М. Б. МЕНСКИЙ

МЕТОД ИНДУЦИРОВАННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ И КОНЦЕПЦИЯ ЧАСТИЦ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1976

530.1
М 50
УДК 530.1

Метод индуцированных представлений: пространство-время и концепция частиц. Менский М. Б. Монография. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1976.

Книга посвящена теория индуцированных представлений групп и ее приложениям в физике элементарных частиц.

Первая часть содержит рассчитанное на физиков изложение теории индуцированных представлений групп и основанных на ней методов конструирования неприводимых представлений некомпактных групп. В качестве примеров, важных для приложений, строятся унитарные неприводимые представления групп Пуанкаре, Лоренца и де Ситтера.

Во второй части книги выясняется роль индуцированных представлений в описании квантовых систем с группами симметрии. На этой основе строится теория взаимодействующих частиц в пространстве-времени с геометрической структурой одного из следующих трех типов: пространства Галилея, пространства Минковского и пространства де Ситтера (пространства постоянной кривизны). Эти модели анализируются с единой точки зрения, которая может быть сформулирована как принцип квантования, не содержащий понятия квантованного поля.

Рисунков 16. Библ. названий 100.

М $\frac{20402-084}{053(02)-76}$ 123-75

ОГЛАВЛЕНИЕ

Посвящается моему отцу

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория групп и их представлений давно доказала свою полезность в квантовой теории. В этой книге рассматривается один из важнейших разделов современной теории представлений групп и его приложение к самой, пожалуй, фундаментальной области квантовой теории. Имеется в виду теория индуцированных представлений групп и приложение ее к задаче построения релятивистской квантовой механики или теории элементарных частиц.

В математике техника индуцирования из подгруппы оказалась полезной для исследования и конструирования представлений достаточно сложных (в частности, некомпактных) групп. За последнее десятилетие постепенно была осознана и особая роль индуцированных представлений в квантовой теории. При ближайшем рассмотрении оказалось, что многие важные квантовомеханические понятия естественным образом формулируются на языке индуцированных представлений (оператор импульса, оператор положения Ньютона — Вигнера и др.). Анализ, проведенный Макки, позволяет понять причину этого.

Сейчас, по-видимому, настало время для того, чтобы на основе техники индуцирования не только переформулировать известные положения, но и попытаться получить новые результаты, более глубоко осмыслить квантовую теорию. Во второй части книги делается такая попытка. Показывается, что последовательное использование систем импримитивности и техники индуцирования позволяет построить релятивистскую квантовую механику свободных и взаимодействующих частиц, опираясь почти исключительно на свойства симметрии пространства-времени и не используя по существу классический прообраз квантовой теории.

Рассмотрены три различных модели пространства-времени: пространство-время Галилея с абсолютным временем, пространство-время Минковского и пространство-время де Ситтера. В каждом из этих случаев пространство-время обладает симметрией, описываемой десятипараметрической группой, и требование инвариантности квантовой теории относительно соответствующей группы оказывается настолько сильным, что почти полностью определяет эту теорию. Из трех рассмотренных моделей пространство де Ситтера, по-видимому, точнее всего описывает геометрию реального мира. Между тем квантовая теория в пространстве де Ситтера обнаруживает черты, необычные по сравнению с теорией в пространстве Минковского, главной из которых является то, что понятие энергии в значительной мере теряет физический смысл, а различия в описании частиц и античастиц и операция зарядового сопряжения приобретают геометрическую интерпретацию.

Специфика развиваемого подхода сказывается в том, что теория частиц формулируется полностью в терминах частиц и переходов между различными их состояниями (в духе Фейнмана). Не возникает необходимости пользоваться понятием квантованного поля и связанным с этим понятием сравнительно сложным математическим аппаратом. По всей вероятности, квантовая теория частиц, сформулированная в терминах амплитуд перехода, является лишь частным случаем квантовой теории полей. Однако в некоторых отношениях она, по-видимому, имеет преимущества перед теорией полей и, во всяком случае, поясняет ее с новой точки зрения, что всегда оказывается плодотворным.

С технической стороны главную роль в новой формулировке теории частиц играет теорема о переплетении индуцированных представлений. С принципиальной точки зрения важно было понять связь между наблюдаемыми (реальными) и виртуальными состояниями элементарной частицы. Дело в том, что наблюдатель, отождествляющий частицу, наблюдает ее в течение очень большого (практически бесконечного) интервала времени и в большой пространственной области. А во взаимодействиях частица выступает как объект, локализованный в одной точке пространства-времени: взаимодействие является локальным. Переходы между этими двумя формами существования элементарных частиц, совершаемые по определенным законам, описываются диаграммами Фейнмана, и различные комбинации этих переходов приводят к реально наблюдаемым физическим процессам.

В основе книги лежит курс лекций, который автор читает на физическом факультете МГУ с 1970 г. Хотя для книги материал значительно переработан, но во многих случаях оказалось необходимым сохранить лекционный стиль для того, чтобы иметь возможность осветить широкий круг вопросов, имеющих отношение к основному предмету.

Книга адресована в основном физикам-теоретикам, и это было определяющим при выборе чисто математического материала и уровня строгости при его изложении. Автор старался опускать или излагать предельно сжато то, что можно найти в многочисленных книгах по теории групп, написанных для физиков, и в то же время подробнее осветить те вопросы, которые в подобных книгах либо не затрагиваются, либо упоминаются вскользь. К ним относится прежде всего понятие однородного пространства, пространства переплетения представлений и собственно теория индуцированных представлений.

Для того чтобы книга была доступна по возможности более широкой аудитории, технические сложности, связанные с математически строгим доказательством теорем, опускаются. Отчасти это компенсируется замечаниями, позволяющими читателю понять суть этих сложностей и при желании самому или с помощью математической литературы восстановить строгие доказательства. Стиль изложения рассчитан на то, чтобы подготовить читателя к чтению серьезной математической литературы. На протяжении всей книги дискретные элементы непрерывных групп опускаются, т. е. рассматриваются универсальные накрывающие связных компонент соответствующих групп. Как правило, это особо не оговаривается. Задачи играют в тексте двоякую роль. Некоторые из них служат иллюстрациями излагаемого материала, другие же содержат результаты, на которые опирается изложение, так что составляют неотъемлемую часть текста. Пункты и параграфы, отмеченные в тексте звездочками, могут быть пропущены при первом чтении.

Приведенный в конце книги список литературы ни в какой мере не претендует на полноту. В основном он содержит литературу, непосредственно использованную при написании настоящей книги. При необходимости читатель может воспользоваться библиографией, содержащейся в цитируемых книгах и статьях. Статья Коулмана [59] и популярная книга Макки [82] написаны для физиков и могут быть рекомендованы как прекрасная вспомогательная литература по материалу первой части книги. Для облегчения пользования списком литературы ему предпосланы литературные указания, которые, впрочем, также не являются исчерпывающими.

Для всех физических величин используется естественная система единиц, в которой $\hbar = 1$, а в релятивистской теории, кроме этого, еще $c = 1$. Это значит, что в релятивистской теории имеется только одна независимая единица (например, сантиметр), все же остальные выражаются через нее. Так, масса, энергия и импульс выражаются в обратных сантиметрах. В нерелятивистской теории имеются две независимые единицы (сантиметр, секунда). В этом случае, например, импульс выражается в обратных сантиметрах, а энергия — в обратных секундах. В любой момент можно вернуться к обычным единицам, введя в формулы числа $\hbar$ и c таким образом, чтобы размерности всех величин стали обычными. Например, если в показателе экспоненты стоит выражение mt (произведение массы на время), то при переходе к обычным единицам нужно заменить его на $mc^2t/\hbar$, так как эта комбинация безразмерна, как и должно быть для показателя степени.

Автор пользуется случаем, чтобы выразить свою глубокую признательность тем, кто участвовал в обсуждении излагаемых здесь вопросов на разных стадиях работы над материалом. Много лет назад, в начале этой работы, большую стимулирующую роль играли обсуждения на научных семинарах, руководимых акад. В. С. Владимировым и проф. М. К. Поливановым. На последнем этапе чрезвычайно полезными были дискуссии с Г. Л. Ставраки и Г. А. Вилковыским. Автор особенно благодарен проф. В. Г. Кадышевскому, прочитавшему книгу в рукописи и сделавшему ряд ценных замечаний. Освобождением от многих утомительных операций при подготовке рукописи автор обязан Т. В. Менской.

М. Б. Менский

Часть I

МЕТОД ИНДУЦИРОВАННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Разбиение группы на классы смежности по подгруппе (факторизация) позволяет определить операцию индуцирования, сопоставляющую каждому представлению подгруппы некоторое представление всей группы. Эта операция в определенном смысле является обратной по отношению к операции ограничения представления группы на подгруппу, что выражается в теореме взаимности Фробениуса. Индуцированные представления обладают многими другими замечательными свойствами, которые делают их удобным инструментом для изучения множества всех представлений данной группы. Достаточно сказать, что практически все известные до сих пор неприводимые представления некомпактных групп найдены методом индуцированных представлений или некоторым его обобщением.

Индуцированное представление можно реализовать в пространстве функций на однородном пространстве со значениями в некотором линейном пространстве. Такая реализация важна сама по себе, потому что в ней находит выражение свойство импримитивности индуцированного представления, решающее для приложений в квантовой теории (см. часть II).

Глава 1

ФАКТОР-СТРУКТУРА НА ГРУППЕ

Каждая подгруппа K группы G определяет на G отношение эквивалентности, факторизация по которому дает множество G/K, состоящее из смежных классов gK, $g \in G$. Группа G действует на этом множестве как группа преобразований, превращая его в фактор-пространство. Любое однородное пространство $\mathscr{X}$, т. е. пространство, на котором группа G действует транзитивно, изоморфно некоторому фактор-пространству $\mathscr{X} = G/K$, причем подгруппа K находится как стационарная подгруппа некоторой точки $x_0 \in \mathscr{X}$.

Совокупность группы G и фактор-пространства $\mathscr{X} = G/K$ представляет собой простейший пример главного расслоенного пространства с базой $\mathscr{X}$, канонической проекцией π: $g \longmapsto gK$ и структурной группой K.

В случае, если подгруппа K инвариантна в G, на множестве G/K определяется групповая структура, превращающая его в фактор-группу, являющуюся гомоморфным образом G при канонической проекции π: $G \to G/K$. Задача расширения группы K, т. е. восстановления группы G по инвариантной подгруппе K и фактор-группе $H = G/K$, имеет множество решений, из которых одно решение выделяется при задании кроме групп K и H еще системы факторов $(h, h')_K \in K$ и автоморфизмов $k \longmapsto k^h$ группы K. Если $(h, h')_K = 1$ для всех $h, h' \in H$, то G называется полупрямым произведением групп H и K, $G = H \otimes K$.

Индуцированное представление $\Delta(K) \uparrow G$ группы G специальным образом конструируется из представления Δ подгруппы $K \subset G$ и фактор-пространства G/K. Теория характеров позволяет легко доказать простейшие свойства индуцированных представлений конечных групп, демонстрирующие естественность процесса индуцирования и связь его с противоположным процессом ограничения $\Gamma(G) \downarrow K$ представления группы G на подгруппу K. Более совершенная теория, пригодная для некомпактных групп, излагается в главе 2.

§ 1.1. Множества и отображения

Понятия множества и отображения множеств φ: $A \to B$ по существу лежат в основе любых математических построений, а следовательно, и любых построений в теоретической физике. Отображения, сохраняющие математические структуры, введенные на множествах, позволяют сопоставить между собой различные пространства, найти среди них изоморфные (тождественные в смысле той или иной структуры) или *согласованные* в более слабом смысле *), как например гомоморфные друг другу группы или группа и фактор-пространство (см. §§ 1.4 и 1.3). Кроме того, и сами *математические структуры* вводятся на множествах с помощью отображений (например, групповая структура вводится с помощью отображений, задающих групповые операции). Наконец, множество всех отображений φ: $A \to B$ представляет собой новое множество, отличное по своим свойствам от A и B, — *функциональное пространство*. Таким образом, отображения позволяют строить множества с нужными свойствами или структурами. Всевозможные отображения, используемые в теоретической физике, играют аналогичную роль. Цель этого параграфа состоит в том, чтобы кратко изложить терминологию, используемую для характеризации отображений.

*) Глубокое осмысление такого рода отношений между множествами, наделенными математическими структурами, привело к понятию *категории*, *морфизмов* и *функторов*, которые в современной математике все более выступают на первый план. Можно сказать, что теперь в основе любой математической теории вместо понятия множества лежит понятие категории. Мы, однако, будем придерживаться более старомодного способа изложения, что пока оправдано в прикладной математике.

1. Типы отображений. Говорят, что задано *отображение* множества A в множество B, и пишут φ: $A \to B$ или $A \xrightarrow{\varphi} B$, если каждому элементу $a \in A$ сопоставляется единственный элемент $b = \varphi(a) \in B$. Для самих этих элементов используется обозначение φ: $a \longmapsto b$ или $a \overset{\varphi}{\longmapsto} b$. Иногда такое сопоставление определено не для любого $a \in A$, а лишь для элементов некоторого подмножества $a \in D_\varphi \subset A$. Конечно, в этом случае можно было бы считать φ отображением множества D_φ в B. Однако по некоторым соображениям иногда удобно рассматривать φ как отображение всего множества A. Тогда подмножество D_φ называется *областью определения* отображения φ. (С одним из возникающих при этом удобств мы встретимся при определении операции композиции отображений.) Впрочем, в большинстве случаев неявно предполагается, что $D_\varphi = A$. В противном случае делается оговорка. Таким образом, некоторая нечеткость терминологии не приводит к недоразумениям.

Множество $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(A) = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$ называется *множеством значений* отображения φ или *образом* A при отображении φ. Разумеется, это всегда некоторое подмножество в B, т. е. $\varphi(A) \subset B$. В частности, может оказаться, что $\varphi(A) = B$. Тогда говорят, что φ является *отображением A на B*. Таким образом, выражение «отображение A на B» означает, что $\varphi(A) = B$, а «отображение A в B» означает лишь, что $\varphi(A) \subset B$. Иногда «отображение на» называют *сюръекцией*.

По определению отображения каждому элементу $a \in A$ сопоставляется единственный элемент $\varphi(a) \in B$. Однако различным элементам в A, вообще говоря, может сопоставляться один и тот же элемент в B. Если же этого не происходит, т. е. если из $\varphi(a) = \varphi(a')$ следует $a = a'$, то говорят, что отображение является *вложением* или *инъекцией*.

Наконец, если отображение определено на всем A и является одновременно сюръекцией и инъекцией, то говорят о *биекции* или *взаимно-однозначном отображении* A на B. Если существует биекция A на B, то с точки зрения теории множеств A и B ничем не отличаются. Разумеется, если кроме теоретико-множественной структуры на тех же множествах рассматриваются другие структуры, то по отношению к этим структурам множества могут иметь существенные различия.

2. Композиция и обращение. Пусть заданы отображения φ: $A \to B$ и ψ: $B \to C$. Тогда можно образовать новое отображение χ: $A \to C$, положив $\chi(a) = \psi(\varphi(a))$. Оно называется *компо-*

зицией исходных отображений и обозначается $\chi = \psi \cdot \varphi$ или $\chi = \psi\varphi$. Таким образом, композиция — это последовательное применение двух отображений.

Если не требовать, чтобы область определения отображения φ: $A \to B$ совпадала со всем A, то композиция определена для любых отображений. Действительно, пусть даны отображения φ_1: $A_1 \to B_1$ и φ_2: $A_2 \to B_2$. Положим для любого $a \in A$ $(\varphi_2 \cdot \varphi_1)(a) = \varphi_2(\varphi_1(a))$ и определим тем самым отображение $\varphi_2 \cdot \varphi_1 : A_1 \to B_2$. Область определения этого отображения состоит из тех элементов $a \in A$, для которых правая часть написанного равенства имеет смысл. Таким образом, композиция определена для любых двух отображений. В худшем случае область определения получившегося отображения оказывается пустой.

Ясно, что биективное отображение φ: $A \to B$ можно обратить, т. е. существует такое отображение φ^{-1}: $B \to A$, что композиция $\varphi^{-1} \cdot \varphi$ есть *тождественное отображение* множества A на себя: $\varphi^{-1} \cdot \varphi = \mathrm{id}_A$, id_A: $a \mapsto a$. Это определение *обратного отображения* непосредственно распространяется и на любое вложение. Однако удобно изменить определение таким образом, чтобы оно было применимо к любому отображению, даже не являющемуся вложением.

Для этого обозначим через $\varphi^{-1}(b)$, $b \in B$, целое подмножество элементов из A, именно подмножество элементов, переходящих в b под действием отображения φ. Обратим внимание на то, что теперь φ^{-1} отображает B не в A, а в множество всех подмножеств множества A, которое мы обозначим через $\mathscr{P}(A)$. Итак, если φ: $A \to B$, то *обратное отображение* φ^{-1}: $B \to \mathscr{P}(A)$ определено формулой

$$\varphi^{-1}(b) = \{a \in A \mid \varphi(a) = b\}.$$

Обращение, которое мы первоначально определили в случае вложения, не является частным случаем последнего общего определения, но естественным образом согласовано с ним. Действительно, пусть e: $\mathscr{P}(A) \to A$ определено на одноэлементных подмножествах, причем e: $\{a\} \mapsto a$. Тогда, если φ^{-1}: $B \to \mathscr{P}(A)$ — обращение вложения φ: $A \to B$, то $\varphi^{-1}(B)$ содержит лишь одноэлементные подмножества множества A и композиция $e \cdot \varphi^{-1}$: $B \to A$ является обращением в первоначальном смысле.

Если φ: $A \to B$ — вложение, то обращение его в смысле φ^{-1}: $B \to A$ употребляется по меньшей мере так же часто, как и обращение в смысле φ^{-1}: $B \to \mathscr{P}(A)$. В частности, если говорится, что отображение φ: $A \to B$ *обратимо*, то имеется в виду, очевидно, что существует φ^{-1}: $B \to A$, так что утверждение об обратимости φ означает просто, что φ — вложение. Можно было бы, конечно, не допускать таких вольностей в терминологии, однако при этом пришлось бы нарушить исторически сложившиеся прочные традиции, что представляется неоправданным.

§ 1.2. Отношения упорядочения и эквивалентности

Одним из инструментов, используемых для введения различных математических структур, является бинарное отношение Наиболее часто встречаются отношения частичной упорядоченности и эквивалентности. Примерами частичной упорядоченности в физических приложениях являются причинная упорядоченность в нерелятивистской и релятивистской физике (они существенно различны). Важным является упорядочение всех подмножеств некоторого множества по включению. Оно позволяет распространить понятия «больше — меньше» на самые различные по своему характеру объекты, в том числе на сами бинарные отношения.

Отношение эквивалентности в математике, да и в любой области науки, встречается повсеместно, потому что приводит к разбиению множества на непересекающиеся подмножества, т. е. к *классификации* объектов, входящих в него. Множество, на котором введено отношение эквивалентности, представляет собой простейший пример расслоенного пространства. При этом базой расслоения служит фактор-множество, т. е. множество всех классов эквивалентных друг другу элементов. Понятие расслоенного пространства в последние годы начинает использоваться в физике, и на протяжении этой книги мы несколько раз будем упоминать о расслоении, вводя на нем различные структуры.

1. Бинарные отношения. Задать на множестве A *бинарное отношение* R — значит перечислить некоторое множество пар a, $a' \in A$ элементов этого множества. При этом говорится, что элемент a находится в отношении R к элементу a' (записывается aRa'). Важное значение имеет наличие или отсутствие у данного отношения того или иного свойства из числа следующих:

1) *Рефлексивность*: aRa для всякого $a \in A$.
2) *Симметричность*: из aRa' следует $a'Ra$.
3) *Антисимметричность*: из aRa' и $a'Ra$ следует $a = a'$.
4) *Транзитивность*: из aRa' и $a'Ra''$ следует aRa''.

Задача 1. Выразите каждое из этих свойств словами. Приведите примеры отношений (не обязательно из области математики). Выясните, какими из перечисленных свойств эти отношения обладают.

Задача 2. Можно определить операции умножения и обращения для отношений, а также единичное отношение:

$a(RR')a' \Leftrightarrow aRa''$ и $a''R'a'$ для некоторого $a'' \in A$;
$aR^{-1}a' \Leftrightarrow a'Ra$;
$aIa' \Leftrightarrow a = a'$.

1) Покажите, что если R обладает одним из перечисленных выше свойств, то R^{-1} также обладает им.

2) Покажите, что для любого отношения R имеет место $RI = IR = R$.

2. Частичная упорядоченность. Отношение $\leqslant$ на множестве действительных чисел обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности. Всякое отношение, обладающее этими свойствами, называется отношением *частичной упорядоченности.* Таким образом, отношение $\leqslant$ на множестве чисел является отношением частичной упорядоченности. В общем случае отношение частичной упорядоченности обычно обозначается знаком $<$, хотя в конкретных случаях могут употребляться другие обозначения. Если для любой пары элементов $a, a' \in A$ имеет место либо $a < a'$, либо $a' < a$ (любая пара упорядочена), то отношение $<$ называется отношением *линейной упорядоченности.* Отношение $\leqslant$ в нашем примере является отношением линейной упорядоченности.

Примеров частичной упорядоченности много, некоторые из них будут рассмотрены в дальнейшем. Одним из важнейших является упорядочение множеств по включению, обозначаемое знаком $\subset$.

Задача 3. Показать, что отношение $\subset$ на множестве $\mathscr{P}(A)$ является отношением частичной упорядоченности. Привести пример, показывающий, что оно не является, вообще говоря, линейной упорядоченностью.

Задача 4. Покажите, что множество всех отношений на множестве A частично упорядочивается следующим отношением: $R \subset R'$, если из aRa' следует $aR'a'$.

Множество всевозможных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, называется *произведением множеств* A и B и обозначается $A \times B$. В частности, $A \times A = A^2$ — это множество всех (упорядоченных) пар (a, a'), где $a, a' \in A$. *Бинарное отношение* R на множестве A — это некоторое подмножество множества A^2, т. е. $R \subset A^2$. При этом мы говорим, что элемент $a \in A$ находится в отношении R к элементу $a' \in A$, и пишем aRa', если $(a, a') \in R$.

В этом формализме частичное упорядочение $\subset$ на множестве отношений (см. задачу 4) совпадает с упорядочением по включению в $\mathscr{P}(A^2)$.

Задача 5. Сформулируйте свойства отношений (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) в терминах операций, введенных в задаче 2, и теоретико-множественных операций над отношениями, рассматриваемыми как подмножества в A^2.

Решение. Рефлексивность: $I \subset R$; симметричность: $R^{-1} \subset R$ (откуда следует $R^{-1} = R$); антисимметричность: $R \cap R^{-1} \subset I$; транзитивность: $R^2 \subset R$.

На понятии частичной упорядоченности основано доказательство по принципу трансфинитной индукции, который применим

для любого *вполне упорядоченного множества*, т. е. такого линейно-упорядоченного множества, каждое непустое подмножество которого имеет наименьший элемент (см., например, [23]).

3. Эквивалентиость и разбиение множества. Еще более важную роль, чем упорядочение, играет отношение эквивалентности. *Отношением эквивалентности* называется любое рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение. Примерами являются отношения равенства и пропорциональности на множестве чисел, отношение «произошли в один и тот же момент времени» для двух событий и т. д.

Отношение эквивалентности обычно обозначается знаком $\sim$ (хотя в конкретных случаях могут употребляться и другие знаки, например $=$, $\equiv$, $\approx$ и др.). Пусть на множестве A введено отношение эквивалентности $\sim$. Определим отображение $\pi\colon A \to \mathscr{P}(A)$, положив $\pi(a) = \{a' \in A \mid a' \sim a\}$, т. е. сопоставив каждому элементу множество элементов, эквивалентных ему (его *класс эквивалентности*).

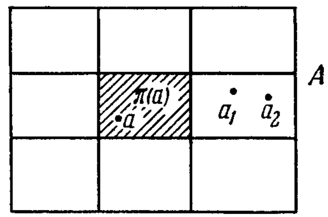


Рис. 1. Разбиение множества на классы эквивалентности. Элементы a_1 и a_2 эквиваленты.

В силу рефлексивности отношения эквивалентности сам элемент a входит в класс $\pi(a)$. Далее, если мы возьмем любой элемент $a' \in \pi(a)$, то $\pi(a') = \pi(a)$ (в силу транзитивности и симметричности), т. е. любой элемент из некоторого класса эквивалентности может служить представителем этого класса и переходит в этот класс при отображении π. Отсюда уже нетрудно заключить, что *два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются* (т. е. не имеют общих элементов). Очевидно также, что любой элемент $a \in A$ входит в некоторый класс (именно в $\pi(a)$). Таким образом, классы эквивалентности по отношению $\sim$ осуществляют *разбиение* множества A (они не пересекаются и в сумме исчерпывают все A).

Задача 6. Доказать обратное утверждение: любое разбиение множества A определяет на нем отношение эквивалентности, для которого подмножества, осуществляющие разбиение, являются классами эквивалентности.

Множество классов эквивалентности называется *фактор-множеством* по данному отношению эквивалентности и обозначается $A/\sim$. Очевидно, это множество является образом A при отображении π, т. е. $\pi(A) = A/\sim$. Само отображение $\pi\colon A \to A/\sim$ называется *канонической* или *естественной проекцией* множества A на фактор-множество $A/\sim$.

Задача 7. Доказать, что всякое отображение $\varphi\colon A \to B$ определяет на множестве A отношение эквивалентности $\sim$, такое, что обратное отображение $\varphi^{-1}\colon B \to \mathscr{P}(A)$ есть биекция B

на $A/\sim$. Таким образом, диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ B \arrow[r, "\varphi^{-1}"'] & A/\sim \end{tikzcd}$$

оказывается *коммутативной* (т. е. отображение $A \to A/\sim$ по любой из цепочек, фигурирующих в диаграмме, дает один и тот же результат).

Указание. $a \sim a'$, если $\varphi(a) = \varphi(a')$.

4*. Расслоенное пространство. Конструкция, описанная в задаче 7, представляет собой простейший тип так называемого *расслоенного пространства*, причем A есть собственно расслоенное пространство, B — его *база*. В этом контексте можно отождествить множества B и $A/\sim$ и отображения φ и π. Тогда можно считать, что π отображает (проектирует) расслоение A на базу B. Это отображение называется *канонической проекцией*, а $\pi^{-1}(b)$ — *слоем* над точкой b базы. Терминология, используемая в теории расслоенного пространства, тесно связана с наглядным изображением его в духе рис. 2.

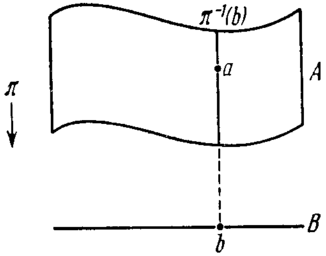


Рис. 2. Расслоенное пространство A с базой B и канонической проекцией π.

Многочисленные разновидности расслоенных пространств отличаются от этой простой конструкции тем, что на расслоении A и базе B вводятся различные, подчас довольно сложные структуры. Некоторые из них мы рассмотрим, когда будем изучать факторизацию группы. Понятие расслоенного пространства оказалось настолько гибким и богатым, что стало основным инструментом в дифференциальной геометрии и некоторых смежных математических дисциплинах, а в последние годы активно проникает и в физику. Обычная схема его использования состоит в том, что для изучения пространства B (с существующими на нем структурами) строится подходящее расслоение A, для которого B служит базой, и изучается весь комплекс (A, B, π).

§ 1.3. Однородное пространство как разбиение группы

Если физическая система обладает группой симметрии G, то эта группа действует как группа преобразований некоторого пространства $\mathscr{X}$, описывающего состояния системы. Общий случай такой ситуации легко сводится к случаю транзитивной группы, когда любые две точки $x, x' \in \mathscr{X}$ могут быть переведены друг в друга некоторым преобразованием из группы. В этом случае $\mathscr{X}$ называется однородным пространством.

Оказывается, что для каждого такого пространства моделью является фактор пространство G/K группы G по некоторой подгруппе $K \subset G$. Другими словами, однородное пространство можно реализовать как множество смежных классов gK, $g \in G$, на котором естественным образом определено действие группы g: $g'K \mapsto gg'K$. Подгруппа K для построения такой модели находится как стационарная подгруппа произвольной точки $x_0 \in \mathscr{X}$, т. е. как группа преобразований, не меняющих данное состояние системы. На этой конструкции основаны те приложения теории индуцированных представлений в квантовой теории, которые будут рассмотрены в последних главах.

1. Группы и их морфизмы. *Группа* (понятие, которое должно быть хорошо знакомо читателю) — это множество G, на котором введена бинарная операция умножения $(g_1, g_2) \in G^2 \mapsto g_1 g_2 \in G$, унарная операция обращения $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ и нульарная операция выбора одного элемента — единицы группы, которую обозначают через e или просто 1. Сверх того, чтобы множество G с этими операциями было группой, требуется выполнение так называемых групповых аксиом:

1) Ассоциативность умножения: $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$ для любых $g_1, g_2, g_3 \in G$.

2) Свойства единицы: $eg = ge = g$ для всякого $g \in G$.

3) Свойства обратного элемента: $g^{-1}g = gg^{-1} = e$ для всякого $g \in G$.

Важность понятия группы связана прежде всего с тем, что *преобразования*, т. е. биективные отображения множества на себя, образуют группу. При этом произведением двух преобразований называется их композиция, единицей является тождественное преобразование, оставляющее на месте каждый элемент множества, а обратным элементом служит обратное преобразование. Например, всевозможные перестановки множества из n элементов образуют группу S_n (*симметричная группа* порядка n). Эта группа содержит $n!$ элементов (перестановок) и играет важную роль во многих областях физики, в том числе в квантовой механике.

Задача 1. Показать, что множество всевозможных биективных отображений (преобразований) множества A на себя образует группу.

Говорят, что подмножество K группы G является *подгруппой*, если оно замкнуто относительно групповой операции, т. е. если произведение двух элементов из K опять принадлежит K. Говорят, что подгруппа K *инвариантна* в G или образует *нормальный делитель* группы G, если для любых $g \in G$, $k \in K$ элемент gkg^{-1} опять принадлежит подгруппе K. Это свойство можно записать так: $gKg^{-1} = K$.

Практически все примеры групп строятся следующим образом: берется некоторое множество A и группа всевозможных преобразований его, а затем из этой группы выделяется некоторая подгруппа. Часто подгруппа выделяется тем, что сохраняет некоторую математическую структуру, заданную на множестве A. Например, рассмотрим множество $\mathscr{L}$ всевозможных наборов из n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Преобразования этого множества образуют группу. Зададим на $\mathscr{L}$ структуру линейного пространства. Преобразования, сохраняющие эту структуру, образуют подгруппу линейных преобразований $L(n)$. Введем на $\mathscr{L}$ скалярное произведение. Линейные преобразования, сохраняющие скалярное произведение, образуют подгруппу $O(n) \subset L(n)$ ортогональных преобразований.

Пусть даны две группы G и G'. Отображение φ: $G \to G'$ называется *гомоморфизмом*, если оно сохраняет групповые операции, т. е. если для любых $g_1, g_2, g \in G$

$$\varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2);$$

$$\varphi(g^{-1}) = [\varphi(g)]^{-1}; \quad \varphi(e) = e'.$$

Задача 2. Покажите, что множество $K = \varphi^{-1}(e')$ образует инвариантную подгруппу в G.

Подгруппа $K = \varphi^{-1}(e')$ называется *ядром гомоморфизма* φ и обозначается $\operatorname{Ker}\varphi$.

Если гомоморфизм φ: $G \to G'$ является биективным отображением, то он называется *изоморфизмом*, а группы — изоморфными друг другу. При этом ядро гомоморфизма состоит из единственного элемента — групповой единицы.

Задача 3. Покажите, что изоморфизм групп является отношением эквивалентности.

Все группы распадаются на классы изоморфных друг другу групп, и во многих приложениях изоморфные группы отличаются друг от друга несущественно, так что это разбиение является основным при классификации групп.

Нам понадобится еще понятие автоморфизма. *Автоморфизм* — это изоморфное отображение группы на себя. Простейшие примеры автоморфизмов — это так называемые *внутренние автоморфизмы*. Зафиксируем некоторый элемент g группы G и с его помощью сопоставим каждому $g' \in G$ другой элемент той же группы $gg'g^{-1}$. Получаем отображение φ_g: $g' \mapsto gg'g^{-1}$, называемое внутренним автоморфизмом группы.

Композиция двух автоморфизмов — опять автоморфизм. Легко показать, что все автоморфизмы данной группы G образуют группу $\operatorname{Aut} G$ с композицией в качестве групповой операции. Роль единицы играет тождественный автоморфизм id_G: $g \mapsto g$. Роль обратного по отношению к данному автоморфизму φ играет обратное преобразование φ^{-1}: $G \to G$, которое тоже является автоморфизмом.

Задача 4. Покажите, что все внутренние автоморфизмы φ_g, $g \in G$, данной группы G образуют подгруппу в группе $\operatorname{Aut} G$.

Покажите, что отображение φ: $g \mapsto \varphi_g$ есть гомоморфизм группы G на группу внутренних автоморфизмов группы G

2. Фактор-пространство. Пусть дана группа G и ее подгруппа K. Определим на G отношение эквивалентности, положив $g \sim g'$, если существует такой $k \in K$, что $g' = gk$.

Задача 5. Показать, что определенное таким образом отношение действительно является отношением эквивалентности, классы эквивалентности имеют вид $gK = \{gk \mid k \in K\}$, а каноническая проекция π: $g \mapsto gK$.

Классы gK, $g \in G$, называются *правыми классами смежности* по подгруппе K (или правыми *смежными классами*), а множество классов обозначается через G/K и называется *фактор-пространством* группы G по подгруппе K. Один из классов совпадает, очевидно, с самой подгруппой K.

Возьмем некоторый смежный класс $g'K \in G/K$ и элемент группы $g \in G$. Тогда немедленно определится новый смежный класс $(gg')K$. Таким образом, элемент группы g определяет некоторое отображение L_g: $g'K \mapsto gg'K$ фактор-пространства в себя. Групповые аксиомы позволяют легко доказать, что это отображение является биекцией. Далее, легко видеть, что произведению элементов группы gg' соответствует композиция соответствующих преобразований фактор-пространства: $L_{gg'} = L_g L_{g'}$, т. е. отображение L группы G в группу преобразований пространства G/K является гомоморфизмом. Говорят, что группа G действует на G/K как группа *левых операторов* или просто: *действует слева*.

Задача 6. Покажите, что группа G действует на G/K транзитивно, т. е. для любых двух смежных классов g_1K, $g_2K \in G/K$ найдется такой элемент $g \in G$, что оператор L_g переводит g_1K в g_2K.

Рассмотрим в группе G подмножество H элементов, которые обладают тем свойством, что соответствующие операторы L_h, $h \in H$, оставляют все точки пространства G/K на месте, т. е. $H = \operatorname{Ker} L$. Легко видеть, что H целиком принадлежит K, т. е. образуется цепочка подгрупп $H \subset K \subset G$. Действительно, любой элемент $h \in H$ должен сохранять смежный класс K, т. е. $L_h K = K$. Если расшифровать это равенство, получится $hK = K$, откуда $h \in K$. Далее, рассмотрим действие оператора $L_{g^{-1}hg}$ на смежный класс $g'K$ (с любыми $g, g' \in G$, $h \in H$). Имеем $(g^{-1}hg)(g'K) = g^{-1} \cdot h \cdot gg'K$. По определению группы H имеем $h \cdot (gg'K) = gg'K$, так что $(g^{-1}hg)(g'K) = g'K$. Это значит, что элемент $g^{-1}hg$ принадлежит H, т. е. подгруппа H инвариантна в G.

Задача 7. Покажите, что если J — инвариантная подгруппа в G, содержащаяся в K, так что $J \subset K \subset G$, то $J \subset H$, т. е. H — максимальная (относительно упорядочения по включению) инвариантная подгруппа в G, содержащаяся в K.

Из этого результата следует, что $\operatorname{Ker} L = \{1\}$ (т. е. отображение группы G в группу операторов на G/K является изоморфизмом) в том и только в том случае, если K не содержит собственных (т. е. отличных от $\{1\}$) инвариантных подгрупп группы G.

3. Однородное пространство. Мы видели, что группа G действует на пространстве G/K транзитивно. Оказывается, что верно и обратное: всякое пространство, на котором группа G действует транзитивно, сводится к фактор-пространству этой группы.

Если задан гомоморфизм группы G в группу преобразований некоторого пространства $\mathscr{X}$, то говорят, что группа G действует на $\mathscr{X}$ как группа левых операторов, а само $\mathscr{X}$ называют *G-пространством.* Вместо того чтобы обозначать оператор через L_g, часто, допуская некоторую вольность, обозначают его той же буквой g, так что g обозначает и элемент (абстрактной) группы G, и реализацию этого элемента преобразованием $g\colon x \longmapsto gx$ пространства $\mathscr{X}$. Несмотря на то, что реализация группы преобразованиями может не быть изоморфизмом, недоразумений не возникает, так как из контекста всегда ясно, рассматривается ли g как элемент группы или как преобразование.

Предположим, что группа G действует на $\mathscr{X}$ *транзитивно*, т. е. для любых $x, x' \in \mathscr{X}$ найдется такой $g \in G$, что $gx = x'$. Тогда $\mathscr{X}$ называется *однородным пространством* группы G (действие группы устанавливает полное равноправие всех точек пространства).

Задача 8. Показать, что на произвольном G-пространстве $\mathscr{X}$ отношение: x переводится в x' некоторым $g \in G$, является отношением эквивалентности. Соответствующие классы эквивалентности называются *областями транзитивности* или *орбитами* группы G на $\mathscr{X}$.

Результат задачи означает, что произвольное G-пространство разбивается на подпространства (области транзитивности), каждое из которых является однородным. Таким образом, достаточно изучить лишь однородное пространство. Мы видели выше, что фактор-пространство G/K является однородным пространством. Оказывается, что этим однородные пространства исчерпываются. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого пространства $\mathscr{X}$, однородного относительно действия группы G, существует такая подгруппа $K \subset G$, что $\mathscr{X}$ изоморфно G/K.*

Под *изоморфизмом однородных пространств* понимается такое биективное отображение их друг на друга, которое сохраняет действие операторов. Таким образом, изоморфизм $\mathscr{X}$ и G/K означает, что существует биекция $\varphi\colon \mathscr{X} \to G/K$, такая, что для любых $x \in \mathscr{X}$, $g \in G$ имеет место

$$\varphi(gx) = g\varphi(x).$$

Доказательство. Выберем произвольно точку $x_0 \in \mathscr{X}$ и определим отображение $\varphi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{P}(G)$ формулой $\varphi(x) = \{g \in G \mid gx_0 = x\}$. Множество $K = \varphi(x_0)$ элементов группы G обладает тем свойством, что для каждого $k \in K$ имеет место $kx_0 = x_0$. Нетрудно видеть, что это множество является подгруппой в G. Она носит название *стационарной подгруппы* или *стабилизатора* точки x_0. Докажем теперь, что φ есть биекция $\mathscr{X}$ на G/K.

Для любого $x \in \mathscr{X}$ множество $\varphi(x)$ элементов группы G есть правый класс смежности по подгруппе K. Действительно, пусть $g \in \varphi(x)$, т. е. $gx_0 = x$. Тогда для любого $g' \in \varphi(x)$ имеем $g^{-1}g'x_0 = g^{-1}x = x_0$, т. е. $g^{-1}g' \in K$ или $g' \in gK$. Таким образом, заключаем, что $\varphi(x) \subset gK$. Обратно, пусть $g \in \varphi(x)$ и $g' \in gK$, т. е. $g' = gk$, $k \in K$. Тогда $g'x_0 = gkx_0 = gx_0 = x$. Следовательно, $g' \in \varphi(x)$. Поскольку элемент $g' \in gK$ был произволен, заключаем, что $gK \subset \varphi(x)$. Сравнивая прямое и обратное включения, получаем $\varphi(x) = gK$. Таким образом, φ есть отображение $\mathscr{X}$ в G/K.

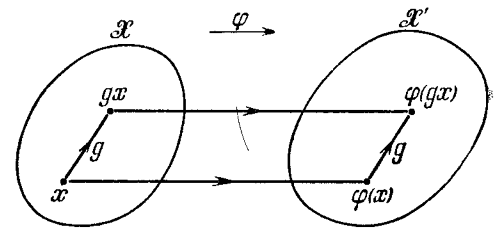


Рис. 3. Изоморфизм однородных пространств.

Это отображение является вложением, так как из $\varphi(x) = \varphi(x') = gK$ следует $x' = gx_0 = g(g^{-1}x) = x$. Оно является «отображением на», так как для любого $gK \in G/K$ найдется такое $x \in \mathscr{X}$, а именно $x = gx_0$, что $\varphi(x) = gK$. Мы показали, что отображение $\varphi\colon \mathscr{X} \to G/K$ определено на всем $\mathscr{X}$ и является биекцией (взаимно-однозначным отображением). Теперь простой проверкой можно убедиться, что это отображение сохраняет действие операторов:

$$g\varphi(x) = \{gg' \in G \mid g'x_0 = x\} = \{g'' \in G \mid g''x_0 = gx\} = \varphi(gx),$$

что завершает доказательство теоремы. Для примера мы доказали эту теорему со всеми подробностями. Обычно же детали доказательства будут предоставляться читателю.

По аналогии с фактор-пространством G/K можно построить пространство $K \backslash G$ левых классов смежности Kg, определяемое факторизацией группы G по отношению эквивалентности: $g \sim g'$, если $g' = kg$ для некоторого $k \in K$. Группа G действует на этом пространстве как группа *правых операторов* R_g: $Kg' \longmapsto Kg'g$ (*действует справа*). Отображение R группы G в группу правых операторов является антигомоморфизмом, так как меняет порядок сомножителей в произведении: $R_gR_{g'} = R_{g'g}$. Однако если определить отображение иначе: L_g: $Kg' \longmapsto Kg'g^{-1}$, то получится обычный гомоморфизм и пространство $K \backslash G$ оказывается однородным пространством, на котором группа действует слева.

Задача 9. Показать, что однородное пространство $K \backslash G$ изоморфно пространству G/K.

Указание. Выбрать в качестве «центра» однородного пространства точку $x_0 = K \in K \backslash G$ и построить отображение $K \backslash G \to G/K$ так, как это сделано в доказательстве теоремы 1.

Решение задачи показывает, что отображение $Kg \longmapsto g^{-1}K$ осуществляет изоморфизм фактор-пространств $K \backslash G$ и G/K, рассматриваемых как однородные пространства. Ввиду изоморфизма эти пространства часто обозначают одинаково символом G/K. Мы будем пользоваться преимущественно первой из двух реализаций этого пространства: $gK \in G/K$.

Задача 10. Выбор «центра» $x_0 \in \mathscr{X}$ определяет изоморфизм $\mathscr{X} \to G/K$. Очевидно, другой выбор $x_1 \in \mathscr{X}$ приведет к изоморфизму $\mathscr{X} \to G/K_1$. Найдите связь между K и K_1. Постройте изоморфизм $G/K \to G/K_1$.

Задача 11. Рассмотрите пространство, состоящее из трех точек, и группу S_3 всевозможных перестановок этих точек в качестве группы преобразований. С помощью процесса, описанного при доказательстве теоремы, постройте реализацию этого пространства как некоторого фактор-пространства группы S_3.

4. Представители и факторы. Изоморфизм φ: $\mathscr{X} \to G/K$ может служить для параметризации фактор-пространства G/K с помощью известного однородного пространства $\mathscr{X}$ или наоборот. Упростим обозначения, отказавшись от явного обозначения изоморфизма φ и просто отождествляя пространства $\mathscr{X}$ и G/K. Таким образом, буква x в зависимости от контекста может обозначать либо точку однородного пространства, либо соответствующий ей смежный класс.

Выберем в каждом классе $x \in G/K$ по одному элементу. Обозначим этот элемент через x_G и назовем *представителем* смежного класса x. Выбор представителей производится совершенно произвольно, однако удобно, один раз произведя этот выбор, зафиксировать его. Таким образом, под x_G, $x \in \mathscr{X}$, мы будем понимать раз навсегда фиксированный набор представителей смежных классов. В большинстве случаев удобно принять $(x_0)_G = 1$. Сам смежный класс выразится через своего представителя как $x = x_G K$. Если рассматривать представитель x_G как оператор, действующий в однородном пространстве $\mathscr{X}$, то он, очевидно, обладает свойством переводить центр однородного пространства в точку x, так что

$$x_G x_0 = x.$$

Это характеристическое свойство, которое можно было бы принять за определение элемента x_G.

Последнее, что нам потребуется, — это понятие факторов. Дело в том, что после фиксации представителей множество смежных классов находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством их представителей. Но на множестве смежных классов действует группа операторов g: $x \longmapsto gx$. С другой

стороны, представитель смежного класса можно просто умножить слева на g. Как связаны эти операции?

Задача 12. Доказать, что произведение gx_G отличается от представителя $(gx)_G$ класса gx лишь множителем из подгруппы K, т. е. $gx_G = (gx)_G k$, $k \in K$.

Этот элемент $k \in K$, зависящий от $g \in G$ и $x \in \mathscr{X}$, обозначим через $(g, x)_K$ и назовем *фактором*. Таким образом, фактор определяется из формулы

$$gx_G = (gx)_G (g, x)_K.$$

Система факторов $(g, x)_K$ зависит, конечно, от выбора представителей смежных классов. Но есть и общие свойства, справедливые в любом случае.

Задача 13. 1) Доказать, что $(1, x)_K = 1$ для всех $x \in \mathscr{X}$.

2) Пользуясь ассоциативностью умножения в группе G, доказать, что для любых $x \in \mathscr{X}$; $g_1, g_2 \in G$ имеет место формула

$$(g_1 g_2, x)_K = (g_1, g_2 x)_K (g_2, x)_K.$$

3) Доказать, что при любых $x \in \mathscr{X}$, $g \in G$

$$(g^{-1}, gx)_K = (g, x)_K^{-1}.$$

4) Предполагая, что $(x_0)_G = 1$, доказать, что при любых $x \in \mathscr{X}$, $k \in K$

$$(x_G, x_0)_K = 1; \quad (k, x_0)_K = k.$$

Выбор групповой единицы в качестве представителя класса $x_0 = K$ в большинстве случаев оказывается удобным. Мы всегда будем принимать

$$(x_0)_G = 1.$$

Задача 14. Показать, что отображение $g \longmapsto (x, k)$ группы G на множество $\mathscr{X} \times K$, определенное тем, что $g = x_G k$, взаимно-однозначно и является изоморфизмом групп, если определить групповые операции на $\mathscr{X} \times K$ следующим образом:

$$(x, k)(x', k') = (x_G k x', (x_G k, x')_K k');$$
$$(x, k)^{-1} = ((x_G k)^{-1} x_0, ((x_G k)^{-1}, x_0)_K);$$
$$1 = (x_0, 1).$$

Результат задачи показывает, что факторизацию группы по подгруппе можно использовать для параметризации группы. Эта возможность будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

5*. Главное расслоенное пространство. Группа и ее фактор-пространство — это пример расслоенного пространства, на котором введена еще одна структура — так называемая структурная группа. Рассмотрим группу G, ее подгруппу K, фактор-пространство $G/K = \mathscr{X}$ и каноническую проекцию π: $G \to \mathscr{X}$, которая в данном случае имеет вид $\pi(g) = gK$. Тогда тройка $(G, \mathscr{X}, \pi)$ представляет собой расслоенное пространство (G — расслоение, $\mathscr{X}$ — его база и π — каноническая проекция).

