, \quad \dot{x} = p. \quad (2.2)$$

Здесь мы для простоты остановимся лишь на случае, когда  $p_0(x) = \exp(-x^2)$ . Обозначим через  $p = P(t, \xi)$ ,  $x = Q(t, \xi)$  решение системы (2.2), удовлетворяющее условию

$$p |_{t=0} = p_0(\xi), \quad x |_{t=0} = \xi,$$

и через  $\Lambda^t$  — кривую  $\{p = P(t, \xi), x = Q(t, \xi)\}$  в фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{px}^2$ , полученную сдвигом начальной кривой  $\Lambda^0 = \{p = p_0(\xi), x = \xi\}$  вдоль траекторий системы (2.2) за фиксированное время  $t$ . Точки на кривой  $\Lambda^t$  обозначим через  $r$ ;  $r = (P(t, \xi), Q(t, \xi))$ . При  $t < t_{кр} = e^{3/2}/\sqrt{2}$  кривая  $\Lambda^t$  проектируется на ось  $x$  диффеоморфно (уравнение  $Q(t, \xi) = x$  однозначно разрешимо относительно  $\xi = \xi(x, t)$ ) и функция  $p = p(x, t) = P(t, \xi(x, t))$ , задающая  $\Lambda^t$ , является решением задачи (2.1). При  $t > t_{кр}$  кривая  $\Lambda^t$  проектируется на ось  $x$  не взаимно однозначно и классического решения задачи (2.1) не существует. При таких временах на кривой  $\Lambda^t$  появляются точки, в которых якобиан  $J(\xi, t) = \partial Q(\xi, t) / \partial \xi$  обращается в нуль. Они называются *фокальными точками* кривой  $\Lambda^t$ .

Для определения решений при  $t > t_{кр}$  Хопф предложил рассмотреть уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad v |_{t=0} = p_0(x),$$

и назвать (обобщенным) решением уравнения (2.1) функцию  $p_{об} = \lim_{h \rightarrow 0} v$ . Решение  $v$  уравнения Бюргерса выражается через логарифмическую производную  $v = -h \frac{\partial}{\partial x} \ln u$  решения  $u$  уравнения

теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u |_{t=0} = \exp \left\{ -\frac{1}{h} \int_{-\infty}^x p_0(x) dx \right\}. \quad (2.3)$$

Таким образом, исходная задача сводится к изучению логарифмического предела решения уравнения теплопроводности. Известно, что решение задачи (2.3) имеет вид

$$u = (2\pi ht)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\left( (x - \xi)^2 + 2t \int_{-\infty}^{\xi} p_0(\xi) d\xi \right) / 2th \right\} d\xi. \quad (2.4)$$

Асимптотика интеграла (2.4) вычисляется методом Лапласа. При

$t < t_{кр}$  имеем

$$u = (|J|^{-1/2} (\xi(x, t), t) + O(h)) \exp \left\{ -\frac{1}{h} S(x, t) \right\}. \quad (2.5)$$

Здесь  $S(x, t) = \int_{-\infty}^{r(x)} p dx$ , а интеграл вычисляется вдоль  $\Lambda^t$ ,  $r(x)$  —

точка на  $\Lambda^t$ . При  $t > t_{кр}$  существуют три точки  $r_1(x)$ ,  $r_2(x)$ ,  $r_3(x)$  на  $\Lambda^t$ , проекции которых на ось  $x$  совпадают или, иначе говоря, уравнение  $Q(t, \xi) = x$  при  $x \in (x_1, x_2)$  имеет три решения  $\xi_1(x, t)$ ,

$\xi_2(x, t)$  и  $\xi_3(x, t)$ . Обозначим  $S(x, t) = \int_{-\infty}^{r(x)} p dx$  при  $x < x_1$ ,  $x > x_2$  и

$$S(x, t) = \min(S_1, S_2, S_3), \quad S_j = \int_{-\infty}^{r_j(x)} p dx, \quad \text{где } j=1, 2, 3 \text{ при } x \in [x_1, x_2].$$

В том случае, когда  $x = x_1$ ,  $r_1(x_1) = r_2(x_1)$  — фокальная точка на  $\Lambda^t$  и  $S_1(x, t) = S_2(x, t)$ ; аналогично, когда  $x = x_2$ ,  $r_2(x_2) = r_3(x_2)$ ,  $S_2(x, t) = S_3(x, t)$ .

Точку, в которой  $S_1 = S_3 = S$ , обозначим  $x_i^*$ . Тогда при  $x < x_i^*$  и  $x > x_i^*$  асимптотика интеграла (2.4) по-прежнему имеет вид (2.5), с той лишь разницей, что  $\xi$  в этой формуле полагается равным  $\xi_1(x, t)$  при  $x_1 \leq x < x_i^*$  и  $\xi_3(x, t)$  при  $x_2 \geq x > x_i^*$ . В точке  $x_i^*$  асимптотика интеграла (2.4) состоит из двух слагаемых вида (2.5), одно из которых отвечает точке  $r_1(x_i^*)$ , а другое — точке  $r_3(x_i^*)$ . Таким образом, при  $x_1 \leq x < x_i^*$  точки  $r_2^t(x)$  и  $r_3^t(x)$ , расположенные на  $\Lambda^t$ , вносят в асимптотику решения задачи (2.3) малый (порядка не более  $O(h)e^{s/h}$ ) вклад. Поэтому эти точки мы будем называть несущественными, а остальные точки кривой  $\Lambda^t$  — существенными. Области на кривой  $\Lambda^t$ , состоящие из несущественных или существенных точек, назовем также несущественными или существенными соответственно.

Приведенные рассуждения позволяют получить обобщенное разрывное решение задачи (2.1) при временах  $t > t_{кр}$  — оно определяется функцией  $p = p(x, t)$ , задающей существенные области кривой  $\Lambda^t$ . Заметим, что отсюда, в частности, следует известное в гидродинамике правило равных площадей для определения фронта ударной волны, эволюция которой описывается уравнением (2.1).

Рассмотрим теперь асимптотику интеграла (2.4) в момент времени  $t = t_{кр}$ . Тогда  $x_1 = x_2$ , фокальные точки  $r_2(x_1)$  и  $r_1(x_2)$  на  $\Lambda^t$  совпадают и при вычислении асимптотики интеграла (2.4) при  $x_\Phi = x_1 = x_2$ . Соответствующая критическая точка оказывается вырожденной. Это приводит к другой асимптотической формуле для решения  $u$  задачи (2.3). Вне окрестности точки  $x_\Phi$ , которую мы будем в дальнейшем называть фокальной точкой в  $R_x$ , решение по-прежнему имеет вид (2.5), а в точке  $x_\Phi$  имеем  $u(x_\Phi, t_{кр}) = h^{-1/4} \exp \{ -S(x_\Phi, t_{кр}) \} (a + O(h))$ , где  $a$  — константа. Из последней

формулы следует, что логарифмический предел не учитывает «всплеск» амплитуды в фокальной точке  $x_\Phi$ . Этот всплеск характеризуется вторым членом логарифмической асимптотики:

$$\ln u = -\frac{1}{h} S - Q \ln h + O(1).$$

Здесь  $Q = 1/4$  при  $x = x_\Phi$ ,  $t = t_{кр}$ , а в остальных случаях равно 0.

Туннельный канонический оператор позволяет записать равномерную (по  $x$ ) экспоненциальную асимптотику решений уравнений туннельного типа. Как уже говорилось, в конструкции этого оператора существенную роль играют геометрические объекты, обобщающие кривые  $\Lambda^t$  — лагранжевы многообразия в фазовом пространстве  $R_{px}$ . Вне окрестности проекций в  $R_x$  особых точек из существенных областей лагранжева многообразия — фокальных точек в  $R_x^n$  — асимптотика соответствующего решения представляется в виде, аналогичном (2.5). В окрестности фокальных точек — некоторыми интегралами, аналогичными (2.4), асимптотика которых иногда выражается через специальные функции. Отметим, что фокальные точки одновременно являются точками Якоби экстремалей вариационной задачи, определяемой гамильтонианом. В общей ситуации в фокальных точках, как и в рассмотренном выше примере, коэффициент  $Q$  при  $\ln h$  во втором члене логарифмической асимптотики не равен нулю (в отличие от нефокальных точек). Этот коэффициент выражается через некоторый новый инвариант вырождения соответствующей экстремали.

Пример 2. Выше была рассмотрена задача Коши (2.3) для уравнения теплопроводности с начальным условием, зависящим от  $h$ . Нас же в первую очередь интересует асимптотика фундаментального решения систем туннельного типа. Эта асимптотика для систем туннельного типа в общем случае будет построена в § 3. Опишем эту асимптотику для примера б) § 1 в случае

$$p^+(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos^2(x), \quad p^-(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin^2(x):$$

$$\exp \left\{ h \frac{\partial}{\partial t} \right\} u = \left[ \left( \frac{1}{4} + \frac{\cos^2 x}{2} \right) \exp \left\{ -h \frac{\partial}{\partial x} \right\} + \left( \frac{1}{4} + \frac{\sin^2 x}{2} \right) \exp \left\{ h \frac{\partial}{\partial x} \right\} \right] u. \quad (2.6)$$

Задаче (2.6) соответствует гамильтониан

$$H(p, x) = \ln [p^+(x) e^p + p^-(x) e^{-p}].$$

Уравнение (2.6) не представляется в виде (1.1), и поэтому теорема 9.2 об асимптотике фундаментального решения задачи Коши к задаче (2.6) непосредственно неприменима. Тем не менее для задачи (2.6) может быть доказана теорема, аналогичная теореме 9.2, причем схема построения соответствующей асимптотики здесь та же, что и далее в § 3. В то же время асимптотика решения задачи (2.6) относительно легко исследуется с помощью ЭВМ.

Начальному условию для (2.6) в фазовом пространстве  $\mathbf{R}_p^2$  отвечает прямая  $\Lambda_1^{0,0} = \{p = p_0, x = 0\}$ ,  $p_0 \in \mathbf{R}$ . Асимптотика решения задачи (2.6) определяется кривой  $\Lambda_1^{t,0}$ , полученной сдвигом прямой  $\Lambda_1^{0,0}$  вдоль траекторий системы Гамильтона

$$\dot{x} = H_{pp}, \quad \dot{p} = -H_x \quad (2.7)$$

за фиксированное время  $t$ . На кривой  $\Lambda^t$  определим функцию

$$S(p_0, t) = \int_0^t [PH_p(P, Q) - H(P, Q)] d\tau,$$

где функции  $P = P(p_0, t)$ ,  $Q = Q(p_0, t)$  — решение системы (2.7) с данными Коши  $P(p_0, 0) = p_0$ ,  $Q(p_0, 0) = 0$ . Функцию  $S(p_0, t)$  мы называем энтропией. При любом времени  $t > 0$  кривая  $\Lambda_1^{t,0}$  проектируется в  $\mathbf{R}_x$  на отрезок  $[-t, t]$ , причем до момента времени  $t_{кр} = \pi\sqrt{3}/2$  якобиан  $J(p_0, t) \equiv dQ(p_0, t)/dp_0$  при  $|p_0| < \infty$ , т. е. любая конечная дуга кривой  $\Lambda_1^{t,0}$  при  $0 < t < t_{кр}$  диффеоморфно проектируется на ось  $x$ .

Асимптотика решения задачи (2.6) при  $x \in [-t+t', t-t']$ , где число  $t'$  сколь угодно мало, для фиксированного времени  $0 < t < t_{кр}$  имеет вид

$$u = |2\pi h J|^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t H_{px}(P(p_0, \tau), Q(p_0, \tau)) d\tau - \frac{S(p_0, t)}{h} \right\} \Bigg|_{p_0=p_0(x,t)} (1 + O(h)), \quad (2.8)$$

где функция  $p_0(x, t)$  — решение уравнения  $x = Q(p_0, t)$ .

В точке  $r \in \Lambda_1^{t,0}$  с координатами  $(0, x_t)$ , где ось  $x$  пересекает кривую  $\Lambda_1^{t,0}$ , энтропия обращается в нуль, и функция  $u$  в точке  $x_t$  равна  $O(h^{-1/2})$ . Вне окрестности точки  $x_t$  величина  $u$  экспоненциально мала. Зависимость от времени координаты  $x_t$  вычисляется явно из системы Гамильтона. Легко показать, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \pi/4$ .

При  $t > t_{кр}$  на кривой  $\Lambda_1^{t,0}$  появляются участки с одинаковой проекцией на ось  $x$ . По аналогии с примером 1 выделим на кривой  $\Lambda_1^{t,0}$  существенные и несущественные области. Среди точек кривой  $\Lambda_1^{t,0}$ , проектирующихся в одну и ту же точку на оси  $x$ , существенными называются те точки, энтропия в которых минимальна. Асимптотика решения задачи (2.6) при  $t > t_{кр}$  определяется только существенными областями кривой  $\Lambda_1^{t,0}$ . Скачок из одной существенной области кривой  $\Lambda_1^{t,0}$  в другую в этой задаче происходит всегда вдоль оси  $p$ . Напомним, что фокальными точками называются точки на  $\Lambda_1^{t,0}$ , в которых обращается в нуль якобиан  $J(p_0, t)$ . Заметим, что при  $t > t_{кр}$  все фокальные точки кривой  $\Lambda_1^{t,0}$  попадают в не-

существенные области, поэтому при  $t > t_{кр}$  асимптотика задачи (2.6) имеет вид (2.8).

В момент времени  $t = t_{кр}$  кривая  $\Lambda_1^{t_{кр},0}$  имеет существенную фокальную точку с координатами  $(-\frac{1}{2} \ln 3, 0)$ . Асимптотика решения задачи (2.6) в окрестности точки  $x = 0$  в момент времени  $t_{кр}$  определяется некоторым интегралом. В этом примере, как и в рассмотренном ранее, в проекции фокальных точек на ось  $x$  амплитуда решения резко возрастает. Именно, при  $x \in (-t_{кр}, t_{кр})$  вне окрестности точек  $x = 0$  и  $x = x_{t_{кр}}$  при  $h = 0,01$  величина  $u(x, t_{кр}) \simeq 10^{-3}$ , тогда как  $u(0, t_{кр}) \simeq 10^{-2}$ .

### § 3. Туннельный канонический оператор и асимптотика фундаментального решения

Сформулируем основные результаты. Рассмотрим задачу (1.1), (1.3). Введем обозначения:  $H_\alpha(p, x, t)$  — гамильтониан системы (1.1),  $\alpha = 1, \dots, m$ ,  $m \leq N$ ;  $\kappa_\alpha$  — кратность гамильтониана  $H_\alpha$  при  $|p| \neq 0$ ;  $\Lambda_n^{0,\xi} \subset \mathbf{R}_{px}^{2n}$  — плоскость  $\{p = p_0, x = \xi\}$ ,  $(p_0, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$ ,  $\xi$  — фиксированный вектор;  $\Lambda_{n\alpha}^{t,\xi}$  — лагранжево многообразие, полученное сдвигом плоскости  $\Lambda_n^{0,\xi}$  вдоль траекторий системы Гамильтона

$$\dot{q}_\alpha = H_{\alpha p}, \quad \dot{p}_\alpha = -H_{\alpha x} \quad (3.1)$$

за фиксированное время  $t$ , т. е.  $\Lambda_{n\alpha}^{t,\xi} = g_{H_\alpha}^t \Lambda_n^{0,\xi}$ ;  $r$  — точка на многообразии  $\Lambda_{n\alpha}^{t,\xi}$ ,  $(p(r), x(r))$  — ее координаты;  $Q_\alpha, P_\alpha$  — решение системы (3.1) с начальными данными на  $\Lambda_n^{0,\xi}$ ; якобиан  $J_\alpha = \det(\partial Q_\alpha / \partial p_0)$ .

