

А. Н. МАТВЕЕВ

# ЭЛЕКТРО- ДИНАМИКА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,  
ПЕРЕРАБОТАННОЕ  
И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов физических специальностей университетов



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1980

ББК 22.313  
М33  
УДК 538.3

Рецензент  
проф. В. Г. Багров (Томский государственный  
университет)

**Матвеев А. Н.**

М33 Электродинамика: Учеб. пособие.—2-е изд.,  
перераб. и доп.—М.: Высш. школа, 1980.—  
383 с., ил.

В пер.: 85 к.

Изложение электродинамики в данном пособии базируется на релятивистской основе. Теория относительности рассматривается в качестве экспериментальной основы электродинамики наряду с законом Кулона, принципом суперпозиции, законами сохранения заряда и энергии, законом электромагнитной индукции, инвариантностью элементарного заряда и током смещения. Вопросы феноменологической и микроскопической электродинамики излагаются как взаимодополняющие элементы единой теории.

Предназначается для студентов университетов.

М  $\frac{20402-064}{001(01)-80}$

35—79

1704020000

537  
ББК 22.313

© Издательство «Высшая школа», 1980

Предисловие ко второму изданию . . . . .	9
Введение . . . . .	10
<i>Глава I. Уравнения Максвелла в вакууме как обобщение опытных фактов . . . . .</i>	<i>12</i>
§ 1. Электромагнитное поле. Система единиц . . . . .	12
Определения и количественные характеристики. Объемная плотность заряда. Плотность тока. Особенность формули- ровки теории электромагнитного поля.	
§ 2. Дифференциальная форма теоремы Гаусса . . . . .	16
Полевая трактовка закона Кулона. Теорема Гаусса. Урав- нение Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ . Электрические заряды как источники и стоки поля $\mathbf{E}$	
§ 3. Уравнение непрерывности и ток смещения . . . . .	20
Уравнение непрерывности. Линии токов проводимости. Ток смещения	
§ 4. Релятивистская природа магнитного поля и закон Био — Савара . . . . .	24
Сила взаимодействия между покоящейся заряженной нитью и покоящимся точечным зарядом. Инвариантность заряда. Преобразование плотности заряда. Необходимость существо- вания магнитного поля в релятивистской физике. Возник- новение сил, зависящих от скорости, в релятивистской фи- зике. Магнитное поле прямого бесконечного тока. Преобра- зование полей	
§ 5. Обобщение закона полного тока . . . . .	34
§ 6. Дифференциальная форма закона электромагнитной индукции . . . . .	37
§ 7. Уравнение Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ . . . . .	38
§ 8. Система уравнений Максвелла в вакууме. Энергия электромагнитного поля . . . . .	39
Система уравнений Максвелла. Полнота системы. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Энергия электромагнитного поля и вектор Пойнтинга. Интегральная форма уравнений Максвелла	
<i>Глава II. Электрический ток. Проводники . . . . .</i>	<i>45</i>
§ 9. Типы проводимости . . . . .	45
§ 10. Законы Ома и Джоуля — Ленца в дифференциаль- ной форме . . . . .	46
Дифференциальная форма закона Ома. Дифференциальная форма закона Джоуля — Ленца	
§ 11. Электропроводность газов . . . . .	47
Самостоятельный и несамостоятельный ток. Несамостоя- тельный ток. Плотность тока насыщения. Характеристика разряда. Самостоятельный ток. Действие пространственного заряда. Подвижность ионов	
§ 12. Электропроводность жидкостей . . . . .	53
§ 13. Электропроводность металлов . . . . .	55
Опыты Толмена. Элементарная теория электропроводности. Закон Джоуля — Ленца. Недостаточность классической тео-	

рин электропроводности. Методы расчета сопротивления среды электрическому току

Глава III. Электростатика. Диэлектрики . . . . .	62
§ 14. Уравнения стационарного электромагнитного поля .	62
§ 15. Уравнения и граничные условия при наличии заряженных поверхностей . . . . .	62
Уравнения Граничные условия. Граничное условие для нормальной составляющей вектора $E$ . Граничное условие для тангенциальной составляющей вектора напряженности электрического поля	
§ 16. Электростатическое поле в вакууме . . . . .	67
Уравнения электростатики. Потенциальность электростатического поля. Скалярный потенциал. Нормировка потенциала. Потенциал точечного заряда. Потенциал системы точечных зарядов Потенциал непрерывно распределенных зарядов. Конечность потенциала при непрерывном распределении заряда с конечной плотностью	
§ 17. Уравнения Лапласа и Пуассона . . . . .	72
Вывод уравнений Свойства потенциала. Бесконечная заряженная пластина Бесконечный равномерно заряженный круглый цилиндр	
§ 18. Проводники в электростатическом поле . . . . .	77
Отсутствие электростатического поля внутри проводника. Отсутствие в проводнике объемных зарядов. Поле вблизи поверхности проводника. Потенциал проводника. Емкость проводника. Металлический экран. Конденсаторы. Система проводников. Метод изображений. Проводящая сфера в однородном электрическом поле. Экспериментальная проверка закона Кулона	
§ 19. Формулы Грина . . . . .	93
Первая формула Грина. Интегрирование уравнения для потенциала. Граничные условия	
§ 20. Функции Грина . . . . .	96
§ 21. Поляризация диэлектриков. Мультиполи . . . . .	98
Поляризация. Количественная характеристика распределения заряда в молекулах. Мультиполи. Разложение на мультиполи в декартовых координатах. Дипольный момент. Поле диполя	
§ 22. Диэлектрики в электростатическом поле . . . . .	101
Вектор поляризованности. Скалярный потенциал при наличии диэлектрика. Связь диэлектрической восприимчивости и диэлектрической проницаемости. Два способа описания диэлектриков. Метод изображений. Диэлектрический шар в однородном электрическом поле	
§ 23. Энергия электрического поля . . . . .	111
Энергия, выраженная через векторы поля. Граничные условия при наличии диэлектриков. Энергия, выраженная через потенциал и плотность зарядов. Энергия взаимодействия точечных зарядов. Энергия заряженных проводников. Энергия диполя во внешнем поле Энергия диэлектрического тела во внешнем поле	
§ 24. Механические силы в электрическом поле . . . . .	120
Сила, действующая на точечный заряд Сила, действующая на непрерывно распределенный заряд. Сила, действующая на диполь. Момент сил, действующих на диполь Силы, действующие на проводники Объемные силы, действующие на диэлектрики. Объемные силы с учетом сжимаемости Поверхностные силы, действующие на диэлектрик	
§ 25. Диэлектрические свойства разреженных газов . . .	132
Полярные и неполярные молекулы. Теория поляризации диэлектриков с неполярными молекулами. Теория поляриза-	

ции диэлектриков с полярными молекулами. Случай одновременного наличия постоянных и индуцированных дипольных моментов

- § 26. Плотные газы, жидкости и твердые диэлектрики . . . 137  
Отличие локального поля от внешнего. Вычисление напряженности локального поля. Плотные газы. Полярные жидкости. Ионные кристаллы
- § 27. Кристаллические диэлектрики . . . . . 142  
Тензор диэлектрической проницаемости. Плотность энергии электромагнитного поля

*Глава IV. Стационарное магнитное поле. Магнетики . . . . . 145*

- § 28. Уравнения и граничные условия для магнитного поля постоянных токов . . . . . 145  
Уравнения поля. Граничное условие для нормальной составляющей вектора магнитной индукции  $B$  Граничное условие для тангенциальной составляющей вектора индукции магнитного поля. Граничное условие для тангенциальной составляющей вектора плотности тока. Граничное условие для нормальной составляющей вектора плотности тока
- § 29. Сторонние электродвижущие силы и обобщенные законы Ома и Джоуля — Ленца . . . . . 147  
Невозможность постоянного тока при наличии только кулоновских сил электростатического поля. Сторонние электродвижущие силы. Обобщение закона Ома. Интегральный закон Ома для всей цепи. Обобщение закона Джоуля — Ленца
- § 30. Магнитостатическое поле в вакууме. Закон Био — Савара . . . . . 151  
Векторный потенциал. Уравнение для векторного потенциала. Закон Био — Савара. Линейные токи. Поле элементарных токов. Магнитный момент линейного тока
- § 31. Магнетики в магнитостатическом поле . . . . . 159  
Намагничивание магнетиков. Векторный потенциал при наличии магнетиков. Связь магнитной проницаемости с магнитной восприимчивостью. Магнитное поле постоянных магнитов. Уравнения поля при наличии магнетиков Граничные условия. Шар из магнетика в однородном магнитном поле. Магнитная экранировка
- § 32. Энергия магнитного поля постоянных токов . . . . . 170  
Энергия, выраженная через векторы поля при наличии магнетиков. Энергия, выраженная через плотность тока и векторный потенциал. Энергия магнитного поля, представленная как энергия взаимодействия элементов тока. Энергия магнитного поля для системы линейных токов. Самоиндукция и взаиминдукция. Связь самоиндукции и взаиминдукции с потоками магнитной индукции. Энергия магнетика во внешнем магнитостатическом поле
- § 33. Механические силы в магнитном поле . . . . . 177  
Сила, действующая на элемент тока. Сила, действующая на элементарный ток. Сила, действующая на магнетик. Энергия магнитного момента во внешнем поле Момент сил, действующих на магнитный момент. Объемные силы, действующие на сжимаемые магнетики
- § 34. Движение электронов в атомах, находящихся во внешнем магнитном поле . . . . . 183  
Уравнения движения электронов в магнитном поле. Прецессия атомов. Закон сохранения энергии
- § 35. Диамагнетики . . . . . 191  
Молекулярная картина диамагнетизма.

§ 36.	Парамагнетики . . . . .	193
	Механизм намагничивания. Парамагнитная восприимчивость	
§ 37.	Замечания о ферромагнетизме . . . . .	195
§ 38.	Гирромагнитные эффекты . . . . .	197
	Опыт Эйнштейна—де Гааз. Эффект Барнетта	
<i>Глава V. Квазистационарные электромагнитные поля. Цепи переменного тока . . . . . 200</i>		
§ 39.	Определения и уравнения . . . . .	200
	Определения. Уравнения Максвелла в квазистационарной области. Напряженность электрического поля, выраженная через потенциалы. Уравнение для скалярного потенциала. Уравнение для векторного потенциала	
§ 40.	Система проводников с учетом взаимоиндукции и самоиндукции . . . . .	204
	Интегральный закон Ома с учетом электромагнитной индукции. Уравнение для системы проводников. Трансформатор	
§ 41.	Электрическая цепь с емкостью и индуктивностью . . . . .	209
	Уравнение для расчета электрической цепи. Включение в цепь и выключение из цепи постоянной электродвижущей силы. Колебательный контур. Общий случай	
§ 42.	Индукция токов в движущихся проводниках . . . . .	214
§ 43.	Скин-эффект . . . . .	216
	Сущность явления. Элементарная теория скин-эффекта. Зависимость омического сопротивления проводника от частоты. Зависимость самоиндукции от частоты	
<i>Глава VI. Излучение электромагнитных волн . . . . . 222</i>		
§ 44.	Общие уравнения . . . . .	222
	Плотность тока смещения в среде. Обобщение дифференциальной формулировки закона полного тока при наличии среды. Уравнения Максвелла для среды. Энергия электромагнитного поля и вектор Пойнтинга. Векторный и скалярный потенциалы. Уравнение для векторного потенциала. Уравнение для скалярного потенциала. Неоднозначность потенциалов. Калибровочное преобразование	
§ 45.	Калибровка потенциалов . . . . .	225
	Лоренцевская калибровка. Кулоновская калибровка	
§ 46.	Функция Грина волнового уравнения. Запаздывающие и опережающие потенциалы . . . . .	229
	Функция Грина. Функция Грина для неограниченного пространства. Запаздывающие и опережающие потенциалы	
§ 47.	Излучение линейного осциллятора . . . . .	233
	Вибратор Герца. Скалярный потенциал диполя, изменяющегося со временем. Векторный потенциал. Векторный потенциал рамки с током. Электрическое и магнитное поля линейного осциллятора. Поле осциллятора в волновой зоне. Энергия, излучаемая осциллятором	
§ 48.	Излучение рамки с током . . . . .	243
§ 49.	Излучение колеблющегося электрона. Торможение излучением . . . . .	245
	Свободные колебания упруго связанного электрона. Излучение колеблющегося электрона. Сила торможения излучением. Обобщение формулы излучения. Условия пренебрежения реакцией излучения	
§ 50.	Теория ширины спектральной линии . . . . .	252
§ 51.	Рассеяние света свободными электронами . . . . .	256

§ 52.	Импульс электромагнитного поля. Давление света .	257
	Импульс. Давление света	
<i>Глава VII.</i> Распространение электромагнитных волн . . . . .		261
§ 53.	Распространение электромагнитных волн в диэлектриках . . . . .	261
	Плоские монохроматические волны. Уравнения для напряженностей электромагнитного поля. Решение в виде плоских монохроматических волн	
§ 54.	Преломление и отражение плоских электромагнитных волн на границе между диэлектриками . . . . .	265
	Граничные условия для векторов электромагнитной волны. Сохранение частоты при отражении и преломлении. Соотношение между углами падения, отражения и преломления. Закон Снеллиуса. Соотношение между интенсивностями падающей, отраженной и преломленной волн. Формулы Френеля	
§ 55.	Распространение электромагнитных волн в проводящих средах . . . . .	272
	Комплексная диэлектрическая восприимчивость. Глубина проникновения	
§ 56.	Распространение электромагнитных волн в диспергирующих средах . . . . .	275
	Дисперсия. Вынужденные колебания упруго связанного электрона. Поляризация диэлектрика. Нормальная дисперсия в оптической области. Аномальная дисперсия. Поглощение. Группа волн, или волновой пакет. Групповая скорость. Изменение формы импульса при распространении. Замещение волны в среде. Дисперсия света в межзвездном пространстве	
§ 57.	Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах . . . . .	285
	Электрическая и магнитная анизотропии. Главные оси тензора $\epsilon_{ij}$ . Влияние анизотропии на распространение электромагнитных волн. Зависимость фазовой скорости от направления. Типы возможных волн. Зависимость лучевой скорости от направления. Лучевой эллипсоид. Анализ распространения лучей с помощью лучевого эллипсоида. Оптическая ось. Двуосные и одноосные кристаллы. Лучевая поверхность. Построение Гюйгенса	
§ 58.	Движение электромагнитной энергии вдоль линий передач . . . . .	297
§ 59.	Волноводы . . . . .	300
	Уравнения для полей. Классификация волн в волноводе. Граничная частота. Прямоугольный волновод	
§ 60.	Интеграл Кирхгофа. Дифракции Френеля и Фраунгофера . . . . .	305
	Интегральное представление Кирхгофа. Интеграл Кирхгофа. Монохроматические волны. Условия излучения. Выбор поверхности интегрирования. Приближение Кирхгофа. Четырехточечное приближение. Дифракция Френеля. Дифракция Фраунгофера. Принцип Бабинэ	
<i>Глава VIII.</i> Четырехмерная формулировка электродинамики		312
§ 61.	Четырехмерные векторы и тензоры . . . . .	312
	Трехмерное пространство. Четырехмерный мир. Определение. Четырехмерный вектор мировой точки. Четырехмерная скорость. Четырехмерное ускорение. Скалярное произведение четырехмерных векторов. Трехмерные тензоры. Четырехмерные тензоры. Симметричные и антисимметричные тензоры. Сложение и вычитание тензоров. Умножение тензоров. Операция свертывания тензоров	

§ 62.	Тензорный анализ . . . . .	322
	Четырехмерный градиент. Четырехмерная дивергенция. Оператор Даламбера. Дифференцирование тензоров. Четырехмерный ротор. Тензорное исчисление как аппарат теории относительности	
§ 63.	Четырехмерный потенциал и четырехмерная плотность тока . . . . .	326
§ 64.	Тензорная запись уравнений Максвелла . . . . .	328
§ 65.	Тензоры электромагнитного поля . . . . .	332
	Тензоры. Преобразование полей. Инварианты тензоров поля	
§ 66.	Четырехмерная плотность силы . . . . .	336
	Четырехмерный вектор плотности силы. Четырехмерный вектор силы Минковского	
§ 67.	Тензор энергии и импульса электромагнитного поля . . . . .	338
	Тензор. Смысл различных компонент. Тензор натяжений. О магнитных зарядах	
§ 68.	Эффект Доплера . . . . .	346
	Инвариантность плоской волны. Инвариантность фазы. Четырехмерный волновой вектор. Формулы преобразования частоты и направления. Эффект Доплера. Продольный эффект Доплера. Поперечный эффект Доплера. Опыты Айвса	
§ 69.	Плоская волна . . . . .	349
	Преобразование амплитуды и частоты плоской волны. Энергия плоской волны. Импульс плоской волны. Отражение от движущегося зеркала	
§ 70.	Поле произвольно движущегося электрона . . . . .	353
	Потенциалы Льенара — Вихерта. Поле произвольно движущегося заряда. Энергия излучения. Спектральный состав и угловое распределение излучения	
§ 71.	Излучение Вавилова — Черенкова . . . . .	362
§ 72.	Электродинамика движущихся сред . . . . .	366
	Уравнения и тензоры электромагнитного поля. Четырехмерный ток. Тензорная запись закона Ома. Тензор энергии и импульса электромагнитного поля в среде	
§ 73.	Лагранжева формулировка электродинамики . . . . .	370
	Интеграл действия. Уравнения Лагранжа. Уравнения Максвелла. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля	
	Приложения . . . . .	375
	Предметный указатель . . . . .	380



## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Со времени выхода в свет первого издания (1964) произошли определенные изменения в программах вузов и во взглядах автора на относительную роль и взаимосвязь отдельных разделов курса. Второе издание в отличие от первого, рекомендованного для педагогических вузов в качестве учебника, предназначено для физических факультетов университетов. Все это привело к необходимости коренной переработки книги. Прежде всего из книги полностью исключено изложение специальной теории относительности, с которой студенты университетов в соответствии с новой программой достаточно подробно знакомятся уже на первом курсе. В связи с этим во втором издании книга называется «Электродинамика». Знание студентами специальной теории относительности позволяет полностью изменить подход к курсу. При традиционном изложении экспериментальной основой электродинамики является ряд опытных фактов из области электричества и магнетизма, обобщение которых приводит к формулировке уравнений Максвелла независимо от теории относительности. Электродинамика выступает в качестве первой релятивистски инвариантной теории, в которой теория относительности находит свои многочисленные проявления. Сейчас представляется более предпочтительным другой путь изложения. Теория относительности считается обоснованной до электродинамики в качестве общей теории, лежащей в основе анализа всех явлений, в том числе и электродинамических. При этом она рассматривается как экспериментальная основа электродинамики наряду с законом Кулона, принципом суперпозиции, законами сохранения заряда и энергии, законом электромагнитной индукции, инвариантностью элементарного заряда и током смещения. В нее введены вопросы, являющиеся необходимыми для университетов, но не играющие заметной роли в программе педвузов (такие, как функции Грина, интеграл Кирхгофа, лагранжева формулировка электродинамики и др.). Из второго издания исключены задачи, поскольку в настоящее время имеются хорошие сборники задач по этому курсу. Автор благодарит рецензента проф. В. Г. Багрова за ряд ценных замечаний.

## ВВЕДЕНИЕ

Электромагнитные явления играют чрезвычайно большую роль в природе. В настоящее время известны четыре вида взаимодействий: электромагнитное, гравитационное, сильное и слабое. Все остальные сводятся к ним. Например, силы вязкости и многие другие в конечном счете являются электромагнитными.

Силы тяготения, действующие между заряженными частицами, весьма малы по сравнению с электрическими силами, действующими между ними. Например, между двумя электронами, находящимися на расстоянии  $r$  друг от друга, действует гравитационная сила притяжения

$$F_T = Gm_0^2/r^2, \quad (1)$$

где  $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$  Н·м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup> — гравитационная постоянная;  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг — масса электрона.

С другой стороны, между электронами действует электрическая сила отталкивания

$$F_Э = e^2/(4\pi\epsilon_0 r^2), \quad (2)$$

где  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл — заряд электрона,  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$  Ф/м —

диэлектрическая постоянная.

Из (1) и (2) следует, что

$$F_Э/F_T = e^2/(4\pi\epsilon_0 G \cdot m_0^2) \approx 10^{43}. \quad (3)$$

Таким образом, гравитационное взаимодействие между двумя электронами ничтожно мало по сравнению с электрическим взаимодействием между ними. По-видимому, в области взаимодействия элементарных частиц силы тяготения практически никакой роли не играют. Силы тяготения существенны лишь при взаимодействии нейтральных масс достаточно больших размеров. Например, они играют определяющую роль при взаимодействии астрономических объектов.

Закон действия ядерных сил, обусловленных сильным взаимодействием, в настоящее время точно не известен, однако свойства ядерных сил изучены достаточно подробно. Известно, что эти силы являются короткодействующими. Их действие проявляется лишь при сближении нуклонов на расстояние порядка  $10^{-15}$  м. На таком расстоянии ядерные силы во много раз больше электромагнитных. Однако они быстро уменьшаются с увеличением расстояния и становятся пренебрежимо малыми по сравнению с электромагнитными силами. Поэтому ядерные силы существенны во взаимодействии элементарных частиц лишь при их сближении на малые расстояния. В частности, они играют определяющую роль в образовании ядер вещества.

Слабое взаимодействие проявляется при взаимопревращении частиц. При удалении частиц друг от друга оно несущественно.

Таким образом, из четырех известных в природе взаимодействий лишь электромагнитное может быть использовано для управления движением заряженных частиц. Благодаря этому электромагнитные силы в современной науке и практике чрезвычайно важны.

Одна из самых главных задач, стоящих сейчас перед наукой, — это проблема управляемых термоядерных реакций. В своей главной части она является электродинамической проблемой и сводится к использованию электромагнитных полей в качестве «резервуаров», в которых могла бы удерживаться горячая плазма. Можно образно сказать, что задача сводится к использованию магнитного поля в качестве строительного материала.

Важное значение в будущих космических полетах призваны играть ионные и плазменные реактивные двигатели. При создании таких двигателей электродинамические проблемы выступают на первый план.

Нет необходимости говорить о тех многообразных применениях электромагнитных явлений, которые в настоящее время прочно вошли в практику. На законах электродинамики базируются электротехнические, радиотехнические, электронные и другие многочисленные приборы и устройства.

Электродинамические явления играют большую роль и в астрономии. Существующие в межзвездном пространстве магнитные поля ускоряют космические заряженные частицы, вспышки на Солнце сопровождаются существенным изменением магнитного поля вблизи поверхности Солнца, магнитное поле Земли удерживает вблизи Земли заряженные частицы, благодаря чему создаются радиационные пояса и т. д. Таким образом, электромагнитные явления необходимо принимать во внимание также и при рассмотрении космических проблем. Многообразие и широта проявления электромагнитных явлений делают их теорию важнейшим инструментом познания законов природы.

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ВАКУУМЕ КАК ОБОБЩЕНИЕ ОПЫТНЫХ ФАКТОВ

### § 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. СИСТЕМА ЕДИНИЦ

**Определения и количественные характеристики.** Электромагнитным полем называется область пространства, в которой проявляется действие электрических и магнитных сил. Оно характеризуется напряженностью  $\mathbf{E}$  электрического поля, электрической индукцией  $\mathbf{D}$ , напряженностью  $\mathbf{H}$  магнитного поля, магнитной индукцией  $\mathbf{B}$ . Эти четыре вектора не являются независимыми, а связаны соотношениями:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.1a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.16)$$

где  $\varepsilon$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость, а  $\mu$  — абсолютная магнитная проницаемость.

В абсолютной гауссовой системе единиц, которая до настоящего времени широко использовалась в электродинамике, электрические величины выражаются в единицах СГСЭ, а магнитные — в единицах СГСМ. В этой системе размерности  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  одинаковы; величины  $\varepsilon$  и  $\mu$  безразмерны и для вакуума равны единице. Благодаря этому в вакууме векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  совпадают соответственно с векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , поэтому электромагнитное поле в вакууме можно характеризовать лишь двумя векторами:  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Это дает определенное математическое упрощение ряда уравнений и формул. Однако при этом многие электрические величины оказываются выраженными в единицах, которые на практике не употребляются. Например, сила тока выражается в амперах, напряжение — в вольтах, заряд — в кулонах, сопротивление — в омах и т. д. В гауссовской же системе единиц все эти величины выражаются в единицах СГСЭ, которые даже не имеют собственных наименований. Этим требованиям полностью удовлетворяет Международная система единиц (СИ). В этой системе векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  имеют различную размерность, поэтому величина  $\varepsilon$  является размерной. Для ва-

куума она не равна единице, а следовательно, и векторы **E** и **D** не совпадают между собой даже для вакуума. То же можно сказать и о величинах **H**, **B** и  $\mu$ . Таким образом, поле характеризуется четырьмя векторами **E**, **D**, **H** и **B** как в материальной среде, так и в вакууме. В отношении электромагнитных величин СИ совпадает с рационализованной системой единиц МКСА, в основе которой лежат метр, килограмм, секунда и ампер. Абсолютная диэлектрическая и магнитная проницаемости выражаются в следующих единицах:

$$[\epsilon] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Дж} \cdot \text{м}} = \frac{\Phi}{\text{м}}, \quad (1.2a)$$

$$[\mu] = \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{Кл}^2} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}, \quad (1.2б)$$

как это следует из (1.1a) и (1.1б) с учетом размерностей величин **E**, **D**, **H**, **B**, указанных в приложении 2.

Сила взаимодействия, отнесенная к длине  $l$ , параллельных проводников, находящихся в вакууме на расстоянии  $a$ , равна

$$F = \mu_0 I_1 I_2 l / (2\pi a). \quad (1.3)$$

Учитывая определение ампера и полагая в этой формуле  $F = 2 \cdot 10^{-7}$  Н,  $I_1 = I_2 = 1$  А,  $l = a = 1$  м, находим для магнитной постоянной следующее значение:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}. \quad (1.4)$$

Для получения электрической постоянной  $\epsilon_0$  можно воспользоваться известным из теории соотношением (см. § 32)

$$1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = c, \quad (1.5)$$

в котором  $c$  — электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме ( $c = 3 \cdot 10^8$  м/с). Из (1.5) с учетом (1.4) следует, что

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ Ф/м} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}. \quad (1.6)$$

Пользуясь (1.4) и (1.6), можно абсолютные диэлектрическую и магнитную проницаемости среды представить в виде

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \quad (1.7a)$$

$$\mu = \mu_r \mu_0. \quad (1.7б)$$

Величины  $\epsilon_r$  и  $\mu_r$  безразмерны. Они называются относительной диэлектрической проницаемостью и относительной магнитной проницаемостью. Численно они равны диэлектрической и магнитной проницаемостям в абсолютной гауссовой системе единиц. Однако иногда их удобно использовать и в СИ.

Векторы поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  являются, вообще говоря, функциями координат и времени. Магнитная проницаемость  $\mu$  и диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  являются функциями координат. Предполагается, что  $\epsilon$  и  $\mu$  явно от времени не зависят.

**Объемная плотность заряда.** Распределение заряда в пространстве характеризуется объемной плотностью, определяемой формулой

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad (1.8)$$

где  $\Delta q$  — заряд, заключенный в объеме  $\Delta V$ . Это определение предполагает, что заряд непрерывно распределен в пространстве. Дискретное строение электрического заряда при этом, конечно, не принимается во внимание. Как видно из (1.8), объемную плотность зарядов выражают в кулонах на кубический метр:

$$[\rho] = \text{Кл/м}^3. \quad (1.9)$$

Из (1.8) следует, что заряд, заключенный в элементе объема  $dV$ , равен

$$dq = \rho dV. \quad (1.10)$$

**Плотность тока.** Плотностью тока в данной точке называется вектор, совпадающий по направлению с током, а по модулю равный

$$|\mathbf{j}| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}, \quad (1.11)$$

где  $\Delta I$  — сила тока, протекающего через площадку  $\Delta S$ , расположенную перпендикулярно направлению тока в данной точке. Из (1.11) следует, что плотность тока выражается в амперах на квадратный метр:

$$[\mathbf{j}] = \text{А/м}^2. \quad (1.12)$$

Из (1.11) следует, что сила тока, протекающего через элемент площади  $dS$ , определяется скалярным произведением:

$$dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.13)$$

Объемная плотность заряда и плотность тока являются функциями координат и времени.

**Особенность формулировки теории электромагнитного поля.** Электромагнитное поле в каждой точке характеризуется величинами  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ . Они, вообще говоря, меняются как со временем, так и при переходе от точки к точке. Однако это изменение совершается не произвольно, а по определенным законам. По вполне определенным законам происходит и порождение электромагнитного поля зарядами и токами. Эти законы формулируются в виде уравнений Максвелла, которым подчиняются величины, характеризующие электромагнитное поле.

Первоначально законы электромагнитных явлений выражались в виде соотношений, относящихся к различным точкам пространства. Например, закон Кулона устанавливает силу, действующую между зарядами, находящимися в различных точках пространства. Закон Ома определяет соотношение между величинами, относящимися к целому участку проводника и т. д. Уравнения Максвелла формулируют законы электромагнитного поля в виде соотношений между величинами в одной и той же точке пространства в один и тот же момент времени. В этом состоит характерная особенность математического описания электромагнитного поля. Отсюда следует, что для получения уравнений электромагнитного поля надо основные законы электромагнитных явлений сформулировать в виде соотношений между величинами в одной и той же точке пространства в один и тот же момент времени, т. е. записать эти законы в дифференциальной форме.

Наряду с дифференциальной существует также интегральная форма законов электромагнитного поля, которая в некоторых случаях является даже более удобной. Она устанавливает соотношения между величинами, относящимися не к точке, а к линиям, поверхностям и объемам. Интегральная форма получается из дифференциальной с помощью операции интегрирования дифференциальных уравнений (см. § 8).

## § 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА ТЕОРЕМЫ ГАУССА

**Полевая трактовка закона Кулона.** Закон Кулона определяет силу  $F$ , с которой взаимодействуют два точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга в вакууме:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (2.1)$$

Исходя из представлений об электромагнитном поле, процесс взаимодействия между зарядами можно представить так:

1) точечный заряд, например  $q_1$ , создает в окружающем пространстве электрическое поле, напряженность которого определяется формулой

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки, где находится заряд  $q_1$ , в точку, где определяется напряженность электрического поля;

2) точечный заряд  $q_2$ , помещенный в электрическое поле напряженностью  $\mathbf{E}$ , испытывает со стороны этого поля действие силы

$$\mathbf{F} = q_2 \mathbf{E}. \quad (2.3)$$

Подстановка (2.2) в (2.3) позволяет определить силу, действующую между зарядами  $q_1$  и  $q_2$ :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.4)$$

Тем самым показано, что закон Кулона (2.1) выражается совокупностью формул (2.2) и (2.3).

**Теорема Гаусса.** Вычислим поток вектора  $\mathbf{E}$  в вакууме через произвольную замкнутую поверхность  $S$ , окружающую точечный заряд  $q$ :

$$N = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.5)$$

Из рис. 1 видно, что

$$dS' = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{S} = dS \cos \left( \frac{\mathbf{r}}{r}, \hat{d\mathbf{S}} \right) \quad (2.6)$$



— проекция элемента площади  $d\mathbf{S}$  на плоскость, перпендикулярную радиус-вектору в данной точке. Следовательно,

$$dS'/r^2 = d\Omega \quad (2.7)$$

— элемент телесного угла, под которым рассматриваемая поверхность видна из точки расположения заряда  $q$ . Учти-

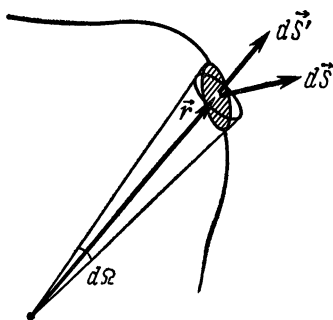


Рис. 1

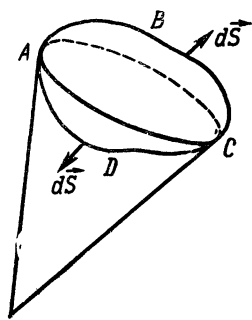


Рис. 2

ывая (2.6), (2.7) и (2.2), можно вычислить интеграл (2.5):

$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{dS'}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.8)$$

В последнем равенстве учтено, что полный телесный угол, под которым видна замкнутая поверхность из точки, находящейся внутри нее, равен  $4\pi$ .

Если заряд находится вне замкнутой поверхности  $S$ , то интеграл

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.9)$$

взятый по поверхностям  $ABC$  и  $ADC$ , будет иметь одно и то же значение, но противоположный знак (рис. 2). Вследствие того что вектор элемента поверхности  $d\mathbf{S}$  всегда направлен по внешней нормали к поверхности, элемент телесного угла  $d\Omega$  имеет положительный знак,

если он опирается на внутреннюю сторону поверхности, и отрицательный, если на внешнюю сторону поверхности. Таким образом, поток вектора  $\mathbf{E}$  в вакууме через замкнутую поверхность от точечного заряда, расположенного вне ее, равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.10)$$

Если имеется несколько точечных зарядов  $q_i$ , то напряженность в вакууме равна сумме напряженностей  $\mathbf{E}_i$ , создаваемых отдельными зарядами:

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i. \quad (2.11)$$

Это положение является опытным. Оно получило название принципа суперпозиции. Его главным математическим следствием является линейность соответствующих уравнений. Поэтому можно сказать, что из установленной на опыте справедливости равенства (2.11) следует, что уравнения, которым подчиняется напряженность, должны быть линейными.

Найдем поток вектора  $\mathbf{E}$  через замкнутую поверхность  $S$ , внутри которой находятся заряды  $q_i$ :

$$N = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \quad (2.12)$$

Таким образом, поток напряженности  $\mathbf{E}$  в вакууме через замкнутую поверхность равен сумме зарядов, заключенных внутри нее, деленной на электрическую постоянную. Это утверждение известно под названием электростатической теоремы Гаусса.

Непрерывное распределение зарядов можно представить как совокупность достаточно малых зарядов  $\Delta q_i = \rho \Delta V_i$ , расположенных в элементах объема  $\Delta V_i$ , на которые может быть разбит данный объем. В пределе  $\Delta V_i \rightarrow 0$  эти заряды можно рассматривать как точечные. Тогда теорема (2.12) принимает вид

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \rho \Delta V_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad (2.13)$$

где  $V$  — объем, ограниченный замкнутой поверхностью  $S$ . Обратим внимание, что равенство (2.13) справедливо

для произвольно выбранной области пространства, ограниченной замкнутой поверхностью  $S$ .

**Уравнение Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$**  Для получения дифференциального соотношения между величинами, входящими в равенство (2.13), необходимо воспользоваться математической теоремой Гаусса—Остроградского (П.2):

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV, \quad (2.14)$$

т. е. поток произвольного вектора  $\mathbf{A}$  через замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции этого вектора по объему, ограниченному данной замкнутой поверхностью. Применяв эту теорему к левой части равенства (2.13), получаем

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV. \quad (2.15)$$

Поэтому из (2.13) с учетом (2.15) следует, что

$$\int_V (\operatorname{div} \mathbf{E} - \rho/\epsilon_0) dV = 0. \quad (2.16)$$

Это равенство справедливо при произвольном выборе объема интегрирования  $V$ . Но если интеграл от некоторой функции равен нулю при произвольной области интегрирования, то сама функция тождественно равна нулю. Доказательство этой теоремы легко получить рассуждением «от противного». В самом деле, если в некоторой точке подынтегральная функция не равна нулю, то всегда в ее окрестности можно выбрать достаточно малую область, в пределах которой функция вследствие непрерывности не равна нулю и сохраняет свой знак. Если в качестве области интегрирования выбрать эту малую область, то при интегрировании по ней подынтегральное выражение сохраняет знак и не равно нулю. Следовательно, не может быть равным нулю и интеграл по этой области. Но это противоречит исходному положению. Поэтому допущение о том, что в некоторой точке подынтегральная функция не равна нулю, неправильно.

Применив эту теорему к равенству (2.16), в котором область интегрирования произвольна, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0. \quad (2.17)$$

Это одно из уравнений Максвелла. Из его вывода видно, что оно является дифференциальной формой теоремы Гаусса.

**Электрические заряды как источники и стоки поля  $\mathbf{E}$ .** Линией некоторого вектора  $\mathbf{A}$ , заданного в пространстве как функция точки, называется такая линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора в этой точке. Примерами являются силовые линии вектора  $\mathbf{E}$ , линии тока и т. д. Из равенства (2.14) видно, что если  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  в объеме  $V$ , то поток вектора  $\mathbf{A}$  через замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую этот объем, равен нулю. Следовательно, в объеме  $V$  нет ни источников, ни стоков поля вектора  $\mathbf{A}$ , т. е. нет точек, где линии вектора  $\mathbf{A}$  или начинаются, или оканчиваются. В тех же точках, где  $\operatorname{div} \mathbf{A} \neq 0$ , имеется либо начало линий вектора  $\mathbf{A}$ , когда  $\operatorname{div} \mathbf{A} > 0$ , либо конец, когда  $\operatorname{div} \mathbf{A} < 0$ , т. е. в точках, в которых  $\operatorname{div} \mathbf{A} \neq 0$ , расположены источники или стоки поля этого вектора.

Таким образом, физическим содержанием уравнения Максвелла (2.17) является утверждение, что источниками и стоками поля вектора  $\mathbf{E}$  являются электрические заряды: линии вектора  $\mathbf{E}$  начинаются на положительных зарядах ( $\rho > 0$ ) и оканчиваются на отрицательных зарядах ( $\rho < 0$ ).

### § 3. УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ТОК СМЕЩЕНИЯ

**Уравнение непрерывности.** Установленный на опыте закон сохранения заряда математически выражается уравнением непрерывности. Заряд, заключенный внутри объема  $V$ , выражается интегралом

$$q = \int_V \rho dV. \quad (3.1)$$

Если заряд  $q$  внутри данного объема изменяется, то происходит движение зарядов через поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем. Количество зарядов, пересекающих эту поверхность в течение времени  $dt$ , равно

$$dt \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.2)$$

поскольку интеграл в этой формуле выражает силу тока через поверхность. Причем эта величина положительна,

если ток вытекает из рассматриваемого объема, и отрицательна, если втекает. С другой стороны, по закону сохранения заряда, это втекание или вытекание зарядов должно привести к соответствующему изменению заряда  $q$ , заключенного в данном объеме. Это изменение за время  $dt$  равно

$$dt \frac{dq}{dt} = dt \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (3.3)$$

Здесь использовано то, что производная от интеграла равна интегралу от производной подынтегрального выражения из-за независимости области интегрирования от времени. Знак производной  $dq/dt$  отрицателен в том случае, когда ток вытекает из объема  $V$  и величина (3.2) положительна. В случае увеличения  $q$  знаки (3.3) и (3.2) меняются на обратные. По закону сохранения заряда, величины (3.3) и (3.2) равны по абсолютному значению, но противоположны по знаку:

$$\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (3.4)$$

Применяя к левой части этого равенства теорему Гаусса — Остроградского (П.2), его можно преобразовать:

$$\int_V (\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j}) dV = 0. \quad (3.5)$$

Так как оно справедливо для произвольного объема  $V$ , то подынтегральное выражение равно нулю:

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (3.6)$$

Это есть уравнение непрерывности, являющееся выражением закона сохранения заряда.

**Линии токов проводимости.** В случае стационарных токов объемная плотность зарядов в каждой точке постоянна и, следовательно,

$$\partial \rho / \partial t = 0. \quad (3.7)$$

Поэтому для постоянных токов уравнение непрерывности имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (3.8)$$

Оно показывает, что линии постоянного тока не имеют ни начала, ни конца. Это либо замкнутые линии, либо линии, уходящие в бесконечность. В случае переменных токов линии вектора плотности тока не замкнуты, поскольку

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t \neq 0. \quad (3.9)$$

Следовательно, линии вектора  $\mathbf{j}$  начинаются и заканчиваются в тех точках, где изменяется плотность заряда. Плотность тока связана с движением зарядов, поэтому ее называют плотностью тока проводимости или тока переноса. Таким образом, можно сказать, что линии тока проводимости в случае переменных токов не являются замкнутыми.

В качестве примера рассмотрим электрическую цепь, содержащую конденсатор, обкладки которого разделены вакуумом. Как известно, по такой электрической цепи постоянный ток не течет. Это обусловлено тем, что в пространстве между обкладками конденсатора заряды двигаться не могут, поэтому линии плотности тока проводимости  $\mathbf{j}$  между обкладками конденсатора не могут быть продолжены и, следовательно, уравнение (3.8) не удовлетворяется.

**Ток смещения.** По-другому обстоит дело в случае переменных токов. Здесь наличие в цепи конденсатора не является препятствием для протекания переменного тока. Однако и в этом случае в пространстве между обкладками конденсатора заряды двигаться не могут. Поэтому необходимо допустить, что между обкладками конденсатора происходит некоторый процесс, эквивалентный наличию тока проводимости. Говорят, что между обкладками конденсатора существует ток смещения, замыкающий ток проводимости.

Для получения математического выражения тока смещения продифференцируем по времени обе части уравнения Максвелла:

$$\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

В результате получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Здесь учтено, что вычисление дивергенции сводится к дифференцированию по координатам, а координаты и время являются независимыми переменными и порядок

дифференцирования по ним может быть изменен. Подставляя (3.10) в (3.6), находим

$$\operatorname{div}\left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}\right) = 0.$$

Отсюда видно, что линии вектора

$$\mathbf{j}_{\text{полн}} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

всегда замкнуты. Вектор

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{3.11}$$

называется плотностью тока смещения. Размерности плотности тока смещения и плотности тока проводимости совпадают.

В случае электрической цепи с конденсатором, когда по цепи протекает переменный ток  $I$ , заряд  $q$  на каждой обкладке изменяется, причем  $I = dq/dt$ . Если площадь обкладки плоского конденсатора  $S$ , то модуль  $\mathbf{E}$  между обкладками конденсатора связан с зарядом  $q$  обкладки равенством

$$E = q/(\epsilon_0 S).$$

Отсюда следует, что

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{S} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{I}{S},$$

т. е. плотность тока смещения между обкладками конденсатора равна плотности тока проводимости, который протекал бы между обкладками конденсатора, если бы пространство между ними было заполнено проводником. По своей физической природе плотность тока смещения

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{3.12}$$

ничего общего с плотностью тока проводимости не имеет. Плотность тока смещения есть величина, пропорциональная скорости изменения электрического поля в данной точке. Однако эта величина не случайно называется током. Дело в том, что ток смещения сопровождается появлением точно такого же магнитного поля, какое возника-

ет при наличии соответствующего ему по равенству (3.11) тока проводимости. Таким образом, изменение электрического поля приводит к возникновению магнитного поля. Это явление дополняет связь между электрическим и магнитным полями, даваемую законом электромагнитной индукции. Не только изменение магнитного поля всегда сопровождается возникновением электрического поля, но и, наоборот, изменение электрического поля всегда сопровождается возникновением магнитного поля.

#### § 4. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ПРИРОДА МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ЗАКОН БИО—САВАРА

Сила взаимодействия между покоящейся заряженной нитью и покоящимся точечным зарядом. Исследуем взаимодействие между бесконечно длинной прямой равномерно

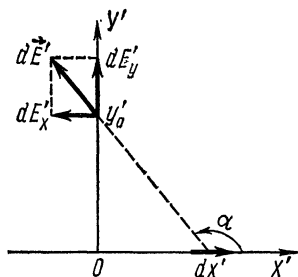


Рис. 3

заряженной нитью и точечным зарядом. Направим ось  $X'$  системы координат  $K'$ , в которой нить покоится, вдоль нити (рис. 3). Будем нить считать очень тонкой по сравнению с расстоянием до точечного заряда. Обозначим  $S'$  — площадь поперечного сечения нити;  $\rho'$  — объемную плотность заряда. Пусть в этой системе координат точечный заряд  $q$  покоится на расстоянии  $y_0'$  от нити в некоторой точке  $(x', y')$  плоскости.

Для определенности будем считать заряд нити и точечный заряд одноименными, например положительными. Очевидно, что со стороны нити на точечный заряд действует кулоновская сила отталкивания, направленная вдоль оси  $Y'$ . Вычислим ее.

Поскольку на элементе длины  $dx'$  нити сосредоточен заряд  $\rho'S_0'dx'$ , то, по закону Кулона,

$$dF'_x = \frac{q\rho'S_0'dx'}{4\pi\epsilon_0(y_0'^2 + x'^2)} \cos \alpha, \quad dF'_y = \frac{q\rho'S_0'dx'}{4\pi\epsilon_0(y_0'^2 + x'^2)} \sin \alpha.$$

Принимая во внимание, что  $\cos \alpha = -x'/\sqrt{y_0'^2 + x'^2}$ ,



$\sin \alpha = y'_0 / \sqrt{y_0'^2 + x'^2}$ , для компонент полной силы, действующей со стороны заряженной нити на точечный заряд, получим:

$$F'_x = -\frac{q\rho' S'_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x' dx'}{(y_0'^2 + x'^2)^{3/2}},$$

$$F'_y = \frac{q\rho' S'_0 y'_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{(y_0'^2 + x'^2)^{3/2}}. \quad (4.1)$$

Очевидно, что первый интеграл равен нулю, поскольку под интегралом стоит нечетная функция. Для вычисления второго интеграла удобно воспользоваться следующей заменой переменных:  $x' = -y'_0 \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $dx' = y'_0 d\alpha / \sin^2 \alpha$ ,  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1/\sin^2 \alpha$ . Тогда

$$F'_x = 0, \quad F'_y = \frac{q\rho' S'_0}{4\pi\epsilon_0 y'_0} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{q\rho' S'_0}{2\pi\epsilon_0 y'_0}, \quad F'_z = 0. \quad (4.2)$$

Таким образом, заряд отталкивается от нити с силой  $F'_y$ . Обозначая массу частицы, несущей точечный заряд,  $m_0$  и принимая во внимание, что в данный момент времени заряд покоится, найдем, что ускорение заряда равно:

$$a'_x = 0, \quad a'_y = F'_y / m_0 = q\rho' S'_0 / (2\pi\epsilon_0 y'_0 m_0), \quad a'_z = 0. \quad (4.3)$$

Исследуем это взаимодействие в системе координат  $K$ , движущейся в направлении отрицательных значений оси  $X'$  со скоростью  $-v$ . Направим ось  $X$  этой системы координат вдоль нити так, чтобы ее положительное направление совпадало с положительным направлением оси  $X'$ , и будем считать эту систему координат неподвижной. В ней система координат  $K'$ , нить и заряд движутся вдоль оси  $X$  со скоростью  $v$ . Прежде всего вычислим кулоновскую силу, которая действует на движущийся заряд со стороны движущейся заряженной нити. Для этого надо принять во внимание релятивистский закон изменения плотности электрического заряда со скоростью.

**Инвариантность заряда.** Из экспериментального изучения поведения электрических зарядов было установлено два фундаментальных факта.

Во-первых, все электрические заряды, встречающиеся в природе, являются по абсолютному значению кратными элементарному заряду, равному заряду электрона ( $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл). В течение многих лет предпринимались тщательные попытки найти в природе заряды, которые были бы дробными относительно элементарного заряда. Исследования велись чрезвычайно тщательно, поскольку речь шла о проверке очень важной гипотезы о строении элементарных частиц (гипотезы кварков), электрический заряд которых должен быть дробным. Однако обнаружить дробные заряды не удалось.

Во-вторых, значение элементарного заряда является постоянным и не зависит от скорости частицы, которая несет этот заряд. Одним из простейших доказательств этого является следующее. Если бы значение заряда зависело от скорости, то атомы не могли бы быть нейтральными, поскольку заряд быстро движущихся электронов не был бы по абсолютному значению равен заряду ядер атомов. Опыт же показывает, что атомы нейтральны, а это означает, что значение элементарных зарядов не зависит от скорости несущих заряды частиц. Поэтому элементарный заряд является инвариантной величиной.

**Преобразование плотности заряда.** Если некоторый элемент объема  $dV'$  движется со скоростью  $v$ , то в неподвижной системе координат он равен

$$dV = dV' \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (4.4)$$

поскольку линейные размеры объема сокращены в направлении скорости в  $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  раз, а в перпендикулярном направлении неизменны. Если плотность движущихся зарядов обозначить  $\rho$ , а неподвижных  $\rho'$ , то из инвариантности заряда следует равенство

$$\rho dV = \rho' dV', \quad (4.5)$$

которое с учетом (4.4) дает следующую формулу преобразования заряда:

$$\rho = \rho' / \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (4.6)$$

Это означает, что плотность зарядов с увеличением их скорости увеличивается.

**Необходимость существования магнитного поля в релятивистской физике.** Исследуем то же взаимодействие в системе координат  $K$ , где и заряженная нить и точеч-

ный заряд движутся с одинаковой скоростью  $v$  вдоль нити. Уравнение движения имеет вид

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}. \quad (4.7)$$

Найдем силу, действующую вдоль оси  $Y$ :

$$F_y = dp_y/dt = (dp'_y/dt')(dt'/dt) = \sqrt{1-\beta^2} F'_y, \quad \beta = v/c. \quad (4.8)$$

В этих равенствах учтено, что в соответствии с формулами преобразования теории относительности

$$p'_y = p_y, \quad (4.9)$$

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + vu'_x/c^2} \quad (4.10)$$

и принято во внимание условие  $u'_x = 0$ .

Нетрудно убедиться, что две другие компоненты силы равны нулю ( $F_x = 0, F_z = 0$ ).

Выясним происхождение силы (4.8). Очевидно, что заряженная нить действует на точечный заряд с кулоновской силой, нахождение которой аналогично соответствующему вычислению в случае покоящейся нити. Единственное отличие состоит в том, что плотность заряда движущейся нити увеличивается в соответствии с формулой (4.6). Поскольку перпендикулярные направлению движения длины остаются неизменными, то поперечное сечение  $S'_0$  движущейся нити равно поперечному сечению  $S_0$  неподвижной и расстояние  $y_0$  от движущейся нити до точечного заряда также остается неизменным. Поэтому вместо (4.2) получаем:

$$f_x = 0, \quad f_y = \frac{q\rho_0 S_0}{2\pi\epsilon_0 y_0} = \frac{q\rho' S'_0}{2\pi\epsilon_0 y'_0 \sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad f_z = 0. \quad (4.11)$$

Кулоновская сила обозначена маленькой буквой, так как заранее неизвестно, равна ли она соответствующей силе (4.8). Из сравнения (4.11) с (4.2) и (4.8) следует, что

$$f_y = F'_y / \sqrt{1-\beta^2}, \quad (4.12)$$

$$F_y = (1-\beta^2) f_y. \quad (4.13)$$

Это означает, что кулоновская сила отталкивания  $f_y$  больше, чем  $F_y$ , действующая на движущийся заряд со

стороны движущейся нити. Поэтому кроме кулоновской силы на движущийся заряд со стороны движущейся нити должна действовать еще другая сила, отличная от кулоновской, которая в данном случае является силой притяжения. Она возникает за счет движения зарядов и называется магнитной силой. Необходимость ее существования вытекает, как показывает формула (4.13), из самых общих релятивистских соображений. Поле, с помощью которого описывается магнитная сила, называется магнитным. Его существование является релятивистским эффектом независимо от скоростей зарядов, с которыми оно связано.

**Возникновение сил, зависящих от скорости, в релятивистской физике.** Предшествующий простой пример показал, что когда электрические заряды приводятся в движение, должны возникать силы, зависящие от скорости движения зарядов. Рассмотрим более подробно эти силы. Как обычно, система координат  $K'$  считается движущейся относительно системы  $K$  в направлении положительных значений оси  $X$  со скоростью  $v$ . Уравнения движения материальной точки в этих системах координат имеют такой вид:

$$dp_x/dt = F_x, \quad dp_y/dt = F_y, \quad dp_z/dt = F_z; \quad (4.14a)$$

$$dp'_x/dt' = F'_x, \quad dp'_y/dt' = F'_y, \quad dp'_z/dt' = F'_z. \quad (4.14b)$$

Найдем связь между силами в этих системах координат. Принимая во внимание формулы преобразования импульса

$$p_x = \frac{p'_x + (E'/c^2)v}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z \quad (\beta = v/c), \quad (4.15)$$

из (4.14a) находим:

$$F_x = \frac{d}{dt'} \left[ \frac{p'_x + (E'/c^2)v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right] \frac{dt'}{dt} = F'_x + \frac{vu'_y/c^2}{1 + vu'_x/c^2} F'_y + \frac{vu'_z/c^2}{1 + vu'_x/c^2} F'_z, \quad (4.16a)$$

$$F_y = \frac{dp'_y}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + vu'_x/c^2} F'_y, \quad (4.16b)$$

$$F_z = \frac{d\mathbf{p}'_z}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2} F'_z, \quad (4.16\text{в})$$

где  $u'_x$ ,  $u'_y$ ,  $u'_z$  — скорость точки в системе  $K'$ ,  $E'$  — ее полная энергия. При вычислениях (4.16а)—(4.16в) приняты во внимание преобразования Лоренца, уравнения (4.14б), а также соотношение

$$dE'/dt' = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}', \quad (4.17)$$

выражающее закон сохранения энергии. С помощью формул сложения скоростей

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2} \quad (4.18)$$

выражение (4.16а) можно привести к виду

$$F_x = F'_x + \frac{vu_y/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F'_y + \frac{vu_z/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F'_z. \quad (4.19\text{а})$$

Для дальнейшего преобразования выражений (4.16б) и (4.16в) воспользуемся хорошо известной формулой, следующей из преобразований Лоренца:

$$(1+vu'_x/c^2)(1-vu_x/c^2) = 1-\beta^2.$$

Тогда

$$F_y = \frac{1-vu_x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F'_y, \quad (4.19\text{б})$$

$$F_z = \frac{1-vu_x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F'_z. \quad (4.19\text{в})$$

Формулы (4.19) целесообразно записать в векторном виде. Обозначим

$$\mathbf{\Phi} = (F'_x, F'_y/\sqrt{1-\beta^2}, F'_z/\sqrt{1-\beta^2}), \quad (4.20\text{а})$$

$$\mathbf{G} = [0, -(v/c^2)F'_z/\sqrt{1-\beta^2}, (v/c^2)F'_y/\sqrt{1-\beta^2}]. \quad (4.20\text{б})$$

Тогда

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Phi} + \mathbf{u} \times \mathbf{G}. \quad (4.21)$$

Таким образом, если в некоторой системе отсчета сила

определяется только координатами, то в другой системе она неизбежно должна зависеть от скорости частицы, причем зависящая от скорости часть силы, выражаемая вторым слагаемым в (4.21), перпендикулярна скорости и, следовательно, не производит работы.

Применим эти формулы к взаимодействию заряженной нити и точечного заряда, которое было рассмотрено в первой части параграфа:

$$\begin{aligned}\Phi &= (0, F'_y/\sqrt{1-\beta^2}, 0), \\ \mathbf{G} &= [0, 0, (v^2/c^2)F'_y/\sqrt{1-\beta^2}],\end{aligned}\quad (4.22)$$

$$\mathbf{u} = (v, 0, 0).$$

С учетом (4.22) формула (4.21) приводит к заключению, что  $F_x=0$ ,  $F_z=0$ ,

$$F_y = F'_y/\sqrt{1-\beta^2} - (v^2/c^2)F'_y/\sqrt{1-\beta^2}. \quad (4.23)$$

Первый член в правой части (4.23) представляет кулоновскую силу отталкивания (4.12), а второй — магнитную силу притяжения [см. (4.13)]. Выражение (4.23) можно преобразовать к виду

$$F_y = (F'_y/\sqrt{1-\beta^2})(1 - v^2/c^2) = \sqrt{1-\beta^2}F'_y, \quad (4.24)$$

в котором оно совпадает с формулой (4.8).

**Магнитное поле прямого бесконечного тока.** Аналогично тому, как совершается переход трактовки взаимодействия зарядов по закону Кулона к полевой трактовке, вводится понятие магнитного поля. Можно сказать, что движущиеся заряды создают магнитное поле, которое в формуле (4.21) представлено вектором  $\mathbf{G}$ . Модуль этого вектора необходимо отнести к единице заряда. Поэтому магнитное поле  $\mathbf{B}$  определяется как  $\mathbf{G}/q$ . Электрическое поле представлено вектором  $\Phi$ , также отнесенным к единице заряда, т. е.  $\mathbf{E} = \Phi/q$ . Поэтому формула (4.21) в случае электромагнитного поля принимает вид

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (4.25)$$

где  $\mathbf{u}$  — скорость точечного заряда  $q$ . Это есть формула Лоренца.

Найдем магнитное поле  $\mathbf{B}$ , создаваемое бесконечной заряженной нитью, движущейся вдоль своей длины, эквивалентной прямому бесконечному току, плотность кото-

рого  $\rho v$ , а сила  $I = \rho v S_0$ , где  $\rho$  — плотность зарядов движущейся нити [см. (4.6)];  $v$  — скорость нити и  $S_0$  — площадь поперечного сечения. Из (4.22) видно, что индукция магнитного поля в точке, расположенной в плоскости  $XU$ , направлена по оси  $Z$ , т. е. перпендикулярно этой плоскости. Однако ориентировка плоскости  $XU$  относительно прямого тока, текущего вдоль оси  $X$ , совершенно произвольна, поскольку все направления, перпендикулярные прямому бесконечному току, равноценны. Поэтому вектор  $\mathbf{B}$  бесконечного прямого тока лежит в плоскостях, перпендикулярных линии тока. Он направлен по касательной к окружности, лежащей в соответствующей плоскости, концентрической прямому току. Это означает, что магнитные силовые линии являются окружностями, концентрическими с бесконечным прямым током. Значение  $B$  на некотором расстоянии от тока может быть вычислено на основании (4.22) с учетом (4.2). Принимая во внимание, что магнитное поле аксиально симметрично и зависит только от расстояния  $r$  от нити до точки поля и полагая в (4.2)  $y_0' = y_0 = r$ , находим

$$B = (G/q) = \frac{v}{c^2} \frac{\rho' S_0'}{2\pi\epsilon_0 y_0' \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{2\pi c^2 \epsilon_0} \frac{\rho v S_0}{r}, \quad (4.26)$$

где учтена формула (4.6). Так как  $\epsilon_0 c^2 = 1/\mu_0$  [см. (1.5)], а  $\rho v S_0 = I$  — сила тока, то

$$B = \mu_0 I / (2\pi r). \quad (4.27)$$

Это есть закон Био — Савара для прямолинейного бесконечного тока.

Из изложенного выше о возникновении и происхождении вектора  $\mathbf{B}$  видно, что сила, действующая на движущийся заряд, определяется этим вектором и поэтому следовало бы назвать этот вектор напряженностью магнитного поля, аналогично напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ . Однако исторически сложилось так, что этот вектор получил название вектора индукции магнитного поля или просто магнитной индукции. Изменять твердо установившуюся терминологию не имеет смысла и приходится пользоваться ею.

**Преобразование полей.** Из (4.25) можно найти формулы преобразования полей. Будем исходить из требования, что выражение (4.25) должно быть ковариантным.

Следовательно, для систем координат  $K'$  и  $K$  можно написать:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (4.28a)$$

$$\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}'). \quad (4.28б)$$

При этом считаем элементарный заряд  $q$  инвариантной величиной. Это рассматривается как экспериментальный факт. Соотношения между компонентами сил заданы формулами (4.19). В (4.19б) вместо  $F_y$  и  $F_y'$  подставим соответствующие компоненты из (4.28a) и (4.28б):

$$E_y + (u_z B_x - u_x B_z) = \frac{1 - vu_x/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} [E_y' + (u_z' B_x' - u_x' B_z')]. \quad (4.29)$$

Преобразовывая в правой части  $u_x'$  и  $u_z'$  по формулам сложения скоростей:

$$u_x' = (u_x - v)/(1 - vu_x/c^2), \quad u_z' = u_z \sqrt{1 - \beta^2}/(1 - vu_x/c^2)$$

и перенося все члены в левую часть, приводим равенство (4.29) к виду

$$\begin{aligned} & \left( E_y - \frac{E_y'}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{vB_z'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) + \\ & + \left( -B_z + \frac{vE_y'}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{B_z'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) u_x + (B_x - B_x') u_z = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Поскольку оно должно быть справедливо при любых значениях  $u_x$  и  $u_z$ , заключаем, что

$$E_y = \frac{E_y' + vB_z'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.31a)$$

$$B_x = B_x', \quad (4.31б)$$

$$B_z = \frac{B_z' + vE_y'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4.31в)$$



Аналогично, исходя из (4.19в), получаем следующие формулы преобразования:

$$E_z = \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.32a)$$

$$B_x = B'_x, \quad (4.32б)$$

$$B_y = \frac{B'_y - (v/c^2)E'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4.32в)$$

Для преобразования  $x$ -й компоненты силы удобно исходить из формулы (4.16а), записанной в виде

$$F_x = \frac{1}{1 + vu'_x/c^2} \left[ F'_x + \frac{v}{c^2} \mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}' \right]. \quad (4.33)$$

Поступая, как в предыдущих случаях, приводим равенство (4.33) к виду

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right) [E_x + (u_y B_z - v_z B_y)] - [E'_x + (u'_y B'_z - u'_z B'_y)] = \\ & = \frac{v}{c^2} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{u}', \end{aligned} \quad (4.34)$$

где  $\mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}' = q\mathbf{E}' \cdot \mathbf{u}'$ .

Воспользовавшись ранее выведенными формулами преобразований для  $B_y$  и  $B_z$  из (4.34), находим, что

$$E_x = E'_x. \quad (4.35)$$

Таким образом, формулы преобразования для векторов электромагнитного поля имеют такой вид:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, \quad B_x = B'_x, \\ E_y &= \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad B_y = \frac{B'_y - (v/c^2)E'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ E_z &= \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad B_z = \frac{B'_z + (v/c^2)E'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Обратные формулы преобразования в соответствии с принципом относительности получаются заменой  $v \rightarrow -v$  и величин со штрихами на величины без штрихов, и наоборот.

### § 5. ОБОБЩЕНИЕ ЗАКОНА ПОЛНОГО ТОКА

В случае постоянных токов проводимости имеет место закон полного тока, утверждающий, что циркуляция вектора индукции магнитного поля вдоль замкнутого контура равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на  $\mu_0$ :

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I, \quad (5.1)$$

где  $I$  — алгебраическая сумма всех токов, охватываемых произвольным замкнутым контуром  $L$ , т. е. полный ток проводимости. Направление обхода контура  $L$  при интегрировании составляет с направлением полного тока правовинтовую систему.

Закон полного тока может быть получен из закона Био — Савара для бесконечного прямолинейного тока. Индукция магнитного поля бесконечного прямолинейного тока на произвольном расстоянии  $r$  от него дается формулой

$$B = \mu_0 I / (2\pi r), \quad (5.2)$$

причем вектор индукции направлен по касательной к окружности радиуса  $r$  и центром на оси тока, проведенной в плоскости, перпендикулярной направлению тока. Запишем циркуляцию вектора  $\mathbf{B}$  вдоль произвольного замкнутого контура  $L$ , охватывающего ток, проведенного в плоскости, перпендикулярной направлению тока, в виде

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}. \quad (5.3)$$

Подынтегральное выражение в некоторой точке контура имеет вид

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B dl \cos(\mathbf{B}, \hat{d\mathbf{l}}). \quad (5.4)$$

Так как  $\mathbf{B}$  в каждой точке  $r$  направлен по касательной к окружности радиуса  $r$  с центром в точке пересечения

с рассматриваемой плоскостью, то можно заключить, что

$$dl \cos(\mathbf{B}, \hat{\mathbf{l}}) = dl_{\perp} \quad (5.5)$$

есть проекция элемента  $dl$  на направление, перпендикулярное радиус-вектору  $\mathbf{r}$ . Отсюда по определению угла в радианной мере следует, что

$$dl_{\perp}/r = d\alpha \quad (5.6)$$

есть угол, под которым элемент  $dl$  виден из центра окружности. Поэтому, пользуясь (5.2), можно написать

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I dl_{\perp} / (2\pi r) = \mu_0 I d\alpha / (2\pi). \quad (5.7)$$

Теперь интеграл по произвольному замкнутому контуру  $L$ , охватывающему ток, легко вычисляется:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int d\alpha = \mu_0 I. \quad (5.8)$$

Если же контур  $L$  не охватывает ток, то интеграл (5.8), очевидно, равен нулю. Если имеется несколько токов, то их магнитное поле является суммой полей, созданных каждым током в отдельности. Применяя к этой сумме полей доказанную формулу (5.8), получим

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i \oint_L \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{l}_i = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 I. \quad (5.9)$$

В (5.9) знак  $I_i$  зависит от направлений тока и обхода контура  $L$  при интегрировании. Если направление обхода контура  $L$  составляет с направлением тока  $I_i$  правую винтовую систему, то знак  $I_i$  положителен, в противном случае отрицателен. Таким образом, в формуле (5.9) ток  $I$  есть алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром  $L$ , или, что то же самое, полный ток, охватываемый этим контуром. Таким образом, закон полного тока доказан для бесконечных прямолинейных токов и для произвольного контура, лежащего в перпендикулярной направлению тока плоскости. Чтобы освободиться от этого ограничения, запишем закон (5.9) в дифференциальной форме. Полный ток  $I$ , охватываемый данным контуром  $L$ , равен

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (5.10)$$

где  $S$  — поверхность, натянутая на контур  $L$ .  
 Запишем формулу (5.9) в виде

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.11)$$

Левую часть этого равенства можно преобразовать согласно теореме Стокса:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.12)$$

Тогда соотношение (5.11) приобретает вид

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (5.13)$$

Так как поверхность  $S$  произвольна, то из (5.13) следует, что

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (5.14)$$

Это соотношение является дифференциальным, его вид не зависит от того, как ведет себя  $\mathbf{j}$  в других точках. Поэтому, хотя это соотношение и выведено для прямолинейных токов, оно справедливо для произвольных токов. Пусть  $S$  — поверхность натянутая на произвольный контур  $L$ , через которую течет произвольный ток  $I$ . Проинтегрируем обе части уравнения (5.14) по  $S$ :

$$\int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.15)$$

С помощью формул (5.12) и (5.10) получаем выражение (5.1) для произвольного тока и контура. Тем самым мы освободились от ограничений, при которых первоначально была получена формула (5.11), и доказали закон полного тока (5.1).

В предыдущем параграфе было отмечено, что магнитное поле создается не только током проводимости, но и током смещения, причем индукция, создаваемая током смещения, равна индукции создаваемой соответствующим ему по формуле (3.11) током проводимости. Поэтому естественным обобщением закона полного тока (5.1), записанного для тока проводимости, является применение этого закона и для тока смещения. Следовательно, под  $I$  в (5.1) следует понимать полный ток, равный сумме то-

ков проводимости и токов смещения, а вместо  $\mathbf{j}$  в (5.15) надо написать сумму плотностей тока проводимости и тока смещения. Поэтому обобщение этих уравнений имеет вид

$$\int_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left( \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}, \quad (5.16)$$

откуда

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5.17)$$

Соотношение (5.17) является одним из дифференциальных уравнений Максвелла.

## § 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА ЗАКОНА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

При изменении потока магнитной индукции  $\Phi$  через поверхность, ограниченную замкнутым проводником, в нем возникает электрический ток под действием электродвижущей силы индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ . Закон электромагнитной индукции Фарадея имеет вид

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -d\Phi/dt. \quad (6.1)$$

Знак минус учитывает связь между направлениями электродвижущей силы индукции и скорости изменения потока.

Электрический ток в проводнике появляется в результате возникновения электрического поля. Электродвижущая сила в замкнутом контуре  $L$  численно равна работе сил электрического поля при перемещении единичного положительного заряда вдоль этого контура:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (6.2)$$

Электродвижущую силу индукции выражают в вольтах. Поток магнитной индукции  $\Phi$ , по определению, дается формулой

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.3)$$

и выражается в веберах (Вб). С учетом (6.2) и (6.3) равенство (6.1) принимает следующий вид:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.4)$$

Явление электромагнитной индукции не связано с наличием замкнутого проводника. Изменение магнитной индукции всегда сопровождается возникновением электрического поля независимо от того, имеется ли проводник или нет. Замкнутый проводник лишь обеспечивает появление тока под действием электрического поля. Поэтому соотношение (6.4) справедливо для любого замкнутого контура, мысленно проведенного в пространстве.

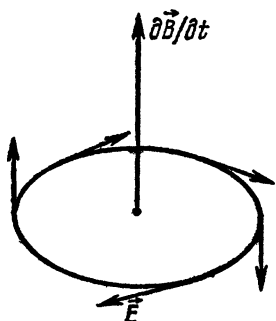


Рис. 4

Применяя к левой части (6.4) теорему Стокса и учитывая, что в правой части равенства поверхность интегрирования  $S$  от времени не зависит (так что производную по времени

можно внести под знак интеграла), получаем

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.5)$$

Так как поверхность  $S$  произвольна, то

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t. \quad (6.6)$$

Знак минус указывает, что вектор скорости изменения магнитной индукции и возникающая при этом в замкнутом контуре э. д. с. индукции составляют левовинтовую систему (рис. 4). Уравнение Максвелла (6.6) является дифференциальной формой закона электромагнитной индукции Фарадея.

## § 7. УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА $\text{div } \mathbf{B} = 0$

Применим к обеим частям уравнения (6.6) операцию дивергенции:

$$\text{div rot } \mathbf{E} = - \text{div} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (7.1)$$

Поскольку дивергенция ротора всегда равна нулю, то

$$0 = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B}.$$

Таким образом,  $\operatorname{div} \mathbf{B}$  не зависит от времени. Следовательно,  $\operatorname{div} \mathbf{B}$  при данном  $\mathbf{B}$  такая же, какой она является при других значениях  $\mathbf{B}$ , в частности при  $\mathbf{B} = 0$ . Но при  $\mathbf{B} = 0$  дивергенция равна нулю. Следовательно, она равна нулю и при любом  $\mathbf{B}$ , т. е. всегда

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (7.2)$$

Это уравнение указывает, что линии магнитной индукции  $\mathbf{B}$  не имеют ни начала, ни конца. А это означает, что не существует магнитных зарядов, которые создают магнитное поле подобно тому, как электрические заряды создают электрическое поле.

#### § 8. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ВАКУУМЕ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

**Система уравнений Максвелла.** Уравнения (2.17), (5.17), (6.6) и (7.2) составляют систему уравнений Максвелла в вакууме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (I)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (II) \quad (8.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (III)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0. \quad (IV)$$

**Полнота системы.** Уравнения (8.1) являются системой восьми скалярных уравнений для шести величин:  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$ . Заданными считают  $\rho$ ,  $j_x$ ,  $j_y$ ,  $j_z$ . Таким образом, число уравнений превосходит число неизвестных и система (8.1) кажется переполненной. Однако это совместная система уравнений, так как уравнения (II), (III) и (I), (IV) имеют одинаковые дифференциальные следствия и оказываются тем самым связанными между собой.

Одинаковость дифференциальных следствий уравнений (II) и (III) сразу видна, если от обеих частей (II) взять

операцию  $\text{div}$  и обе части уравнения (III) продифференцировать по времени. В этих случаях получается одно и то же уравнение  $\partial \text{div } \mathbf{V} / \partial t = 0$ .

Аналогично, с учетом закона сохранения заряда (3.6) уравнение (IV) можно рассматривать как дифференциальное следствие уравнения (I). Чтобы в этом убедиться, применим операцию  $\text{div}$  к уравнению (I):

$$\text{div rot } \mathbf{V} = \mu_0 \text{div } \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon \partial \text{div } \mathbf{E} / \partial t. \quad (8.2)$$

Учитывая, что  $\text{div rot} \equiv 0$ , получаем

$$\mu_0 \varepsilon \partial \text{div } \mathbf{E} / \partial t + \mu_0 \text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (8.3)$$

Сравнивая (8.3) с (3.6), видим, что

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0, \quad (8.4)$$

т. е. получаем уравнение (IV). Тем самым доказано, что оно является дифференциальным следствием уравнения (I) с учетом закона сохранения заряда (3.6).

Ввиду существования двух указанных дифференциальных связей между уравнениями (8.1) эта переполненная система оказывается совместной. Однако неверно думать, что какие-то шесть из этих уравнений независимы, а оставшиеся два — их следствия. Правильным будет утверждение, что восемь уравнений (8.1) являются совместной системой уравнений для шести независимых переменных благодаря наличию двух дифференциальных связей между уравнениями. Поэтому уравнения (8.1) совместно с начальными и граничными условиями полностью определяют два вектора:  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$ . Приведенные рассуждения, не являясь строгим доказательством, указывают на то, что система уравнений Максвелла является полной системой уравнений.

Доказательство единственности решения уравнений Максвелла для данного распределения зарядов и токов при заданных краевых и начальных условиях сводится в общих чертах к следующему. Допустим, что имеются два различных решения. В силу линейности уравнений Максвелла разность этих решений также является решением при нулевых токах и зарядах и нулевых начальных и граничных условиях. Отсюда, пользуясь выражением для энергии электромагнитного поля, которое будет получено в конце этого параграфа, и законом сохранения энергии, мы заключаем, что разность решений тождественно равна нулю.



венно равна нулю. Это означает, что решения равны друг другу, т. е. при указанных условиях решение уравнений Максвелла единственно.

**Закон сохранения энергии для электромагнитного поля.** Чтобы сравнивать выводы из уравнений Максвелла с экспериментом, необходимо еще иметь выражение энергии электромагнитного поля через векторы поля. Для получения этого выражения рассмотрим некоторый объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ .

Внутри него имеются электромагнитное поле и движущиеся заряды. Электрическое поле производит работу по изменению состояния движения зарядов. Сила со стороны магнитного поля работы не производит, поскольку она действует перпендикулярно скорости. Работа электрического поля напряженностью  $\mathbf{E}$  при перемещении заряда  $q$  на расстояние  $d\mathbf{r}$  равна

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Тогда мощность, т. е. работа, отнесенная к единице времени, равна

$$dA/dt = q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}/dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

Так как в единице объема содержится  $\rho/q$  зарядов, то плотность мощности работы электромагнитного поля  $(dA/dt) \rho/q = \mathbf{eE} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ . Поэтому полная мощность в объеме  $V$

$$P = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV. \quad (8.5)$$

Она характеризует превращение энергии электромагнитного поля в кинетическую энергию зарядов, заключенных в объеме  $V$ . К этому превращению энергии можно применить закон сохранения энергии, поскольку его всеобщая справедливость не вызывает сомнений. Для этого необходимо лишь убедиться, что нет никаких других форм и источников энергии, кроме рассматриваемых. В данном случае это очевидно.

Подставляя в равенство (8.5) выражение для  $\mathbf{j}$  из уравнения (I), находим

$$P = \frac{1}{\mu_0} \int_V \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{B} dV - \epsilon_0 \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dV. \quad (8.6)$$

На основании формулы (П.15) имеем

$$\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \text{div } \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (8.7)$$

что с учетом уравнения (8.1, II) для  $\text{rot } \mathbf{E}$  преобразовывает равенство (8.6) к виду

$$P = -\frac{1}{\mu_0} \int_V \text{div } \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV - \int_V \left( \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV. \quad (8.8)$$

Примем во внимание очевидные равенства:

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^2, \quad \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}^2$$

и учтем, что объем  $V$  от времени не зависит. Тогда, меняя порядок дифференцирования и интегрирования во втором члене правой части равенства (8.8), получаем

$$\int_V \left( \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_V \left( \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) dV \equiv \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (8.9)$$

Для преобразования первого интеграла в правой части равенства (8.8) воспользуемся теоремой Гаусса — Остроградского:

$$\frac{1}{\mu_0} \int_V \text{div } \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV = \frac{1}{\mu_0} \int_S \mathbf{E} \times \mathbf{B} d\sigma \equiv \int_S \mathbf{S} \cdot d\sigma, \quad (8.10)$$

$$\text{где } \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Следовательно, равенство (8.8) принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -P - \int_S \mathbf{S} \cdot d\sigma. \quad (8.11)$$

Оно выражает закон сохранения энергии для электромагнитного поля. В (8.10) и (8.11) поверхности обозначены  $\sigma$ .

**Энергия электромагнитного поля и вектор Пойнтинга.**

Величина

$$W = \frac{1}{2} \int_V \left( \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) dV \quad (8.12)$$

есть энергия электромагнитного поля, заключенного в объеме  $V$ . Равенство (8.11) показывает, что энергия электромагнитного поля в этом объеме изменяется в результате двух факторов: выделения джоулевой теплоты в единицу времени и потока энергии через поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ . Поскольку второй член правой части (8.11) учитывает поток электромагнитной энергии через поверхность, ограничивающую объем  $V$ , ясно, что вектор

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (8.13)$$

характеризует движение электромагнитной энергии в пространстве и называется вектором Пойнтинга.

**Интегральная форма уравнений Максвелла.** Уравнения (8.1) могут быть представлены в интегральной форме. Уравнения (I) и (II) преобразуются к интегральной форме в результате вычисления потока величин, стоящих в обеих частях уравнений, через поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$ , и использования теоремы Стокса. Например, из уравнения (I) следует, что

$$\int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (8.14)$$

По теореме Стокса,

$$\int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \quad (8.15)$$

поэтому

$$\int_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (8.16)$$

$$\text{где } I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} -$$

сила тока, текущего через поверхность  $S$ . Это и есть уравнение (I) в интегральной форме. Аналогично, уравнение (II) преобразуется к виду

$$\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (8.17)$$

Уравнения (III) и (IV) преобразуются к интегральному виду интегрированием обеих частей этих уравнений по объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ , и использованием теоремы Гаусса — Остроградского:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (8.18)$$

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} q, \quad (8.19)$$

где  $q = \int_V \rho dV$  — заряд, заключенный в объеме  $V$ .

**§ 9. ТИПЫ ПРОВОДИМОСТИ**

Электрический ток — это упорядоченное движение электрических зарядов. Основными носителями электрических зарядов являются электроны и ионы. Если электрический ток связан с движением электронов, то мы говорим об электронной проводимости, а если с движением ионов — об ионной проводимости. Например, электронной проводимостью обладают металлы, а ионной — электролиты. Может быть, конечно, и смешанная проводимость, когда электрический ток обуславливается движением как электронов, так и ионов, например проводимость ионизованных газов. Роль ионной и электронной проводимостей в последнем случае различна. Поскольку электроны являются более легкими и, следовательно, более подвижными частицами, чем ионы, на электронную проводимость обычно приходится большая по сравнению с ионной часть полного тока. Наряду с электронной и ионной проводимостями важное значение во многих явлениях имеет дырочная проводимость. Дыркой мы называем отсутствие электрона там, где он в принципе мог бы быть. Если дыру занимает некоторый электрон, то по закону сохранения заряда образуется дыра в том месте, откуда этот электрон переместился на место дыры. Таким образом, можно говорить о движении дыры. Движение дыры эквивалентно движению положительного заряда, равного заряду электрона, в направлении, противоположном движению электрона. Поэтому упорядоченное движение дыр приводит к возникновению электрического тока. Соответствующая проводимость называется дырочной. Наибольшую роль она играет в электропроводности полупроводников.

## § 10. ЗАКОНЫ ОМА И ДЖОУЛЯ — ЛЕНЦА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

**Дифференциальная форма закона Ома.** Если между некоторыми двумя точками в проводнике существует разность потенциалов, то между этими точками существует электрическое поле, приводящее в движение электрические заряды. Разность потенциалов между двумя точками численно равна работе сил электрического поля при перемещении единичного положительного заряда из одной точки в другую.

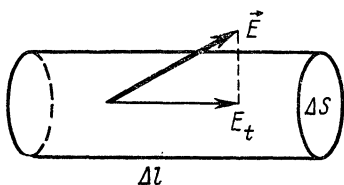


Рис. 5

Для получения закона Ома в дифференциальной форме применим известный из курса общей физики интегральный закон Ома к бесконечно малому цилиндру, мысленно выделенному в проводнике (рис. 5). Вдоль оси этого цилиндра течет ток  $\Delta I = j_t \Delta S$ , где  $\Delta S$  — площадь основания цилиндра, а  $j_t$  — составляющая плотности тока вдоль оси цилиндра. Ввиду бесконечной малости цилиндра можно внутри него электрическое поле считать постоянным и равным  $E$ . Разность потенциалов между основаниями цилиндра равна

$$\Delta\varphi = E_t \Delta l,$$

где  $E_t$  — проекция вектора электрической напряженности  $E$  на ось цилиндра. Таким образом, закон Ома для бесконечно малого цилиндра может быть записан в виде

$$\Delta\varphi = \Delta l \cdot \Delta R = j_t \Delta S \cdot \Delta R. \quad (10.1)$$

Величина, обратная удельному сопротивлению проводника, называется удельной проводимостью и обозначается  $\gamma$ . Сопротивление цилиндра при этом равно

$$\Delta R = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}. \quad (10.2)$$

Подставляя (10.2) в (10.1) и сокращая общие множители, находим

$$j_t = \gamma E_t. \quad (10.3)$$

Поскольку направление оси цилиндра было выбрано произвольно, равенство (10.3) справедливо для проекций входящих в него векторов  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  на произвольное направление. Следовательно, имеет место векторное уравнение

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}, \quad (10.4)$$

которое называется дифференциальной формой закона Ома. Уравнение (10.4) является одним из материальных уравнений, дополняющих уравнения электромагнитного поля. Обратим внимание, что в этом уравнении производных нет, а дифференциальным оно называется потому, что все входящие в него величины относятся к одной и той же точке поля.

**Дифференциальная форма закона Джоуля—Ленца.** Количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в проводнике с сопротивлением  $R$  при силе тока  $I$ , по закону Джоуля — Ленца, равно

$$P = I^2 R. \quad (10.5)$$

Применив этот закон к бесконечно малому цилиндру (рис. 5), ось которого совпадает с направлением тока, получаем

$$P = (j \Delta S)^2 \Delta l / (\gamma \Delta S). \quad (10.6)$$

Учитывая, что  $\Delta S \cdot \Delta l = \Delta V$  — объем бесконечно малого цилиндра, а  $P / \Delta V = \tilde{P}$  — количество теплоты, выделенной в единице объема за единицу времени, находим

$$\frac{P}{\Delta l \Delta S} = \tilde{P} = \frac{j^2}{\gamma}, \quad (10.7)$$

где  $\tilde{P}$  выражается в ваттах на кубический метр. Учитывая, что  $j^2 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$  и используя для  $\mathbf{j}$  выражение (10.4), можно соотношение (10.7) переписать в форме

$$\tilde{P} = j^2 / \gamma = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \gamma E^2. \quad (10.8)$$

Любое из этих равенств, в которых в левой части стоит  $\tilde{P}$ , является записью закона Джоуля — Ленца в дифференциальной форме.

## § 11. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ГАЗОВ

**Самостоятельный и несамостоятельный ток.** Электрический ток — это движение зарядов, поэтому он всегда связан с движением тех или иных носителей зарядов. Но-

сителями зарядов могут быть электроны, ионы и тяжелые заряженные частицы.

Газ, в котором отсутствуют заряженные частицы, не является проводником электричества. Газ становится проводником лишь при наличии ионизации, когда появляются носители электрических зарядов в виде свободных электронов и ионов. Положительными ионами являются атомы, молекулы или группы молекул, потерявшие один или несколько электронов. В зависимости от числа потерянных электронов ионы могут быть однозарядными или многозарядными. Отрицательными ионами являются атомы, молекулы или группы молекул, присоединившие к себе электроны. Эти ионы обычно однозарядные.

В нормальных условиях всякий газ является плохим проводником электричества. Он будет проводником лишь при наличии какого-либо постороннего фактора ионизации (высокая температура газа, ультрафиолетовое или рентгеновское излучение и т. д.). Если электрическое поле невелико, то ток через газ прекращается, как только прекращается действие постороннего фактора ионизации. Такой ток называется несамостоятельным.

Если электрическое поле достаточно велико, то оно само может вызвать ионизацию в газе, в результате которой газ станет проводником. Возникающий при этом ток называется самостоятельным. Какой-либо одной общей функциональной зависимости силы тока от приложенного напряжения для самостоятельного тока не существует. Все зависит от конкретных условий. В частности, нередко бывает, что сила самостоятельного тока при росте приложенного напряжения падает.

**Несамостоятельный ток.** Проанализируем более подробно несамостоятельный ток. Обозначим через  $N$  число ионов одного знака в единице объема. Пусть скорость образования ионов внешним источником ионизации, отнесенная к единице объема, равна  $dN/dt$ . В результате рекомбинации, т. е. взаимной нейтрализации ионов, число ионов уменьшается. Через достаточно большой промежуток времени, когда между процессами образования ионов и рекомбинации установится равновесие, можно считать, что число отрицательных ионов равно числу положительных:

$$N^{(+)} = N^{(-)} = N, \quad (11.1)$$

причем ионы предполагаются однозарядными.



Ясно, что скорость рекомбинации будет пропорциональна произведению концентраций ионов, т. е.  $N^2$ . Поэтому при равновесии

$$(dN/dt) = -rN^2, \quad (11.2)$$

где  $r$  — коэффициент рекомбинации. Плотность тока, очевидно, равна

$$j = j^{(+)} + j^{(-)} = q(N^{(+)}v^{(+)} + N^{(-)}v^{(-)}) = qN(v^{(+)} + v^{(-)}), \quad (11.3)$$

где  $v^{(+)}$  и  $v^{(-)}$  — скорости дрейфового упорядоченного движения соответственно положительных и отрицательных ионов под действием приложенного электрического поля. Скорость дрейфа иона в электрическом поле пропорциональна напряженности поля:

$$v = gE, \quad (11.4)$$

где  $g$  — подвижность иона. Этот коэффициент численно равен скорости дрейфа в электрическом поле с напряженностью  $E = 1$  В/м. Подвижности положительных и отрицательных ионов  $g^{(+)}$  и  $g^{(-)}$  различны. Равенство (11.3) с учетом (11.4) может быть переписано:

$$j = q(g^{(+)} + g^{(-)})NE. \quad (11.5)$$

По внешнему виду это выражение напоминает закон Ома. Однако оно является эквивалентным закону Ома лишь тогда, когда множитель при  $E$  не зависит от  $E$  и от  $j$ . В общем случае этот множитель зависит от указанных факторов, так что равенство (11.5) лишь формально похоже на закон Ома.

Если число рекомбинирующих ионов в газе в единицу времени много больше числа ионов, попадающих на электрод в единицу времени, то для определения концентрации  $N$  в формуле (11.5) можно воспользоваться ее равновесным значением из (11.2). В результате получаем

$$j = q(g^{(+)} + g^{(-)}) \sqrt{\frac{1}{r} \left| \frac{dN}{dt} \right|} E. \quad (11.6)$$

Для выяснения условий применимости этой формулы следует иметь в виду, что подвижности ионов при нор-

мальном давлении имеют величину порядка 1 см/с на 1 В/см, а коэффициент рекомбинации  $r \approx 10^{-6}$  см<sup>3</sup>/с. Например, если  $dN/dt$  порядка  $10^{10}$  ионов в 1 см<sup>3</sup>·с, а  $E = 10$  В/см, то число ионов, падающих на 1 см<sup>2</sup> электрода в единицу времени равно

$$\frac{j}{q} = (g^{(+)} + g^{(-)}) \left( \frac{1}{r} \left| \frac{dN}{dt} \right| \right)^{1/2} E \approx 2 \cdot 10^9. \quad (11.7)$$

Если расстояние между плоскими электродами 10 см, то между электродами на 1 см<sup>2</sup> поперечного сечения рекомбинирует  $10^{11}$  ионов в секунду, т. е. условие применимости формулы (11.6) в данном случае выполнено.

**Плотность тока насыщения.** Пусть расстояние между плоскими пластинами, между которыми проходит ток, равно  $d$ . Если электрическое поле достаточно велико, так что все образующиеся внешним источником ионы попадают на электроды раньше, чем они успеют рекомбинировать, то возникает плотность тока насыщения

$$j_{\text{нас}} = qd \left( \frac{dN}{dt} \right)_{\text{обр}}. \quad (11.8)$$

**Характеристика разряда.** В области промежуточных электрических полей часть ионов до попадания на электроды успевает рекомбинировать. Баланс потерь и образования ионов записывается в виде

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{\text{обр}} + \left( \frac{dN}{dt} \right)_{\text{рек}} + \left( \frac{dN}{dt} \right)_j = 0. \quad (11.9)$$

Принимая во внимание равенства (11.8), (11.2) и (11.3), получаем

$$j_{\text{нас}}/q - rN^2d - N(g^{(+)} + g^{(-)})E = 0. \quad (11.10)$$

Учитывая, что

$$j = qN(g^{(+)} + g^{(-)})E, \quad (11.11)$$

можно переписать (11.10) в виде уравнения относительно плотности тока  $j$ :

$$j^2 + 2aj - 2aj_{\text{нас}} = 0, \quad (11.12)$$

где

$$\alpha = \frac{|q|(g^{(+)} + g^{(-)})^2 E^2}{2rd}. \quad (11.13)$$

Положительный корень этого квадратного уравнения имеет вид

$$j = \alpha \left( \sqrt{1 + 2j_{\text{нас}}/\alpha} - 1 \right). \quad (11.14)$$

График плотности тока приведен на рис. 6. В предельных случаях  $\alpha \ll j_{\text{нас}}$  и  $\alpha \gg j_{\text{нас}}$  это решение переходит в формулы (11.6) и (11.8).