Сопоставим каждому элементу k подгруппы K правый сдвиг группы G по формуле R_k: $g \mapsto gk$. Очевидно, что при таком отображении слой $\pi^{-1}(x)$ над произвольной точкой $x \in \mathscr{X}$ переходит сам в себя. Кроме того, слой $\pi^{-1}(x) = gK$ находится во взаимно-однозначном соответствии с группой K.

Расслоение, которое обладает группой преобразований, переводящих каждый слой в себя, при дополнительном условии, что любой слой находится во взаимно-однозначном соответствии с этой группой, называется *главным расслоенным пространством*, а указанная группа — его *структурной группой*. Таким образом, совокупность $(G, \mathscr{X}, \pi, K)$ есть главное расслоенное пространство. В дифференциальной геометрии само расслоение, его база и структурная группа наделяются еще структурой дифференцируемого многообразия, т. е. точки соответствующих множеств характеризуются своими координатами. В случае, если G, K — группы Ли, это также имеет место.

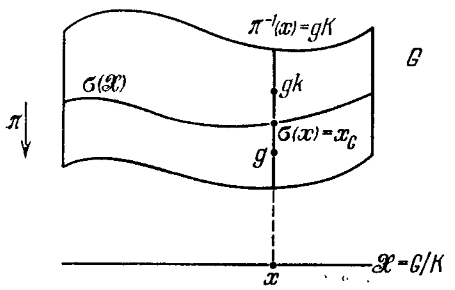


Рис. 4. Факторизация группы как главное расслоенное пространство.

Пусть дано расслоение $(G, \mathscr{X}, \pi)$. Отображение σ: $\mathscr{X} \to G$ называется *сечением* его, если композиция $\pi \cdot \sigma = \mathrm{id}_{\mathscr{X}}$ есть тождественное отображение базы $\mathscr{X}$ на себя. По существу это означает выбор по одной точке $\sigma(x)$ в каждом из слоев $\pi^{-1}(x)$. Нетрудно видеть, что в случае, если G — группа, а $\mathscr{X}$ — ее фактор-пространство, сечение — это некоторый выбор представителей смежных классов. Во введенных ранее обозначениях $\sigma(x) = x_G$. Все определенные понятия иллюстрируются рис. 4.

§ 1.4. Группа с нормальным делителем и полупрямое произведение

Для того чтобы на фактор-пространстве G/K можно было естественным образом ввести структуру группы, необходимо и достаточно, чтобы подгруппа K была инвариантной в G. Такая ситуация часто возникает в приложениях (примером ее является и группа Пуанкаре, в которой подгруппа сдвигов инвариантна). Она облегчает решение некоторых теоретико-групповых задач. Например, в § 3.1 будет показано, что в этом случае существует эффективный метод нахождения всех неприводимых представлений группы. Особенно простой структура группы оказывается в том случае, если в группе G имеется подгруппа H, изоморфная G/K. В этом случае G называется полупрямым произведением своих подгрупп: $G = H \otimes K$ (группа Пуанкаре

является полупрямым произведением группы Лоренца на группу сдвигов).

Изложенный в пунктах 2 и 3 формализм лежит в основе теории расширений групп. В этой книге он будет использован в дальнейшем лишь один раз, в п. 3.1.3. При первом чтении этот материал можно опустить.

1. Фактор-группа и гомоморфизм. Мы видели, что в случае любой подгруппы $K \subset G$ на фактор-множестве G/K возникает структура G-пространства, т. е. группа G действует на G/K как группа преобразований. Возникает вопрос, в каком случае на G/K можно ввести групповую структуру. Конечно, интерес представляет только такая групповая структура на G/K, которая естественным образом связана с групповой структурой на самой группе G. Потребуем поэтому, чтобы каноническая проекция π: $G \to G/K$ была гомоморфизмом, т. е. выполнялось

$$\pi(g_1)\pi(g_2) = \pi(g_1 g_2);$$
$$[\pi(g)]^{-1} = \pi(g^{-1}); \quad 1 = \pi(1).$$

Эти требования уже сами по себе определяют групповые операции на множестве $H = G/K$. Действительно, представив каждый элемент $h \in H$ в виде $h = \pi(g)$, мы с помощью предыдущих формул сможем перемножить любые два элемента, обратить любой элемент и выбрать единицу группы. Проверка показывает, что групповые аксиомы также при этом выполняются. Однако следует убедиться еще, что такое определение групповых операций корректно, т. е. не зависит от выбора элемента g в представлении $h = \pi(g)$.

Пусть, например, $h = \pi(g) = \pi(g')$. По определению канонической проекции $\pi(g) = gK$, $\pi(g') = g'K$. Поэтому $g' = gk^{-1}$, $k \in K$. Для того чтобы операция обращения $h \mapsto h^{-1}$ давала один и тот же результат при определении ее с помощью g и g', должно выполняться $\pi((g')^{-1}) = \pi(g^{-1})$, откуда получаем $gkg^{-1} \in K$, т. е. в силу произвольности $g \in G$ и $k \in K$ — не что иное, как условие инвариантности подгруппы K. Следовательно, для корректности определения групповых операций в H необходимо, чтобы подгруппа K была инвариантной. Легко убедиться, что это условие обеспечивает корректность определения не только операции обращения, но и группового умножения, т. е. является не только необходимым, но и достаточным. Получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы на фактор-множестве G/K существовала групповая структура, относительно которой каноническая проекция π: $G \to G/K$ является гомоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы подгруппа K была инвариантной. При этом ядро гомоморфизма* $\mathrm{Ker}\,\pi = K$, *а групповые операции в G/K вполне определяются с помощью π через групповые операции на G.*

Множество G/K с определенной таким образом групповой структурой называется *фактор-группой* группы G по подгруппе K. Явный вид групповых операций в фактор-группе дается следующими формулами:

$$(g_1K)(g_2K) = (g_1g_2)K;$$
$$(gK)^{-1} = g^{-1}K; \quad 1 = K.$$

Оказывается, что гомоморфизм группы на фактор-группу представляет собой самый общий случай гомоморфизма групп. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если φ: $G \to H$ — гомоморфизм групп с ядром* $\operatorname{Ker}\varphi = K$, *то* φ^{-1}: $H \to G/K$ — *изоморфизм и диаграмма*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ H \arrow[r, "\varphi^{-1}"'] & G/K \end{tikzcd}$$

коммутативна, так что при отождествлении H и G/K отображение φ сводится к канонической проекции π.

Доказательство основано на том, что $(G/\sim) = G/K$, где обозначено $g_1 \sim g_2$, если $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Детали доказательства читатель сможет восстановить сам.

Пример. Пусть $\mathscr{L}$ — *линейное пространство*, т. е. множество, на котором заданы операции сложения и умножения на число (скажем, комплексное число; тогда говорят, что $\mathscr{L}$ — линейное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$). Относительно операции сложения $\mathscr{L}$ образует коммутативную группу. Рассмотрим *линейное подпространство* $\mathscr{L}_1$, т. е. подмножество в $\mathscr{L}$, которое является линейным пространством относительно тех же операций. Очевидно, что относительно операции сложения $\mathscr{L}_1$ является подгруппой, причем из-за коммутативности эта подгруппа инвариантна. Поэтому, факторизовав $\mathscr{L}$ по $\mathscr{L}_1$, мы опять получим группу по сложению. Легко показать, что на $\mathscr{L}/\mathscr{L}_1$ определена и операция умножения на число, причем обе операции обладают обычными свойствами. Следовательно, фактор-пространство $\mathscr{L}/\mathscr{L}_1$ является линейным пространством. Элементами его являются классы вида $x + \mathscr{L}_1$, где $x \in \mathscr{L}$, линейные операции на множестве классов имеют вид

$$(x + \mathscr{L}_1) + (y + \mathscr{L}_1) = (x + y) + \mathscr{L}_1;$$
$$\lambda(x + \mathscr{L}_1) = \lambda x + \mathscr{L}_1 \qquad (x, y \in \mathscr{L}, \lambda \in \mathbb{C}).$$

Таким образом определяется понятие *линейного фактор-пространства.*

2. Факторы и автоморфизмы. В случае, когда подгруппа K инвариантна в G, мы можем, разумеется, пользоваться тем же аппаратом представителей смежных классов и соответствующих

им факторов, который был введен для произвольной подгруппы. Но тот факт, что теперь фактор-множество G/K является группой, несколько меняет ситуацию и делает более удобным другой, хотя и очень близкий аппарат. К его описанию мы сейчас и перейдем.

Пусть K — инвариантная подгруппа (нормальный делитель) в группе G и $H = G/K$ — фактор-группа. Как и прежде, в каждом смежном классе $h = gK$ выберем произвольным образом и зафиксируем по одному элементу (представителю) h_G так, что смежный класс имеет вид $h = h_GK = Kh_G$ (в случае инвариантной подгруппы правые и левые смежные классы совпадают). При перемножении двух представителей $h_Gh'_G$ получается элемент из смежного класса hh'. Следовательно, этот элемент можно представить в виде $(hh')_Gk$, $k \in K$. Появляющийся таким образом элемент группы K обозначим через $(h, h')_K$ и назовем *фактором.* Таким образом, для любых $h, h' \in H$

$$h_Gh'_G = (hh')_G(h, h')_K.$$

Кроме системы факторов в вычислениях появляется еще некоторая *система автоморфизмов* группы K. Именно, каждому элементу $h \in H$ ставится в соответствие автоморфизм группы K, при котором произвольный элемент k этой группы переходит в элемент

$$k^h = h_G^{-1}kh_G \in K.$$

Обычно бывает удобно выбрать в качестве представителя единицы группы H единицу группы G

$$1_G = 1.$$

В этом случае легко получаем

$$(1, h)_K = (h, 1)_K = 1; \quad k^1 = k$$

(последнее означает, что единице группы H соответствует тождественный автоморфизм группы K). Кроме того, системы факторов и автоморфизмов удовлетворяют соотношениям

$$(k^h)^{h'} = (h, h')_K^{-1}\, k^{hh'}(h, h')_K;$$
$$(h, h'h'')_K(h', h'')_K = (hh', h'')_K(h, h')_K^{h''}$$

(первое из них непосредственно проверяется, а второе доказывается при учете ассоциативности умножения в произведении $h_Gh'_Gh''_G$).

В предыдущем параграфе в связи с факторизацией группы по произвольной подгруппе мы вводили факторы, зависящие от элемента группы и точки фактор-пространства. Сейчас пользуемся факторами, зависящими от двух элементов фактор-группы. Те и другие просто связаны друг с другом.

Задача 1. Докажите, что $(h, h')_K = (h_G, h')_K$; $k^h = (k, h)_K$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $kh = h$ для любых $k \in K$, $h = Kg \in H$.

Задача 2. Докажите свойства факторов $(h, h')_K$ и автоморфизмов $k \to k^h$, исходя из свойств факторов $(g, h)_K$ (см. задачу 13 из § 1.3).

3*. Реконструкция группы по сомножителям. Факторизацию группы по нормальному делителю можно использовать для параметризации группы. Для этого достаточно сопоставить элементу группы $g \in G$ пару (h, k) так, что $g = h_G k$.

Задача 3. Покажите, что определенное только что отображение $G \to H \times K$ является изоморфизмом групп, если

$$(h, k)(h', k') = (hh', (h, h')_K k^{h'} k');$$

$$(h, k)^{-1} = \left(h^{-1}, (k^{-1})^{h^{-1}} (h, h^{-1})_K^{-1}\right); \quad 1 = (1, 1).$$

Это решает и обратную задачу реконструкции группы G по нормальному делителю K и фактор-группе $H = G/K$. Мы видим, что эта задача имеет единственное решение, если кроме групп K и H заданы еще система факторов $(h, k')_K$ и система автоморфизмов $k \longmapsto k^h$ группы K. При этом, правда, различные системы факторов и автоморфизмов могут приводить к изоморфным группам. Тем самым на множестве таких систем вводится отношение эквивалентности, и все они разделяются на классы эквивалентности. Подробнее о решении этой задачи (которая называется задачей *расширения группы*) можно прочесть в книге Холла [46].

4. Полупрямое произведение групп. Рассмотрим частный случай, когда система факторов тривиальна: $(h, h')_K = 1$ для всех $h, h' \in H$. В этом случае произведение представителей опять является представителем, т. е. множество представителей образует группу. Это значит, что группа G содержит подгруппу, изоморфную H (изоморфизм устанавливается отображением $h \longmapsto h_G$).

Задача 4. Покажите, что отображение φ: $h \longmapsto h_G$ действительно является изоморфизмом, т. е. φ — гомоморфизм и $\operatorname{Ker} \varphi = \{1\}$.

Очевидно, что для восстановления группы G по подгруппам H и K в этом случае достаточно задать систему автоморфизмов h: $k \longmapsto k^h$ группы K со следующим свойством:

$$(k^h)^{h'} = k^{hh'}.$$

Другими словами, нужно задать антигомоморфное отображение группы H в группу всех автоморфизмов группы K. Группа G описывается тогда как множество $H \times K$ с групповыми операциями

$$(h, k)(h', k') = (hh', k^{h'} k');$$

$$(h, k)^{-1} = \left(h^{-1}, (k^{-1})^{h^{-1}}\right); \quad 1 = (1, 1).$$

Если группа G обладает описанными свойствами, т. е. содержит подгруппы K и H, пересекающиеся по единице: $K \cap H = \{1\}$, и такие, что K инвариантна в G, а H изоморфна фактор-группе G/K, то группа G называется *полупрямым произведением* этих своих подгрупп и обозначается $G = H \otimes K$ (употребляются и другие обозначения). Восстановление полупрямого произведения по сомножителям производится по приведенным формулам при задании антигомоморфизма $H \to \operatorname{Aut} K$. *Прямое произведение* $G = H \otimes K$ получается в частном случае, когда любому $h \in H$ соответствует тождественное преобразование группы K.

Ввиду того, что полупрямое произведение часто встречается в приложениях, остановимся еще раз на его характеризации. Предположим, что группа G содержит подгруппы H и K, такие, что K инвариантна в G и каждый элемент $g \in G$ единственным образом представляется в виде $g = hk$. Тогда элементы $h \in H$ могут быть выбраны в качестве представителей смежных классов по подгруппе K и автоматически оказывается, что H изоморфна G/K. Следовательно, перечисленные признаки гарантируют, что $G = H \otimes K$.

Примеры. 1) Пусть группа K коммутативна, а H содержит лишь два элемента (отсюда следует, что $h^2 = 1$ для любого $h \in H$). Определим систему автоморфизмов, положив

$$k^h = \begin{cases} k, & \text{если } h = 1; \\ k^{-1}, & \text{если } h \neq 1. \end{cases}$$

Этим определяется полупрямое произведение $G = H \otimes K$. Если K — *циклическая группа* порядка n (т. е. состоит из всевозможных степеней одного элемента — генератора, причем n-я степень его равна единице), то G — так называемая *группа диэдра* порядка $2n$. При $n = 3$ эта группа изоморфна S_3.

2) Пусть $\boldsymbol{T}$ — группа всех сдвигов трехмерного евклидова пространства $\mathscr{E}^3$. Обозначим элементы группы $\boldsymbol{T}$ через $\boldsymbol{a}_T \in \boldsymbol{T}$, определив их как $\boldsymbol{a}_T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ (в этих обозначениях отражается тот факт, что эта группа изоморфна трехмерному линейному пространству, если групповой операцией в нем считать сложение векторов). Пусть R — группа всех вращений трехмерного пространства вокруг начала отсчета. Группа всех движений пространства $\mathscr{E}^3$ равна $R\boldsymbol{T}$, т. е. состоит из всевозможных произведений вида $r\boldsymbol{a}_T$, $r \in R$, $\boldsymbol{a}_T \in \boldsymbol{T}$. Непосредственно из определения следует, что она представляет собой полупрямое произведение $R \otimes \boldsymbol{T}$, причем система автоморфизмов имеет вид

$$r^{-1} \boldsymbol{a}_T r = (\boldsymbol{a}_T)^r = (r^{-1} \boldsymbol{a})_T.$$

Группа движений любого евклидова или псевдоевклидова пространства устроена аналогичным образом. Это относится и к группе Пуанкаре, которая является группой движений пространства Минковского.

§ 1.5. Элементарная теория индуцированных представлений

В следующих главах мы увидим, что и в самой математике, и в физических приложениях естественным образом возникают так называемые индуцированные представления. Операция индуцирования сопоставляет каждому представлению Δ подгруппы $K \subset G$ некоторое представление группы G. Позднее теория таких представлений будет изложена во всех деталях и применена к физическим задачам. В этом параграфе дается предварительный вариант теории, применимый лишь к конечным группам. Он проигрывает в красоте математических построений и кажется несколько искусственным, однако обладает преимуществом простоты, поскольку опирается на теорию характеров. При желании читатель может пропустить этот параграф, взяв из него лишь формулировки теорем, которые не передоказываются в следующей главе.

1. Матричные элементы и характеры. Теорию конечномерных представлений групп можно найти в любом учебнике теории групп для физиков. Здесь мы изложим без доказательства некоторые необходимые нам сведения.

Конечномерное представление группы G — это гомоморфизм A этой группы в группу комплексных матриц (линейных операторов в конечномерном комплексном пространстве), при котором единица группы переходит в единичную матрицу. Унитарное представление — это представление унитарными матрицами: $A^{\dagger}(g) = A(g^{-1})$. Представление, эквивалентное A, — представление вида $g \longmapsto CA(g)C^{-1}$. Любое конечномерное представление эквивалентно унитарному.

Если преобразованием эквивалентности представление приводится к блочно-диагональному виду, то оно называется *приводимым*, в противном случае — *неприводимым*. Если для двух комплекснозначных функций на конечной группе ввести скалярное произведение по формуле

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi^*(g)\psi(g)$$

($|G|$ — *порядок группы*, т. е. число элементов в ней), то функции, определяемые матричными элементами полного набора унитарных неприводимых (неэквивалентных друг другу) представлений группы, удовлетворяют *соотношениям ортогональности*

$$\left(\overset{\alpha}{A}{}^{i}{}_{j}\overset{\alpha'}{A}{}^{i'}{}_{j'}\right) = \frac{1}{\dim \overset{\alpha}{A}} \delta^{\alpha\alpha'}\delta^{ii'}\delta_{jj'},$$

где $\dim \overset{\alpha}{A}$ — размерность представления $\overset{\alpha}{A}$.

Для произвольного представления A функция $g \longmapsto \chi(g) = \operatorname{Tr} A(g) = A^{i}{}_{i}(g)$ называется *характером* этого представления.

Непосредственно из определения следует, что эта функция постоянна на классах сопряженных элементов $\chi(gg'g^{-1}) = \chi(g')$ и что характеры эквивалентных представлений совпадают. Из соотношений ортогональности следует, что неприводимые характеры (характеры неприводимых представлений) удовлетворяют соотношениям ортогональности $(\chi^{\alpha}, \chi^{\beta}) = \delta^{\alpha\beta}$. Отсюда в свою очередь следует, что если представление распадается на сумму неприводимых (т. е. приводится к блочному виду с блоками, соответствующими неприводимым представлениям) по формуле $A = \sum_{\alpha} n^{\alpha}\overset{\alpha}{A}$, то его характер распадается на сумму соответствующих неприводимых характеров $\chi = \sum_{\alpha} n^{\alpha}\chi^{\alpha}$. Для кратности неприводимого представления $\overset{\alpha}{A}$ в представлении A получаем отсюда $n^{\alpha} = (\chi, \chi^{\alpha}) = (\chi^{\alpha}, \chi)$.

Если $\{A^{i}{}_{j} \mid i, j = 1, \ldots, d_1\}$, $B = \{B^{\mu}{}_{\nu} \mid \mu, \nu = 1, \ldots, d_2\}$ — матрицы размерностей d_1 и d_2 соответственно, то их *кронекеровским произведением* $A \times B$ называется матрица размерности $d_1 d_2$, строки и столбцы которой нумеруются парами (i, μ) (каждый элемент пары пробегает соответствующее множество значений), а матричные элементы равны

$$(A \times B)^{i\mu}{}_{j\nu} = A^{i}{}_{j}B^{\mu}{}_{\nu}.$$

Прямым произведением двух представлений $g \longmapsto A(g)$ и $g \longmapsto B(g)$ группы G называется представление $A \otimes B$: $g \longmapsto A(g) \times B(g)$. Характер такого представления равен произведению характеров представлений — сомножителей:

$$\chi^{A \otimes B}(g) = \chi^{A}(g)\chi^{B}(g).$$

2. Индуцированное представление. Пусть G — группа, K — ее подгруппа и $\mathscr{X} = G/K$ — фактор-пространство. Предположим, что группа G, а следовательно, и подгруппа K, и пространство $\mathscr{X}$ конечны, и обозначим число элементов в них соответственно через $|G|$, $|K|$, $|\mathscr{X}|$. Поскольку число элементов в каждом смежном классе gK одно и то же и равно $|K|$, выполняется соотношение $|G| = |\mathscr{X}| \cdot |K|$.

Группа G действует на $\mathscr{X}$ как группа операторов (перестановок) g: $x \longmapsto gx$. Воспользуемся этим и сопоставим каждому $g \in G$ квадратную матрицу $A(g) = \{A^{x'}{}_{x}(g) \mid x, x' \in \mathscr{X}\}$) размерности $|\mathscr{X}|$ с элементами

$$A^{x'}{}_{x}(g) = \delta(x', gx),$$

где $\delta(x', x)$ — обычный символ Кронекера:

$$\delta(x', x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x' = x; \\ 0, & \text{если } x' \neq x. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что отображение $g \mapsto A(g)$ является гомоморфизмом, т.е. матрицы $A(g)$, $g \in G$, образуют представление группы G. Представление, которое мы получили, воспользовавшись действием группы на фактор-пространстве, есть частный случай индуцированного представления. Оно называется *квазирегулярным* представлением группы G.

Если в качестве подгруппы K выбрать тривиальную подгруппу, состоящую только из единицы, то фактор-пространство $G/\{1\}$ совпадает с самой группой G, действие операторов на которой определяется как левые сдвиги элементами группы. Применяя описанную выше процедуру к этому случаю, мы получим представление размерности $|G|$, которое называется *регулярным* представлением группы. Матрица его имеет вид $A^{g'}{}_{g''}(g) = \delta(g', gg'')$.

Общий случай индуцированного представления получается, когда задано представление $k \mapsto \Delta(k)$ подгруппы K матрицам размерности d, если определенным образом сопоставить каждому элементу $g \in G$ некоторую матрицу $A(g)$ размерности $d \cdot |\mathscr{X}|$. Ее удобно строить как клеточную с d-рядными клетками, которые нумеруются индексом $x \in \mathscr{X}$. Положим клетку, стоящую в строке с номером x' и столбце с номером x, равной

$$A^{x'}{}_x(g) = \Delta((g, x)_K)\,\delta(x', gx).$$

Здесь $(g, x)_K$ — фактор из системы факторов, соответствующей некоторому выбору представителей $x_G \in x$ смежных классов (см. п. 1.3.4).

Задача 1. Показать, что выражение для матрицы $A(g)$ можно записать и в виде

$$A^{x'}{}_x(g) = \Delta\left((x'_G)^{-1} g x_G\right) \delta(x', gx).$$

В зависимости от ситуации удобным оказывается то одно, то другое из этих выражений.

Задача 2. Показать, что отображение $g \mapsto A(g)$ является представлением группы G.

Это представление называется *индуцированным* (из подгруппы K) и обозначается $A(G) = \Delta(K) \uparrow G$.

Задача 3. Показать, что при изменении системы представителей индуцированное представление переходит в эквивалентное.

Описанное выше квазирегулярное представление совпадает, очевидно, с представлением, индуцированным из тривиального представления подгруппы: $1(K) \uparrow G$. В частности, если подгруппа состоит лишь из единицы, получаем регулярное представление $1(\{1\}) \uparrow G$.

3*. Импримитивность индуцированного представления. Пусть представление $\Delta(K)$ действует в пространстве $\mathscr{L}$. Тогда представление $A = \Delta \uparrow G$ действует в пространстве $\mathscr{H}$ векторов $\varphi = \{\varphi^x \in \mathscr{L} \,|\, x \in \mathscr{X}\}$ («компоненты» вектора φ сами являются векторами в пространстве $\mathscr{L}$) по обычному правилу

$$(A(g)\varphi)^x = \sum_{x' \in \mathscr{X}} A^x{}_{x'}(g)\,\varphi^{x'}.$$

Обозначим через $\mathscr{H}_x$ подпространство векторов, имеющих только одну отличную от нуля «компоненту», именно компоненту с номером x:

$$\mathscr{H}_x = \{\varphi \in \mathscr{H} \,|\, \varphi^{x'} = 0 \quad \text{при} \quad x' \neq x\}.$$

Очевидно, что любой вектор $\varphi \in \mathscr{H}$ может быть представлен как сумма векторов из подпространств $\mathscr{H}_x$, $x \in \mathscr{X}$, и притом единственным образом. Говорят, что пространство $\mathscr{H}$ разлагается в *прямую сумму подпространств* $\mathscr{H}_x$:

$$\mathscr{H} = \sum_{\oplus x \in \mathscr{X}} \mathscr{H}_x.$$

По отношению к этому разложению индуцированное представление A обладает особым свойством: любой вектор $\varphi \in \mathscr{H}_x$ переводится оператором $A(g)$ в вектор пространства $\mathscr{H}_{gx}$. Оператор $A(g)$ как бы переставляет между собой подпространства, одновременно каким-то образом действуя внутри каждого из них. Представление с таким свойством называется *импримитивным* и играет особую роль в квантовой теории. Позднее мы гораздо детальнее разберемся в этом вопросе, значительно разовьем соответствующий аппарат и применим его к некоторым вопросам квантовой механики. Сейчас же мы остановились на этом только потому, что в случае конечномерных пространств свойство импримитивности выглядит особенно наглядно.

4. Простейшие свойства индуцированного представления. Формула для характера индуцированного представления (*формула Фробениуса*) легко выводится из определения этого представления и имеет вид

$$\chi^{\Delta \uparrow G}(g) = \sum_{x \in \mathscr{X}_g} \chi^\Delta((g, x)_K) = \sum_{x \in \mathscr{X}_g} \chi^\Delta(x_G^{-1} g x_G),$$

где обозначено $\mathscr{X}_g = \{x \in \mathscr{X} \,|\, gx = x\}$.

Задача 4. Доказать эту формулу.

Пусть Γ: $g \mapsto \Gamma(g)$ — некоторое представление группы G. Тогда *ограничением* $\Gamma(G) \downarrow K$ этого представления на подгруппу $K \subset G$ называется представление подгруппы $k \mapsto \Gamma(k)$. Докажем теперь следующее свойство индуцированных представлений.

Теорема 4. *Если Γ — представление группы G, а Δ — представление подгруппы K, то*

$$\Gamma \otimes (\Delta \uparrow G) = ((\Gamma \downarrow K) \otimes \Delta) \uparrow G.$$

Доказательство. Найдем характеры левой и правой частей этого равенства. Пользуясь формулой для характера индуцированного представления и правилом перемножения характеров, получим

$$\chi^{\Gamma\otimes(\Delta\uparrow G)}(g)=\chi^{\Gamma}(g)\,\chi^{\Delta\uparrow G}(g)=\chi^{\Gamma}(g)\sum_{x\in\mathscr{X}_g}\chi^{\Delta}(x_G^{-1}gx_G);$$

$$\chi^{((\Gamma\downarrow K)\otimes\Delta)\uparrow G}(g)=\sum_{x\in\mathscr{X}_g}\chi^{(\Gamma\downarrow K)\otimes\Delta}(x_G^{-1}gx_G)=$$

$$=\sum_{x\in\mathscr{X}_g}\chi^{\Gamma\downarrow K}(x_G^{-1}gx_G)\,\chi^{\Delta}(x_G^{-1}gx_G).$$

По определению ограниченного представления $\chi^{\Gamma\downarrow K}(k)=\chi^{\Gamma}(k)$. Поэтому в правой части последнего равенства возникает множитель $x^{\Gamma}(x_G^{-1}gx_G)$. Учитывая, что характер есть функция, постоянная на классах сопряженных элементов, преобразуем этот множитель к виду $\chi^{\Gamma}(g)$ и вынесем за знак суммы. Равенство характеров представлений, фигурирующих в теореме, доказано. Следовательно, эти представления эквивалентны, что и требовалось доказать.

Теорема 5 (*индуцирование последовательными шагами*). *Если $K\subset H\subset G$ — цепочка вложенных друг в друга подгрупп и Δ — представление группы K, то*

$$(\Delta\uparrow H)\uparrow G=\Delta\uparrow G.$$

Доказательство. Обозначим фактор-пространства $G/K=\mathscr{X}$, $G/H=\mathscr{Y}$, $H/K=\mathscr{Z}$. Каждый смежный класс $y=y_GH\in\mathscr{Y}$ может быть разбит на еще более мелкие части с помощью разбиения H на классы $z_HK\in\mathscr{Z}$. Таким образом, каждый $g\in G$ может быть представлен в виде $g=y_Gz_Hk$, $y\in\mathscr{Y}$, $z\in\mathscr{Z}$, $k\in K$. Следовательно, в качестве представителей смежных классов $x\in\mathscr{X}$ можно выбрать элементы вида $x_G=y_Gz_H$.

Задача 5. Показать, что если группа G действует на множестве $\mathscr{Y}\times\mathscr{Z}$ по правилу $g(y,z)=(gy,(g,y)_Hz)$, то отображение $(y,z)\mapsto y_Gz_HK$ представляет собой изоморфизм однородных пространств $\mathscr{Y}\times\mathscr{Z}\to\mathscr{X}$.

Обозначим теперь $D(H)=\Delta(K)\uparrow H$ и найдем характер представления $D(H)\uparrow G$, т. е. левой части равенства, фигурирующего в формулировке теоремы. Имеем

$$\chi(g)=\sum_{\substack{y\in\mathscr{Y}\\ gy=y}}\chi^{D}((g,y)_H)=\sum_{\substack{y\in\mathscr{Y}\\ gy=y}}\ \sum_{\substack{z\in\mathscr{Z}\\ (g,y)_Hz=z}}\chi^{\Delta}(z_H^{-1}y_G^{-1}gy_Gz_H).$$

Используем результат, полученный в задаче 5. Тогда можно привести это выражение к виду

$$\chi(g)=\sum_{\substack{x\in\mathscr{X}\\ gx=x}}\chi^{\Delta}(x_G^{-1}gx_G).$$

Но это не что иное, как характер представления $\Delta\uparrow G$. Теорема доказана.

5. Теорема взаимности. Теорема взаимности, доказанная еще Фробениусом, является одним из самых важных результатов теории индуцированных представлений. Она показывает, что процессы индуцирования из подгруппы и ограничения на подгруппу в определенном смысле обратны по отношению друг к другу.

Теорема 6 (взаимности). *Если Γ — неприводимое представление группы G и Δ — неприводимое представление подгруппы $K\subset G$, то кратность Γ в $\Delta\uparrow G$ равна кратности Δ в $\Gamma\downarrow K$.*

Доказательство. Вычислим кратность представления Γ в представлении $\Delta\uparrow G$. В соответствии с теорией характеров имеем для этой кратности формулу

$$(\chi^{\Gamma},\chi^{\Delta\uparrow G})=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overset{*}{\chi}{}^{\Gamma}(g)\,\chi^{\Delta\uparrow G}(g).$$

Используя формулу Фробениуса для характера индуцированного представления, получаем

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{\substack{x\in\mathscr{X}\\ gx=x}}\overset{*}{\chi}{}^{\Gamma}(g)\,\chi^{\Delta}(x_G^{-1}gx_G).$$

Выберем произвольно $x\in\mathscr{X}$. Очевидно, член внутренней суммы, соответствующий этому выбору, будет присутствовать каждый раз, когда $gx=x$. Следовательно, порядок суммирования можно обратить следующим образом: $\sum\limits_{x\in\mathscr{X}}\ \sum\limits_{g\in G;\,gx=x}$. Легко видеть, что если $gx=x$, то $x_G^{-1}gx_G\in K$ и обратно. Следовательно, множество $\{g\in G\,|\,gx=x\}$, по которому ведется суммирование во внутренней сумме, равно просто $x_GKx_G^{-1}$. Это позволяет записать сумму следующим образом:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in\mathscr{X}}\sum_{k\in K}\overset{*}{\chi}{}^{\Gamma}(x_Gkx_G^{-1})\,\chi^{\Delta}(k).$$

Замечая, что характер постоянен на классах сопряженных элементов, т. е. $\chi^{\Gamma}(x_Gkx_G^{-1})=\chi^{\Gamma}(k)$, мы видим, что суммируемое выражение не зависит от $x\in\mathscr{X}$. Поэтому внешнюю сумму можно заменить умножением на количество элементов множества $\mathscr{X}$, т. е. на $|G|/|K|$. Окончательно получаем для $(\chi^{\Gamma},\chi^{\Delta\uparrow G})$ выражение $\dfrac{1}{|K|}\sum\limits_{k\in K}\overset{*}{\chi}{}^{\Gamma}(k)\,\chi^{\Delta}(k)$, т. е.

$$(\chi^{\Gamma},\chi^{\Delta\uparrow G})=(\chi^{\Gamma\downarrow K},\chi^{\Delta}).$$

Но правая часть равна кратности представления Δ в представлении $\Gamma\downarrow K$, что завершает доказательство теоремы.

Интересно применить теорему взаимности к регулярному представлению $1(\{1\})\uparrow G$. Если неприводимое представление $\Gamma(G)$ имеет размерность $\dim\Gamma$, его ограничение $\Gamma\downarrow\{1\}$ содержит тривиальное представление $1(\{1\})$ ровно $\dim\Gamma$ раз. Поэтому теорема взаимности позволяет заключить, что любое неприводимое представление Γ содержится в регулярном представлении $\dim\Gamma$ раз. Этот вывод справедлив на самом деле не только для конечных, но и для любых непрерывных, но компактных групп и их конечномерных представлений.

Пример. Если $\Gamma(S_n)$ — неприводимое представление симметричной группы n-го порядка (группы перестановок n элементов), задаваемое некоторой схемой Юнга, то по *теореме ветвления Вейля* представление $\Gamma\downarrow S_{n-1}$ содержит неприводимые компоненты, получающиеся из Γ выбрасыванием одной клетки. Теорема взаимности позволяет заключить, что представление $\Delta\uparrow S_n$ получается из неприводимого $\Delta(S_{n-1})$ добавлением всеми возможными способами по одной клетке.

Глава 2

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

Индуцированное представление $\Delta(K)\uparrow G$ реализуется левыми сдвигами в некотором пространстве функций на группе G или, что эквивалентно, в пространстве функций на однородном пространстве $\mathscr{X}=G/K$. Инвариантная мера на G или $\mathscr{X}$ позволяет определить скалярное произведение, относительно которого представление $\Delta\uparrow G$ унитарно. Прослеживается тесная связь между структурой индуцированных представлений и поведением матричных элементов произвольного представления. Проявлением этой связи является тот факт, что любое неприводимое представление содержится в регулярном, т. е. может быть реализовано левыми сдвигами в пространстве функций на группе.

Исследование множества $H\backslash G/K$ двойных классов смежности HgK позволяет выяснить структуру представления $(\Delta(K)\uparrow G)\downarrow H$, индуцированного из одной подгруппы и затем ограниченного на другую, а также доказать важную для последующих глав теорему о переплетении двух индуцированных представлений $U_\Delta=\Delta(K)\uparrow G$ и $U_\Lambda=\Lambda(H)\uparrow G$. Каждый оператор, переплетающий эти представления, т. е. удовлетворяющий условию $TU_\Delta(g)=U_\Lambda(g)T$, выражается в виде интегрального оператора $T\varphi(g)=\int t(g^{-1}g')\varphi(g')\,dg'$, причем функция t определяется своими значениями на сечении группы, пересекающем каждый двойной класс в одной точке.

В качестве следствий из теоремы о переплетении выводятся теорема взаимности Фробениуса, связывающая процесс индуцирования с обратным процессом ограничения представления на подгруппу, а также критерий неприводимости индуцированного представления.

Важнейшая для квантовомеханических приложений теорема об импримитивности, утверждающая, что любое импримитивное представление эквивалентно индуцированному или сумме индуцированных, будет доказана в главе 4.

В случае, если группы G и K не унимодулярны, т. е. правоинвариантная и левоинвариантная меры на каждой из этих групп не совпадают, основные результаты теории индуцированных представлений остаются справедливыми, однако формулы, определяющие индуцированное представление и выражающие различные его свойства, усложняются.

Метод индуцированных представлений распространяется также на проективные представления, когда отображение группы G в группу линейных операторов $g \mapsto A(g)$ удовлетворяет условию $A(g)A(g') = (g, g')A(gg')$ с некоторыми числовыми коэффициентами (g, g') — так называемыми мультипликаторами. В частности, любое неприводимое проективное представление реализуется как неприводимая компонента в проективном регулярном представлении группы. Пункт 2.3.8 построен как *сводка основных результатов общей теории индуцированных представлений.*

В начале главы кратко излагаются необходимые сведения из общей теории представлений групп в гильбертовых пространствах. При изложении в этой главе алгебраические структуры описываются полностью, однако функционально-аналитический аспект в доказательствах и формулировках теорем опускается. Вместо этого даны лишь некоторые замечания, которые призваны сориентировать читателя настолько, чтобы он мог воспользоваться более серьезной математической литературой.

§ 2.1. Подпредставления и переплетение представлений

Для исследования представлений групп необходимым инструментом являются операторы переплетения, отображающие друг в друга пространства-носители представлений с сохранением действия группы, т. е. так, что выполняется равенство $TA_1(g) = A_2(g)T$. Если представления A_1, A_2 описывают физические системы, обладающие общей группой симметрии G, то из всех операторов, связывающих пространства-носители этих представлений, только переплетающие операторы имеют физический смысл. В главах 5, 6 мы увидим, что это ограничение на оператор T позволяет установить связь между импульсным и координатным представлениями релятивистской квантовой механики и тем самым дать пространственно-временную интерпретацию состояниям элементарной частицы.

1. Подпредставления и фактор-представления. Пусть $A: G \to L(\mathscr{L})$ — *представление* группы G в линейном пространстве $\mathscr{L}$, т. е. гомоморфизм G в группу невырожденных линейных операторов в $\mathscr{L}$. Пусть $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}$ — (замкнутое) линейное подпространство, инвариантное относительно действия представления, т. е. для любого $g \in G$ имеет место $A(g)\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}_1$. Тогда, рассматривая операторы $A(g)$ как операторы на $\mathscr{L}_1$, т. е. полагая $A_1(g) = A(g)|_{\mathscr{L}_1}$, мы получим представление $g \mapsto A_1(g)$ группы G в пространстве $\mathscr{L}_1$. Говорят, что A_1 — *подпредставление* (субпредставление) представления A. Если $\mathscr{L}_1$ — *собственное*

подпространство, т. е. не совпадает ни со всем $\mathscr{L}$, ни с тривиальным подпространством, состоящим из одного лишь нулевого вектора, то говорят, что представление A *приводимо.* Если A не содержит ни одного собственного подпредставления, то оно называется *неприводимым.*

Если имеется подпредставление $A_1 \subset A$, то всегда можно определить *фактор-представление* A/A_1. Для этого образуем линейное фактор-пространство $\mathscr{L}/\mathscr{L}_1$, т. е. пространство, состоящее

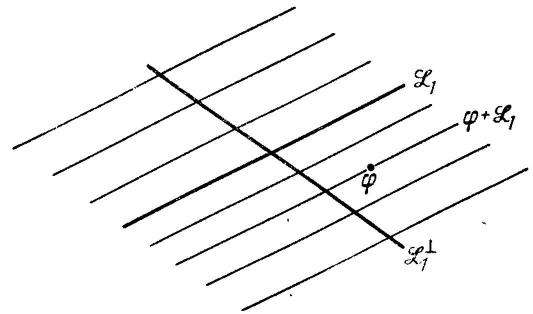


Рис. 5. Фактор-пространство и дополнительное пространство.

из классов $\varphi + \mathscr{L}_1$, $\varphi \in \mathscr{L}$, и определяем представление на нем, полагая

$$(A/A_1)(g)(\varphi + \mathscr{L}_1) = A(g)\varphi + \mathscr{L}_1.$$

Легко проверить, что это определение корректно, т. е. действие операторов на классах не зависит от выбора представителей классов. (О линейном фактор-пространстве см. пример в п. 1.4.1.)

Может оказаться, что для данного инвариантного подпространства $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}$ имеется также инвариантное дополнительное подпространство, т. е. такое $\mathscr{L}_1^\perp \subset \mathscr{L}$, что $\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_1^\perp = \mathscr{L}$, $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_1^\perp = \{0\}$ и $A(g)\mathscr{L}_1^\perp \subset \mathscr{L}_1^\perp$. Это значит, что каждый вектор из $\mathscr{L}$ может быть единственным образом представлен в виде суммы векторов из $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_1^\perp$; в этом случае пишут $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_1^\perp$. Тогда говорят, что представление A разлагается в *прямую сумму представлений* A_1 и $A_1^\perp$, и записывают $A = A_1 \oplus A_1^\perp$. Ниже будет показано (задача 3), что если $A = A_1 \oplus A_1^\perp$, то представления $A_1^\perp$ и A/A_1 эквивалентны.

Если для каждого подпредставления в A существует дополнительное к нему подпредставление, то говорят, что A *вполне приводимо.* Легко доказать, что любое унитарное (т. е. сохраняющее некоторое скалярное произведение) представление вполне приводимо. Действительно, в этом случае для любого инвариантного подпространства $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}$ его *ортогональное дополнение* $\mathscr{H}_1^\perp$, т. е. множество векторов из $\mathscr{H}$, ортогональных (в смысле обращения в нуль скалярного произведения) ко всем векторам из $\mathscr{H}_1$, также инвариантно, так что $\mathscr{H}$ разлагается в сумму $\mathscr{H}_1$ и его ортогонального дополнения: $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_1^{\perp}$ или для соответствующих представлений $U = U_1 \oplus U_1^{\perp}$.

Пример. Рассмотрим группу действительных чисел по сложению $\mathbb{R}$ и определим представление A этой группы в двумерном пространстве $\mathscr{L}$, положив

$$A(a) = \begin{bmatrix} e^{ika} & \lambda(e^{ika} - e^{ik'a}) \\ 0 & e^{ik'a} \end{bmatrix}.$$

Тогда подпространство $\mathscr{L}_1$ векторов вида $\begin{bmatrix} x^1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^1 \in \mathbb{C}$, инвариантно. Подпредставление в нем действует следующим образом:

$$A_1(a) \begin{bmatrix} x^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ika} x^1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Фактор-представление действует в пространстве классов $\begin{bmatrix} \mathbb{C} \\ x_2 \end{bmatrix}$, $x^2 \in \mathbb{C}$, по формуле

$$(A/A_1)(a) \begin{bmatrix} \mathbb{C} \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C} \\ e^{ik'a} x^2 \end{bmatrix}.$$

Введем в $\mathscr{L}$ скалярное произведение, положив

$$\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} \right) = \overset{*}{x}{}^1 y^1 + \overset{*}{x}{}^2 y^2.$$

Представление A унитарно при условии, что k и k' действительны, а $\lambda = 0$. В этом случае ортогональное дополнение $\mathscr{L}_1^{\perp}$ состоит из векторов вида $\begin{bmatrix} 0 \\ x^2 \end{bmatrix}$ и инвариантно относительно A. Соответствующее подпредставление действует в нем по формуле

$$A_1^{\perp}(a) \begin{bmatrix} 0 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{ik'a} x^2 \end{bmatrix}$$

и очевидным образом эквивалентно представлению A/A_1.

2. Переплетение представлений и лемма Шура. Пусть даны представления A_1 и A_2 группы G в пространствах $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ соответственно. Тогда в пространстве $L(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ линейных (ограниченных) операторов из $\mathscr{L}_1$ в $\mathscr{L}_2$ естественно выделить подпространство операторов, которые сохраняют действие группы, т. е. таких $T: \mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_2$, что

$$TA_1(g) = A_2(g) T$$

для любого $g \in G$. Подпространство таких операторов обозначим $[A_1, A_2]$. Разумеется, это тоже линейное пространство. Оно называется *пространством переплетения* (сплетения) представлений A_1 и A_2 или *коммутатором* этих представлений. Пространство $[A, A] = [A]$ называется пространством *самопереплетения* или *коммутантом* представления A. Оно является не только линейным пространством, но и алгеброй.

Задача 1. Показать, что если A — представление и A_1 — его подпредставление, то каноническая проекция $\pi: \mathscr{L} \to \mathscr{L}/\mathscr{L}_1$ переплетает A и A/A_1. Этим требованием на каноническую проекцию можно было бы определить фактор-представление.

В самом общем случае структура коммутатора $[A_1, A_2]$ описывается так называемой *обобщенной леммой Шура*.

Теорема 1 (обобщенная лемма Шура). *Если $T \in [A_1, A_2]$, то $\operatorname{Ker} T$ и $T\mathscr{L}_1 = \operatorname{Im} T$ — инвариантные подпространства в пространствах $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ соответственно.*

Доказательство является непосредственной проверкой указанных свойств. Пусть $\varphi \in \operatorname{Ker} T$, т. е. $T\varphi = 0$. Тогда для любого $g \in G$ имеем $TA_1(g)\varphi = A_2(g) T\varphi = 0$, т. е. $A_1(g)\varphi \in \operatorname{Ker} T$. Поскольку φ — произвольный вектор в $\operatorname{Ker} T$, мы заключаем, что $A_1(g) \operatorname{Ker} T \subset \operatorname{Ker} T$ при любом $g \in G$, т. е. $\operatorname{Ker} T$ — инвариантное подпространство. Аналогично, для любого $\psi \in T\mathscr{L}_1$, т. е. для такого вектора в $\mathscr{L}_2$, который можно представить в виде $\psi = T\varphi$, $\varphi \in \mathscr{L}_1$, имеем $A_2(g)\psi = A_2(g) T\varphi = TA_1(g)\varphi$, т. е. $A_2(g)\psi \in T\mathscr{L}_1$.

Замечание. Пользуясь свойствами непрерывности (ограниченности) операторов T и $A(g)$, $g \in G$, легко показать, что инвариантным является также замыкание подпространства $T\mathscr{L}_1$. Поскольку в определении подпредставления фигурирует замкнутое инвариантное подпространство, именно эта более сильная формулировка леммы Шура оказывается полезной. Для простоты мы в дальнейшем будем говорить о подпространстве $T\mathscr{L}_1$, хотя на самом деле всегда будем иметь в виду его замыкание.