Назовем энтропией на многообразии  $\Lambda = \Lambda_{n\alpha}^{t,\xi}$  функцию

$$S = S_\alpha(\xi, t, r), \quad S_\alpha = \int_0^t (\langle P_\alpha, H_{\alpha p}(P_\alpha, Q_\alpha) \rangle - H_\alpha(P_\alpha, Q_\alpha)) d\alpha.$$

Точку  $r_1 \in \Lambda$  назовем несущественной точкой многообразия  $\Lambda$ , если найдется точка  $r_2 \in \Lambda$  с такой же проекцией на  $\mathbf{R}_x^c$  и такая, что энтропия в ней будет меньше, чем в точке  $r_1$ , т. е.  $x(r_1) = x(r_2)$  и  $S|_{r=r_1} > S|_{r=r_2}$ .

Введем на многообразии  $\Lambda$  канонический атлас  $\{\Omega_j\}$ . Именно, покрываем многообразие  $\Lambda$  картами, которые диффеоморфно проектируются на одну из координатных лагранжевых плоскостей. (Плоскость вида  $\{x_I = 0, p_I = 0\}$ , где  $I$  и  $\bar{I}$  — наборы чисел такие, что  $I \cup \bar{I} = \{1, \dots, n\}$ ,  $I \cap \bar{I} = \emptyset$ , называется координатной лагранжевой плоскостью.)

Пусть  $t \geq \delta > 0$ , а  $\delta$  — сколь угодно малое число. Определим оператор  $K(\Omega_j)$ , действующий из пространства  $C_0^\infty(\Omega_j)$  в пространстве  $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ . Пусть  $\varphi(r, h) \in C_0^\infty(\Omega_j \times (0, 1])$ .

Рассмотрим два случая.

1.  $\Omega_j$  — неособая карта (т. е. якобиан  $J_\alpha$  отличен от нуля для всех точек области  $\Omega_j$ ). Обозначим через  $D \subset \mathbf{R}_x^n$  множество  $\pi_x(\Omega_j^c)$ , где  $\pi_x$  — естественная проекция  $\mathbf{R}_{px}^{2n}$  на  $\mathbf{R}_x^n$ ,  $\Omega_j^c$  — замыкание множества существенных точек области  $\Omega_j$ , через  $D^\gamma \subset \mathbf{R}_x^n$  —  $\gamma$ -окрестность множества  $D$ , т. е. такую окрестность, что  $|x-x'| \geq \gamma$  для любой точки  $x \in \mathbf{R}_x^n \setminus D^\gamma$  и для всех точек  $x' \in D$ . Введем функцию  $\theta(x, \gamma) \in C_0^\infty(\mathbf{R}_x^n)$ , равную единице при  $x \in D^\gamma$  и нулю при  $x \in \mathbf{R}_x^n \setminus D^{2\gamma}$ . Положим

$$K(\Omega_j)\varphi = |J^\gamma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{h} S^\gamma\right\} \varphi(r(x), h) \theta(x, \gamma), \quad (3.2)$$

где  $r(x) \in \Lambda$  — решение системы  $x=x(r)$ ,  $J^\gamma(x, \xi)$  и  $S^\gamma(\xi, t, r(x))$  — гладкие функции, совпадающие с функциями  $J_\alpha(r(x))$  и  $S_\alpha(\xi, t, r(x))$  на множестве  $D$ . Полученная функция  $K(\Omega_j)$  зависит от аргументов  $(x, \xi, t, \gamma, h)$ .

2.  $\Omega_j$  — особая карта с фокальными координатами  $(p_I, x_I)$ , т. е. область  $\Omega_j$  диффеоморфно проектируется на плоскость  $\{x_I=0, p_I=0\}$ ,

$$I = (m_1, \dots, m_k), \bar{I} = (m_{k+1}, \dots, m_n), I \cup \bar{I} = (1, \dots, n), \\ k = \max_{r \in \Omega_j} (n - \text{rank}(dQ_\alpha/dp_0)).$$

Легко убедиться, что для любого сколь угодно малого  $\sigma > 0$  можно выбрать покрытие  $\Lambda$  особыми и неособыми картами, так что для любой особой карты  $\Omega_j$  область  $g_{H_I}^{-\sigma} \Omega_j$ , где  $H_I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k p_{m_i}^2$ , диффеоморфно проектируется на  $\mathbf{R}_x^n$  и энтропия в этой области строго положительна. Определим оператор  $K(\Omega_j)$  формулой

$$K(\Omega_j)\varphi = \exp\{-H_I \sigma\} (K(g_{H_I}^{-\sigma} \Omega_j)\varphi) = \\ = (2\pi\hbar\sigma)^{-k/2} \int_{\mathbf{R}^k} \exp\left\{-\frac{|\eta - x_I|^2}{2\hbar\sigma}\right\} \left[ (K(g_{H_I}^{-\sigma} \Omega_j)\varphi) \Big|_{x_I=\eta} \right] d\eta. \quad (3.3)$$

Полученная функция зависит от аргументов  $x, \xi, t, \gamma, h, \sigma$ . Введем разбиение единицы  $\{e_j(r)\}$  на многообразии  $\Lambda$ , подчиненное каноническому атласу  $\{\Omega_j\}$ . Определим оператор  $K$  на функциях  $\varphi(r, h) \in C_0^\infty(\Lambda \times [0, 1])$  следующим образом:

$$K\varphi(r, h) = \sum_j K(\Omega_j)(e_j(r)\varphi(r, h)). \quad (3.4)$$

Обозначим  $B = K(C_0^\infty(\Lambda \times (0, 1]))$  и  $R$  отношение эквивалентности на  $B$ :  $K\varphi(r, h) \stackrel{R}{\sim} K\varphi_1(r, h)$ , если в существенных точках  $r$  функция  $\varphi(r, h) - \varphi_1(r, h)$  имеет порядок малости  $O(h)$ .

### Теорема 9.1. Туннельный канонический оператор

$$K: C_0^\infty(\Lambda \times (0, 1]) \rightarrow B \pmod{R}$$

не зависит от выбора канонического атласа, разбиения единицы, параметров  $\gamma > 0$  и  $\sigma > 0$  и от способа продолжения энтропии и якобиана на множества  $D^\gamma$ .

Схема доказательства этой теоремы совпадает со схемой доказательства аналогичного утверждения в теории канонического оператора, с той лишь разницей, что в данном случае асимптотические разложения соответствующих интегралов получаются применением метода Лапласа, а не метода стационарной фазы.

**З а м е ч а н и е.** Определение туннельного канонического оператора автоматически переносится на случай произвольных лагранжевых многообразий  $\Lambda$ , на которых заданы энтропия  $S$  и якобиан  $J$ .

Пусть выполнено условие, более сильное, чем IV).

IV'). Существует такое  $\varepsilon > 0$ , что  $\det \|H_{\alpha p_i p_j}\| \geq \varepsilon > 0$  при  $|p| < \infty$ . Предположим также, что выполнено условие:

V) Существует такое  $\Delta$ , что при  $0 < t \leq \Delta$  все многообразия  $\Lambda_{n\alpha}^{t, \xi}$  диффеоморфно проектируются на  $\mathbf{R}_x^n$  и на  $\mathbf{R}_p^n$ . (Условие V) выполнено, например, в случае, когда матрица  $L(p, x, t)$  не зависит от  $x$  при  $|x| > a > 0$ , где  $a$  — некоторое число, и выполнено IV').

Ниже туннельный канонический оператор на многообразии  $\Lambda_{n\alpha}^{t, \xi}$  будем обозначать  $K_\alpha^{t, \xi}$ . Введем в рассмотрение  $N \times N$ -матрицы  $\Psi_\alpha(\alpha = 1, 2, \dots, m)$ , определив их следующим образом. Пусть  $f_\beta^\alpha(p, x, t)$  ( $\beta = 1, 2, \dots, \kappa_\alpha$ ) — ортонормированные собственные векторы матрицы  $L(p, x, t)$ , отвечающие собственному числу (гамильтониану)  $H_\alpha$ ;  $\kappa_\alpha$  — кратность этого числа ( $|p| \neq 0, \alpha = 1, 2, \dots, m$ ). Обозначим через  $\zeta_{\alpha\beta}^{i,0}$  коэффициенты разложения  $i$ -го базисного орта  $e^i$  в  $\mathbf{R}^N$  по векторам  $f_\alpha^\beta(p, x, 0)$ :

$$\sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^{\kappa_\alpha} f_\alpha^\beta(p, x, 0) \zeta_{\alpha\beta}^{i,0} = e^i$$

и через  $\zeta_{\alpha\beta}^i$  — решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\zeta_{\alpha\beta}^i}{dt} + \sum_{\nu=1}^{\kappa_\alpha} M_{\nu\beta}^{\alpha} \zeta_{\alpha\nu}^i = 0, \quad \zeta_{\alpha\beta}^i|_{t=0} = \zeta_{\alpha\beta}^{i,0},$$

где

$$M_{\nu\beta}^{\alpha} = \left\langle f_\alpha^\nu, \frac{df_\alpha^\beta}{dt} \right\rangle + \sum_{j=1}^n \left\langle f_\alpha^\beta, \left( \frac{\partial L}{\partial p_j} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_j} \right) f_\alpha^\nu \right\rangle - \delta_{\nu\beta} \sum_{j=1}^n \frac{\partial H_\alpha}{\partial x_j \partial p_j}$$

—  $(\kappa_\alpha \times \kappa_\alpha)$  — матрицы ( $\alpha$  фиксировано),  $d/dt$  — производная вдоль траекторий системы Гамильтона (3.1) с данными Коши на  $\Lambda_n^{0, \xi}$  и значения аргументов  $p$  и  $x$  берутся на этих же траекториях.

Положим

$$\Psi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n_\alpha} (\zeta_{\alpha\beta}^1 f_\alpha^\beta, \dots, \zeta_{\alpha\beta}^N f_\alpha^\beta) e(r, M).$$

Здесь и далее  $M$  означает любое сколь угодно большое наперед заданное число, а функция  $e(r, M)$  — сужение на многообразии, по которому строится соответствующий туннельный канонический оператор, гладкой финитной функции на  $\mathbb{R}_{px}^{2n}$ , тождественно равной единице в шаре  $p^2 + x^2 \leq M$ . Асимптотика матрицы Грина в окрестности множества  $(\partial S_\alpha / \partial x_i = 0)$  ( $i=1, \dots, n$ ) построена операторным методом с использованием комплексного ростка [43 доп. лит.]. Вне этой окрестности имеет место следующее утверждение.

**Теорема 9.2.** Пусть выполнены сформулированные выше условия I)–V), IV'). Тогда для любого сколь угодно большого  $M > 0$  при  $\delta \leq t \leq T$  матрица Грина системы (1.1) представима в виде

$$u(x, \xi, t, h) = (2\pi h)^{-n/2} \sum_\alpha K_\alpha^{t, \xi} (\Psi_\alpha + O(h)) + O(e^{-M/h}).$$

Доказательство теоремы для простоты выкладок проведем в случае  $N=1$  (тогда индекс  $\alpha$  можно опустить) и будем считать, что

$$L(p, x, t) \equiv H(p, x, t) = H(p, x), \det |H_{xx}| \neq 0$$

при  $|x| < \infty$ . Предварительно приведем эвристический вывод формулы для формальной равномерной асимптотики решения задачи (1.1), (1.3) при  $0 \leq t \leq \Delta$ . Заметим, что при  $t=0$  все начальное лагранжево многообразие (плоскости  $\Lambda_n^{0, \xi}$ ) состоит из фокальных точек и покрывается одной особой картой, диффеоморфно проектирующейся на плоскость  $x=0$ . Однако записать асимптотику при  $t \rightarrow 0$  в виде, аналогичном (3.3), нельзя, так как энтропия на плоскости  $\Lambda_n^{0, \xi}$  равна нулю и сдвиг  $\Lambda_n^{0, \xi}$  вдоль характеристик соответствующего параболического уравнения приводит к растущим при  $h \rightarrow 0$  экспонентам. (По той же причине невозможно представить асимптотику при  $t \rightarrow 0$  в виде преобразования Фурье, как это можно сделать при построении канонического оператора.) Поэтому для задачи (1.3) при  $t \rightarrow 0$  построим равномерную (формальную) асимптотику, отличающуюся от (3.2). При малых  $t$  естественно считать, что коэффициенты уравнения (2.6) можно «заморозить», т. е. представить решение задачи (1.1), (1.3) в виде

$$(2\pi h)^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{h} [\langle p, x - \xi \rangle + H(-ip, \xi) t] \right\} dp.$$

Приведенная формула дает асимптотическое решение лишь при  $t \ll h$ . Обобщая эту формулу, построим равномерную (формальную) асимптотику решения задачи (1.1), (1.3). Будем искать ее в

виде

$$[(2\pi h)^{-n} A(x, \xi, t) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{h} [i \langle p, y(x, \xi, t) + H(-ip, y_1(\xi, t)) t] \right\} dp, \quad (3.5)$$

где  $A(x, \xi, t)$ ,  $y(x, \xi, t)$ ,  $y_1(\xi, t)$  — новые неизвестные гладкие функции. Покажем, что асимптотику при  $h \rightarrow 0$  интеграла Лапласа, содержащегося в формуле (3.5) при условии  $0 < \delta < t \leq \Delta$ , где  $\delta$  — фиксированное сколь угодно малое число, можно вычислить методом перевала. Для определения критических точек интеграла (3.5) имеем уравнение

$$y = H_p(-ip, y_1) t.$$

В силу условия IV') у приведенного уравнения существует гладкое чисто мнимое решение  $p=iz$ ,  $z=z(y, y_1, t)$ . Условие II) на гамильтониан  $H(p, x, t)$  делает топологическую часть метода перевала тривиальной: сдвигаем контур интегрирования в комплексное пространство  $\mathbb{C}^n$  таким образом, что  $\text{Im } p = z$ . Критическая точка  $p=iz$  на полученном контуре является перевальной, поскольку в ней достигается максимум реальной части фазы интеграла. Отсюда найдем асимптотику интеграла (3.5):

$$u = (2\pi h)^{-n/2} \varphi \exp \left\{ -\frac{1}{h} \Phi \right\} (1 + O(h)), \quad (3.6)$$

где функции  $\Phi$ ,  $\varphi$  имеют вид

$$\Phi(x, \xi, t) = \langle z(y(x, \xi, t), y_1(\xi, t), t), y(x, \xi, t) \rangle - \\ - H(z(y(x, \xi, t), y_1(\xi, t), t), y_1(\xi, t), t), \quad (3.7)$$

$$\varphi(x, \xi, t) = A(x, \xi, t) (\det (H_{pp}(z(y(x, \xi, t), y_1(\xi, t), t), y_1(\xi, t), t), y_1(\xi, t), t)))^{-1/2}. \quad (3.8)$$

Подставим функцию  $u$  вида (3.6) в уравнение (1.1). Воспользуемся формулой коммутации экспоненты  $e^{-\Phi/h}$  с псевдодифференциальным оператором [43 доп. лит.]. Сократим полученное соотношение на  $e^{-\Phi/h}$  и приравняем коэффициенты при степенях  $h^0$  и  $h^1$ . В результате получим, что функция  $\Phi$  в асимптотике (3.6) интеграла (3.5) удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + H \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}, x \right) = 0, \quad (3.9)$$

а функция  $\varphi$  — уравнению переноса

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left\langle H_p \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, x \right), \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n H_{p_i p_j} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, x \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \varphi = 0. \quad (3.10)$$

Начальное условие вида (1.3) индуцирует условие при  $t=0$  на функции  $y(x, \xi, t)$  и  $A(x, \xi, t)$  — функция  $y(x, \xi, 0)$  обращается в

нуль лишь при  $x = \xi$ ,  $y_\xi'(x, x, 0) \neq 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$A(x, x, 0) = y_\xi'(x, x, 0). \quad (3.11)$$

