

Н. В. МЕДВЕДЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙНОВ
В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

ЧЕБОКСАРЫ — 1977

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

РСФСР

ЧУВАШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.И.Н. УЛЬЯНОВА

Кафедра алгебры и вычислительной математики

Н.В. МЕЛЬДЕЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙНОВ
В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Учебное пособие

ЧЕБОКСАРЫ - 1977

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Чувашского государственного университета им. И.Н.Ульянова

Настоящий выпуск представляет собой учебное пособие по специальному курсу "Некоторые вопросы теории приближений" для студентов 4 курса физико-математического факультета Чувашского государственного университета им.И.Н.Ульянова.

В пособии рассматриваются некоторые вопросы кусочно-полиномиальных приближений / сплайнов /, когда исходная информация носит детерминированный или стохастический характер.

Изучаются вопросы существования и единственности интерполяционных кубических и полиномиальных сплайнов и их основные свойства. Рассматриваются задача обобщенного интерполирования в детерминированной и стохастической постановках и аппроксимативные свойства решений этих задач.

Изучаются регуляризованные стохастические сплайны, полученные с помощью метода регуляризации А.Н. Тихонова, и устанавливается их связь с интерполяционными сплайнами.

Нумерация формул в пределах каждого параграфа своя. Ссылка на формулу, например, (20.0) означает, что двадцатая формула находится в водных замечаниях ; при ссылках на формулу из того же параграфа указывается только ее номер.

Редактор : канд. физ.-мат. наук доцент Галанин А.В.



Чувашский государственный университет, 1977 г.

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При изложении основного материала нам понадобятся следующие вспомогательные факты и утверждения из теории нормированных и гильбертовых пространств.

Мы будем рассматривать банахиры пространства C_m — m раз непрерывно дифференцируемых функций, заданных на отрезке $[a, b]$ действительной оси, норма в которых определяется соотношением:

$$\|u(x)\|_{C_m} = \max \left\{ \sup_{a \leq x \leq b} |u(x)|, \dots, \sup_{a \leq x \leq b} |u^{(m)}(x)| \right\}. \quad (1)$$

Пространство L_2 — гильбертово пространство суммируемых с квадратом функций, заданных на отрезке $[a, b]$, норма в котором определяется скалярным произведением:

$$(u, v)_{L_2} = \int_a^b u(x)v(x)dx. \quad (2)$$

Пространство $W_2^{(m)}$ — соболевское пространство — это множество всех функций $u(x) \in L_2$, имеющих обобщенные производные до m -го порядка включительно, норма в котором определяется скалярным произведением:

$$(u, v)_{W_2^{(m)}} = (u, v)_{L_2} + (u^{(m)}, v^{(m)})_{L_2}. \quad (3)$$

Лемма 1. Пространство $W_2^{(m)}$ вложено в пространство C_{m-1} , т.е. выполняются два условия:

$$1) W_2^{(m)} \subseteq C_{m-1};$$

2) существует число $\lambda > 0$ такое, что $\|u\|_{C_{m-1}} \leq \lambda \|u\|_{W_2^{(m)}}$ (4), для любого элемента $u \in C_{m-1}$.

Доказательство. Пусть u_i — последовательность m раз непрерывно дифференцируемых функций таких, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|u_i - u\|_{L_2} = \lim_{i \rightarrow \infty} \|u_i^{(k)} - u^{(k)}\|_{L_2} = 0 \text{ при } k=1, \dots, m,$$

где $U = U(x)$ – некоторый элемент из $W_2^{(m)}$ и $U^{(k)}$ – его обобщенная производная порядка k .

Имеем

$$U_i^{(m-1)}(x) = U_i^{(m-1)}(t) + \int_t^x U_i^{(m)}(\tau) d\tau.$$

Отсюда следует

$$U_i^{(m-1)}(x) = \frac{1}{B-a} \int_a^B U_i^{(m-1)}(t) dt + \frac{1}{B-a} \int_a^B \int_t^x U_i^{(m)}(\tau) d\tau dt. \quad (5)$$

Применив неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\begin{aligned} |U_i^{(m-1)}(x) - U_{i+p}^{(m-1)}(x)| &\leq \frac{1}{B-a} \left(\int_a^B 1^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^B (U_i^{(m-1)}(x) - U_{i+p}^{(m-1)}(x))^2 dx \right)^{1/2} + \\ &+ \frac{1}{B-a} \int_a^B \left(\int_a^B 1^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^B (U_i^{(m)}(x) - U_{i+p}^{(m)}(x))^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= (B-a)^{1/2} \left(\|U_i^{(m-1)}(x) - U_{i+p}^{(m-1)}(x)\|_{L_2} + \|U_i^{(m)}(x) - U_{i+p}^{(m)}(x)\|_{L_2} \right), \end{aligned}$$

где p – произвольное натуральное число.

Из последнего соотношения следует, что последовательность фундаментальна в банаховом пространстве C и, следовательно, существует элемент $U_{m-1}(x) \in C$ такой, что

$$\|U_i^{(m-1)}(x) - U_{m-1}(x)\|_C \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty.$$

Но, с другой стороны,

$$\|U_i^{(m-1)}(x) - U(x)\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty.$$

По силе единственности предела должно быть $U^{(m-1)}(x) = U_{m-1}(x)$.

Подставив (5) к пределу при $i \rightarrow \infty$, получим интегральное представление:

$$U^{(m-1)}(x) = \frac{1}{B-a} \int_a^B U^{(m-1)}(t) dt + \frac{1}{B-a} \int_a^B \int_t^x U^{(m)}(\tau) d\tau dt. \quad (6)$$

Аналогично можно получить представления

$$U^{(K-1)}(x) = \frac{1}{B-a} \int_a^b U(t) dt + \frac{1}{B-a} \int_a^x \int_t^b U^{(K)}(\tau) d\tau dt \quad (7)$$

для всех $K=0, 1, \dots, m-2$.

Из представлений (6), (7) следует непрерывность функции $U(x)$ вместе с ее обобщенными производными до порядка $m-1$. Продифференцировав соотношения (6) и (7), убеждаемся, что

$$\frac{dU(x)}{dx} = U^{(K)}(x), \quad K=1, 2, \dots, m-1, \quad \text{т.е.}$$

обобщенные производные $U(x)$ являются производными функции $U(x)$ в обычном смысле.

Далее, применение к (7) неравенства Коши-Буняковского, получим

$$|U^{(K-1)}| \leq (B-a)^{\frac{1}{2}} (\|U^{(K-1)}\|_{L_2} + \|U^{(K)}\|_{L_2}) \leq \sqrt{2(B-a)} \|U\|_{W_2^{(m)}}$$

для $K=1, 2, \dots, m$ и всех $x \in [a, b]$.

Полученная оценка доказывает лемму 1.

Следствие. Из сходимости последовательности функций в пространстве $W_2^{(m)}$ следует ее равномерная сходимость вместе со всеми производными до порядка $m-1$ включительно и сходимость производных порядка m в пространстве L_2 .

Лемма II. Для любой функции $U = U(x) \in C_1$ справедлива оценка:

$$\left| \sum_{k=0}^N h u^2(x_k) - \|U\|_{L_2}^2 \right| \leq 2h \|U\|_{C_1}^2, \quad (8)$$

где h - шаг сетки $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$.

Доказательство. Для вычисления интеграла $\int_a^b u^2(x) dx$ применим формулу прямоугольников:

$$\int_a^b u^2(x) dx = \sum_{k=0}^N h u^2(x_k) - h u^2(x_N) + \frac{h}{2} \frac{du^2(x)}{dx} \Big|_{x=x_0},$$

где \bar{x}_0 - удовлетворяет условию $a \leq \bar{x}_0 \leq b$.

Отсюда следует справедливость леммы П.

Лемма Ш. Пусть функции $u(x)$ и $v(x) \in C_1$ такие, что

$$|u(a)-v(a)| \leq \delta, |u(b)-v(b)| \leq \delta. \quad (9)$$

Тогда на отрезке $[a, b]$ существует точка c такая, что

$$|u'(c)-v'(c)| \leq \frac{2\delta}{b-a}. \quad (10)$$

Доказательство. Очевидно, что функция

$$\begin{aligned} f(x) = & u(x)-v(x)+\frac{x}{b-a}(v(b)-u(b)+u(a)-v(a)) + \\ & + \frac{b}{b-a}(v(a)-u(a))-\frac{a}{b-a}(v(b)-u(b)) \end{aligned}$$

удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

Поэтому существует точка $c \in [a, b]$ такая, что

$$f'(c) = u'(c)-v'(c) + \frac{1}{b-a}(v(b)-u(b)+u(a)-v(a)) = 0.$$

Из последнего соотношения следует справедливость леммы Ш.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения из теории вероятностей.

Пусть Ω - пространство элементарных событий ω и \mathcal{G} - сигма-алгебра подмножеств A множества Ω . Пусть на \mathcal{G} определена вероятностная мера P . Тогда тройка объектов $\{\Omega, \mathcal{G}, P\}$ называется вероятностным пространством \mathcal{P} .

В дальнейшем вероятностное пространство \mathcal{P} мы будем считать фиксированным.

Говорят, что на вероятностном пространстве \mathcal{P} задана случайная величина $u(\omega)$, если для каждого $x \in (-\infty, \infty)$ множество $A_x = \{\omega \in \Omega : u(\omega) < x\} \in \mathcal{G}$.

Функция $F(x) = P\{\omega \in \Omega : u(\omega) \leq x\}$ называется функцией распределения случайной величины $u(\omega)$, а величина

$$U = \int_{-\infty}^x c dF(x) \quad (\text{если она существует})$$

называется математическим ожиданием случайной величины $U(\omega)$.
В дальнейшем математическое ожидание U случайной величины $U(\omega)$ будем обозначать так: $U = E[U(\omega)]$.

Величина $\sigma^2 = E[U(\omega) - E[U(\omega)]]^2$ – называется дисперсией случайной величины $U(\omega)$ и обозначается $D[U(\omega)]$.

Из этих определений следует соотношение

$$D[U(\omega)] = E[U(\omega)]^2 - (E[U(\omega)])^2. \quad (11)$$

Мы скажем, что на \mathcal{P} задана система случайных величин $U_1(\omega), U_2(\omega), \dots$, если для любого числа n известна совместная функция распределения

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\omega : U_1(\omega) < x_1, U_2(\omega) < x_2, \dots, U_n(\omega) < x_n\}.$$

Система случайных величин $U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega)$ называется независимой, если

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1)F(x_2) \cdots F(x_n),$$

где $F(x_i)$, $i=1, n$ – функция распределения случайной величины $U_i(\omega)$.

Если

$$\mathcal{K}(U_1, U_2) = E[(U_1(\omega) - E[U_1(\omega)])(U_2(\omega) - E[U_2(\omega)])]$$

называется корреляционным моментом случайных величин $U_1(\omega)$ и $U_2(\omega)$.

Случайные величины $U_1(\omega)$ и $U_2(\omega)$ называются некоррелированными, если $\mathcal{K}(U_1, U_2) = 0$.

Математические ожидания и дисперсии обладают следующими свойствами:

$$1^o \quad E[C] = C.$$

$$2^o \quad D[C] = 0.$$

$$3^o \quad E\left[\sum_{i=1}^n c_i U_i(\omega)\right] = \sum_{i=1}^n c_i E[U_i(\omega)].$$

$$4^o \quad E\left[\prod_{i=1}^n U_i(\omega)\right] = \prod_{i=1}^n E[U_i(\omega)], \text{ если } U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega) - \text{ попарно некоррелированы.}$$

5° $\mathcal{D}\left[\sum_{i=1}^n c_i U_i(\omega)\right] = \sum_{i=1}^n c_i^2 \mathcal{D}[U_i(\omega)]$, если $U_i(\omega)$ и $U_j(\omega)$ при $i \neq j$ некоррелированы.

Здесь c_i, c_j – действительные числа .

Пусть

$$S_a(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i U_i(\omega),$$

$S_b(\omega) = \sum_{i=1}^n b_i U_i(\omega)$ – две линейные комбинации системы случайных величин $U_1(\omega), \dots, U_n(\omega)$.

Тогда

$$\mathcal{K}(S_a, S_b) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \mathcal{K}(U_i, U_j). \quad (12)$$

В частном случае, если $a_i = b_i$, то

$$\mathcal{K}(S_a, U_j) = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{K}(U_i, U_j), \quad (13)$$

$$\mathcal{D}[S_a] = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \mathcal{K}(U_i, U_j). \quad (14)$$

Обозначим через \mathcal{L}_2^ω множество всех случайных величин таких, что $E[U(\omega)]^2 < \infty$, и на \mathcal{L}_2^ω определим скалярное произведение по формуле

$$(U, V)_{\mathcal{L}_2^\omega} = E[U(\omega)V(\omega)] \quad (15)$$

а норму, соответственно, по формуле

$$\|U\|_{\mathcal{L}_2^\omega} = \sqrt{E[U(\omega)]^2}. \quad (16)$$

После введенных так скалярного произведения и нормы \mathcal{L}_2^ω есть полное гильбертово пространство. Мы скажем, что последовательность случайных величин $U_n(\omega)$ сильно сходится к случайной величине $U(\omega)$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n(\omega) - U(\omega)\|_{\mathcal{L}_2^\omega} = 0,$$

и слабо, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n(\omega), V(\omega))_{\mathcal{L}_2^\omega} = (U(\omega), V(\omega))_{\mathcal{L}_2^\omega},$$

для любого элемента $U(\omega) \in \mathcal{L}_2^\omega$. Очевидно, что в гильбертовом пространстве из сходимости норм и слабой сходимости следует сильная сходимость (покажите!).

Задача 1. Доказать, что слабо сходящаяся последовательность элементов $U_n(\omega) \in \mathcal{L}_2^\omega$ ограничена по норме (16).

Задача 2 (т.Банаха-Сакса). Если последовательность

$U_n(\omega) \in \mathcal{L}_2^\omega$ слабо сходится к элементу $U_0(\omega) \in \mathcal{L}_2^\omega$, то существует такая подпоследовательность $U_{n_k}(\omega)$, что

$$U_K(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K U_{n_k}(\omega) \text{ сходится сильно к } U_0(\omega). \text{ Доказать!}$$

Задача 3. Доказать, что всякое замкнутое множество случайных величин в \mathcal{L}_2^ω является слабозамкнутым множеством.

Задача 4. Показать, что если $U_n(\omega) \in \mathcal{L}_2^\omega$ слабо сходятся к $U_0(\omega)$, то

$$\|U_0(\omega)\|_{\mathcal{L}_2^\omega}^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n(\omega)\|_{\mathcal{L}_2^\omega}^2. \quad (17)$$

Множество $U \subseteq \mathcal{L}_2^\omega$ называется слабокомпактным, если из всякой принадлежащей ему бесконечной последовательности можно выделить слабосходящуюся подпоследовательность.

Задача 5. Доказать, что для слабой компактности множества $U \subseteq \mathcal{L}_2^\omega$ необходимо и достаточно его ограниченности.

Пусть $[a, b]$ – конечный или бесконечный отрезок действительной оси и $\mathcal{P} = \{\Omega, \mathcal{G}, P\}$ – вероятностное пространство. Отображение f топологического произведения $[a, b] \times \mathcal{P}$ в расширенную числовую прямую $[-\infty, \infty]$ такое, что для любого фиксированного $x \in [a, b]$ сечение f_x есть случайная величина, определенная на \mathcal{P} , называется случайной функцией.

Обозначим через U множество всех вещественнонезначимых функций $U(\omega; x)$, определенных на $[a, b] \times \mathcal{P}$ со значениями в \mathcal{L}_2^ω .

Случайная величина $A(\omega)$ называется пределом случайной функции $U(\omega; x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$, выполняется соотношение $E[U(\omega; x) - A(\omega)] \leq \varepsilon$.

Случайная функция $U(\omega; x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если для всякого $\delta > 0$ существует $\delta' > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta'$, выполняется неравенство

$$E[U(\omega; x) - U(\omega; x_0)]^2 \leq \varepsilon.$$

Функция, непрерывная в каждой точке отрезка $[a, b]$, называется непрерывной на отрезке $[a, b]$.

Случайная величина $A(\omega)$ называется производной случайной функции $U(\omega; x)$ в точке x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} E\left[\frac{U(\omega; x) - U(\omega; x_0)}{x - x_0} - A(\omega)\right]^2 = 0.$$

Случайная функция $U(\omega; x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$, если существует предел в смысле нормы (16) следующей последовательности:

$s_n(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} U(\omega; \tilde{x}_i)(x_{i+1} - x_i)$, где $\{x_i\}$ – сетка узлов, определенная на отрезке $[a, b]$, \tilde{x}_i – любая точка отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ при $n \rightarrow \infty$ и $\max(x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0$, причем указанный предел не должен зависеть от способа выбора точек \tilde{x}_i и x_i на $[a, b]$. Как обычно, обозначаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\omega) = \int_a^b U(\omega; x) dx.$$

На множестве случайных функций мы будем рассматривать следующие функциональные пространства:

1°. Пространство C_0^ω – банахово пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ случайных функций $U(\omega; x)$, норма в котором определяется соотношением:

$$\|U(\omega; x)\|_{C_0^\omega}^2 = \sup_{0 \leq x \leq 1} E[U(\omega; x)]^2. \quad (18)$$

Здесь под математическим ожиданием случайной функции $U(\omega; x)$ понимается детерминированная функция $U(x)$ такая, что при

каждом фиксированном $\bar{x} \in [a, b]$ $U(\bar{x}) = E[U(\omega, \bar{x})]$.