В частности, инвариантные подпространства $\operatorname{Ker} T$ и $T\mathscr{L}_1$ могут быть несобственными. Условия $\operatorname{Ker} T = \mathscr{L}_1$ и $T\mathscr{L}_1 = \{0\}$ эквивалентны и означают, что $T = 0$. Рассмотрим случай, когда $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ и $T\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$. Первое означает, что T — вложение, второе — что T — отображение на. Следовательно, T — биекция $\mathscr{L}_1$ на $\mathscr{L}_2$. Обратное отображение $T^{-1}: \mathscr{L}_2 \to \mathscr{L}_1$ также является линейным и принадлежит пространству $[A_2, A_1]$. Если оператор T с описанными свойствами существует, то говорят, что представления A_1 и A_2 *эквивалентны* или *подобны*. Легко видеть, что свойство подобия является отношением эквивалентности и разбивает все представления на классы эквивалентности. Мы будем обозначать это отношение знаком равенства, так как обычно будем интересоваться представлением лишь с точностью до преобразования подобия.

Задача 2. Показать, что если $A_1 = A_2$ и $T \in [A_1, A_2]$ — оператор, осуществляющий преобразование подобия, то $[A_1, A_2] = T[A_1]$.

Задача 3. Показать, что если для подпредставления A_1 существует дополнительное представление $A_1^{\perp}$, то $A_1^{\perp} = A/A_1$.

Указание. Подобие осуществляется канонической проекцией, ограниченной на подпространство $\mathscr{L}_1^{\perp}$.

Рассмотрим некоторые следствия из обобщенной леммы Шура, которые сформулируем в форме задач.

Задача 4 (лемма Шура). Показать, что если неприводимые представления переплетаются (т. е. существует ненулевой переплетающий оператор), то они эквивалентны.

Задача 5. Показать, что если неприводимое представление A_1 переплетается с представлением A_2, то оно эквивалентно некоторому подпредставлению в A_2.

Задача 6. Показать, что если $T \in [A_1, A_2]$, то $A_1/B_1 = B_2$, где через B_1 и B_2 обозначены подпредставления, действующие в подпространствах $\mathrm{Ker}\, T$ и $T\mathscr{L}_1$.

Задача 7 (обратная по отношению к предыдущей). Показать, что если B_1, B_2 — подпредставления в представлениях A_1 и A_2 соответственно, причем $A_1/B_1 = B_2$, то A_1 и A_2 переплетаются.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 1.

В случае, если представление A_1 вполне приводимо, ситуация, описанная в двух последних задачах, еще упрощается. В этом случае существует дополнительное к B_1 представление $B_1^{\perp}$ и согласно результатам задачи оно эквивалентно A_1/B_1, а следовательно, и B_2. Можно утверждать, следовательно, что *вполне приводимые представления переплетаются тогда и только тогда, когда они имеют эквивалентные подпредставления.* Это чрезвычайно наглядное характеристическое свойство операции переплетения имеет место, в частности, для всех унитарных представлений. Нам понадобится следующая более конкретная формулировка: *кратность* неприводимого представления A_1 в представлении A_2 равна размерности пространства $[A_1, A_2]$ или, что то же, $[A_2, A_1]$. В случае, если эта размерность бесконечна, совпадение кратностей означает изоморфизм соответствующих пространств.

3. Инвариантные проекторы и критерий неприводимости. При изучении подпредставлений (особенно в случае вполне приводимых представлений) удобно пользоваться проекторами на подпространства. Пусть $\mathscr{L}_1$ — подпространство в $\mathscr{L}$ и P_1 — такой линейный оператор $P_1\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}_1$, который при ограничении на подпространство $\mathscr{L}_1$ превращается в тождественный: $P_1|_{\mathscr{L}_1} = \mathrm{id}_{\mathscr{L}_1}$. Тогда, очевидно, $P_1^2 = P_1$, т. е. P_1 является *идемпотентным* оператором. Такой оператор называется оператором проектирования или *проектором* на подпространство $\mathscr{L}_1$. Ядро этого оператора $\mathscr{L}_1^{\perp} = \mathrm{Ker}\, P_1$ имеет лишь один общий вектор с $\mathscr{L}_1$ — нулевой вектор, т. е. $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_1^{\perp}$. Говорят, что оператор P_1 проектирует $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}_1$ параллельно $\mathscr{L}_1^{\perp}$. Верно и обратное: если $P_1^2 = P_1$, то P_1 — проектор на $P_1\mathscr{L}$ параллельно $(1 - P_1)\mathscr{L}$.

Пусть теперь в пространстве $\mathscr{L}$ действует представление A. Если проектор P_1 коммутирует с этим представлением $P_1 \in [A]$, то подпространство $\mathscr{L}_1 = P_1\mathscr{L}$ инвариантно, а подпространство $\mathscr{L}_1^{\perp} = (1 - P_1)\mathscr{L}$ является инвариантным дополнением к нему.

И обратно: если $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_1^{\perp}$ и как $\mathscr{L}_1$, так и его дополнение $\mathscr{L}_1^{\perp}$ инвариантны, то проектор на $\mathscr{L}_1$ параллельно $\mathscr{L}_1^{\perp}$ принадлежит $[A]$. Это позволяет доказать критерий неприводимости вполне приводимого представления.

Теорема 2. *Если представление A вполне приводимо, то оно неприводимо в том и только в том случае, когда его коммутант содержит лишь операторы, кратные единичному:* $[A] = \mathbb{C}$.

В формулировке теоремы нет противоречия. Вполне приводимое представление может быть неприводимым. Более того, неприводимое представление всегда вполне приводимо. Ведь оно содержит только несобственные инвариантные подпространства

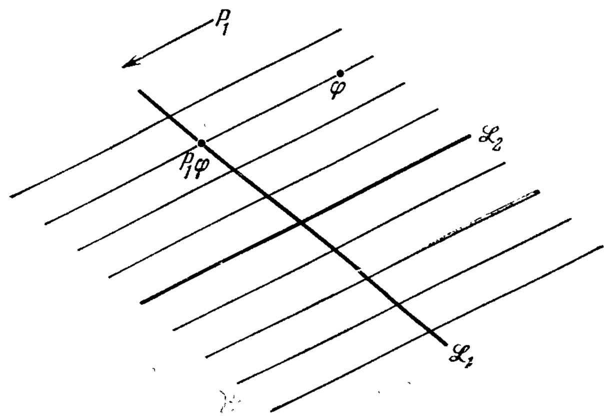


Рис. 6. Проектирование на $\mathscr{L}_1$ параллельно $\mathscr{L}_2$.

$\{0\}$ и $\mathscr{L}$, которые являются дополнениями друг к другу, так что условия вполне приводимости выполнены. Критерий, который дает эта теорема, оказывается полезным тогда, когда заранее известно, что представление вполне приводимо, но неизвестно, является ли оно неприводимым. Это имеет место, например, если представление унитарно.

Если каждый оператор, коммутирующий с представлением A, кратен единичному, т. е. $[A] = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$, то представление называется *операторно неприводимым*. Сформулированная теорема утверждает, что понятия неприводимости и операторной неприводимости совпадают в классе вполне приводимых представлений.

Доказательство. Если неприводимое представление A рассматривается над полем комплексных чисел (а мы всегда это предполагаем), то коммутант $[A]$ является ассоциативной алгеброй над полем $\mathbb{C}$. Кроме того, он содержит подалгебру, изоморфную $\mathbb{C}$ (это множество операторов, кратных единичному). В силу обобщенной леммы Шура каждый ненулевой элемент коммутанта обратим (см. задачу 4).

В алгебре имеется теорема (теорема Фробениуса), которая утверждает, что существуют лишь три ассоциативные алгебры (над полем действительных чисел $\mathbb{R}$) с единицей и с обращением: это поля действительных и комплексных чисел и алгебра кватернионов. Но поле действительных чисел не содержит $\mathbb{C}$, а алгебру кватернионов нельзя рассматривать как алгебру над $\mathbb{C}$, так как мнимая единица коммутирует не со всеми кватернионами. Следовательно, в случае неприводимого представления $[A] = \mathbb{C}$. Обратно, пусть $[A] = \mathbb{C}$. Рассмотрим произвольное подпредставление A_1. В силу вполне приводимости существует инвариантное дополнение $A_1^{\perp}$. Пусть P_1 — проектор на $\mathscr{L}_1$ параллельно $\mathscr{L}_1^{\perp}$. Тогда $P_1 \in [A]$ и, следовательно, $P_1 = \lambda \cdot \mathbb{1}$. Свойство проектора дает для λ уравнение $\lambda^2 = \lambda$, откуда $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$. Этому соответствует $\mathscr{L}_1 = \{0\}$ или $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}$, т. е. подпредставления все несобственны, представление неприводимо.

Если рассматривается гильбертово пространство $\mathscr{H}$ и унитарное представление $U(G)$ в нем, то в качестве дополнительного к любому инвариантному подпространству $\mathscr{H}_1$ естественно выбрать его ортогональное дополнение $\mathscr{H}_1^{\perp} = \mathscr{H}_2$. Тогда проектор P_1 на $\mathscr{H}_1$ параллельно $\mathscr{H}_2$ оказывается *эрмитовым оператором*, т. е. $(P_1\varphi, \psi) = (\varphi, P_1\psi)$ для любых $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$. (Докажите это.)

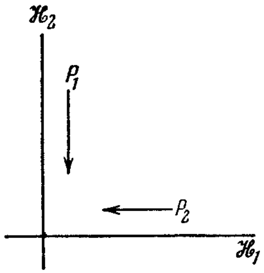


Рис. 7. Ортогональные проекторы.

Пусть P_1, P_2 — эрмитовы проекторы на подпространства $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$. Если $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$, то подпространства эти оказываются взаимно ортогональными. Следовательно, единственный их общий вектор — нулевой. Отсюда следует, что $P_1 + P_2$ — проектор на прямую сумму $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. Верно и обратное: если $P_1 + P_2$ — проектор, то $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ и верны все предыдущие выводы. В этом случае проекторы называются *ортогональными*.

4. Прямой интеграл представлений. Пусть A — вполне приводимое представление группы G. Тогда оно либо неприводимо, т. е. не содержит ни одного собственного подпредставления, либо разлагается в сумму двух представлений: $A = A_1 \oplus A_2$. Далее к каждому из полученных представлений можно применить ту же схему рассуждений и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно долго, мы в некоторых случаях сможем представить представление A в виде *прямой суммы* конечного или счетного множества неприводимых представлений: $A = \sum\limits_{\oplus i} A_i$. Это значит, что каждый $\varphi \in \mathscr{H}$ единственным образом разлагается в сумму $\sum\limits_i \varphi_i$, где $\varphi_i \in \mathscr{H}_i$, причем каждое $\mathscr{H}_i$ инвариантно и не содержит инвариантного собственного подпространства. В других случаях этого сделать не удается, но можно разложить представление A в прямой интеграл неприводимых представлений — понятие, обобщающее понятие прямой суммы. Сформулируем соответствующие результаты.

Анализируя разложение гильбертова пространства в прямую сумму, мы естественным образом получаем рецепт для обратного процесса — сложения заранее заданных гильбертовых пространств. Пусть $\{\mathscr{H}_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ — семейство гильбертовых пространств со скалярными произведениями $(\,,\,)_i$. Рассмотрим множество $\mathscr{H}$, элементом которого является совокупность $\varphi = \{\varphi_i \in \mathscr{H}_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$. Естественным образом определим на нем линейные операции (сложение и умножение на число), а скалярное произведение определим формулой

$$(\varphi, \varphi') = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i, \varphi_i')_i.$$

Для того чтобы это выражение имело смысл, включим в $\mathscr{H}$ не все семейства $\{\varphi_i\}$, а лишь такие, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|_i^2 < \infty$, где $\|\varphi_i\|_i^2 = (\varphi_i, \varphi_i)_i$. Тогда число (φ, φ') определено для всех $\varphi, \varphi' \in \mathscr{H}$ и удовлетворяет аксиомам скалярного произведения. Пространство $\mathscr{H}$ оказывается полным относительно соответствующей нормы, т. е. гильбертовым. Оно называется *прямой суммой пространств* $\mathscr{H}_i$ и обозначается $\mathscr{H} = \sum\limits_{\oplus i} \mathscr{H}_i$. Множество элементов вида $\{0, \ldots, 0, \varphi_i, 0, \ldots\}$ образует в $\mathscr{H}$ подпространство, изоморфное $\mathscr{H}_i$, так что можно считать $\mathscr{H}$ прямой суммой своих подпространств.

Заметим, что можно было бы определить скалярное произведение в $\mathscr{H}$ формулой $(\varphi, \varphi') = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i (\varphi_i, \varphi_i')$, где ρ_i, $i = 1, 2, \ldots$, — некоторая последовательность положительных чисел. Однако переопределением каждого из скалярных произведений $(\,,\,)_i$ можно свести этот случай к предыдущему.

Пусть теперь $\mathscr{H}_x$, $x \in \mathscr{X}$, — любое семейство гильбертовых пространств (не обязательно счетное) со скалярными произведениями $(\,,\,)_x$. Предположим, что на множестве $\mathscr{X}$ индексов (которое можно интерпретировать как множество самих пространств) определена топология и мера μ. Построим новое пространство $\mathscr{H}$, элементами которого являются семейства $\varphi = \{\varphi_x \in \mathscr{H}_x \mid x \in \mathscr{X}\}$ такие, что интеграл $\int \|\varphi_x\|_x^2 \, d\mu(x)$ существует и конечен. Определим на $\mathscr{H}$ естественным образом линейные операции и введем скалярное произведение по формуле

$$(\varphi, \varphi') = \int_{\mathscr{X}} (\varphi_x, \varphi_x')_x \, d\mu(x).$$

Тем самым $\mathscr{H}$ превращается в гильбертово пространство, которое называется *прямым интегралом гильбертовых пространств* $\mathscr{H}_x$ и обозначается через $\mathscr{H} = \int \mathscr{H}_x \, d\mu(x)$. Если топология $\mathscr{X}$ дискретна и мера каждого одноточечного множества $\{x\}$ в нем равна $\rho_x > 0$, то прямой интеграл сводится к прямой сумме.

Хотя пространства $\mathscr{H}_x$ в общем случае не являются подпространствами в $\mathscr{H}$, удобно рассматривать их как подпространства в некотором обобщенном смысле. Это можно сделать, если расширить класс функций $x \longmapsto \varphi_x$, включив в него обобщенные функции (конечно, это означает выход за рамки первоначально определенного пространства $\mathscr{H}$ — см. замечание в п. 4.1.4).

Определим *дельта-функцию* на $\mathscr{X}$ как линейный функционал δ_x на множестве непрерывных функций на $\mathscr{X}$, положив $\langle \delta_x | f \rangle = f(x)$. Более наглядным является обозначение $x' \longmapsto \delta(x, x')$ и условие $\int \delta(x, x') f(x') d\mu(x') = f(x)$. Теперь определим семейство $\varphi^{(x)} = \{\varphi^{(x)}_{x''} \,|\, x'' \in \mathscr{X}\}$ формулой $\varphi^{(x)}_{x''} = \Phi_x \delta(x, x'')$, где $\Phi_x \in \mathscr{H}_x$. Если аналогично определить $\varphi^{(x')} = \{\varphi^{(x')}_{x''}\}$, $\varphi^{(x')}_{x''} = \Phi_{x'} \delta(x', x'')$, то «скалярное произведение» двух таких семейств, определяемое формально по той же формуле, что и для обычных векторов, равно

$$(\varphi^{(x)}, \varphi^{(x')}) = \int \delta(x, x'') \delta(x', x'') (\Phi_x, \Phi_{x'})_{x''} \, d\mu(x'') = \\ = \delta(x, x') (\Phi_x, \Phi_{x'})_x.$$

При $x' = x$ правая часть теряет смысл, так что семейство $\varphi^{(x)}$ не является вектором пространства $\mathscr{H}$ в обычном смысле. Выражаясь условно, это вектор с бесконечной нормой или *обобщенный вектор*.

Если в каждом из подпространств $\mathscr{H}_x$ действует унитарное представление U_x группы G, то в пространстве $\mathscr{H} = \int \mathscr{H}_x \, d\mu(x)$ также определяется унитарное представление U по формуле

$$U(g)\{\varphi_x\} = \{U_x(g)\varphi_x\}.$$

Оно называется *прямым интегралом представлений* U_x и обозначается $U = \int U_x \, d\mu(x)$. Существует широкий класс представлений (так называемые *представления типа I*), каждое из которых единственным образом разлагается в прямой интеграл неприводимых представлений. Некоторые группы (*группы типа I*) обладают только такими представлениями (в частности, все компактные, все коммутативные, все связные полупростые группы, а также группы движений евклидовых пространств). Мы всегда будем предполагать разложимость представлений, с которыми имеем дело.

§ 2.2. Определение индуцированного представлеиия

Пространство-носитель индуцированного представления $\Delta(K) \uparrow G$ можно реализовать как пространство функций на группе G, подчиненных некоторому дополнительному структурному условию, или как пространство функций на однородном пространстве $\mathscr{X} = G/K$. Эта последняя реализация тесно связана с квантовомеханическими приложениями теории индуцированных представлений и свойством импримитивности. Подробнее мы обсудим это в главе 4, но уже сейчас для выработки интуиции читатель может представлять себе функцию $x \longmapsto \varphi(x)$ из пространства-носителя как волновую функцию квантовой механики, а группу G — как группу симметрии пространства конфигураций $\mathscr{X}$. При этом представление Δ подгруппы K описывает некоторые внутренние степени свободы (например, спин частицы). Значения функции φ лежат в пространстве-носителе представления Δ, т. е. функция имеет спиновый индекс: $\varphi(x) = \{\varphi^i(x)\}$.

Такая интерпретация не исчерпывает физических приложений индуцированных представлений, но она наиболее наглядна и поэтому более всего способствует пониманию внутренней структуры теории.

1. Алгебраическая структура индуцированного представления. Пусть дана группа G и ее (замкнутая) подгруппа K. Обозначим через $\mathscr{X}$ фактор-пространство G/K. Пусть Δ — представление группы K в линейном пространстве $\mathscr{L}$. Индуцированное представление $U = \Delta(K) \uparrow G$ группы G определяется как представление левыми сдвигами в некотором пространстве $\mathscr{H}$ функций на G. Мы рассмотрим сначала алгебраические аспекты этого определения, а потом кратко остановимся на функционально-аналитических аспектах.

Пусть φ: $G \to \mathscr{L}$ — такая $\mathscr{L}$-значная функция на G, что

$$\varphi(gk) = \Delta(k^{-1})\varphi(g)$$

для любых $g \in G$, $k \in K$. *Индуцированное представление* $U(G) = \Delta(K) \uparrow G$ определяется в пространстве $\mathscr{H}$ всех таких функций (с некоторыми функциональными ограничениями, о которых речь пойдет дальше) формулой

$$(U(g)\varphi)(g') = \varphi(g^{-1}g').$$

Дополнительное условие $\varphi(gk) = \Delta(k^{-1})\varphi(g)$ накладывает алгебраические ограничения на функции, образующие пространство-носитель индуцированного представления. Назовем его *структурным условием*. Структурное условие фактически сводит функцию на группе к функции на фактор-пространстве $\mathscr{X}$. Действительно, если значение функции известно в любой точке g смежного класса gK, то структурное условие определяет ее в любой другой точке того же класса. Следовательно, достаточно задать функцию на множестве представителей классов. Обозначим как всегда представитель класса $x \in \mathscr{X}$ через x_G. Тогда $x \mapsto \varphi(x_G)$ — некоторая функция на $\mathscr{X}$, которую мы обозначим $\tilde{\varphi}$, так что $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x_G)$. Обратно, каждая функция $\tilde{\varphi}$: $\mathscr{X} \to \mathscr{L}$ определяет функцию φ: $G \to \mathscr{L}$, удовлетворяющую структурному условию, по формуле $\varphi(x_G k) = \Delta(k^{-1})\,\tilde{\varphi}(x)$.

Представление U в пространстве функций φ на G естественно определяет представление $\tilde{U}$ в пространстве функций $\tilde{\varphi}$ на $\mathscr{X}$. Имеем $(\tilde{U}(g)\tilde{\varphi})(x) = (U(g)\varphi)(x_G) = \varphi(g^{-1}x_G)$. Далее воспользуемся определением факторов, чтобы преобразовать аргумент функции в правой части равенства: $g^{-1}x_G = (g^{-1}x)_G (g^{-1}, x)_K$. Подставляя это выражение и пользуясь структурным условием, получим окончательно

$$(\tilde{U}(g)\tilde{\varphi})(x) = \Delta\left((g^{-1}, x)_K^{-1}\right)\tilde{\varphi}(g^{-1}x).$$

Это дает еще одну реализацию индуцированного представления. Обычно мы будем опускать значок тильды, полагая $\varphi(x) = \varphi(x_G)$.

З а д а ч а 1. Покажите, что в случае конечной группы G и конечномерного представления $\Delta(K)$ приведенное здесь определение индуцированного представления эквивалентно тому, которое было дано в первой главе (§ 1.5).

Если рассматривать группу G и фактор-пространство $\mathscr{X} = G/K$ как расслоение и его базу, то индуцированное представление реализуется в пространстве $\mathscr{L}$-значных функций φ на расслоении, структурное условие определяет действие структурной группы на эти функции. Переход к функциям $\tilde{\varphi}$ на базе осуществляется выбором произвольного сечения расслоения σ: $\mathscr{X} \to G$ и формулой $\tilde{\varphi} = \varphi \cdot \sigma$.

2. Инвариантная мера и ее факторизация. Для того чтобы в пространстве-носителе индуцированного представления ввести скалярное произведение, нам понадобится понятие инвариантной меры. Пусть $\mathscr{X}$ — некоторое *G-пространство*, т. е. группа G действует на $\mathscr{X}$ как группа преобразований. Мера μ на $\mathscr{X}$ называется *инвариантной*, если для любого подмножества $B \subset \mathscr{X}$ и любого $g \in G$ имеет место равенство $\mu(gB) = \mu(B)$. В этом случае интеграл по мере μ также обладает свойством инвариантности:

$$\int\limits_{\mathscr{X}} f(gx)\,d\mu(x) = \int\limits_{\mathscr{X}} f(x)\,d\mu(x).$$

Удобно выражать это свойство формулой

$$d\mu(gx) = d\mu(x).$$

Обычно мы будем обозначать инвариантную меру через dx. Тогда свойство инвариантности выражается формулой

$$d(gx) = dx,$$

которая позволяет непосредственно производить в интеграле замену переменной $x \mapsto gx$.

Сама группа G также может рассматриваться как G-пространство относительно правых или левых сдвигов на ней. Мера на G, инвариантная относительно правых сдвигов, называется *правоинвариантной мерой*. Мы будем обозначать ее через $d_R g$. Свойство инвариантности этой меры выражается формулой

$$d_R(g'g) = d_R g' \quad \text{или} \quad \int\limits_G f(g'g)\,d_R g' = \int\limits_G f(g')\,d_R g'.$$

Аналогично определяется *левоинвариантная мера* $d_L g$.

Согласно теореме Хаара [4, 6], на любой локально компактной группе (т. е. группе, обладающей компактной окрестностью единицы) существует единственная с точностью до умножения на число правоинвариантная (левоинвариантная) мера. Она называется *мерой Хаара*.

Если $d_R g'$ — правоинвариантная мера Хаара, то при левом сдвиге эта мера, вообще говоря, меняется: $d_R(gg') \neq d_R g'$, однако остается правоинвариантной: $d_R(gg'g_1) = d_R(gg')$. В силу единственности правоинвариантной меры сдвинутая мера отличается от исходной лишь множителем:

$$d_R(gg') = \Delta_G(g)\,d_R g'.$$

Нетрудно доказать, что для любых $g_1, g_2 \in G$ выполняется равенство $\Delta_G(g_1)\Delta_G(g_2) = \Delta_G(g_1 g_2)$. Это значит, что числовая функция $g \mapsto \Delta_G(g)$ является одномерным представлением группы G в мультипликативную группу положительных чисел. Эта функция называется *модулем группы*. Правый сдвиг левоинвариантной меры также выражается через эту функцию:

$$d_L(g'g) = \Delta_G(g^{-1})\,d_L g'.$$

Легко показать, что при преобразовании $g \mapsto g^{-1}$ правоинвариантная мера переходит в левоинвариантную и наоборот. При этом преобразованные меры выражаются через исходные с помощью модуля:

$$d_R(g^{-1}) = \Delta_G(g^{-1})\,d_R g; \quad d_L(g^{-1}) = \Delta_G(g)\,d_L g.$$

Все эти формулы существенно упрощаются для так называемых *унимодулярных групп*, для которых модуль есть функция, тождественно равная единице: $\Delta_G(g) \equiv 1$. В этом случае правоинвариантная мера является одновременно левоинвариантной и совпадает с мерой, полученной с помощью обращения

$$dg' = d(gg') = d(g'g) = d\left(g'^{-1}\right).$$

Такая мера называется *двусторонне-инвариантной* или просто инвариантной. Очевидно, что любая коммутативная группа является унимодулярной. Кроме того, к унимодулярным относятся все компактные, все дискретные, все нильпотентные и все полупростые связные группы. Для унимодулярной группы операция индуцирования из унимодулярной подгруппы определяется несколько проще, поэтому все свойства индуцированных представлений мы будем формулировать сначала для этого широкого класса групп, а затем отдельно приводить формулировки для общего случая.

Используя факторизацию группы по подгруппе, можно свести инвариантную меру на группе к инвариантным мерам на подгруппе и на однородном пространстве. Опишем этот процесс *факторизации меры* для случая унимодулярной группы и унимодулярной подгруппы. Общий случай будет рассмотрен в пункте 6.

Пусть dg — инвариантная мера на унимодулярной группе G, dk — инвариантная мера на ее унимодулярной подгруппе K, а $\mathscr{X} = G/K$ — фактор-пространство по подгруппе K. Тогда существует [4] единственная мера dx на $\mathscr{X}$, такая, что для любой функции f на G

$$\int_G dg\, f(g) = \int_{G/K} dx \int_K dk\, f(x_G k)$$

или, кратко, $dg = dx\, dk$. На эту формулу мы будем ссылаться как на формулу факторизации инвариантной меры.

З а д а ч а 2. Показать, что формула остается справедливой при любом выборе представителей смежных классов x_G.

З а д а ч а 3. Показать, что получающаяся при факторизации мера dx на $\mathscr{X}$ инвариантна: $d(gx) = dx$.

У к а з а н и е. Запишите формулу факторизации для функции $g' \mapsto f'(g') = f(g^{-1}g')$, воспользуйтесь определением факторов $(g^{-1}, x)_K$ и инвариантностью мер dg, dk.

Если меры dg и dk известны, то меру $dx = dg/dk$ можно найти, полагая $f(x_G k) = \varphi(x)\chi(k)$, где функция χ на K выбрана так, что $\int_K \chi(k)\, dk = 1$. Подставляя выражение для f в формулу факторизации, получим $\int_{\mathscr{X}} \varphi(x)\, dx = \int_G f(g)\, dg$. Этим определяется интеграл от произвольной функции φ на $\mathscr{X}$, т. е. определяется мера dx. В частности, если подгруппа K компактна, а мера dk нормирована: $\int_K dk = 1$, то можно положить $\chi = 1$. В этом случае функция f выражается через φ и каноническую проекцию π: $G \to \mathscr{X}$ в виде $f = \varphi \cdot \pi$, и получаем для компактной подгруппы

$$\int_{\mathscr{X}} \varphi(x)\, dx = \int_G (\varphi \cdot \pi)(g)\, dg.$$

З а м е ч а н и е. Трудности строгого доказательства формулы факторизации связаны с возможностью выбора представителей классов x_G, т. е. сечения σ: $\mathscr{X} \to G$ (см. п. 1.3.5), так, чтобы подмножество $\sigma(\mathscr{X})$ в G было борелевским, т. е. его мера была определена [4, 82].

П р и м е р ы. 1) Окружность S^1 получается факторизацией аддитивной группы действительных чисел $\mathbb{R}$ по подгруппе целых чисел $\mathbb{Z}$. Обычная мера Лебега на $\mathbb{R}$ инвариантна. Факторизация ее имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(a)\, da = \int_0^1 da \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a+n).$$

Инвариантная мера на окружности

$$\int_{S^1} \varphi(a+Z)\, d(a+Z) = \int_0^1 \varphi(a+Z)\, da.$$

2) Аналогично двумерная сфера получается факторизацией группы вращений $S^2 = SO(3)/SO(2)$. Пусть $SO(2)$ — группа поворотов вокруг третьей оси с элементами r^3_ψ. Параметризация вращения $r \in SO(3)$ с помощью углов Эйлера $r = r^3_\varphi r^1_\theta r^3_\psi$ показывает, что элементы $r^3_\varphi r^1_\theta$ могут служить представителями смежных классов (θ, φ — сферические координаты на сфере). Факторизация инвариантной меры на группе вращений и инвариантная мера на сфере имеют вид

$$\int f(r)\, dr = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\psi\, f(r^3_\varphi r^1_\theta r^3_\psi);$$

$$\int_{S^2} \Phi(\theta, \varphi)\, d(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cdot \Phi(\theta, \varphi).$$

3) При факторизации группы Лоренца $L = SO(1, 3)$ по подгруппе вращений $R = SO(3)$ получается гиперболоид 4-скоростей $L/R = \mathscr{C}$ (см. п. 5.1.2). Факторизация инвариантной меры на группе Лоренца имеет вид

$$\int_L f(l)\, dl = \int_{\mathscr{C}} dv \int_R f(v_L r)\, dr;$$

$$\int_{\mathscr{C}} \varphi(v)\, dv = \int \frac{d^3v}{v^0} \varphi(v).$$

3. Пространство-носитель индуцированного представления. Если с алгебраической точки зрения конструкция индуцированного представления вполне однозначна (выбор представителей, конечно, несуществен, а при реализации функциями на группе он вообще не фигурирует), то с точки зрения функционального анализа имеется существенный произвол. Мы подробнее рассмотрим определение, принадлежащее Макки, потому что оно приводит к унитарному представлению и по этой причине удобнее для приложений в квантовой теории. Начнем с унимодулярных групп, оставив рассмотрение общего случая до пункта 6.

Пусть G — локально компактная унимодулярная группа, K — ее замкнутая подгруппа, которую пока будем считать компактной. Предположим, что Δ — унитарное представление подгруппы K в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}$ со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$, и обозначим через $\mathscr{H}$ пространство функций $\varphi\colon G\to\mathscr{L}$, удовлетворяющих структурному условию $\varphi(gk)=\Delta(k^{-1})\varphi(g)$ и квадратично-интегрируемых по инвариантной мере (мере Хаара) на G, т. е. таких, что $\int\langle\varphi(g),\ \varphi(g)\rangle\,dg<\infty$ (функции, отличающиеся на множестве меры нуль, отождествляем). Определим на $\mathscr{H}$ скалярное произведение формулой

$$(\varphi,\ \varphi')=\int\langle\varphi(g),\ \varphi'(g)\rangle\,dg.$$

Тогда представление группы G, действующее в пространстве $\mathscr{H}$ как левый сдвиг

$$U(g)\,\varphi(g')=\varphi(g^{-1}g'),$$

называется *индуцированным* (по Макки) и обозначается $U=\Delta(K)\uparrow G$.

З а д а ч а 4. Показать, что представление, индуцированное из унитарного представления, само унитарно.

Легко убедиться в том, что в интеграле, с помощью которого выражается скалярное произведение, подынтегральное выражение постоянно на классах смежности gK. Поэтому, факторизуя меру dg, мы можем привести этот интеграл к виду

$$(\varphi,\ \varphi')=\int dx\int dk\,\langle\varphi(x_Gk),\ \varphi'(x_Gk)\rangle=|K|\int\langle\tilde\varphi(x),\ \tilde\varphi'(x)\rangle\,dx,$$

где dx и dk — инвариантные меры соответственно на $\mathscr{X}$ и K, а $|K|=\int\limits_K dk$ — мера подгруппы K. Отсюда видно, что данное выше определение действительно пригодно лишь для компактной подгруппы K. Некомпактная подгруппа имела бы бесконечную меру, и фигурирующие в определении интегралы расходились бы уже в силу структурного условия. Однако последняя выкладка подсказывает выход из положения.

В случае *некомпактной подгруппы* K следует использовать в качестве пространства-носителя пространство $\mathscr{H}$ функций $\tilde\varphi\colon\mathscr{X}\to\mathscr{L}$, квадратично-интегрируемых по инвариантной мере: $\int\langle\tilde\varphi(x),\ \tilde\varphi(x)\rangle\,dx<\infty$, и определить индуцированное представление формулой

$$\tilde U(g)\,\tilde\varphi(x)=\Delta\left((g^{-1},\ x)_K^{-1}\right)\tilde\varphi(g^{-1}x).$$

Если в качестве скалярного произведения в $\mathscr{H}$ выбрать

$$(\tilde\varphi,\ \tilde\varphi')=\int\langle\tilde\varphi(x),\ \tilde\varphi'(x)\rangle\,dx,$$

то индуцированное представление унитарно. Удобно реализовать индуцированное представление (даже в случае некомпактной подгруппы) левыми сдвигами в пространстве функций $\varphi\colon G\to\mathscr{L}$ со структурным условием $\varphi(gk)=\Delta(k^{-1})\varphi(g)$, а скалярное произведение в этом пространстве записать через функцию $\tilde\varphi(x)=\varphi(x_G)$. При этом мы будем опускать значок тильды, обозначая просто $\varphi(x)=\varphi(x_G)$.

Реализация, эквивалентная предыдущим, получается, если интерпретировать однородное пространство $\mathscr{X}$ как пространство *левых классов смежности* $K\backslash G$. Тогда индуцированное представление $U=\Delta K\uparrow G$ реализуется в пространстве функций $\varphi\colon G\to\mathscr{L}$ со структурным условием $\check\varphi(kg)=\Delta(k)\check\varphi(g)$ *правыми сдвигами*: $\check U(g)\check\varphi(g')=\check\varphi(g'g)$. Разумеется, эквивалентность с первой реализацией немедленно устанавливается с помощью отображения $\varphi\mapsto\check\varphi$, $\check\varphi(g)=\varphi(g^{-1})$.

Кроме определения Макки используются иногда другие определения индуцированного представления, различающиеся доопределением функционального пространства. Например, если $\mathscr{L}$ — нормированное пространство, то на пространство функций $\varphi\colon G\to\mathscr{L}$, удовлетворяющих структурному условию, можно наложить условие интегрируемости с первой степенью: $\|\varphi\|=\int\|\varphi(g)\|\,dg<\infty$, и возникающее функциональное пространство снабдить нормой $\|\varphi\|$. Индуцированное представление, как и прежде, определяется как представление левыми сдвигами. Но теперь оно действует в нормированном пространстве или, если перейти к его пополнению и доопределить представление по непрерывности, в *банаховом пространстве*. Различия, возникающие вследствие разных способов доопределения индуцированного представления, выходят за рамки настоящей книги. Отметим лишь, что точная формулировка некоторых результатов теории зависит от выбранного способа. Это относится, например, к теореме взаимности (см. замечания в п. 2.3.5).

Проведенные рассуждения не используют знакоопределенность формы $\langle\ ,\ \rangle$. Если она *индефинитна*, то определенная обычным способом форма $(\ ,\ )$ также индефинитна. Разумеется, при этом в пространство $\mathscr{H}$ следует включать лишь функции, квадратично-интегрируемые в смысле соответствующей знакоопределенной формы, и топология в этом пространстве также определяется знакоопределенной формой. Если представление Δ псевдоунитарно (сохраняет форму $\langle\, ,\rangle$), то индуцированное представление $\Delta \uparrow G$ также оказывается псевдоунитарным (сохраняет форму $(\, ,)$).

4*. Индуцирование и матричные элементы. Алгебраическая конструкция, лежащая в основе индуцированного представления, естественным образом возникает при рассмотрении пространства функций, натянутых на матричные элементы произвольного представления. Покажем сначала, как матричные элементы приводят к *регулярному представлению* $\operatorname{Reg} G = \mathbf{1}(\{1\}) \uparrow G$. По определению, это представление левыми сдвигами в пространстве всех квадратично-интегрируемых функций на группе.

Рассмотрим произвольное представление $\Gamma(G)$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Рассмотрим матричные элементы этого представления $(\Phi_0, \Gamma(g^{-1})\Phi)$. Если оба вектора Φ_0, $\Phi \in \mathscr{H}$ зафиксированы, то отображение $g \mapsto (\Phi_0, \Gamma(g^{-1})\Phi)$ представляет собой функцию на группе G. Пусть теперь Φ_0 фиксирован, а Φ пробегает все пространство $\mathscr{H}$. Тогда функция на группе зависит лишь от Φ. Обозначим ее $T\Phi$, так что $T\Phi\colon G \to \mathbb{C}$ и, более конкретно, $T\Phi(g') = (\Phi_0, \Gamma(g'^{-1})\Phi)$. Тем самым определено линейное отображение T пространства $\mathscr{H}$ в пространство функций на группе.

Пусть теперь вектор Φ преобразуется оператором из представления Γ. Преобразованному вектору $\Gamma(g)\Phi$ соответствует функция $T\Gamma(g)\Phi$, отличающаяся от $T\Phi$ левым сдвигом аргумента, т. е.

$$T\Gamma(g) = L_g T,$$

где $L_g\varphi(g') = \varphi(g^{-1}g')$. Если все матричные элементы представления Γ образуют квадратично-интегрируемые функции, то линейный оператор T переплетает представление Γ с левым регулярным представлением: $T \in [\Gamma, \operatorname{Reg} G]$. Если представление Γ неприводимо, то оператор T обратим и осуществляет реализацию наперед заданного представления левыми сдвигами функций на группе. Совершенно аналогично, сопоставляя вектору Φ функцию на группе $g \mapsto (\Phi_0, \Gamma(g)\Phi)$, мы получим вложение неприводимого представления Γ в правое регулярное представление группы (реализацию правыми сдвигами).

Конструкция более общего индуцированного представления $\Delta(K) \uparrow G$ получается, если не фиксировать полностью вектор Φ_0, а позволить ему пробегать некоторое подпространство в $\mathscr{H}$. Это должно быть подпространство, инвариантное относительно представления $\Gamma \downarrow K$, т. е. переходящее в себя при действии операторов $\Gamma(k)$, $k \in K$. Пусть $\mathscr{L}$ — такое инвариантное подпространство в $\mathscr{H}$. Тогда для каждого $\Phi_0 \in \mathscr{L}$ определяется оператор T_{Φ_0}, переводящий вектор $\Phi \in \mathscr{H}$ в функцию на группе по формуле $T_{\Phi_0}\Phi(g) = (\Phi_0, \Gamma(g^{-1})\Phi)$. В силу линейности скалярного

произведения достаточно знать операторы $T_i = T_{e_i}$, соответствующие ортонормированному базису пространства $\mathscr{L}$. Последний шаг заключается в том, что совокупность операторов T_i заменяется одним оператором $T = \sum_i e_i T_i$. Его можно записать через проектор P на подпространство $\mathscr{L}$ в простой форме: $T\Phi(g) = P\Gamma(g^{-1})\Phi$. Легко доказывается, что оператор T переплетает представление Γ с индуцированным представлением $\Delta(K) \uparrow G$, а если Γ неприводимо, то осуществляет вложение Γ в $\Delta \uparrow G$.

5*. Транзитивность индуцирования. Новое определение индуцированного представления позволяет доказать другим способом теоремы первой главы. Для примера приведем доказательство теоремы об индуцировании последовательными шагами:

$$(\Delta(K) \uparrow H) \uparrow G = \Delta(K) \uparrow G.$$

Применяя определение индуцированного представления для представлений $B(H) = \Delta(K) \uparrow H$ и $U(G) = B(H) \uparrow G$, получим, что представление U действует по закону $U(g)\Phi_{g'}(h) = \Phi_{g^{-1}g'}(h)$ в пространстве функций двух переменных $(g, h) \mapsto \Phi_g(h)$, заданных на $G \times H$ со значениями в $\mathscr{L}$ (пространство-носитель представления $\Delta(K)$) и удовлетворяющих условиям $\Phi_g(hk) = \Delta(k^{-1})\Phi_g(h)$, $\Phi_{gh}(h') = \Phi_g(hh')$. В силу этих условий функция Φ выражается через функцию одного переменного $\varphi\colon G \to \mathscr{L}$ по формуле $\Phi_g(h) = \varphi(gh)$. При этом функция φ удовлетворяет структурному условию $\varphi(gk) = \Delta(k^{-1})\varphi(g)$. Если функция Φ преобразуется оператором $U(g)$ так, как указано выше, то функция φ преобразуется левым сдвигом. Отсюда следует, что отображение $\Phi \mapsto \varphi$ есть искомый оператор эквивалентности.

Доказательство будет неполным, если мы не убедимся, что отображение $\Phi \mapsto \varphi$ является изометрией, т. е. $(\Phi, \Phi') = (\varphi, \varphi')$. Это, однако, легко доказывается с помощью специального выбора представителей классов gK, описанного в п. 1.5.4, при доказательстве теоремы 5. Это дает

$$\begin{aligned}(\varphi, \varphi') &= \int\limits_{G/K} dx\, \langle \varphi(x_G), \varphi'(x_G)\rangle = \\ &= \int\limits_{G/H} dy \int\limits_{H/K} dz\, \langle \varphi(y_G, z_H), \varphi'(y_G z_H)\rangle = \\ &= \int dy \int dz\, \langle \Phi_{y_G}(z_H), \Phi'_{y_G}(z_H)\rangle = (\Phi, \Phi').\end{aligned}$$

6. Индуцирование в неунимодулярных группах. Если группа G и подгруппа K не являются унимодулярными, то определение унитарного индуцированного представления должно быть видоизменено. Нетрудно убедиться непосредственно, что если определить индуцированное представление $\Delta(K) \uparrow G$ по-прежнему, то оно оказывается в этом случае неунитарным, даже если исходное представление $\Delta(K)$ унитарно. Одновременно в ходе такого анализа выясняется, в каких пунктах следует изменить определение индуцированного представления, чтобы сохранить его унитарность. Сформулируем новое определение индуцированного представления. При этом мы будем пользоваться *правоинвариантными мерами* $d_R g$, $d_R k$ на группах G и K и определим *модули* этих *групп* Δ_G, Δ_K формулами

$$d_R(gg') = \Delta_G(g)\, d_R g', \quad d_R(kk') = \Delta_k(k)\, d_R k'.$$

Факторизация меры $d_R g$ производится по формуле

$$\int_G f(g)\, d_R g = \int_{G/K} dx\, \Delta_G(x_G) \int_K d_R k\, f(x_G k)$$

и определяет *квазиинвариантную**) *меру* dx на $\mathscr{X} = G/K$, преобразующуюся по формуле

$$d(gx) = \frac{\Delta_G((g, x)_K)}{\Delta_K((g, x)_K)}\, dx$$

(в этом случае мера dx зависит от выбора представителей x_G). Эта формула используется для замены переменной интегрирования.

Пусть дано представление $\Delta(K)$ в пространстве $\mathscr{L}$, унитарное относительно скалярного произведения $\langle\,,\rangle$. Реализуем *индуцированное представление* $\Delta \uparrow G$ в пространстве $\mathscr{H}$ функций φ: $G \to \mathscr{L}$ со *структурным условием*

$$\varphi(gk) = \tilde{\Delta}(k^{-1})\, \varphi(g),$$

где обозначено

$$\tilde{\Delta}(k) = \sqrt{\frac{\Delta_K(k)}{\Delta_G(k)}}\, \Delta(k),$$

и определим скалярное произведение в $\mathscr{H}$ как

$$(\varphi, \varphi') = \int_{G/K} dx \langle \varphi(x_G), \varphi'(x_G)\rangle.$$

Операторы индуцированного представления $U(G) = \Delta(K) \uparrow G$ определим как левые сдвиги

$$U(g)\, \varphi(g') = \varphi(g^{-1}g').$$

Тогда это представление унитарно относительно скалярного произведения $(\,,)$.

---

*) Мера dx на G-пространстве $\mathscr{X}$ называется квазиинвариантной, если при преобразовании $x \mapsto gx$ приобретает весовой множитель: $d(gx) = \rho_g(x)\, dx$, причем $\rho_g(x) > 0$ для всех $x \in \mathscr{X}$.

Докажем унитарность представления $U(G)$. Для этого подействуем на функции $\varphi, \varphi' \in \mathscr{H}$ оператором $U(g)$ и найдем скалярное произведение получившихся функций: $(U(g)\varphi, U(g)\varphi') = \int \langle \varphi(g^{-1}x_G), \varphi'(g^{-1}x_G)\rangle\, dx$. Аргументы функций справа преобразуем, пользуясь определением факторов: $g^{-1}x_G = (g^{-1}x)_G (g^{-1}, x)_K$. Появившийся в аргументе фактор убираем, пользуясь структурным условием на функции φ, φ', и переходим к новой переменной интегрирования $x' = g^{-1}x$ с помощью формулы для преобразования меры dx. Опуская штрих у новой переменной интегрирования, получим

$$(U(g)\varphi, U(g)\varphi') = \int \frac{\Delta_G((g, x)_K)}{\Delta_K((g, x)_K)} \cdot \frac{\Delta_K\left((g^{-1}, gx)_K^{-1}\right)}{\Delta_G\left((g^{-1}, gx)_K^{-1}\right)} \langle \varphi(x_G), \varphi'(x_G)\rangle\, dx.$$

Остается воспользоваться тождеством $(g^{-1}, gx)_K^{-1} \equiv (g, x)_K$, чтобы получить равенство $(U(g)\varphi, U(g)\varphi') = (\varphi, \varphi')$, означающее унитарность представления U.

В случае неунимодулярных групп теорема об *индуцировании последовательными шагами* доказывается с очевидными изменениями в структурных условиях. Менее очевидны изменения в формуле для факторизации меры dx на $\mathscr{X}$. Вспомним, что сама эта мера получается факторизацией $d_R g/d_R k$, и произведем эту факторизацию в два этапа. Факторизуя $d_R g/d_R h$, получим

$$\int_G f(g)\, d_R g = \int_{G/H} dy\, \Delta_G(y_G) \int_H d_R h\, f(y_G h).$$

Теперь факторизуем появившийся здесь интеграл по группе H по схеме $d_R h/d_R k \to dz$. Тогда

$$\int_G f(g)\, d_R g = \int_{G/H} dy\, \Delta_G(y_G) \int_{H/K} dz\, \Delta_H(z_H) \int_K d_R k\, f(y_G z_H k).$$

Сравнивая эту формулу с формулой факторизации $d_R g/d_R k$ и учитывая, что $x_G = y_G z_H$, получим

$$\int_{G/K} dx\, \varphi(x) = \int_{G/H} dy \int_{H/K} dz \frac{\Delta_H(z_H)}{\Delta_G(z_H)}\, \varphi(y, z).$$

Эта формула позволяет доказать совпадение скалярных произведений в пространствах-носителях представлений $\Delta(K) \uparrow G$ и $(\Delta(K) \uparrow H) \uparrow G$.