Таким образом, задача построения асимптотического решения вида (3.5) сводится к задаче отыскания функций  $\Phi(x, \xi, t)$ ,  $\varphi(x, \xi, t)$ ,  $y(x, t)$  и  $A(x, \xi, t)$ , удовлетворяющих уравнениям (3.7)–(3.10) и условию (3.11). Уравнениям (3.9) и (3.10) удовлетворяют функции  $\Phi(x, \xi, t) = S(r(x, \xi, t), t)$  и  $\varphi(x, \xi, t) = |J(r(x))|^{-1/2} \Psi(r(x))$ ,

где  $S$  — энтропия и  $J$  — якобиан на многообразии  $\Lambda = \Lambda_n^{t, \xi}$ , функция  $\Psi$  определена перед формулировкой теоремы 9.2. Существование решения  $r(x)$  системы  $x = x(r)$  следует из диффеоморфного проектирования многообразия  $\Lambda_n^{t, \xi}$  на  $\mathbb{R}_x^n$  при  $0 < t \leq \Delta$ . Построим решение  $y(x, \xi, t)$ ,  $y_1(\xi, t)$  уравнения (3.7) (если  $H(0, x) = \text{const}$ , то  $y_1(\xi, t) = \xi$ ). Разложим в сумму квадратов правую часть уравнений (3.7) в точке  $z=0$  и левую часть в точке  $x = x(\xi, t)$ , где  $x(\xi, t)$  — решение системы  $S_x(r(x), \xi, t) = 0$ . Это возможно в силу предположения невырожденности матрицы  $H_{xx}$  и леммы Морса. Приравняв соответствующие квадраты в разложениях, найдем решение  $y_1(\xi, t)$ ; подставляя затем функцию  $y_1(\xi, t)$  в правую часть уравнения (3.7) и вновь применяя лемму Морса при фиксированном  $\xi$  и приравняв соответствующие квадраты в разложениях, получаем искомого решение  $y(x, \xi, t)$ . Функцию  $A(x, \xi, t)$  найдем из уравнения (3.8). В результате несложных, но громоздких вычислений легко убедиться, что построенные функции удовлетворяют условию (3.11). Тем самым получена равномерная (формальная) асимптотика решения задачи (1.1), (1.3) вида (3.5). Обозначим

$$G = G(x, \xi, t, h) = (2\pi h)^{-n} \Psi(r(x)) |\det(H_{pp}(z, \xi, t))|^{1/2} |J(r(x))|^{-1/2} \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ \frac{1}{h} [i \langle p, y(x, \xi, t) \rangle + H(-ip, y_1(\xi, t)) t] \right\} dp. \quad (3.12)$$

В силу проведенных выше рассуждений главный член асимптотики функции  $G$  при фиксированном  $0 < t \leq \Delta$  и фиксированных  $x$  и  $\xi$  имеет вид туннельного канонического оператора на многообразии, примененного к функции  $\Psi(r)e(r; M)$ .

Доказательство теоремы 9.2. Подставим функцию  $G$  (3.12) в уравнение (1.1). Воспользовавшись формулой коммутации псевдодифференциального оператора с экспонентой и учитывая определение функций  $y(x, \xi, t)$  и  $y_1(\xi, t)$ , получим

$$\left[ h \frac{\partial}{\partial t} - H \left( -h \frac{\partial}{\partial x}, x \right) \right] G = h^2 F,$$

где

$$F = F(x, \xi, t, h) = g_1(x, \xi, t, h) \int_{\mathbb{R}^n} \exp \{ (i \langle p, y(x, \xi, t) \rangle + \\ + H(-ip, y_1(\xi, t)) t) \} g_2(p, x, \xi, t, h) dp.$$

Здесь функции  $g_1(x, \xi, t, h)$  и  $g_2(p, x, \xi, t, h)$  класса  $C^\infty$ , причем  $g_2(p, x, \xi, t, h)$  — целая функция аргумента  $p$ .

Точное фундаментальное решение уравнения (1.1) представим в виде ряда

$$u(x, \xi, t, h) = G(x, \xi, t, h) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} h^{k+1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x, \eta, t-\tau) (\hat{F}^k \cdot F)(\eta, \xi, \tau, h) d\eta d\tau, \quad (3.13)$$

где  $\hat{F}^k$  —  $k$ -я степень оператора

$$(\hat{F}\varphi)(x, \xi, t, h) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} F(x, \eta, t-\tau, h) \varphi(\eta, \xi, \tau) d\eta d\tau.$$

Зафиксируем в формуле (3.13) время  $t = \delta$ . Покажем, что асимптотику при  $h \rightarrow 0$  суммы (3.13) можно вычислить. При этом будем рассматривать  $k$ -е слагаемое в сумме (3.13) не как повторный, а как  $n(2k+3)$ -кратный интеграл по  $p$  и  $\eta$ . При таком подходе соответствующие критические точки интегралов оказываются невырожденными. Заметим, что непосредственное применение метода перевала к интегралам в сумме (3.13) невозможно, поскольку фаза в них — неаналитическая (по переменным  $\eta$ ) функция. Воспользуемся методом, развитым в кн.: Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. Для упрощения обозначений рассмотрим подробно лишь член суммы с индексом  $k=0$  в случае  $H(p, x) = \text{const}$  (т. е. когда  $y_1(\xi, t) = \xi$ ):

$$\int_0^\delta \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x, \eta, \delta-\tau) g_1(\eta, \xi, \tau, h) g_2(p, \eta, \xi, \tau, h) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{h} [i \langle p_1, y(x, \xi, \delta-\tau) \rangle + H(-ip, \eta)(\delta-\tau) + \right. \\ \left. + i \langle p_1, y(\eta, \xi, \tau) \rangle + H(-ip_1, \xi) \tau] \right\} dp dp_1 d\eta d\tau. \quad (3.14)$$

Здесь через  $f(x, \eta, \delta-\tau)$  обозначена функция, стоящая перед интегралом (3.12). Для вычисления (3.14) применим метод перевала (Лапласа). Найдем стационарные точки фазы интеграла (3.14) по переменным  $\eta$ ,  $p$  и  $p_1$ . Для их определения имеем следующие уравнения:

$$ip_1 y_1'(x, \eta, \delta-\tau) + H_x(-ip, \eta)(\delta-\tau) + ip_1 y_1'(\eta, \xi, \tau) = 0, \\ y(x, \eta, \delta-\tau) = H_p(-ip, \eta)(\delta-\tau), \\ y(\eta, \xi, \tau) = H_p(-ip_1, \xi) \tau.$$

Приведенная система разрешима для чисто мнимых  $p$  и  $p_1$ . Этот факт следует из диффеоморфного проектирования многообразия  $\Lambda_n^{t, \xi}$  на  $\mathbb{R}_x^n$  и проверяется дифференцированием. Обозначим полученные решения через  $p^0$  и  $p_1^0$ . Сдвинем контур интегрирования в

интеграле (3.14) по переменным  $p^0$  и  $p_1^0$  так, чтобы  $\text{Im } p = \text{Im } p^0$  и  $\text{Im } p_1 = \text{Im } p_1^0$ , и сделаем замену переменных  $p' \rightarrow p + p_1^0$  и  $p_1' \rightarrow p_1 + p_1^0$ . В результате получим интеграл Лапласа по пространству  $\mathbb{R}^{2n}$  с неаналитической (по переменной  $\eta$ ) фазой, стационарная точка которой вещественна. Вычисляя асимптотику этого интеграла указанным выше методом и, аналогично, асимптотику интегралов в  $k$ -х членах суммы (3.14), получим

$$\int_0^\delta \int_{\mathbb{R}^n} G(x, \eta, \delta - \tau, h) (\hat{F}^k F)(\eta, \xi, \tau, h) d\eta d\tau = g_k(K\Psi), \quad (3.15)$$

где  $K = K^{\delta, \xi}$  — канонический оператор на  $\Lambda_n^{\delta, \xi}$ , функции  $g_k = g_k(x, \xi, \delta, h)$  равномерно по  $n$  ограничены. Из соотношения (3.15) следует доказательство теоремы для времени  $t = \delta$ . Пусть теперь  $\delta < t \leq T$ . Имеем

$$u(x, \xi, t, h) = (\hat{G}^m G)(x, t, \delta_1, \xi, h), \quad (3.16)$$

где  $\delta_1 = t/m$ ,  $\hat{G}^m$  —  $m$ -я степень оператора

$$(\hat{G}\varphi)(x, t, \delta_1, \xi, h) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, \eta, \delta_1, h) \varphi(\eta, \xi, t, h) d\eta$$

и целое число  $m > 0$  — такое, что  $t/m \leq \delta$ .

Асимптотика интегралов, стоящих в правой части равенства (3.16), легко считается методом Лапласа, если стационарные точки фазы невырождены. Результатом соответствующих вычислений является формула (3.2). Такая ситуация имеет место в том случае, когда точка  $x$ , в которой вычисляется асимптотика, не является проекцией (существенной) фокальной точки. Если же стационарная точка вырождена, воспользуемся следующим приемом. С помощью метода Лапласа легко убедиться, что один из операторов в формуле (3.16), например, действующий последним, можно записать в виде канонического оператора (3.3) в области  $\pi_x(g_H^{-\sigma}\Omega)$ . Здесь  $\Omega$  — окрестность соответствующей фокальной точки на многообразии  $\Lambda_n^{\delta, \xi}$ . Асимптотика представленной таким образом функции (3.16) с помощью метода Лапласа легко приводится к виду (3.3). Это рассуждение завершает доказательство теоремы.

**З а м е ч а н и е.** Построенный выше туннельный канонический оператор определяет главный член асимптотики решения задачи (1.1), (1.3). Решение задачи о построении глобального асимптотического ряда требует определения на многообразии  $\Lambda_n^{\delta, \xi}$  некоторого набора дифференциальных операторов  $V^l$  порядка  $l$  (зависящих, вообще говоря, от выбора канонического атласа и разбиения единицы). Алгоритм построения операторов  $V^l$  приведен в [45, доп. лит., § 9] и переносится на рассматриваемый случай без изменения. Для построения  $M$  членов асимптотического ряда необходимо решить с точностью до  $O(h^M)$  дифференциальное уравнение

$$\sum_{l=0}^M h^l V^l \varphi = 0. \text{ Подставляя в это уравнение искомую функцию } \varphi \text{ в}$$

$$\text{виде ряда по степеням } h, \text{ т. е. } \varphi = \sum_{m=0}^{M-1} h^m \varphi_m \text{ и приравнивая нулю коэф-}$$

фициенты при одинаковых степенях параметра  $h$ , получим систему  $M$  дифференциальных уравнений для определения функций  $\varphi_m$ . Порядок каждого уравнения полученной системы меньше  $M$ , коэффициенты уравнения на функцию  $\varphi$  зависят от решений  $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ . Искомый асимптотический ряд получается применением туннельного канонического оператора, построенного на многообразии  $\Lambda_n^{\delta, \xi}$ , к функции  $\varphi$ .

#### § 4. Задача о больших отклонениях

Рассмотрим задачу Коши для уравнений туннельного типа с начальными данными, не зависящими от  $h$ :

$$h \frac{\partial u}{\partial t} = H\left(-h \frac{\partial}{\partial x}, x, t\right) u, \quad u|_{t=0} = \varphi^0(x), \quad (4.1)$$

где функция  $\varphi^0(x)$  не обращается в нуль в некоторой замкнутой ограниченной области  $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi^0(x) \equiv 0$  вне области  $\mathcal{D}$  и  $\varphi^0(x) \in C^\infty(\mathcal{D}_0)$ ; граница  $\partial D_0$  — гладкая.

Решение задачи (4.1) выражается через туннельный канонический оператор  $K$  на семействе лагранжевых многообразий  $\Lambda_n^{\delta, \xi}$ , полученных способом, указанным в § 3. Именно,

$$u(x, t, h) = \int_{\mathbb{R}^n} (K(\Psi(r, M) + O(h))(\xi, h) \varphi^0(\xi) d\xi + O(e^{-M/h}). \quad (4.2)$$

Преобразуем формулу (4.2), вычислив по методу Лапласа асимптотику интеграла в правой части. Согласно определению оператора  $K$  для этого достаточно вычислить асимптотику каждого из интегралов вида

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(\Omega_j)(e_j \Psi) \varphi^0(\xi) d\xi, \quad (4.3)$$

где  $K(\Omega_j)$  определен формулами (3.2), (3.3) и  $\{e_j\}$  — разбиение единицы, подчиненное каноническому атласу  $\{\Omega_j\}$ . Сначала найдем асимптотику интеграла в правой части (4.2) в области  $\mathcal{D}_t = \pi_x[g_H^t\{p=0, x \in \mathcal{D}_0\}]$ . Здесь, как и в § 3,  $\pi_x$  — естественная проекция точек фазового пространства  $\mathbb{R}_{px}^{2n}$  на координатную плоскость  $\mathbb{R}_x^n$  и  $g_H^t$  — фазовый поток в  $\mathbb{R}_{px}^{2n}$ , отвечающий функции  $H$ . Используя явный вид оператора  $K(\Omega_j)$ , легко показать, что главный вклад в асимптотику интеграла (4.3) вносят точки  $\xi(x, t) \in \mathcal{D}_0 \setminus \partial \mathcal{D}_0$ .



(т. е. лежащие внутри области  $\mathcal{D}_0$ ), удовлетворяющие уравнению

$$Q(\xi(x, t), t) = x. \quad (4.4)$$

Здесь  $Q(\xi, t)$  — проекция в конфигурационное пространство  $\mathbb{R}_x^n$  траектории  $(P(\xi, t), Q(\xi, t))$  системы Гамильтона (3.1), удовлетворяющей данным Коши

$$Q|_{t=0} = \xi, \quad P|_{t=0} = 0. \quad (4.5)$$

Проводя соответствующие вычисления, используя при этом прием § 3, приводящий к формулам (3.3), легко получим, что асимптотика функции  $u(x, t, h)$  в области  $\mathcal{D}_i \setminus \partial\mathcal{D}_i$  имеет вид

$$u(x, t, h) = K^{in}(e(r, M)\varphi(r) + O(h)) + O(e^{-M/h}), \quad (4.6)$$

где  $K^{in}$  — туннельный канонический оператор (3.4), построенный на лагранжевых многообразиях  $\Lambda = \Lambda_n^{t, in} = g_H^t \{p=0, x=\xi\}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , по формулам (3.2), (3.3), в которых якобиан  $J = \det \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi}$  и эн-

тропия  $S = \int_0^t \langle P(\xi, \tau), H_p(P(\xi, \tau), Q(\xi, \tau)) \rangle - H(P(\xi, \tau), Q(\xi, \tau), \tau) d\tau$ .

Функция  $\varphi(r)$  имеет вид

$$\varphi(r) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^n H_{p_i x_i} d\tau \right\} \varphi^0(\xi) \Big|_{\xi = \pi_x(g_H^t r)},$$

где интеграл вычисляется вдоль траектории  $Q(\xi, t), P(\xi, t)$  задачи (3.1), (4.4).