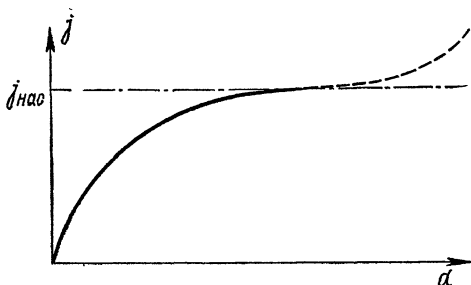


Рис. 6

Выражение (11.14) называется характеристикой разряда. Оно находится в хорошем согласии с экспериментом, если дополнительно учесть потери ионов вследствие диффузии.

**Самостоятельный ток.** Если после достижения тока насыщения продолжать увеличивать напряженность электрического поля, то при некотором значении поля сила тока снова начинает возрастать. Это происходит потому, что имеющиеся в газе электроны до присоединения к молекулам газа успевают ускориться благодаря большой напряженности поля до энергий, при которых они сами начинают ионизировать молекулы газа. В результате сама скорость ионизации начинает также зависеть от напряженности приложенного поля. Возникающий при этом ток является самостоятельным. На рис. 6 начальная часть характеристики этого тока обозначается пунктиром.

**Действие пространственного заряда.** Как было отмечено ранее, подвижность положительных и отрицательных ионов различна и обычно  $g^{(-)} > g^{(+)}$ . В связи с этим плотность тока за счет движения положительных ионов меньше плотности тока за счет движения отрицательных зарядов. Поэтому число положительных ионов, попадающих на катод, меньше числа отрицательных зарядов, по-

падающих на анод, хотя число образующихся и рекомбинирующих ионов одинаково. Очевидно, что такое состояние не может быть равновесным. Равновесное состояние достигается в результате движения положительных зарядов к катоду, а отрицательных — к аноду. У катода образуется избыток положительного заряда, а у анода — избыток отрицательного. Однако ввиду большей подвижности отрицательных зарядов избыток отрицательного заряда у анода будет меньше избытка положительного заряда у катода. В результате такого перераспределения концентрации зарядов и связанного с этим изменения электрического поля устанавливается равновесие, при котором число попадающих на электроды положительных и отрицательных зарядов одинаково.

**Подвижность ионов.** Ион с массой  $m$  и зарядом  $q$  в однородном поле  $E$  движется с постоянным ускорением

$$a = qE/m. \quad (11.15)$$

И в течение времени  $\tau$ , если начальная скорость иона равна нулю, проходит в направлении поля путь

$$s = qE\tau^2/(2m). \quad (11.16)$$

Если средний свободный пробег иона в газе  $l$ , а средняя скорость  $\langle v \rangle$ , то

$$\tau = l/\langle v \rangle. \quad (11.17)$$

Считая, что после каждого столкновения ион теряет полностью свою энергию упорядоченного движения, можно для скорости дрейфа на основании (11.16) и (11.17) написать

$$v_d = qE\tau/(2m) = qlE/(2m \langle v \rangle). \quad (11.18)$$

Уточнения, связанные с учетом статистического распределения среднего свободного пробега, приводят лишь к небольшому изменению числового коэффициента в формуле (11.18). Поэтому подвижность ионов

$$g = ql/(2m \langle v \rangle). \quad (11.19)$$

Из этой формулы видно, что подвижность положительных и отрицательных ионов должна быть одинаковой. Это действительно так, если только вклад электронов в подвижность отрицательных ионов мал. В противном случае за счет переноса заряда, обусловленного движе-

нием электронов, подвижность отрицательных ионов оказывается большей. Из формулы (11.19) видно, что подвижность должна быть обратно пропорциональна плотности газа, поскольку средняя длина свободного пробега  $l$  обратно пропорциональна плотности. Этот вывод подтверждается на опыте.

Однако в целом формула (11.19) не объясняет полностью экспериментальные факты. В частности, эксперимент дает для подвижностей в несколько раз меньшее значение, чем теория. Чтобы объяснить эти расхождения, Ланжевэн учел поляризацию ионов при приближении друг к другу во время столкновения. Благодаря ей ионы приобретают дипольные моменты и характер их столкновения меняется. Учет этого обстоятельства вносит существенные изменения в формулы. Однако в данном курсе излагать эту теорию не представляется возможным.

## § 12. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ЖИДКОСТЕЙ

Большинство чистых жидкостей являются плохими проводниками электричества. Это означает, что в них очень мало свободных носителей электрических зарядов. Растворы солей, кислот и щелочей в воде и некоторых других жидкостях хорошо проводят ток. Это обусловлено тем, что при растворении молекулы растворяемого вещества диссоциируют, т. е. распадаются на положительные и отрицательные ионы. Если при растворении ионы не образуются, то такой раствор не является проводником электричества.

Обозначим через  $N = N^{(+)} = N^{(-)}$  концентрацию ионов одного из знаков в растворе, тогда для плотности тока можно написать

$$j = q(g^{(+)} + g^{(-)})NE \quad (12.1)$$

(подвижности ионов в растворе определяют аналогично подвижности ионов в газах). Подвижность ионов в жидкостях много меньше подвижности ионов в газах и составляет обычно несколько тысячных сантиметра в секунду на 1 В/см.

Концентрация ионов зависит от диссоциации, характеризующейся коэффициентом  $\alpha$ , который определяется как отношение концентрации диссоциированных молекул  $N$  к концентрации молекул растворенного вещества  $N_0$ :

$$N = \alpha N_0. \quad (12.2)$$

Следовательно, концентрация недиссоциированных молекул равна

$$N' = (1 - \alpha) N_0. \quad (12.3)$$

В растворе происходят непрерывно диссоциация молекул и молизация ионов, т. е. соединение ионов в нейтральные молекулы. При равновесии диссоциация нейтрализуется молизацией. Число диссоциирующих молекул, очевидно, пропорционально числу недиссоциированных молекул (12.3):

$$\Delta N = \beta (1 - \alpha) N_0, \quad (12.4)$$

где  $\beta$  — коэффициент пропорциональности. Число молизирующих молекул  $\Delta N'$  пропорционально произведению концентраций положительных и отрицательных ионов:

$$\Delta N' = \gamma \alpha^2 N_0^2, \quad (12.5)$$

где  $\gamma$  — коэффициент пропорциональности. При равновесии

$$\Delta N = \Delta N'. \quad (12.6)$$

Отсюда с учетом (12.4) и (12.5) находим следующую формулу, связывающую степень диссоциации с концентрацией растворенного вещества:

$$(1 - \alpha)/\alpha^2 = \gamma N_0/\beta. \quad (12.7)$$

Видно, что диссоциация зависит от концентрации растворенного вещества. При очень слабой концентрации, когда  $N_0 \approx 0$ , из (12.7) имеем

$$\alpha \approx 1, \quad (12.8)$$

т. е. диссоциация близка к полной.

Если диссоциация мала, т. е.  $\alpha \ll 1$ , то из (12.7) получаем

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}, \quad (12.9)$$

т. е. диссоциация уменьшается при увеличении концентрации растворенного вещества.

Формула (12.1) с учетом (12.2) может быть записана в виде

$$j = q(g^{(+)} + g^{(-)}) \alpha N_0 E. \quad (12.10)$$

Движение ионов жидкости в широких пределах можно рассматривать как движение в вязкой среде. Для таких движений скорость движения пропорциональна приложенной силе. В данном случае приложенная сила пропорциональна напряженности поля. Следовательно, скорость ионов пропорциональна напряженности электрического поля:

$$v = gE, \quad (12.11)$$

где  $g$  — подвижность, которая согласно сказанному не зависит от напряженности. Лишь при очень сильных полях порядка миллионов вольт на сантиметр наблюдается отклонение от прямой пропорциональности между полем и скоростью движения ионов. Диссоциация в формуле (12.10) также в широких пределах не зависит от поля  $E$ . Следовательно, вплоть до очень больших электрических полей в миллионы вольт на сантиметр формула (12.10) выражает закон Ома. Поэтому для электропроводности раствора можно написать

$$\gamma = q(g^{(+)} + g^{(-)})\alpha N_0. \quad (12.12)$$

При небольших концентрациях диссоциация согласно (12.8) является величиной постоянной, сумма подвижностей ионов  $g^{(+)} + g^{(-)}$  также приблизительно постоянна. Следовательно, при небольших концентрациях электропроводность пропорциональна концентрации. При больших концентрациях зависимость электропроводности от концентрации значительно усложняется. С одной стороны, необходимо учитывать зависимость диссоциации от концентрации, как это видно из (12.7) и (12.9), а с другой стороны подвижность ионов также начинает заметно зависеть от концентрации и в концентрированных растворах уменьшается, поскольку начинает играть роль электрическое взаимодействие ионов друг с другом. Поэтому при больших концентрациях прямой пропорциональности между электропроводностью и концентрацией раствора не наблюдается.

### § 13. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ МЕТАЛЛОВ

**Опыты Толмена.** Электропроводность металлических проводников обуславливается движением свободных электронов, которые в виде электронного газа находятся

в проводнике. Наличие свободных электронов в металлическом проводнике обнаруживается в некоторых механических опытах. Представим себе проволочную катушку, которая может вращаться вокруг своей оси. Концы катушки с помощью скользящих контактов замкнуты на

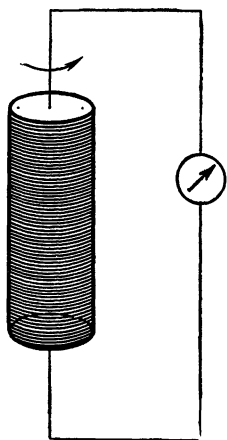


Рис. 7

гальванометр (рис. 7). Если находящуюся в быстром вращении катушку резко затормозить, то свободные электроны проволоки по инерции продолжают двигаться вперед, в результате чего гальванометр должен зарегистрировать импульс тока. Обозначим через  $\dot{v}$  линейное ускорение проводника катушки при торможении. Это ускорение направлено по касательной к окружности катушки. Если проводники катушки достаточно тонки и плотно намотаны, то можно считать, что ускорение направлено вдоль проводника. При торможении вращения катушки на каждый свободный электрон действует сила инерции —  $m\dot{v}$ , которая направлена противоположно ускорению  $\dot{v}$ . Электрон под

действием этой силы ведет себя в металле так же, как если бы на него действовало некоторое эффективное электрическое поле

$$E_{эф} = -m\dot{v}/e. \quad (13.1)$$

Таким образом, эффективная электродвижущая сила в катушке, обусловленная инерцией свободных электронов, равна

$$\mathcal{E}_{эф} = \int_L E_{эф} dl = -\frac{m}{e} \dot{v} \int_L dl = -\frac{m}{e} \dot{v} L. \quad (13.2)$$

где  $L$  — длина проводника, намотанного на катушку. Все точки проводника катушки тормозятся с одинаковым ускорением, поэтому  $\dot{v}$  в (13.2) вынесена за знак интеграла.

Обозначая  $I$  — силу тока, протекающего по замкнутой цепи, а  $R$  — сопротивление всей цепи, можно записать



закон Ома для нее в виде

$$IR = -m\dot{v}L/e. \quad (13.3)$$

Заряд, протекающий через поперечное сечение проводника в течение времени  $dt$  при силе тока  $I$ , равен

$$dq = Idt = -\frac{m}{e} \frac{L}{R} \dot{v} dt = -\frac{m}{e} \frac{L}{R} dv. \quad (13.4)$$

Поэтому в течение всего времени торможения катушки от начальной линейной скорости  $v_0$  до полной остановки через гальванометр пройдет заряд

$$q = \int dq = -\frac{m}{e} \frac{L}{R} \int_{v_0}^0 dv = \frac{m}{e} \frac{L}{R} v_0. \quad (13.5)$$

Значение  $q$  находится по показаниям гальванометра, значения  $L$ ,  $R$ ,  $v_0$  известны. Поэтому можно определить как знак, так и значение  $e/m$ . Эксперименты показали, что наблюдаемый с помощью гальванометра ток действительно обусловлен движением электронов.

**Элементарная теория электропроводности.** Обозначим через  $N$  концентрацию электронов проводимости в металле. Проводимость в металлах в первом приближении можно представить так же, как и в газах (см. § 11), только вместо ионов носителями заряда являются электроны. Под действием электрического поля электроны ускоряются, затем в результате столкновения с атомами вещества теряют свою скорость, затем снова ускоряются и т. д. Повторяя рассуждения, приводящие к формуле (11.18), получим для скорости дрейфа электронов в металле формулу

$$v_d = e l E / (2m \langle v \rangle), \quad (13.6)$$

где  $m$ ,  $\langle v \rangle$  и  $l$  — соответственно масса электрона, средняя скорость беспорядочного движения электронов и средняя длина свободного пробега электрона при столкновении с атомами металла. Тогда плотность тока

$$j = e v_d N = e^2 l N E / (2m \langle v \rangle). \quad (13.7)$$

Сравнивая (13.7) с дифференциальной формой закона Ома, видим, что электропроводность металлического проводника равна

$$\gamma = e^2 l N / (2m \langle v \rangle). \quad (13.8)$$

**Закон Джоуля — Ленца.** Изложенное представление о механизме проводимости позволяет также получить правильное выражение закона Джоуля — Ленца. К концу свободного пробега скорость электрона на основании (11.15) равна

$$v_{\text{кон}} = a\tau = eEl/(m \langle v \rangle). \quad (13.9)$$

Следовательно, при столкновении с атомами металла электрон передает ему свою кинетическую энергию

$$E_{\text{к}} = \frac{mv_{\text{кон}}^2}{2} = \frac{e^2 E^2 l^2}{2m \langle v \rangle^2}. \quad (13.10)$$

Среднее число столкновений электрона с атомами в единицу времени равно  $\langle v \rangle/l$ . Поэтому  $N$  электронов, находящихся в единице объема, передают в единицу времени металлу энергию

$$\tilde{P} = E_{\text{к}} \frac{\langle v \rangle}{l} N = \frac{1}{2} \frac{e^2 l}{m \langle v \rangle} N E^2. \quad (13.11)$$

Формула (13.8) показывает, что это равенство выражает закон Джоуля — Ленца

$$\tilde{P} = \gamma E^2. \quad (13.12)$$

**Недостаточность классической теории электропроводности.** Несмотря на наглядность и естественность изложенной элементарной теории электропроводности, она не в состоянии дать правильные количественные результаты. Эксперимент показывает, что электропроводность убывает обратно пропорционально первой степени абсолютной температуры ( $\gamma \sim T^{-1}$ ). Понять такую зависимость на основании формулы (13.8) невозможно, потому что  $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$ , а допустить, что  $lN \sim 1/\sqrt{T}$ , нельзя. Другое противоречие связано с теплоемкостью проводников. Допустим, что в проводнике имеется большое число свободных электронов, которые движутся подобно газу. На основании теоремы о равномерном распределении энергии по степеням свободы можно сделать вывод, что средняя кинетическая энергия электронов равна средней кинетической энергии молекул металла. Для получения разумных значений электропроводности мы должны допустить, что число свободных электронов приблизительно равно числу атомов металла, что приводит к сущест-

венному возрастанию теплоемкости проводников по сравнению с теплоемкостью диэлектриков. Однако этого не наблюдается. Получается, что электроны проводника участвуют в электропроводности, но не влияют на теплоемкость проводника.

Трудно также понять в рамках классических представлений следующее. Чтобы формулу (13.8) согласовать с экспериментом, приходится для длины свободного пробега  $l$  принять очень большие величины, в тысячи раз превосходящие расстояния между атомами. Все эти противоречия имеют принципиальный характер. Преодолеть их различного рода усовершенствованиями классической теории не удается.

Квантовая теория дала совершенно другую трактовку явления электропроводности, используя представление зонной теории твердых тел. Эта трактовка будет изложена в курсе квантовой механики и теории атома.

**Методы расчета сопротивления среды электрическому току.** Если постоянный ток течет по тонким проводникам, то, зная проводимость материала проводника, легко найти его сопротивление  $R$  и записать закон Ома для проводника:

$$RI = U, \quad (13.13)$$

где  $I$  — сила тока в проводнике;  $U$  — напряжение между электродами, к которым подсоединен проводник. В случае тонкого проводника

$$R = l/\gamma S, \quad (13.14)$$

где  $\gamma$ ,  $l$  и  $S$  — соответственно проводимость, длина и площадь поперечного сечения проводника.

При расчете силы токов, протекающих по массивным проводникам сложной формы или в проводящих средах, такой простой метод не проходит. Пусть, например, электроды опущены в землю, проводимость которой известна. Спрашивается: каково будет сопротивление земли электрическому току между электродами? Другой пример. Электродами являются два коаксиальных цилиндра различных радиусов, пространство между которыми заполнено проводящей средой с проводимостью  $\gamma$ . Спрашивается: каково сопротивление среды между электродами в цилиндрической области? Существует общий метод решения подобного рода задач, который сводится к следующему.

По определению, сопротивлением среды между двумя электродами называется отношение разности потенциалов между электродами к силе тока, протекающего между ними. Линии тока и плотность тока могут быть найдены с помощью дифференциального закона Ома:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}.$$

Поэтому в общем случае первый шаг при решении задачи заключается в определении электрического поля, порождаемого электродами известной формы, находящихся при заданных потенциалах. Решение такого рода задач было рассмотрено раньше. Определив вид силовых линий поля, мы тем самым определим вид линий тока. Плотность тока в каждой точке равна  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ . Тем самым задача нахождение тока оказывается полностью решенной. Но в большинстве случаев нет необходимости знать вид линий тока и плотность тока во всех точках, а достаточно лишь знать соотношение между разностью потенциалов на электродах и силой тока, протекающего между электродами, т. е. достаточно лишь знать сопротивление среды. В этом случае полезно соотношение между сопротивлением и емкостью, которая существовала бы между электродами, если бы проводящая среда была удалена. Это соотношение может быть получено следующим образом. Сила тока, который течет от одного электрода к другому, равна

$$I = \int_{S'} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \gamma \int_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (13.15)$$

где  $S'$  — почти замкнутая поверхность, окружающая электрод, за исключением небольшой площадки, через которую ток протекает к электроду. Если электрод рассматривать как изолированный проводник, находящийся под определенным потенциалом, то, по теореме Гаусса,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0, \quad (13.16)$$

где  $S$  — замкнутая поверхность, окружающая электрод;  $q$  — заряд на электроде. Поскольку  $S$  и  $S'$  отличаются очень малой площадью, интеграл по  $S'$  (в 13.15) незначительно отличается от интеграла по  $S$  в (13.16), так что можно написать

$$I = \gamma q/\epsilon_0. \quad (13.17)$$

Электрическая емкость между двумя электродами, рассматриваемыми как пластины конденсатора, равна  $C = q/U$ , где  $U$  — разность потенциалов между пластинами. Поэтому равенство (13.17) можно написать в виде

$$I = \gamma C U / \epsilon_0. \quad (13.18)$$

Учитывая определение сопротивления (13.13), получаем выражение для сопротивления между электродами:

$$R = \epsilon_0 / \gamma C. \quad (13.19)$$

Таким образом, если емкость между двумя электродами и проводимость среды известны, то сопротивление между электродами может быть вычислено по формуле (13.19). В качестве примера определим сопротивление среды, заключенной между двумя коаксиальными цилиндрическими электродами с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ . Проводимость среды  $\gamma$ , длина цилиндрических электродов  $l$ . Емкость цилиндрического конденсатора указанных размеров дается формулой

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln r_2/r_1}.$$

Поэтому сопротивление между рассматриваемыми цилиндрическими электродами согласно формуле (13.19) равно

$$R = \frac{\ln r_2/r_1}{2\pi l \gamma}.$$

**ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ДИЭЛЕКТРИКИ****§ 14. УРАВНЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

При постоянстве во времени всех величин уравнения Максвелла для вакуума (8.1) разбивают на две группы:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; & & \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \\ (I) & & (II) \end{aligned} \quad (14.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Это означает, что в стационарном случае электрическое и магнитное поля теряют между собой связь и их можно рассматривать изолированно друг от друга. Как показывают уравнения (14.1), в этом случае единственным источником магнитного поля являются токи проводимости, а электрического поля — заряды. Порождение же магнитного поля изменяющимся электрическим полем и порождение электрического поля изменяющимся магнитным полем в стационарном случае не имеет места. Существует еще один источник магнитного поля — магнитный момент элементарных частиц, связанный с их спином. Однако классическая теория Максвелла не в состоянии объяснить природу магнитного момента, хотя включить в сферу своего описания порождаемое магнитными моментами элементарных частиц поле она может.

Область электростатических явлений характеризуется не только стационарностью электрических полей, но и требованием отсутствия электрических токов. Поэтому уравнениями электростатики в вакууме являются уравнения (I) в (14.1) при дополнительном условии  $\mathbf{j} = 0$ .

**§ 15. УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

**Уравнения.** Предположим, что материальные тела в пространстве отсутствуют. Возникает вопрос, как же могут оставаться в покое заряды, если имеется действующая

щее на них электрическое поле? На этот вопрос ответить в рамках электростатики нельзя. Можно даже доказать, что какая-либо равновесная электростатическая конфигурация зарядов невозможна. Поэтому картина неподвижных зарядов в вакууме в условиях электростатического поля является идеализацией. Допустим, что существуют некоторые силы, которые удерживают заряды в местах их расположения, причем эти силы считаем такими, что они не изменяют электрическое поле, создаваемое зарядами.

Аналогично можно пользоваться понятием поверхностного заряда, допуская, что заряд расположен на некоторой поверхности в пространстве и удерживается на ней некоторыми силами, природа которых не уточняется. Существенно лишь, что эти силы не должны изменять поля, создаваемые поверхностными зарядами. Плотность поверхностных зарядов, т. е. заряд, приходящийся на единицу площади поверхности, обозначаем  $\sigma$ . Следовательно, заряд, приходящийся на элемент площади  $dS$  поверхности, равен  $\sigma dS$ .

**Граничные условия.** Если представить себе некоторую поверхность с поверхностным зарядом  $\sigma$ , то сразу можно заметить, что электрическое поле, создаваемое им, направлено по разным сторонам поверхности в противоположных направлениях. Следовательно, напряженность электрического поля испытывает скачкообразное изменение на заряженной поверхности, т. е. не является непрерывной функцией. Уравнения, связывающие напряженность электрического поля по разные стороны поверхности, называют граничными условиями.

**Граничное условие для нормальной составляющей вектора  $\mathbf{E}$ .** Это условие выводится с помощью уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0. \quad (15.1)$$

Рассмотрим достаточно малый цилиндр, пересеченный поверхностью раздела двух сред 1 и 2 (рис. 8). Нормаль к поверхности раздела сред примем направленной в сторону второй среды. Основания цилиндра имеют площади  $S_2$  и  $S_1$ , причем поверхности оснований параллельны поверхности раздела. Площадь сечения цилиндра поверхностью раздела обозначим  $S_0$ , площадь боковой поверхности цилиндра  $S_{\text{бок}}$ , высоту цилиндра  $h$ .

Проинтегрируем обе части уравнения (15.1) по объему цилиндра:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (15.2)$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса — Остроградского, находим

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0. \quad (15.3)$$

Вектор  $d\mathbf{S}$  направлен вдоль нормали  $\mathbf{n}$  при интегрировании по поверхности  $S_2$  и в противоположном направлении

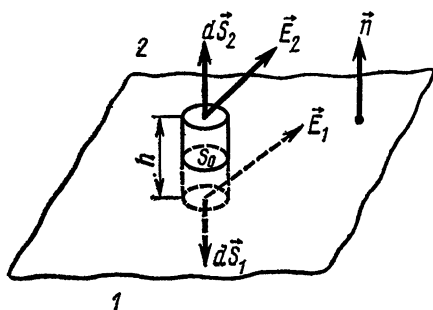


Рис. 8

нии при интегрировании по  $S_1$ . Так как цилиндр достаточно мал, то изменением  $\mathbf{E}$  при интегрировании в каждой из сред можно пренебречь, тогда

$$\int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = |\mathbf{E}_2| S_2 \cos(\mathbf{E}_2, \hat{\mathbf{n}}) = E_{2n} S_2, \quad (15.4)$$

$$E_{2n} = |\mathbf{E}_2| \cos(\mathbf{E}_2, \hat{\mathbf{n}}).$$

Здесь учтено, что направление  $d\mathbf{S}$  на поверхности  $S_2$  совпадает с направлением выбранной нами положительной нормали к поверхности раздела. Индексы у  $E_{2n}$  означают, что мы берем нормальную составляющую вектора  $\mathbf{E}$  во второй среде. Аналогично вычисляется интеграл по поверхности  $S_1$ , однако вектор  $d\mathbf{S}$  на этой поверхности



имеет направление, противоположное выбранному положительному направлению нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности раздела сред:

$$\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = |\mathbf{E}_1| S_1 \cos(\mathbf{E}_1, \hat{-\mathbf{n}}) = -E_{1n} S_1. \quad (15.5)$$

Интеграл по боковой поверхности можно вычислить с помощью теоремы о среднем:

$$\int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \langle E_{\text{бок}} \rangle S_{\text{бок}}, \quad (15.6)$$

где  $\langle E_{\text{бок}} \rangle$  — среднее значение вектора индукции на боковой поверхности.

С учетом (15.4), (15.5) и (15.6) равенство (15.3) может быть записано в виде

$$E_{2n} S_2 - E_{1n} S_1 + \langle E_{\text{бок}} \rangle S_{\text{бок}} = q/\epsilon_0. \quad (15.7)$$

Очевидно, что при  $h \rightarrow 0$

$$S_1 \rightarrow S_0, \quad S_2 \rightarrow S_0, \quad S_{\text{бок}} \rightarrow 0. \quad (15.8)$$

Поэтому в пределе  $h \rightarrow 0$  получим

$$(E_{2n} - E_{1n}) S_0 = q/\epsilon_0 \quad (15.9)$$

и, поскольку  $(q/S_0) = \sigma$ ,

$$E_{2n} - E_{1n} = \sigma/\epsilon_0. \quad (15.10)$$

**Граничное условие для тангенциальной составляющей вектора напряженности электрического поля.** Это условие выводится с помощью уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (15.11)$$

Пересечем поверхность раздела достаточно малой прямоугольной площадкой  $S$ , ограниченной контуром  $L$  (рис. 9). Она пересекает поверхность раздела по линии  $l_0$ . Пусть стороны площадки  $l_2$  и  $l_1$  параллельны поверхности раздела. Длину сторон площадки, пересекающих поверхность раздела, обозначим  $l_{\text{бок}}$ . Проинтегрируем уравнение (15.11) по поверхности  $S$ :

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (15.12)$$

Левая часть этого равенства преобразуется по теореме Стокса:

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{l_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_{\text{бок}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (15.13)$$

В качестве положительного направления обхода контура  $L$  примем направление, указанное на рис. 9. Тогда

$$\int_{l_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = |\mathbf{E}_2| l_2 \cos(\mathbf{E}_2, \widehat{dl_2}) = E_2 l_2. \quad (15.14)$$

Аналогично,

$$\int_{l_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = |\mathbf{E}_1| l_1 \cos(\mathbf{E}_1, \widehat{-dl_1}) = -E_1 l_1. \quad (15.15)$$

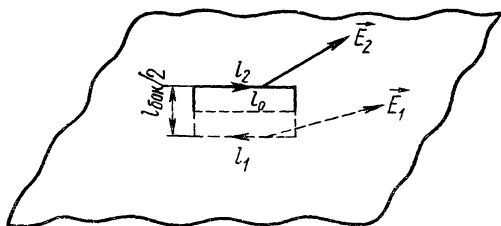


Рис. 9

Интеграл по  $l_{\text{бок}}$  вычисляют с помощью теоремы о среднем:

$$\int_{l_{\text{бок}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \langle E_{\text{бок}} \rangle l_{\text{бок}}. \quad (15.16)$$

Более точное знание этого интеграла не потребуется, поскольку в дальнейшем весь контур будет стянут к линии  $l_0$  и интеграл обратится в нуль. Таким образом, соотношение (15.12) можно записать в виде

$$E_2 l_2 - E_1 l_1 + \langle E_{\text{бок}} \rangle l_{\text{бок}} = 0. \quad (15.17)$$

Пусть  $l_{\text{бок}}$  стремится к нулю, при этом, очевидно, вся поверхность  $S$  стянется к линии  $l_0$ :

$$l_2 \rightarrow l_0, \quad l_1 \rightarrow l_0, \quad l_{\text{бок}} \rightarrow 0, \quad S \rightarrow 0. \quad (15.18)$$

Значение  $\langle E_{\text{бок}} \rangle$  при таком предельном переходе остается конечным. Следовательно, в пределе

$$(E_{2t} - E_{1t})l_0 = 0,$$

откуда

$$E_{2t} = E_{1t}. \quad (15.19)$$

Таким образом, тангенциальная составляющая вектора электрической напряженности непрерывна. Однако тангенциальная составляющая вектора электрической индукции при этом претерпевает разрыв.

## § 16. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

**Уравнения электростатики.** Уравнения электростатического поля и граничные условия имеют такой вид:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad E_{2n} - E_{1n} = \sigma / \epsilon_0, \quad (16.1)$$

$$\epsilon_0 \text{div } \mathbf{E} = \rho, \quad E_{2t} - E_{1t} = 0. \quad (16.2)$$

**Потенциальность электростатического поля.** Векторное поле, ротор которого равен нулю, называется потенциальным. Электростатическое поле является потенциальным, поскольку

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (16.3)$$

В нем работа сил при перемещении заряда из одной точки в другую зависит не от пути, по которому производится это перемещение, а только от начальной и конечной точек пути. Это непосредственно следует из условия (16.3). Пусть имеются два различных пути  $C$  и  $C'$ , связывающих точки  $A$  и  $B$  (рис. 10). Работа сил поля при перемещении единичного положительного заряда по замкнутому контуру, состоящему из путей  $C$  и  $C'$ , равна

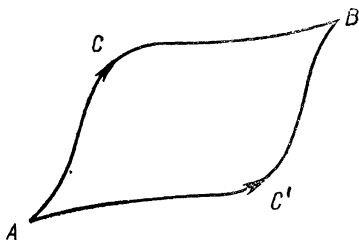


Рис. 10

$$\oint_{C, -C'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (16.4)$$

где  $S$  — поверхность, натянутая на данный контур. В (16.4) использованы теорема Стокса и условие (16.3). Таким образом,

$$\int_{C, -C'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{-C'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{C'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (16.5)$$

т. е.

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (16.6)$$

Пути  $C$  и  $C'$  совершенно произвольны.

**Скалярный потенциал.** Независимость работы сил поля от пути, по которому перемещается заряд между двумя точками, обуславливает существование такой скалярной функции  $\varphi$ , разностью значений которой в конечной и начальной точках пути определяется эта работа. Такая скалярная функция  $\varphi$  называется скалярным потенциалом.

Поскольку ротор градиента всегда равен нулю, то общим решением уравнения (16.3) является

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (16.7)$$

причем знак минус возник исторически и никакого принципиального значения не имеет. Благодаря наличию знака минус в формуле (16.7) вектор напряженности электрического поля направлен в сторону уменьшения потенциала. На основании (16.7) выражение для интеграла (16.6) может быть записано в виде

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B (-\text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l}) = - \int_A^B d\varphi = \varphi(A) - \varphi(B). \quad (16.8)$$

В (16.8) учтено, что

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l}, \quad (16.9)$$

поскольку компонентами вектора перемещения  $d\mathbf{l}$  являются  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ . Равенство (16.8) показывает, что работа при перемещении заряда между двумя точками действительно выражается через разность потенциалов этих точек.

**Нормировка потенциала.** Сам по себе потенциал является вспомогательной величиной. Его числовое значение

не имеет какого-либо физического смысла и не может быть измерено. Физический смысл имеет лишь разность потенциалов, которая может быть определена экспериментально. Но эта разность потенциалов не изменится, если к значению потенциала во всех точках пространства прибавить одну и ту же постоянную величину, поскольку при вычислении разности потенциалов эта произвольная постоянная величина сократится. Поэтому можно сказать, что потенциал определен лишь с точностью до аддитивной постоянной, которая может быть выбрана произвольно. Пользуясь этим, можно потенциал в любой фиксированной точке сделать равным любой наперед заданной величине. Тогда потенциал всех остальных точек оказывается определенным однозначно. Такая процедура придания однозначности скалярному потенциалу называется нормировкой потенциала. В практической электротехнике в качестве условия нормировки потенциала обычно принимают равным нулю потенциал Земли. В теоретической физике обычно полагают, что потенциал равен нулю на бесконечности, если заряды расположены в конечной области пространства.

При такой нормировке потенциал  $\varphi(\infty) = 0$  равенство (16.8) в случае, когда точка  $B$  находится в бесконечности, приводит к соотношению

$$\varphi(A) = \int_A^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (16.10)$$

где форма пути интегрирования является произвольной. Для практического вычисления этот путь целесообразно выбрать наиболее удобным для интегрирования.

**Потенциал точечного заряда.** Поле точечного заряда  $q$  является сферически симметричным. Следовательно, потенциал точечного заряда также является сферически симметричным. Он зависит только от расстояния  $r$  между точкой, в которой вычисляется потенциал, и точечным зарядом, который создает этот потенциал. Принимая во внимание, что напряженность поля точечного заряда на расстоянии  $r$  от него равна

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (16.11)$$

и пользуясь формулой (16.10), получаем

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (16.12)$$

При вычислении (16.12) в качестве пути интегрирования выбран путь вдоль радиус-вектора. Таким образом, потенциал точечного заряда  $q$  на расстоянии  $r$  от него прямо пропорционален заряду, деленному на это расстояние. Наоборот, зная потенциал  $\varphi$  как функцию координат, нетрудно определить напряженность электрического поля по формуле (16.7).

**Потенциал системы точечных зарядов.** Если имеются два точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$ , каждый из которых в отдельности создает поля  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ , то полная напряженность поля, образуемого двумя зарядами, равна

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -\text{grad } \varphi_1 - \text{grad } \varphi_2 = -\text{grad } \varphi,$$

где  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ . Таким образом, потенциал суммы точечных зарядов равен сумме потенциалов, созданных каждым точечным зарядом в отдельности. Поэтому потенциал системы зарядов  $q_i$  равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i},$$

где  $r_i$  — расстояние от заряда  $q_i$  до точки, в которой вычисляют потенциал  $\varphi$ . Если координаты точки, где определяется потенциал  $\varphi$ , обозначить  $(x, y, z)$ , а координаты заряда  $q_i$  —  $(x_i, y_i, z_i)$ , то последнюю формулу более подробно можно написать в виде

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}. \quad (16.13)$$

**Потенциал непрерывно распределенных зарядов.** В случае непрерывного распределения зарядов с плотностью  $\rho$  весь объем разбивают на бесконечно малые элементы  $\Delta V_i$ , содержащие заряды  $\rho_i \Delta V_i$ . В пределе  $\Delta V_i \rightarrow 0$  к этим зарядам можно применить формулу (16.13) для потенциала суммы точечных зарядов. В ре-

зультате получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\rho_i \Delta V_i}{r_i} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}. \end{aligned} \quad (16.14)$$

Если заряд распределен на поверхности  $S$  с поверхностной плотностью  $\sigma$ , то аналогично предыдущему случаю получаем выражение

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r}. \quad (16.15)$$

**Конечность потенциала при непрерывном распределении заряда с конечной плотностью.** Формула (16.14) для непрерывного распределения заряда получена обобщением формулы (16.13) для системы точечных зарядов, однако между этими формулами имеется существенное различие. Формула (16.13) для точечного заряда дает для потенциала в точке нахождения заряда бесконечное значение ( $1/r \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ ). Потенциал же (16.14) при непрерывном распределении заряда с конечной плотностью имеет конечное значение во всех точках. Утверждение станет очевидным, если этот потенциал найти по формуле (16.14) в точке  $(x, y, z)$ , принятой за начало координат ( $x=0, y=0, z=0$ ). Вычисление удобно вести в сферической системе координат, элемент объема в которой равен

$$dx' dy' dz' = r'^2 \sin \theta' d\theta' d\alpha' dr'.$$

При этом выражение (16.14) принимает вид

$$\varphi(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(r', \alpha', \theta') r' \sin \theta' d\theta' d\alpha' dr'.$$

Отсюда видно, что если  $\rho$  во всех точках конечно (а это предполагается) и заряды расположены в конечной области пространства, то потенциал  $\varphi$  действительно во всех точках конечен.

Бесконечность потенциала  $\varphi$  в точке нахождения точечного заряда обуславливается бесконечной величиной плотности заряда, поскольку мы принимаем объем, в ко-

тором расположен заряд, равным нулю. При переходе к непрерывному распределению заряда в бесконечно малом объеме находится бесконечно малый заряд, так что плотность заряда во всех точках конечна. Благодаря этому оказывается конечным во всех точках пространства и потенциал  $\varphi$ .

Если имеются как поверхностные, так и объемные заряды, то формулы (16.14) и (16.15) можно записать в виде одной:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r}. \quad (16.16)$$

Однако такой путь прямого вычисления потенциала не всегда целесообразен, поскольку иногда приводит к очень сложным вычислениям. С другой стороны, применимость этой формулы требует специального анализа, если заряды не расположены в конечной области пространства. В указанных случаях удобнее свести задачу о нахождении потенциала к решению дифференциального уравнения.

## § 17. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

**Вывод уравнений.** Для получения дифференциального уравнения, которому подчиняется потенциал  $\varphi$ , подставим в уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (17.1)$$

выражение напряженности поля через потенциал:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (17.2)$$

Учтем, что

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi, \quad (17.3)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (17.4)$$

— оператор Лапласа.

Поэтому уравнение (17.1) после подстановки в него  $\mathbf{E}$  из (17.2) приобретает вид

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon_0. \quad (17.5)$$



Это есть уравнение Пуассона. В той области пространства, где  $\rho=0$ , это уравнение переходит в уравнение Лапласа:

$$\nabla^2\varphi=0. \quad (17.6)$$

**Свойства потенциала.** В предыдущем параграфе было показано, что потенциал  $\varphi$  всюду конечен. Ясно также, что производные потенциала  $\varphi$  по координатам должны быть всюду конечными, так как бесконечность этих производных означала бы бесконечность электрического поля, что физически бессмысленно. Их конечность выражает непрерывность  $\varphi$ . Таким образом, можно сказать, что потенциал  $\varphi$  является непрерывной и конечной функцией с конечными производными по координатам. Это есть требования, которые налагаются на решение дифференциального уравнения (17.5). Ранее было показано, что общим выражением для потенциала, создаваемого объемными зарядами, распределенными в конечной области пространства, является выражение (16.16). Ясно, что для  $\varphi$  оно должно удовлетворять уравнению (17.5), в чем можно убедиться непосредственной подстановкой (16.16) в (17.5).

Во многих случаях потенциал удобнее находить как решение дифференциального уравнения Пуассона (17.5). Это обусловлено тем, что после введения потенциала по формуле (17.2) сразу удовлетворяется уравнение (16.3), а задача нахождения трех функций  $E_x(x, y, z)$ ,  $E_y(x, y, z)$ ,  $E_z(x, y, z)$  сводится к определению одной функции  $\varphi(x, y, z)$ . Другое важное преимущество использования уравнения Пуассона для вычисления потенциала состоит в его более широкой применимости. Формула (16.16) предполагает, что все заряды находятся в конечной области пространства, благодаря чему имеет смысл нормировка потенциала в бесконечности на нуль. Уравнение же Пуассона не предполагает определенной нормировки потенциала и отсутствия зарядов на бесконечности.

**Бесконечная заряженная пластина.** В качестве примера найдем потенциал, создаваемый бесконечной пластиной толщиной  $a$ , заряженной с постоянной объемной плотностью  $\rho$ . Предполагается, что диэлектрическая проницаемость во всем пространстве, включая пластину, постоянна и равна  $\epsilon_0$ . Систему координат выберем так, чтобы оси  $X$  и  $Y$  лежали в средней плоскости пластины. Ясно, что потенциал зависит только от координаты  $z$ ,

поскольку в направлениях  $X$  и  $Y$  пластина бесконечная и заряжена равномерно. Поэтому уравнение Пуассона (17.5) в различных областях записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} &= 0 \text{ при } z \leq -\frac{a}{2}, \\ \frac{d^2\varphi_2}{dz^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon} \text{ при } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}, \\ \frac{d^2\varphi_3}{dz^2} &= 0 \text{ при } z > \frac{a}{2}. \end{aligned} \quad (17.7)$$

Решения выражаются формулами:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 z + B_1, \\ \varphi_2 &= -\rho z^2 / (2\varepsilon_0) + A_2 z + B_2, \\ \varphi_3 &= A_3 z + B_3. \end{aligned} \quad (17.8)$$

В качестве условия нормировки допустим, что потенциал в средней плоскости равен нулю:  $\varphi_2(0) = 0$ . Из (17.8) следует, что для этого необходимо положить

$$B_2 = 0. \quad (17.9)$$

Из-за условий симметрии поле в средней плоскости ( $Z=0$ ) равно нулю. Это приводит к равенствам

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \text{ т. е. } A_2 = 0. \quad (17.10)$$

Воспользовавшись непрерывностью потенциала и его производной при  $z = \pm a/2$ :

$$\varphi_1\left(-\frac{a}{2}\right) = \varphi_2\left(-\frac{a}{2}\right); \quad \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{z=-a/2} = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=-a/2}, \quad (17.11)$$

$$\varphi_2\left(\frac{a}{2}\right) = \varphi_3\left(\frac{a}{2}\right); \quad \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=+a/2} = \left. \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right|_{z=+a/2},$$

для постоянных получаем:

$$\begin{aligned} A_1 &= \rho a / (2\varepsilon_0), \quad B_1 = \rho a^2 / (8\varepsilon_0), \\ A_3 &= -\rho a / (2\varepsilon_0), \quad B_3 = \rho a^2 / (8\varepsilon_0). \end{aligned}$$

Тогда искомое решение (17.8) принимает такой вид:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{a}{2} \left( z + \frac{a}{4} \right) && \text{при } z < -\frac{a}{2}; \\ \varphi_2 &= -\frac{\rho}{2\epsilon_0} z^2 && \text{при } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}; \\ \varphi_3 &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{a}{2} \left( -z + \frac{a}{4} \right) && \text{при } z > \frac{a}{2}.\end{aligned}\quad (17.12)$$

Для поля  $E_z = -\partial\varphi/\partial z$  находим:

$$\begin{aligned}E_z &= -\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{a}{2} && \text{при } z < -\frac{a}{2}; \\ E_z &= -\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} z && \text{при } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}; \\ E_z &= -\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{a}{2} && \text{при } z > \frac{a}{2}.\end{aligned}\quad (17.13)$$

Таким образом, поле от средней плоскости до поверхности пластины линейно растет с расстоянием, будучи направленным в противоположные стороны по разные стороны средней плоскости. На поверхностях пластины поле по абсолютному значению достигает максимальной величины. Вне пластины поле постоянно и равно этой максимальной величине.

**Бесконечный равномерно заряженный круглый цилиндр.** В качестве другого примера использования уравнения Пуассона рассмотрим потенциал бесконечного цилиндра радиусом  $a$ , равномерно заряженного с объемной плотностью  $\rho = \text{const}$ .

Направим ось  $Z$  вдоль оси цилиндра. Из-за аксиальной симметрии распределения заряда потенциал  $\varphi$  также аксиально симметричен, т. е.  $\varphi = \varphi(r)$ . Поэтому удобно использовать цилиндрическую систему координат, аксиальный угол в которой обозначим  $\alpha$ . В ней оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.\quad (17.14)$$

Так как потенциал  $\varphi$  зависит только от  $r$ , то в данном случае выражение (17.14) упрощается:

$$\nabla^2\varphi = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right),\quad (17.15)$$

и уравнение Пуассона (17.5) приобретает такой вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{при } 0 < r < a; \quad (17.16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = 0 \quad \text{при } r > a.$$

Общие решения этих уравнений находят непосредственным интегрированием:

$$\varphi_1 = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + A_1 \ln r + B_1, \quad (17.17)$$

$$\varphi_2 = A_2 \ln r + B_2.$$

Поскольку потенциал во всех точках должен быть конечным, а  $\ln r \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ , то в решении (17.17) необходимо положить  $A_1 = 0$ . Удобно нормировать потенциал условием  $\varphi_1(0) = 0$ . При этом

$$B_1 = 0. \quad (17.18)$$

Условия непрерывности потенциала и его производной при  $r = a$  дают два алгебраических уравнения относительно неизвестных  $A_2$  и  $B_2$ :

$$A_2 \ln a + B_2 = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} a^2, \quad (17.19)$$

$$\frac{A_2}{a} = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} a.$$

Тогда

$$\varphi_1(r) = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 \quad \text{при } 0 < r < a, \quad (17.20)$$

$$\varphi_2(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} a^2 \ln \frac{a}{r} - \frac{\rho}{4\epsilon_0} a^2 \quad \text{при } r > a.$$

Напряженность электрического поля выражается формулами:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \quad \text{при } 0 < r < a, \quad (17.21)$$

$$E_r = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{a^2}{r} \quad \text{при } r > a.$$

Таким образом, внутри цилиндра поле растет с расстоянием прямо пропорционально радиусу, а вне цилиндра оно убывает обратно пропорционально радиусу.

## § 18. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

**Отсутствие электростатического поля внутри проводника.** Проводниками называют тела, в которых при наличии электрического поля возникает движение зарядов, т. е. электрический ток. Математически проводники характеризуют тем, что их проводимость  $\gamma \neq 0$ . Поскольку в электростатике рассматривается случай неподвижных зарядов ( $\mathbf{j}=0$ ), из уравнения

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} = 0 \quad (18.1)$$

следует, что в проводнике при отсутствии движения зарядов, т. е. при электростатическом равновесии,

$$\mathbf{E} = 0. \quad (18.2)$$

Следует отметить, что поле в проводнике равно нулю только тогда, когда в нем отсутствуют токи, а заряды находятся в равновесии. Когда внутри проводника имеются токи, напряженность электрического поля, обуславливающего их существование, отлична от нуля.

**Отсутствие в проводнике объемных зарядов.** Поскольку при электростатическом равновесии поле внутри проводника отсутствует, то

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (18.3)$$

Поэтому из уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (18.4)$$

следует, что объемная плотность  $\rho$  зарядов внутри проводника равна нулю:

$$\rho = 0. \quad (18.5)$$

Заряды в проводнике концентрируются на поверхности в слое атомарной толщины. Если проводник заряжается, то благодаря силам отталкивания одноименных зарядов последние распределяются по поверхности так, чтобы поле внутри проводника отсутствовало. Если после этого проводник внести во внешнее электростатическое поле, то заряды на поверхности проводника вновь перераспределяются так, что поле внутри проводника, являющееся

суммой внешнего поля и поля, создаваемого поверхностными зарядами проводника, остается по-прежнему равным нулю. Это явление перераспределения зарядов на поверхности проводника при внесении проводника во внешнее электростатическое поле называется электростатической индукцией.

**Поле вблизи поверхности проводника.** Электрическое поле вблизи поверхности проводника может быть найдено из граничных условий. Взяв в качестве положительной нормали  $\mathbf{n}$  внешнюю нормаль к поверхности проводника, мы должны в граничных условиях

$$\varepsilon_0 E_{2n} - \varepsilon_0 E_{1n} = \sigma, \quad E_{2t} = E_{1t} \quad (18.6)$$

индексом 2 обозначить пространство вне проводника, а индексом 1 — пространство внутри проводника. В формуле (18.6) учтено, что диэлектрическая проницаемость проводника приблизительно равна диэлектрической проницаемости вакуума. Учитывая, что внутри проводника электрическое поле равно нулю:

$$E_{1n} = E_{1t} = 0, \quad (18.7)$$

из (18.6) получаем для составляющих поля вне проводника:

$$E_{2n} = \sigma/\varepsilon, \quad E_{2t} = 0. \quad (18.8)$$

Таким образом, поле вне проводника у его поверхности направлено по внешней нормали, а по абсолютному значению равно  $\sigma/\varepsilon$ :

$$\mathbf{E} = \sigma \mathbf{n} / \varepsilon. \quad (18.9)$$

Отсутствие тангенциальной составляющей поля вблизи поверхности проводника очевидно: такая составляющая должна привести в движение заряды вдоль поверхности проводника. Равновесие наступает тогда, когда такое движение прекращается, т. е. когда тангенциальная составляющая станет равной нулю.

**Потенциал проводника.** Из равенства нулю напряженности  $\mathbf{E}$  поля внутри проводника следует постоянство потенциала вдоль всего проводника. Если  $\varphi(A)$  и  $\varphi(B)$  являются потенциалами точек  $A$  и  $B$  проводника, то на основании (16.8) получаем

$$\varphi(A) - \varphi(B) = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \text{т. е. } \varphi(A) = \varphi(B). \quad (18.10)$$

Поэтому можно говорить о потенциале проводника. Оче-

видно, он зависит от формы и заряда проводника, от распределения зарядов на других проводниках в окружающем пространстве.

**Емкость проводника.** Если взять уединенный проводник, т. е. проводник, удаленный от других тел и зарядов достаточно далеко, чтобы эти тела и заряды не вызывали перераспределения зарядов на рассматриваемом проводнике, то его потенциал зависит только от формы проводника и заряда.

Емкостью проводника называется отношение заряда уединенного проводника к его потенциалу:

$$C = q/\varphi. \quad (18.11)$$

Если проводник не уединен, то его потенциал зависит от формы, зарядов и расположения других проводников. Емкость проводника выражают в фарадах. Из (18.11) следует единица емкости:

$$[C] = \Phi = \text{Кл/В.}$$

В системе СГС емкость выражают в сантиметрах, а формула емкости совпадает с (18.11). Поскольку  $1\text{В} = \frac{1}{300}$  ед. СГС<sub>φ</sub>,  $1\text{Кл} = 3 \cdot 10^9$  ед. СГС<sub>q</sub>, то из (18.11)

следует, что

$$1\Phi = 9 \cdot 10^{11} \text{ см.}$$

**Металлический экран.** Электрическое поле в точках внутри проводника является суммой двух полей: 1) поля, создаваемого поверхностными зарядами проводника, 2) внешнего электрического поля, в которое помещен проводник. Поверхностные заряды проводника перераспределяются всегда так, что создаваемое ими поле внутри проводника компенсирует внешнее поле и полное поле внутри проводника равно нулю. Как отмечалось, поверхностные заряды расположены вблизи поверхности проводника в слое атомарной толщины. Диэлектрическую проницаемость проводника примем равной диэлектрической постоянной. Если всю внутренность проводника вырезать, за исключением тонкого приграничного слоя, в котором сосредоточиваются поверхностные заряды, то поле не изменится; поверхностные заряды в проводящем приграничном слое (оболочке) распределяются так, что поле в полости равно нулю. Такая проводящая оболочка называется экраном. Она экранирует внутреннюю полость от внешних полей; поле внутри по-

лости не зависит от полей вне экранирующей оболочки. Теперь представим себе некоторую полость в бесконечной проводящей среде. Если внутри этой полости поместить заряды, то на ее поверхности будут индуцированы

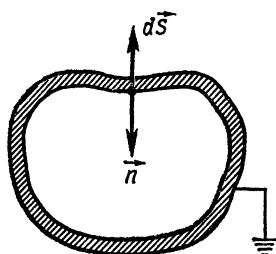


Рис. 11

заряды противоположного знака. Ниже будет показано, что общий заряд, индуцированный на поверхности полости, равен по абсолютному значению заряду, заключенному внутри полости. Такой же по значению, но одноименный по знаку заряд уйдет по проводящей среде в бесконечность. В электростатическом случае поле внутри проводящей среды должно быть равно нулю. Оно создается зарядами, заключенными внутри полости, и зарядами, индуцированными на поверхности полости.

Если убрать проводящую среду, оставив полость, окружающую металлическую оболочку, в которой расположены индуцированные поверхностные заряды, то поле не изменится: поле вне оболочки будет по-прежнему равно нулю. Таким образом, проводящая оболочка, соединенная проводником с бесконечно удаленной точкой («заземленная оболочка»), экранирует пространство вне полости от зарядов, заключенных внутри полости: поле вне оболочки не зависит от полей внутри полости.

Если некоторая полость окружена заземленной проводящей оболочкой, то эта оболочка является экраном: электростатическое поле внутри полости не зависит от электростатических полей, существующих вне полости, и, наоборот, поле вне полости не зависит от полей, существующих внутри полости.

Выше было высказано утверждение, что на внутренней поверхности экрана индуцируется заряд, равный по значению, но противоположный по знаку заряду, заключенному в полости. Для доказательства применим к объему, ограниченному экраном, теорему Гаусса, выбрав в качестве поверхности интегрирования внутреннюю поверхность экрана (рис. 11):

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (18.12)$$



Учтем, что у поверхности проводника

$$\mathbf{E} = \sigma \mathbf{n} / \epsilon_0, \quad (18.13)$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности проводника, которая в данном случае направлена противоположно внешней нормали к объему  $V$ . Следовательно,

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} dS (\cos(\mathbf{n}, \hat{d}\mathbf{S}) = -1). \quad (18.14)$$

Тогда

$$-\int_S \sigma dS = \int_V \rho dV. \quad (18.15)$$

Как показывает опыт, металлический экран не обязательно делать из сплошного проводника. Достаточно хорошая экранировка обеспечивается экранами из мелкой металлической сетки.

В технике экранирующие оболочки применяют очень широко. Защитная свинцовая оболочка кабеля играет роль экрана, благодаря которому поле проводов внутри кабеля не выходит за пределы кабеля, а поэтому исключается электростатическое влияние кабеля на близлежащие провода линий связи.

**Конденсаторы.** Конденсатором называется совокупность двух проводников, разность потенциалов между которыми определяется зарядами проводников. Проводники называются обкладками конденсатора. Они заряжаются равными по значению, но противоположными по знаку зарядами. При этом между обкладками возникает определенная разность потенциалов, пропорциональная заряду на обкладках. Емкостью конденсатора называется отношение заряда пластины к разности потенциалов между пластинами:

$$C = \frac{|Q|}{|\varphi_1 - \varphi_2|}. \quad (18.16)$$

Простейшим конденсатором является плоский. Он представляет собой две параллельные проводящие пластины, расположенные одна от другой на расстоянии, много меньшем линейных размеров пластин. Эта оговорка о достаточно малом расстоянии между пластинами необходима для возможно более полного соблюдения условия экранирования пространства между обкладками конденсатора.

сатора. Экранировка будет тем более полной, чем больше линейные размеры пластин по сравнению с расстоянием между ними.

Широкое распространение имеют цилиндрические и шаровые конденсаторы. Цилиндрический конденсатор представляет собой совокупность двух коаксиальных проводящих цилиндров, расстояние между стенками которых много меньше высоты цилиндров. Шаровой конденсатор состоит из двух концентрических проводящих сфер. В шаровом конденсаторе наиболее полно удовлетворяется требование полной экранировки внутреннего поля.

В качестве примера вычислим емкость шарового конденсатора, внутренняя сфера которого имеет радиус  $R_1$ , внешняя —  $R_2$ . Пространство между обкладками характеризуется диэлектрической постоянной  $\epsilon_0$ . Пусть заряд конденсатора (т. е. заряд каждой из пластин) равен  $q$ . Проведем мысленно концентрическую сферу радиусом  $R$  ( $R_1 \leq R \leq R_2$ ) и воспользуемся теоремой Гаусса:

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0. \quad (18.17)$$

Учитывая, что поле сферически симметрично и вектор  $\mathbf{E}$  параллелен радиус-вектору, проведенному из центра сферы, получаем

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \int_{\mathcal{S}} dS = 4\pi R^2 E. \quad (18.18)$$

Отсюда с учетом (18.17) следует

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}. \quad (18.19)$$

Это означает, что равномерно заряженная сфера создаст во внешнем пространстве такое поле, как если бы весь заряд сферы был сосредоточен в ее центре. Для вычисления разности потенциалов путь интегрирования удобно выбрать вдоль радиус-вектора, проведенного из центра сферы. Тогда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{R_1}^{R_2} E dR = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}. \quad (18.20)$$

Вычисляя емкость по формуле (18.16), находим

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (18.21)$$

Аналогично вычисляют емкость и других конденсаторов.

**Система проводников.** Если имеется несколько проводников, то потенциал каждого проводника не связан с зарядом этого проводника простой формулой (18.11). В этом случае потенциал проводника зависит от заряда, формы и расположения всех остальных проводников. Если имеется  $N$  проводников, потенциалы которых  $\varphi_i$ , а заряды  $q_i$ , то ввиду того, что потенциал суммы зарядов равен сумме потенциалов отдельных зарядов, можно написать следующие выражения для потенциалов отдельных проводников:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} q_j, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (18.22)$$

Коэффициенты  $\alpha_{ij}$  называются потенциальными. Они зависят от формы и размеров проводников, от их взаимного расположения и диэлектрической проницаемости среды. Теоретическое вычисление этих коэффициентов является обычно сложной математической задачей. Поэтому их чаще определяют экспериментально.

Потенциальные коэффициенты  $\alpha_{ij}$  не являются независимыми друг от друга. В этом можно убедиться следующим образом. Пусть  $\sigma_j$  есть поверхностная плотность заряда на  $j$ -м проводнике. Тогда для потенциала  $i$ -го проводника можно написать следующее выражение:

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \int_{S_j} \frac{\sigma_j dS_j}{r_{ij}}, \quad (18.23)$$

где  $r_{ij}$  — расстояние между элементом поверхности интегрирования  $j$ -го проводника и некоторой произвольной фиксированной точкой  $i$ -го проводника. В сумме (18.23) присутствует также и член с  $i=j$ .

Заряд  $i$ -го проводника равен

$$q_i = \int_S \sigma_i dS_i. \quad (18.24)$$

Пусть заряды проводников изменялись, так что заряд  $i$ -го проводника стал равным

$$q'_i = \int_{S_i} \sigma'_i dS_i. \quad (18.25)$$

Умножим обе части равенства (18.23) на  $q'_i$  и просуммируем их по всем значениям  $i$ :

$$\begin{aligned} \sum_i q'_i \varphi_i &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\sigma'_i \sigma_j dS_i dS_j}{r_{ij}} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j} \int_{S_j} \sigma_j dS_j \int \frac{\sigma'_i dS_i}{r_{ij}} = \sum_j q_j \varphi'_j, \end{aligned} \quad (18.26)$$

где порядки интегрирования изменены, так как интегрирование проводят по разным независимым переменным. Таким образом, получено соотношение

$$\sum_i q'_i \varphi_i = \sum_j q_j \varphi'_j, \quad (18.27)$$

которое называется теоремой взаимности. Из нее получается условие, которому удовлетворяют потенциальные коэффициенты  $\alpha_{ij}$ . Пусть в первом случае заряды всех проводников, за исключением  $k$ -го, равны нулю. Тогда (18.22) имеет вид

$$\varphi_i = \alpha_{ik} q_k. \quad (18.28)$$

Предположим, что во втором случае заряды всех проводников, за исключением  $l$ -го, равны нулю. Условие (18.22) в этом случае гласит:

$$\varphi'_i = \alpha_{il} q'_l. \quad (18.29)$$

Теорема (18.27) приобретает в данном случае вид

$$q'_l \alpha_{lk} q_k = q_k \alpha_{kl} q'_l, \quad (18.30)$$

откуда

$$\alpha_{lk} = \alpha_{kl}. \quad (18.31)$$

Это есть искомое условие для потенциальных коэффициентов  $\alpha_{ij}$ . Система уравнений (18.22) может быть решена

на относительно зарядов  $q_i$ :

$$q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \varphi_j, \quad (18.32)$$

где  $C_{ij} = A_{ij}/D$ . Здесь  $D$  — детерминант из коэффициентов системы уравнений (18.22),  $A_{ij}$  — дополнение элемента  $a_{ij}$  в этом детерминанте. На основании (18.31) можно заключить, что коэффициенты  $C_{ij}$  удовлетворяют условию

$$C_{ij} = C_{ji}. \quad (18.33)$$

При  $i \neq j$  они называются коэффициентами взаимной емкости, а при  $i = j$  — коэффициентами емкости или просто

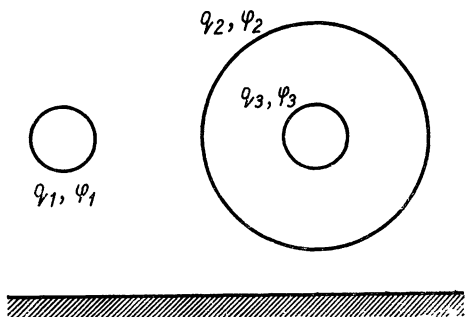


Рис. 12

емкостями. Поскольку положительный заряд на изолированном проводнике создает положительный потенциал, то можно заключить, что коэффициенты емкости всегда положительны. С другой стороны, рассмотрим два проводника, из которых один заземлен, а другой изолирован и заряжен положительно. Этот положительный заряд вследствие явления электростатической индукции наведет на заземленном проводнике отрицательный заряд. Отсюда с помощью (18.32) можно заключить, что коэффициенты взаимной емкости являются либо отрицательными, либо равными нулю.

В качестве примера рассмотрим три проводящие сферы (рис. 12). Заряды и потенциалы этих трех проводников будем обозначать соответственно через  $q_1, \varphi_1; q_2, \varphi_2$  и

$q_3, \varphi_3$ . Для определения  $C_{ij}$  имеем уравнения (18.32), которые в данном случае можно записать так:

$$\begin{aligned} q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + C_{13}\varphi_3, \\ q_2 &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + C_{23}\varphi_3, \\ q_3 &= C_{31}\varphi_1 + C_{32}\varphi_2 + C_{33}\varphi_3. \end{aligned} \quad (18.34)$$

Чтобы определить коэффициенты, необходимо создать нужное число ситуаций и измерить соответствующие  $q_i$  и  $\varphi_i$ .

Предположим, что  $q_3=0$  и вторая сфера заземлена. Ясно, что в этом случае  $\varphi_3=\varphi_2=0$  и, следовательно, уравнения (18.34) принимают следующий вид:

$$q_1 = C_{11}\varphi_1, \quad q_2 = C_{21}\varphi_1, \quad 0 = C_{31}\varphi_1. \quad (18.35)$$

Тогда  $C_{31}=C_{23}=0$ , т. е. коэффициент индукции между двумя проводниками, заэкранированными один от другого, равен нулю. Предположим, что первая и вторая сферы заземлены, т. е.  $\varphi_1=0, \varphi_2=0$ , а  $q_3 \neq 0$ . Уравнения (18.34) примут такой вид:

$$q_1=0, \quad q_2=C_{23}\varphi_3, \quad q_3=C_{33}\varphi_3. \quad (18.36)$$

Для металлического экрана было показано, что на внутренней поверхности заземленной проводящей оболочки индуцируется заряд, равный по абсолютному значению, но противоположный по знаку заряду внутри экрана. Следовательно,  $q_2=-q_3$ . Из (18.36) имеем

$$C_{23} = -C_{33}. \quad (18.37)$$

Таким образом, коэффициент взаимной емкости между двумя проводниками, один из которых полностью окружает другой, равен взятому с обратным знаком коэффициенту емкости внутреннего проводника. Система из двух проводников, один из которых полностью экранирует другой, является конденсатором. Емкость конденсатора есть коэффициент емкости внутреннего проводника, равный взятому с обратным знаком коэффициенту взаимной емкости между проводниками.

**Метод изображений.** Важным для решения некоторых задач электростатики является метод изображения, суть которого состоит в следующем. Необходимо найти потенциал электрического поля. Если потенциал известен, то, найдя градиент потенциала, получаем напряженность

электрического поля. Распределение потенциала в пространстве характеризуется формой эквипотенциальных поверхностей, т. е. поверхностей, на которых потенциал имеет постоянное значение. Напряженность электрического поля направлена по нормали к эквипотенциальной поверхности в соответствующей точке.

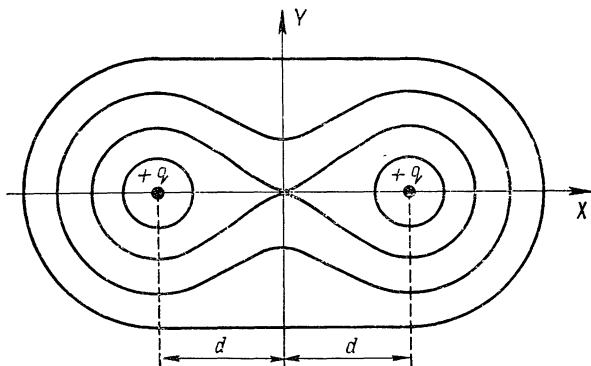


Рис. 13

Выявить форму эквипотенциальных поверхностей системы точечных зарядов легко. Рассмотрим, например, два положительных точечных заряда  $q$ , расположенных на расстоянии  $2d$  один от другого (рис. 13). Поскольку потенциал точечного заряда на расстоянии  $r$  от него задан формулой  $\varphi = q/(4\pi\epsilon_0 r)$ , то потенциал от двух точечных зарядов в точке  $(x, y, z)$ , очевидно, равен

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right). \quad (18.38)$$

Из (18.38) получаем уравнение эквипотенциальных поверхностей:

$$\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} = \text{const.} \quad (18.39)$$

Каждая из них характеризуется соответствующим потенциалом  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$

На рис. 13 изображены линии пересечения плоскости  $XU$  с эквипотенциальными поверхностями. Сами эквипотенциальные поверхности получаются в результате вращения картины, изображенной на рис. 13, вокруг оси  $X$ . Пусть проводящая изолированная поверхность совпадает с одной из эквипотенциальных поверхностей, потенциал которой  $\varphi_0$ . Если этот проводник несет заряд  $2q$ , то его

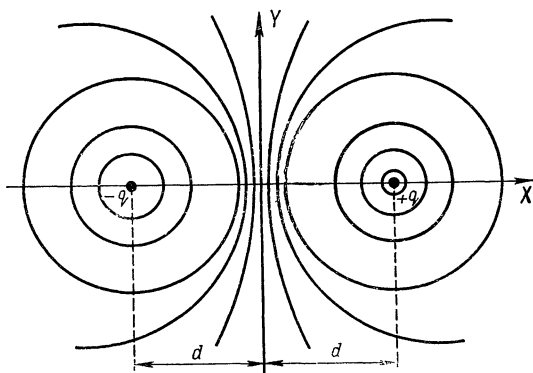


Рис. 14

потенциал  $\varphi_0$ . Потенциал во всех внешних точках проводника задан формулой (18.38). Таким образом, определение поля, созданного заряженным проводником, свелось к вычислению поля, созданного в данном случае двумя равными и одноименно заряженными точечными зарядами.

Уравнение эквипотенциальных поверхностей двух разноименных точечных зарядов дается формулой (18.38), взятой с изменением у второго члена знака на минус. Форма эквипотенциальных поверхностей в этом случае показана на рис. 14. Потенциал вдоль оси  $Y$  равен нулю и, следовательно, равен нулю в плоскости  $X=0$ .

Таким образом, если вместо точечного заряда  $-q$  имеется бесконечная плоская проводящая поверхность  $X=0$ , несущая заряд  $-q$ , то в картине эквипотенциальных поверхностей в полупространстве  $X>0$  ничего не изменится, следовательно, не изменится и электрическое поле. Таким образом, поле в полупространстве  $x>0$  при наличии точечного заряда  $+q$  и бесконечной проводящей пло-



скости  $X=0$  такое же, как и поле при наличии точечного заряда  $+q$  и другого точечного заряда  $-q$ , расположенного в точке, которая является зеркальным отображением места нахождения первого заряда относительно плоскости  $X=0$ . Определить поле двух точечных зарядов нетрудно. Этот способ решения задач называется методом изображения. В основном задача состоит в том, чтобы подобрать такое распределение зарядов, чтобы одна из эквипотенциальных поверхностей совпала с поверхностью рассматриваемого проводника. Определим поле заряда  $+q$ , расположенного в точке  $x=d$ , при наличии проводящей плоскости  $X=0$ . В соответствии со сказанным выше потенциал во всех точках  $X>0$  дается формулой

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right]. \quad (18.40)$$

Напряженность поля в плоскости  $Z=0$  равна:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x-d}{[(x-d)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{x+d}{[(x+d)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}, \quad (18.41)$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{y}{[(x-d)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{y}{[(x+d)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}. \quad (18.42)$$

В плоскости  $X=0$  компонента  $E_y$  исчезает, а

$$E_x = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{(y^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Плотность поверхностного заряда на поверхности  $X=0$  проводника в соответствии с граничным условием для  $D_n$  задается выражением

$$\sigma = \frac{-q}{2\pi} \frac{d}{(y^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (18.43)$$

Сила взаимодействия точечного заряда  $q$  с проводящей поверхностью  $X=0$  равна силе взаимодействия этого заряда с его изображением:

$$F = -q^2/(16\pi\epsilon_0 d^2). \quad (18.44)$$

В качестве другого примера рассмотрим картину эквипотенциальных поверхностей, создаваемых двумя зарядами с различными абсолютными значениями. Для удобства введем полярную систему координат с центром в точке  $O$  (рис. 15). Положение зарядов  $q_1$  и  $q_2$  характеризуется

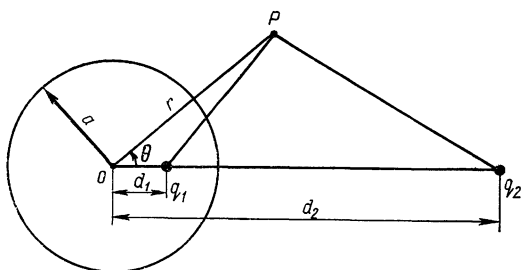


Рис. 15

координатами  $\theta_1=0$ ,  $r_1=d_1$ ;  $\theta_2=0$ ,  $r_2=d_2$  соответственно. Потенциал в точке  $P$  равен

$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{r^2 + d_1^2 - 2rd_1 \cos \theta}} + \frac{q_2}{\sqrt{r^2 + d_2^2 - 2rd_2 \cos \theta}} \right). \quad (18.45)$$

Легко проверить, что при  $d_1 = a^2/d_2$  ( $a < d_2$ ) и  $q_1 = -aq_2/d_2$  имеет место равенство  $\varphi(a, \theta) = 0$ , т. е. при этих условиях потенциал на сфере радиусом  $a$  равен нулю. Следовательно, эта эквипотенциальная поверхность может быть заменена заземленной сферой. Таким образом, если имеется проводящая заземленная сфера радиусом  $a$  и точечный заряд  $q_2$  вне ее на расстоянии  $d_2$  от центра сферы, то поле вне сферы такое же, как и поле, создаваемое зарядом  $q_2$  и «изображением» — зарядом  $q_1$ , помещенным в точку  $d_1 = a^2/d_2$ ;  $\theta = 0$  внутри сферы. Сила взаимодействия между зарядом  $q_2$  и сферой

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 (d_2 - d_1)^2} = - \frac{d_2 a q_2^2}{4\pi\epsilon_0 (d_2^2 - a^2)^2}. \quad (18.46)$$

**Проводящая сфера в однородном электрическом поле.** Рассмотрим проводящую заземленную сферу радиусом

$R$ , помещенную в однородное электрическое поле  $E_0$ . Из-за электростатической индукции поле вблизи сферы искажается, а на бесконечно большом расстоянии от сферы оно равно  $E_0$ . Внутри сферы поле отсутствует. Потенциал сферы равен нулю.

Поместим начало полярной системы координат в центр сферы и полярную ось направим вдоль поля  $E_0$ . В случае аксиальной симметрии потенциал  $\varphi$  не зависит от аксиального угла, а уравнение Лапласа, которым описывается потенциал вне сферы, имеет вид

$$\frac{1}{r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right] = 0, \quad (18.47)$$

где  $\mu = \cos \theta$ ,  $\theta$  — полярный угол,  $r$  — расстояние от центра сферы до рассматриваемой точки.

Решения этого уравнения имеют вид  $\varphi = r^l P_l$ , где  $l$  — целое число,  $P_l$  — функция от  $\mu = \cos \theta$ . Подставляя искомое решение в (18.47) и сокращая полученное уравнение на  $r^l$ , находим

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{dP_l}{d\mu} \right] + l(l+1)P_l = 0 \quad (18.48)$$

— уравнение Лежандра. Функции  $P_l$  называют функциями Лежандра. Поскольку замена  $l$  на  $-(l+1)$  не изменяет вид (18.48), то  $P_l = P_{-(l+1)}$  и, следовательно, не только  $\varphi = r^l P_l$ , но и  $\varphi = r^{-(l+1)} P_l$  является решением (18.48). Функции Лежандра хорошо известны и подробно изучаются в теории специальных функций. Общее решение (18.47) представляется в виде бесконечного ряда функций  $r^l P_l$ ,  $r^{-(l+1)} P_l$ , коэффициенты в котором определяются начальными и граничными условиями.

Для решения данной задачи достаточно использовать лишь несколько функций этого ряда. Поскольку на бесконечности поля  $E = E_{0z} = \text{const}$ , то

$$\varphi = -E_0 r \cos \theta \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (18.49)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эта функция удовлетворяет уравнению (18.47). Для того чтобы удовлетворить условию  $\varphi = 0$  при  $r = R$  для всех значений  $\theta$ , необходимо использовать лишь решения с одинаковой степенью  $\cos \theta$ . Поэтому наряду с функцией (18.49) следует использовать функцию  $\varphi = A r^{-2} \cos \theta$ , где  $A$  — постоянная. Поэтому

$$\varphi = -E_0 r \cos \theta + A r^{-2} \cos \theta. \quad (18.50)$$

Это решение удовлетворяет условию (18.49). Для соблюдения равенства  $\varphi=0$  при  $r=R$  необходимо положить

$$A = E_0 R^3. \quad (18.51)$$

Тогда искомое решение во всех точках вне сферы имеет вид

$$\varphi = -E_0 r \cos \theta (1 - R^3/r^3). \quad (18.52)$$

Следовательно, потенциал вне сферы является суммой потенциала  $-E_0 r \cos \theta$  однородного электрического поля и потенциала диполя с моментом  $\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 E_0 R^3$ , расположенного в центре сферы. На поверхности сферы и внутри нее потенциал  $\varphi=0$ . Из (18.52) видно, что тангенциальная составляющая поля на поверхности сферы отсутствует, а радиальная составляющая равна

$$E_r = -(\partial\varphi/\partial r)_{r=R} = E_0 \cos \theta + 2E_0 \cos \theta = 3E_0 \cos \theta. \quad (18.53)$$

При этом плотность поверхностного заряда на сфере равна

$$\sigma = \epsilon_0 E_r = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta. \quad (18.54)$$

Поле внутри сферы равно сумме внешнего однородного поля и поля, созданного индуцированными поверхностными зарядами. Поскольку внутри сферы оно равно нулю, то можно заключить, что распределение поверхностного заряда по закону (18.54) создает внутри сферы постоянное поле  $-E_0$ , которое компенсирует во всех точках внутри сферы внешнее поле  $E_0$ .

**Экспериментальная проверка закона Кулона.** Очень чувствительный способ проверки закона Кулона основан на требовании равенства нулю объемного заряда в проводнике. Это следует из уравнения (18.4), служащего дифференциальной записью закона Кулона с учетом принципа суперпозиции и теоремы Гаусса (см. § 2). Если бы закон Кулона не был справедливым, то уравнение (18.4) также не было бы справедливым и плотность объемных зарядов внутри проводника не равнялась бы нулю. Первые опыты такого рода проведены Кавендишем в 1772 г., когда он заряжал две концентрические проводящие сферы, соединенные между собой. Затем внешнюю сферу убрали и исследовали остаточный заряд внутренней сферы. При справедливости закона Кулона этот заряд должен отсутствовать. По остаточному заряду

можно сделать заключение об отклонении от закона Кулона.

Закон взаимодействия между точечными зарядами удобно представить в виде

$$F \sim 1/r^{2+\epsilon}$$

и характеризовать отклонение от закона Кулона величиной  $\epsilon$ . При  $\epsilon=0$  имеет место точное соблюдение закона Кулона.

Кавендиш получил  $|\epsilon| \leq 0,02$ . Затем аналогичные опыты были произведены Максвеллом, заключившим, что  $|\epsilon| \leq 5 \cdot 10^{-5}$ . В последующем измерения были уточнены и найдена оценка  $|\epsilon| \leq 2 \cdot 10^{-9}$ . Недавно были проведены аналогичные опыты, однако с изменяющимся потенциалом внешней среды относительно Земли они привели к оценке  $|\epsilon| \leq 10^{-15}$ . Таким образом, этими опытами закон Кулона достаточно хорошо подтвержден экспериментально для расстояний в десятки сантиметров и метры. Наблюдения магнитного поля в околоземном пространстве и на поверхности Земли позволили заключить, что закон Кулона хорошо соблюдается на расстоянии вплоть до  $10^4$  км. Изучение взаимодействия элементарных частиц доказывает справедливость закона Кулона вплоть до расстояний  $10^{-15}$  см. Все сказанное позволяет говорить о справедливости закона Кулона с большой точностью в широком диапазоне расстояний.

## § 19. ФОРМУЛЫ ГРИНА

**Первая формула Грина.** Применить метод изображений удается обычно лишь для достаточно простых ситуаций. Кроме того, этот метод содержит в себе слишком большой элемент «изобретательства» и не может рассматриваться в качестве достаточно общего метода. Преимущества прямого применения уравнений Лапласа и Пуассона были изложены в § 17, а здесь рассмотрим один из эффективных путей решения этих уравнений при заданных граничных условиях, сводящийся к замене уравнения Пуассона интегральным уравнением с помощью формул Грина. Исходной является формула Гаусса — Остроградского (П.1)

$$\int_V \operatorname{div} A dV = \oint_S A \cdot dS, \quad (19.1)$$

которая уже была неоднократно использована. Пусть имеются две скалярные функции  $\varphi$  и  $\psi$ . Возьмем в формуле (П.13) в качестве  $\mathbf{A}$  вектор  $\text{grad } \psi$ . Тогда

$$\text{div}(\varphi \text{grad } \psi) = \varphi \text{div grad } \psi + \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi = \varphi \nabla^2 \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \quad (19.2)$$

Если в формуле (19.1) положить  $\mathbf{A} = \varphi \text{grad } \psi$ , то с учетом (19.2) она принимает вид

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS, \quad (19.3)$$

где  $\mathbf{n} \text{grad } \psi = \partial \psi / \partial n$ , если  $\mathbf{n}$  — единичный вектор по нормали к поверхности. Положительное направление выбрано по внешней нормали к поверхности, ограничивающей объем  $V$ . Формулу (19.3) называют первой формулой Грина.

Если из (19.3) вычесть почленно аналогичную формулу, в которой поменять местами функции  $\varphi$  и  $\psi$ , то получим вторую формулу Грина:

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (19.4)$$

**Интегрирование уравнения для потенциала.** Для того чтобы формуле (19.4) придать вид, удобный для использования, возьмем в качестве  $\psi$  функцию

$$\psi(\mathbf{r}) = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad (19.5)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения,  $\mathbf{r}'$  — переменная интегрирования. Примем во внимание формулу

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

где  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  — функция Дирака. Правильность этой формулы строго доказана в методах математической физики. Однако проверка ее справедливости может быть сделана просто. Функция  $\varphi$  в формуле (16.14) является решением уравнения Пуассона, если все заряды расположены в конечной области пространства. Применим к обеим частям этой формулы оператор  $\nabla^2$ . Тогда

$$-\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \int \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (19.6)$$

где  $\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -\rho/\epsilon_0$ .

Это равенство тождественно справедливо для всех  $\rho(\mathbf{r})$ , что возможно лишь при

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (19.7)$$

когда равенство (19.6) сводится к определению  $\delta$ -функции:

$$\rho(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'.$$

В качестве  $\varphi$  в формуле (19.4) выберем потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона  $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$ . Тогда (19.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_V \left[ -4\pi\varphi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} \right] dV' = \\ = \oint_S \left[ \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right] dS', \end{aligned} \quad (19.8)$$

где  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  — расстояние между точкой наблюдения и текущей точкой интегрирования. Выполняя в (19.8) интегрирование члена с  $\delta$ -функцией, окончательно получим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{R} \right) \right] dS'. \quad (19.9)$$

Эта формула выведена для точек, расположенных внутри объема  $V$ . Для точек вне объема правая часть (19.9) равна нулю.

Если ограничивающая объем поверхность  $S$  удаляется на бесконечность и электрическое поле при этом убывает быстрее, чем  $1/R$ , то поверхностный интеграл в выражении (19.9) устремится к нулю и оно переходит в формулу (16.4).

На первый взгляд может показаться, что формула (19.9) дает решение уравнения Пуассона с заданными граничными условиями, поскольку значения функций  $\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial n$  входят в уравнение только в точках границы объема. Однако такое заключение является неправильным. Дело в том, что на границе области для уравнения Пуассона

нельзя задать одновременно и значения функции  $\varphi$  и ее производной по нормали  $\partial\varphi/\partial n$ , поскольку в этом случае задача оказывается переопределенной и, вообще говоря, не имеет решения. Поэтому формула (19.9) является интегральным уравнением.

**Граничные условия.** В методах математической физики доказывается, что уравнение Пуассона имеет однозначное решение, если на ограничивающей этот объем поверхности заданы значения либо потенциала, либо его нормальной производной. Первые условия называются граничными условиями Дирихле, вторые — граничными условиями Неймана.

## § 20. ФУНКЦИИ ГРИНА

Уравнению (19.6) удовлетворяет не только функция  $1/(4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ , но и бесчисленное множество функций

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (20.1a)$$

если

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \quad (20.1b)$$

Функцией Грина называется решение уравнения

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (20.2)$$

Если в качестве  $\psi$  в (19.4) взять функцию Грина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  и проделать все вычисления, которые привели к уравнению (19.9), то вместо этого уравнения получим

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \\ & + \oint_S \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] dS. \end{aligned} \quad (20.3)$$

Имеющаяся неоднозначность в выборе функции Грина, как это видно в (20.1a), позволяет в поверхностном интеграле сохранить лишь заданные граничные условия, благодаря чему (20.3) из интегрального уравнения превращается в формулу, выражающую решения уравнения Пуассона при заданных граничных условиях.



Если заданы граничные условия Дирихле, то функцию Грина надо выбрать так, чтобы в точках поверхности выполнялось условие

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}' \text{ на } S} = 0. \quad (20.4)$$

Решение (20.3) в этом случае имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \oint_S \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_D}{\partial n'} dS. \quad (20.5)$$

При граничных условиях Неймана кажется необходимым выбрать функцию Грина так, чтобы в поверхностном интеграле исчез член, содержащий  $\varphi(\mathbf{r}')$ , т. е. выбрать такую функцию Грина, которая удовлетворяет условию

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \Big|_{\mathbf{r}' \text{ на } S} = 0. \quad (20.6)$$

Однако такой функции Грина не существует. Это можно непосредственно увидеть, если обе части уравнения (20.2) проинтегрировать по рассматриваемому объему и к левой части применить теорему Гаусса — Остроградского. Тогда

$$\int_S \frac{\partial G}{\partial n'} dS = -1.$$

Следовательно, выполнение условия (20.6) невозможно. Поэтому при граничных условиях Неймана в качестве формулы Грина можно выбрать, например, такую, которая удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial G_H(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \Big|_{\mathbf{r}' \text{ на } S} = -\frac{1}{S}. \quad (20.7)$$

Тогда решение представляется в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') G_H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \oint_S G_H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} dS + \langle \varphi \rangle_S, \quad (20.8a)$$

где

$$\langle \varphi \rangle_S = \frac{1}{S} \int_S \varphi(\mathbf{r}') dS \quad (20.8b)$$

— среднее значение потенциала на поверхности  $S$ .

Член  $\langle \varphi \rangle_s$  не может быть вычислен из заданных граничных условий Неймана, так как они содержат лишь производную от потенциала. Однако это не является трудностью с физической точки зрения, поскольку соответствует неопределенности в нормировке потенциала. Кроме того, во многих практически важных случаях объем ограничен поверхностями материальных тел и поверхностью, окружающей область, в которой расположены материальные тела. Эта последняя обычно уходит на бесконечность, поскольку учитывается все пространство. В этом случае, как это непосредственно видно,  $\langle \varphi \rangle_s = 0$ , поскольку на бесконечности  $\varphi \sim 1/r$ , если все заряды сосредоточены в конечной области пространства. Функция Грина позволяет теоретически решить задачу при соответствующих граничных условиях. Однако практическое нахождение функции Грина является очень сложной задачей.

## § 21. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ. МУЛЬТИПОЛИ

**Поляризация.** Диэлектрики характеризуются тем, что имеющиеся в них заряды под влиянием внешнего поля могут перемещаться лишь на небольшие расстояния. Электроны не покидают атомы, происходит лишь некоторое перераспределение заряда внутри атома, поскольку положительные заряды стремятся сместиться по внешнему полю, а отрицательные — против поля. Атом в целом продолжает оставаться нейтральным, но в случае «разделения» положительных и отрицательных зарядов этот нейтральный атом создает во внешнем пространстве электрическое поле, которое складывается с первоначально приложенным электрическим полем. Изменение распределения зарядов в диэлектриках под влиянием приложенного электрического поля называется их поляризацией. Это есть первый фактор поляризации. Второй фактор поляризации состоит в следующем. Молекулы могут иметь асимметричное распределение заряда в отсутствие внешнего электрического поля, благодаря чему нейтральная молекула во внешнем пространстве создает некоторое электрическое поле. При внесении диэлектрика с такими молекулами во внешнее электрическое поле происходит переориентация молекул в пространстве. Это явление также называется поляризацией.

**Количественная характеристика распределения заряда в молекулах. Мультиполи.** Пусть заряд распределен в некоторой небольшой области пространства. Тогда потенциал и поле вне области распределения заряда удобно представить в виде бесконечного ряда, члены которого обычно убывают достаточно быстро.

Поместим начало координат внутри области распределения заряда. Тогда для потенциала, создаваемого в точке  $\mathbf{r}'$ , имеем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (21.1)$$

причем нас интересует область, для которой  $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ . Поэтому представляется целесообразным разложить подынтегральное выражение в ряд по степеням  $1/r$ , что сводится к соответствующему разложению  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  в подынтегральном выражении (разложение по мультиполям).

**Разложение на мультиполи в декартовых координатах.** В этом случае разложение сводится к ряду Тейлора:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( x'_1 \frac{\partial}{\partial x'_1} + x'_2 \frac{\partial}{\partial x'_2} + x'_3 \frac{\partial}{\partial x'_3} \right)^{(n)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Big|_{\mathbf{r}'=0}, \quad (21.2)$$

где для упрощения написания последующих формул использованы обозначения  $x'_1 = x'$ ,  $x'_2 = y'$ ,  $x'_3 = z'$ .

Вычисления для первых трех членов элементарны и дают следующий результат:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \sum_i x'_i x_i + \frac{1}{2r^5} \sum_{i,j} (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) x_i x_j + \dots \quad (21.3)$$

Подставив разложение (21.3) в формулу (21.1) для потенциала, находим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right), \quad (21.4)$$

где

$$q = \int_V \rho(\mathbf{r}') dV' \quad (21.5a)$$

— полный заряд системы;

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV' \quad (21.5б)$$

— дипольный момент системы зарядов;

$$Q_{ij} = \int_V (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') dV' \quad (21.5в)$$

— квадрупольный момент системы зарядов. Последующие члены ряда представляют мультиполи более высоких порядков и быстро убывают при  $r' \ll r$ .

Если эта система в целом электрически нейтральна, как, например, молекула, то  $q=0$  и главным членом разложения будет дипольный. Если при отсутствии внешнего поля дипольный момент молекулы равен нулю, то он возникает под действием внешнего поля. Если же дипольный момент при отсутствии внешнего поля не равен нулю, то поляризация состоит как в переориентации диполей, так и в некотором изменении их значений. Однако второй эффект обычно значительно меньше первого и не требует учета.

Квадрупольный момент много меньше дипольного и его следует учитывать либо как поправку к дипольному, либо как главный член, если при заданных условиях дипольный момент отсутствует.

В задачах часто необходимо представить разложение по мультиполям в других системах координат. В сферической системе координат это разложение выглядит следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}, \quad (21.6)$$

$$q_{lm} = \int_V Y_{lm}^*(\theta', \varphi') r'^l \rho(\mathbf{r}') dV',$$

где  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  — сферическая гармоника.

**Дипольный момент.** В первом приближении электрические свойства нейтральной системы характеризуются

ее дипольным моментом. Простейшей моделью дипольного момента являются два разноименных точечных заряда, находящихся на малом расстоянии один от другого. Пусть отрицательный точечный заряд находится в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}'_1$ , а положительный — в точке  $\mathbf{r}'_2$ . Тогда

$$\varphi(\mathbf{r}') = q \{ \delta(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}') \} \quad (21.7)$$

(под  $q$  понимаем положительное значение заряда). По формуле (21.5б) дипольный момент этой системы зарядов равен

$$\mathbf{p} = q(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1) = ql, \quad (21.8)$$

где  $\mathbf{l} = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1$  — вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному. Эта величина называется плечом диполя.

**Поле диполя.** Напряженность электрического поля диполя равна

$$\mathbf{E} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right]. \quad (21.9)$$

Следовательно, напряженность поля убывает обратно пропорционально кубу расстояния от диполя.

## § 22. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

**Вектор поляризованности.** В результате поляризации под влиянием внешнего электрического поля диэлектрики становятся источником дополнительного поля. Поэтому учет диэлектриков в электрическом поле сводится к учету их поляризации и порождаемого ею поля.

Интенсивность поляризации характеризуется вектором поляризованности  $\mathbf{P}$ , который определяется как дипольный момент единицы объема. Из этого определения следует, что дипольный момент элемента объема диэлектрика равен

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P}dV. \quad (22.1)$$

Поляризованность  $\mathbf{P}$  в данной точке пропорциональна напряженности электрического  $\mathbf{E}$  поля в этой точке:

$$\mathbf{P} = \chi\epsilon_0\mathbf{E}, \quad (22.2)$$

где безразмерный множитель  $\kappa$  называется диэлектрической восприимчивостью. Он характеризует способность диэлектрика поляризоваться.