§ 2.3. Теорема о подгруппах и переплетение индуцированных представлений

Теорема о подгруппах выявляет структуру представления $(\Delta(K) \uparrow G) \downarrow H$. В качестве примера можно указать на следующее ее использование (подробнее см. п. 3.3.4). Если неприводимое представление группы Лоренца L задано в форме индуцированного $U(L) = \Delta(H) \uparrow L$ из некоторой подгруппы H, то теорема о подгруппах позволяет найти $U(L) \downarrow R$, т. е. выяснить, какие неприводимые представления группы вращений R входят в состав представления $U \downarrow R$, ограниченного на подгруппу вращений. Подобного рода задачи ограничения на подгруппу постоянно встречаются в физических приложениях [100].

Теорема о переплетении индуцированных представлений описывает пространство $[\Delta(K) \uparrow G, \Lambda(H) \uparrow G]$ и играет существенную роль для приложений, рассмотренных в следующих главах. Индуцированное представление $\Delta(K) \uparrow G$ описывает квантовую систему с группой симметрии G, причем пространство G/K — это множество значений наблюдаемой, которая диагональна в данном представлении. Ясно, что если, например, G/K есть пространство значений координаты, а G/H — пространство значений импульса частицы, то теорема о переплетении позволяет найти связь между координатным и импульсным представлениями. В других случаях она может устанавливать связь между двумя различными квантовыми системами, если одна из них является частью другой или обе они имеют общую часть.

1. Двойные классы смежности. Прежде чем приступить к обсуждению дальнейших и более важных свойств индуцированных представлений, рассмотрим подробно разбиение группы на двойные смежные классы и его связь с разбиением на правые смежные классы. *Двойным смежным классом* по подгруппам H, K группы G называется множество HgK. Принадлежность к одному и тому же двойному смежному классу является отношением эквивалентности, и поэтому двойные классы либо не пересекаются, либо полностью совпадают. Следовательно, совокупность двойных классов представляет собой разбиение группы G.

Рассмотрим двойной класс HgK и поставим задачу разбить его на правые классы $g'K$. Для этого нам понадобятся вспомогательные подгруппы

$$K_g = gKg^{-1}, \quad L_g = K_g \cap H.$$

Рассмотрим два правых класса hgK и $h'gK$, входящих в один и тот же двойной класс HgK. Эти классы могут совпадать даже в том случае, если h и h' различны. Действительно, пусть $h' = hl$, $l \in L_g$. Тогда $lg \in gK$ и, следовательно, $h'gK = hgK$. Обратно, пусть $h'gK = hgK$. Тогда $h^{-1}h' \in K_g$ и, следовательно, $h^{-1}h' \in L_g$.

Таким образом, правые классы hgK и $h'gK$ совпадают в том и только в том случае, если $h' \in hL_g$, т. е. элементы h, h' принадлежат одному и тому же правому смежному классу группы H по подгруппе L_g. Теперь ясно, как перечислить все правые классы $g'K$, входящие в один двойной класс HgK. Для этого нужно построить фактор-пространство $\mathscr{Z}_g = H/L_g$ и в каждом классе $z \in \mathscr{Z}_g$ выбрать представитель z_H. Тогда можно утверждать, что двойной класс HgK разбивается на правые классы $z_H gK$, $z \in \mathscr{Z}_g$. Предыдущие рассуждения гарантируют, что в этом семействе нет совпадающих правых классов.

Рассмотрим теперь множество всех двойных классов, содержащихся в группе G. Обозначим его $\mathscr{Y} = H\backslash G/K$. Для каждого класса y выберем представитель y_G, так что $y = Hy_GK$, и рассмотрим вспомогательные подгруппы

$$K_y = y_G K y_G^{-1}, \quad L_y = K_y \cap H.$$

Мы знаем уже, что двойной класс y разбивается на правые классы $z_H y_G K$, $z \in \mathscr{Z}_y = H/L_y$. Перечисляя все двойные классы из $\mathscr{Y}$ и разбивая каждый из них на правые классы по подгруппе K, мы перечислим, очевидно, все такие классы. Другими словами, каждый правый класс $x \in \mathscr{X} = G/K$ можно представить в виде $x = z_H y_G K$ с некоторыми $y \in \mathscr{Y}$, $z \in \mathscr{Z}_y$. Это определяет взаимно-однозначное отображение однородного пространства $\mathscr{X}$ на множество пар (y, z), $y \in \mathscr{Y}$, $z \in \mathscr{Z}_y$, причем представителем класса $x = (y, z)$ может служить элемент $x_G = z_H y_G$.

Если на однородном пространстве $\mathscr{X}$ и каждом из $\mathscr{Z}_y$ заданы инвариантные меры, на $\mathscr{Y}$ определяется мера, такая, что имеет место факторизация

$$\int_{\mathscr{X}} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathscr{Y}} dy \int_{\mathscr{Z}_y} dz\,\varphi(y, z).$$

Мера на $\mathscr{Y}$, определенная таким способом, обладает большим произволом. Действительно, мера dz на $\mathscr{Z}_y$ определена лишь с точностью до множителя. Переопределяя меры dz умножением на $(\rho(y))^{-1}$, где $y \mapsto \rho(y)$ — некоторая непрерывная положительная функция на $\mathscr{Y}$, мы получим

$$\int_{\mathscr{X}} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathscr{Y}} dy\,\rho(y) \int_{\mathscr{Z}_y} dz\,\varphi(y, z),$$

так что таким переопределением можно добиться умножения меры dy на любой весовой множитель. Можно использовать любую меру из получающегося таким образом класса *эквивалентных мер*. Но нужно следить, разумеется, чтобы мера на $\mathscr{Y}$ была согласована с мерами на $\mathscr{Z}_y$, $y \in \mathscr{Y}$, т. е. факторизовала меру dx на $\mathscr{X}$.

2*. Теорема о подгруппах. Анализ фактор-пространства $\mathscr{X} = G/K$ с помощью пространства $\mathscr{Y} = H\backslash G/K$ приводит к важной теореме о подгруппах, которая выясняет структуру представления, индуцированного из некоторой подгруппы и затем ограниченного, вообще говоря, на другую подгруппу $U(H) = (\Delta(K) \uparrow G) \downarrow H$. Прежде формулировки и формального доказательства теоремы разберем структуру представления U. Оно реализуется в пространстве $\mathscr{H}$ функций $\varphi\colon G \to \mathscr{L}$ со структурным условием $\varphi(gk) = \Delta(k^{-1})\varphi(g)$ и действует в этом пространстве левыми сдвигами из подгруппы H, т. е. $U(h)\varphi(g) = \varphi(h^{-1}g)$.

Рассмотрим значения функции на двойном смежном классе $y = Hy_G K$. Действие подгруппы H слева не выводит за пределы этого класса, так что если мы «вырежем» из функции часть, соответствующую этому классу, т. е. определим новую функцию $\varphi_y(g) = P_y\varphi(g)$, равную функции φ в классе y и нулю вне его, то действие представления переведет ее в функцию точно такого же типа. Функцию φ можно восстановить, складывая функции φ_y, $y \in \mathscr{Y}$.

Функция φ_y полностью определяется своими значениями на подмножестве Hy_G (значения в других точках находятся из структурного условия). Но даже и это лишнее, так как для любого $l \in L_y$ имеем

$$\varphi_y(hly_G) = \varphi_y\left(hy_G\left(y_G^{-1}ly_G\right)\right) = \Delta\left(y_G^{-1}l^{-1}y_G\right)\varphi_y(hy_G).$$

Если обозначить

$$\Delta_y(g) = \Delta(y_G^{-1}gy_G),$$

то мы видим, что функция φ_y сводится к функции ψ_y на H, определяемой формулой $\psi_y(h) = \varphi_y(hy_G)$ и удовлетворяющей дополнительному условию $\psi_y(hl) = \Delta_y(l^{-1})\psi_y(h)$ при $l \in L_y$. Когда функция φ_y преобразуется под действием $U(h)$, т. е. левым сдвигом, функция ψ_y также преобразуется левым сдвигом. Следовательно, в пространстве функций ψ_y (или, эквивалентно, в пространстве функций φ_y) действует индуцированное представление $\Delta_y(L_y)\uparrow H$. Точнее, поскольку Δ_y является, как нетрудно видеть, представлением группы K_y, нужно написать $(\Delta_y \downarrow L_y)\uparrow H$. В итоге мы приходим к теореме.

Теорема 3 (о подгруппах). *Если K, H — любые подгруппы группы G, то*

$$(\Delta(K)\uparrow G)\downarrow H = \int\limits_{H\backslash G/K} dy\,(\Delta_y \downarrow L_y)\uparrow H.$$

Доказательство. Схема доказательства дана выше. Остается уточнить лишь отдельные детали, связанные с гильбертовой структурой пространства. Пусть представление $U_y = \Delta_y(L_y)\uparrow H$ реализовано, как обычно, в пространстве $\mathscr{H}_y$ функций $\psi_y\colon H \to \mathscr{L}$ со структурным условием $\psi_y(hl) = \Delta_y(l^{-1})\psi_y(h)$, $l \in L_y$, или, эквивалентно, в пространстве функций $\psi_y\colon \mathscr{Z}_y \to \mathscr{L}$, где $\mathscr{Z}_y = H/L_y$, со скалярным произведением

$$(\psi_y, \psi'_y)_y = \int\limits_{\mathscr{Z}_y} dz\,\langle\psi_y(z), \psi'_y(z)\rangle.$$

Пользуясь мерой dy на $\mathscr{Y}$, согласованной с мерами на $\mathscr{Z}_y$, определим прямой интеграл $\tilde{U}(H) = \int\limits_{\mathscr{Y}} U_y\,dy$. Это новое представление реализовано в пространстве $\tilde{\mathscr{H}}$, векторами которого являются семейства $\psi = \{\psi_y \in \mathscr{H}_y \mid y \in \mathscr{Y}\}$. Скалярное произведение в этом пространстве определяется формулой $(\psi, \psi') = \int (\psi_y, \psi'_y)_y\,dy$, а действие представления—формулой $\tilde{U}(h)\{\psi_y\} = \{U_y(h)\psi_y\}$.

Теперь определим линейное отображение T этого пространства в пространство функций на G формулой

$$\varphi(hy_Gk) = (T\psi)(hy_Gk) = \Delta\left(k^{-1}\right)\psi_y(h).$$

Это определение корректно, так как при $h'y_Gk' = hy_Gk$ имеем $h' = hl$, $(k')^{-1} = k^{-1}y_G^{-1}ly_G$ с некоторым $l \in L_y$, и $\varphi(h'y_Gk') = \varphi(hy_Gk)$ в силу определения представления Δ_y и структурного условия на ψ_y. Легко видеть, что любая функция $\varphi\colon G \to \mathscr{L}$ со структурным условием $\varphi(gk) = \Delta\left(k^{-1}\right)\varphi(g)$ может быть представлена в виде $T\psi$ с некоторым $\psi \in \tilde{\mathscr{H}}$, т. е. T является отображением на $\mathscr{H}$. Действительно, для этого достаточно взять $\psi_y(h) = \varphi(hy_G)$. Далее, легко убедиться в том, что ядро отображения T равно нулю, т. е. T — биекция пространства $\tilde{\mathscr{H}}$ на пространство $\mathscr{H}$ индуцированного представления $\Delta(K)\uparrow G$. Тривиально проверяется, что T переплетает представление $\tilde{U}$ с представлением $U = (\Delta\uparrow G)\downarrow H$. Остается проверить, что T сохраняет гильбертову структуру, т. е. является изометрией. Но это легко показывается, если учесть, что мера dy согласована с мерами на $\mathscr{Z}_y$:

$$(\varphi, \varphi') = \int\limits_{\mathscr{X}} dx\,\langle\varphi(x_G), \varphi'(x_G)\rangle = \int\limits_{\mathscr{Y}} dy \int\limits_{\mathscr{Z}_y} dz\,\langle\varphi(z_Hy_G), \varphi'(z_Hy_G)\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathscr{Y}} dy \int\limits_{\mathscr{Z}_y} dz\,\langle\psi_y(z_H), \psi'_y(z_H)\rangle = \int\limits_{\mathscr{Y}} dy\,(\psi_y, \psi'_y)_y = (\psi, \psi').$$

3. Переплетение индуцированных представлений. Перейдем к центральной теореме теории индуцированных представлений — теореме о переплетении индуцированных представлений, ограничившись пока случаем унимодулярных групп и подгрупп (общий случай рассмотрен в пункте 7). Пусть K, H — произвольные подгруппы группы G. Рассмотрим представление Δ группы K в пространстве $\mathscr{L}_\Delta$ и представление Λ группы H в пространстве $\mathscr{L}_\Lambda$. Построим индуцированные представления $U_\Delta = \Delta(K)\uparrow G$ и $U_\Lambda = \Lambda(H)\uparrow G$. Задача состоит в том, чтобы описать пространство переплетения этих представлений.

Теорема 4 (о переплетении индуцированных представлений). *Если индуцированные представления* $\Delta(K)\uparrow G$ *и* $\Lambda(H)\uparrow G$ *реализованы в пространствах* $\mathscr{H}_\Delta$, $\mathscr{H}_\Lambda$ *функций на* G *со структурными условиями соответственно* $\varphi(gk) = \Delta(k^{-1})\varphi(g)$, $\psi(gh) = \Lambda(h^{-1})\psi(g)$, *то пространство переплетения* $[\Delta\uparrow G, \Lambda\uparrow G]$ *состоит из интегральных операторов вида*

$$\psi(g) = T\varphi(g) = \int_G t(g')\varphi(gg')\,dg' = \int_G t(g^{-1}g')\varphi(g')\,dg',$$

где dg — *инвариантная мера, а* t — *функция на* G *со значениями в пространстве* $L(\mathscr{L}_\Delta, \mathscr{L}_\Lambda)$ *операторов из* $\mathscr{L}_\Delta$ *в* $\mathscr{L}_\Lambda$, *удовлетворяющая структурному условию*

$$t(hgk) = \Lambda(h)t(g)\Delta(k)$$

для всех $g\in G$, $h\in H$, $k\in K$.

Замечания. 1) Подынтегральное выражение в формуле для T постоянно на классах gK, поэтому для случая, когда подгруппа K некомпактна, интеграл теряет смысл. Вместо этого следует использовать формулу (в случае компактной подгруппы — эквивалентную)

$$\psi(g) = T\varphi(g) = \int_{\mathscr{X}} t(x_G)\varphi(gx_G)\,dx = \int_{\mathscr{X}} t(g^{-1}x_G)\varphi(x_G)\,dx.$$

2) На функцию t должно быть наложено еще условие, обеспечивающее ограниченность оператора T. Если K и H — компактные подгруппы, а Δ и Λ — конечномерные представления, то функция t должна исчезать вне компактного подмножества в G. Если не налагать такого рода требования, то после преобразования T могут получаться обобщенные векторы.

3) В общем случае оператор T может быть определен как интегральный оператор лишь на некотором всюду плотном подпространстве в $\mathscr{H}_\Delta$. Это подпространство должно состоять из функций достаточной степени гладкости (должно быть *ядерным*). Распространение T с этого подпространства на все $\mathscr{H}_\Delta$ представляет собой трудную задачу и зависит, разумеется, от способа доопределения функциональной структуры пространства $\mathscr{H}_\Delta$. В случае, если K и H компактны, а Δ и Λ конечномерны, оператор T определен на всем пространстве $\mathscr{H}_\Delta$ квадратично-интегрируемых функций.

4) Мы докажем лишь алгебраическую часть теоремы, ограничившись приведенными выше замечаниями относительно функционально-аналитического аспекта ее. Для случая компактных подгрупп и конечномерных представлений можно было бы провести доказательство полностью. Однако это не представляется целесообразным потому, что все равно не охватывает всех случаев, необходимых для приложений. Кроме того, мы встретимся с тем, что физически интересным является отображение

векторов из пространства $\mathscr{H}_\Delta$ в *обобщенные* векторы пространства $\mathscr{H}_\Lambda$. Пожалуй, можно сказать, что целесообразно пользоваться лишь алгебраическими структурами, устанавливаемыми теоремой о переплетении, обсуждая функционально-аналитические структуры в каждом случае отдельно, с учетом физического смысла операции переплетения. При этом функция t: $G\to L(\mathscr{L}_\Delta, \mathscr{L}_\Lambda)$ может быть даже обобщенной функцией.

Доказательство. Чтобы показать, что оператор T, записанный в интегральной форме, является оператором переплетения, нужно показать, во-первых, что он отображает пространство $\mathscr{H}_\Delta$ представления $U_\Delta = \Delta(K)\uparrow G$ в пространство $\mathscr{H}_\Lambda$ представления $U_\Lambda = \Lambda(H)\uparrow G$ и, во-вторых, что он коммутирует с соответствующими представлениями. И то, и другое проверяется непосредственно.

Задача 1. Проверить, что если $\varphi\in\mathscr{H}_\Delta$, то $T\varphi = \psi$ — функция на G со значениями в $\mathscr{L}_\Lambda$, удовлетворяющая структурному условию $\psi(gh) = \Lambda(h^{-1})\psi(g)$, т. е. $T\varphi\in\mathscr{H}_\Lambda$.

Задача 2. Показать, что $TU_\Delta(g) = U_\Lambda(g)T$ для всех $g\in G$.

Проверим обратное утверждение. Пусть $T\in[U_\Delta, U_\Lambda]$. Предположим, что этот оператор выражается в интегральной форме (см. замечание 3):

$$\psi(g) = T\varphi(g) = \int t(g, g')\varphi(g')\,dg',$$

где $t(g, g')\in L(\mathscr{L}_\Delta, \mathscr{L}_\Lambda)$. Тогда условие, что T переплетает U_Δ и U_Λ, приводит к таким ограничениям на ядро $t(g, g')$, что оператор приводится к виду, указанному в формулировке теоремы. Действительно, из-за структурного условия на φ можно без ущерба для общности считать, что $t(g, g'k) = t(g, g')\Delta(k)$ (если ядро $\tilde{t}(g, g')$ не обладает этим свойством, мы образуем новое ядро $t(g, g') = \frac{1}{|K|}\int_K \tilde{t}(g, g'k)\Delta(k^{-1})\,dk$. Далее, в силу структурного условия на ψ получаем $t(gh, g') = \Lambda(h^{-1})t(g, g')$. Наконец, требование коммутирования T с представлениями дает $t(g, g_1g') = t(g_1^{-1}g, g')$. Из этого последнего условия получаем $t(g, g') = t(1, g^{-1}g')$. Полагая $t(1, g) = t(g)$, из первых двух условий немедленно получаем для этой функции $t(hgk) = \Lambda(h)t(g)\Delta(k)$, и оператор T приводится к нужному виду.

Мы провели доказательство, предполагая, что группа K компактна (и, следовательно, имеет конечную меру). Если она некомпактна, то с самого начала следует реализовать индуцированное представление функциями на однородном пространстве, после чего доказательство проводится аналогично.

4. Структура оператора переплетения. Для того чтобы эффективно пользоваться теоремой о переплетении, обсудим детальнее структуру функции $g\to t(g)$, обусловливаемую требованием $t(hgk) = \Lambda(h)t(g)\Delta(k)$. Прежде всего, ясно, что это требование определяет функцию на двойном классе HgK, коль скоро известно ее значение в одной точке этого класса. Поэтому достаточно задать функцию на множестве представителей y_G двойных классов $y \in \mathcal{Y} = H\backslash G/K$. Но и эти значения $t(y_G)$ не могут быть произвольными. Ограничения на них возникают из требования, чтобы значения $t(hy_Gk)$ и $t(h'y_Gk')$ совпадали, если совпадают элементы hy_Gk и $h'y_Gk'$. Совпадение этих элементов означает, что $h' = hl$, $k' = y_G^{-1}l^{-1}y_Gk$, где $l \in L_y = K_y \cap H$, $K_y = y_GKy_G^{-1}$ (см. пункты 1 и 2). Поэтому необходимо потребовать

$$\Lambda(l)t(y_G)\Delta(y_G^{-1}l^{-1}y_G) = t(y_G).$$

Используя представление Δ_y группы K_y, определяемое формулой $\Delta_y(g) = \Delta(y_G^{-1}gy_G)$, получим для $t(y_G)$ условие

$$t(y) = t(y_G) \in [\Delta_y(K_y) \downarrow L_y,\ \Lambda(H) \downarrow L_y].$$

Задача 3. Показать, что в случае, если $G = H \otimes K$ (полупрямое произведение), функция t определяется своим значением $t(1) \in L(\mathcal{L}_\Delta, \mathcal{L}_\Lambda)$.

Эта задача демонстрирует, насколько существенно структура общих формул может упрощаться в частных случаях. В частности, нередки случаи, когда один двойной класс исчерпывает всю группу, и его представителем является групповая единица.

Чтобы проанализировать структуру интеграла, определяющего T, воспользуемся формой его, в которой интегрирование производится по фактор-пространству $\mathcal{X} = G/K$ (см. замечание 1 в предыдущем пункте). Далее факторизуем меру, как описано в пункте 1, и получим

$$\psi(g) = \int_{\mathcal{Y}} dy \int_{Z_y} dz\, t(z_Hy_G)\,\varphi(gz_Hy_G)$$

или

$$\psi(g) = \int_{\mathcal{Y}} dy \int_{Z_y} dz\, \Lambda(z_H)\, t(y)\,\varphi(gz_Hy_G).$$

В этой формуле максимально выявлен произвол переплетения. Действительно, фигурирующая здесь функция $y \mapsto t(y)$ совершенно произвольна, если не считать функционально-аналитических ограничений и условия $t(y) \in [\Delta_y \downarrow L_y, \Lambda \downarrow L_y]$.

Замечания. 1) При пользовании этой формулой для оператора переплетения нужно помнить, что мера $dy\,dz$ может отличаться от dx на множестве меры нуль. Некоторые точки $x \in \mathcal{X}$ могут при этом выпасть из рассмотрения. Если же в качестве функций t допускаются обобщенные функции, нельзя пренебрегать даже множеством меры нуль. В таких случаях при факторизации меры следует проявлять осторожность. Множество пар (y, z) должно находиться во взаимно-однозначном соответствии с множеством точек $x \in \mathcal{X}$. Нельзя выбрасывать отдельные пары, даже если они составляют пренебрежимое (относительно меры) множество. С примером, когда это оказывается существенно, мы встретимся в пункте 6.

2) Обозначая

$$H^g = g^{-1}Hg,\quad L^g = K \cap H^g,\quad \Lambda^g(l) = \Lambda(glg^{-1}),$$

можно переписать условие на ядро t в виде

$$t(g) \in [\Delta_g(K_g) \downarrow L_g,\ \Lambda(H) \downarrow L_g] = [\Delta(K) \downarrow L^g,\ \Lambda^g(H^g) \downarrow L^g].$$

Выбирая $g = y_G$, получим для $t(y)$ условие (в очевидных обозначениях)

$$t(y) \in [\Delta_y(K_y) \downarrow L_y,\ \Lambda(H) \downarrow L_y] = [\Delta(K) \downarrow L^y,\ \Lambda^y(H^y) \downarrow L^y].$$

3) Преобразованием $g \mapsto g^{-1}$ можно перейти к формализму, в котором индуцированные представления реализованы на множестве левых классов, например,

$$\check{\varphi}(kg) = \Delta(k)\check{\varphi}(g);\quad \check{U}(g)\varphi(g') = \varphi(g'g).$$

В этом случае оператор переплетения имеет вид

$$\check{\psi}(g) = \check{T}\check{\varphi}(g) = \int_G t(g')\check{\varphi}(g'^{-1}g)\,dg' = \int_G t(g'^{-1}g)\check{\varphi}(g')\,dg',$$

где ядро t удовлетворяет прежнему структурному условию.

5*. Теорема взаимности. Теорема взаимности Фробениуса является прямым следствием теоремы о переплетении. Чтобы доказать ее, заметим предварительно, что любое представление Γ группы G эквивалентно некоторому индуцированному представлению, именно представлению $\Gamma(G) \uparrow G$. Пусть представление Γ действует в пространстве $\mathcal{L}_\Gamma$ с векторами $\Phi \in \mathcal{L}_\Gamma$, а индуцированное представление U_Γ, как всегда, в пространстве $\mathcal{H}_\Gamma$ функций φ: $G \to \mathcal{L}_\Gamma$ со структурным условием $\varphi(g'g) = \Gamma(g^{-1})\varphi(g')$. Это условие позволяет, очевидно, выразить значение функции в любой точке группы через ее значение в одной точке: $\varphi(g) = \Gamma(g^{-1})\varphi(1)$.

Сопоставим каждому вектору $\Phi \in \mathcal{L}_\Gamma$ функцию $\varphi \in \mathcal{H}_\Gamma$, имеющую в точке $g = 1$ значение Φ. Этим определяется оператор A: $\mathcal{L}_\Gamma \to \mathcal{H}_\Gamma$,

$$\varphi(g) = A\Phi(g) = \Gamma(g^{-1})\Phi.$$

Легко видеть, что он переплетает представления Γ и U_Γ:

$$(A\Gamma(g)\Phi)(g') = \Gamma(g'^{-1})\Gamma(g)\Phi = \Gamma(g'^{-1}g)\Phi = (A\Phi)(g^{-1}g') = (U_\Gamma(g)A\Phi)(g').$$

Ядро оператора A равно нулю, и обратный к нему оператор A^{-1} сопоставляет функции φ: $G \to \mathscr{L}_\Gamma$ ее значение в точке $g = 1$:

$$\Phi = A^{-1}\varphi = \varphi(1).$$

Таким образом, $\Gamma(G) = U_\Gamma(G) = \Gamma(G) \uparrow G$.

В п. 2.1.2 было показано, что кратность неприводимого представления A во вполне приводимом представлении B равна размерности пространства переплетения $[A, B]$ или, что то же, размерности пространства $[B, A]$. Теорема взаимности утверждает, что для неприводимого представления Γ группы G и неприводимого представления Δ подгруппы K кратность Γ в $\Delta \uparrow G$ равна кратности Δ в $\Gamma \downarrow K$. Очевидно, ее можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5 (взаимности). *Для любых представлений* $\Gamma(G)$ *и* $\Delta(K)$, *где* $K \subset G$, *имеет место изоморфизм линейных пространств*:

$$[\Delta \uparrow G, \Gamma] = [\Delta, \Gamma \downarrow K].$$

Мы докажем этот изоморфизм в случае любых (не обязательно неприводимых) представлений $\Gamma(G)$, $\Delta(K)$.

Используя доказанную выше эквивалентность $\Gamma = \Gamma \uparrow G$, заменим пространство $[\Delta \uparrow G, \Gamma]$ пространством переплетения двух индуцированных представлений $[\Delta(K) \uparrow G, \Gamma(G) \uparrow G]$. Для построения этого пространства нужно разбить группу G на двойные классы по подгруппам G, K. В данном случае, разумеется, имеется лишь один двойной класс $G \cdot 1 \cdot K = G = y$ с представителем $y_G = 1$. Вспомогательные группы и представление, необходимые для построения, равны в данном случае $K_y = K$, $L_y = K_y \cap G = K$, $\Delta_y = \Delta$. Согласно результатам предыдущего пункта, оператор переплетения $T: \mathscr{H}_\Delta \to \mathscr{H}_\Gamma$ определяется заданием оператора $t_0 = t(1) \in [\Delta, \Gamma \downarrow K]$ и равен

$$T\varphi(g) = \int_{G/K} dx\, \Gamma(x_G)\, t_0 \varphi(g x_G).$$

Используя оператор A^{-1}, устанавливающий эквивалентность $\Gamma \uparrow G = \Gamma$, получим для оператора $T_0 = A^{-1}T \in [\Delta \uparrow G, \Gamma]$ выражение

$$\Phi = T_0\varphi = \int_{G/K} dx\, \Gamma(x_G)\, t_0 \varphi(x_G).$$

Эта формула устанавливает искомый изоморфизм. Действительно, любому $t_0 \in [\Delta, \Gamma \downarrow K]$ она сопоставляет оператор $T_0 \in [\Delta \uparrow G, \Gamma]$. Легко видеть, что это сопоставление является линейным отображением. По теореме о переплетении индуцированных представлений каждый оператор T_0 можно представить в таком виде. Наконец, ядро отображения $t_0 \mapsto T_0$ равно нулю.

Чтобы доказать последнее утверждение, достаточно для любого $F \in \mathscr{L}_\Delta$ выбрать функцию $x \mapsto \varphi(x_G)$ равной нулю вне малой области $\Omega \subset \mathscr{X}$, содержащей точку x_0, а в этой области равной F. Тогда $T_0\varphi$ близко к $\mu(\Omega)\, t_0 F$, где $\mu(\Omega) = \int_\Omega dx$ — мера области Ω. Ясно, что если $T_0 = 0$, то $t_0 F = 0$, т. е. $t_0 = 0$.

Оператор S_0 из обратного пространства переплетения $[\Gamma(G), \Delta(K) \uparrow G]$ находится аналогично. Для этого представление $\Gamma(G)$ с помощью оператора A реализуем как представление $\Gamma(G) \uparrow G$ и затем по общему рецепту находим оператор $S \in [\Gamma \uparrow G, \Delta \uparrow G]$. Тогда оператор $S_0 = SA \in [\Gamma, \Delta \uparrow G]$

$$\varphi(g) = S_0\Phi(g) = s_0\Gamma(g^{-1})\Phi, \quad s_0 \in [\Gamma(G) \downarrow K, \Delta(K)].$$

Замечание. Доказательство изоморфизма $[\Delta, \Gamma \downarrow K] = [\Delta \uparrow G, \Gamma]$ остается неполным, пока не решен вопрос о существовании интеграла, выражающего T_0 через t_0. Этот вопрос решается различным образом в зависимости от того, какие функционально-аналитические ограничения накладываются на пространство $\mathscr{H}_\Delta$. В частности, в работе [84] показано, что с точки зрения теоремы взаимности естественно включить в $\mathscr{H}_\Delta$ функции, интегрируемые с первой степенью, так что $\mathscr{H}_\Delta$ превращается в нормированное (*банахово*) пространство с нормой $\|\varphi\| = \int_{G/K} dx \|\varphi(x)\|$. В этом случае на пространстве переплетения также вводится структура банахова пространства и отображение $t_0 \mapsto T_0$ оказывается изоморфизмом банаховых пространств. Такое определение индуцированного представления и определение Макки близки в том смысле, что соответствующие пространства-носители (банахово и гильбертово) имеют общее всюду плотное подпространство. Для определения Макки остается справедливой более слабая формулировка теоремы взаимности: кратность неприводимого $\Gamma(G)$ в $\Delta \uparrow G$ равна кратности неприводимого $\Delta(K)$ в $\Gamma \downarrow K$.

6. Критерий неприводимости индуцированного представления. В частном случае переплетаемые представления могут совпадать. Тогда из теоремы о переплетении следует, что коммутант $[\Delta(K) \uparrow G]$ индуцированного представления состоит из операторов вида

$$T\varphi(g) = \int_{G/K} dx\, t(x_G)\, \varphi(g x_G),$$

где операторнозначная функция $t: G \to L(\mathscr{L})$ удовлетворяет условию

$$t(kgk') = \Delta(k)\, t(g)\, \Delta(k')$$

для любых $g \in G$; $k, k' \in K$. Отсюда следует, что при разбиении группы на двойные смежные классы $y \in \mathscr{Y} = K \backslash G/K$ в точке

y_G, являющейся представителем класса $y = Ky_GK$, значение этой функции $t(y_G)$ должно быть оператором из пространства переплетения

$$t(y) = t(y_G) \in [\Delta_y(K_y) \downarrow L_y,\ \Delta(K) \downarrow L_y],$$

где

$$K_y = y_G K y_G^{-1};\quad L_y = K_y \cap K;$$
$$\Delta_y(g) = \Delta(y_G^{-1} g y_G).$$

Оператор T выражается через функцию $y \mapsto t(y)$ формулой

$$T\varphi(g) = \int\limits_{K \backslash G/K} dy \int\limits_{K/L_y} dz\, \Delta(z_K)\, t(y)\, \varphi(g z_K y_G).$$

Замечание 1. Множество двойных классов $\mathscr{Y} = K\backslash G/K$ получается факторизацией множества $\mathscr{X} = G/K$ по отношению эквивалентности $gK \sim g'K$, определенному включением $g' \in Kg$. При этом каноническая проекция π: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ сопоставляет классу gK двойной класс KgK. Легко видеть, что прообразом точки $y_0 = K \in \mathscr{Y}$ при такой проекции является единственная точка $x_0 = K \in \mathscr{X}$, в то время как другим точкам соответствуют прообразы, состоящие, вообще говоря, более чем из одной точки. Если пространство $\mathscr{X}$ непрерывно, то одноточечное множество $\{x_0\}$ имеет нулевую меру (относительно dx), а вместе с ним и множество $\{y_0\}$ имеет нулевую меру (относительно dy), так что точка y_0 вообще может быть выброшена при интегрировании гладких функций. Однако если t — обобщенная функция, то точку x_0 (или соответственно y_0) обязательно нужно учитывать. В частности, единичный оператор (принадлежащий, конечно, коммутанту) получается, если выбрать $t(x_G) = \delta(x, x_0)$ или соответственно $t(y) = \delta(y, y_0)$.

Если заранее известно, что представление $\Delta \uparrow G$ вполне приводимо (например, унитарно), то теорема о переплетении позволяет найти критерий его неприводимости. Действительно, для неприводимости в этом случае достаточно (см. п. 2.1.3), чтобы $[\Delta \uparrow G] = \mathbb{C}$ (коммутант содержит лишь операторы, кратные единице). Это в свою очередь достигается, если представление Δ неприводимо и пространство переплетения $[\Delta_y \downarrow L_y,\ \Delta \downarrow L_y]$ обращается в нуль для всех $y \in \mathscr{Y}$, кроме $y = K$. Нетрудно убедиться, что в этом случае действительно коммутант является одномерным пространством.

Для этого построим по общим правилам функцию t. Во всех точках $y \neq K$ имеем $t(y) = 0$. Выбирая в качестве представителя класса $y_0 = K$ единицу $(y_0)_G = 1$, получим $K_{y_0} = K$, $L_{y_0} = K$, $\Delta_{y_0} = \Delta$, так что $t(y_0) \in [\Delta(K)]$. Но в силу неприводимости представления Δ имеем $[\Delta] = \mathbb{C}$. Следовательно, $t(y) = \lambda\delta(y, y_0)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Подставляя это в выражение для оператора переплетения T и выполняя интегрирование по $\mathscr{Y}$ с помощью основного свойства дельта-функции, получим $T\varphi(g) = \lambda\varphi(g)$, откуда заключаем, что $[\Delta \uparrow G] = \mathbb{C}$.

Замечание 2. Если пространство $\mathscr{X} = G/K$ дискретно, то из того, что $[\Delta_y \downarrow L_y,\ \Delta \downarrow L_y] = 0$ для всех $y \neq y_0$, непосредственно следует, что функция $x \mapsto t(x) = t(x_G)$ отлична от нуля лишь в точке $x = x_0$, т. е. $t(x) = \delta(x, x_0)$ (символ Кронекера). Если же $\mathscr{X}$ непрерывно, то обобщенная функция $x \mapsto t(x)$, сосредоточенная в точке x_0, имеет вид $Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x, x_0)$, где Q — полином конечной степени по полному набору дифференцирований на $\mathscr{X}$. При этом если степень полинома равна нулю, то получаем $t(x) = \lambda\delta(x, x_0)$ и $T = \lambda \cdot \mathbb{1}$; если же степень выше нуля, то оператор T — это дифференциальный оператор, т. е. не ограничен (норма продифференцированной функции $T\varphi$ зависит не от нормы исходной функции φ, а от быстроты ее изменения, поэтому отношение $\| T\varphi \| / \| \varphi \|$ может быть сделано сколь угодно большим для быстро осциллирующей функции φ). Таким образом, доказано, что каждый ограниченный оператор, коммутирующий с представлением, кратен единичному. Это и называется *операторной неприводимостью* и в случае унитарного представления гарантирует неприводимость. Вопрос о дифференциальных операторах, коммутирующих с представлением, — так называемых *операторах Казимира* — имеет самостоятельный интерес.

В результате получаем следующую теорему.

Теорема 6 (критерий неприводимости индуцированного представления). *Представление $\Delta \uparrow G$ операторно неприводимо, если представление Δ неприводимо и пространство $[\Delta_y \downarrow L_y,\ \Delta \downarrow L_y] = 0$ для всех $y \in K\backslash G/K$, $y \neq K$.*

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 7. *Два неприводимых индуцированных представления $\Delta(K) \uparrow G$ и $\Lambda(H) \uparrow G$ неэквивалентны, если $[\Delta_y(K_y) \downarrow L_y,\ \Lambda(H) \downarrow L_y] = 0$ для всех $y \in H\backslash G/K$.*

7. Переплетение индуцированных представлений неунимодулярных групп находится лишь немногим более сложно. Рассмотрим индуцированные представления $\Delta(K) \uparrow G$ и $\Lambda(H) \uparrow G$, причем все фигурирующие здесь группы будем предполагать, вообще говоря, неунимодулярными, а модули их обозначим соответственно через Δ_G, Δ_K, Δ_H. Тогда представления $\Delta \uparrow G$ и $\Lambda \uparrow G$ определяются как представления левыми сдвигами соответственно в пространствах $\mathscr{H}_\Delta$ и $\mathscr{H}_\Lambda$ функций φ: $G \to \mathscr{L}_\Delta$ и ψ: $G \to \mathscr{L}_\Lambda$ со структурными условиями (см. п. 2.2.6)

$$\varphi(gk) = \tilde{\Delta}(k^{-1})\,\varphi(g);\quad \psi(gh) = \tilde{\Lambda}(h^{-1})\,\psi(g),$$

где обозначено

$$\tilde{\Delta}(k) = \sqrt{\frac{\Delta_K(k)}{\Delta_G(k)}}\,\Delta(k),\quad \tilde{\Lambda}(h) = \sqrt{\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}}\,\Lambda(h).$$

Введем еще одно представление группы K, определив его как

$$\underset{\sim}{\Delta}(k)=\sqrt{\frac{\Delta_G(k)}{\Delta_K(k)}}\,\Delta(k).$$

Тогда произвольный оператор переплетения $T\in[\Delta\uparrow G,\ \Lambda\uparrow G]$ имеет вид

$$T\varphi(g)=\psi(g)=\int\limits_{G/K} t(g^{-1}x_G)\,\varphi(x_G)\,dx,$$

где интегрирование ведется по квазиинвариантной мере на G/K, определенной в п. 2.2.6 и удовлетворяющей условию

$$d(gx)=\frac{\Delta_G((g,x)_K)}{\Delta_K((g,x)_K)}\,dx,$$

а операторнозначная функция $t\colon G\to L(\mathscr{L}_\Delta,\mathscr{L}_\Lambda)$ удовлетворяет структурному условию

$$t(hgk)=\tilde{\Lambda}(h)\,t(g)\,\underset{\sim}{\Delta}(k)$$

для любых $g\in G$, $k\in K$, $h\in H$.

Проверим, что оператор T действительно переплетает индуцированные представления. Для этого достаточно проверить, что функция $\psi=T\varphi$ удовлетворяет структурному условию $\psi(gh)=\tilde{\Lambda}(h^{-1})\psi(g)$ и что левый сдвиг функции φ соответствует левому сдвигу функции $\psi=T\varphi$. Первое является непосредственным следствием структурного условия на функцию t. Проверим второе. Имеем $\psi(g_0^{-1}g)=\int dx\,t(g^{-1}g_0x_G)\,\varphi(x_G)$. Преобразуем аргумент функции t, пользуясь определением факторов $g^{-1}g_0x_G=g^{-1}(g_0x)_G(g_0,x)_K$. Используя структурное условие на функцию t, получаем $t(g^{-1}g_0x_G)=t(g^{-1}(g_0x)_G)\underset{\sim}{\Delta}((g_0,x)_K)$. Теперь интеграл принимает вид

$$\psi(g_0^{-1}g)=\int t(g^{-1}(g_0x)_G)\frac{\Delta_G((g_0,x)_K)}{\Delta_K((g_0,x)_K)}\tilde{\Delta}((g_0,x)_K)\,\varphi(x_G)\,dx,$$

где мы выразили представление $\underset{\sim}{\Delta}$ через $\tilde{\Delta}$.

Используя структурное условие на функцию $\varphi\in\mathscr{H}_\Delta$, получим $\tilde{\Delta}((g_0,x)_K)\varphi(x_G)=\varphi\left(x_G(g_0,x)_K^{-1}\right)$. С помощью определения факторов преобразуем аргумент этой функции как $x_G(g_0,x)_K^{-1}=g_0^{-1}(g_0x)_G$, и интеграл принимает вид

$$\psi(g_0^{-1}g)=\int\frac{\Delta_G((g_0,x)_K)}{\Delta_K((g_0,x)_K)}\,t(g^{-1}(g_0x)_G)\,\varphi(g_0^{-1}(g_0x)_G)\,dx.$$

Переходя к новой переменной интегрирования $x'=g_0x$ и учитывая закон преобразования меры dx при подстановке $x\mapsto g_0x$, получим окончательно

$$\psi(g_0^{-1}g)=\int t(g^{-1}x_G)\,\varphi(g_0^{-1}x_G)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Можно преобразовать выражение для оператора T к несколько иному виду. Для этого преобразуем аргумент функции t и воспользуемся структурным условием для нее: $t(g^{-1}x_G)=t((g^{-1}x)_G(g^{-1},x)_K)=t((g^{-1}x)_G)\underset{\sim}{\Delta}((g^{-1},x)_K)$. Теперь в выражении для T сделаем замену переменной интегрирования $x\mapsto gx$. Тогда

$$T\varphi(g)=\int t(x_G)\,\underset{\sim}{\Delta}((g^{-1},gx)_K)\,\varphi((gx)_G)\,d(gx).$$

Используя формулу для преобразования меры dx, тождество $(g^{-1},gx)_K=(g,x)_K^{-1}$ и определение представлений $\underset{\sim}{\Delta}$ и $\tilde{\Delta}$, получим

$$T\varphi(g)=\int t(x_G)\,\tilde{\Delta}\left((g,x)_K^{-1}\right)\varphi((gx)_G)\,dx.$$

Наконец, используя структурное условие для функции φ, получим для оператора переплетения другое выражение:

$$T\varphi(g)=\int\limits_{G/K} t(x_G)\,\varphi(gx_G)\,dx.$$

Благодаря структурному условию функция t определяется своими значениями в точках y_G, являющихся представителями двойных классов смежности $y=Hy_GK\in H\backslash G/K$. При этом значение в точке y_G в силу того же структурного условия ограничено следующим образом:

$$t(y)=t(y_G)\in[\underset{\sim}{\Delta}_y(K_y)\downarrow L_y,\ \tilde{\Lambda}(H)\downarrow L_y]=[\underset{\sim}{\Delta}(K)\downarrow L^y,\ \tilde{\Lambda}^y(H^y)\downarrow L^y],$$

где обозначено

$$K_y=y_GKy_G^{-1},\qquad H^y=y_G^{-1}Hy_G,$$
$$L_y=K_y\cap H,\qquad L^y=K\cap H^y,$$
$$\underset{\sim}{\Delta}_y(g)=\underset{\sim}{\Delta}(y_G^{-1}gy_G);\qquad \tilde{\Lambda}^y(g)=\tilde{\Lambda}(y_Ggy_G^{-1}).$$

Факторизуя меру dx:

$$\int\limits_{G/K} dx\,\varphi(x)=\int\limits_{H\backslash G/K} dy\int\limits_{H/L_y} dz\,\varphi(z_Hy_GK),$$

$$d(hz)=\frac{\Delta_H((h,z)_{L_y})}{\Delta_{L_y}((h,z)_{L_y})}\,dz,$$

можно выразить оператор T через функцию $y \to t(y)$ на $\mathcal{Y} = H\backslash G/K$:

$$T\varphi(g) = \int\limits_{H\backslash G/K} dy \int\limits_{H/L_y} dz\, \tilde{\Lambda}(z_H)\, t(y)\, \varphi(g z_H y_G).$$

Заметим, что в этой формуле в качестве меры dy можно выбрать любую из класса эквивалентных мер, так как при каждом $y \in \mathcal{Y}$ оператор $t(y)$ можно умножить на произвольное число.

Замечание. Из-за того, что мера $dy\,dz$ может отличаться от dx на множестве меры нуль, последняя форма оператора переплетения требует известной осторожности в обращении, когда $y \mapsto t(y)$ — обобщенная функция. Условие, ограничивающее выбор значений $t(y)$, может быть несправедливым на множестве меры нуль. В частности, если $H = K$, $\Lambda = \Delta$, т. е. исследуется коммутант $[\Delta(K)\uparrow G]$, в точке $y_0 = K$ это условие дает $t(y_0) \in [\Delta, \tilde{\Delta}]$. Это в общем случае неверно, так как запрещает выбор $t(y) = \delta(y, y_0)$, соответствующий оператору $T = \mathbb{1}$. Это связано с тем, что для непрерывного (не дискретного) пространства $\mathcal{X} = G/K$ множество $\{x_0\}$ обладает нулевой мерой (см. замечание 1 в пункте 6). При использовании функции $x \mapsto t(x_G)$ трудности не возникает, так как выбор $t(x_G) = \delta(x, x_0)$ удовлетворяет структурному условию $t(kgk') = \tilde{\Delta}(k)\, t(g)\, \underset{\approx}{\Delta}(k')$. При доказательстве следует помнить, что дельта-функция $\delta(x, x')$, определенная с помощью квазиинвариантной меры dx, обладает свойством квазиинвариантности:

$$\delta(gx', x) = \frac{\Delta_G\left((g^{-1}, x)_K\right)}{\Delta_K\left((g^{-1}, x)_K\right)}\, \delta(x', g^{-1}x).$$

8*. Проективные индуцированные представления. В квантовой теории умножение вектора состояния на число дает вектор, описывающий то же самое состояние. Поэтому представления групп, описывающие симметрию квантовой системы, вообще говоря, являются проективными. *Проективное представление* A сопоставляет каждому элементу группы $g \in G$ оператор в линейном пространстве $A(g)$ так, что для любых $g, g' \in G$ выполняется равенство

$$A(g)\, A(g') = (g, g')\, A(gg'),$$

где $(g, g') \in \mathbb{C}$. Из ассоциативности группового умножения и умножения линейных операторов следует, что система факторов или *мультипликаторов* (g, g') удовлетворяет условию

$$(g, g'g'')(g', g'') = (gg', g'')(g, g').$$

Кроме того, если представителем групповой единицы выбран единичный оператор, то $(g, 1) = (1, g) = 1$. В случае, если представление унитарно, $|(g, g')| = 1$.