В случае  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}_i$  главный вклад в асимптотику интеграла (4.2) вносят граничные точки  $\xi(x, t) \in \partial\mathcal{D}_0$ , удовлетворяющие уравнению  $Q(\xi(x, t), t) = x$ . Здесь  $Q(\xi, \tau)$  — проекция в  $\mathbb{R}_x^n$  решения  $(P(\xi, t), Q(\xi, t))$  системы Гамильтона (3.1) с данными Коши

$$Q|_{t=0} = \xi, \quad P|_{t=0} = \rho n(\xi), \quad (4.7)$$

где  $\xi \in \partial\mathcal{D}_0$ ,  $n(\xi)$  — вектор единичной внешней нормали к  $\partial\mathcal{D}$  в точке  $\xi$ . Проводя соответствующие вычисления, получим, что асимптотика функции  $u(x, t, h)$  в области  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}_i$  имеет вид

$$u(x, t, h) = \left( \frac{h}{2\pi} \right)^{1/2} K^{out}(e(r, M)f(r) + O(h)) + O(e^{-M/h}). \quad (4.8)$$

Здесь туннельный канонический оператор  $K^{out}$  построен на лагранжевых многообразиях  $\Lambda = \Lambda_n^{t, out} = g_H^t \Lambda_n^0$ , где  $\Lambda_n^0 = \{p = \rho n(x), x \in \partial\mathcal{D}_0\}$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$ ,  $n(x)$  — вектор единичной внешней нормали к  $\partial\mathcal{D}_0$  в точке  $x$ . В этом случае в формулах (3.2), (3.3) следует положить

$$S = \int_0^t (\langle P, H_p(P, Q) \rangle - H(P, Q)) d\tau, \quad J = \frac{\partial Q}{\partial(\rho, \alpha)},$$

где  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$  — (локальные) ортонормированные криволинейные координаты с единичным метрическим тензором на многообразии  $\partial\mathcal{D}_0$ ,  $P, Q$  — решение системы Гамильтона (3.1), удовлетворяющее начальному условию (4.7), в котором

$$\xi = \xi(\alpha) \in \partial\mathcal{D}_0. \quad (4.9)$$

Функция  $f(r)$  в формуле (4.8) определяется равенством

$$f(r) = (\rho(r))^{-1} \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^n H_{p_i x_i} d\tau \right) \varphi(\xi) \Big|_{\xi = \pi_x(g_H^t r)}.$$

Здесь интеграл вычисляется вдоль траекторий задачи (3.1), (4.7), (4.9), функция  $\rho(r)$  определяется соотношением  $\rho(r)n(g_H^t r) = \rho(g_H^t r)$ .

Итогом проведенных рассуждений является следующее утверждение.

**Теорема 9.3.** Пусть гамильтониан  $H(p, x, t)$  задачи (4.1) удовлетворяет условиям теоремы 9.2. Тогда решение задачи Коши (4.1), (4.2) при  $x \in \mathcal{D}_i \setminus \partial\mathcal{D}_i$  имеет вид (4.6), а при  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}_i$  вид (4.8).

**Замечание.** Пусть в задаче (4.1)  $H(0, x, t) = 0$ . Тогда область  $\mathcal{D}_i$  получается в результате сдвига области  $\mathcal{D}_0$  вдоль характеристик уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left\langle b(x, t), \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle w, \quad b(x, t) = H_p(0, x, t). \quad (4.10)$$

Прообраз  $\pi_x^{-1}(\mathcal{D}_i)$  области  $\mathcal{D}_i$  на многообразии  $\Lambda_n^{t, in}$  при этом принадлежит плоскости  $\mathbb{R}_x^n$ , энтропия равна нулю, и функция (4.6) с точностью до  $O(h)$  совпадает с решением  $w$  задачи Коши  $w|_{t=0} = \varphi^0(x)$  для уравнения (4.10). Иначе говоря, в этом случае решение (4.6) в области  $\mathcal{D}_i$  находится методом регулярной теории возмущений.

ДОБАВЛЕНИЕ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРОУБЫВАЮЩИМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

§ 1. Линейные задачи

В этом разделе мы рассмотрим асимптотику решения задачи Коши для эволюционных уравнений с малым параметром  $h \rightarrow 0$ . Начальные условия определяются функциями, имеющими вид «пика» ширины  $\sim h$ :

$$u|_{t=0} = \Phi(x/h); \Phi(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } |\tau| \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

Оказывается, что для широкого класса уравнений с параметром асимптотика решения такой задачи имеет вид  $u = f\left(\frac{S(x,t)}{h, x, t}\right)$ , естественным образом обобщающий функции (1.1). Асимптотические решения такого вида интересны и сами по себе, поскольку они обладают свойством «самоподобности»: если решение имеет такой вид при  $t=t_0$ , то оно имеет такой же вид и на некотором временном отрезке  $[t_0, t']$ . В линейной теории, в отсутствие фокальных точек, самоподобные решения, как правило (для уравнений с дисперсией), имеют вид ВКБ-асимптотик:  $f(\tau, x, t) = \Phi(x, t) \exp(i\tau)$ . Для уравнений без дисперсии, например для волнового уравнения, зависимость от  $\tau$  оказывается отличной от экспоненциальной. Этот же факт имеет место и для нелинейных уравнений. Еще одно важное свойство «самоподобных» решений состоит в том, что на них выходят решения задачи Коши (1.1), т. е. спустя сколь угодно малое время  $t$  асимптотика принимает вид самоподобного решения.

1. Гиперболические уравнения (уравнения без дисперсии). Проиллюстрируем сказанное на примере задачи Коши для волнового уравнения:

$$u_{tt} - c^2(x) u_{xx} = 0, \quad (1.2)$$

$$u|_{t=0} = \Phi\left(\frac{x}{h}\right), u_t|_{t=0} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь  $c(x) > 0$ ,  $\Phi(\tau)$  — гладкие функции, функция  $\Phi(\tau)$  финитна. Вычислим асимптотику решения задачи (1.2), (1.3) при  $h \rightarrow 0$  на временах  $t \in [0, T]$ , где  $T$  не зависит от  $h$ . Сначала найдем

асимптотические «самоподобные» решения уравнения (1.2), а затем сконструируем из них решение задачи Коши.

Самоподобные решения будем искать в виде

$$u = f^0\left(\frac{S(x,t)}{h, x, t}\right) + hf^1\left(\frac{S(x,t)}{h, x, t}\right) + \dots, \quad (1.4)$$

где  $f^k(\tau, x, t)$ ,  $S(x, t)$  — гладкие функции,  $f^0$  быстро убывает при  $|\tau| \rightarrow \infty$ . Подставляя (1.4) в (1.2) и приравнявая к нулю коэффициент при  $h^{-2}$ , получим:

$$(S_t^2 - c^2(x) S_x^2) f_{\tau\tau}^0|_{\tau=\frac{S}{h}} = 0.$$

Отсюда следует, что функция  $S$  удовлетворяет одному из уравнений характеристик:  $S_t^{\pm} \pm c(x) S_x^{\pm} = 0$ ;  $S^{\pm}|_{t=0} = x$ . Каждому из этих уравнений отвечает своя функция  $f^0$ ; мы будем различать их с помощью индексов  $\pm$ :  $f^0 \rightarrow f_{\pm}^0$ . Обозначим через  $X^{\pm}(t, x_0)$  решения уравнений  $\dot{X}^{\pm} = \pm c(X^{\pm})$  с начальным условием  $X^{\pm}|_{t=0} = x_0$ .

Очевидно, якобианы  $J^{\pm} = \partial X^{\pm} / \partial x_0 = \exp\left(\pm \int_0^t c(X^{\pm}(\xi, x_0)) d\xi\right)$  отличны от нуля при всех  $t$ . Поэтому функции  $S^{\pm}$  определены при любых  $t \geq 0$  и имеют вид  $S^{\pm} = X_0^{\pm}(x, t)$ , где  $X_0^{\pm}$  — решение уравнения  $X^{\pm}(t, x_0) = x$ . Приравнявая к нулю коэффициент при  $h^{-1}$  и учитывая уравнения характеристик, получим уравнение переноса:

$$\hat{\Pi}^{\pm} \frac{\partial f_{\pm}^0}{\partial \tau} = \left[ 2 \left[ \frac{S_t^{\pm} \partial}{\partial t} - \frac{c^2 S_x^{\pm} \partial}{\partial x} \right] + (S_{tt}^{\pm} - c^2 S_{xx}^{\pm}) \right] \frac{\partial f_{\pm}^0}{\partial \tau} = 0.$$

Интегрирование этого уравнения с учетом условия убывания  $f_{\pm}^0$  при  $|\tau| \rightarrow \infty$  дает формулу

$$f_{\pm}^0(\tau, x, t) = \frac{\Phi_{\pm}(\tau, X_0^{\pm}(x, t))}{\sqrt{J^{\pm}(X^{\pm}(x, t), t)}} \sqrt{\frac{c(x)}{c(X_0^{\pm}(x, t))}},$$

где  $\Phi_{\pm}(\tau, x)$  — произвольные быстроубывающие функции. Таким образом, главный член «самоподобного» асимптотического решения имеет вид

$$u_{\pm}^0 = f_{\pm}^0\left(\frac{S^{\pm}}{h}, x, t\right) = \frac{\Phi_{\pm}\left(\frac{S^{\pm}}{h}, X_0^{\pm}(x, t)\right)}{\sqrt{J^{\pm}(X_0^{\pm}(x, t), t)}} \sqrt{\frac{c(x)}{c(X_0^{\pm}(x, t))}}.$$

Аналогичным образом строится первая поправка  $f^1$ : уравнение для нее получается приравняванием к нулю коэффициента при  $h^0$  и

имеет вид  $\hat{\Pi}^{\pm} \frac{\partial f_{\pm}^1}{\partial \tau} = - \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f_{\pm}^0$ . Интегрирование

этого уравнения приводит к определению  $f_{\pm}^1$ . Полученная функция  $u_{\pm}^1 = f_{\pm}^0 + hf_{\pm}^1$  удовлетворяет уравнению (1.2) с точностью до  $O(h)$ . Подбирая функции  $f_{\pm}$  из начальных условий, используя принцип суперпозиции и применяя затем результаты об оценках решения неоднородного волнового уравнения, легко приходим к следующему утверждению:

**Теорема 1.1.** При  $t \in [0, T]$  ( $T$  не зависит от  $h$ ) для решения  $u(x, t, h)$  задачи (1.2), (1.3) справедлива формула

$$u = \frac{1}{2} \frac{\Phi\left(\frac{S^+(x, t)}{h}\right) \sqrt{c(x)}}{\sqrt{J^+(X_0^+(x, t), t) c(X_0^+(x, t))}} + \frac{\Phi\left(\frac{S^-(x, t)}{h}\right) \sqrt{c(x)}}{\sqrt{J^-(X_0^-(x, t), t) c(X_0^-(x, t))}}.$$

**З а м е ч а н и е.** Выбирая различные функции  $\Phi(\tau)$ , можно получать различную зависимость решения от «быстрой» переменной  $\tau = \frac{S}{h}$  при  $t > 0$ . Это свойство характерно для уравнений без дисперсии.

**2. Уравнения с дисперсией. Прогрессивные волны.** Рассмотрим задачу Коши

$$ih \frac{\partial u}{\partial t} = L \left( x, \frac{-ih \frac{\partial}{\partial x} - ih \frac{\partial^3}{\partial x^3}}{2} \right) u, \quad (1.5)$$

$$u|_{t=0} = \Phi\left(\frac{x}{h}\right). \quad (1.6)$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^n$ ;  $L(x, p)$ ,  $\Phi(\tau)$  — гладкие функции, функция  $\Phi$  финитна, а для  $L$  выполнена оценка

$$\left| \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^{\beta}}{\partial x^{\beta}} L(x, p) \right| \leq c_{\alpha\beta} (1 + |x|)^m (1 + |p|)^m$$

при некотором  $m > 0$  для любых мультииндексов  $\alpha, \beta$ . Покажем, действуя по той же схеме, что и в предыдущем пункте, что самоподобные решения для таких уравнений имеют вид ВКБ-асимптотик. Для простоты ограничимся случаем, когда  $L = p^3 a(x)$ ,  $n=1$  (тогда уравнение (1.5) будет линеаризованным уравнением Кортевега — де Фриза). Элементарное вычисление приводит к следующему уравнению для  $f^0$ :  $S_t f^0 + S_x^3 a(x) f^0 = 0$ . Его решения, ограниченные при  $\tau \in \mathbb{R}$  вместе с производными, — это функции  $\Phi(x, t) \exp(\pm i\tau)$ , причем фаза  $S$  должна удовлетворять уравнению Гамильтона — Якоби:  $S_t - a(x) S_x^3 = 0$ . Это, очевидно, означает, что «самоподобные» решения в данном случае — ВКБ-асимптотики.

Покажем, что при некоторых условиях асимптотика решения задачи Коши для уравнений с дисперсией превращается при  $t > \varepsilon > 0$  в самоподобное решение.

Рассмотрим задачу Коши для системы Гамильтона

$$\dot{x} = L_p; \dot{p} = -L_x; x|_{t=0} = 0; p|_{t=0} = p_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (1.7)$$

Предположим, что эта задача имеет при  $t \in [0, T]$  единственное решение  $\{X(t, p_0), P(t, p_0)\} \in C^{\infty}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ . Рассмотрим в фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{x,p}^{2n}$  семейство лагранжевых многообразий  $\Lambda_t^n$ , полученных из плоскости  $x=0$  сдвигом вдоль траекторий системы (1.7).

**Теорема 1.2.** 1) В сформулированных предположениях решение  $u(x, t, h)$  задачи (1.5), (1.6) имеет вид

$$u = (2\pi h)^{\frac{n}{2}} \exp(i\delta/h) K_{\Lambda_t^n}(\tilde{\Phi}) + W(x, t, h),$$

где  $\|W\|_{L_2(\mathbb{R}_x^n)} \leq \text{const} \cdot h^{\frac{n}{2}+1}$ . Здесь  $\delta = \int_{\gamma} (p dx - L dt) - \frac{h\pi\mu(\gamma)}{2}$ , где

$\gamma$  — дуга траектории, соединяющая некоторую фиксированную точку плоскости  $x=0$  с многообразием  $\Lambda_t^n$ ,  $\mu(\gamma)$  — ее индекс Морса.

2) Пусть при  $t \in [\varepsilon, T]$ ,  $\varepsilon > 0$ , многообразия  $\Lambda_t^n$  диффеоморфно проектируются на плоскость  $p=0$ . Тогда при таких  $t$  функция  $u(x, t, h)$  имеет вид

$$u = \varphi(x, t) (2\pi h)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{iS(x, t)}{h}\right) + O(h^{\frac{n}{2}+1}),$$

где

$$S(x, t) = \int_0^t [P(\xi, d_0) \dot{X}(\xi, p_0) - L(X, P)] d\xi |_{p_0=p_0(x, t)};$$

$$\varphi(x, t) = \tilde{\Phi}(p_0(x, t)) / \sqrt{J(p_0(x, t), t)}; J = \frac{DX(p_0, t)}{Dp_0};$$

$p_0(x, t)$  — решение уравнения  $X(p_0, t) = x$ .

**Доказательство.** Достаточно заметить, что при  $t=0$  начальное условие (1.6) представляется в виде канонического оператора на плоскости  $x=0$ , примененного к функции  $\tilde{\Phi}$ :

$$u|_{t=0} = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle p, x \rangle / h) \tilde{\Phi}(p) dp = (2\pi h)^{\frac{n}{2}} K_{\Lambda_0^n}(\tilde{\Phi}).$$

После этого доказательство следует из результатов соответствующих глав части II.

**З а м е ч а н и е.** 1) Условие п. 2) теоремы заведомо не выполняется, если  $L_p$  не зависит от  $p$ , т. е. для уравнений без дисперсии. Именно этот факт и приводит к асимптотике, рассмотренной в предыдущем пункте. 2) В физической литературе решения, приведенные в п. 2) теоремы, часто называют прогрессивными волнами.

## § 2. Нелинейные задачи

Этот параграф посвящен изложению нелинейных аналогов результатов § 1. Именно, рассматриваются самоподобные решения нелинейных уравнений, изучается вопрос о выходе на них решения задачи Коши. Оказывается, что асимптотика по-прежнему имеет вид (1.4), но, в отличие от линейного случая, для полного описания главного члена  $f^0$  требуется исследование уравнений для двух младших членов разложения.