В абсолютной гауссовой системе единиц коэффициентом диэлектрической восприимчивости  $\kappa'$  называется величина, в  $4\pi$  раз меньшая величины  $\kappa$  в формуле (22.2):  $\kappa' = \kappa / (4\pi)$ .

Диэлектрическая восприимчивость большинства хороших твердых и жидких диэлектриков выражается числами порядка нескольких единиц. Диэлектрическая восприимчивость большинства газов составляет десятитысячные доли единицы и практически всегда может не приниматься во внимание. Однако имеются диэлектрики, у которых восприимчивость достигает значительно больших значений. У воды  $\kappa = 80$ , а у спирта  $\kappa = 25-30$ . Имеются некоторые полупроводники, восприимчивость которых достигает сотен тысяч единиц.

Важным классом диэлектриков являются сегнетоэлектрики (сегнетовая соль, титанаты бария и др.). Они характеризуются нелинейной зависимостью поляризованности от напряженности поля и остаточной поляризованностью, т. е. их поляризованность не равна нулю; после того как исчезло внешнее электрическое поле, вызвавшее эту поляризованность. У многих сегнетоэлектриков диэлектрическая восприимчивость достигает нескольких тысяч.

Поляризация вещества может происходить не только под действием электрического поля, но и под действием механических напряжений. Это явление называется пьезоэлектрическим эффектом. Оно наблюдается, например, у кварца, и широко применяется в технике.

Вектор поляризованности не всегда совпадает по направлению с вектором напряженности электрического поля. Такая анизотропия чаще всего наблюдается в кристаллических диэлектриках. В этом случае поляризуемость диэлектрика различна в различных направлениях. Поэтому его диэлектрическую восприимчивость характеризуют тензором диэлектрической восприимчивости.

#### **Скалярный потенциал при наличии диэлектрика.**

Влияние диэлектрика на электростатическое поле сводится к появлению дополнительного поля, возникающего за счет поляризации диэлектрика. Поэтому электрическое поле при наличии диэлектрика является суммой поля свободных зарядов, т. е. зарядов, не связанных

с молекулами и атомами диэлектрика, и поля, возникающего за счет поляризации диэлектрика.

Следовательно, потенциал электрического поля

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_d, \quad (22.3)$$

где  $\varphi_0$  — потенциал электрического поля свободных зарядов;  $\varphi_d$  — потенциал электрического поля, созданного поляризованным диэлектриком.

Очевидно,

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r}, \quad (22.4)$$

где  $\rho$  и  $\sigma$  — объемная и поверхностная плотности свободных зарядов.

Из (21.4) следует, что потенциал диполя  $d\mathbf{p}$  равен

$$d\varphi_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^3}. \quad (22.5)$$

Отсюда с учетом формулы (22.1) получим

$$d\varphi_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})}{r^3} dV. \quad (22.6)$$

Следовательно,

$$\varphi_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})}{r^3} dV, \quad (22.7)$$

где интегрирование ведется по объему  $V$  диэлектрика. Этой формуле целесообразно придать другой вид. В векторном анализе доказывается

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \operatorname{grad} \varphi, \quad (22.8)$$

где  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  — скалярная и векторная функции точки. Применим (22.8) для преобразования подинтегрального выражения в (22.7). Вспомним, что в (22.7)  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из элемента объема  $dV$  в ту точку, где вычисляется потенциал. Поэтому, понимая в следующих формулах операции  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{grad}$  как операции по координатам элемента объема  $dV$ , имеем

$$\mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{P} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \operatorname{div} \frac{\mathbf{P}}{r} - \frac{\operatorname{div} \mathbf{P}}{r}. \quad (22.9)$$

Следовательно,

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\operatorname{div} \mathbf{P}}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{P}}{r} dV. \quad (22.10)$$

Второй интеграл можно преобразовать по теореме Гаусса — Остроградского. Эта теорема справедлива во всей области, где непрерывно подынтегральное выражение.

Однако согласно (22.2) вектор поляризации  $\mathbf{P}$  претерпевает разрыв на границе различных диэлектриков. Поэтому теореме Гаусса — Остроградского можно применить к произвольному объему, если только выделить из него границы между различными диэлектриками. Одну из этих границ (рис. 16) выделим

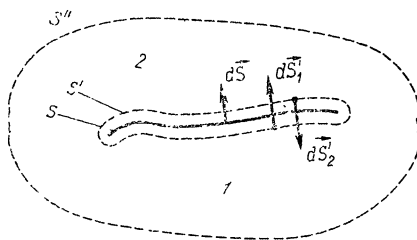


Рис. 16

из рассматриваемой области вспомогательной поверхностью  $S'$ . Тогда во всем оставшемся объеме подынтегральная функция непрерывна и к ней может быть применена теорема Гаусса — Остроградского:

$$\int_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{P}}{r} dV = \int_{S''} \frac{\mathbf{P}}{r} d\mathbf{S} + \int_{S'} \frac{\mathbf{P}}{r} d\mathbf{S}, \quad (22.11)$$

где  $S''$  — поверхность, ограничивающая заданный объем. Выберем в качестве положительной нормали к поверхности раздела  $S$  ту, которая направлена в сторону диэлектрика, обозначаемого индексом 2. Другой диэлектрик обозначим индексом 1. Тогда

$$\int_{S'} \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}}{r} = - \int_S \frac{\mathbf{P}_2 \cdot d\mathbf{S}}{r} + \int_S \frac{\mathbf{P}_1 \cdot d\mathbf{S}}{r} = \int_S \frac{P_{1n} - P_{2n}}{r} dS. \quad (22.12)$$

Знак минус у вектора  $\mathbf{P}_2$  в (22.12) возник в теореме Гаусса — Остроградского при интегрировании по поверхности, ограничивающей объем  $V$ ,  $d\mathbf{S}$  — элемент поверхности, направленный по внешней нормали. Следовательно, при интегрировании по поверхности  $S'$  со стороны среды 2 вектор  $d\mathbf{S}_2'$  направлен противоположно вектору  $d\mathbf{S}$



элемента поверхности раздела, направленному в сторону среды 2. Благодаря этому

$$P_2 dS_2' = -P_2 \cdot dS.$$

Величина  $P_{1n} - P_{2n}$  характеризует разрыв нормальных составляющих вектора поляризации на границе раздела диэлектриков. Считая, что все диэлектрики расположены в конечной области пространства, и выбирая в качестве  $S''$  бесконечно удаленную поверхность, видно, что на ней  $\mathbf{P} = 0$ , поэтому первый интеграл в (22.11) исчезает. Аналогичные выражения получаются и для других границ раздела диэлектриков. Поэтому если под  $S$  понимать все границы раздела диэлектриков, а под  $V$  — все пространство, то

$$\varphi_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\operatorname{div} \mathbf{P}}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{P_{1n} - P_{2n}}{r} dS. \quad (22.13)$$

Если сравнить формулы (22.13) и (22.4), то видно, что они имеют аналогичный вид, лишь  $\rho$  заменяется на  $-\operatorname{div} \mathbf{P}$ , а  $\sigma$  — на  $P_{1n} - P_{2n}$ . Поэтому если ввести обозначения

$$\rho_{св} = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \sigma_{св} = P_{1n} - P_{2n}, \quad (22.14)$$

то формула (22.13) может быть представлена в виде

$$\varphi_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{св}}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_{св}}{r} dS, \quad (22.15)$$

а формула (22.3) для полного потенциала с учетом (22.4) и (22.15) записывается как

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho + \rho_{св}}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma + \sigma_{св}}{r} dS. \quad (22.16)$$

Величины  $\rho_{св}$  и  $\sigma_{св}$  называются соответственно объемной и поверхностной плотностями связанных зарядов. Это название обусловлено тем, что по своей роли в образовании дополнительного электрического поля в диэлектрике эти величины совершенно аналогичны объемной и поверхностной плотностям зарядов. В отличие от свободных зарядов связанные заряды не могут свободно перемещаться в диэлектрике.

Из (22.15) видно, что поверхностные связанные заряды возникают на границе между различными диэлектрика-

ми и на границе между диэлектриком и вакуумом, а объемные связанные заряды возникают тогда, когда имеется неоднородная поляризация, что может являться следствием либо неоднородности диэлектрика, либо неоднородности электрического поля.

**Связь диэлектрической восприимчивости и диэлектрической проницаемости.** Как было показано, наличие диэлектрика может быть полностью учтено, если наряду со свободными принять во внимание связанные и описывать электрическое поле в диэлектрике теми же уравнениями, что и в вакууме. Поэтому уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$  при наличии диэлектрика имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = (\rho + \rho_{\text{св}}) / \epsilon_0. \quad (22.17)$$

Подставим в него  $\rho_{\text{св}}$ , из (22.14) получаем формулу

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = (\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}) / \epsilon_0,$$

которую удобно переписать так:

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho. \quad (22.18)$$

Вектором электрического смещения или вектором индукции магнитного поля называется величина

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (22.19)$$

Это и не чисто полевая и не чисто материальная величина, а их сумма. С использованием этой величины выражение (22.18) записывается в виде уравнения Максвелла:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (22.20)$$

справедливого и для вакуума, и для материальной среды. В вакууме

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}.$$

Из (22.2) видно, что  $\mathbf{P}$  пропорционально  $\mathbf{E}$ . Поэтому (22.19) приводит к заключению, что  $\mathbf{D}$  пропорционально  $\mathbf{E}$ , и можно считать, что

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (22.21)$$

Удобно пользоваться и относительной диэлектрической проницаемостью среды  $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$ .

Принимая во внимание (22.21) и (22.2), формулу (22.19) можно представить в виде

$$\epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (22.22)$$

откуда

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \kappa), \quad \kappa = \epsilon / \epsilon_0 - 1 = \epsilon_r - 1. \quad (22.23)$$

Поскольку  $\epsilon > \epsilon_0$ , то  $\kappa$  всегда положительна.

В абсолютной гауссовой системе единиц относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_r$  и диэлектрическая восприимчивость  $\kappa'$  связаны с  $\epsilon$  и  $\kappa$  соотношениями  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ ,  $\kappa = 4\pi \kappa'$ . Поэтому равенства (22.23) в гауссовой системе единиц имеют такой вид:

$$\epsilon_r = 1 + 4\pi \kappa', \quad \kappa' = (\epsilon_r - 1) / (4\pi). \quad (22.24)$$

**Два способа описания диэлектриков.** По своему усмотрению можно использовать два пути описания диэлектриков.

Первый связан с применением уравнения поля в форме (22.17). В этом случае поле в диэлектрике описывают вектором напряженности  $\mathbf{E}$  точно так же, как в вакууме, но наряду со свободными зарядами, как источниками поля, необходимо учитывать связанные заряды, которые также являются источниками поля.

Второй путь связан с использованием уравнения поля в форме (22.20). В этом случае поле в диэлектрике описывают вектором смещения  $\mathbf{D}$ , источником которого будут только свободные заряды. В этот вектор уже входит поляризация, а связанные заряды в явном виде в формулы не входят. Наличие диэлектрика при таком подходе сводится к кажущемуся изменению свойств среды. Оно выражается в формулах заменой диэлектрической постоянной  $\epsilon_0$  на диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  диэлектрика. Явление выглядит так, как будто один и тот же заряд в вакууме и среде создает различные поля из-за различных свойств среды. Например, в вакууме напряженность поля точечного заряда  $q$  в точке  $\mathbf{r}$  равна

$$\mathbf{E}_v(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (22.25)$$

а в неограниченной среде, заполненной диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , как это непосредственно получается из (22.20) в результате применения

формулы Остроградского — Гаусса,

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (22.26)$$

т. е. поле в диэлектрике ослабляется в  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$  раз.

Второй подход является феноменологическим. В нем не анализируется влияние диэлектрика на поле, а описывается лишь результат этого влияния посредством диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  среды. При этом вакуум является частным случаем диэлектрической среды, когда

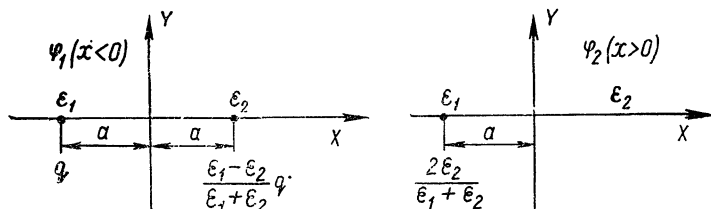


Рис. 17

ее проницаемость равна  $\epsilon_0$ . Формулы, полученные для вакуума (см. § 16—20), справедливы для однородного диэлектрика, заполняющего вакуум, если только в них заменить  $\epsilon_0$  на  $\epsilon$ . В частности, емкость конденсаторов при этом увеличивается в  $\epsilon/\epsilon_0$  раз, а напряженность поля у поверхности заряженного проводника при том же поверхностном заряде уменьшается в  $\epsilon/\epsilon_0$  раз.

**Метод изображений.** Для диэлектриков также может быть использован метод изображений. Пусть имеются две полубесконечные среды с плоской поверхностью раздела между ними (рис. 17). Диэлектрические постоянные первой и второй сред равны соответственно  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Пусть в первой среде на расстоянии  $a$  от границы расположен точечный заряд  $q$ . Утверждается, что потенциал в первой среде будет таким же, как от заряда  $q$  и заряда изображения  $\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$ , расположенного во второй среде на расстоянии  $a$  от границы раздела между средами. При этом диэлектрическая постоянная обеих сред предполагается равной  $\epsilon_1$ . Потенциал во второй среде равен потенциалу, создаваемому зарядом  $2q\epsilon_2/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ , находящимся на месте заряда  $q$  в первой среде. Диэлектрическая постоянная всей среды в этом случае  $\epsilon_2$ . Таким об-

разом, потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в первой и второй средах соответственно равны:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \right], \quad (22.27)$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_2} \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}.$$

Нетрудно убедиться, что  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  удовлетворяют уравнению Лапласа и требуемым граничным условиям:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \Big|_{x=0}, \quad (22.28)$$

$$\varphi_1 |_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad \varphi_2 |_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Сила, действующая на заряд  $q$ , равна силе взаимодействия этого заряда с его изображением  $[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]q$ , расположенным на расстоянии  $2a$  от заряда  $q$ :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \frac{q^2}{4a^2}. \quad (22.29)$$

Если  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ , то сила отрицательна, т. е. заряд  $q$  притягивается к границе раздела между диэлектриками. Если  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ , то сила положительна и заряд  $q$  отталкивается от границы между диэлектриками.

Аналогично применяется этот метод и в других случаях. Надо лишь подобрать такую систему зарядов, являющихся изображениями, чтобы результирующий потенциал удовлетворял уравнению Лапласа и граничным условиям на поверхностях раздела диэлектриков.

**Диэлектрический шар в однородном электрическом поле.** Допустим, что диэлектрический шар радиусом  $R$  с проницаемостью  $\varepsilon_1$  находится в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_2$ , где создано однородное поле  $E_0$ . Начало сферической системы координат расположено в центре шара, а полярная ось направлена вдоль вектора  $E_0$ . Очевидно, что задача аксиально симметрична, т. е. потенциал не зависит от аксиального угла.

Уравнение Лапласа

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (22.30)$$

должно быть решено для всего пространства с соблюдением следующих условий:

- а) потенциал  $\varphi$  всюду непрерывен и конечен;
- б) нормальные составляющие вектора  $\mathbf{D} = -\varepsilon \text{grad } \varphi$  непрерывны на границах раздела, т. е. на поверхности шара;
- в) тангенциальные составляющие вектора  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  непрерывны на поверхности шара.

Величины, относящиеся к внутренней области шара, обозначим индексом 1, а к внешней — индексом 2. Известно общее решение уравнения (22.30) (см. § 18). Для данной задачи общий метод решения значительно упрощается. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функции

$$\varphi_1 = A_1 r \cos \theta + A_2 r^{-2} \cos \theta, \quad \varphi_2 = -E_0 r \cos \theta + B_2 r^{-2} \cos \theta \quad (22.31)$$

удовлетворяют уравнению (22.30). Постоянные  $A_1, A_2, B_2$  пока неизвестны, а  $E_0$  — это напряженность однородного поля, т. е. поля на бесконечности. Оно направлено вдоль полярной оси. Поскольку  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  удовлетворяют уравнению (22.30), их можно считать потенциалом, если они удовлетворяют всем требованиям задачи. Из (22.31) видно, что  $\varphi_1 \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ . Следовательно, необходимо положить  $A_2 = 0$ . Условие непрерывности потенциала  $\varphi$  на границе имеет вид

$$A_1 R \cos \theta = -E_0 R \cos \theta + B_2 R^{-2} \cos \theta, \quad (22.32)$$

откуда

$$A_1 = B_2 R^{-3} - E_0. \quad (22.33)$$

Тангенциальная составляющая вектора  $\mathbf{E}$  на поверхности шара равна

$$E_t = E_\theta = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)_{r=R}, \quad (22.34)$$

причем  $E_{\theta 1} = E_{\theta 2}$ , если выполняется условие (22.32), т. е. между  $A_1$  и  $A_2$  существует соотношение (22.33).

Нормальные составляющие вектора напряженности равны:

$$\begin{aligned} E_{1n} = E_{1r} &= -(\partial \varphi_1 / \partial r)_{r=R} = -A_1 \cos \theta, \\ E_{2n} = E_{2r} &= -(\partial \varphi_2 / \partial r)_{r=R} = E_0 \cos \theta + 2B_2 R^{-3} \cos \theta. \end{aligned} \quad (22.35)$$

Из  $\varepsilon_1 E_{1r} = \varepsilon_2 E_{2r}$  следует, что

$$A_1 = -(\varepsilon_2/\varepsilon_1)(E_0 + 2B_2 R^{-3}). \quad (22.36)$$

Система уравнений (22.33) и (22.36) имеет следующее решение:

$$A_1 = -3\varepsilon_2 E_0 / (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2), \quad B_2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) R^3 E_0 / (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2). \quad (22.37)$$

Таким образом, потенциалы внутри и вне шара равны:

$$\varphi_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 r \cos \theta, \quad (22.38)$$

$$\varphi_2 = -\left(1 - \frac{R^3}{r^3} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\right) E_0 r \cos \theta. \quad (22.39)$$

Следовательно, внутри шара напряженность поля постоянна и параллельна полярной оси  $Z$ :

$$E_{1z} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial (r \cos \theta)} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0. \quad (22.40)$$

Она равна сумме напряженностей внешнего поля и поля, созданного связанными зарядами, возникшими на поверхности шара. Следовательно напряженность поля, созданного внутри шара связанными зарядами, равна

$$E_{св} = E_{1z} - E_0 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) E_0 / (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2). \quad (22.41)$$

Она постоянна и направлена по оси  $Z$ . Распределение зарядов на поверхности шара, которое приводит к постоянному полю внутри шара, было исследовано в § 18. Поэтому можно заключить, что поле (22.41) создается связанными зарядами на поверхности шара, плотность которых изменяется с углом  $\theta$  так же, как в формуле (18.54), т. е.  $\sigma \sim \cos \theta$ .

Из (22.41) видно, что при  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  напряженности  $E_{св}$  и  $E_0$  направлены противоположно, следовательно, напряженность внутри шара меньше, чем в исходном однородном поле. При  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$  направления напряженностей совпадают и поле внутри шара усиливается.

### § 23. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

**Энергия, выраженная через векторы поля.** Формулу энергии электрического поля через векторы поля получают аналогично выводу энергии электромагнитного

поля в вакууме, надо лишь вместо уравнения Максвелла (8.1.IV) воспользоваться уравнением (22.20) (см. § 8). Тогда в (8.8) вместо  $\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{E} / \partial t)$  получается член  $\mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D} / \partial t)$ . Учет этого изменения приводит к следующей формуле для энергии электрического поля при наличии диэлектриков:

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV; \quad (23.1)$$

при  $\epsilon = \epsilon_0$  она сводится к соответствующей формуле для вакуума.

**Граничные условия при наличии диэлектриков.** Граничные условия для векторов поля при наличии диэлектриков выводятся аналогично выводу граничных условий при отсутствии диэлектриков, надо лишь вместо (15.1) пользоваться уравнением (22.20) (см. § 15). В результате получаются следующие граничные условия:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad (23.2a)$$

$$E_{2t} - E_{1t} = 0. \quad (23.2b)$$

При  $\epsilon = \epsilon_0$  они совпадают с условиями (15.10) и (15.19).

**Энергия, выраженная через потенциал и плотность зарядов.** Заменяем  $\mathbf{E}$  в (23.1) на скалярный потенциал  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  и воспользуемся формулой векторного анализа:

$$-\mathbf{D} \text{ grad } \varphi = \varphi \text{ div } \mathbf{D} - \text{div}(\varphi \mathbf{D}).$$

Тогда (23.1) имеет вид

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV - \frac{1}{2} \int \text{div}(\varphi \mathbf{D}) dV, \quad (23.3)$$

где  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ . Второй интеграл в (23.3) может быть преобразован по формуле Гаусса — Остроградского в поверхностный. Потенциал  $\varphi$  во всех точках пространства непрерывен, а вектор  $\mathbf{D}$  претерпевает разрыв на заряженных поверхностях, поэтому их следует выделить из области интегрирования (см. § 22, рис. 16). Повторяя рассуждения § 22, приведшие к формуле (22.11), получим:

$$\int_V \text{div}(\varphi \mathbf{D}) dV = \int_{S''} \varphi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S'} \varphi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}, \quad (23.4a)$$



$$\int_{S'} \varphi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \varphi \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{S} + \int_S \varphi \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} = \int_S \varphi (D_{1n} - D_{2n}) dS. \quad (23.46)$$

Принимая во внимание граничное условие (23.2а), запишем формулу (23.46) в виде

$$\int_{S'} \varphi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \varphi \sigma dS.$$

Если поверхность  $S''$  в (22.4а) удалять на бесконечность и считать, что все заряды расположены в конечной области пространства, то интеграл по поверхности  $S''$  стремится к нулю. Это видно из следующих оценок. Потенциал точечного заряда убывает с расстоянием, как  $1/r$ . Поэтому и потенциал системы точечных зарядов на больших расстояниях от этой системы убывает, как  $1/r$ , где  $r$  — расстояние от некоторой точки системы. Поле  $\mathbf{E}$ , как градиент от потенциала, убывает на больших расстояниях от системы зарядов, как  $1/r^2$ . Следовательно, подынтегральное выражение  $\varphi \mathbf{D}$  в этом интеграле убывает, как  $1/r^3$ . Площадь интегрирования растет, как  $r^2$ . Отсюда следует, что интеграл при удалении поверхности интегрирования  $S''$  убывает, как  $1/r$ , т. е. в пределе  $r \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Поэтому окончательно выражение (22.3) принимает следующий вид:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS, \quad (23.5)$$

где  $V$  — все пространство;  $S$  — все заряженные поверхности в пространстве.

Численно эта формула дает тот же результат, что и формула (23.1), но ее физическое содержание несколько иное. Формула (23.1) показывает, что энергия электрического поля распределена во всем пространстве с плотностью

$$w = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} / 2. \quad (23.6)$$

Формула же (23.5) показывает, что энергия электромагнитного поля является энергией взаимодействия зарядов: элемент заряда  $\rho dV$ , находясь в потенциальном поле  $\varphi$ , создаваемом другими зарядами, имеет потенциальную

энергию  $\rho r dV$ . Множитель  $1/2$  в интеграле получается за счет того, что при интегрировании вклад каждого элемента заряда в энергию учитывается дважды: один раз, когда вычисляется потенциальная энергия этого заряда в поле всех остальных зарядов, а другой, когда учитывается потенциальная энергия всех остальных зарядов в поле этого заряда.

**Энергия взаимодействия точечных зарядов.** Точечный заряд может быть представлен как предельный случай заряда, распределенного по малой области пространства, когда размеры области стремятся к нулю, а заряд в области остается постоянным. В этом случае плотность заряда в точке, к которой стягивается объем, стремится к бесконечности, а в других точках пространства плотность заряда обращается в нуль. Поэтому объемная плотность заряда  $\rho(r)$  при наличии точечного заряда  $q$  в точке  $\mathbf{r}_0$  может быть представлена в виде  $\delta$ -функции:

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (23.7)$$

для  $\delta$ -функции справедливо следующее правило интегрирования:

$$\int_V f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = f(\mathbf{r}_0). \quad (23.8)$$

Точка  $\mathbf{r}_0$  находится внутри области интегрирования  $V$ . При наличии нескольких точечных зарядов их можно рассматривать как предельный случай зарядов постоянного значения, занимающих бесконечно малые объемы  $\Delta V_i$  при  $\Delta V_i \rightarrow 0$ . Учитывая, что поверхностные интегралы в этом случае обращаются в нуль, формулу (23.5) можно преобразовать:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \int_{\Delta V_i} \rho_i \varphi_i dV_i, \quad (23.9)$$

где  $\Delta V_i$  — объем, занимаемый  $i$ -м зарядом;  $\varphi_i$  — потенциал, создаваемый как  $i$ -м, так и другими зарядами. Таким образом,

$$\varphi_i = \varphi_i' + \varphi_i^{\text{соб}},$$

где  $\varphi_i'$  — потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме  $i$ -го;  $\varphi_i^{\text{соб}}$  — потенциал, создаваемый элементами  $i$ -го заряда. Наличие этой части потенциала обуславливает

существование собственной энергии заряда. Поэтому выражение (23.9) можно представить в виде

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \int_{\Delta V_i} \rho_i \varphi'_i dV_i + \frac{1}{2} \sum_i \int_{\Delta V_i} \rho_i \varphi_i^{\text{cob}} dV_i. \quad (23.10)$$

В пределе  $\Delta V_i \rightarrow 0$  для интегралов в первой сумме получаем

$$\lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \int_{\Delta V_i} \rho_i \varphi'_i dV_i = q_i \varphi'_i,$$

поскольку  $\rho_i \rightarrow q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$  и при интегрировании можно воспользоваться формулой (23.8). Интегралы второй суммы в (23.10) при  $\Delta V_i \rightarrow 0$  дают бесконечность, так как при этом не только  $\rho_i \rightarrow \infty$ , но и  $\varphi_i^{\text{cob}} \rightarrow \infty$ . Поэтому после перехода к пределу  $\Delta V_i \rightarrow 0$  равенство (23.10) принимает вид

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi'_i + \infty.$$

Второй бесконечный член равен бесконечной энергии взаимодействия различных элементов одного и того же точечного заряда друг с другом. Этот член не зависит от взаимного расположения точечных зарядов и может быть отброшен, так что энергию взаимодействия можно представить в виде

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i, \quad (23.11)$$

где  $\varphi_i$  — потенциал в точке заряда  $q_i$ , созданный всеми другими зарядами, за исключением  $i$ -го. Для простоты будем писать  $\varphi_i$  без штриха. Множитель  $1/2$  обусловлен тем же, что и в формуле (23.5).

Энергия точечного заряда  $q$  в потенциальном поле  $\varphi$  равна

$$W = q\varphi. \quad (23.12)$$

Следует еще раз отметить, что при переходе от (23.5) к (23.11) мы не учитывали бесконечную энергию взаимодействия различных элементов каждого точечного заряда друг с другом, которую обычно и называют собственной энергией. Величины (23.5) и (23.1) численно равны

и всегда положительны, поскольку

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}^2 > 0. \quad (23.13)$$

Величина же (23.11), как нетрудно видеть, может быть и отрицательной. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассчитать по формуле (23.11) энергию взаимодействия двух разноименных зарядов.

Поэтому можно сказать, что полная энергия электромагнитного поля, создаваемого зарядами, распределенными в пространстве с конечной плотностью, дается формулами (23.5) и (23.1) и всегда положительна. При переходе к точечным зарядам она становится положительной бесконечной величиной. Если от этой бесконечной величины отнять бесконечную собственную энергию точечных зарядов, то останется конечная энергия взаимодействия точечных зарядов друг с другом [см. (23.11)], которая может быть как положительной, так и отрицательной. Формулу (23.11) можно преобразовать с помощью формулы для потенциала, создаваемого системой точечных зарядов:

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}}, \quad (23.14)$$

где  $\varphi_i$  — потенциал в точке расположения  $i$ -го заряда, создаваемый остальными зарядами  $j \neq i$ ;  $r_{ij}$  — расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м точечными зарядами. Подставляя (23.14) в (23.11), находим

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \quad (23.15)$$

Запишем эту формулу для частного случая двух зарядов:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_1}{r_{21}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = q_1 \varphi_1 = q_2 \varphi_2, \quad (23.16)$$

где  $\varphi_1$  — потенциал, создаваемый зарядом  $q_2$ , в точке нахождения заряда  $q_1$ . Это есть энергия взаимодействия точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии  $r_{12}$  один от другого. При разноименных знаках зарядов эта энергия отрицательна.

**Энергия заряженных проводников.** В проводниках объемные заряды отсутствуют, поэтому  $\rho$  в формуле

(23.5) равно нулю. Потенциал  $\varphi$  на каждом проводнике является постоянным. Поэтому в случае проводников формула (23.5) принимает вид

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \int_{S_i} \varphi_i \sigma_i dS = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \int_{S_i} \sigma_i dS = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i Q_i, \quad (23.17)$$

где  $\varphi_i$  и  $\sigma_i$  — потенциал и поверхностная плотность  $i$ -го проводника;  $Q_i$  — его заряд.

Применяя эту формулу для вычисления энергии заряженного конденсатора, находим

$$W = Q(\varphi_1 - \varphi_2)/2 = QV/2 = CV^2/2 = Q^2/(2C), \quad (23.18)$$

где  $Q$ ,  $V$  и  $C$  — соответственно заряд пластины конденсатора, разность потенциалов между его пластинами и емкость.

**Энергия диполя во внешнем поле** равна сумме энергий его зарядов. Поэтому

$$W = q[\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \varphi(\mathbf{r})]. \quad (23.19)$$

Разлагая функцию  $\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l})$  в ряд Тейлора:

$$\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l}) = \varphi(\mathbf{r}) + l_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + l_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + l_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \dots$$

и ограничиваясь членами первого порядка по  $l$ , находим

$$\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \varphi(\mathbf{r}) = -l_x E_x - l_y E_y - l_z E_z,$$

где  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ . Таким образом, окончательно для энергии диполя во внешнем электрическом поле  $\mathbf{E}$  получаем

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}, \quad (23.20)$$

где  $\mathbf{p}$  — момент диполя.

**Энергия диэлектрического тела во внешнем поле.** На первый взгляд кажется, что формула (23.20) для энергии диполя во внешнем поле приводит для энергии элемента объема поляризованного диэлектрика к соотношению  $dW = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E} dV$ , поскольку его дипольный момент  $d\mathbf{p} = \mathbf{P} dV$ , а полная энергия диэлектрического тела является интегралом от этой величины по объему тела. Однако такое заключение неправильно, так как каждый элемент  $dV$  объема диэлектрического тела становится

источником электрического поля и в такой расчет входит дважды: один раз как дипольный момент, находящийся во внешнем поле, другой — как источник поля, в котором расположены другие дипольные моменты.

Для подсчета энергии целесообразно исходить из полной энергии поля. Для упрощения допустим, что диэлектрик однороден и заполняет все пространство, а заряды, создающие электростатическое поле, распределены в конечной области пространства. Обозначим через  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$  векторы поля, создаваемые данным распределением зарядов в вакууме. Полная энергия поля в этом случае равна

$$W_0 = -\frac{1}{2} \int \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0 dV, \quad (23.21)$$

где интеграл распространяется на все пространство. Предположим, теперь что все пространство заполнено однородной диэлектрической средой, а распределение свободных зарядов, создающих поле, остается неизменным. Обозначив через  $\epsilon$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  соответственно диэлектрическую проницаемость и векторы поля среды для полной энергии поля, получим

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV. \quad (23.22)$$

Следовательно, энергия диэлектрика, помещенного во внешнее поле  $\mathbf{E}_0$ , равна

$$W_{\kappa} = W - W_0 = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0) dV. \quad (23.23)$$

Как отмечалось раньше, при заполнении всего пространства однородным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$  напряженность во всех точках пространства уменьшается в  $\epsilon/\epsilon_0$  раз и, следовательно,

$$\mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 / \epsilon. \quad (23.24)$$

С учетом (23.24) подынтегральное выражение в (23.23) преобразуется:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0 = \epsilon E^2 - \epsilon_0 E_0^2 = -(\epsilon - \epsilon_0) \epsilon_0 E_0^2 / \epsilon = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0, \quad (23.25)$$

где

$$(\epsilon - \epsilon_0) \epsilon_0 \mathbf{E}_0 / \epsilon = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} = \mathbf{P}. \quad (23.26)$$

Тогда формула (23.23) принимает вид

$$W_{\kappa} = -\frac{1}{2} \int \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 dV. \quad (23.27)$$

С помощью аналогичных в принципиальном отношении, но более громоздких математических вычислений, можно показать, что формула (23.27) справедлива также и для диэлектрика конечных размеров во внешнем поле  $\mathbf{E}_0$ .

Из (23.27) можно получить выражение энергии диэлектрического тела с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$ , находящегося в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ . Для этого запишем эту формулу для энергии диэлектрического тела с проницаемостью  $\epsilon_1$  в виде

$$W_{\kappa 1} = -\frac{1}{2} \int (\epsilon_1 - \epsilon_0) \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_0 dV, \quad (23.28)$$

где  $\mathbf{E}_1$  — напряженность поля в теле. Для упрощения по-прежнему предполагаем, что диэлектрик заполняет все пространство. Энергия диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon_2$ , аналогично (23.28), равна

$$W_{\kappa 2} = -\frac{1}{2} \int (\epsilon_2 - \epsilon_0) \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_0 dV. \quad (23.29)$$

Отсюда следует, что энергия диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$  относительно энергии диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$  равна

$$W_{\kappa 21} = W_{\kappa 2} - W_{\kappa 1} = -\frac{1}{2} \int [(\epsilon_2 - \epsilon_1) \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_0 - (\epsilon_1 - \epsilon_0) \times \times \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_0] dV. \quad (23.30)$$

С помощью соотношений

$$\mathbf{E}_2 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 / \epsilon_2, \quad \mathbf{E}_1 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 / \epsilon_1 \quad (23.31)$$

находим

$$\begin{aligned} (\epsilon_2 - \epsilon_0) \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_0 - (\epsilon_1 - \epsilon_0) \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_0 &= [\epsilon_0 (\epsilon_2 - \epsilon_0) / \epsilon_2 - \\ - \epsilon_0 (\epsilon_1 - \epsilon_0) / \epsilon_1] \mathbf{E}_0^2 &= (\epsilon_2 - \epsilon_1) \epsilon_0^2 \mathbf{E}_0^2 / \epsilon_1 \epsilon_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_1) \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1. \end{aligned} \quad (23.32)$$

Поэтому формула (23.30) принимает вид

$$W_{\kappa 21} = -\frac{1}{2} \int (\epsilon_2 - \epsilon_1) \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 dV. \quad (23.33)$$

Так же как и в предыдущем случае, можно показать, что эта формула справедлива и для конечного диэлектрика, если в (23.33) производить интегрирование по объему диэлектрика. В этом случае  $E_1$  означает напряженность поля, которое существовало бы в объеме диэлектрика, если его проницаемость была бы равной

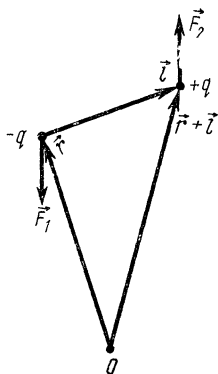


Рис. 18

диэлектрической проницаемости  $\epsilon_1$  окружающей среды (диэлектрика нет и все пространство заполнено диэлектрической средой с проницаемостью  $\epsilon_1$ ). Причем  $E_2$  — напряженность поля в диэлектрике после внесения его в поле при фиксированных свободных зарядах, создающих поле. Формула (23.33) важна для анализа сил, действующих на диэлектрик.

Из формулы (23.33) следует важное утверждение: увеличение диэлектрической проницаемости среды ведет к уменьшению полной энергии поля.

Докажем это. Пусть напряженность исходного поля  $E_1 = E$ . При увеличении диэлектрической проницаемости  $\epsilon_1$  среды на  $\delta\epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1$  напряженность поля равна  $E_2 = E + \delta E$ . Следовательно, изменение энергии

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int \delta\epsilon E^2 dV, \quad (23.34)$$

где член высшего порядка малости  $\delta\epsilon \delta E \cdot E$  отброшен.

## § 24. МЕХАНИЧЕСКИЕ СИЛЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

**Сила, действующая на точечный заряд, помещенный в электрическое поле  $E$ , равна**

$$F = qE. \quad (24.1)$$

**Сила, действующая на непрерывно распределенный заряд.** Если заряд распределен по объему  $V$  с объемной плотностью  $\rho$ , то в электрическом поле  $E$  на него действует сила

$$F = \int \rho E dV. \quad (24.2)$$



**Сила, действующая на диполь.** Сила, действующая на диполь, является суммой сил, действующих на заряды диполя (рис. 18):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = q(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1), \quad (24.3)$$

где  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{E}_1$  — напряженности электрического поля в точке нахождения положительного и отрицательного зарядов диполя. Предполагая, что расстояние  $l$  между зарядами мало по сравнению с расстояниями, на которых внешнее электрическое поле изменяется значительно, можно напряженность поля  $\mathbf{E}_2$  разложить в ряд Тейлора и ограничиться первым членом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &\equiv \mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + l_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + l_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + \dots = \\ &= \mathbf{E}_1 + (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \dots, \end{aligned} \quad (24.4)$$

где

$$\begin{aligned} (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{E} &= \left( l_x \frac{\partial}{\partial x} + l_y \frac{\partial}{\partial y} + l_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{E} = l_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + l_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + \\ &+ l_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} \end{aligned}$$

и  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ .

Принимая во внимание (24.3), (24.4) и учитывая, что  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ , находим выражение для силы, действующей на диполь:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (24.5)$$

В однородном электрическом поле она равна нулю, поскольку на разноименные заряды диполя действуют равные, но противоположно направленные силы, которые компенсируют друг друга. Чем значительнее неоднородность электрического поля, тем бóльшая сила действует на диполь.

**Момент сил, действующих на диполь.** На диполь действует пара сил (рис. 18), момент которой относительно центра диполя равен

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times q\mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (24.6)$$

Он стремится повернуть момент диполя  $\mathbf{p}$  до совпадения с направлением поля  $\mathbf{E}$ .

**Силы, действующие на проводники.** У поверхности проводника поле с внешней стороны проводников равно

$$\mathbf{E} = \sigma \mathbf{n} / \epsilon, \quad (24.7)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности проводника,  $\sigma$  — плотность поверхностных зарядов.

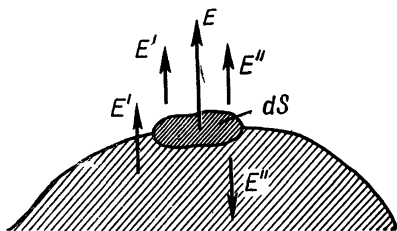


Рис. 19

Выделим некоторый бесконечно малый участок поверхности  $dS$  проводника и исследуем поле вблизи этого участка (рис. 19). Оно создается как зарядами площадки  $dS$ , так и всеми остальными зарядами. Ясно, что на заряды, находящиеся на площадке  $dS$ , действует только поле, создаваемое всеми остальными зарядами,

находящимися вне площадки  $dS$ . Обозначим напряженность этого поля  $\mathbf{E}'$ . Напряженность поля, создаваемого зарядами площадки  $dS$ , обозначим  $\mathbf{E}''$ . Напряженность  $\mathbf{E}'$  очевидно, по обе стороны площадки  $dS$  имеет одинаковое значение и направление, т. е. поле является непрерывным. Напряженность  $\mathbf{E}''$  по разные стороны площадки имеет одинаковое значение, но противоположное направление. Вне проводника  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{E}''$  складываются и дают результирующее поле напряженностью  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E}' + \mathbf{E}'' = \mathbf{E} = \sigma \mathbf{n} / \epsilon. \quad (24.8)$$

Внутри проводника суммарное поле равно нулю и поэтому

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}''. \quad (24.9)$$

С учетом этого равенства из (24.8) следует, что

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'' = \sigma / (2\epsilon) \quad (24.10)$$

и, в частности,

$$\mathbf{E}' = \sigma \mathbf{n} / (2\epsilon). \quad (24.11)$$

На элементе поверхности  $dS$  находится заряд  $dq = \sigma dS$ , на который действует поле напряженностью  $E'$ . Следовательно, на этот заряд действует сила

$$dF = dqE' = \sigma^2 ndS / (2\epsilon). \quad (24.12)$$

Поэтому поверхностная плотность  $f_n$  силы, т. е. сила, действующая на единицу поверхности проводника, равна  $f_n = dF/dS = \sigma^2 n / (2\epsilon)$ .

Исключая из этой формулы плотность заряда  $\sigma$  с помощью равенства (24.7), получаем другое выражение для поверхностной плотности силы:

$$f_n = \epsilon E^2 n / 2, \quad (24.14)$$

где  $E$  — полная напряженность у поверхности проводника.

Формулы (24.13) и (24.14) показывают, что на поверхность проводника всегда действует сила, направленная в сторону внешней нормали к этой поверхности. Плотность этой силы численно равна плотности энергии электростатического поля у поверхности проводника.

Для вычисления полной силы, действующей на проводник в электростатическом поле, необходимо проинтегрировать плотность силы по всей поверхности  $S$  проводника:

$$F = \int_S f_n dS = \frac{\epsilon}{2} \int_S E^2 dS = \frac{1}{2\epsilon} \int_S \sigma^2 dS, \quad (24.15)$$

где  $dS = ndS$  — элемент поверхности проводника, направленный по внешней нормали.

**Объемные силы, действующие на диэлектрики.** Поскольку дипольный момент элемента объема  $dV$  поляризованного диэлектрика, находящегося в электрическом поле  $E$ , равен  $dp = P dV$ , на этот элемент объема согласно формуле (24.5) действует сила

$$dF = (dp \cdot \nabla) E dV. \quad (24.16)$$

Отсюда для объемной плотности силы получаем

$$f = dF/dV = (P \cdot \nabla) E. \quad (24.17)$$

Принимая во внимание формулы (22.23) и (22.2), это выражение можно переписать в виде

$$f = (\epsilon - \epsilon_0)(E \cdot \nabla) E. \quad (24.18)$$

Пользуясь (П.10), где  $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{E}$ ,

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} = 1/2 \operatorname{grad} E^2 - \mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad (24.19)$$

и принимая во внимание, что в электростатике  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ , можно записать формулу для объемной плотности силы:

$$\mathbf{f} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2} \operatorname{grad} E^2 = \frac{\kappa \epsilon_0}{2} \operatorname{grad} E^2. \quad (24.20)$$

Из нее видно, что направление силы, действующей на диэлектрик, не зависит от направления поля, она всегда направлена в сторону максимального возрастания напряженности электрического поля. Это означает, что диэлектрик увлекается в область наибольшей напряженности электростатического поля.

Эта формула очень наглядна, поскольку показывает, что на элементарные объемы диэлектрика действуют силы, стремящиеся сдвинуть эти объемы в направлении максимальной скорости возрастания напряженности электрического поля. Иногда это выражают в виде утверждения, что элемент объема диэлектрика увлекается в сторону больших полей.

Формула (24.20) справедлива как для абсолютно жестких диэлектриков, так и для сжимаемых диэлектриков при условии, что их поляризация линейно зависит от плотности массы, или, иначе говоря, при условии, что дипольные моменты индивидуальных молекул и атомов при сжатии и расширении элемента объема не изменяются, а дипольные моменты, обусловленные смещением ионов, либо отсутствуют, либо их вклад можно считать несущественным. Эти условия выполняются в газах и в большинстве случаев в жидкостях [см. (20.30)].

Рассмотрим в качестве примера силы, действующие на диэлектрический шар в однородном поле. Для непосредственного применения формулы (24.20) необходимо допустить, что переход от внешней относительно шара области с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$  к внутренней с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$  происходит не скачком на поверхности шара, а непрерывно в некотором сферическом слое. В этом случае напряженность  $\mathbf{E}$  изменяется непрерывно от ее значения вне шара до значения внутри шара. В каждой точке шарового слоя для вычисления силы можно использовать формулу (24.20).

В случае  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  поле внутри шара меньше, чем вне шара. Поэтому сила в каждой точке слоя направлена во внеш-

ную сторону шара. Аксиальная симметрия задачи показывает, что равнодействующие этих сил по разные стороны шара стремятся растянуть шар по линии внешнего поля, однако полная равнодействующая всех сил равна нулю и шар, как целое, остается в покое. При  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  силы в переходном сферическом слое направлены внутрь шара и их равнодействующие по разные стороны шара стремятся сжать его по линии внешнего поля. Полная сила, действующая на шар, как и в предыдущем случае, равна нулю.

Если же внешнее поле неоднородно, то полная сила, действующая на шар, не равна нулю. С помощью аналогичных рассуждений заключаем, что при  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  полная действующая на шар сила направлена в сторону возрастания поля в среде. Этим объясняется, что легкие диэлектрические предметы притягиваются к наэлектризованным телам, поскольку для воздуха  $\epsilon_2 \approx \epsilon_0$  и всегда соблюдается условие  $\epsilon_1 > \epsilon_0$ . Если же  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ , то действующая на диэлектрический шар сила направлена противоположно, т. е. в сторону уменьшения поля в среде. Поэтому в среде с достаточно большой диэлектрической проницаемостью, например в керосине, диэлектрические предметы отталкиваются от наэлектризованных тел.

Такое поведение диэлектриков может быть понято на основании формулы (23.33) для энергии диэлектрического тела с проницаемостью  $\epsilon_2$ , находящегося в среде с проницаемостью  $\epsilon_1$ . Очевидно, что при  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  (диэлектрическая проницаемость тела больше, чем среды) эта энергия отрицательна. Она уменьшается при увеличении  $\epsilon_2$ ,  $E_2$  и уменьшении  $\epsilon_1$ . Поскольку система стремится к минимуму энергии, то при  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  тело должно втягиваться в области с большей напряженностью поля или с меньшей проницаемостью  $\epsilon_1$ . Если  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ , то диэлектрик с  $\epsilon_2$  будет выталкиваться из области с большой напряженностью в область с меньшей напряженностью поля, как это и было установлено на основании прямого анализа действующих сил.

**Объемные силы с учетом сжимаемости.** Если поляризация диэлектрика нелинейно зависит от плотности массы, то формула (24.20) перестает быть справедливой. Энергия элемента объема диэлектрика, а следовательно, и действующие на него силы зависят от характера деформации. Процессы предполагаются изотермическими ( $T = \text{const}$ ). Исходим из формулы (23.34), в которой из-

менение  $\delta\varepsilon$  вызывается деформацией. Диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  изменяется, вообще говоря, от точки к точке, т. е. зависит от  $\mathbf{r}$ , и, кроме того, она может зависеть от плотности  $\rho_m$  диэлектрика, т. е.  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}, \rho_m)$ . Пусть при деформации элемент объема  $dV$  смещается на  $\mathbf{l}$ . При этом также происходит изменение плотности диэлектрика. Элемент объема, который после смещения находится в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , до смещения находился в точке  $\mathbf{r} - \mathbf{l}$ . Следовательно, полное изменение  $d\varepsilon$  при этом равно

$$d\varepsilon = -\mathbf{l} \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \delta \rho_m, \quad (24.21)$$

где  $\delta \rho_m$  — изменение плотности диэлектрика. Можно показать, что элемент объема  $dV'$  после деформирования равен

$$dV = (1 + \operatorname{div} \mathbf{l}) dV'. \quad (24.22)$$

Поскольку масса элемента сохраняется, то

$$\rho'_m dV' = \rho_m dV, \quad (24.23)$$

или

$$\rho'_m dV' = \rho_m (1 + \operatorname{div} \mathbf{l}) dV', \quad (24.24)$$

где  $\rho_m$  и  $\rho'_m$  — плотности массы после и до деформации. Из (24.24) следует, что для бесконечно малого смещения

$$\delta \rho_m = \rho_m - \rho'_m = -\rho_m \operatorname{div} \mathbf{l}. \quad (24.25)$$

Подставляя выражение для  $d\varepsilon$  из (24.21) с учетом (24.25) в формулу (23.34), находим

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \left[ E^2 \mathbf{l} \operatorname{grad} \varepsilon + E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \operatorname{div} \mathbf{l} \right] dV. \quad (24.26)$$

По формуле (П.13) имеем

$$E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \operatorname{div} \mathbf{l} = \operatorname{div} \left( E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \mathbf{l} \right) - \mathbf{l} \operatorname{grad} \left( E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \right). \quad (24.27)$$

Тогда равенство (24.26) преобразуется к виду

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \left[ E^2 \operatorname{grad} \varepsilon - \operatorname{grad} \left( E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \right) \right] \mathbf{l} dV + \\ + \frac{1}{2} \int \operatorname{div} \left( E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \mathbf{l} \right) dV. \quad (24.28)$$

Эти интегралы распространяются по всему объему. При обычных предположениях о непрерывности подынтегральных выражений можно второй из интегралов преобразовать по теореме Гаусса — Остроградского в интеграл по поверхности, ограничивающий рассматриваемый объем. Считая для упрощения рассуждений, что диэлектрик занимает все пространство, а порождающие поле заряды распределены в конечной области пространства, убеждаемся, что этот интеграл равен нулю, поскольку  $E^2 \sim 1/r^4$ , а  $S \sim r^2$ , где  $r$  — расстояние от зарядов до поверхности интегрирования.

Единственными рассматриваемыми объемными силами  $\mathbf{f}$  являются силы, действующие со стороны поля на диэлектрик. Плотность совершаемой ими при деформации работы равна  $\mathbf{fl}$ . Поэтому закон сохранения энергии при деформации имеет вид

$$\int \mathbf{fl} dV = -\frac{1}{2} \int \left[ E^2 \operatorname{grad} \varepsilon - \operatorname{grad} \left( E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \right) \right] \mathbf{l} dV. \quad (24.29)$$

Поскольку это равенство справедливо при произвольных смещениях  $\mathbf{l}$ , то

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left( E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \right). \quad (24.30)$$

Как было указано выше,  $\partial \varepsilon / \partial \rho_m$  вычисляется при  $T = \text{const}$ . Эта формула справедлива для изотропных сжимаемых диэлектриков при произвольной зависимости  $\varepsilon$  от плотности  $\rho_m$  массы. Если поляризация  $P$  линейно зависит от  $\rho_m$ , то

$$\varepsilon = \frac{D}{E} = \frac{\varepsilon_0 E + P}{E} = \varepsilon_0 + \frac{P}{E}. \quad (24.31)$$

Отсюда (при  $P \sim \rho_m$ ) следует, что

$$\rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} = \varepsilon - \varepsilon_0, \quad (24.32)$$

и формула (24.30) переходит в (24.20). Тем самым обоснованы условия, при которых справедлива (24.20). Хотя формула (24.30) для упрощения рассуждений при преобразованиях в (24.28) была выведена в предположении, что диэлектрик занимает весь объем, она справедлива всегда. Это следует из формулы (24.30), поскольку она выражает дифференциальное соотношение, справедливость которого не может зависеть от того, что происходит в других областях пространства. Следовательно, формула (24.30) справедлива всегда.

#### **Поверхностные силы, действующие на диэлектрик.**

Объемные силы в состоянии равновесия не приводят в движение соответствующие элементы объема тела. Они вызывают деформации среды, в результате которых возникают упругие силы, полностью уравнивающие объемные. Ситуация здесь такая же, как и в объеме жидкости, находящейся в поле тяжести. На каждый элемент объема действует вес жидкости, находящейся в объеме, однако он уравнивается силами давления соседних участков жидкости через поверхность элемента объема. Объемные силы приводят к движениям элементарных объемов лишь при достаточно быстрых изменениях полей, когда упругие силы не успевают следовать за объемными и не уравнивают их в каждый данный момент времени. Равнодействующая всех объемных сил приложена к диэлектрику в целом и может вызвать его движение, если только она не уравнивается какой-либо другой силой.

Наряду с объемными у диэлектриков имеются также поверхностные силы, которые возникают в поверхностном слое диэлектрика. Для их нахождения будем исходить из первого начала термодинамики.

В термодинамике для определения сил необходимо знать выражение для работы. При изотермическом процессе в качестве функции состояния берется свободная энергия  $F$ , связь которой с работой определяется соотношением

$$dA = -dF. \quad (24.33)$$

У диэлектрика термодинамические величины состоят из двух частей: не зависящей от электрического поля и имеющей такой же смысл, как и у других материальных тел, и зависящей от электрического поля. Поскольку термодинамические соотношения при отсутствии электрического поля были рассмотрены в термодинамике, сейчас целесо-



образно ограничиться лишь той частью термодинамических величин, которая связана с полем. Поэтому в (24.33) имеется в виду лишь приращение работы и изменение свободной энергии, обусловленное электрическим полем. Соответствующие части этих величин, обусловленные деформациями и силами упругости, считаем отсутствующими, т. е. диэлектрик недеформируем.

Свободной является та часть внутренней энергии, которая не связана в системе и доступна для получения работы. Ее величина зависит от условий осуществления процесса.

Рассмотрим плоскую границу между диэлектриками с проницаемостью  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . В качестве конкретной модели физической системы можно взять плоский конденсатор, пространство между обкладками которого заполнено жидкими диэлектриками, с плоской границей раздела между ними. Граница раздела может проходить либо параллельно, либо перпендикулярно обкладкам. С помощью этой модели будут получены выражения для плотности поверхностных сил, действующих на границе между диэлектриками. Ввиду того что эти соотношения имеют локальный характер, они не зависят от конкретного вида нелокальной модели, в рамках которой получены, т. е. имеют общий характер.

Пусть плоская граница раздела между диэлектриками параллельна обкладкам конденсатора. Поле  $\mathbf{E}$  нормально к границе. В качестве положительной нормали выберем ту, которая направлена во второй диэлектрик. Все величины, относящиеся ко второму диэлектрику, будем обозначать индексом 2. При бесконечно малом смещении  $dx$  границы производится работа за счет изменения свободной энергии. Вычислив независимо работу и изменение свободной энергии, из формулы (24.33) можно найти значения поверхностных сил. Смещение следует рассматривать как виртуальное, т. е. не обязательно фактически осуществляемое.

Работа при смещении участка поверхности площадью  $S$  по нормали на  $dx$  равна

$$dA = S f_n dx, \quad (24.34)$$

где  $f_n$  — поверхностная плотность сил.

Для вычисления  $dF$  учтем, что на границе между диэлектриками соблюдается условие  $D_2 = D_1$ , т. е. смещение границы происходит при условии  $D = \text{const}$ . Поскольку

$D = \sigma$ , это соответствует условию постоянства заряда на обкладке конденсатора. Следовательно, в данном случае надо вычислить  $dF$  при постоянном заряде  $q$  обкладок, т. е.  $(dF)_{T,q}$ . Единственной формой энергии, которую надо учесть, является плотность электрической энергии. При смещении границы на  $dx$  объем  $Sdx$ , первоначально заполненный электрической энергией с плотностью  $\mathbf{E}_2 \mathbf{D}_2 / 2$ , станет заполненным энергией с плотностью  $\mathbf{E}_1 \mathbf{D}_1 / 2$ . Других энергетических факторов, участвующих в процессе при производстве работы, нет. Следовательно, разность энергий в объеме  $Sdx$  после и до перемещения границы составляет изменение свободной энергии:

$$(dF)_{T,q} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_1 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{D}_2) S dx. \quad (24.35)$$

С учетом (24.34) и (24.35) из (24.33) следует, что

$$f_n = \mathbf{E}_2 \mathbf{D}_2 / 2 - \mathbf{E}_1 \mathbf{D}_1 / 2. \quad (24.36)$$

Из (24.36) видно, что поверхностная плотность силы  $f_n$  складывается из двух частей:

а) плотности силы

$$f_{n2} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{D}_2 / 2, \quad (24.37)$$

действующей на границу в направлении второй среды со стороны электрического поля второй среды;

б) плотности силы

$$f_{n1} = -\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_1 / 2, \quad (24.38)$$

действующей в противоположном к положительной нормали направлении, т. е. на границу в направлении первой среды со стороны электрического поля первой среды. Таким образом, электрическое поле с каждой из сторон как бы притягивает к себе поверхность раздела с плотностью силы, равной плотности электрической энергии нормального к поверхности поля. Равнодействующая двух сил, приложенных к поверхности раздела от полей по разные стороны от границы, является полной силой, действующей на границе раздела. Поскольку  $D_2 = D_1 = D$ , формула (24.36) принимает вид

$$f_n = D^2 (1/\epsilon_2 - 1/\epsilon_1) / 2. \quad (24.39)$$

При  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  плотность силы  $f_n > 0$ . Это означает, что полная поверхностная сила действует в сторону диэлектри-

ка с меньшей диэлектрической проницаемостью, т. е. в направлении большей плотности электромагнитной энергии. Заметим, что объемные силы (20.24) также направлены в сторону увеличения плотности электрической энергии.

Теперь рассмотрим границу между диэлектриками, перпендикулярную обкладкам плоского конденсатора. В этом случае по разные стороны границы соблюдается условие  $E_2 = E_1 = E$ , поскольку поле тангенциально к границе. Смещение границы происходит при условии  $E = \text{const}$ , т. е. при постоянной разности потенциалов. Следовательно, необходимо вычислить изменение свободной энергии  $(dF)_{T,\varphi}$ . Для поддержания неизменной разности потенциалов необходимо изменить плотность зарядов на той части обкладок конденсатора, которая соответствует смещению поверхности раздела на  $dx$  по нормали к ней. Для этого затрачивается энергия на перемещение  $l$  заряда, равная  $dq(\varphi_2 - \varphi_1) = dqEl$ , где  $E$  и  $l$  — напряженность поля и расстояние между обкладками конденсатора. Плотности поверхностного заряда в областях соприкосновения обкладок с первым и вторым диэлектриками равны соответственно  $\sigma_1 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_1 E$  и  $\sigma_2 = \varepsilon_2 E_2 = \varepsilon_2 E$ . Длина граничной поверхности площадью  $S$  в параллельном обкладкам направлении равна  $S/l$ . Следовательно, для  $dq$  получаем выражение

$$dq = (\sigma_2 - \sigma_1)(S/l) dx. \quad (24.40)$$

При данных условиях для производства работы доступна энергия поля за вычетом той, которая затрачивается для поддержания постоянства разности потенциалов. Поэтому для изменения свободной энергии имеем

$$(dF)_{T,\varphi} = (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_1/2 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{D}_2/2) S dx - (\sigma_1 - \sigma_2)(S/l) dx El. \quad (24.41)$$

Принимая во внимание, что  $\sigma_2 = \varepsilon_2 E$  и  $\sigma_1 = \varepsilon_1 E$ , окончательно получим

$$(dF)_{T,\varphi} = -(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_1/2 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{D}_2/2) S dx. \quad (24.42)$$

С учетом (24.34) и (24.42) соотношение (24.33) принимает вид

$$f_n = -\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{D}_2/2 + \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_1/2. \quad (24.43)$$

Из (24.43) видно, что поверхностная плотность силы складывается из двух частей:

а) плотности силы

$$f_{n2} = -\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{D}_2 / 2, \quad (24.44)$$

действующей на границу раздела в направлении первой среды со стороны электрического поля второй среды. Напомним, что положительная нормаль выбрана из первой среды во вторую и, следовательно, знак минус в (24.44) свидетельствует о направлении силы из второй среды в первую;

б) плотности силы

$$f_{n1} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_1 / 2, \quad (24.45)$$

действующей на границу в направлении положительной нормали со стороны электрического поля первой среды. Таким образом, электрическое поле как бы давит на граничащую с ним поверхность раздела, причем давление равно плотности электрической энергии тангенциального поля.

Равнодействующая двух сил давления, приложенных к поверхности раздела от полей по разные стороны границы, является полной силой, действующей на границу. Поскольку  $E_1 = E_2 = E$ , формула (24.43) принимает вид

$$f_n = E^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) / 2. \quad (24.46)$$

При  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  плотность силы  $f_n > 0$ . Это означает, что полная поверхностная сила действует в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью, как это было и в случае нормального к поверхности раздела поля. Таким образом, всегда независимо от ориентации поля поверхностная сила действует в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью, как это уже было сказано в связи с (24.20). Справедливость и общность этого утверждения следует также из равенства (23.34), если принять во внимание, что система стремится перейти в состояние с наименьшей энергией.

## § 25. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

**Полярные и неполярные молекулы.** По диэлектрическим свойствам вещества можно разделить на два класса. Если при отсутствии внешнего электрического поля

дипольный момент молекулы равен нулю, то молекула называется неполярной. Молекула называется полярной, если при отсутствии внешнего электрического поля ее дипольный момент отличен от нуля. Соответственно диэлектрики с моментами того или иного типа называются неполярными или полярными.

**Теория поляризации диэлектриков с неполярными молекулами.** На разноименные заряды, входящие в состав молекулы, действуют со стороны электрического поля противоположно направленные силы: положительные заряды стремятся сдвинуться в направлении поля, а отрицательные — противоположно направлению поля. В результате этого молекула деформируется и у нее образуется дипольный момент, индуцированный электрическим полем. Из процесса образования индуцированного дипольного момента следует, что его направление совпадает с направлением электрического поля. В первом приближении дипольный момент молекулы можно считать пропорциональным полю:

$$\mathbf{p} = \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (25.1)$$

где  $\alpha$  — молекулярная диэлектрическая восприимчивость. Для дипольного момента, отнесенного к единице объема, получаем

$$\mathbf{P} = \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E} \frac{1}{\Delta V} \sum_i 1 = \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E} N, \quad (25.2)$$

где

$$\sum_i 1 = \Delta V N. \quad (25.3)$$

Здесь  $N$  — число молекул в единице объема. Коэффициент диэлектрической молекулярной восприимчивости  $\alpha$  связан с соответствующим коэффициентом  $\alpha'$  гауссовой системы единиц соотношением

$$\alpha = 4\pi\alpha'. \quad (25.4)$$

Сравнение формул (25.2) и (22.2) позволяет установить следующее соотношение между коэффициентами молекулярной диэлектрической восприимчивости  $\alpha$  и диэлектрической восприимчивости  $\kappa$ :

$$\kappa = \alpha N, \quad (25.5)$$

Отсюда получаем выражение для относительной диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon/\epsilon_0 = \epsilon_r = 1 + \alpha N. \quad (25.6)$$

Ясно, что коэффициент молекулярной диэлектрической восприимчивости  $\alpha$  определяется внутренними свойствами молекул и не может существенно зависеть от плотности вещества, давления, температуры. Следовательно, диэлектрическая восприимчивость диэлектриков с неполярными молекулами является линейной функцией плотности вещества. От температуры она может зависеть только неявно, посредством  $N$ . Величина

$$(\epsilon_r - 1)/\rho_m, \quad (25.7)$$

где  $\rho_m$  — плотность вещества, является постоянной, не зависящей от температуры.

**Теория поляризации диэлектриков с полярными молекулами.** Многие молекулы имеют постоянные электрические моменты. Например, постоянный момент у молекулы HCl равен примерно  $3,44 \cdot 10^{-30}$  Кл·м; у HBr —  $2,33 \cdot 10^{-30}$  Кл·м и т. д. Обычно дипольные моменты молекул имеют порядок  $10^{-28}$ — $10^{-29}$  Кл·м. Дипольный момент  $\mathbf{p}$ , помещенный в электрическое поле  $\mathbf{E}$ , имеет потенциальную энергию

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (25.8)$$

Эта величина достигает минимального значения в случае, когда направления диполя и электрического поля

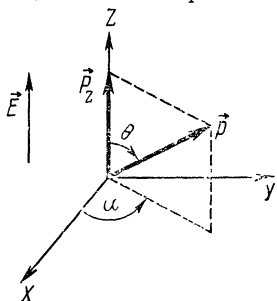


Рис. 20

совпадают. Поскольку устойчивым состоянием системы является состояние с наименьшей энергией, моменты диполей полярных молекул стремятся повернуться до совпадения с направлением электрического поля. Этот поворот осуществляется парой сил, действующих на положительный и отрицательный заряды диполя (см. рис. 18). Однако тепловое движение расстраивает это упорядочивающее действие электрического поля. В результате устанавливается некоторое равновесие.

В результате устанавливается некоторое равновесие.

Совместим ось  $Z$  с направлением напряженности электрического поля (рис. 20). Формула (25.8) показывает, что энергия молекул определяется углом  $\theta$  между осью  $Z$  и направлением их дипольного момента  $p$ :

$$W = -pE \cos \theta = -p_z E. \quad (25.9)$$

Таким образом, формула Больцмана, характеризующая распределение частиц по энергиям, превращается в формулу, характеризующую распределение диполей молекул по углам. Число молекул, дипольные моменты которых расположены в телесном угле  $d\Omega$ , равно

$$dN = A_0 e^{\frac{pE \cos \theta}{kT}} d\Omega = A_0 e^{\frac{pE \cos \theta}{kT}} d\alpha \sin \theta d\theta. \quad (25.10)$$

Отсюда для средней проекции момента диполя на ось  $Z$  получаем формулу

$$\langle p_z \rangle = \frac{p \int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta}, \quad (25.11)$$

где  $\beta = pE/(kT)$ .

Задача сводится к вычислению интеграла:

$$I = \int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta, \quad (25.12)$$

поскольку интеграл в числителе (25.11) легко вычисляется с помощью дифференцирования:

$$\int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta = \partial I / \partial \beta. \quad (25.13)$$

Интеграл (25.12) находится непосредственно:

$$I = \int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta = -\frac{1}{\beta} e^{\beta \cos \theta} \Big|_0^\pi = \frac{2}{\beta} \operatorname{sh} \beta. \quad (25.14)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{2}{\beta} \left( \operatorname{ch} \beta - \frac{\operatorname{sh} \beta}{\beta} \right). \quad (25.15)$$

Таким образом, формула (25.11) с учетом (25.14) и (25.15) принимает вид

$$\langle p_z \rangle = pL(\beta), \quad (25.16)$$

где  $L(\beta) = \text{cth } \beta - 1/\beta$  — функция Ланжевена (рис. 21). На практике обычно встречаются не очень большие поля,

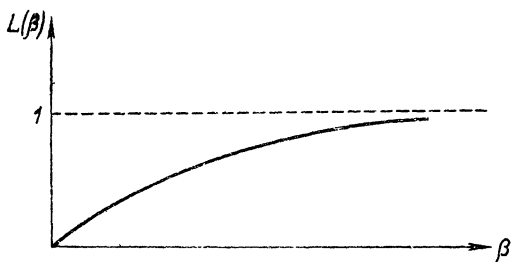


Рис. 21

для которых  $pE \ll kT$ , т. е.  $\beta \ll 1$ . В этом случае, разлагая гиперболический котангенс в ряд:

$$\text{cth } \beta = \frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{3} - \frac{\beta^3}{45} + \dots, \quad (25.17)$$

можно в выражении  $L(\beta)$  ограничиться линейным членом  $L(\beta) = \beta/3$ . Следовательно,

$$\langle p_z \rangle = p^2 E / (3kT). \quad (25.18)$$

Отсюда в полной аналогии с ходом вычислений (25.1) — (25.6) получаем следующее выражение для относительной диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon/\epsilon_0 = \epsilon_r = 1 + p^2 N / (3kT \epsilon_0). \quad (25.19)$$

Таким образом, в случае полярных молекул в слабых электрических полях диэлектрическая проницаемость явно зависит от температуры.

При очень сильных полях, когда  $pE \gg kT$ , т. е.  $\beta \gg 1$ , функция  $L(\beta)$  близка к единице:

$$L(\beta)|_{\beta \gg 1} \approx 1. \quad (25.20)$$

Следовательно, при таких полях

$$\langle p_z \rangle = p, \quad (25.21)$$



т. е. все дипольные моменты ориентированы по полю и поляризация достигает своего максимального значения, благодаря чему имеет место насыщение. Считая порядок дипольных моментов равным  $10^{-29}$  Кл·м, заключаем, что при  $T=300$  К напряженность поля, при котором происходит насыщение, равна

$$E_{\text{нас}} \approx kT/p \approx 4,2 \cdot 10^8 \text{ В/м.} \quad (25.22)$$

**Случай одновременного наличия постоянных и индуцированных дипольных моментов.** У полярных молекул, помещенных в электрическое поле тем же способом, о котором говорилось в случае неполярных молекул, должен индуцироваться дополнительный дипольный момент. Поляризация диэлектрика за счет этого дипольного индуцированного момента накладывается на поляризацию за счет переориентировки дипольных моментов. Считая, что полный вектор поляризации может быть представлен в виде суммы векторов поляризации за счет постоянных и за счет индуцированных дипольных моментов, мы с помощью формул (25.6) и (25.19) получаем следующее выражение для относительной диэлектрической постоянной:

$$\epsilon/\epsilon_0 = \epsilon_r = 1 + N[\alpha + p^2/(3kT\epsilon_0)]. \quad (25.23)$$

Это есть формула Ланжевена — Дебая.

Рассуждения при получении формулы (25.23) были не очень строгими. Но и более строгие рассуждения приводят к этой же формуле. Формула Ланжевена — Дебая хорошо подтверждается экспериментом.

## § 26. ПЛОТНЫЕ ГАЗЫ, ЖИДКОСТИ И ТВЕРДЫЕ ДИЭЛЕКТРИКИ

**Отличие локального поля от внешнего.** В случае большой плотности вещества поле, действующее на молекулу, может существенно отличаться от внешнего поля. Поэтому при анализе поляризации диэлектрика при большой плотности вещества необходимо принять во внимание поле, создаваемое самим поляризованным диэлектриком.

Сначала исследуем плотные газы и слабополярные жидкости. Под слабополярными понимаются такие жидкости, у которых главный вклад в полную поляризацию вносится за счет индуцированных внешним полем моментов. Если постоянный дипольный момент молекулы жидкого

диэлектрика  $p_0 \leq 0,16 \cdot 10^{-29}$  Кл·м, то преобладающую роль играет индуцированная поляризация и жидкость относится к слабополяризуемым. Если же  $p_0 \geq 0,33 \cdot 10^{-29}$  Кл·м, то главную роль играет поляризационная ориентация и такие жидкости являются поляризуемыми. К последним результатам настоящего параграфа, вообще говоря, неприменимы.

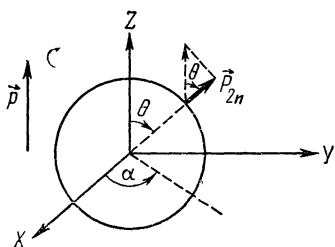


Рис. 22

**Вычисление напряженности локального поля.** Выделим одну из молекул диэлектрика и вычислим напряженность локального поля, которое на нее действует. Вокруг молекулы, как центра, опишем физически малую сферу (рис. 22). Дополнительное поле, действующее на молекулу, состоит из двух частей:

а) поля  $E_1$ , создаваемого поляризованным диэлектриком, расположенным вне сферы;

б) поля  $E_2$ , создаваемого поляризованным диэлектриком, расположенным внутри сферы.

При вычислении напряженности  $E_1$  поля воспользуемся методами феноменологической электродинамики, считая диэлектрик сплошной средой. Поскольку сфера имеет физически малый объем, можно считать среду вокруг сферы равномерно поляризованной. Если вырезать внутри этой среды шаровую полость, то в соответствии с формулами (22.15) надо считать, что поле  $E_1$  в центре этой полости образуется за счет связанных поверхностных зарядов:

$$\sigma_{св} = P_{1n} - P_{2n} = -P_{2n}. \quad (26.1)$$

Направив ось  $Z$  вдоль вектора постоянной поляризации  $P$ , получаем

$$\sigma_{св} = -P_{2n} = -P \cos \theta. \quad (26.2)$$

В телесном угле  $d\Omega$  расположен поверхностный заряд

$$dq = \sigma_{св} r^2 d\Omega, \quad (26.3)$$

где  $r$  — радиус сферы. Этот заряд в направлении оси  $Z$  создает поле

$$dE_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \theta. \quad (26.4)$$

Из симметрии поля заключаем, что отличной от нуля будет только составляющая поля вдоль оси  $Z$ . Из (26.4) следует, что

$$E_z = E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \int \cos^2 \theta d\Omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3\epsilon_0} P. \quad (26.5)$$

Следовательно, поле, создаваемое поляризованным диэлектриком, расположенным вне сферы, равно

$$E_1 = P/(3\epsilon_0). \quad (26.6)$$

Напряженность  $E_2$  поля вычислим для частного случая, когда молекулы расположены в узлах кубической решетки. Поместим начало координат в точку нахождения рассматриваемой молекулы, а оси  $X, Y, Z$  направим по осям кубической решетки.

Воспользуемся формулой (21.9); тогда

$$E_{2x} = \frac{p_x}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{-r_i^2 + 3x_i^2}{r_i^5} + \frac{p_y}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{3x_i y_i}{r_i^5} +$$

$$+ \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{3x_i z_i}{r_i^5}. \quad (26.7)$$

Здесь суммирование проведено по всем молекулам рассматриваемого физически малого объема внутри сферы. Можно просуммировать сначала по всем молекулам, находящимся на данном расстоянии  $r$ , а затем по сферическим ячейкам, соответствующим различным расстояниям. При первом суммировании ввиду кубической симметрии получаем:

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i y_i^2 = \sum_i z_i^2 = \frac{1}{3} \sum_i r_i^2,$$

$$\sum_i x_i y_i = \sum_i y_i z_i = \sum_i z_i x_i = 0. \quad (26.8)$$

Поэтому из (26.7) с учетом (26.8) следует, что

$$E_{2x} = 0. \quad (26.9)$$

Аналогично доказываются равенства  $E_{2y} = E_{2z} = 0$ , откуда

$$\mathbf{E}_2 = 0. \quad (26.10)$$

Таким образом, локальное поле, действующее на молекулу внутри диэлектрика, равно

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{P}/(3\epsilon_0). \quad (26.11)$$

Эту формулу и получающиеся из нее следствия следует рассматривать как первое приближение, поскольку реальный диэлектрик отличается от той модели, с помощью которой получена формула (25.11). В частности, электрические поля молекул не являются простыми полями диполей, решетка диэлектрика может иметь другую симметрию, моменты молекул могут быть неодинаковыми и т. д.

**Плотные газы.** В этом случае необходимо учесть отличие локального поля от внешнего и принять во внимание различную ориентацию дипольных моментов, зависящую от взаимодействия диполей между собой. Последнее обстоятельство чрезвычайно сильно усложняет всю картину.

Считая, что напряженность локального поля много меньше напряженности поля насыщения, разумно для среднего значения дипольного момента вместо (25.18) написать формулу

$$\langle p_z \rangle = p^2 \mathbf{E}^*/(3kT). \quad (26.12)$$

Однако напряженность локального поля  $\mathbf{E}^*$  в этой формуле нельзя выразить через напряженность внешнего поля с помощью соотношения (26.11). В этом можно убедиться следующим образом.

Представим себе, что в центре сферической полости радиусом  $a$ , образованной в сплошном диэлектрике с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_r$ , помещен диполь  $\mathbf{p}$ . Поле этого диполя вызывает поляризацию среды вне сферы. Благодаря этому внутри сферы образуется дополнительное поле  $\mathbf{E}_{\text{доп}}$ . Расчет, который рекомендуется проделать в порядке упражнения, приводит к формуле

$$\mathbf{E}_{\text{доп}} = \frac{2(\epsilon_r - 1)}{2\epsilon_r + 1} \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 a^3}, \quad (26.13)$$

т. е. внутри сферы возникает постоянное поле, по направлению совпадающее с диполем. Это дополнительное поле может вызвать появление дополнительного индуцированного момента диполя, но не может вызвать изменения его направления. Поэтому весь механизм поляризации не может быть понят как переориентация дипольных моментов в локальном поле.

Допустим, что в формуле (26.12) в качестве  $\mathbf{E}^*$  можно взять выражение (26.11). Воспользовавшись формулой (26.12), получим для определения поляризации следующее уравнение:

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p}_z \rangle = \frac{N p^2}{3kT} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \right), \quad (26.14)$$

где  $N$  — плотность диполей диэлектрика. Из (26.14) следует, что

$$\mathbf{P} = \frac{N p^2 / (3kT)}{1 - N p^2 / (9k\epsilon_0 T)} \mathbf{E}. \quad (26.15)$$

При  $T_{кр} = N p^2 / (9k\epsilon_0)$  знаменатель в правой части (26.15) обращается в нуль. При  $T > T_{кр}$  поляризуемость  $\mathbf{P}$  имеет конечное значение, а при  $T = T_{кр}$  она обращается в бесконечность. Это означает, что при  $T \leq T_{кр}$  соответствующее вещество должно обладать спонтанной поляризацией. Например, по этой формуле можно ожидать, что пары воды под большим давлением должны быть спонтанно поляризованы, что заведомо неверно. Аналогичные ошибочные результаты получаются и для других веществ. Поэтому плотные газы с полярными молекулами требуют других подходов.

**Полярные жидкости.** Онзагер предложил для полярных жидкостей другую модель, которая лучше согласуется с экспериментом, хотя и дает весьма приблизительные числовые результаты. В модели принимается, что каждый диполь находится в центре реальной сферической полости, объем которой равен среднему объему, приходящемуся на одну молекулу. После этого учитывают ориентировку диполей внутри сфер под влиянием окружающего диэлектрика и индуцированную поляризацию под влиянием поля (26.23). В результате получаем формулу

$$\frac{(\epsilon_r - \epsilon_{r_{инд}})(2\epsilon_r + \epsilon_{r_{инд}})}{\epsilon_r (\epsilon_{r_{инд}} + 2)^2} = \frac{N p^2}{9\epsilon_0 kT}, \quad (26.16)$$

где  $\epsilon_r$  — полная относительная диэлектрическая восприимчивость;  $\epsilon'_{r_{инд}}$  — относительная диэлектрическая восприимчивость, обусловленная индуцированными дипольными моментами. Для воды  $\epsilon'_{r_{инд}} = 4,9$ ;  $p = 2,16 \times 10^{-29}$  Кл·м и формула (26.16) при  $T = 0^\circ\text{C}$  дает  $\epsilon_r = 105$ . Экспериментальное значение  $\epsilon_r = 88$ . Лучшего согласия с экспериментом трудно ожидать, поскольку в расчете учитывались лишь дальнедействующие электростатические силы, а короткодействующие силы не принимались во внимание.

Лучшее количественное согласие с экспериментом получается для сильно разбавленных растворов полярных диэлектриков в неполярном растворителе. В этом случае полярные молекулы растворенного вещества расположены достаточно далеко одна от другой и взаимодействие между ними можно не принимать во внимание. С помощью модели Онзагера можно учесть взаимодействие полярных молекул с неполярным растворителем. В результате получается теория, достаточно хорошо согласующаяся с экспериментом.

**Ионные кристаллы.** Их можно себе представить состоящими из двух подрешеток с положительными и отрицательными ионами. Под влиянием внешнего электрического поля эти решетки смещаются друг относительно друга, в результате чего возникает довольно значительная поляризация, что дает сравнительно большие значения относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon'$ . Например,  $\epsilon_r = 6$  у NaCl;  $\epsilon_r = 5$  у KCl и т. д.

## § 27. КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ ДИЭЛЕКТРИКИ

**Тензор диэлектрической проницаемости.** Кристаллические диэлектрики имеют анизотропию диэлектрических свойств, зависящую от свойств симметрии их кристаллической решетки. Из-за различия диэлектрических свойств вещества по разным направлениям вектор поляризованности  $\mathbf{P}$  перестает быть параллельным вызывающему поляризацию электрическому полю  $\mathbf{E}$ . Это приводит к тому, что векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  не параллельны и, следовательно, между ними не имеет места соотношение вида (22.21). Связь между векторами  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  имеет более сложный характер.

Нумеруя координаты ( $x, y, z$ ) цифрами 1, 2, 3, можно представить эту связь в виде

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} E_j. \quad (27.1)$$

Совокупность величин

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (27.2)$$

называется тензором диэлектрической проницаемости. Этот тензор симметричен:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \quad (27.3)$$

В теории тензоров доказывается, что при надлежащем выборе направления осей декартовой системы координат симметричный тензор второго ранга, каким является тензор  $\varepsilon_{ij}$ , может быть приведен к диагональному виду:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \dots & 0 \\ & \varepsilon_2 & \\ 0 & \dots & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (27.4)$$

Величины  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  называются главными значениями тензора. Следовательно, диэлектрические свойства диэлектрика в общем случае характеризуются тремя независимыми величинами.

Если диэлектрик изотропен, то для него заведомо все направления эквивалентны и, следовательно,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$ , т. е. свойства изотропного диэлектрика характеризуются одной скалярной величиной — его диэлектрической проницаемостью.

Однако такая ситуация осуществляется не только в изотропных телах, но и в кристаллических. Если кристаллы обладают кубической симметрией, то у них  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$ , т. е. кристаллы с кубической симметрией в отношении своих диэлектрических свойств не отличаются от изотропных тел.

Если из трех главных значений тензора два совпадают между собой, то имеются только два различных главных значения тензора. Такие кристаллы называются одноос-

ными. К ним относятся кристаллы тетрагональной, ромбоэдрической и гексагональной систем.

Если все три главных значения тензора различны, то кристаллы называются двуосными. К ним относят кристаллы триклинной, моноклинной и ромбической систем.

**Плотность энергии электромагнитного поля.** Формула для плотности энергии электростатического поля

$$\omega = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} / 2 \quad (27.5)$$

сохраняет свое значение и для анизотропных диэлектриков, однако для связи между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  надо использовать формулу (27.1). Поэтому (27.5) может быть представлено в виде

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} E_i E_j. \quad (27.6)$$

Если оси декартовых координат совпадают с главными осями тензора диэлектрической проницаемости, то выражение (27.6) с учетом (27.4) превращается в следующее:

$$\omega = (\varepsilon_1 E_1^2 + \varepsilon_2 E_2^2 + \varepsilon_3 E_3^2) / 2. \quad (27.7)$$

Учитывая, что плотность энергии электромагнитного поля есть величина положительная, заключаем из (27.6), что все главные значения тензора должны быть положительными:

$$\varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_3 > 0. \quad (27.8)$$

В связи с этим целесообразно заметить, что утверждение о симметричности  $\varepsilon_{ij}$  может быть выведено из положительной определенности квадратичной формы (27.7), в которой независимыми переменными являются  $E_i$ .



**СТАЦИОНАРНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. МАГНЕТИКИ**

**§ 28. УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ**

**Уравнения поля.** В стационарном случае электрическое и магнитное поля можно рассматривать независимо (см. § 14). Уравнения магнитного поля в вакууме, порождаемого постоянным током, имеют следующий вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (28.1)$$

При отсутствии переопределенности (число уравнений больше числа независимых неизвестных) справедливо замечание относительно полноты системы уравнений Максвелла в вакууме (см. § 8).

**Граничное условие для нормальной составляющей вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ .** Это условие можно получить с помощью уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (28.2)$$

методом, совершенно аналогичным использованному в § 15. Однако теперь вместо вектора  $\mathbf{D}$  следует взять вектор  $\mathbf{B}$ . После интегрирования уравнения (28.2) по объему цилиндра (см. рис. 8) вместо (15.3) получаем

$$\int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (28.3)$$

Все дальнейшие выкладки аналогичны предыдущему случаю, и после перехода к пределу  $h \rightarrow 0$  вместо (15.9) получаем

$$(B_{2n} - B_{1n}) S_0 = 0. \quad (28.4)$$

Следовательно, граничное условие для нормальных составляющих вектора электрической индукции имеет вид

$$B_{2n} - B_{1n} = 0. \quad (28.5)$$

Таким образом, нормальная составляющая вектора  $\mathbf{B}$  непрерывна.

**Граничное условие для тангенциальной составляющей вектора индукции магнитного поля.** Исходным является уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (28.6)$$

Рассуждая аналогично (см. рис. 9), вместо (15.12) получим

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \equiv \mu_0 I. \quad (28.7)$$

Повторяя все рассуждения предыдущего случая с заменой  $\mathbf{E}$  на  $\mathbf{B}$ , вместо (15.17) получим

$$B_{2t} l_2 - B_{1t} l_1 + \langle B_{\text{бок}} \rangle l_{\text{бок}} = \mu_0 I. \quad (28.8)$$

Пусть  $l_{\text{бок}} \rightarrow 0$ , при этом  $l_2 \rightarrow l_0$ ,  $l_1 \rightarrow l_0$ ,  $\langle B_{\text{бок}} \rangle l_{\text{бок}} \rightarrow 0$ , а сила тока  $I$  выразится через поверхностную силу тока, который течет по поверхности и пересекает отрезок  $l_0$ . Поэтому в пределе получим

$$(B_{2t} - B_{1t}) l_0 = \mu_0 I_{\text{пов}}. \quad (28.9)$$

Принимая во внимание, что  $j_{\text{пов}} = I_{\text{пов}}/l$  — плотность поверхностного тока, окончательно граничное условие для тангенциальной составляющей вектора индукции магнитного поля можно записать в виде

$$B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 j_{\text{пов}}. \quad (28.10)$$

Следует отметить, что  $j_{\text{пов}}$  — плотность поверхностного тока в направлении, перпендикулярном тому, в котором выбираются тангенциальные составляющие индукции магнитного поля.

Если поверхностные токи отсутствуют:  $j_{\text{пов}} = 0$ , то тангенциальная составляющая индукции магнитного поля непрерывна:

$$B_{2t} = B_{1t}. \quad (28.11)$$

**Граничное условие для тангенциальной составляющей вектора плотности тока.** Это условие получается из закона Ома в дифференциальной форме:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad (28.12)$$

Проектируя обе части этого уравнения на тангенциальное направление, получаем  $j_{2t} = \gamma_2 E_{2t}$ ,  $j_{1t} = \gamma_1 E_{1t}$ . Разделив почленно первое равенство на второе и приняв во внимание, что  $E_{2t} = E_{1t}$ , находим

$$j_{2t}/j_{1t} = \gamma_2/\gamma_1. \quad (28.13)$$

Таким образом, если электропроводности двух сред различны, то плотность тока вдоль поверхности раздела различна по обе стороны от нее.

**Граничное условие для нормальной составляющей вектора плотности тока** получается из уравнения непрерывности:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t.$$

Аналогично выводу граничных условий для нормальных составляющих вектора магнитной и электрической индукции получаем  $j_{2n} - j_{1n} = -\partial \sigma / \partial t$ , где  $\sigma$  — плотность поверхностных зарядов. Следовательно, нормальная составляющая плотности тока претерпевает разрыв лишь в том случае, когда на граничной поверхности имеется изменяющаяся плотность поверхностных зарядов.

## § 29. СТОРОННИЕ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩИЕ СИЛЫ И ОБОБЩЕННЫЕ ЗАКОНЫ ОМА И ДЖОУЛЯ — ЛЕНЦА

**Невозможность постоянного тока при наличии только кулоновских сил электростатического поля.** Уравнение непрерывности в случае постоянных токов сводится к уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (29.1)$$

которое выражает то, что линии вектора плотности тока в этом случае не имеют ни начала, ни конца. Вычислим интеграл

$$\oint_L \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}, \quad (29.2)$$

взятый вдоль некоторого замкнутого контура  $L$ , совпадающего с замкнутой токовой линией. Если имеется только электростатическое поле  $\mathbf{E}$  кулоновского происхождения, то плотность тока  $\mathbf{j}$  связана с напряженностью  $\mathbf{E}$  уравнением  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ , где  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ . Имея это в виду и считая  $\gamma = \operatorname{const}$ , получим для (29.2)

$$\oint_L \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \gamma \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\gamma \int_L \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l} = -\gamma \int_L d\varphi = 0. \quad (29.3)$$

С другой стороны, в интеграле (29.2) интегрирование ведется вдоль линии плотности тока. Поэтому элемент пути интегрирования  $d\mathbf{l}$  в каждой точке пути параллелен вектору плотности тока. Следовательно,  $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \pm j dl$ . Знак плюс берут в случае, когда направления  $\mathbf{j}$  и  $d\mathbf{l}$  совпадают, а знак минус, когда  $\mathbf{j}$  и  $d\mathbf{l}$  имеют противоположные направления. С учетом сказанного равенство (29.3) приобретает вид

$$\oint_L \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \pm \int_L j dl = 0.$$

Подынтегральное выражение на всем пути интегрирования не меняет знака. При таком условии из равенства нулю интеграла следует равенство нулю подынтегрального выражения:  $j = 0$ . Тем самым доказано, что существование постоянного тока при наличии только кулоновских сил электростатического поля невозможно.

**Сторонние электродвижущие силы.** Постоянные токи могут существовать только при наличии полей неэлектростатического происхождения. Такие поля существуют в источниках тока — гальванических элементах, аккумуляторах, генераторах и т. д. Эти поля называются сторонними, связанные с этими полями силы, обуславливающие движение зарядов и возникновение тока, называются сторонними электродвижущими силами (сторонние э. д. с.).