Если каждый оператор $A(g)$ умножить на некоторое число (зависящее от g), то новое проективное представление будет иметь, вообще говоря, другую систему мультипликаторов. Однако такое изменение, конечно, несущественно, и новая система мультипликаторов называется *эквивалентной* старой. В некоторых случаях преобразование эквивалентности можно выбрать так, что все мультипликаторы обращаются в единицу. Это значит, что проективное представление эквивалентно обычному (*векторному*). Если же этого добиться нельзя, мы имеем дело с собственно проективным представлением. Для широкого класса групп все проективные представления эквивалентны векторным [53]. Это верно и для групп движения евклидовых пространств, в частности для группы Пуанкаре. Поэтому в большинстве случаев можно пользоваться векторными представлениями. Все же при обсуждении метода малой группы (п. 3.2.3), а также представлений группы Галилея (глава 8) мы встретимся с проективными представлениями. Изложим здесь кратко основные сведения о проективных индуцированных представлениях.

Проективное индуцированное представление можно определить, требуя, чтобы оно имело заданную систему мультипликаторов и в то же время обладало свойством импримитивности (см. § 4.2). В результате получается следующее определение.

Пусть задана некоторая система мультипликаторов (g, g') группы G, а ограничение ее на подгруппу K дает систему мультипликаторов (k, k') этой подгруппы. Пусть задано унитарное проективное представление Δ подгруппы K в пространстве $\mathcal{L}_\Delta$ с системой мультипликаторов (k, k'). Тогда пространство-носитель $\mathcal{H}_\Delta$ индуцированного проективного представления $U_\Delta = \Delta(K)\uparrow G$ определяется как пространство функций φ: $G \to \mathcal{L}_\Delta$, удовлетворяющих структурному условию

$$(k^{-1}, g^{-1})\, \varphi(gk) = \tilde{\Delta}(k^{-1})\, \varphi(g),$$

где обозначено, как обычно, $\tilde{\Delta}(k) = \sqrt{\Delta_K(k)/\Delta_G(k)}\, \Delta(k)$, а Δ_G и Δ_K — модули группы G и подгруппы K.

Скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}_\Delta$ определяется интегралом

$$(\varphi, \varphi') = \int\limits_{G/K} \langle \varphi(x_G), \varphi'(x_G)\rangle\, dx,$$

где квазиинвариантная мера dx на G/K определяется факторизацией $d_R g / d_R k = \Delta_G(x_G)\, dx$ (п. 2.2.6). Такая мера при действии группы G на пространстве G/K преобразуется следующим образом:

$$d(gx) = \frac{\Delta_G((g, x)_K)}{\Delta_K((g, x)_K)}\, dx.$$

Представление $U_\Delta(G) = \Delta(K)\uparrow G$ определяется на $\mathcal{H}_\Delta$ формулой

$$U_\Delta(g)\, \varphi(g') = (g'^{-1}, g)\, \varphi(g^{-1}g')$$

и оказывается унитарным относительно скалярного произведения $(\,,\,)$.

Оператор переплетения двух индуцированных представлений $T \in [\Delta(K)\uparrow G, \Lambda(H)\uparrow G]$ равен

$$T\varphi(g) = \int_{G/K} (x_G^{-1}, g^{-1})\, t(x_G)\, \varphi(gx_G)\, dx,$$

где функция $t\colon G \to L(\mathscr{L}_\Delta, \mathscr{L}_\Lambda)$ удовлетворяет структурным условиям

$$t(g)\underset{\sim}{\Delta}(k) = (k, k^{-1}g^{-1})\, t(gk); \quad \underset{\sim}{\Delta}(k) = \sqrt{\frac{\Delta_G(k)}{\Delta_K(k)}}\, \Delta(k);$$

$$\tilde{\Lambda}(h)\, t(g) = (g^{-1}h^{-1}, h)\, t(hg); \quad \tilde{\Lambda}(h) = \sqrt{\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}}\, \Lambda(h).$$

В силу этих условий функция t определяется своими значениями в точках, являющихся представителями двойных классов HgK, а в этих точках должна выбираться из пространств переплетения

$$t(g) \in [\underset{\sim}{\Delta}_g(K_g)\downarrow L_g,\ \tilde{\Lambda}(H)\downarrow L_g] = [\underset{\sim}{\Delta}(K)\downarrow L^g,\ \tilde{\Lambda}^g(H^g)\downarrow L^g],$$

где обозначено

$$K_g = gKg^{-1}; \quad L_g = K_g \cap H;$$

$$\underset{\sim}{\Delta}_g(l) = (g^{-1}, lg)(lg, g^{-1})^{-1}\, \underset{\sim}{\Delta}(g^{-1}lg); \quad l \in K_g$$

и

$$H^g = g^{-1}Hg; \quad L^g = K \cap H^g.$$

$$\tilde{\Lambda}^g(m) = (gm, g^{-1})(g^{-1}, gm)^{-1}\, \tilde{\Lambda}(gmg^{-1}); \quad m \in H^g.$$

Можно пользоваться любым из этих двух наборов формул. Они получаются друг из друга преобразованием $l \mapsto m = g^{-1}lg$.

Преобразование $\varphi \mapsto \check{\varphi}$, $\check{\varphi}(g) = \varphi(g^{-1})$ позволяет перейти к формализму, в котором используются левые классы смежности по подгруппе. В этом случае

$$(k, g)\check{\varphi}(kg) = \tilde{\Delta}(k)\check{\varphi}(g); \quad \check{U}_\Delta(g)\, \check{\varphi}(g') = (g', g)\, \check{\varphi}(g'g);$$

$$(\check{\varphi}, \check{\varphi}') = \int_{G/K} \langle \check{\varphi}(x_G^{-1}),\ \check{\varphi}'(x_G^{-1})\rangle\, dx;$$

$$\check{T}\check{\varphi}(g) = \check{\psi}(g) = \int_{G/K} (x_G^{-1}, g)\, t(x_G)\, \check{\varphi}(x_G^{-1}g)\, dx.$$

Остальные формулы остаются прежними, в том числе структурные условия на функцию t. Заметим, что в последних формулах

x_G по-прежнему обозначает представитель правого класса смежности. Совокупность элементов $\{x_G^{-1} \mid x \in G/K\}$ служит системой представителей левых классов.

В частном случае, если подгруппа K состоит лишь из единицы и Δ — тривиальное представление этой подгруппы, получаем *регулярное проективное представление группы* G. Левое регулярное представление определяется в пространстве квадратично-интегрируемых функций на G формулой

$$U(g)\varphi(g') = (g'^{-1}, g)\, \varphi(g^{-1}g'),$$

а эквивалентное ему правое регулярное проективное представление действует в том же пространстве по формуле

$$\check{U}(g)\check{\varphi}(g') = (g', g)\, \check{\varphi}(g'g).$$

Рассуждения, аналогичные проведенным в п. 2.2.4, обнаруживают связь между проективными индуцированными представлениями и матричными элементами проективных представлений. В частности, если $\Gamma(G)$ — неприводимое проективное представление группы G с системой факторов (g, g'), то сопоставление вектору $\Phi \in \mathscr{L}_\Gamma$ функции $g \mapsto (\Phi_0, \Gamma(g^{-1})\Phi)$ определяет вложение Γ в левое регулярное проективное представление с той же системой факторов, а сопоставление вектору Φ функции $g \mapsto (\Phi_0, \Gamma(g)\Phi)$ определяет вложение Γ в правое регулярное проективное представление. Эти сведения понадобятся нам при изложении метода малой группы в п. 3.1.3.

9*. Инвариантные эрмитовы формы. Пусть U_Δ, U_Λ — представления группы G, индуцированные соответственно из представлений $\Delta(K)$ и $\Lambda(H)$ подгрупп K и H. Найдем условие того, что существует инвариантная эрмитова форма со значениями в пространствах-носителях этих представлений. Задать *эрмитову форму* — значит каждой паре векторов $\varphi \in \mathscr{H}_\Delta$, $\psi \in \mathscr{H}_\Lambda$ сопоставить взаимно сопряженные комплексные числа (ψ, φ) и (φ, ψ) таким образом, чтобы при фиксированном ψ отображение $\varphi \mapsto (\psi, \varphi)$ было линейным. *Форма инвариантна*, если при любом $g \in G$ удовлетворяется условие

$$(U_\Lambda(g)\psi,\ U_\Delta(g)\varphi) = (\psi, \varphi).$$

Будем искать инвариантную эрмитову форму в виде двойного интеграла

$$(\psi, \varphi) = \int_{G/H} dy \int_{G/K} dx\, \langle \psi(y),\ t(y, x)\, \varphi(x)\rangle,$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_G), \quad \psi(y) = \psi(y_G),$$

где $\langle\,,\,\rangle$ — произвольная невырожденная эрмитова форма в $\mathscr{L}_\Lambda$, а $t(y, x)$ — линейный оператор из $\mathscr{L}_\Delta$ в $\mathscr{L}_\Lambda$. Найдем условие инвариантности такой формы. При этом, учитывая, что выкладки будут во многом аналогичны тем, которые проводились в пунктах 7 и 2.2.6, мы будем опускать промежуточные рассуждения.

Преобразуем аргументы нашей формы с помощью операторов соответствующих представлений. При этом аргументы функций φ и ψ под интегралом подвергнутся левому сдвигу. Как обычно, преобразуем эти интегралы с помощью определения факторов и затем используем структурные условия на функции φ и ψ. Получим

$$(U_\Lambda(g)\psi,\ U_\Delta(g)\varphi) =$$
$$= \int dy \int dx \left\langle \tilde\Lambda\left((g^{-1},\ y)_H^{-1}\right)\psi(g^{-1}y),\ t(y,\ x)\,\tilde\Delta\left((g^{-1},\ x)_K^{-1}\right)\varphi(g^{-1}x)\right\rangle.$$

Делая замену переменных интегрирования $x \mapsto gx$, $y \mapsto gy$ и используя формулы для преобразования мер dx и dy и тождество $(g^{-1},\ gx)_K^{-1} = (g,\ x)_K$, получим

$$(U_\Lambda(g)\psi,\ U_\Delta(g)\varphi) =$$
$$= \int dx \int dy \langle \underset{\sim}{\Lambda}((g,\ y)_H)\psi(y),\ t(gy,\ gx)\underset{\sim}{\Delta}((g,\ x)_K)\varphi(x)\rangle.$$

Обозначим крестом операцию сопряжения оператора в $\mathscr{L}_\Lambda$ относительно формы $\langle\,,\rangle$, т. е.

$$\langle AF,\ F'\rangle = \langle F,\ A^+F'\rangle.$$

Тогда условие инвариантности формы $(\,,)$ можно записать в виде

$$\underset{\sim}{\Lambda}^+((g,\ y)_H)\,t(gy,\ gx)\underset{\sim}{\Delta}((g,\ x)_K) = t(y,\ x).$$

Это условие позволяет выразить ядро $t(y,\ x)$ через функцию одного переменного $x \mapsto t(x)$ и еще накладывает некоторые ограничения на эту последнюю. Действительно, полагая $t(x) = t(y_0,\ x)$ и подставляя в предыдущую формулу y_G^{-1} вместо g, получаем $t(y,\ x) = t\left(y_G^{-1}x\right)\underset{\sim}{\Delta}\left((y_G^{-1},\ x)_K\right)$. Подставляя в это выражение вместо y и x соответственно gy и gx и используя предыдущее условие, получим

$$\underset{\sim}{\Lambda}^+((g,\ y)_H)\,t\left((gy)_G^{-1}gx\right)\underset{\sim}{\Delta}\left((gy)_G^{-1},\ (gx)_K(g,\ x)_K\right) =$$
$$= t\left(y_G^{-1}x\right)\underset{\sim}{\Delta}\left((y_G^{-1},\ x)_K\right).$$

Пользуясь свойствами факторов, можно преобразовать аргументы стоящих здесь функций:

$$(gy)_G^{-1}g = (g,\ y)_H\,y_G^{-1};$$
$$\left((gy)_G^{-1},\ gx\right)_K(g,\ x)_K = ((g,\ y)_H,\ y_G^{-1}x)_K\,(y_G^{-1},\ x)_K.$$

Обозначая $(g,\ y)_H = h$ и заменяя $y_G^{-1}x$ на x, получим окончательно следующее условие на функцию $t(x)$:

$$\underset{\sim}{\Lambda}^+(h)\,t(hx)\underset{\sim}{\Delta}((h,\ x)_K) = t(x),$$

которое должно выполняться при любых $x \in G/K$, $h \in H$.

Это условие позволяет свести функцию $t(x)$ к функции на группе $g \to t(g)$. Для этого положим $t(x) = t(x_G)$ и потребуем, чтобы функция $t(g)$ удовлетворяла следующему *структурному условию*:

$$t(hgk) = \underset{\sim}{\Lambda}^+(h^{-1})\,t(g)\underset{\sim}{\Delta}(k).$$

Ядро $t(y,\ x)$ выражается через эту функцию очень простым образом:

$$t(y,\ x) = t\left(y_G^{-1}x_G\right).$$

Для того чтобы проанализировать структурное условие на функцию $t(g)$, обозначим через Λ^c представление группы H:

$$h \to \Lambda^c(h) = [\Lambda^+(h)]^{-1}.$$

Тогда структурное условие переписывается в виде

$$t(hgk) = \tilde\Lambda^c(h)\,t(g)\underset{\sim}{\Delta}(k).$$

Но это — не что иное, как структурное условие, определяющее ядро оператора переплетения $T \in [\Delta \uparrow G,\ \Lambda^c \uparrow G]$. Сам этот оператор выражается в форме интеграла

$$T\varphi(y) = \int\limits_{G/K} t(x_G)\,\varphi(y_G x_G)\,dx = \int\limits_{G/K} t\left(y_G^{-1}x_G\right)\varphi(x)\,dx.$$

Сформулируем окончательный вывод. *Для того чтобы построить инвариантную эрмитову форму, связывающую два индуцированных представления $\Delta(K)\uparrow G$ и $\Lambda(H)\uparrow G$, достаточно задать некоторую невырожденную эрмитову форму $\langle\,,\rangle$ в пространстве $\mathscr{L}_\Lambda$, построить представление $\Lambda^c(H)$, сопряженное по отношению к Λ, индуцировать $\Lambda^c(H)\uparrow G$ и найти оператор переплетения $T \in [\Delta \uparrow G,\ \Lambda^c \uparrow G]$. Если $g \mapsto t(g)$ — ядро этого оператора, то искомая форма имеет вид*

$$(\psi,\ \varphi) = \int\limits_{G/H} dy\,\langle\psi(y),\ (T\varphi)(y)\rangle = \int\limits_{G/H} dy \int\limits_{G/K} dx\left\langle\psi(y),\ t\left(y_G^{-1}x_G\right)\varphi(x)\right\rangle.$$

В частности, если требуется построить форму, оба аргумента которой лежат в пространстве-носителе $\mathscr{H}_\Delta$ индуцированного представления $\Delta \uparrow G$, то нужно построить представление $\Delta^c(K)$, сопряженное к Δ относительно некоторой формы $\langle\,,\rangle$ в $\mathscr{L}_\Delta$ и найти $T \in [\Delta \uparrow G,\ \Delta^c \uparrow G]$. Ядро этого оператора будет служить ядром искомой инвариантной формы:

$$(\varphi, \varphi') = \int\limits_{G/K} dx \langle \varphi(x), (T\varphi)(x) \rangle =$$

$$= \int\limits_{G/K} dx \int\limits_{G/K} dx' \left\langle \varphi(x), t\left(x_G^{-1} x'_G\right) \varphi'(x') \right\rangle.$$

Если $\langle\, , \rangle_\Delta$ — форма в $\mathscr{L}_\Delta$, относительно которой представление Δ унитарно, то $\Delta^c = \Delta$ и для построения инвариантной формы в $\mathscr{H}_\Delta$ требуется оператор из коммутанта $[\Delta \uparrow G]$. В частности, можно использовать единичный оператор и получить

$$(\varphi, \varphi')_\Delta = \int\limits_{G/K} \langle \varphi(x), \varphi'(x) \rangle_\Delta \, dx.$$

Именно эта форма используется в определении *индуцированного представления по Макки*. Она обладает тем преимуществом, что является положительно определенной: $(\varphi, \varphi)_\Delta \geqslant 0$ (конечно, если исходная форма $\langle\, , \rangle_\Delta$ положительно определена). Поэтому тем самым в $\mathscr{H}_\Delta$ задается скалярное произведение, это пространство превращается в гильбертово, а представление $U_\Delta = \Delta \uparrow G$ оказывается унитарным.

Если представление Δ неунитарно, то такой простой конструкции не существует. Однако можно построить инвариантную форму с помощью оператора $T \in [\Delta \uparrow G,\ \Delta^c \uparrow G]$. В некоторых случаях она оказывается положительно определенной, и представление $\Delta \uparrow G$ унитарно относительно нее. Однако проверка положительной определенности формы требует приведения ее к диагональному виду, что является, как правило, трудной задачей. В следующей главе мы увидим, что таким путем получаются так называемые *дополнительные серии* унитарных неприводимых представлений полупростых групп.

Глава 3

МЕТОД ИНДУЦИРОВАНИЯ И НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Метод индуцированных представлений оказывается эффективным для нахождения неприводимых представлений некомпактных (локально компактных) групп. В случае, если группа G обладает инвариантной подгруппой K, нахождение неприводимых представлений группы G сводится к нахождению неприводимых представлений K и неприводимых представлений (в общем случае проективных) малой ко-группы, которая является подгруппой в G/K. Особенно простым оказывается этот метод в том случае, если $G = L \otimes K$ — полупрямое произведение, а нормальный делитель K коммутативен. В этом случае неприводимые представления K одномерны и для построения необходимы лишь обычные (векторные) представления малой ко-группы $R \subset L$.

Для односвязной полупростой группы так называемое разложение Ивасавы позволяет выделить такую погруппу, индуцирование из которой дает основную невырожденную серию неприводимых унитарных представлений, а при некотором обобщении индуцирования — и другие серии. Эта методика подробно проиллюстрирована на примерах группы Лоренца $SO(1,3) = SL(2, \mathbb{C})$ и де Ситтера $SO(1,4)$ и кратко — на группе конформных преобразований $SO(2,4) = SU(2,2)$.

§ 3.1. Представления групп с нормальным делителем

Примером группы, имеющей нормальный делитель, является группа Пуанкаре, лежащая в основе релятивистской квантовой теории (см. главу 5). Неприводимые представления этой группы описывают элементарные частицы, простейшие известные до сих пор единицы материи. Метод малой группы, который мы рассмотрим в настоящем параграфе, сводит нахождение этих представлений к нахождению представлений группы четырехмерных сдвигов и малой ко-группы, которая в самом важном случае совпадает с группой трехмерных (пространственных) вращений. Таким образом возникают понятия массы и спина элементарной частицы. Спин характеризует представление группы вращений, а масса — орбиту представлений группы сдвигов (понятие, которое будет введено в начале этого параграфа *)).

Совершенно аналогично находятся представления любой евклидовой или псевдоевклидовой группы (трехмерная евклидова группа рассмотрена в конце данного параграфа). Более того, согласно теореме Леви-Мальцева [16] любая группа Ли построена наподобие группы Пуанкаре или евклидовой группы, т. е. представляется в виде полупрямого произведения полупростой группы и разрешимого нормального делителя **). Поэтому метод малой группы имеет широкую область применимости. Возникающие в процессе его применения представления малой ко-группы могут быть найдены повторным применением метода малой группы или (если эта группа оказывается полупростой) с помощью разложения Ивасавы так, как это описано в следующем параграфе.

1. Метод малой группы. В случае, если группа обладает нормальным делителем (инвариантной подгруппой), теория индуцированных представлений дает способ нахождения неприводимых представлений группы по представлениям нормального делителя (так называемый метод малой группы). Рассмотрим его.

Пусть K — инвариантная подгруппа группы G и $\Delta(K)$ — ее неприводимое представление. В силу инвариантности отображение $k \longmapsto \Delta_g(k) = \Delta(g^{-1}kg)$ также является представлением группы K. Совокупность представлений $\{\Delta_g | g \in G\}$ называется *орбитой*, порожденной представлением Δ. Очевидно, что отношение $\Delta \sim \Delta'$, если $\Delta' = \Delta_g$ при некотором $g \in G$, является отношением эквивалентности, так что множество всех неприводимых представлений группы разбивается на непересекающиеся классы — орбиты представлений. Орбита порождается любым представлением, входящим в нее.

Рассмотрим множество элементов группы G, таких, что преобразование представления Δ этими элементами дает эквивалентные представления: $H = \{g \in G | \Delta_g = \Delta\}$. Ясно, что H — подгруппа группы G. Она называется *малой группой* представления $\Delta(K)$. Представления, принадлежащие одной орбите, имеют, очевидно, малые группы, сопряженные друг к другу: $H' = gHg^{-1}$, и, следовательно, изоморфные. Малая группа содержит в качестве инвариантной подгруппы K, так как для любого $k \in K$ представления Δ и Δ_k эквивалентны (эквивалентность осуществляется оператором $\Delta(k)$). Фактор-группу H/K называют иногда *малой ко-группой* или малой группой второго рода. Она является подгруппой фактор-группы G/K.

Неприводимое представление группы G получается индуцированием из некоторого представления малой группы H. Для этого выберем такое неприводимое представление $D(H)$, что при ограничении на K оно превращается в прямой интеграл представлений, эквивалентных Δ:

$$D(H) \downarrow K = \int \Delta_\lambda(K)\, d\lambda; \quad \Delta_\lambda = \Delta$$

(если интеграл вырождается в конечную сумму, то представление $D(H) \downarrow K$ кратно Δ). Применим критерий неприводимости индуцированного представления (см.п. 2.3.6). Разбивая группу G на двойные классы $y = Hy_G H \in \mathcal{Y}$, мы образуем для каждого класса $y \in \mathcal{Y}$ новую группу $H_y = y_G H y_G^{-1}$. Ее пересечение с H во всяком случае содержит K, так как K инвариантна в G. Образуем представление D_y группы H_y по формуле $D_y(g) = D(y_G^{-1} g y_G)$. Для неприводимости $D \uparrow G$ достаточно, чтобы при любом $y \neq H$ пространство переплетения $[D_y \downarrow (H_y \cap H), D \downarrow (H_y \cap H)]$ обращалось в нуль. Это во всяком случае имеет место, если представления D_y и D не переплетаются при ограничении их на еще более узкую подгруппу K, т. е. $[D_y \downarrow K, D \downarrow K] = 0$. Но последнее очевидно, так как $D_y \downarrow K = \int (\Delta_\lambda)_{y_G} d\lambda$, а $(\Delta_\lambda)_{y_G} = \Delta_{y_G} \neq \Delta$ по определению малой группы H.

Задача сводится к нахождению неприводимого представления $D(H)$, которое при ограничении на K кратно Δ. Из теоремы взаимности следует, что такое представление содержится в $\Delta(K) \uparrow H$. Более того, каждое неприводимое представление группы H, содержащееся в $\Delta \uparrow H$, при ограничении на K кратно Δ. Действительно, из теоремы о подгруппах (п. 2.3.2) следует, что

$$(\Delta(K) \uparrow H) \downarrow K = \int_{\mathcal{Z}} (\Delta_z \downarrow (K_z \cap K)) \uparrow K\, dz,$$

где $\mathcal{Z} = K \backslash H / K$, $K_z = z_H K z_H^{-1}$, $\Delta_z = \Delta_{z_H}$, $z \in \mathcal{Z}$. Но в силу инвариантности подгруппы K имеем $K_z = K$, а по определению малой группы $\Delta_z = \Delta$. В результате получаем

$$(\Delta(K) \uparrow H) \downarrow K = \int_{\mathcal{Z}} \Delta_z(K)\, dz, \quad \Delta_z = \Delta.$$

*) Обозначения, используемые в настоящем параграфе, выбраны так, чтобы облегчить приложение метода к группе Пуанкаре. В случае группы Пуанкаре L — это группа Лоренца, а R — группа (трехмерных) вращений. Лишь для инвариантной подгруппы трансляций в группе Пуанкаре будет использоваться обозначение T вместо K, которое фигурирует здесь.

**) Группа G называется *разрешимой*, если ее *производный ряд* G, G', G'', ... после конечного числа шагов стабилизируется на единице. *Производная* подгруппа или *коммутант* G' определяется как подгруппа, порожденная всевозможными коммутаторами $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$, $g_1, g_2 \in G$. Коммутант является нормальным делителем, причем фактор-группа по нему абелева. Любое конечномерное неприводимое представление разрешимой группы одномерно (теорема Ли) [16, 76].

Таким образом, само представление $\Delta(K)\uparrow H$ при ограничении на K кратно Δ. Тем более этим свойством обладает каждая его неприводимая компонента.

В результате мы приходим к следующему рецепту построения неприводимого представления группы G. По данному неприводимому представлению Δ нормального делителя K строим малую группу H, индуцируем $\Delta\uparrow H$ и разлагаем полученное представление группы H на неприводимые. Индуцирование каждого такого неприводимого представления $D(H)\uparrow G$ дает неприводимое представление группы G. Остается доказать, что каждое представление может быть получено таким способом и уточнить рецепт так, чтобы из каждого класса эквивалентности получить по одному представлению.

Пусть Γ — произвольное неприводимое представление группы G. Ограничение $\Gamma\downarrow K$ содержит хотя бы одно неприводимое представление $\Delta(K)$. Пусть H — соответствующая малая группа. Проведем ограничение Γ на K в два этапа: $(\Gamma\downarrow H)\downarrow K$. Пусть $\Gamma\downarrow H=\sum_\alpha D^\alpha(H)$, где D^α — неприводимые представления группы H. Пусть D^α при некотором фиксированном α обладает тем свойством, что $D^\alpha\downarrow K$ содержит Δ (такое представление заведомо содержится в разложении). Тогда D^α содержится в $\Delta\uparrow H$ (по теореме взаимности) и, следовательно, $D^\alpha\downarrow K$ кратно Δ. Но тогда $D^\alpha\uparrow G$ содержит Γ (по теореме взаимности) и, поскольку оно неприводимо, совпадает с Γ.

Итак, каждое неприводимое представление группы G можно получить описанной выше процедурой. Ясно, что одно и то же представление Γ группы G можно получить, отправляясь от любого из неприводимых представлений группы K, содержащихся в разложении $\Gamma\downarrow K$ на неприводимые. Если $\Delta(K)$ — такое представление, действующее в подпространстве $\mathscr{L}_\Delta$, то в подпространстве $\Gamma(g)\mathscr{L}_\Delta$ действует представление Δ_g из той же орбиты. Действительно, $\Gamma(k)\Gamma(g)=\Gamma(kg)=\Gamma(g)\Gamma(g^{-1}kg)$, поэтому, действуя на вектор $\Gamma(g)\varphi$, $\varphi\in\mathscr{L}_\Delta$, оператор $\Gamma(k)$ дает

$$\Gamma(k)\Gamma(g)\varphi=\Gamma(g)\Delta_g(k)\varphi=(\Gamma(g)\Delta_g(k)\Gamma(g^{-1}))\Gamma(g)\varphi,$$

т. е. представление, действующее в пространстве $\Gamma(g)\mathscr{L}_\Delta$, эквивалентно $\Delta_g(K)$, и оператор эквивалентности равен $\Gamma(g)$. Поскольку (в силу неприводимости Γ) любой вектор пространства-носителя представления Γ можно аппроксимировать, действуя на векторы из $\mathscr{L}_\Delta$ операторами $\Gamma(g)$, $g\in G$, и беря линейные комбинации полученных векторов, ясно, что в разложении $\Gamma\downarrow K$ на неприводимые содержатся представления одной орбиты.

Окончательный вывод состоит в том, что для того чтобы получить по одному неприводимому представлению из каждого класса эквивалентности, нужно взять по одному неприводимому представлению группы K из каждой орбиты и проделать с каждым из этих представлений те операции, которые описаны выше.

Теорема. *Любое неприводимое представление группы G с нормальным делителем K можно получить с помощью следующего алгоритма: 1) взять неприводимое представление Δ группы K и найти его малую группу H; 2) найти $\Delta(K)\uparrow H$ и взять одну из его неприводимых компонент $D(H)$; 3) индуцировать $D(H)\uparrow G$. Чтобы получить по одному неприводимому представлению группы G из каждого класса эквивалентности, следует выбирать по одному неприводимому представлению группы K из каждой орбиты $\{\Delta_g|g\in G\}$.*

Замечание. Сопоставление каждому $g\in G$ отображения $\Delta(K)\mapsto\Delta_g(K)$ превращает множество всех неприводимых представлений группы K (точнее — множество классов эквивалентности) в G-пространство, в котором орбиты $\{\Delta_g|g\in G\}=\mathscr{X}$ являются областями транзитивности. В этом смысле малая группа H — не что иное, как стабилизатор точки $\Delta\in\mathscr{X}$, а сама орбита $\mathscr{X}$ как однородное пространство изоморфна G/H. Это с другой точки зрения объясняет, почему достаточно из каждой орбиты взять по одному представлению.

2. Представления малой группы полупрямого произведения. Метод малой группы предполагает одну нетривиальную операцию — разложение на неприводимые индуцированного представления $\Delta(K)\uparrow H$, где H — малая группа представления $\Delta(K)$. Рассмотрим эту операцию подробнее. Обозначим фактор-группу G/K через L. Тогда каждый элемент $g\in G$ единственным образом представляется в виде $g=l_Gk$, причем определяется система факторов $(l,l')_K=(ll')_G^{-1}l_Gl'_G$ и автоморфизмов $k\mapsto k^l=l_G^{-1}kl_G$ группы K. Ясно, что факторизация малой группы $H/K=R$ даст некоторую подгруппу $R\subset L$. Для этой факторизации справедливы аналогичные утверждения: каждый элемент $h\in H$ представляется в виде $h=r_Lk$, определяется система факторов $(r,r')_K$ и автоморфизмов $k\mapsto k^r=r_H^{-1}kr_H$.

Представление $\Delta(K)\uparrow H=U(H)$ реализуется в пространстве функций на H, которые в силу структурного условия сводятся к функциям на R:

$$\varphi(r_Hk)=\Delta\left(k^{-1}\right)\varphi(r_H)=\Delta\left(k^{-1}\right)\varphi(r).$$

Действие представления U определяется как левый сдвиг:

$$U(r_Hk)\varphi(r')=\varphi\left(k^{-1}r_H^{-1}r'_H\right).$$

С помощью факторов и автоморфизмов можно преобразовать аргумент:

$$k^{-1}r_H^{-1}r'_H=\left(r^{-1}r'\right)_H\left(k^{-1}\right)^{r^{-1}r'}\left(r^{-1},\ r'\right)_K.$$

Тогда формула принимает вид

$$U(r_Hk)\varphi(r')=\Delta\left(\left(r^{-1},\ r'\right)_K^{-1}k^{r^{-1}r'}\right)\varphi\left(r^{-1}r'\right).$$

Рассмотрим по отдельности преобразования элементами k и r_H. Имеем $U(k)\varphi(r) = \Delta(k^r)\varphi(r)$. По определению $k^r = r_H^{-1}kr_H$, и поэтому $\Delta(k^r) = \Delta_{r_H}(k)$. Поскольку $r_H \in H$ — элемент малой группы, представление Δ_{r_H} эквивалентно Δ, и в результате получаем

$$U(k)\varphi(r) = [C(r)]^{-1}\Delta(k)C(r)\varphi(r),$$

где $C(r)$ — некоторый оператор в пространстве представления Δ. Особый интерес представляет случай, когда Δ — *одномерное представление* (это имеет место, например, если K — абелева или разрешимая группа). В этом случае формула еще упрощается:

$$U(k)\varphi(r) = \Delta(k)\varphi(r),$$

где $\Delta(k)$ — число. Ясно, что такое преобразование можно не учитывать при разбиении представления U на неприводимые.

Преобразование элементом r_H имеет вид

$$U(r_H)\varphi(r') = \Delta\left((r^{-1}, r')_K^{-1}\right)\varphi(r^{-1}r').$$

Предположим, что факторы $(r, r')_K$ все обращаются в единицу, т. е. группа H представляет собой *полупрямое произведение* $P \otimes K$. Это имеет место, например, если вся группа G разлагается в произведение $L \otimes K$. Тогда

$$U(r_H)\varphi(r') = \varphi(r^{-1}r').$$

Если Δ одномерно, то это не что иное, как формула для регулярного представления группы R.

Таким образом, мы показали, что в важном частном случае, когда K — абелев или разрешимый нормальный делитель в G и $G = L \otimes K$, задача выделения неприводимой компоненты в $\Delta(K)\uparrow H$ сводится к задаче выделения неприводимой компоненты в регулярном представлении группы $R \subset L$.

Неприводимые унитарные представления, входящие в разложение регулярного представления, составляют так называемую *основную серию представлений*. Пусть теперь известно некоторое представление $\Lambda(R)$ из этой серии. Тогда, согласно результатам п. 2.2.4, компонента регулярного представления, соответствующая представлению Λ, находится преобразованием, сопоставляющим вектору Φ из пространства-носителя представления Λ функции на группе $r \to \varphi(r) = (\Phi_0, \Lambda(r^{-1})\Phi)$, где Φ_0 — любой фиксированный вектор из пространства представления Λ. Функция φ под действием представления $U(H) = \Delta(K)\uparrow H$, как мы видели, преобразуется по формуле $U(r_Hk)\varphi(r') = \Delta(k)\varphi(r^{-1}r')$, где $\Delta(k)$ — числа. Соответствующее преобразование вектора Φ имеет вид

$$D(r_Hk)\Phi = \Delta(k)\Lambda(r)\Phi.$$

Мы приходим, таким образом, к следующему рецепту. *Для того чтобы построить неприводимое представление группы $G = L \otimes K$, где K — коммутативный* (*или разрешимый*) *нормальный делитель, нужно*: 1) *выбрать неприводимое* (*одномерное*) *представление Δ подгруппы K, найти его малую группу H и малую ко-группу $R = H/K$*; 2) *выбрать неприводимое представление Λ группы R, принадлежащее к основной серии, и по нему построить представление $D(r_Hk) = \Delta(k)\Lambda(r)$ группы H*; 3) *индуцировать $D(H)\uparrow G$*. Чтобы получить по одному неприводимому представлению из каждого класса эквивалентности, *нужно взять по одному $\Delta(K)$ из каждой орбиты.*

3*. Представления малой группы в общем случае. Рассмотрим теперь представление $U(H) = \Delta(K)\uparrow H$ малой группы, не делая упрощающих предположений. Задача, как и в предыдущем пункте, сводится к тому, чтобы выразить неприводимые компоненты этого представления через неприводимые представления малой ко-группы $R = H/K$.

Как и в предыдущем пункте, введем оператор $C(r)$, определив его условием

$$\Delta_{r_H}(k) = \Delta(r_H^{-1}kr_H) = [C(r)]^{-1}\Delta(k)C(r).$$

Совершая подряд два таких преобразования эквивалентности и пользуясь определением факторов $r_Hr'_H = (rr')_H(r, r')_K$, легко получим

$$[C(r)C(r')]^{-1}\Delta(k)C(r)C(r') =$$
$$= [C(rr')\Delta((r, r')_K)]^{-1}\Delta(k)C(rr')\Delta((r, r')_K).$$

Положим

$$C(r)C(r') = (r, r^{-1})^{-1}C(rr')\Delta((r, r')_K),$$

где (r, r') — некоторый оператор. Из предыдущего равенства видно, что этот оператор коммутирует со всеми $\Delta(k)$, $k \in K$, т. е. $(r, r') \in [\Delta]$. Но в силу неприводимости представления Δ это значит, что такой оператор кратен единичному, т. е. сводится просто к умножению на комплексное число: $(r, r') \in \mathbb{C}$. Вычисляя произведение $C(r)C(r')C(r'')$, пользуясь ассоциативностью умножения и свойствами факторов $(r, r')_K$ (см. п. 1.4.2), можно доказать, что числа (r, r') удовлетворяют условию

$$(r, r'r'')(r', r'') = (rr', r'')(r, r'),$$

т. е. образуют систему *мультипликаторов проективного представления* группы R (см. п. 2.3.8).

Представление $U = \Delta(K)\uparrow H$, как обычно, определим в пространстве функций φ: $H \to \mathscr{L}_\Delta$ со структурным условием $\varphi(hk) = \Delta(k^{-1})\varphi(h)$. В силу этого условия такая функция сводится к функции на группе R, которую нам будет удобно определить как

$$\varphi(r) = [C(r)]^{-1}\varphi(r_H^{-1}).$$

Задача 1. Доказать, что представление $\Delta(K)\uparrow H$ реализуется в пространстве функций $r\mapsto\varphi(r)$ на R операторами

$$U(k)\varphi(r) = \Delta(k)\varphi(r);$$
$$U(r_H)\varphi(r') = C(r)(r', r)\varphi(r'r).$$

Мы видим, что оператор $A(r) = C(r)^{-1}U(r_H)$ действует на функцию $r\mapsto\varphi(r)$ по формуле

$$A(r)\varphi(r') = (r', r)\varphi(r'r),$$

т. е. отображение $r\mapsto A(r)$ — не что иное, как правое регулярное проективное представление группы R (см. п. 2.3.8). Разложение этого представления на неприводимые компоненты дает неприводимые проективные представления группы R. Очевидно, что каждое такое представление $\Lambda(R)$ определяет неприводимую компоненту представления $U(H) = \Delta(K)\uparrow H$.

Сказанное не вполне точно. Действительно, представления $k\mapsto U(k)$ и $r\mapsto A(r)$ действуют в пространстве функций $r\mapsto\varphi(r)$ совершенно независимо. Для ясности введем базис в пространстве $\mathscr{L}_\Delta$. Тогда $\varphi(r) = \{\varphi^i(r)\}$ — вектор, представленный своими компонентами. Оператор $U(k)$ действует по формуле

$$(U(k)\varphi)^i(r) = \Delta^i{}_j(k)\varphi^j(r),$$

в то время как оператор $A(r)$ действует по правилу

$$(A(r)\varphi)^i(r') = (r', r)\varphi^i(r'r).$$

Важно, что компоненты, пронумерованные индексом i, не перемешиваются оператором $A(r)$. Следовательно, точнее было бы сказать, что каждая функция $r\mapsto\varphi^i(r)$ преобразуется по правому регулярному проективному представлению группы R и представление A кратно регулярному с кратностью, равной размерности $\dim\Delta$ представления $\Delta(K)$.

Пусть теперь задано неприводимое проективное представление Λ группы R с системой факторов (r, r'), действующее в пространстве $\mathscr{L}$. Возьмем $d = \dim\Delta$ экземпляров этого пространства и пронумеруем их индексом $i = 1, 2, \ldots, d$. Пусть $\Phi = \{\Phi^i \in \mathscr{L} \mid i = 1, \ldots, d\}$ — вектор получившегося пространства-произведения $\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}_\Delta$. Сопоставим каждому вектору Φ функцию $\varphi = \{\varphi^i\}$ на группе R, положив $\varphi^i(r) = (\Phi_0, \Lambda(r)\Phi^i)$. Тогда при правом сдвиге эта функция преобразуется по представлению A, кратному регулярному. Оператор $U(r_H)$ в получившемся подпространстве функций действует по формуле

$$(U(r_H)\varphi)^i(r') = (r', r)C^i{}_j(r)\varphi^j(r'r) = (\Phi_0, \Lambda(r')C^i{}_j(r)\Lambda(r)\Phi^j).$$

Наконец, оператор $U(k)$ действует по формуле

$$(U(k)\varphi)^i(r') = \Delta^i{}_j(k)\varphi^j(r') = (\Phi_0, \Lambda(r')\Delta^i{}_j(k)\Phi^j).$$

Действие оператора $U(r_Hk)$ в данном подпространстве функций — не что иное как неприводимая компонента представления $U = \Delta(K)\uparrow L$. Обозначим ее через D, так что в рассматриваемом подпространстве функций оператор $D(h)$ действует как $U(h)$.

Легко перейти обратно от функций $r\mapsto\varphi(r)$ (принадлежащих данному подпространству) к векторам $\Phi = \{\Phi^i\}$. Тогда действие операторов $D(r_Hk)$ определится формулой

$$(D(r_Hk)\Phi)^i = (C(r)\Delta(k))^i{}_j\Lambda(r)\Phi^j.$$

Это и есть искомая неприводимая компонента представления $U(H) = \Delta(K)\uparrow H$, выраженная непосредственно через неприводимое проективное представление $\Lambda(R)$. Процедура, с помощью которой представлению Λ было сопоставлено представление Λ^d, для наглядности описана для случая, когда $d = \dim\Delta$ — конечное число, т. е. $\mathscr{L}_\Delta$ — конечномерное пространство. Однако на самом деле она обобщается на случай произвольного гильбертова пространства $\mathscr{L}_\Delta$. Если в пространстве $\mathscr{L}_\Delta$ имеется счетный базис (пространство сепарабельно), можно пользоваться теми же формулами, только индексы пробегают бесконечное множество значений. Пространство $\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}_\Delta$ векторов $\Phi = \{\Phi^i \in \mathscr{L} \mid i = 1, 2, \ldots\}$ называется *кронекеровским* или *тензорным произведением гильбертовых пространств* (см., например, [9]). Операторы представления, действующие в пространстве $\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}_\Delta$, мы определили как *кронекеровское* или *тензорное* или *внешнее произведение операторов*, так что, например,

$$D(r_Hk) = (C(r)\Delta(k))\times\Lambda(r).$$

Окончательно получаем следующий *рецепт построения неприводимого представления группы с нормальным делителем $K\subset G$*:

1) *Выбираем неприводимое представление нормального делителя $\Delta(K)$, находим малую группу H и малую ко-группу $R = H/K$ этого представления. Для каждого $r\in R$ выбираем оператор $C(r)\in L(\mathscr{L}_\Delta)$, осуществляющий эквивалентность представлений Δ и Δ_{r_H} по формуле*

$$\Delta(r_H^{-1}kr_H) = C(r)^{-1}\Delta(k)C(r).$$

Определяем систему мультипликаторов (r, r') на группе R по формуле

$$(r, r') = C(r')^{-1}C(r)^{-1}C(rr')\Delta((r, r')_K).$$

2) *Выбираем неприводимое проективное представление $\Lambda(R)$ с мультипликаторами (r, r') и строим представление группы H по формуле*

$$D(r_Hk) = (C(r)\Delta(k))\times\Lambda(r).$$

3) *Индуцируем* $D(H) \uparrow G$. Чтобы получить по одному неприводимому представлению из каждого класса эквивалентности, нужно *взять по одному представлению* $\Delta(K)$ *из каждой орбиты*.

Замечание. Мы провели полностью алгебраический анализ, на котором основывается метод малой группы, однако почти полностью опустили функционально-аналитический аспект (вопросы сходимости интегралов, существования операторов и пр.). Восполнение этого пробела делает доказательство и даже саму формулировку метода малой группы в общем случае чрезвычайно сложной. Чтобы составить представление о природе этих сложностей, читатель может обратиться к книге Макки [82], в которой характер трудностей и пути их преодоления изложены в сравнительно доступной форме. Распространение метода малой группы на общий случай требует даже обобщения некоторых понятий. Например, в общем случае недостаточно понятия подгруппы, а приходится вводить понятие так называемой *виртуальной подгруппы* для того, чтобы любое однородное пространство можно было представить как фактор-пространство. Применяя метод малой группы (и некоторые теоремы из этой книги), читатель может использовать его как ценный эвристический метод, а после конструирования представлений независимо проверить их неприводимость. Ценность метода в таком случае несомненна потому, что конструирование неприводимых представлений, их реализация составляет, пожалуй, более сложную задачу, чем доказательство неприводимости каждого отдельного уже построенного представления.

4*. Неприводимые представления евклидовой группы. В главе 5 мы используем метод малой группы для построения неприводимых представлений группы Пуанкаре. Здесь же проиллюстрируем его применение на более простом примере, который во многом аналогичен группе Пуанкаре.

Рассмотрим группу $G = E_3 = R \otimes \boldsymbol{T}$ *евклидовых движений трехмерного пространства* $\mathscr{E}_3$. Она является полупрямым произведением группы трехмерных вращений $R = SO(3)$ и группы трехмерных сдвигов (трансляций) $\boldsymbol{T}$. Элементы группы $\boldsymbol{T}$ параметризуются векторами трехмерного линейного пространства $\mathscr{L}_3$ так, что элемент $\boldsymbol{a}_T \in \boldsymbol{T}$ переводит точку $\boldsymbol{x} \in \mathscr{E}_3$ в точку $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathscr{E}_3$. Каждый элемент $g \in E_3$ единственным образом представляется в виде $g = r\boldsymbol{a}_T$, $r \in R$, $\boldsymbol{a}_T \in \boldsymbol{T}$, причем подгруппа $\boldsymbol{T}$ инвариантна, $E_3/\boldsymbol{T} = R$, а каждому $r \in R$ соответствует автоморфизм группы $\boldsymbol{T}$:

$$\boldsymbol{a}_T \mapsto r^{-1}\boldsymbol{a}_T r = (r^{-1}\boldsymbol{a})_T.$$

Неприводимые представления группы $\boldsymbol{T}$ одномерны и задаются векторами $\boldsymbol{k} \in \mathscr{L}_3$ так, что

$$\Delta_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{a}_T) = \exp(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{k}\boldsymbol{a} = k_1 a^1 + k_2 a^2 + k_3 a^3.$$

Имея в виду физические приложения, будем называть вектор $\boldsymbol{k}$ *импульсом*. Легко видеть, что

$$(\Delta_{\boldsymbol{k}})_r(\boldsymbol{a}_T) = \Delta_{\boldsymbol{k}}(r^{-1}\boldsymbol{a}_T r) = \Delta_{r\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{a}_T),$$

так что представления с импульсом, лежащим на сфере, входят в одну орбиту, и орбита определяется лишь радиусом сферы.

Представление Δ_0, соответствующее нулевому импульсу, образует отдельную орбиту. Его малая группа — вся группа E_3, а малая ко-группа $E_3/\boldsymbol{T} = R$. Задавая неприводимое представление Λ_j группы R, соответствующее моменту $j = 0, {}^1/_2, 1, {}^3/_2, \ldots$, найдем неприводимое представление группы E_3 в виде

$$D_j(r\boldsymbol{a}_T) = \Lambda_j(r).$$

Это неприводимое представление по существу сводится к представлению группы R.