В нелинейных уравнениях тип «самоподобного» асимптотического решения определяется типом начальной функции, т. е. главный член асимптотики быстро осциллирует или быстро убывает вместе с функцией  $\Phi$ .

Рассмотрим в качестве примера нелинейное волновое уравнение:

$$h^2 u_{tt} - h^2 c^2(x, t) \Delta u + \Phi_u(u, x, t) = 0; \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Здесь  $c > 0$ ,  $\Phi(u, x, t)$  — гладкие функции. Предположим, что функция  $\Phi$  обладает следующим свойством: существуют гладкие функции  $E_1(x, t)$ ,  $E_2(x, t)$  такие, что при любых фиксированных  $x, t$  на интервале  $E_1 < E < E_2$  уравнение  $\Phi(z, x, t) = E$  имеет по крайней мере два решения  $z^\pm(x, t, E)$ ,  $z^- < z^+$ , гладко зависящих от  $x, t, E$  и таких, что  $\Phi_z(z^\pm, x, t) \neq 0$  и  $\Phi(z, x, t) < E$  при  $z^- < z < z^+$ . Такое условие гарантирует существование «самоподобных» асимптотических вещественных решений уравнения (2.1). Как и в предыдущих пунктах, самоподобное решение (согласно методу Уизема) ищем в виде (1.4). Будем считать, что  $f^k$  периодичны по  $\tau$  с периодами, не зависящими от  $x, t$ , и период  $f^0$  равен  $2\pi$ . Подставляя (1.4) в (2.1) и приравнявая к нулю коэффициенты при всех степенях  $h$ , получим соотношения

$$(S_t^2 - c^2(x, t) S_x^2) \frac{\partial^2 f^0}{\partial \tau^2} + \Phi_u(f^0, x, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\hat{L} f^k = F^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

где  $\hat{L} = (S_t^2 - c^2 S_x^2) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \Phi_{uu}(f^0, x, t)$ ;  $F^k$  — полиномы от  $S_t, S_x, c^2, \Phi_u, f^0, \dots, f^{k-1}$  и их производных. Главный член асимптотики — функция  $f^0$  — определяется из уравнения (2.2) и условий разрешимости уравнений (2.3) при  $k=1, 2$ ; уравнение (2.1) — обыкновенное по переменной  $\tau$ . Его интегрирование и условие ограниченности  $f^0(\tau)$  вместе с производными приводит к утверждению о том, что  $f^0$  —  $2\pi$ -периодическая функция, имеющая вид  $f^0(\tau, x, t) = f(\tau + c_0(x, t), E(x, t), x, t)$ , где  $f$  определяется из уравнения

$$\tau = \sqrt{S_t^2 - c^2 S_x^2} \int_{z^+(E, x, t)}^f \frac{dz}{\sqrt{2(E - \Phi(z, x, t))}}, \quad (2.4)$$

$E(x, t), c_0(x, t)$  — «константы интегрирования». При этом  $E(x, t)$  и  $S(x, t)$  связаны соотношением

$$(S_t^2 - c^2(x, t) S_x^2) = (I_E(E, x, t))^{-2}, \quad (2.5)$$

$$I(E, x, t) = \pi^{-1} \int_{z^-}^{z^+} \sqrt{2(E - \Phi(z, x, t))} dz.$$

Недостающие соотношения для определения  $S, E$  и  $c_0$  находятся из условий ортогональности в пространстве  $L_2(S^4)$  правых частей в (2.3) при  $k=1, 2$  ядру оператора  $\hat{L}$  (это ядро состоит из одной функции  $\frac{\partial f^0}{\partial \tau}$ ). Эти соотношения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho(x, t, E) \frac{\partial S}{\partial t}) - c^2(x, t) \langle \nabla, \rho(x, t, E) \nabla S \rangle = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (S_t I_E^{-1} \Gamma_{EE}^{-1} \rho_E (\hat{\Pi}_0 c_0) - c_0 \rho) - c^2(x, t) \langle \nabla, \dots \rangle, \quad (2.7)$$

$$(I_E^{-1} \Gamma_{EE}^{-1} \rho_E (\hat{\Pi}_0 c_0) \nabla S - \rho \nabla c_0) = 0,$$

где

$$\rho(x, t, E) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial f(\tau, E, x, t)}{\partial \tau} \right)^2 d\tau = I(E, x, t) / \sqrt{S_t^2 - c^2 S_x^2};$$

$$\hat{\Pi}_0 = \frac{S_t \partial}{\partial t} - c^2(x, t) \langle \nabla S, \nabla \rangle.$$

Аналогично предыдущим пунктам, приходим к следующему утверждению:

**Теорема 2.1.** Пусть функции  $f(\tau, c_0, E, x, t), S(x, t), E(x, t), c_0(x, t)$  удовлетворяют уравнениям (2.4)–(2.7). Тогда функция  $u_0 = f^0\left(\frac{S}{h}, x, \right)$  является главным членом некоторого формального асимптотического решения уравнения (2.1).

Вывод уравнений (2.4)–(2.7) можно найти, например, в [3]. Уравнения (2.4)–(2.6) получаются элементарно. Уравнение (2.7) следует из условия разрешимости (2.3) при  $k=2$ , которое содержит функцию  $f^1$ , и ее исключение требует известных усилий. К сожалению, в [3\*] уравнение (2.7) написано неверно — при преобразовании условия ортогональности к виду (2.7) пропущены слагаемые  $c_0 \rho$  и  $\rho \nabla c_0$  (на эту ошибку указано в статье [13\*]). Учет этих слагаемых оказывается вполне элементарным и не требует привлечения новых в сравнении с [3\*] идейных соображений.

**З а м е ч а н и е.** Уравнение (2.7) — второго порядка. Поэтому для выделения единственного решения необходимо поставить два на-

чальных условия. Это означает «асимптотическую неустойчивость» главного члена. Именно, запишем уравнение (2.1) в виде системы  $hu_t = v$ ;  $hv_t = h^2 c^2(x, t) \Delta u - \Phi_u(u, x, t)$ . Изменение производной  $c_{0i}|_{t=0}$  индуцируется изменением  $v|_{t=0}$  на функцию порядка  $O(h)$ . Таким образом, изменение начального условия на малую ( $\sim h$ ) величину изменяет асимптотику на величину  $O(1)$ .

Нелинейные уравнения могут иметь только периодические самоподобные решения, но и решения, имеющие вид «пиков» ширины  $\sim h$  или сглаженных ударных волн с шириной сглаживания  $\sim h$ . Например, уравнение (2.1) в частном случае  $\Phi = a^2(x, t) \cos u$ ,  $n=1$ ,  $c=1$  (уравнение sine — Гордон) обладает решениями типа ударной волны (при  $a=1$  это хорошо известные кинки — точные решения уравнения sine — Гордон). Именно, имеет место следующее утверждение:

**Теорема 2.2.** Пусть  $n=1$ ,  $c=1$ ,  $\Phi = a^2 \cos u$ ,  $u = \varphi(t)$ ,  $p(t)$ ,  $q(t)$  — гладкие функции, удовлетворяющие при  $t \in [0, T]$  уравнениям

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}; \quad H = \sqrt{a^2(\varphi, t) + p^2};$$

$$\mu_1 \ddot{q} + \mu_2 \dot{q} + \mu_3 q = 0; \quad \mu_1 = (1 - \varphi_t^2)^{-1};$$

$$\mu_2 = \frac{d\mu_1}{dt} - a(\varphi, t) \frac{\partial a}{\partial t}(\varphi, t); \quad \mu_3 = a^{-1}(a_{tt} - a_{xx}) + a^{-2}(a_t^2 - a_x^2)|_{x=\varphi(t)}.$$

Тогда для любого целого  $N > 0$  существует асимптотическое по  $\text{mod } O(h^N)$  решение уравнения (2.1), главный член которого имеет вид

$$u_0 = 2\pi + 4 \operatorname{arctg} \left( \exp \left( -\frac{\beta(x - \varphi(t))}{h} - q \right) \right),$$

где  $\beta = a(\varphi, t) / \sqrt{1 - \varphi_t^2}$ .

Метод построения таких решений изложен в работе [7\*]. Заметим, что при построении  $u_0$  возникает тот же вопрос о вычислении поправки к фазе  $q$ . Это вычисление проводится в [7\*] с помощью соображений, близких к изложенным в [3\*].

Пример самоподобных асимптотических решений, имеющих вид пиков, — так называемых солитонобразных решений — дает уравнение Кортевега — де Фриза с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma_1(x, t) u \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_2(x, t) h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (2.8)$$

Здесь  $h \rightarrow 0$  — малый параметр, коэффициенты  $\gamma_i \in C^\infty$  равномерно по  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, T]$  удовлетворяют условиям

$$0 < \gamma_i^0 \leq \gamma_i \leq \gamma_i^1, \quad \partial \gamma_2 / \partial x \geq 0, \quad (2.9)$$

$\gamma_i^j$  — некоторые константы.

В частном случае  $n$ -солитонной начальной функции асимптотические решения уравнений с малой дисперсией построены в работах [7\*–10\*]. Вне окрестности точек столкновения солитонов главный член  $f^0$  такой асимптотики (2.8) имеет простой вид

$$f^0 = \sum_{j=1}^n v_j \left( \frac{x - \varphi_j(t, h)}{h}, t \right), \quad (2.10)$$

$$v_j(\tau, t) = A_j(t) \operatorname{ch}^{-2}(\beta_j(t, h) \xi + \theta_j(t, h)),$$

т. е. является суммой искаженных солитонов, переменные амплитуды и скорости которых удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = \frac{1}{3} \gamma_1(\varphi_j, t) A_j, \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ A_j \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \Big|_{x=\varphi_j} \right\} + \frac{2}{3} A_j^2 \gamma_1^{4/3} \gamma_2^{2/3} \frac{\partial}{\partial x} (\gamma_1^{1/3} \gamma_2^{-2/3}) \Big|_{x=\varphi_j} = 0.$$

Коэффициенты  $\beta_j$  вычисляются по формуле  $\beta_j = (A_j \gamma_1 / (12 \gamma_2))^{1/2} \Big|_{x=\varphi_j}$ , функции  $\theta_j$  определяются из линейного уравнения второго порядка, явный вид которого приведен в [7\*].

Ясно, что солитонобразные функции составляют узкий класс решений уравнения (2.8). Тем не менее самоподобная асимптотика (2.10) является в некотором смысле универсальной. Именно, рассмотрим для (2.8) задачу Коши

$$u|_{t=0} = \Phi((x - x_0)/n). \quad (2.8')$$

Оказывается, что для любых гладких достаточно быстро убывающих  $\Phi(\xi)$  главный член асимптотики (2.8), (2.8') за малое время превращается в решение вида (2.10).

Сформулируем основное утверждение. Для упрощения формул будем считать в дальнейшем, что  $\gamma_1(0, 0) = 6$ ,  $\gamma_2(0, 0) = 1$ ,  $\Phi \in C_0^\infty$ ,  $\Phi(0) > 0$ ,  $x_0 = 0$ . Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля на  $\mathbb{R}$

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \Phi(\xi) \psi = \lambda^2 \psi.$$

Пусть  $\lambda_j^2$ ,  $j=1, \dots, n$  — ее дискретный спектр,  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ .

**Теорема 2.3.** Асимптотическое решение задачи (2.8) имеет вид

$$u = f^0 + \omega,$$

где  $f^0$  при  $t \geq \delta_1 > 0$  определяется формулой (2.10), амплитуды  $A_j$  и координаты центров солитонов  $\varphi_j$  представляются в виде

$$A_j(t, h) = A_j(t, 0) + h \ln \left( \frac{1}{h} \right) A_j^1(t),$$

$$\varphi_j(t, h) = \varphi_j(t, 0) + h \ln \left( \frac{1}{h} \right) \varphi_j^1(t). \quad (2.12)$$

Здесь  $A_j(t, 0)$ ,  $\varphi_j(t, 0)$  находятся из системы (2.11) с начальными условиями

$$A_j(0, 0) = 2\lambda_j^2, \varphi_j(0, 0) = 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.13)$$

поправки  $A_j^1, \varphi_j^1$  вычисляются из соответствующих (2.11) уравнений в вариации с начальными условиями (2.31). В области  $t \geq 0$ ,  $x \geq \delta_2 > 0$  разность между точным решением и  $f^0$  имеет равномерные по  $t \in [0, T]$  оценки

$$\int_{\delta_2}^{\infty} \{\omega^2 + (h \partial \omega / \partial x)^2\} dx \leq c_1 h^{3/2+2\mu}, \quad (2.14)$$

$$\max_{x \geq \delta_2, t \in [0, T]} |\omega| \leq c_2 h^{1/2+\mu/2},$$

где  $c_i > 0$  — не зависящие от  $h$  постоянные,  $\delta_i > 0$  — любые константы,  $\mu \in (0, 1/4)$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Минимальные значения  $\delta_i$  уточняются при доказательстве теоремы:  $\delta_1 \geq \kappa_1 h \ln(1/h)$ ,  $\delta_2 \geq \kappa_2 h^{2/3-v} t^{1/3+v}$ ,  $v \in (0, 2/3)$ ,  $\kappa_i$  — некоторые числа. В области  $t \geq \kappa_1 h \ln(1/h)$ ,  $x \leq \kappa_2 h^{2/3-v} t^{1/3+v}$  решение задачи имеет максимальную амплитуду  $O(\{t^{-1}h \times \ln(t/h)\}^{2/3})$  и при конечных временах не дает вклада в главный член асимптотики.

**З а м е ч а н и е 2.** Заменой  $\xi = x/h$ ,  $\eta = t/h$  задача (2.8) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma_1(h\xi, h\eta) u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \gamma_2(h\xi, h\eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0, u|_{\eta=0} = \Phi(\xi). \quad (2.15)$$

При этом асимптотика (2.12) переходит в асимптотику (2.15) при  $\eta \sim 1/h \rightarrow \infty$ . В случае постоянных коэффициентов  $\gamma_i$  утверждение теоремы совпадает с известными результатами [12\*, 13\*] (см. также [1\*]).

Приведем схему доказательства теоремы, выделив основные утверждения, на которых оно основано.

Рассмотрим вначале задачу (2.8) на малых временах, т. е. при  $t \sim h \ln(1/h)$ . Сделаем указанную в замечании 2 замену и рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{\partial Y}{\partial \eta} + 6Y \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} = 0, Y|_{\eta=0} = \Phi(\xi). \quad (2.16)$$

Известно, что решение (2.16) может быть найдено методом обратной задачи рассеяния. При  $\tau \rightarrow \infty$  асимптотика функции  $Y$  в области  $\xi \geq (3\eta)^{1/3+v}$  дается формулой [1\*, 12\*, 13\*]

$$Y = \sum_{i=1}^n Y_i(\xi - 4\lambda_i^2 \eta) + \tilde{Y}(\xi, \eta), \quad (2.17)$$

$$Y_i(z) = 2\lambda_i^2 ch^{-2}(\lambda_i z + \theta_i^0), \quad \tilde{Y} = - (3\eta)^{-2/3} A_i' \left( \frac{\xi + \xi_0}{(3\eta)^{1/3}} \right) (\rho(0) + O(\eta^{-1/3})),$$

где  $v > 0$  — некоторая константа,  $\rho(k)$  — коэффициент отражения,  $\xi_0, \theta_i^0$  — константы, определяемые по данным рассеяния,  $A_i'(z)$  — производная функции Эйри. В области  $\xi \leq (3\eta)^{1/3+v}$  максимальная амплитуда  $Y$  при  $\eta \rightarrow \infty$  имеет величину  $O((\tau^{-1} \ln \eta)^{2/3})$ .