2°. Пространство C_m^ω - банахово пространство m -раз непрерывно дифференцируемых случайных функций $U(\omega, x)$, норма в котором определяется соотношением:

$$\|U(\omega, x)\|_{C_m^\omega}^2 = \max \left\{ \|U(\omega, x)\|_{C_0^\omega}^2, \dots, \|U^{(m)}(\omega, x)\|_{C_0^\omega}^2 \right\}. \quad (19)$$

3°. Пространство L_2^ω - гильбертово пространство, норма в котором определяется скалярным произведением:

$$(U, V)_{L_2^\omega} = \int_a^b E[U(\omega, x)V(\omega, x)] dx. \quad (20)$$

4°. Пространство Соболева $W_{2,\omega}^{(m)}$. Пусть \mathcal{D}^ω - линейное многообразие функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$ вместе со своими производными до порядка m включительно. Пусть $U(\omega, x) \in L_2^\omega$ и существует последовательность $U_i(\omega, x) \in \mathcal{D}^\omega$ такая, что при $k = 1, 2, \dots, m$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|U_i(\omega, x) - U(\omega, x)\|_{L_2^\omega} = \lim_{i \rightarrow \infty} \|U_i^{(k)}(\omega, x) - V_k(\omega, x)\|_{L_2^\omega} = 0,$$

то $V_k(\omega, x)$ называется обобщенной производной порядка k для случайной функции $U(\omega, x)$.

Задача 6. Доказать, что если функция $U(\omega, x)$ имеет обобщенную производную порядка m , то она непрерывно дифференцируется в обычном смысле.

Обозначим через $W_{2,\omega}^{(m)}$ множество всех функций $U(\omega, x)$, имеющих обобщенную производную порядка m , и введем на этом множестве скалярное произведение по формуле

$$(U, V)_{W_{2,\omega}^{(m)}} = (U, V)_{L_2^\omega} + (U^{(m)}, V^{(m)})_{L_2^\omega} \quad (21)$$

Мы получим гильбертово пространство случайных функций $W_{2,\omega}^{(m)}$. Очевидно, что при $i < j$ пространство C_i^ω вложено в пространство C_j^ω , пространства C_m^ω и $W_{2,\omega}^{(m)}$ вложены в пространство L_2^ω .

Задача 7. Доказать, что для любой функции $U(\omega; x) \in C_1^\omega$ справедливо соотношение

$$\left| \sum_{k=0}^N h \|U(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega}^{2\omega} - \|U(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^{2\omega} \right| \leq 2h \|U(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^{2\omega}. \quad (22)$$

Задача 8. Доказать, что пространство $W_{2,\omega}^{(m)}$ вложено в пространство C_{m-1}^ω . Оператор L называется замкнутым, если из условий а) $U_n(\omega; x) \in \mathcal{D}_L$, б) $U_n(\omega; x) \rightarrow U_0(\omega; x)$ при $n \rightarrow \infty$, в) $L U_n(\omega; x) \rightarrow L U_0(\omega; x)$ следует, что

1) $U_0(\omega; x) \in \mathcal{D}_L$, 2) $L U_0(\omega; x) = U(\omega; x)$. Здесь \mathcal{D}_L – область определения оператора L . Если же соотношения б), в) рассматривать как слабые предельные переходы, то L называется слабо замкнутым оператором.

Задача 9. Доказать, что оператор обобщенного дифференцирования Соболева слабо замкнут на $W_{2,\omega}^{(m)}$.

Задача 10. Доказать, что слабо замкнутый оператор является замкнутым.

5°. Пространство \mathcal{F}_N^ω .

Пусть L – оператор обобщенного дифференцирования порядка $m > 2$ и $\{x_k\}$ – сетка узлов, заданная на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h = 1/N$. Определим на элементах пространства $W_{2,\omega}^{(m)}$ скалярное произведение

$$(U, V)_{\mathcal{F}_N^\omega} = \sum_{k=0}^N h (U(\omega; x_k), V(\omega; x_k))_{L_2^\omega} + (Lu, Lv)_{L_2^\omega}. \quad (23)$$

Мы всюду будем считать, что

$$m < N+2. \quad (24)$$

Задача 11. Доказать, что формула (23) при выполнении условия (24) действительно определяет скалярное произведение.

Лемма 1У. Пространство \mathcal{F}_N^ω – полное.

Доказательство. Пусть $U_n(\omega; x)$ – произвольная фундаментальная в \mathcal{F}_N^ω последовательность, т.е. для любого натурального числа p имеет место соотношение $\|U_{n+p} - U_n\|_{\mathcal{F}_N^\omega} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_{n+\rho}(\omega, x_k) - U_n(\omega, x_k)\|_{L_2^\omega} = 0, \quad (25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L U_{n+\rho} - L U_n\|_{L_2^\omega} = 0. \quad (26)$$

В силу полноты пространства L_2^ω существует элемент $U(\omega, x) \in L_2^\omega$ такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L U_n - U\|_{L_2^\omega} = 0 \quad (27)$$

Из (22), (23) следует оценка

$$\begin{aligned} \|U_{n+\rho} - U_n\|_{L_2^\omega} &\leq \sum_{k=0}^N h \|U_{n+\rho}(\omega, x_k) - U_n(\omega, x_k)\|_{L_2^\omega}^2 + \\ &+ 2h \|U_{n+\rho} - U_n\|_{C_1^\omega}^2 \leq \sum_{k=0}^N h \|U_{n+\rho}(\omega, x_k) - U_n(\omega, x_k)\|_{L_2^\omega}^2 + \\ &+ 2h \lambda \|U_{n+\rho} - U_n\|_{L_2^\omega}^2 + 2h \lambda \|L U_{n+\rho} - L U_n\|_{L_2^\omega}^2. \end{aligned}$$

Ввяя число узлов сетки большим настолько, чтобы выполнялось соотношение $2h\lambda < 1$, получим оценку:

$$\begin{aligned} \|U_{n+\rho} - U_n\|_{L_2^\omega}^2 &\leq \frac{2h\lambda}{1-2h\lambda} \|L U_{n+\rho} - L U_n\|_{L_2^\omega}^2 + \\ &+ \frac{h}{1-2h\lambda} \sum_{k=0}^N \|U_{n+\rho}(\omega, x_k) - U_n(\omega, x_k)\|_{L_2^\omega}^2, \end{aligned}$$

из которой, в силу соотношений (25) – (26), следует фундаментальность последовательности $U_n(\omega, x)$ в пространстве L_2^ω . Пусть $U(\omega, x)$ – предел этой последовательности. В силу замкнутости оператора L следует, что $U = LU$ и $U(\omega, x) \in W_{2,\omega}^{(m)}$.

Далее,

$$\|U_n - U\|_{J_N^\omega}^2 \leq \|U_n - U\|_{L_2^\omega}^2 + 2h \|U_n - U\|_{C_1^\omega}^2 +$$

$$+ \|Lu_n - Lu\|_{L_2^\omega}^2 \leq \|u_n - u\|_{L_2^\omega}^2 + \|Lu_n - Lu\|_{L_2^\omega}^2 + \\ + 2h\lambda \left\{ \|u_n - u\|_{L_2^\omega}^2 + \|Lu_n - Lu\|_{L_2^\omega}^2 \right\}$$

Из этой оценки следует справедливость леммы 1у.

Следствие. Нормы в пространствах \mathcal{F}_N^ω и $W_{2,\omega}^{(m)}$ эквивалентны, т.е. существуют такие два числа $M_1, M_2 > 0$, не зависящие от выбора функции $u(\omega; x)$ из $W_{2,\omega}^{(m)}$, что имеет место соотношение

$$M_1 \|u\|_{\mathcal{F}_N^\omega} \leq \|u\|_{W_{2,\omega}^{(m)}} \leq M_2 \|u\|_{\mathcal{F}_N^\omega}. \quad (26)$$

Замечание. Если рассматривать не случайные функции, а детерминированные, то пространства $C_0^\omega, C_m^\omega, L_2^\omega, W_{2,\omega}^{(m)}, \mathcal{F}_N^\omega$ превращаются в обычные пространства $C, C_m, L_2, W_{2,\omega}^{(m)}, \mathcal{F}_N$.

ГЛАВА 1. КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

§ 1. Интерполяционные детерминированные кубические сплайны и их свойства

1°. Постановка задачи.

Пусть на отрезке $[0, 1]$ задана равномерная сетка Δ узлов $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = 1$ с шагом $h = \frac{1}{N+1}$ и сеточная функция $y_k, k=0, N+1$. Необходимо построить функцию $s_\Delta(x, y_k)$ — непрерывную вместе со своими производными до второго порядка включительно, совпадающую на каждом из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ с кубическим полиномом и удовлетворяющую условиям:

$$s_\Delta(x_k, y_k) = y_k \quad (1)$$

при $k=0, N+1$.

Так построенную функцию $\mathcal{Z}_\Delta(x, y_k)$ называют кубическим интерполяционным сплайном.

Прежде чем приступить к детальному рассмотрению поставленной задачи, введем некоторые понятия. Мы скажем, что функция $U(x)$ принадлежит типу I', если $U'(0)=U'(1)=0$, и к типу II', если $U''(0)=U''(1)=0$. Две функции $U(x), V(x)$ принадлежат типу I, если $U(x)-V(x) \in I'$, и типу II, если $U(x)-V(x) \in II'$.

В этом параграфе мы рассмотрим сплайны типа II'.

2⁰. Вопросы существования и единственности сплайнов типа II'.

Теорема 1. Заданием сеточной функции y_k сплайн типа II' определен однозначно.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\mathcal{Z}_\Delta(x, y_k) = y_k + \left[\frac{\Delta y_k}{h} - \frac{\chi_{k+1}}{2} h - \frac{\Delta \chi_k h}{6} \right] (x - x_k) + \frac{\chi_k}{2} (x - x_k)^2 + \frac{\Delta \chi_k}{6h} (x - x_k)^3 \quad (2)$$

для $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, N}$, где y_k и χ_k связаны соотношением

$$C \vec{\chi} = \frac{6}{h^2} B \vec{y}, \quad (3)$$

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \quad \Delta \chi_k = \chi_{k+1} - \chi_k, \quad \chi_0 = \chi_{N+1} = 0.$$

Здесь:

$$\vec{y} = \{y_0, y_1, \dots, y_{N+1}\}^T, \quad \vec{\chi} = \{\chi_1, \dots, \chi_N\}^T,$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что $\mathcal{Z}_\Delta(x, y_k)$ есть интегрополяционный кубический сплайн типа II' для сеточной функции y_k , причем $\mathcal{Z}_\Delta(x_k, y_k) = \chi_k$. Таким образом, чтобы доказать теорему 1, надо показать, что система (3) однозначно решаема. Мы покажем не только су-

ществование обратной матрицы C^{-1} для матрицы C , но и установим рекуррентные формулы для вычисления элементов матрицы $A = \frac{6}{k} C^{-1} B$.

Итак, пусть d_i - главный минор порядка i матрицы C . Положим $d_0 = 1$. Разлагая по элементам первой строки минор d_i , получим

$$d_i = 4d_{i-1} - d_{i-2}. \quad (4)$$

Покажем, что последовательность d_i при $i \rightarrow N$ монотонно возрастает. В самом деле, $d_4 < d_2$ очевидно. Пусть при любом k $d_k < d_{k+1}$. Покажем, что $d_{k+1} < d_{k+2}$. Из (4) имеем $d_{k+2} = 4d_{k+1} - d_k$ или $d_k = 4d_{k+1} - d_{k+2} < d_{k+1}$ - по предположению. Таким образом, $d_{k+2} > 3d_{k+1} > d_{k+1}$. Попутно доказано соотношение

$$3d_k < d_{k+1} < 4d_k. \quad (5)$$

Так как d_i - монотонно возрастает и $d_1 = 4 \neq 0$, то существует обратная матрица C^{-1} для матрицы C . Теорема доказана.

Лемма У. Для любого числа $k = 1, 2, \dots, N$ справедливо представление

$$d_N = d_k d_{N-k} - d_{k-1} d_{N-k-1}. \quad (6)$$

Доказательство. Чтобы формула (6) была корректна, положим $d_{-2} = 0$. Из рекуррентного соотношения (4) следует

$$d_N = 4d_{N-1} - d_{N-2} = d_1 d_{N-1} - d_0 d_{N-2}.$$

Полученное соотношение совпадает с (6) при $k=1$. Итак, при $k=1$ формула (6) верна. Предположим, что она верна при

$k=2$, т.е.

$$d_N = d_2 d_{N-2} - d_{2-1} d_{N-2-1}, \quad (7)$$

и покажем, что она верна при $k=2+1$. Из (7), (4) получим

$$d_N = d_2(4d_{N-2} - d_{N-2-2}) - d_{N-2-1}(4d_2 - d_{2+1}) = \\ = d_{2+1}d_{N-2-1} - d_2d_{N-2-2},$$

что совпадает с (6) при $k=2+1$. Лемма У доказана.

Рассмотрим матрицу $C^* = \{c_{k,j}^*\}$; $k, j = \overline{1, N}$, где $c_{k,j}^*$ определяется соотношениями

$$c_{k,j}^* = (-1)^{k+j} \begin{cases} d_{k-1}d_{N-j} & \text{при } k \leq j, \\ d_{j-1}d_{N-k} & \text{при } k > j. \end{cases} \quad (8)$$

Лемма У1. Матрица $\{c_{k,j}^*/d_N\}$ является обратной для матрицы C .

Доказательство. Состоит в непосредственной проверке соотношения

$$(c_k^*, c_j) = \delta_{k,j} d_N,$$

где $\delta_{k,j} = \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$ — символ Кронеккера.

Следствие. Элементы $a_{k,j}$ матрицы $A = \frac{6}{h^2} C^{-1} B$ определяются соотношениями:

$$a_{k,j} = \frac{6}{h^2 d_N} \begin{cases} c_{k,1}^* & \text{при } j=1, k = \overline{1, N}, \\ -2c_{k,1}^* + c_{k,2}^* & \text{при } j=2, k = \overline{1, N}, \\ c_{k,j-1}^* - 2c_{k,j}^* + c_{k,j+1}^* & \text{при } j = \overline{3, N}, k = \overline{1, N}, \\ c_{k,N-1}^* - 2c_{k,N}^* & \text{при } j = N+1, k = \overline{1, N}, \\ c_{k,N}^* & \text{при } j = N+2, k = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (9)$$

В дальнейшем нам понадобится оценка нормы матрицы A . Получим ее здесь.

Лемма У11. Имеет место оценка

$$\|A\|_1 \leq \frac{12}{h^2}. \quad (10)$$

Доказательство. Пользуясь соотношениями (5), (8), легко показать, что норма матрицы C^{-1} определяется первой строкой:

$$\|C^{-1}\|_1 = \frac{1}{d_N} \sum_{j=1}^N |C_{1,j}^*|.$$

Из полученного соотношения следует справедливость леммы VII.

З°. Интегральные соотношения для кубических интерполяционных сплайнов типа П.

Теорема П. Пусть $U(x) \in C_2$ - произвольная функция и

$S_\Delta(x, u)$ - кубический интерполяционный сплайн типа П' для этой функции, построенный на сетке Δ . Тогда имеет место интегральное соотношение

$$\|S''_\Delta(x, u) - U''(x)\|_{L_2}^2 = \|U''(x)\|_{L_2}^2 - \|S''_\Delta(x, u)\|_{L_2}^2. \quad (11)$$

Доказательство. Имеет место очевидное соотношение

$$\begin{aligned} \|S''_\Delta(x, u) - U''(x)\|_{L_2}^2 &= \|U''(x)\|_{L_2}^2 - \|S''_\Delta(x, u)\|_{L_2}^2 - \\ &- 2(U''(x) - S''_\Delta(x, u), S''_\Delta(x, u))_{L_2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Последнее слагаемое в правой части в условиях теоремы есть нуль.

В самом деле:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (U''(x) - S''_\Delta(x, u)) S''_\Delta(x, u) dx &= \sum_{k=0}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} (U''(x) - S''_\Delta(x, u)) S''_\Delta(x, u) dx = \\ &= \sum_{k=0}^N (U'(x) - S'_\Delta(x, u)) S''_\Delta(x, u) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} - \sum_{k=0}^N (U(x) - S_\Delta(x, u)) S'''_\Delta(x, u) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \\ &+ \sum_{k=0}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} (U(x) - S_\Delta(x, u)) S''''_\Delta(x, u) dx. \end{aligned}$$

Так как функция $S''_\Delta(x, u) (U'(x) - S'_\Delta(x, u))$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и $S_\Delta(x, u)$ есть сплайн типа П', интерполирующий функцию $U(x)$ на сетке Δ , то все слагаемые в правой части полученного выражения обращаются в нуль. В силу этого из соотношения (12) следует справедливость теоремы П.

Теорема III. Пусть $U(x) \in C_4$ и $S_\Delta(x, u)$ - интерполяционный

кубический сплайн типа П для этой функции удовлетворяют одному из условий:

а) $u(x) - s_\Delta(x, u) \in I$,

б) $u(x) \in I$.

Тогда имеет место интегральное соотношение

$$\|u''(x) - s_\Delta''(x, u)\|_{L_2}^2 = \int_0^1 (u(x) - s_\Delta(x, u)) u'''(x) dx. \quad (13)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы П.

4°. Некоторые оптимальные свойства кубических интерполяционных сплайнов.

Теорема 1У. Свойство минимальности . Пусть на сетке Δ задана сеточная функция $U = (U_0, U_1, \dots, U_{N+1})$ и $U \in C_2$ - класс функций $u(x)$ таких, что $u(x_k) = U_k, k=0, N+1$. Тогда вариационная задача $\inf_{u \in U} \|u''(x)\|_{L_2}^2$ имеет единственное решение, которое есть $s_\Delta(x, u) \in I'$.

Доказательство. В силу теоремы 1 для любого элемента $u(x) \in U$, имеет место соотношение $s_\Delta(x, u) = s_\Delta(x, y)$, поэтому интегральное соотношение (11) можно записать так:

$$\|u''(x)\|_{L_2}^2 - \|s_\Delta''(x, y)\|_{L_2}^2 = \|u''(x) - s_\Delta''(x, u)\|_{L_2}^2.$$

Следовательно, для любой функции $u(x) \in U$ имеет место соотношение $\|s_\Delta''(x, y)\|_{L_2}^2 \leq \|u''(x)\|_{L_2}^2$, причем равенство возможно, если $\|u''(x) - s_\Delta''(x, u)\|_{L_2}^2 = 0$. Но так как функция $u(x) - s_\Delta(x, u) \in C_2$, то из последнего соотношения следует $u''(x) - s_\Delta''(x, u) = 0$ или $u(x) - s_\Delta(x, u) = ax + b$. Так как $u(x_k) = s_\Delta(x_k, u)$ при $k=0, N+1$, то $ax + b = 0$ на отрезке $[0, 1]$. Теорема 1У доказана.