Рассмотрим теперь орбиту, соответствующую сфере ненулевого радиуса ρ в импульсном пространстве. Выберем на этой сфере один импульс, например $\boldsymbol{k} = \{0, 0, \rho\}$, и рассмотрим представление группы $\boldsymbol{T}$, соответствующее этому импульсу:

$$\Delta_\rho(\boldsymbol{a}_T) = \exp(i\rho a^3).$$

Малая группа этого представления равна полупрямому произведению группы $\boldsymbol{T}$ на группу R_3 поворотов вокруг третьей оси. Малая ко-группа равна R_3. Зададим одномерное неприводимое представление $\Lambda_\sigma(R_3)$, соответствующее моменту $\sigma = 0, \pm{}^1/_2, \pm 1, \pm{}^3/_2, \ldots$ и построим представление малой группы по формуле

$$D_{\rho\sigma}(r_3\boldsymbol{a}_T) = \Delta_\rho(\boldsymbol{a}_T)\Lambda_\sigma(r_3)$$

для любого $r_3 \in R_3$. Неприводимое представление группы E_3 получается как индуцированное

$$\Gamma_{\rho\sigma}(E_3) = D_{\rho\sigma}(R_3 \otimes \boldsymbol{T}) \uparrow E_3.$$

Легко видеть, что однородное пространство $S^2 = E_3/H$, где $H = R_3 \otimes \boldsymbol{T}$ — малая группа, изоморфно двумерной сфере (ср. пример 2 из п. 2.2.2). Действительно, если определить действие группы E_3 на сфере, положив, что сдвиги $\boldsymbol{a}_T \in \boldsymbol{T}$ действуют как тождественные преобразования, а вращения $r \in R$ действуют естественным образом, то стабилизатором полюса сферы $\boldsymbol{n}_0 = \{0, 0, 1\}$ является как раз малая группа H, а смежный класс $r\boldsymbol{a}_T H$ соответствует точке сферы $\boldsymbol{n} = r\boldsymbol{n}_0$. Выберем в качестве представителя класса $\boldsymbol{n}$ некоторое вращение $\boldsymbol{n}_R \in R$, переводящее полюс $\boldsymbol{n}_0$ в точку $\boldsymbol{n} \in S^2$. Тогда представление $\Gamma_{\rho\sigma}$ реализуется в пространстве функций на сфере $\boldsymbol{n} \mapsto \varphi(\boldsymbol{n}) = \varphi(\boldsymbol{n}_R)$, а действие представления определено формулами

$$\Gamma_{\rho\sigma}(g)\varphi(g') = \varphi(g^{-1}g'); \quad \varphi(gh) = D_{\rho\sigma}(h^{-1})\varphi(g), \qquad h \in H.$$

§ 3.2. Представления полупростых групп

В случае, когда группа не имеет разрешимого нормального делителя, т.е. является полупростой, техника малой группы неприменима. Однако в этом случае можно найти неприводимые представления, индуцируя из некоторой подгруппы, получаемой с помощью разложения Ивасавы. К описанию этой методики мы сейчас и переходим. Метод, основанный на разложении Ивасавы, имеет важные физические приложения (см., например, следующие параграфы).

Отметим, что метод разложения Ивасавы, основанный, как и метод малой группы, на индуцировании из подгруппы, имеет с ним много общего. В частности, группа H, из которой производится индуцирование, аналогична малой группе, а централизатор C — малой ко-группе. По этой причине представления группы де Ситтера оказываются аналогичными представлениям группы Пуанкаре. Эта аналогия, физически существенная, прослежена в § 3.5.

В настоящем параграфе почти все утверждения приводятся без доказательства. В следующих двух параграфах метод иллюстрируется на примере групп Лоренца и де Ситтера, и для этих частных случаев основные результаты доказываются.

1. Разложение Ивасавы. Пусть G — связная полупростая группа Ли и K — максимальная компактная подгруппа в ней. Тогда существует разрешимая подгруппа $R \subset G$, такая, что для каждого $g \in G$ имеется, и притом единственное, разложение вида $g = rk$, $r \in R$, $k \in K$. Выражаясь короче, *полупростая группа допускает однозначное разложение в произведение разрешимой и максимальной компактной подгрупп*: $G = RK$. Это разложение называется *разложением Ивасавы.*

Его можно конкретизировать, так как группа R в свою очередь разлагается в произведение абелевой группы A и нильпотентной *) группы $N{:}R = AN$ таким образом, что N является нормальным делителем группы R. Получается *разложение полупростой группы $G = ANK$ в произведение абелевой, нильпотентной и максимальной компактной подгрупп.* Это разложение также обычно называют *разложением Ивасавы.*

Задача 1. Показать, что альтернативно разложение Ивасавы можно записать в виде $G = KAN$.

Решение. Для каждого $g \in G$ записываем $g^{-1} = ank$ и используем инвариантность N в AN.

---

*) Определение разрешимой группы см. в примечании в начале § 3.1. *Нильпотентной* называется группа, для которой центральный ряд $G_{(0)}$, $G_{(1)}$, $G_{(2)}$, ... ($G_{(0)} = G, G_{(k+1)} = [G, G_{(k)}]$) после конечного числа шагов стабилизируется на единице. Через $[G, K]$ обозначен коммутатор группы G и ее подгруппы K, т. е. подгруппа, порожденная коммутаторами $gkg^{-1}k^{-1}$, $g \in G$, $k \in K$.

Как практически осуществить разложение Ивасавы? Для того чтобы это сделать, нужно найти алгебру Ли $\hat{G}$ группы G, а также алгебру Ли $\hat{G}_0$ соответствующей компактной группы *). Например, если $G = SU(2, 2)$, то $G_0 = SU(4)$; если $G = SO(2, 1)$, то $G_0 = SO(3)$ и т. д. Алгебра Ли некомпактной группы G получается из алгебры Ли компактной группы G_0, если некоторые генераторы (элементы базиса алгебры Ли) умножить на мнимую единицу. Условно назовем такие генераторы некомпактными.

Тогда алгебра Ли $\hat{K}$ максимальной компактной подгруппы натягивается на совокупность всех компактных генераторов (другими словами, $\hat{K} = \hat{G} \cap \hat{G}_0$), а алгебра $\hat{A}$ — на некоторое количество некомпактных генераторов, выбранных так, чтобы их было как можно больше, но они коммутировали бы друг с другом. Остается найти алгебру $\hat{N}$ нильпотентной подгруппы. Генераторы ее строятся следующим образом. Берутся все некомпактные генераторы, не вошедшие в алгебру $\hat{A}$, и к каждому из них добавляется некоторая линейная комбинация компактных генераторов. Эти добавки должны быть выбраны таким образом, чтобы операция коммутирования не выводила из $\hat{N}$ и чтобы коммутатор $[\hat{a}, \hat{n}]$ любых операторов из $\hat{A}$ и $\hat{N}$ принадлежал $\hat{N}$. Эти условия можно записать в виде

$$[\hat{N}, \hat{N}] \subset \hat{N}, \quad [\hat{A}, \hat{N}] \subset \hat{N}.$$

Получившаяся алгебра автоматически окажется алгеброй нильпотентной группы, т. е.

$$[\hat{N}, [\hat{N}, \ldots [\hat{N}, \hat{N}] \ldots]] = 0.$$

2. Конструкция неприводимых представлений. Для того чтобы найти неприводимые представления группы $G = ANK$, нужно построить еще одну подгруппу $C \subset G$. Она находится как *централизатор* A в K, т. е. состоит из всех элементов группы K, коммутирующих со всеми элементами группы A:

$$C = \{c \in K \mid ca = ac, \ \forall a \in A\}.$$

При этом она автоматически оказывается и *нормализатором* подгруппы N, т. е. $cNc^{-1} \subset N$. Ввиду этого множество $H = CAN$ элементов вида $can\,(c \in C,\ a \in A,\ n \in N)$ образует группу, причем N является нормальным делителем в ней.

Вот эта-то группа и служит для получения неприводимых представлений группы G. Достаточно взять любые унитарные неприводимые представления $\Lambda(C)$, $\Delta(A)$ (последнее заведомо одномерно), образовать представление $D(H)$ по формуле

---

*) Соответствие понимается в том смысле, что алгебры $\hat{G}$ и $\hat{G}_0$ являются двумя вещественными формами одной и той же алгебры над полем комплексных чисел (см. [68]).

$D(can) = \Lambda(c)\Delta(a)$ и индуцировать его на группу G. Индуцированное представление $U(G) = D(H) \uparrow G$ оказывается неприводимым, и все такие представления образуют *основную невырожденную серию унитарных неприводимых представлений* группы G. (Основную серию образуют представления, входящие в разложение регулярного представления.)

В соответствии с определением индуцированного представления оно реализуется в пространстве функций на $\mathscr{X} = G/H$, а скалярное произведение в этом пространстве определяется интегралом $(\varphi, \varphi') = \int\limits_{\mathscr{X}} \langle \varphi(x), \varphi'(x) \rangle d\mu(x)$. Отметим, что *дополнительная серия* получается, если в определении $D(H)$ представление $\Delta(A)$ выбирается неунитарным, а скалярное произведение в пространстве-носителе представления $D \uparrow G$ строится иначе (см. п. 2.3.9). Строго говоря, такое представление уже не подходит под определение индуцированного представления, которым мы пользовались. Однако это, конечно, модификация процедуры индуцирования. Ценой некоторых дополнительных усложнений удается получить *дискретные серии* унитарных неприводимых представлений. Однако полностью вопрос не решен до сих пор.

3*. Разложение Ивасавы для групп $SL(n, \mathbb{C})$ и $SO(p, q)$. Группа $SL(n, \mathbb{C})$ состоит из всех n-рядных квадратных матриц с комплексными элементами и с единичным детерминантом. Максимальная компактная подгруппа ее $K = SU(n)$ — это подгруппа унитарных матриц: $k^{\dagger}k = \mathbb{1}$. В качестве абелевой подгруппы A в разложении Ивасавы фигурирует группа диагональных матриц с положительными диагональными элементами (произведение которых равно единице). Роль централизатора C играет группа диагональных матриц с диагональными элементами, по модулю равными единице. Нильпотентная группа N состоит из нижних треугольных матриц с единицами на главной диагонали. Таким образом,

$$a = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} u_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & u_n \end{bmatrix}; \quad n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ g_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix};$$

$$\alpha_i > 0; \quad \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = 1; \quad |u_i| = 1; \quad u_1u_2 \dots u_n = 1.$$

Группа $SO(p, q)$ (*псевдоортогональная*) состоит из действительных квадратных матриц размерности $p + q$, удовлетворяющих условию $g^T I g = I$, где индекс T означает транспонирование и

$$I = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_p & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_q \end{bmatrix}$$

— диагональная матрица с p элементами, равными $+1$, и q элементами, равными -1. Эту группу можно интерпретировать как группу линейных преобразований в $(p+q)$-мерном линейном пространстве, сохраняющих билинейную форму

$$(x, y) = x^T I y = x^1y^1 + \dots + x^py^p - x^{p+1}y^{p+1} - \dots - x^{p+q}y^{p+q}.$$

Абелева подгруппа A состоит из гиперболических поворотов в плоскостях $(1, p+1), (2, p+2), \dots, (q, p+q)$, а централизатор C состоит из всех преобразований, не затрагивающих первые q и последние q координат:

$$a = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} \operatorname{ch}\chi_1 & \dots & 0 & 0 & \operatorname{sh}\chi_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \operatorname{ch}\chi_q & 0 & 0 & \dots & \operatorname{sh}\chi_q \\ \hline 0 & \dots & 0 & \mathbb{1}_{p-q} & 0 & \dots & 0 \\ \hline \operatorname{sh}\chi_1 & \dots & 0 & 0 & \operatorname{ch}\chi_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \operatorname{sh}\chi_q & 0 & 0 & \dots & \operatorname{ch}\chi_q \end{array}\right];$$

$$C = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_q & 0 & 0 \\ 0 & SO(p-q) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_q \end{bmatrix}.$$

Нильпотентную подгруппу труднее охарактеризовать. Алгебру Ли ее можно найти способом, описанным в пункте 1.

§ 3.3*. Представления группы Лоренца

Методика, описанная в предыдущем параграфе, позволяет найти основную серию унитарных неприводимых представлений группы Лоренца $U_{j\rho}$ ($\rho \in \mathbb{R}$; $j = 0, 1/2, 1, \dots$). Эти представления используются, например, для фазового анализа амплитуд рассеяния в релятивистской квантовой теории.

Если, сохранив алгебраическую конструкцию, лежащую в основе индуцированного представления, по-другому определить функциональное пространство, в котором оно действует, то можно получить и другие неприводимые представления группы Лоренца. В частности, таким способом можно построить конечномерные представления, используемые в теории элементарных частиц (см. главу 5).

1. Группа Лоренца — это группа $SO(1,3)$ всех однородных преобразований пространства Минковского, сохраняющих его метрику (см. п. 5.1.1). Эта группа неодносвязна, и *универсаль-*

ной накрывающей *) для нее является группа $SL(2,\mathbb{C})$ унимодулярных (т. е. с единичным детерминантом) двурядных комплексных матриц. Гомоморфизм осуществляется следующим образом. Отобразим взаимно-однозначно пространство Минковского $\mathscr{X}$ на пространство эрмитовых двурядных комплексных матриц, сопоставив вектору $x \in \mathscr{X}$ матрицу

$$X = x^0 \cdot \mathbb{1} + x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 = \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix},$$

где σ_i — *матрицы Паули*:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда каждая матрица $A \in SL(2,\mathbb{C})$ определяет преобразование $X \mapsto AXA^\dagger$ и тем самым некоторое преобразование l: $x \mapsto x'$ пространства Минковского. Отображение $A \mapsto l$ является гомоморфизмом группы $SL(2,\mathbb{C})$ на группу Лоренца.

Будем в дальнейшем под L понимать не саму группу Лоренца, а ее универсальную накрывающую $SL(2,\mathbb{C})$. *Максимальной компактной подгруппой* в L является группа $R = SU(2)$ унимодулярных унитарных двурядных матриц. При гомоморфизме $SL(2,\mathbb{C})$ на группу Лоренца подгруппа $SU(2)$ переходит в подгруппу пространственных (трехмерных) вращений. Если вектор $\boldsymbol{a}$ по направлению совпадает с осью вращения, а по величине — с углом вращения, то матрица, соответствующая этому вращению, имеет вид

$$r = \exp(i\boldsymbol{a}\sigma/2) = \cos\frac{|\boldsymbol{a}|}{2} + i\,\frac{\boldsymbol{a}\sigma}{|\boldsymbol{a}|}\sin\frac{|\boldsymbol{a}|}{2}.$$

Разложение Ивасавы для группы Лоренца имеет вид $L = ANR$, где $R = SU(2)$ — максимальная компактная подгруппа, а *абелева* и *нильпотентная подгруппы* состоят из элементов вида

$$a = \chi_A = \begin{bmatrix} e^{\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{-\chi/2} \end{bmatrix}; \quad n = z_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix} \qquad (\chi \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}).$$

Элемент $\chi_A \in A$ имеет смысл гиперболического поворота на «угол» χ в плоскости (03). Для построения неприводимых представлений понадобится еще централизатор C подгруппы A в R.

*) *Накрывающей* для группы G называется такая односвязная группа $\tilde{G}$, что существует гомоморфизм $\tilde{G}$ на группу G. Накрывающая называется *универсальной*, если она не имеет собственной подгруппы, также являющейся накрывающей для той же группы. *Односвязной* называется группа, в которой каждая непрерывная замкнутая кривая может быть посредством непрерывной деформации стянута в точку. Односвязные группы обладают лишь однозначными непрерывными представлениями, тогда как неодносвязные имеют непрерывные *многозначные* представления. Последние могут быть сведены к однозначным представлениям универсальной накрывающей группы.

Очевидно, что он состоит из поворотов в плоскости (12), т. е. из элементов вида

$$c = r_\psi^3 = \psi_C = \begin{bmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{bmatrix} \qquad (\psi \in \mathbb{R}).$$

Все три подгруппы A, N, C — абелевы. Законы композиции в них имеют вид

$$\chi_A\chi'_A = (\chi + \chi')_A, \quad \psi_C\psi'_C = (\psi + \psi')_C, \quad z_N z'_N = (z + z')_N.$$

Коммутация элементов из различных подгрупп производится по законам

$$\chi_A\psi_C = \psi_C\chi_A, \quad \chi_A z_N \chi_A^{-1} = (e^{-\chi}z)_N,$$

$$\psi_C z_N \psi_C^{-1} = (e^{-i\psi}z)_N.$$

Множество AC элементов вида $\chi_A\psi_C$ образует абелеву группу, элементы которой удобно иногда параметризовать не парой действительных чисел (χ, ψ), а комплексным ненулевым числом

$$\alpha = \exp[(\chi + i\psi)/2].$$

Имеем, очевидно,

$$\alpha_{AC} = \chi_A\psi_C = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\})$$

с законом композиции

$$\alpha_{AC}\alpha'_{AC} = (\alpha\alpha')_{AC}$$

и правилом коммутации с элементами нильпотентной группы

$$\alpha_{AC} z_N \alpha_{AC}^{-1} = (\alpha^{-2}z)_N.$$

2. Инвариантная мера на индуцирующей подгруппе. Для построения неприводимых представлений группы Лоренца нам придется индуцировать из подгруппы $H = ANC$. Группа Лоренца, как всякая связная полупростая группа, унимодулярна. Однако ее подгруппа H оказывается неунимодулярной. Найдем ее *модуль*, для чего предварительно найдем *правоинвариантную меру* на этой группе. Будем искать ее в виде

$$\int_H f(h)\,d_R h = \int_{-\infty}^{\infty} d\chi \int_{\psi_1}^{\psi_1+4\pi} d\psi \int_C dz\,d\bar{z}\,\rho(\chi, \psi, z)\,f(z_N\chi_A\psi_C)$$

$$(dz\,d\bar{z} = -2i\,dx\,dy, \quad z = x + iy).$$

Совершая правый сдвиг функции f на элемент из подгруппы поворотов C и требуя инвариантности меры относительно такого сдвига, убеждаемся, что функция ρ не зависит от ψ. Аналогично, совершая правый сдвиг на элемент из подгруппы A, видим, что ρ

не зависит от χ. Наконец, совершая правый сдвиг на z_N, получим

$$\int\limits_H f(hz_N)\,d_Rh = \int d\chi \int d\psi \int dz'\,d\bar{z}'\,\rho(z')\,f((z' + e^{-\chi-i\psi}z)_N\,\chi_A\psi_C).$$

Делая замену переменной $z'' = z' + e^{-\chi-i\psi}z$, приведем интеграл к виду

$$\int d\chi \int d\psi \int dz''\,d\bar{z}''\,\rho(z'' - e^{-\chi-i\psi}z)\,f(z''_N\chi_A\psi_C).$$

Очевидно, что для инвариантности относительно правого сдвига на z_N необходимо $\rho(z) = \text{const}$. Полагая эту константу равной единице, получаем окончательно

$$\int f(h)\,d_Rh = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi \int\limits_{\psi_1}^{\psi_1+4\pi} d\psi \int\limits_C f(z_N\chi_A\psi_C)\,dz\,d\bar{z}.$$

Теперь для того чтобы найти модуль группы H, достаточно совершить левый сдвиг функции f и воспользоваться определением модуля $d_R(hh') = \Delta_H(h)\,d_Rh'$. Полагая $h = z_N\chi_A\psi_C$, получим

$$\int f(h')\,d_R(hh') = \int f(h^{-1}h')\,d_Rh' =$$
$$= \int d\chi' \int d\psi' \int dz'\,d\bar{z}'\,f(\psi_C^{-1}\chi_A^{-1}z_N^{-1}z'_N\chi'_A\psi'_C) =$$
$$= \int d\chi' \int d\psi' \int dz'\,d\bar{z}'\,f((e^{\chi+i\psi}(z'-z))_N\,(\chi'-\chi)_A\,(\psi'-\psi)_C).$$

После замены переменных

$$z'' = e^{\chi+i\psi}(z'-z); \quad \chi'' = \chi' - \chi;$$
$$\bar{z}'' = e^{\chi-i\psi}(\bar{z}'-\bar{z}); \quad \psi'' = \psi' - \psi$$

получаем

$$\int f(h')\,d_R(hh') = e^{-2\chi}\int f(h')\,d_Rh'.$$

Следовательно,

$$\Delta_H(z_N\chi_A\psi_C) = e^{-2\chi} \quad \text{или} \quad \Delta_H(z_N\alpha_{AC}) = |\alpha|^{-4}.$$

3. Индуцирование неприводимых представлений. Для того чтобы построить унитарное неприводимое представление группы $L = ANR$, следует, согласно общему рецепту (п. 3.2.2), индуцировать из подгруппы $H = ANC$, именно из унитарного неприводимого представления этой группы

$$\Delta_{j\rho}(anc) = \Delta_{j\rho}(\chi_Az_N\psi_C) = \exp[i(j\psi + \rho\chi)]$$
$$(\rho \in \mathbb{R};\ j = 0,\ \pm{}^1/_2,\ \pm 1,\ \pm{}^3/_2,\ \ldots).$$

Образуем, кроме того, вспомогательное неунитарное представление

$$\tilde{\Delta}_{j\rho}(\chi_A\psi_Cz_N) = \exp[ij\psi + (i\rho - 1)\chi]$$

или

$$\tilde{\Delta}_{j\rho}(\alpha_{AC}z_N) = \alpha^{n_1-1}\bar{\alpha}^{n_2-1},$$

где использованы обозначения

$$n_1 = i\rho + j, \quad n_2 = i\rho - j.$$

Тогда представление $U_{j\rho}(L)$ осуществляется левыми сдвигами в пространстве комплекснозначных функций на группе L со структурным условием

$$\varphi(lh) = \tilde{\Delta}_{j\rho}(h^{-1})\,\varphi(l); \quad U_{j\rho}(l)\,\varphi(l') = \varphi(l^{-1}l').$$

Вместо функций на группе $l \mapsto \varphi(l)$ можно использовать функции $x \mapsto \varphi(x) = \varphi(x_L)$ на однородном пространстве $\mathscr{X} = L/H = R/C$. Это пространство можно интерпретировать как двумерную сферу $\mathscr{X} = S^2$. Действительно, группа вращений R действует транзитивно на такой сфере, а подгруппа C является стабилизатором ее полюса. В качестве представителей $x_L = x_R$ можно выбрать элементы группы вращений, переводящие полюс сферы в точку $x \in \mathscr{X}$.

Чтобы записать инвариантное скалярное произведение в пространстве-носителе $\mathscr{H}_{j\rho}$ представления $U_{j\rho}$, нужно найти соответствующую квазиинвариантную меру в пространстве $\mathscr{X} = L/H$. Перепишем сначала меру на H следующим образом:

$$\int f(h)\,d_Rh = \int d\chi \int d\psi \int dz\,d\bar{z}\,f(\psi_C\,(e^{i\psi}z)_N\,\chi_A) =$$
$$= \int d\chi \int d\psi \int dz\,d\bar{z}\,f(\psi_Cz_N\chi_A).$$

Пусть теперь инвариантная мера на L имеет вид (ср. п. 2.2.6)

$$\int\limits_L f(l)\,dl = \int\limits_{\mathscr{X}} dx \int\limits_H d_Rh\,f(x_Rh).$$

Тогда, согласно общим положениям, мера dx квазиинвариантна, причем

$$d(lx) = \Delta_H((l,\ x)_H^{-1})\,dx.$$

Положим здесь $l = r \in R$ и заметим, что при выборе представителей из группы вращений $x_L = x_R \in R$ элемент $(rx)_R^{-1}rx_R$ оставляет на месте полюс сферы и, следовательно, принадлежит подгруппе C. Но этот элемент — не что иное, как фактор $(r, x)_H$. Учитывая, что $\Delta_H(c) = 1$ для любого $c \in C$, получаем, что мера dx, квазиинвариантная относительно действия группы Лоренца, является инвариантной относительно вращений:

$$d(rx) = dx, \quad r \in R.$$

Скалярное произведение в $\mathscr{H}_{j\rho}$ записывается через эту меру в виде

$$(\varphi, \varphi') = \int\limits_{\mathscr{X}} dx\, \overline{\varphi(x_R)}\, \varphi'(x_R) = \int\limits_{\mathscr{X}} dx\, \overline{\varphi(x)}\, \varphi'(x).$$

4. Ограничение на подгруппу вращений. Найдем ограничение неприводимого представления $U_{j\rho}(L)$ на подгруппу вращений R. Для этого используем теорему о подгруппах (п. 2.3.2). Нам требуется найти представление $(\Delta_{j\rho}(H)\uparrow L)\downarrow R$. Для этого нужно построить двойные классы $R\backslash H$. Записывая разложение Ивасавы в виде $L = RAN = RH$, видим, что имеется лишь один двойной класс с представителем 1. Поэтому теорема о подгруппах дает $U_{j\rho}\downarrow R = (\tilde{\Delta}_{j\rho}(H)\downarrow C)\uparrow R$. Но легко видеть, что $\tilde{\Delta}_{j\rho}\downarrow C = \delta_j(C)$, где обозначено $\delta_\mu(\psi_C) = \exp i\mu\psi$. Поэтому получаем

$$U_{j\rho}\downarrow R = \delta_j(C)\uparrow R.$$

Известно, что ограничение неприводимого представления $\Delta_{j'}(R)$ на подгруппу C поворотов вокруг оси x^3 имеет вид

$$\Delta_{j'}(R)\downarrow C = \sum_{j_3=-j'}^{j'} \delta_{j_3}(C).$$

Поэтому по теореме взаимности (п. 2.3.5) получаем окончательно

$$U_{j\rho}\downarrow R = \sum_{j'=|j|}^{\infty} \Delta_{j'}(R).$$

Задача 1. Показать, что проекторы, осуществляющие это разложение,

$$P_{j'}\varphi(r) = (2j'+1)\int\limits_R [\Delta_{j'}(r^{-1}r')]^j{}_j\, \varphi(r')\, dr',$$

где функция $r\mapsto\varphi(r)$ получается ограничением на подгруппу R функции $l\mapsto\varphi(l)$ из пространства-носителя представления $\Delta_{j\rho}\uparrow L$.

Указание. Использовать формулы п. 2.3.5.

Замечание. Если числа $n_1 = i\rho + j$, $n_2 = i\rho - j$ — целые положительные, то представление $\Delta_{j\rho}\uparrow L$ содержит конечномерное подпредставление $D^{pq}(L)$, $p = (n_1-1)/2$, $q = (n_2-1)/2$ размерности $n_1 n_2 = (2p+1)(2q+1)$. Разложение $D^{pq}\downarrow R$ на неприводимые осуществляется с помощью тех же самых формул, однако в подпространстве этого представления оператор $P_{j'}$ обращается в нуль при $j' > j_{\max} = p + q$. Поэтому в этом случае

$$D^{pq}\downarrow R = \sum_{j'=|p-q|}^{p+q} \Delta_{j'}(R).$$

Доказательство этого можно найти в книге [12]. Отметим, однако, что в случае конечномерных представлений удобнее оказывается инфинитезимальный метод, сводящий представление группы к представлению соответствующей алгебры Ли [13, 35].

5. Доказательство неприводимости. Чтобы доказать неприводимость представления $U_{j\rho}(L) = \Delta_{j\rho}(H)\uparrow L$ по схеме п. 2.3.6, построим пространство $\mathscr{Y} = H\backslash L/H$ двойных классов. Один из двойных классов имеет вид $y_0 = H$. Выберем любой элемент, лежащий вне этого класса, например,

$$l_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда можно непосредственно доказать, что любой элемент $l \in L - H$ представим в виде $h' l_1 h$; $h, h' \in H$, т. е. классы $y_0 = H$ и $y_1 = H l_1 H$ исчерпывают L. Для этого достаточно доказать, что в таком виде представляется любое вращение, кроме вращения вокруг оси x^3, т. е. любое $r \in R - C$. Более того, поскольку любое вращение $r \in R$ можно с помощью углов Эйлера параметризовать как $r = r^3_\varphi r^1_\theta r^3_\psi$, достаточно представить в виде $h' l_1 h$ лишь элемент r^1_θ, $\theta \neq 0$.

Задача 2. Найти h, $h' \in H$ такие, что $r^1_\theta = h' l_1 h$.

Решение.

$$h = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ z & \alpha^{-1} \end{bmatrix}, \quad h' = \begin{bmatrix} \alpha' & 0 \\ z' & \alpha'^{-1} \end{bmatrix},$$

где α — любое комплексное число, не равное нулю,

$$\alpha' = i\alpha \sin\frac{\theta}{2}, \quad z = -\alpha - i\alpha^{-1}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad z' = \alpha\cos\frac{\theta}{2}.$$

Вспоминая, что пространство $\mathscr{X} = L/H$ правых смежных классов изоморфно двумерной сфере, мы видим, что двойной класс $y_0 \in \mathscr{Y}$ совпадает с полюсом сферы $x_0 \in \mathscr{X}$ (центром однородного пространства), а второй класс $y_1 \in \mathscr{Y}$ содержит все остальные точки сферы $x \in \mathscr{X} - \{x_0\}$.

Для второго класса имеем в качестве представителя $(y_1)_L = l_1$ и получаем

$$(y_1)_L H (y_1)_L^{-1} \cap H = AC.$$

Легко найти вспомогательное представление, необходимое для доказательства неприводимости $\Delta_{j\rho}(H)\uparrow L$:

$$\alpha_{AC} \mapsto \underset{\sim}{\Delta}^1_{j\rho}(\alpha_{AC}) = \underset{\sim}{\Delta}_{j\rho}(l_1^{-1}\alpha_{AC} l_1) = \underset{\sim}{\Delta}_{j\rho}(\alpha_{AC}^{-1}).$$

Поскольку $\underset{\sim}{\Delta}_{j\rho}(\alpha_{AC}) = \alpha^{n_1+1}\bar{\alpha}^{n_2+1}$, то

$$\underset{\sim}{\Delta}^1_{j\rho}(\alpha_{AC}) = \alpha^{-n_1-1}\bar{\alpha}^{-n_2-1}.$$

Два представления $\underset{\sim}{\Delta}^1_{j\rho}\downarrow AC$, $\tilde{\Delta}_{j\rho}\downarrow AC$ совпадают лишь при $j=\rho=0$. Во всех остальных случаях они не переплетаются. Согласно критерию неприводимости (п. 2.3.6), получаем, что при $(j,\rho)\neq(0,0)$ представление $U_{j\rho}=\Delta_{j\rho}\uparrow L$ операторно неприводимо, и поскольку оно унитарно, то и неприводимо. В случае $j=\rho=0$ использованный нами достаточный признак неприводимости не имеет места. Однако представление U_{00} также неприводимо. Это будет установлено в пункте 7.

Пользуясь критерием неэквивалентности неприводимых индуцированных представлений (п. 2.3.6), легко показать, что представления $U_{j\rho}$ и $U_{j'\rho'}$ не эквивалентны при $(j',\rho')\neq(-j,-\rho)$. Если же $(j',\rho')=(-j,-\rho)$, то алгебраический критерий ничего не может дать и требуется дополнительное исследование. Оно проведено в пункте 7 и показывает, что представления $U_{j\rho}$ и $U_{-j\,-\rho}$ эквивалентны. Поэтому мы можем положить $j\geqslant 0$, не потеряв при этом неприводимых представлений. Получаем множество неприводимых унитарных представлений группы Лоренца $U_{j\rho}(L)=\Delta_{j\rho}(H)\uparrow L$, $j=0,\,{}^1/_2,\,1,\,{}^3/_2,\,\ldots;\ \rho\in\mathbb{R}$. Они составляют так называемую *основную серию унитарных неприводимых представлений* — это те представления, которые входят в разложение регулярного представления на неприводимые.

6. Реализация функциями комплексного переменного. Нетрудно видеть, что элементы группы N могут служить представителями классов $z\in H/AC$, так что $z=z_NAC$. Факторизация $\mathcal{Z}=H/AC$ произведена для того, чтобы перечислить правые смежные классы $x\in\mathcal{X}=L/H$, входящие в двойной класс $y_1=Hl_1H$ (см. п. 2.3.1). Мы видим теперь, что для каждого такого класса $x\in\mathcal{X}-\{x_0\}$ представителем может служить элемент $x_L=z_Nl_1$. Меру dx можно переписать в виде

$$\int_{\mathcal{X}} f(x)\,dx=\int_{\mathbb{C}} f(z_Nl_1H)\,dz\,d\bar{z}.$$

Точка $y_0\in\mathcal{Y}$ вообще не участвует в этом представлении меры dx, потому что она соответствует единственной точке $x_0\in\mathcal{X}$, а множество $\{x_0\}$ имеет меру нуль. Выбрасывание одной этой точки несущественно при интегрировании обычных (не обобщенных) функций. В частности, скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}_{j\rho}$ можно записать в виде

$$(\varphi,\,\varphi')=\int_{\mathbb{C}} dz\,d\bar{z}\,\overline{\varphi(z)}\,\varphi'(z),$$

где обозначено $\varphi(z)=\varphi((-z)_Nl_1)$, $z\in\mathbb{C}$. Такая реализация пространства-носителя представления $U_{j\rho}$ функциями комплексного переменного часто используется в литературе.

Задача 3. Найти явные формулы преобразования функции $z\mapsto\varphi(z)=\varphi((-z)_Nl_1)$ под действием представления $U_{j\rho}(L)$.

Использовать параметризацию группы Лоренца

$$l=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix};\quad \begin{matrix}\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta\in\mathbb{C},\\ \alpha\delta-\beta\gamma=1.\end{matrix}$$

Решение.

$$U_{j\rho}(l)\,\varphi(z)=(\beta z+\delta)^{n_1-1}\,\overline{(\beta z+\delta)}^{n_2-1}\,\varphi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right),$$

$$n_1=i\rho+j,\quad n_2=i\rho-j.$$

7. Операторы переплетения. Оператор $T\in[U_{j\rho},\ U_{j'\rho'}]$ при $(j,\rho)\neq(j',\rho')$ имеет вид

$$T\varphi(l)=\int_{\mathbb{C}} t_1\varphi(lz_Nl_1)\,dz\,d\bar{z},$$

где

$$t_1=t(l_1)\in[\underset{\sim}{\Delta}^1_{j\rho}\downarrow AC,\ \tilde{\Delta}_{j'\rho'}(AC)].$$

В пункте 5 было показано, что t_1 может быть отлично от нуля лишь при $(j',\rho')=(-j,-\rho)$.

Рассмотрим подробнее этот последний случай. Положим $l=(-z)_Nl_1$. Тогда формула принимает вид

$$T\varphi(z)=\int\varphi\left((-z)_N\,l_1z'_Nl_1\right)dz'\,d\bar{z}'.$$

Непосредственная проверка показывает, что почти для всех z', именно для $z'\neq-1$, аргумент функции φ под интегралом представляется в виде $(-z)_N\,l_1z'_N\,l_1=(-z'')_N\,l_1h$, где

$$z''=z+\frac{1}{z'+1};\quad h=\begin{bmatrix}(1+z')^{-1} & 0\\ z'-(1+z')^{-1} & 1+z'\end{bmatrix}.$$

Поэтому, используя структурное условие, можно привести эту функцию к виду

$$\varphi\left((-z)_N\,l_1z'_Nl_1\right)=\tilde{\Delta}_{j\rho}\left(l_0^{-1}\right)\varphi\left((-z'')_N\,l_1\right)=$$
$$=(z'+1)^{n_1-1}\,\overline{(z'+1)}^{n_2-1}\,\varphi(z'').$$

Делая в интеграле замену переменной $z'\mapsto z''$, получим

$$T\varphi(z)=\int_{\mathbb{C}}(z'-z)^{-n_1-1}\,\overline{(z'-z)}^{-n_2-1}\,\varphi(z')\,dz'\,d\bar{z}'.$$

Вводя «полярные» координаты $z=re^{i\alpha}$, можно непосредственно убедиться, что этот интеграл сходится при $\mathrm{Re}(n_1+n_2)<0$. Аналитическим продолжением можно доопределить его [12] при всех значениях n_1,n_2, кроме $n_1,n_2=0,1,2,\ldots$

Следовательно, при $(j,\rho)\neq(0,0)$ оператор переплетения $T\in[U_{j\rho},\,U_{-j,\,-\rho}]$ существует, и представления $U_{j\rho},\,U_{-j,\,-\rho}$ эквивалентны.

Почти те же рассуждения позволяют доказать неприводимость представления U_{00}. Любой оператор из коммутанта $[\Delta_{j\rho} \uparrow L]$ представляется в виде

$$T\varphi(l) = t_0\varphi(l) + \int_{\mathbb{C}} dz\, d\bar{z}\, t_1\varphi(lz_N l_1),$$

где

$$t_0 \in [\Delta_{j\rho}] = \mathbb{C}, \quad t_1 \in [\underset{\sim}{\Delta}{}^1_{j\rho} \downarrow AC,\ \tilde{\Delta}_{j\rho} \downarrow AC].$$

Здесь приходится кроме двойного класса $y_1 = Hl_1H$ учитывать и класс $y_0 = H$, потому что единичный оператор из коммутанта $[\Delta_{j\rho}]$ порождается функцией $g \mapsto t(g)$, сосредоточенной на подгруппе $H = y_0$ (по поводу условия на t_0 см. замечание в п. 2.3.7).

В пункте 5 мы видели, что представления $\underset{\sim}{\Delta}{}^1_{j\rho} \downarrow AC$ и $\tilde{\Delta}_{j\rho} \downarrow AC$ не переплетаются, если $(j, \rho) \neq (0, 0)$. Отсюда следует, что $t_1 = 0$ и все операторы из коммутанта кратны единичному, т. е. представления $U_{j\rho}$, $(j, \rho) \neq (0, 0)$, операторно неприводимы и неприводимы. В случае $j = \rho = 0$ можно положить $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, и нетривиальный оператор самопереплетения принимает вид

$$T\varphi(l) = \int_{\mathbb{C}} dz\, d\bar{z}\, \varphi(lz_N l_1).$$

Точно та же процедура, что применялась выше для операторов переплетения, позволяет придать ему форму

$$T\varphi(z) = \int_{\mathbb{C}} (z' - z)^{-1}\, \overline{(z' - z)}^{-1}\, \varphi(z')\, dz'\, d\bar{z}'.$$

Но, как уже говорилось выше, такой оператор не определен. Таким образом, записанный формально нетривиальный оператор самопереплетения на самом деле не существует, и представление операторно неприводимо, а значит, и неприводимо.

З а м е ч а н и е. Операторы переплетения представлений $U_{j\rho}$ позволяют построить дополнительную серию унитарных неприводимых представлений группы Лоренца. Для этого согласно результатам п. 2.3.9 следует наряду с представлением $\Delta_{j\rho}(H)$ рассмотреть сопряженное представление $\Delta_{\bar{j}\bar{\rho}}(H)$ и найти оператор переплетения $T \in [\Delta_{j\rho} \uparrow L,\ \Delta_{\bar{j}\bar{\rho}} \uparrow L]$. Мы видели, что это возможно лишь в том случае, если $(\bar{j}, \bar{\rho}) = (-j, -\rho)$, т. е. при $j = 0$ и $\rho = i\varkappa$ чисто мнимом. Скалярное произведение в $\mathscr{H}_{0,\, i\varkappa}$, определенное формулой $(\varphi, \varphi') = \int \overline{\varphi(x_L)}(T\varphi')(x_L)\, dx$, инвариантно. Можно показать, что при $-1 < \varkappa < 1$ оно положительно определено. Следовательно, представления $U_{0,\, i\varkappa}$, $-1 < \varkappa < 1$, унитарны. Поскольку они, как следует из сказанного ранее, операторно неприводимы, можно заключить также, что они неприводимы. Это и есть *дополнительная серия унитарных неприводимых представлений.*

§ 3.4. Представления групп де Ситтера и конформной

Группой де Ситтера называется любая из пятимерных псевдоортогональных групп $SO(1, 4)$ и $SO(2, 3)$. Эти группы являются группами движений (т. е. преобразований, сохраняющих метрику) соответствующих четырехмерных римановых пространств де Ситтера — пространств постоянной кривизны. Пространство де Ситтера, соответствующее группе $SO(1, 4)$, может служить моделью, описывающей геометрию Вселенной. Эта модель не точна, но она имеет преимущество — высокую степень симметрии. Группа $SO(1, 4)$ — 10-параметрическая, так же как и группа Пуанкаре, описывающая симметрию пространства Минковского.

В этом параграфе будут построены основная и дополнительная серии неприводимых унитарных представлений группы $SO(1, 4)$. Именно эти представления описывают элементарные частицы в пространстве де Ситтера (см. главу 9). Для того чтобы подчеркнуть это (и для удобства использования результатов в теории частиц), для группы де Ситтера и ее подгрупп по возможности будут использоваться обозначения, указывающие на аналогию с группой Пуанкаре (см. главу 5).

В конце параграфа кратко описывается процедура, позволяющая найти неприводимые представления группы конформных преобразований пространства Минковского, изоморфной $SO(2, 4)$ или $SU(2, 2)$.

1. Группа де Ситтера $P = SO(1, 4)$ — это группа пятирядных квадратных матриц с единичным детерминантом, удовлетворяющих условию $p^{\mathrm{T}}\eta p = \eta$, где $\eta = \mathrm{Diag}\,(1, -1, -1, -1, -1)$. Матричные элементы будем нумеровать индексами $a, b, c = 0, 1, 2, 3, 4$. Если при этом в некоторых формулах индекс пробегает ограниченное множество значений, то будем употреблять буквы другого типа (греческие или из другой части алфавита): $\mu, \nu, \lambda, \ldots = 0, 1, 2, 3$ (это индексы, характерные для подгруппы Лоренца $SO(1, 3)$); $i, j, k = 1, 2, 3$ (соответствуют подгруппе «вращений» $SO(3)$). В последнем случае будут употребляться также векторные обозначения: $\boldsymbol{a} = \{a^i \mid i = 1, 2, 3\}$.

Генераторы группы де Ситтера L_{ab} $(a, b = 0, 1, 2, 3, 4)$ являются пятирядными матрицами с элементами вида

$$(L_{ab})^c{}_d = \delta^c_a \eta_{bd} - \delta^c_b \eta_{ad}$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[L_{ab}, L_{cd}] = \eta_{ac}L_{bd} - \eta_{bc}L_{ad} - \eta_{ad}L_{bc} + \eta_{bd}L_{ac}.$$

Произведем *разложение Ивасавы* группы де Ситтера $P = ATK$. Совокупность всех «компактных» генераторов L_{ab} $(a, b = 1, 2, 3, 4)$ образует базис алгебры Ли максимальной компактной подгруппы $K = SO(4)$. Из некомпактных генераторов L_{0a} $(a = 1, 2, 3, 4)$ нельзя составить даже двух независимых линейных комбинаций, коммутирующих друг с другом. Следовательно, абелева группа A должна быть однопараметрической. Пусть это группа с генератором L_{04}.

Остается найти нильпотентную подгруппу $\boldsymbol{T}$. Для этого оставшиеся некомпактные генераторы L_{0i} $(i = 1, 2, 3)$ нужно видоизменить, добавив к ним линейные комбинации компактных, с тем, чтобы получившиеся операторы генерировали нильпотентную группу, удовлетворяющую условию $a\boldsymbol{T}a^{-1} = \boldsymbol{T}$, $a \in A$. Нетрудно видеть, что операторы $T_i = L_{i4} - L_{i0}$ $(i = 1, 2, 3)$ удовлетворяют этому требованию. Группа $\boldsymbol{T}$ получается не только нильпотентной, но и абелевой.

Задача 1. Найти общий вид матриц, входящих в группу $\boldsymbol{T}$.

Указание. Воспользоваться тем, что для любых a^i $(i = 1, 2, 3)$ имеет место $(a^iT_i)^3 = 0$.

Решение.

$$[\exp(a^iT_i)]^c{}_b = \delta^c{}_b - a^i\left[\left(\delta_4^c - \delta_0^c\right)\eta_{ib} + \delta_i^c\left(\eta_{0b} - \eta_{4b}\right)\right] + {}^1/_2\boldsymbol{a}^2\left(\delta_0^c - \delta_4^c\right)\left(\eta_{0b} - \eta_{4b}\right).$$

Удобно выделять в матрицах $p = \{p^a{}_b\} \in P$ блоки, соответствующие значениям индексов a, $b = 1, 2, 3$. Тогда любая матрица $p \in P$ принимает вид

$$p = \begin{bmatrix} \alpha & \boldsymbol{a}^\tau & \beta \\ \boldsymbol{b} & A & \boldsymbol{c} \\ \gamma & \boldsymbol{d}^\tau & \delta \end{bmatrix},$$

где α, β, γ, δ — действительные числа, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — трехмерные векторы-столбцы, $\boldsymbol{a}^\tau$, $\boldsymbol{d}^\tau$ — векторы-строки и A — матрица 3×3. В этих обозначениях матрица η принимает вид

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

матрицы, входящие в абелеву и максимальную компактную подгруппы:

$$\tau_A = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\tau & 0 & \operatorname{sh}\tau \\ 0 & \mathbb{1} & 0 \\ \operatorname{sh}\tau & 0 & \operatorname{ch}\tau \end{bmatrix}; \quad k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

а элементы нильпотентной подгруппы, получаемые из решения задачи 1:

$$\boldsymbol{a}_T = \begin{bmatrix} 1 + \boldsymbol{a}^2/2 & -\boldsymbol{a}^\tau & \boldsymbol{a}^2/2 \\ -\boldsymbol{a} & \mathbb{1} & -\boldsymbol{a} \\ -\boldsymbol{a}^2/2 & \boldsymbol{a}^\tau & 1 - \boldsymbol{a}^2/2 \end{bmatrix}.$$

Совокупность элементов вида $\boldsymbol{a}_T\tau_A \in \boldsymbol{T}A$ образует разрешимую группу, законы композиции в которой определяются соотношениями

$$\tau_A\tau'_A = (\tau + \tau')_A; \quad \boldsymbol{a}_T\boldsymbol{a}'_T = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}')_T;$$
$$\tau_A\boldsymbol{a}_T\tau_A^{-1} = (e^{-\tau}\boldsymbol{a})_T.$$

Элементы групп A и $\boldsymbol{T}$ являются аналогами соответственно временных и пространственных сдвигов в группе Пуанкаре. Централизатор группы A в K, как легко видеть, состоит из всех вращений в трехмерном пространстве (1 2 3). Обозначим эту группу через R, потому что она играет роль, аналогичную роли пространственных вращений в группе Пуанкаре. Элемент этой группы

$$r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Коммутационные соотношения между «вращениями» $r \in R$ и «сдвигами» $\tau_A\boldsymbol{a}_T \in A\boldsymbol{T}$ имеют вид

$$r\tau_Ar^{-1} = \tau_A; \quad r\boldsymbol{a}_Tr^{-1} = (r\boldsymbol{a})_T.$$

Произведение $H = A\boldsymbol{T}R$ — это та подгруппа, из которой нужно индуцировать для получения неприводимых представлений, — *аналог малой группы* в группе Пуанкаре.