**Обобщение закона Ома.** Плотность тока обуславливается не только электростатическим полем, но и полем сторонних сил. Поле сторонних сил характеризуется вектором  $\mathbf{E}^{\text{стор}}$ , который определяется как напряженность электрического поля, порождающего такую же плотность электрического тока, какая порождается сторонними силами неэлектростатического происхождения. В связи с этим закон Ома должен быть написан в виде

$$\mathbf{j} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}). \quad (29.4)$$

**Интегральный закон Ома для всей цепи.** Умножим обе части уравнения (29.4) на элемент длины  $d\mathbf{l}$  и проинте-

грируем вдоль замкнутой линии плотности тока по направлению тока:

$$\oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \gamma \oint (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стоп}}) \cdot d\mathbf{l}.$$

Разделив обе части равенства на  $\gamma$  и принимая во внимание (29.3), получаем

$$\oint \frac{\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}}{\gamma} = \oint \mathbf{E}^{\text{стоп}} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}^{\text{стоп}}. \quad (29.5)$$

Здесь введено обозначение

$$\mathcal{E}^{\text{стоп}} = \oint \mathbf{E}^{\text{стоп}} \cdot d\mathbf{l} \quad (29.6)$$

по аналогии с обозначением для электродвижущей силы электрического поля

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Учитывая, что  $\mathbf{j}$  и  $d\mathbf{l}$  в интеграле (29.5) совпадают по направлению, можно написать

$$\oint \frac{\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}}{\gamma} = \oint \frac{j dl}{\gamma} = \oint j S \frac{dl}{\gamma S}, \quad (29.7)$$

где в последнем интеграле числитель и знаменатель умножены на  $S$  — поперечное сечение достаточно малой трубки тока, вдоль которой берется интеграл (29.7). Очевидно, что сопротивление участка  $dl$  токовой трубки с поперечным сечением  $S$  и электропроводностью  $\gamma$  равно

$$dR = dl / \gamma S, \quad (29.8)$$

а сила тока, протекающего через эту трубку,

$$I = jS,$$

причем в любом поперечном сечении одной и той же токовой трубки сила тока одна и та же. Учитывая сказанное, можно написать

$$\oint j S \frac{dl}{\gamma S} = \int I dR = I \int dR = IR. \quad (29.9)$$

В этой формуле  $R$  — сопротивление трубки с током,  $I$  — сила тока. На основании (29.9) и (29.7), равенство (29.5)

можно записать в виде

$$IR = \mathcal{E}_{\text{стор}}. \quad (29.10)$$

Это соотношение названо законом Ома. Формула (22.10) показывает, что существование и сила постоянных токов действительно обуславливаются наличием сторонних электродвижущих сил.

**Обобщение закона Джоуля — Ленца.** Теплота, выделяемая токами, протекающими в некотором объеме  $V$  в единицу времени, дается формулой

$$P = \int_V \frac{j^2 dV}{\gamma}.$$

Преобразуем подынтегральное выражение в этой формуле с помощью обобщенного закона Ома (29.4):

$$\frac{j^2}{\gamma} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}_{\text{стор}}.$$

Тогда

$$P = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV + \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}_{\text{стор}} dV. \quad (29.11)$$

Нетрудно доказать, что первый из интегралов равен нулю. Для доказательства учтем, что  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ , и воспользуемся известной из векторного анализа формулой (П.13), которая в данном случае имеет вид

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{j} \text{grad } \varphi = -\text{div}(\varphi \mathbf{j}) + \varphi \text{div } \mathbf{j}.$$

В результате получаем

$$\int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV = - \int_V \text{div}(\varphi \mathbf{j}) dV + \int_V \varphi \text{div } \mathbf{j} dV. \quad (29.12)$$

Второй интеграл согласно (29.1) равен нулю, а первый интеграл можно преобразовать в интеграл по поверхности с помощью теоремы Гаусса — Остроградского:

$$\int_V \text{div}(\varphi \mathbf{j}) dV = \int_S \varphi \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}.$$

Предположим, что все токи сосредоточены в пределах объема  $V$ . Поэтому токи, протекающие через поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ , отсутствуют. Это означает,

что плотность тока на поверхности  $S$  равна нулю. Тем самым доказано равенство нулю интеграла (29.12) и формула (29.11) может быть записана в виде

$$P = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}_{\text{стор}} dV. \quad (29.13)$$

Эта формула показывает, что постоянный ток выделяет теплоту всецело за счет энергии, сообщаемой ему сторонними э. д. с. Энергия магнитного поля при этом остается постоянной.

### § 30. МАГНИТОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. ЗАКОН БИО — САВАРА

**Векторный потенциал.** Уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (30.1)$$

показывает, что в отличие от электростатического поля магнитостатическое поле, вообще говоря, не является потенциальным полем, а уравнение

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (30.2)$$

свидетельствует о том, что не существует магнитных зарядов, которые порождают магнитное поле аналогично тому, как электрические заряды порождают электрическое поле.

Из векторного анализа известно, что дивергенция ротора любого вектора тождественно равна нулю. Отсюда следует, что общим решением уравнения (30.2) является представление вектора  $\mathbf{B}$  в виде ротора некоторого вектора  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (30.3)$$

Вектор  $\mathbf{A}$  называется векторным потенциалом магнитного поля или просто вектор-потенциалом.

Векторный потенциал неоднозначно определяется заданным магнитным полем  $\mathbf{B}$ . Если потенциал  $\mathbf{A}$  описывает данное магнитное поле  $\mathbf{B}$  согласно формуле (30.3), то потенциал

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi \quad (30.4)$$

( $\chi$  — произвольная функция координат) описывает то же самое поле  $\mathbf{B}$ , потому что

$$\mathbf{B}' = \text{rot } \mathbf{A}' = \text{rot}(\mathbf{A} + \text{grad } \chi) = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot grad } \chi = \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (30.5)$$

Здесь учтено, что ротор градиента всегда равен нулю. Это показывает, что потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}'$ , отличающиеся градиентом произвольной функции, описывают одно и то же магнитное поле.

Пользуясь этим произволом в выборе потенциала, можно наложить на потенциал некоторое дополнительное условие. В магнитостатике оно имеет вид

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (30.6)$$

Вектор-потенциал является вспомогательной величиной и никакого прямого физического смысла не имеет.

**Уравнение для векторного потенциала.** Уравнение для векторного потенциала получается в результате подстановки выражения (30.3) для  $\mathbf{B}$  в уравнение (30.1):

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (30.7)$$

Воспользуемся формулой (П.8) векторного анализа:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (30.8)$$

Учитывая (30.6), заключаем, что первый член правой части (30.8) равен нулю; окончательно получаем следующее уравнение для векторного потенциала:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (30.9)$$

Оно может быть записано также в виде трех скалярных уравнений для компонент векторов:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z.$$

Таким образом, вектор-потенциал подчиняется уравнению Пуассона, решение которого может быть записано по аналогии с решением уравнения Пуассона для скалярного потенциала в виде

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_x dV}{r}, \quad A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_y dV}{r}, \quad A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_z dV}{r},$$



или в векторной форме

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j} dV}{r}. \quad (30.10)$$

Здесь  $\mathbf{A}$  — значение векторного потенциала в той точке, где вычисляется поле;  $\mathbf{j}$  — плотность тока в элементе объема интегрирования  $dV$ ;  $r$  — расстояние между элементом объема  $dV$  и точкой, в которой вычисляется потенциал.

**Закон Био — Савара.** Индукция магнитного поля вычисляется по формуле (30.3) с помощью векторного потенциала (30.10). Подставляя (30.10) в (30.3), получаем

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \int_V \frac{\mathbf{j} dV}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{rot} \left( \frac{\mathbf{j}}{r} \right) dV, \quad (30.11)$$

где знак ротора внесен под знак интеграла на основании того, что область интегрирования не зависит от тех переменных, по которым берется операция ротора, т. е. не зависит от координат точки, в которой вычисляется вектор-потенциал.

Для преобразования подынтегрального выражения в (30.11) воспользуемся формулой (П.14), записанной в виде

$$\text{rot} \left( \frac{1}{r} \mathbf{j} \right) = \frac{1}{r} \text{rot } \mathbf{j} + \text{grad } \frac{1}{r} \times \mathbf{j}. \quad (30.12)$$

Под интегралом (30.11) вектор плотности тока  $\mathbf{j}$  зависит от координат точки интегрирования, а операция ротора выполняется по координатам точки, в которой вычисляется поле, т. е. по совершенно другим, независимым переменным. Следовательно,  $\text{rot } \mathbf{j}$  в первом члене правой части (30.12) при подстановке в подынтегральное выражение (30.11) надо положить равным нулю. Учитывая также, что

$$\text{grad } \frac{1}{r} \times \mathbf{j} = - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{j} = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (30.13)$$

и подставляя (30.12) в (30.11), получаем закон Био — Савара

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV. \quad (30.14)$$

Следует отметить, что радиус-вектор  $\mathbf{r}$  в этой формуле есть радиус-вектор, проведенный из элемента объема интегрирования в точку, в которой вычисляется поле.

**Линейные токи.** В большинстве практически важных случаев постоянные токи текут по достаточно тонким проводам, распределяясь с равномерной плотностью по поперечному сечению этих проводов. Такие токи называют линейными. В этом определении тонким считается провод, линейные размеры поперечного сечения которого много меньше расстояний до точек, в которых вычисляется поле.

Закон Био — Савара (30.14) в применении к линейным токам упрощается. Рассмотрим элемент  $d\mathbf{l}$  проводника. Его объем равен  $dV = Sd\mathbf{l}$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения, поэтому

$$\mathbf{j}dV = \mathbf{j}Sd\mathbf{l} = jSd\mathbf{l} = Id\mathbf{l}, \quad (30.15)$$

где  $I = jS$  — сила тока, текущего по проводнику, а  $d\mathbf{l}$  — элемент длины проводника, по направлению совпадающий с направлением тока в проводнике. Преобразование (30.15) включает интегрирование по поперечному сечению проводника. Поскольку линейные размеры поперечного сечения проводника много меньше расстояния до точек, в которых вычисляется поле, при таком интегрировании можно пренебречь изменением этого расстояния до различных элементов тока в сечении и считать это расстояние постоянным. Поэтому переход к линейным токам в формуле (30.14) осуществляется простой заменой

$$dV \rightarrow Id\mathbf{l} \quad (30.16)$$

в подынтегральном выражении соответствующей формулы, считая  $r$  постоянным. После этого в интеграле остается выполнить операцию интегрирования по  $d\mathbf{l}$  вдоль всего проводника. При таком интегрировании сила тока  $I$  является постоянной, поскольку в различных сечениях одного и того же проводника сила тока одна и та же, поэтому  $I$  можно вынести за знак интеграла. Таким образом, при переходе к линейным токам формула (30.14) принимает вид

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}dV \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (30.17)$$

где  $V$  — объем проводника,  $L$  — линейный контур проводника. Итак, в случае линейных токов определение магнитного поля сводится с помощью формулы Био — Савара к вычислению криволинейного интеграла по контуру проводника.

### Поле элементарных токов.

Элементарными называются замкнутые токи, текущие в области, линейные размеры которой много меньше расстояния от этой области до точек, в которых вычисляется индукция магнитного поля. Простейшим примером элементарного тока является рамка с током, размеры которой много меньше расстояний до точек, в которых вычисляется поле. В определенных пределах любой постоянный ток является элементарным. Этим обстоятельством и обуславливается необходимость специального рассмотрения поля элементарных токов.

Вектор-потенциал элементарного тока (рис. 23) вычисляется по формуле

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int \frac{\mathbf{j}dV}{r'}. \quad (30.18)$$

Значение различных величин, входящих в формулу, дано на рис. 23. Начало координат помещено в точку  $O$ , а поле вычисляется в точке  $C$ ;  $V$  — объем проводника с током. Математическим выражением условия малости размеров области, в которой протекает ток, по сравнению с расстояниями до точек, в которых вычисляется поле, являются неравенства

$$\frac{r_0}{r'} \ll 1, \quad \frac{r_0}{r} \ll 1. \quad (30.19)$$

Из рисунка видно, что

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0. \quad (30.20)$$

Отсюда следует формула

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \left( 1 - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r^2} + \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{-1/2}. \quad (30.21)$$

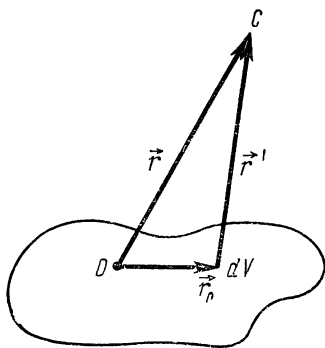


Рис. 23

Учитывая условия (30.19), можно правую часть равенства (30.21) разложить в ряд и ограничиться членом, линейным по  $r_0/r$ :

$$\left(1 - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r^2} + \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r^2}.$$

Таким образом, получается равенство

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r^3} + \dots,$$

подстановка которого в (30.18) приводит к следующему выражению для вектор-потенциала:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V \mathbf{j} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int_V \mathbf{j} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0) dV. \quad (30.22)$$

Здесь учтено, что при интегрировании модуль  $\mathbf{r}$  является постоянным. Первый интеграл в правой части (30.22) равен нулю. Чтобы в этом убедиться, проще всего разбить область интегрирования на ряд отдельных трубок с током. Применяя при интегрировании по каждой трубке с током преобразование (30.16), получим

$$\int_V \mathbf{j} dV = I \oint d\mathbf{l} = 0,$$

поскольку каждая трубка с током замкнута и, следовательно,

$$\oint d\mathbf{l} = 0.$$

Для преобразования второго интеграла в правой части равенства (30.22) воспользуемся известной из векторной алгебры формулой (П.1) разложения двойного векторного произведения:

$$(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{j}) \times \mathbf{r} = \mathbf{j} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}_0 (\mathbf{j} \cdot \mathbf{r}).$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$\mathbf{j} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0) = (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{j}) \times \mathbf{r} / 2 + [\mathbf{j} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0) + \mathbf{r}_0 (\mathbf{j} \cdot \mathbf{r})] / 2.$$

Подставляя последнее выражение в (30.22), получаем

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{8\pi r^3} \int_V (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{j}) \times \mathbf{r} dV + \frac{\mu_0}{8\pi r^3} \int_V [\mathbf{j}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0) + \mathbf{r}_0(\mathbf{j} \cdot \mathbf{r})] dV. \quad (30.23)$$

Докажем, что интеграл

$$\mathbf{K} = \int_V [\mathbf{j}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0) + \mathbf{r}_0(\mathbf{j} \cdot \mathbf{r})] dV$$

равен нулю. Для этого умножим его на произвольный постоянный вектор  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{K} = \int_V [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{j})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0)(\mathbf{j} \cdot \mathbf{r})] dV. \quad (30.24)$$

Подынтегральное выражение можно преобразовать с помощью следующих равенств:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{j})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0)(\mathbf{j} \cdot \mathbf{r}) &= \mathbf{j} \operatorname{grad} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)] = \\ &= \operatorname{div} [\mathbf{j}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)] - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0) \operatorname{div} \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (30.25)$$

где первое равенство проверяется с помощью формулы для градиента от скалярного произведения, а второе равенство есть результат использования формулы (П.13), что мы уже неоднократно делали. Подставляя (30.25) в (30.24) с учетом того, что  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , находим

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{K} = \int_V \operatorname{div} [\mathbf{j}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)] dV = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (30.26)$$

где использована теорема Гаусса — Остроградского и учтено, что все токи сосредоточены внутри объема  $V$ , благодаря чему плотность тока  $\mathbf{j}$  в точках поверхности, ограничивающей объем  $V$ , равна нулю и, следовательно, равен нулю интеграл по этой поверхности в (30.26). Из равенства

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{K} = 0 \quad (30.27)$$

при произвольном  $\mathbf{a}$  следует, что

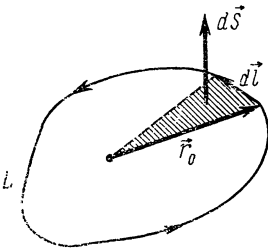
$$\mathbf{K} = 0. \quad (30.28)$$

Это очевидно, если вектор  $\mathbf{K}$  направить по осям координат. Тогда (30.27) означает, что все компоненты  $K_x, K_y, K_z$  равны нулю и, следовательно,  $\mathbf{K} = 0$ .

Таким образом, принимая во внимание (30.28), находим

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{8\pi r^3} \int [(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{j}) \times \mathbf{r}] dV = \frac{\mu_0}{8\pi r^3} \left( \int_V \mathbf{r}_0 \times \mathbf{j} dV \right) \times \mathbf{r}, \quad (30.29)$$

где учтено, что при интегрировании модуль  $r$  является постоянным. Вектор



$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}_0 \times \mathbf{j} dV \quad (30.30)$$

называется магнитным моментом элементарного тока. Из формул (30.29) и (30.30) видно, что вектор-потенциал, а следовательно, и индукция магнитного поля замкнутого тока на достаточно больших расстояниях от него в первом приближении полностью определяются магнитным моментом этого тока:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (30.31)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right). \quad (30.32)$$

Формула (30.32) показывает, что магнитное поле замкнутого тока убывает обратно пропорционально кубу расстояния.

**Магнитный момент линейного тока.** В случае линейного тока формула (30.30) для магнитного момента принимает более простой вид. Учитывая (30.16), получаем

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}_0 \times \mathbf{j} dV = \frac{I}{2} \int_L \mathbf{r}_0 \times d\mathbf{l}, \quad (30.33)$$

где  $L$  — контур замкнутого тока (рис. 24). Учтем, что

$$\frac{1}{2} \mathbf{r}_0 \times d\mathbf{l} = d\mathbf{S} \quad (30.34)$$

— вектор элемента поверхности, которую ограничивает контур тока, и, следовательно,

$$\frac{1}{2} \int_L \mathbf{r}_0 \times d\mathbf{l} = \int_S d\mathbf{S} = \mathbf{S} \quad (30.35)$$

есть вектор поверхности, натянутой на контур  $L$  с током. Подставляя выражение (30.35) в (30.33), находим

$$\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}. \quad (30.36)$$

Вектор поверхности  $\mathbf{S}$  составляет с направлением обтекания контура током праввинтовую систему.

### § 31. МАГНЕТИКИ В МАГНИТОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

**Намагничивание магнетиков.** Магнетиками называются вещества, способные оказывать влияние на магнитное поле, либо возбуждая, либо видоизменяя его. В результате помещения магнетиков во внешнее магнитное поле они приобретают магнитный момент (намагничиваются). Интенсивность намагничивания характеризуется вектором намагничения  $\mathbf{J}$ , который определяется как магнитный момент единицы объема магнетика. Таким образом, магнитный момент  $d\mathbf{p}_m$  элемента объема  $dV$  магнетика, намагниченность которого характеризуется вектором намагничения  $\mathbf{J}$ , равен

$$d\mathbf{p}_m = \mathbf{J}dV. \quad (31.1)$$

Наличие магнитного момента у каждого элемента объема приводит к тому, что этот магнитный момент порождает в соответствии с формулой (30.32) дополнительное магнитное поле, которое складывается с внешним магнитным полем. Таким образом, влияние намагничивания магнетиков на магнитное поле аналогично влиянию поляризации диэлектриков на электрическое поле. Однако имеется и весьма существенное различие. В диэлектриках дополнительное электрическое поле всегда направлено противоположно первоначальному внешнему полю. Благодаря этому полное поле в диэлектрике всегда меньше первоначального. В магнетиках дополнительное поле может быть направлено как противоположно первоначальному полю, так и в том же направлении, что и первоначальное, в зависимости от свойств магнетика. Магнетики, в которых

дополнительное магнитное поле направлено противоположно первоначальному, называются диамагнетиками. Магнетики, у которых дополнительное магнитное поле направлено в ту же сторону, что и первоначальное, называются парамагнетиками. Таким образом, диамагнетики ослабляют магнитное поле, а парамагнетики усиливают его. Для всех диамагнетиков и для большинства парамагнетиков дополнительное магнитное поле весьма мало по сравнению с первоначальным внешним полем. При исчезновении первоначального магнитного поля дополнительное поле также исчезает, т. е. диамагнетики и парамагнетики полностью размагничиваются. Но имеется еще третий класс магнетиков, у которых дополнительное поле много больше первоначального и это дополнительное поле не исчезает при исчезновении первоначального внешнего поля. Следовательно, эти магнетики обладают остаточным намагничиванием. Они способны не только видоизменять магнитное поле, но и самостоятельно возбуждать его. Такие магнетики называются ферромагнетиками. С помощью классической электродинамики нельзя построить строгую теорию намагничивания ферромагнетиков, поскольку их намагниченность обусловлена спиновым магнетизмом электронов, при описании которого большую роль играют квантовые закономерности. Поэтому излагаемая в курсе электродинамики теория магнетиков применима только к диа- и парамагнетикам. Вектор намагничивания, по определению, равен

$$\mathbf{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}_{mi}. \quad (31.2)$$

**Векторный потенциал при наличии магнетиков.** Влияние магнетика на магнитное поле сводится к появлению дополнительного поля, возникающего за счет намагничивания магнетика. Поэтому полное магнитное поле при наличии магнетика является суммой двух полей:

- 1) магнитного поля токов проводимости (вектор-потенциал которого  $\mathbf{A}_0$ );
- 2) магнитного поля, возникающего за счет намагничивания магнетиков (вектор-потенциал которого  $\mathbf{A}_M$ ).

Поэтому вектор-потенциал полного магнитного поля

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_M, \quad (31.3)$$



где

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j} dV}{r}. \quad (31.4)$$

Здесь  $\mathbf{j}$  — плотность токов проводимости, текущих в объеме  $V$ . Из формулы (30.31) следует, что вектор-потенциал  $d\mathbf{A}_M$ , порождаемый магнитным моментом  $d\mathbf{p}_M$ , равен

$$d\mathbf{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{p}_M \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (31.5)$$

Отсюда с учетом формулы (31.1) получаем

$$d\mathbf{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dV \quad (31.6)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dV. \quad (31.7)$$

Тем самым задача определения поля за счет намагничивания магнетика решена.

Формуле (31.7) целесообразно придать другой вид. Для этого воспользуемся формулой (П.14), которая в данном случае имеет вид

$$\operatorname{rot} \left( \frac{\mathbf{J}}{r} \right) = \frac{1}{r} \operatorname{rot} \mathbf{J} + \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{J}. \quad (31.8)$$

Применим эту формулу для преобразования подынтегрального выражения в (31.7). При этом следует помнить, что в формуле (31.7) радиус-вектор  $\mathbf{r}$  проведен из элемента объема  $dV$  в ту точку, где вычисляется вектор-потенциал  $\mathbf{A}_M$ . Ясно, что в равенстве (31.8) дифференцирование производится по одним и тем же переменным. Поэтому, понимая ниже операции ротора и градиента как соответствующие дифференцирования по координатам элемента объема  $dV$ , имеем

$$\operatorname{rot} \left( \frac{\mathbf{J}}{r} \right) = \frac{1}{r} \operatorname{rot} \mathbf{J} + \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{J}}{r^3} = \frac{1}{r} \operatorname{rot} \mathbf{J} - \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (31.9)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — по-прежнему радиус-вектор, проведенный из элемента объема  $dV$  в точку, в которой вычисляется поле. С помощью (31.9) выражение для потенциала (31.7) пре-

образуется к виду

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\text{rot } \mathbf{J}}{r} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{ot} \left( \frac{\mathbf{J}}{r} \right) dV. \quad (31.10)$$

Для дальнейшего преобразования второго интеграла в (31.10) воспользуемся формулой векторного анализа:

$$\int_V \text{rot } \mathbf{A} dV = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}, \quad (31.11)$$

где  $\mathbf{A}$  — непрерывная в области  $V$  векторная функция; вектор  $d\mathbf{S}$  направлен по внешней нормали к поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ .

Равенство (31.2) показывает, что вектор намагничивания  $\mathbf{J}$  претерпевает разрыв на границе между различными магнетиками и на границе между магнетиком и вакуумом. Поэтому, чтобы применить формулу (31.11) к преобразованию второго интеграла в правой части (31.10), необходимо выделить границы разрыва векторной функции  $\mathbf{J}$  (см. рис. 16). Пусть теперь на рис. 16 поверхность  $S''$  обозначает поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем, а  $S$  — поверхность раздела магнетиков, на которой вектор  $\mathbf{J}$  претерпевает разрыв. Эту поверхность разрыва вектора  $\mathbf{J}$  выделяем из области интегрирования с помощью поверхности  $S'$ . Теперь объем  $V$  ограничен поверхностями  $S''$  и  $S'$ . В этом объеме вектор  $\mathbf{J}$  непрерывен, так что можно применить формулу (31.11):

$$\int_V \text{rot} \left( \frac{\mathbf{J}}{r} \right) dV = \int_{S''} \frac{d\mathbf{S} \times \mathbf{J}}{r} + \int_{S'} \frac{d\mathbf{S} \times \mathbf{J}}{r}. \quad (31.12)$$

Считая, что положительная нормаль к поверхности  $S$  направлена в сторону магнетика 2, как указано на рис. 16, и стягивая поверхность  $S'$  к поверхности  $S$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_{S'} \frac{d\mathbf{S} \times \mathbf{J}}{r} &= - \int_S \frac{d\mathbf{S} \times \mathbf{J}_2}{r} + \int_S \frac{d\mathbf{S} \times \mathbf{J}_1}{r} = \\ &= \int_S \frac{d\mathbf{S} \times (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2)}{r} = \int_S \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2)}{r} dS, \end{aligned} \quad (31.13)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности  $S$ , направленный в сторону магнетика 2. Если считать, что все магнетики расположены внутри объема  $V$  так, что поверх-

ность  $S''$  не пересекает магнетики, то в подынтегральном выражении первого интеграла правой части (31.12) вектор  $\mathbf{J}=0$ . Поэтому первый интеграл в правой части (31.12) исчезает. Второй же интеграл преобразуется с помощью формулы (31.13). Таким образом, с учетом (31.13) и (31.12) выражение (31.10) для вектор-потенциала можно представить в виде

$$A_{\text{м}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot } \mathbf{J}}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1)}{r} dS, \quad (31.14)$$

где  $S$  — сумма всех поверхностей раздела магнетиков, на которых вектор  $\mathbf{J}$  претерпевает разрыв.

Как уже указывалось ранее, из уравнений Максвелла следует, что магнитных зарядов не существует. Магнитное поле может порождаться только токами. Поэтому намагничивание, приводящее к появлению дополнительного магнитного поля, должно быть связано с появлением некоторых токов. Однако в отличие от токов проводимости, связанных с перемещением зарядов на макроскопические расстояния, эти точки связаны с движением зарядов в микроскопических областях, т. е. связаны с движением зарядов в молекулах. Поэтому они называются молекулярными токами. Таким образом, намагничивание обусловлено молекулярными токами. Отметим еще раз, что речь здесь идет только о парамагнетиках и диамагнетиках. Магнитные свойства ферромагнетиков обусловлены магнитными свойствами электронов и не могут быть объяснены молекулярными токами.

Сравним первый член правой части формулы (31.14) с выражением (31.4). Мы видим, что в выражении (31.14) для вектор-потенциала, возникающего в результате намагничивания, роль объемной плотности тока играет  $\text{rot } \mathbf{J}$ . Следовательно, средняя объемная плотность молекулярных токов

$$\langle \mathbf{J}_{\text{мол}} \rangle = \text{rot } \mathbf{J}. \quad (31.15)$$

Здесь говорится о средней плотности, так как истинная объемная плотность молекулярных токов, очевидно, очень быстро меняется при переходе от атома к атому, намагниченность же  $\mathbf{J}$  учитывает некоторое среднее намагничивание, обусловленное этими молекулярными токами.

Таким образом, первый член в (31.14) учитывает образование магнитного поля благодаря наличию средней объ-

емной плотности молекулярных токов. Отсюда следует, что второй член в (31.14) описывает возникновение магнитного поля благодаря наличию средней поверхностной плотности молекулярных токов  $\langle j_{\text{пов.мол}} \rangle$ . Следовательно,

$$\langle j_{\text{пов.мол}} \rangle = \mathbf{n} \times (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) \quad (31.16)$$

и формулу (31.14) для вектор-потенциала, обусловленного намагничиванием магнетика, можно представить в виде

$$\mathbf{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\langle j_{\text{мол}} \rangle}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\langle j_{\text{пов.мол}} \rangle}{r} dS. \quad (31.17)$$

На основании формулы (31.17) можно сказать, что магнитное поле, порождаемое магнетиками, создается объемными и поверхностными молекулярными токами магнетика.

**Связь магнитной проницаемости с магнитной восприимчивостью.** Как было сказано, присутствие магнетиков может быть полностью учтено тем, что наряду с магнитным полем, создаваемым токами проводимости, необходимо также учитывать магнитное поле, создаваемое молекулярными токами.

Поле, создаваемое токами проводимости, в вакууме описывается уравнением Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (31.18)$$

В присутствии магнетика необходимо наряду с токами проводимости  $\mathbf{j}$  в формуле (31.18) записать также и плотность молекулярных токов (31.15). Поэтому, если под  $\mathbf{B}$  понимать магнитную индукцию при наличии магнетиков, уравнение (31.18) следует записать в виде

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \text{rot } \mathbf{J}). \quad (31.19)$$

Перенося  $\text{rot } \mathbf{J}$  в (31.19) в левую часть равенства и деля обе части равенства на  $\mu_0$ , получаем

$$\text{rot}(\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J}) = \mathbf{j}. \quad (31.20)$$

Под знаком операции ротора в (31.20) стоит величина, которая не является ни исключительно полевой, ни исключительно материальной, а смешанной. Исторически она получила название напряженности магнитного поля:

$$\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J} = \mathbf{H}. \quad (31.21)$$

С ее помощью уравнение (31.20) приобретает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}. \quad (31.22)$$

Следовательно, напряженность магнитного поля создается токами проводимости и нет необходимости отдельно учитывать молекулярные токи и намагниченность, т. е. она представляет феноменологическое описание магнитного поля и является аналогичной вектору смещения  $\mathbf{D}$  электрического поля. По ее роли в теории магнитного поля  $\mathbf{H}$  следовало бы назвать индукцией магнитного поля. Однако за ней установилось наименование напряженности магнитного поля. От такого названия в настоящее время невозможно отказаться. Но, пользуясь этой терминологией, необходимо помнить, что по своей роли вектор  $\mathbf{H}$  магнитного поля аналогичен вектору  $\mathbf{D}$  электрического, а вектор  $\mathbf{B}$  аналогичен вектору  $\mathbf{E}$ .

Продолжая эту аналогию, естественно записать соотношение между векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  в таком же виде, как и соотношение между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ , т. е.

$$\mathbf{H} = \alpha \mathbf{B},$$

назвав величину  $\alpha$  магнитной проницаемостью среды. Однако исторически сложилось так, что магнитной проницаемостью среды была названа величина  $\mu = 1/\alpha$ , с помощью которой связь между векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  записывается так:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (31.23)$$

Соотношение (31.21) с учетом (31.23) показывает, что вектор  $\mathbf{J}$  пропорционален как вектору  $\mathbf{B}$ , так и вектору  $\mathbf{H}$ , т. е. это соотношение можно записать в двух видах:

$$\mathbf{J} = \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \mathbf{B}, \quad \mathbf{J} = \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{H}. \quad (31.24a)$$

Более часто используется вторая формула, в которой

$$\chi = \mu/\mu_0 - 1 \quad (31.24b)$$

называется магнитной восприимчивостью. Следовательно, магнитная проницаемость  $\mu$  выражается через магнитную восприимчивость  $\chi$  формулой

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi). \quad (31.24b)$$

Магнитная восприимчивость в гауссовой системе единиц выражается числом, в  $4\pi$  раз меньшим:

$$\chi' = \chi / (4\pi).$$

Поэтому, подставляя в формулу (31.24) выражение для  $\chi'$  и соотношение

$$\mu = \mu_r \mu_0, \quad (31.25)$$

находим следующую связь между относительной магнитной проницаемостью  $\mu_r$  и магнитной восприимчивостью  $\chi'$  в гауссовой системе единиц:

$$\mu_r = 1 + 4\pi\chi'. \quad (31.26)$$

Значение  $\chi$  может быть как положительным, так и отрицательным. В соответствии с этим магнитная проницаемость магнетика может быть как больше, так и меньше магнитной постоянной. Для диамагнетиков

$$\chi < 0, \quad \mu < \mu_0; \quad (31.27)$$

для парамагнетиков

$$\chi > 0, \quad \mu > \mu_0. \quad (31.28)$$

Магнетики, у которых магнитная проницаемость зависит от напряженности поля и, кроме того, имеется остаточное намагничивание, называются ферромагнетиками. У ферромагнетиков  $\mu \gg \mu_0$ . Изложенная в настоящем параграфе теория к ферромагнетикам неприменима.

**Магнитное поле постоянных магнитов.** Как уже было отмечено, объяснение природы ферромагнетиков лежит вне рамок классической электродинамики. Магнитное поле ферромагнетиков (например, постоянных магнитов) обусловлено спиновым магнетизмом электрона и не может быть интерпретировано как результат существования токов в электроны. Если это допустить, то для получения разумных количественных результатов следует принять линейную скорость вращения электрона больше скорости света, что противоречит теории относительности. Поэтому пришлось отказаться от интерпретации спинового магнетизма электрона, как порожденного круговыми токами внутри электрона. Однако поле, порождаемое спиновым магнетизмом, вне магнетика может быть описано в рамках феноменологической электродинамики.

Интенсивность намагничивания в случае постоянных магнитов можно характеризовать вектором намагничения  $\mathbf{J}$ , не рассматривая причин такого постоянного намагничивания и его природу.

Постоянная намагниченность  $\mathbf{J}_0$  производит такое же магнитное поле, как и равная ему индуцированная намагниченность. Поэтому для определения магнитного поля постоянных магнитов можно воспользоваться формулой (31.14), которая дает для вектор-потенциала  $\mathbf{A}_\pi$  постоянного магнита следующее выражение:

$$\mathbf{A}_\pi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot } \mathbf{J}_0}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}_0 \times \mathbf{n}}{r} dS. \quad (31.29)$$

Различие со случаем индуцированного намагничивания состоит лишь в том, что в случае постоянных магнитов намагниченность  $\mathbf{J}_0$  определяется не внешним магнитным полем согласно (31.2), а является независимой от внешнего магнитного поля величиной. С помощью формулы (31.29) магнитное поле постоянных магнитов включается в общую методику описания стационарных магнитных полей, которая излагается в этой главе. Для того чтобы аналогия была более полной, можно представить себе, что вектор постоянной намагниченности  $\mathbf{J}_0$  обусловлен существованием фиктивных молекулярных токов, помня, что это воображаемые токи, которых в действительности нет. Уравнение для индукции в этом случае остается без изменения:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (31.30)$$

но уравнение, выражающее связь индукции с напряженностью магнитного поля, несколько изменяется. Поскольку дополнительным источником магнитного поля является постоянный магнит, можно вместо (31.21) написать уравнение

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \mathbf{J}_0. \quad (31.31)$$

Учитывая, что

$$\mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J} = \mu \mathbf{H}, \quad (31.32)$$

окончательно получим

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J}_0. \quad (31.33)$$

Эти уравнения полностью описывают поле постоянных магнитов.

**Уравнения поля при наличии магнетиков.** Вместо первого из уравнений (28.1) необходимо использовать уравнение (31.22); второе из уравнений (28.1) и уравнение (31.23) остаются неизменными:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (31.34)$$

**Граничные условия** выводятся аналогично тому, как это было сделано в § 28, надо лишь использовать уравнения (31.34) вместо (28.1). Поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  осталась постоянной, граничное условие (28.5) для нормальной составляющей остается неизменным:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0. \quad (31.35)$$

При выводе граничного условия для тангенциальной составляющей необходимо исходить от первого из уравнений (31.34) вместо (28.6). Все остальные вычисления, приводящие от (28.6) к (28.10), остаются без изменения и дают следующее граничное условие:

$$H_{2t} - H_{1t} = j_{\text{пов}}, \quad (31.36)$$

где  $j_{\text{пов}}$  — плотность поверхностного тока, определенная в (28.10).

**Шар из магнетика в однородном магнитном поле.** Пусть шар радиусом  $R$  из магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu_1$  помещен в бесконечную среду с магнитной проницаемостью  $\mu_2$ , в которой создано однородное магнитное поле напряженностью  $\mathbf{H}_0$ . Найдем магнитное поле как вне, так и внутри шара. Токи проводимости отсутствуют.

Первое из уравнений (31.34) в данном случае имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (31.37)$$

Это означает, что магнитостатическое поле в пространстве, в котором отсутствуют токи проводимости, является потенциальным. В нашем случае токи проводимости отсутствуют как внутри, так и вне шара и, следовательно, поле является потенциальным во всем пространстве. Обозначим потенциал этого поля  $\varphi_m$ . Напряженность можно представить в виде

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m. \quad (31.38)$$



Для однородной среды ( $\mu = \text{const}$ ) уравнение  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  приводит к равенству

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (31.39)$$

Тогда для всех точек вне шара ( $\mu_2 = \text{const}$ ) и для всех точек внутри шара ( $\mu_1 = \text{const}$ ) уравнение для  $\varphi_M$  имеет вид

$$\nabla^2 \varphi_M = 0. \quad (31.40)$$

Таким образом, потенциал магнитного поля во всем пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа.

Отметим, что если магнитная проницаемость не является постоянной, вместо (31.40) получается другое уравнение. Для его вывода примем во внимание равенство (31.21), из которого следует, что

$$\text{div } \mathbf{B} = \mu_0 \text{div } \mathbf{H} + \mu_0 \text{div } \mathbf{J} = -\mu_0 \text{div grad } \varphi_M + \mu_0 \text{div } \mathbf{J} = 0.$$

Поэтому уравнение для  $\varphi_M$  имеет вид

$$\nabla^2 \varphi_M = \text{div } \mathbf{J}$$

и решение задачи для магнетика с изменяющейся магнитной восприимчивостью значительно усложняется.

Поместим начало координат в центре шара, а полярную ось направим вдоль поля  $\mathbf{H}_0$ . В случае аксиальной симметрии уравнение Лапласа принимает вид (22.30). Это уравнение надо решить при граничных условиях (31.35) и (31.36), которые полностью совпадают с граничными условиями для векторов  $\mathbf{D}_n$  и  $\mathbf{E}_t$ , использовавшимися при решении уравнения (22.30) для диэлектрического шара в однородном электрическом поле, поскольку поверхностные токи отсутствуют и в (31.36) надо положить  $\mathbf{j}_{\text{пов}} = 0$ . Поэтому решение данной задачи аналогично решению задачи о диэлектрическом шаре в однородном электрическом поле. Надо лишь в решении уравнения (22.30) заменить  $\varphi \rightarrow \varphi_M$ ,  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$ ,  $\epsilon \rightarrow \mu$ .

Магнитное поле внутри шара однородно и, аналогично (22.40), равно

$$H_{1z} = 3\mu_2 H_0 / (\mu_1 + 2\mu_2). \quad (31.41)$$

Оно является суммой внешнего поля  $\mathbf{H}_0$  и поля, созданного шаром за счет его намагничения и называемого размагничивающим ( $\mathbf{H}_{\text{разм}}$ ). Это название чисто условно, поскольку никакого «размагничивания» нет, а есть про-

сто намагничивание магнетика во внешнем поле и создание этим намагниченным магнетиком дополнительного поля, складывающегося с первоначальным. Но поскольку название поля  $H_{\text{разм}}$  установилось, менять его нет смысла. Аналогично (22.41), для «размагничивающего поля» получаем выражение

$$H_{\text{разм}} = H_{1z} - H_0 = (\mu_2 - \mu_1) H_0 / (\mu_1 + 2\mu_2). \quad (31.42)$$

Его полезно переписать в другом виде. На основании второй из формул (31.24а) можно написать:

$$J_1 = (\mu_1/\mu_0 - 1) H_{1z}, \quad J_2 = (\mu_2/\mu_0 - 1) H_0, \quad (31.43)$$

откуда

$$J_2 - J_1 = (\mu_2 - \mu_1)(\mu_0 + 2\mu_2) H_0 / [\mu_0(\mu_1 + 2\mu_2)]. \quad (31.44)$$

Следовательно, формула (31.42) может быть представлена в виде

$$H_{\text{разм}} = \mu_0 (J_2 - J_1) / (\mu_0 + 2\mu_2). \quad (31.45)$$

В частности, если шар находится в вакууме  $\mu_2 = \mu_0$  и  $J_2 = 0$ . Поэтому размагничивающее поле в этом случае равно

$$H_{\text{разм}} = -J_1/3. \quad (31.46)$$

**Магнитная экранировка.** Из формулы (31.42) видно, что при  $\mu_1 > \mu_2$  магнитное поле внутри магнетика ослабляется. Это означает, что магнетик в этом случае как бы экранирует свою внутреннюю часть от внешнего магнитного поля. Если рассчитать поле внутри полости, окруженной оболочкой из магнетика с достаточно большой проницаемостью  $\mu_1$ , то получается, что линии индукции в основном концентрируются в оболочке, не проникая внутрь полости. Это означает, что оболочка из магнетика с большим  $\mu$  действует как экран, не допускающий проникновения магнитного поля в пространство, ограниченное оболочкой.

## § 32. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

**Энергия, выраженная через векторы поля при наличии магнетиков.** Это выражение получается точно так, как это было сделано в § 8, надо лишь вместо первого уравнения (8.1) пользоваться первым из уравнений (31.34).

В результате в формуле (8.9) вместо члена  $B^2/\mu_0$  получаем  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ . Поэтому окончательно выражение для энергии магнитного поля при наличии магнетика имеет вид

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (32.1)$$

Эта формула показывает, что энергия магнитного поля распределена в пространстве с плотностью

$$w = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} / 2. \quad (32.2)$$

**Энергия, выраженная через плотность тока и векторный потенциал.** Пользуясь вектором  $\mathbf{B}$  в виде  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  и формулой (П.15), можно подынтегральное выражение (32.1) преобразовать:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} \times \mathbf{H} + \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{H} = \text{div } \mathbf{A} \times \mathbf{H} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}, \quad (32.3)$$

где в последнем равенстве учтено уравнение Максвелла  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ . Следовательно, для энергии магнитного поля вместо (32.1) получаем формулу

$$W = \frac{1}{2} \int_V \text{div } \mathbf{A} \times \mathbf{H} dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV. \quad (32.4)$$

Первый интеграл в правой части этой формулы с помощью теоремы Гаусса — Остроградского преобразуется в интеграл по поверхности:

$$\int_V \text{div } \mathbf{A} \times \mathbf{H} dV = \oint_S \mathbf{A} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}. \quad (32.5)$$

Если все токи расположены в конечной области пространства, то на большом расстоянии от них [см. (30.31)]

$$A \sim \frac{1}{r^2}, \quad H \sim \frac{1}{r^3}.$$

Следовательно, на больших расстояниях подынтегральное выражение убывает, как  $1/r^5$ . Поскольку поверхность интегрирования растет лишь как  $r^2$ , то интеграл при  $S \rightarrow \infty$  убывает, как  $1/r^3$ . Поэтому при удалении поверхности  $S$  на бесконечность интеграл (32.5) стремится к нулю. Следовательно, формула энергии взаимодействия магнит-

ного поля с током имеет вид

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV. \quad (32.6)$$

Энергия магнитного поля, представленная как энергия взаимодействия элементов тока. Если в (32.6) потенциал  $\mathbf{A}$  заменить его выражением через токи:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}' dV'}{r}, \quad (32.7)$$

то

$$W = \frac{\mu}{8\pi} \int_V \int_V \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}'}{r} dV dV', \quad (32.8)$$

где  $r$  — расстояние между элементами объема  $dV$  и  $dV'$ .

Энергия магнитного поля для системы линейных токов. Переход к линейным токам осуществляется с помощью правила (30.16). Исходной является формула (32.6), где интеграл сводится к сумме интегралов по объемам отдельных проводников, которые пронумерованы индексом  $k$ . Тогда

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV = \frac{1}{2} \sum_k \int_{V_k} \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV = \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \int_{L_k} \mathbf{A} I_k \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \sum_k I_k \int_{L_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \end{aligned} \quad (32.9)$$

Здесь  $V_k$  и  $L_k$  — соответственно объем и контур  $k$ -го проводника;  $I_k$  — полный ток, протекающий по  $k$ -му проводнику. Сумма распространена на все проводники. Воспользуемся теоремой Стокса:

$$\oint_{L_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_k} \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_k} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi_k, \quad (32.10)$$

где  $\Phi_k$  — поток магнитной индукции через поверхность  $S_k$ , натянутую на контур  $L_k$   $k$ -го проводника. Таким образом, окончательно формула для энергии магнитного поля системы линейных токов записывается в виде

$$W = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k. \quad (32.11)$$

В частности, при наличии только одного проводника

$$W = I\Phi/2. \quad (32.12)$$

**Самоиндукция и взаимоиндукция.** Интегрирование в формуле (32.8) сводится к интегрированию по объемам проводников. Поэтому, обозначая объем  $k$ -го проводника  $V_k$ , имеем

$$W = \frac{\mu}{8\pi} \int_V \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}'}{r} dV dV' = \frac{\mu}{8\pi} \sum_{i,k} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\mathbf{j}_i \cdot \mathbf{j}_k}{r_{ik}} dV_i dV_k, \quad (32.13)$$

где  $\mathbf{j}_i, \mathbf{j}_k$  — плотности тока, текущего по  $i$ -му и  $k$ -му проводникам;  $r_{ik}$  — расстояние между элементами объема  $dV_i$  и  $dV_k$  соответствующих проводников. Формулу (32.13) можно преобразовать:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\mu}{8\pi} \sum_{i,k} I_k I_i \frac{1}{I_i I_k} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\mathbf{j}_i \cdot \mathbf{j}_k}{r_{ik}} dV_i dV_k = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k, \end{aligned} \quad (32.14)$$

где

$$L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{I_i I_k} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\mathbf{j}_i \cdot \mathbf{j}_k}{r_{ik}} dV_i dV_k. \quad (32.15)$$

Коэффициенты  $L_{ik}$  зависят только от формы проводников, их взаимного расположения, но не зависят от силы тока, протекающего по проводникам, так как при изменении силы тока числитель и знаменатель формулы (32.15) изменяются в одинаковое число раз. Следовательно, для заданной системы проводников коэффициенты  $L_{ik}$  могут быть вычислены раз навсегда. Зная их значение и силы токов, протекающих по проводникам, можно по формуле (32.14) вычислять энергию магнитного поля системы проводников с током. Коэффициент  $L_{ik}$  при  $i \neq k$  называется взаимоиндукцией  $i$ -го и  $k$ -го проводников, а при  $i = k$  — самоиндукцией соответствующего проводника.

Формула (32.14) может быть использована для определения самоиндукции проводника. Для одного изолированного проводника эта формула имеет вид

$$W = LI^2/2. \quad (32.16)$$

Если можно измерить или вычислить энергию  $W$ , то из этой формулы может быть найдено значение  $L$ . Этот метод часто используется. При вычислении взаимной индукции  $L_{ik}$  в случае линейных токов в формуле (32.15) можно воспользоваться заменой (30.16). В результате получаем

$$L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{L_i} \int_{L_k} \frac{dl_i \cdot dl_k}{r_{ik}}, \quad i \neq k, \quad (32.17)$$

где  $L_i$  и  $L_k$  — контуры  $i$ -го и  $k$ -го токов. Эта формула называется формулой Неймана. Для вычисления самоиндукции эту формулу применить нельзя, так как интеграл (32.17) обращается в бесконечность. Из формул (32.15) и (32.17) следует, что

$$L_{ik} = L_{ki}. \quad (32.18)$$

**Связь самоиндукции и взаимной индукции с потоками магнитной индукции.** Сравнение формулы (32.11) с формулой (32.14), записанной в виде

$$W = \frac{1}{2} \sum_k I_k \sum_i L_{ki} I_i,$$

показывает, что

$$\Phi_k = \sum_i L_{ki} I_i. \quad (32.19)$$

С помощью взаимной индукции и самоиндукции легко вычислить поток магнитной индукции.

Формула (32.19) удобна в случае, когда имеется какая-либо характерная система проводников, для которой взаимная индукция и самоиндукция приводятся в таблицах. Для одного изолированного проводника она имеет вид

$$\Phi = LI. \quad (32.20)$$

Отсюда следует, что

$$L = \Phi/I. \quad (32.21)$$

Таким образом, зная поток магнитной индукции, который создается известным током, протекающим по проводнику, можно согласно (32.21) вычислить самоиндукцию проводника. Формула (32.21) часто используется

для расчета самоиндукции. Напомним, что индуктивность измеряется в генри (Г).

Выражение для энергии магнитного момента в магнитном поле удобнее получить, исходя из сил, действующих на магнитный момент. Поэтому оно будет выведено в следующем параграфе при рассмотрении механических сил.

**Энергия магнетика во внешнем магнитоэстатическом поле.** Пусть имеется фиксированное распределение токов, которое в свободном пространстве создает магнитное поле  $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$ . Энергия этого поля

$$W_0 = \frac{1}{2} \int \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{H}_0 dV. \quad (32.22)$$

Предположим, что все пространство заполнено магнетиком, магнитная проницаемость которого  $\mu = \text{const}$ , причем поле создается тем же распределением токов. Из формулы (31.22) следует, что напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  во всех точках магнетика будет такой же, как и поле  $\mathbf{H}_0$ , создаваемое теми же токами в вакууме, т. е.  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ . Магнитная индукция при этом  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ . Поэтому при наличии магнетика энергия поля равна

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}_0 dV. \quad (32.23)$$

Следовательно, при заполнении всего пространства магнетиком энергия поля увеличивается. Источником этой энергии являются сторонние электродвижущие силы, с помощью которых необходимо поддерживать неизменными силы токов, создающих поле. Поскольку после заполнения пространства магнетиком все источники, создающие магнитное поле, идентичны тем, которые создавали поле до заполнения пространства магнетиком, можно считать, что энергия магнетика во внешнем поле  $\mathbf{H}_0$  равна

$$W_{\text{м}} = W - W_0 = \frac{1}{2} \int (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{H}_0) dV, \quad (32.24)$$

где  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ . С учетом последних соотношений преобразуем подынтегральное выражение:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{H}_0 = (\mu - \mu_0) \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_0 = (\mu - \mu_0) \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 / \mu \mu_0 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_0, \quad (32.25)$$

где для намагниченности  $\mathbf{J}$  использована формула (31.24 а). Поэтому энергия магнетика во внешнем магнит-

ном поле  $\mathbf{B}_0$  равна

$$W_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_0 dV. \quad (32.26)$$

Это выражение подобно (23.27) для энергии диэлектрика во внешнем электрическом поле, однако с весьма существенным отличием в знаке. Это приводит к тому, что при вычислении механических сил из энергии роль  $W_m$  и  $W_d$  различна:  $W_d$  играет роль потенциальной энергии, а  $W_m$  — кинетической.

Формула (32.26) выведена для магнетика, заполняющего все пространство с  $\mu = \text{const}$ , и имеет вид интеграла от плотности энергии магнетика. Поэтому следует ожидать, что она справедлива в произвольном случае. Соответствующие вычисления подтверждают этот вывод. Ввиду их громоздкости они здесь не приведены.

Теперь можно вычислить энергию магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu_2$ , находящегося в среде с магнитной проницаемостью  $\mu_1$ . Будем опять рассматривать бесконечный магнетик и исходить из формулы (32.24), рассуждая, как и при выводе формулы (23.33), с той лишь разницей, что в электростатике данное распределение зарядов создает в различных средах одинаковое поле  $\mathbf{D}$ , а в магнитостатике данное распределение токов создает в различных средах одинаковое поле  $\mathbf{H}$ . Тогда

$$W_{m21} = W_{m2} - W_{m1} = \frac{1}{2} \int (\mu_2 - \mu_1) \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_1 dV, \quad (32.27)$$

где

$$W_{mi} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{H}_i - \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{H}_0) dV. \quad (32.28)$$

Выражение (32.27) аналогично (23.33) с измененным знаком перед интегралом. Хотя эта формула и выведена для случая бесконечного магнетика, она справедлива и для ограниченного магнетика. В этом случае интеграл распространяется по объему магнетика.  $\mathbf{H}_1$  есть напряженность, создаваемая в точках объема магнетика, когда его магнитная проницаемость  $\mu$  равна магнитной проницаемости  $\mu_1$  среды, т. е. когда магнетика нет. Напряженность  $\mathbf{H}_2$  — это фактическая напряженность в магнетике с магнитной проницаемостью  $\mu_2$ , погруженном в среду с магнитной проницаемостью  $\mu_1$ .



Предположим, что магнитная проницаемость среды изменится на бесконечно малую величину  $\delta\mu$ . При этом энергия магнетика, находящегося в магнитном поле  $\mathbf{H}$ , изменится на  $\delta W_m$ . Полагая в (32.27)  $\delta\mu = \mu_2 - \mu_1$ ,  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H} + \delta\mathbf{H}$  и отбрасывая  $\delta\mu\delta\mathbf{H}$  как величину высшего порядка малости, получаем

$$\delta W_m = \frac{1}{2} \int \delta\mu H^2 dV, \quad (32.29)$$

где  $\mu$  может быть функцией точки и некоторых других параметров. Эта формула подобна выражению (23.34) и отличается от него лишь знаком. Она будет в дальнейшем использована для нахождения сил, действующих на магнетики в магнитном поле.

### § 33. МЕХАНИЧЕСКИЕ СИЛЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

**Сила, действующая на элемент тока.** Закон Ампера показывает, что сила  $d\mathbf{F}$ , действующая на элемент тока  $\mathbf{j}dV$ , находящийся в поле  $\mathbf{B}$ , равна

$$d\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV. \quad (33.1)$$

В случае линейных токов эта формула принимает вид

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad (33.2)$$

где  $d\mathbf{l}$  — элемент длины проводника.

Чтобы найти силу, действующую на конечный участок проводника, необходимо произвести интегрирование:

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV, \quad (33.3)$$

$$\mathbf{F} = I \int_L d\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad (33.4)$$

где  $V$  и  $L$  — соответственно объем и контур проводника или его части.

**Сила, действующая на элементарный ток.** При исследовании магнитного поля, созданного элементарным током, было найдено, что оно в первом приближении полностью определяется магнитным моментом тока. Покажем, что и сила, действующая на элементарный ток в заданном магнитном поле, в первом приближении полностью определяется магнитным моментом этого тока.

К определению элементарного тока следует добавить еще одно дополнительное требование: линейные размеры области, в которой протекает элементарный ток, настолько малы, что изменение внешнего магнитного поля в этой области мало, поэтому в вычислениях можно ограничиться членами первого порядка относительно линейных размеров области. Выберем некоторую точку вблизи элементарного тока за начало координат. Согласно определению элементарного тока, можно в окрестности начала координат разложить напряженность магнитного поля  $\mathbf{B}$  в ряд Тейлора и ограничиться линейным членом:

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{B}(0, 0, 0) + x \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + z \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} + \dots \quad (33.5)$$

Производные в этом разложении берут в точке  $x=y=z=0$ . Формула (33.3) с учетом (33.5) принимает вид

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 dV + \int_V \mathbf{j} \times \left( x \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + z \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right) dV, \quad (33.6)$$

где  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}(0, 0, 0)$ . Первый интеграл равен нулю, поскольку значение  $\mathbf{B}(0, 0, 0)$  является постоянным и, следовательно,

$$\int_V \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 dV = \left( \int_V \mathbf{j} dV \right) \times \mathbf{B}_0 = 0, \quad (33.7)$$

ввиду того что для замкнутого тока

$$\int_V \mathbf{j} dV = 0. \quad (33.8)$$

Исследуем одну из составляющих силы  $\mathbf{F}$ , например  $z$ -составляющую:

$$\begin{aligned} F_z &= \int_V \left[ \mathbf{j} \times \left( x \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + z \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right) \right]_z dV = \\ &= \int_V \left\{ j_x \left( x \frac{\partial B_y}{\partial x} + y \frac{\partial B_y}{\partial y} + z \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - j_y \left( x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \right. \right. \\ &\left. \left. + y \frac{\partial B_x}{\partial y} + z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \right\} dV. \end{aligned} \quad (33.9)$$

Прежде всего докажем, что

$$\int_V x j_x dV = \int_V y j_y dV = \int_V z j_z dV = 0. \quad (33.10)$$

Вычислим для примера первый интеграл:

$$x j_x = \frac{1}{2} \mathbf{j} \operatorname{grad} x^2 = \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{j} x^2) - \frac{1}{2} x^2 \operatorname{div} \mathbf{j}, \quad (33.11)$$

где использована формула (П.13). Учитывая, что  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , и пользуясь теоремой Гаусса—Остроградского, получаем

$$\int_V x j_x dV = \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} (\mathbf{j} x^2) dV = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{j} x^2 \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (33.12)$$

поскольку все токи сосредоточены в данном объеме  $V$  и на поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $\mathbf{j} = 0$ . Аналогично доказываются и другие равенства (33.10).

Можно показать, что

$$\begin{aligned} \int_V x j_y dV &= - \int_V y j_x dV = p_{mz}, & \int_V y j_z dV &= - \int_V z j_y dV = p_{mx}, \\ \int_V z j_x dV &= - \int_V x j_z dV = p_{my}, \end{aligned} \quad (33.13)$$

где  $p_{mx}$ ,  $p_{my}$ ,  $p_{mz}$  — компоненты вектора магнитного момента элементарного тока, определяемого формулой (30.30).

Докажем для примера первое из равенств (33.13). Можно написать:

$$x j_y = (x j_y - y j_x)/2 + (x j_y + y j_x)/2. \quad (33.14)$$

Однако

$$\frac{1}{2} (x j_y + y j_x) = \frac{1}{2} \mathbf{j} \operatorname{grad} (xy) = \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{j} xy) - \frac{1}{2} xy \operatorname{div} \mathbf{j}, \quad (33.15)$$

где использована формула (П.13). Учитывая, что  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_V x j_y dV &= \frac{1}{2} \int_V (x j_y - y j_x) dV + \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} (\mathbf{j} xy) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V (x j_y - y j_x) dV + \frac{1}{2} \int_S \mathbf{j} xy \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (33.16)$$

Последний интеграл равен нулю из-за обстоятельств, указанных при доказательстве равенства (33.12). Поэтому

$$\int_V x j_y dV = \frac{1}{2} \int_V (x j_y - y j_x) dV = p_{mz}. \quad (33.17)$$

Аналогично доказывают и другие равенства (33.13). С помощью формул (33.10) и (33.13) выражение (33.9) записывается следующим образом:

$$F_z = -p_{mz} \frac{\partial B_y}{\partial y} + p_{my} \frac{\partial B_y}{\partial z} - p_{mz} \frac{\partial B_x}{\partial x} + p_{mz} \frac{\partial B_x}{\partial z}. \quad (33.18)$$

Уравнение Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (33.19)$$

показывает, что

$$-p_{mz} \frac{\partial B_y}{\partial y} - p_{mz} \frac{\partial B_x}{\partial x} = p_{mz} \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (33.20)$$

и, следовательно, равенство (33.18) принимает вид

$$F_z = p_{mx} \frac{\partial B_x}{\partial z} + p_{my} \frac{\partial B_y}{\partial z} + p_{mz} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \mathbf{p}_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}. \quad (33.21)$$

Аналогично получают формулы для других компонент силы. Поэтому окончательно можно написать:

$$F_x = \mathbf{p}_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}, \quad F_y = \mathbf{p}_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}, \quad F_z = \mathbf{p}_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}. \quad (33.22)$$

Таким образом, сила, действующая на элементарный ток в заданном магнитном поле, полностью определяется магнитным моментом этого тока. Она тем больше, чем значительнее неоднородность магнитного поля. В однородном магнитном поле эта сила равна нулю.

**Сила, действующая на магнетик.** При помещении в магнитное поле магнетик намагничивается. Элемент объема  $dV$  магнетика при этом приобретает магнитный момент

$$d\mathbf{p}_m = \mathbf{J}dV. \quad (33.23)$$

В соответствии с формулой (33.22) сила, действующая на этот элемент объема магнетика, равна

$$dF_x = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} dV, \quad dF_y = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} dV, \quad dF_z = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} dV. \quad (33.24)$$

Принимая во внимание, что на основании (31.24)

$$\mathbf{J} = (\mu - \mu_0) \mathbf{B} / (\mu \mu_0), \quad (33.25)$$

и подставляя это выражение в формулы (33.24а), находим:

$$\begin{aligned} dF_x &= \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} dV = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial x} dV, \\ dF_y &= \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} dV = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial y} dV, \\ dF_z &= \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} dV = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial z} dV. \end{aligned} \quad (33.26)$$

Эти три равенства могут быть записаны в виде одного векторного:

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \text{grad } B^2 dV. \quad (33.27)$$

Таким образом, объемная плотность  $\mathbf{f}$  силы, действующей на магнетик, равна

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \text{grad } B^2. \quad (33.28)$$

Сравнение этой формулы с (24.20) для плотности силы, действующей на диэлектрик, подтверждает справедливость утверждения о том, что роль  $\mathbf{E}$  и  $\epsilon$  в теории электрического поля играют в теории магнитного поля  $\mathbf{B}$  и  $1/\mu$ , а не  $\mathbf{H}$  и  $\mu$ .

Формула (33.28) показывает, что в данном магнитном поле парамагнетики и диамагнетики ведут себя по-разному; на них действуют силы в противоположных направлениях. Поскольку у парамагнетиков  $\mu > \mu_0$ , объемная плотность  $\mathbf{f}$  силы совпадает по направлению с градиентом от квадрата магнитной индукции. Это означает, что парамагнетики увлекаются в области максимальной индукции. У диамагнетиков  $\mu < \mu_0$ , поэтому они выталкиваются из области больших индукций в область с мень-

шей индукцией. Например, стержень из меди (парамагнетик) втягивается в соленоид, по которому течет ток, а стержень из висмута (диамагнетик) выталкивается из соленоида.

Ферромагнетики, для которых  $\mu \gg \mu_0$ , также увлекаются в область больших индукций, но с гораздо большей силой, чем парамагнетики, для которых  $\mu$  мало отличается от  $\mu_0$  и, следовательно  $(\mu - \mu_0)/\mu$ , входящее в (33.28), мало. Это свойство ферромагнетиков используют в различных измерительных приборах.

**Энергия магнитного момента во внешнем поле.** Учтем связь между силами, действующими на систему, и энергией системы. Принимая во внимание, что магнитный момент  $\mathbf{p}_m$  явно от координат не зависит, получаем на основании формулы (33.22) следующее выражение для энергии магнитного момента, находящегося во внешнем магнитном поле:

$$W = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}. \quad (33.29)$$

**Момент сил, действующих на магнитный момент.** Если  $\theta$  — угол между  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$ , то

$$W = -p_m B \cos \theta. \quad (33.30)$$

Как показывается в теоретической механике, обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате  $\theta$ , является моментом сил. Поэтому момент сил, действующих на магнитный момент, равен

$$M = -\partial W / \partial \theta = p_m B \sin \theta. \quad (33.31)$$

С учетом направления действующих сил получаем

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}. \quad (33.32)$$

Момент сил стремится повернуть магнитный момент  $\mathbf{p}_m$  до совпадения с вектором  $\mathbf{B}$ .

**Объемные силы, действующие на сжимаемые магнетики,** находятся аналогично объемным силам, действующим на диэлектрики; надо лишь исходить из формулы (32.29) вместо (23.34). Все вычисления также подобны, надо лишь учесть, что  $W_m$  ведет себя не как потенциальная энергия, а как кинетическая. Это означает, что если в электрическом поле работа, совершаемая внешними источниками при виртуальном перемещении, сопровождается уменьшением потенциальной энергии, то в маг-

нитом поле энергия  $W_m$  увеличивается. В результате вместо (24.30) получается следующая формула для плотности  $\mathbf{f}$  силы, действующей на магнетик:

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} H^2 \text{grad } \mu + \frac{1}{2} \text{grad} \left( H^2 \rho_m \frac{\partial \mu}{\partial \rho_m} \right). \quad (33.33)$$

Напомним, что все вычисления проводятся для изотермических процессов и, следовательно, производная в (33.33) берется при  $T = \text{const}$ . Эту формулу целесообразно переписать по-другому:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} B^2 \text{grad} \left( \frac{1}{\mu} \right) - \frac{1}{2} \text{grad} \left[ B^2 \rho_m \frac{\partial}{\partial \rho_m} \left( \frac{1}{\mu} \right) \right], \quad (33.34)$$

где  $H^2 = B^2/\mu^2$ ,  $(1/\mu^2) \partial \mu / \partial \rho_m = -\partial (1/\mu) / \partial \rho_m$  и т. д. В этом виде она является более близким аналогом формулы (24.30), поскольку полевым вектором в магнетике является  $\mathbf{B}$ , а аналогом  $\epsilon$  —  $1/\mu$ .

Формула (31.24а) может быть записана в виде

$$1/\mu_0 - 1/\mu = J/B. \quad (33.35)$$

Пусть намагниченность  $J$  линейно зависит от массовой плотности  $\rho_m$ , т. е.  $J \sim \rho_m$ . Тогда из (33.35) следует, что

$$\rho_m \frac{\partial}{\partial \rho_m} \left( \frac{1}{\mu} \right) = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0}. \quad (33.36)$$

При этих условиях формула (33.34) принимает вид

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \text{grad } B^2, \quad (33.37)$$

что совпадает с (33.28). Таким образом, формула (33.28) справедлива не только для жестких магнетиков, но и для сжимаемых магнетиков, у которых намагниченность линейно зависит от плотности массы.

#### § 34. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В АТОМАХ, НАХОДЯЩИХСЯ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

**Уравнения движения электронов в магнитном поле.** Чтобы проанализировать различные случаи намагничивания, необходимо прежде всего рассмотреть движение электронов в атомах, находящихся в магнитном поле. Поместим начало координат в центре ядра атома, а ось  $Z$  совместим с направлением индукции магнитного поля.

В этой системе координат

$$B_x = B_y = 0, \quad B_z = B. \quad (34.1)$$

При отсутствии внешнего магнитного поля каждый электрон в атоме движется в электрическом поле, создаваемом ядром атома и другими электронами. Ввиду того что скорости электронов в атоме нерелятивистские, магнитным взаимодействием между электронами можно пренебречь. Обозначим координаты  $k$ -го электрона  $x_k, y_k, z_k$ . Потенциальная функция имеет следующий вид:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n) = \sum_i \varphi(r_i) + \sum_{i \neq k} \frac{e}{r_{ik}}, \quad (34.2)$$

где  $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$  — расстояние  $i$ -го электрона от ядра,  $r_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}$  — расстояние между  $i$ -м и  $k$ -м электронами.

Первый член в правой части (34.2) представляет взаимодействие электронов с ядром, а второй — электронов друг с другом. Уравнения движения  $k$ -го электрона при отсутствии внешнего магнитного поля имеют такой вид:

$$m\ddot{x}_k = -e\partial\Phi/\partial x_k, \quad m\ddot{y}_k = -e\partial\Phi/\partial y_k, \quad m\ddot{z}_k = -e\partial\Phi/\partial z_k. \quad (34.3)$$

Решение этих уравнений дается некоторыми функциями:

$$x_k = x_k(t), \quad y_k = y_k(t), \quad z_k = z_k(t). \quad (34.4)$$

После включения внешнего магнитного поля на каждый электрон действует дополнительная сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (34.5)$$

Компоненты силы Лоренца, действующей на  $k$ -й электрон, равны:

$$\begin{aligned} F_{kx} &= e(v_{ky}B_z - v_{kz}B_y) = e\dot{y}_k B, \\ F_{ky} &= e(v_{kz}B_x - v_{kx}B_z) = -e\dot{x}_k B, \\ F_{kz} &= e(v_{kx}B_y - v_{ky}B_x) = 0. \end{aligned} \quad (34.6)$$

Обозначая координаты электрона при наличии магнитного поля штрихами, мы с учетом (34.6) можем написать



следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}'_k &= -e\partial\Phi'/\partial x'_k + eVy'_k, \\ m\ddot{y}'_k &= -e\partial\Phi'/\partial y'_k - eVx'_k, \\ m\ddot{z}'_k &= -e\partial\Phi'/\partial z'_k, \end{aligned} \quad (34.7)$$

где  $\Phi' = \Phi(x'_1, \dots, x'_n; y'_1, \dots, y'_n; z'_1, \dots, z'_n)$ . Поскольку сила Лоренца (34.5) не имеет составляющей вдоль магнитного поля, последнее не оказывает никакого действия на компоненту скорости вдоль магнитного поля. Следовательно,

$$z'_k = z_k(t). \quad (34.8)$$

Для исследования движения в плоскости  $XU$  удобно перейти к комплексной переменной:

$$\zeta'_k = x'_k + iy'_k. \quad (34.9)$$

Умножая второе уравнение (34.7) на  $i$  и складывая с первым уравнением, получаем следующее уравнение для  $\zeta'_k$ :

$$m\ddot{\zeta}'_k = -e(\partial\Phi'/\partial x'_k + i\partial\Phi'/\partial y'_k) - ieV\dot{\zeta}'_k. \quad (34.10)$$

При отсутствии магнитного поля уравнение для

$$\zeta_k = x_k + iy_k \quad (34.11)$$

имеет вид

$$m\ddot{\zeta}_k = -e(\partial\Phi/\partial x_k + i\partial\Phi/\partial y_k). \quad (34.12)$$

Решение уравнения (34.10) будем искать в виде

$$\zeta'_k = \xi_k e^{i\omega t}. \quad (34.13)$$

Подставляя (34.13) в (34.10), получаем следующее уравнение для  $\xi_k$ :

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}_k &= -e(\partial\Phi'/\partial x'_k + i\partial\Phi'/\partial y'_k)e^{-i\omega t} - i\dot{\xi}_k(eV + 2m\omega) + \\ &+ \xi_k(eV\omega + m\omega^2). \end{aligned} \quad (34.14)$$

Выберем частоту  $\omega$  такой, чтобы член с  $\dot{\xi}_k$  обратился в нуль:

$$eV + 2m\omega = 0, \quad \omega = \omega_L = -eV/(2m). \quad (34.15)$$

Тогда уравнение (34.14) принимает вид

$$m\ddot{\xi}_k = -e(\partial\Phi'/\partial x'_k + i\partial\Phi'/\partial y'_k)e^{i\omega_L t} - m\omega_L^2 \xi_k. \quad (34.16)$$

Предположим, что частота  $\omega_L$  такова, что последним членом в (34.16) можно пренебречь. В этом случае решение уравнения

$$m\ddot{\xi}_k = -e(\partial\Phi'/\partial x'_k + i\partial\Phi'/\partial y'_k)e^{-i\omega_L t} \quad (34.17)$$

совпадает с решением уравнения (34.12) при отсутствии магнитного поля:

$$\xi_k = \zeta_z. \quad (34.18)$$

Чтобы в этом убедиться, заметим, что преобразование

$$\zeta'_k = \zeta_k e^{i\omega_L t} \quad (34.19)$$

описывает поворот вектора  $\zeta_k$  на угол  $\omega_L t$ . Это означает, что штрихованные координаты электронов получаются из нештрихованных в результате поворота всех электронов атома на угол  $\omega_L t$  вокруг оси  $Z$ . При таком повороте относительные расстояния электронов  $r_{ik}$  в выражении для  $\Phi$  не изменяются, не изменяются также и  $r_i$ . Поэтому комплексная сила

$$-e(\partial\Phi/\partial x_k + i\partial\Phi/\partial y_k) \quad (34.20)$$

в результате преобразования (34.19) также поворачивается на угол  $\omega_L t$ , не изменяясь по абсолютному значению. Следовательно, комплексная сила

$$-e(\partial\Phi'/\partial x'_k + i\partial\Phi'/\partial y'_k) \quad (34.21)$$

получается из комплексной силы (34.20) в результате поворота на угол  $\omega_L t$ , т. е.

$$-e(\partial\Phi'/\partial x'_k + i\partial\Phi'/\partial y'_k) = -e(\partial\Phi/\partial x_k + i\partial\Phi/\partial y_k)e^{i\omega_L t}. \quad (34.22)$$

С учетом (34.22) можно (34.17) переписать в виде уравнения

$$m\ddot{\xi}_k = -e(\partial\Phi/\partial x_k + i\partial\Phi/\partial y_k), \quad (34.23)$$

которое совпадает с (34.12). Тем самым доказана справедливость (34.18).

Таким образом, в результате помещения атома в магнитное поле все электроны получают дополнительную угловую скорость вращения вокруг направления магнитного поля с частотой

$$\omega_L = |e| B / (2m), \quad (34.24)$$

которая называется ларморовской частотой вращения. Это утверждение составляет содержание теоремы Лармора.

Теперь необходимо оценить, при какой индукции магнитного поля справедливо приведенное доказательство теоремы. Оно справедливо тогда, когда последним членом в правой части (34.16) можно пренебречь по сравнению с основными членами, имеющими порядок

$$m\ddot{\xi}_k \approx m\omega_0^2 \xi_k, \quad (34.25)$$

где  $\omega_0$  — частота периодического движения электрона в атоме, по порядку величины равная оптическим частотам, т. е.  $\omega_0 \approx 10^{15} \text{ с}^{-1}$ . Следовательно, условие справедливости приведенного доказательства может быть записано в виде

$$\frac{\omega_L}{\omega_0} = \frac{|e| B}{2m\omega_0} \ll 1. \quad (34.26)$$

Оно удовлетворяется, если

$$B \ll 2m\omega_0/|e| \approx 10^4 \text{ Т} = 10^3 \text{ Гс}. \quad (34.27)$$

Индукция поля  $10^8 \text{ Гс}$  значительно больше индукции магнитных полей, с которыми обычно приходится иметь дело. Поэтому во всех практически интересных случаях условие (34.27) выполняется.

**Прецессия атомов.** Если по замкнутой орбите в центральном поле ядра движется электрон, то магнитный момент замкнутого тока, создаваемого электроном, равен

$$p_m = |e| S / T, \quad (34.28)$$

где  $S$  — площадь, ограниченная траекторией;  $T$  — период обращения.

При движении в поле центральных сил механический момент  $L$  сохраняется:

$$L = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}, \quad (34.29)$$

где  $r$ ,  $\varphi$  — полярные координаты электрона в плоскости движения. Площадь, ограниченная траекторией движущегося электрона, в полярных координатах записывается в виде

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi. \quad (34.30)$$

Переходя в (34.30) к интегрированию по времени и учитывая (34.29), получаем

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T r^2 \frac{L}{mr^2} dt = \frac{1}{2} \frac{L}{m} T. \quad (34.31)$$

Следовательно, равенство (34.28) принимает вид

$$\mathbf{p}_m = |e| \mathbf{L} / (2m). \quad (34.32a)$$

Магнитный и механический моменты являются векторами. Для положительно заряженной частицы они совпадают

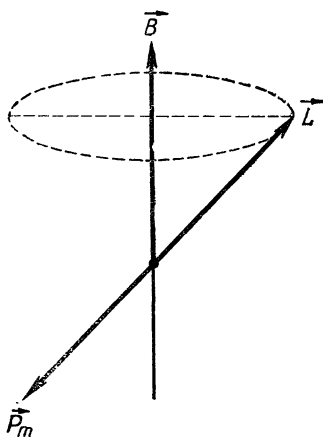


Рис. 25

ют по направлению, а для отрицательно заряженной частицы имеют противоположное направление. Поэтому если под  $e$  понимать заряд частицы с учетом знака, то можно написать следующее соотношение, связывающее механический и магнитный моменты частицы, движущейся по орбите в поле центральных сил:

$$\mathbf{p}_m = e \mathbf{L} / (2m). \quad (34.32b)$$

На магнитный момент, находящийся в магнитном поле (см. § 33), действует момент  $\mathbf{M}$  сил, стремящихся совместить направление магнитного мо-

мента с направлением магнитного поля (рис. 25):

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}. \quad (34.33)$$

Наряду с магнитным моментом атом обладает механическим моментом. Под влиянием момента сил (34.33), стремящихся изменить угол между  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$ , механический мо-

мент начинает прецессировать вокруг направления магнитного поля, как это происходит со всяким гироскопом, у которого стремятся изменить направление момента. Уравнение движения гироскопа под действием момента сил хорошо известно из теоретической механики и имеет вид

$$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}. \quad (34.34)$$

Заменив в этом уравнении  $\mathbf{p}_m$  его выражением из (34.32б), можно уравнение (34.34) записать в виде

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{e}{2m} \mathbf{L} \times \mathbf{B} = -\frac{e}{2m} \mathbf{B} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L}, \quad (34.35)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_L = -e\mathbf{B}/(2m)$ .

Сравним (34.35) с уравнением движения абсолютно твердого тела, вращающегося с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$d\mathbf{r}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (34.36)$$

Это сравнение показывает, что уравнение (34.35) описывает прецессию вектора  $\mathbf{L}$  вокруг направления вектора  $\mathbf{B}$  с угловой частотой

$$\boldsymbol{\omega}_L = -e\mathbf{B}/(2m). \quad (34.37)$$

Таким образом, механические моменты атомов в магнитном поле совершают прецессионное движение вокруг направления магнитного поля с ларморовской частотой. Это прецессионное движение накладывается на движение атомных электронов и изменяет частоту их движения в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля. Все атомы прецессируют в одном и том же направлении. Частота прецессии либо прибавляется к частоте вращения электрона в атоме, либо вычитается из нее в зависимости от того, совпадает направление вращения электрона в атоме с направлением прецессии или противоположно ей.

**Закон сохранения энергии.** Поскольку в атоме, помещенном в магнитное поле, меняется угловая скорость вращения электронов, их энергия также не остается постоянной. Однако само по себе магнитное поле не совершает работу и не может изменить энергию движущейся в нем заряженной частицы. Спрашивается, за счет чего происходит рост или уменьшение энергии электронов в атоме? Это происходит за счет работы сил вихревого

электрического поля, возникающего в переменном магнитном поле. Это можно подтвердить расчетом. Изменение энергии электрона в результате помещения атома в магнитное поле равно

$$\Delta E_k = mr^2(\omega_0 + \omega_L)^2/2 - mr^2\omega_0^2/2 \approx mr^2\omega_0\omega_L, \quad (34.38)$$

где  $\omega_L \ll \omega_0$  и отброшен член второго порядка по  $\omega_L$ . С другой стороны, по закону электромагнитной индукции Фарадея, работа сил вихревого электрического поля при перемещении заряда  $e$  по замкнутому контуру  $L$  равна

$$\Delta E_{\text{к.об}} = \left| e \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right| = |e| \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|. \quad (34.39)$$

Так как изменением магнитного поля на расстояниях порядка размеров атома в течение промежутка времени  $T$  вращения электрона в атоме можно пренебречь, то

$$\Delta E_{\text{к.об}} = |e| \pi r^2 \frac{dB}{dt}. \quad (34.40)$$

Следовательно, скорость изменения энергии электрона равна

$$\frac{\Delta E_{\text{к.об}}}{T} = \frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2} |e| r^2 \omega_0 \frac{dB}{dt}. \quad (34.41)$$

Тогда полное изменение энергии электрона за промежуток времени от 0 до  $t$ , в течение которого магнитное поле изменилось от 0 до  $B$ , равно

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= \int_0^t \frac{dE_k}{dt} dt = \frac{1}{2} |e| r^2 \omega_0 \int_0^t \frac{dB}{dt} dt = \\ &= \frac{1}{2} |e| r^2 \omega_0 B = mr^2 \omega_0 \omega_L, \end{aligned} \quad (34.42)$$

что совпадает с выражением (34.38). Тем самым доказано, что изменение энергии движения электронов при помещении атома в магнитное поле происходит действительно за счет работы сил вихревого электрического поля.

## § 35. ДИАМАГНЕТИКИ

**Молекулярная картина диамагнетизма.** В магнитном поле все электроны приобретают дополнительное вращение в одном и том же направлении. Благодаря этому все атомы приобретают дополнительный магнитный момент, который направлен противоположно индукции магнитного поля (рис. 26;  $\mathbf{v}$  — скорость электронов). В результате сложения этих дополнительных моментов происходит намагничение тела, называемое диамагнетизмом. Вектор намагниченности определяется как магнитный момент единицы объема диэлектрика:

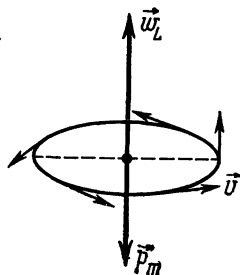


Рис. 26

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \mathbf{p}_{mi}, \quad (35.1)$$

где  $\Delta V$  — физически малый объем; суммирование распространено по магнитным моментам атомов  $\mathbf{p}_m$ , находящихся в этом объеме.

Диамагнетики характеризуются тем, что при отсутствии магнитного поля магнитные моменты их атомов равны нулю, т. е. атомы диамагнитных веществ не обладают постоянными магнитными моментами. Внешнее магнитное поле приводит к изменению угловой скорости вращения электронов в атоме, благодаря чему возникают индуцированные магнитные моменты, которые обуславливают намагничивание диамагнетика.

Диамагнитная восприимчивость  $\chi_d$  является коэффициентом пропорциональности между вектором намагниченности и напряженностью магнитного поля:

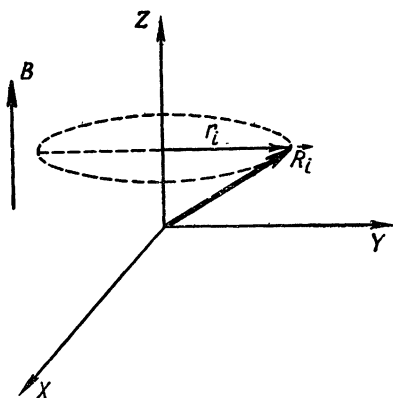
$$\mathbf{J} = \chi_d \mathbf{H}. \quad (35.2)$$

Вычислим магнитный момент атома диамагнетика. Поместим начало системы координат в центр атома и ось  $Z$  совместим с направлением индукции магнитного поля (рис. 27). Скорость  $\mathbf{v}_i$  движения электрона в атоме складывается из двух компонент — скорости  $\mathbf{v}_{0i}$  движения, которую электрон имел при отсутствии магнитного поля, и скорости  $[\omega_L, \mathbf{R}_i]$  движения, возникшей в результате

появления магнитного поля:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{oi} + \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{R}_i. \quad (35.3)$$

Магнитный момент атома, обусловленный движением электронов при отсутствии магнитного поля, у диамагнетиков равен нулю. Поэтому первый член (35.3) после суммирования по всем электронам не дает вклада в магнитный момент. За счет второго члена образуется магнитный момент, равный



$$p_{mzi} = -|e| \omega_L r_i^2 / 2, \quad (35.4)$$

где  $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ ; знак минус учитывает, что диамагнитный момент направлен противоположно индукции магнитного поля. Для того чтобы получить магнитный момент

Рис. 27

атома, необходимо уравнение (35.4) просуммировать по всем электронам атома:

$$p_{mz} = \sum_i p_{mzi} = -\frac{1}{2} |e| \omega_L \sum_i r_i^2. \quad (35.5)$$

Учтем, что различные атомы произвольно ориентированы в пространстве. Поэтому необходимо усреднить (35.5) по этим произвольным ориентациям:

$$\langle p_{mz} \rangle = -\frac{1}{2} |e| \omega_L \left\langle \sum_i r_i^2 \right\rangle. \quad (35.6)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \langle x_i^2 \rangle &= \langle y_i^2 \rangle = \langle z_i^2 \rangle = (1/3) \langle R_i^2 \rangle, \\ \langle r_i^2 \rangle &= \langle x_i^2 \rangle + \langle y_i^2 \rangle = \\ &= (2/3) \langle R_i^2 \rangle, \end{aligned} \quad (35.7)$$

получаем

$$\left\langle \sum_i r_i^2 \right\rangle = \sum_i \langle r_i^2 \rangle = \frac{2}{3} \sum_i \langle R_i^2 \rangle = \frac{2}{3} Z \langle R^2 \rangle, \quad (35.8)$$



где  $\langle R^2 \rangle$  — среднее расстояние электронов от ядра;  $Z$  — число электронов атома.

Таким образом, формула (35.6) принимает вид

$$\langle p_{mz} \rangle = -|e|\omega_L Z \langle R^2 \rangle / 3 = -e^2 Z \mu \langle R^2 \rangle H / (6m) \quad (35.9)$$

Отсюда по формуле (35.1) находим

$$\mathbf{J}_z = \frac{1}{\Delta V} \sum_j \langle p_{mzi} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \langle p_{mz} \rangle N \Delta V = \langle p_{mz} \rangle N, \quad (35.10)$$

где  $N$  — число атомов в единице объема. Подставляя (35.9) в (35.10), находим

$$\mathbf{J} = -e^2 Z \mu \langle R^2 \rangle N H / (6m), \quad (35.11)$$

где мы снова перешли к векторным обозначениям.

Сравнение равенств (35.11) и (35.2) показывает, что диамагнитная восприимчивость

$$\frac{\chi_d}{1 + \chi_d} \approx \chi_d \approx - \frac{e^2 Z \langle R^2 \rangle}{6m} \mu_0 N, \quad (35.12)$$

где  $\mu = \mu_0(1 + \chi_d)$  и  $\chi_d \ll 1$ . Знак минус учитывает то, что у диамагнетика вектор намагничения направлен противоположно индукции поля.

Формула (35.12) показывает, что диамагнитная восприимчивость не зависит явно от температуры, а зависит лишь от плотности вещества посредством множителя  $N$  (число атомов в единице объема).

Формула (35.12) хорошо подтверждается экспериментом, если  $\langle R^2 \rangle$  вычислять методами квантовой теории атома.

## § 36. ПАРАМАГНЕТИКИ

**Механизм намагничивания.** Если при отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов не равны нулю, то при помещении атомов в магнитное поле происходит их переориентировка. Это связано с тем, что энергия магнитного момента  $\mathbf{p}_m$  в магнитном поле  $\mathbf{B}$  дается формулой

$$W = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}. \quad (36.1)$$

Следовательно, минимум энергии достигается при совпадении направления магнитного момента с направлением

индукции магнитного поля. Эта ориентировка магнитных моментов атомов в направлении магнитного поля приводит к возникновению намагниченности вещества. Такое намагничивание называется парамагнетизмом. Направление вектора намагничивания при парамагнетизме совпадает с направлением индукции, благодаря чему парамагнитная восприимчивость  $\chi_{\text{п}}$  в (35.2) положительна.

Заметим, что у парамагнетиков существует также и диамагнитный эффект намагничивания. Однако он всегда значительно меньше парамагнитного эффекта. Поэтому вещества, атомы которых обладают постоянными магнитными моментами, являются парамагнетиками.

**Парамагнитная восприимчивость.** Намагничивание парамагнетиков подобно поляризации диэлектриков с полярными молекулами (см. § 25). Формула энергии магнитного момента (36.1) аналогична формуле энергии дипольного момента (25.8). Поэтому теория намагничивания парамагнетиков аналогична теории поляризации диэлектриков с полярными молекулами, необходимо лишь в последней всюду заменить  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}_m$ ,  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ . Поэтому, повторяя все рассуждения начиная от (25.8), получаем вместо (25.18):

$$\langle p_{\text{maz}} \rangle = p_{\text{ma}} L(\beta), \quad \beta = p_{\text{ma}} / (kT). \quad (36.2)$$

В случае слабых полей, когда  $p_{\text{ma}} B \ll kT$ , получаем вместо (25.19) формулу

$$\langle p_{\text{maz}} \rangle = p_{\text{m}}^2 B / (3kT). \quad (36.3)$$

Отсюда парамагнитная восприимчивость равна

$$\frac{\chi_{\text{п}}}{1 + \chi_{\text{п}}} \approx \chi_{\text{п}} = \frac{p_{\text{ma}}^2 N \mu_0}{3kT}, \quad (36.4)$$

где  $N$  — число атомов парамагнетика в единице объема. В формуле (36.4) учтено, что  $\mu = \mu_0(1 + \chi_{\text{п}})$ . Однако для большинства парамагнетиков  $\chi_{\text{п}} \ll 1$ , поэтому в знаменателе (36.4) можно пренебречь  $\chi_{\text{п}}$  по сравнению с единицей.

Формула (36.4) показывает, что парамагнитная восприимчивость при постоянном объеме ( $N = \text{const}$ ) обратно пропорциональна термодинамической температуре. Такая зависимость называется законом Кюри. Он хорошо подтверждается экспериментом для газообразных пара-

магнетиков и некоторых твердых парамагнетиков. Поскольку формула (36.4) получена в предположении  $p_{\text{ма}}B \ll kT$ , отклонения от закона Кюри могут наблюдаться в очень сильных полях или при очень малых температурах.

При достаточно сильных полях, аналогично (25.21), имеем

$$\langle p_{\text{ма}z} \rangle \approx p_{\text{ма}}, \quad (36.5)$$

т. е. наблюдается насыщение. Все магнитные моменты ориентированы по полю, и дальнейшее увеличение намагничивания с увеличением поля невозможно. В этом случае

$$J_{\text{нас}} = p_{\text{ма}}N. \quad (36.6)$$

Закон Кюри (36.4) не оправдывается для многих жидких и твердых парамагнетиков, для которых изложенная выше элементарная теория неприменима, поскольку не учитывает всех факторов взаимодействия атомов. Дальнейшее уточнение теории для этих случаев здесь не приводится.

### § 37. ЗАМЕЧАНИЯ О ФЕРРОМАГНЕТИЗМЕ

Ферромагнетиками называются вещества, у которых магнитная проницаемость  $\mu$  много больше  $\mu_0$  и нелинейно зависит от  $\mathbf{H}$ . Ферромагнетики обладают свойством остаточного магнетизма, когда вектор намагниченности не равен нулю при равном нулю внешнем магнитном поле. Теория ферромагнетизма не может быть строго построена в рамках классической электродинамики, для ее построения необходимо использовать квантовомеханические представления. Ферромагнетизм обуславливается спиновым магнетизмом электронов.