Теорема У. (Свойство наилучшего приближения).

Пусть $S \subseteq C_2$ - класс кусочно-кубических склеек $s_\Delta(x)$, определенных на сетке Δ типа П, и $s_\Delta(x, u)$ - интерполяционный, кубический сплайн для некоторой функции $u(x) \in C_2$. Тогда имеет место соотношение

$$\|u''(x) - s''_A(x)\|_{L_2} \geq \|u''(x) - s''_A(x, u)\|_{L_2}. \quad (14)$$

Если в (14) выполняется равенство, то

$$s_A(x) \equiv s_A(x, u) + \alpha x + \beta.$$

Доказательство. В силу соотношений (2), (3) сплайн типа П' есть линейная функция значений сеточной функции u . Поэтому $s_A(x, u+v) = s_A(x, u) \pm s_A(x, v)$. В силу теоремы 1

$s_A(x, s_A(x, u)) = s_A(x, u)$. Из этих двух соотношений получаем

$$s_A(x, g + s_A(x, u)) = s_A(x, g) + s_A(x, u). \quad (15)$$

Пусть $s_A(x) \in S_A$ — произвольный элемент. Рассмотрим функцию

$$g(x) = u(x) - s_A(x). \quad \text{В силу (15) имеем } s_A(x, g) = s_A(x, u) - s_A(x).$$

Запишем (11) для функции $g(x)$:

$$\|g''(x) - s''_A(x, g)\|_{L_2}^2 = \|g''(x)\|_{L_2}^2 - \|s''_A(x, g)\|_{L_2}^2 \quad \text{или}$$

$$\|u''(x) - s''_A(x, u)\|_{L_2}^2 = \|u''(x) - s''_A(x)\|_{L_2}^2 - \|s''_A(x, u) - s''_A(x)\|_{L_2}^2.$$

Таким образом,

$$\|u''(x) - s''_A(x)\|_{L_2}^2 = \|u''(x) - s''_A(x, u)\|_{L_2}^2 + \|s''_A(x, u) - s''_A(x)\|_{L_2}^2.$$

Первое слагаемое в правой части от выбора $s_A(x) \in S_A$ не зависит, поэтому для любого $s_A(x) \in S_A$ выполняется соотношение (14), причем равенство достигается в силу непрерывности функции $s'_A(x, u) - s'_A(x) = 0$, если $s_A(x, u) - s_A(x) = \alpha x + \beta$.

Теорема У доказана.

5°. Свойство сходимости.

Пусть $\Delta_m = \{0 = x_0^m < x_1^m < \dots < x_{N_m}^m = 1\}$, $m = 1, 2, \dots$ — последовательность сеток, определенных на отрезке $[0, 1]$, и h_m — соответствующая последовательность шагов. Пусть

$s_{\Delta_m}(x, u) \in \Pi'$ — соответствующая последовательность интерполяционных кубических сплайнов, построенных для функции $u(x) \in C_2$.

Теорема У1. При сделанных выше предположениях имеет

место оценка:

$$|u^{(d)}(x) - s_{\Delta_m}^{(d)}(x, u)| \leq M h_m^{\frac{2}{d}-d}, \quad (16)$$

где $M = \text{const}$, не зависящая от выбора сетки.

Доказательство. В условиях теоремы на отрезке $[x_i^m, x_{i+1}^m]$ для $i=0, N_m-1$ функция $u(x) - s_{\Delta_m}(x, u)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно, существуют точки $\bar{x}_{i,m}$, $i = 0, 1, \dots, N_m-1$ такие, что $u'(\bar{x}_{i,m}) = s'_{\Delta_m}(\bar{x}_{i,m}, u)$, где $\bar{x}_{i,m} \in [x_i^m, x_{i+1}^m]$.

Пусть x — произвольная точка отрезка $[0, 1]$. Она обязана попасть в один из отрезков $[x_k^m, x_{k+1}^m]$. Тогда

$$|x_{k,m} - x| \leq h_m. \quad (17)$$

Далее,

$$|u'(x) - s'_{\Delta_m}(x, u)| = \left| \int_{x_{k,m}}^x (u''(x) - s''_{\Delta_m}(x, u)) dx \right|.$$

Применение к правой части неравенства Коши — Буянковского и воспользовавшись оценкой (17), получим

$$|u'(x) - s'_{\Delta_m}(x, u)| \leq h_m^{1/2} \|u''(x) - s''_{\Delta_m}(x, u)\|_{L_2}. \quad (18)$$

Из (11), (18) следует

$$|u'(x) - s'_{\Delta_m}(x, u)| \leq M h_m^{1/2}, \quad (19)$$

где $M = \|u''(x)\|_{L_2}$.

Пусть \bar{x}_K^m — ближайший узел сетки Δ_m к точке x . Тогда

$$|u(x) - s_{\Delta_m}(x, u)| = \left| \int_{\bar{x}_K^m}^x (u'(x) - s'_{\Delta_m}(x, u)) dx \right| \leq |u'(x) - s'_{\Delta_m}(x, u)| h_m.$$

Из полученной оценки и оценки (19) следует справедливость теоремы $\forall 1$.

Допуская большую гладкость функции $u(x)$, можно оценку (16) улучшить.

Замечание. Если в условиях теорем Ш и У1 предположить, что $u(x) \in C_4$, то справедлива оценка

$$|u(x) - S_{\Delta_m}^{(k)}(x, u)| \leq L h_m^{3-d} \quad (20)$$

для любого $x \in [0, 1]$, где $d = 0,1$ и константа L не зависит от выбора сетки.

В дальнейшем будет полезна следующая

Теорема У1. Пусть последовательность сеток Δ_m такова, что $\Delta_m \subset \Delta_{m+1}$ и функции $u(x) \in C_2$ и $S_{\Delta_m}(x, u)$ удовлетворяют одному из условий теоремы Ш. Тогда имеет место предельное соотношение

$$\|u''(x) - S_{\Delta_m}''(x, u)\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{при } h_m \rightarrow 0. \quad (21)$$

Доказательство. Рассмотрим сетки Δ_k и Δ_{k+1} и соответствующие им сплайны типа П' $S_{\Delta_k}(x, u)$, $S_{\Delta_{k+1}}(x, u)$ для функции $u(x) \in C_2$. Из условий, наложенных на сетки, следует, что $S_{\Delta_k}(x, u)$ является интерполяционным кубическим сплайном типа П' для функции $S_{\Delta_{k+1}}(x, u)$. В силу теоремы У имеем место соотношение

$$\|S_{\Delta_k}''(x, u)\|_{L_2} \leq \|S_{\Delta_{k+1}}''(x, u)\|_{L_2} \leq \|u''(x)\|_{L_2}, \quad (22)$$

указывающее на то, что числовая последовательность

$\{\|S_{\Delta_m}''(x, u)\|_{L_2}\}$ ограничена сверху и монотонно растет. По теореме Больцано - Коши она должна сходиться, а поэтому она фундаментальна, т.е. для любого натурального числа P выполняется соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\|S_{\Delta_{m+p}}''(x, u)\|_{L_2} - \|S_{\Delta_m}''(x, u)\|_{L_2}) = 0. \quad (23)$$

Применив к $S_{\Delta_m}(x, u)$ и $S_{\Delta_{m+p}}(x, u)$ теорему П, получим соотношение

$$\|S_{\Delta_{m+p}}''(x, u) - S_{\Delta_m}''(x, u)\|_{L_2}^2 = \|S_{\Delta_{m+p}}''(x, u)\|_{L_2}^2 - \|S_{\Delta_m}''(x, u)\|_{L_2}^2,$$

доказываемое, в силу (22), (23), фундаментальность последовательности $\{z_{\Delta_m}''(x, u)\}$ в L_2 , а поэтому существует такой элемент $U(x) \in L_2$, что

$$\|z_{\Delta_m}''(x, u) - U(x)\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{при } h_m \rightarrow 0. \quad (24)$$

Покажем, что $U(x) = U''(x)$. Действительно, рассмотрим функцию:

$$f(x) = U'(0) + \int_0^x U(x) dx.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |z_{\Delta_m}'(x, u) - f(x)| &\leq \int_0^x |U''(x) - z_{\Delta_m}''(x, u)| dx + |U'(0) - z_{\Delta_m}'(0, u)| \leq \\ &\leq \|U''(x) - z_{\Delta_m}''(x, u)\|_{L_2} + |U'(0) - z_{\Delta_m}'(0, u)|. \end{aligned}$$

При $h_m \rightarrow 0$ в правой части первое слагаемое стремится к нулю в силу (24), а второе стремится к нулю в силу оценки (20). Таким образом, $|z_{\Delta_m}'(x, u) - f(x)| \rightarrow 0$ при $h_m \rightarrow 0$ равномерно относительно $x \in [0, 1]$. Далее,

$$|U'(x) - f(x)| \leq |U(x) - z_{\Delta_m}(x, u)| + |f(x) - z_{\Delta_m}'(x, u)|.$$

В силу теоремы У1 правая часть полученной оценки при $h_m \rightarrow 0$ стремится равномерно по $x \in [0, 1]$ к нулю, а левая часть не зависит от h_m , следовательно, $U'(x) - f(x) \equiv 0$

для $x \in [0, 1]$. Отсюда следует, что $U''(x) = f(x) = U(x)$.

Теорема УП доказана полностью.

§ 2. Обобщенные детерминированные кубические сплайны

1º. Постановка задачи.

Пусть $\delta > 0$ — некоторое действительное число. Рассмотрим класс $U_\delta \subseteq C_2$ таких функций $U(x)$, что

$$|U(x_k) - y_k| \leq \delta, \quad k = \overline{0, N+1}, \quad (1)$$

где y_k - значения сеточной функции y , определенной на сетке Δ . Необходимо найти такую функцию $\bar{u} = \bar{u}(x) \in U_6$, чтобы выполнялось соотношение

$$\inf_{u \in U_6} \|u''(x)\|_{L_2}^2 = \|\bar{u}''(x)\|_{L_2}^2. \quad (2)$$

Задачу (1) - (2) будем называть задачей обобщенного кубического интерполяирования, а ее решение $\bar{u}(x)$ - обобщенным дегерминированным кубическим сплайном для сеточной функции y .

2. Вопросы существования и единственности.

Обозначим через $S_{\bar{u}} \subset U_6$ - класс кусочно-кубических склеек типа Π' , определенных на сетке Δ .

Лемма УШ. Если решение задачи (1) - (2) существует, то оно является функцией из класса $S_{\bar{u}}$.

Доказательство. Пусть $\bar{u}(x)$ решение задачи (1), (2) и $\bar{s}_{\Delta}(x, \bar{u})$ - интерполяционный кубический сплайн типа Π' , построенный для функции $\bar{u}(x)$ на сетке Δ . Из теоремы 1У и определения обобщенного сплайна для любого элемента $u(x) \in U_6$ имеет соотношение

$$\|\bar{s}_{\Delta}(x, u)\|_{L_2}^2 \leq \|u''(x)\|_{L_2}^2 \leq \|u''(x)\|_{L_2}^2. \quad (3)$$

Ясно, что $\bar{s}_{\Delta}(x, \bar{u}) \in U_6$, поэтому из последнего соотношения следует, что $\bar{s}_{\Delta}(x, \bar{u})$ - обобщенный сплайн для сеточной функции y . Лемма УШ доказана.

Теорема УШ. Для любой сеточной функции y обобщенный кубический сплайн существует.

Доказательство. Согласно лемме УШ $\bar{u}(x)$ можно искать в классе $S_{\bar{u}}$. Из теоремы 1 следует, что $\bar{u}(x)$ однозначно представим в виде:

$$\bar{u}(x) = \bar{u}(x_k) + \left(\frac{\Delta \bar{u}_k}{h} - \frac{\bar{x}_k}{2}h - \frac{\Delta \bar{x}_k}{6}h\right)(x-x_k) + \frac{\bar{x}_k}{2}(x-x_k)^2 + \frac{\Delta \bar{x}_k}{6h}(x-x_k)^3,$$

$$x \in [x_k, x_{k+1}], k = \overline{0, N}, \text{ где } \bar{u}_k, \bar{x}_k$$

связаны соотношением (3.1). Таким образом, для определения обобщенного кубического сплайна $\bar{u}(x)$ для сеточной функции y

достаточно определить $\bar{U}_k = \bar{U}(x_k)$ при $k = 0, 1, \dots, N+1$.

Итак, для любого элемента $U(x) \in S_2$ имеет место соотношение

$$\|U''(x)\|_{L_2}^2 = \sum_{k=0}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_k + \frac{\Delta x_k}{h} (x - x_k))^2 dx = \\ = h \sum_{k=0}^N (x_k^2 + x_k \Delta x_k + \frac{1}{3} (\Delta x_k)^2) = \frac{h}{6} (C x_k^2) = (Q \vec{x}, \vec{y}),$$

где $Q = \frac{h}{6} B^T C^{-1} B$ — матрица квадратичной формы $(Q \vec{y}, \vec{y})$.

Итак, задача обобщенного кубического интерполяирования свелась к задаче минимизации квадратичной формы на компактном множестве $V \subseteq R_{N+1}$, элементы которого $\bar{U}_k (U_0, U_1, \dots, U_{N+1})$ удовлетворяют соотношению (1). По теореме Байерштрасса последняя вариационная задача имеет решение. В качестве \bar{U}_k при $k = \overline{0, N+1}$ возьмем одно из этих решений.

Мы доказали не только существование обобщенного сплайна, но и указали алгоритм его построения.

Следующая теорема устанавливает структуру множества решений задачи обобщенного кубического интерполяирования.

Теорема 1X. Для любых двух решений $\bar{U}(x)$ и $\bar{V}(x)$ задачи обобщенного кубического интерполяирования справедливо представление

$$\bar{U}(x) - \bar{V}(x) = Ax + B, \quad (4)$$

где A и B таковы, что $|Ax_k + B| \leq 2\delta$, $k = \overline{0, N+1}$.

Доказательство. Очевидно, что для любых двух функций

$U(x), V(x) \in C_2$ справедливо тождество

$$\|U''(x) - V''(x)\|_{L_2}^2 + \|U''(x) + V''(x)\|_{L_2}^2 = 2(\|U''(x)\|_{L_2}^2 + \|V''(x)\|_{L_2}^2). \quad (5)$$

Применив (5) к $\bar{U}(x)$ и $\bar{V}(x)$, получим

$$\left\| \frac{U''(x) - V''(x)}{2} \right\|_{L_2}^2 = M - (M + \varepsilon) \leq 0,$$

где $\mu = \inf_{u \in C_2} \|u''(x)\|_{L_2}^2$ и $\delta \geq 0$, так как $\bar{u}(x) + \bar{v}(x)$, вообще говоря, не является обобщенным кубическим сплайном. Из последнего соотношения в силу того, что $\bar{u}(x) - \bar{v}(x) \in C_2$, следует представление (4). Далее,

$$|\bar{u}(x_k) - \bar{v}(x_k)| \leq |\bar{u}(x_k) - y_k| + |\bar{v}(x_k) - y_k| \leq 2\delta, k = \overline{0, N+1}.$$

Теорема IX доказана.

3°. Апроксимативные свойства.

Пусть на отрезке $[0, 1]$ задана последовательность таких равномерных сеток $\Delta_m = \{x_0^m, x_1^m, \dots, x_{N_m+1}^m\}$, $m = 1, 2, \dots$, что шаг h_m сетки Δ_m стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$ и соответствующая последовательность сеточных функций

$$y_m = (y_0^m, y_1^m, \dots, y_{N_m+1}^m).$$

Пусть функция $u(x) \in C_2$ удовлетворяет соотношениям $|u(x_k) - y_k^m| \leq \delta$ при $m = 1, 2, \dots$ и $k = \overline{0, N_m+1}$. (6)

Пусть $\bar{U}_m(x)$ – кубический обобщенный сплайн для сеточной функции y_m .

Теорема X. При выполнении условий (4) для любой функции $u(x) \in C_2$ имеет место оценка

$$|u(x) - \bar{U}_m(x)| \leq 2 \|u''(x)\|_{L_2} h_m^{\frac{3-\alpha}{2}} + \frac{4\delta}{h_m^\alpha} \quad (7)$$

при $\alpha = 0, 1$ и для любого $x \in [0, 1]$.

Доказательство. Так как $|u(x_k^m) - \bar{U}(x_k^m)| \leq 2\delta$, то по лемме III на отрезках $[x_k^m, x_{k+1}^m]$ для $k = 0, 1, \dots, N_m$ существуют точки C_k^m такие, что

$$|u'(c_k^m) - \bar{U}'(c_k^m)| \leq \frac{4\delta}{h_m}. \quad (8)$$

Произвольная точка $x \in [0, 1]$ обязана попасть в некоторый частичный отрезок $[x_\ell^m, x_{\ell+1}^m]$, поэтому $|x - c_\ell^m| \leq h_m$. Далее,

$$|u'(x) - \bar{U}'_m(x)| \leq \int_{c_\ell^m}^x |u''(x) - \bar{U}''_m(x)| dx + |u'(c_\ell^m) - \bar{U}'(c_\ell^m)|.$$

Применив к первому слагаемому неравенство Коши-Буянковского, а ко второму - неравенство (8), получим:

$$|\bar{u}'(x) - \bar{u}'_m(x)| \leq h_m^{-2} \|u''\|_{L_2} + \frac{4\delta}{h_m}$$

Из последней оценки и соотношения (3) следует оценка (7).

Теорема X1. При выполнении условий (6) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\bar{u}_m''(x) - u''(x)\|_{L_2} = 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Доказательство. Из соотношения (3) следует, что семейство $\{\bar{u}_m''(x)\}$ равномерно в L_2 ограничено, а следовательно, оно слабо компактно, поэтому из него всегда можно выделить слабо сходящееся подсемейство. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, мы будем считать, что $\{\bar{u}_m''(x)\}$ уже самое слабо сходится к $u''(x) \in L_2$ при $m \rightarrow \infty$ и $\delta \rightarrow 0$. В силу оценки (7) имеем: $u''(x) \equiv \bar{u}''(x)$. Пользуясь свойством слабого предела (см. задачу 4) и соотношением (3), получим

$$\|u''(x)\|_{L_2} \leq \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \|\bar{u}_m''(x)\|_{L_2} \leq \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \|\bar{u}_m''(x)\|_{L_2} \leq \|u''(x)\|_{L_2}.$$

Из полученного соотношения следует, что

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty, \\ \delta \rightarrow 0}} \|\bar{u}_m''(x)\|_{L_2} = \|u''(x)\|_{L_2}.$$

Но в гильбертовом пространстве из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость. Теорема X1 доказана.