Из законов сохранения следуют равномерные по  $\eta \geq 0$  оценки для решения задачи (2.16)

$$\left\| \frac{\partial^{i+1} Y}{\partial \xi^i \partial \eta^i} \right\| \leq c. \quad (2.18)$$

Здесь и ниже  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_p}$ , через  $\|\cdot\|_{L_p}$  обозначена норма в  $L_p(\mathbb{R})$ ,  $l, j \geq 0$ , через  $c > 0$  мы обозначаем константы, точное значение которых не существенно.

Нетрудно также доказать, что равномерно по  $\tau \in [0, T]$  справедливо неравенство

$$\left\| \xi \frac{\partial^i Y}{\partial \xi^i} \right\| \leq cT. \quad (2.19)$$

Оценим величину погрешности, к которой привела заморозка коэффициентов в уравнении (2.15). Обозначим  $\omega = u - Y$ , тогда из (2.15), (2.16) получаем задачу для невязки  $\omega$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \gamma_1(h\xi, h\eta) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( Y\omega + \frac{1}{2} \omega^2 \right) + \gamma_2(h\xi, h\eta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} = F, \omega|_{\eta=0} = 0, \quad (2.20)$$

где

$$F = (6 - \gamma_1(h\xi, h\eta)) Y \frac{\partial Y}{\partial \xi} + (1 - \gamma_2(h\xi, h\eta)) \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2}.$$

Существование решения задачи вида (2.8), (2.20) хорошо известно (см., например, [8\*, 5\*, 4\*]), поэтому мы ограничимся выводом априорных оценок. При  $\eta \leq \kappa_1 \ln(1/h)$  эти оценки мы получим в два этапа.

**Л е м м а 1.** Существует константа  $\kappa_0 > 0$  такая, что равномерно по  $\eta \in [0, \eta_0 = \kappa_0 \ln(1/h)]$  справедливо неравенство

$$\|\omega\| + \|\partial \omega / \partial \xi\| \leq ch^{1/2+\mu} \quad (2.21)$$

с не зависящей от  $h$  постоянной  $c, \mu \in (0, 1/4)$ .

Для доказательства (2.21) умножим (2.20) на  $\omega$  и проинтегрируем по  $\xi$ . После несложных преобразований получаем

$$\frac{d}{d\eta} \|\omega\|^2 + 3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right)^2 dy =$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \omega^2 \left( \gamma_1 \frac{\partial Y}{\partial \xi} + h\alpha_1 \right) + h\alpha_2 \omega^3 - 2F\omega \right\} dy. \quad (2.22)$$

Аналогично, умножив (2.20) на функцию  $\Psi = \gamma_1 \left( Y\omega + \frac{1}{2} \omega^2 \right) + \frac{\gamma_2 \partial^2 \omega}{\partial \xi^2}$ , получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\eta} \left\{ \left\| \sqrt{\gamma_2} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right\|^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \left( \gamma_1 Y \omega^2 + \frac{1}{3} \gamma_1 \omega^3 \right) dy \right\} + 4 \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial \xi} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} \right)^2 dy = \\ & = - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \omega^2 \left( \gamma_1 \frac{\partial Y}{\partial \eta} + h \alpha_2 \right) + h \left( \alpha_3 \omega^3 + \alpha_4 \omega^4 + \alpha_5 \left( \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right)^2 + \alpha_6 \omega \left( \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right)^2 \right) + \right. \\ & \quad \left. + 2F \left( \Psi + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right) \right\} dy. \quad (2.23) \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$  — гладкие, ограниченные в  $C$  функции.

Разлагая  $\gamma_i$  по формуле Тейлора, в силу (2.18), (2.19) имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} F \left( \omega + \Psi + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right) d\xi \right| \leq \\ & \leq ch^{2-\varepsilon} \tau_0^2 + ch^{\varepsilon} \left( U + \|\omega\|_{L^4}^4 + \left\| \sqrt{\gamma_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} \right\|^2 \right), \quad (2.24) \end{aligned}$$

где  $U = c_1 \|\omega\|^2 + \left\| \sqrt{\gamma_2} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right\|^2$ , постоянная  $c_1 \geq \|\gamma_1 Y\|_{L_{\infty}}$ .

С помощью мультипликативных оценок (см., например, [2\*]) заключаем, что

$$\|\omega\|_{L^4}^4 + \left\| \omega \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right\|^2 \leq cU^2. \quad (2.25)$$

Умножим (2.22) на  $2c_1$ , сложим с (2.23) и воспользуемся (2.24), (2.25). Обычным образом приходим к неравенству

$$U(\tau) \leq c(h^{2-\varepsilon} \tau_0^3 + \max_{0 \leq \tau' \leq \tau_0} U^2(\tau')) \exp(c_2 \tau), \quad (2.26)$$

где постоянная  $c_2 \geq 4 \left\| \gamma_1 \left( 2 \frac{\partial Y}{\partial \xi} + c_1^{-1} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right) \right\|_{L_{\infty}}$ .

Выберем число  $\kappa_0$  следующим:  $\kappa_0 = (1/14 - \mu)/c_2$ ,  $\mu \in (0, 1/14)$ . Тогда из (2.26) следует [8\*, 6\*] оценка  $U(\tau) \leq ch^{1+2\mu}$ , завершающая доказательство.

**Лемма 2.** *Неравенство (2.21) выполнено равномерно по  $\tau \in [\eta_0, \eta_1 = \kappa_1 \ln(1/h)]$ , где  $\kappa_1 \geq \kappa_0$  — произвольная константа.*

Ограничение  $\eta \leq \eta_0$  при доказательстве леммы 1 возникло из-за наличия в правых частях (2.22), (2.23) членов  $\omega^2 \gamma_1 \frac{\partial Y}{\partial \xi}$ ,  $\omega^2 \gamma_1 \frac{\partial Y}{\partial \eta}$  величины  $O(1)$ .

Заметим, что  $\tau_0 = \kappa_0 \ln \frac{1}{h} \rightarrow \infty$  при  $h \rightarrow 0$ . Поэтому при  $\eta \geq h\eta_0$  для функции  $Y$  справедливо асимптотическое разложение (2.17). Легко видеть, что производные  $\partial Y / \partial \xi$  и  $\partial Y / \partial \eta$  для каждого из солитонов в главном члене асимптотики отличаются множителем  $-4\lambda_j^2$ . Вместе с тем центры солитонов отстоят друг от друга на расстояние, большее  $4(\lambda_{j+1}^2 - \lambda_j^2) \kappa_0 \ln \left( \frac{1}{h} \right)$ , и вне малых окрестностей точек  $\xi = 4\lambda_j^2 \eta$  функция  $Y$  имеет величину  $O(h^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ . Используя это замечание, введем подходящее разбиение единицы и получим локальные энергетические равенства, аналогичные (2.22), (2.23). Комбинируя эти равенства, приходим к оценке

$$U_1(\eta) \leq ch^{1+2\mu} + cU_1^2 + \frac{c}{\tau_0} \int_{\eta_0}^{\eta} \{U_1(\eta') + U_1^2(\eta')\} d\eta',$$

где  $U_1 = 2\lambda_1^2 \|\omega\|^2 + \left\| \sqrt{\gamma_2} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right\|^2$ . Отсюда следует утверждение леммы 2 при  $\tau \leq \kappa_1 \ln \left( \frac{1}{h} \right)$  — произвольная, не зависящая от  $h$  константа.

Проведение аналогичной процедуры при  $\tau > O \left( \ln \frac{1}{h} \right)$  невозможно, поскольку заморозка коэффициентов на таких временах приводит к большой ошибке. Вернемся к исходным переменным  $x = h\xi$ ,  $t = h\eta$  и рассмотрим при  $t_i > \kappa_1 h \ln \left( \frac{1}{h} \right)$  уравнение (2.8) с начальным условием

$$u|_{t=t_0=\kappa_1 h \ln \left( \frac{1}{h} \right)} = \sum_{j=1}^n Y_j \left( \frac{x - 4\lambda_j^2 t_0}{h} \right) + \bar{Y}(x, t_0, h) + \omega(x, t_0). \quad (2.27)$$

При этом мы выбираем число  $\kappa_1$  столь большим, чтобы поправка  $\bar{Y}$  при  $x \geq \kappa_2 h^{2/3 - \nu} t_0^{1/3 + \nu}$  имела величину  $O(h^2)$ ,  $\kappa_2 > 0$ ,  $\nu \in (0, 2/3)$  — произвольные числа.

Как уже отмечалось выше, солитонобразная асимптотика для уравнения (2.8) построена в [7\*] и главный член ее вне точек столкновения солитонов имеет вид (2.10). Таким образом, асимптотическое решение задачи (2.8), (2.27) на положительной полуоси имеет вид

$$f = f^0 + hf^1, \quad u = f + \omega,$$

где  $f^1$  — ограниченная в  $C$  функция, равномерно по  $t \leq T$  удовлетворяющая оценкам

$$\left\| \left( h \frac{\partial}{\partial t} \right)^j \left( h \frac{\partial}{\partial x} \right)^j f^1 \right\| \leq \text{const}. \quad (2.28)$$

Для невязки  $\omega$ , как и ранее, имеем задачу

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \gamma_1(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \left( f\omega + \frac{1}{2} \omega^2 \right) + \gamma_2(x, t) h^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = h^2 F(x, t, h),$$

$$\omega|_{t=t_0} = \omega_0(x, h), \quad (2.29)$$

где правая часть  $F$  имеет оценку, аналогичную (2.28), функция  $\omega_0 = \omega(x, t_0)$  в силу лемм 1, 2 и сделанной замены переменных оценивается следующим образом:

$$\|\omega_0\| + \left\| h \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \right\| \leq ch^{1+\mu}.$$

Рассмотрение задачи (2.29) проводится по такой же схеме, что и доказательство леммы 2. После проведения весьма громоздких построений приходим к следующему утверждению:

**Л е м м а 3.** Для решения задачи (2.29) равномерно по  $t \in [t_0, T]$  выполнены оценки (2.14).

Нам осталось найти амплитуды и фазы солитонов (2.10). Из явного вида входящих в (2.10), (2.27) функций следует, что при построении асимптотики задачи (2.8), (2.27) мы получаем начальные условия

$$A_j|_{t=t_0} = 2\lambda_j^2, \quad \varphi_j|_{t=t_0} = 4\lambda_j^2 t_0. \quad (2.30)$$

Тем самым  $A_j = A_j(t, t_0)$ ,  $\varphi_j = \varphi_j(t, t_0)$ ,  $t_0 = \kappa_1 h \ln \left( \frac{1}{h} \right) \rightarrow 0$ .

Используя непрерывную зависимость решения (2.11), (2.30) от параметра, представим  $A_j$ ,  $\varphi_j$  в виде разложения по  $t_0/\kappa_1$ . Тогда для главного члена  $A_j(t, 0)$ ,  $\varphi_j(t, 0)$  получаем задачу (2.11), (2.13) для первой поправки  $A_j^1, \varphi_j^1$  — соответствующие (2.11) уравнения в вариации с начальными условиями

$$A_j^1|_{t=0} = -\frac{4}{9} \lambda^4 \gamma_{1x}(0, 0) (3 + 4\sqrt[3]{36}) + \frac{8}{5} \lambda^4 \gamma_{2x}(0, 0) (5 + 2\sqrt[3]{36}) +$$

$$+ \frac{1}{3} \lambda^2 (6\gamma_{2t}(0, 0) - \gamma_{1t}(0, 0)), \quad \varphi_j^1|_{t=0} = 0. \quad (2.31)$$

Следующие члены разложения  $A_j, \varphi_j$  имеют величину  $O\left(\left(h \ln \left(\frac{1}{h}\right)\right)^2\right)$

и не влияют на главный член асимптотики.

Весьма важным, но и достаточно сложным представляется нам вопрос о формировании самоподобного решения и у уравнений с малой вероятностью (диссипацией). Ряд примеров убеждает в справедливости гипотезы, которая, как мы считаем, распространяется на все модели сплошных сред с малой диссипацией. Продемонстрируем ее на примере системы уравнений движения баротропного газа с малой вязкостью:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = h \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0. \quad (2.32)$$

Здесь  $v$  — скорость движения газа,  $\rho$  — плотность,  $P = P(\rho)$  — давление,  $\frac{\partial P}{\partial \rho} > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $h \ll 1$ .

Обозначим через  $u$  вектор-функцию  $(\rho, v)$ . Пусть в начальный момент решение имеет вид ударной волны, фронт которой имеет произвольную финитную структуру:

$$u|_{t=0} = u_0 \left( \frac{x}{h}, x, h \right),$$

где  $u_0(\tau, x, h) \in C^\infty$  и

$$u_0(\tau, x, h) = \begin{cases} u_+(x, h), & \tau \geq 1, \\ u_-(x, h), & \tau \leq -1 \end{cases}$$

$u_+, u_- \in C^\infty$ . Пусть, кроме того,  $\lim_{h \rightarrow 0} u_0$  удовлетворяет условию Гюгонио

$$[\rho v]^2 = [\rho][P(\rho)],$$

где квадратные скобки обозначают скачок соответствующей функции на фронте ударной волны.

Суть гипотезы состоит в том, что при  $f \geq \delta > 0$  существует окрестность фронта порядка  $O(1)$ , в которой формируется самоподобная ударная волна

$$u = u \left( \frac{S(x, t)}{h}, x, t, h \right).$$

Асимптотическое разложение этого решения по степеням малого параметра определяется методом, изложенным в работе В. П. Маслова, В. А. Цупина (ВИНИТИ.—1978.—Т. 8.—Совр. проблемы математики). В той части этой области, где  $|s| \geq r$ , для любого сколь угодно малого  $r > 0$  решение можно представить в виде

$$u = u_\pm + w_\pm, \quad (2.33)$$

где

$$w_\pm = \psi_\pm(x, t, n) \exp\{-h^{-1} S_\pm(x, t)\} (1 + O(n^\infty)),$$

$u_\pm$  определяется из системы уравнений (2.32) перед и за фронтом ударной волны  $x > \varphi(t, h)$  и  $x < \varphi(t, h)$  соответственно и из условий Гюгонио на фронте  $x = \varphi$

$$[\rho v]^2 = [\rho][P(\rho)], \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{[\rho v]}{[\rho]}.$$

Функция  $w_\pm = (R_\pm, \omega_\pm)$  в соответствующих областях удовлетворяет линеаризованной системе уравнений, в которой для упрощения



записи мы опустили знак (+) и (—) при  $\omega$  и  $R$ :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{\rho} R'(\rho) \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} R = h \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Rv + \rho \omega) = 0.$$

На поверхности фронта  $x = \varphi$  амплитуда  $\psi$  и фаза  $s$  удовлетворяют условиям

$$\psi_{\pm}|_{x=\varphi} = \pm [u], \quad s_{\pm}|_{x=\varphi} = 0.$$

Далее, вне некоторой, более широкой чем для (2.33), окрестности фронта решение имеет вид

$$u = u_{\pm} + [u] \exp \{-h^{-1}(\Phi_{\pm}(x, t) + O(h \ln h))\}.$$

Здесь  $\Phi_{\pm}$  является решением уравнения Гамильтона — Якоби

$$\Phi_t + v \Phi_x + \frac{1}{2} (\Phi_x^2 - \sqrt{\Phi_x^4 + 4\rho' \Phi_x^2}) = 0 \quad (2.34)$$