Как показывают квантовая теория и эксперимент, электрон обладает внутренними магнитным и механическим моментами. Внутренний механический момент электрона называется спином. Представить себе внутренние магнитный и механический моменты электрона как результат его вращения вокруг оси нельзя, поскольку в этом случае при разумных предположениях о размерах электрона следовало бы допустить существование линейной скорости его вращения, превосходящей скорость света, что невозможно. Поэтому наличие внутренних магнит-

ного и механического моментов не может быть дана наглядная механическая интерпретация. Между магнитным моментом  $\mu_s$  электрона и его внутренним механическим моментом  $l_s$  существует соотношение

$$\mu_s = e l_s / m. \quad (37.1)$$

Сравнивая эту формулу с (34.32), мы видим, что отношение внутреннего магнитного момента к внутреннему механическому моменту электрона [см. (37.1)]

$$\mu_s / l_s = e / m \quad (37.2)$$

в два раза больше отношения магнитного момента орбитального движения к механическому моменту орбитального движения электрона [см. (34.32)]:

$$p_m / L = e / (2m) = \mu_s / (2l_s). \quad (37.3)$$

Магнитный момент атома складывается из магнитных моментов орбитального движения электронов (34.32) и внутренних магнитных моментов электронов (37.1). Магнитный момент атома  $p_{ma}$  связан с его механическим моментом  $L_a$  соотношением

$$p_{ma} = \gamma L_a, \quad (37.4)$$

где  $\gamma$  заключено между  $e/m$  и  $e/(2m)$  в зависимости от того, в какой пропорции в полный магнитный момент входят внутренние и орбитальные моменты электронов. Как показывают квантовая механика и эксперимент, ферромагнетизм обуславливается внутренним или, как говорят, спиновым магнетизмом электронов. Под влиянием обменных сил, происхождение которых связано с квантовомеханической природой взаимодействия, спины электронов в смежных атомах стремятся при определенных условиях установиться в одном направлении параллельно друг другу. В результате такой ориентировки спинов электронов возникает намагничивание вещества, которое и обуславливает ферромагнетизм. Поскольку спиновый магнетизм электронов и обменное взаимодействие не могут быть объяснены в рамках классической электродинамики, теория ферромагнетизма здесь более подробно не может быть рассмотрена и мы вынуждены ограничиться этими краткими замечаниями. Экспериментальное доказательство того, что ферромагнетизм обусловлен именно спиновым магнетизмом, будет приведено в следующем параграфе.

## § 38. ГИРОМАГНИТНЫЕ ЭФФЕКТЫ

Опыт Эйнштейна — де Гааз. Намагничивание магнетика сводится к ориентировке магнитных моментов отдельных атомов в некотором преимущественном направлении. Поскольку магнитный момент атома связан с его механическим моментом соотношением (37.4), эта ориентировка магнитных моментов сопровождается соответствующей ориентировкой механических моментов.

Пусть стержень из магнетика подвешен на упругой нити (рис. 28). Намагничивание сводится к тому, что каждый атом приобретает магнитный момент в направлении вектора намагничивания, что сопровождается также соответствующим изменением механического момента атома. Поэтому, если стержень намагничивается вдоль оси, механический момент вращения атомов вдоль оси также меняется. Полный механический момент стержня складывается из механических моментов отдельных атомов и механического момента стержня как целого. До намагничивания полный момент стержня равен нулю. Для изолированной системы полный момент сохраняется. В данном случае изолированная система состоит из стержня

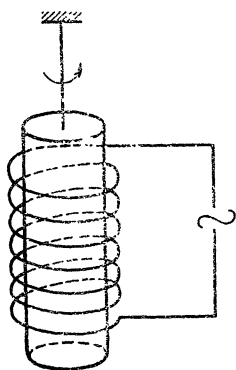


Рис. 28

и намагничивающего электромагнитного поля. Вектор  $\mathbf{H}$  магнитного поля направлен вдоль оси стержня, а вектор  $\mathbf{E}$  вихревого электрического поля направлен касательно к окружностям, concentрическим с осью вращения стержня. Таким образом, вектор Пойнтинга  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  направлен вдоль линии, проходящей через ось вращения стержня, а следовательно, и импульс электромагнитного поля направлен вдоль линии, проходящей через эту ось. Поэтому момент электромагнитного поля относительно оси вращения стержня равен нулю и можно заключить, что теорема о сохранении момента изолированной системы сводится в данном случае к утверждению о сохранении полного момента стержня. Поэтому и после намагничивания полный момент стержня равен нулю. Но в результате намагничивания механический момент атомов изменился. Поэтому на такое же значение, но в противо-

положном направлении, должен измениться и механический момент стержня как целого. Таким образом, в результате намагничивания стержень начинает вращаться как целое и закручивает нить, на которой он подвешен. Направим ось  $Z$  вдоль оси стержня. Из соотношения (37.4) следует, что

$$J = \sum_i \Delta p_{\text{ма } zi} = \gamma \sum_i \Delta L_{a \text{ } zi} = -\gamma L_z, \quad (38.1)$$

где  $L_z$  — момент импульса при вращении стержня как целого, полученный им в результате намагничивания;  $J$  — намагниченность всего стержня. Суммирование распространяется на все молекулы стержня. Угловая скорость вращения  $\omega$  стержня связана с моментом вращения  $L_z$  равенством

$$L_z = J_0 \omega, \quad (38.2)$$

где  $J_0$  — осевой момент инерции стержня. Кинетическая энергия вращения равна

$$E_k = J_0 \omega^2 / 2. \quad (38.3)$$

С другой стороны, модуль кручения  $d$  нити связан с частотой свободных угловых колебаний  $\omega_0$  стержня соотношением

$$J_0 \omega_0^2 = d. \quad (38.4)$$

В результате приобретения кинетической энергии (38.3) стержень закрутит нить на угол  $\theta$ , определяемый равенством кинетической (38.3) и потенциальной энергии закрученной нити:

$$J_0 \omega^2 / 2 = d \theta^2 / 2. \quad (38.5)$$

Из (38.5) с учетом (38.4), (38.2) и (38.1) получаем

$$J_0 \omega = \sqrt{d} \theta \sqrt{d} / \omega_0 = L_z = -J / \gamma. \quad (38.6)$$

Отсюда

$$\gamma = -J \omega_0 / (\theta d). \quad (38.7)$$

Все величины в правой части этого равенства могут быть измерены.

Это позволяет определить  $\gamma$ .

Наблюдаемый эффект невелик. Поэтому фактически опыт проводится не однократным намагничиванием, как описано выше, а многократным перемагничиванием образца с резонансной частотой  $\omega_0$ . В результате происходит постепенное наращивание крутильных колебаний образца, что в принципиальном отношении не изменяет идею опытов.

Опыты Эйнштейна — де Гааз были поставлены с ферромагнитными стержнями, у которых эффект намагничивания особенно заметен. В пределах ошибок эксперимента

$$\gamma = e/m. \quad (38.8)$$

Таким образом, получилась величина в два раза большая той, которую следовало бы ожидать, если магнетизм обуславливается орбитальным движением электронов в атоме. В то время результат (38.8) не был понятен. В дальнейшем было выяснено, что этот результат служит подтверждением спиновой природы ферромагнетизма, как это видно из сравнения формул (34.32), (37.1) и (37.4), (38.8).

**Эффект Барнетта.** При помещении магнетика в магнитное поле моменты атомов начинают прецессировать вокруг направления магнитного поля и магнетик намагничивается. Таким образом, намагничивание обуславливается упорядоченной прецессией всех атомов магнетика относительно магнетика как целого. Приведем во вращательное движение магнетик как целое. Отдельные атомы представляют собой маленькие гироскопы, которые стремятся сохранить направление своей оси вращения в пространстве. Поэтому направление магнитных моментов отдельных атомов в пространстве сохранится неизменным. Следовательно, относительно направления оси вращения магнетика эти магнитные моменты будут совершать упорядоченную прецессию с частотой вращения магнетика. Но такая упорядоченная прецессия атомов относительно магнетика как целого приводит к намагничиванию. Следовательно, в результате вращения магнетик намагнитится. В этом и состоит эффект, впервые наблюдавшийся Барнеттом в 1909 г.

Из изложенного ясно, что при вращении магнетика с частотой  $\omega$  его намагничивание будет таким же, как при помещении в магнитное поле  $B = 2m\omega/|e|$ .

## КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ. ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### § 39. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ

**Определения.** Квазистационарным называется электромагнитное поле, которое изменяется со временем достаточно медленно, причем критерий «достаточной медленности» изменения поля заключается в следующем:

а) изменение электромагнитного поля происходит настолько медленно, что внутри проводящих сред можно пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости:

$$|j_{\text{см}}|_{\text{макс}} \ll |j|_{\text{макс}}. \quad (39.1)$$

Если электромагнитное поле изменяется с частотой  $\omega$ , т. е. если, например,

$$E = E_0 e^{i\omega t}, \quad (39.2)$$

то

$$j_{\text{см}} = \partial D / \partial t = i\omega \varepsilon E_0 e^{i\omega t}, \quad (39.3)$$

$$j = \gamma E = \gamma E_0 e^{i\omega t}.$$

Следовательно, для выполнения критерия (39.1) должно соблюдаться неравенство

$$\frac{|j_{\text{см}}|_{\text{макс}}}{|j|_{\text{макс}}} = \frac{\omega \varepsilon}{\gamma} \ll 1. \quad (39.4)$$

Принимая во внимание, что для металлических проводников  $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ ,  $\gamma \approx 10^7 \text{ См} \cdot \text{м}^{-1}$ , мы видим, что токи смещения несут существенны в области частот

$$\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \approx 10^{18} \text{ с}^{-1}, \quad (39.5)$$

т. е. вплоть до частот колебаний, соответствующих ультрафиолетовой части спектра. Эта оценка приближенная,



поскольку не учитывает инерционных свойств среды, которые играют существенную роль при очень больших частотах. Учет инерционных свойств вещества ослабляет эту оценку на несколько порядков, однако и после этого диапазон частот, при которых можно пренебрегать токами смещения по сравнению с токами проводимости, остается весьма большим;

б) изменение поля происходит настолько медленно, что в пределах рассматриваемой области пространства можно пренебречь эффектами запаздывания, обусловленными тем, что скорость распространения электромагнитных волн — величина конечная.

Изменение величин, характеризующих плоскую волну, распространяющуюся со скоростью  $c$  вдоль оси  $X$ , можно записать в виде

$$E(x, t) = E_0 e^{i\omega(t-x/c)} = E_0 e^{i\omega t} e^{-i\omega x/c}. \quad (39.6)$$

Разлагая последний экспоненциальный сомножитель в ряд, получаем

$$E(x, t) = E_0 e^{i\omega t} (1 - i\omega x/c + \dots). \quad (39.7)$$

Отсюда видно, что эффектом запаздывания можно пренебречь тогда, когда в правой части (39.7) можно пренебречь зависимостью от  $x$ , т. е. когда соблюдается неравенство

$$\frac{\omega}{c} x \ll 1. \quad (39.8)$$

Принимая во внимание, что

$$\omega/c = 2\pi/(cT) = 2\pi/\lambda, \quad (39.9)$$

где  $\lambda$  — длина волны, можно условие (39.8) переписать в виде

$$x \ll \lambda, \quad (39.10)$$

т. е. считать скорость распространения электромагнитных волн бесконечной и пренебречь эффектами запаздывания, если линейные размеры области много меньше длины волн. Если, например, взять обычный технический ток с частотой 50 Гц, то соответствующая ему длина волны равна нескольким тысячам километров и, следовательно, в этом случае эффектами запаздывания можно пренебречь даже для областей сравнительно больших размеров.

Следовательно, можно заключить, что к квазистационарным электромагнитным полям относится большинство полей, рассматриваемых в электротехнике, а также многие поля, встречающиеся в радиотехнике.

**Уравнения Максвелла в квазистационарной области.** При пренебрежении токами смещения уравнения Максвелла приобретают такой вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (39.11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$$

где  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{j} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}})$ .

Таким образом, в области квазистационарных полей электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать раздельно. Однако между ними учитывается лишь главная связь, осуществляемая явлением электромагнитной индукции Фарадея. Связь, осуществляемая токами смещения, является менее важной и для квазистационарных полей не учитывается.

**Напряженность электрического поля, выраженная через потенциалы.** Напряженность электрического квазистационарного поля возникает не только за счет зарядов, но и за счет изменения магнитного поля. Она зависит и от скалярного, и от векторного потенциалов. Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  вводится совершенно так же, как и в случае стационарных магнитных полей:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (39.12)$$

Электрическое поле в квазистационарном случае не является, вообще говоря, потенциальным, поскольку

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0, \quad (39.13)$$

и поэтому вектор напряженности  $\mathbf{E}$  электрического поля не может быть представлен в виде градиента от скалярного потенциала. Выражая в (39.13) вектор  $\mathbf{B}$  с помощью векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , находим

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (39.14)$$

Здесь последовательность операций взятия производной по времени и вычисления ротора изменена на том основании, что вычисление ротора сводится к вычислению частных производных по координатам, а последователь-

ность дифференцирований — по координатам и времени, являющимся независимыми переменными, может быть изменена. Перепишав (39.14) в форме

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t) = 0, \quad (39.15)$$

видим, что

$$\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t \quad (39.16)$$

является потенциальным вектором и, следовательно, может быть представлен в виде градиента от скалярной функции:

$$\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (39.17)$$

Таким образом, вектор напряженности электрического поля выражается через скалярный и векторный потенциалы следующей формулой:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t. \quad (39.18)$$

Второй член в правой части (39.18) учитывает закон электромагнитной индукции Фарадея и обуславливает непотенциальность электрического поля в квазистационарном случае. Благодаря наличию этого члена работа, совершаемая полем при перемещении заряда между двумя точками, вообще говоря, зависит от формы пути.

**Уравнение для скалярного потенциала.** Рассмотрим однородную среду ( $\epsilon = \text{const}$ ). Подставляя в уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho \quad (39.19)$$

выражение для  $\mathbf{E}$  через потенциалы, находим

$$\operatorname{div} (-\operatorname{grad} \varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t) = \rho/\epsilon. \quad (39.20)$$

Учтем, что  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi$  и

$$\operatorname{div} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (39.21)$$

Поэтому уравнение для скалярного потенциала имеет вид

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon \quad (39.22)$$

(как и в случае статических полей). Это обусловлено тем, что для квазистационарных полей пренебрегают эффектом запаздывания и считают, что скалярный потен-

циал в данной точке пространства в некоторый момент времени определяется распределением зарядов во всем пространстве в тот же момент времени, причем характер движения зарядов никакого значения не имеет. Поэтому скалярный потенциал имеет такое же значение, как если бы все заряды были неподвижными.

**Уравнение для векторного потенциала.** Все вычисления и рассуждения совершенно одинаковы с теми, которые были использованы при выводе уравнения для векторного потенциала статических магнитных полей, поскольку исходные уравнения одинаковы. Благодаря этому уравнения для векторного потенциала совпадают:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}. \quad (39.23)$$

Для вакуума в этом уравнении  $\mu = \mu_0$ . Причина совпадения этого уравнения с уравнением для статического магнитного поля та же, что и в случае скалярного потенциала.

Таким образом, если произвести мгновенную фотографию распределения зарядов и токов в некоторый момент времени, то по ней можно определить значения скалярного и векторного потенциалов во всех точках пространства. Скалярный и векторный потенциалы будут такими же, какими они были бы в случае статических полей, если бы распределение зарядов и токов совпадало с тем, какое получилось на мгновенной фотографии. По полученному значению векторного потенциала можно вычислить индукцию магнитного поля. Получить же напряженность электрического поля по одной моментальной фотографии не удастся, потому что напряженность зависит от производной по времени от векторного потенциала. Поэтому для определения электрического поля необходимо сделать как минимум две моментальные фотографии распределения токов в бесконечно близкие моменты времени.

#### **§ 40. СИСТЕМА ПРОВОДНИКОВ С УЧЕТОМ ВЗАИМОИНДУКЦИИ И САМОИНДУКЦИИ**

**Интегральный закон Ома с учетом электромагнитной индукции.** Явление электромагнитной индукции обуславливает взаимное влияние токов, протекающих по различным проводникам, и взаимное влияние различных элементов тока, протекающего по одному и тому же про-

воднику. Вследствие этого ток, протекающий по некоторому участку цепи, нельзя исследовать изолированно от токов, протекающих по другим участкам цепи и по другим цепям. Необходимо принять во внимание всю совокупность токов, находящихся в индукционной связи друг с другом. Применим закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стоп}}) \quad (40.1)$$

к  $k$ -му проводнику. Для этого разделим обе части уравнения (40.1) на  $\gamma$ , умножим на элемент длины линейного проводника  $d\mathbf{l}$  и проинтегрируем по замкнутому контуру проводника:

$$\oint_{L_k} \frac{\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}}{\gamma} = \oint_{L_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{L_k} \mathbf{E}^{\text{стоп}} \cdot d\mathbf{l}. \quad (40.2)$$

Здесь  $L_k$  — контур  $k$ -го проводника. Подынтегральное выражение в левой части можно преобразовать:

$$\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} / \gamma = j dl / \gamma = j S dl / \gamma S = I dR. \quad (40.3)$$

Можно считать, что в линейном проводнике направления векторов  $\mathbf{j}$  и  $d\mathbf{l}$  совпадают;  $dR = dl / \gamma S$  — сопротивление участка проводника длиной  $dl$  с поперечным сечением  $S$ ;  $I = jS$  — сила тока, протекающего по проводнику. Таким образом,

$$\int_{L_k} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} / \gamma = \int_{L_k} I dR = I_k \int_{L_k} dR = I_k R_k. \quad (40.4)$$

Здесь учтено, что сила тока, проходящего через любое поперечное сечение замкнутого проводника, одна и та же, и, следовательно, при интегрировании вдоль контура замкнутого проводника она является постоянной и может быть вынесена за знак интеграла;  $R_k$  — полное сопротивление  $k$ -го проводника.

Интеграл

$$\int_{L_k} \mathbf{E}^{\text{стоп}} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}_k^{\text{стоп}} \quad (40.5)$$

в правой части равенства (40.2) представляет собой стороннюю электродвижущую силу, приложенную к  $k$ -му проводнику. Другой интеграл в правой части равенства

(40.2) с помощью формулы (39.18) может быть представлен в виде

$$\oint_{L_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_{L_k} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l} - \oint \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}. \quad (40.6)$$

Поскольку контур  $L_k$  является замкнутым, первый интеграл в правой части (40.6) равен нулю:

$$\oint_{L_k} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L_k} d\varphi = 0.$$

Второй интеграл в правой части (40.6) можно преобразовать:

$$\begin{aligned} \oint_{L_k} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} &= \frac{d}{dt} \oint_{L_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_{S_k} \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{S_k} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d\Phi_k}{dt}, \end{aligned} \quad (40.7)$$

где  $\Phi_k = \int_{S_k} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  — поток магнитной индукции через по-

верхность  $S_k$ , натянутую на  $L_k$  контур  $k$ -го проводника. В преобразованиях (40.7) учтено, что контур  $L_k$  является неподвижным, поэтому производную по времени можно вынести за знак интеграла. Таким образом, учитывая (40.4), (40.5) и (40.7), можно уравнение (40.2) переписать:

$$I_k R_k = \mathcal{E}_k^{\text{суп}} - d\Phi_k/dt. \quad (40.8)$$

Это есть закон Ома для  $k$ -го проводника с учетом электромагнитной индукции, которая описывается вторым членом в правой части этого уравнения.

**Уравнение для системы проводников.** Поток магнитной индукции  $\Phi_k$  через поверхность, натянутую на контур  $k$ -го проводника, может быть представлен в виде

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^N L_{ki} I_i, \quad (40.9)$$

где суммирование по  $i$  распространено на все проводники, число которых пусть будет  $N$ .

Подставляя это выражение для  $\Phi_k$  в (40.8), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$I_k R_k = \mathcal{E}_k^{\text{стор}} - \sum_{i=1}^N L_{ki} \frac{dI_i}{dt}; \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (40.10)$$

Здесь мы считаем коэффициенты  $L_{ki}$  постоянными величинами, а частную производную заменили на полную потому, что в этих уравнениях время — единственная переменная, от которой явно зависит сила тока  $I_i$ . Таким образом, имеется  $N$  уравнений для  $N$  неизвестных:  $I_1, I_2, \dots, I_N$ . При заданных начальных условиях эта система имеет однозначное решение.

**Трансформатор.** В качестве примера возьмем два проводника, намотанные в виде спирали на замкнутом сердечнике из материала с большой магнитной проницаемостью. Благодаря этому потоки магнитной индукции, создаваемые текущими по проводам токами, практически полностью сосредоточены внутри сердечника. Такая совокупность двух проводников называется трансформатором, а проводники — его обмотками. Обмотка, к которой подключен источник сторонних э. д. с., называется первичной, а другая — вторичной. К ней подключается нагрузка.

Величины, относящиеся к первичной и вторичной обмоткам, обозначим соответственно индексами 1 и 2. Уравнения (40.8) принимают такой вид

$$I_1 R_1 = \mathcal{E}_1^{\text{стор}} - d\Phi_1/dt, \quad (40.11)$$

$$I_2 R_2 = -d\Phi_2/dt, \quad (40.12)$$

где  $R_1$  — омическое сопротивление первичной обмотки;  $R_2$  — суммарное омическое сопротивление вторичной обмотки и нагрузки, которая для упрощения считается чисто омической.

В обычных условиях омическое сопротивление первичной обмотки мало и падение напряжения на ней много меньше сторонней э. д. с., т. е.  $|I_1 R_1| \ll |\mathcal{E}_1^{\text{стор}}|$ . Поэтому уравнение (40.11) упрощается:

$$\mathcal{E}_1^{\text{стор}} = d\Phi_1/dt. \quad (40.13)$$

Во всех практически интересных случаях омическое сопротивление вторичной обмотки много меньше омиче-

ского сопротивления нагрузки. Поэтому сопротивление  $R_2$  в (40.12) можно считать равным сопротивлению нагрузки, а  $U_2 = I_2 R_2$  — равным напряжению на клеммах вторичной обмотки трансформатора. Вместо (40.12) можно написать

$$U_2 = -d\Phi_2/dt. \quad (40.14)$$

Поскольку сторонняя э. д. с. изменяется по гармоническому закону  $\mathcal{E}_1^{\text{стор}} \sim \exp(i\omega t)$ , все другие величины изменяются по такому же закону и, следовательно,  $d\Phi_1/dt = i\omega\Phi_1$ ,  $d\Phi_2/dt = i\omega\Phi_2$ . Каждый из витков первичной и вторичной обмоток охватывает один и тот же поток  $\Phi_0$ , вследствие того что весь поток магнитной индукции заключен внутри сердечника. Поэтому полные потоки, охватываемые первичной и вторичной обмотками, равны:

$$\Phi_1 = \Phi_0 N_1, \quad \Phi_2 = \Phi_0 N_2, \quad (40.15)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — числа витков первичной и вторичной обмоток. С учетом (40.15) уравнения (40.13) и (40.14) принимают такой вид:

$$|\mathcal{E}_1^{\text{стор}} = i\omega N_1 \Phi_0, \quad (40.16)$$

$$U_2 = -i\omega N_2 \Phi_0. \quad (40.17)$$

Разделив почленно левые и правые части (40.16) на соответствующие части (40.17) и перейдя к модулям, получим

$$\mathcal{E}_1^{\text{стор}} / |U_2| = N_1/N_2. \quad (40.18)$$

Учитывая, что  $|\mathcal{E}_1^{\text{стор}}| = \mathcal{E}_{10}$ ,  $|U_2| = U_{20}$  — амплитуды сторонней э. д. с. и напряжения на клеммах вторичной обмотки, запишем (40.18) в более удобной форме:

$$\mathcal{E}_{10}^{\text{стор}}/N_2 = U_{20}/N_2, \quad (40.19)$$

т. е. амплитуда напряжения во вторичной обмотке во столько раз больше (меньше) амплитуды напряжения в первичной, во сколько раз число витков во вторичной обмотке больше (меньше), чем в первичной.

Если пренебречь потерями энергии в трансформаторе, то закон сохранения энергии имеет вид

$$\mathcal{E}_1^{\text{стор}} I_1 = U_2 I_2. \quad (40.20)$$



Переходя в (40.20) к модулям, получаем вместо (40.19) соотношение

$$I_{10}N_1 = I_{20}N_2, \quad (40.21)$$

где  $I_{10}$  и  $I_{20}$  — амплитуды сил тока в обмотках.

Формулы (40.19) и (40.21) описывают закон преобразования напряжений и токов в трансформаторе. Они строго справедливы для идеального трансформатора, в котором нет рассеяния потока магнитной индукции и потери энергии. В реальных трансформаторах они также соблюдаются с достаточной для практики точностью.

#### § 41. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ С ЕМКОСТЬЮ И ИНДУКТИВНОСТЬЮ

**Уравнение для расчета электрической цепи.** Умножим обе части уравнения

$$\mathbf{j}/\gamma = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стоп}} \quad (41.1)$$

на элемент длины  $d\mathbf{l}$  проводника и проинтегрируем вдоль проводника от одной обкладки конденсатора до другой, т. е. от точки 1 до точки 2 (рис. 29):

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}}{\gamma} = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}^{\text{стоп}} d\mathbf{l}. \quad (41.2)$$

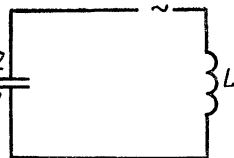


Рис. 29

Подынтегральное выражение слева преобразуется аналогично (40.3), а справа — аналогично (40.5) и (40.6). В результате получим

$$\int_{(1)}^{(2)} I dR = \mathcal{E}^{\text{стоп}} - \int_{(1)}^{(2)} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l} - \frac{d}{dt} \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (41.3)$$

Интеграл

$$\int_{(1)}^{(2)} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l} = \int_{(1)}^{(2)} d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (41.4a)$$

представляет собой разность потенциалов между обкладками конденсатора. Интеграл

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (41.4b)$$

вычислим приближенно следующим образом. Ввиду того что потенциал  $\mathbf{A}$  является непрерывной функцией, а расстояние между обкладками конденсатора много меньше длины проводника, вдоль которого берется интеграл

$$(41.46), \text{ можно заключить, что } \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{A} d\mathbf{l} \approx \oint_{L_1} \mathbf{A} d\mathbf{l} = \Phi,$$

где  $L_1$  — замкнутый контур, состоящий из проводника и малого расстояния между обкладками конденсатора;  $\Phi$  — поток магнитной индукции через поверхность, натянутую на контур  $L_1$ . Левую часть (41.3) вычисляют аналогично (40.4). Тогда (41.3) можно записать в виде

$$IR = \mathcal{E}^{\text{стоп}} - (\varphi_2 - \varphi_1) - d\Phi/dt. \quad (41.5)$$

Примем во внимание, что

$$\Phi = LI, \quad (41.6)$$

где  $L$  — индуктивность контура. Учтем, что разность потенциалов  $\varphi_2 - \varphi_1$  между обкладками конденсатора связана с зарядом  $Q$  обкладки конденсатора равенством

$$\varphi_2 - \varphi_1 = Q/C, \quad (41.7)$$

где  $C$  — емкость конденсатора. Подставляя (41.6) и (41.7) в (41.5), получаем

$$LdI/dt + RI + Q/C = \mathcal{E}^{\text{стоп}}. \quad (41.8)$$

Дифференцируя обе части уравнения (41.8) по времени и учитывая, что

$$dQ/dt = I, \quad (41.9)$$

получим уравнение для электрической цепи с емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$  в виде

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{d}{dt} \mathcal{E}^{\text{стоп}}. \quad (41.10)$$

Таким образом, решение задач, связанных с электрической цепью указанного вида, сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения (41.10) с постоянными коэффициентами. Это решение обычно удается найти без большого труда.

**Включение в цепь и выключение из цепи постоянной электродвижущей силы.** Пусть в момент  $t=0$  в цепь

включена постоянная электродвижущая сила  $\mathcal{E}_0^{\text{стоп}}$ . Будем считать, что конденсатор в цепи отсутствует. Требуется найти закон нарастания силы тока в цепи, т. е. функцию  $I=I(t)$ .

Для решения задачи удобнее воспользоваться уравнением (41.8), которое для  $t>0$  имеет вид

$$LdI/dt + RI = \mathcal{E}_0^{\text{стоп}}. \quad (41.11)$$

Начальное условие, очевидно, может быть записано следующим образом:

$$I(0) = 0. \quad (41.12)$$

Общее решение уравнения (41.11) имеет вид

$$I = \mathcal{E}_0^{\text{стоп}}/R + ae^{-Rt/L}, \quad (41.13)$$

где  $a$  — произвольная постоянная, которая находится из начального условия (41.12), записанного на основании (41.13) в форме

$$\mathcal{E}_0^{\text{стоп}}/R + a = 0, \quad a = -\mathcal{E}_0^{\text{стоп}}/R. \quad (41.14)$$

Таким образом, окончательно решение задачи определяется функцией

$$I(t) = \mathcal{E}_0^{\text{стоп}}(1 - e^{-Rt/L})/R; \quad t \geq 0. \quad (41.15)$$

Аналогично решается задача о выключении из цепи постоянной электродвижущей силы. Закон убывания силы тока в этом случае

$$I(t) = \mathcal{E}_0^{\text{стоп}}e^{-Rt/L}/R; \quad t \geq 0. \quad (41.16)$$

Таким образом, благодаря явлению самоиндукции сила тока после выключения из цепи постоянной э. д. с. убывает до нуля не мгновенно, а в течение некоторого промежутка времени. Промежуток времени, в течение которого сила тока убывает в  $e$  раз, называется временем релаксации. Из (41.16) видно, что время релаксации равно

$$\tau_p = L/R. \quad (41.17)$$

**Колебательный контур.** Будем считать, что омическим сопротивлением электрической цепи можно пренебречь ( $R=0$ ) и сторонняя электродвижущая сила отсутствует

$$(\mathcal{E}_{\text{стор}}=0). \text{ В этом случае уравнение (41.10) имеет вид} \\ d^2I/dt^2 + I/(LC)=0. \quad (41.18)$$

Общим его решением является функция

$$I = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (42.19)$$

причем круговая частота равна

$$\omega = 2\pi/T = 1/\sqrt{LC}. \quad (41.20)$$

Таким образом, период колебаний в таком контуре

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (41.21)$$

Возбуждение этих колебаний можно произвести с помощью электромагнитной индукции. Наличие омического сопротивления приводит к постепенному затуханию колебаний.

**Общий случай.** Теперь рассмотрим уравнение (41.10), учитывая одновременно емкость, сопротивление и индуктивность. Если сторонняя э. д. с. является периодической функцией с частотой  $\omega$ :

$$\mathcal{E}_{\text{стор}} = \mathcal{E}_0^{\text{стор}} e^{-i\omega t}, \quad (41.22)$$

то решение (41.10) надо искать в виде

$$I = I_0 e^{-i\omega t}. \quad (41.23)$$

Подставляя (41.23) в (41.10) и производя дифференцирование, находим соотношение

$$(-L\omega^2 - Ri\omega + 1/C)I = -i\omega\mathcal{E}_{\text{стор}}. \quad (41.24)$$

Это соотношение можно написать в виде закона Ома:

$$ZI = \mathcal{E}_{\text{стор}}, \quad (41.25)$$

где

$$Z = R - i[\omega L - 1/(\omega C)] \quad (41.26)$$

называется импедансом. Записав соотношение (41.25) в виде

$$I = \mathcal{E}_{\text{стор}}/Z \quad (41.27)$$

и отделяя вещественную часть, получим выражение для силы тока:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0^{\text{стоп}} \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}}, \quad (41.28)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \frac{1}{R}.$$

Этот ток обуславливается приложенным извне напряжением

$$\mathcal{E}^{\text{стоп}} = \mathcal{E}_0^{\text{стоп}} \cos \omega t. \quad (41.29)$$

Таким образом, сила тока сдвинута по фазе относительно приложенного напряжения, а наряду с омическим сопротивлением появилось индуктивное сопротивление.

Если сторонняя э. д. с. отключена ( $\mathcal{E}^{\text{стоп}} = 0$ ), то ток в цепи совершает колебания, комплексная частота которых на основании (41.25) определяется условием  $Z = 0$ . Следовательно,

$$\omega = -i \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \left( \frac{R}{2L} \right)^2}. \quad (41.30)$$

Если подкоренное выражение отрицательно

$$\frac{1}{LC} < \left( \frac{R}{2L} \right)^2,$$

то комплексная частота чисто мнимая, следовательно, множитель  $e^{-i\omega t}$  не будет периодической функцией. В этом случае происходит затухающий аperiodический разряд.

Если подкоренное выражение положительно

$$\frac{1}{LC} > \left( \frac{R}{2L} \right)^2,$$

то возбуждаются затухающие колебания, частота которых

$$\omega_{\text{кол}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left( \frac{R}{2L} \right)^2}, \quad (41.31)$$

а скорость уменьшения амплитуды колебаний определяется множителем

$$e^{-Rt/(2L)}, \quad (41.32)$$

где  $R/(2L)$  — декремент затухания этих колебаний. При пренебрежимо малом омическом сопротивлении в формуле (41.31) можно положить  $R=0$ . Тогда эта формула превращается в формулу Томсона (41.20) для частоты свободных колебаний.

## § 42. ИНДУКЦИЯ ТОКОВ В ДВИЖУЩИХСЯ ПРОВОДНИКАХ

При исследовании явления электромагнитной индукции Фарадея в § 6 предполагалось, что контур  $L$ , в котором

вычислялась э. д. с. индукции, неподвижен и изменение потока магнитной индукции  $\Phi$  обусловлено переменностью индукции магнитного поля во времени.

Пусть имеется замкнутый линейный проводник  $L$ , произвольно движущийся во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}$ , при этом допускается деформация формы проводника.

Если элемент  $d\mathbf{l}$  проводника движется со скоростью  $\mathbf{v}$  в магнитном поле  $\mathbf{B}$ , то на каждый свободный электрон, находящийся в элементе  $d\mathbf{l}$ , действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (42.1)$$

которая создает упорядоченное движение электронов, т. е. электрический ток. С этой точки зрения можно сказать, что в проводнике возникает некоторое электрическое поле

$$\mathbf{E}_{\text{эф}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (42.2)$$

которое создает электродвижущую силу индукции, равную в замкнутом контуре  $L$

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \oint_L \mathbf{E}_{\text{эф}} d\mathbf{l} = \oint_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{l}. \quad (42.3)$$

Пусть  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор элемента проводника  $d\mathbf{l}$  (рис. 30). Рассмотрим два положения контура  $L$  через

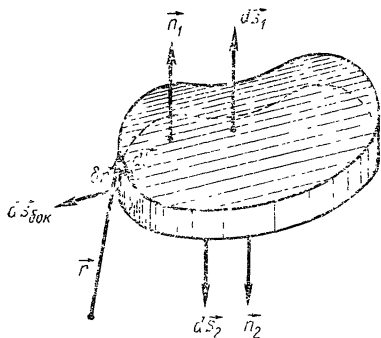


Рис. 30

промежуток времени  $\delta t$ . За время  $\delta t$  элемент контура  $dl$  сместится на  $\delta \mathbf{r}$ , причем

$$\mathbf{v} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} . \quad (42.4)$$

Поэтому равенство (42.3) можно представить в виде

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_L (\delta \mathbf{r} \times \mathbf{B}) dl . \quad (42.5)$$

Поскольку в смешанном произведении можно производить циклическую перестановку сомножителей, то

$$(\delta \mathbf{r} \times \mathbf{B}) dl = (dl \times \delta \mathbf{r}) \mathbf{B} . \quad (42.6)$$

Учтем, что

$$dl \times \delta \mathbf{r} = -d\mathbf{S}_{\text{бок}} , \quad (42.7)$$

где  $d\mathbf{S}_{\text{бок}}$  — вектор площадки, образованной элементом  $dl$  при его смещении на  $\delta \mathbf{r}$ . Вектор  $d\mathbf{S}_{\text{бок}}$  направлен в сторону внешней нормали к объему, ограниченному поверхностями  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_{\text{бок}}$ . Поток вектора  $\mathbf{B}$  через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 . \quad (42.8)$$

Следовательно,

$$- \int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{B} \cdot (dl \times \delta \mathbf{r}) = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} . \quad (42.9)$$

В качестве положительной нормали к поверхности, натянутой на движущийся контур, необходимо взять такую, чтобы она с выбранным направлением обхода контура составляла правовинтовую систему (рис. 30; нормаль  $\mathbf{n}_1$ ). Поэтому для интегралов в правой части (42.9) можно написать:

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi(t), \quad \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\Phi(t + \delta t) . \quad (42.10)$$

Знак минус во втором равенстве учитывает то, что внешняя нормаль  $\mathbf{n}_2$  имеет направление, противоположное принятому за положительное. Таким образом, соотноше-

ние (42.9) может быть записано в виде

$$\int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \delta \mathbf{r}) = -[\Phi(t + \delta t) - \Phi(t)] = -\delta \Phi, \quad (42.11)$$

где  $\delta \Phi$  — изменение потока магнитной индукции через поверхность, натянутую на контур  $L$ , обусловленное его движением и деформацией. Подставляя (42.11) в (42.5), находим

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \Phi}{\delta t} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (42.12)$$

Эта формула по внешнему виду совпадает с формулой (6.1), но содержание ее существенно иное: в формуле (6.1) изменение потока магнитной индукции при неподвижном проводнике обуславливалось переменностью во времени магнитного поля, а в формуле (42.12) изменение потока магнитной индукции обуславливается движением и деформацией проводника при постоянном по времени магнитном поле. Следовательно, формула

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - d\Phi/dt \quad (42.13)$$

применима при любых причинах изменения  $\Phi$ .

### § 43. СКИН-ЭФФЕКТ

**Сущность явления.** Постоянный ток распределяется равномерно по поперечному сечению проводника. В случае переменных токов картина меняется — плотность тока у поверхности проводника увеличивается, а в центре — уменьшается. Это явление концентрации переменного тока у поверхности проводника называется скин-эффектом. Скин-эффект обуславливается электромагнитным взаимодействием элементов тока.

Пусть переменный ток течет по бесконечному прямому цилиндрическому проводнику (рис. 31). Для определенности в некоторый момент времени ток течет в направлении, указанном на рисунке стрелкой, и сила тока возрастает. Линии магнитного поля тока являются concentрическими окружностями с центром на оси проводника. При возрастании силы тока форма линий индукции не изменяется, но значение индукции в каждой точке увеличивается. Следовательно, при изменении силы тока ин-



дукция магнитного поля в каждой точке сохраняется по направлению, но изменяется по значению. Поэтому производная  $d\mathbf{B}/dt$  направлена по касательной к соответствующей линии индукции магнитного поля. По закону электромагнитной индукции, изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, причем силовые линии этого электрического поля лежат в плоскости, перпендикулярной вектору  $\partial\mathbf{B}/\partial t$ . Направление положительного обхода вдоль линии напряженности электрического поля и направление вектора  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  составляют левовинтовую систему. Как это непосредственно видно из рис. 31, направление вихревого поля  $\mathbf{E}$  таково, что оно усиливает силу тока у поверхности проводника и ослабляет ее внутри проводника. Благодаря этому плотность тока у поверхности проводника увеличивается, а к центру проводника уменьшается. Был проанализирован случай увеличения силы тока. Нетрудно убедиться, что в случае уменьшения силы тока направление вихревого электрического поля таково, что плотность тока увеличивается от центра проводника к его поверхности.

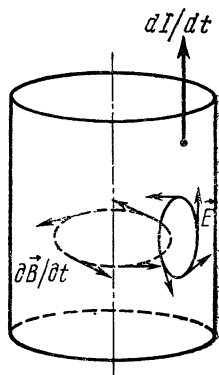


Рис. 31

**Элементарная теория скин-эффекта.** Для упрощения вычислений возьмем бесконечный однородный проводник, занимающий полупространство  $Y \geq 0$ . Ток течет в направлении оси  $X$  параллельно поверхности проводника, совпадающей с плоскостью  $XZ$ . Исходные уравнения теории имеют такой вид:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}, \quad (43.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t = -\mu \partial\mathbf{H}/\partial t, \quad (43.2)$$

где учтено, что

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad (43.3)$$

Дифференцируя обе части (43.1) по времени и исключая производную  $\partial\mathbf{H}/\partial t$  из левой части с помощью уравнения

(43.2), находим

$$-\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (43.4)$$

Поскольку в однородном проводнике свободные заряды отсутствуют, а  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$ , и  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ , то из (43.4) получаем

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (43.5)$$

Аналогично выводится уравнение и для  $\mathbf{H}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (43.6)$$

Мы исследуем случай, когда ток течет вдоль оси  $X$ , причем

$$j_x = j_x(y, t), \quad j_y = j_z = 0, \quad (43.7)$$

поэтому на основе (43.3) имеем:

$$E_x = E_x(y, t), \quad E_y = E_z = 0. \quad (43.8)$$

Тогда уравнение (43.5) принимает вид

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \gamma \mu \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (43.9)$$

Если  $\omega$  — частота переменного тока, то решение (43.9) следует искать в виде

$$E_x(y, t) = E_{x0}(y) e^{i\omega t}. \quad (43.10)$$

Подставляя это выражение для  $E_x(y, t)$  в (43.9) и сокращая после дифференцирования по времени на множитель  $e^{i\omega t}$ , получаем:

$$d^2 E_{x0}/dy^2 = 2i p^2 E_{x0}, \quad p^2 = \mu \gamma \omega / 2. \quad (43.11)$$

Общее решение этого уравнения

$$E_{x0}(y) = A_0 e^{ky} + B_0 e^{-ky}, \quad (43.12)$$

причем

$$k^2 = 2i p^2, \quad k = p \sqrt{2i} = p(1 + i). \quad (43.13)$$

Таким образом,

$$E_{x0} = A_0 e^{py} e^{i py} + B_0 e^{-py} e^{-i py}. \quad (43.14)$$

Первое слагаемое (43.14) неограниченно возрастает при  $y \rightarrow \infty$ , что физически бессмысленно. Поэтому следует положить  $A_0 = 0$ . С учетом (43.10) окончательно имеем

$$E_x(y, t) = e^{-py} B_0 e^{i(\omega t - py)}, \quad (43.15)$$

или, переходя к вещественным величинам и взяв, например, действительную часть,

$$E_x = e^{-py} B_0 \cos(\omega t - py). \quad (43.16)$$

Принимая во внимание (43.3), можно на основании (43.16) написать выражение для плотности тока в виде

$$j_x = e^{-py} j_0 \cos(\omega t - py), \quad (43.17)$$

где  $j_0$  — амплитуда плотности тока на поверхности проводника. Таким образом, плотность тока при удалении от поверхности проводника убывает, причем скорость этого убывания характеризуется экспоненциальным множителем  $e^{-py}$ . На расстоянии

$$\Delta = 1/p \quad (43.18)$$

от поверхности проводника плотность тока убывает в  $e$  раз. Поэтому практически можно считать, что весь ток сосредоточен в поверхностном слое проводника толщиной  $\Delta$ . Принимая во внимание выражение (43.11) для  $p$ , можно формулу (43.18) представить в виде

$$\Delta = \sqrt{T/(\pi \mu \gamma)}, \quad (43.19)$$

где  $T$  — период колебаний. Таким образом, с увеличением частоты переменного тока скин-эффект увеличивается и ток сосредоточивается во все более тонком слое вблизи поверхности проводника. Скин-эффект также усиливается с увеличением проводимости проводника, т. е. с уменьшением удельного сопротивления проводника. Оценим порядок  $\Delta$ . Для металлов при оценке порядков величин можно считать  $\mu \approx \mu_0$ ,  $\gamma \approx 10^7$  Ом/м. Тогда для  $T \approx 10^{-3}$  с получаем

$$\Delta = \sqrt{\frac{10^{-3}}{\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^7}} \text{ м} \approx 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Если же частота увеличивается в 100 раз, то  $\Delta = 0,5$  мм. Таким образом, при периоде  $T = 10^{-5}$  с, что соответствует длине волны  $l = cT = 3$  км, весь ток практически течет в слое полумиллиметровой толщины. Приведенные оценки показывают, что в области достаточно больших частот скин-эффект приводит к существенному перераспределению тока по сечению проводника.

Расчет скин-эффекта в цилиндрическом проводнике ведется аналогичным способом. Никаких новых моментов он не содержит, но является более громоздким и поэтому здесь не приведен.

**Зависимость омического сопротивления проводника от частоты.** Как известно, омическое сопротивление проводника обратно пропорционально площади поперечного сечения. Благодаря скин-эффекту весь ток концентрируется вблизи поверхности цилиндрического проводника. Это эквивалентно тому, что весь ток течет по полуму цилиндрическому проводнику и сопротивление этого проводника равно сопротивлению полого цилиндра с соответствующей толщиной стенок, т. е. больше, чем сопротивление сплошного цилиндрического проводника. При увеличении частоты толщина цилиндрического слоя, в котором течет ток, уменьшается, а сопротивление току соответственно увеличивается. Таким образом, главной токопроводящей частью провода для токов не очень малой частоты является поверхностный слой проводника. Поэтому можно сердцевину сделать из дешевого материала с плохой проводимостью, а оболочку — из металла с хорошей проводимостью, который обычно дороже. Основное назначение сердцевины в этом случае состоит в придании прочности проводнику. В целом использование таких проводов во многих случаях оказывается экономически и технически выгодным.

**Зависимость самоиндукции от частоты.** Как было показано в § 32, энергия магнитного поля связана с самоиндукцией проводника  $L$  и силой тока  $I$  соотношением

$$W = LI^2/2. \quad (43.20)$$

Если ток течет по полуму цилиндру, то магнитное поле в цилиндрической полости равно нулю, а поле вне цилиндра такое же, как и в случае, когда этот ток течет по сплошному цилиндрическому проводнику. Следовательно, энергия магнитного поля, создаваемого током, теку-

шим по полю цилиндрическому проводнику, меньше, чем энергия магнитного поля, создаваемого током той же силы, текущим по сплошному цилиндрическому проводнику. При скин-эффекте ток концентрируется вблизи поверхности проводника. Следовательно, магнитное поле вне проводника имеет то же значение, как и при отсутствии скин-эффекта, а поле внутри проводника уменьшается. Поэтому благодаря скин-эффекту энергия магнитного поля уменьшается. Поскольку при этом полный ток, протекающий по проводнику, не изменяется, то уменьшение полной энергии согласно (43.20) может произойти только за счет уменьшения самоиндукции  $L$ . Таким образом, самоиндукция проводника зависит от частоты и с увеличением частоты переменного тока уменьшается.

## § 44. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ

**Плотность тока смещения в среде.** В вакууме плотность тока смещения была определена формулой (3.11). Аналогично может быть получено и выражение для плотности тока смещения в среде. Очевидно, что уравнение непрерывности (3.6) остается неизменным при наличии среды, поскольку оно выражает закон сохранения заряда. Поэтому, учитывая, что в среде  $\rho = \operatorname{div} \mathbf{D}$ , мы с помощью рассуждений и преобразований, приведших от формулы (3.10) к (3.11), для плотности тока смещения найдем следующее выражение:

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \partial \mathbf{D} / \partial t. \quad (44.1)$$

**Обобщение дифференциальной формулировки закона полного тока при наличии среды.** Закон полного тока (5.1) был обобщен для вакуума и сформулирован в виде дифференциального уравнения (5.17). Аналогичен и для среды ход рассуждений и преобразований формул, но надо лишь вместо уравнения (5.14) пользоваться первым из уравнений (3.13) и вместо уравнения (3.11) — уравнением (44.1). Тогда вместо (5.17) получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t. \quad (44.2)$$

**Уравнения Максвелла для среды.** Этими уравнениями являются уравнения (39.11) с добавлением токов смещения в соответствии с (44.2):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t; & (I) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t; & (II) \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; & (III) \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; & (IV) \end{aligned} \quad (44.3a)$$

а также материальные уравнения:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}; \quad (\text{V})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad (\text{VI}) \quad (44.36)$$

$$\mathbf{j} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{сгор}}). \quad (\text{VII})$$

Уравнения (44.3а), (44.3б) справедливы при следующих условиях:

- 1) все материальные тела, находящиеся в поле, неподвижны;
- 2) величины,  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ , характеризующие материальные свойства среды, не зависят от времени и от векторов поля;
- 3) в поле отсутствуют постоянные магниты и ферромагнитные вещества.

Если с помощью (44.3б) исключить из уравнений  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$ , то останется восемь уравнений для шести независимых переменных:  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$  (см. § 8). Единственность решения уравнений Максвелла при заданных граничных и начальных условиях доказывается рассуждениями в § 8. Более детальное доказательство здесь не приведено.

**Энергия электромагнитного поля и вектор Пойнтинга.** Основываясь на законе сохранения энергии, мы, пользуясь уравнениями (8.1) для вакуума, получили формулы (8.12) и (8.13) для энергии электромагнитного поля и вектора Пойнтинга. Проводя те же рассуждения, но пользуясь уравнениями Максвелла (44.3а), (44.3б), мы получим для этих величин в среде следующие выражения:

$$W = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV; \quad (44.4)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (44.5)$$

**Векторный и скалярный потенциалы.** В дальнейшем никакие ограничения на скорость изменения полей не накладываются. Исходим из полной системы уравнений Максвелла (44.3). Отличие от случая квазистационарных полей состоит в учете тока смещения. Однако это не вносит никаких изменений в связь напряженностей полей с потенциалами. Это непосредственно видно из вывода формул (39.12) и (39.18). Поэтому так же, как и в ква-

в стационарном случае, можно написать:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (44.6)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t. \quad (44.7)$$

**Уравнение для векторного потенциала.** Рассмотрим однородную среду ( $\mu = \text{const}$ ,  $\varepsilon = \text{const}$ ). Подставляя в уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$$

выражения (44.6) и (44.7), получаем

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu \mathbf{j} + \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left( -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right).$$

Левая часть этого уравнения может быть преобразована по формуле (П.8):

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} + \text{grad} \left( \text{div } \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (44.8)$$

**Уравнение для скалярного потенциала.** В уравнение Максвелла  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$  подставляем выражение для  $\mathbf{E}$  из (44.7). В результате для однородной среды получаем

$$\text{div} \left( -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

или

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (44.9)$$

**Неоднозначность потенциалов. Калибровочное преобразование.** Формулы (44.6) и (44.7) не позволяют однозначно ввести потенциалы, исходя из заданных векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Пусть  $\chi(\mathbf{r}, t)$  — некоторая произвольная непрерывная функция координат и времени, а  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  — потенциалы, описывающие по формулам (44.6) и (44.7) некоторое электромагнитное поле  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Утверждается, что потенциалы

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi, \quad \varphi' = \varphi - \partial \chi / \partial t \quad (44.10)$$

определяют то же самое поле  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Для доказательства найдем электромагнитное поле  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{B}'$ , соответствующее потенциалам  $\mathbf{A}'$  и  $\varphi'$  из (44.10):

$$\mathbf{B}' = \text{rot } \mathbf{A}' = \text{rot}(\mathbf{A} + \text{grad } \chi) = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot grad } \chi = \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$



Аналогично,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\text{grad } \varphi' - \partial \mathbf{A}' / \partial t = -\text{grad } (\varphi - \partial \chi / \partial t) - \\ &- \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \text{grad } \chi) = -\text{grad } \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t = \mathbf{E}, \end{aligned}$$

поскольку порядок дифференцирования по независимым переменным можно изменять.

Таким образом, потенциалы  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  описывают то же самое электромагнитное поле, что и потенциалы  $\varphi'$  и  $\mathbf{A}'$ , связанные с  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  формулами (44.10) при произвольной функции  $\chi$ . Преобразование (44.10) называется калибровочным или градиентным. Пользуясь неоднозначностью в выборе потенциалов, можно наложить на них определенные дополнительные условия.

#### § 45. КАЛИБРОВКА ПОТЕНЦИАЛОВ

**Лоренцевская калибровка.** Наложение определенных условий на потенциалы, пользуясь неоднозначностью в их выборе, называется калибровкой. Наиболее употребительными являются лоренцевская и кулоновская калибровки. Их вид подсказывается требованием максимального упрощения уравнения (44.8). Очевидно, для этого надо на потенциалы наложить условие

$$\text{div } \mathbf{A} + \epsilon \mu \partial \varphi / \partial t = 0, \quad (45.1)$$

называемое условием Лоренца, или лоренцевской калибровкой потенциала.

При этом уравнения (44.8) и (44.9) принимают такой вид:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon \mu \partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2 = -\mu \mathbf{j}, \quad (45.2)$$

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon \mu \partial^2 \varphi / \partial t^2 = -\rho / \epsilon. \quad (45.3)$$

Уравнения (45.2) и (45.3) известны в математической физике как волновые уравнения, или уравнения Даламбера.

Как видно из (45.2) и (45.3), лоренцевская калибровка удобна не только тем, что значительно упрощает уравнение (44.8), но и тем, что уравнения для векторного и скалярного потенциалов приобретают одинаковый вид.

Прежде всего надо показать, что если некоторые потенциалы  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$  удовлетворяют уравнениям (44.8) и (44.9),

то всегда найдется такая функция  $\chi$ , с помощью которой калибровочное преобразование (44.10) переводит эти уравнения в уравнения (45.2) и (45.3) для  $\mathbf{A}'$  и  $\varphi'$  и одновременно для  $\mathbf{A}'$  и  $\varphi'$  выполнены условия лоренцевской калибровки (45.1). Подставляя (44.10) в (45.2) и (45.3), видим, что для этого должно выполняться условие

$$\nabla^2 \chi - \epsilon \mu \partial^2 \chi / \partial t^2 + \operatorname{div} \mathbf{A} + \epsilon \mu \partial \varphi / \partial t = 0, \quad (45.4)$$

т. е. необходимо в качестве функции  $\chi$  выбрать такую, которая удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \chi - \epsilon \mu \partial^2 \chi / \partial t^2 = -(\operatorname{div} \mathbf{A} + \epsilon \mu \partial \varphi / \partial t). \quad (45.5)$$

При этом потенциалы  $\mathbf{A}'$ ,  $\varphi'$  удовлетворяют уравнениям вида (45.2), (45.3) и условию (45.1).

Условие Лоренца в общем случае не инвариантно относительно калибровочных преобразований (44.10). Поэтому если потенциалы  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$ , удовлетворяющие уравнениям (45.2), (45.3) и условию Лоренца (45.1), подвергнуть калибровочному преобразованию (44.10) с произвольной функцией  $\chi$ , то получающиеся уравнения для потенциалов со штрихами не совпадут с уравнениями (45.2) и (45.3), а сами потенциалы со штрихами не будут удовлетворять условию Лоренца.

Потенциалы со штрихами будут удовлетворять условиям Лоренца (45.1) и уравнениям (45.2) и (45.3) лишь в том случае, если функция  $\chi$  в таком калибровочном преобразовании является решением уравнения

$$\nabla^2 \chi - \epsilon \mu \partial^2 \chi / \partial t^2 = 0. \quad (45.6)$$

Поэтому уравнения (45.2) и (45.3) и условие Лоренца (45.1), при котором они выведены, инвариантны не относительно произвольных калибровочных преобразований (44.10), а лишь относительно тех, у которых функция  $\chi$  удовлетворяет уравнению (45.6). Это обстоятельство необходимо всегда иметь в виду при преобразовании потенциалов, входящих в уравнения (45.2) и (45.3).

**Кулоновская калибровка** выражается условием

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (45.7)$$

Уравнение (44.9) для скалярного потенциала принимает вид

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon, \quad (45.8)$$

т. е. является уравнением Пуассона для скалярного потенциала, которое является дифференциальной формулировкой закона Кулона. Этот потенциал описывает мгновенное кулоновское поле, порождаемое распределением зарядов  $\rho$ , благодаря чему калибровка называется кулоновской.

Уравнение (44.8) для векторного потенциала при кулоновской калибровке принимает следующий вид:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon\mu \partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2 = -\mu \mathbf{j} + \varepsilon\mu \text{grad } \partial\varphi / \partial t. \quad (45.9)$$

Решение уравнения (45.8) известно:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (45.10)$$

Следует обратить внимание, что в левой и правой частях этого равенства стоит одно и то же значение времени  $t$ . Дифференцируя обе части равенства по  $t$  и пользуясь уравнением непрерывности, получаем

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\text{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (45.11)$$

где штрих у операции  $\text{div}$  означает, что она производится по координатам со штрихами.

С помощью (19.7) можно написать:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (45.12)$$

Принимая во внимание (П.8), преобразуем эту формулу к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \text{rot rot} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV - \\ &- \frac{1}{4\pi} \text{grad div} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \end{aligned} \quad (45.13)$$

Сила тока представлена в виде суммы двух членов. Дивергенция первого члена равна нулю из-за тождества (П.7), а ротор второго члена равен нулю из-за тождества (П.6). Поэтому представим  $\mathbf{j}$  в виде

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_\perp + \mathbf{j}_\parallel, \quad (45.14)$$

где

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (45.15)$$

$$\mathbf{j}_{\parallel} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \operatorname{div} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (45.16)$$

причем

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_{\perp} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{j}_{\parallel} = 0, \quad (45.17)$$

где  $\mathbf{j}_{\perp}$  — поперечная составляющая тока,  $\mathbf{j}_{\parallel}$  — продольная. Интегрированием по частям с учетом того, что подинтегральное выражение исчезает на границах области интегрирования, убеждаемся, что

$$\operatorname{div} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \int \frac{\operatorname{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (45.18)$$

следовательно, формула (45.16) для продольного тока принимает вид

$$\mathbf{j}_{\parallel} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int \frac{\operatorname{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (45.19)$$

Теперь возьмем операцию градиента от обеих частей равенства (45.11):

$$\operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \operatorname{grad} \int \frac{\operatorname{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (45.20)$$

Сравнивая (45.20) с (45.19), находим

$$\mathbf{j}_{\parallel} = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (45.21)$$

Уравнение (45.9) при этом принимает вид

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2 = -\mu (\mathbf{j} - \mathbf{j}_{\parallel}) = -\mu \mathbf{j}_{\perp}, \quad (45.22)$$

т. е. векторный потенциал определяется только «поперечным» током. Благодаря этому кулоновская калибровка называется также поперечной.

Кулоновская калибровка удобна при описании поля в областях, где отсутствуют токи и заряды. При этом можно считать, что  $\varphi = 0$ , а векторный потенциал удовлетво-

рвет однородному уравнению. Поля выражают через векторный потенциал формулами

$$\mathbf{E} = -\partial A / \partial t, \quad \mathbf{B} = \text{rot } A. \quad (45.23)$$

#### § 46. ФУНКЦИЯ ГРИНА ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ И ОПЕРЕЖАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

**Функция Грина.** Как компоненты векторного потенциала, так и скалярный потенциал удовлетворяют уравнению одного и того же вида

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -f(\mathbf{r}, t), \quad (46.1)$$

где  $v^2 = 1/(\epsilon\mu)$  — скорость распространения электромагнитных волн.

В полной аналогии со сказанным в § 20 функция Грина  $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$  определяется как решение уравнения

$$\mathcal{L}G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t'); \quad \mathcal{L} = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (46.2)$$

Если эта функция будет найдена, то решение уравнения (46.1) имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t') dV' dt'. \quad (46.3)$$

Все утверждения, высказанные в § 20 о свойствах функций Грина, справедливы и в данном случае.

**Функция Грина для неограниченного пространства.** Для нахождения функции Грина для неограниченного пространства воспользуемся теорией интегралов Фурье, из которой следует, что

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\{\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega(t - t')\}} d^3k d\omega. \quad (46.4)$$

Подставляя (46.4) в (46.2), представим решение этого уравнения в виде

$$G = -\mathcal{L}^{-1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathcal{L}^{-1} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega\tau) \times \\ \times d^3k d\omega = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega\tau)}{\mathbf{k}^2 - \omega^2/v^2} d^3k d\omega, \quad (46.5)$$

причем оператор  $\mathcal{L}^{-1}$  был применен при соблюдении ус-

ловия  $\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1} = 1$ . Для удобства здесь введены обозначения:  $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{R}$ ,  $t - t' = \tau$ .

При интегрировании по  $\omega$  в точках  $\omega = \pm k$  имеются сингулярности. Правила обращения с этими сингулярностями не могут быть найдены из чисто математических соображений. Необходимо сформулировать эти правила, исходя из физических требований.

Принцип причинности требует, чтобы некоторое возмущение в какую-то точку приходило позднее, чем оно было создано в другой точке. Это означает, что функция Грина должна быть равной нулю при  $t - t' = \tau < 0$ . Представим интеграл в (46.5) в виде интеграла Коши. Учитывая, что знак мнимой экспоненты при  $\omega$  отрицателен, заключаем, что для равенства нулю функции Грина при  $\tau < 0$  необходимо обойти полюса  $\omega = \pm k$  сверху (см. рис. 32). При этом контур интегрирования замыкается в верхней полуплоскости и интеграл равен нулю, поскольку нет полюсов внутри контура. При  $\tau > 0$  контур интегрирования замыкается в нижней полуплоскости и интеграл вычисляют с помощью теоремы Коши:

$$G = \frac{v}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \sin v\tau k}{k} d^3\mathbf{k}. \quad (46.6)$$

Дальнейшие его вычисления удобно произвести в сферических координатах. После интегрирования по углам получаем

$$G = \frac{2v}{(2\pi)^2 R} \int_0^\infty \sin Rk \sin v\tau k dk. \quad (46.7)$$

Воспользовавшись формулой

$$\sin \alpha \sin \beta = [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]/2$$

и очевидным соотношением

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ikx} + e^{-ikx}) dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos kx dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos kx dk, \end{aligned} \quad (46.8)$$

вместо (46.7) получим

$$G = v\delta(v\tau - R), \quad (46.9)$$

где учтено, что  $\delta(v\tau - R)$  при  $\tau < 0$  везде равна нулю. Принимая во внимание, что

$$\delta(v\tau - R) = \frac{1}{v} \delta\left(\tau - \frac{R}{v}\right), \quad (46.10)$$

окончательно можно функцию Грина для волнового уравнения записать в виде

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v - t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (46.11)$$

Подставляя это выражение в (46.3) и производя интегрирование по  $t'$ , получим решение уравнения (46.1) в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{if(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v} - t'\right) dV' dt' = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \end{aligned} \quad (46.12)$$

Оно имеет очень простой физический смысл: вклад в потенциал в момент времени  $t$  возникает за счет состояний источника потенциала  $f(\mathbf{r}', t')$  в предшествующие моменты времени, причем время запаздывания равно  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v$ . Это означает, что  $v$  является скоростью распространения действия от источника потенциала в точку, где это действие проявляется. Поэтому выражение (46.12) называют запаздывающим потенциалом.

Из изложенного выше ясно, что величина

$$v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (46.13)$$

является скоростью распространения электромагнитных взаимодействий в среде.

Величина

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \quad (46.14)$$

является скоростью распространения электромагнитных взаимодействий в вакууме, она равна скорости света в вакууме.

При решении уравнения (46.2) для функции Грина можно было бы вместо условия, что функция Грина равна

нулю при  $t < t'$ , которое имеет ясный физический смысл, принять условие ее обращения в нуль при  $t > t'$ , что математически вполне корректно. По физическому смыслу это означает, что потенциал, создаваемый источником, возникает раньше, чем источник, т. е. как бы следствие возникает раньше причины. Поэтому такого рода предположение нуждается в дальнейшем физическом анализе, но такое решение необходимо иметь, потому что решить задачу с начальными и краевыми условиями, пользуясь только запаздывающим потенциалом, не удается.

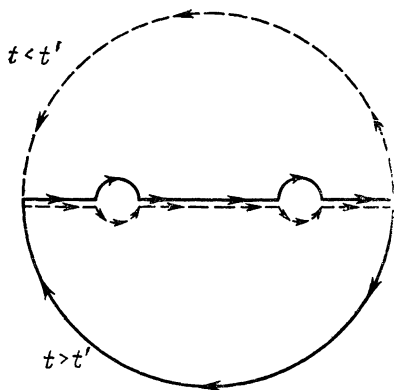


Рис. 32

Приняв вышеуказанное условие, все дальнейшие вычисления проводим точно так же, как и в первом

случае; надо лишь при интегрировании обходить полюса не сверху (рис. 32), а снизу. Этот путь обхода полюсов обозначен штрихованной линией. В результате вычислений получаем выражения, точно совпадающие с (46.11), но в аргументе  $\delta$ -функции вместо  $t - R/v - t'$  стоит  $t + R/v - t'$ . После интегрирования по  $t'$  вместо (46.12) получается формула

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{r}', t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{t'=t+R/v}} dV'. \quad (46.15)$$

Это решение называется опережающим потенциалом.

**Запаздывающие и опережающие потенциалы.** Поскольку решениями уравнения (46.1) являются (46.12) и (46.15), то решения уравнений (45.2) и (45.3) могут быть записаны в виде:

1) запаздывающих потенциалов:

$$A(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{j(x', y', z', t - r/v)}{r} dV', \quad (46.16)$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(x', y', z', t - r/v)}{r} dV', \quad (46.17)$$



где  $dV' = dx'dy'dz'$  — элемент объема интегрирования;

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} -$$

расстояние между точкой интегрирования и точкой, в которой вычисляется значение функции;

2) опережающих потенциалов:

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(x', y', z', t+r/v)}{r} dV', \quad (46.18)$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(x', y', z', t+r/v)}{r} dV'. \quad (46.19)$$

В этих формулах скорость  $v$  определяется соотношением (46.13). Наибольшее значение имеют запаздывающие потенциалы. Существование электромагнитных волн теоретически следует из того, что потенциалы электромагнитного поля удовлетворяют уравнению Даламбера, которое допускает решения в виде волн.

## § 47. ИЗЛУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

**Вибратор Герца.** Простейшими излучателями электромагнитных волн являются вибратор Герца и рамка с током. Вибратор Герца представляет собой совокупность

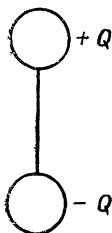


Рис. 33

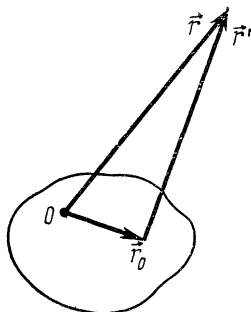


Рис. 34

двух металлических шариков, соединенных проводником (рис. 33). Если шарикам сообщить равные по значению, но противоположные по знаку заряды и предоставить эту систему самой себе, то будет происходить колебательный процесс перезарядки шариков. Между шариками по проводнику потечет ток, сила которого периодически меняется. Колебания тока будут затухающими. Однако

если сопротивление проводника мало, то в течение большого числа периодов затуханием колебаний можно пренебречь. Следовательно, на расстояниях, много больших расстояния между металлическими шариками, электромагнитное поле вибратора Герца можно описать как электромагнитное поле диполя, момент  $\mathbf{p}$  которого меняется со временем.

**Скалярный потенциал диполя, изменяющегося со временем.** Поместим начало координат в некоторую точку  $O$ , расположенную вблизи диполя (рис. 34). Радиус-вектор точки, в которой вычисляется потенциал, обозначим  $\mathbf{r}$ . По формуле (46.17) можно написать

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}_0, t - r'/c)}{r'} dV, \quad (47.1)$$

где  $dV = dx_0 dy_0 dz_0$ ;  $r'$  — расстояние от точки интегрирования до точки, в которой находится потенциал. Вычислим потенциал на больших расстояниях от заряженной системы ( $r_0/r \ll 1$ ). Учитывая, что  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ ,  $r' = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 + r_0^2}$ , можно выражение для  $r'$  разложить в ряд по  $r_0/r$  и ограничиться линейным членом разложения:

$$r' = r \left( 1 - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r^2} + \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{1/2} = r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r} + \dots \quad (47.2)$$

Пользуясь (47.2), можно подынтегральное выражение в (47.1) разложить в ряд Тейлора в точке  $r$ :

$$\begin{aligned} \frac{\rho(\mathbf{r}_0, t - r'/c)}{r'} &= \frac{\rho(\mathbf{r}_0, t - r/c)}{r} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\rho(\mathbf{r}_0, t - r/c)}{r} \right\} + \\ &+ \dots = \frac{\rho}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mathbf{r}_0 \rho}{r} \right) + \dots \end{aligned} \quad (47.3)$$

Конечно, ограничиться первым членом в разложении можно лишь тогда, когда все последующие члены разложения малы. Условие малости членов разложения будет использовано позднее при выводе критерия применимости формул.

Подставляя (47.3) в (47.1), находим

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho dV - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \int_V \mathbf{r}_0 \rho dV. \quad (47.4)$$

Интеграл в первом слагаемом правой части равен нулю ввиду нейтральности системы, а интеграл во втором слагаемом есть момент диполя:

$$\int_V \mathbf{r}_0 \rho(\mathbf{r}_0, t - r/c) dV = \mathbf{p}(t - r/c). \quad (47.5)$$

Следовательно, потенциал диполя принимает вид

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\mathbf{p}(t - r/c)}{r} \right\}. \quad (47.6)$$

Воспользовавшись формулой для дивергенции в сферических координатах, это выражение можно подставить в форме

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{div} \frac{\mathbf{p}(t - r/c)}{r}. \quad (47.7)$$

**Векторный потенциал.** Исходя из (46.16), запишем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_0, t - r'/c)}{r'} dV. \quad (47.8)$$

Подынтегральное выражение разлагаем в ряд аналогично (47.3):

$$\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_0, t - r'/c)}{r'} = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_0, t - r/c)}{r} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_0, t - r/c)}{r} \right\} + \dots,$$

в результате чего получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \mathbf{j}\left(\mathbf{r}_0, t - \frac{r}{c}\right) dV - \\ &- \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mathbf{j}}{r} \right) dV + \dots \end{aligned} \quad (47.9)$$

В данном случае токи не замкнуты и поэтому первый интеграл в правой части (47.9) не равен нулю. Он дает главную часть потенциала. Для его вычисления продифференцируем выражение (47.5) по времени:

$$\frac{\partial \mathbf{p}(t - r/c)}{\partial t} = \int_V \mathbf{r}_0 \frac{\partial \rho(\mathbf{r}_0, t - r/c)}{\partial t} dV$$

и воспользуемся уравнением непрерывности (3.6), в котором

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x_0} + \frac{\partial j_y}{\partial y_0} + \frac{\partial j_z}{\partial z_0},$$

где  $x_0$ ,  $y_0$  и  $z_0$  — компоненты радиус-вектора  $\mathbf{r}_0$ . Следовательно,

$$\partial \mathbf{p} / \partial t = - \int_V \mathbf{r}_0 \operatorname{div} \mathbf{j} dV. \quad (47.10)$$

Умножим обе части этого равенства на некоторый произвольный постоянный вектор  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} \cdot \partial \mathbf{p} / \partial t = - \int_V \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0 \operatorname{div} \mathbf{j} dV, \quad (47.11)$$

и преобразуем подинтегральное выражение по формуле векторного анализа (II.13), записанной в виде

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0 \operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{div} [\mathbf{j} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0)] - \mathbf{j} \operatorname{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0) = \operatorname{div} [\mathbf{j} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0)] - \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}.$$

Тогда

$$\mathbf{a} \cdot \partial \mathbf{p} / \partial t = - \int_V \operatorname{div} [\mathbf{j} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0)] dV + \mathbf{a} \cdot \int_V \mathbf{j} dV. \quad (47.12)$$

Первый интеграл в правой части может быть преобразован по теореме Гаусса — Остроградского:

$$\int_V \operatorname{div} [\mathbf{j} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0)] dV = \oint_S \mathbf{j} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

где  $S$  — поверхность, ограничивающая объем  $V$ . Интеграл по поверхности  $S$  равен нулю, потому что все токи расположены внутри объема  $V$  и через поверхность  $S$  не текут, т. е. плотность тока в точках на поверхности  $S$  равна нулю. Следовательно, вместо (47.12) имеется равенство

$$\mathbf{a} \cdot \partial \mathbf{p} / \partial t = \mathbf{a} \cdot \int_V \mathbf{j} dV. \quad (47.13)$$

Ввиду произвольности  $\mathbf{a}$  следует, что

$$\frac{\partial \mathbf{p} (t - r/c)}{\partial t} = \int_V \mathbf{j} \left( \mathbf{r}_0, t - \frac{r}{c} \right) dV. \quad (47.14)$$

Согласно (47.9) и (47.14) получаем окончательно для векторного потенциала выражение

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\mathbf{p}(t - r/c)}{r} \right\}. \quad (47.15)$$

**Векторный потенциал рамки с током.** В рамке токи замкнуты и для них  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ .

Из уравнения непрерывности следует, что в этом случае плотность заряда со временем не меняется. Поэтому скалярный потенциал постоянен по времени и при исследовании переменных полей нас не интересует. Векторный же потенциал в этом случае дается формулой (47.8), из которой получается формула (47.9). В случае переменного во времени диполя токи не замкнуты и в формуле (47.9) главным членом является первый, вычисление которого приводит к формуле (47.15). В случае же рамки токи замкнуты, поэтому первый интеграл в (47.9) обращается в нуль. Таким образом, векторный потенциал дается вторым членом этой формулы:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mathbf{j}}{r} \right) dV. \quad (47.16)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_0, t - r/c)}{r} &= - \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_0, t - r/c)}{r^2} - \\ &- \frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} \left( \mathbf{r}_0, t - \frac{r}{c} \right), \end{aligned}$$

можно выражение (47.16) переписать в виде

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r^3} \left\{ \mathbf{j} \left( \mathbf{r}_0, t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} \left( \mathbf{r}_0, t - \frac{r}{c} \right) \right\} dV. \quad (47.17)$$

В § 30 при переходе от (30.22) в (30.31) было показано, что

$$\int_V \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r^3} \mathbf{j} \left( \mathbf{r}_0, t - \frac{r}{c} \right) dV = \frac{\mathbf{p}_m(t - r/c) \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (47.18)$$

где  $\mathbf{p}_m$  — магнитный момент замкнутого тока, определяемый формулой (30.30). Применяя (47.18) для вычисления

интегралов (47.17), получаем

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{p}_m(t-r/c)] \times \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^2 c} \frac{\partial \mathbf{p}_m(t-r/c)}{\partial t} \times \mathbf{r}. \quad (47.19)$$

Следует отметить, что поле магнитного момента играет главную роль лишь в случае, когда излучение электрического момента системы отсутствует. Если электрический момент системы дает не равное нулю излучение, то оно играет доминирующую роль. В этом случае полем переменного магнитного момента можно всегда пренебречь. Из сравнения формул

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}_0 \times \rho \mathbf{v} dV = \frac{1}{2} \int \rho \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v} dV \quad \text{и} \quad \mathbf{p} = \int \rho \mathbf{r}_0 dV$$

следует, что

$$p_m \sim v p, \quad (47.20)$$

где  $v$  — скорость движения зарядов. Сравним между собой значения векторного потенциала диполя  $A_d$  [см. (47.15)] и векторного потенциала  $A_m$  рамки с током [см. (47.19)]. Учитывая лишь порядки величин, имеем:

$$A_d \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad A_m \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{rc} \frac{\partial p_m}{\partial t}.$$

Принимая во внимание соотношение (47.20), видим, что  $A_m \sim \frac{v}{c} A_d$ . Поэтому при малых скоростях движения зарядов ( $v \ll c$ ) всегда выполняется неравенство  $A_m \ll A_d$ . Поскольку напряженность электрического поля определяется как  $E \sim \partial A / \partial t$ , то при  $v \ll c$

$$E_m \ll E_d,$$

т. е. излучением магнитного момента можно пренебречь по сравнению с излучением дипольного момента.

**Электрическое и магнитное поля линейного осциллятора.** Линейным осциллятором или вибратором называется диполь, момент которого изменяется по закону

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 f(t),$$

где  $\mathbf{p}_0$  — постоянный вектор,  $f(t)$  — периодическая функция. Для удобства последующих вычислений целесообразно

но ввести вектор

$$\mathbf{\Pi}(t, r) \equiv \frac{\mathbf{p}_0 f(t - r/c)}{r} \equiv \mathbf{p}_0 \Phi(t, r), \quad (47.21)$$

который называется вектором Герца или поляризационным потенциалом. Он удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = 0. \quad (47.22)$$

Исходя из выражений (47.7) и (47.15) для скалярного и векторного потенциалов, получаем:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot } \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{\Pi}, \quad (47.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad div } \mathbf{\Pi} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \text{grad div } \mathbf{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{rot rot } \mathbf{\Pi}, \end{aligned} \quad (47.24)$$

где принято во внимание уравнение (47.22), использована формула (П.8) векторного анализа, учтено, что  $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$ , и по формуле (П.14)

$$\text{rot } \mathbf{\Pi} = \text{rot } \mathbf{p}_0 \Phi = \text{grad } \Phi \times \mathbf{p}_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_0. \quad (47.25)$$

Дальнейшие вычисления удобнее провести в сферической системе координат. Направим полярную ось  $Z$  сферической системы координат вдоль вектора  $\mathbf{p}_0$ , поместив начало координат в центре диполя. Полярный и азимутальный углы обозначим соответственно  $\theta$  и  $\alpha$  (рис. 35). Тогда

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_0)_r = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_0)_\theta = 0,$$

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_0)_\alpha = -r p_0 \sin \theta.$$

Поэтому

$$\text{rot}_r \mathbf{\Pi} = \text{rot}_\theta \mathbf{\Pi} = 0,$$

$$\text{rot}_\alpha \mathbf{\Pi} = -\sin \theta \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}.$$

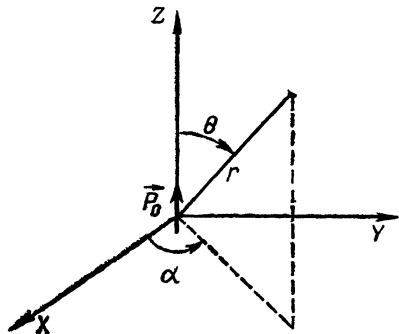


Рис. 35

Отсюда на основании (47.23) находим следующие выражения для компонент магнитного поля в сферической системе координат:

$$B_r = B_\theta = 0, \quad B_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}_\alpha \Pi = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sin \theta \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial r}. \quad (47.26)$$

Компоненты вектора электрической напряженности вычисляются с помощью формулы для ротора в сферической системе координат:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \operatorname{rot}_\alpha \Pi) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r},$$

$$E_\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \operatorname{rot}_\alpha \Pi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right),$$

$$E_\alpha = 0. \quad (47.27a)$$

Формулы (47.26) и (47.27a) показывают, что вектор напряженности электрического поля лежит в меридиональных плоскостях, а вектор напряженности магнитного поля перпендикулярен меридиональной плоскости, проведенной через соответствующую точку, причем линии индукции совпадают с параллелями сферической системы координат. Векторы напряженности электрического и магнитного полей в каждой точке взаимно перпендикулярны. Формулы (47.26) и (47.27a) справедливы при произвольном законе изменения дипольного момента со временем. Если дипольный момент изменяется по гармоническому закону

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}, \quad (47.27b)$$

то вектор Герца записывают в виде

$$\Pi = \mathbf{p}_0 \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r}. \quad (47.28)$$

Выполняя соответствующие дифференцирования в формулах (47.26) и (47.27a), находим выражения для отличных от нуля компонент напряженности электрического и магнитного полей:

$$B_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega \left( \frac{1}{r} + \frac{i\omega}{c} \right) \Pi \sin \theta,$$



$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} \right) \Pi \cos \theta, \quad (47.29)$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Pi \sin \theta.$$

Поле в непосредственной близости к осциллятору, на расстояниях, меньших длины волны  $\lambda = cT = 2\pi c/\omega$ , совпадает с полем статического диполя и тока. Наибольший интерес представляет поле в областях пространства, расстояние до точек которых много больше длины излучаемой волны, т. е. когда  $r \gg \lambda$ . Эта область пространства называется волновой зоной.

**Поле осциллятора в волновой зоне.** Расстояние  $r$  до точек волновой зоны, по определению, удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}. \quad (47.30)$$

Поэтому в (47.29) можно пренебречь  $1/r$  и  $1/r^2$  по сравнению с  $\omega/c$  и  $\omega^2/c^2$ . В результате получаются следующие выражения для компонент напряженностей поля:

$$B_\alpha = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{c} \Pi \sin \theta, \quad B_r = B_\theta = 0, \quad (47.31)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \Pi \sin \theta, \quad E_r = E_\alpha = 0.$$

В этих формулах в качестве  $\Pi$  можно взять либо действительную, либо мнимую часть выражения (47.28), например

$$\Pi = \frac{p_0 \cos \omega(t - r/c)}{r}. \quad (47.32)$$

Таким образом, окончательно электромагнитное поле излучения осциллятора в волновой зоне можно представить в виде

$$E_\theta = cB_\alpha = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\sin \theta}{r} p_0 \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right), \quad (47.33)$$

$$E_r = E_\alpha = 0, \quad B_r = B_\theta = 0.$$

Из (47.33) следует, что

$$\sqrt{\varepsilon_0} E_\theta = \sqrt{\mu_0} H_\alpha. \quad (47.34)$$

Это соотношение в гауссовой абсолютной системе единиц выглядит как равенство векторов напряженности электрического и магнитного полей. В Международной системе единиц (СИ) эти векторы имеют различные размерности и сравнивать их абсолютные значения не имеет смысла. Формулы (47.33) показывают, что в волновой зоне векторы напряженности электрического и магнитного полей направлены перпендикулярно друг другу и перпендикулярно радиус-вектору  $\mathbf{r}$ . Векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{r}$  составляют правовинтовую тройку векторов. По абсолютному значению напряженности поля убывают обратно пропорционально первой степени расстояния. Представляемая формулами (47.33) волна называется сферической. Она распространяется в направлении радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . Поверхности постоянной фазы этой волны представляют собой сферы. Фазовая скорость волны равна скорости света  $c$ . Таким образом, осциллятор излучает сферическую электромагнитную волну. На больших расстояниях от осциллятора малые участки волны являются плоскими электромагнитными волнами.

**Энергия, излучаемая осциллятором.** Поток электромагнитной энергии характеризуется вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (47.35)$$

Вычислим поток энергии через поверхность  $S$  сферы радиусом  $r$ :

$$\begin{aligned} P &= \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} d\mathbf{S} = \int_S E_\theta H_\alpha dS = \\ &= \frac{1}{16\pi^2 \varepsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3} \cos^2 \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\alpha = \\ &= \frac{1}{6\pi \varepsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3} \cos^2 \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned} \quad (47.36)$$

Это есть мощность потока энергии через поверхность сферы, т. е. энергия, отнесенная к единице времени. Эта энергия излучается осциллятором. Средняя за период

мощность излучения осциллятора, очевидно, равна

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3}. \quad (47.37)$$

Таким образом, мощность излучения осциллятора весьма сильно зависит от частоты, будучи пропорциональной четвертой степени частоты. Это означает, что для увеличения мощности излучения выгодно переходить к более коротким волнам.

Так как вектор Пойнтинга убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, а поверхность сферы растет прямо пропорционально квадрату расстояния, то поток энергии, пересекающий сферу, не изменяется с расстоянием. Таким образом, энергия без потерь переносится от осциллятора в отдаленные участки пространства в виде энергии электромагнитных волн, излучаемых осциллятором. Благодаря потере энергии на излучение колебания осциллятора должны быть затухающими. Чтобы иметь незатухающие колебания осциллятора, необходимо постоянно подводить к нему энергию извне.

#### § 48. ИЗЛУЧЕНИЕ РАМКИ С ТОКОМ

Поскольку у рамки с током нет дипольного момента и, следовательно, скалярный потенциал равен нулю, поле зависит только от векторного потенциала:

$$\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t, \quad (48.1)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (48.2)$$

Выражение для векторного потенциала рамки с током задается формулой (47.19), где два члена. Первый убывает с расстоянием как  $1/r^2$ , а второй — как  $1/r$ . В волновой зоне поле, описываемое первым членом, пренебрежимо мало по сравнению с полем, описываемым вторым членом. Поэтому в волновой зоне необходимо принимать во внимание лишь второй член.

Напряженность электрического поля на основании (48.1) равна

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cr^2} \frac{\partial^2 \mathbf{p}_m(t-r/c)}{\partial t^2} \times \mathbf{r}. \quad (48.3)$$

Представим магнитный момент рамки с током в виде

$$\mathbf{p}_m(t) = \mathbf{p}_{m0} \cos \omega t. \quad (48.4)$$

При этом условии векторный потенциал (47.19) после пренебрежения первым членом примет вид

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega}{c} \frac{\sin \omega(t-r/c)}{r^2} \mathbf{p}_{m0} \times \mathbf{r}. \quad (48.5)$$

В сферических координатах (см. рис. 35) компоненты вектор-потенциала (48.5) равны:

$$A_r = A_\theta = 0,$$

$$A_\alpha = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega}{c} p_{m0} \sin \theta \frac{\sin \omega(t-r/c)}{r}.$$

Пользуясь выражением для ротора в сферической системе координат и отбрасывая малые члены, пропорциональные  $1/r^2$ , получаем:

$$B_r = 0, \quad B_\alpha = 0,$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{c^2} p_{m0} \sin \theta \frac{\cos \omega(t-r/c)}{r}. \quad (48.6)$$

Компоненты напряженности электрического поля в сферических координатах согласно (48.3) с учетом (48.4) имеют такой вид:

$$E_r = E_\theta = 0,$$

$$E_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{c} p_{m0} \frac{\sin \theta}{r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (48.7)$$

Сравнение (48.7) с (48.6) показывает, что для отличных от нуля компонент поля имеет место соотношение

$$E_\alpha = -c B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{c} \frac{\sin \theta}{r} p_{m0} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (48.8)$$

Сравнивая эту формулу с (47.33) для диполя, мы видим, что если

$$p_{m0} = c p_0, \quad (48.9)$$

то векторы электромагнитного поля диполя и рамки находятся в следующем соотношении:

$$E_{\alpha}(\text{рамки}) = -cB_{\alpha}(\text{диполя}),$$

$$cB_{\theta}(\text{рамки}) = E_{\theta}(\text{диполя}).$$

Мощность излучения рамки с током дается формулами (47.36) и (47.37) с заменой в них дипольного момента на магнитный момент по формуле (48.9).

#### § 49. ИЗЛУЧЕНИЕ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ ЭЛЕКТРОНА. ТОРМОЖЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЕМ

**Свободные колебания упруго связанного электрона.** Пусть на электрон при его отклонении от положения равновесия действует возвращающая сила, пропорциональная отклонению. Поместив начало координат в равновесную точку и совместив ось  $Z$  с направлением отклонения электрона от положения равновесия, можно написать уравнение движения электрона в виде

$$m\ddot{z} + kz = 0. \quad (49.1)$$

Запишем решение этого уравнения:

$$z = a \sin \omega t + b \cos \omega t, \quad (49.2)$$

где  $\omega^2 = k/m$ ,  $a$  и  $b$  — произвольные постоянные. Энергия колеблющегося электрона равна

$$W = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{m\omega^2}{2} z^2 = \frac{m\omega^2}{2} (a^2 + b^2). \quad (49.3)$$

**Излучение колеблющегося электрона.** Поместим мысленно в начало координат положительный заряд, равный заряду электрона. Этот заряд неподвижен и по закону Кулона создает в пространстве постоянное во времени электрическое поле, которое убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Совокупность движущегося электрона и неподвижного положительного заряда составляет диполь, момент которого меняется со временем. Векторы электромагнитного поля излучения являются переменными и убывают обратно пропорционально первой степени расстояния. Ясно, что к излучению этого электромагнитного поля не имеет никакого отношения постоянное поле неподвижного положительного заряда,

убывающее обратно пропорционально квадрату расстояния. Поле излучения возникает за счет движения электрона, т. е. является полем излучения колеблющегося электрона. Положительный заряд помещен нами мысленно в начало координат лишь формально, для того чтобы воспользоваться формулами § 47.

Момент диполя при отклонении электрона от начала координат на  $z(t)$  равен

$$\mathbf{p}(t) = -|e|z(t)\mathbf{k}, \quad (49.4)$$

где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор в направлении оси  $Z$ . Знак минус возник за счет того, что плечо диполя есть вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному. Постоянные  $a$  и  $b$  в выражении (49.2) определяются начальными условиями. Всегда можно выбрать начало отсчета времени так, чтобы коэффициент  $a$  или  $b$  обратился в нуль. Поэтому гармоническое колебание (49.2) при подходящем выборе начала отсчета времени можно записать в виде

$$z = b \cos \omega t. \quad (49.5)$$

Подставляя это выражение для  $z$  в формулу (49.4), получаем

$$\mathbf{p} = -\mathbf{k}|e|b \cos \omega t. \quad (49.6)$$

Сравнение (49.6) с действительной частью выражения (47.276) для диполя показывает, что вектор  $\mathbf{p}_0$  в формуле (47.276) связан с величинами, характеризующими движение электрона, равенствами:

$$\mathbf{p}_0 = -\mathbf{k}|e|b, \quad |\mathbf{p}_0| = |e|b. \quad (49.7)$$

Формула (47.33), характеризующая векторы поля излучения, принимает здесь такой вид:

$$E_\alpha = E_r = 0, \quad B_r = B_\theta = 0,$$

$$cB_\alpha = E_\theta = -\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin \theta}{r} |e|b \cos \omega \left( \tau - \frac{r}{c} \right), \quad (49.8)$$

где  $\tau$  — время прихода волны на сферу радиусом  $r$ . Из формулы (49.5) следует, что

$$\ddot{z} = -\omega^2 b \cos \omega \tau, \quad (49.9)$$

поэтому формулу (49.8) можно переписать:

$$cB_{\alpha} = E_{\theta} = \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 z(\tau - r/c)}{\partial \tau^2} =$$

$$= - \frac{r e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 z(\tau - r/c)}{\partial \tau^2}, \quad (49.10)$$

где учтено, что заряд электрона отрицателен ( $e = -|e|$ ). Формула (47.36) для мощности потока энергии через поверхность сферы записывается с учетом (49.9) следующим образом:

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \left\{ \frac{\partial^2 z(\tau - r/c)}{\partial \tau^2} \right\}^2 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z}^2, \quad (49.11)$$

где  $\ddot{z} = d^2 z(t)/dt^2$ ,  $t = \tau - r/c$ .