§ 3. Интерполяционные стохастические кубические сплайны

1⁰. Постановка задачи.

Пусть на вероятностном пространстве \mathcal{P} задана система случайных величин $y(\omega) = (y_0(\omega), y_1(\omega), \dots, y_{N+1}(\omega))$ таких, что выполняется соотношение

$$\mathbb{D}[y_k(\omega)] = \sigma_k^2 \leq \sigma^2, \quad (1)$$

где $k=0, N+1$.

Требуется построить функцию $\mathfrak{J}_\Delta(\omega; x, y)$ такую, что

а) $\mathfrak{J}_\Delta(\omega; x, y) \in C_x^\omega$,

б) $\|\mathfrak{J}_\Delta(\omega; x_k, y) - y_k(\omega)\|_{\mathcal{L}^\omega} = 0, k = \overline{0, N+1}$,

в) для $x \in [x_k, x_{k+1}]$ $\mathfrak{J}_\Delta(\omega; x, y)$ имеет вид:

$$\mathfrak{J}_\Delta(\omega; x, y) = a_k^0(\omega) + a_k^1(\omega)(x - x_k) + a_k^2(\omega)(x - x_k)^2 + a_k^3(\omega)(x - x_k)^3.$$

(Здесь верхние числа являются индексами).

Случайная функция $\mathfrak{J}_\Delta(\omega; x, y)$, удовлетворяющая соотношениям

а) - в), называется кубическим стохастическим интерполяционным сплайном для системы случайных величин $y(\omega)$, построенный на сетке $\Delta = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = 1\}$.

Так, как это делается в § 1 п. 2⁰, можно показать, что в рамках корреляционной теории заданием системы $y(\omega)$ интерполяционный стохастический сплайн одновзвучно представим в виде:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_\Delta(\omega; x, y) = & y_k(\omega) + \left(\frac{\Delta y_k(\omega)}{h} - \frac{\tilde{y}_k(\omega)}{2} h - \frac{\Delta \tilde{y}_k(\omega)}{6} h \right) (x - x_k) + \\ & + \frac{\tilde{y}_k(\omega)}{2} (x - x_k)^2 + \frac{\Delta \tilde{y}_k(\omega)}{6 h} (x - x_k)^3, \end{aligned} \quad (2)$$

где $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, N+1$ и векторы $\tilde{y}(\omega)$ и $\tilde{y}'(\omega)$ связаны соотношением (3.1).

В силу линейности сплайна относительно случайных величин $y_k(\omega)$ и аддитивности математического ожидания имеет место соотношение

$$E[\mathfrak{J}_\Delta(\omega; x, y)] = \mathfrak{J}_\Delta(x, E[y(\omega)]). \quad (3)$$

2⁰. Свойство сходимости.

В дальнейшем нам понадобятся оценки для дисперсионной функции интерполяционного стохастического кубического сплайна, а именно:

Лемма IX. Имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|S_{\Delta}(\omega; x, y) - S_{\Delta}(x, E[y(\omega)])\|_{C_0^{\omega}} &\leq \alpha_0(h) \frac{\sigma}{h}, \\ \|S'_{\Delta}(\omega; x, y) - S'_\Delta(x, E[y(\omega)])\|_{C_0^{\omega}} &\leq \alpha_1(h) \frac{\sigma}{h}, \\ \|S''_{\Delta}(\omega; x, y) - S''_\Delta(x, E[y(\omega)])\|_{L_2^{\omega}} &\leq 72 \frac{\sigma}{h^3}, \end{aligned} \quad (4)$$

где нормы в пространствах C_0^{ω} и L_2^{ω} определены вводных замечаниях, $\alpha_i(h)$ — линейная функция относительно h .

Доказательство. Применив неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned} \{E[S_{\Delta}(\omega; x, y) - S_{\Delta}(x, E[y(\omega)])]^2\}^{1/2} &\leq \{E[\bar{y}_k(\omega) + \\ &+ (\frac{\Delta \bar{y}_k(\omega)}{h} - \frac{\bar{x}_k(\omega)}{2} h - \frac{\Delta \bar{x}_k(\omega)}{6} h)(x - x_k)]^2\}^{1/2} + \\ &+ \frac{\bar{x}_k(\omega)}{2} (x - x_k)^2 + \frac{\Delta \bar{x}_k(\omega)}{6h} (x - x_k)^3\}^{1/2} \leq \\ &\leq \|\bar{y}_k(\omega)\|_{L_2^{\omega}} + \|\Delta \bar{y}_k(\omega)\|_{L_2^{\omega}} + \frac{h^2}{2} \|\bar{x}_k(\omega)\|_{L_2^{\omega}} + \\ &+ \frac{h^2}{6} \|\Delta \bar{x}_k(\omega)\|_{L_2^{\omega}} + \frac{h^2}{2} \|\bar{x}_k(\omega)\|_{L_2^{\omega}} + \frac{h^2}{6} \|\Delta \bar{x}_k(\omega)\|_{L_2^{\omega}} \end{aligned} \quad (5)$$

(здесь $\bar{y}_k(\omega)$, $\Delta \bar{y}_k(\omega)$, $\bar{x}_k(\omega)$, $\Delta \bar{x}_k(\omega)$ — центрированные случаиные величины.)

Из (5.1), (9.1), (10.1), (15.1), (1) и неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$\|\bar{x}_k(\omega)\|_{L_2^{\omega}} = \left(\sum_{i,j=0}^{N+1} a_{j,k} a_{i,k} K(y_j, y_i) \right)^{1/2} \leq \frac{24\sigma}{h^2}. \quad (6)$$

Из оценок (1), (5), (6) следует оценка

$$\|S_{\Delta}(\omega; x, y) - S_{\Delta}(x, E[y(\omega)])\|_{L_2^{\omega}} \leq (40 + 3h) \frac{\sigma}{h}.$$

Правая часть полученной оценки не зависит от номера k ,

следовательно, она спрямлена для всех $x \in [0, 1]$. Положив $\alpha_0(h) = 40 + 3h$, получим первую из оценок (4). Далее,

$$\begin{aligned} & \left\{ E[\beta'_\Delta(\omega; x, y) - \beta'_\Delta(x, E[y(\omega)])]^2 \right\}^{1/2} \leq \\ & \leq \frac{1}{h} \| \Delta \bar{y}_K(\omega) \|_{L_2^\omega} + \frac{h}{2} \| \bar{x}_K(\omega) \|_{L_2^\omega} + \frac{h}{6} \| \Delta \bar{x}_K(\omega) \|_{L_2^\omega} + \\ & + h \| \bar{x}_K(\omega) \|_{L_2^\omega} + \frac{h}{2} \| \Delta \bar{x}_K(\omega) \|_{L_2^\omega} \leq (68 + h) \frac{\sigma}{h^2}. \end{aligned}$$

Рассуждая, как и выше, положив $68 + h = \alpha_1(h)$, получим вторую из оценок (4). Наконец,

$$\begin{aligned} & \| \beta''_\Delta(\omega; x, y) - \beta''_\Delta(x, E[y(\omega)]) \|_{L_2^\omega} = \sum_{k=0}^N E \left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} (\bar{x}_k(\omega) + \frac{1}{h} \bar{x}_{k+1}(\omega)(x - x_k))^2 dx \right] \\ & \leq \| \bar{x}_K(\omega) \|_{L_2^\omega} + \| \Delta \bar{x}_K(\omega) \|_{L_2^\omega} \leq 72 \frac{\sigma}{h^3}. \end{aligned}$$

Из полученной оценки следует третья из соотношений (4).
Лемма IX доказана полностью.

Теорема XII. Для любой случайной функции $u(\omega, x) \in C_0^\omega$ такой, что

$$D[u^{(i)}(\omega; x)] \leq \varphi_i(\sigma), \quad i=0, 1, 2, \quad \varphi_i(\sigma) \geq 0, \quad (7)$$

имеют место оценки

$$\| u(\omega; x) - \beta_\Delta(\omega; x, u) \|_{C_0^\omega} \leq \varphi_0(\sigma) + \alpha_0(h) \frac{\varphi_0(\sigma)}{h} + M h^{3/2},$$

$$\| u'(\omega; x) - \beta'_\Delta(\omega; x, u) \|_{C_0^\omega} \leq \varphi_1(\sigma) + \alpha_1(h) \frac{\varphi_1(\sigma)}{h^2} + M h^{1/2}, \quad (8)$$

$$\| u''(\omega; x) - \beta''_\Delta(\omega; x, u) \|_{L_2^\omega} \leq \varphi_2(\sigma) + 72 \frac{\varphi_2(\sigma)}{h^3} + \psi(h),$$

если $\Delta_m \subset \Delta_{m+1}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \| u(\omega, x) - \beta_\Delta(\omega; x, u) \|_{C_0^\omega} \leq \| u(\omega, x) - u(x) \|_{C_0^\omega} + \\ & + \| \beta_\Delta(\omega; x, u) - \beta_\Delta(x, E[\beta_\Delta]) \|_{C_0^\omega} + \| u(x) - \beta_\Delta(x, E[\beta_\Delta]) \|_{C_0^\omega}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись оценками (7), (7.2), (4), получим первую из оценок (8). Далее,

$$\begin{aligned} \|u'(\omega; x) - s'_\Delta(\omega; x, u)\|_{C_0^\omega} &\leq \|u(\omega; x) - u(x)\|_{C_0^\omega} + \|u'(x) - s'_\Delta(x, E[s_\Delta])\|_C \\ &\quad + \|s'_\Delta(\omega; x, u) - s'_\Delta(x, E[s_\Delta])\|_{C_0^\omega}. \end{aligned}$$

Из этой оценки, в силу (7), (7.2), (4), получаем вторую из оценок (8). Аналогично

$$\begin{aligned} \|u''(\omega; x) - s''_\Delta(\omega; x, u)\|_{L_2^\omega} &\leq \|u''(\omega; x) - u''(x)\|_{L_2^\omega} + \|s''_\Delta(x, E[s_\Delta])\|_{L_2^\omega} \\ &\quad - \|u''(x)\|_{L_2} + \|s''_\Delta(\omega; x, u) - s''_\Delta(x, E[s_\Delta])\|_{L_2^\omega} \leq \varphi_2(\sigma) + 72 \frac{\sigma}{h^3} + \Psi(h), \end{aligned}$$

где функция $\Psi(h)$ характеризует скорость сходимости вторых производных интерполяции их детерминированных кубических сплайнов, установленную теоремой УП.

Теорема доказана полностью.

Задача 12. Доказать, что сплайн $s_\Delta(\omega; x, u)$, построенный для любой функции $u(\omega; x) \in C_2^\omega$, удовлетворяет соотношению

$$\|u''(\omega; x) - s''_\Delta(\omega; x, u)\|_{L_2^\omega}^2 = \|u''(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 - \|s''_\Delta(\omega; x, u)\|_{L_2^\omega}^2.$$

Задача 13. Пусть $U^\omega \subseteq C_2^\omega$ – класс случайных функций $u(\omega; x)$ таких, что $\|u(\omega; x_k) - Y_k(\omega)\|_{L_2^\omega} = 0$ при $k=0, \overline{N+1}$. Доказать, что для любой функции $u(\omega; x) \in U^\omega$ имеет место соотношение $\|u''(\omega; x)\|_{L_2^\omega} \geq \|s''_\Delta(\omega; x, u)\|_{L_2^\omega}$, причем знак равенства достигается только тогда, когда

$$\|u(\omega, x) - s_\Delta(\omega; x, y)\|_{L_2^\omega} = 0$$

Задача 14. Пусть $S_\Delta^\omega \subseteq C_2^\omega$ – класс кусочно-кубических склеек $s_\Delta(\omega; x)$ таких, что $\|s''_\Delta(\omega; 0)\|_{L_2^\omega} = \|s''_\Delta(\omega; 1)\|_{L_2^\omega} = 0$ и $s_\Delta(\omega; x, u)$ – кубический стохастический сплайн для некоторой случайной функции $u(\omega; x) \in C_2^\omega$. Доказать, что для любого элемента $s_\Delta(\omega; x) \in S_\Delta^\omega$ имеет место соотношение

$$\|u''(\omega; x) - s''_{\Delta}(\omega; x)\|_{L^{\omega}_x} \geq \|u''(\omega; x) - s''_{\Delta}(\omega; x, u)\|_{L^{\omega}_x},$$

причем знак равенства достигается только тогда, когда

$$E[s_{\Delta}(\omega; x)]^2 = E[s_{\Delta}(\omega; x, u) + a(\omega)x^2 + b(\omega)]^2.$$

ГЛАВА П. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ

§ 4. Детерминированные интерполяционные полиномиальные сплайны

1° Постановка задачи. Пусть $y = (y_0, y_1, \dots, y_N)$ – сеточная функция, заданная на сетке $x_k = kh$, $k = \overline{0, N}$, $h = \frac{1}{N}$. Функция $s_{\Delta}(x, y)$ называется интерполяционным сплайном степени $2m-1$ типа II при $m > 2$ для сеточной функции y , если выполняются следующие условия:

- a) $s_{\Delta}(x, y) \in C_{2m-2}$,
- б) $s_{\Delta}^{(2m)}(x, y) \equiv 0$ при $x \in (x_k, x_{k+1})$, $k = \overline{0, N-1}$,
- в) $s_{\Delta}(x_k, y) = y_k$, $k = \overline{0, N}$,
- г) $s_{\Delta}^{(j)}(0, y) = y_0$, $s_{\Delta}^{(j)}(1, y) = y_1$ при $j = \overline{m, 2m-2}$.

Задачу построения полиномиальных сплайнов будем рассматривать как задачу "склеивания" решений $U_k(x)$ дифференциального уравнения

$$U^{(2m)} = 0, \quad (1)$$

каждое из которых удовлетворяет этому уравнению на всем интервале (x_{k-1}, x_k) , $k = \overline{1, N}$, причем "склейка" должна удовлетворять условиям а), в), г).

Очевидно, что система решений уравнения (1)

$$U_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}, \quad k = \overline{1, 2m-2}$$

является фундаментальной, поэтому общее решение на интервале (x_{k-1}, x_k) запишется в виде:

$$U(x) = \sum_{j=1}^{2m} C_{k,j} U_j(x - x_{k-1}), \quad k = \overline{1, N}. \quad (2)$$

В нашей задаче коэффициенты $C_{k,j}$ определяются условиями а), в) и г).

Запишем систему уравнений для их определения. Используя информацию в узле x_0 , получим

$$C_{1,j} = y_0^{(j-1)}, \quad \text{где } j = \overline{1, 2m-2}, \quad y_0^{(v)} = y_0.$$

Из условия в) следует для $i = \overline{1, N-1}$, что

$$C_{i+1,1} = y_i. \quad (3)$$

Из условия а) в узле $x_i, i = \overline{1, N-1}$ следуют соотношения:

$$\sum_{j=\ell+1}^{2m} \frac{h^{j-\ell-1}}{(j-\ell-1)!} C_{i,j} = C_{i+1,\ell+1} \quad (4)$$

для $\ell = 0, 1, \dots, 2m-2$.

Пользуясь условиями в) и г) в узле x_N , получим

$$\sum_{j=2\zeta+1}^{2m} C_{N,j} \frac{h^{j-2-\zeta}}{(j-2-\zeta)!} = y_N^{(\zeta)}, \quad (5)$$

где $\zeta = 0, m, \dots, 2m-2; y_N^{(v)} = y_N$.

Обозначим через $A_{\bar{\underline{i}}}$ матрицу вида

$$A_{\bar{\underline{i}}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_2 & A_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & A_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_4 \end{pmatrix},$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_m, \quad ,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & h & h^2/2 & \cdots & h^{2m-1}/(2m-1)! \\ 0 & 1 & h & \cdots & h^{2m-2}/(2m-2)! \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & h & h^2/2! & \cdots & h^m/m! & h^{m+1}/(m+1)! & \cdots & h^{2m-1}/(2m-1)! \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & h & \cdots & h^{m-1}/(m-1)! \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & h^{m-2}/(m-2)! \\ \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & h \end{pmatrix}.$$

путь

$$\vec{y} = (y_0, y_0^{(m)}, \dots, y_0^{(2m-2)}, y_1, 0, \dots, 0, \dots, y_N, y_N^{(m)}, y_N^{(2m-2)})^T,$$

$$\vec{c} = (c_{1,1}, \dots, c_{1,2m}, c_{2,1}, \dots, c_{2,2m}, \dots, c_{N,1}, \dots, c_{N,2m})^T,$$

тогда соотношения (2) – (5) записутся в виде:

$$A_{\Delta} \vec{c} = \vec{y}. \quad (6)$$

Таким образом, задача построения полиномиального сплайна сводится к решению алгебраической системы линейных уравнений (6).

2°. Первое интегральное соотношение.

Теорема XIII. Для любой функции $u(x) \in C_m$ имеет место интегральное соотношение

$$\|u(x) - \beta_{\Delta}(x, u)\|_{L_2}^2 = \|u(x)\|_{L_2}^2 - \|\beta_{\Delta}(x, u)\|_{L_2}^2, \quad (7)$$

где $\beta_{\Delta}(x, u)$ – интерполяционный полиномиальный сплайн типа П' для функции $u(x)$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \|u(x) - \beta_{\Delta}(x, u)\|_{L_2}^2 &= \|u(x)\|_{L_2}^2 - \|\beta_{\Delta}(x, u)\|_{L_2}^2 - \\ &- 2(u(x) - \beta_{\Delta}(x, u), \beta_{\Delta}(x, u))_{L_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Применив формулу интегрирования по частям m раз, получим

$$\begin{aligned} (u(x) - \beta_{\Delta}(x, u), \beta_{\Delta}(x, u))_{L_2} &= (-1)^m [u(x), \beta_{\Delta}(x, u)]^{(2m)} - [\beta_{\Delta}(x, u), \beta_{\Delta}(x, u)]^{(2m)} \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} (u(x) - \beta_{\Delta}(x, u)) \beta_{\Delta}(x, u) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}}. \end{aligned}$$

Еоспользовавшись соотношениями б), г) при $y_0 = y_N = 0$ и (8), получим соотношение (7). Теорема XIII доказана.