2. Конструкция неприводимых представлений группы де Ситтера. Группа де Ситтера, как всякая полупростая группа, унимодулярна. Найдем модуль ее подгруппы $H = A\boldsymbol{T}R$. Легко показать, что следующая мера на этой группе правоинвариантна:

$$\int_H f(h)\,d_Ph = \int_R dr \int_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{a} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f\left(r\boldsymbol{a}_T\tau_A\right),$$

где dr — инвариантная мера на группе вращений, а $d^3\boldsymbol{a} = da^1\,da^2\,da^3$ — мера, инвариантная относительно трехмерных вращений. Совершая левый сдвиг функции f на элемент $h = r\boldsymbol{a}_T\tau_A$, получим

$$\int_H f(h')\,d_R(hh') = \int f\left(h^{-1}h'\right)d_Rh' =$$
$$= \int dr' \int d^3\boldsymbol{a}' \int d\tau' f\left(\tau_A^{-1}\boldsymbol{a}_T^{-1}r^{-1}r'\boldsymbol{a}'_T\tau'_A\right) =$$
$$= \int dr' \int d^3\boldsymbol{a}' \int d\tau'\, f\left(r^{-1}r'\left(e^\tau\left(\boldsymbol{a}' - r'^{-1}r\boldsymbol{a}\right)\right)_T(\tau' - \tau)_A\right).$$

Пользуясь инвариантностью меры dr и делая в интеграле по $\boldsymbol{a}'$ замену переменной $\boldsymbol{a}'' = e^\tau\left(\boldsymbol{a}' - r'^{-1}r\boldsymbol{a}\right)$, получим

$$\int_H f(h')\,d_R(hh') = e^{-3\tau}\int_H f(h')\,d_Rh',$$

откуда

$$\Delta_H(r\boldsymbol{a}_T\tau_A) = \exp(-3\tau).$$

Теперь неприводимые представления группы де Ситтера получаются по общему рецепту (см. п. 3.2.2). Берем произвольное унитарное неприводимое представление группы AR:

$$\tau_A r \longmapsto e^{i\mu\tau}\Delta_j(r),$$

где $\mu \in \mathbb{R}$, а индекс $j = 0, {}^1/_2, 1, {}^3/_2, \ldots$ определяет неприводимое унитарное представление Δ_j группы вращений R. Затем определяем соответствующее представление группы H:

$$\Delta_{\mu j}(\tau_A r\boldsymbol{a}_T) = e^{i\mu\tau}\Delta_j(r).$$

Тогда индуцированное представление $U_{\mu j}(P) = \Delta_{\mu j}(H) \uparrow P$ — унитарное и неприводимое.

Представление $U_{\mu j} = \Delta_{\mu j} \uparrow P$ по общему рецепту (п. 2.2.6) реализуется в пространстве функций φ: $P - \mathscr{L}_j$ со значениями в пространстве-носителе $\mathscr{L}_j$ представления Δ_j (представление $\Delta_{\mu j}$ имеет то же самое пространство-носитель). Функции эти удовлетворяют структурному условию

$$\varphi(ph) = \tilde{\Delta}_{\mu j}(h^{-1})\,\varphi(p),$$

где

$$\tilde{\Delta}_{\mu j}(h) = \tilde{\Delta}_{\mu j}(\tau_A r\boldsymbol{a}_T) = e^{(i\mu - 3/2)\tau}\Delta_j(r).$$

Представление действует в этом пространстве как левый сдвиг:

$$U_{\mu j}(p)\,\varphi(p') = \varphi(p^{-1}p').$$

Скалярное произведение в пространстве $\mathscr{H}_{\mu j}$ представления $U_{\mu j}$ равно

$$(\varphi, \varphi') = \int\limits_{P/H} \langle \varphi(n_P), \varphi'(n_P)\rangle\, dn,$$

где $\langle\,,\rangle$ — инвариантное скалярное произведение в пространстве $\mathscr{L}_j$, n_P — представители смежных классов pH, а dn — квазиинвариантная мера в пространстве P/H, фигурирующая в факторизации меры Хаара на группе P:

$$\int\limits_P f(p)\, d_R p = \int\limits_{P/H} dn \int\limits_H d_R h\; f(n_P h)$$

и преобразующаяся по закону

$$d(pn) = \Delta_H\left((p, n)_H^{-1}\right) dn.$$

Можно выбрать в качестве представителей n_P элементы компактной группы K. Точнее, пусть $K/R = S^3$ — трехмерная сфера, на которой определено действие группы $K = SO(4)$ так, что подгруппа $R = SO(3)$ является стабилизатором полюса сферы n_0. Тогда каждой точке сферы $n \in S^3$ соответствует смежный класс kR, в качестве представителя которого n_K можно выбрать любое четырехмерное вращение, переводящее полюс n_0 в точку n. Легко видеть, что элемент n_K является также представителем смежного класса $n_K RAN = n_K H \in P/H$. Таким образом, фактор-пространства P/H и K/R изоморфны друг другу и могут быть реализованы как трехмерная сфера S^3. Подставляя в формулу для преобразования меры dn вместо произвольного элемента $p \in P$ элемент $k \in K$ и учитывая, что при сделанном выборе представителей $(k, n)_H = (kn)_K^{-1}\, kn_K \in R$, мы получаем

$$d(kn) = dn, \quad k \in K.$$

Таким образом, пространство $\mathscr{H}_{\mu j}$ можно реализовать как пространство функций на сфере S^3, а скалярное произведение в нем определить интегралом

$$(\varphi, \varphi') = \int\limits_{S^3} \langle \varphi(n_K), \varphi'(n_K)\rangle\, dn$$

по инвариантной (относительно K) мере на сфере. В главе 9 мы рассмотрим еще другую реализацию, связанную с другим выбором представителей.

3*. Доказательство неприводимости представлений группы де Ситтера. Чтобы для доказательства неприводимости использовать критерий п. 2.3.6, следует произвести разбиение группы P на двойные смежные классы HpH. Один из таких классов образует сама группа H. Оказывается, что все остальные элементы группы P входят в один и тот же двойной класс HIH, где I — элемент группы P, матрица которого формально совпадает с метрическим тензором η.

Чтобы доказать это, достаточно показать, что любой элемент $k \in K = SO(4)$ кроме 3-вращений может быть представлен в виде $k = h'^{-1}Ih$. Пусть $h = \tau_A\boldsymbol{a}_T r$, $h' = \tau'_A\boldsymbol{a}'_T r'$. Поскольку имеет место формула $I\tau_A I^{-1} = (-\tau)_A$, можно без ограничения общности считать $\tau' = 0$. Аналогично, можно положить $r' = 1$.

Задача 2. Показать, что элемент $h'^{-1}Ih$, где $h = \tau_A\boldsymbol{a}_T r$, $h' = \boldsymbol{a}'_T$, принадлежит подгруппе K в том и только в том случае, если $\boldsymbol{a}' = -\boldsymbol{a}$, $\exp\tau = 1 + \boldsymbol{a}^2$.

Указание. Потребовать, чтобы этот элемент оставлял инвариантным вектор

$$e_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Задача 3. Показать, что при всевозможных $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$, $r \in R$ элемент $k = \boldsymbol{a}_T I\tau_A\boldsymbol{a}_T r$ $(\exp\tau = 1 + \boldsymbol{a}^2)$ пробегает всю группу K, за исключением подгруппы R.

Указание. Показать, что

$$k\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{n}\\ n^4\end{bmatrix}\qquad (\boldsymbol{n}^2+(n^4)^2=1)$$

при $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}/(1-n^4)$.

Из результатов этих задач следует, что двойные классы $y_0=H$, $y_1=HIH$ исчерпывают всю группу P.

Представителем двойного класса $y_1=HIH$ может служить элемент $(y_1)_P=I$. В этом случае вспомогательная подгруппа $(IHI^{-1})\cap H=AR$, а вспомогательные представления этой группы, необходимые для исследования коммутанта $[\Delta_{\mu j}\uparrow P]$,

$$\tau_A r\longmapsto \underset{\sim}{\Delta}^1_{\mu j}(\tau_A r)=\underset{\sim}{\Delta}_{\mu j}(I^{-1}\tau_A r I)=\underset{\sim}{\Delta}_{\mu j}(\tau_A^{-1}r)=e^{(-i\mu-3/2)\,\tau}\Delta_j(r);$$

$$\tau_A r\longmapsto \widetilde{\Delta}_{\mu j}(\tau_A r)=e^{(i\mu-3/2)\,\tau}\Delta_j(r).$$

Они не переплетаются при $\mu\neq 0$. Следовательно, представления $U_{\mu j}(P)$, $\mu\in\mathbb{R}$, $\mu\neq 0$, операторно неприводимы и, в силу унитарности, неприводимы. Представление U_{0j} можно рассматривать как принадлежащее дополнительной серии (см. ниже).

Рассмотрим теперь переплетение двух различных представлений $U_{\mu j}$, $U_{\mu' j'}$. Оператор переплетения T с ядром $p\longmapsto t(p)$ определяется одним значением этой функции: $t(I)\in[\underset{\sim}{\Delta}^1_{\mu j}\downarrow AR$, $\widetilde{\Delta}_{\mu' j'}\downarrow AR]$, которое отлично от нуля лишь при $j'=j$, $\mu'=-\mu$ и в этом случае кратно единичному оператору. Если коэффициент пропорциональности выбрать равным единице, то получим для оператора T

$$T\varphi(n')=T\varphi(n'_K)=\int d^3\boldsymbol{a}\,\varphi(n'_K\boldsymbol{a}_T I)$$

(здесь интегрирование ведется по квазиинвариантной мере $d^3\boldsymbol{a}$ на фактор-пространстве H/AR).

Используя результат задачи 3, приведем аргумент функции под интегралом к виду $n'_K\boldsymbol{a}_T I=(n'_K n)_K\, r^{-1}(\boldsymbol{a}_T^{-1}\tau_A^{-1})$, где $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}/(1-n^4)$, $e^{-\tau}={}^1/_2(1-n^4)$.

С помощью структурного условия приводим подынтегральную функцию к виду

$$\varphi(n'_K\boldsymbol{a}_T I)=[{}^1/_2(1-n^4)]^{-i\mu+3/2}\Delta_j(r)\,\varphi(n'_K n).$$

Наконец, переходя к интегрированию по $dn=d^3\boldsymbol{n}/n^4$ и опуская несущественный числовой множитель, получим

$$T\varphi(n')=\int dn\,(1-n^4)^{-i\mu-3/2}\Delta_j(r)\,\varphi(n'_K\boldsymbol{n}),$$

где r является функцией от n и n'.

Этот интеграл может расходиться в точке $n^4=1$. Однако, следуя методу Гельфанда и Шилова [10], можно, взяв за основу его значение при тех комплексных величинах μ, при которых интеграл имеет смысл, распространить получившийся результат на другие значения μ с помощью аналитического продолжения. Таким образом получаем, что при всех значениях параметра $i\mu$, кроме $i\mu=-{}^1/_2+k$, $k=0, 1, 2, \ldots$, оператор переплетения определен формулой

$$T\varphi(n')=\int dn\,(1-n^4)_+^{-i\mu-3/2}\Delta_j(r)\,\varphi(n'_K n),$$

где $z\longmapsto z_+^p$ — обобщенная функция, в области регулярности совпадающая с z^p (см. [10], а также п. 9.2.5 настоящей книги). Определение оператора переплетения в оставшихся исключительных точках требует особого рассмотрения.

При $j=0$ это дает оператор переплетения в явном виде. Именно, оператор $T\in[U_{\mu 0}, U_{-\mu 0}]$ равен

$$T\varphi(n)=\int dn'\,(1-n\cdot n')_+^{-i\mu-3/2}\varphi(n')$$

$$(i\mu\neq-{}^1/_2+k,\ k=0, 1, 2, \ldots);$$

$$n\cdot n'=\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}'+n^4 n'^4.$$

Нетрудно и непосредственно проверить, что эти операторы осуществляют переплетение указанных представлений. Для этого нужно использовать закон преобразования сферы $S^3=P/H$ под действием группы де Ситтера P (см. п. 9.1.4).

Возвращаясь к унитарным представлениям $\mu\in\mathbb{R}$, мы видим, что представления $U_{\mu j}$ и $U_{-\mu j}$ эквивалентны. Следовательно, *основная серия унитарных неприводимых представлений* группы де Ситтера состоит из представлений $U_{\mu j}$, $\mu\geqslant 0$, $j=0, {}^1/_2, 1, {}^3/_2, \ldots$ Дополнительная серия состоит из представлений с чисто мнимым значением $\mu=i\varkappa$, $\varkappa\in\mathbb{R}$. Действительно, в этом случае представление, сопряженное по отношению к $\Delta_{\mu j}=\Delta_{i\varkappa, j}$, равно $\Delta_{-\mu j}=\Delta_{-i\varkappa, j}$, и поэтому оператор переплетения $T\in[U_{\mu j}, U_{-\mu j}]$ позволяет построить скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}_{\mu j}$ (см. п. 2.3.9). В том случае, когда оно положительно определено, представление $U_{\mu j}$ унитарно и неприводимо. Такие представления составляют *дополнительную серию унитарных неприводимых представлений.*

При некоторых значениях параметров μ, j представление $\Delta_{\mu j}\uparrow P$ оказывается приводимым, но содержит неприводимое унитарное подпредставление. Получается так называемая *дискретная серия* унитарных неприводимых представлений. В главе 9 мы будем непосредственно использовать представления, соответствующие $j=0$. В этом случае дополнительная серия соответствует интервалу $0\leqslant i\mu<{}^3/_2$, а дискретная $-i\mu={}^3/_2, {}^5/_2, {}^7/_2, \ldots$ (см. [9]).

4*. Группа конформных преобразований $SO(2,4)$ может быть определена как группа линейных преобразований в шестимерном пространстве, сохраняющих билинейную форму сигнатуры (2, 4):

$$(x,\ y) = x^1y^1 + x^2y^2 - x^3y^3 - x^4y^4 - x^5y^5 - x^6y^6.$$

Однако название, которое мы используем, происходит оттого, что эта группа локально изоморфна группе всех преобразований пространства Минковского, при которых метрический тензор его умножается в каждой точке на число.

Мы рассмотрим здесь эту группу очень кратко. Фактически будет описано лишь разложение Ивасавы для нее, $G = ANK$, и намечен путь для конструирования неприводимых представлений. Максимальная компактная подгруппа группы $G = SO(2, 4)$ — это группа $K = SO(2) \otimes SO(4)$ с генераторами

$$K \leftrightarrow \{L_{12},\ L_{34},\ L_{35},\ L_{36},\ L_{45},\ L_{46},\ L_{56}\}.$$

Абелеву подгруппу можно выбрать, задав ее генераторы, например, таким образом:

$$A \leftrightarrow \{A_1,\ A_2\} = \{L_{13},\ L_{24}\}.$$

Наконец, нильпотентная подгруппа N, инвариантная в AN, может быть выбрана так, что ее генераторы равны

$$\begin{aligned} &N \leftrightarrow \{N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4,\ N_5,\ N_6\};\\ &N_1 = L_{14} + L_{12}, \quad N_5 = L_{15} + L_{35},\\ &N_2 = L_{23} + L_{43}, \quad N_6 = L_{16} + L_{36}.\\ &N_3 = L_{25} + L_{45},\\ &N_4 = L_{26} + L_{46},\end{aligned}$$

Коммутационные соотношения генераторов нильпотентной и абелевой подгрупп задаются таблицей

	A_1	A_2	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6
A_1	0	0	$-N_2$	$-N_1$	0	0	N_5	N_6
A_2	0	0	N_1	N_2	N_3	N_4	0	0
N_1	N_2	$-N_1$	0	0	0	0	N_3	N_4
N_2	N_1	$-N_2$	0	0	0	0	N_3	N_4
N_3	0	$-N_3$	0	0	0	0	$N_1 - N_2$	0
N_4	0	$-N_4$	0	0	0	0	$-N_2$	$N_1 - N_2$
N_5	$-N_5$	0	$-N_3$	$-N_3$	$-N_1 + N_2$	N_2	0	0
N_6	$-N_6$	0	$-N_4$	$-N_4$	0	$-N_1 + N_2$	0	0

Совершенно очевидно, что централизатор группы A в K генерируется оператором L_{56}:

$$C \leftrightarrow \{L_{56}\}.$$

Группа AC оказывается абелевой трехпараметрической. Любое ее унитарное неприводимое представление задается тремя действительными числами j, ρ_1, ρ_2 — собственными числами соответственно операторов L_{56}, L_{13}, L_{24}. При этом условие периодичности по параметру группы C приводит к тому, что число j может принимать лишь дискретное множество значений, в то время как числа ρ_1, ρ_2 принимают любые действительные значения. Здесь сыграло роль то обстоятельство, что компактная группа C гомеоморфна (топологически изоморфна) окружности, тогда как некомпактная группа A гомеоморфна топологическому произведению двух прямых, т. е. плоскости.

Далее по неприводимому представлению группы AC строится неприводимое унитарное представление $\Delta_{j\rho_1\rho_2}$ группы $H = ANC$. Индуцирование его на всю группу G дает неприводимое унитарное представление этой группы $U_{j\rho_1\rho_2} = \Delta_{j\rho_1\rho_2}(H) \uparrow G$. Таким образом, *основная невырожденная серия* неприводимых унитарных представлений группы $SO(2, 4)$ параметризуется одним дискретным и двумя непрерывными действительными параметрами [74, 80]. (Основная вырожденная серия соответствует тому, что один из параметров принимает дискретные значения вне действительной прямой.)

Часть II

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЧАСТИЦ

Теория элементарных частиц, движущихся в пространстве-времени, обладающем достаточно широкой группой симметрии, в значительной степени определяется требованием инвариантности относительно этой группы. Группа при этом обязательно должна преобразовывать друг через друга пространственные координаты и время. В этой части книги квантовая теория частиц будет построена для трех различных моделей пространства-времени:

1) пространство-время Минковского;
2) пространство-время Галилея;
3) пространство-время де Ситтера.

Во всех случаях роль группы симметрии выявляется в гораздо большей степени, чем это обычно делается при традиционных способах построения теории. Этому способствует последовательное использование метода индуцированных представлений, который оказался адекватным при описании квантовых систем, обладающих симметрией.

Второе отличие развиваемого подхода состоит в том, что он с начала и до конца формулируется в терминах частиц, их состояний и амплитуд вероятности переходов между этими состояниями. Ни на одном из этапов не возникает необходимости вводить понятие квантованного поля. В этом смысле предлагаемая схема следует идеям Фейнмана. При этом в случае релятивистской теории фейнмановское исчисление амплитуд вероятности сделано последовательным за счет явного использования в теории виртуальных состояний частицы, локализованных в пространственно-временной точке. Пространство виртуальных состояний, построенное для произвольного спина методом индуцированных представлений, является обобщением пространства волновых функций, нормируемых на четырехмерный интеграл, которое было введено Штюкельбергом в 1941 г., но не нашло распространения из-за трудностей интерпретации.

Глава 4

СИММЕТРИЧНЫЕ КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ

Любую квантовую наблюдаемую или совокупность нескольких коммутирующих (совместимых) наблюдаемых с множеством значений $\mathscr{X}$ можно заменить спектральной мерой на $\mathscr{X}$. Это значит, что каждому подмножеству $B \subset \mathscr{X}$ сопоставляется проектор $P(B)$ в пространстве состояний системы, т. е. наблюдаемая, которую можно определить как вопрос: принадлежит ли значение исходной наблюдаемой подмножеству B? Векторы из подпространства

$$\mathscr{H}_B = P(B)\mathscr{H}$$

описывают состояния, в которых наблюдаемая принимает значения из подмножества B.

Если квантовая система обладает группой симметрии G, то эта группа действует в пространстве значений наблюдаемой $\mathscr{X}$ как группа преобразований, а в пространстве состояний системы $\mathscr{H}$ — как группа линейных операторов. Таким образом, в $\mathscr{H}$ и $\mathscr{X}$ определены соответственно линейное и нелинейное представления группы G. Связь между ними выражается в том, что линейное представление $U(G)$ импримитивно, а $\mathscr{X}$ служит базой импримитивности, т. е. под действием оператора $U(g)$ подпространство $\mathscr{H}_B$ переходит в $\mathscr{H}_{gB}$.

Если группа G действует на $\mathscr{X}$ транзитивно (а общий случай легко сводится к этому), то импримитивное представление эквивалентно некоторому индуцированному

$$U(G) = \Delta(K) \uparrow G.$$

При этом подгруппа $K \subset G$ находится из условия $\mathscr{X} = G/K$, а представление $\Delta(K)$ может быть любым и характеризует степени свободы, не описываемые наблюдаемой $\mathscr{X}$ (внутренние). Поэтому теория индуцированных представлений дает адекватный математический аппарат для описания симметричных квантовых систем. В частности, она позволяет построить пространство состояний, ввести в нем скалярное произведение и определить действие группы, если известно заранее множество значений наблюдаемой и действие группы на нем.

Квантовые процессы можно описывать в терминах виртуальных состояний системы, которые образуют пространства, более широкие, чем пространство наблюдаемых (реальных) состояний ее. Если система обладает симметрией, то метод индуцирования позволяет строить пространства виртуальных и реальных состояний и одновременно определять амплитуды вероятностей различных переходов между ними. Это дает возможность разработать принципы построения квантовой теории, в рамки которых укладываются как нерелятивистская и релятивистская квантовые теории, так и некоторые их обобщения (см. следующие главы).

§ 4.1. Квантовые наблюдаемые как спектральные меры

Состояния квантовой системы описываются как векторы в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, а интерпретация этих состояний производится с помощью собственных значений некоторых эрмитовых операторов в этом пространстве — наблюдаемых величин. Существует формализм, в котором на первый план выдвигаются не операторы, а их собственные значения. Множество значений наблюдаемой — это некоторое n-мерное многообразие $\mathscr{X}$, и каждому подмножеству в нем $B \subset \mathscr{X}$ сопоставляется проектор $P(B)$, выделяющий в пространстве $\mathscr{H}$ подпространство состояний, в которых наблюдаемая имеет значения из B. Таким образом, возникает спектральная мера на $\mathscr{X}$, заменяющая собой наблюдаемую.

Поскольку множество значений наблюдаемой $\mathscr{X}$ — это классический образ, формализм спектральной меры позволяет яснее проследить связь между классической и соответствующей ей квантовой системой, процесс «квантования». Во всяком случае, этот процесс открывается с новой стороны. Кроме того, этот формализм легче обобщается на случай, когда множество значений наблюдаемой $\mathscr{X}$ не покрывается одной координатной сеткой, как например поверхность сферы.

1. Наблюдаемая и функции от нее. Спектральная мера является обобщением общеизвестного формализма собственных векторов, который лежит в основе интерпретации квантовой теории. Напомним основные факты из этой области, ограничившись сначала случаем наблюдаемой с дискретным спектром.

Состояние квантовой системы определяется одномерным подпространством в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ (пространстве состояний)*). Допуская неточность, говорят обычно, что состояние — это вектор в $\mathscr{H}$, хотя на самом деле любой вектор, отличающийся числовым множителем, соответствует тому же самому состоянию.

Наблюдаемые величины описываются в квантовой теории эрмитовыми операторами. Если A — наблюдаемая, а $\varphi \in \mathscr{H}$ — ее собственный вектор с собственным значением $a \in \mathbb{R}$, т. е. $A\varphi = a\varphi$, то говорят, что наблюдаемая A имеет в состоянии φ значение a. Множество (линейно-независимых) собственных векторов $\{\varphi_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ наблюдаемой A образует в $\mathscr{H}$ полную систему, т. е. любой вектор $\varphi \in \mathscr{H}$ можно разложить по этой системе. Если считать векторы φ_k ортонормированными, т. е. предположить, что $(\varphi_i, \varphi_k) = \delta_{ik}$ для любых i, k, то это разложение имеет вид $\varphi = \sum_k (\varphi_k, \varphi)\varphi_k$. Введем проекторы P_k, $k = 1, 2, \dots$,

*) Точнее, таким способом определяются лишь так называемые чистые состояния. Смешанному состоянию соответствует некоторый оператор в $\mathscr{H}$ (матрица плотности). Однако интерпретацию квантовой теории можно провести в терминах только чистых состояний.

положив $P_k\varphi = (\varphi_k, \varphi)\varphi_k$ для любого $\varphi \in \mathscr{H}$. Тогда условие полноты выразится равенством $\sum_k P_k = \mathbb{1}$, а любая степень оператора A выражается через проекторы и собственные значения в виде $A^n = \sum_k (a_k)^n P_k$. Образуя линейные комбинации степеней, получим $f(A) = \sum_k f(a_k) P_k$ для любого полинома f.

До сих пор формулы выводились. Теперь же мы можем последнюю формулу считать определением функции от оператора $f(A)$, если функция f, рассматриваемая как функция на действительной оси, разложима в ряд. Таким образом, мы определили отображение τ_A: $f \mapsto f(A)$ пространства функций в пространство операторов в $\mathscr{H}$. Легко видеть, что это отображение сохраняет линейные операции. Более того, если превратить пространство функций в алгебру $\mathscr{F}$, определив на нем умножение формулой $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$, то τ_A является изоморфизмом алгебры функций в алгебру операторов:

$$\tau_A(f_1 f_2) = \tau_A(f_1)\,\tau_A(f_2).$$

Оказывается, что описанную конструкцию можно распространить на более широкий класс эрмитовых операторов. Эрмитову оператору A сопоставляется изоморфизм τ_A алгебры функций в алгебру эрмитовых операторов, причем тождественному отображению действительной прямой $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$: $x \mapsto x$ сопоставляется сам оператор A, т. е. $\tau_A(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = A$. Этим последним требованием изоморфизм τ_A однозначно определяется на алгебре полиномов и далее по непрерывности — на более широкой алгебре функций. Образ функции f при отображении τ_A обозначается $f(A)$ и называется (по определению) функцией от оператора A.

2. Наблюдаемая как спектральная мера. Отображение τ_A удается распространить на достаточно широкую алгебру функций, так что она включает характеристические функции борелевских подмножеств действительной прямой *). В результате возникает спектральная мера на действительной прямой. Пусть $B \subset \mathbb{R}$ — (борелевское) подмножество в $\mathbb{R}$, а η_B — его характеристическая функция, равная единице на B и нулю вне этого подмножества. Обозначим образ этой функции при изоморфизме τ_A через $P(B)$, так что $\tau_A(\eta_B) = \eta_B(A) = P(B)$. Тогда, замечая, что в смысле умножения функций характеристическая функция идемпотентна, т. е. $\eta_B\eta_B = \eta_B$, мы получаем, что оператор $P(B)$ также идемпотентен, т. е. является эрмитовым проектором.

*) Семейство $\mathfrak{B}$ подмножеств множества $\mathscr{E}$ называется борелевским семейством, а его элементы — борелевскими множествами, если объединение и пересечение любого конечного или счетного семейства подмножеств из $\mathfrak{B}$, дополнение любого множества из $\mathfrak{B}$, а также пустое множество принадлежат $\mathfrak{B}$. В топологическом пространстве борелевская структура задается минимальным борелевским семейством, содержащим все открытые множества.

Итак, каждому борелевскому подмножеству B на прямой сопоставляется эрмитов проектор $P(B)$. Легко показать, что пересечению двух борелевских множеств сопоставляется произведение соответствующих проекторов: $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$ (это произведение коммутативно), а объединению непересекающихся подмножеств — сумма проекторов: $P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2)$ (отсюда следует, что $P(B_1)$ и $P(B_2)$ проектируют на ортогональные подпространства). Последнее свойство (аддитивность) справедливо также для счетного семейства непересекающихся борелевских множеств (счетная аддитивность). Кроме того, легко видеть, что $P(\mathbb{R}) = \mathbb{1}$, $P(\varnothing) = 0$. Отображение $B \mapsto P(B)$ с перечисленными свойствами называется *спектральной* (или *проекторной*) *мерой* на $\mathbb{R}$.

Таким образом, задание эрмитова оператора A определяет изоморфизм τ_A алгебры функций в алгебру операторов и далее спектральную меру P на $\mathbb{R}$. Верно и обратное: задание спектральной меры определяет изоморфизм и оператор. Для того чтобы по спектральной мере P определить изоморфизм τ_A, нужно лишь аппроксимировать каждую функцию на $\mathbb{R}$ ступенчатой функцией. Ступенчатая функция равна сумме характеристических функций, умноженных на соответствующие множители, и поэтому ей следует сопоставить сумму проекторов, умноженных на те же множители. В пределе, когда ступенчатая функция стремится к функции f, сумма проекторов стремится к некоторому оператору, который полагаем равным $f(A)$. В частности, функции $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ сопоставляется оператор A.

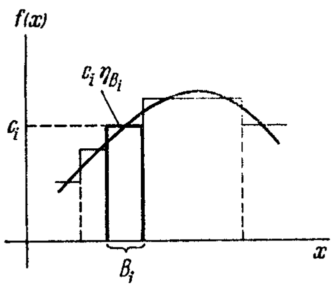


Рис. 8. Определение функции от оператора по спектральной мере.

Обратимся к физической интерпретации спектральной меры. Пусть $B \mapsto P(B)$ — спектральная мера, соответствующая наблюдаемой A. Рассмотрим подпространство $P(B)\mathscr{H}$ в пространстве состояний. Для каждого состояния $\varphi \in P(B)\mathscr{H}$ из этого подпространства относительно наблюдаемой A известно, что ее значение лежит в подмножестве B. Это значит, что отдельные измерения наблюдаемой A, произведенные над системой, находящейся в состоянии φ, могут давать различные результаты a, но всегда $a \in B$. Таким образом, спектральная мера представляет собой прямое обобщение понятий собственного вектора и собственного значения. Но это обобщение пригодно уже и для случая непрерывного спектра, когда может вообще не существовать собственных векторов и собственных значений.

3. Спектральная мера на многообразии. В общем случае квантовая система не описывается полностью одной наблюдаемой. Предположим, что существует набор из n коммутирующих

эрмитовых операторов $A_1, \ldots, A_n$ (наблюдаемых). Тогда аналогичным путем мы придем к понятию спектральной меры на пространстве $\mathbb{R}^n$. Каждому борелевскому подмножеству $B \subset \mathbb{R}^n$ будет сопоставлен проектор $P(B)$ в пространстве состояний, причем пересечению подмножеств соответствует произведение проекторов, а сумме непересекающихся подмножеств — сумма проекторов. Интерпретация спектральной меры в этом случае очевидна: в состоянии $\varphi \in P(B)\mathscr{H}$ измерение набора наблюдаемых (их можно измерить одновременно в силу коммутативности) дает результат, описываемый точкой из области B.

В этом случае совокупность наблюдаемых $\{A_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ можно считать наблюдаемой в некотором обобщенном смысле, причем $\mathbb{R}^n$ играет роль пространства значений этой наблюдаемой. Спектральная мера на этом пространстве во всех отношениях эквивалентна набору коммутирующих операторов (наблюдаемых). Последнее обобщение, которое естественно напрашивается, состоит в том, чтобы вообще отказаться от эрмитовых операторов, задавая вместо этого только пространство значений наблюдаемой и некоторую спектральную меру на нем. Нетривиальность этого обобщения состоит в том, что пространство значений наблюдаемой в этом случае не обязательно совпадает с $\mathbb{R}^n$, а может быть произвольным многообразием. n-мерное *многообразие* напоминает $\mathbb{R}^n$ тем, что может быть покрыто такими подмножествами (координатными окрестностями), каждое из которых допускает взаимно-однозначное отображение на область в $\mathbb{R}^n$ (введение координат). Однако есть и существенное отличие, состоящее в том, что в общем случае многообразие нельзя покрыть одной координатной окрестностью. Например, двумерная сфера допускает покрытие одной сеткой координат лишь в том случае, если сделать в ней вырез *) (достаточно выбросить всего одну точку). Для покрытия же всей двумерной сферы требуется по меньшей мере две координатные окрестности (например, это могут быть вся сфера, кроме одной точки, и некоторая окрестность этой точки).

Такое обобщение дает адекватный математический аппарат для квантования классической системы, наблюдаемые которой принимают значения из неэлементарного (т. е. не покрываемого одной координатной окрестностью) многообразия. Примерами могут служить твердое тело (волчок) в обычном пространстве или материальная точка в пространстве с неевклидовой топологией (например, пространстве постоянной положительной кривизны).

Имея в виду это обобщение, дадим окончательное определение спектральной меры. Пусть дано произвольное (борелевское)

*) Фактически каждый сталкивался с этим явлением, работая со сферической системой координат (r, θ, φ) в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ и наблюдая, что она вырождается при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$.

пространство $\mathscr{X}$ и гильбертово пространство $\mathscr{H}$. *Спектральной мерой* на $\mathscr{X}$ называется отображение P, сопоставляющее каждому (борелевскому) подмножеству в $\mathscr{X}$ некоторый эрмитов проектор в $\mathscr{H}$ и удовлетворяющее трем дополнительным требованиям:

1) $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) P(B_2)$ для любых борелевских подмножеств $B_1, B_2 \subset \mathscr{X}$.

2) $P\left(\bigcup_i B_i\right) = \sum_i P(B_i)$ для любого конечного или счетного семейства попарно непересекающихся борелевских подмножеств в $\mathscr{X}$.

3) $P(\mathscr{X}) = \mathbb{1}$.

Задача 1. Покажите, что $P(\varnothing) = 0$.

В приложениях к квантовой теории пространство $\mathscr{X}$ интерпретируется как пространство значений некоторой (вообще говоря, многомерной) наблюдаемой, $P(B)\mathscr{H}$ — подпространство состояний, в которых наблюдаемая принимает значения из B. Для произвольного состояния $\varphi \in \mathscr{H}$ вероятность того, что наблюдаемая принимает значения из $B \subset \mathscr{X}$, равна

$$p_\varphi(B) = \frac{(P(B)\varphi, P(B)\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \frac{(\varphi, P(B)\varphi)}{(\varphi, \varphi)}.$$

4. Точки спектра и элементарные проекторы. Если $\mathscr{X}$ — счетное множество с дискретной топологией, то конечной спектральной мерой обладает даже одноточечное множество, т. е. $P(\{x\}) \neq 0$. В этом случае задание *элементарных проекторов* $P_x = P(\{x\})$, $x \in \mathscr{X}$, полностью определяет спектральную меру. Действительно, для любого подмножества $B \subset \mathscr{X}$ имеем в силу счетной аддитивности $P(B) = \sum_{x \in B} P_x$. Однако в случае непрерывного спектра одноточечное множество обладает нулевой мерой $P(\{x\}) = 0$ и прежнее определение элементарных проекторов непригодно.

Конечно, понятие элементарного проектора (т. е. проектора на подпространство состояний с определенным значением наблюдаемой) не только не является необходимым, но даже с физической точки зрения нереалистично. Действительно, в случае непрерывного спектра наблюдаемой любой реальный эксперимент определяет значение наблюдаемой с конечной точностью, т. е. указывает лишь некоторое множество, в котором лежит значение наблюдаемой, но никогда не выделяет единственную точку. Таким образом, понятие спектральной меры адекватно описывает физическую ситуацию. И тем не менее оказывается удобным пользоваться понятиями, связанными с точно определенным значением наблюдаемой. При этом рассуждения становятся наглядными. Поэтому попытаемся обобщить понятие элементарного проектора на случай непрерывного спектра.

В случае дискретного спектра элементарный проектор $P_x = P(\{x\})$ является образом (при изоморфизме τ алгебры функций в алгебру операторов) характеристической функции одноточечного множества, которая выражается через символ Кронекера: $\eta_{\{x\}}(x') = \delta(x, x')$. Ясно, что для обобщения на непрерывный спектр нужно найти образ дельта-функции. Представим дельта-функцию как предел последовательности обычных функций (например, кратных характеристическим, рис. 9). Каждой функции из аппроксимирующей последовательности сопоставим оператор, получающийся при изоморфизме τ, а элементарный проектор P_x определим как предел получающейся последовательности операторов.

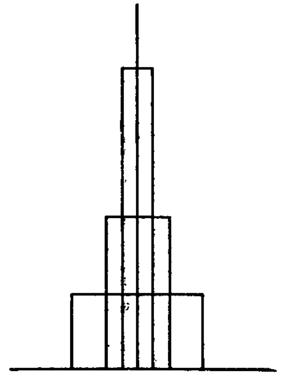


Рис. 9. Аппроксимация дельта-функции характеристическими функциями.

Получающийся таким образом оператор P_x не является оператором (и тем более проектором) в собственном смысле слова. Он переводит вектор гильбертова пространства в обобщенный (ненормируемый) вектор. Но множеству операторов $\{P_x | x \in \mathscr{X}\}$ можно придать точный смысл, если воспользоваться понятием прямого интеграла гильбертовых пространств (см. п. 2.1.4). Для этого нужно представить пространство состояний в виде

$$\mathscr{H} = \int_{\mathscr{X}} \mathscr{H}_x \, dx$$

(отметим, что в этом определении фигурирует некоторая положительная мера dx на $\mathscr{X}$) и определить элементарные проекторы как такие отображения P_x: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}_x$, что для любого $B \subset \mathscr{X}$

$$P(B) = \int_B P_x \, dx = \int_{\mathscr{X}} \eta_B(x) P_x \, dx.$$

Последнее равенство понимается в том смысле, что для любого $\varphi \in \mathscr{H}$ вектор $P(B)\varphi$ соответствует (при разложении гильбертова пространства) семейству $\{\eta_B(x) P_x \varphi | x \in \mathscr{X}\}$. Это равенство соответствует (в смысле изоморфизма τ) равенству функций

$$\eta_B = \int_B \delta_x \, dx,$$

где δ_x: $x' \mapsto \delta(x, x')$ — дельта-функция, определенная формулой

$$\int \delta(x, x') f(x') \, dx' = f(x).$$

Удобно записывать все формулы, в которых фигурируют обобщенные функции, как для обычных функций. Произвольный вектор $\varphi \in \mathscr{H}$ при разложении в прямой интеграл представляется семейством $\{\varphi(x) \mid x \in \mathscr{X}\}$ или функцией $x \mapsto \varphi(x)$ на $\mathscr{X}$. Предыдущие определения позволяют придать смысл утверждению, что при действии на этот вектор обобщенного проектора P_x получается обобщенный вектор, соответствующий функции $x' \mapsto \delta(x, x')\varphi(x)$, т. е.

$$P_x \varphi(x') = \delta(x, x')\varphi(x).$$

Это равенство наиболее удобно для применения. Произвольный проектор из спектральной меры имеет вид

$$P(B)\varphi(x) = \eta_B(x)\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при} \quad x \in B, \\ 0 & \text{при} \quad x \notin B. \end{cases}$$

Замечание. Строго говоря, действие элементарного проектора P_x на вектор гильбертова пространства $\varphi \in \mathscr{H}$ не определено, так как соответствующая функция $x \mapsto \varphi(x)$ определена лишь с точностью до произвольного изменения на множестве меры нуль в $\mathscr{X}$. Элементарные проекторы определены лишь на некотором всюду плотном подпространстве $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$, а соответствующие им обобщенные функции δ_x, $x \in \mathscr{X}$, задаются как линейные функционалы на $\mathscr{D}$, т. е. принадлежат сопряженному пространству $\mathscr{D}'$. Таким образом, корректное определение элементарных проекторов, как и вообще работа с обобщенными векторами, требует рассмотрения одновременно трех вложенных друг в друга пространств $\mathscr{D} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{D}'$, называемых в совокупности *оснащенным гильбертовым пространством*. В рассматриваемом случае достаточно в качестве $\mathscr{D}$ взять подпространство всех непрерывных функций, однако для других целей могут понадобиться еще более узкие подпространства, содержащие более гладкие функции. Подробнее с формализмом оснащенного гильбертова пространства можно познакомиться по книгам [1], [11]. Как и во многих других случаях, мы не будем придерживаться вполне строгой терминологии, допуская в выражениях такие вольности, как утверждение, что элементарные проекторы действуют в гильбертовом пространстве.

Элементарные проекторы позволяют проиллюстрировать понятие *амплитуды вероятности*, которое также необходимо для вероятностной интерпретации квантовой теории. Предположим, что векторы $\{e_i(x)\}$ образуют ортонормированный базис подпространства $\mathscr{H}_x = P_x\mathscr{H}$. Тогда оператор $P(B)$, $B \subset \mathscr{X}$, как нетрудно видеть, представляется в виде

$$P(B)\varphi = \int_B \sum_i e_i(x)(e_i(x), \varphi)\,dx,$$

или, что то же,

$$P(B) = \int_B \sum_i |e_i(x)\rangle\langle e_i(x)|\,dx.$$

Вероятность того, что наблюдаемая имеет значение из B, если система находится в состоянии φ, равна

$$\frac{(\varphi, P(B)\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \int_B dx \sum_i \frac{(\varphi, e_i(x))(e_i(x), \varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \int_B dx \sum_i \left| \frac{(\varphi, e_i(x))}{\|\varphi\|} \right|^2.$$

Очевидно, величину $A(e_i(x), \varphi) = (e_i(x), \varphi)/\|\varphi\|$ следует интерпретировать как амплитуду вероятности того, что в состоянии φ наблюдаемая имеет значение x и при этом внутреннее состояние системы описывается индексом i. Иначе говоря, $(e_i(x), \varphi)/\|\varphi\|$ — это амплитуда вероятности перехода системы из состояния φ в состояние $e_i(x)$ с определенным значением наблюдаемой $x \in \mathscr{X}$. Вероятность (или в случае непрерывного спектра — плотность вероятности) того же события находится как квадрат модуля амплитуды вероятности.

§ 4.2. Импримитивность индуцированного представления и симметричная квантовая система

Индуцированное представление обладает свойством импримитивности, суть которого состоит в том, что пространство-носитель разлагается в сумму подпространств, которые при действии представления не перемешиваются друг с другом, а лишь переставляются между собой и преобразуются каждое внутри себя. Оказывается, что такое разложение в точности соответствует разложению пространства состояний квантовой системы на подпространства, соответствующие определенным значениям некоторой наблюдаемой.

Поскольку импримитивность является характеристическим свойством индуцированного представления, можно сделать вывод, что каждая симметричная квантовая система описывается некоторым индуцированным представлением. Это позволяет по наперед заданным свойствам симметрии системы конструировать пространство состояний ее. Такая возможность составляет основу приложений, рассмотренных в следующих главах.

1. Симметричная квантовая система и импримитивное представление. Рассмотрим случай, когда квантовая система обладает симметрией, описываемой некоторой группой G. В этом случае описание системы производится в терминах пространства $\mathscr{X}$ значений наблюдаемой и группа G действует на $\mathscr{X}$ как группа преобразований. Кроме того, группа действует в пространстве состояний $\mathscr{H}$, т. е. в этом пространстве реализуется некоторое линейное представление $U(G)$ группы симметрии G. Если отвлечься от некоторых незначительных усложнений, представление должно быть унитарным (это следует из требования, чтобы преобразования из группы симметрии не нарушали вероятностную интерпретацию теории).

Чтобы действие группы G на $\mathscr{X}$ и действие ее в $\mathscr{H}$ в самом деле описывали одну и ту же симметрию, необходимо, чтобы те и другие преобразования соответствовали друг другу в следующем смысле. Пусть $\varphi \in \mathscr{H}_x = P_x\mathscr{H}$, т. е. наблюдаемая в состоянии φ имеет определенное значение $x \in \mathscr{X}$. Если совершить преобразование симметрии $g \in G$, то это будет соответствовать тому, что наблюдаемая примет значение gx и, с другой стороны, что состояние φ перейдет в состояние $U(g)\varphi$. Значит, нужно потребовать, чтобы наблюдаемая имела в состоянии $U(g)\varphi$ определенное значение gx, т. е. $U(g)\varphi \in \mathscr{H}_{gx}$. Представление с такими свойствами называется импримитивным.

Точнее, если представление U группы G действует в пространстве $\mathscr{H}$, которое разлагается в прямой интеграл $\mathscr{H} = \int_{\mathscr{X}} \mathscr{H}_x\,dx$, причем $\mathscr{X}$ является G-пространством и выполняется условие

$$U(g)\mathscr{H}_x \subset \mathscr{H}_{gx},$$

то представление U называется *импримитивным*. Принимая естественные проекции P_x: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}_x$ за элементарные проекторы, мы можем построить по ним спектральную меру $B \mapsto P(B) = \int_B P_x\,dx$, причем для нее выполняется условие $U(g)P(B)\mathscr{H} \subset P(gB)\mathscr{H}$. Спектральную меру P называют *системой импримитивности* представления U, а пространство $\mathscr{X}$ — *базой* этой системы.

Задача 1. Покажите, что систему импримитивности можно эквивалентно определить как спектральную меру, удовлетворяющую условию

$$U(g)P(B) = P(gB)U(g).$$

Указание. Предварительно докажите, что

$$P(\mathscr{X} - gB)U(g)P(B) = 0.$$

Мы показали, что если квантовая система обладает группой симметрии G, то в пространстве состояний $\mathscr{H}$ действует представление $U(G)$ этой группы с системой импримитивности, основанной на пространстве значений наблюдаемой $\mathscr{X}$. В общем случае группа G действует в пространстве $\mathscr{X}$ интранзитивно. Разобьем $\mathscr{X}$ на области транзитивности $\mathscr{X}_\lambda$. Тогда пространство состояний $\mathscr{H}$ разлагается в прямую сумму (или прямой интеграл) подпространств $\mathscr{H}_\lambda = P(\mathscr{X}_\lambda)\mathscr{H}$. Как нетрудно видеть, каждое из них инвариантно относительно действия представления $U(G)$. Поэтому все представление разлагается в прямую сумму (интеграл) представлений U_λ. Представление U_λ действует в пространстве $\mathscr{H}_\lambda$, и отображение $B_\lambda \subset \mathscr{X}_\lambda \mapsto P(B_\lambda)$ образует систему импримитивности этого представления с базой $\mathscr{X}_\lambda$. Таким образом, общий случай импримитивного представления сводится к импримитивному представлению с однородным пространством в качестве базы.

2. Теорема об импримитивности. Далее вступает в игру теорема, доказанная Макки и являющаяся ключевым пунктом всех приложений, которые будут рассмотрены в дальнейшем.

Теорема (об импримитивности). *Представление $U(G)$ импримитивно с базой импримитивности $\mathscr{X} = G/K$ в том и только в том случае, если оно эквивалентно индуцированному представлению $\Delta(K)\uparrow G$ с некоторым представлением Δ подгруппы K.*

Доказательство. Покажем сначала, что индуцированное представление импримитивно, а затем — что каждое импримитивное представление эквивалентно индуцированному.

Пусть $U(G) = \Delta(K)\uparrow G$ реализовано в пространстве $\mathscr{H}_\Delta$ функций φ: $\mathscr{X} \to \mathscr{L}$. Определим элементарные проекторы формулой

$$P_x\varphi(x') = \delta(x, x')\varphi(x).$$

Тем самым определится спектральная мера

$$P(B)\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x \in B, \\ 0 & \text{при } x \notin B. \end{cases}$$

Элементарно проверяется, что $U(g)P(B)\mathscr{H}_\Delta \subset P(gB)\mathscr{H}_\Delta$, т. е. P — система импримитивности. Если реализовать индуцированное представление в пространстве функций на группе (со структурным условием), то спектральная мера выглядит следующим образом:

$$P(B)\varphi(g) = \begin{cases} \varphi(g) & \text{при } gK \in B, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Итак, индуцированное представление импримитивно. Докажем обратное.

Пусть $U(G)$ — представление в пространстве $\mathscr{H}$ с системой импримитивности $B \mapsto P(B)$, где B — подмножество в однородном пространстве $\mathscr{X}$. Пользуясь инвариантной мерой на $\mathscr{X}$, построим элементарные проекторы P_x, $x \in \mathscr{X}$, и обозначим $P_x\mathscr{H} = \mathscr{H}_x$. Выберем произвольно центр однородного пространства $x_0 \in \mathscr{X}$, и пусть K — его стабилизатор, т. е. $kx_0 = x_0$ для любого $k \in K$. Тогда подпространство $\mathscr{H}_{x_0}$ (в общем случае это подпространство обобщенных векторов) инвариантно относительно представления $U(G)\downarrow K$. Действительно, по определению импримитивного представления $U(k)\mathscr{H}_{x_0} \subset \mathscr{H}_{kx_0} = \mathscr{H}_{x_0}$. Обозначим $\mathscr{H}_{x_0} = \mathscr{L}$, а подпредставление, действующее в $\mathscr{L}$, через

$\Delta(K)$, так что для любого $\varphi \in \mathscr{H}_{x_0}$ по определению $U(k)\varphi = \Delta(k)\varphi$. Мы докажем, что представление $U(G)$ эквивалентно представлению $\Delta(K)\uparrow G = U_\Delta$.