и удовлетворяет начальному условию

$$\Phi|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \infty, & x \neq 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Решение задачи (2.34), (2.35) строится с помощью преобразования Лежандра, при этом  $\tilde{\Phi}$  удовлетворяет условию

$$\tilde{\Phi}|_{t=0} = 0.$$

## СПИСОК ОСНОВНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адрианова Л. Я. О непрерывности систем  $n$ -линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Вестник ЛГУ. Сер. мат. и мех.— 1962.— Вып. 2.— С. 14—24.
2. Александров П. С. Комбинаторная топология.— М.— Л.: Гостехиздат, 1947.
3. Алексеев А. С., Гельчинский Б. Я. Лучевой метод вычисления интенсивности головных волн // Вопросы динамич. теории распростр. сейсмич. волн.— Изд-во ЛГУ, 1961.
4. Бабич В. М. Фундаментальное решение гиперболических уравнений с переменными коэффициентами // Мат. сб.— 1960.— Т. 52(94), № 2.
5. Боголюбов Н. Н., Широков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— 4-е изд.— М.: Наука, 1984.
6. Виленкин Н. Я. и др. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1964.
7. Гавурин М. К. Об оценках для собственных чисел и векторов возмущенного оператора // ДАН СССР.— 1954.— Т. 96.— С. 1093—1095.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— 4-е изд.— М.— Л.: Наука, 1988.
9. Гельфанд И. М., Шилор Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними.— М.: Физматгиз, 1959.
10. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов.— М.: Физматгиз, 1963.
11. Глезер В. Основы электронной оптики.— М.: Гостехиздат, 1957.
12. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений.— М.: ИЛ, 1961.
13. Данфорд Н., Шварц Дж. Г. Линейные операторы (общая теория).— М.: ИЛ, 1962.
14. Дубровский В. А., Скурдин Г. А. Асимптотические разложения в волновой механике // ЖВМ и МФ.— 1965.— Т. 4.— С. 848—870.
15. Эволинский Н. В., Скурдин Г. А. Об асимптотическом методе решения динамических задач теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. геофиз.— 1956.— № 2.— С. 134—143.
16. Зейферт Г., Трельфалль В. Вариационное исчисление в целом.— М.: ИЛ, 1947.
17. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры.— М.: Гостехиздат, 1956.
18. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— 5-е изд.— М.: Наука, 1976.
19. Курант Р. Уравнение с частными производными.— М.: Мир, 1964.
20. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.— М.: Физматгиз, 1963.
21. Левин М. Л., Рыжов С. М. О переходе к геометрическому приближению в теории упругости // Акуст. ж.— 1956.— Т. 2, № 2.— С. 173.
22. Маслов В. П. Квазиклассическая асимптотика решений некоторых задач математической физики. I, II // ЖВМ и МФ.— 1961.— Т. 1, вып. 1.— С. 113—128; 1961.— Т. 1, вып. 4.— С. 638—663.
23. Маслов В. П. Квазиклассическая асимптотика решения уравнения Дирака // УМН.— 1963.— Т. 18, вып. 4(112).— С. 220—222.
24. Маслов В. П. Задача рассеяния в квазиклассическом приближении // ДАН СССР.— 1968.— Т. 151, № 2.— С. 306—309.

записи мы опустили знак (+) и (—) при  $\omega$  и  $R$ :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{\rho} R'(\rho) \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial P(\rho)}{\partial x} R = h \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Rv + \rho \omega) = 0.$$

На поверхности фронта  $x = \varphi$  амплитуда  $\psi$  и фаза  $s$  удовлетворяют условиям

$$\psi_{\pm}|_{x=\varphi} = \pm [u], \quad s_{\pm}|_{x=\varphi} = 0.$$

Далее, вне некоторой, более широкой чем для (2.33), окрестности фронта решение имеет вид

$$u = u_{\pm} + [u] \exp \{-h^{-1}(\Phi_{\pm}(x, t) + O(h \ln h))\}.$$

Здесь  $\Phi_{\pm}$  является решением уравнения Гамильтона — Якоби

$$\Phi_t + v \Phi_x + \frac{1}{2} (\Phi_x^2 - \sqrt{\Phi_x^4 + 4\rho' \Phi_x^2}) = 0 \quad (2.34)$$

и удовлетворяет начальному условию

$$\Phi|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \infty, & x \neq 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Решение задачи (2.34), (2.35) строится с помощью преобразования Лежандра, при этом  $\tilde{\Phi}$  удовлетворяет условию

$$\tilde{\Phi}|_{t=0} = 0.$$

## СПИСОК ОСНОВНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адрианова Л. Я. О непрерывности систем  $n$ -линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Вестник ЛГУ. Сер. мат. и мех.— 1962.— Вып. 2.— С. 14—24.
2. Александров П. С. Комбинаторная топология.— М.— Л.: Гостехиздат, 1947.
3. Алексеев А. С., Гельчинский Б. Я. Лучевой метод вычисления интенсивности головных волн // Вопросы динамич. теории распростран. сейсмич. волн.— Изд-во ЛГУ, 1961.
4. Бабич В. М. Фундаментальное решение гиперболических уравнений с переменными коэффициентами // Мат. сб.— 1960.— Т. 52(94), № 2.
5. Боголюбов Н. Н., Широков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— 4-е изд.— М.: Наука, 1984.
6. Виленкин Н. Я. и др. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1964.
7. Гавурин М. К. Об оценках для собственных чисел и векторов возмущенного оператора // ДАН СССР.— 1954.— Т. 96.— С. 1093—1095.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— 4-е изд.— М.— Л.: Наука, 1988.
9. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними.— М.: Физматгиз, 1959.
10. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов.— М.: Физматгиз, 1963.
11. Глезер В. Основы электронной оптики.— М.: Гостехиздат, 1957.
12. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений.— М.: ИЛ, 1961.
13. Данфорд Н., Шварц Дж. Г. Линейные операторы (общая теория).— М.: ИЛ, 1962.
14. Дубровский В. А., Скурдин Г. А. Асимптотические разложения в волновой механике // ЖВМ и МФ.— 1965.— Т. 4.— С. 848—870.
15. Эволинский Н. В., Скурдин Г. А. Об асимптотическом методе решения динамических задач теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. геофиз.— 1956.— № 2.— С. 134—143.
16. Зейферт Г., Трельфалль В. Вариационное исчисление в целом.— М.: ИЛ, 1947.
17. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры.— М.: Гостехиздат, 1956.
18. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— 5-е изд.— М.: Наука, 1976.
19. Курант Р. Уравнение с частными производными.— М.: Мир, 1964.
20. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.— М.: Физматгиз, 1963.
21. Левин М. Л., Рыжов С. М. О переходе к геометрическому приближению в теории упругости // Акуст. ж.— 1956.— Т. 2, № 2.— С. 173.
22. Маслов В. П. Квазиклассическая асимптотика решений некоторых задач математической физики. I, II // ЖВМ и МФ.— 1961.— Т. 1, вып. 1.— С. 113—128; 1961.— Т. 1, вып. 4.— С. 638—663.
23. Маслов В. П. Квазиклассическая асимптотика решения уравнения Дирака // УМН.— 1963.— Т. 18, вып. 4(112).— С. 220—222.
24. Маслов В. П. Задача рассеяния в квазиклассическом приближении // ДАН СССР.— 1968.— Т. 151, № 2.— С. 306—309.

25. Маслов В. П. Асимптотика собственных значений для уравнения Шредингера в одномерном и радиально-симметрическом случае//УМН.— 1960.— Т. 15, вып. 4(94).— С. 220—221.
26. Маслов В. П. Метод теории возмущений для отыскания спектра обыкновенных дифференциальных операторов с малым параметром при старшей производной//ДАН СССР.— 1956.— Т. III, № 5.— С. 977—980.
27. Маслов В. П. Теория возмущений многомерного уравнения Шредингера//УМН.— 1961.— Т. 16, вып. 3(99).— С. 217—218.
28. Маслов В. П. Теория возмущений линейных операторных уравнений и проблема малого параметра в дифференциальных уравнениях//ДАН СССР.— 1956.— Т. III, № 3.— С. 531—534.
29. Маслов В. П. О переходе квантовой механики в классическую в многомерном случае//УМН.— 1960.— Т. 15, вып. 1(91).— С. 213—219.
30. Маслов В. П. Метод ВКБ в многомерном случае//Хеддинг Дж. Введение в метод фазового интеграла.— М.: Мир 1965.
31. Милнор Дж. Теория Морса.— М.: Мир, 1965.
32. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными.— М.: Физматгиз, 1961.
33. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы.— 3-е изд.— М.: Гостехиздат, 1973.
34. Пытьев Ю. П. О связи классической механики и волновой//ДАН СССР.— 1963.— Т. 149, № 2.— С. 298—301.
35. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу.— М.: ИЛ, 1954.
36. Руммер Ю. Б. Исследования по пятиоптике.— М.: Гостехиздат, 1956.
37. Рытов С. М. Модулированные колебания и волны//Тр. ФИАН СССР.— 1938.— Т. 2, № 1.— С. 1.
38. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
39. Соломяк М. З. О собственных числах и собственных векторах возмущенного оператора//ДАН СССР.— 1953.— Т. 90.— С. 29—32.
40. Солуян С. И., Хохлов Р. В. Распространение акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде//Вестн. МГУ.— 1961.— № 3.— С. 52—62.
41. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2.— М.: ИЛ, 1961.
42. Федорюк М. В. Метод стационарной фазы. Близкие седловые точки в многомерном случае//ЖВМ и МФ.— 1964.— Т. 4, № 4.— С. 671—683.
43. Федорюк М. В. Метод стационарной фазы для многомерных интегралов//ЖВМ и МФ.— 1962.— Т. 2, № 1.— С. 145—150.
44. Фейнман Р. Пространственно-временной подход к нерелятивистской квантовой механике//Вопросы причинности в квантовой механике.— М.: ИЛ, 1955.
45. Фок В. А. Работы по квантовой теории поля.— Изд-во ЛГУ, 1957.
46. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы.— М.: ИЛ, 1962.
47. Швeбep C. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля.— М.: ИЛ, 1963.
48. Шифф Л. Квантовая механика.— М.: ИЛ, 1957.
49. Эрдейи А. Асимптотические разложения.— М.: Физматгиз, 1962.
50. Birkhoff J. D. Quantum mechanics and asymptotic series//Amer. Math. Soc.— 1933.— V. 39.— P. 681—700.
51. Born M. Vorlesungen über Atommechanik.— Berlin, 1925.
52. Born M., Wolf P. Principles of Optics.— Pergamon Press, 1960.
53. Courant R., Lax P. The propagation of discontinuities in wave motion//Proc. Nat. Acad. Sci., USA.— 1956.— V. 42, N 11.— P. 872—876.
54. Galanin A. D. Untersuchung der Eigenschaften des Elektronen und Mesopins in der klassische Nahrung//J. of Phys.— 1942.— V. 6, N 1—2, P. 35.
55. Garding L., Katake T., Leray J. Uniformisation... (Probleme de Cauchy).—College de France, 1963.
56. Groenewold H. J. Quasi-classical path integrals//Math. fis. medd. Kgl danske vid selskab.— 1956.— V. 30, N 19.— P. 1—34.
57. Hadamar. Lectures on Cauchy's problem.— Gale—University Press, 1923.
58. Hopf E. The partial differential equation  $u_t + uu_x = u_{xx}$ //Communs. Pure and Appl. Math.— 1950.— V. 3, N 3.— P. 201—230.
59. Kato. Perturbation theory of semi-bounded operators//Math. Ann.— 1953.— V. 125.— P. 435—447.
60. Lax P. D. Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems//Duke Math. Journal.— 1957.— V. 24, N 4.— P. 627—646.
61. Leray J. Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients.— Inst. for Adv. Study, Princeton, 1952.
62. Ludwig D. Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem//Communs Pure and Appl. Math.— 1960.— V. 13, N 13.— P. 473—508.
63. Maslov V. P. Quasiclassical asymptotic solutions of Dirac's system of equations in the large//Outlines of the Joint Soviet-American Symposium on Partial Differential Equations. Acad. of Sciences of USSR.— M., 1963.
64. Morse M. The calculus of variations in the large//Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 18.— N. Y., 1934.
65. Morette C. On the definition and approximation of Feynman path integral//Phys. Rev.— 1951.— V. 81.— P. 848—852.
66. Pauli W. Dirac's Wellengleichung des Elektrons und geometrische Optik//Helv. Phys. Acta.— 1932.— V. 5, N 3.— P. 179.
67. Petrovsky I. G. Über das Cauchysche Problem für System von partiellen differential Gleichungen//Math. Ann.— 1949.— N 2.— P. 815—870.
68. Rellich F. Störungs Theorie der Spektralzerlegung//Math. Ann.— 1936.— V. 113.— P. 116—185; 1941.— V. 117.— P. 356—382; 1943.— V. 118.— P. 462—484.
69. Rubinov J., Keller Y. Asymptotic solution of Dirac's equation//Phys. Rev.— 1963.— V. 131, N 6.— P. 2789—2796.
70. Secifelvi-Nady B. Spectraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes//Ergebnisse des Math. J. Springer.— 1942.— V. 5.

## СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Идеи и конструкции, изложенные в этой книге, получили за последние двенадцать лет широкое развитие и обобщение. Мы перечислили здесь некоторые работы в этом направлении.

Прежде всего, теория индекса кривых на лагранжевых многообразиях интенсивно исследовалась и развивалась в геометрии [1, 13, 34, 50, 53, 64, 65, 68, 78, 79], в теории псевдодифференциальных уравнений [7, 52, 54, 57], в теории представлений [35, 56, 61, 67, 77], в квантовой теории [58, 60, 63, 66, 74, 75]. Конструкция канонического оператора рассматривалась и применялась в работах [4, 8, 10, 15, 18, 31, 33, 44, 49, 54, 59, 61, 70, 71, 73, 80, 82]. Дальнейшее развитие получила тематика, связанная с распространением особенностей решений псевдодифференциальных уравнений [36, 54, 59, 71], а также с вычислением асимптотик быстроосциллирующих интегралов [2, 3, 37, 51].

Обобщение этих конструкций шло в нескольких направлениях. Во-первых, был охвачен случай комплексных функций Гамильтона (расслоение лагранжевых комплексных положительных плоскостей) — в работах [38, 39] и затем в [5, 14, 35, 32, 40, 36, 48, 62, 69, 76]. Получен аналог конструкции канонического оператора на уравнение туннельного типа с экспоненциальной мультипликативной асимптотикой решения [42].

Кроме того, на основе техники [39] интенсивно развивалось обобщение теории канонического оператора в разностных схемах и операторных уравнениях [11, 12, 14, 16, 17, 20, 24, 25, 30, 43], в том числе — в уравнениях самосопряженного поля [41, 25].

В последние годы удалось перенести эту технику на искривленные фазовые пространства, в которых отсутствует глобальное разделение переменных «координаты — импульсы» [26, 27], а также на случай общих нелинейных скобок Ли — Пуассона [21, 22, 25]. Интересные обобщения и приложения возникли в теории псевдодифференциальных уравнений с алгебрами симметрий [22], для уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами [6, 9, 19] и с адиабатическими инвариантами [23, 24]. Критерий дискретности спектра, приведенный в ч. I книги, нашел применение в работе [55].

1. Арнольд В. И. О характеристическом классе, входящем в условия квантования//Функцион. анализ и его прил.— 1967.— Т. 1, № 1.— С. 1—14.
2. Арнольд В. И. Интегралы от быстро осциллирующих функций и сингулярности проекций лагранжевых многообразий//Функцион. анализ и его прил.— 1972.— Т. 6, № 3.— С. 61—62.
3. Арнольд В. И., Верченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. I, II.— М.: Наука, 1982, 1984.
4. Белов В. В. Точная функция Грина уравнений квантовой механики в электромагнитном поле//Изв. вузов. Физика.— 1975.— № 11.— С. 45—56.
5. Белов В. В., Доброхотов С. Ю. Канонический оператор Маслова на изотропных многообразиях с комплексным ростком и его приложения к спектральным задачам//ДАН СССР.— 1988.— Т. 289, № 5.— С. 1037—1042.
6. Берлянд Л. В., Доброхотов С. Ю. Операторное разделение переменных в задачах о коротковолновой асимптотике псевдодифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами//ДАН СССР.— 1987.— Т. 296, № 1.