Задача 15. Пусть $U \subseteq C_m$ – класс таких функций, что

$u(x_k) = y_k$, $k = \overline{0, N}$. Показать, что

$$\inf_{u \in U} \|u(x)\|_{L_2}^2 = \|\beta_{\Delta}(x, y)\|_{L_2}^2.$$

Задача 16. Пусть $U_{\Delta} \subseteq C_m$ – класс кусочно-полиномиальных склеек $u_{\Delta}(x)$, определенных на сетке $\{x_k\}$, таких, что $u_{\Delta}(0) = u_{\Delta}(1) = 0$ при $j = \overline{m, 2m-2}$, и $u(x) \in C_m$ – фикси-

рованная функция. Показать, что

$$\|u(x) - \zeta_\Delta^{(m)}(x)\|_{L_2} \geq \|u(x) - \zeta_\Delta^{(m)}(x, u)\|_{L_2}$$

3°. Существование и единственность.

Теорема X1У. Заданием сеточной функции $u = (y_0, y_1, \dots, y_N)$

интерполяционный полиномический сплайн, удовлетворяющий условиям а) - г), определен однозначно.

Доказательство. Единственность. Пусть $\zeta_\Delta(x, y)$ и $\bar{\zeta}_\Delta(x, y)$ - два сплайна. Тогда очевидно, что $\zeta_\Delta(x, y) - \bar{\zeta}_\Delta(x, y)$ есть сплайн для функции $u(x) \equiv 0$. Из соотношения (7) следует, что

$\|\zeta_\Delta(x, y) - \bar{\zeta}_\Delta(x, y)\|_{L_2} = 0$. Так как $\zeta_\Delta(x, y) - \bar{\zeta}_\Delta(x, y) \in C_m$, то $\zeta_\Delta(x, y) - \bar{\zeta}_\Delta(x, y) = P_{m-1}(x)$ - полиному степени не выше m .

Далее, так как $P_{m-1}(x_k) = 0, k = \overline{0, N}$ и $m < N$, то $P_{m-1}(x) \equiv 0$.

Существование. Пусть система (6) не имеет решения. Это значит, что $\det A_{\vec{C}} = 0$. Поэтому однородная система

$A_{\vec{C}} \vec{C} = 0$ имеет наряду с тривиальным решением $\vec{C}_0 = 0$ еще и нетривиальное решение $\vec{C}_1 \neq 0$. Таким образом, для функции (см. (2)) $u(x) \equiv 0$ мы построили бы два сплайна $\zeta_\Delta(x, 0)$ и $\bar{\zeta}_\Delta(x, 0)$, что, в силу единственности, невозможно. Теорема X1У доказана.

4°. Свойства сходимости.

Пусть $u(x) \in C_m$ и $\Delta_n = \{x_0^n, x_1^n, \dots, x_{N^n}^n\}$ - последовательность сеток с шагом h_n , определенных на отрезке $[0, 1]$. Пусть $\zeta_{\Delta_n}(x, u)$ - соответствующая последовательность интерполяционных полиномиальных сплайнов для функции $u(x)$, построенных на сетках Δ_n соответственно.

Теорема XУ. При сделанных выше предположениях имеет место оценка:

$$\|u(x) - \zeta_{\Delta_n}(x, u)\|_C \leq M h_n^{m-\alpha-\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

для $\alpha = 0, 1, \dots, m-1$, где постоянная M не зависит от сетки Δ_n .

Доказательство. Так как $u(x_k^n) = \zeta_{\Delta_n}(x_k^n, u)$ для $k = \overline{0, N^n}$, то по теореме Голля найдутся точки

$x_{n_k}^{(1)}, \dots, x_{n_k}^{(m-1)}$ такие, что $u'(x_{n_k}^{(i)}) = \delta_{\Delta_n}(x_{n_k}^{(i)}, u)$,
причем $|x_{n_k}^{(i)} - x_{n_{k-1}}^{(i)}| \leq h_n$.

Рассуждая аналогичным образом, для любого $d < m$ найдется $N_n - d$ точек $x_{n_k}^{(d)}$ таких, что

$$u(x_{n_k}^{(d)}) - \delta_{\Delta_n}(x_{n_k}^{(d)}, u) = 0 \quad (10)$$

$$|x_{n_k}^{(d)} - x_{n_{k-1}}^{(d)}| \leq (d+1)h_n.$$

Очевидно, что для любой точки $x \in [0, 1]$ существует точка $x_{n_k}^{(m-1)}$ такая, что

$$|x - x_{n_k}^{(m-1)}| \leq mh_n. \quad (11)$$

Применив неравенство Коши-Буняковского и (7), получим

$$|u(x) - \delta_{\Delta_n}(x, u)| = \left| \int_{x_{n_k}^{(m-1)}}^x (u(x) - \delta_{\Delta_n}(x, u)) dx \right| \leq$$

$$\leq \|u(x) - \delta_{\Delta_n}(x, u)\|_{L_2} |x - x_{n_k}^{(m-1)}|^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{m} h_n^{\frac{1}{2}} \|u(x)\|_{L_2},$$

$$|u(x) - \delta_{\Delta_n}(x, u)| = \left| \int_{x_{n_k}^{(m-2)}}^x (u(x) - \delta_{\Delta_n}(x, u)) dx \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{m} (m-1)^{\frac{3}{2}} h_n^{\frac{3}{2}} \|u(x)\|_{L_2}$$

По индукции получаем оценку (9), где

$$M = \sqrt{m} (m-1) \cdots (d+1) \|u(x)\|_{L_2}.$$

Задача 17. Пусть Δ_n - последовательность сеток таких, что $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$ и $\delta_{\Delta_n}(x, u)$ - соответствующая последовательность интерполяционных полиномиальных сплайнов, построенных для функции $u(x) \in C_m$. Доказать, что $\|\delta_{\Delta_n}(x, u) - u(x)\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $h_n \rightarrow 0$.

Указание. Необходимо воспользоваться решением задачи (15)

и методом доказательства теоремы УП .

Задача 18. Пусть $U(x) \in C_{2m}$ такова, что

$$U(0) = U(1) = 0, \quad j = \overline{m, 2m-2}, \quad S_\Delta(x, u) -$$

интерполяционный сплайн для этой функции.

Показать, что

$$\| U^{(m)}(x) - S_\Delta^{(m)}(x, u) \|_{L_2}^2 = (-1)^m (U(x) - S_\Delta(x, u), U^{(2m)}(x))_{L_2}$$

Задача 19. Пусть функция $U(x) \in C_{2m}$ удовлетворяет условиям задачи 18 . Показать, что для $\alpha = 0, 1, \dots, m-1$ и любого $x \in [0, 1]$ имеет место представление

$$U(x) - S_{\Delta n}(x, u) = \lambda_\alpha(x), \quad \text{где}$$

$$|\lambda_\alpha(x)| \leq m(m-1)\cdots(\alpha+1)(m-\alpha)/2^{-2m-\alpha-1} \sqrt{\int_0^1 U^{(2m-\alpha-1)}(x) h_n^2 dx}$$

Указание. Необходимо воспользоваться решением задачи, 18 и методом доказательства теоремы УП .

Замечание. Задача детерминированного полиномиального интерполяирования, как и в случае кубических сплайнов, допускает обобщение на случай, когда сеточная функция U является стохастической сеточной функцией $U(\omega) = (U_0(\omega), U_1(\omega), \dots, U_N(\omega))$ где случайные величины $U_i(\omega) \in L_2^\omega$. Вопросы существования, единственности, свойство сходимости устанавливаются аналогично, т.е. как это сделано в § 4, б.

Задача 20. Пусть $S_\Delta(\omega; x, u)$ – интерполяционный стохастический полиномиальный сплайн для функции $U(\omega, x) \in C_m^\omega$, т.е. $S_\Delta(\omega; x, u)$ удовлетворяет соотношениям

$$1) \quad S_\Delta(\omega; x, u) \in C_{2m}^\omega,$$

$$2) \quad E[S_\Delta^{(2m)}(\omega, x, u)]^2 \equiv 0, \quad x \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$3) \quad \| S_\Delta(\omega, x_k, u) - U(\omega, x_k) \|_{L_2^\omega} = 0, \quad k = \overline{0, N},$$

$$4) \quad \| S_\Delta^{(j)}(\omega, 0, u) \|_{L_2} = \| S_\Delta^{(j)}(\omega, 1, u) \|_{L_2} = 0, \quad j = \overline{m, 2m-2}.$$

Доказать соотношение

$$\| u^{(m)}(\omega; x) - \delta_{\Delta}(\omega; x, u) \|_{L_2^{\omega}}^2 = \| u^{(m)}(\omega; x) \|_{L_2^{\omega}}^2 - \| \delta_{\Delta}(\omega; x, u) \|_{L_2^{\omega}}^2.$$

Задача 21. Доказать, что $\delta_{\Delta}(\omega; x, u)$ заданием системы

$u(\omega, x_0), u(\omega, x_1), \dots, u(\omega, x_N)$ определен однозначно.

Задача 22. Пусть S_{Δ}^{ω} - класс случайных функций $\delta_{\Delta}(\omega; x)$, удовлетворяющих условиям задачи 20. Показать, что

$$\| u^{(m)}(\omega; x) - \delta_{\Delta}(\omega; x) \|_{L_2^{\omega}}^2 \geq \| u^{(m)}(\omega; x) - \delta_{\Delta}(\omega; x, u) \|_{L_2^{\omega}}^2$$

для любого элемента $\delta_{\Delta}(\omega; x) \in S_{\Delta}^{\omega}$.

Задача 23. Пусть $V_0^{\omega} \subseteq C_m^{\omega}$ - класс случайных функций $U(\omega; x)$ таких, что $\| U(\omega; x_k) - Y_k(\omega) \|_{L_2^{\omega}} = 0, k = \overline{0, m}$.

Показать, что

$$\| U^{(m)}(\omega; x) \|_{L_2^{\omega}} \geq \| \delta_{\Delta}(\omega; x, y) \|_{L_2^{\omega}} \text{ для любого элемента } U(\omega; x) \in V_0^{\omega}.$$

Задача 24. Пусть $U_j(\omega; x) \in C_m^{\omega}$ удовлетворяет условию

$$\mathcal{D}[U_j(\omega; x)] \leq \varphi_j(\sigma), j = \overline{0, m},$$

где $\varphi_j(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$.

Доказать, что

$$\lim_{h, \sigma \rightarrow 0} \| \delta_{\Delta}(\omega; x, u) - U(\omega; x) \|_{W_{2,\omega}^{(m)}} = 0.$$

§ 5. Обобщенные детерминированные полиномиальные сплайны

1⁰. Постановка задачи. Существование.

Пусть $U_m \subseteq C_m$ - класс функций $U(x)$ таких, что

$$|Y_k - U(x_k)| \leq \delta, k = \overline{0, m}. \quad (1)$$

Необходимо построить функцию $U_T(x)$ такую, что

$$\inf_{u \in U_m} \| L_u(x) \|_{L_2}^2 = \| L_{U_T}(x) \|_{L_2}^2 \quad (2)$$

Здесь $\tau = (h, \delta)$ – вектор параметров h и δ .

Задачу (1), (2) назовем задачей обобщенного детерминированного полиномиального интерполяирования и ее решение – обобщенным детерминированным полиномиальным сплайном.

В дальнейшем, там где это не придет к недоразумению,

$U_h(x)$ будем называть просто обобщенным сплайном. Здесь L – оператор обобщенного дифференцирования порядка $m \geq 2$, причем будем считать $m < N$. (3)

Задача 25. Пусть $U(x), V(x) \in U_m$ – произвольные функции.

Показать, что $(V(x) - U(x))/2, (V(x) + U(x))/2 \in U_m$ и имеет место соотношение

$$\left\| L \frac{V(x) - U(x)}{2} \right\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2} \| LV(x) \|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \| LU(x) \|_{L_2}^2 - \left\| L \frac{V(x) + U(x)}{2} \right\|_{L_2}^2 \quad (4)$$

Задача 26. Показать, что если $U_h(x)$ и $V_h(x)$ – решения задачи (1) – (2), то $U_h(x) - V_h(x)$ есть полином степени не выше $m-1$.

Указание. Предположив противное, надо применить тождество (4).

Задача 27. Пусть $S_m \subseteq U_m$ – класс функций $J(x)$ таких, что $J^{(j)}(0) = J^{(j)}(1) = 0$ при $j = \overline{m, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 2}$ и $J(x) \equiv 0, x \in (x_k, x_{k+1})$.

Показать, что

$$\inf_{u \in U_m} \| Lu \|_{L_2}^2 = \inf_{J \in S_m} \| L J(x) \|_{L_2}^2. \quad (5)$$

Указание. Использоваться методом доказательства леммы УШ.

Задача 28. Показать, что любой элемент $J(x) \in S_m$ однозначно представим в виде:

$$J(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} b_j (x - x_j)^{2m-1}, \quad (6)$$

где

$$x_{+}^{2m-1} = \begin{cases} x^{2m-1}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0, \end{cases} \quad \text{и } a_i, b_j \text{ определяются}$$

ся из системы уравнений :

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} 1 & x_0 & \dots & x_0^{m-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{m-1} & h^{m-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^{m-1} & (Nh)^{m-1} & ((N-1)h)^{m-1} & \dots & h^{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_0 & x_1 & \dots & x_{N-1} & x_N \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_0^{m-1} & x_1^{m-1} & \dots & x_{N-1}^{m-1} & x_N^{m-1} \end{array} \right| \begin{matrix} |c_0| \\ |c_1| \\ \dots \\ |c_N| \\ |b_0| \\ |b_1| \\ \dots \\ |b_N| \end{matrix} = \begin{matrix} |b_0| \\ |b_1| \\ \dots \\ |b_N| \end{matrix} \quad (7)$$

Теорема XY1. Решение задачи (1) - (2) существует.

Доказательство. Пусть A^{-1} - обратная матрица для матрицы системы (7). Обозначим через A_0 матрицу порядка $(N+1)x(N+m+1)$, полученную из матрицы A^{-1} вытаскиванием первых m строк. Тогда имеет место соотношение

$$A_0 \vec{z} = \vec{b}, \quad (8)$$

где $\vec{b} = (b_0, \dots, b_N)^T$, $\vec{z} = (z(x_0), \dots, z(x_N), 0, \dots, 0)^T$.

Из представления (6) следует, что функционал $\|Lz(x)\|_{L_2}^2$ является квадратичной формой относительно коэффициентов b_j . Пусть Q - матрица этой квадратичной формы.

Имеем

$$\|Lz(x)\|_{L_2}^2 = (\vec{b}, \vec{b}) = (B\vec{z}, \vec{z}),$$

где $B = A_0^T Q A_0$.

Таким образом, для того, чтобы определить обобщенный сплайн $z(x)$, достаточно минимизировать квадратичную форму $(B\vec{z}, \vec{z})$ на компактном точечном множестве:

$$S = \{(z_0, z_1, \dots, z_N) : |z_k - y_k| \leq \delta, k = \overline{0, N}\}.$$

По теореме Фейерштрасса последняя задача разрешима.

Пусть $z_0^*, z_1^*, \dots, z_N^*$ - одно из решений. Вычисляя \vec{b}^* , исходя из представления (7) и подставляя значения

$(a_0^*, \dots, a_{m-1}^*, b_0^*, \dots, b_N^*)$ в (6), получим обобщенный сплайн.

Теорема ХУ1 доказана.

2⁰. Апроксимативные свойства.

Мы скажем, что функция $U_\delta(x) \in C_1$ удовлетворяет условию согласования, если

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h, \delta \rightarrow 0}} \|U_\delta(x)\|_{C_1}^2 = 0, \quad (9)$$

Пусть функция $U_\delta(x) \in C_1$ является δ -приближением для функции $\bar{U}(x) \in C_m$, т.е.

$$\|\bar{U}(x) - U_\delta(x)\|_{L_2} \leq \delta, \quad (10)$$

и удовлетворяет условию согласования (9).

Пусть $U_\varepsilon(x)$ — обобщенный полиномиальный детерминированный сплайн при $U_k = U_\delta(x_k)$.

Лемма X. При сделанных выше предположениях функция $U_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию согласования (9).

Доказательство. Из соотношений (4.0), (2), (8.0) следует

$$\begin{aligned} \|U_\varepsilon(x)\|_{C_1}^2 &\leq \lambda \left(\|L\bar{U}(x)\|_{L_2}^2 + \sum_{k=0}^N h U_\varepsilon^2(x_k) + 2h \|U_\varepsilon(x)\|_{C_1}^2 \right) \leq \\ &\leq \lambda \left\{ \|L\bar{U}(x)\|_{L_2}^2 + 2h \|U_\varepsilon(x)\|_{C_1}^2 + \left(\left(\sum_{k=0}^N h (U_\varepsilon(x_k) - U_\delta(x_k))^2 \right)^{1/2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\sum_{k=0}^N h U_\delta^2(x_k) \right)^{1/2} \right) \right\} \leq \lambda \left\{ \|L\bar{U}(x)\|_{L_2}^2 + 2h \|U_\varepsilon(x)\|_{C_1}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(h \delta(N+1)^2 + (2h \|U_\delta(x)\|_{C_1}^2 + \|U_\delta(x)\|_{L_2}^2)^{1/2} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Из полученного соотношения при $1-2h\lambda > 0$ получим оценку

$$\|U_\varepsilon(x)\|_{C_1}^2 \leq \frac{\lambda}{1-2h\lambda} \left\{ \|L\bar{U}(x)\|_{L_2}^2 + (\delta + (2h \|U_\delta(x)\|_{C_1}^2 + \|U_\delta(x)\|_{L_2}^2)^{1/2})^2 \right\}.$$

Так как $\|U_\delta(x)\|_{L_2}^2 \leq \|U_\delta(x)\|_{C_1}^2$, то в силу (9) для функции $U_\delta(x)$ получим нужный результат.