Средняя за период мощность потока излучения колеблющегося электрона определяется из формулы (47.37):

$$\langle P \rangle = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \omega^4 b^2. \quad (49.12)$$

Это есть средняя мощность потока излучения, пересекающего сферу радиусом  $r$  в момент времени  $\tau$ . Ясно, что эта энергия была излучена колеблющимся электроном в предшествующие моменты времени.

Поэтому (49.12) характеризует скорость потерь энергии  $W$  электрона на излучение. По закону сохранения энергии, можно написать:

$$\frac{dW}{dt} = - \langle P \rangle = - \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \omega^4 b^2. \quad (49.13)$$

Из (49.3) (при  $a=0$ ) следует, что

$$b^2 = \frac{2}{m\omega^2} W.$$

Поэтому (49.13) можно переписать:

$$\frac{dW}{dt} = - \gamma W, \quad \gamma = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2 \omega^2}{mc^3}. \quad (49.14)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$W(t) = W_0 e^{-\gamma t}, \quad (49.15)$$

где  $W_0$  — энергия колеблющегося электрона в момент  $t=0$ . Из формулы (49.3), связывающей энергию колеб-

лющегося электрона с амплитудой колебания, видно, что уменьшение энергии электрона происходит по закону (49.15) в том случае, если  $a$  и  $b$  изменяются по такому закону:

$$a = a_0 e^{-\gamma t/2}, \quad b = b_0 e^{-\gamma t/2}. \quad (49.16)$$

Таким образом, с учетом потерь энергии на излучение вместо (49.2) необходимо написать:

$$z = e^{-\gamma t/2} (a_0 \sin \omega t + b_0 \cos \omega t). \quad (49.17)$$

Следовательно, с учетом излучения уравнение движения электрона (49.1) должно быть изменено и дополнено силой, характеризующей торможение электрона излучением.

**Сила торможения излучением.** Силу торможения излучением физически можно представить как реакцию со стороны поля излучения. Как будет показано дальше, электромагнитные волны обладают импульсом. По закону сохранения, импульс замкнутой системы (электрон + излучение) постоянен. Поэтому импульс электрона будет изменяться в соответствии с изменением импульса излученной им электромагнитной волны. Это эквивалентно тому, что при излучении на электрон действует сила. Поскольку в результате излучения энергия и скорость электрона уменьшаются, эта сила является тормозящей. Дополним уравнение (49.1) силой  $F$ , которая описывает торможение излучением:

$$m\ddot{z} + kz = F. \quad (49.18)$$

Умножая обе части этого уравнения на  $\dot{z}$ , получаем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{k}{2} z^2 \right) = F\dot{z}. \quad (49.19)$$

Правая часть равна работе силы торможения излучением, отнесенной к единице времени. По определению, она равна мощности излучения, определяемой формулой (49.11):

$$F\dot{z} = - \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z}^2. \quad (49.20)$$

Это равенство выражает закон сохранения энергии. В общем виде представить  $F$  в виде линейной функции от  $z$



и ее производных нельзя. Это можно сделать лишь приближенно, считая, что:

а) затухание колебаний не очень велико, так что на небольшом числе периодов движение приблизительно периодическое;

б) закон сохранения энергии достаточно сформулировать лишь в среднем по небольшому числу периодов.

Очевидное равенство

$$\ddot{z}^2 = -(\dot{z}\ddot{z}) + \frac{d}{dt}(\dot{z}\ddot{z})$$

усредним по времени с учетом только что указанных предположений. Очевидно, ввиду периодичности

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\dot{z}\ddot{z}) \right\rangle = \frac{1}{T} [(\dot{z}\ddot{z})_{t=T} - (\dot{z}\ddot{z})_{t=0}] = 0,$$

поэтому (49.20) приводит после усреднения обеих частей к заключению, что

$$\langle F\dot{z} \rangle = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \langle (\ddot{z}\ddot{z}) \rangle.$$

Это соотношение будет удовлетворено, если

$$F = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z}. \quad (49.21)$$

Таким образом, уравнение движения (49.18) с учетом силы торможения излучением

$$m\ddot{z} + kz - \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z} = 0. \quad (49.22)$$

Его решение, имеющее вид (49.17), будем искать в комплексной форме:

$$z = d e^{i\omega\gamma t}. \quad (49.23)$$

Подстановка этого выражения в (49.22) дает уравнение для определения  $\omega\gamma$ :

$$-\omega_\gamma^2 + \omega^2 + i\gamma\omega^{-2}\omega_\gamma^3 = 0, \quad (49.24)$$

где  $\omega = k/m$ ,  $\gamma = e^2\omega^2/(6\pi\epsilon_0 mc^3)$ .

По условию, затухание мало. Это означает, что для времени порядка периода колебания  $T = 2\pi/\omega$  экспоненциальный множитель в (49.16) мало отличается от единицы, т. е.

$$\gamma \ll \omega. \quad (49.25)$$

Решение уравнения (49.24) при  $\gamma = 0$  имеет вид

$$\omega_\gamma = \pm \omega. \quad (49.26)$$

При малых значениях  $\gamma$  это решение следует искать в форме

$$\omega_\gamma = \pm \omega + \varepsilon, \quad (49.27)$$

где  $\varepsilon \ll \omega$ . Подставляя (49.27) в уравнение (49.24) и пренебрегая величинами порядка  $\varepsilon^2$ ,  $\gamma\varepsilon$  и выше, получаем  $\varepsilon = i\gamma/2$ . Таким образом,

$$\omega_\gamma = \pm \omega + i\gamma/2 \quad (49.28)$$

и общее решение для  $z$  записывается в виде

$$z = e^{-\gamma t/2} (d_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t}). \quad (49.29)$$

Действительная и мнимая части этого выражения аналогичны (49.17). Выражение (49.21) для силы применимо лишь для почти периодических движений с достаточно малым затуханием. В этом случае его можно преобразовать:

$$F = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z} \approx - \frac{1}{6\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \omega^2 \dot{z}. \quad (49.30)$$

Отсюда видно, что сила торможения излучением направлена против скорости  $\dot{z}$ .

С учетом (49.30) уравнение движения (49.22) записывается как уравнение колебаний с трением:

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega^2 z = 0. \quad (49.31)$$

**Обобщение формулы излучения.** Формула (49.11) показывает, что мгновенная мощность излучения в некоторый момент времени определяется ускорением заряженной частицы в тот же момент времени. Следовательно, мощность излучения в данный момент не зависит от того, как двигалась частица до данного момента времени и как она будет двигаться после этого момента времени. Поэтому, хотя формула (49.11) и выведена для гармониче-

ского движения, она справедлива для любого движения, если только под  $\ddot{z}^2$  понимать квадрат ускорения частицы в этом движении. Отсюда заключаем, что если в произвольном движении положение частицы характеризуется ее радиус-вектором  $\mathbf{r}(t)$ , то мощность излучения этой частицы равна

$$P = \frac{dW}{dt} = - \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} (\ddot{\mathbf{r}})^2. \quad (49.32)$$

Формула справедлива для скоростей, малых по сравнению со скоростью света. Обобщение формулы на релятивистские скорости будет дано в дальнейшем.

**Условия пренебрежения реакцией излучения.** Реакцией излучения можно пренебречь в случае, если потери энергии на излучение в течение некоторого промежутка времени меньше энергии, которая может быть излучена. Пусть частица из состояния покоя движется с равномерным ускорением  $a$ . В течение времени  $\tau$  в соответствии с формулой (49.32) она излучит энергию

$$E_{\text{изл}} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2 a^2}{c^3} \tau \quad (49.33)$$

и приобретет кинетическую энергию

$$E_{\text{к}} = ma^2 \tau^2 / 2. \quad (49.34)$$

Реакция излучения в этом процессе является существенной при условии  $E_{\text{к}} \leq E_{\text{изл}}$ , т. е.

$$\tau \leq \frac{1}{3\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^3} = \frac{4}{3} \frac{r_0}{c}, \quad (49.35)$$

где  $r_0 = e^2 / (4\pi\epsilon_0 mc^2)$  — классический радиус заряженной частицы. Для электрона  $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-15}$  м и поэтому реакция излучения существенна лишь для очень малых промежутков времени ( $\tau \sim 10^{-24}$  с). Если частица находится в колебательном движении с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $A$ , то условие существенности реакции излучения

$$\frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \leq \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2 \omega_0^4 A^2}{c^3} \frac{1}{\omega_0}, \quad (49.36)$$

где  $a \sim \omega_0^2 A$ , интервал  $T \sim 1/\omega_0$ . Отсюда следует, что

$$\omega_0 \geq \frac{3}{4} \frac{c}{r_0}, \quad (49.37)$$

т. е. реакция излучения существенна для очень больших частот колебаний. В случае электрона — это круговые частоты порядка  $\omega_0 \sim 10^{24} \text{ с}^{-1}$ .

## § 50. ТЕОРИЯ ШИРИНЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ

Если бы электрон колебался без затухания и излучал в течение бесконечного промежутка времени, то излучаемая им волна стала бы строго монохроматической, т. е. имела бы строго определенную частоту. Однако электрон излучает в течение конечного промежутка времени. Если даже в течение этого конечного промежутка времени электрон колеблется со строго определенной частотой, излученную им волну нельзя считать монохроматической, так как если эту ограниченную волну разложить в интеграл Фурье, то в нем будут присутствовать всевозможные гармоники, т. е. волна, излученная в течение конечного промежутка времени, не может быть строго монохроматической. Если в процессе излучения амплитуда колебаний электрона уменьшается, то излучаемая им волна также не монохроматична. Этот случай, в сущности, сводится к предыдущему, поскольку благодаря затуханию колебания через некоторый промежуток времени практически прекращаются и, следовательно, прекращается и излучение, т. е. получается волна, излучаемая в течение конечного промежутка времени.

Вследствие немонохроматичности волны излученная энергия распределяется по всевозможным частотам. Если бы продолжительность излучения была бесконечной, то вся энергия излучения приходилась бы строго на одну частоту. Конечное время излучения приводит к тому, что энергия излучения распределена на некоторую полосу близких частот, причем, очевидно, она тем шире, чем меньше продолжительность излучения. Если такое излучение наблюдать в спектроскоп, то можно видеть некоторую линию излучения определенной ширины, состоящую из совокупности линий различных частот. Строго монохроматическая волна должна давать бесконечно узкую линию. Благодаря конечному времени излучения линия приобретает конечную ширину. К расширению спектральных линий должны приводить факторы, уменьшающие продолжительность излучения, например затухание колебаний, а также столкновения между молекулами, поскольку столкновения влияют на продолжитель-

ность излучения молекул. Проанализируем расширение спектральных линий, вызванное затуханием колебаний. Если в момент времени  $t=0$  электрон начал колебаться, то его отклонение  $z(t)$  от положения равновесия с учетом затухания дается формулой

$$z(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ e^{-\gamma t/2} (a e^{i\omega_0 t} + a^* e^{-i\omega_0 t}) & \text{при } t > 0, \end{cases} \quad (50.1)$$

где  $a^*$  — величина, комплексно сопряженная  $a$ , благодаря чему  $z(t)$  является действительной величиной;  $\omega_0$  — частота свободных колебаний электрона.

Энергия  $W$  излучения в интервале  $0 < t < \infty$  определяется на основании (49.11) формулой

$$W = \int_0^{\infty} P dt = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{z}^2 dt, \quad (50.2)$$

поскольку  $\ddot{z} = 0$  при  $t < 0$ .

Задача заключается в том, чтобы выражение (50.2) разложить в интеграл Фурье, т. е. представить его выражение в виде

$$W = \int_0^{\infty} w_{\omega} d\omega. \quad (50.3)$$

Принимая во внимание малую величину затухания, можно считать, что

$$\ddot{z} \approx \omega_0^2 z. \quad (50.4)$$

Представим теперь отклонение электрона  $z$  от положения равновесия, определяемое формулой (50.1), в виде двойного интеграла Фурье:

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} z(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} z_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (50.5a)$$

где

$$z_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} z(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi, \quad (50.5b)$$

поскольку  $z=0$  при  $\xi < 0$ . Учитывая (50.4), можно (50.2) преобразовать с помощью (50.5а):

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^4 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} z_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} z_{\xi} e^{-i\xi t} d\xi = \\
 &= \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^4 \iint_{-\infty}^{\infty} z_{\omega} z_{\xi} d\omega d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\xi)t} dt.
 \end{aligned} \tag{50.6}$$

Примем во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\xi)t} dt = 2\pi\delta(\omega+\xi), \tag{50.7}$$

где  $\delta(\omega+\xi)$  —  $\delta$ -функция. Поэтому выражение (50.6) принимает вид

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^4 \iint_{-\infty}^{\infty} z_{\omega} z_{\xi} d\omega d\xi \delta(\omega+\xi) = \\
 &= \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^4 \int_{-\infty}^{\infty} z_{\omega} z_{-\omega} d\omega,
 \end{aligned} \tag{50.8}$$

где произведено интегрирование по  $\xi$ . Поскольку

$$f(\omega) = z_{\omega} z_{-\omega} \tag{50.9}$$

является четной функцией  $\omega$ , интеграл в (50.8) сводится к интегралу по положительным значениям  $\omega$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} z_{\omega} z_{-\omega} d\omega = 2 \int_0^{\infty} z_{\omega} z_{-\omega} d\omega.$$

Поэтому

$$W = \int_0^{\infty} \frac{2}{3\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^4 z_{\omega} z_{-\omega} d\omega \equiv \int_0^{\infty} w_{\omega} d\omega, \tag{50.10}$$

где  $z_{\omega}$  определено в соотношении (50.5а), в котором  $z(\xi)$

имеет вид (50.1):

$$z_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \{ a e^{[-\gamma/2 + i(\omega_0 + \omega)]\xi} + a^* e^{[-\gamma/2 - i(\omega_0 - \omega)]\xi} \} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{a}{\gamma/2 - i(\omega_0 + \omega)} + \frac{a^*}{\gamma/2 + i(\omega_0 - \omega)} \right\}. \quad (50.11)$$

В общем виде выражение для  $z_{\omega} z_{-\omega}$  получается довольно громоздким. Однако известно, что при малом затухании, когда  $\gamma \ll \omega_0$ , спектральные линии будут узкими и, следовательно, нас могут интересовать лишь частоты вблизи  $\omega_0$ . Поэтому можно считать, что  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ . При этом условии член в (50.11), который содержит в знаменателе величину  $\omega_0 - \omega$ , по абсолютному значению много больше члена, содержащего в знаменателе величину  $\omega_0 + \omega$ . Поэтому при вычислении  $z_{\omega} z_{-\omega}$  надо сохранить лишь главные члены, содержащиеся в знаменателе  $\omega_0 - \omega$ . В результате получаем

$$z_{\omega} z_{-\omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{a^*}{\gamma/2 + i(\omega_0 - \omega)} \frac{1}{2\pi} \frac{a}{\gamma/2 - i(\omega_0 - \omega)} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \frac{a^* a}{\gamma^2/4 + (\omega_0 - \omega)^2}. \quad (50.12)$$

Следовательно, спектральная плотность энергии излучения  $\omega_{\omega}$  в (50.10), характеризующая форму спектральной линии, задается формулой

$$\omega_{\omega} = \frac{1}{6\pi^2 \epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^4 \frac{a^* a}{\gamma^2/4 + (\omega_0 - \omega)^2}. \quad (50.13)$$

Она показывает, что максимум интенсивности в спектре излучения приходится на частоту  $\omega = \omega_0$ . При удалении от этого максимума интенсивность быстро уменьшается. На расстоянии  $\omega - \omega_0 = \gamma/2$  от него интенсивность убывает в два раза (рис. 36). Таким образом, «полуширина» спектральной линии равна

$$\delta\omega = \gamma. \quad (50.14)$$

Ширина спектральной линии определяет интервал частот вблизи основной частоты  $\omega_0$ , в пределах которого излучается основная часть энергии. Формула (50.14) показывает, что ширина спектральной линии обратно пропор-

циональна продолжительности излучения. Если  $\tau_{\text{рад}}$  — время, в течение которого амплитуда колебания электрона уменьшается в  $e$  раз, то формулу (50.14) можно записать в виде

$$\delta\omega = 2/\tau_{\text{рад}}. \quad (50.15)$$

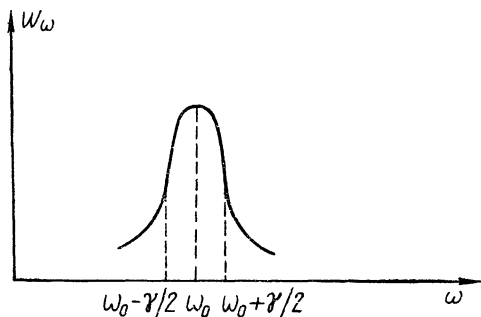


Рис. 36

## § 51. РАССЕЯНИЕ СВЕТА СВОБОДНЫМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

Пусть на свободный электрон в направлении оси  $Y$  падает плоская поляризованная волна, электрический вектор которой направлен вдоль оси  $Z$  ( $E_z = E$ ). Под действием электрического поля волны электрон придет в движение, которое описывается уравнением

$$m_0 \ddot{z} = eE(t). \quad (51.1)$$

При движении электрон, вообще говоря, испытывает со стороны электромагнитного поля волны действие силы, по порядку величины меньшей электрической силы во сколько раз, во сколько скорость электрона меньше скорости света. Поэтому при нерелятивистских скоростях движения электрона силой со стороны магнитного поля можно пренебречь.

В процессе движения, описываемого уравнением (51.1), электрон испускает электромагнитные волны, причем мощность излучения по формуле (49.11) равна

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z}^2 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \frac{e^2 E^2}{m_0^2}. \quad (51.2)$$



Направления движений излученных электроном электромагнитных волн и падающих на электрон волн отличаются. Таким образом, весь рассматриваемый процесс излучения электромагнитных волн электроном, приводимым в движение падающей электромагнитной волной, можно рассматривать как рассеяние падающих электромагнитных волн свободным электроном.

Интенсивность рассеяния характеризуется эффективным сечением рассеяния, которое определяется как площадь, которую должно иметь поперечное сечение электрона, чтобы приходящая на эту площадь энергия в падающей волне была равна рассеянной электроном энергии. Плотность потока энергии в падающей волне определяется вектором Пойнтинга:

$$S = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} E^2. \quad (51.3)$$

Это есть энергия, падающая в единицу времени на единичную площадь, перпендикулярную направлению распространения волны. Если эффективное сечение рассеяния света свободным электроном обозначить  $\sigma$ , то, по определению,

$$S\sigma = P. \quad (51.4)$$

Тогда

$$\sigma = 8\pi r_0^2/3, \quad (51.5)$$

где  $r_0 = e^2/(4\pi\epsilon_0 m_0 c^2) = 2,8 \cdot 10^{-15}$  м — классический радиус электрона.

Таким образом, если представить себе электрон в виде шарообразной частицы, которая рассеивает электромагнитные волны при их попадании на ее поверхность, то радиус электрона следовало бы принять равным  $r_0 \sqrt{8/3}$ . В действительности, конечно, при расчете предполагалась точечность электрона, представление же о его конечном размере вводится лишь для наглядности интерпретации эффективного сечения, которое характеризует интенсивность рассеяния.

## § 52. ИМПУЛЬС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ДАВЛЕНИЕ СВЕТА

**Импульс.** Рассмотрим некоторый объем  $V$ , в котором имеется электромагнитное поле, взаимодействующее с зарядом этого объема. Со стороны электромагнитного поля

на этот объем действует сила

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} dV, \quad (52.1)$$

где  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  — плотность силы Лоренца. С помощью уравнений Максвелла, записанных в виде

$$\rho \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{H} - \partial \mathbf{D} / \partial t, \quad \rho = \text{div } \mathbf{D}, \quad (52.2)$$

можно исключить величины  $\rho$  и  $\mathbf{v}$  из выражения для плотности силы Лоренца. В результате получаем

$$\mathbf{f} = \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{D} + (\text{rot } \mathbf{H}) \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B}. \quad (52.3)$$

Принимая во внимание, что

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (52.4)$$

равенство (52.3) легко преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{D} + \mathbf{H} \text{ div } \mathbf{B} + (\text{rot } \mathbf{H}) \times \mathbf{B} + (\text{rot } \mathbf{E}) \times \\ & \times \mathbf{D} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (52.5)$$

Рассмотрим, например,  $x$ -ю составляющую этой силы:

$$\begin{aligned} f_x = & E_x \text{ div } \mathbf{D} + H_x \text{ div } \mathbf{B} + [(\text{rot } \mathbf{H}) \times \mathbf{B}]_x + \\ & + [(\text{rot } \mathbf{E}) \times \mathbf{D}]_x - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B})_x. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что это выражение можно представить в виде

$$f_x = \text{div } \mathcal{F} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B})_x, \quad (52.6)$$

где компоненты вектора  $\mathcal{F}$  определяются формулами:

$$\mathcal{F}_x = D_x E_x + H_x B_x - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) / 2,$$

$$\mathcal{F}_y = D_x E_y + H_x B_y,$$

$$\mathcal{F}_z = D_x E_z + H_x B_z.$$

Учтем, что  $\mathbf{D} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} / c^2$ , где  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ .

Таким образом, составляющая по оси  $X$  силы, действующей

щей на заряды в объеме  $V$  [см. (52.1)], может быть записана в виде

$$F_x = \int_V f_x dV = \int_V \operatorname{div} \mathcal{F} dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_x dV. \quad (52.7)$$

Аналогичные выражения получаются и для составляющих силы по другим осям координат.

Сила  $\mathbf{F}$ , действующая на заряды в объеме  $V$ , сообщает ускорение этим зарядам. Обозначим полный импульс частиц в объеме  $V$  через  $\mathbf{G}^ч$ . Тогда, по закону Ньютона,

$$d\mathbf{G}^ч/dt = \mathbf{F}. \quad (52.8)$$

Поэтому выражение (52.7) принимает вид

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{G}_x^ч + \int \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_x dV) = \int_S \mathcal{F} dS \equiv F_x^{\text{пов}}, \quad (52.9)$$

где использована теорема Гаусса — Остроградского:

$$\int_V \operatorname{div} \mathcal{F} dV = \oint_S \mathcal{F} \cdot d\mathbf{S} \equiv F_x^{\text{пов}}.$$

Величина  $F_x^{\text{пов}}$  представляет собой  $x$ -ю составляющую силы, действующей на поверхность объема  $V$ . Формулы, аналогичные (52.9), получаются и для других компонент силы. Поэтому, переходя от компонент к векторам, можно вместо (52.9) написать

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{G}^ч + \mathbf{G}^{\text{поля}}) = \mathbf{F}^{\text{пов}}, \quad (52.10)$$

где

$$\mathbf{G}^{\text{поля}} = \int_V \mathbf{g} dV, \quad \mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}.$$

Формула (52.10) показывает, что если объем  $V$  является изолированной системой и к поверхности объема никаких сил не приложено ( $\mathbf{F}^{\text{пов}} = 0$ ), то

$$d\mathbf{G}^ч/dt = -d\mathbf{G}^{\text{поля}}/dt. \quad (52.11)$$

Это означает, что импульс материальных тел в объеме  $V$  изменяется в результате изменения  $\mathbf{G}^{\text{поля}}$ . Следовательно,  $\mathbf{G}^{\text{поля}}$  представляет собой импульс электромагнитного

поля, заключенного в объеме  $V$ , а вектор  $\mathbf{g}$  является плотностью импульса электромагнитного поля.

**Давление света.** Если электромагнитная волна падает на материальное тело и поглощается им, то импульс волны передается материальному телу. Это означает, что на материальное тело действует сила, проявляющаяся в виде давления (световое давление, если это световые волны). Рассчитаем это давление. Оно равно импульсу, передаваемому волной телу в единицу времени и на единицу поверхности. Следовательно, при падении электромагнитной волны по нормали к поверхности и при полном ее поглощении давление равно

$$p = c g = E H / c = \epsilon_0 E^2 = \omega, \quad (52.12)$$

где  $\omega = (ED + HB) / 2 = \epsilon_0 E^2$  — плотность энергии электромагнитного поля в электромагнитной волне. Таким образом, давление электромагнитной волны численно равно плотности энергии волны. Если поверхность тела абсолютно отражающая, то импульс волны при отражении меняется на обратный. Следовательно, поверхности абсолютно отражающего тела передается в два раза больший импульс, чем при полном поглощении волны. Следовательно, и давление будет в два раза больше, чем при полном поглощении.

Если электромагнитная волна падает на поверхность под некоторым углом, то вычисление давления производится аналогично предыдущим случаям, необходимо лишь взять составляющую импульса электромагнитной волны, перпендикулярную поверхности. Аналогично рассматривается и частичное отражение и поглощение.

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 53. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
В ДИЭЛЕКТРИКАХ

**Плоские монохроматические волны.** Электромагнитная волна называется плоской, если векторы напряженности электромагнитного поля одинаковы во всех точках любой плоскости, перпендикулярной направлению распространения волн. Таким образом, поверхностями постоянной фазы в плоской волне являются плоскости, расположенные перпендикулярно направлению распространения волны. Волна называется монохроматической, если векторы напряженности электромагнитного поля изменяются во времени по гармоническому закону с определенной частотой.

Например, если плоская электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $Z$ , то векторы напряженности поля волны имеют такой вид:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}(z) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H}(z, t) = \mathbf{H}(z) e^{i\omega t}. \quad (53.1)$$

**Уравнения для напряженностей электромагнитного поля.** Рассмотрим однородную неограниченную среду ( $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ) при отсутствии зарядов. Ее проводимость  $\gamma = 0$ . Исходными являются уравнения Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t, \quad (53.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \partial \mathbf{H} / \partial t. \quad (53.3)$$

Дифференцируя обе части уравнения (53.2) по времени и исключая в левой части полученного равенства производную  $\partial \mathbf{H} / \partial t$ , с помощью уравнения (53.3) находим

$$-\frac{1}{\mu} \text{rot rot } \mathbf{E} = \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (53.4)$$

Воспользовавшись формулой (П.8) и учитывая, что дивергенция электрического поля в однородной среде при

отсутствии зарядов равна нулю, окончательно получим вместо (53.1) уравнение

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 = 0. \quad (53.5)$$

Аналогично получается уравнение для  $\mathbf{H}$ , которое имеет вследствие симметрии уравнений (53.2) и (53.3) такой же вид, как и уравнение (53.5):

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\mu \partial^2 \mathbf{H} / \partial t^2 = 0. \quad (53.6)$$

Таким образом, напряженность электрического и магнитного полей удовлетворяет одному и тому же волновому уравнению с одной и той же скоростью распространения:

$$v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} = c/\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}. \quad (53.7)$$

**Решение в виде плоских монохроматических волн.** Совместим ось  $Z$  с направлением распространения электромагнитной волны. Векторы напряженности электромагнитного поля в этом случае выражают формулами (53.1). Рассмотрим, например, уравнение для вектора  $\mathbf{E}$ . Подставим выражение (53.1) для  $\mathbf{E}$  в уравнение (53.5) и, сокращая после дифференцирования по времени на экспоненциальный временной множитель, получим

$$d^2 \mathbf{E}(z) / dz^2 + k^2 \mathbf{E}(z) = 0, \quad k = \omega \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (53.8)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{a}_1 e^{-ikz} + \mathbf{a}_2 e^{ikz}. \quad (53.9)$$

Подставляя выражение (53.9) в (53.1), находим

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{a}_1 e^{i(\omega t - kz)} + \mathbf{a}_2 e^{i(\omega t + kz)}. \quad (53.10)$$

Первый член в правой части (53.10) представляет волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $Z$ . Это следует из того, что точка постоянной фазы

$$\omega t - kz = \text{const} \quad (53.11)$$

движется в направлении возрастающих значений  $z$ , т. е.  $z$  в (53.11) при увеличении  $t$  также увеличивается. Аналогичные соображения показывают, что второй член в (53.10) описывает волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси  $Z$ .

Решение уравнения (53.6) находится аналогично. Поэтому для векторов напряженностей электромагнитной вол-

ны, распространяющейся в положительном направлении оси  $Z$ , можно написать следующие выражения:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad \mathbf{H}(z, t) = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad (53.12)$$

где  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  — амплитуды напряженности поля.

Формулы (53.12) показывают, что плоские волны в однородном диэлектрике распространяются без изменения амплитуды, т. е. без затухания. Фазовая скорость волн находится с помощью дифференцирования уравнения (53.11) по времени:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon'\mu'}} = v. \quad (53.13)$$

Длина волны  $\lambda$  связана с  $k$  равенством

$$k = \omega \sqrt{\epsilon\mu} = \omega/v = 2\pi/\lambda. \quad (53.14)$$

Формулы (53.12) записаны при специальном выборе системы координат, когда ось  $Z$  совпадает с направлением распространения волны. От этого ограничения можно освободиться, введя волновой вектор  $\mathbf{k}$ , который по направлению совпадает с распространением волны, а по значению определяется выражением (53.8). Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $Z$ , модуль векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в любой точке плоскости, перпендикулярной оси  $Z$ , один и то же. Пусть  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор некоторой точки на такой плоскости постоянной фазы. Очевидно,  $kz = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  и, следовательно, вместо (53.12) можно написать:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (53.15)$$

Эти формулы описывают напряженность электрического и магнитного полей плоской электромагнитной волны, распространяющейся в направлении вектора  $\mathbf{k}$ . Частота волны равна  $\omega$ , а длина волны  $\lambda$  дается формулой (53.14). Для исследования свойств плоских волн подставим выражения (53.15) в уравнение Максвелла. В векторном анализе рассматривается векторный оператор  $\nabla$ , который определяется равенством

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (53.16)$$

С помощью этого оператора операции дивергенции и ротора, примененные к некоторому вектору  $\mathbf{A}$ , записывают-

ся соответственно как скалярное и векторное произведение оператора  $\nabla$  на этот вектор:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (53.17)$$

Справедливость равенств (53.17) легко проверить непосредственно с учетом (53.16). Вычисление показывает, что

$$\nabla e^{-ik \cdot \mathbf{r}} = -i\mathbf{k} e^{-ik \cdot \mathbf{r}}. \quad (53.18)$$

В случае однородного диэлектрика объемные заряды отсутствуют и, следовательно,  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ . Подставляя вместо  $\mathbf{E}$  его выражение (53.15) и учитывая (53.17) и (53.18), получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0.$$

Аналогично из уравнения Максвелла в однородной среде ( $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ ) имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{H} = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0.$$

Равенство нулю скалярных произведений

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (53.19)$$

означает, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в случае плоской волны лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.

Если в уравнение Максвелла (53.3) подставить выражения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  из (53.15), то получается соотношение

$$-i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}. \quad (53.20)$$

Пусть  $\mathbf{n}$  является единичным вектором в направлении распространения волны. Тогда на основании (53.8) можно написать

$$\mathbf{k} = n\mathbf{k} = \omega n \sqrt{\epsilon\mu}.$$

Подставляя это выражение для  $\mathbf{k}$  в (53.20), получаем соотношение

$$\sqrt{\epsilon} \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \sqrt{\mu} \mathbf{H}. \quad (53.21)$$

Отсюда видно, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны друг другу. Ранее было показано, что они оба перпендикулярны  $\mathbf{n}$ . Из равенства (53.21) следует, что векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{n}$  составляют правовинтовую тройку взаимно перпендикулярных векторов (рис. 37).



Взяв от обеих частей равенства (53.21) модули величин, получаем

$$\sqrt{\varepsilon} |\mathbf{E}| = \sqrt{\mu} |\mathbf{H}|. \quad (53.22)$$

Из (53.21) можно заключить, что в однородном диэлектрике векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в плоской волне изменяются в одной и той же фазе.

Плотность потока электромагнитной волны дается вектором Пойнтинга, который в случае плоской волны по абсолютному значению равен

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = |\mathbf{E}| |\mathbf{H}| = \\ = (\varepsilon E^2 + \mu H^2) / (2\sqrt{\varepsilon\mu}),$$

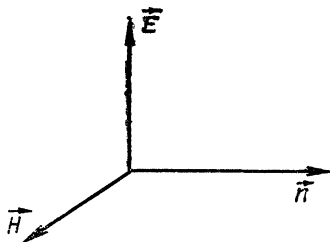


Рис. 37

где учтено равенство (53.22). Принимая во внимание, что  $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$  — фазовая скорость плоской волны, а  $(\varepsilon E^2 + \mu H^2)/2 = w$  — плотность энергии электромагнитного поля, можно выражение для вектора Пойнтинга записать в виде

$$\mathbf{S} = w\mathbf{v}. \quad (53.23)$$

Таким образом, скорость движения энергии, переносимой плоской волной в однородном диэлектрике, равна фазовой скорости волны. Согласно (53.15), плоская волна распространяется в однородном диэлектрике без изменения амплитуды, т. е. без потери энергии.

#### § 54. ПРЕЛОМЛЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ МЕЖДУ ДИЭЛЕКТРИКАМИ

Граничные условия для векторов электромагнитной волны. Задачу о преломлении и отражении плоских волн на границе между диэлектриками решают с помощью граничных условий.

Пусть две среды (рис. 38) разделены плоской границей, на которую со стороны первой среды падает электромагнитная волна. На границе эта волна частично отразится в первую среду, а частично преломится и пройдет во вторую. Таким образом, в первой среде присутствуют падающая и отраженная волны, во второй среде — преломленная.

Обозначим величины, относящиеся к падающей волне, индексом 10, к отраженной — 11, преломленной — 12. Тогда для напряженности электрического поля падающей, отраженной и преломленной волн можно написать соответственно выражения:

$$E_{10}(\mathbf{r}, t) = E_{10}^{(0)} e^{i(\omega_{10}t - \mathbf{k}_{10} \cdot \mathbf{r})}, \quad (54.1)$$

$$E_{11}(\mathbf{r}, t) = E_{11}^{(0)} e^{i(\omega_{11}t - \mathbf{k}_{11} \cdot \mathbf{r})}, \quad (54.2)$$

$$E_{12}(\mathbf{r}, t) = E_{12}^{(0)} e^{i(\omega_{12}t - \mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{r})}. \quad (54.3)$$

Аналогичный вид имеет также напряженность магнитного поля волны. Граничное условие непрерывности тан-

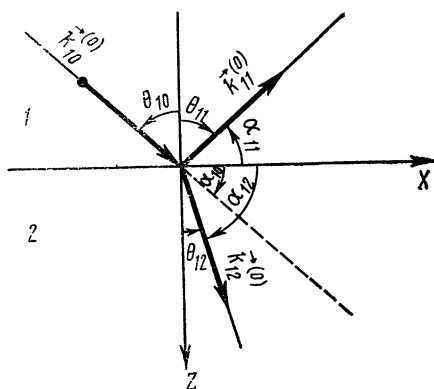


Рис. 38

генциальных составляющих вектора электрической напряженности в данном случае имеет вид

$$E_{10}^{(0)} e^{i(\omega_{10}t - \mathbf{k}_{10} \cdot \mathbf{r})} + E_{11}^{(0)} e^{i(\omega_{11}t - \mathbf{k}_{11} \cdot \mathbf{r})} = E_{12}^{(0)} e^{i(\omega_{12}t - \mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{r})}. \quad (54.4)$$

**Сохранение частоты при отражении и преломлении.**

Ради простоты запишем условие (54.4) в виде

$$a e^{i\omega_{10}t} + b e^{i\omega_{11}t} = c e^{i\omega_{12}t}, \quad (54.5)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  от времени не зависят. Дифференцируя обе части равенства по  $t$ , находим

$$i\omega_{10} a e^{i\omega_{10}t} + i\omega_{11} b e^{i\omega_{11}t} = i\omega_{12} c e^{i\omega_{12}t}. \quad (54.6)$$

Если в правой стороне этого равенства величину  $ce^{i\omega_{12}t}$  заменить ее выражением из (54.5), то получим

$$ia(\omega_{10} - \omega_{12})e^{i\omega_{10}t} = ib(\omega_{12} - \omega_{11})e^{i\omega_{11}t}. \quad (54.7)$$

Равенство (54.7) выполняется тождественно для всех значений  $t$ . Но это возможно лишь при условии

$$\omega_{10} = \omega_{11}. \quad (54.8)$$

Аналогично заменяя в равенстве (54.6) величину  $be^{i\omega_{11}t}$  ее выражением из (54.5) и повторяя только что проведенные рассуждения, получим

$$\omega_{10} = \omega_{12}. \quad (54.9)$$

Таким образом, частота волны при отражении и преломлении не изменяется:

$$\omega_{11} = \omega_{12} = \omega_{10}. \quad (54.10)$$

Покажем, что падающий, отраженный и преломленный лучи лежат в одной плоскости. В граничном условии (54.4)  $\mathbf{r}$  представляет собой радиус-вектор точки поверхности раздела. Выберем начало координат в одной из точек поверхности раздела. Тогда вектор  $\mathbf{r}$  [см. (54.4)] полностью лежит в плоскости раздела сред. В этом случае граничное условие (54.4) можно записать в виде

$$a'e^{-ik_{10}\cdot\mathbf{r}} + b'e^{-ik_{11}\cdot\mathbf{r}} = c'e^{-ik_{12}\cdot\mathbf{r}}, \quad (54.11)$$

где  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  не зависят от  $\mathbf{r}$ . Применим к обеим частям равенства (54.11) операцию

$$\mathbf{r} \cdot \nabla = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Учитывая, что

$$\mathbf{r} \cdot \nabla e^{-ik\cdot\mathbf{r}} = -ik \cdot \mathbf{r} e^{-ik\cdot\mathbf{r}}, \text{ получаем}$$

$$-ia'k_{10}\cdot\mathbf{r}e^{-ik_{10}\cdot\mathbf{r}} - ib'k_{11}\cdot\mathbf{r}e^{-ik_{11}\cdot\mathbf{r}} = -ic'k_{12}\cdot\mathbf{r}e^{-ik_{12}\cdot\mathbf{r}}. \quad (54.12a)$$

Исключая в правой части равенства (54.12a)  $c'e^{-ik_{12}\cdot\mathbf{r}}$ , с помощью (54.11) получаем соотношение

$$ia'(k_{10}\cdot\mathbf{r} - k_{12}\cdot\mathbf{r})e^{-ik_{10}\cdot\mathbf{r}} = ib'(k_{12}\cdot\mathbf{r} - k_{11}\cdot\mathbf{r})e^{-ik_{11}\cdot\mathbf{r}} \quad (54.12b)$$

Оно справедливо при произвольных векторах  $\mathbf{r}$ , лежащих в плоскости раздела, что возможно лишь при условии

$$\mathbf{k}_{10} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_{11} \cdot \mathbf{r}. \quad (54.13)$$

Если в (54.12а) заменить  $b'e^{-i\mathbf{k}_{11} \cdot \mathbf{r}}$  с помощью равенства (54.11) и провести аналогичные рассуждения, то получим соотношение

$$\mathbf{k}_{10} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{r}. \quad (54.14)$$

Таким образом,

$$\mathbf{k}_{11} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_{10} \cdot \mathbf{r}. \quad (54.15)$$

Отсюда следует, что векторы  $\mathbf{k}_{10}$ ,  $\mathbf{k}_{11}$  и  $\mathbf{k}_{12}$  лежат в одной плоскости. Действительно, вектор  $\mathbf{r}$  лежит в плоскости раздела сред, а в остальном произволен. Выберем его в направлении, перпендикулярном одному из волновых векторов, например вектору  $\mathbf{k}_{10}$ . Тогда условие (54.15) приобретает вид

$$\mathbf{k}_{10} \cdot \mathbf{r} = 0 = \mathbf{k}_{11} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{r}.$$

Но это означает, что векторы  $\mathbf{k}_{11}$  и  $\mathbf{k}_{12}$  также перпендикулярны вектору  $\mathbf{r}$ , т. е. лежат в той же плоскости, что и вектор  $\mathbf{k}_{10}$ . Таким образом, доказано, что падающий, отраженный и преломленный лучи лежат в одной плоскости.

**Соотношение между углами падения, отражения и преломления. Закон Снеллиуса.** Выберем начало системы координат на поверхности раздела диэлектриков в точке падения луча. Совместим плоскость  $XZ$  с плоскостью, в которой лежат падающий, отраженный и преломленный лучи. Ось  $Z$  направлена перпендикулярно поверхности раздела, а ось  $X$  — вдоль поверхности раздела (см. рис. 38). Пусть  $\mathbf{k}_{10}^{(0)}$ ,  $\mathbf{k}_{11}^{(0)}$  и  $\mathbf{k}_{12}^{(0)}$  — единичные векторы, характеризующие направления соответствующих лучей. Обозначения различных углов показаны на рисунке. Равенства (54.15) справедливы в произвольной системе координат с началом в точке раздела сред. Выберем начало системы координат в некоторой точке, лежащей на отрицательной части оси  $X$ . В этом случае вектор  $\mathbf{r}$  по направлению будет совпадать с положительным направлением оси  $X$ . Следовательно,

$$\mathbf{k}_{10} \cdot \mathbf{r} = k_{10}r \cos \alpha_{10}, \quad \mathbf{k}_{11} \cdot \mathbf{r} = k_{11}r \cos \alpha_{11}, \quad \mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{r} = k_{12}r \cos \alpha_{12}.$$

Поэтому равенство (54.15) принимает вид

$$k_{10} \cos \alpha_{10} = k_{11} \cos \alpha_{11} = k_{12} \cos \alpha_{12}. \quad (54.16)$$

Обозначим через  $v_{10}$ ,  $v_{11}$ ,  $v_{12}$  скорости падающей, отраженной и преломленной волн соответственно. Эти скорости связаны с волновыми числами  $k_{10}$ ,  $k_{11}$ ,  $k_{12}$  равенствами

$$k_{10} = \omega/v_{10}, \quad k_{11} = \omega/v_{11}, \quad k_{12} = \omega/v_{12}, \quad (54.17)$$

где частота всех трех волн одинакова. Поскольку падающая и отраженная волны распространяются в одной и той же среде, то

$$v_{10} = v_{11}, \quad k_{10} = k_{11}.$$

Следовательно, (54.16) дает  $\cos \alpha_{10} = \cos \alpha_{11}$ ,  $\alpha_{10} = \alpha_{11}$ , откуда

$$\theta_{10} = \theta_{11}. \quad (54.18)$$

Это означает, что угол падения равен углу отражения. Из (54.16) с учетом (54.17) следует, что

$$(1/v_{10}) \cos \alpha_{10} = (1/v_{12}) \cos \alpha_{12}. \quad (54.19)$$

Принимая во внимание соотношения  $\cos \alpha_{10} = \sin \theta_{10}$  и  $\cos \alpha_{12} = \sin \theta_{12}$ , можно равенство (54.19) преобразовать:

$$\sin \theta_{10} / \sin \theta_{12} = v_{10} / v_{12}. \quad (54.20)$$

Учитывая, что  $v_{10} = 1/\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ ;  $v_{12} = 1/\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$ , запишем (54.20) в виде

$$\sin \theta_{10} / \sin \theta_{12} = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 / \epsilon_1 \mu_1} = n_{12}, \quad (54.21)$$

т. е. отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно показателю преломления второй среды относительно первой (закон Снеллиуса).

**Соотношение между интенсивностями падающей, отраженной и преломленной волн. Формулы Френеля.** Рассмотрим нормальное падение волн на границу раздела сред. Ось  $Z$  совместим с направлением распространения падающей волны. Она направлена пер-

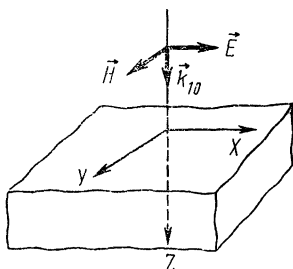


Рис. 39

пендикулярно поверхности раздела. Оси  $X$  и  $Y$  лежат в плоскости раздела сред (рис. 39). Ось  $X$  параллельна вектору  $\mathbf{E}$  падающей волны. Тогда очевидно, что ось  $Y$  параллельна вектору  $\mathbf{H}$  электромагнитной волны. Таким образом, для падающей волны

$$E_x = E_{10}^{(0)} e^{i(\omega t - k_{10} z)}, \quad E_y = E_z = 0; \quad (54.22)$$

$$H_y = \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} E_{10}^{(0)} e^{i(\omega t - k_{10} z)}, \quad H_x = H_z = 0. \quad (54.23)$$

В первом из равенств (54.23) учтено соотношение (53.22) между амплитудами магнитного и электрического векторов в плоской волне. Для преломленной волны выражения для векторов могут быть представлены в виде

$$E_x = E_{12}^{(0)} e^{i(\omega t - k_{12} z)}, \quad E_y = E_z = 0; \quad (54.24)$$

$$H_y = \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} E_{12}^{(0)} e^{i(\omega t - k_{12} z)}, \quad H_x = H_z = 0. \quad (54.25)$$

Чтобы записать выражения для векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в отраженной волне, надо учесть два обстоятельства. Во-первых, отраженная волна движется в отрицательном направлении оси  $Z$ . Во-вторых, поскольку векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и вектор в направлении распространения волны всегда составляют правовинтовую тройку взаимно перпендикулярных векторов, направление распространения волны может измениться на обратное лишь при условии, что один из векторов,  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ , изменит направление на обратное при сохранении направления другого вектора. В отраженной волне меняет направление на обратное вектор  $\mathbf{H}$ . Учитывая эти два обстоятельства, мы получим, что векторы напряженности полей в отраженной волне имеют такой вид:

$$E_x = E_{11}^{(0)} e^{i(\omega t + k_{11} z)}, \quad E_y = E_z = 0; \quad (54.26)$$

$$H_y = -\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} E_{11}^{(0)} e^{i(\omega t + k_{11} z)}, \quad H_x = H_z = 0. \quad (54.27)$$

Граничные условия непрерывности касательных составляющих напряженности электрического и магнитного полей записываются в данном случае в таком виде:

$$E_{10}^{(0)} + E_{11}^{(0)} = E_{12}^{(0)}, \quad (54.28)$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} E_{10}^{(0)} - \sqrt{\varepsilon_1} E_{11}^{(0)} = \sqrt{\varepsilon_2} E_{12}^{(0)}, \quad (54.29)$$

где для диэлектриков  $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$ .

Решение системы алгебраических уравнений (54.28), (54.29) записывается в таком виде

$$E_{12}^{(0)} = 2E_{10}^{(0)} / (1 + n_{12}), \quad (54.30)$$

$$E_{11}^{(0)} = (1 - n_{12}) E_{10}^{(0)} / (1 + n_{12}), \quad (54.31)$$

где  $n_{12} = \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1}$  — показатель преломления второй среды относительно первой.

Интенсивность волны характеризуется абсолютным значением вектора Пойнтинга:

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{\varepsilon / \mu} E^2,$$

где  $\mu \approx \mu_0$ . Поскольку в волне векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  изменяются по гармоническому закону, среднее за период значение этих векторов связано с амплитудами  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  равенствами

$$\langle E^2 \rangle = E_0^2 \langle \cos \omega t \rangle = E_0^2 / 2, \quad \langle H^2 \rangle = H_0^2 / 2.$$

Следовательно, средняя за период интенсивность  $\bar{S}$  волны связана с амплитудой волны соотношением

$$\langle |\mathbf{S}| \rangle = \bar{S} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2.$$

Заметим, что в оптическом диапазоне  $\bar{S}$  называется поверхностной плотностью лучистого потока или поверхностной плотностью потока излучения. Таким образом, для средней за период интенсивности падающей, отраженной и преломленной волн имеем следующие выражения:

$$\bar{S}_{10} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} E_{10}^{(0)2}, \quad (54.32)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} E_{11}^{(0)2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} \left( \frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}} \right)^2 E_{10}^{(0)2} = \\ &= \left( \frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}} \right)^2 \bar{S}_{10}, \end{aligned} \quad (54.33)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{12} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}} E_{12}^{(0)2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}} \left( \frac{2}{1 + n_{12}} \right) E_{10}^{(0)2} = \\ &= \frac{4n_{12}}{(1 + n_{12})^2} \bar{S}_{10}. \end{aligned} \quad (54.34)$$

Формулы (54.32) — (54.34) называют формулами Френеля. Они характеризуют соотношение интенсивностей в падающей, отраженной и преломленной волнах.

Коэффициентом отражения  $r$  называется отношение интенсивности отраженной волны к интенсивности падающей. На основании формул (54.33) и (54.32)

$$r = \frac{\bar{S}_{11}}{\bar{S}_{10}} = \left( \frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}} \right)^2. \quad (54.35)$$

Аналогично определяется коэффициент преломления  $\chi_{\text{пр}}$  как отношение интенсивности преломленной волны к интенсивности падающей:

$$\chi_{\text{пр}} = \frac{\bar{S}_{12}}{\bar{S}_{10}} = \frac{4n_{12}}{(1 + n_{12})^2}. \quad (54.36)$$

Формулы (54.32) и (54.34) показывают, что

$$\bar{S}_{11} + \bar{S}_{12} = \bar{S}_{10}. \quad (54.37)$$

Это означает, что энергия падающей волны полностью переходит в энергию отраженной и преломленной волн, т. е. при отражении и преломлении на границе диэлектриков нет превращений энергии электромагнитного поля в другие формы энергии.

## § 55. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

**Комплексная диэлектрическая восприимчивость.** В однородной неограниченной проводящей среде ( $\gamma = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $\varepsilon = \text{const}$ , причем  $\gamma \neq 0$ ) первые два уравнения Максвелла имеют такой вид:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t = \gamma \mathbf{E} + \varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t, \quad (55.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \partial \mathbf{H} / \partial t. \quad (55.2)$$

Подставляя в эти уравнения выражения для векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в виде (53.15), получаем:

$$-ik \times \mathbf{H} = i\omega [\varepsilon + \gamma / (i\omega)] \mathbf{E}, \quad (55.3)$$

$$-ik \times \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{H}. \quad (55.4)$$

Уравнение (55.3) переходит в соответствующее уравнение для диэлектриков, если положить  $\gamma = 0$ . Уравнение (55.4)



не отличается от соответствующего уравнения в случае диэлектриков. Таким образом, проводящая среда в математическом отношении отличается от диэлектрика лишь тем, что в уравнении для проводящей среды вместо абсолютной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  входит комплексная диэлектрическая проницаемость:

$$\epsilon_{\omega} = \epsilon + \gamma / (i\omega) = \epsilon - i\gamma / \omega. \quad (55.5)$$

Все последующие вычисления по форме совпадают с вычислениями, приведенными при рассмотрении плоских волн в диэлектриках, надо лишь во всех величинах вместо  $\epsilon$  подставить  $\epsilon_{\omega}$ . Таким образом, вместо действительной величины  $k$  теперь появляется комплексная величина  $k_{\omega}$ , причем

$$k_{\omega}^2 = \omega^2 \epsilon_{\omega} \mu = \omega^2 \epsilon \mu - i\omega \gamma \mu. \quad (55.6)$$

Представив  $k_{\omega}$  в виде комплексного числа:

$$k_{\omega} = k - is, \quad (55.7)$$

равенство (55.6) можно преобразовать:

$$k^2 - 2iks - s^2 = \omega^2 \epsilon \mu - i\omega \gamma \mu.$$

Приравнявая между собой действительные и мнимые части этого равенства, находим:

$$k^2 - s^2 = \omega^2 \epsilon \mu \equiv a, \quad (55.8)$$

$$2ks = \omega \gamma \mu \equiv b. \quad (55.9)$$

Решение этой алгебраической системы уравнений имеет такой вид:

$$k^2 = \frac{a}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} + 1 \right) = \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\epsilon \omega} \right)^2} + 1 \right]; \quad (55.10)$$

$$s^2 = \frac{a}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} - 1 \right) = \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\epsilon \omega} \right)^2} - 1 \right). \quad (55.11)$$

По аналогии с (53.15) запишем решение в виде плоской волны, распространяющейся в проводящей среде в поло-

жительном направлении оси  $Z$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k_\omega z)} = \mathbf{E}_0 e^{-sz} e^{i(\omega t - kz)}; \quad (55.12)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - k_\omega z)} = \mathbf{H}_0 e^{-sz} e^{i(\omega t - kz)}. \quad (55.13)$$

Таким образом, амплитуда волны уменьшается. Следовательно, в проводящей среде электромагнитная волна распространяется с затуханием.

**Глубина проникновения.** На пути

$$\Delta = 1/s \quad (55.14)$$

амплитуда волны затухает в  $e$  раз ( $\Delta$  — глубина проникновения волны в проводящую среду).

Оценим глубину проникновения при различных длинах волн. У видимого света длина волны равна  $\lambda = (0,4 - 0,75) \cdot 10^{-6}$  м, что соответствует частотам порядка  $\omega = 5 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup>. Проводимость металлов  $\gamma = 10^7$  См/м;  $\epsilon$  может быть приближенно принята равной  $\epsilon_0$ . Таким образом, в этом случае  $\gamma/(\epsilon\omega) = 2 \cdot 10^2 \gg 1$ .

При меньших частотах, т. е. при больших длинах волн, это неравенство усиливается. Следовательно, в формуле (55.11) можно везде пренебречь единицей по сравнению с  $\gamma/(\epsilon\omega)$ . Тогда

$$s = \sqrt{\omega\gamma\mu/2}.$$

Следовательно, глубина проникновения равна

$$\Delta = \sqrt{2/(\omega\gamma\mu)}. \quad (55.15)$$

Поскольку длина волны  $\lambda$  связана с частотой  $\omega$  соотношением  $\omega = 2\pi/(\lambda\sqrt{\epsilon\mu})$ , формулу (55.15) можно переписать:

$$\Delta = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi\gamma} \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/4}}, \quad (55.16)$$

где  $\sqrt{\mu/\epsilon}$  — волновое сопротивление среды. Волновое сопротивление вакуума равно

$$\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377 \text{ См.}$$

Рассмотрим в качестве примера медь, у которой  $\gamma = 5 \times 10^7$  См/м,  $\mu \approx \mu_0$ ,  $\epsilon \approx \epsilon_0$ . Для длины волны  $\lambda = 10^{-6}$  м глубина проникновения равна  $\Delta \approx 4 \cdot 10^{-9}$  м.

Таким образом, в этом случае глубина проникновения много меньше длины волны. Поэтому, строго говоря, не имеет даже смысла говорить о распространении электромагнитной волны в проводящей среде, если волна очень быстро затухает. Как видно из (55.16), это заключение остается справедливым также и для больших длин волн, так как глубина проникновения увеличивается, как корень квадратный из длины волны, т. е. медленнее, чем увеличивается длина волны.

Физической причиной такого быстрого затухания электромагнитных волн в проводящей среде является преобразование электромагнитной энергии в джоулеву теплоту: электрическая напряженность волны возбуждает токи проводимости, а при наличии токов проводимости, по закону Джоуля — Ленца, выделяется теплота.

## § 56. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

**Дисперсия.** При анализе (см. § 53 и 54) распространения и преломления света в диэлектриках предполагалось, что абсолютная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  является постоянной величиной в смысле ее независимости от координат и времени. Вопрос о возможной зависимости этой величины от частоты электромагнитных волн не возникал, поскольку обсуждались лишь монохроматические волны какой-то конкретной частоты. Все результаты § 53, 54 справедливы для конкретной частоты как при независимости, так и зависимости  $\epsilon$  от частоты. Дисперсией называется зависимость диэлектрической проницаемости от частоты. Если она зависит от частоты, то в соответствии с формулами (53.7) и (54.21) от частоты зависят скорость распространения волн и показатель преломления среды.

Формулу (54.21) удобно переписать в виде показателя преломления относительно вакуума:

$$n = \sqrt{\epsilon\mu/(\epsilon_0\mu_0)} = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0} = \sqrt{\epsilon_r}, \quad \mu \approx \mu_0. \quad (56.1)$$

Это приводит к существенному различию в распространении немонахроматических электромагнитных волн в средах без дисперсии и в средах с дисперсией. Например, если совокупность плоских электромагнитных волн распространяется в одном направлении и падает на гра-

ницу раздела между двумя средами под некоторым углом, то в среде без дисперсии преломленные волны различных частот будут распространяться в параллельных направлениях, а в случае, когда хотя бы одна из сред является диспергирующей, волны различных частот после преломления будут распространяться в различных направлениях. Совокупность волн различных частот называется некогерентной волной. Отметим, что при распространении электромагнитных волн разница между диспергирующими средами и средами без дисперсии проявляется лишь в отношении некогерентных волн. В отношении когерентных волн дисперсия по своему определению себя никак не проявляет. Прежде чем переходить к анализу распространения некогерентных волн в диспергирующей среде, необходимо кратко ознакомиться с причинами появления дисперсии и ее физической природой. Для этого надо принять во внимание колебания электронов в атомах под действием электромагнитных волн.

**Вынужденные колебания упруго связанного электрона.** При отклонении электронов в атоме от их равновесного положения возникает сила, стремящаяся вернуть их к равновесному положению. Если отклонение от положения равновесия мало, то возвращающую силу можно разложить в ряд по отклонению и ограничиться первым членом разложения, который представляет упругую силу, пропорциональную отклонению (закон Гука). Под действием такой силы электрон совершает упругие колебания с некоторой частотой  $\omega_0$ . Уравнение свободных колебаний электрона с учетом затухания имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\gamma\dot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2\mathbf{r} = 0, \quad (56.2)$$

где  $\gamma$  характеризует затухание.

Если на атом падает когерентная электромагнитная волна, то под действием электрического вектора волны возникают вынужденные колебания электрона, уравнение которых

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\gamma\dot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2\mathbf{r} = e\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}, \quad (56.3)$$

где  $E_0$  и  $\omega$  — амплитуда и частота падающей волны. Решение (56.3) дается формулой

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (56.4)$$

**Поляризация диэлектрика.** Смещение заряда  $e$  на расстояние  $\mathbf{r}$  приводит к возникновению дипольного момента

$$\mathbf{p} = e\mathbf{r} = \alpha\epsilon_0\mathbf{E}, \quad (56.5)$$

где  $\alpha = \frac{re^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$ .

Повторяя рассуждения, связанные с получением формул (25.3) — (25.6), находим для относительной диэлектрической проницаемости в данном случае выражение

$$\frac{\epsilon_\omega}{\epsilon_0} = \epsilon_{r\omega} = 1 + \alpha N = 1 + \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (56.6)$$

В плотных газах и конденсированных средах на электрон действует локальное поле, определяемое формулой (26.11). Повторяя рассуждения, приводящие к формуле (26.14), получаем

$$3(\epsilon_{r\omega} - 1)/(\epsilon_{r\omega} + 2) = \alpha N, \quad (56.7)$$

где  $\alpha$  определено в соотношении (56.5).

Разрешая это уравнение относительно  $\epsilon_{r\omega}$ , находим

$$\frac{\epsilon_\omega}{\epsilon_0} = \epsilon_{r\omega} = 1 + \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega - e^2 N / (3\epsilon_0 m)}. \quad (56.8)$$

Эта формула имеет вид (56.6), лишь квадрат частоты  $\omega_0^2$  заменен величиной  $\omega_0^2 - e^2 N / (3\epsilon_0 m)$ . В остальном они одинаковы.

Формула (56.6) показывает, что  $\epsilon_{r\omega}$  мало отличается от единицы в случае, когда

$$e^2 N / (\epsilon_0 m) \ll |\omega_0^2 - \omega^2|, \quad (56.9)$$

т. е. для разреженных газов. При этом, как и следовало ожидать, формула (56.8) переходит в (56.6).

Формулы (56.6) и (56.8) показывают, что диэлектрическая проницаемость является комплексной величиной. Следовательно, и показатель преломления  $n_\omega'$ , связанный с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{r\omega}$  формулой (56.1), является комплексной величиной. Используя для  $\epsilon_{r\omega}$  формулу (56.6), получаем

$$n_\omega'^2 = \epsilon_{r\omega} = 1 + \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (56.10)$$

Отсюда следует, что если

$$n'_{\omega} = n_{\omega} - i\xi_{\omega}, \quad (56.11)$$

то

$$n_{\omega}^2 - \xi_{\omega}^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \quad (56.12a)$$

$$2n_{\omega}\xi_{\omega} = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (56.12b)$$

Наличие мнимой части в комплексном показателе преломления связано с поглощением электромагнитной волны. Действительная часть описывает явление дисперсии.

**Нормальная дисперсия в оптической области.** В оптической области

$$\gamma^2 \omega^2 \ll (\omega_0^2 - \omega^2)^2, \quad (56.13)$$

поэтому можно считать  $\xi_{\omega} \approx 0$ . Тогда формула (56.12a) приобретает вид

$$n_{\omega}^2 = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (56.14)$$

Она получена в предположении, что имеется  $N$  электронов в единице объема с собственной частотой колебаний  $\omega_0$ . Однако в действительности не все электроны в атоме удерживаются в положении равновесия одинаковыми упругими силами и, следовательно, не все они имеют одинаковые частоты собственных колебаний. Обозначим  $N_i$  — число электронов в единице объема, собственная частота колебания которых  $\omega_{0i}$ . Тогда формулу (56.14) можно обобщить:

$$n_{\omega}^2 = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}. \quad (56.15)$$

Если показатель преломления близок к единице, что имеет место для достаточно разреженных газов ( $n_{\omega} - 1 \ll 1$ ), то из (56.15) находим

$$n_{\omega} = 1 + \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}. \quad (56.16)$$

На рис. 40 представлена дисперсионная кривая. Во всей прозрачной области показатель преломления растет с увеличением частоты. Для малых частот ( $\omega \ll \omega_{0i}$ ) формула (56.16) дает статическое значение показателя преломления:

$$n = 1 + \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2}. \quad (56.17)$$

Для очень больших частот ( $\omega \gg \omega_{0i}$ ) показатель преломления стремится к единице, оставаясь меньше, поскольку

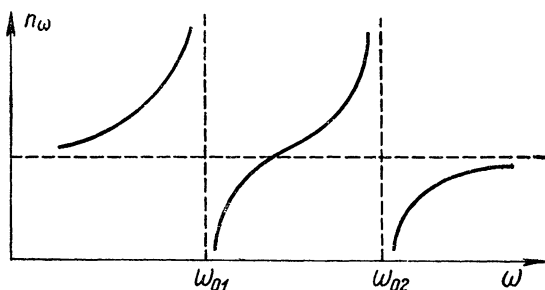


Рис. 40

все члены в сумме (56.16) отрицательны. Это означает, что для очень коротковолнового излучения диэлектрик является оптически менее плотной средой, чем вакуум, так что может наблюдаться полное отражение. Оно наблюдается для рентгеновского излучения.

Для жесткого рентгеновского излучения ( $\omega \gg \omega_{0i}$ ) формула (56.16) принимает вид

$$n_\omega = 1 - \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2} \sum_i N_i. \quad (56.18)$$

Таким образом, в этом случае характер связи электронов в атоме не играет никакой роли, а показатель преломления определяется лишь общим числом электронов.

**Аномальная дисперсия.** Дисперсионная кривая на рис. 40 получена на основании формулы (56.15), которая выведена из (56.6) при пренебрежении затуханием ( $\gamma = 0$ ). Если учесть затухание, то в точке  $\omega = \omega_{0i}$  дисперсионная кривая изменяется непрерывно, а не так, как изображено

на рис. 40. Представим показатель преломления в виде (56.11). Если  $|n_{\omega}'|$  мало отличается от единицы, то с помощью (56.6) получаем

$$n_{\omega} - i\xi_{\omega} = \sqrt{\varepsilon_{r\omega}} = 1 + \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (56.19)$$

Отсюда следует:

$$n_{\omega} = 1 + \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m} N \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \quad (56.20a)$$

$$\xi_{\omega} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m} N \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (56.20б)$$

Вид дисперсионной кривой вблизи резонансной частоты ( $\omega = \omega_0$ ) показан на рис. 41. Таким образом, вблизи ре-

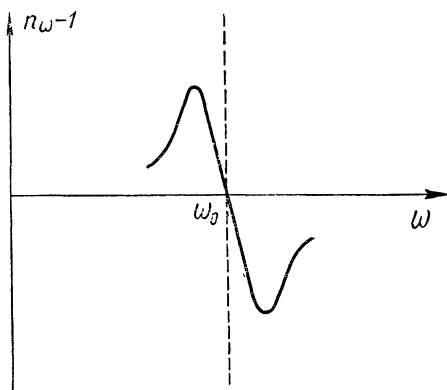


Рис. 41

зонансной частоты  $\omega_0$  показатель преломления с увеличением частоты уменьшается. Это убывание показателя преломления с увеличением частоты называется аномальной дисперсией.

**Поглощение.** В § 53 было показано, что если электрический вектор волны, распространяющейся в направлении оси  $Z$ , представить в виде

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad (56.21)$$



то волновое число  $k$  связано с диэлектрической и магнитной проницаемостями соотношением (53.8):

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = \omega \sqrt{\epsilon_r \mu_r} / c. \quad (56.22)$$

Учитывая, что для диэлектриков  $\mu_r = 1$ , и подставляя в формулу (56.22) выражение  $\sqrt{\epsilon_r}$  из (56.19), получаем

$$k = \omega n_\omega / c - i \omega \xi_\omega / c. \quad (56.23)$$

С учетом этого выражения формула (56.21) принимает вид

$$E(z, t) = E_0 e^{-\omega \xi_\omega z / c} e^{i(\omega t - \omega n_\omega z / c)}. \quad (56.24)$$

Таким образом, мнимая часть коэффициента преломления описывает затухание плоской волны в диэлектрике. Оно вызвано тем, что при прохождении через диэлектрик волна производит работу над отдельными атомами вещества: энергия волны затрачивается на возбуждение вынужденных колебаний электронов. Колеблющиеся электроны рассеивают эту приобретенную энергию по всем направлениям в виде энергии излучения.

**Группа волн, или волновой пакет.** Рассмотрим группу плоских волн, распространяющихся вдоль оси  $Z$ . Это волны с различными частотами и скоростями распространения, каждая из которых описывается формулами вида (53.12). Группа волн представляется суперпозицией плоских волн и может быть записана в виде

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_k e^{i(\omega t - kz)} dk. \quad (56.25)$$

У всех волн, входящих в группу, предполагается одинаковой поляризация. Поэтому векторный характер  $E$  можно не обозначать. Множитель  $1/\sqrt{2\pi}$  введен в (56.25) для того, чтобы согласовать эту формулу с обозначениями, используемыми в теории интегралов Фурье. В качестве независимой переменной выбрана  $k$  и для диспергирующей среды частота  $\omega$  зависит от  $k$ , т. е.  $\omega = \omega(k)$ . Величина  $E_k$  характеризует распределение волн в группе по волновым числам  $k$  и, следовательно, также и по частоте.

там. Она определяется распределением  $E(z, 0)$ :

$$E_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(z, 0) e^{ikz} dz, \quad (56.26)$$

где использована формула обращения интегралов Фурье. Если имеется строго гармоническая волна  $\exp(-ik_0z)$ , простирающаяся вдоль оси  $Z$  от  $z=-\infty$  до  $z=+\infty$ , то  $E_k = \sqrt{2\pi} \delta(k_0 - k)$ . Если имеется волновой пакет конечной длины  $\Delta z$  (рис. 42), состоящий из волн

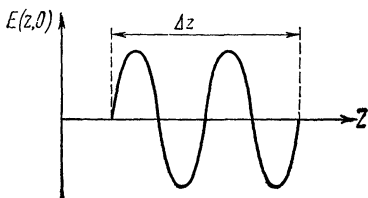


Рис. 42

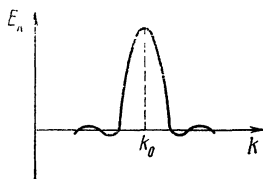


Рис. 43

$\exp(-ik_0z)$ , то он в этом случае уже не представляется монохроматической волной:

$$E_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} e^{i(k-k_0)z} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(k-k_0) \Delta z/2}{k-k_0}. \quad (56.27)$$

Максимальное значение  $E_k$ , равное  $\Delta z/\sqrt{2\pi}$ , достигается при  $k=k_0$ , а при удалении  $k$  от  $k_0$  значение  $E_k$  быстро убывает (рис. 43). Таким образом, чем длиннее волновой пакет, тем меньше область значений  $k$  вблизи  $k_0$ , в которой  $E_k$  заметно отлична от нуля, причем  $E_{k_0}$  увеличивается с ростом  $\Delta z$ . В пределе (при  $\Delta z \rightarrow \infty$ )  $E_k$  превращается в  $\delta$ -функцию. И наоборот, чем меньше размеры волнового пакета, тем шире область значения  $k$  вблизи  $k_0$ , в которой  $E_k$  заметно отлична от нуля. В пределе (при  $\Delta z \rightarrow 0$ )  $E_k$  заметно отлична от нуля для всех частот. Эта особенность волновых пакетов, или групп волн, чрезвычайно важна: чем меньше пространственная область, занимаемая волновым пакетом, тем более значителен разброс волн по волновым числам в пакете.

**Групповая скорость.** Общее движение волнового пакета или импульса в случае сильно диспергирующей среды или очень коротких импульсов дает довольно сложные и трудно обозримые результаты. Пусть импульс при распределении амплитуд по частотам имеет острый пик вблизи волнового числа  $k_0$ . Это означает, что в пространстве этот импульс достаточно широк. В этом случае функцию  $\omega(k)$  можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться первым членом по  $k - k_0$ :

$$\omega(k) \approx \omega_0 + (k - k_0) d\omega_0/dk_0, \quad (56.28)$$

где  $\omega_0 = \omega(k_0)$ ,  $d\omega/dk|_{k=k_0} = d\omega_0/dk_0$ .

Тогда формула (56.25) принимает вид

$$E(z, t) = (1^{**} \sqrt{2\pi}) \exp \{ [\omega_0 - k_0 (d\omega_0/dk_0)] t \} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} E_k \exp \left[ -ik \left( z - \frac{d\omega_0}{dk_0} t \right) \right] dk. \quad (56.29)$$

Формула (56.26) показывает, что интеграл (56.29) равен  $\sqrt{2\pi} E(z - td\omega_0/dk_0, 0)$  и, следовательно, равенство (56.29) принимает вид

$$E(z, t) \approx E \left( z - \frac{d\omega_0}{dk_0} t, 0 \right) \exp \left[ i \left( \omega_0 - k_0 \frac{d\omega_0}{dk_0} \right) t \right]. \quad (56.30)$$

Отсюда видно, что амплитуда импульса

$$|E|^2 = |E(z - td\omega_0/dk_0, 0)|^2, \quad (56.31)$$

т. е. импульс движется в первом приближении без искажения формы со скоростью

$$v_{гр} = d\omega/dk|_{k=k_0}, \quad (56.32)$$

называемой групповой. Поскольку плотность энергии в волне пропорциональна  $|E|^2$  из (56.31) и (56.32), можно заключить, что энергия, связанная с импульсом, движется с групповой скоростью импульса. В связи с этим необходимо отметить, что все предшествующие формулы были выведены в приближении (56.28). В этом приближении может случиться, например в области аномальной дисперсии, что групповая скорость будет больше скорости света, что противоречит теории относительности. Раз-

решение противоречия состоит в том, что в этой области приближение (56.28) является недостаточным и необходимо использовать более точное приближение.

**Изменение формы импульса при распространении.** Изменение формы импульса зависит от его начальной формы и вида дисперсионного уравнения  $\omega = \omega(k)$ . Необходимо конкретно задать эти данные и рассмотреть представления (56.25) и (56.26).

**Замещение волны в среде.** Входящая в среду электромагнитная волна возбуждает колебания диполей, которые излучают вторичную волну. Она распространяется со скоростью, характерной для диспергирующей среды. На некотором интервале расстояний от границы первичная волна в результате интерференции со вторичной полностью уничтожается. Таким образом, процесс сводится к тому, что падающая из вакуума электромагнитная волна на некоторой длине замещается другой волной, распространяющейся со скоростью, характерной для среды. Из-за различных фазовых скоростей падающей из вакуума волны и волны в среде между ними при прохождении расстояния  $x$  возникает разность фаз  $\Delta\varphi = \omega|n-1|x/c$ . В качестве длины замещения  $L$  можно принять расстояние, на котором происходит расстройка фаз, т. е.  $\Delta\varphi = 1$ . Отсюда следует, что

$$L = c/(\omega|n-1|) = \lambda/(2\pi|n-1|), \quad (56.33)$$

где  $\lambda$  — длина волны в вакууме.

Таким образом, для прозрачных твердых тел типа стекол ( $n = 1,5-2$ )  $L \approx (2-1) \cdot 10^{-7}$  м, а для воздуха и газов в аналогичных условиях  $L \approx 0,5$  мм. При энергичных квантах  $\gamma$ -излучения ввиду очень малых  $|n-1|$  в формуле (56.33) значение  $L$  в воздухе получается порядка метров, а при очень энергичных квантах с энергией в миллиарды электронвольт — порядка десятков и сотен метров. В межзвездной среде  $|n-1|$  чрезвычайно мало ввиду незначительной плотности электронов [см. (56.20а)]. Расчеты показывают, что для видимого света расстояние  $L$  для межзвездной среды составляет примерно два световых года. Таким образом, процесс замещения волны в ней является очень медленным и происходит на дистанциях во многие тысячи миллиардов километров.

**Дисперсия света в межзвездном пространстве.** Межзвездная среда весьма близка к вакууму, и теория дает для нее исчезающе малую дисперсию. Экспериментально

оценить верхний предел дисперсии можно с помощью наблюдения пульсаров, т. е. объектов с периодически меняющейся яркостью свечения. Периоды пульсаров составляют тысячные доли секунды. В спектре пульсаров присутствуют различные длины волн. Ясно, что при наличии дисперсии кривая изменения суммарной яркости должна была бы «смазаться». Отсутствие «смазывания» изменения яркости позволяет оценить верхний предел дисперсии.

Пусть  $c(\omega)$  — скорость волн частоты  $\omega$ ,  $\Delta t$  — продолжительность импульса,  $D$  — расстояние от пульсара до наблюдателя. Отсутствие «смазывания» импульса выражается в том, что разность времен распространения различных длин волн должна быть меньше продолжительности импульса, т. е.

$$\left| \frac{D}{c(\omega_1)} - \frac{D}{c(\omega_2)} \right| \leq \Delta t. \quad (56.34)$$

Это неравенство удобно преобразовать к виду

$$\left| \frac{c(\omega_2) - c(\omega_1)}{c} \right| \leq \frac{c\Delta t}{D}, \quad (56.35)$$

где  $c(\omega_2)c(\omega_1) \approx c^2$ . Для пульсара в крабовидной туманности известны следующие данные:  $D = 6 \cdot 10^3$  св. лет,  $\Delta t = 3 \cdot 10^{-3}$  с. Поэтому из наблюдений этого пульсара следует, что  $(\Delta c/c) < 10^{-14}$ . Учитывая, что интервал наблюдаемых частот простирается от  $4 \cdot 10^8$  до  $3 \cdot 10^{20}$  Гц, заключаем с большой точностью, что дисперсия отсутствует.

## § 57. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

**Электрическая и магнитная анизотропии.** Среда может быть анизотропной как в отношении электрических, так и магнитных свойств. Анизотропия электрических свойств (см. § 27) приводит к тому, что усложняется связь между векторами  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ . Она осуществляется с помощью тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$  формулой (27.1). Анизотропия магнитных свойств учитывается аналогично. Поэтому достаточно рассмотреть лишь одну из них. Учитывая, что наиболее широко встречается в природе и науке диэлектрическая анизотропия, целесообразно исследовать именно этот случай. Магнит-

ная анизотропия играет существенную роль, например, при распространении света в прозрачных ферритах.

**Главные оси тензора  $\epsilon_{ij}$ .** Выпишем еще раз формулу (27.6) для плотности энергии электромагнитного поля:

$$w = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \epsilon_{ij} E_i E_j. \quad (57.1)$$

Ясно, что плотность энергии в некоторой точке является инвариантом относительно вращений системы координат. Поэтому

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \epsilon_{ij} E_i E_j = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2, \quad (57.2)$$

где постоянное значение плотности энергии выражено через напряженность  $E_0$  поля в вакууме, приводящего к той же плотности энергии. Разделив обе части равенства (57.2) на  $\epsilon_0 E_0^2/2$ , можно соотношение (57.2) записать в безразмерных переменных:

$$\sum_{i,j} \epsilon'_{ij} x'_i x'_j = 1, \quad (57.3)$$

где  $\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij}/\epsilon_0$ ,  $x'_i = E_i/E_0$ .

Уравнение (57.3) определяет в координатах  $x'_i$  замкнутую поверхность, называемую эллипсоидом. Подходящим поворотом системы координат можно уравнение этой поверхности относительно новой системы координат привести к наиболее простому виду. Обозначая переменные в новых координатах теми же буквами, можно это наиболее простое уравнение поверхности записать в виде

$$\epsilon'_1 x_1'^2 + \epsilon'_2 x_2'^2 + \epsilon'_3 x_3'^2 = 1. \quad (57.4)$$

Величины  $\epsilon'_i$  связаны с  $\epsilon_i$  в (27.6) соотношениями  $\epsilon'_i = \epsilon_i/\epsilon_0$ . Это означает, что  $\epsilon'_i$  является относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{ri}$  в направлении  $i$ -й оси. Для упрощения написания она обозначается в дальнейшем  $\epsilon'_i$ .

Оси системы координат, в которой общее равенство (57.3) принимает вид (57.4), называют главными осями тензора  $\epsilon'_{ij}$ , нахождение этих осей — приведением тензора к главным осям. Как уже было сказано в § 27, величины  $\epsilon'_i$  называются главными значениями тензора, а

сам тензор, отнесенный к главным осям, принимает диагональный вид (27.4).

**Влияние анизотропии на распространение электромагнитных волн.** Зависимость векторов поля от координат и времени (см. § 53) имеет вид  $\exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ , ток и заряды предполагаются отсутствующими. Уравнения Максвелла (44.3а) с учетом сказанного в § 53 об операторе  $\nabla$  принимают такой вид:

$$-\mathbf{k} \times \mathbf{H} = \omega \mathbf{D}, \quad (\text{I})$$

$$-\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\omega \mu \mathbf{I}, \quad (\text{II})$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (\text{III}) \quad (57.5)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (\text{IV})$$

Волновой вектор  $\mathbf{k}$  перпендикулярен поверхности одинаковой фазы, т. е. показывает направление распространения волнового фронта. Фазовая скорость  $v$  волны направлена по этому вектору. Для сокращения выражений будем говорить об этом направлении как о направлении движения волны. Из (57.5.III) видно, что волна распространяется в направлении, перпендикулярном вектору  $\mathbf{D}$ . Направление распространения волны будем обозначать единичным вектором  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ . Из выражения (44.5) для вектора Пойнтинга видно, что энергия в электромагнитной волне движется в направлении, перпендикулярном вектору  $\mathbf{E}$ . Направление движения энергии в волне будем называть направлением движения луча. Понятие луча имеет ясный геометрический смысл лишь при достаточно малых длинах волн. Направление движения луча определяется однозначно во всех случаях. Как было отмечено в связи с (56.31), энергия в электромагнитных волнах распространяется с групповой скоростью. Поэтому скорость движения луча следует называть групповой. Направление луча будем обозначать единичным вектором  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{S}/P$ , где  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$  — вектор Пойнтинга.

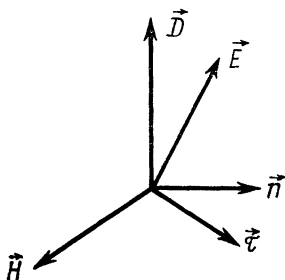


Рис. 44

В анизотропной среде векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  связаны соотношением (27.1) и не совпадают, вообще говоря, по направле-

нию. Поэтому не совпадают направления движений волны и луча и соответственно не совпадают по направлению и фазовая и лучевая скорости. В этом состоит первая особенность распространения электромагнитных волн в анизотропных средах. Вторая особенность заключается в том, что скорость электромагнитных волн зависит от направлений распространения и поляризации.

Из (57.5) и выражения для вектора Пойнтинга видно, что  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  перпендикулярны  $\mathbf{H}$ ;  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  также перпендикулярны  $\mathbf{H}$  и, кроме того,  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  перпендикулярны соответственно  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ . Это означает, что  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  лежат в одной и той же плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{H}$  (рис. 44). Очевидно, что угол между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  равен углу между  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$ .

**Зависимость фазовой скорости от направления.** Подставляя выражение для  $\mathbf{H}$  из уравнений (57.5.II) и (57.5.I) и пользуясь для разложения двойного векторного произведения формулой (П.1), получаем

$$\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} + \mu v^2 \mathbf{D} = 0, \quad (57.6a)$$

где  $v = \omega/k$ . Все дальнейшие вычисления удобно вести в системе координат, совпадающей с главными осями тензора, когда  $D_i = \varepsilon_i E_i$ . В координатах уравнение (57.6a) распадается на три скалярных уравнения:

$$n_i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - E_i(1 - \mu v^2 \varepsilon_i) = 0 \quad (i=1, 2, 3). \quad (57.6b)$$

Пусть вектор  $\mathbf{E}$  направлен по одной из главных осей тензора диэлектрической восприимчивости, например  $X_1$ . Тогда  $D_1 = \varepsilon_1 E_1$ ,  $D_2 = D_3 = 0$ ,  $E_2 = E_3 = 0$ . Очевидно, что в этом случае векторы  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  совпадают и лежат в плоскости  $(X_2, X_3)$ . Уравнения (57.6b) сводятся к одному:

$$E_1(1 - \mu v_1^2 \varepsilon_1) = 0, \quad (57.7)$$

где фазовая скорость обозначена индексом 1, показывающим, что речь идет о волне, у которой векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  направлены по оси  $X_1$ . Поскольку  $E_1 \neq 0$ , из (57.7) следует, что

$$v_1 = 1/\sqrt{\mu \varepsilon_1}, \quad (57.8)$$

т. е. фазовая скорость волны такова, как если бы волна распространялась в изотропной среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$ . Аналогичные результаты справедливы и по отношению к осям  $X_2, X_3$ . Можно сказать, что  $v_i = 1/\sqrt{\mu \varepsilon_i}$  — фазовая скорость распространения волны,



соответствующая оси  $X_i$ . Однако необходимо помнить, что это не проекция фазовой скорости на ось  $X_i$ . Скорости  $v_i$  называют главными скоростями распространения. Теперь уравнения (57.6) можно представить в виде

$$n_i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - E_i \left(1 - \frac{v^2}{v_i^2}\right) = 0, \quad (57.9)$$

где  $v_i^2 = 1/(\mu \epsilon_i)$ .

Умножим обе части этого уравнения на  $n_i/(1 - v^2/v_i^2)$  и просуммируем по  $i$ . Тогда получаем уравнение

$$\sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2 v_i^2}{v_i^2 - v^2} - 1 = 0, \quad (57.10)$$

при выводе которого учтено, что  $\sum n_i E_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$ , и произведено сокращение на этот множитель. Поскольку  $1 = \sum_i n_i^2$ , уравнение (57.10) после приведения к общему

знаменателю принимает вид

$$\sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2}{v_i^2 - v^2} = 0. \quad (57.11)$$

Это уравнение Френеля, позволяющее найти фазовую скорость в направлении, характеризуемом направляющими косинусами  $(n_1, n_2, n_3)$ . Величины  $v_i$  в этом уравнении не являются проекциями вектора  $\mathbf{v}$  на оси координат, т. е.  $n_i v \neq v_i$ . Решение уравнения (57.11) дает фазовую скорость как функцию  $\mathbf{n}$  и параметров  $v_i = 1/\sqrt{\mu \epsilon_i}$ . Удобно фазовую скорость  $v$  выразить как функцию направления вектора  $\mathbf{D}$ . Пусть  $\mathbf{d} = \mathbf{D}/D$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{D}$ . Умножая скалярно обе части (57.6) на  $\mathbf{D}$ , получим

$$-(\epsilon_1 E_1^2 + \epsilon_2 E_2^2 + \epsilon_3 E_3^2) + \mu v^2 D^2 = 0,$$

или

$$v^2 = (1/D^2) \sum_i v_i^2 D_i^2. \quad (57.12)$$

Поскольку  $d_i = D_i/D$ , то

$$v^2 = \sum_i d_i^2 v_i^2. \quad (57.13)$$

Следовательно, фазовая скорость полностью определяется направлением вектора  $\mathbf{D}$ .

Типы возможных волн. Для удовлетворения уравнения (57.11) необходимо, чтобы в левой части имелись

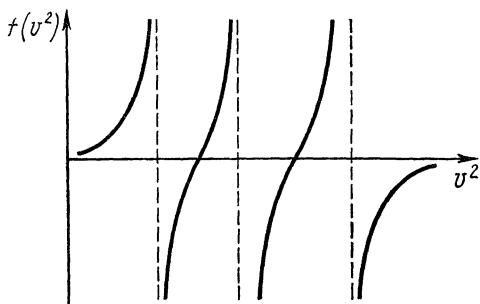


Рис. 45

члены с различными знаками. Поэтому  $v^2$  не может быть ни больше, ни меньше всех  $v_i^2$ . Чтобы найти корни, построим (рис. 45) график функции

$$f(v^2) = \sum_i \frac{n_i^2}{v_i^2 - v^2}. \quad (57.14)$$

Вертикальные пунктирные линии проведены через точки  $v_i^2$ . Как это непосредственно видно, имеются два действительных значения  $v^2$ , которые удовлетворяют уравнению (57.11). Это означает, что в заданном направлении могут распространяться волны с двумя различными фазовыми скоростями, заключенными между наименьшей и средней и средней и наибольшей из скоростей  $v_i$ . Обозначим эти фазовые скорости  $v'$  и  $v''$ . Докажем, что векторы  $\mathbf{D}'$  и  $\mathbf{D}''$  этих волн взаимно перпендикулярны. Для этого умножим соотношение (57.6) для  $\mathbf{D}'$  скалярно на  $\mathbf{D}''$  и вычтем из него почленно это же соотношение для  $\mathbf{D}''$ , умноженное скалярно на  $\mathbf{D}'$ . Тогда

$$(\mathbf{D}' \cdot \mathbf{E}'' - \mathbf{D}'' \cdot \mathbf{E}') - \mu (v'^2 - v''^2) \mathbf{D}' \cdot \mathbf{D}'' = 0. \quad (57.15)$$

Учтем, что

$$\mathbf{D}' \cdot \mathbf{E}'' = \sum_{i,j} \epsilon_{ij} E_j' E_i'' = \sum_{i,j} \epsilon_{ji} E_i'' E_j' = \mathbf{D}'' \cdot \mathbf{E}',$$

где  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ . Поэтому первый член в (57.15) равен нулю. Во втором члене  $v'^2 - v''^2 \neq 0$ , поэтому

$$\mathbf{D}' \cdot \mathbf{D}'' = 0, \quad (57.16)$$

т. е. векторы  $\mathbf{D}$  двух волн, распространяющихся в данном направлении, взаимно перпендикулярны. Отсюда сразу следует, что для каждого направления распространения в перпендикулярной ему плоскости существуют два взаимно перпендикулярных направления, в которых могут колебаться векторы  $\mathbf{D}$ . Фазовые скорости соответствующих волн различны.

**Зависимость лучевой скорости от направления.** Все результаты о направлении движения фазы и фазовой скорости были получены исходя из (57.5). Чтобы рассмотреть вопрос о движении лучей и групповой скорости  $v_{гр}$ , необходимо уравнения (57.5) преобразовать так, чтобы в формулы вошли вектор  $\boldsymbol{\tau}$  и  $v_{гр}$ . Для нахождения групповой скорости  $v_{гр}$  заметим, что фронт волны распространяется вдоль  $\mathbf{n}$ , а движение энергии происходит вдоль  $\boldsymbol{\tau}$ . Поэтому «фронт энергии» расположен перпендикулярно  $\boldsymbol{\tau}$ . Отсюда (см. рис. 44) заключаем, что групповая и фазовая скорости связаны между собой соотношением

$$(v_{гр} = v \cos(\widehat{\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}}) = v \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau},$$

где  $\widehat{\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}}$  — угол между  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$ .

Умножим уравнения (57.5.I) и (57.5.II) векторно на  $\boldsymbol{\tau}$ . Тогда

$$(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E} = -\omega \mu (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{H}), \quad (57.17)$$

$$(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{H} = \omega (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{D}). \quad (57.18)$$

Находя выражение для  $\mathbf{H}$  из (57.18) и подставляя его в (57.17), получим

$$(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E} = -\omega^2 \mu [\boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{D}] / (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k}). \quad (57.19)$$

Принимая во внимание, что  $\mathbf{k} = nk$ ,  $v = \omega/k$ ,  $v_{гр} = v(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$ , можно уравнение (57.19) переписать в виде

$$\boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{D} + [1/\mu v_{гр}^2] \mathbf{E} = 0. \quad (57.20)$$

Оно подобно уравнению (57.6a), если в последнем произвести замены:  $\mathbf{n} \rightarrow \boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ ,  $\mu v^2 \rightarrow 1/(\mu v_{гр}^2)$ . Поэтому все результаты, полученные на основании (57.6a), для

волн, могут быть переформулированы в соответствующие результаты для лучей с учетом указанной замены величин.