7. Буслаев В. С. Производящий интеграл и канонический оператор Маслова в методике ВКБ//Функцион. анализ и его прил.— 1969.— Т. 3, № 3.— С. 17—31.
8. Буслаев В. С. Квантование и метод ВКБ//Тр. МИАН СССР.— 1970.— Т. 110.— С. 5—28.
9. Буслаев В. С. Квазиклассическое приближение для уравнений с периодическими коэффициентами//УМН.— 1987.— Т. 42, № 6.— С. 77—98.
10. Вайнберг В. Р. Асимптотические методы в задачах математической физики.— М.: МГУ, 1982.
11. Воробьев Ю. М., Доброхотов С. Ю. Квазиклассическое квантование периодической цепочки Тоды с точки зрения алгебр Ли//Теор. мат. физ.— 1983.— Т. 54, № 3.— С. 477—480.
12. Воробьев Ю. М., Доброхотов С. Ю. Квазиклассические асимптотики для дискретных моделей электрон-фононного взаимодействия: метод Маслова и адиабатического приближения//Теор. мат. физ.— 1983.— Т. 57, № 1.— С. 63—74.
13. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики.— М.: Мир, 1981.
14. Данилов В. Г. Оценки для канонических псевдодифференциальных операторов с комплексной фазой//ДАН СССР.— 1979.— Т. 246, № 4.— С. 800—804.
15. Данилов В. Г., Ле Ву Ань. Об интегральных операторах Фурье//Мат. сб.— 1979.— Т. 110, № 3.— С. 323—368.
16. Данилов В. Г., Маслов В. П. Квазиобратимость функций от упорядоченных операторов в теории псевдодифференциальных уравнений//Соврем. пробл. мат. Т. 6.— М.: ВИНТИ, 1975.— С. 5—132.
17. Данилов В. Г., Маслов В. П. Принцип двойственности Понтрягина для вычисления эффекта типа Черенкова в кристаллах и разностных схемах//Тр. МИАН СССР.— 1984.— Т. 166.— С. 130—160; 1985.— Т. 167.— С. 24—45.
18. Доброхотов С. Ю. Методы Маслова в линеаризованной теории гравитационных волн на поверхности жидкости//ДАН СССР.— 1983.— Т. 268, № 1.— С. 76—80.
19. Доброхотов С. Ю. Приложения теории Маслова к двум задачам с операторнозначным символом//УМН.— 1984.— Т. 39, № 4.— С. 125.
20. Доброхотов С. Ю., Жевандров П. Н. Нестандартные характеристики и операторный метод Маслова в линейных задачах о неустойчивых волнах на воде//Функцион. анализ и его прил.— 1985.— Т. 19, № 4.— С. 43—54.
21. Карасев М. В. Квантование нелинейных скобок Ли — Пуассона в квазиклассическом приближении.— Препринт/ИТФ АН УССР.— Киев, 1985.— ИТФ-85-72Р.— 36 с.
22. Карасев М. В. Пуассоновы алгебры и асимптотика спектральных серий//Функцион. анализ и его прил.— 1986.— Т. 20, № 1.— С. 21—32.
23. Карасев М. В. Лагранжевы кольца. Многомасштабная асимптотика спектра вблизи резонанса//Функцион. анализ и его прил.— 1987.— Т. 21, № 1.
24. Карасев М. В. Квантовая редукция на орбиты алгебр симметрий и задача Эренфеста.— Препринт/ИТФ АН УССР.— Киев, 1987.— ИТФ-87-177Р.— 36 с.
25. Карасев М. В., Маслов В. П. Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения//Совр. пробл. матем. Т. 13.— М.: ВИНТИ, 1979.— С. 145—267.
26. Карасев М. В., Маслов В. П. Псевдодифференциальные операторы и канонический оператор в общих симплектических многообразиях//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1983.— Т. 47, № 5.— С. 999—1029.
27. Карасев М. В., Маслов В. П. Асимптотическое и геометрическое квантование//УМН.— 1984.— Т. 39, № 6.— С. 115—173.
28. Кифер Ю. И. О малых случайных возмущениях гладких динамических систем//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1974.— Т. 38, № 5.— С. 1091—1115.
29. Крахнов А. Д. Асимптотика собственных значений псевдодифференциальных операторов и инвариантные торы//УМН.— 1976.— Т. 31, № 3.— С. 217—218.
30. Крейн С. Г. О сингулярно возмущенных линейных дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве//Дифференц. уравнения.— 1985.— Т. 21, № 10.— С. 1814—1817.

31. Кучеренко В. В. Квазиклассическая асимптотика функции точечного источника для стационарного уравнения Шредингера//Теор. мат. физ.—1969.—Т. 1, № 3.—С. 384—405.
32. Кучеренко В. В. Канонический оператор Маслова на ростке комплексного почти аналитического многообразия//ДАН СССР.—1973.—Т. 14.—С. 1879—1883.
33. Кучеренко В. В. Асимптотика решения системы  $A(x, -i\hbar\partial/\partial x)u=0$  при  $\hbar \rightarrow 0$  в случае характеристик переменной кратности//Изв. АН СССР. Сер. мат.—1974.—Т. 38.—С. 625—662.
34. Лере Ж. Лагранжевы анализ и квантовая механика.—М.: Мир, 1981.
35. Лион Ж., Вернь М. Представление Вейля, индекс Маслова и тэта-ряды.—М.: Мир, 1983.
36. Маслов В. П. Регуляризация задачи Коши для псевдодифференциальных уравнений//ДАН СССР.—1967.—Т. 177.—С. 1277—1280.
37. Маслов В. П. К методу стационарной фазы для континуальных интегралов Фейнмана//Теор. мат. физ.—1970.—Т. 2, № 1.—С. 30—40.
38. Маслов В. П. Канонический оператор на лагранжевом многообразии с комплексным ростком и регуляризатор для псевдодифференциальных операторов и разностных схем//ДАН СССР.—1970.—Т. 195.—С. 551—554.
39. Маслов В. П. Операторные методы.—М.: Наука, 1973.
40. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.—М.: Наука, 1977.
41. Маслов В. П. Уравнения самосопряженного поля//Совр. пробл. матем. Вып. II.—М.: ВИНТИ, 1978.—С. 153—234.
42. Маслов В. П. Глобальная экспоненциальная асимптотика решений уравнений туннельного типа//ДАН СССР.—1981.—Т. 261.—С. 1059—1062.
43. Маслов В. П. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1987.
44. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.—М.: Наука, 1976.
45. Молчанов С. А. Диффузионные процессы и риманова геометрия//УМН.—1975.—Т. 30, № 1.—С. 3—59.
46. Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора.—М.: Наука, 1978.
47. Новиков С. П. Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов К-теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонова формализма. Некоторые применения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов//Изв. АН СССР.—1970.—Т. 34, № 2.—С. 253—288; № 3.—С. 475—500.
48. Стернин Б. Ю. О топологическом смысле условий квантования в комплексной теории Маслова//Тр. семинара С. Л. Соболева. Вып. 1.—Новосибирск, 1976.—С. 141—156.
49. Трев Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 2.—М.: Мир, 1984.
50. Тураев В. Г. Коцикл для симплектического класса Черна и индексы Маслова//Функцион. анализ и его прил.—1984.—Т. 18, № 1.—С. 43—48.
51. Федорюк М. В. Метод стационарной фазы и псевдодифференциальные операторы//УМН.—1971.—Т. 26, № 1.—С. 67—112.
52. Федосов Б. В. Квантование и индекс//ДАН СССР.—1986.—Т. 291, № 1.—С. 82—86.
53. Фукс Д. Б. О характеристических классах Маслова — Арнольда//ДАН СССР.—1968.—Т. 178, № 2.—С. 303—306.
54. Хёрмандер Л. Интегральные операторы Фурье//Математика.—1972.—т. 16, № 1.—С. 17—61; № 2.—С. 79—136.
55. Brüning J. On Schrödinger Operators with Diskrete Spectrum.—Universität Augsburg, 1987.—Report Nr. 147.
56. Czyz J. On geometric quantization and its connections with the Maslov theory//Repts. Math. Phys.—1979.—V. 15, N 1.—P. 57—97.
57. Dazord P. La classe de Maslov—Arnold; L'opérateur canonique de Maslov//Séminaire de Géométrie.—Univ. Claude Bernard, Lyon, 1975/76.
58. DeLeon M., Heller E. J. Semiclassical quantization and extraction of eigenfunctions using arbitrary trajectories//J. Chem. Phys.—1983.—V. 78, part 2, N 6.—P. 4005—4017.
59. Duistermaat J. J. Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities//Comm. Pure Appl. Math.—1974.—V. 27.—P. 207—281.
60. Echmann G. P., Sénéor B. The Maslov-WKB method for (un-)harmonic oscillator//Arch. Rat. Mech. Anal.—1976.—V. 61, N 2.—P. 1—10.
61. Fujiwara H. Certain opérateurs d'entrelacement pour des groupes de Lie résolubles exponentiels et leurs applications//Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A.—1982.—V. 36, N 1.—P. 13—72.
62. Hess H. On geometric quantization scheme generalizing those of Kostant—Souriau and Czyz//Lect. Notes in Phys.—1981.—V. 139.—P. 1—35.
63. Leray J. Application de la theory de Maslov des développement asymptotique l'equation de Schrödinger//Colloque internationaux du C. N. R. S., N 237, Géométrie symplectique et physique mathématique.—Aix-en-Provence, 1974.
64. Leray J. Analyse Lagrangienne et mécanique quantique, une structure mathématique apparentée aux développements asymptotiques et l'indice de Maslov.—Strasbourg, 1978.
65. Lion G. Extensions de représentations de groupes de Lie nilpotents et indices de Maslov//C. R. Acad. Sci.—1979.—V. AB288, N 12.—P. A615—A618.
66. Littlejohn R., Robbins G. L. New way to computer Maslov indexes//Phys. Rev.—1987.—V. 36, N 6.—P. 2953—2961.
67. Magneron B. Opérateurs d'entrelacement des représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie nilpotents et indice de Maslov//C. R. Acad. Sci.—1980.—V. AB290, N 20.—P. A943—A946.
68. Magneron B. Une extension de la notion d'indices de Maslov//C. R. Acad. Sci.—1979.—v. AB289, N 14.—P. A683—A686.
69. Magneron B. Spineurs symplectique purs et indice de Maslov de plans Lagrangiens positifs//J. Funct. Anal.—1984.—V. 59, N 1.—P. 90—122.
70. Malgrange B. Opérateurs de Fourier (d'après Hörmander et Maslov)//Séminaire Bourbaki, N 411.—24-e année, 1971/72.
71. Melrose R., Uhlmann G. Lagrangian intersection and Cauchy problem//Comm. Pure. Appl. Math.—1979.—V. 32.—P. 483—519.
72. Mereno C. Invariant star-products and representations of compact semi-simple Lie groups//Lett. Math. Phys.—1986.—V. 12, N 3.—P. 217—229.
73. Omori H., Maeda Y., Yoshioka A. On regular Fréchet — Lie groups. II. Composition rules of Fourier integral operators on a Riemann manifold. III. A second cohomology class related to the Lie algebra of pseudo-differential operators of order one//Tokyo J. Math.—1981.—V. 4, N 2.—P. 221—277.
74. Percival I. C. Semiclassical theory of bound states//Adv. Chem. Phys.—1977.—V. 36.—P. 2—61.
75. Robnik M. The algebraic quantization of the Birkhoff — Gustavson normal forms//J. Phys. A: Math. and Gen.—1984.—V. 17, N 1.—P. 109—130.
76. Sjöstrand J., Melin A. Fourier integral operators with complexvalued phase functions//Lect. Notes Math.—1975.—V. 459.—P. 120—223.
77. Souriau J.-M. Structure des systèmes dynamiques.—Paris: Dunod, 1970.
78. Souriau J.-M. Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications//Lect. Notes Phys.—1976.—V. 50.—P. 117—148.
79. Souriau J.-M. Indice de Maslov des variétés Lagrangiennes orientables//C. R. Acad. Sci.—1973.—V. A276.—P. 1025—1026.
80. Voros A. The WKB—Maslov method for non-separable systems//Colloques internationaux du C. N. R. S., N 237, Géométrie symplectique et physique mathématique.—Aix-en-Provence, 1974.
81. Weinstein A. On Maslov's quantization condition//lect. Notes Math.—1975.—V. 459.—P. 341—372.
82. Yoshikawa B. On Maslov's canonical operator//Hokkaido Math. J.—1975.—V. 4, N 1.—P. 8—38.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ДОБАВЛЕНИЮ

- 1\*. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи.— М.: Мир, 1987.— 479 с.
- 2\*. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М.: Наука, 1975.— 480 с.
- 3\*. Доброхотов С. Ю., Маслов В. П. Конечноразностные, почти периодические решения в ВКБ-приближениях//Современные проблемы математики. Т. 15.— М.: ВИНТИ, 1980.— С. 3—94.
- 4\*. Кружков С. Н., Фаминский А. В. Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриза//Мат. сб.— 1983.— Т. 120, № 3.— С. 396—425.
- 5\*. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 586 с.
- 6\*. Маслов В. П., Мосолов П. П. Задача Коши для уравнений вязкой сжимаемой жидкости.— М.: МИЭМ, 1984.— 126 с.
- 7\*. Маслов В. П., Омелянов Г. А. Асимптотические солитонобразные решения уравнений с малой дисперсией//УМН.— 1981.— Т. 36, № 3.— С. 63—126.
- 8\*. Маслов В. П., Омелянов Г. А. Об условиях типа Гюгонио для бесконечно узких решений уравнения простых волн//Сиб. мат. журн.— 1983.— Т. 24, № 5.— С. 172—182.
- 9\*. Маслов В. П., Омелянов Г. А., Цупин В. А. Асимптотика некоторых дифференциальных, псевдодифференциальных уравнений и динамических систем при малой дисперсии//Мат. сб.— 1983.— Т. 122, № 2.— С. 197—219.
- 10\*. Маслов В. П., Цупин В. А.  $\delta$ -образные обобщенные по Соболеву решения квазилинейных уравнений//УМН.— 1979.— Т. 34, № 2.— С. 235—236.
- 11\*. Маслов В. П., Цупин В. А. Распространение ударной волны в изэнтропическом газе с малой вязкостью//Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 8.— М.: ВИНТИ, 1977.— 40 с.
- 12\*. Шабат А. Б. Об уравнении Кортевега — де Фриза//ДАН СССР.— 1973.— Т. 211, № 6.— С. 1310—1313.
- 13\*. Haberman. The Modulated Phase Shift for Weakly Dissipated Nonlinear Oscillatory waves of the Korteweg — de Vries Type//Stud. in Appl. Math.— 1988.— V. LXXVIII, № 1.
- 14\*. Buslaev V. S., Faddeev L. D., Takhtajan L. A. Scattering theory for the Korteweg — de Vries (KdV) equation and its Hamiltonian interpretation//Physica D. Nonlinear phenomena.— 1986.— V.18, № 1.— P. 255—266.

Научное издание

*МАСЛОВ Виктор Павлович*

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ**

Заведующий редакцией *Е. Ю. Ходан*

Редактор *А. Г. Давтян*

Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*

Технический редактор *Л. В. Лихачева*

Корректоры: *Г. В. Подвольская, Н. Б. Румянцева*

ИБ № 32554

Сдано в набор 08.04.88. Подписано к печати 31.08.88.

Формат 60×90<sup>1/16</sup>.

Бумага книжно-журнальная. Гарнитура литературная.

Усл. печ. л. 19,5. Усл. кр.-отт. 19,5. Уч.-изд. л. 21,63.

Тираж 8300 экз. Заказ. № 4542 Цена 2 р. 60 к.

Печать высокая.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы

117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Вторая типография издательства «Наука»

121099 Москва, Шубинский пер., 6.