Теорема ХУП. Пусть функции $\bar{U}(x) \in C_m$ и $U_\delta(x) \in C_1$

удовлетворяют соотношениям (9) - (10), тогда имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon(x) - \bar{u}(x)\|_{L_2} = 0. \quad (11)$$

Доказательство. Из соотношений (10), (8.0) следует, что

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(x) - \bar{u}(x)\|_{L_2} &\leq \delta + \|u_\varepsilon(x) - u_\delta(x)\|_{L_2} \leq \\ &\leq \delta + \left(\sum_{k=0}^N h(u_\varepsilon(x_k) - u_\delta(x_k))^2 + 2h \|u_\varepsilon(x) - u_\delta(x)\|_{C_1}^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \delta + \left(h\delta^2(N+1) + 2h (\|u_\varepsilon(x)\|_{C_1} + \|u_\delta(x)\|_{C_1})^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения в силу (9) и леммы X следует справедливость теоремы ХУП.

Теорема ХУШ. При выполнении условий теоремы ХУШ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Lu_\varepsilon(x) - L\bar{u}(x)\|_{L_2} = 0. \quad (12)$$

Доказательство. В силу соотношений (1), (2), (10) имеет место оценка

$$\|Lu_\varepsilon(x)\|_{L_2} \leq \|L\bar{u}\|_{L_2}, \quad (13)$$

из которой следует слабая компактность семейства $\{Lu_\varepsilon(x)\}$. Пусть уже самое это семейство слабо сходится к элементу $U(x) \in L_2$. В силу слабой замкнутости оператора L и соотношения (11) следует, что $U(x) = L\bar{u}(x)$. Пользуясь свойством (17.0) слабого предела и соотношением (13), получим соотношение

$$\|L\bar{u}(x)\|_{L_2}^2 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Lu_\varepsilon(x)\|_{L_2}^2 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Lu_\varepsilon(x)\|_{L_2}^2 \leq \|L\bar{u}(x)\|_{L_2}^2,$$

из которого следует, что $\|Lu_\varepsilon(x)\|_{L_2} \rightarrow \|L\bar{u}(x)\|_{L_2}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Но в гильбертовом пространстве L_2 из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость. Теорема ХУШ доказана.

Следствием теорем ХУП, ХУШ, леммы 1 является

Теорема XIX. Для $j = 0, 1, \dots, m - 1$ имеет место предельное соотношение

$$\|\bar{U}^{(j)}(x) - U_{\epsilon}^{(j)}(x)\|_C \rightarrow 0 \quad \text{при } \epsilon \rightarrow 0.$$

Теорема XIX устанавливает сам факт сходимости, но она ничего не говорит о характере этой сходимости, т.е. о скорости. Лемма Ш позволяет в какой-то мере ответить на этот вопрос, а именно имеет место

Теорема XX. Пусть $2m < N+1$. Имеют место оценки

$$|\bar{U}^{(\alpha)}(x) - U_{\epsilon}^{(\alpha)}(x)| \leq \|\bar{U}(x)\|_{L_2}(2m-1)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=0}^{m-2} (1+2i) h^{m-\alpha-\frac{1}{2}}$$

$$+ 2^m \prod_{i=\alpha}^{m-2} (1+2i) \delta h^{-\alpha} \quad \text{для } \alpha = 0, 1, \dots, m-2,$$

$$|\bar{U}^{(m-\nu)}(x) - U_{\epsilon}^{(m-\nu)}(x)| \leq 2 \|\bar{U}(x)\|_{L_2}(2m-1)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} + 2^m \delta h^{1-m}.$$

Доказательство. Имеем

$$|\bar{U}(x_k) - U_{\epsilon}(x_k)| \leq |\bar{U}(x_k) - U_{\delta}(x_k)| + |U_{\delta}(x_k) - U_{\epsilon}(x_k)| \leq 2\delta.$$

По лемме Ш существует N точек $\tilde{x}_k^{(\alpha)}$ таких, что

$$|\bar{U}'(\tilde{x}_k^{(\alpha)}) - U'_{\epsilon}(\tilde{x}_k^{(\alpha)})| \leq \frac{4\delta}{h} \tag{14}$$

Выберем новую сетку $\tilde{\chi}_k^{(1)}$ такую, что

$$\tilde{x}_k^{(1)} = \tilde{x}_{k_1}^{(\alpha)} \quad \text{и} \quad h \leq \tilde{x}_{k+1}^{(1)} - \tilde{x}_k^{(1)} \leq (1+1 \cdot 2)h \leq 3h.$$

Ясно, что для узлов сетки $\{\tilde{x}_k^{(\alpha)}\}$ выполняется оценка (14). Применив еще раз лемму Ш, получим

$$|\bar{U}''(\tilde{x}_k^{(2)}) - U''_{\epsilon}(\tilde{x}_k^{(2)})| \leq \frac{2^3 \delta}{h^2}.$$

По индукции доказывается, что для любого $\alpha = 0, m-1$ существует, по крайней мере, $m-\alpha$ точек $\tilde{x}_k^{(\alpha)}$ таких, что

$$|\bar{U}(x_k^{(n)}) - U_t(x_k^{(n)})| \leq \frac{\rho^{\alpha+1} \delta}{h^\alpha},$$

$$h \leq |x_{k+1}^{(d)} - x_k^{(n)}| \leq (1+2\alpha)h.$$
(15)

Пусть $x \in [0, 1]$ — произвольная точка и $\bar{x}_k^{(n)}$ — ближайшая к ней точка сетки $\{x_k^{(n)}\}$.

Очевидно, что

$$|x - \bar{x}_k^{(n)}| \leq h(1+2d). \quad (16)$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и соотношения (13), (15), (16), получим

$$\begin{aligned} |\bar{U}(x) - U_t(x)| &= \left| \int_{\bar{x}_k^{(m-1)}}^x (\bar{U}(x) - U_t(x)) dx + \bar{U}(\bar{x}_k^{(m-1)}) - \right. \\ &\quad \left. - U_t(\bar{x}_k^{(m-1)}) \right| \leq (2m-1)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \|L\bar{U}(x) - LU_t(x)\|_{L_2} + \\ &\quad + \frac{2^m \delta}{h^{m-1}} \leq 2(2m-1)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \|L\bar{U}(x)\|_{L_2} + 2^m \delta h^{1-m}. \end{aligned}$$

Вторая из доказываемых оценок установлена.

Далее,

$$\begin{aligned} |\bar{U}(x) - U_t(x)| &= \left| \int_{\bar{x}_k^{(m-2)}}^x (\bar{U}(x) - U_t(x)) dx \right| \leq \\ &\leq 2(2m-1)^{\frac{1}{2}} (2m-3)^{\frac{3}{2}} h^{\frac{3}{2}} \|L\bar{U}(x)\|_{L_2} + 2^m (2m-3) \delta h^{2-m}. \end{aligned}$$

Пользуясь указанным приемом, по индукции устанавливается первая из оценок, указанных в формулировке теоремы. Теорема XX доказана.

§ 6. Обобщенные стохастические полиномиальные сплайны

Задача (1.5), (2.5) допускает обобщение на стохастический случай.

1^o. Постановка задачи.

Пусть L - оператор обобщенного дифференцирования порядка $m \geq 2$, действующий в гильбертовом пространстве L_2^ω случайных функций $U(\omega; x)$, определенных на топологическом произведении $[0,1] \times \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} = \{\Omega, \mathcal{G}, P\}$ - некоторое вероятностное пространство, $[0,1]$ - отрезок действительной оси. Пусть $U_L^\omega \subseteq L_2^\omega$ - область определения оператора L .

Пусть, далее, $Y(\omega) = (Y_0(\omega), \dots, Y_N(\omega))$ - совокупность случайных величин из пространства L_2^ω . Обозначим через U_m^ω - класс случайных функций $U(\omega; x)$ из U_L^ω таких, что

$$\|U(\omega; x_k) - Y_k(\omega)\|_{L_2^\omega}^2 \leq \sigma^2 \quad (1)$$

для $k = 0, 1, \dots, N$.

$x_k = h k$, $k = \overline{0, N}$ - сетка на отрезке $[0, 1]$. Считаем всюду, что $m \leq N$.

Рассмотрим задачу определения случайной функции $U_t(\omega; x) \in U_m^\omega$ такой, что

$$\inf_{u \in U_m^\omega} \|Lu(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 = \|Lu_t(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2. \quad (2)$$

Задачу (1), (2) назовем задачей обобщенного стохастического полиномиального интерполяции, а ее решение $U_t(\omega; x)$ - обобщенным стохастическим полиномиальным сплайном или просто обобщенным стохастическим сплайном.

Задача 29. Доказать, что для любых двух элементов $u(\omega; x), v(\omega; x) \in U_m^\omega$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \|L \frac{u(\omega; x) - v(\omega; x)}{2}\|_{L_2^\omega}^2 &= \frac{1}{2} \|Lu(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 + \frac{1}{2} |Lv(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 - \\ &- \|L \frac{u(\omega; x) + v(\omega; x)}{2}\|_{L_2^\omega}^2. \end{aligned}$$

Задача 30. Доказать, что решение задачи (1) – (2) существует.

Указание. Воспользоваться представлением

$$S(\omega; x) = \sum_{i=0}^N a_i(\omega) x^i + \sum_{j=0}^N b_j(\omega) (x - x_j)_+^{2m-1},$$

где

$$(x)_+^{2m-1} = \begin{cases} x^{2m-1}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0, \end{cases}$$

и методом доказательства теоремы ХУ1.

Задача 31. Оценить функцию $\mathcal{D}[U_\varepsilon(\omega; x)]$.

2°. Аппроксимативные свойства.

Пусть $U_\sigma(\omega; x) \in C_1^\omega$ – приближение для случайной функции $\bar{U}(\omega; x) \in C_m^\omega$, т.е. выполняется соотношение

$$E[\bar{U}(\omega; x) - U_\sigma(\omega; x)]^2 \leq \sigma^2, \quad (3)$$

удовлетворяет условию согласования

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h, \sigma \rightarrow 0}} \|U_\sigma(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2 = 0. \quad (4)$$

Пусть $U_T(\omega; x)$ – решение задачи (1), (2) при

$$Y_k(\omega) = U_\sigma(\omega; x_k), \quad k = \overline{0, N}.$$

Лемма X1. Случайная функция $U_T(\omega; x)$ при сделанных выше предположениях удовлетворяет условию согласования (4).

Доказательство. Воспользовавшись решением задачи 8, соотношениями (2), (22.0), неравенством Минковского, получим

$$\|U_T(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2 \leq \lambda (\|\bar{U}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 + 2h \|U_T(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2 +$$

$$+ \left(\left(\sum_{k=0}^N h \|U_T(\omega; x_k) - U_\sigma(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=0}^N h \|U_\sigma(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega}^2 \right)^{1/2} \right)^2).$$

Отсюда при $1-2h\lambda > 0$ следует оценка

$$\|U_C(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2 \leq \frac{\lambda}{1-2h\lambda} (\|L\bar{U}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 + (\sigma + \\ + (\|U_\sigma(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 + 2h \|U_\sigma(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2)^{1/2})^2).$$

Из последней оценки, в силу соотношений (3) - (4), следует справедливость леммы X1.

Теорема XX1. При выполнении условий (3), (4) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{h, \sigma \rightarrow 0} \|U(\omega; x) - U_C(\omega; x)\|_{W_{2,\omega}^{(m)}}^2 = 0. \quad (5)$$

Доказательство. Из соотношений (22.0), (3) следует, что

$$\begin{aligned} \|U(\omega; x) - U_C(\omega; x)\|_{L_2^\omega} &\leq \sigma + \|U_C(\omega; x) - U_\sigma(\omega; x)\|_{L_2^\omega} \leq \\ &\leq \sigma + \left(\sum_{k=0}^N h \|U_C(\omega; x_k) - U_\sigma(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega}^2 + 2h (\|U_C(\omega; x)\|_{C_1^\omega} + \right. \\ &\quad \left. + \|U_\sigma(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2)^{1/2} \right)^{1/2} \leq \sigma + (\sigma^2 + 2h (\|U_C(\omega; x)\|_{C_1^\omega} + \\ &\quad + \|U_\sigma(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2))^{1/2}. \end{aligned}$$

Из полученной оценки и леммы X1 следует

$$\|U(\omega; x) - U_C(\omega; x)\|_{L_2^\omega} \rightarrow 0 \text{ при } C \rightarrow 0. \quad (6)$$

далее, из соотношения (2) следует слабая компактность семейства $\{LU_C(\omega; x)\}$ в L_2^ω . Пусть уже самое это семейство, слабо сходится к $U(\omega; x) \in L_2^\omega$. Так как оператор L слабо замкнут (задача 9), то из (6) следует $U(\omega; x) = LU(\omega; x)$. В силу соотношений (17.0), (2) следует

$$\begin{aligned} \|LU(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 &\leq \lim_{C \rightarrow 0} \|LU_C(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{C \rightarrow 0} \|LU_C(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 \leq \|LU(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2. \end{aligned}$$

Из полученной оценки и слабой сходимости семейства $\{U_t(\omega; x)\}$ к $L\bar{U}(\omega; x)$ следует предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|U_t(\omega; x) - L\bar{U}(\omega; x)\|_{L_2^\omega} = 0. \quad (7)$$

Из соотношений (6), (7) следует справедливость теоремы.

В силу теоремы вложения (задача 8) из доказанной теоремы следует, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{0 \leq x \leq 1} E[U_t^{(j)}(\omega; x) - U^{(j)}(\omega; x)]^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \|U_t(\omega; x) - L\bar{U}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 = 0$$

при $j = 0, 1, \dots, m-1$.

ГЛАВА III. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СПЛАЙНЫ (R - сплайны)

§ 7. Регуляризованные стохастические сплайны

1º. Постановка задачи.

Пусть L - оператор обобщенного дифференцирования порядка $m \geq 2$ с областью определения $U_L^\omega \subset L_2^\omega$. Пусть $g(\omega; x) \in C_1^\omega$ - фиксированный элемент. Рассмотрим однопараметрический функционал параметра $\alpha > 0$, определенный на элементах $U(\omega; x) \in U_L^\omega$ формулой

$$\Phi_\alpha^N[U; g] = \sum_{k=0}^N h \|U(\omega; x_k) - g(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega}^2 + \alpha \|U(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2. \quad (1)$$

Случайная функция $U_{\alpha, g}(\omega; x)$ называется регуляризованным стохастическим сплайном (R - сплайном), если

$$\inf_{u \in U_L^\omega} \Phi_\alpha^N[u; g] = \Phi_\alpha^N[U_{\alpha, g}(\omega; x)]. \quad (2)$$

Задача 32. Доказать, что при любом фиксированном значении параметра α функционал $\Phi_\alpha^N[u; g]$ непрерывен на U_L^ω в метрике пространства $W_{2, \omega}^{(m)}$.

2º. Существование и единственность.

Лемма ХП. Для любых двух элементов $U(\omega; x), V(\omega; x) \in U_L^\omega$ справедливо тождество

$$\Phi_\alpha^N\left[\frac{u-v}{2}; 0\right] = \frac{1}{2} \Phi_\alpha^N[u; g] + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^N[v; g] - \Phi_\alpha^N\left[\frac{u+v}{2}; g\right]. \quad (3)$$

Доказательство. В силу (1) имеем

$$\begin{aligned} & \Phi_\alpha^N\left[\frac{u-v}{2}; 0\right] + \Phi_\alpha^N\left[\frac{u+v}{2}; g\right] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^N h \| u(\omega; x_k) - v(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 + \\ & + \frac{\alpha}{4} \left(\| L u \|_{L_2^\omega}^2 - 2 (Lu, Lv)_{L_2^\omega} + \| Lv \|_{L_2^\omega}^2 \right) + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^N h \| u(\omega; x_k) - \\ & - g(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N h (u(\omega; x_k) - g(\omega; x_k), v(\omega; x_k) - \\ & - g(\omega; x_k))_{L_2^\omega} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^N h \| v(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 + \\ & + \frac{\alpha}{2} \left(\| Lu(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 + 2 (Lu(\omega; x), Lv(\omega; x))_{L_2^\omega} + \| Lv(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 \right) + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^N h \| u(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^N h \| v(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 = \\ & + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^N h \| u(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^N h \| v(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N h \| u(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 + \frac{\alpha}{2} \| Lu(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N h \| v(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 + \frac{\alpha}{2} \| Lv(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 = \\ & = \frac{1}{2} \Phi_\alpha^N[u; g] + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^N[v; g]. \end{aligned}$$

Из последнего равенства, в силу (1), следует справедливость леммы XII.

Теорема ХХII. Заданием элемента $g(\omega; x) \in C_1^\omega$ R -сплайн определяется однозначно.

Доказательство. Единственность.

Пусть $U_{\alpha,g}(\omega; x)$ и $\bar{U}_{\alpha,g}(\omega; x)$ - два R -сплайна и

$$\gamma = \inf_{u \in U_L^\omega} \Phi_\alpha^N[u; g].$$

Так как $(U_{\alpha,g}(\omega; x) - \bar{U}_{\alpha,g}(\omega; x))/2$, вообще говоря, не R -сплайн, то, воспользовавшись тождеством (3), получим

$$0 \leq \Phi_\alpha^N\left[\frac{U_{\alpha,g} - \bar{U}_{\alpha,g}}{2}\right] = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta - (\gamma + \varepsilon) = -\varepsilon \leq 0,$$

где $\varepsilon > 0$.

Из полученного соотношения и соотношения (1) следует, что

1) $U_{\alpha,g}(\omega; x) - \bar{U}_{\alpha,g}(\omega; x) \in Q$ - ядро оператора L ,

2) $\|U_{\alpha,g}(\omega; x_k) - \bar{U}_{\alpha,g}(\omega; x_k)\|_{L^2} = 0$, $k = \overline{0, N}$.

Из (1) - (2), в силу того, что $m < N$, следует соотношение

$$E[U_{\alpha,g}(\omega; x) - \bar{U}_{\alpha,g}(\omega; x)]^2 = 0 \quad \text{для } x \in [0, 1],$$

доказывающее единственность R -сплайна в рамках корреляционной теории.