Пусть вектор  $\mathbf{E}$  направлен вдоль одной из главных осей. Поскольку в этом случае  $\mathbf{D}$  параллельно  $\mathbf{E}$ , получим для определения  $v_{гр}$  такое же уравнение, как и (57.7). Поэтому главные групповые скорости совпадают с главными фазовыми скоростями и даются формулами (57.8). Мы их будем обозначать не  $v_{грi}$ , а  $v_i$ . Вместо (57.9) получаем уравнение

$$\tau_i(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}) - D_i(1 - v_i^2/v_{гр}^2) = 0, \quad (57.21)$$

где  $v_i^2 = 1/(\mu \epsilon_i)$  имеет то же значение, что и в (57.9). Уравнение Френеля (57.11) принимает для лучей вид

$$\sum_{i=1}^3 \frac{v_i^2 v_i^2}{v_i^2 - v_{гр}^2} = 0. \quad (57.22)$$

Если единичный вектор в направлении  $\mathbf{E}$  обозначить  $\mathbf{l} = \mathbf{E}/E$ , то уравнение, соответствующее (57.13) для лучевой скорости, имеет вид

$$\frac{1}{v_{гр}^2} = \sum_i \frac{l_i^2}{v_i^2}. \quad (57.23)$$

Доказательство того, что скорость луча является действительно групповой, можно провести так. В уравнении Френеля (57.11) надо заменить  $v = \omega/k$  и записать его в виде

$$\sum \frac{n_i^2}{\omega^2 - v_i^2 k^2} = 0. \quad (57.24)$$

Рассматривая (57.24) как уравнение, которое в неявном виде определяет  $\omega = \omega(k)$ , и вычисляя из него  $v_{грi} = \partial\omega/\partial k_i$ , можно убедиться, что эти скорости удовлетворяют уравнению (57.22). Тем самым доказано, что скорости, входящие в (57.22), действительно являются групповыми.

Две волны, распространяющиеся в данном направлении с двумя различными лучевыми скоростями, имеют взаимно перпендикулярные направления поляризации

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}'' = 0, \quad (57.25)$$

что доказывается аналогично (57.16).

**Лучевой эллипсоид.** Произведем в уравнении (57.4) преобразование переменных:

$$x'_i = \sqrt{\varepsilon_{0i}^{\mu}} v_{\text{гр}} l_i = \sqrt{\varepsilon_{0i}^{\mu}} x_i, \quad (57.26)$$

в результате которого уравнение (57.4) принимает вид

$$\sum \varepsilon'_i x_i'^2 = v_{\text{гр}}^2 \sum \frac{l_i^2}{v_i^2} = \sum \frac{x_i^2}{v_i^2} = 1. \quad (57.27)$$

Определенный этим уравнением эллипсоид идентичен (57.4), а координаты точек его поверхности удовлетворяют уравнению (57.23). Он называется лучевым эллипсоидом.

**Анализ распространения лучей с помощью лучевого эллипсоида.** Пусть задано направление  $\tau$ , вдоль которого движется луч. Через центр лучевого эллипсоида проводим плоскость, перпендикулярную  $\tau$ . Сечением лучевого эллипсоида этой плоскостью является эллипс. Большая и малая оси эллипса определяют направления колебаний вектора  $\mathbf{E}$  двух лучей. Скорости лучей равны длинам соответствующих полуосей.

**Оптическая ось.** Если сечение лучевого эллипсоида является круговым, то оба луча, распространяющихся в перпендикулярном этому сечению направлении, имеют одинаковую скорость. Относительно лучей, распространяющихся в этом направлении, анизотропия среды никак не проявляется и среда ведет себя как изотропная. Такое направление называется оптической осью кристалла. Оптической она называется потому, что все эти явления наиболее просто наблюдаются в области длин электромагнитных волн, соответствующих видимому свету.

**Двуосные и одноосные кристаллы.** В аналитической геометрии доказано, что эллипсоид с тремя различными по значению главными осями имеет два круговых сечения. Это означает, что если у лучевого эллипсоида все скорости  $v_i$  различны, то соответствующий кристалл имеет две различные оптические оси. Такие кристаллы называют двуосными.

Если у лучевого эллипсоида равны между собой две главные оси, то он является эллипсоидом вращения вокруг третьей оси. В этом случае имеется только одна

оптическая ось, совпадающая с осью вращения. Соответствующие кристаллы называют одноосными.

Если у лучевого эллипсоида все оси равны, то он превращается в сферу. Соответствующий кристалл является оптически изотропным.

**Лучевая поверхность.** Можно также рассматривать распространение лучей с помощью уравнения Френеля (57.22). Для этого перейдем к новым переменным

$$\mathbf{r} = \tau \mathbf{v}_{\text{гр}}, \quad r_i = x_i = \tau_i v_{\text{гр}}, \quad (57.28)$$

в которых (57.22) имеет следующий вид:

$$\sum_i \frac{x_i^2 v_i^2}{r^2 - v_i^2} = 0. \quad (57.29)$$

Поверхность четвертого порядка, определяемая этим уравнением, называется лучевой. В этих переменных расстояние  $r$  от начала координат до соответствующей точки поверхности является лучевой скоростью луча, распространяющегося в направлении  $\mathbf{r}$ . В каждом направлении лучевая поверхность встречается два раза, что соответствует наличию двух скоростей распространения в каждом направлении. Рассмотрим сечение этой поверхности координатными плоскостями, например  $(X_1, X_2)$ . Уравнение плоскости  $X_3 = 0$ . При этом условии уравнение (57.29) распадается на два:

$$\frac{x_1^2 v_1^2}{r^2 - v_1^2} + \frac{x_2^2 v_2^2}{r^2 - v_2^2} = 0 \quad \text{при} \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad (57.30a)$$

$$x_1^2 + x_2^2 = v_3^2. \quad (57.30b)$$

Первое уравнение после элементарных преобразований принимает вид

$$x_1^2/v_2^2 + x_2^2/v_1^2 = 1. \quad (57.31)$$

Таким образом, лучевая поверхность пересекает координатную плоскость по эллипсу (57.31) и окружности (57.30b). Их взаимное расположение определяется соотношением скоростей  $v_1, v_2, v_3$ . При  $v_3 < v_1 < v_2$  сечения имеют вид, показанный на рис. 46. Если  $v_3 < v_2 < v_1$ , то эллипс будет вытянут вдоль оси  $X_2$ . Сечения при  $v_1 < v_3 < v_2$  показаны на рис. 47. В случае  $v_2 < v_3 < v_1$

эллипс вытягивается вдоль оси  $X_2$ . При  $v_1 < v_2 < v_3$  картина сечений изображена на рис. 48. Как и в предыдущем, при  $v_2 < v_1 < v_3$  эллипс вытягивается вдоль оси  $X_2$ . Нетрудно видеть, что окружность описывает скорости того луча, электрический вектор которого колеблется

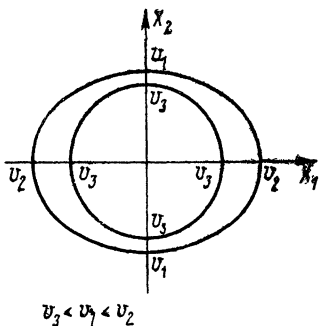


Рис. 46

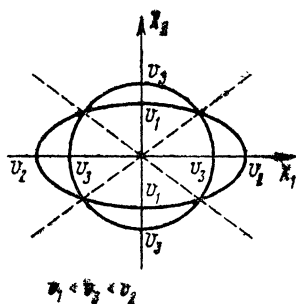


Рис. 47

вдоль главной оси, перпендикулярной рассматриваемой плоскости, в данном случае главной оси  $X_3$ . Электрический вектор луча, описываемого эллипсом, колеблется в плоскости, в данном случае  $X_1X_2$ . Таким образом, при неравных  $v_1, v_2, v_3$  сечения лучевого эллипсоида тремя координатными поверхностями имеют вид, изображенный на рис. 46—48. Поскольку оптическая ось определяется равенством скоростей обоих лучей в направлении оси, она может быть найдена построением, указанным на рис. 47, где оптические оси изображены пунктирными прямыми линиями. В случае различных  $v_1, v_2, v_3$  имеются две оптические оси.

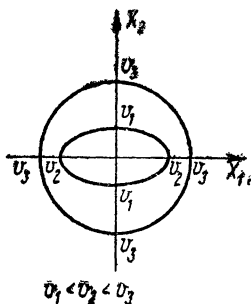


Рис. 48

У одноосного кристалла две оси лучевого эллипсоида равны между собой. Пусть для определенности  $v_1 = v_2$ . Тогда возможны два случая. При  $v_3 > v_1 = v_2$  лучевой эллипсоид сплюснут вдоль оси  $X_3$ , при  $v_3 < v_1 = v_2$  вытянут. Сечения эллипсоида в координатных плоскостях в этих случаях изображены на рис. 49 и рис. 50. Оптическая ось совпадает с главной осью лучевого эллипсоида.

Кристаллы, для которых  $v_3 < v_1 = v_2$ , называют положительными, а для которых  $v_3 > v_1 = v_2$  — отрицательными.

**Построение Гюйгенса.** При падении луча на поверхность одноосного кристалла он разделяется на два из-за

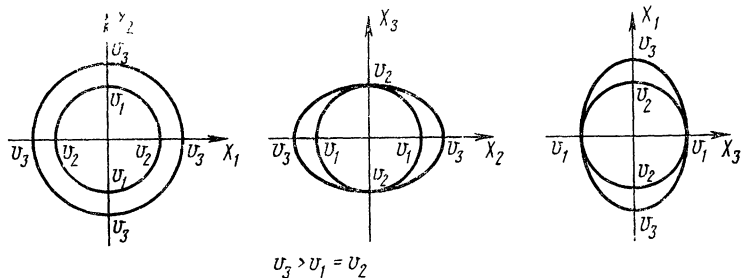


Рис. 49

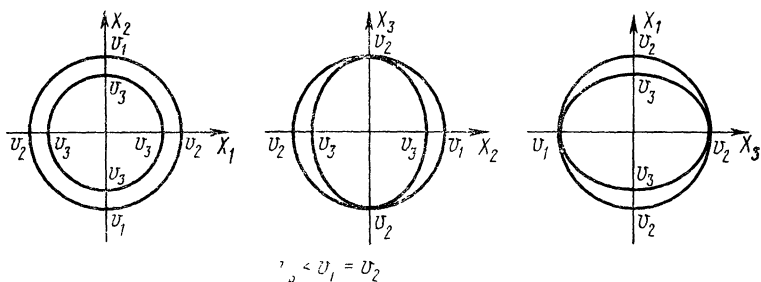


Рис. 50

различия в показателях преломления двух лучей, которые могут распространяться в кристалле. Метод нахождения этих лучей проводится с помощью очевидного построения (рис. 51), которое называется построением Гюйгенса.

На этом рисунке изображен случай положительного кристалла. Построение для отрицательных кристаллов аналогично. Скорость  $v_0$  луча вне кристалла вычерчивается в тех же масштабах, что и сечения лучевой поверхности.

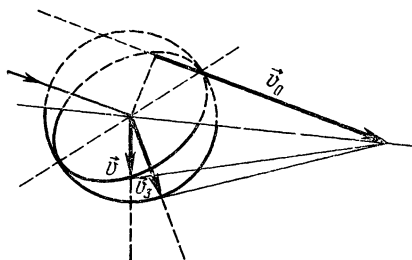


Рис. 51



## § 58. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ ВДОЛЬ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧ

Из закона сохранения энергии следует, что работа в некоторой области пространства, совершаемая электромагнитным полем, может происходить либо за счет уменьшения его энергии в этой области пространства, либо за счет притока энергии в эту область извне. Поток электромагнитной энергии определяется вектором Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (58.1)$$

Если по проводам передается энергия, то это может осуществляться лишь за счет движения энергии электромагнитного поля, связанного с электрическим током, при этом провода играют роль направляющих, вдоль которых распространяется электромагнитная энергия.

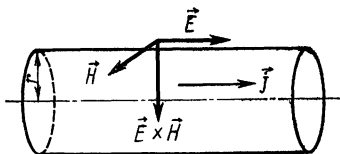


Рис. 52

Пусть имеется длинный прямой провод с радиусом сечения  $r$ , вдоль которого течет постоянный ток плотностью  $j$  (рис. 52). При отсутствии сторонних сил  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ , поэтому напряженность электрического поля направлена вдоль оси проводника и равна

$$\mathbf{E} = j/\gamma. \quad (58.2)$$

Вследствие непрерывности тангенциальных составляющих напряженности электрического поля такое же поле существует вблизи поверхности вне проводника.

Напряженность магнитного поля вблизи поверхности проводника перпендикулярна вектору  $\mathbf{j}$  и направлена по касательной к поверхности проводника. По абсолютному значению она равна

$$H = j\pi r^2 / (2\pi r) = jr/2. \quad (58.3)$$

Таким образом, вектор Пойнтинга (58.1) направлен по радиусу к центру проводника и равен

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}H = j^2 r / (2\gamma). \quad (58.4)$$

Следовательно, электромагнитная энергия втекает в проводник из окружающего пространства через его боковую

поверхность. На участке проводника длиной  $l$  за единицу времени в проводник втекает энергия

$$P = S \cdot 2\pi r l = j^2 \pi r^2 l / \gamma. \quad (58.5)$$

С другой стороны известно, что, по закону Джоуля — Ленца, на длине  $l$  проводника выделяется в единицу времени количество теплоты

$$P_{\text{дж}} = j^2 \pi r^2 l / \gamma. \quad (58.6)$$

Сравнение (58.5) и (58.6) показывает, что при прохождении электрического тока вся выделяемая в виде теплоты энергия поступает в проводник из окружающего его

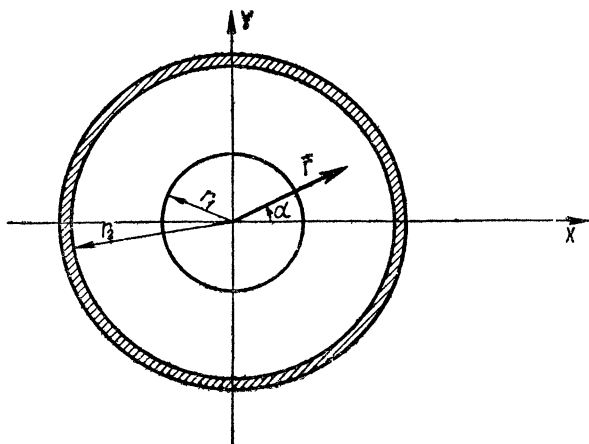


Рис. 53

пространства. Этот пример наводит на мысль о том, что энергия, передаваемая током по проводам, движется в основном в пространстве, окружающем провода. Они играют роль направляющих, вдоль которых эта энергия передается. Особенно ясно это видно на примере передачи энергии с помощью кабеля (рис. 53).

По центральному проводу и оболочке кабеля ток движется в противоположных направлениях. Между центральной жилой и оболочкой находится диэлектрик. Для упрощения задачи предположим, что кабель не обладает электрическим сопротивлением, так что вдоль него энергия передается без потерь. Поскольку потерь энергии нет,

потенциал вдоль кабеля не изменяется. Все падение потенциала  $U$  происходит на потребителе энергии. Следовательно, разность потенциалов между жилой и оболочкой кабеля равна  $U$ . Отсюда следует, что между жилой и оболочкой кабеля имеется электрическое поле. Из-за аксиальной симметрии задачи составляющая этого поля  $E_\alpha$  равна нулю. Линии индукции являются концентрическими окружностями с центром на оси кабеля. Поскольку потери энергии в кабеле отсутствуют, никакого потока энергии в жилу и оболочку из пространства между ними нет, т. е. радиальная составляющая вектора Пойнтинга равна нулю. Это означает, что  $E_z = 0$ . Поэтому уравнение Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) = 0 \quad (58.7)$$

дает следующее выражение для  $E_r$ :

$$E_r = a_0/r, \quad (58.8)$$

где  $a_0$  определяется разностью потенциалов

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = a_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = a_0 \ln \frac{r_2}{r_1}$$

между жилой и оболочкой. Следовательно,

$$E_r = \frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r}. \quad (58.9)$$

Напряженность магнитного поля в кабеле равна

$$H_\alpha = I/(2\pi r), \quad (58.10)$$

поэтому вектор Пойнтинга имеет вид

$$S_z = E_r H_\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{UI}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r^2}. \quad (58.11)$$

Таким образом, в пространстве между жилой и оболочкой электромагнитная энергия движется вдоль кабеля. Плотность потока энергии определяется формулой (58.11). Вне кабеля напряженность равна нулю и электромагнитная энергия отсутствует. Следовательно, полный поток  $S_z$  электромагнитной энергии через поперечное сечение

кабеля равен

$$P = \int_S S_z dS = \frac{1}{2\pi} \frac{UI}{\ln(r_2/r_1)} \int_0^{2\pi} du \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = UI. \quad (58.12)$$

Хорошо известно, что при силе тока  $I$  и падении напряжения  $U$  полная мощность, потребляемая потребителем, равна

$$P_n = IU. \quad (58.13)$$

Сравнение (58.12) с (58.13) показывает, что вся энергия, которая используется потребителем, движется вдоль кабеля в пространстве между жёлкой и оболочкой.

В случае переменного тока малой частоты ничего не меняется в принципиальном отношении. Если ток в кабеле изменяет направление на обратное, то  $E_r$  и  $H_\alpha$  изменяют знаки на обратные, а направление вектора Пойнтинга не изменяется. Поэтому, хотя направление тока и изменяется на обратное, направление движения электромагнитной энергии сохраняется, она по-прежнему движется к потребителю энергии.

В других линиях передачи электрической энергии дело происходит в принципиальном отношении аналогично рассмотренному простейшему случаю, лишь усложняется конфигурация электромагнитных полей. Для больших частот, когда длина волны имеет порядок расстояния между проводами, линия передачи начинает излучать электромагнитную энергию и действует подобно антенне. Кроме того, при очень высоких частотах в изоляции проводов возникают большие потери энергии. В связи с этим для передачи на больших частотах, соответствующих длинам волн сантиметрового диапазона, обычные линии передачи неприменимы и необходимо передавать электромагнитную энергию по волноводам.

Простейший волновод представляет собой полую прямую металлическую трубку с неизменной по длине формой поперечного сечения. Теория распространения волн по волноводам строится на основе уравнений Максвелла.

## § 59. ВОЛНОВОДЫ

**Уравнения для полей.** Рассмотрим цилиндрический волновод. Пространство внутри волновода заполнено однородной средой с диэлектрической и магнитной прони-

цаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$ . Направим ось  $Z$  по оси волновода (рис. 54).

Уравнения Максвелла удобно записать с помощью оператора  $\nabla$  (см. § 53):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \partial \mathbf{H} / \partial t. \quad (59.1)$$

Мы рассматриваем волны, распространяющиеся вдоль оси волновода. Поэтому зависимость всех величин от  $t$  и  $z$  берем в виде  $\exp[i(\omega t - k_z z)]$ . Оператор  $\nabla$  можно представить как сумму двух слагаемых:

$$\nabla = \nabla_{\perp} + \tau \frac{\partial}{\partial z}, \quad (59.2)$$

где  $\tau$  — единичный вектор в направлении оси  $Z$ ;

$$\nabla_{\perp} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \quad (59.3)$$

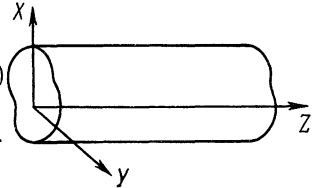


Рис. 54

— поперечная составляющая оператора  $\nabla$ . Векторы поля также можно разложить на составляющие вдоль оси волновода и перпендикулярной ей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \tau E_z, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_{\perp} + \tau H_z. \quad (59.4)$$

Теперь уравнения Максвелла (59.1) можно представить в следующем виде:

$$(\nabla_{\perp} - \tau i k_z) \times (\mathbf{H}_{\perp} + \tau H_z) = i\omega\epsilon (\mathbf{E}_{\perp} + \tau E_z), \quad (59.5a)$$

$$(\nabla_{\perp} - \tau i k_z) \times (\mathbf{E}_{\perp} + \tau E_z) = -i\omega\mu (\mathbf{H}_{\perp} + \tau H_z). \quad (59.5b)$$

Выбрав составляющие этих уравнений по оси  $Z$  и в перпендикулярной ей плоскости, находим:

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp} = i\omega\epsilon \tau E_z, \quad (59.6a)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} = -i\omega\mu \tau H_z, \quad (59.6b)$$

$$\nabla_{\perp} \times \tau H_z - i k_z (\tau \times \mathbf{H}_{\perp}) = i\omega\epsilon \mathbf{E}_{\perp}, \quad (59.6b)$$

$$\nabla_{\perp} \times \tau E_z - i k_z (\tau \times \mathbf{E}_{\perp}) = -i\omega\mu \mathbf{H}_{\perp}. \quad (59.6g)$$

Разрешая уравнения (59.6в) и (59.6г) относительно  $E_{\perp}$  и  $H_{\perp}$ , получаем:

$$E_{\perp} = \frac{-i}{k^2 - k_z^2} [\omega\mu (\nabla_{\perp} \times \tau H_z) + k_z \nabla_{\perp} E_z], \quad (59.7)$$

$$H_{\perp} = \frac{i}{k^2 - k_z^2} [\omega\varepsilon (\nabla_{\perp} \times \tau E_z) + k_z \nabla_{\perp} H_z],$$

где  $k^2 = \mu\varepsilon\omega^2$ .

Эти уравнения позволяют найти  $E_{\perp}$  и  $H_{\perp}$ , если известны  $E_z$  и  $H_z$ , и тем самым задача сведена к нахождению этих продольных составляющих поля. Чтобы получить уравнение для них, надо выражения (59.7) подставить в уравнения (59.6а), (59.6б). В результате получаем:

$$\begin{aligned} (\nabla_{\perp}^2 + k^2 - k_z^2) E_z &= 0, \\ (\nabla_{\perp}^2 + k^2 - k_z^2) H_z &= 0. \end{aligned} \quad (59.8)$$

Уравнения (59.8) и формулы (59.7) с добавлением соответствующих граничных условий позволяют найти электромагнитные волны, распространяющиеся в волноводе.

**Классификация волн в волноводе.** Общепринятой является следующая классификация волн в волноводе:

- 1) поперечно-магнитные волны (ТМ-волны), определяемые требованием  $H_z = 0$ . При этом решения выражаются полностью только через  $E_z$ ;
- 2) поперечно-электрические волны (ТЕ-волны), определяемые требованием  $E_z = 0$ . При этом решения выражаются только через  $H_z$ ;
- 3) поперечные электромагнитные волны (ТЕМ-волны), определяемые требованиями  $E_z = 0$ ,  $H_z = 0$ . При этом [см. (59.6)] поперечные поля  $E_{\perp}$  и  $H_{\perp}$  являются безвихревыми и их нахождение сводится к решению уравнения Лапласа;
- 4) гибридные волны, когда  $H_z \neq 0$  и  $E_z \neq 0$ . Эти волны возникают в случае, когда граничные условия требуют, чтобы отличными от нуля были и  $E_z$  и  $H_z$ .

**Граничная частота.** Уравнения (59.8) имеют решения не при любых значениях  $k^2 - k_z^2 = -\lambda$ , а лишь при вполне определенных. Запишем эти уравнения в виде

$$\nabla^2 \psi = \lambda \psi. \quad (59.9)$$

Значения параметра  $\lambda_i$ , при которых уравнение (59.9) имеет решения  $\psi_i$ , удовлетворяющие заданным граничным условиям, называют собственными значениями уравнения, а функции  $\psi_i$  — собственными функциями, принадлежащими собственным значениям  $\lambda_i$ . Набор собственных функций  $\psi_i$  составляет полную ортогональную систему функций. Это доказано в теории уравнений с частными производными. Можно показать, что собственные значения уравнения (59.9) не могут быть положительными, поэтому  $\lambda_i = -\rho_i^2$ . Следовательно решение уравнений (59.9) возможно не при всех значениях  $k_z^2$ , а лишь при тех, которые удовлетворяют уравнению

$$k_{zi}^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \rho_i^2. \quad (59.10)$$

Очевидно, что если  $k_z$  является мнимой величиной, то решение имеет множитель  $\exp(-ik_z z) = \exp(-|k_z|z)$ , обуславливающий затухание волны. Поэтому волны с  $k_z^2 \leq 0$  не могут распространяться. Следовательно, при заданной частоте  $\omega$  допустимы лишь те  $k_{zi}$ , для которых

$$k_{zi}^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \rho_i^2 \geq 0. \quad (59.11)$$

Обращение правой части в нуль происходит при частоте  $\omega_i$ , удовлетворяющей уравнению

$$\omega_i^2 \mu \varepsilon - \rho_i^2 = 0, \quad (59.12)$$

положительное решение которого

$$\omega_i = \rho_i / \sqrt{\mu \varepsilon}. \quad (59.13)$$

С помощью  $\omega_i$  выражение (59.10) имеет вид

$$k_z = \sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt{\omega^2 - \omega_i^2}. \quad (59.14)$$

Полученный результат означает, что волны, соответствующие собственному значению  $\lambda_i = -\rho_i^2$ , могут распространяться лишь в случае, если их частота больше  $\omega_i$ . Частота  $\omega_i$ , определяемая формулой (53.13), называется граничной.

**Прямоугольный волновод.** В качестве примера рас-

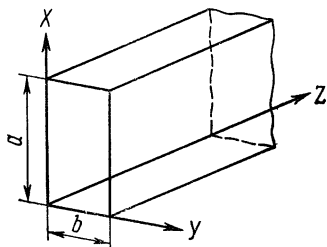


Рис. 55



смотрим волновод с идеально проводящими стенками. Размеры и направления осей указаны на рис. 55. У идеального проводника  $E_z=0$  и, следовательно, отличной от нуля может быть  $H_z$  компонента. Поэтому распространяться будут только ТЕ-волны. Для волн этого типа

$$H_z = H_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-ik_z z}. \quad (59.15)$$

Подстановка (59.15) в (59.8) дает

$$k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2, \quad (59.16)$$

отсюда граничная частота равна

$$\omega_{mn} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2}. \quad (59.17)$$

Подставляя (59.15) в (59.7), находим решение для поперечных составляющих поля:

$$E_x = \frac{i\omega\mu}{k^2 - k_z^2} \frac{n\pi}{b} H_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-ik_z z}, \quad (59.18a)$$

$$E_y = \frac{-i\omega\mu}{k^2 - k_z^2} \frac{m\pi}{a} H_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-ik_z z}, \quad (59.18б)$$

$$H_x = \frac{ik_z}{k^2 - k_z^2} \frac{m\pi}{a} H_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-ik_z z}, \quad (59.18в)$$

$$H_y = \frac{ik_z}{k^2 - k_z^2} \frac{n\pi}{b} H_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-ik_z z}. \quad (59.18г)$$

Наини́зшая частота волн, которые могут распространяться в волноводе, соответствует минимальным значениям  $m$  и  $n$ . При  $b < a$  это волна, определяемая формулой (53.15) с  $m=1, n=0$ :

$$\omega_{10} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \frac{\pi}{a}. \quad (59.19)$$

Она не зависит от размеров волновода в направлении оси  $Y$  и является наименьшей из всех граничных частот для волн ТЕ- и ТМ-типов.



**§ 60. ИНТЕГРАЛ КИРХГОФА.  
ДИФРАКЦИИ ФРЕНЕЛЯ И ФРАУНГОФЕРА**

**Интегральное представление Кирхгофа.** Электромагнитные волны при своем распространении встречаются различные препятствия, которые частично поглощают их, а частично рассеивают. Волны, рассеянные в направлении движения первоначальной волны, называют прошедшими, а в противоположном направлении — отраженными. Задачей теории дифракции является изучение рассеянных волн. Это выводится из второй формулы Грина (19.4) и является аналогом соотношения (19.9), но для функции  $\varphi$ , удовлетворяющей волновому уравнению. Обозначим эту функцию по-прежнему  $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$ , но примем во внимание, что она удовлетворяет не уравнению Пуассона, а волновому уравнению (45.3). Само собой разумеется, что под  $\varphi$  можно понимать также и любую компоненту  $\mathbf{A}$ . В качестве функции  $\psi$  возьмем функцию Грина  $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ , удовлетворяющую уравнению (46.2). Проинтегрируем обе части (19.4) с указанными значениями функций по  $t'$  от  $t_0$  до  $t_1$  ( $t_1 > t$ ). Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left\{ \varphi \left[ -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t'^2} \right] - \right. \\ & \left. - G \left[ -f + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} \right] \right\} dV' dt' = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left( \varphi \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right) dS' dt'. \end{aligned} \quad (60.1)$$

В левой части этого равенства можно произвести интегрирование по  $t'$  всех членов, за исключением  $Gf$ , и интегрирование по  $dV'$  первого члена. В результате получаем

$$\begin{aligned} & -\varphi(\mathbf{r}, t) + \int_{t_0}^{t_1} \int_V G f dV' dt' + \frac{1}{v^2} \int_V \left( \varphi \frac{\partial G}{\partial t'} - G \frac{\partial \varphi}{\partial t'} \right)_{t_0}^{t_1} dV' = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left( \varphi \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right) dS' dt', \end{aligned} \quad (60.2)$$

где второй интеграл в левой части получился в результате интегрирования по  $t'$  по частям. Принимая во внима-

ние, что  $G=0$  при  $t_1 > t$ , можно равенство (60.2) представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) = & \int_{t_0}^{t_1} \int_V G f dV' dt' + \frac{1}{v^2} \int_V \left( G \frac{\partial \varphi}{\partial t'} - \varphi \frac{\partial G}{\partial t'} \right)_{t=t_0} dV' + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_S \left( G \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS' dt'. \end{aligned} \quad (60.3)$$

**Интеграл Кирхгофа.** Предположим, что внутри рассматриваемого объема в начальный момент времени нет источников ( $f=0$ ) и  $\varphi=0$ ,  $\partial\varphi/\partial t'=0$ , т. е. все поле внутри объема создается за счет возмущения, образующегося на границе. Поле внутри объема определяется формулой

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int_{t_0}^{t_1} dt' \int_S \left( G \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS'. \quad (60.4)$$

Учтем, что

$$\partial/\partial n' = \mathbf{n} \text{ grad}', \quad (60.5)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности  $S$ . Взяв в качестве  $G$  выражение (46.11), имеем

$$\begin{aligned} \text{grad}' G &= \frac{\partial G}{\partial R} \text{grad}' R = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{R}{R^3} \left[ -\frac{\delta(t - R/v - t')}{R^2} - \frac{\delta(t - R/v - t')}{vR} \right]_{t'=t-R/v}. \end{aligned}$$

Заметим, что вектор  $\mathbf{R}$  направлен из точки  $\mathbf{r}'$  в точку  $\mathbf{r}$ . Поэтому формула (60.4) после интегрирования по  $t'$  принимает вид

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{\text{grad}' \varphi}{R} - \frac{R}{R^3} \varphi - \frac{R}{R^2} \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t'} \right) \Big|_{t'=t-R/v} dS', \quad (60.6)$$

где  $dS = \mathbf{n} dS'$ . Интеграл (60.6) называется интегралом Кирхгофа. Он лежит в основе теории дифракции.

Здесь следует сделать такое же замечание, как и в связи с формулой (19.9). Функция  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  в (60.6) не является решением задачи на определение поля, потому что зна-

чения  $\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial n'$  на поверхности  $S$  не произвольны, а должны сами находиться из решения соответствующей краевой задачи. Однако если эти значения известны, то формула (60.6) дает выражение  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  в любой точке внутри рассматриваемого объема. Именно такой обычно бывает ситуация, в задачах дифракции.

**Монохроматические волны.** Если все полевые величины зависят от времени как  $\exp(i\omega t)$ , то этот временной множитель в (60.6) после подстановки  $t' = t - R/v$  сократится и для величин, зависящих только от координат, получаем следующую формулу:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\exp(-ikR)}{R} \left[ \text{grad}' \varphi - \frac{R}{R^2} \varphi - \frac{R}{R} ik\varphi \right] dS', \quad (60.7)$$

где  $k = \omega/v$ .

**Условия излучения.** Во всех практически интересных случаях источники рассеянных электромагнитных волн находятся в ограниченной области пространства. Расходящаяся волна на больших расстояниях от области рассеяния должна иметь такую зависимость от  $R$ :

$$\varphi \sim \frac{\exp(-ikR)}{R}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial R} \sim -\varphi \left( ik + \frac{1}{R} \right). \quad (60.8)$$

Требования такой зависимости называются условием излучения. Заметим, что в условии излучения в экспоненте стоит отрицательный знак для расходящихся волн [зависимость от времени берут в виде  $\exp(i\omega t)$ ].

**Выбор поверхности интегрирования.** Замкнутую поверхность  $S$  в интеграле (60.7) выбирают так, как удобнее с учетом особенностей рассматриваемой задачи. Наиболее типичными являются зада-

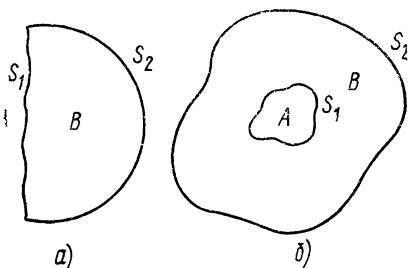


Рис. 56

чи при наличии экрана с отверстиями или рассеивающего предмета. В этих случаях можно считать, что поверхность  $S$  состоит из двух частей (рис. 56). Область источника  $A$  от области наблюдения  $B$  отделена поверхностью  $S_1$ . На рис. 56,  $a$  отверстия в непроницаемом

экране расположены в конечной части поверхности  $S_1$ . Можно считать, что от этих отверстий распространяется в области  $B$  расходящаяся волна, которая на бесконечности удовлетворяет условиям излучения (60.8). Если поверхность  $S_2$  удаляется на бесконечность, то при выполнении (60.8) интеграл (60.7) по ней равен нулю. Поэтому весь интеграл сводится к интегралу по поверхности  $S_1$ , а последний — к интегралу по отверстиям. Аналогично поступают и в случае, изображенном на рис. 56, б. Часть интеграла (60.7) по поверхности  $S_2$  также стремится к нулю из-за условий излучения, и остается лишь интеграл по  $S_1$ . Поэтому выражение (60.7) для области  $B$  можно представить в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{\exp(-ikR)}{R} \left[ \frac{R}{R} \varphi \left( ik + \frac{1}{R} \right) - \text{grad}' \varphi \right] dS, \quad (60.9)$$

где в подынтегральном выражении изменены знак и направление нормали: вектор  $dS$  поверхности  $S_1$  в (60.9) считается направленным в область  $B$ .

**Приближение Кирхгофа.** Величины  $\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial n'$  на поверхности интегрирования не могут задаваться произвольно, а должны быть найдены из решения соответствующей краевой задачи. Поэтому правая часть уравнения (60.9) неизвестна. Выражения для  $\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial n$  могут быть заданы лишь приближенно, учитывая физические факторы. Задачи теории дифракции обычно решают в приближении Кирхгофа, которое состоит в следующем: 1) величины  $\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial n$  вне отверстий на непроницаемых частях экрана равны нулю; 2) величины  $\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial n$  в отверстиях равны их значениям в падающей волне при отсутствии экранов или препятствий.

**Оптическое приближение.** В области оптических длин волн всегда можно считать, что  $k \gg 1/R$ . Принимая во внимание, что  $|\text{grad}' \varphi| \sim k\varphi$ , и пренебрегая членами, содержащими  $1/R$ , по сравнению с членами, содержащими  $k$ , приводим (60.9) к виду

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{\exp(-ikR)}{R} \left( \frac{R}{R} \varphi ik - \text{grad}' \varphi \right) dS. \quad (60.10)$$

**Дифракция Френеля.** Типичная дифракционная ситуация состоит в следующем. Имеется некоторый пло-

ский экран, на поверхности которого известна интенсивность прошедшего через экран света (рис. 57), даваемого передаточной функцией  $\psi(x', y')$ . Определим функцию  $\varphi(x, y)$  на плоскости изображений  $S$ , параллельной плоскости экрана и отстоящей от него на расстоянии  $R_0$ .

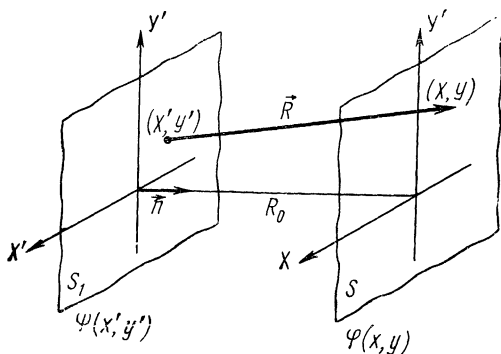


Рис. 57

Дифракцией Френеля называется такая, когда экран освещается пучком параллельных лучей, а плоскость изображений расположена не очень далеко от плоскости экрана. В этом случае в формуле (60.10)  $\text{grad}' \varphi = -\mathbf{n} \varphi i k$  и она принимает вид

$$\varphi(x, y) = \frac{ik}{4\pi} \int_{S_1} \frac{\exp(-ikR)}{R} \psi(x', y') [\cos(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}}) + 1] dx' dy', \quad (60.11)$$

где  $(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}})$  — угол между  $\mathbf{R}$  и  $\hat{\mathbf{n}}$ , причем  $R$  — вектор, направленный из точки  $(x', y')$  в точку  $(x, y)$ ;  $\hat{\mathbf{n}}$  — единичный вектор нормали к плоскости  $S_1$ , направленный в сторону плоскости изображения  $S$ . Дальнейшие упрощения вычислений получаются при малых углах отклонения, а именно в предположении, что  $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \ll R_0$ . Тогда в подынтегральном выражении можно положить

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}}) &\approx 1, \quad R = \sqrt{R_0^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2} \approx \\ &\approx R_0 + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2R_0}, \end{aligned} \quad (60.12)$$

следовательно, интеграл (60.11) принимает вид

$$\varphi(x, y) = \frac{ik}{2\pi} \frac{\exp(-ikR_0)}{R_0} \int_{S_1} \psi(x', y') \times \\ \times \exp \left\{ \frac{-ik[(x-x')^2 + (y-y')^2]}{2R_0} \right\} dx' dy'. \quad (60.13)$$

Эта формула лежит в основе теории дифракции Френеля. Многочисленные примеры вычислений по этой формуле приводятся в оптике.

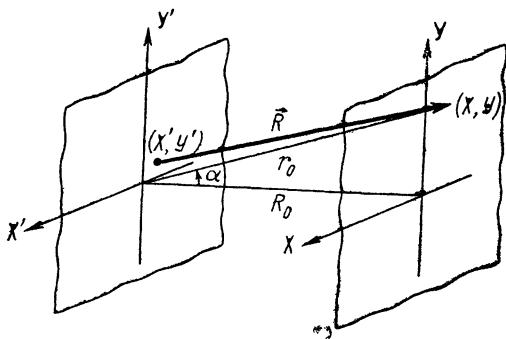


Рис. 58

**Дифракция Фраунгофера.** В этом случае предполагается, что размеры объекта много меньше как расстояния до источника освещения, так и до плоскости наблюдения, или, что то же самое, предполагается, что источник освещения и наблюдатель находятся на бесконечности (рис. 58). При этих условиях для вычисления поля в точке  $(x, y)$  можно считать, что  $\cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{R}})$  меняется незначительно и равен  $\cos \alpha$ , а

$$R = \sqrt{R_0^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2} \approx \\ \approx \sqrt{R_0^2 + x^2 + y^2 - 2(xx' + yy')} \approx r_0 - \frac{x}{r_0} x' - \frac{y}{r_0} y', \quad (60.14)$$

где  $r_0 = \sqrt{R_0^2 + x^2 + y^2}$ ,  $|x'| \ll |x|$ ,  $|y'| \ll |y|$ .

При интегрировании по  $x'y'$  для фиксированного значения  $(x, y)$   $r_0$  меняется незначительно и может считаться постоянной величиной. Поэтому интеграл (60.11) в указанном приближении принимает такой вид:

$$\varphi(\xi, \eta) = A \int_{\xi_1} \psi(x', y') \exp[ik(\xi x' + \eta y')] dx' dy', \quad (60.15)$$

$$\xi = \frac{x}{r_0}, \quad \eta = \frac{y}{r_0}, \quad A = \frac{ik}{4\pi} (1 + \cos \alpha) \frac{\exp(-ikr_0)}{r_0}. \quad (60.16)$$

Интеграл (60.15) имеет вид интеграла Фурье, что делает всю теорию дифракции Фраунгофера математически чрезвычайно изящной.

**Принцип Бабинэ.** Пусть экран  $S_1$  (см. рис. 56) отсутствует. Обозначим через  $\varphi$  поле в области  $B$  при заданных источниках. Предположим, что экран  $S_1$  состоит из двух частей  $S_a$  и  $S_b$ :  $S_1 = S_a + S_b$ . Поле, которое получается в области  $B$  при наличии лишь части  $S_a$  экрана, обозначим  $\varphi_b$  и  $\varphi_a$  при наличии лишь части  $S_b$ . Из интеграла Кирхгофа (60.9) с учетом условия  $S_1 = S_a + S_b$  получаем

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_b. \quad (60.17)$$

Это равенство является математическим выражением принципа Бабинэ.

## § 61. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ

**Трехмерное пространство.** Хорошо известно, что пространство трехмерно. Это означает, что при характеристике положения какой-то точки в пространстве необходимо указать три числа, являющиеся координатами в выбранной системе координат. Например, в прямоугольной декартовой системе координат этими числами служат координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точки. Их удобно обозначать одной и той же буквой, но с различными индексами. Поэтому введем такие обозначения:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z. \quad (61.1)$$

Величины  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  являются компонентами радиус-вектора  $\mathbf{R}$ , проведенного из начала координат в точку  $(x, y, z)$ . Обозначим единичные векторы, направленные вдоль координатных осей  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , соответственно  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_3$ . Тогда

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 x_1 + \mathbf{r}_2 x_2 + \mathbf{r}_3 x_3 = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{r}_\alpha x_\alpha. \quad (61.2)$$

Пусть имеется другая система координат с тем же началом. Обозначим единичные векторы второй системы  $\mathbf{r}'_1$ ,  $\mathbf{r}'_2$ ,  $\mathbf{r}'_3$ , а компоненты вектора  $\mathbf{R}$  в ней —  $x'_1$ ,  $x'_2$ ,  $x'_3$ . Тогда

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}'_1 x'_1 + \mathbf{r}'_2 x'_2 + \mathbf{r}'_3 x'_3 = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{r}'_\alpha x'_\alpha. \quad (61.3)$$

Из-за ортогональности систем координат имеет место следующее соотношение:

$$\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{при } \alpha = \beta \end{cases} \quad (61.4)$$



и аналогичные соотношения для величин, относящихся ко второй системе координат. Умножая обе части (61.2) скалярно на  $\mathbf{r}_\beta$ , получим с учетом (61.4) следующие выражения для компонент вектора  $\mathbf{R}$ :

$$x_\beta = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_\beta. \quad (61.5)$$

На основании (61.2) и (61.3) имеем

$$\mathbf{R} = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{r}'_\alpha x'_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{r}_\alpha x_\alpha. \quad (61.6)$$

Умножая обе части этого равенства на  $\mathbf{r}'_\beta$  и учитывая (61.4), находим

$$x'_\beta = \sum_{\alpha=1}^3 (\mathbf{r}'_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha) x_\alpha. \quad (61.7a)$$

Введем обозначения для скалярных произведений единичных векторов различных систем координат:

$$\mathbf{r}'_\beta \cdot \mathbf{r}_\alpha = a_{\beta\alpha}. \quad (61.8)$$

Преобразование (61.7a) записывается в виде

$$x'_\beta = \sum_{\alpha=1}^3 a_{\beta\alpha} x_\alpha. \quad (61.9a)$$

Обратное преобразование получится из (61.6) умножением обеих частей равенства скалярно на  $\mathbf{r}_\beta$ . Тогда

$$x_\beta = \sum_{\alpha=1}^3 (\mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{r}'_\alpha) x'_\alpha. \quad (61.7b)$$

Учитывая обозначения (61.8), находим

$$x_\beta = \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha\beta} x'_\alpha. \quad (61.9b)$$

Таким образом, компоненты радиус-вектора преобразуются при переходе от одной системы координат к другой с помощью линейных преобразований вида (61.9).

Если имеются какие-то три величины  $A_1, A_2, A_3$ , преобразующиеся при переходе от одной системы координат к

другой по формуле (61.9), т. е.

$$A'_\beta = \sum_{\alpha=1}^3 a_{\beta\alpha} A_\alpha, \quad A_\beta = \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha\beta} A'_\alpha, \quad (61.10)$$

то совокупность этих  $A_1, A_2, A_3$  называется трехмерным вектором, а сами  $A_1, A_2, A_3$  — компонентами вектора по соответствующим осям координат  $X_1, X_2, X_3$ .

Из (61.2) и (61.3) с учетом (61.4) следует

$$R^2 = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha^2 = \sum_{\beta=1}^3 x'^2_\beta, \quad (61.11)$$

т. е. при преобразованиях сохраняется модуль вектора  $|\mathbf{R}| = R$ . Подставляя (61.9) в (61.11), имеем

$$\sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 \left. a_{\alpha\beta} x_\beta a_{\alpha\gamma} x_\gamma \right\} = \sum_{\beta,\gamma} x_\beta x_\gamma \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma}. \quad (61.12)$$

Левая и правая части (61.12) должны совпадать. Следовательно, в правой части равенства отсутствуют члены  $x_\beta x_\gamma$  при  $\beta \neq \gamma$ , а коэффициенты при  $x_\beta x_\beta$  с  $\beta = \gamma$  равны единице. Отсюда получаем следующие условия, которым удовлетворяют  $a_{\alpha\beta}$ :

$$\sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{при } \beta \neq \gamma, \\ 1 & \text{при } \beta = \gamma. \end{cases} \quad (61.13a)$$

Если записать равенство, аналогичное (61.12), для координат  $x_\alpha'^2$ , то вместо (61.13a) получим

$$\sum_{\alpha=1}^3 a_{\beta\alpha} a_{\gamma\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{при } \beta \neq \gamma, \\ 1 & \text{при } \beta = \gamma. \end{cases} \quad (61.13b)$$

Коэффициенты  $a_{\alpha\beta}$  можно записать в виде матрицы:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Условия (61.13) означают, что произведения различных столбцов и строк этой матрицы равны нулю, а произведения столбцов или строк самих на себя равны единице. Понятие произведения столбцов и строк определяется

равенствами (61.13), являющимися условиями ортогональности преобразования. Они обеспечивают сохранение модуля вектора при преобразовании. Например, из (61.10) имеем

$$\sum_{\beta=1}^3 A_{\beta}^{\prime 2} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} a_{\beta\alpha} A_{\alpha} a_{\beta\gamma} A_{\gamma} = \sum_{\alpha, \gamma} A_{\alpha} A_{\gamma} \sum_{\beta} a_{\beta\alpha} a_{\beta\gamma} = \sum_{\beta=1}^3 A_{\beta}^2. \quad (61.14)$$

Таким образом, можно сказать, что абсолютное значение вектора является инвариантом ортогонального преобразования координат.

**Четырехмерный мир.** Для полной характеристики физического события необходимо указать не только пространственные координаты этого события, но и время. Поэтому физическое событие в трехмерном пространстве задается четырьмя числами: тремя пространственными координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и временем  $t$ . Точка в трехмерном пространстве определяется совокупностью трех чисел  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . По аналогии с этим можно сказать, что четыре числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  определяют точку в четырехмерном мире.

Переход от одной системы координат к другой в четырехмерном мире производят с помощью преобразований Лоренца. Эти преобразования линейны. Для того чтобы их сделать совершенно аналогичными преобразованиям (61.9), удобно в качестве четвертой переменной, характеризующей время, пользоваться мнимой координатой и ввести следующие обозначения:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict, \quad (61.15)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ .

Преобразования Лоренца в этих обозначениях имеют такой вид:

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x_4, \\ x_2' &= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4, \\ x_3' &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4, \end{aligned} \quad (61.16)$$

$$x_4' = \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x_4,$$

где  $\beta = v/c$ .

Таким образом, они могут быть записаны в виде формулы

$$x'_\alpha = \sum_{\gamma=1}^4 a_{\alpha\gamma} x_\gamma, \quad (61.17a)$$

где коэффициенты  $a_{\alpha\gamma}$  определены матрицей

$$a_{\alpha\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}. \quad (61.17b)$$

Обратные преобразования аналогично (61.9b) имеют вид

$$x_\alpha = \sum_{\gamma=1}^4 a_{\gamma\alpha} x'_\gamma. \quad (61.18)$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты  $a_{\alpha\gamma}$ , определяемые (61.18), удовлетворяют условию ортогональности (61.13), которое имеет в случае четырех измерений вид

$$\sum_{\alpha=1}^4 a_{\alpha\gamma} a_{\alpha\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{при } \gamma \neq \lambda, \\ 1 & \text{при } \gamma = \lambda. \end{cases} \quad (61.19)$$

Эти коэффициенты удовлетворяют также условию (61.13b).

Таким образом, в четырехмерном мире переход от координат мировой точки одной системы отсчета к координатам другой осуществляется с помощью линейных преобразований вида (61.17a) и (61.18), коэффициенты которых определяются матрицей (61.17b).

**Определение.** Четырехмерным вектором называется совокупность четырех величин  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , которые от одной системы координат к другой преобразуются по формулам (61.17a) и (61.18) с теми же коэффициентами  $a_{\alpha\gamma}$ , т. е.

$$A'_\alpha = \sum_{\gamma=1}^4 a_{\alpha\gamma} A_\gamma, \quad A_\alpha = \sum_{\gamma=1}^4 a_{\gamma\alpha} A'_\gamma, \quad (61.20)$$

где  $a_{\alpha\gamma}$  определяются матрицей (61.17б). Среди величин  $A_\alpha$  могут быть и комплексные.

Возведя обе части (61.20) в квадрат и суммируя по  $\alpha$ , находим

$$\sum_{\alpha=1}^4 A_\alpha'^2 = \sum_{\alpha, \gamma, \mu} a_{\alpha\gamma} A_\gamma a_{\alpha\mu} A_\mu = \sum_{\gamma, \mu} A_\gamma A_\mu \sum_{\alpha} a_{\alpha\gamma} a_{\alpha\mu} = \sum_{\alpha} A_\alpha^2, \quad (61.21)$$

где учтено условие (61.19). Инвариантная величина

$$\sum_{\alpha=1}^4 A_\alpha^2 = \text{inv} \quad (61.22)$$

называется квадратом четырехмерного вектора.

Понятие четырехмерного вектора существенно облегчает многие вычисления, так как если совокупность некоторых четырех величин образует вектор, то известен закон преобразования этих величин при переходе от одной системы координат к другой.

**Четырехмерный вектор мировой точки.** Примером четырехмерного вектора является совокупность координат мировой точки  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Квадрат этого вектора равен

$$\sum_{\alpha=1}^4 x_\alpha^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = s^2, \quad (61.23)$$

т. е. является квадратом интервала.

Как показывается в специальной теории относительности, дифференциал собственного времени  $d\tau$  материальной точки является инвариантом. Поэтому совокупность производных по  $d\tau$  от компонент некоторого четырехмерного вектора является также четырехмерным вектором, поскольку дифференцирование по инвариантной величине не изменяет свойств преобразования.

**Четырехмерная скорость.** Обозначим производные от координат мировой точки по собственному времени

$$u_\alpha = dx_\alpha / d\tau. \quad (61.24)$$

Четырехмерный вектор

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \quad (61.25)$$

называется четырехмерной скоростью. Учитывая, что

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict,$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (61.26)$$

можно компоненты вектора (61.25) представить в таком виде:

$$u_1 = \frac{u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad u_2 = \frac{u_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (61.27)$$

$$u_3 = \frac{u_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

где  $u_x, u_y, u_z$  — компоненты трехмерной скорости;  $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ .

Квадрат четырехмерной скорости равен

$$\sum_{\alpha=1}^4 u_\alpha^2 = -c^2. \quad (61.28)$$

Преобразование компонент четырехмерной скорости от одной системы координат к другой совершается по формулам (61.17а):

$$u'_\alpha = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} u_\gamma. \quad (61.29а)$$

Принимая во внимание значение  $a_{\alpha\gamma}$  в (61.17а), получаем:

$$\begin{aligned} u'_1 &= \frac{u_1 + i\beta u_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ u'_2 &= u_2, \quad u'_3 = u_3, \\ u'_4 &= \frac{-i\beta u_1 + u_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (61.29б)$$

Чтобы перейти к трехмерным обозначениям, подставим в (61.29б) выражения величин из (61.27):

$$\frac{u'_x}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (61.30а)$$

$$\frac{u'_y}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \frac{u'_z}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad (61.30б)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1-u_x v/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad (61.30в)$$

где  $\beta = v/c$ ;  $v$  — относительная скорость систем координат.

С помощью (61.30в) уравнения (61.30а), (61.30б) могут быть записаны так:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_y = \frac{\sqrt{1-\beta^2} u_y}{1 - vu_x/c^2}, \quad (61.31)$$

$$u'_z = \frac{\sqrt{1-\beta^2} u_z}{1 - vu_x/c^2},$$

т. е. получаются формулы сложения скоростей теории относительности. Таким образом, установив, что величина (61.25) является четырехмерным вектором, мы сразу же получили правильные формулы преобразования этой величины при переходе к другим системам координат. В этом и состоит удобство введения понятия четырехмерных векторов.

**Четырехмерное ускорение.** При дифференцировании компонент четырехмерного вектора (61.25) по инвариантному собственному времени  $d\tau$  мы должны снова получить четырехмерный вектор с компонентами:

$$b_\alpha = dv_\alpha/d\tau. \quad (61.32)$$

Четырехмерный вектор

$$b_1, b_2, b_3, b_4 \quad (61.33)$$

называется четырехмерным ускорением. Компоненты  $b_\alpha$  четырехмерного ускорения можно выразить через трехмерные величины:

$$b_1 = \frac{du_1}{d\tau} = \frac{d}{dt} \left( \frac{u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) \frac{dt}{d\tau} = \frac{\dot{u}_x}{1-u^2/c^2} + \frac{u_x (u\dot{u})}{c^2 (1-u^2/c^2)^2}; \quad (61.34)$$

выражения для  $b_2$  и  $b_3$  аналогичны  $b_1$ ;

$$b_4 = \frac{du_4}{d\tau} = \frac{d}{dt} \left( \frac{ic}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) \frac{dt}{d\tau} = \frac{i}{c} \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{(1-u^2/c^2)^2}. \quad (61.35)$$

Вектор  $\dot{\mathbf{u}}$  в этих выражениях есть вектор трехмерной скорости; точкой обозначены производные по времени  $t$ . На основании (61.34) и (61.35) непосредственным вычислением находим инвариантную величину квадрата четырехмерного ускорения:

$$\sum_{\alpha=1}^4 b_\alpha^2 = \frac{\dot{\mathbf{u}}^2 - [(\mathbf{u}/c) \times \dot{\mathbf{u}}]^2}{(1-u^2/c^2)^3}. \quad (61.36)$$

**Скалярное произведение четырехмерных векторов.** По аналогии с трехмерным случаем определим скалярное произведение двух четырехмерных векторов  $A_1, A_2, A_3, A_4$  и  $B_1, B_2, B_3, B_4$ :

$$(A \cdot B) = \sum_{\alpha=1}^4 A_\alpha B_\alpha.$$

Если скалярное произведение двух четырехмерных векторов равно нулю, то векторы называют ортогональными. Нетрудно видеть, что скалярное произведение инвариантно относительно ортогональных преобразований координат.

Дифференцируя (61.9а) по  $d\tau$ , получаем

$$\sum_{\alpha=1}^4 u_\alpha b_\alpha = 0, \quad (61.37)$$

т. е. четырехмерное ускорение ортогонально четырехмерной скорости.

**Трехмерные тензоры.** Пусть имеются два вектора  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  с компонентами  $A_1, A_2, A_3$  и  $B_1, B_2, B_3$ . Рассмотрим девять величин  $T_{\alpha\gamma}$ , определенных с помощью перемножения компонент векторов  $\mathbf{A}_\alpha$  и  $\mathbf{B}_\gamma$  по формуле

$$T_{\alpha\gamma} := A_\alpha B_\gamma. \quad (61.38)$$

Компоненты векторов  $A_\alpha$  и  $B_\gamma$  преобразуются по правилам (61.10). Поэтому формулы преобразования для  $T_{\alpha\gamma}$



имеют вид

$$T'_{\alpha\gamma} = A'_{\alpha} B'_{\gamma} = \sum_{\mu} a_{\alpha\mu} A_{\mu} \sum_{\lambda} a_{\gamma\lambda} B_{\lambda} = \sum_{\mu, \lambda} a_{\alpha\mu} a_{\gamma\lambda} A_{\mu} B_{\lambda} = \sum_{\mu, \lambda} a_{\alpha\mu} a_{\gamma\lambda} T_{\mu\lambda}. \quad (61.39)$$

Следовательно,  $T_{\alpha\gamma}$  преобразуются от одной системы координат к другой по формуле

$$T'_{\alpha\gamma} = \sum_{\mu, \lambda} a_{\alpha\mu} a_{\gamma\lambda} T_{\mu\lambda}, \quad (61.40)$$

где коэффициенты  $a_{\alpha\gamma}$  имеют те же значения, что и в формулах преобразования векторов. Таким образом, по каждому из своих индексов  $T_{\alpha\gamma}$  преобразуются как векторы. Совокупность девяти величин  $T_{\alpha\gamma}$ , которые от одной системы координат к другой преобразуются по формуле (61.40), называется трехмерным тензором второго ранга.

**Четырехмерные тензоры** второго ранга определяются как совокупность 16 величин ( $4 \times 4 = 16$ ), которые от одной системы координат к другой преобразуются по формуле

$$T'_{\alpha\gamma} = \sum_{\mu, \lambda=1}^4 a_{\alpha\mu} a_{\gamma\lambda} T_{\mu\lambda}, \quad (61.41)$$

где коэффициенты  $a_{\alpha\gamma}$  заданы матрицей (61.176). Вообще, совокупность  $T_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ , зависящих от  $n$  индексов и преобразующихся при переходе от одной системы координат к другой по каждому индексу как вектор, называется тензором  $n$ -го ранга. Поэтому вектор является тензором первого ранга, а скаляр можно рассматривать как тензор нулевого ранга.

**Симметричные и антисимметричные тензоры.** Симметричным называется тензор, у которого

$$T_{\alpha\gamma} = T_{\gamma\alpha}. \quad (61.42)$$

Антисимметричный тензор определяется условием

$$T_{\alpha\gamma} = -T_{\gamma\alpha}. \quad (61.43)$$

Любой тензор  $T_{\alpha\gamma}$  можно представить в виде суммы симметричного  $T^c_{\alpha\gamma}$  и антисимметричного  $T^a_{\alpha\gamma}$  тензоров:

$$T_{\alpha\gamma} = T^c_{\alpha\gamma} + T^a_{\alpha\gamma}, \quad (61.44)$$

где  $T^c_{\alpha\gamma} = (T_{\alpha\gamma} + T_{\gamma\alpha})/2$ ,  $T^a_{\alpha\gamma} = (T_{\alpha\gamma} - T_{\gamma\alpha})/2$ .

Нетрудно видеть, что свойство симметрии тензора инвариантно относительно преобразований координат, т. е. тензор, симметричный в одной системе координат, является симметричным и во всех других системах координат. Аналогичное утверждение справедливо и для антисимметричных тензоров.

**Сложение и вычитание тензоров.** Суммой тензоров  $T_{\alpha\gamma}$  и  $P_{\alpha\gamma}$  называется тензор  $\Gamma_{\alpha\gamma}$ , компоненты которого равны сумме соответствующих компонент слагаемых тензоров:

$$\Gamma_{\alpha\gamma} = T_{\alpha\gamma} + P_{\alpha\gamma}. \quad (61.45)$$

Аналогично определяется разность тензоров.

**Умножение тензоров.** Произведением тензора  $m$ -го ранга  $T_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}$  и тензора  $n$ -го ранга  $P_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n}$  называется тензор  $(m+n)$ -го ранга  $R_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n}$ , компоненты которого являются произведением соответствующих компонент перемножаемых тензоров:

$$R_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n} = T_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} P_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n}. \quad (61.46)$$

**Операция свертывания тензоров.** Ранг тензора может быть понижен на две единицы с помощью операции «свертывания» с помощью суммирования по какой-либо паре индексов. Например, из тензора четвертого ранга  $T_{\alpha, \nu, \mu, \nu}$  можно образовать тензор второго ранга:

$$T_{\alpha, \gamma} = \sum_{\lambda=1}^4 T_{\alpha, \gamma, \lambda, \lambda} \quad (61.47)$$

или

$$T_{\mu, \nu} = \sum_{\lambda=1}^4 T_{\lambda, \lambda, \mu, \nu}.$$

Такая операция понижения ранга тензора на две единицы называется свертыванием тензора. В результате свертывания тензора второго ранга получается скаляр.

## § 62. ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

**Четырехмерный градиент.** Пусть имеется некоторая скалярная функция четырех переменных  $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Полный дифференциал этой функции при смещении в

бесконечно близкую мировую точку равен

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_4} dx_4. \quad (62.1)$$

Приращение функции  $d\varphi$  при смещении из одной точки в другую является инвариантной величиной и не зависит от системы координат, в которой оно вычисляется. Выражение в правой части (62.1) построено по типу скалярного произведения бесконечно малого вектора  $dx_1, dx_2, dx_3, dx_4$  и величины, слагающие которой равны  $(\partial\varphi/\partial x_1, \partial\varphi/\partial x_2, \partial\varphi/\partial x_3, \partial\varphi/\partial x_4)$ . Из инвариантности выражения (62.1) можно заключить, что величина

$$\left[ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_4} \right] \quad (62.2)$$

является четырехмерным вектором, который будем называть четырехмерным градиентом функции  $\varphi$ . Формально этот четырехмерный градиент можно представить как произведение четырехмерного векторного оператора

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right] \quad (62.3a)$$

на скаляр  $\varphi$ .

Векторный характер оператора (62.3a) можно проверить непосредственно:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'_\alpha} = \sum_{\gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\alpha} = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\gamma}, \quad (62.3б)$$

где для вычисления производных  $\partial x_\gamma/\partial x'_\alpha$  использована формула (61.9б). Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\gamma}. \quad (62.3в)$$

Таким образом, непосредственно видно, что оператор производных преобразуется по формулам преобразования векторов.

**Четырехмерная дивергенция.** Скалярное произведение четырехмерного векторного оператора (62.3a) на четырехмерный вектор  $A_1, A_2, A_3, A_4$  является инвариантом:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4} = \text{inv}, \quad (62.4)$$

который называется четырехмерной дивергенцией вектора  $A_1, A_2, A_3, A_4$ .

**Оператор Даламбера.** Взяв в формуле (62.4) в качестве вектора  $A_1, A_2, A_3, A_4$  четырехмерный градиент (62.2), получим инвариантное дифференциальное выражение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_4^2} = \text{inv.} \quad (62.5)$$

Оператор

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (62.6)$$

называется оператором Даламбера. Его инвариантность относительно преобразований Лоренца является следствием векторного характера оператора (62.3а), квадратом которого он является.

**Дифференцирование тензоров.** В результате дифференцирования тензора по координатам получаем тензор, ранг которого на единицу выше исходного. Доказательство этого утверждения очевидно из (62.3в). Например, в результате дифференцирования скаляра получаем тензор первого ранга, т. е. вектор (62.2), называемый градиентом.

**Четырехмерный ротор.** Из вектора  $A_\alpha$  с помощью операции дифференцирования можно образовать антисимметричный тензор

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}, \quad (62.7)$$

называемый четырехмерным ротором вектора  $A_\alpha$ . Его пространственные компоненты ( $i, j=1, 2, 3$ ) совпадают с компонентами  $\text{rot } \mathbf{A}$ , где вектор  $\mathbf{A}$  — трехмерная часть четырехмерного вектора  $A_\alpha$ .

**Тензорное исчисление как аппарат теории относительности.** Принцип относительности требует, чтобы законы природы имели одинаковый вид во всех инерциальных системах координат. Иначе говоря, уравнения, выражающие законы природы, должны быть ковариантными относительно преобразований координат, связывающих

различные инерциальные системы координат. В специальной теории относительности этими преобразованиями являются преобразования Лоренца. Поэтому необходимо потребовать ковариантность уравнений, выражающих законы природы, относительно преобразований Лоренца. По виду уравнения часто нельзя сразу узнать, ковариантно ли оно. Проверка ковариантности требует вычислений, часто весьма громоздких и утомительных. Поэтому возникает задача разработать математический аппарат, чтобы сами уравнения имели такую форму, которая делает очевидной их релятивистскую ковариантность. Этим аппаратом является тензорное исчисление, поскольку тензорные равенства имеют один и тот же вид во всех системах координат. Пусть, например, некоторый закон в какой-то системе координат имеет вид тензорного равенства:

$$T_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = 0. \quad (62.8)$$

Умножим обе части этого равенства на коэффициент  $a'_{\alpha_1, \alpha_1} a'_{\alpha_2, \alpha_2} \dots a'_{\alpha_n, \alpha_n}$  и просуммируем по  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ :

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} a'_{\alpha_1, \alpha_1} a'_{\alpha_2, \alpha_2} \dots a'_{\alpha_n, \alpha_n} T_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = 0. \quad (62.9)$$

Принимая во внимание формулы преобразования тензоров (61.41), мы видим, что равенство (62.9) может быть записано в виде

$$T'_{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n} = 0. \quad (62.10)$$

Тензорное равенство (62.10) имеет такой же вид, как и (62.8), из которого оно получилось при преобразовании координат. Поэтому тензорное равенство ковариантно уже по своей форме. Следовательно, если удалось некоторое уравнение записать в тензорном виде, то тем самым доказано, что это уравнение ковариантно.

Таким образом, чтобы убедиться в ковариантности уравнения, необходимо и достаточно доказать возможность его записи в тензорной форме. При такой постановке проверка ковариантности того или иного уравнения сводится к написанию этого уравнения в тензорном виде или доказательству невозможности такой записи.

Сказанное показывает, что математическим аппаратом теории относительности является тензорное исчисление. Записав законы природы в тензорном виде, мы тем самым придаем им явно ковариантную форму. Ковариантность законов в этом случае следует непосредственно из их вида и не требует специальной проверки.

### § 63. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ И ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ ТОКА

Преобразуем к четырехмерной форме уравнения для потенциалов:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \rho \mathbf{v}, \quad (63.1)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad (63.2)$$

связанное с ними условие Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (63.3)$$

а также уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \partial \rho / \partial t = 0. \quad (63.4)$$

Уравнение (63.3) в координатах  $x_1, x_2, x_3, x_4 = ict$  имеет вид

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_4} = 0, \quad (63.5)$$

где  $\Phi_1 = A_x, \Phi_2 = A_y, \Phi_3 = A_z, \Phi_4 = i\varphi/c$ .

Уравнение (63.5) является релятивистски инвариантным, если предположить, что совокупность величин  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$  образует четырехмерный вектор. При этом условии левая часть уравнения (63.5) является инвариантной четырехмерной дивергенцией этого вектора. Таким образом, векторный  $\mathbf{A}$  и скалярный  $\varphi$  потенциалы образуют единый четырехмерный вектор  $\Phi_v$ , компоненты которого равны

$$A_x, A_y, A_z, i\varphi/c. \quad (63.6)$$

Вектор  $\Phi_v$  называется четырехмерным потенциалом. Уравнение (63.4) в четырехмерной записи имеет вид

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} + \frac{\partial s_4}{\partial x_4} = 0, \quad (63.7)$$

где  $s_1 = \rho v_x$ ,  $s_2 = \rho v_y$ ,  $s_3 = \rho v_z$ ,  $s_4 = ic\rho$ .

Если предположить, что совокупность величин  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ ,  $s_4$  образует четырехмерный вектор, то (63.7) является релятивистски инвариантным уравнением, выражающим равенство нулю четырехмерной дивергенции вектора  $s_v$ . Четырехмерный вектор  $s_v$  с компонентами

$$\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, ic\rho \quad (63.8)$$

называется четырехмерной плотностью тока.

С помощью четырехмерного потенциала и четырехмерной плотности тока уравнения (63.1) и (63.2) можно записать в виде

$$\square \Phi_v = -\mu_0 s_v, \quad (63.9)$$

где  $\square$  — инвариантный оператор Даламбера (62.6). Следовательно, (63.9) является правильным тензорным уравнением.

Таким образом, если предположить, что величины  $\Phi_v$  и  $s_v$  образуют четырехмерные векторы, то (63.1) — (63.4) являются релятивистски инвариантными уравнениями. Но образуют ли они в действительности четырехмерные векторы, можно проверить только сопоставлением с экспериментом многочисленных следствий этого предположения. Экспериментальное подтверждение этих следствий показывает, что величины (63.6) и (63.8) действительно являются четырехмерными векторами.

Пусть в системе координат  $K'$  заряд покоится и имеет плотность  $\rho_0$ . В ней компоненты вектора четырехмерного тока равны:

$$s'_1 = s'_2 = s'_3 = 0, \quad s'_4 = ic\rho_0. \quad (63.10)$$

В системе координат, относительно которой этот заряд движется со скоростью  $v$ , составляющие четырехмерного тока получаются по формулам преобразования (61.20):

$$s_1 = \frac{s'_1 - i\beta s'_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\rho_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$s_2 = s'_2 = 0, \quad s_3 = s'_3 = 0, \quad (63.11)$$

$$s_4 = \frac{i\beta s'_1 + s'_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{ic\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Поскольку, по определению,  $s_1 = \rho v$  и  $s_4 = ic\rho$ , из этих формул следует, что плотность движущегося заряда больше плотности неподвижного:

$$\rho = \rho_0 / \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (63.12)$$

Отсюда заключаем, что заряд  $dq$  в некотором объеме есть инвариантная величина. Если некоторый объем  $dV_0$  движется со скоростью  $v$ , то из-за сокращения масштабов в направлении его движения он уменьшается и становится равным

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (63.13)$$

Это соотношение в комбинации с (63.12) дает

$$dq = \rho dV = \rho_0 dV_0 = dq_0, \quad (63.14)$$

т. е. заряд есть инвариантная величина.

Формулы (63.8) для компонент плотности четырехмерного тока с учетом (63.12) принимают следующий вид:

$$s_1 = \rho_0 v_x / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad s_2 = \rho_0 v_y / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (63.15)$$

$$s_3 = \rho_0 v_z / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad s_4 = ic\rho_0 / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Воспользовавшись выражениями (61.27) для компонент четырехмерной скорости  $u_v$ , найдем

$$s_v = \rho_0 u_v, \quad (63.16)$$

где  $s_v$  и  $u_v$  — четырехмерные векторы,  $\rho_0$  — скаляр. Это уравнение можно рассматривать как естественное определение четырехмерного вектора плотности тока.

Независимость заряда от скорости движения подтверждена многими опытами. В частности, если бы это было не так, то не было бы нейтральности атомов. Поэтому можно было бы исходить из соотношения (63.14) как из экспериментального факта и строго доказать, что величины  $s_v$  образуют четырехмерный вектор.

## § 64. ТЕНЗОРНАЯ ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Для того чтобы сформулировать теорию явно в релятивистски инвариантном виде, необходимо записать ее уравнения в тензорной форме.



## Уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \rho \mathbf{v} + \partial \mathbf{D} / \partial t, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (64.1)$$

могут быть записаны в виде четырех уравнений для компонент векторов:

$$\begin{aligned} 0 + \frac{\partial H_z}{\partial x_2} - \frac{\partial H_y}{\partial x_3} - \frac{\partial (icD_x)}{\partial x_4} &= \rho v_x, \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x_1} + 0 + \frac{\partial H_x}{\partial x_3} - \frac{\partial (icD_y)}{\partial x_4} &= \rho v_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x_1} - \frac{\partial H_x}{\partial x_2} + 0 - \frac{\partial (icD_z)}{\partial x_4} &= \rho v_z, \\ \frac{\partial (icD_x)}{\partial x_1} + \frac{\partial (icD_y)}{\partial x_2} + \frac{\partial (icD_z)}{\partial x_3} + 0 &= ic\rho. \end{aligned} \quad (64.2)$$

Как видно из (63.8), в уравнениях (64.2) в правых частях стоят компоненты вектора четырехмерного тока. Поэтому ясно, что и четыре величины, стоящие в левой части этих уравнений, должны образовывать четырехмерный вектор. Все они имеют вид четырехмерной дивергенции (62.4). Если же четырехмерная дивергенция некоторой величины образует четырехмерный вектор, то сама величина должна быть тензором второго ранга. Уравнения (64.2) показывают, что этот тензор имеет вид

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (64.3)$$

С помощью этого тензора уравнения (64.2) записываются в виде следующего тензорного уравнения:

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = s_\mu, \quad (64.4)$$

где  $s_\mu$  определено равенством (63.8) или (63.16).

Два векторных уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

в компонентах запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (cB_x)}{\partial x_4} + \frac{\partial (-iE_z)}{\partial x_2} + \frac{\partial (iE_y)}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial (-iE_z)}{\partial x_1} + \frac{\partial (iE_x)}{\partial x_3} + \frac{\partial (-cB_y)}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial (iE_x)}{\partial x_2} + \frac{\partial (cB_z)}{\partial x_4} + \frac{\partial (-iE_y)}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial (cB_z)}{\partial x_3} + \frac{\partial (cB_x)}{\partial x_1} + \frac{\partial (cB_y)}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (64.5)$$

Введем тензор

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (64.6)$$

С его помощью уравнения (64.5) могут быть записаны в виде тензорных:

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (64.7)$$

где  $\mu$ ,  $\nu$  и  $\lambda$  принимают значения 1, 2, 3, 4, причем  $\mu \neq \nu \neq \lambda$ .

Всевозможных комбинаций индексов в уравнениях (64.7) может быть больше, чем четыре, но различных по существу уравнений среди (64.7) только четыре. Это видно из следующего. Если среди индексов имеются равные, то из-за антисимметричности тензора (64.6) соответствующее уравнение обращается тождественно в нуль. Например, пусть  $\mu = \nu$ . Тогда (64.7) принимает вид

$$\frac{\partial H_{\mu\mu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial H_{\mu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_\mu} = 0. \quad (64.8)$$

Но это не уравнение, а просто тождество, поскольку  $H_{\mu\mu} = 0$ ,  $H_{\mu\lambda} = -H_{\lambda\mu}$ . Поэтому среди (64.7) существенными являются лишь четыре уравнения, в которых  $\mu \neq \nu \neq \lambda$ ,

т. е. те, где индексы  $\mu, \nu, \lambda$  принимают значения

$$(\mu, \nu, \lambda) = (2, 3, 4), (3, 4, 1), (4, 1, 2), (1, 2, 3). \quad (64.9)$$

Эти комбинации индексов в уравнении (64.7) дают как раз уравнения (64.5).

Остается записать в инвариантной форме уравнения

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (64.10)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что уравнения (64.10) могут быть записаны в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^4 F_{\mu\nu} u_{\nu}^{(0)} &= \varepsilon_0 \sum_{\nu=1}^4 H_{\mu\nu} u_{\nu}^{(0)}, \\ \frac{1}{c} (H_{\mu\nu} u_{\lambda}^{(0)} + H_{\nu\lambda} u_{\mu}^{(0)} + H_{\lambda\mu} u_{\nu}^{(0)}) &= \\ = \mu_0 (F_{\mu\nu} u_{\lambda}^{(0)} + F_{\nu\lambda} u_{\mu}^{(0)} + F_{\lambda\mu} u_{\nu}^{(0)}), \end{aligned} \right\} \quad (64.11)$$

где  $u_{\nu}^{(0)}$  — компонента четырехмерной скорости покоящейся системы координат:

$$u_{\nu}^{(0)} = (0, 0, 0, ic). \quad (64.12)$$

Но уравнения (64.11) имеют тензорный вид. Поэтому они справедливы и для системы координат, которая движется со скоростью  $\mathbf{v}$ ; следовательно, четырехмерная скорость

$$u_{\nu} = \left( \frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \right), \quad (64.13)$$

где  $\beta = v/c$ . Уравнения (64.11) для движущейся системы координат имеют такой же вид, только вместо  $u_{\nu}^{(0)}$  в них стоит четырехмерная скорость  $u_{\nu}$ :

$$\frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^4 F_{\mu\nu} u_{\nu} = \varepsilon_0 \sum_{\nu=1}^4 H_{\mu\nu} u_{\nu}, \quad (64.14)$$

$$\frac{1}{c} (H_{\mu\nu} u_{\lambda} + H_{\nu\lambda} u_{\mu} + H_{\lambda\mu} u_{\nu}) = \mu_0 (F_{\mu\nu} u_{\lambda} + F_{\nu\lambda} u_{\mu} + F_{\lambda\mu} u_{\nu}).$$

Если эти уравнения расписать по компонентам и представить в векторной форме, то

$$\mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (64.15)$$

$$\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} = \mu_0 (\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}).$$

При  $\mathbf{v} = 0$  эти уравнения, как и следовало ожидать, переходят в (64.10) для покоящейся системы координат. Более подробно смысл (64.15) мы обсудим позднее.

Таким образом, с помощью тензоров  $F_{\mu\nu}$  и  $H_{\mu\nu}$ , определяемых равенствами (64.3) и (64.6), уравнения Максвелла записываются в виде следующих тензорных уравнений:

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = S_\mu, \quad (64.16)$$

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (64.17)$$

$$\frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^4 F_{\mu\nu} u_\nu = \varepsilon_0 \sum_{\nu=1}^4 H_{\mu\nu} v_\nu, \quad (64.18)$$

$$\frac{1}{c} (H_{\mu\nu} u_\lambda + H_{\nu\lambda} u_\mu + H_{\lambda\mu} u_\nu) = \mu_0 (F_{\mu\nu} u_\lambda + F_{\nu\lambda} u_\mu + F_{\lambda\mu} u_\nu), \quad (64.19)$$

где  $F_{\mu\nu}$  и  $H_{\mu\nu}$  — тензоры электромагнитного поля.

## § 65. ТЕНЗОРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

**Тензоры.** Прежде всего необходимо убедиться, что величины  $F_{\mu\nu}$  и  $H_{\mu\nu}$  действительно являются тензорами. Для этого воспользуемся формулами, выражающими напряженность электромагнитного поля через потенциалы:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (65.1)$$

С помощью четырехмерного потенциала  $\Phi_\nu$  [см. 63.6)] эти уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} E_x &= ic \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \right), & B_x &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}, \\ E_y &= ic \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_4} \right), & B_y &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1}, \\ E_z &= ic \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_4} \right), & B_z &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (65.2)$$

Поэтому совокупность величин (64.6) может быть представлена в форме

$$H_{\mu\nu} = c (\partial \Phi_\nu / \partial x_\mu - \partial \Phi_\mu / \partial x_\nu). \quad (65.3)$$

Но  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  и  $\Phi_4$  составляют четырехмерный вектор. Совокупность производных от компонент четырехмерного вектора по четырехмерным координатам составляет тензор (см. § 61). Разность тензоров есть также тензор. Таким образом, из векторного характера  $\Phi_\nu$  следует, что совокупность величин  $H_{\mu\nu}$  является тензором.

Чтобы доказать, что совокупность величин  $F_{\mu\nu}$  составляет также тензор, заметим, что  $F_{\mu\nu}$  выражаются через тензор  $H_{\mu\nu}$  с помощью формулы

$$F_{\mu\nu} = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} H_{\mu\nu}. \quad (65.4)$$

Поскольку  $H_{\mu\nu}$  является тензором, величины  $F_{\mu\nu}$  также образуют тензор, так как они отличаются от  $H_{\mu\nu}$  лишь постоянным множителем.

Таким образом, доказано, что величины  $F_{\mu\nu}$  и  $H_{\mu\nu}$  являются тензорами. Отсюда следует, что при переходе от одной системы координат к другой они должны преобразовываться по формулам преобразования для тензоров:

$$F'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha, \Gamma} a_{\mu\alpha} a_{\nu\Gamma} F_{\alpha\Gamma}, \quad H'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha, \Gamma} a_{\mu\alpha} a_{\nu\Gamma} H_{\alpha\Gamma}. \quad (65.5)$$

**Преобразование полей.** Коэффициенты  $a_{\alpha\nu}$  в формуле (65.5) даются матрицей (61.176). Пользуясь выражениями для этих коэффициентов, можно формулы (65.5) записать в трехмерных обозначениях:

$$D'_x = D_x, \quad H'_x = H_x,$$

$$D'_y = \frac{D_y - vH_z/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad H'_y = \frac{H_y + vD_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (65.6)$$

$$D'_z = \frac{D_z + vH_y/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad H'_z = \frac{H_z - vD_y}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$E'_x = E_x, \quad B'_x = B_x,$$

$$E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B'_y = \frac{B_y + vE_z/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (65.7)$$

$$E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B'_z = \frac{B_z - vE_y/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где  $\beta = v/c$ , а  $v$  — скорость системы координат  $K'$  относительно  $K$ . Обратные формулы преобразования получают заменой величин, взятых со штрихом, на величины без штриха, и наоборот, и изменением знака у скорости  $v$ . Формулы (65.7), как и следовало ожидать, совпадают с (4.36). Формулы (65.6) и (65.7) удобно записать также в векторном виде, в котором они более наглядны:

$$\mathbf{D}'_{\parallel} = \mathbf{D}_{\parallel}, \quad \mathbf{D}'_{\perp} = \left( \frac{\mathbf{D} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)_{\perp}, \quad (65.8)$$

$$\mathbf{H}'_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel}, \quad \mathbf{H}'_{\perp} = \left( \frac{\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)_{\perp},$$

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \left( \frac{\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)_{\perp},$$

$$(65.9)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \left( \frac{\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)_{\perp},$$

где  $\parallel$  и  $\perp$  означают, что берется составляющая соответствующей величины, параллельная скорости относительного движения систем координат или перпендикулярная ей.

Эти формулы показывают, что уравнения (64.15) являются не чем иным, как записью уравнений

$$\mathbf{D}' = \varepsilon_0 \mathbf{E}', \quad \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{H}'$$

в системе координат  $K'$ , принятой за неподвижную. Формулы (65.6) и (65.7) позволяют найти векторы поля в движущейся системе координат, если они известны в неподвижной, и наоборот.

В случае малых скоростей относительного движения систем координат, когда можно пренебречь членами порядка  $\beta^2 \ll 1$ , формулы (65.6) и (65.7) приобретают более простой вид:

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D} + c^{-2} \mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H} - c^{-2} \mathbf{v} \times \mathbf{D}, \quad (65.10)$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - c^{-2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (65.11)$$

Эти уравнения особенно отчетливо иллюстрируют различную роль векторов поля. Они показывают, что векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  магнитного поля играют роль, соответственно аналогичную векторам  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  в электрическом поле. Поэтому если вектор  $\mathbf{E}$  является напряженностью электрического поля, то правильно было бы называть напряженностью магнитного поля вектор  $\mathbf{B}$ . Однако, как указывалось выше, это название закрепилось за вектором  $\mathbf{H}$ , хотя это и не совсем правильно. Фактически вектор  $\mathbf{H}$  играет роль индукции. Изменять терминологию в настоящее время не представляется возможным, но об истинном значении векторов магнитного поля необходимо помнить.

**Инварианты тензоров поля.** С помощью формул (65.6) — (65.9) прямым вычислением можно проверить, что при переходе от одной системы координат к другой не изменяют своей величины следующие инварианты:

$$\begin{aligned} I_1 &= c^2 B^2 - E^2, & I_1' &= H^2 - c^2 D^2, \\ I_2 &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}, & I_2' &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{D}, \\ I_3 &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (65.12)$$

Инвариантность этих величин позволяет сделать некоторые выводы о поведении векторов поля при переходе от одной системы координат к другой:

1) если в некоторой системе координат  $c^2 B^2 > E^2$  и  $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$ , то возможно выбрать такую систему координат, где электрическое поле отсутствует, а магнитное отлично от нуля. Если же  $\mathbf{B}$  не перпендикулярно  $\mathbf{E}$ , то такой системы координат не существует;

2) если в некоторой системе координат  $c^2B^2 < E^2$  и  $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$ , то возможно выбрать такую систему координат, где магнитное поле отсутствует, а электрическое отлично от нуля. Если же  $\mathbf{B}$  не перпендикулярно  $\mathbf{E}$ , то такой системы координат не существует;

3) если в какой-либо системе координат имеется только электрическое или только магнитное поле, то при переходе к другой системе координат имеются, вообще говоря, как электрическое, так и магнитное поля, которые перпендикулярны друг другу;

4) плоская волна, для которой  $cB = E$  и  $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$ , во всех системах координат остается плоской.

Все эти утверждения относятся к поведению векторов поля в одной какой-либо точке четырехмерного мира.

## § 66. ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ СИЛЫ

**Четырехмерный вектор плотности силы.** Запишем плотность силы Лоренца

$$\mathbf{f} = \rho (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (66.1)$$

в компонентах векторов с учетом (64.6) и (63.8):

$$\begin{aligned} f_x &= (\dots + H_{12}s_2 + H_{13}s_3 + H_{14}s_4)/c, \\ f_y &= (H_{21}s_1 + \dots + H_{23}s_3 + H_{24}s_4)/c, \\ f_z &= (H_{31}s_1 + H_{32}s_2 + \dots + H_{34}s_4)/c. \end{aligned} \quad (66.2)$$

Симметричная структура этих уравнений позволяет ввести четырехмерный вектор плотности силы по формуле

$$f_\mu = \frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^4 H_{\mu\nu} s_\nu. \quad (66.3)$$

Первые три компонента ( $f_1, f_2, f_3$ ) совпадают с пространственными компонентами плотности силы Лоренца (66.1), а четвертая равна

$$f_4 = (H_{41}s_1 + H_{42}s_2 + H_{43}s_3)/c = i\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}/c. \quad (66.4)$$

С помощью (66.1)  $f_4$  представляется в виде

$$f_4 = i\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} c. \quad (66.5)$$

Таким образом, эта слагающая с точностью до множителя  $i/c$  равна работе, совершаемой силой с плотностью



$\mathbf{f}$  в единицу времени в единице объема (поскольку  $\mathbf{f}$  — плотность силы, эта работа отнесена к единице объема).

**Четырехмерный вектор силы Минковского.** Чтобы вычислить полную силу, действующую на заряд, заключенный в некотором объеме, необходимо произвести интегрирование плотности силы:

$$F_v = \int f_v dV, \quad (66.6)$$

где  $dV$  — элемент пространственного объема. Однако величины  $F_v$  не образуют четырехмерный вектор, потому что элемент пространственного объема  $dV$  не является инвариантом.

Чтобы получить четырехмерный вектор силы, действующей на точечный электрон, заметим, что элемент четырехмерного объема  $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$  инвариантен относительно преобразований Лоренца. Для доказательства этого утверждения выпишем формулу преобразования элементов объема при замене переменных:

$$dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4 = \frac{D(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \quad (66.7)$$

где

$$\frac{D(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_4}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x'_1}{\partial x_4} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_4} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_4} & \frac{\partial x'_4}{\partial x_4} \end{vmatrix}$$

— определитель Якоби. Он равен определителю, построенному из коэффициентов преобразования (61.18). Нетрудно проверить непосредственным вычислением, что этот определитель равен единице. Поэтому (66.7) принимает вид равенства

$$dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4 = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \quad (66.8)$$

которое доказывает инвариантность четырехмерного объема. Считая, что точечный электрон находится в элементе объема  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ , с помощью четырехмерного вектора плотности силы  $\mathbf{f}_v$  и инвариантного четырехмер-

ного объема можно построить четырехмерный вектор импульса силы:

$$dP_v = f_v dx_3 dx_2 dx_1 dt. \quad (66.9)$$

Разделив обе части равенства на инвариантный элемент собственного времени электрона  $d\tau$  и интегрируя по пространственным координатам, получим четырехмерный вектор силы, действующей на электрон:

$$K_v = \int \frac{dP_v}{d\tau} = \int f_v dV \frac{dt}{d\tau} = \int f_v \frac{dV}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (66.10)$$

где  $d\tau = dt \sqrt{1-\beta^2}$ ,  $K_v$  — сила Минковского.

В случае точечного электрона интегрирование по объему в (66.10) сводится к использованию формулы

$$\int \rho dV = e. \quad (66.11)$$

Следовательно, первые три составляющие силы Минковского равны трем составляющим силы Лоренца

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (66.12)$$

деленным на  $\sqrt{1-\beta^2}$ , а четвертая составляющая на основании (66.4) равна

$$K_4 = \frac{i}{c} \frac{e}{\sqrt{1-\beta^2}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}). \quad (66.13)$$

Поэтому четырехмерную силу Минковского можно записать в виде

$$K = \left( \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{i}{c} \frac{e(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})}{\sqrt{1-\beta^2}} \right), \quad (66.14)$$

где  $\mathbf{F}$  определяется формулой (66.12).

## § 67. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

**Тензор.** Чтобы завершить запись величин и уравнений электромагнитного поля для вакуума в релятивистски инвариантной форме, необходимо еще найти релятивистски инвариантное представление плотности энергии и импульса электромагнитного поля. Работа сил электро-

магнитного поля, по закону сохранения энергии и импульса, сопровождается соответствующим изменением энергии и импульса электромагнитного поля. Следовательно, четырехмерный вектор  $\hat{f}_\nu$  силы должен быть связан с плотностью энергии и импульса электромагнитного поля. Поэтому выразим этот вектор через величины, характеризующие электромагнитное поле, т. е. через тензоры  $F_{\mu\nu}$  и  $H_{\mu\nu}$  поля.