Существование. В силу неотрицательности функционала

$\Phi_\alpha^N[u; g]$ на U_L^ω этот функционал ограничен снизу. Пусть γ - нижняя грань этого функционала. Покажем, что она на U_L^ω достигается.

В самом деле. По определению нижней грани для всякого натурального числа M существует элемент $U_M(\omega; x) \in U_L^\omega$ такой, что

$$\gamma = \Phi_\alpha^N[U_M; g] \leq \gamma + \frac{1}{M}. \quad (4)$$

Покажем, что последовательность $U_M(\omega; x)$, $M = \overline{1, \infty}$ фундамент-

тальна в \mathcal{F}_N^ω . Действительно, в силу тождества (3) и оценки (4) для любого натурального числа P имеет место оценка

$$0 \leq \Phi_\alpha^N \left[\frac{U_{M+P} - U_M}{2}; 0 \right] \leq \frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{1}{M+P} \right) + \frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{1}{M} \right) - \gamma,$$

из которой, при любом фиксированном значении параметра α , следуют неравенства

$$\sum_{k=0}^N h_k \left\| \frac{U_{M+P}(\omega; x_k) - U_M(\omega; x_k)}{2} \right\|_{L_2^\omega}^2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M+P} + \frac{1}{M} \right),$$

$$\left\| L \left[\frac{U_{M+P}(\omega; x) - U_M(\omega; x)}{2} \right] \right\|_{L_2^\omega}^2 \leq \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{M+P} + \frac{1}{M} \right).$$

уста наливающие фундаментальность.

В силу леммы 1У в \mathcal{F}_N^ω существует элемент $U_{\alpha,g}^\theta(\omega; x)$ такой, что

$$\|U_M(\omega; x) - U_{\alpha,g}^\theta(\omega; x)\|_{\mathcal{F}_N^\omega} \rightarrow 0 \quad \text{при } M \rightarrow \infty$$

Из следствия к лемме 1У следует, что

$$\|U_M(\omega; x) - U_{\alpha,g}^\theta(\omega; x)\|_{W_{2,\omega}^{(m)}} \rightarrow 0 \quad \text{при } M \rightarrow \infty.$$

Так как функционал $\Phi_\alpha^N[u; g]$ непрерывен в $W_{2,\omega}^{(m)}$ (задача 32), то, переходя в соотношении (4) к пределу при $M \rightarrow \infty$, получим:

$U_{\alpha,g}^\theta(\omega; x)$ есть R -сплайн для функции $g(\omega; x) \in C_1^\omega$.

Теорема ХХII доказана.

Теорема ХХIII. Для того, чтобы элемент $U_{\alpha,g}(\omega; x) \in U_L^\omega$ был R -сплайном для элемента $g(\omega; x) \in C_1^\omega$, необходимо и достаточно, чтобы на элементах $U(\omega; x)$ множества U_L^ω выполнялось тождество

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N h_k E[(U_{\alpha,g}(\omega; x_k) - g(\omega; x_k)) U(\omega; x_k)] + \\ + \alpha (L U_{\alpha,g}(\omega; x), L U(\omega; x))_{L_2^\omega} \equiv 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость.

Пусть $U_{d,g}(\omega; x) - R$ - сплайн. Возьмем произвольное число $\beta \neq 0$ и элемент $U(\omega; x) \neq 0$ из U_L^ω . В силу единственности элемента $U(\omega; x) = U_{d,g}(\omega; x) + \beta U(\omega; x)$ не R - сплайн, поэтому

$\Phi_d^N[u; g] \geq \Phi_d^N[U_{d,g}; g]$, или в развернутом виде:

$$\beta^2 \left(\sum_{k=0}^N h \|U(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega}^2 + d \|U(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 \right) + 2\beta \left(\sum_{k=0}^N h (U_{d,g}(\omega; x_k) - \right.$$

$$\left. - g(\omega; x_k), U(\omega; x_k))_{L_2^\omega} + d (U_{d,g}(\omega; x), U(\omega; x))_{L_2^\omega} \right) > 0.$$

При любом β последнее неравенство возможно только, если вы - выполняется тождество (5).

Достаточность. Пусть, кроме элемента $U_{d,g}(\omega; x)$, тождество (5) выполняется еще для некоторого элемента $U^0(\omega; x) \in U_m^\omega$. Покажем, что $U^0(\omega; x)$ совпадает с $U_{d,g}(\omega; x)$.

Вычитая из тождества (5) для $U_{d,g}(\omega; x)$ тождество (5) для $U^0(\omega; x)$, получим

$$\sum_{k=0}^N h E[(U^0(\omega; x_k) - U_{d,g}(\omega; x_k))U(\omega; x_k)] + d (U(\omega; x), U^0(\omega; x))_{L_2^\omega} -$$

$$- d (U(\omega; x), U_{d,g}(\omega; x))_{L_2^\omega} \quad \text{для } U(\omega; x) \in U_L^\omega.$$

Положим $U(\omega; x) = U^0(\omega; x) - U_{d,g}(\omega; x)$, получим

$$1) U^0(\omega; x) - U_{d,g}(\omega; x) \in Q \quad - \text{ядру оператора } L,$$

$$2) \|U^0(\omega; x_k) - U_{d,g}(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega}^2 = 0, \quad k = \overline{0, N}.$$

Так как $m < N$, то из (1) - (2), следует, что

$$E[U^0(\omega; x) - U_{d,g}(\omega; x)]^2 = 0, \quad x \in [0, 1]$$

Теорема XXIII доказана полностью.

Задача 35. Доказать, что $U_{d,g}(\omega; x) \in S_\Delta^\omega$.

§ 8. Минимальные интерполяционные сплайны

1^o Постановка задачи.

Пусть $g(\omega; x) \in C_1^\omega$ — фиксированная функция.

Случайная функция $Ug(\omega; x)$ называется интерполянтом для функции $g(\omega; x)$, если выполняются соотношения

$$\|Ug(\omega; x_k) - g(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega}^2 = 0, k = \overline{0, n}. \quad (1)$$

Пусть Ug^ω — множество всех интерполянтов для функции

$g(\omega; x) \in C_1^\omega$. Случайная функция $Ug(\omega; x) \in Ug^\omega$ называется минимальным интерполяционным сплайном для функции $g(\omega; x) \in C_1^\omega$ если выполняется соотношение

$$\inf_{u \in Ug^\omega} \|Uu(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 = \|Ug(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2. \quad (2)$$

Задача 34. Доказать, что Ug^ω слабо замкнуто в \mathcal{F}_N^ω .

Указание. Надо воспользоваться решением задачи 2.

2^o. Существование и единственность.

Теорема XXIУ. Заданием элемента $g(\omega; x) \in C_1^\omega$ минимальный интерполяционный сплайн $Ug(\omega; x)$ определяется однозначно, причем имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|U_{d,\alpha}g(\omega; x) - Ug(\omega; x)\|_{\mathcal{F}_N^\omega} = 0. \quad (3)$$

Доказательство. Единственность. Пусть $Ug(\omega; x)$ и $U\bar{g}(\omega; x)$ — два решения задачи (1), (2). Воспользовавшись соотношением, аналогичным соотношению (5.2), получим

$$0 \leq \frac{1}{4} \|Ug(\omega; x) - U\bar{g}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma - (\gamma + \varepsilon) = -\varepsilon \leq 0,$$

где $\gamma = \inf_{u \in Ug^\omega} \|Uu(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2$ и $\varepsilon \geq 0$ потому,

что $(Ug(\omega; x) + U\bar{g}(\omega; x))/2$, вообще говоря, не является минимальным интерполяционным сплайном. Из этого следует, что

$Ug(\omega; x) - U\bar{g}(\omega; x) \in Q$ - ядру оператора L . Так как, кроме того, $\|Ug(\omega; x_k) - U\bar{g}(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega} = 0$ при $k=0, \bar{N}$ и $m < N$ то $E[Ug(\omega; x) - U\bar{g}(\omega; x)]^2 = 0$ при $x \in [0, 1]$. Единственность доказана.

Существование. Пусть $Ua, g(\omega; x) - R$ - сплайн для элемента $g(\omega; x) \in C_1^\omega$ и $U(\omega; x) \in U_g^\omega$ - произвольный элемент. Из соотношений (2.6), (1) следует, что

$$\sum_{k=0}^N h \|Ua, g(\omega; x_k) - g(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega}^2 \leq d \|U(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2, \quad (4)$$

$$\|LUa, g(\omega; x)\|_{L_2^\omega} \leq \|LU(\omega; x)\|_{L_2^\omega}.$$

Из соотношений (4) следует, что семейство $Ua, g(\omega; x)$ равномерно по параметру $d : 0 < d \leq \bar{d} < +\infty$, ограничено в пространстве \mathcal{F}_N^ω , а следовательно, и слабо компактно в нем. Пусть уже самое семейство $Ua, g(\omega; x)$ слабо сходится к

$U_g^0(\omega; x)$. Так как функционал $\sum_{k=0}^N h \|U(\omega; x_k) - g(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega}^2$ слабо непрерывен в \mathcal{F}_N^ω (доказать!), то из первого из соотношений (4) следует, что $U_g^0(\omega; x) \in U_g^\omega$. Из слабой сходимости семейства $Ua, g(\omega; x)$ к элементу $U_g^0(\omega; x)$ в пространстве \mathcal{F}_N^ω следует слабая сходимость семейства $LUa, g(\omega; x)$ к $LU_g^0(\omega; x)$ в пространстве L_2^ω . Пользуясь соотношениями (17.0), (4), получим при $U(\omega; x) = U_g^0(\omega; x)$ соотношение

$$\begin{aligned} \|LU_g^0(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 &\leq \lim_{d \rightarrow 0} \|LUa, g(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 \leq \\ &\leq \lim_{d \rightarrow 0} \|LUa, g(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 \leq \|LU_g^0(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2, \end{aligned}$$

из которого следует, что

$$\lim_{d \rightarrow 0} \|LUa, g(\omega; x) - LU_g^0(\omega; x)\|_{L_2^\omega} = 0$$

Из полученного предельного соотношения и второго из соотношений (4) следует, что $\|LU_g^0(\omega; x)\|_{L_2^\omega} \leq \|LU(\omega; x)\|_{L_2^\omega}$

для всех $U(\omega; x) \in U_g^\omega$. т.е. $U_g^0(\omega; x) = Ug(\omega; x)$.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть

$$\rho(\alpha) = \sum_{k=0}^N h \| u_{\alpha, g}(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2; \quad (6)$$

имеет место соотношение

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \rho(\alpha) = 0. \quad (6)$$

§ 9. Среднеквадратичные сплайны

1º. Постановка задачи.

Элемент $\mathfrak{S}g(\omega; x)$ называется среднеквадратичным сплайном для элемента $g(\omega; x) \in C_1^\omega$, если выполняются следующие соотношения:

$$\mathfrak{S}g(\omega; x) \in Q \quad - \text{ядру оператора } L. \quad (1)$$

$$\inf_{u \in Q} \sum_{k=0}^N h \| u(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 = \sum_{k=0}^N h \| \mathfrak{S}g(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2. \quad (2)$$

Так как $\sum_{k=0}^N h \| u(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2$ — положительно определенный квадратичный функционал, то вариационная задача (1), (2) однозначно разрешима, т.е. заданием элемента $g(\omega; x)$ среднеквадратичный сплайн $\mathfrak{S}g(\omega; x)$ определяется однозначно. Следующая теорема показывает, что $\mathfrak{S}g(\omega; x)$ можно конструктивно определить.

Теорема XXX. Пусть $\mathfrak{S}g(\omega; x)$ — среднеквадратичный сплайн для элемента $g(\omega; x) \in C_1^\omega$ и $u_{\alpha, g}(\omega; x)$ — его R — сплайн. Имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \| u_{\alpha, g}(\omega; x) - \mathfrak{S}g(\omega; x) \|_{F_N^\omega} = 0. \quad (3)$$

Доказательство. Так как $\mathfrak{S}g(\omega; x) \in Q$, то

$$\Phi_{\omega}^N[\mathcal{U}_d, g; g] \leq \Phi_{\omega}^N[\mathcal{S}_g; g] = \sum_{k=0}^N h \| \mathcal{S}_g(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^{\omega}}^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^N h \| \mathcal{U}(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^{\omega}}^2 \text{ для любого элемента } \mathcal{U}(\omega; x) \in Q. \quad (4)$$

Из последней оценки следует, что семейство $\mathcal{U}_d, g(\omega; x)$ равномерно в пространстве L_2^{ω} , ограничено по параметру d : $d > d > 0$, а следовательно, и слабо компактно.

Пусть это семейство уже самое слабо сходится в L_2^{ω} к элементу $\mathcal{S}_g^0(\omega; x)$ при $d \rightarrow \infty$. Из слабой сходимости в L_2^{ω} следует слабая сходимость семейства $L\mathcal{U}_d, g(\omega; x) \times L\mathcal{S}_g^0(\omega; x)$ в L_2^{ω} . Из соотношения (12.0) следует, что

$$0 \leq \| L\mathcal{S}_g^0(\omega; x) \|_{L_2^{\omega}}^2 \leq \lim_{d \rightarrow \infty} \| L\mathcal{U}_d, g(\omega; x) \|_{L_2^{\omega}}^2 \leq 0.$$

Таким образом, $\mathcal{S}_g^0(\omega; x) \in Q$.

Так как соотношение (4) справедливо для любого элемента $\mathcal{U}(\omega; x) \in Q$, то оно справедливо и для $\mathcal{S}_g^0(\omega; x) \in Q$, а поэтому из соотношения (4) следует оценка

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N h \| \mathcal{U}_d, g(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^{\omega}}^2 \leq \\ & \leq \sum_{k=0}^N h \| \mathcal{S}_g(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^{\omega}}^2 \leq \\ & \leq \sum_{k=0}^N h \| \mathcal{S}_g^0(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^{\omega}}^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Устремив $d \rightarrow \infty$, получим, что $\mathcal{S}_g^0(\omega; x)$ – среднеквадратичный сплайн для $g(\omega; x)$. В силу единственности должно быть $\mathcal{S}_g^0(\omega; x) = \mathcal{S}_g(\omega; x)$. Итак, из оценки (4) следует, что

$$\| L\mathcal{U}_d, g(\omega; x) \|_{L_2^{\omega}} = \| L\mathcal{U}_d, g(\omega; x) - L\mathcal{S}_g(\omega; x) \|_{L_2^{\omega}} \rightarrow 0 \text{ при } d \rightarrow \infty.$$

Из полученного предельного соотношения и оценки (5) следует оценка (3).

Следствие. Из (5.8) и (5) следует предельное соотношение

$$P(\alpha) \rightarrow \sum_{k=0}^N h \| \mathcal{S}_\alpha(\omega, x_k) - g_\alpha(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Пусть $\bar{U}(\omega; x) \in C^m$ - фиксированная функция и $g_\alpha(\omega; x) \in C_1^\omega$, удовлетворяющая условию согласования (4.6), является для $\bar{U}(\omega; x)$ б-приближением в пространстве L_2^ω , т.е.

$$\| \bar{U}(\omega; x) - g_\alpha(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 \leq \sigma^2. \quad (7)$$

При сделанных выше предположениях справедлива

Лемма XIII. Семейство $\mathcal{S}_\alpha(\omega; x)$ среднеквадратичных сплайнов удовлетворяет условию согласования (4.6).

Доказательство. Пользуясь теоремой вложения (задача 8) и тем фактом, что $\mathcal{S}_\alpha(\omega; x) \in Q$ - ядру оператора L , получим

$$\begin{aligned} \| \mathcal{S}_\alpha(\omega; x) \|_{C_1^\omega}^2 &\leq M \| \mathcal{S}_\alpha(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 \leq \\ &\leq M (2\sigma^2 + 2 \| \bar{U}(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 + 2 \| \mathcal{S}_\alpha(\omega; x) - g_\alpha(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, воспользовавшись оценкой (22.0) и определением квадратического сплайна, получим

$$\begin{aligned} \| \mathcal{S}_\alpha(\omega; x) - g_\alpha(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 &\leq \sum_{k=0}^N h \| g_\alpha(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 + \\ &+ 2h (\| \mathcal{S}_\alpha(\omega; x) \|_{C_1^\omega} + \| g_\alpha(\omega; x) \|_{C_1^\omega})^2 \leq \\ &\leq \| g_\alpha(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 + 2h \| g_\alpha(\omega; x) \|_{C_1^\omega}^2 + \\ &+ 4h \| \mathcal{S}_\alpha(\omega; x) \|_{C_1^\omega}^2 + 4h \| g_\alpha(\omega; x) \|_{C_1^\omega}^2. \end{aligned}$$

Так как $\| g_\alpha(\omega; x) \|_{L_2^\omega} \leq \| g_\alpha(\omega; x) \|_{C_1^\omega}$, то из последней оценки и соотношения (8) при $1-8Mh > 0$ получим оценку

$$\| \mathcal{S}_\alpha(\omega; x) \|_{C_1^\omega}^2 \leq \frac{M}{1-8Mh} (2\sigma^2 + 2 \| \bar{U}(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 + 2(1+6h) \| g_\alpha(\omega; x) \|_{C_1^\omega}^2),$$

из которой следует справедливость леммы XIII.

Теорема ХХУ1. Пусть $\hat{U}(\omega; x)$ – проекция элемента $\bar{U}(\omega; x)$ на ядро Q , причем функция $g_\sigma(\omega; x)$ удовлетворяет условиям (4.6), (7). Тогда имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\tilde{\tau} \rightarrow 0} \sum_{k=0}^N h \| \hat{s}_\tau(\omega; x_k) - g_\sigma(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 = \| \hat{U}(\omega; x) - \bar{U}(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2. \quad (9)$$

Напомним, что $\tilde{\tau} = (h, \sigma)$ – вектор параметров h и σ .

Доказательство. Используя свойство проекций, получим

$$\begin{aligned} & \| \hat{U}(\omega; x) - \bar{U}(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 \leq \| \hat{s}_\tau(\omega; x) - \bar{U}(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 \leq \\ & \leq \sigma + \| \hat{s}_\tau(\omega; x) - g_\sigma(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 \leq \sigma + \left(\sum_{k=0}^N h \| \hat{s}_\tau(\omega; x_k) - \right. \\ & \quad \left. - g_\sigma(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 + 2h \| \hat{s}_\tau(\omega; x) - g_\sigma(\omega; x) \|_{C_1^\omega}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Из полученной оценки в силу леммы XIII имеем

$$\| \hat{U}(\omega; x) - \bar{U}(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 \leq \lim_{\tilde{\tau} \rightarrow 0} \sum_{k=0}^N h \| \hat{s}_\tau(\omega; x_k) - g_\sigma(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2. \quad (10)$$

Далее,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N h \| \hat{s}_\tau(\omega; x_k) - g_\sigma(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 \leq \sum_{k=0}^N h \| \hat{U}(\omega; x) - g_\sigma(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 \leq \\ & \leq \| \hat{U}(\omega; x) - g_\sigma(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 + 2h \| \hat{U}(\omega; x) - g_\sigma(\omega; x) \|_{C_1^\omega}^2 \leq \\ & \leq \| \hat{U}(\omega; x) - \bar{U}(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 + \sigma^2 + \\ & + 4h \| \hat{U}(\omega; x) \|_{C_1^\omega}^2 + 4h \| g_\sigma(\omega; x) \|_{C_1^\omega}^2 \end{aligned}$$

Из полученной оценки в силу (4.6) имеем

$$\overline{\lim}_{\tilde{\tau} \rightarrow 0} \sum_{k=0}^N h \| \hat{s}_\tau(\omega; x_k) - g_\sigma(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 \leq \| \hat{U}(\omega; x) - \bar{U}(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2$$

Из полученных оценок и соотношения (10) следует справедливость теоремы.

§ 10. Об аппроксимации R - сплайнами элементов ядра оператора L

1^o. Теорема об аппроксимации.

Пусть $\bar{u}(\omega; x) \in Q$ - фиксированная случайная функция и

$g_\sigma(\omega; x) \in C_1^\omega$ ее б-приближение в пространстве L_2^ω , т.е. выполняется соотношение (7). Пусть $g_\sigma(\omega; x)$ удовлетворяет соотношению (4.6). При этих условиях справедлива

Теорема ХХУП. Имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\tilde{\epsilon} \rightarrow 0} \|U_{\alpha, g_\sigma}(\omega; x) - \bar{u}(\omega; x)\|_{W_2^\omega} = 0 \text{ при любом } \alpha > 0.$$

Доказательство. В силу (22.0) имеем

$$\sum_{k=0}^N h \| \bar{u}(\omega; x_k) - g_\sigma(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 \leq \sigma^2 + 2h \| \bar{u}(\omega; x) - g_\sigma(\omega; x) \|_{C_1^\omega}^2.$$

Из этого соотношения и соотношений (4.6), (7.9) следует, что

$$\sum_{k=0}^N h \| \bar{u}(\omega; x_k) - g_\sigma(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 \rightarrow 0 \text{ при } \tilde{\epsilon} \rightarrow 0. \quad (1)$$

Далее, из

$$\Phi_\alpha^N [U_{\alpha, g_\sigma}; g_\sigma] \leq \Phi_\alpha^N [\bar{u}; g_\sigma] \text{ следует, что}$$

$$\sum_{k=0}^N h \| U_{\alpha, g_\sigma}(\omega; x_k) - g_\sigma(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2 \leq \sum_{k=0}^N h \| \bar{u}(\omega; x_k) - g_\sigma(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2. \quad (2)$$

$$\| L_{\alpha, g_\sigma}(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^N h \| \bar{u}(\omega; x_k) - g_\sigma(\omega; x_k) \|_{L_2^\omega}^2. \quad (3)$$

Прокажем, что функция $U_{\alpha, g_\sigma}(\omega; x)$ при любом α удовлетворяет условию согласования (4.6). В самом деле, в силу теоремы вложения (задача 8)

$$\begin{aligned} \| U_{\alpha, g_\sigma}(\omega; x) \|_{C_1^\omega}^2 &\leq \lambda \left(\| U_{\alpha, g_\sigma}(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 + \| L_{\alpha, g_\sigma}(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 \right) \leq \\ &\leq \lambda \left(2 \| U_{\alpha, g_\sigma}(\omega; x) - g_\sigma(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 + 2 \| g_\sigma(\omega; x) \|_{L_2^\omega}^2 \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|L U_{d,g\sigma}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 \leq \lambda \left(2 \sum_{k=0}^N h \|U_{d,g\sigma}(\omega; x_k) - \right. \\
& \left. - g_\sigma(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega}^2 + 4h \|U_{d,g\sigma}(\omega; x) - g_\sigma(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2 + \right. \\
& \left. + 2 \|g_\sigma(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2 + \|L U_{d,g\sigma}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 \right) \leq \\
& \leq \lambda \left(2h \sum_{k=0}^N h \|\bar{U}(\omega; x_k) - g_\sigma(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega}^2 + \right. \\
& \left. + 8h \|U_{d,g\sigma}(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2 + (2+8h) \|g_\sigma(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2 + \right. \\
& \left. + \|L U_{d,g\sigma}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 \right).
\end{aligned}$$

Из полученной оценки и (1) следует, что

$$\lim_{\tilde{\epsilon} \rightarrow 0} h \|U_{d,g\sigma}(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2 = 0. \quad (4)$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\|\bar{U}(\omega; x) - U_{d,g\sigma}(\omega; x)\|_{L_2^\omega} & \leq \sigma + \|U_{d,g\sigma}(\omega; x) - \right. \\
& \left. - g_\sigma(\omega; x)\|_{L_2^\omega} \leq \sigma + \left(\sum_{k=0}^N h \|U_{d,g\sigma}(\omega; x_k) - \right. \\
& \left. - g_\sigma(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega}^2 + \|U_{d,g\sigma}(\omega; x) - g_\sigma(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Из полученной оценки, соотношений (2), (1), (4.6), (4) следует, что

$$\lim_{\tilde{\epsilon} \rightarrow 0} \|U_{d,g\sigma}(\omega; x) - \bar{U}(\omega; x)\|_{L_2^\omega} = 0 \quad (5)$$

независимо от параметра α .

Из соотношений (3), (1) следует, что

$$\|L U_{d,g\sigma}(\omega; x) - L \bar{U}(\omega; x)\|_{L_2^\omega} = \|L U_{d,g\sigma}(\omega; x)\|_{L_2^\omega} \rightarrow 0 \text{ при } \tilde{\epsilon} \rightarrow 0$$

независимо от параметра α .

Из полученного предельного соотношения и соотношения (5) следует справедливость теоремы ХХУ.

§ 11. Принцип невязки

1⁰. Некоторые свойства функции невязки.

Функцией невязки для регуляризующего функционала $\bar{\Phi}_{\alpha}^N[u; g]$ назовем функцию $\rho(\alpha)$ параметра α , определенную соотношением (5.8).

Лемма X1У. Функция $\varphi(\alpha) = \bar{\Phi}_{\alpha}^N[u_{\alpha}, g; g]$ при $\alpha > 0$ является непрерывной монотонно неубывающей функцией для любой случайной функции $g(\omega, x) \in C_1^{\omega}$.

Доказательство. Пусть α_1 и α_2 – произвольные два значения параметра α такие, что $0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 < \alpha_2$, и $u_{\alpha_1}, g(\omega, x)$, $u_{\alpha_2}, g(\omega, x)$ – соответствующие R -сплайны.

Имеем

$$\varphi(\alpha_1) < \sum_{k=0}^N h \| u_{\alpha_2} g(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^{\omega}}^2 + \alpha_1 \| L u_{\alpha_2} g(\omega; x) \|_{L_2^{\omega}}^2,$$

$$\varphi(\alpha_2) = \sum_{k=0}^N h \| u_{\alpha_2} g(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^{\omega}}^2 + \alpha_2 \| L u_{\alpha_2} g(\omega; x) \|_{L_2^{\omega}}^2$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1) > (\alpha_2 - \alpha_1) \| L u_{\alpha_2} g(\omega; x) \|_{L_2^{\omega}}^2 \geq 0. \quad (1)$$

Из соотношения (4.9) следует, что

$$\| L u_{\alpha_1} g(\omega; x) \|_{L_2^{\omega}}^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N h \| 3g(\omega; x_k) - g(\omega; x_k) \|_{L_2^{\omega}}^2 = 2.$$

Аналогично:

$\| L u_{\alpha_2} g(\omega; x) \|_{L_2^{\omega}}^2 \leq 2$, где 2 – не зависит от параметра α . Поменяв ролями α_2 и α_1 в (1), получим

$$\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1) \leq (\alpha_2 - \alpha_1) \| L u_{\alpha_1} g(\omega; x) \|_{L_2^{\omega}}^2. \quad (2)$$

Из соотношения (1) следует монотонность функции $\varphi(\alpha)$, а из соотношений (1), (2) следует неравенство

$$|\varphi(d_2) - \varphi(d_1)| \leq (d_2 - d_1) \varepsilon,$$

доказывающее непрерывность функции $\varphi(d)$.

Рассмотрим функцию

$$\Psi(d) = \|L_{Ud,g}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2. \quad \text{Имеет место}$$

Лемма XУ. Функция $\Psi(d)$ монотонно не возрастает при $d \rightarrow \infty$ и непрерывна.

Доказательство. Монотонность следует из соотношений (1), (2). Докажем непрерывность. Вычитая из тождества (5.7) при

$d = d_2$ тождество (5.7) при $d = d_1$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N h(U_{d_2,g}(\omega; x_k) - U_{d_1,g}(\omega; x_k), U(\omega; x_k))_{L_2^\omega} + \\ & + d_2 (L_{Ud_2,g}(\omega; x), L_U(\omega; x))_{L_2^\omega} - \\ & - d_1 (L_{Ud_1,g}(\omega; x), L_U(\omega; x))_{L_2^\omega} \equiv 0. \end{aligned}$$

Если в последнем тождестве положить $U_{d_1,g}(\omega; x) +$

$+ U(\omega; x) = U_{d_2,g}(\omega; x)$, то получим соотношение

$$\sum_{k=0}^N h \|L_{Ud_2,g}(\omega; x_k) - U_{d_1,g}(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega}^2 + d_2 \|L_{Ud_2,g}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 -$$

$$- d_1 (L_{Ud_2,g}(\omega; x), L_{Ud_1,g}(\omega; x))_{L_2^\omega} - d_1 (L_{Ud_1,g}(\omega; x), L_{Ud_2,g}(\omega; x))_{L_2^\omega} +$$

$$+ d_1 \|L_{Ud_1,g}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 \equiv 0, \quad \text{из которого следует, что}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N h \|U_{d_2,g}(\omega; x_k) - U_{d_1,g}(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega}^2 + \\ & + d_2 \|L_{Ud_2,g}(\omega; x) - L_{Ud_1,g}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 \equiv \\ & \equiv (d_1 - d_2) (L_{Ud_2,g}(\omega; x) - L_{Ud_1,g}(\omega; x), L_{Ud_1,g}(\omega; x))_{L_2^\omega}. \end{aligned}$$

Таким образом, применив неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\|L_{Ud_2,g}(\omega; x) - L_{Ud_1,g}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 \leq$$

$$\leq \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2} \|L_{\alpha_2, g}(\omega; x) - L_{\alpha_1, g}(\omega; x)\|_{L_2^\omega} \|L_{\alpha_1, g}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}.$$

Из последнего соотношения следует оценка

$$\|L_{\alpha_2, g}(\omega; x) - L_{\alpha_1, g}(\omega; x)\|_{L_2^\omega} \leq \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2} 2, \quad \text{из которой}$$

вытекает непрерывность функции $\Psi(\alpha)$.

Теорема XXVII. Функция $\rho(\alpha)$ непрерывна при $\alpha > 0$ и монотонно не убывает при $\alpha \rightarrow \infty$.

Доказательство. Из представления (5.8) следует, что

$$\varphi(\alpha) = \rho(\alpha) + \alpha \psi(\alpha).$$

Непрерывность функции $\rho(\alpha)$ следует из лемм X1У, XУ. Далее,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_2) &= \rho(\alpha_2) + \alpha_2 \psi(\alpha_2) \leq \Phi_{\alpha_2}^{'''}[\chi_{\alpha_1, g}; g] = \\ &= \rho(\alpha_1) + \alpha_2 \psi(\alpha_1) \leq \rho(\alpha_2) + \alpha_1 \psi(\alpha_1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\rho(\alpha_2) < \rho(\alpha_1)$. Теорема доказана.

2°. Принцип невязки.

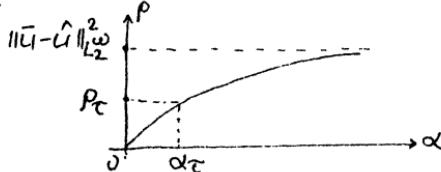
Пусть функции $\bar{U}(\omega; x)$ и $\hat{U}(\omega; x)$ удовлетворяют условиям (4.6), (7.9). Пусть, далее

$$\|\bar{U}(\omega; x) - \hat{U}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 > 0, \quad (3)$$

где $\hat{U}(\omega; x)$ — проекция элемента $\bar{U}(\omega; x)$ на ядро Q оператора L . Пусть β_T удовлетворяет следующим условиям:

$$\sigma^2 + 2h \|\bar{U}(\omega; x) - g_\sigma(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2 \leq \beta_T < \sum_{k=0}^N h \|\bar{g}_\sigma(\omega; x_k) - g_\sigma(\omega; x_k)\|_{C_1^\omega}^2$$

$$\beta_T \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow 0.$$



Возможность выбрать такое ρ_τ обеспечивается теоремой XXU1 и условием (3).

В силу теоремы XXUШ уравнение $P(\alpha) = \rho_\tau$ разрешимо.

Пусть $d\tau$ - решение этого уравнения, а $U_\tau(\omega; x) = U_{d\tau}(\omega; x)$ - R - сплайн для функции $g_\tau(\omega; x)$, соответствующий параметру $d\tau$.

Теорема XXIX. При сделанных выше предположениях справедливо предельное соотношение

$$\|U_\tau(\omega; x) - \bar{U}(\omega; x)\|_{L_2^\omega} \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow 0.$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} \|U_\tau(\omega; x) - \bar{U}(\omega; x)\|_{L_2^\omega} &\leq \sigma + \|U_\tau(\omega; x) - g_\tau(\omega; x)\|_{L_2^\omega} \leq \\ &\leq \sigma + \left(\sum_{k=0}^N h \|U_\tau(\omega; x_k) - g_\tau(\omega; x_k)\|_{L_2^\omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2h \|U_\tau(\omega; x) - \\ &- g_\tau(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^{\frac{1}{2}} \leq \sigma + (\rho_\tau + 4h \|U_\tau(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2 + 4h \|g_\tau(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Из полученной оценки и соотношений (4.ε), (4.10), (4) следует

$$\|U_\tau(\omega; x) - \bar{U}(\omega; x)\|_{L_2^\omega} \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow 0. \quad (5)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \rho_\tau + d\tau \|U_\tau(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 &\leq \|\bar{U}(\omega; x) - g_\tau(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 + \\ &+ 2h \|\bar{U}(\omega; x) - g_\tau(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2 + d\tau \|\bar{U}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 \leq \\ &\leq \sigma^2 + 2h \|\bar{U}(\omega; x) - g_\tau(\omega; x)\|_{C_1^\omega}^2 + d\tau \|\bar{U}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}^2 \leq \\ &\leq \rho_\tau + d\tau \|L\bar{U}(\omega, x)\|_{L_2^\omega}^2. \end{aligned}$$

Из полученной оценки следует, что

$$\|U_\tau(\omega; x)\|_{L_2^\omega} \leq \|L\bar{U}(\omega; x)\|_{L_2^\omega}. \quad (6)$$

Таким образом, $\{L_{\epsilon}(\omega; x)\}$ слабо компактно в L_2^{ω} .
 Пусть уже самое $\{L_{\epsilon}(\omega; x)\}$ слабо сходится к $L^0(\omega; x)$.
 Так как оператор L слабо замкнут, то в силу (5) имеем
 $L^0(\omega; x) = L\bar{U}(\omega; x)$.

Из соотношений (17.0) и (6) следует, что

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|L_{\epsilon}(\omega; x)\|_{L_2^{\omega}} = \|L\bar{U}(\omega; x)\|_{L_2^{\omega}}$$

В силу того, что L_2^{ω} - гильбертово пространство, следует, что

$$\|L_{\epsilon}(\omega; x) - L\bar{U}(\omega; x)\|_{L_2^{\omega}} \rightarrow 0 \quad \text{при } \epsilon \rightarrow 0.$$

Из полученного соотношения и (5) следует справедливость теоремы XXIX.

СОДЕРЖАНИЕ

Вводные замечания	3
ГЛАВА I. КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ	
§ 1. Интерполяционные детерминированные кубические сплайны и их свойства	14
§ 2. Обобщенные детерминированные кубические сплайны .	23
§ 3. Интерполяционные стохастические кубические сплайны	27
ГЛАВА II. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ	
§ 4. Детерминированные интерполяционные полиномиальные сплайны	32
§ 5. Обобщенные детерминированные полиномиальные сплайны	39
§ 6. Обобщенные стохастические полиномиальные сплайны	46
ГЛАВА III. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СПЛАЙНЫ (R -сплайны)	
§ 7. Регуляризованные стохастические сплайны	49
§ 8. Минимальные интерполяционные сплайны	51
§ 9. Среднеквадратичные сплайны	56
§ 10. Об аппроксимации R -сплайнами элементов ядра оператора L	60
§ 11. Принцип невязки	62

Н.В. МЕДВЕДЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙНОВ В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Учебное пособие

Тематический план 1977 г. поз. II34

Редактор Н.И. Завгородняя

Корректор З.И. Локтева

Подписано к печати 22/III-1977г. Формат 60x84/16. Бумага газетная.

Ул. п. л. 3, 95. Физ. п. л. 4, 25. Уч.-изд. л. 2, 72. Заказ №391. Тираж 400 экз. Цена 20 коп.

Издательство Ульяновского государственного университета им. И.Н. Ульянова.

196000, г. Ульяновск, Московский пр., 15.

Цена 20 коп.