Подставляя в (66.3) выражение для  $s_\nu$  из уравнений Максвелла (64.4), получаем

$$f_\mu = \frac{1}{c} \sum_{\alpha, \gamma} H_{\mu\alpha} \frac{\partial F_{\alpha\gamma}}{\partial x_\gamma}. \quad (67.1)$$

Воспользуемся очевидной формулой

$$H_{\mu\alpha} \frac{\partial F_{\alpha\gamma}}{\partial x_\gamma} = \frac{\partial (H_{\mu\alpha} F_{\alpha\gamma})}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial H_{\mu\alpha}}{\partial x_\gamma} F_{\alpha\gamma} \quad (67.2)$$

и учтем, что из-за антисимметрии тензоров  $H_{\mu\nu}$  и  $F_{\mu\nu}$  справедливо равенство

$$\frac{\partial H_{\mu\alpha}}{\partial x_\gamma} F_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial H_{\mu\alpha}}{\partial x_\gamma} F_{\alpha\gamma} + \frac{\partial H_{\alpha\mu}}{\partial x_\gamma} F_{\gamma\alpha} \right). \quad (67.3)$$

Из (67.3) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \gamma} \frac{\partial H_{\mu\alpha}}{\partial x_\gamma} F_{\alpha\gamma} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \gamma} \left( \frac{\partial H_{\mu\alpha}}{\partial x_\gamma} F_{\alpha\gamma} + \frac{\partial H_{\alpha\mu}}{\partial x_\gamma} F_{\gamma\alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \gamma} F_{\alpha\gamma} \left( \frac{\partial H_{\mu\alpha}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial H_{\gamma\mu}}{\partial x_\alpha} \right), \end{aligned} \quad (67.4)$$

где во втором члене произведено переобозначение индексов суммирования ( $\alpha \rightarrow \gamma$  и  $\gamma \rightarrow \alpha$ ):

$$\sum_{\alpha, \gamma} \frac{\partial H_{\alpha\mu}}{\partial x_\gamma} F_{\gamma\alpha} = \sum_{\alpha, \gamma} \frac{\partial H_{\gamma\mu}}{\partial x_\alpha} F_{\alpha\gamma}. \quad (67.5)$$

Выражение, стоящее в последних скобках (67.4), на основании (64.7) равно  $-\partial H_{\alpha\gamma}/\partial x_\mu$ . Следовательно,

$$\sum_{\alpha, \gamma} \frac{\partial H_{\mu\alpha}}{\partial x_\gamma} F_{\alpha\gamma} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \gamma} F_{\alpha\gamma} \frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial x_\mu}.$$

Для вычисления этой величины воспользуемся равенством (65.4). Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \gamma} F_{\alpha\gamma} \frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial x_{\mu}} &= \sum_{\alpha, \gamma} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} H_{\alpha\gamma} \frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial x_{\mu}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \sum_{\alpha, \gamma} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} H_{\alpha\gamma} H_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \sum_{\alpha, \gamma} F_{\alpha\gamma} H_{\alpha\gamma}. \end{aligned} \quad (67.6)$$

Следовательно, учитывая (67.2), (67.4) и (67.6), можно выражение (67.1) записать в виде

$$f_{\mu} = \frac{1}{c} \sum_{\gamma=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} \left( \sum_{\alpha=1}^4 H_{\mu\alpha} F_{\alpha\gamma} \right) + \frac{1}{4c} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \sum_{\alpha, \gamma} (F_{\alpha\gamma} H_{\alpha\gamma}). \quad (67.7)$$

Введем обозначение:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \sum_{\alpha=1}^4 H_{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \delta_{\mu\nu} \cdot \frac{1}{4c} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\gamma=1}^4 (F_{\alpha\gamma} H_{\alpha\gamma}), \quad (67.8)$$

где символ Кронекера определяется условием

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \nu, \\ 1 & \text{при } \mu = \nu. \end{cases}$$

Тогда выражение для плотности силы  $f_{\nu}$  можно представить в виде

$$f_{\mu} = \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}, \quad (67.9)$$

т. е. в виде четырехмерной дивергенции тензора  $T_{\mu\nu}$ . Тензор  $T_{\mu\nu}$  называется тензором энергии и импульса электромагнитного поля. Как видно из (67.8), он является симметричным. Выражение компонент этого тензора через напряженности электромагнитного поля может быть получено подстановкой в (67.8) выражений для  $F_{\mu\nu}$  и  $H_{\mu\nu}$  из (64.3) и (64.6).

Постоянный член формулы (67.8) выражается в виде

$$\frac{1}{4c} \sum_{\alpha, \gamma} (F_{\alpha\gamma} H_{\alpha\gamma}) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \}. \quad (67.10)$$

Остальные члены различных компонент тензора (67.8) вычисляются аналогично с помощью (64.3) и (64.6). Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 T_{xx} &= D_x E_x + H_x B_x - \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}), \\
 T_{xy} &= T_{yx} = D_x E_y + H_x B_y = E_x E_y + B_x H_y, \\
 T_{yy} &= D_y E_y + H_y B_y - \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}), \\
 T_{yz} &= T_{zy} = D_y E_z + H_y B_z = D_z E_y + B_y H_z, \\
 T_{zz} &= D_z E_z + H_z B_z - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}), \\
 T_{zx} &= T_{xz} = E_z D_x + B_z H_x = D_z E_x + B_x H_z.
 \end{aligned} \tag{67.11}$$

С их помощью и учитывая, что

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}/c^2,$$

$$\omega = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})/2,$$

можно записать тензор энергии и импульса в виде

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} & -icg_x \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} & -icg_y \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} & -icg_z \\ -\frac{i}{c} S_x & -\frac{i}{c} S_y & -\frac{i}{c} S_z & \omega \end{pmatrix}. \tag{67.12}$$

**Смысл различных компонент.** Выясним смысл компонент тензора  $T_{\mu\nu}$  и содержание различных уравнений (67.9).

Проинтегрируем четвертое ( $\mu=4$ ) уравнение (67.9) по трехмерному объему  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ :

$$\int_V f_4 dV = \int_V \left( \frac{\partial T_{41}}{\partial x} + \frac{\partial T_{42}}{\partial y} + \frac{\partial T_{43}}{\partial z} \right) dV + \frac{1}{ic} \frac{d}{dt} \int_V \omega dV. \tag{67.13}$$

Воспользовавшись для  $f_4$  формулой (66.5) и выражая

компоненты  $T_{4i}$  по (67.12), перепишем уравнение (67.13):

$$\int_V (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) dV = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{S} \cdot dV - \frac{d}{dt} \int_V \omega dV =$$

$$= - \int_S \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} - \frac{d}{dt} \int_V \omega dV, \quad (67.14)$$

где с помощью теоремы Гаусса — Остроградского интеграл по объему преобразован в интеграл по поверхности. Уравнение (67.14) совпадает с уравнением (8.11), выражающим закон сохранения энергии для электромагнитного поля.

Таким образом, уравнение (67.9) при  $\mu=4$  выражает закон сохранения энергии электромагнитного поля. Тем самым оправдано написание в последней строке (67.12) величин  $S_x, S_y, S_z$ , характеризующих поток энергии, а не величин  $g_x, g_y, g_z$ , характеризующих импульс, хотя

$$\mathbf{S}/c = c\mathbf{g}, \quad (67.15)$$

и формально можно было бы три члена в последнем столбце (67.12) поменять местами с тремя членами в последней строке.

Теперь рассмотрим одно из первых трех уравнений (67.9), например первое при  $\mu=1$ . Аналогично проинтегрируем его по трехмерному объему:

$$\int_V f_1 dV = \int_V \left( \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial z} \right) dV + \frac{1}{ic} \frac{d}{dt} \int_V T_{14} dV. \quad (67.16)$$

Так как  $f_1 = f_x$  есть  $x$ -я составляющая плотности силы, то в левой части (67.16) находится сила, действующая на заряды в объеме  $dV$ . Последнее слагаемое в (67.16), равное  $-\frac{d}{dt} \int_V g_x dV$ , дает изменение  $x$ -й составляющей им-

пульса электромагнитного поля в объеме  $dV$ . Величины  $T_{1i}$ , стоящие в первом интеграле (67.16), можно рассматривать как различные компоненты вектора  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{F}_x = T_{11}, \quad \mathcal{F}_y = T_{12}, \quad \mathcal{F}_z = T_{13}. \quad (67.17)$$

Тогда по формуле Гаусса — Остроградского этот интеграл можно преобразовать в интеграл по поверхности:

$$\int_V \left( \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial z} \right) dV = \int_V \operatorname{div} \mathcal{F} dV = \int_S \mathcal{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (67.18)$$

Левая часть (67.16) представляет силу. Следовательно, и интеграл (67.18) должен иметь размерность силы. Поэтому можно заключить, что он представляет  $x$ -ю составляющую поверхностных сил, действующих на поверхность объема  $V$ .

Сила

$$\int_V \mathbf{f}_1 dV, \quad (67.19)$$

по законам классической механики, вызывает изменение импульса  $G^x$  материальных частиц. Тогда

$$\frac{dG_x^m}{dt} = \int_V \mathbf{f}_1 dV. \quad (67.20)$$

Таким образом, уравнение (67.16) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left( G_x^m + \int_V g_x dV \right) = \int_S \mathcal{F} dS. \quad (67.21)$$

Оно совпадает с уравнением (52.9), которое было получено прямым вычислением сил, действующих на заряды, заключенные в объеме  $V$ .

Аналогичный вид уравнения (67.9) имеют и для  $\mu=2,3$ . Они выражают закон сохранения импульса, поскольку связывают полную действующую на объем силу, стоящую в правой части уравнения (67.21), с изменением импульса материальных тел и электромагнитного поля, заключенных в этом объеме.

**Тензор натяжений.** Таким образом, анализ физического содержания четвертого уравнения (67.9) приводит к толкованию величин  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  как составляющих плотности потока энергии, а величины  $w$  — как плотности энергии электромагнитного поля. Анализ физического содержания первых трех уравнений (67.9) приводит к толкованию величин  $g_x$ ,  $g_y$ ,  $g_z$  как составляющих плотности импульса электромагнитного поля. Величины  $T_{xx}$ ,  $T_{xy}$  и т. д. характеризуют поверхностные силы, приложенные

к поверхности объема  $V$ . Поэтому трехмерный тензор

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad (67.22)$$

называется тензором натяжений. Силы, обусловливаемые этим тензором, вычисляются по формулам (67.18). Формула (67.8) показывает, что тензор энергии-импульса является симметричным. Из его симметрии и независимо от установленного смысла величин  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{g}$  следует основное соотношение между плотностью потока энергии и плотностью импульса электромагнитного поля:

$$\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2. \quad (67.23)$$

**О магнитных зарядах.** Система уравнений Максвелла (44.3а) не является симметричной относительно электрических и магнитных величин. В частности, уравнение (44.3аIII) показывает, что не существует магнитных зарядов, которые были бы источниками магнитного поля, в то время как имеются электрические заряды, которые в соответствии с уравнением (44.3аIV) порождают электрическое поле.

Однако такого рода асимметрия является только кажущейся. Уравнения Максвелла могут быть записаны в полностью симметричной форме при условии, что каждый носитель электрического заряда обладает также и магнитным зарядом, причем отношение электрического заряда к магнитному имеет одинаковое значение для всех носителей зарядов. Будем обозначать плотность электрических зарядов  $\rho_q$ , а плотность электрического тока — через  $\mathbf{j}_q$ . Плотность магнитного заряда и тока обозначим соответственно  $\rho_m$  и  $\mathbf{j}_m$ . Тогда уравнения Максвелла (44.3а) в симметричной форме записываются, очевидно, в таком виде:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (\text{I})$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mathbf{j}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{II})$$

$$\text{div } \mathbf{B} = \rho_m, \quad (\text{III})$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_q. \quad (\text{IV})$$

(67.24)



Закон сохранения (3.6) для магнитных зарядов записывается в виде

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0. \quad (67.25)$$

Спрашивается: отличается ли электродинамика, построенная в рамках уравнений (67.24) от электродинамики, построенной в рамках уравнений (44.3а), и можно ли обнаружить магнитные заряды и токи, входящие в уравнения (67.24)?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим следующие преобразования полей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' \cos \alpha + \mathbf{H}' \mu_0 c \sin \alpha, \quad (67.26a)$$

$$\mathbf{H} = -\mathbf{E}' \epsilon_0 c \sin \alpha + \mathbf{H}' \cos \alpha;$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}' \cos \alpha + \mathbf{B}' \epsilon_0 c \sin \alpha, \quad (67.26b)$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{D}' \mu_0 c \sin \alpha + \mathbf{B}' \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  — некоторый действительный угол. Непосредственной проверкой убеждаемся, что преобразования (67.26) оставляют инвариантными величины  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  и  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$ , а также компоненты тензора  $T_{\mu\nu}$ , задаваемые таблицей (67.12). Это означает, что поток энергии, плотность энергии и плотность силы (67.9) не изменяются при преобразованиях (67.26) и, следовательно, эти преобразования не изменяют физической ситуации.

Спрашивается: как должны преобразовываться источники полей при преобразовании полей по формулам (67.26)? Ясно, что они должны преобразовываться так, чтобы удовлетворять требованиям релятивистской инвариантности теории, т. е. должны оставлять ковариантными уравнения (67.24). Подставляя (67.26) в (67.24), находим из требования ковариантности получаемых уравнений следующие формулы преобразования:

$$\rho_q = \rho'_q \cos \alpha + \rho'_m \sin \alpha, \quad (67.27a)$$

$$\rho_m = -\rho'_q \sin \alpha + \rho'_m \cos \alpha;$$

$$\mathbf{j}_q = \mathbf{j}'_q \cos \alpha + \mathbf{j}'_m \sin \alpha,$$

$$\mathbf{j}_m = -\mathbf{j}'_q \sin \alpha + \mathbf{j}'_m \cos \alpha. \quad (67.27b)$$

Таким образом, одновременное выполнение преобразований (67.26) и (67.27) не изменяет вида уравнений Максвелла (67.24) и описываемой ими физической ситуации. Величина  $\alpha$  может быть выбрана произвольно. Как непосредственно видно из (67.27), от выбора  $\alpha$  зависит, с какой «интенсивностью» в избранной картине будут присутствовать электрические и магнитные компоненты носителей зарядов. Можно считать, что все электрически заряженные частицы обладают магнитными зарядами, отношение которых к электрическим зарядам одинаково для всех частиц. Для простоты принято считать, что это отношение равно нулю, т. е. магнитные заряды частиц равны нулю. Для этого угол  $\alpha$  выбирается так, что  $\rho_m = 0$  и  $\mathbf{j}_m = 0$ . Уравнения (67.24) в этом случае принимают вид (44.3а). Таким образом, утверждение об отсутствии магнитного заряда у заряженных частиц не имеет само по себе физического смысла. Физически содержательным является лишь вопрос о том, все ли частицы имеют одинаковое отношение магнитного заряда к электрическому. Если это отношение не одинаково у всех частиц, то магнитный заряд станет физической реальностью, которую можно наблюдать в экспериментах.

Дирак на основании квантовомеханических аргументов пришел к выводу, что магнитные заряды должны существовать в природе. Частица, несущая магнитный заряд, получила название монополя Дирака. В течение многих лет проводились их поиски, но безрезультатно. В настоящее время не существует экспериментальных свидетельств существования монополя Дирака.

## § 68. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

**Инвариантность плоской волны.** Как уже было отмечено, понятие плоской волны инвариантно относительно преобразований Лоренца: плоская волна во всех системах координат является плоской. Напряженность электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в случае плоской волны определяется амплитудами  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  и фазами  $\varphi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (68.1)$$

**Инвариантность фазы.** Фаза волны является инвариантом преобразований Лоренца. Это можно доказать следующим образом. Утверждение о том, что в некоторой

пространственно-временной точке напряженности поля волны равны нулю, является справедливым во всех системах координат. Но это означает, что фаза волны во всех системах координат равна одному и тому же значению, кратному целому числу  $\pi$ , что доказывает ее инвариантность. Инвариантность фазы следует также из формул преобразования для векторов поля. Выписав известные формулы преобразования для векторов поля и подставив в них выражения векторов поля плоской волны (68.1), сразу же можно заключить, что для справедливости этих формул преобразования при всех моментах времени необходимо равенство фаз.

**Четырехмерный волновой вектор.** Фазу можно представить в виде

$$-\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4. \quad (68.2)$$

Произведение (68.2) инвариантно. Оно имеет вид скалярного произведения четырехмерного вектора  $x_1, x_2, x_3, x_4$  на совокупность величин  $k_1, k_2, k_3, k_4$ :

$$\mathbf{k}_1 = k_x, \quad k_2 = k_y, \quad k_3 = k_z, \quad k_4 = i\omega/c. \quad (68.3)$$

Из инвариантности (68.2) и из того, что совокупность  $x_1, x_2, x_3, x_4$  образует четырехмерный вектор, следует, что совокупность величин (68.3) также образует четырехмерный вектор, который называется четырехмерным волновым вектором  $k$ .

**Формулы преобразования частоты и направления.** Если обозначить через  $\mathbf{n}$  единичный вектор в направлении распространения плоской волны, то волновой вектор имеет вид

$$\mathbf{k} = \omega \mathbf{n} / c. \quad (68.4)$$

Поскольку совокупность  $k_1, k_2, k_3, k_4$  составляет четырехмерный вектор, на основании формул преобразования векторов получаем следующие формулы преобразования частоты и направления плоской волны:

$$\omega n_x = \omega' (\beta + n'_x) / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \omega n_y = \omega' n'_y, \quad (68.5)$$

$$\omega n_z = \omega' n'_z, \quad \omega = \omega' (1 + \beta n'_x) / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

**Эффект Доплера** состоит в изменении частоты света в зависимости от движения излучающего источника. Чет-

вертая формула (68.5) описывает эффект Доплера. От классической формулы эффекта Доплера эта формула отличается наличием в знаменателе члена  $\sqrt{1-\beta^2}$ , который учитывает релятивистское замедление времени движущегося излучателя. Поэтому экспериментальная проверка релятивистского эффекта Доплера должна дать подтверждение замедления времени. Такой опыт был выполнен Айвсом (1938 г.).

Из последнего уравнения (68.5), воспользовавшись принципом относительности, или же первым уравнением (68.5), получаем формулу

$$\omega = \omega' \sqrt{1-\beta^2} / (1 - \beta n_x), \quad (68.6)$$

которая описывает эффект Доплера;  $n_x$  — косинус угла между направлением движения светового луча и осью  $X$ . Источник предполагается движущимся в направлении положительных значений оси  $X$  со скоростью  $v$  ( $\beta = v/c$ ).

**Продольный эффект Доплера.** Если направление луча совпадает с направлением движения источника, т. е. в данном случае с направлением оси  $X$ , то получается хорошо известный из классической оптики продольный эффект Доплера. В этом случае  $n_x = n_x' = \pm 1$  и формула (68.6) при  $\beta \ll 1$  принимает вид

$$\omega = \omega' \sqrt{1-\beta^2} / (1 \mp \beta) \approx \omega' (1 \pm \beta), \quad (68.7)$$

где сохранен лишь линейный по  $\beta$  член. Эта формула совпадает с классической формулой для эффекта Доплера, которая хорошо проверена экспериментально.

**Поперечный эффект Доплера.** В случае, когда источник излучения движется перпендикулярно направлению наблюдения ( $n_x = 0$ ), проявляется поперечный эффект Доплера ( $\beta \ll 1$ ):

$$\omega = \omega' \sqrt{1-\beta^2} \approx \omega' (1 - \beta^2/2). \quad (68.8)$$

Это эффект второго порядка малости по  $\beta = v/c$ . Он обусловлен исключительно наличием множителя  $\sqrt{1-\beta^2}$  в (68.5) и является чисто релятивистским эффектом, связанным с замедлением времени движущегося излучателя. Экспериментально наличие этого эффекта подтверждено Айвсом.

**Опыты Айвса.** Айвс пользовался излучением атомов водорода, движущихся со скоростями до  $1,8 \cdot 10^6$  м/с

( $\beta \approx 6 \cdot 10^{-3}$ ). При наблюдении эффекта Доплера одновременно имеет место как эффект, пропорциональный  $\beta$ , так и пропорциональный  $\beta^2$ . Ясно, что наблюдать непосредственно эффект (68.8) довольно затруднительно. Для этого необходимо было бы фиксировать угол между направлением движения частиц и перпендикуляром к нему, в котором необходимо наблюдать излучение с точностью до угла  $\alpha \ll 6 \cdot 10^{-3}$ . Поэтому Айвс наблюдал наличие релятивистского члена в эффекте Доплера по-другому: в направлении движения и против направления движения. Обе линии, имеющие частоты

$$\omega_1 = \omega' (1 + \beta) / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \omega_2 = \omega' (1 - \beta) / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (68.9)$$

а также линия покоящегося атома  $\omega_0 = \omega'$  фотографировались на одной и той же пластинке. Средняя частота смещенных линий (68.9) равна

$$\langle \omega \rangle = \omega' / \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (68.10)$$

Положение этой средней частоты измерялось относительно несмещенной частоты  $\omega_0$ . При этом была подтверждена зависимость (68.10), т. е. наличие  $\sqrt{1 - \beta^2}$  в формулах для эффекта Доплера. Это означает, что опыты Айвса дали как подтверждение поперечного эффекта Доплера (68.8), так и подтверждение эффекта замедления времени движущихся часов.

## § 69. ПЛОСКАЯ ВОЛНА

### Преобразование амплитуды и частоты плоской волны.

Рассмотрим случай, когда волновой вектор (68.4) плоской волны лежит в плоскости  $XU$  (рис. 59). Для напряженностей плоской волны в этом случае имеем следующие выражения:

$$E_x = -an_y e^{i\varphi}, \quad E_y = an_x e^{i\varphi}, \quad H_z = a e^{i\varphi}, \quad (69.1)$$

где  $\varphi$  — фаза волны, инвариантная относительно преобразований Лоренца. Пользуясь (65.6) и (65.7), получаем следующие формулы для преобразования амплитуды и направления нормали плоской волны:

$$a = a' (1 + \beta n'_x) / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad n_x a = a' (n'_x + \beta) / \sqrt{1 - \beta^2},$$

$$n_y a = n'_y a'. \quad (69.2)$$

Делением второго и третьего уравнений на первое находим формулы для преобразования компонент вектора нормали плоской волны:

$$n_x = (n'_x + \beta)/(1 + \beta n'_x), \quad n_y = n'_y \sqrt{1 - \beta^2} / (1 + \beta n'_x). \quad (69.3)$$

Они совпадают с соответствующими выражениями, аналогично получающимися из (68.5). С другой стороны, разделив первое из уравнений (69.2) на последнее из уравнений (68.5), получаем следующее соотношение между амплитудами и частотами плоской волны:

$$a/\omega = a'/\omega' = \text{inv}, \quad (69.4)$$

которое остается инвариантным при преобразованиях Лоренца.

**Энергия плоской волны.** Энергия цуга волн, заключенных в объеме  $V$ , на основании формулы (8.12) равна

$$W = \epsilon a^2 V / 2, \quad (69.5)$$

где  $V$  — объем, занимаемый цугом волн.

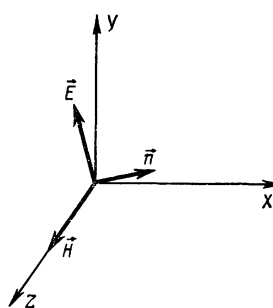


Рис. 59

Объем, занимаемый цугом волн, движется со скоростью света. Поэтому с этим объемом нельзя связать систему координат и говорить о величине этого объема в состоянии покоя. Однако найти формулы преобразования объема цуга волн можно. Введем некоторый вспомогательный объем  $V_0$ , который в системе координат  $K'$  движется со скоростью  $u'$ , а в  $K$  — со скоростью  $u$ . Учитывая релятивистское сокращение объема, можно написать формулы:

$$V' = V_0 \sqrt{1 - u'^2/c^2}, \quad V = V_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (69.6)$$

откуда

$$\frac{V'}{V} = \frac{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (69.7)$$

Поэтому с помощью формулы (61.30в) находим

$$V' = \frac{V \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta u_x/c}. \quad (69.8)$$

Заменим  $u_x$  в (69.8) по формуле

$$u_x = \beta n_x, \quad (69.9)$$

где  $n_x$  — проекция единичного вектора, характеризующего направление скорости  $u$  на ось  $X$ . После этого в (69.8) скорость  $u$  может быть устремлена к скорости света  $c$ . Заменяя  $u_x$  в (69.8) выражением (69.9) и полагая  $u=c$ , получаем

$$V' = V \sqrt{1 - \beta^2} / (1 - \beta n_x). \quad (69.10)$$

Первая из формул (69.2) на основании принципа относительности может быть переписана:

$$a' = a (1 - \beta n_x) / \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (69.11)$$

Из сравнения (69.10), (69.11) и (68.7) получаем:

$$W' / \omega' = W / \omega, \quad V' \omega' = V \omega. \quad (69.12)$$

Следовательно, энергия цуга плоских волн преобразуется как частота. Иначе говоря, энергия прямо пропорциональна частоте. Этот результат используется в квантовой теории.

**Импульс плоской волны.** Импульс цуга плоских волн равен

$$\mathbf{G} = \frac{1}{c^2} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \frac{\mathbf{n}}{c} \int \epsilon_0 E^2 dV = \mathbf{n} \frac{W}{c}, \quad (69.13)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении распространения волны. При выводе (69.13) приняты во внимание соотношения

$$\frac{1}{c^2} EH = \frac{1}{c^2} E \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E = \frac{1}{c} \epsilon_0 E^2.$$

С учетом (69.12) равенство (69.13) можно записать в виде

$$\mathbf{G} = \mathbf{n} \omega d, \quad W = \omega c d, \quad (69.14)$$

где  $d = W / (\omega c)$  — на основании (69.12) постоянная величина. Согласно (68.3), величины

$$\omega n_x, \quad \omega n_y, \quad \omega n_z, \quad -i\omega \quad (69.15)$$

образуют четырехмерный вектор. Поэтому из (69.14) следует, что величины

$$G_x, G_y, G_z, iW/c, \quad (69.16)$$

характеризующие полный импульс и полную энергию пучка плоских волн, также образуют четырехмерный вектор.

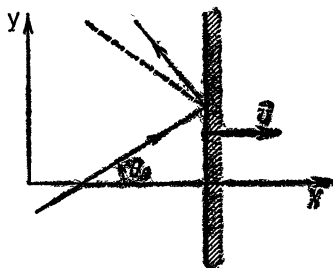


Рис. 60

**Отражение от движущегося зеркала.** Пусть плоское зеркало, перпендикулярное оси  $X$ , движется в направлении положительных значений этой оси со скоростью  $v$ . На зеркало падает плоская световая волна частотой  $\omega_0$ . Будем считать, что вектор нормали волны лежит в плоскости  $XU$  и составляет с осью  $X$  угол  $\theta_0$  (рис. 60).

Используя (68.5), легко получить аналогичные формулы преобразования от неподвижной к движущейся системе координат  $K'$ , в которой зеркало покоится:

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega_0 (1 - \beta n_x) / \sqrt{1 - \beta^2} = \omega_0 (1 - \beta \cos \theta_0) / \sqrt{1 - \beta^2}, \\ n'_x &= (n_x - \beta) / (1 - \beta n_x) = (\cos \theta_0 - \beta) / (1 - \beta \cos \theta_0), \\ n'_y &= n_y \sqrt{1 - \beta^2} / (1 - \beta n_x) = \sin \theta_0 \sqrt{1 - \beta^2} / (1 - \beta \cos \theta_0). \end{aligned} \quad (69.17)$$

В системе координат  $K'$  зеркало неподвижно, поэтому имеют место обычные законы отражения. Частота при отражении не меняется, а угол падения равен углу отражения. Поэтому для отраженной волны из формул (69.17) сразу же получаем:

$$\begin{aligned} \omega'_{\text{отр}} &= \omega_0 (1 - \beta \cos \theta_0) / \sqrt{1 - \beta^2}, \\ n'_{x\text{отр}} &= -(\cos \theta_0 - \beta) / (1 - \beta \cos \theta_0), \\ n'_{y\text{отр}} &= (\sin \theta_0 - \beta) / (1 - \beta \cos \theta_0). \end{aligned} \quad (69.18)$$

Теперь с помощью (68.5) можно вернуться к неподвижной системе:

$$\omega_{\text{отр}} = \omega'_{\text{отр}} \frac{1 - \beta n_{x\text{отр}}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \omega_0 \frac{1 - 2\beta \cos \theta_0 + \beta^2}{1 - \beta^2},$$



$$\cos \theta_{\text{отр}} = n_{x \text{ отр}} = \frac{n'_{x \text{ отр}} + \beta}{1 + \beta n'_{x \text{ отр}}} = - \frac{\cos \theta_0 - 2\beta + \beta^2 \cos \theta_0}{1 - 2\beta \cos \theta_0 + \beta^2}, \quad (69.19)$$

$$\sin \theta_{\text{отр}} = n_{y \text{ отр}} = \frac{n'_{y \text{ отр}} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta n'_{x \text{ отр}}} = \frac{\sin \theta_0 (1 - \beta^2)}{1 - 2\beta \cos \theta_0 + \beta^2}.$$

В нерелятивистском случае, когда  $\beta \ll 1$ , с точностью до  $\beta^2$  эти равенства можно записать в таком виде:

$$\omega_{\text{отр}} \approx \omega_0 (1 - 2\beta \cos \theta_0), \quad \cos \theta_{\text{отр}} \approx -\cos \theta_0 + 2\beta \sin^2 \theta_0,$$

$$\sin \theta_{\text{отр}} \approx \sin \theta_0 (1 + 2\beta \cos \theta_0).$$

На рис. 60 пунктиром обозначен луч, отраженный от неподвижного зеркала, а сплошной линией — луч, отраженный от движущегося зеркала, в системе координат, в которой зеркало движется.

## § 70. ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЭЛЕКТРОНА

**Потенциалы Льенара — Вихерта.** Пусть координатами электрона будут  $y_1, y_2, y_3, y_4 = ict'$ , а координатами точки, в которой вычисляется потенциал, создаваемый движущимся электроном, —  $x_1, x_2, x_3, x_4 = ict$ . Учтем, что электромагнитное возмущение от электрона распространяется со скоростью света. Это означает, что

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = c^2 (t - t')^2. \quad (70.1)$$

Если ввести четырехмерный вектор с компонентами

$$R_i = x_i - y_i, \quad (70.2)$$

то условие (70.1) может быть записано в следующем релятивистски инвариантном виде:

$$R^2 \equiv \sum_{i=1}^4 R_i^2 = 0. \quad (70.3)$$

Нам необходимо найти четырехмерный потенциал  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ , создаваемый произвольно движущимся электроном. В системе координат, в которой электрон в данный момент времени покоится, создаваемый им четырехмер-

ный потенциал известен:

$$\Phi_1^{(0)} = \Phi_2^{(0)} = \Phi_3^{(0)} = 0, \quad \Phi_4^{(0)} = i \frac{\varphi^{(0)}}{c} = \frac{i}{c} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r}, \quad (70.4)$$

поскольку в этом случае электромагнитное поле сводится к кулоновскому полю точечного заряда. Чтобы получить формулы для четырехмерного потенциала в произвольной системе координат, т. е. в системе координат, в которой электрон движется произвольно, необходимо равенства (70.4) переписать в виде одного векторного уравнения. Для этого заметим, что в той системе координат, где электрон в данный момент времени неподвижен, компоненты четырехмерной скорости  $u_i = dy_i/d\tau$  электрона равны:

$$u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = u_3^{(0)} = 0, \quad u_4 = ic. \quad (70.5)$$

Поэтому равенства (70.4) могут быть представлены соотношениями

$$\Phi_\nu = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{eu_\nu}{r_0 c^2}, \quad (70.6)$$

где  $r_0$  — инвариант, равный трехмерному расстоянию от электрона до рассматриваемой точки в той системе координат, где электрон покоится. Этот инвариант равен

$$r_0 = - \frac{1}{c} \sum_i R_i u_i. \quad (70.7)$$

В правую часть (70.7) входит скалярное произведение двух четырехмерных векторов, которое инвариантно. Его величину удобнее всего вычислить в той системе координат, где электрон покоится. Но в этой системе координат равенство (70.7) очевидно. Тем самым оно доказано и в любой другой системе. Теперь выражение (70.6) с помощью (70.7) можно окончательно представить в виде

$$\Phi_\nu = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{eu_\nu}{c \sum_i R_i u_i} \quad (70.8)$$

при добавочном условии (70.3). Формула (70.8) полностью релятивистски инвариантна. Записав ее в системе координат, где электрон движется, мы получим выражение для потенциалов, создаваемых движущимся электроном.

Принимая во внимание, что

$$(u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3) / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad u_4 = ic / \sqrt{1 - \beta^2} \quad (70.9)$$

( $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  — трехмерная скорость электрона), и учитывая

$$\sum_{i=1}^4 R_i u_i = \frac{\mathbf{r}\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{rc}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (70.10)$$

можно выражение (70.8) для четырехмерного потенциала представить в виде следующих уравнений для векторного и скалярного потенциалов:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \left[ \frac{e\mathbf{v}}{r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c} \right]_{t-r/c} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{e\mathbf{v}}{r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c} \right]_{t-r/c}, \quad (70.11)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{[r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c]_{t-r/c}}. \quad (70.12)$$

В этих формулах потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  вычисляются в некоторой точке пространства в момент времени  $t$ . В правой части скорость электрона  $\mathbf{v}$  и радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , проведенный из точки нахождения электрона в точку, где вычисляют потенциал, надо брать не для момента времени  $t$ , а для предшествующего момента времени  $t - r/c$ , благодаря чему учитывается конечность скорости распространения электромагнитного действия, выражаемая равенством (70.3). Потенциалы (70.11) и (70.12) называются потенциалами Льенара — Вихерта. С их помощью можно вычислить электромагнитное поле произвольно движущегося точечного заряда.

**Поле произвольно движущегося заряда.** Векторы напряженностей электромагнитного поля связаны с потенциалами формулами

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (70.13)$$

причем скалярный и векторный потенциалы задаются формулами (70.11) и (70.12), которые удобно записать в следующей форме:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{e\mathbf{v}}{s} \right)_{\tau}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{e}{s} \right)_{\tau}, \quad (70.14)$$

$$\tau = t - \frac{r}{c}, \quad s = r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c}.$$

Координаты движения электрона задаются как функции времени  $t'$ :

$$y_1 = y_1(t'), \quad y_2 = y_2(t'), \quad y_3 = y_3(t'). \quad (70.15)$$

Условие (70.1) имеет вид

$$c(t - t') = r = \sqrt{[x_1 - y_1(t')]^2 + [x_2 - y_2(t')]^2 + [x_3 - y_3(t')]^2}. \quad (70.16)$$

Это уравнение в неявном виде определяет  $t'$  как функцию от  $x_1, x_2, x_3, t$ . Вектор  $\mathbf{r}$ , составляющие которого  $x_i - y_i(t')$  ( $i = 1, 2, 3$ ), явно зависят только от  $x, y, z$  и  $t'$ , а вектор скорости  $\mathbf{v}$ , составляющие которого  $y_i = dy_i/dt'$ , явно зависят только от  $t'$ . Время  $t$  в явном виде в выражения для потенциалов не входит.

Для напряженности  $\mathbf{E}$  из (70.13) с учетом (70.14) получаем формулу

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{s^2} \text{grad } s + \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{e\mathbf{v}}{s^2} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{e}{s} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right). \quad (70.17)$$

Для вычисления напряженности магнитного поля воспользуемся формулой векторного анализа (П.14):

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e}{s} \text{rot } \mathbf{v} + \frac{\mu_0}{4\pi} e \text{grad } \frac{1}{s} \times \mathbf{v} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e}{s} \text{rot } \mathbf{v} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e}{s^2} \text{grad } s \times \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (70.18)$$

Таким образом, задача вычисления напряженностей сводится к вычислению  $\partial s/\partial t$ ,  $\text{grad } s$ ,  $\partial \mathbf{v}/\partial t$ ,  $\text{rot } \mathbf{v}$ .

Учтем, что  $\mathbf{v}$  зависит от  $x, y, z, t$  только неявно, посредством  $t'$ , а  $s$  содержит  $x, y, z$  также и явно. Поэтому

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \left( -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r} - \frac{v^2}{c} - \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c} \right) \frac{\partial t'}{\partial t}, \quad (70.19)$$

где  $\partial \mathbf{r}/\partial t' = \mathbf{v}$ ,  $\partial r/\partial t' = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/r$ . Далее,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \dot{\mathbf{v}} \frac{\partial t'}{\partial t}, \quad (70.20)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}_x \mathbf{v} &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = \dot{v}_z \frac{\partial t'}{\partial y} - \dot{v}_y \frac{\partial t'}{\partial z} = \\ &= \text{grad}_y t' \dot{v}_z - \text{grad}_z t' \dot{v}_y = (\text{grad } t' \times \dot{\mathbf{v}})_x. \end{aligned} \quad (70.21)$$

Другие составляющие  $\text{rot } \mathbf{v}$  имеют аналогичный вид, поэтому

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{grad } t' \times \dot{\mathbf{v}}. \quad (70.22)$$

Величины  $\partial t'/\partial t$  и  $\text{grad } t'$  получаются из равенства (70.16), дифференцируя которое по  $t$  и взяв градиент, находим:

$$c \left( 1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right) = \frac{\partial r}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r} \frac{\partial t'}{\partial t},$$

$$-c \text{grad } t' = \text{grad } r = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r} \text{grad } t'. \quad (70.23)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/(rc)} = \frac{r}{s},$$

$$\text{grad } t' = \frac{-\mathbf{r}}{rc [1 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/(rc)]} = - \frac{\mathbf{r}}{cs}. \quad (70.24)$$

Подставляя полученные выражения в (70.17) и (70.18), находим следующие формулы для напряженностей поля:

$$4\pi\epsilon_0 \mathbf{E} = - \frac{e}{s^2} \frac{\mathbf{r}}{c^2} \dot{\mathbf{v}} + \frac{e\mathbf{r}}{s^3} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2} \right), \quad (70.25)$$

$$4\pi \mathbf{H} = - \frac{e}{s^2} \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}}{c} + \frac{ec}{s^3} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2} \right).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\mathbf{H}/c = (\mathbf{r}/r) \times \mathbf{D}, \quad (70.26)$$

т. е. вектор напряженности магнитного поля всегда перпендикулярен радиус-вектору. Электрический же вектор имеет и радиальную составляющую:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{s^2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (70.27)$$

Поле, описываемое формулами (70.25), можно разложить на две части, зависящие:

а) только от скорости. Это поле убывает обратно пропорционально квадрату расстояния и имеет такой вид:

$$4\pi\epsilon_0\mathbf{E}_1 = \frac{er}{s^3} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \quad (70.28)$$

$$4\pi\mathbf{H}_1 = \frac{ce}{s^3} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right);$$

б) от ускорения. Это поле убывает обратно пропорционально первой степени расстояния и имеет такой вид:

$$4\pi\epsilon_0\mathbf{E}_2 = -\frac{er}{c^2s^2} \dot{\mathbf{v}} + \frac{er}{c^2s^3} (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \left( \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right), \quad (70.29)$$

$$4\pi\mathbf{H}_2 = -\frac{e}{cs^2} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}) + \frac{e}{cs^3} (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}) (\mathbf{v} \times \mathbf{r}).$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$\frac{\mathbf{H}_2}{c} = \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{D}_2 \quad (70.30)$$

и оба вектора  $\mathbf{E}_2$  и  $\mathbf{H}_2$  перпендикулярны радиус-вектору. Взяв от обеих частей (70.30) модули, получим

$$H_2/c = D_2. \quad (70.31)$$

Учитывая, что  $1/c = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ , можно это равенство представить также и в виде

$$\sqrt{\epsilon_0}E_2 = \sqrt{\mu_0}H_2. \quad (70.32)$$

Это означает, что между векторами напряженности электрического и магнитного полей, зависящих от ускорений, существует соотношение, характерное для электромагнитной волны. Это поле имеет характер сферической электромагнитной волны, испускаемой электроном. Первое поле, связанное со скоростями, представляет собой электростатическое поле, движущееся вместе с электроном, а второе поле, обусловленное ускорением, является полем излучения. На больших расстояниях от электрона поле излучения является преобладающим, поскольку оно убывает с расстоянием медленнее, чем первое.

Таким образом, формулы (70.25) позволяют найти поле, если известно движение заряда, который его создает.

**Энергия излучения.** Для того чтобы найти полную энергию, излучаемую ускоренно движущимся электроном, надо найти релятивистское обобщение формулы (49.32), полученной для малых скоростей. Рассмотрим произвольно движущийся электрон. Благодаря наличию ускорения он излучает электромагнитные волны, несущие с собой энергию и импульс. Свяжем систему координат с электроном. Таким образом, в этой системе координат в момент излучения электрон покоится, т. е. его скорость равна нулю, но ускорение отлично от нуля. По формуле (49.32) можно заключить, что благодаря наличию ускорения мощность излучения электрона равна

$$dW^{(0)}/dt = -e^2(\dot{\mathbf{v}})^2/(6\pi\epsilon_0c^3). \quad (70.33)$$

С другой стороны, поскольку в этой системе координат электрон покоится, все направления излучения равноправны. Следовательно, электромагнитная волна излучается изотропно по всем направлениям и ее полный уносимый импульс равен нулю. Поэтому изменение импульса благодаря излучению в системе координат, в которой электрон в данный момент покоится, равно нулю:

$$d\mathbf{G}^{(0)}/dt = 0. \quad (70.34a)$$

Теперь необходимо равенства (70.33) и (70.34a) записать в релятивистски инвариантном виде. Прежде всего заметим, что в той системе координат, где электрон в данный момент покоится, дифференциал собственного времени равен  $d\tau = dt$ . Рассмотрим некоторый цуг волн, излученный в течение времени  $dt = d\tau$ . Энергия этого цуга волн согласно (70.33) равна  $dW^{(0)}$ , а унесенный им импульс согласно (70.34a) равен  $d\mathbf{G}^{(0)} = 0$ . Энергия и импульс конечного цуга волн образуют четырехмерный вектор [см. (69.16)]. Поэтому величины  $d\mathbf{G}^{(0)}$ ,  $idW^{(0)}/c$ , входящие в формулы (70.33) и (70.34), образуют четырехмерный вектор  $dI_\nu$ , компоненты которого имеют вид

$$(dI_1, dI_2, dI_3, dI_4) = (dG_x^{(0)}, dG_y^{(0)}, dG_z^{(0)}, idW^{(0)}/c). \quad (70.34b)$$

С помощью этого вектора формулы (70.33) и (70.34a) можно записать в виде одного векторного уравнения:

$$dI/d\tau = -e^2(\dot{\mathbf{v}}_0)^2 u_\nu/(6\pi\epsilon_0c^5), \quad (70.35)$$

где  $u_\nu$  — компоненты четырехмерной скорости электрона.

В системе координат, связанной с электроном,

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) = (0, 0, 0, ic), \quad (70.36)$$

поэтому формулы (70.35) совпадают с (70.34) и (70.33). Как показывают формулы (61.34) и (61.35), в той системе координат, где электрон в данный момент покоится, компоненты его четырехмерного ускорения  $b_\nu$  равны

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = (\dot{v}_{0x}, \dot{v}_{0y}, \dot{v}_{0z}, 0), \quad (70.37)$$

т. е. пространственные компоненты четырехмерного ускорения равны компонентам обыкновенного трехмерного ускорения, а четвертая компонента равна нулю. Поэтому на основании (70.37) можно написать

$$\dot{\mathbf{v}}_0^2 = \sum_{\mu} (b_{\mu})^2. \quad (70.38)$$

Учитывая (70.38), можно уравнение (70.35) переписать в полностью релятивистски инвариантной форме:

$$\frac{dI_{\nu}}{d\tau} = - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^5} \left( \sum_{\mu} b_{\mu}^2 \right) u_{\nu}. \quad (70.39)$$

В частном случае, когда электрон в данной системе координат в данный момент времени покоится, они правильно описывают излучение электрона в соответствии с формулами (70.33) и (70.34). Из релятивистски инвариантного вида формулы (70.39) можно заключить, что она описывает излучение и в других системах координат, в которых электрон в данный момент времени движется с произвольной скоростью. Принимая во внимание формулу (61.36) для квадрата ускорения при произвольном движении электрона и формулы (61.27), выражающие компоненты четырехмерной скорости через трехмерные величины, получаем на основании (70.39) следующие формулы, характеризующие изменения энергии  $E$  и импульса  $p$  электрона под влиянием излучения:

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - [(\mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]^2}{(1 - \beta^2)^3}, \quad (70.40)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^5} \mathbf{v} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - [(\mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]^2}{(1 - \beta^2)^3}. \quad (70.41)$$



Формула (70.41) характеризует реакцию излучения, действующую на электрон, благодаря которой скорость электрона уменьшается. Эта реакция обуславливает силу торможения электрона излучением. Формула (70.40) характеризует скорость потерь энергии электроном при излучении. По закону сохранения энергии и импульса, можно также сказать, что эти формулы описывают энергию излучения и импульс излучения при произвольном движении заряженной точечной частицы, например электрона. Таким образом, если известен закон движения электрона, то по формуле (70.40) можно вычислить мощность излучения.

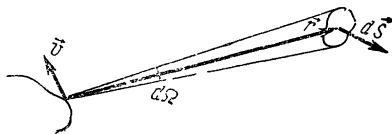


Рис. 61

**Спектральный состав и угловое распределение излучения.** Через элемент площади  $dS$  в течение времени  $dt$  проходит энергия излучения

$$dW = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 \frac{r}{r} dS dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 r^2 d\Omega dt, \quad (70.42a)$$

где учтены соотношения (70.30) и равенство

$$(r/r) dS = r^2 d\Omega, \quad (70.42b)$$

следующее из определения телесного угла (рис. 61). Поэтому излученная в единичный телесный угол энергия равна

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \int_{-\infty}^{\infty} E^2 r^2 dt. \quad (70.43)$$

Спектральный состав излучения находят прямым применением теоремы Фурье. При этом, конечно, предполагаются удовлетворенными условия выполнимости преобразований Фурье и учитывается, что область ускоренного движения заряда, излучение от которого наблюдается, мала по сравнению с расстоянием до точки наблюдения. Таким образом, получаемые формулы дают также и угловое распределение излучения.

Вектор  $\mathbf{E}_2$  в (70.29) является известной функцией  $t'$ , а следовательно, и  $t$ . Поэтому его можно разложить в интеграл Фурье (для упрощения написания будем его обозначать буквой  $\mathbf{E}$  без индекса):

$$r\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Q}_\omega e^{i\omega t} d\omega, \quad (70.44)$$

где

$$\mathbf{Q}_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} r\mathbf{E}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (70.45)$$

При вычислении интеграла в (70.45) необходимо помнить, что в (70.29)  $\mathbf{E}$  задано в виде функции от  $t' = t - r/c$ . Подставляя (70.44) в (70.43), находим

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Q}_\omega \mathbf{Q}_{\omega'} e^{i(\omega + \omega')t} d\omega d\omega' dt = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Q}_\omega \mathbf{Q}_{\omega'} d(\omega + \omega') d\omega d\omega' = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Q}_\omega \mathbf{Q}_{-\omega} d\omega = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \int_0^{\infty} \mathbf{Q}_\omega \mathbf{Q}_{-\omega} d\omega, \quad (70.46) \end{aligned}$$

где учтена четность произведения  $\mathbf{Q}_\omega \mathbf{Q}_{-\omega}$  и интеграл берется лишь по положительным частотам. Величина  $(\epsilon_0/\mu_0)^{1/2} \mathbf{Q}_\omega \mathbf{Q}_{-\omega}$  дает спектральную плотность энергии излучения, отнесенную к единице телесного угла. Таким образом, нахождение спектрального состава и углового распределения излучения сводится к вычислению интеграла (70.45).

## § 71. ИЗЛУЧЕНИЕ ВАВИЛОВА — ЧЕРЕНКОВА

При равномерном движении частицы в вакууме она не излучает электромагнитные волны. Однако при движении в среде со скоростью больше фазовой скорости распространения света в среде наблюдается излучение электромагнитных волн. Оно называется излучением Вавилова—

Черенкова. По своему происхождению оно является не излучением самой движущейся частицы, а излучением электронов среды, приводимых в движение силами, действующими на них со стороны движущейся частицы. Для того, чтобы рассмотреть излучение Вавилова — Черенкова, нет необходимости знать детали действия этих сил, потому что влияние среды на электромагнитное поле полностью учитывается заданием диэлектрической  $\epsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостей. Будем считать, что среда немагнитна ( $\mu \approx \mu_0$ ). Скорость электромагнитных взаимодействий равна  $u = 1/\sqrt{\epsilon\mu_0} = 1/(\sqrt{\epsilon_r} \sqrt{\epsilon_0\mu_0}) = c/n$  ( $c$  — скорость света,  $n$  — показатель преломления среды относительно вакуума). Здесь скорость распространения электромагнитных взаимодействий обозначена  $u$  (чтобы букву  $v$  сохранить для обозначения скорости заряда).

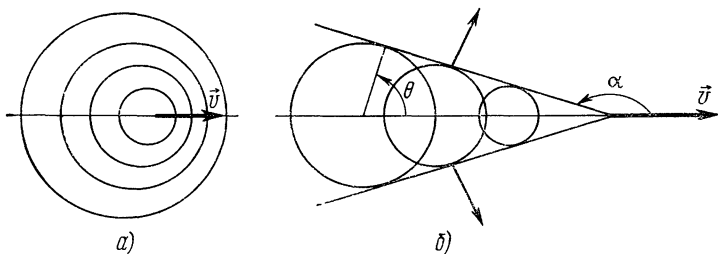


Рис. 62

Пусть заряд покоится в некоторой точке. Если в некоторый момент его сдвинуть, то движение заряда проявится в изменении поля на расстоянии  $r$  от заряда через промежуток времени  $\Delta t = r/u$ . Поэтому если заряд движется, то в каждый момент им порождается расходящаяся сферическая волна, несущая соответствующее изменение поля. Если  $v < u$ , то картина этих сферических волн имеет вид, показанный на рис. 62, а. Таким образом, движение частицы проявляется во всех областях пространства посредством изменения существующего там поля. Здесь ситуация такая же, какая существует в воздухе при движении в нем тела со скоростью, меньшей скорости звука: во всем пространстве происходит изменение плотности воздуха: перед телом — уплотнение, а сзади — разрежение. В вакууме скорость частиц не может быть больше скорости света и другая ситуация, отличающаяся от описанной, не может осуществиться. Однако в среде скорость

$u = c/n < c$  меньше скорости света и, следовательно, возможно движение заряженных частиц со скоростями  $v$ , большими скорости распространения взаимодействий ( $v > u$ ). В этом случае частица обгоняет сферическую волну, несущую изменение поля, которую она порождает в среде в каждый момент времени. Картина сферических волн, несущих изменение состояния поля, порождаемого частицей в различных точках среды, изображена на рис. 62, б. Во всем пространстве вне конуса с вершиной в точке нахождения частицы среда не возмущена движением частицы. На поверхности конуса возмущения интенсивно складываются и образуют фронт сильного возмущения. Оно также существует внутри конуса за движущейся частицей. Эта картина напоминает образование ударной волны в воздухе при движении тел со сверхзвуковыми скоростями, когда поверхность конуса является фронтом ударной волны. В случае диэлектрической среды на поверхности конуса образуется электромагнитное излучение, которое распространяется в направлении, перпендикулярном этой поверхности. На рис. 62, б оно отмечено углом  $\theta$ . Из чертежа непосредственно видно, что

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - u^2/v^2} = -\sqrt{1 - c^2/(n^2v^2)}. \quad (71.1)$$

Электромагнитное поле, которое при этом порождается, может быть вычислено с помощью потенциалов Лье́на-Ра — Вихерта (см. § 70), но с учетом того, что явления происходят в среде. Выпишем формулу для скалярного потенциала, приняв во внимание, что явление происходит в среде, в которой скорость распространения электромагнитных волн равна  $u$ :

$$\varphi(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{e}{r - \mathbf{r}\mathbf{v}/u} \right]_{t=t' - r/u}. \quad (71.2)$$

Напомним, что  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки нахождения заряда в опережающий момент времени в точку наблюдения. Радиус-вектор  $\mathbf{R}$  характеризует точку наблюдения.

Непосредственно из сказанного выше ясно, что вне конуса  $\varphi = 0$ , поскольку там не может быть удовлетворено условие запаздывания. Внутри конуса условие запаздывания для данного  $t$  удовлетворяется двумя значениями  $t'$ . Чтобы это было ясно, поместим начало координат  $O$  на траектории движения заряда и начнем отсчет времени

с того момента, когда заряд проходит начало координат. Обозначения видны непосредственно на рис. 63. Изменения поля в точке  $M$  создаются за счет возмущений, созданных зарядом, когда он находился в точках  $O_1$  и  $O_2$ . Точка  $O_3$  — место нахождения заряда в момент времени  $t$ ,

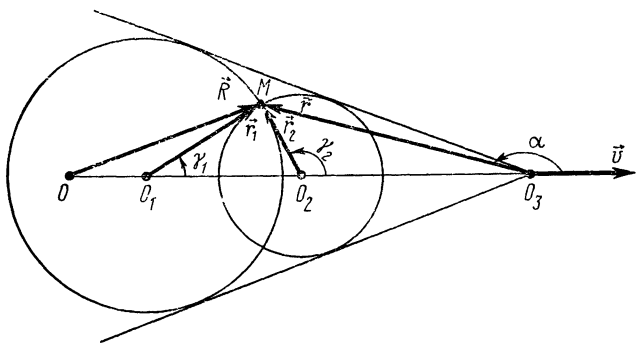


Рис. 63

для которой вычисляют потенциал. Следовательно, выражение (71.2) для потенциалов состоит из суммы двух членов, соответствующих нахождению заряда в точках  $O_1$  и  $O_2$ :

$$\varphi(\mathbf{R}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{1}{r_1(1 - v \cos \gamma_1/u)} + \frac{1}{r_2(1 - v \cos \gamma_2/u)} \right]. \quad (71.3)$$

Запишем соотношения между величинами, показанными на рисунке:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{v}(t - t'_1), \quad r_1 = u(t - t'_1), \quad (71.4)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{v}(t - t'_2), \quad r_2 = u(t - t'_2).$$

Находя из этих уравнений  $r_1$  и  $r_2$  и подставляя в формулу (71.3), окончательно получим для потенциала следующее выражение:

$$\varphi(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{e}{r \sqrt{1 - (v^2/u^2) \sin^2 \alpha}}. \quad (71.5)$$

Формула (70.11) для векторного потенциала имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{e\mathbf{v}}{r \sqrt{1 - (v^2/u^2) \sin^2 \alpha}}. \quad (71.6)$$

Обращение потенциалов в бесконечность на поверхности конуса свидетельствует о том, что там поля сильно возрастают. Поскольку напряженности не могут быть бесконечными, то потенциалы не должны обращаться в бесконечность. Следовательно, в вычислениях содержится некорректность. Она состоит в том, что не была учтена дисперсия света. Учет дисперсии устраняет появление этой бесконечности.

## § 72. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

**Уравнения и тензоры электромагнитного поля.** Чтобы описать электромагнитные явления в движущихся средах, надо сформулировать для них уравнения Максвелла. Это можно сделать, исходя из требования ковариантности законов природы относительно преобразований Лоренца. Следовательно, необходимо известные для неподвижных сред уравнения Максвелла записать в явно ковариантном виде, т. е. в виде тензорных уравнений. На основании принципа относительности такой же вид уравнения должны иметь и для движущихся сред. Тем самым получены уравнения Максвелла для движущихся сред. Кроме того, поскольку формулы преобразования тензоров от одной системы координат к другой известны, оказывается решенной задача преобразования векторов поля при переходе от одной движущейся среды к другой. Запись уравнений Максвелла в релятивистски инвариантной форме была выполнена для вакуума в § 64. Однако, как непосредственно следует из вывода тензоров электромагнитного поля (64.3) и (64.6) и уравнений Максвелла (64.16) — (64.19), они пригодны также для электромагнитного поля в среде, если только вместо  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  подставить  $\epsilon$  и  $\mu$ . Тензорная формулировка уравнений Максвелла была получена, исходя из уравнений Максвелла для покоящейся среды. Но ввиду тензорного характера полученных уравнений они справедливы и в движущейся среде. Поэтому тензоры поля (64.3) и (64.6) и уравнения Максвелла (64.16) — (64.19) описывают электромагнитное поле и в произвольно движущейся среде. Законы преобразования векторов поля при переходе от движущейся среды к покоящейся задают формулами (65.6) и (65.7), надо лишь в них вместо  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  подставить  $\epsilon$  и  $\mu$ .

**Четырехмерный ток.** Формула (63.8) для четырехмерного тока  $s_v$  в случае среды имеет вид

$$(s_1, s_2, s_3, s_4) = (j_x, j_y, j_z, ic\rho), \quad (72.1)$$

где  $j_x, j_y, j_z$  — составляющие плотности тока проводимости. Пусть в системе координат  $K'$  находится неподвижный заряд, тогда четырехмерный ток имеет такой вид:

$$s'_1 = j'_x = 0, \quad s'_2 = j'_y = 0, \quad s'_3 = j'_z = 0, \quad s'_4 = ic\rho. \quad (72.2)$$

Переходя с помощью формул преобразования векторов в систему координат, где этот заряд движется, получаем:

$$s_1 = j_x = \rho'v/\sqrt{1-\beta^2}, \quad s_2 = j_y = 0, \quad (72.3)$$

$$s_3 = j_z = 0, \quad s_4 = ic\rho = ic\rho'/\sqrt{1-\beta^2}.$$

Как и следовало ожидать, движение заряда привело к появлению тока плотностью  $j_x$ .

Теперь рассмотрим движущийся проводник с током. В системе координат  $K'$  имеется ток проводимости, но отсутствуют объемные заряды, т. е.

$$s'_1 = j'_x \neq 0, \quad s'_2 = j'_y \neq 0, \quad s'_3 = j'_z \neq 0, \quad s'_4 = ic\rho' = 0. \quad (72.4)$$

В системе координат, в которой проводник с током движется,

$$j_x = j'_x/\sqrt{1-\beta^2}, \quad j_y = j'_y, \quad j_z = j'_z, \quad (72.5)$$

$$s_4 = ic\rho = i\beta j'_x/\sqrt{1-\beta^2} = i\beta j_x.$$

Таким образом, в движущемся проводнике с током возникает объемная плотность зарядов

$$\rho = \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}/c^2, \quad (72.6)$$

где  $\mathbf{j}$  — плотность тока проводимости, протекающего в движущемся со скоростью  $\mathbf{v}$  проводнике. Однако общий заряд движущегося проводника равен нулю:

$$\int \rho dV = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \int \mathbf{j} dV = 0. \quad (72.7)$$

Возникновение объемной плотности зарядов в движущемся проводнике является релятивистским эффектом. Ней-

тральность неподвижного проводника с током обусловлена тем, что в нем плотности положительного заряда ионов и отрицательного заряда электронов равны. Однако ионы неподвижны, а электроны движутся. Рассмотрим участок проводника длиной  $\Delta l'_{(+)}$ , на котором расположено  $N$  положительных ионов. Пусть электроны относительно проводника движутся со скоростью  $u'$ , причем все  $N$  электронов располагаются на длине  $\Delta l''_{(-)}$  в системе координат, связанной с электронами. Очевидно, для электрической нейтральности проводника необходимо, чтобы

$$\Delta l'_{(+)} = \Delta l''_{(-)} \sqrt{1 - u'^2/c^2}, \quad (72.8)$$

так как  $\Delta l''_{(-)} \sqrt{1 - u'^2/c^2}$  — длина участка, на котором расположены  $N$  электронов, в системе координат, связанной с проводником. Если проводник с током движется, то движутся как положительные ионы, так и отрицательные электроны, но с разными скоростями. Если в неподвижной системе координат измерить длину участка, на котором расположено  $N$  положительных ионов, и длину участка, на котором расположено  $N$  отрицательных электронов, то эти длины будут различны. В самом деле, обозначим через  $u$  скорость электронов в системе координат, в которой проводник движется со скоростью  $v$ . Тогда

$$\Delta l_{(+)} = \Delta l'_{(+)} \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (72.9)$$

$$\Delta l_{(-)} = \Delta l''_{(-)} \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (72.10)$$

На основании формул (61.30в) имеем

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right). \quad (72.11)$$

Отсюда видно, что

$$\Delta l_{(+)} \neq \Delta l_{(-)}, \quad (72.12)$$

т. е. плотность заряда электронов и плотность заряда ионов движущегося проводника не равны по абсолютному значению. Это означает, что в движущемся проводнике возникает объемная плотность зарядов.

Рассмотрим движущуюся рамку с током (рис. 64). По формуле (72.6), участки цепи, в которых ток движется в противоположных направлениях, зарядятся разноименно. Следовательно, рамка с током приобретает диполь-



ный момент. Как непосредственно видно из рисунка с учетом (72.6), дипольный момент равен

$$p = v l l_1 / c^2 = v I S / c^2 = v p_m / c^2, \quad (72.13)$$

где  $p_m$  — магнитный момент рамки с током,  $l$  и  $l_1$  — длина и ширина рамки соответственно. Принимая во внимание векторный характер величин, это равенство можно преобразовать:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{p}_m. \quad (72.14)$$

Таким образом, движущийся магнитный момент эквивалентен электрическому дипольному моменту, определяемому формулой (72.14). Это обстоятельство имеет важное значение в атомной физике. Электроны обладают магнитным моментом, связанным с их механическим моментом — спином. Вращаясь вокруг ядра, электрон находится в электрическом поле ядра. Магнитный момент не взаимодействует с электрическим полем. Однако благодаря эффекту, описываемому формулой

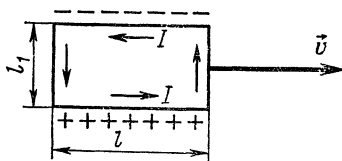


Рис. 64

(72.14), движущийся вокруг ядра электрон должен обладать также и электрическим моментом. Этот электрический момент взаимодействует с электрическим полем ядра. Благодаря этому возникает дополнительная энергия взаимодействия электрона с ядром. Это дополнительное взаимодействие наряду с релятивистской зависимостью массы электрона от скорости обуславливает тонкую структуру линий излучения атомов. Более подробно об этом будет сказано в курсе квантовой механики и теории атома.

**Тензорная запись закона Ома.** В § 64 не было дано тензорной записи закона Ома в дифференциальной форме:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad (72.15)$$

Выразим это соотношение в тензорном виде так, чтобы для неподвижной среды оно принимало вид (72.15). Непосредственная проверка показывает, что эта тензор-

ная форма равенства имеет вид

$$s_{\mu} = \frac{\gamma}{c} \sum_{\nu=1}^4 H_{\mu\nu} u_{\nu}. \quad (72.16)$$

Первые три уравнения (72.16) с  $\mu=1, 2, 3$  представляются как одно векторное:

$$\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (72.17)$$

а четвертое с  $\mu=4$  имеет вид

$$i c \rho = \frac{i \gamma}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right) = \frac{i}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{v},$$

т. е. совпадает с (72.6).

**Тензор энергии и импульса электромагнитного поля в среде** формально можно было бы получить аналогично тому, как это было сделано в § 67 для вакуума. Однако, ввиду того что в среде  $\epsilon_{\mu} \neq 1/c^2$ , этот тензор не получается симметричным: легко убедиться, что последние члены первых трех строк таблицы (67.12) не равны соответствующим первым трем членам последней строки. В связи с несимметричностью этого тензора возникают осложнения. Однако всегда можно избежать этих осложнений, приняв во внимание, что учет среды сводится к учету полей в вакууме, создаваемых всеми зарядами среды. Благодаря этому все вопросы, связанные с энергией и импульсом электромагнитного поля в среде, могут быть решены с помощью тензора энергии и импульса (67.12) для вакуума. Поэтому обсуждать более подробно вопрос о тензоре электромагнитного поля в среде нет необходимости и мы ограничимся сказанным.

### § 73. ЛАГРАНЖЕВА ФОРМУЛИРОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

**Интеграл действия.** Теория электромагнитного поля может быть построена в полной аналогии с механикой, исходя из интеграла действия, к которому применяется гамильтоновский принцип наименьшего действия.

Пусть имеется плотность функции Лагранжа, которая зависит от четырех потенциалов  $\Phi_{\mu}$ , определяемых (63.5) и их производных по четырехмерным координатам  $\Phi_{\mu, \nu} = \partial \Phi_{\mu} / \partial x_{\nu}$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi_{\mu}, \Phi_{\mu, \nu}). \quad (73.1)$$

В аргументе  $\mathcal{L}$  под  $\Phi_\mu$  и  $\Phi_{\mu,\nu}$  следует понимать, конечно, всю совокупность величин этого вида. Координаты  $x_\mu$  в выражение для плотности функции Лагранжа не входят. Это, как и в механике, означает, что рассматриваемая система является замкнутой. Вид  $\mathcal{L}$  в (73.1) пока не конкретизируется и должен в дальнейшем быть подобран так, чтобы в результате применения к интегралу действия принципа Гамильтона получались правильные уравнения электромагнитного поля.

**Уравнения Лагранжа.** Интеграл действия через плотность функции Лагранжа выражается формулой

$$I = \int_Q \mathcal{L}(\Phi_\mu, \Phi_{\mu,\nu}) d^4x, \quad (73.2)$$

где  $Q$  — четырехмерная область интегрирования.

В принципе наименьшего действия Гамильтона предполагается, что границы области являются фиксированными и не варьируются. Следовательно,

$$\delta I = \int_Q \delta \mathcal{L} d^4x = 0. \quad (73.3)$$

Подынтегральное выражение можно преобразовать:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \sum_{\mu,\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} \delta \Phi_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mu,\nu}} \delta \Phi_{\mu,\nu} \right) = \\ &= \sum_{\mu,\nu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} \delta \Phi_\mu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mu,\nu}} \right) \delta \Phi_\mu + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mu,\nu}} \delta \Phi_\mu \right) \right]. \end{aligned} \quad (73.4)$$

Подставляя это выражение в (73.3), находим

$$\begin{aligned} \int_Q d^4x \left\{ \sum_{\mu,\nu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mu,\nu}} \right) \right] \delta \Phi_\mu + \right. \\ \left. + \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mu,\nu}} \delta \Phi_\mu \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (73.5)$$

Вторая сумма под интегралом равна нулю, поскольку предполагается, что вариации  $\delta \Phi_\mu$  на границах области обращаются в нуль. В результате независимости вариаций  $\delta \Phi_\mu$  для удовлетворения тождественного равенства нулю интеграла необходимо, чтобы члены при  $\delta \Phi_\mu$

в подынтегральном выражении обращались в нуль. Отсюда получаем уравнения движения электромагнитного поля в форме Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\mu, \nu}} \right) = 0. \quad (73.6)$$

**Уравнения Максвелла.** Для того чтобы эти уравнения совпадали с уравнениями Максвелла (64.4) и (64.8), необходимо плотность функции Лагранжа выбрать в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4c} \sum_{\alpha, \beta} H_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha} s_{\alpha} \Phi_{\alpha}, \quad (73.7)$$

где тензоры  $H_{\alpha\beta}$  и  $F_{\alpha\beta}$  определяются формулами (64.6) и (64.3), а четырехмерный ток  $s_{\alpha}$  — соотношением (63.16) и предполагается заданным.

Уравнения Максвелла (64.8) являются следствием того, что тензор  $H_{\mu\nu}$  определяется формулой (64.6), а уравнения (64.4) получаются из (73.6) с учетом (73.7), если принять во внимание, что

$$\partial H_{\alpha\beta} / \partial \Phi_{\mu, \nu} = c (\delta_{\nu\alpha} \delta_{\mu\beta} - \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta}), \quad (73.8a)$$

$$\partial F_{\alpha\beta} / \partial \Phi_{\mu, \nu} = (\delta_{\nu\alpha} \delta_{\mu\beta} - \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta}) / \mu_0 \quad (73.8b)$$

и, следовательно,

$$\partial \mathcal{L} / \partial \Phi_{\mu, \nu} = F_{\mu\nu}. \quad (73.9)$$

**Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.** При отсутствии токов энергия, импульс и момент импульса электромагнитного поля должны сохраняться. Это означает, что они не изменяются при бесконечно малых пространственно-временных трансляциях и при бесконечно малом вращении четырехмерного пространства. Для получения выражения этих величин и записи законов сохранения поступаем так же, как в механике. Изменения плотности функции Лагранжа при пространственно-временных трансляциях координаты  $x_{\mu}$  даются выражением

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} &= \sum_{\alpha, \beta} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\alpha} \Phi_{\alpha, \mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\alpha, \beta}} \Phi_{\alpha, \beta \mu} \right) = \\ &= \sum_{\nu, \alpha} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\alpha \nu}} \Phi_{\alpha, \mu} \right), \end{aligned} \quad (73.10)$$

где использованы уравнение (73.6) и независимость производных от порядка дифференцирования  $\Phi_{\alpha, \beta \mu} = \Phi_{\alpha, \mu \beta}$ . Перепишем (73.10):

$$\sum \frac{\partial T'_{\mu \nu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (73.11a)$$

$$T'_{\mu \nu} = \sum_\alpha \Phi_{\alpha, \mu} F_{\alpha \nu} - \delta_{\mu \nu} \mathcal{L}, \quad (73.11b)$$

где учтено, что  $\partial \mathcal{L} / \partial \Phi_{\alpha, \nu} = F_{\alpha \nu}$ , причем использовано выражение (73.7) для  $\mathcal{L}$  с  $s_\alpha = 0$ .

Формула (73.11a) показывает, что тензор  $T_{\mu \nu}'$  характеризует сохраняющиеся при трансляциях пространства — времени величины. Такими величинами являются энергия и импульс. Этот тензор определен не однозначно, потому что к нему можно добавить любой тензор второго ранга  $\sum_\tau \partial \tau_{\mu[\nu, \tau]} / \partial x_\tau$ , если тензор  $\tau_{\mu[\nu, \tau]}$  антисимметричен

по индексам  $[\nu, \tau]$ , поскольку для него

$$\sum_{\nu, \tau} \frac{\partial^2 \tau_{\mu[\nu, \tau]}}{\partial x_\nu \partial x_\tau} = 0. \quad (73.12)$$

Это используют для того, чтобы симметризовать тензор энергии-импульса (73.11b). В качестве  $\tau_{\mu[\nu, \tau]}$  возьмем

$$\tau_{\mu[\nu, \tau]} = \Phi_\mu F_{\nu \tau} \quad (73.13)$$

и тогда для симметричного тензора  $T_{\mu \nu}$  получим следующее выражение:

$$T_{\mu \nu} = T'_{\mu \nu} + \sum_\tau \frac{\partial}{\partial x_\tau} \Phi_\mu F_{\nu \tau} = \sum_\alpha H_{\mu \alpha} F_{\alpha \nu} - \delta_{\mu \nu} \mathcal{L}, \quad (73.14)$$

причем  $\mathcal{L}$  дается выражением (73.7) с  $s_\mu = 0$ .

Этот тензор совпадает с (67.8) и был подробно там рассмотрен. При отсутствии источников он удовлетворяет законам сохранения

$$\sum \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (73.15)$$

При наличии источников он удовлетворяет уравнению (67.9). Конкретный вид законов сохранения и выражения для энергии и импульса электромагнитного поля подробно проанализирован в § 67, и здесь нет необходимости эти вопросы повторять.

**1. Формулы векторной алгебры и анализа,  
используемые в книге**

1. Разложение двойного векторного произведения:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (\text{П.1})$$

2. Теорема Гаусса — Остроградского

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{П.2})$$

где  $d\mathbf{S}$  — элемент замкнутой поверхности  $S$ , ограничивающей объём  $V$ . Вектор  $d\mathbf{S}$  направлен по внешней нормали к поверхности.

3. Теорема Стокса

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{П.3})$$

где  $d\mathbf{l}$  — элемент замкнутого контура  $L$ , ограничивающего поверхность  $S$ . Направление обхода контура  $L$  составляет с направлением элемента поверхности интегрирования  $d\mathbf{S}$  праввинтовую систему.

$$4. \int_V \operatorname{rot} \mathbf{A} dV = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}, \quad (\text{П.4})$$

где  $d\mathbf{S}$  — элемент поверхности  $S$ , ограничивающий объём  $V$ , направленный по внешней нормали к поверхности.

$$5. \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (\text{П.5})$$

$$6. \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0. \quad (\text{П.6})$$

$$7. \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0. \quad (\text{П.7})$$

$$8. \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (\text{П.8})$$

9. Обозначение:

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} = A_x \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}. \quad (\text{П.9})$$

$$10. \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (\Pi.10)$$

$$11. \operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A}. \quad (\Pi.11)$$

$$12. \operatorname{grad}(\varphi\psi) = \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi. \quad (\Pi.12)$$

$$13. \operatorname{div}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \operatorname{grad} \varphi. \quad (\Pi.13)$$

$$14. \operatorname{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{A}. \quad (\Pi.14)$$

$$15. \operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (\Pi.15)$$



## 2. Единицы СИ, используемые в книге

Величина			Единица	
наименование	размерность	основное обозначение	наименование	обозначение
<i>Основные единицы</i>				
Длина	<i>L</i>	<i>l</i>	метр	м
Масса	<i>M</i>	<i>m</i>	килограмм	кг
Время	<i>T</i>	<i>t</i>	секунда	с
Сила тока	<i>I</i>	<i>I</i>	ампер	А
Температура	$\theta$	<i>T</i>	кельвин	К
Количество вещества	<i>N</i>	$\nu$	моль	моль
Сила света	<i>J</i>	<i>I</i>	кандела	кд
<i>Производные единицы</i>				
Скорость	<i>LT</i> <sup>-1</sup>	<i>v, u</i>	метр в секунду	м/с
Ускорение	<i>LT</i> <sup>-2</sup>	<i>a</i>	метр в секунду	м/с <sup>2</sup>
Сила	<i>LMT</i> <sup>-2</sup>	<i>F</i>	в квадрате ньютон	Н
Давление	<i>L</i> <sup>-1</sup> <i>MT</i> <sup>-2</sup>	<i>p</i>	паскаль	Па
Импульс	<i>LMT</i> <sup>-1</sup>	<i>p</i>	килограмм-метр	кг·м/с
Энергия	<i>L</i> <sup>2</sup> <i>MT</i> <sup>-2</sup>	<i>W, E</i>	в секунду джоуль	Дж
Мощность	<i>L</i> <sup>2</sup> <i>MT</i> <sup>-3</sup>	<i>P</i>	ватт	Вт
Момент инерции	<i>L</i> <sup>2</sup> <i>M</i>	<i>J</i>	килограмм-метр в квадрате	кг·м <sup>2</sup>
Момент силы	<i>L</i> <sup>2</sup> <i>MT</i> <sup>-2</sup>	<i>M</i>	ньютон-метр	Н·м
Момент импульса	<i>L</i> <sup>2</sup> <i>MT</i> <sup>-1</sup>	<i>L</i>	килограмм-метр в квадрате в секунду	кг·м <sup>2</sup> /с
Количество электричества (электрический заряд)	<i>TI</i>	<i>Q</i>	кулон	Кл
Плотность заряда объемная	<i>L</i> <sup>-3</sup> <i>TI</i>	$\rho$	кулон на кубический метр	Кл/м <sup>3</sup>
Плотность заряда поверхностная	<i>L</i> <sup>-2</sup> <i>TI</i>	$\sigma$	кулон на квадратный метр	Кл/м <sup>2</sup>
Плотность заряда линейная	<i>L</i> <sup>-1</sup> <i>TI</i>	$\tau$	кулон на метр	Кл/м
Абсолютная диэлектрическая проницаемость	<i>L</i> <sup>-3</sup> <i>M</i> <sup>-1</sup> $\times$ $\times T^4 I^2$	$\epsilon$	фарад на метр	Ф/м
Электрическая постоянная	<i>L</i> <sup>-3</sup> <i>M</i> <sup>-1</sup> $\times$ $\times T^4 I^2$	$\epsilon_0$	фарад на метр	Ф/м
Относительная диэлектрическая проницаемость	безразмерная величина	$\epsilon_r$		
Напряженность электрического поля	<i>LMT</i> <sup>-3</sup> $\times$ $\times I$ <sup>-1</sup>	<i>E</i>	вольт на метр	В/м

Величина			Единица	
наименование	размерность	основное обозначение	наименование	обозначение
Поток напряженности электрического поля	$L^3MT^{-3} \times I^{-1}$	<i>N</i>	вольт-метр	В·м
Потенциал электрического поля	$L^2MT^{-3} \times I^{-1}$	$\varphi$	вольт	В
Электрический момент диполя	$LI$	<i>p</i>	кулон-метр	Кл·м
Поляризованность	$L^{-2}TI$	<i>P</i>	кулон на квадратный метр	Кл/м <sup>2</sup>
Электрическое смещение	$L^{-2}TI$	<i>D</i>	кулон на квадратный метр	Кл/м <sup>2</sup>
Поток электрического смещения	$TI$	$\Psi$	кулон	Кл
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1} \times T^4I^2$	<i>C</i>	фарад	Ф
Объемная плотность энергии электрического и магнитного поля	$L^{-1}MT^{-2}$	$w$	джоуль на кубический метр	Дж/м <sup>3</sup>
Электрическое напряжение	$L^2MT^{-3} \times I^{-1}$	<i>U</i>	вольт	В
Электрическое сопротивление	$L^2MT^{-3} \times I^{-2}$	<i>R</i>	ом	Ом
Удельная электрическая проводимость	$L^{-3}M^{-1} \times T^3I^2$	$\gamma$	сименс на метр	См/м
Подвижность носителей зарядов	$M^{-1}T^2I$	<i>b</i>	квадратный метр на вольт-секунду	$\frac{м^2}{В \cdot с}$
Плотность объема тока	$L^{-2}I$	<i>j</i>	ампер на квадратный метр	А/м <sup>2</sup>
Магнитный момент электрического тока	$L^2I$	<i>P<sub>m</sub></i>	ампер-квадратный метр	А·м <sup>2</sup>
Магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	<i>B</i>	тесла	Тл
Магнитный поток	$L^2MT^{-2} \times I^{-1}$	$\Phi$	вебер	Вб
Напряженность магнитного поля	$L^{-1}I$	<i>H</i>	ампер на метр	А/м
Индуктивность	$L^2MT^{-2} \times I^{-2}$	<i>L</i>	генри	Гн
Абсолютная магнитная проницаемость	$LMT^{-2} \times I^{-2}$	$\mu$	генри на метр	Гн/м
Магнитная постоянная	$LMT^{-2} \times I^{-2}$	$\mu_0$	генри на метр	Гн/м

Величина			Единица	
наименование	размерность	основное обозначение	наименование	обозначение
Относительная магнитная проницаемость	безразмерная величина	$\mu_r$		
Намагниченность	$L^{-1}I$	$J$	ампер на метр	$A/m$
Частота колебаний	$T^{-1}$	$\nu$	герц	$Гц$
Круговая частота колебаний	$T^{-1}$	$\omega$	секунда в минус первой степени	$c^{-1}$
Плотность потока энергии электромагнитного поля	$MT^{-3}$	$S$	ватт на квадратный метр	$Вт/м^2$

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Айвса опыты 348  
Ампера закон 177  
Анизотропия 142, 285
- Бабинэ принцип 311  
Барнетта эффект 299  
Бю — Савара — Лапласа закон 31, 153
- Вавилова — Черенкова излучение 362—366  
Вектор индукции 106  
— намагничивания 159, 162, 166, 175, 191  
— смещения 106  
— четырехмерный 316  
— —, квадрат 317  
— — волновой 347  
— — мировой точки 317  
— — плотности силы 336  
— — силы Минковского 337  
Вектора четырехмерного квадрат 317  
Взаиминдукция 173  
Волна монохроматическая 261, 307  
— — монохроматическая 276  
— — плоская 261, 349  
— —, импульс 351  
— —, преобразование амплитуды и частоты 349  
— —, энергия 350  
Волновод 300  
— прямоугольный 303  
Волновой пакет 281  
Волны глубина проникновения 274  
— — замещение 284  
Волны в волноводе, классификация 302  
Восприимчивость диамагнитная 191, 193
- Восприимчивость диэлектрическая 107  
— — комплексная 272  
— — молекулярная 133, 134  
— — магнитная 165  
— — относительная 166  
— — парамагнитная 194  
Время релаксации 24
- Герца вектор 239  
— вибратор 233  
Градиент четырехмерный 322  
Грина формула 93, 94  
— функция 96, 97, 229  
— — для неограниченного пространства 229  
Гюйгенса построение 296
- Даламбера уравнения — См. Уравнения волновые  
— оператор 324
- Джоуля — Ленца закон 47, 58, 150, 151  
Диамagnетики 160, 181, 191—193  
Дивергенция четырехмерная 323  
Дисперсия 275  
— аномальная 279  
— нормальная 278  
— света в межзвездном пространстве 284  
Диссоциация 54  
Диэлектрики 102, 143  
Доплера эффект 347  
— — поперечный 348  
— — продольный 348  
Дифракция Фраунгофера — см. Фраунгофера дифракция  
— Френеля — см. Френеля дифракция

- Емкость электрическая** 61, 79, 85  
**Емкость конденсатора** 81, 83, 210  
 — — цилиндрического 61
- Закон полного тока** 34  
 — сохранения заряда 000  
 — — энергии 42, 127  
**Замещение волны** 284  
 — —, длина 284  
**Заряд** 20  
 — магнитный 344—346  
 — системы 100  
**Зона волновая** 241
- Излучения мощность** 243, 247, 251, 361  
 — реакция 251, 361  
 — спектральный состав 361  
 — угловое распределение 361  
**Импеданс** 212  
**Инвариантность плоской волны** 346  
 — фазы 346  
**Инварианты тензоров поля** 335  
**Индукция** 12  
 — поля магнитного 153, 167  
 — электромагнитная 201  
 — электростатическая 78  
**Интенсивность волны** 271
- Калибровка кулоновская** 226  
 — лоренцовская 225  
**Кирхгофа интеграл** 306  
**Конденсаторы** 81, 86  
**Контур колебательный** 212  
**Концентрация ионов** 53  
 — молекул 54  
**Коэффициент взаимной емкости** 85  
 — диэлектрической восприимчивости 102  
 — отражения 272  
 — преломления 272  
 — рекомбинации 49  
**Кристаллы двухосные** 144, 293  
 — ионные 142  
 — одноосные 143, 293  
**Кулона закон** 16, 92, 93  
**Кюри закон** 194, 195
- Ланжевена — Дебая формула** 137  
**Лапласа оператор** 72, 75  
**Лармора теорема** 187  
**Лежандра уравнение** 91  
 — функция 91  
**Лоренца преобразование** 29  
 — сила 184, 185  
 — условие 225  
 — формула 30
- Магнетики** 159  
**Максвелла уравнения** 15, 19, 37—40, 43, 62, 65, 202, 222, 372  
**Метод изображений** 108  
**Молекулы неполярные** 133  
 — полярные 133  
**Молизация** 54  
**Момент дипольный** 101, 133, 137, 140  
 — инерции осевой 198  
**Момент магнитный** 158, 159, 180, 182, 188, 191  
 — сил 121  
 — — механический 187, 188, 195, 196  
 — системы зарядов дипольный 100  
 — — — квадрупольный 100
- Напряженность поля локального** 138—140  
**Напряженность поля магнитного** 12, 164, 165, 168, 169, 181  
 — — точечного заряда 16, 69, 107, 108  
 — — электрического 12, 122, 202, 203  
 — — — внутри шара 111  
 — — электромагнитного 263  
**Неймана формула** 175
- Осциллятор линейный** 238  
**Осциллятора мощность излучения** 243  
 — поле в волновой зоне 241  
**Ось оптическая кристалла** 293
- Парамагнетики** 160, 181  
**Парамагнетизм** 194
- Лагранжа уравнение** 73, 109  
 — функции плотность 370

- Плотность заряда объемная 14, 21, 26, 103, 105, 114, 163, 164
- — — поверхностная 89, 103, 105, 164, 168
- импульса поля электромагнитного 260
- силы объемная 123, 124, 181
- — — поверхностная 129, 130, 132
- смещения 23
- тока 14, 48, 50, 53, 57, 148, 151, 219
- — — четырехмерная 326
- энергии поля магнитного 171
- — — — электрического 113
- — — — электромагнитного 144, 223
- Поверхность лучевая 294
- Поглощение 280
- Подвижность ионов 48, 52
- Пойнтинга вектор 43, 197, 223, 257, 265, 297
- Показатель преломления комплексный 278
- Поле диполя 101
- квазистационарное 200, 202
- локальное 277
- магнитное линейного осциллятора 238
- магнитостатическое 168
- потенциальное 67, 168
- электрическое 79, 102
- — — линейного осциллятора 238
- Поля сторонние 148
- Пбля электромагнитного импульс 259
- — — напряженность 261, 263
- — — тензор 332
- — — — энергии и импульса 340, 370
- Поляризация 98, 141
- диэлектрика 277
- спонтанная 141
- Поляризованности вектор 101
- Постоянная магнитная 13
- электрическая 13
- Потенциал векторный 151—152, 155—161, 167, 204, 223—224, 235
- рамки с током 237, 243
- зарядов 70, 71, 116
- запаздывающий 231, 232
- опережающий 232, 233
- поля электрического 103
- Потенциал поляризаационный — см. Герца вектор
- скалярный 66, 203, 223, 224
- — — диполя 234
- четырехмерный 326
- Потенциала нормировка 69
- Потенциалов уравнение 224
- разность 69, 209
- Потенциалы Льенара — Ве-херта — см. Льенара — Ве-херта потенциалы
- Поток индукции магнитной 37, 206, 216, 275
- Преобразования калибровочные 224
- — — — полей 333
- частоты и напряжения 347
- Принцип Бабинэ — см. Бабинэ принцип
- Проводимость дырочная 45
- — — — ионная 45
- — — — электрическая 45
- — — — удельная 46
- Проводники 77
- Проницаемость диэлектрическая абсолютная 12, 13
- — — — — комплексная 273
- — — — — относительная 12, 13
- магнитная абсолютная 165
- — — — — относительная 166
- Разряда характеристика 51
- Рекомбинация 48
- Ротор четырехмерный 324
- Самоиндукция 173, 220
- Света давление 260
- Сегнетоэлектрики 102
- Сила Лоренца 214
- — — — — тока 149
- — — — — торможения излучением 248, 361
- — — — — электродвижущая, сторон-ная 148, 149
- Скин-эффект 217—220
- Скорость дрейфа ионов 49, 52, 57
- — — — — групповая 283, 287
- — — — — ионов 55
- — — — — лучевая 291—293
- — — — — света 13
- — — — — фазовая 288—291
- — — — — четырехмерная 318

Снеллиуса закон 268  
Сопротивление 61  
— среды 61  
— — волновое 274  
Состояние равновесное 52  
Спектральная плотность энергии излучения 255, 362  
Спектральной линии «полуширина»  
Стокса теорема 26

Тензор антисимметричный 321  
— натяжений 344  
— проницаемости диэлектрической 143  
— симметричный 321  
— трехмерный 320  
— четырехмерный 321  
— энергии и импульса электромагнитного поля 340, 370, 372

Теорема взаимности 84  
— Гаусса 16, 82  
— Стокса — см. Стокса теорема

Ток линейный 154  
— молекулярный 163  
— смещения 22  
— четырехмерный 367  
— электрический 45, 47  
— — несамостоятельный 48  
— — самостоятельный 48, 51  
— элементарный 155  
Трансформатор 207

Уравнение Даламбера 225, 233  
— непрерывности 20, 21, 147  
— поверхностей эквипотенциальных 87, 88  
— Пуассона 72, 73, 76, 227  
— цепи электрической 210  
— Френеля 289, 292  
Уравнения волновые 225  
— электростатики 67  
Условия граничные 63, 65, 112  
— излучения 307

— ортогональности преобразования координат 315  
Ускорение четырехмерное 319  
— — , квадрат 320

Ферромагнетики 163, 166  
Формула сложения скоростей  
Фраунгоферова дифракция 310  
Френеля дифракция 308  
— формулы 272

Частота вращения ларморовская 187  
— граничная 303  
— угловая 189  
Четырехмерный мир 315

Эйнштейна — де Гааз опыт 197, 199  
Экранировка магнитная 179  
Электрона колеблющегося излучение 245  
— — мощность потока излучения 247  
Электропроводность 57  
— раствора 55  
Эллипсоид лучевой 293  
Энергия диполя 117  
— диэлектрика 118, 119  
— заряда 115  
— излучения 359  
— — осциллятора 242  
— колеблющегося электрона 245  
— конденсатора 117  
— магнетика 175, 176  
— момента магнитного 182, 193  
— поля магнитного 170—173, 220  
— — потенциальная 134  
— — электрического 112, 113  
— — электромагнитного 43, 113, 116, 118  
— собственная 115

**Алексей Николаевич Матвеев**

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

Зав. редакцией литературы по физике и математике Е. С. Гридасова. Редактор Г. Н. Чернышева. Младшие редакторы С. А. Доровских, Н. П. Майкова. Переплет художника И. Д. Бабаева. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Е. И. Герасимова, Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 1648

Изд. № ФМ—627. Сдано в набор 06.04 79. Подп. в печать 14.12.79.  
Формат  $84 \times 108^{1/32}$ . Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая.  
Объем 20,16 усл. печ. л. 16,30 уч.-изд. л. Тираж 15 000 экз.  
Зак. № 2147. Цена 85 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Хохловский пер., 7.



А. Н. МАТВЕЕВ

---

# ЭЛЕКТРО- ДИНАМИКА

---