Оператор T, осуществляющий преобразование подобия представления U в представление U_Δ, должен сопоставлять каждому вектору $\varphi \in \mathscr{H}$ вектор $T\varphi \in \mathscr{H}_\Delta$, т. е. функцию на группе $T\varphi : G \to \mathscr{L}$ со структурным условием $(T\varphi)(gk) = \Delta(k^{-1})(T\varphi)(g)$. Положим $(T\varphi)(g) = U(g^{-1})P_{gK}\varphi$, где $gK = \pi(g)$ — образ g при канонической проекции $\pi : G \to \mathscr{X}$.

Задача 2. Покажите, что при таком определении оператор T действительно отображает $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}_\Delta$.

Этот оператор обратим, причем обратный T^{-1} сопоставляет функции $\varphi \in \mathscr{H}_\Delta$ семейство $\{\varphi_x | x \in \mathscr{X}\}$, где $\varphi_x = U(x_G)\varphi(x) \in \mathscr{H}_x$. Остается показать, что оператор T коммутирует с представлениями U и U_Δ. Это видно из следующей выкладки, в которой, кроме определения оператора T, используется свойство системы импримитивности, записанное в виде $U(g^{-1})P_{g'K}U(g) = P_{g^{-1}g'K}$:

$$(TU(g)\varphi)(g') = U\left((g')^{-1}\right)P_{g'K}U(g)\varphi =$$
$$= U\left((g')^{-1}g\right)P_{g^{-1}g'K}\varphi = (T\varphi)(g^{-1}g') = (U_\Delta(g)T\varphi)(g').$$

3. Симметричная квантовая система и индуцированное представление. Итак, теорема утверждает, что индуцированное представление импримитивно, а импримитивное индуцировано. Поскольку мы показали выше, что симметричная квантовая система описывается импримитивным представлением, можно заключить, что *симметричная квантовая система описывается индуцированным представлением.* В ходе доказательства теоремы мы нашли даже вид этого индуцированного представления, т. е. нашли подгруппу K и ее представление $\Delta(K)$, такие, чтобы симметричная квантовая система описывалась представлением $\Delta(K)\uparrow G$. Поскольку это очень важный пункт, резюмируем его еще раз.

Пусть квантовая система описывается наблюдаемой с пространством значений $\mathscr{X}$, на котором действует группа симметрии G. Пусть в пространстве состояний $\mathscr{H}$ действует представление U этой группы с системой импримитивности $\{P_x | x \in \mathscr{X}\}$. Это значит, что подпространство $\mathscr{H}_x = P_x\mathscr{H}$ содержит состояния, в которых наблюдаемая имеет определенное значение x, а после преобразования элементом группы переходит в подпространство $U(g)\mathscr{H}_x = \mathscr{H}_{gx}$ состояний с определенным значением gx наблюдаемой. Если группа G действует в $\mathscr{X}$ интранзитивно, то $\mathscr{X}$ разбивается на области транзитивности, а $\mathscr{H}$ — на сумму подпространств, соответствующих этим областям. Если G действует в $\mathscr{X}$ транзитивно, то можно утверждать, что представление $U(G)$ — индуцированное.

Чтобы построить реализацию U как индуцированного представления, нужно выбрать произвольную точку $x_0 \in \mathscr{X}$, которая будет играть роль центра однородного пространства, и найти ее стабилизатор K. Далее рассматриваем подпространство $\mathscr{L} = \mathscr{H}_{x_0}$ состояний, в которых наблюдаемая имеет определенное значение x_0. Это подпространство инвариантно относительно представления $U(G)\downarrow K$ (т. е. относительно операторов $U(k)$, $k \in K$). Соответствующее подпредставление обозначим через $\Delta(K)$, так что $U(k)\varphi = \Delta(k)\varphi$ для любого $\varphi \in \mathscr{L}$. Тогда $U(G) = \Delta(K)\uparrow G$. Эквивалентность этих представлений устанавливается с помощью реализации пространства $\mathscr{H}$ как пространства $\mathscr{H}_\Delta$ функций φ: $G \to \mathscr{L}$, причем вектору $\varphi \in \mathscr{H}$ сопоставляется функция $T\varphi$: $g \mapsto U(g^{-1})P_{gK}\varphi$.

Мы рассмотрели ситуацию, когда представление группы симметрии в пространстве состояний нужно реализовать как эквивалентное ему индуцированное. Однако чаще нам будет встречаться ситуация, когда задано лишь пространство значений наблюдаемой $\mathscr{X}$ и действие в нем группы, а *пространство состояний и представление в нем требуется построить.* В этом случае мы выбираем центр $x_0 \in \mathscr{X}$ и реализуем однородное пространство $\mathscr{X}$ как фактор-пространство G/K. Затем произвольным образом выбираем представление $\Delta(K)$ в некотором пространстве $\mathscr{L}$. Это пространство будет играть роль компоненты $\mathscr{H}_{x_0}$ пространства состояний. Все *пространство состояний* строится как пространство-носитель $\mathscr{H}_\Delta$ индуцированного представления $U_\Delta = \Delta(K)\uparrow G$. *Система импримитивности* $B \mapsto P(B)$, $B \subset \mathscr{X}$, т. е. интерпретация состояний в терминах данной наблюдаемой, строится как обычно для индуцированного представления: $P(B)\varphi = \eta_B\varphi$. Вероятностная интерпретация теории обеспечивается *скалярным произведением* (φ, φ'), относительно которого индуцированное представление U_Δ унитарно.

Замечание. Во всех рассуждениях до сих пор мы предполагали, что $\mathscr{X}$ — пространство значений *наблюдаемой.* Это значит, что векторы $\varphi_x \in \mathscr{H}_x$, соответствующие любой точке $x \in \mathscr{X}$, существуют как векторы (может быть, обобщенные) в пространстве состояний рассматриваемой системы $\mathscr{H}$. Все пространство $\mathscr{H}$ получается как сумма $\mathscr{H} = \sum_{x \in \mathscr{X}} \mathscr{H}_x$ (или интеграл). Однако мы встретимся и с более общей ситуацией, когда пространство состояний является лишь подпространством в этой сумме, $\mathscr{H} \subset \sum_{x \in \mathscr{X}} \mathscr{H}_x$, причем это подпространство не сводится к сумме подпространств $\mathscr{H}_x$ по некоторому подмножеству $B \subset \mathscr{X}$, а пересекает каждое из $\mathscr{H}_x$, $x \in \mathscr{X}$. В этом случае величину, описываемую пространством $\mathscr{X}$, можно назвать *динамической переменной.* Если $\mathscr{X}$ — однородное пространство, то представление группы симметрии $U(G)$, действующее в $\mathscr{H}$, является подпредставлением в индуцированном представлении $U_\Delta = \Delta(K) \uparrow G$.

4*. Импримитивное представление как расслоение. Если описывать систему импримитивности с помощью элементарных проекторов, то становится очевидным, что импримитивное представление является примером расслоения — именно векторного расслоения. В *векторном расслоении* каждой точке $x \in \mathscr{X}$ базы сопоставляется в качестве слоя над ней некоторое векторное пространство $\mathscr{H}_x$, например гильбертово пространство. Совокупность $\mathscr{E} = \bigcup\limits_{x \in \mathscr{X}} \mathscr{H}_x$ этих слоев образует собственно векторное расслоение, а каноническая проекция определяется тем, что полагается $\pi(\varphi_x) = x$ для любого $\varphi_x \in \mathscr{H}_x$. Пусть база $\mathscr{X}$ является G-пространством и для каждой пары $g \in G$, $x \in \mathscr{X}$ задано линейное отображение $U_x(g): \mathscr{H}_x \to \mathscr{H}_{gx}$, причем все такие отображения согласованы друг с другом в том смысле, что для любых $x \in \mathscr{X}$; g, $g' \in G$ выполняется равенство

$$U_{gx}(g')\, U_x(g) = U_x(g'g).$$

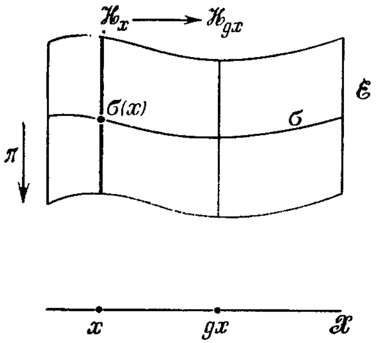


Рис. 10. Импримитивное представление как векторное расслоение.

Мы покажем сейчас, что это эквивалентно заданию некоторого импримитивного представления.

Рассмотрим линейное пространство, векторами которого являются всевозможные сечения расслоения $\mathscr{E}$. Напомним, что сечением является отображение $\sigma: \mathscr{X} \to \mathscr{E}$, сопоставляющее каждой точке базы некоторую точку соответствующего слоя. В нашем случае $\sigma: x \longmapsto \sigma(x) \in \mathscr{H}_x$. В пространстве сечений естественным образом определяется действие группы G:

$$(U(g)\,\sigma)(gx) = U_x(g)\,\sigma(x),$$

и таким образом мы получаем некоторое представление группы G. Нетрудно видеть, что это представление импримитивно.

Чтобы обеспечить полное совпадение с тем определением, которое дано в п. 1, введем еще гильбертову структуру. Предположим, что на $\mathscr{X}$ задана некоторая инвариантная мера dx. Ограничим пространство сечений условием квадратичной интегрируемости, т. е. потребуем, чтобы для каждого входящего в это пространство сечения интеграл $\int (\sigma(x),\ \sigma(x))_x\, dx$ существовал и был конечным. Тогда (после отождествления сечений, совпадающих почти всюду) пространство это превращается в гильбертово пространство $\mathscr{H}$, причем $\mathscr{H} = \int\limits_{\mathscr{X}} \mathscr{H}_x\, dx$. Далее, с помощью инвариантности меры непосредственно доказывается, что представление U в этом пространстве унитарно.

Итак, представление группы, действующее в пространстве сечений расслоения над G-пространством $\mathscr{X}$, импримитивно. Если оно транзитивно (т. е. $\mathscr{X}$ — однородное пространство), то оно по теореме об импримитивности эквивалентно индуцированному представлению. Вид этого последнего и преобразование эквивалентности очевидны.

§ 4.3. Виртуальные состояния и амплитуды переходов

С некоторой точки зрения основным отличием квантовой механики от классической представляется отличие в правилах исчисления вероятностей. В квантовой теории правило сложения вероятностей заменяется правилом сложения амплитуд вероятностей, и лишь после нахождения амплитуды того процесса, который интересует наблюдателя, следует возведением в квадрат перейти от амплитуды вероятности к самой вероятности. Последовательное применение этой схемы рассуждений является основной идеей тех подходов к релятивистской и нерелятивистской квантовой теории, которые развиваются в следующих главах. Конкретные же указания о строении пространств состояний и амплитуд переходов будут выводиться из требований симметрии относительно некоторой группы преобразований пространства-времени.

Здесь мы попытаемся изложить основы той техники амплитуд и виртуальных состояний, которой будем пользоваться в дальнейшем. Однако эта техника еще недостаточно развита для того, чтобы сформулировать ее аксиоматически. Основные принципы существенно прояснятся в процессе приложения их к описанию конкретных систем (главы 6, 8, 9).

1. Квантовые переходы и альтернативы. Квантовая система может переходить из одного состояния в другое, и эти переходы характеризуются *вероятностями* или *амплитудами вероятности*. Вероятность является положительным числом, а амплитуда, вообще говоря, комплексным. Вероятность равна квадрату модуля амплитуды вероятности.

В классической физике всегда можно поставить вопрос о том, как происходит тот или иной переход, т. е. изменение состояния или переход одного состояния в другое всегда можно охарактеризовать более детально, описать промежуточные состояния. Принято считать, что квантовые переходы происходят скачком и поэтому не могут быть охарактеризованы более детально. Однако Фейнман показал [42], что это неверно или по крайней мере возможна точка зрения, с которой это утверждение становится неверным.

Согласно концепции квантовой механики, предложенной Фейнманом, *любой переход можно охарактеризовать сколь* *угодно детально*, вплоть до того, что можно описать переход как непрерывную цепочку чисто классических состояний системы. Например, переход из одной точки в другую совершается по одной из кривых, соединяющих эти точки. Отличие квантовой системы от классической состоит в том, что для нее справедливы другие *правила исчисления вероятностей*. Более конкретно, отличие состоит в том, что все вычисления проводятся с амплитудами вероятностей, и лишь на самом последнем этапе амплитуда вероятности возводится в квадрат и дает вероятность.

Например, если нужно найти вероятность перехода состояния φ' в состояние φ и при этом известно, что переход может осуществиться лишь через одно из состояний e_i, то вычисления строятся так. Сначала находится амплитуда перехода $\varphi' \to e_i$, которую мы обозначим через $A(e_i, \varphi')$, затем амплитуда $A(\varphi, e_i)$ перехода $e_i \to \varphi$. Тогда амплитуда перехода $\varphi' \to \varphi$ через промежуточное состояние e_i равна произведению $A_i(\varphi, \varphi') = A(\varphi, e_i)A(e_i, \varphi')$. Полная амплитуда перехода $\varphi' \to \varphi$ равна сумме $A(\varphi, \varphi') = \sum_i A(\varphi, e_i)\,A(e_i, \varphi')$. Таким образом, если переход может совершиться несколькими альтернативными способами, то действует *правило сложения амплитуд вероятности*. Вероятность перехода $\varphi' \to \varphi$ находится как квадрат модуля амплитуды:

$$P(\varphi, \varphi') = |A(\varphi, \varphi')|^2.$$

При таком вычислении состояния e_i действительно должны представлять собой альтернативы, т. е. взаимные переходы этих промежуточных состояний должны быть исключены, а переход такого состояния в само это состояние совершается с амплитудой, равной единице: $A(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. В более общем случае, когда состояния e_i нормированы на произвольную матрицу $A(e_i, e_j) = A_{ij}$, правило сложения амплитуд принимает вид

$$A(\varphi, \varphi') = \sum_{ij} A(\varphi, e_i)\left(A^{-1}\right)^{ij} A(e_j, \varphi').$$

Появляющуюся здесь матрицу A^{-1} в дальнейшем мы будем называть *нормировочной матрицей* или *нормировочным оператором*. Из этой формулы видно, что состояния e_i могут служить альтернативами некоторого процесса лишь в том случае, если матрица A не вырождена. В противном случае обратная матрица не существует. Например, если e_1 и e_2 — тождественные состояния, то переходы из них во все прочие состояния имеют одинаковые амплитуды. В этом случае матрица A содержит два одинаковых столбца, в силу чего ее детерминант равен нулю.

Очевидной иллюстрацией описанной ситуации является случай, когда и состояния φ, φ', и все промежуточные состояния e_i принадлежат пространству состояний системы $\mathscr{H}$, а все амплитуды равны соответствующим скалярным произведениям:

$A(\varphi, \varphi') = (\varphi, \varphi')$. В этом случае множество векторов $\{e_i\}$ должно образовывать базис в $\mathscr{H}$, и формула сложения амплитуд легко проверяется. Она следует из полноты базиса, которую можно выразить формулой

$$\sum_{ij} |e_i\rangle \left(A^{-1}\right)^{ij} \langle e_j| = \mathbb{1}, \quad A_{ij} = \langle e_i | e_j\rangle.$$

Предположим, однако, что физическая ситуация такова, что переход $\varphi' \to \varphi$ может происходить лишь через те промежуточные состояния, которые принадлежат подпространству $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}$. Если $\{e_i\}$ — базис этого подпространства, а P — ортогональный проектор на $\mathscr{H}_1$, то

$$\sum_{ij} |e_i\rangle \left(A^{-1}\right)^{ij} \langle e_j| = P,$$

и амплитуда перехода $\varphi' \to \varphi$ равна

$$A(\varphi, \varphi') = (\varphi, P\varphi').$$

2. Виртуальные состоиния. При вычислении амплитуд отнюдь не обязательно, чтобы все участвующие в вычислении состояния (начальное, конечное и промежуточные) принадлежали пространству состояний исследуемой квантовой системы в обычном понимании. В это пространство включаются только такие состояния, которые можно отождествить с помощью некоторой измерительной системы. Мы будем называть такие состояния *реальными* или *наблюдаемыми*. Состояния, фигурирующие при вычислении амплитуд, могут принадлежать некоторому более широкому пространству *виртуальных состояний*. Часто такое пространство специально конструируется для описания альтернатив исследуемого перехода. При вычислении амплитуды с помощью фейнмановского интеграла по траекториям альтернативой является движение частицы по определенной траектории. В данном случае движение по заданной траектории является виртуальным состоянием системы. Множество таких состояний не только шире, чем пространство реальных состояний квантовой частицы, но даже шире, чем множество состояний соответствующей классической частицы, так как последняя может двигаться только по прямолинейным траекториям.

Скалярное произведение в квантовой теории вводится с единственной целью — чтобы определять с его помощью амплитуды переходов. Если имеется некоторое линейное пространство виртуальных состояний и заданы амплитуды переходов этих состояний друг в друга, то эти амплитуды можно по определению считать скалярными произведениями векторов, соответствующих виртуальным состояниям: $(\varphi, \varphi') = A(\varphi, \varphi')$. Тогда рассматриваемое пространство виртуальных состояний снабжается скалярным произведением. При этом, однако, совсем не обязательно, чтобы скалярное произведение было положительно определенным. Таким образом, если пространство виртуальных состояний является линейным пространством, то в нем может быть введена структура *гильбертова пространства с индефинитной метрикой*.

В случае, если при вычислении амплитуды перехода складываются амплитуды альтернатив, эти альтернативы Фейнман называет *интерферирующими*. В большинстве случаев приходится сталкиваться именно с этой ситуацией. Однако в некоторых случаях складываются не амплитуды, а вероятности альтернатив. Это имеет место, если есть хотя бы принципиальная возможность выяснить, какая именно из альтернатив на самом деле вызвала данный переход. В этом случае альтернативы называются (по Фейнману) *несовместимыми*.

Альтернативы оказываются интерферирующими в том случае, если нельзя провести даже мысленного эксперимента, который привел бы к выделению одной из альтернатив. Такой запрет может возникать из-за того, что альтернативы не принадлежат к пространству реальных состояний системы, а являются лишь виртуальными и по определению не могут быть наблюдаемы. Но даже в том случае, если альтернативами являются реальные состояния, их наблюдение может оказаться несовместимым с другими наблюдениями, которые являются целью эксперимента. В этом случае сказывается принцип неопределенности.

Если некоторый процесс происходит через несовместимые альтернативы, то это значит, что даже наблюдая результат процесса и нисколько не искажая его, мы можем (за счет некоторого усовершенствования измерительной системы) выяснить, какая из альтернатив вызывает этот процесс. Но это значит, что имеется некоторый дополнительный прибор, показания которого сводятся к указанию альтернативы. Тем самым эти альтернативы, очевидно, являются классическими, множество этих альтернатив эквивалентно множеству состояний классического прибора (положению стрелки). Значит, в некотором смысле можно сказать, что *правило сложения вероятностей справедливо только для классической системы.*

3. Индуцированные представления и амплитуды переходов. Разложение процесса на альтернативы часто оказывается полезным, если альтернативы являются классическими состояниями системы или выражаются в терминах классических состояний. В этом случае легко ответить на вопрос, через какие альтернативы может произойти процесс. Ярким примером является фейнмановский интеграл по путям. В большинстве случаев формализм спектральной меры предоставляет в наше распоряжение как раз такой классический язык. Действительно, пространство значений наблюдаемой $\mathscr{X}$ по сути своей есть чисто классический образ. Поэтому использование спектральной меры облегчает нахождение альтернатив квантовых процессов.

Если система обладает симметрией, то в пространстве состояний этой системы действует, как мы видели, индуцированное представление. При этом система импримитивности его предоставляет нам классический язык для перечисления альтернатив процессов, а инвариантное скалярное произведение в пространстве-носителе задает амплитуды переходов. Таким образом, пространство-носитель индуцированного представления превращается в пространство состояний, интерпретируемых в классических терминах и с заданным скалярным произведением. В общем случае векторы этого пространства описывают виртуальные состояния, а скалярное произведение индефинитно.

Более того, техника индуцирования позволяет определить амплитуды переходов даже между векторами, принадлежащими различным пространствам. Пусть $\mathscr{X} = G/K$ и $\mathscr{Y} = G/H$ — пространства значений двух различных наблюдаемых (или динамических переменных), $U_\Delta = \Delta(K) \uparrow G$ и $U_\Lambda = \Lambda(H) \uparrow G$ — соответствующие индуцированные представления и $\mathscr{H}_\Delta$, $\mathscr{H}_\Lambda$ — пространства-носители этих представлений. Тогда каждое из этих пространств можно интерпретировать как пространство состояний (вообще говоря, виртуальных) квантовой системы. Для того чтобы можно было использовать для расчетов переходы между состояниями, принадлежащими соответственно пространствам $\mathscr{H}_\Delta$ и $\mathscr{H}_\Lambda$, нужно задать амплитуды этих переходов. Такие амплитуды должны определять эрмитову форму (ψ, φ), $\psi \in \mathscr{H}_\Lambda$, $\varphi \in \mathscr{H}_\Delta$, инвариантную относительно группы G. Но в п. 2.3.9 было показано, что инвариантные формы определяются по переплетениям соответствующих индуцированных представлений: $T \in [U_\Delta, U_\Lambda]$. Таким образом, группа симметрии накладывает очень сильные ограничения на систему. В частности, описанная схема может служить основой *квантования*, т. е. построения квантового аналога классической системы.

Примером квантования может служить построение квантовой теории *нерелятивистской частицы*, опирающееся на группу Галилея, проведенное в главе 8. Другим, еще более важным примером, которому будет посвящена в основном оставшаяся часть книги, служит построение *релятивистской квантовой теории элементарных частиц*, основанное на группе Пуанкаре (главы 5—7). Наконец, третьим примером является квантовая теория *частиц в пространстве де Ситтера* (глава 9). Отметим, что во всех этих случаях используется пара индуцированных представлений U_Δ, U_Λ, одно из которых неприводимо и действует в пространстве реальных состояний частицы. Второе представление строится так, чтобы соответствующая динамическая переменная имела смысл положения в пространстве-времени. Это представление действует в пространстве виртуальных состояний частицы. Амплитуды переходов между векторами этих пространств однозначно определяются требованием инвариантности и позволяют дать полную интерпретацию теории.

Г л а в а 5

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СВОБОДНЫХ ЧАСТИЦ

Пространство-время Минковского $\mathscr{X}$ однородно относительно группы Пуанкаре, которую можно представить как полупрямое произведение группы Лоренца и группы четырехмерных сдвигов: $P = L \otimes T$. Факторизация группы Пуанкаре P по подгруппе Лоренца L дает фактор-пространство, изоморфное самому пространству Минковского: $\mathscr{X} = P/L$, а факторизация по подгруппе сдвигов и пространственных вращений $H = R \otimes T$ дает пространство релятивистских скоростей или импульсов частицы определенной массы: $P/H = L/R = \mathscr{C}$.

Индуцирование из конечномерного представления группы Лоренца $D(L) \uparrow P$ позволяет построить пространство $\mathscr{H}_D$, интерпретируемое в терминах пространства-времени. Среди векторов этого пространства содержатся состояния, описывающие локализацию в одной точке пространства-времени. Такие локализованные состояния частицы возникают в процессе локальных взаимодействий и требуются для расчета реальных процессов.

Реальные (наблюдаемые) состояния элементарной частицы образуют пространство $\mathscr{H}_{mj}$, в котором действует неприводимое представление U_{mj} группы Пуанкаре. Реализация его как индуцированного $U_{mj} = \Delta_{mj}(H) \uparrow P$ позволяет интерпретировать состояния частицы в терминах импульса (импульсное представление). Теорема о переплетении индуцированных представлений позволяет практически однозначно определить вложение J_{mj}: $\mathscr{H}_{mj} \to \mathscr{H}_D$, т. е. найти координатное представление реальных состояний частицы. Скалярное произведение локализованного состояния $\psi \in \mathscr{H}_D$ на реальное состояние $\varphi \in \mathscr{H}_{mj}$, дает амплитуду вероятности перехода из реального состояния в локализованное или обратного перехода.

§ 5.1. Факторизация группы Пуанкаре

Как видно из результатов главы 4, в теории симметричных квантовых систем существенно, чтобы все описывающие систему однородные пространства были реализованы как фактор-пространства группы симметрии. Поэтому, приступая к построению релятивистской квантовой теории, мы должны прежде всего построить некоторые факторизации группы Пуанкаре (точнее — ее связной компоненты).

Важнейшая из них — факторизация по группе Лоренца — даст в результате модель самого пространства Минковского и впоследствии послужит основой для построения координатного представления релятивистской квантовой теории. При такой факторизации сама группа Пуанкаре оказывается главным расслоенным пространством над пространством Минковского с группой Лоренца в качестве структурной группы. Эта конструкция легко может быть обобщена на произвольное риманово пространство-время и приводит к расслоению ортореперов над этим пространством.

Вторая важная факторизация группы Пуанкаре — по подгруппе H, содержащей четырехмерные сдвиги и трехмерные вращения, — по существу сводится к факторизации группы Лоренца по подгруппе вращений. Фактор-пространство в этом случае представляет собой одну полу двуполостного гиперболоида в пространстве Минковского и может служить моделью пространства скоростей или импульсов релятивистской частицы. В § 5.3 эта факторизация используется для конструирования пространства состояний частицы (импульсного представления).

1. Группа Пуанкаре как полупрямое произведение. Пространство Минковского $\mathscr{X}$ — это четырехмерное псевдоевклидово пространство сигнатуры (1, 3), т. е. псевдориманово пространство с метрикой

$$ds^2 = (dx^0)^2 - d\boldsymbol{x}^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu,$$

где $\boldsymbol{x} = \{x^1, x^2, x^3\}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ и $\eta = \mathrm{Diag}\,\{1, -1, -1, -1\}$ — тензор Минковского. *Группа Пуанкаре* — это группа преобразований координат $\{x^\mu | \mu = 0, 1, 2, 3\}$, сохраняющих вид метрики, т. е. *группа движений* риманова пространства $\mathscr{X}$. Это определение подчеркивает, что пространство Минковского — лишь одно из бесконечного множества римановых пространств, являющихся моделями пространства-времени в общей теории относительности. Однако этот частный случай особенно прост, так как касательное пространство*) в любой точке псевдоевклидова пространства $\mathscr{X}$ является точной копией всего $\mathscr{X}$.

По этой причине структуру пространства Минковского можно определить проще — как структуру четырехмерного *аффинного пространства* с билинейной формой сигнатуры (1,3). Это значит, что 1) каждой паре точек x, $x' \in \mathscr{X}$ соответствует вектор $a = \{a^\mu = x^\mu - x'^\mu | \mu = 0, 1, 2, 3\}$ из четырехмерного векторного

*) *Касательным пространством* в точке x называется множество векторов в этой точке. При этом вектор представляет собой бесконечно малое смещение из этой точки или точнее — касательную в точке x к кривой, проходящей через эту точку.

пространства $\mathscr{K}$, ассоциированного с пространством $\mathscr{X}$; 2) обратно, точке $x' \in \mathscr{X}$ и вектору $a \in \mathscr{K}$ соответствует другая точка $x = \{x^\mu = x'^\mu + a^\mu | \mu = 0, 1, 2, 3\}$ пространства $\mathscr{X}$; 3) в векторном пространстве $\mathscr{K}$ определена билинейная форма сигнатуры (1, 3):

$$(a, b) = a^0 b^0 - \boldsymbol{ab} = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu.$$

Группа Пуанкаре P в этом случае определяется как подгруппа аффинных преобразований, действующих на пространствах $\mathscr{X}$ и $\mathscr{K}$ по закону

$$x'^\mu = l^\mu{}_\nu x^\nu + c^\mu, \quad a'^\mu = l^\mu{}_\nu a^\nu$$

и сохраняющих форму (,). Это значит, что матрица l удовлетворяет условию

$$l^\tau \eta l = \eta$$

(индекс т означает транспонирование матрицы). Группа всех таких матриц называется *группой Лоренца* L. Мы будем рассматривать лишь связную компоненту ее, т. е. наложим на матрицы $l \in L$ условия

$$\det l = 1, \quad l^0{}_0 > 0.$$

Очевидно, что произвольное преобразование $p \in P$ можно представить в виде $p = lc_T$ где $l \in L$ — преобразование Лоренца, а через c_T обозначен сдвиг на вектор $c \in \mathscr{K}$:

$$c_T x = x + c.$$

Все сдвиги образуют *подгруппу сдвигов* или *трансляций* T, изоморфную векторному пространству $\mathscr{K}$ (если последнее рассматривать как группу относительно сложения):

$$c_T c'_T = (c + c')_T.$$

Замечание. Группа сдвигов действует на векторном пространстве $\mathscr{K}$, ассоциированном с пространством Минковского, тривиально: $c_T a = a$, $a \in \mathscr{K}$. Это связано с определением векторов из $\mathscr{K}$ как *относительных положений* в пространстве Минковского: $a = x - x'$. Этот факт окажется существенным позднее, при рассмотрении импульсного пространства.

Легко видеть, что единственным общим элементом групп L и T является единица (тождественное преобразование). Это значит, что разложение $p = la_T$ единственно. Кроме того, непосредственно из определения преобразований $l \in L$ и $a_T \in T$ следует *правило коммутации* их:

$$la_T l^{-1} = (la)_T.$$

С помощью него очень просто показать, что подгруппа T инвариантна в P. Следовательно, $P = L \otimes T$ — *полупрямое произведение* (см. § 1.4).

Обычным образом (как описано в п. 1.4.3) можно построить реализацию группы P на множестве $L \times T$ или, используя изоморфизм группы T на векторное пространство $\mathscr{K}$, перейти к реализации группы P на множестве $L \times \mathscr{K}$. При этом получается следующий закон умножения:

$$(l', a')(l, a) = (l'l, l^{-1}a' + a).$$

Конечно, в данном случае проще вывести эту реализацию непосредственно. Для этого с помощью закона композиции в группе T и правила коммутации L и T выводим

$$l'a'_T \cdot la_T = (l'l)(l^{-1}a'_T l) a_T = l'l (l^{-1}a')_T a_T = (l'l)(l^{-1}a' + a)_T.$$

Теперь реализация на $L \times \mathscr{K}$ получается непосредственно с помощью отображения $p = la_T \mapsto (l, a)$.

Выведем аналогичным образом другую реализацию группы Пуанкаре. Для этого в качестве стандартного вида элемента группы Пуанкаре выберем произведение преобразования Лоренца и сдвига в обратном порядке: $p = a_T l$. Тогда

$$a_T l \cdot a'_T l' = a_T (l a'_T l^{-1}) l l' = (a + la')_T l l'.$$

Теперь используем отображение $p = a_T l \mapsto (a, l)$ группы P на множество $\mathscr{K} \times L$. В результате получаем в качестве модели группы Пуанкаре это множество с законами композиции

$$(a, l)(a', l') = (a + la', ll').$$

Эта реализация постоянно используется в физической литературе при работе с группой Пуанкаре. Мы, однако, не будем ее применять, предпочитая способ представления элемента группы Пуанкаре в виде $p = a_T l$ или $p = la_T$, поскольку такие обозначения, не отличаясь по существу, обладают гораздо большей наглядностью и гибкостью. Мы видели, что из них легко получаются обе обсуждавшиеся реализации и правила композиции для них. При этом не требуется запоминать эти правила композиции, а вместо них с тем же успехом используется гораздо более простая формула $la_T l^{-1} = (la)_T$.

2. Гиперболоид скоростей как факторизация группы Лоренца. Чтобы получить одну важную факторизацию группы Лоренца, рассмотрим векторное пространство $\mathscr{K}$. Оно является, очевидно, L-пространством, но группа L действует на нем интранзитивно. Действительно, в силу однородности и свойства сохранения свертки (a, b) группа Лоренца заведомо не выводит из любого из следующих подпространств:

$$\mathscr{C}_{m^2} = \{k \in \mathscr{K} | (k, k) = m^2, \ k \neq 0\}; \quad \mathscr{C}_{00} = \{0 \in \mathscr{K}\}.$$

Хорошо известно, что в зависимости от знака m^2 подпространство $\mathscr{C}_{m^2}$ является либо однополостным гиперболоидом ($m^2 < 0$), либо световым конусом ($m^2 = 0$), либо двуполостным гиперболоидом ($m^2 > 0$).

В первом случае пространство $\mathscr{C}_{m^2}$ является областью транзитивности (группа L переводит друг в друга любые две точки этого пространства). Если $m^2 \geqslant 0$, то полная группа Лоренца $L = O(1, 3)$ действует на $\mathscr{C}_{m^2}$ транзитивно, однако ее связная компонента не может, конечно, вывести за пределы одной полы двуполостного гиперболоида или светового конуса (выбрасывание вершины делает конус несвязным множеством). Поскольку мы под группой Лоренца понимаем лишь ее связную компоненту, в качестве областей транзитивности следует рассмотреть подпространства $\mathscr{C}_{00}$, $\mathscr{C}_{m^2}$ $(m^2 < 0)$ и

$$\mathscr{C}^+_{m^2} = \{k \in \mathscr{K} \mid (k, k) = m^2 \geqslant 0,\ k^0 > 0\}$$

и соответствующим образом определенные $\mathscr{C}^-_{m^2}$ $(m^2 \geqslant 0)$.

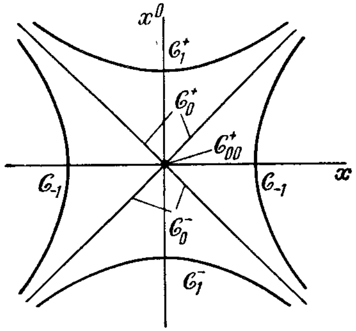


Рис. 11. Однородные пространства группы Лоренца.

В силу однородности первой степени преобразований из L отображение $k \longmapsto \lambda k$, $\lambda \neq 0$, пространства $\mathscr{K}$ на себя сохраняет действие группы. Поэтому некоторые из областей транзитивности изоморфны друг другу, если их рассматривать как однородные пространства. Если из каждого полученного таким образом класса эквивалентности выбрать по одному однородному пространству, их окажется четыре: $\mathscr{C}_{00}$ (содержащее лишь нулевой вектор), $\mathscr{C}_{-1}$ (однополостный гиперболоид), $\mathscr{C}_0^+$ (будущий световой конус) и $\mathscr{C}_1^+$ (верхняя пола двуполостного гиперболоида).

Рассмотрим однородное пространство

$$\mathscr{C}_1^+ = \{v \in \mathscr{K} \mid (v, v) = 1,\ v^0 > 0\}.$$

Ему можно дать наглядную физическую интерпретацию, считая, что $v \in \mathscr{C}_1^+$ — это *4-скорость* частицы конечной массы. Отображение $v \longmapsto mv$ переводит пространство 4-скоростей $\mathscr{C}_1^+$ в пространство $\mathscr{C}^+_{m^2}$ импульсов частицы массы m или *массовую поверхность*. Позднее мы увидим, что такая интерпретация действительно оправдана. Обозначим $\mathscr{C}_1^+ = \mathscr{C}$.

Чтобы реализовать однородное пространство $\mathscr{C}$ как фактор-пространство группы Лоренца, нужно выбрать центр однородного пространства и найти его стабилизатор. Возьмем в качестве центра вектор $e_0 = \{1, 0, 0, 0\} \in \mathscr{C}$ (обозначение связано с тем, что это времениподобный вектор ортонормированного базиса в $\mathscr{K}$). Обозначим его стабилизатор через R, так что

$$R = \{r \in L \mid re_0 = e_0\}.$$

Легко видеть, что это *подгруппа* пространственных (трехмерных) *вращений* в группе Лоренца. Теперь ясно, что $\mathscr{C} = L/R$, причем изоморфизм осуществляется отображением $lR \longmapsto le_0$.

Выберем в смежных классах представители. Представитель $v_L \in L$ должен обладать тем свойством, что, действуя на 4-скорость e_0, он переводит ее в 4-скорость v. Пусть сначала $v = v_\chi = \{\operatorname{ch}\chi, 0, 0, \operatorname{sh}\chi\}$, $0 \leqslant \chi < \infty$. Положим в этом случае

$$(v_\chi)_L = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\chi & 0 & 0 & \operatorname{sh}\chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}\chi & 0 & 0 & \operatorname{ch}\chi \end{bmatrix}.$$

Матрицы такого вида появляются в любом курсе специальной теории относительности, но обычно выражаются они не через 4-скорость, а через обычную (трехмерную) скорость: $\operatorname{sh}\chi = V/\sqrt{1 - V^2}$.

Матрица $(v_\chi)_L$ обычно называется *чистым лоренцевским* (или *гиперболическим*) *поворотом* в плоскости x^0, x^3. В качестве представителей других смежных классов мы выберем чистые лоренцевские повороты в других плоскостях (которые еще называют *бустами* от английского слова boost — ускорение). Для этого заметим, что произвольную 4-скорость $v \in \mathscr{C}$ можно получить, взяв некоторое v_χ (гиперболический угол χ нужно выбрать так, чтобы $\operatorname{ch}\chi = v^0$) и подвергнув его некоторому трехмерному вращению: $v = rv_\chi$, $r \in R$. Для такого v положим по определению

$$v_L = r(v_\chi)_L r^{-1}.$$

Задача 1. Из формулы $v = rv_\chi$ вращение r определяется с некоторым произволом. Каков этот произвол? Показать, что представитель v_L определяется приведенной формулой однозначно.

Задача 2. Показать, что буст, соответствующий произвольной скорости $v = \{v^0, \boldsymbol{v}\}$, равен

$$v_L = \begin{bmatrix} v^0 & \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{v} & \mathbb{1} + \dfrac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}}{v^0 + 1} \end{bmatrix},$$

где через $\boldsymbol{v}$ обозначен трехкомпонентный вектор-столбец, а через $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ — вектор-строка.

После того как выбраны представители смежных классов, формулой

$$lv_L = (lv)_L (l, v)_R$$

определяется *система факторов* $(l, v)_R \in R$. Для этой системы справедливы обычные формулы:

$$(l_1l_2, v)_R = (l_1, l_2v)_R (l_2, v)_R;$$

$$(1, v)_R = (v_L, e_0)_R = 1; \quad (l, l^{-1}v)_R = (l^{-1}, v)_R^{-1}.$$

Задача 3. Пользуясь определением бустов, показать, что для любых $v \in \mathscr{V}$, $r \in R$

$$(r, v)_R = r.$$

Выбрав представители классов lR, мы тем самым определили некоторую параметризацию группы Лоренца, так как каждый элемент ее единственным образом представляется в виде $l = v_L r$, $v \in \mathscr{V}$, $r \in R$. Система факторов позволяет записать закон композиции в этой параметризации:

$$v_L r \cdot v_L' r' = (v_L r v')_L (v_L, r v')_R r r'.$$

3. Гиперболоид скоростей как факторизация группы Пуанкаре. Векторное пространство $\mathscr{K}$ можно считать не только L-пространством, но и P-пространством, так как действие группы Пуанкаре на нем определяется формулой (см. замечание в пункте 1)

$$pk = la_D k = lk, \qquad k \in \mathscr{K}.$$

Но если $\mathscr{K}$ является P-пространством, то его можно разбить на области транзитивности относительно действия группы P и каждую из них реализовать как фактор-пространство этой группы. Действие группы Пуанкаре по существу сводится к действию подгруппы Лоренца. Поэтому анализ, проведенный в предыдущем пункте, может быть повторен почти буквально.

Группа P действует на $\mathscr{K}$ интранзитивно, причем областями транзитивности являются подпространства

$$\mathscr{V}_{00},\ \mathscr{V}^{\pm}_{m^2}\quad (m^2 \geqslant 0), \qquad \mathscr{V}_{m^2}\quad (m^2 < 0).$$

Если разбить их на классы, включив в каждый из классов однородные пространства, изоморфные друг другу, то в качестве представителей этих классов эквивалентности можно выбрать $\mathscr{V}_{00}$, $\mathscr{V}^+_1 = \mathscr{V}$, $\mathscr{V}^+_0$ и $\mathscr{V}_{-1}$. Позднее мы увидим, что эти пространства соответствуют вакууму, частице положительной массы, частице нулевой массы и тахиону (гипотетической частице, движущейся быстрее света). Рассмотрим пространство $\mathscr{V} = \mathscr{V}^+_1$, которое интерпретируется как гиперболоид скоростей массивной частицы.

Выберем на $\mathscr{V}$ в качестве центра точку e_0. Стабилизатором ее является подгруппа $H = RT$, состоящая из элементов вида ra_T, $r \in R$, $a_T \in T$, и сводящаяся к полупрямому произведению $R \otimes T$. Следовательно, $\mathscr{V} = P/H$, причем изоморфизм осуществляется отображением $pH \mapsto pe_0$. В качестве представителей смежных классов могут быть выбраны бусты v_L.

Задача 4. Показать, что факторы, соответствующие выбору бустов в качестве представителей, равны $(p, v)_H = (la_T, v)_H = (l, v)_R (v_L^{-1} a)_T$.

Впрочем, вместо того, чтобы пользоваться факторами $(p, v)_H$, удобно каждый раз сводить факторизацию P/H к факторизации L/R, в которой появляются факторы $(l, v)_R$.

Факторизация $P/H = \mathscr{V}$ может быть использована для более детальной параметризации группы Пуанкаре, чем та, которая основана на разложении $P = L \otimes T$. Действительно, каждый элемент $p \in P$ относится к одному и только одному классу $v \in P/H$ и поэтому единственным образом может быть представлен в виде $p = v_L r a_T$, $v \in \mathscr{V}$, $r \in R$, $a \in \mathscr{K}$, так что группа P реализуется как множество $\mathscr{V} \times R \times \mathscr{K}$.

Задача 5. Показать, что отображение $(v, r, a) \mapsto v_L r a_T$ является изоморфизмом групп, если на множестве $\mathscr{V} \times R \times \mathscr{K}$ групповая композиция определена формулой

$$(v', r', a')(v, r, a) = (v_L' r' v', (v_L', r' v)_R r' r, r^{-1} v_L^{-1} a' + a).$$

Во многих частных случаях эта формула упрощается, и обычно оказывается удобнее снова проделать выкладки, приводящие к закону композиции, чем пользоваться этой формулой в готовом виде.

4. Пространство Минковского как фактор-пространство. Расслоение ортореперов. Еще одна факторизация группы Пуанкаре получается, если мы строим фактор-пространство, моделирующее пространство Минковского. Законы преобразования $\mathscr{X}$ под действием сдвигов и преобразований Лоренца показывают, что группа P действует на нем транзитивно, т. е. $\mathscr{X}$ является однородным пространством. Поэтому оно изоморфно некоторому фактор-пространству и отображение, осуществляющее изоморфизм, можно построить по общему рецепту, описанному в п. 1.3.3.

Выберем в $\mathscr{X}$ произвольную точку, которая будет играть роль «центра» однородного пространства. Удобно (хотя и не обязательно, см. задачу 8) выбрать в качестве центра точку с нулевыми координатами, т. е. начало системы координат $O = \{0, 0, 0, 0\}$. Очевидно, что стабилизатором этой точки является подгруппа однородных преобразований L, а любой сдвиг меняет ее. Поэтому заключаем, что $\mathscr{X} = P/L$. Отображение $\iota\colon \mathscr{X} \to P/L$, осуществляющее этот изоморфизм, задается формулой

$$\iota(x) = \{p \in P \mid pO = x\}.$$

Нетрудно видеть, что представителями смежных классов по L могут служить сдвиги, причем

$$\iota(x) = x_T L.$$

Замечание. Элементы группы сдвигов T определяются векторами из $\mathscr{K}$, так что, обозначая a_T, мы всегда предполагаем, что $a \in \mathscr{K}$ (но не $\mathscr{X}$). Поэтому, если говорить строго, точке $x \in \mathscr{X}$ сопоставляется смежный класс $(x - O)_T L$, где $(x - O)$ — вектор, проведенный из начала отсчета O в точку x.

Задача 6. Оперируя с классами $x_T L$, покажите непосредственно, что они преобразуются по тем же законам, что и точки $x \in \mathscr{X}$.

Задача 7. Покажите, что факторы, соответствующие выбору сдвигов в качестве представителей классов, равны $(la_T, x)_L = l$.

Это следует из правила коммутации сдвигов и преобразований Лоренца, и на самом деле удобнее пользоваться каждый раз этим правилом, чем системой факторов.

Задача 8. Постройте изоморфизм $\mathscr{X}$ на фактор-пространство, выбирая в качестве центра однородного пространства $\mathscr{X}$ точку с произвольными координатами.

Вспомним, что группу с некоторой ее факторизацией можно рассматривать как главное расслоение (п. 1.3.5). Поэтому группу Пуанкаре можно рассматривать как главное расслоенное многообразие над пространством Минковского. Роль структурной группы в этом случае играет группа Лоренца. Каноническая проекция $\pi: P \to \mathscr{X}$ имеет вид $\pi: x_T l \longmapsto x$. Получающемуся таким образом расслоению можно придать геометрический смысл, который позволяет перенести многие результаты квантовой теории в пространстве Минковского на случай, когда пространство-время искривлено (т. е. на случай внешнего классического гравитационного поля).

Для этого рассмотрим множество $\mathscr{N}$ пар (x, n), где $x \in \mathscr{X}$ — точка пространства Минковского, а $n = \{n_\mu | \mu = 0, 1, 2, 3\}$ — некоторый ортонормированный базис (репер) соответствующего линейного пространства $\mathscr{K}$. Воспользуемся фиксированным базисом $e = \{e_\mu\}$ и выразим произвольный базис через данный фиксированный с помощью преобразования Лоренца: $n_\mu = e_\nu l^\nu_\mu$ или сокращенно $n = el$. Нетрудно видеть, что репер el, $l \in L$, ортонормирован и, обратно, для всякого ортонормированного (в смысле $(n_\mu, n_\nu) = \eta_{\mu\nu}$) репера n найдется такой элемент группы Лоренца $l \in L$, что $n = el$. Тем самым устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством $\mathscr{N}$ и группой Пуанкаре P. Именно, элементу $p = x_T l \in P$ сопоставляется точка $(x, el) \in \mathscr{N}$.

При таком сопоставлении множество $\mathscr{N}$ превращается в главное расслоенное многообразие с базой $\mathscr{X}$, канонической проекцией $\pi: (x, n) \longmapsto x$ и структурной группой L, которая действует в $\mathscr{N}$ по закону $(x, n) \overset{l}{\longmapsto} (x, nl)$. Оказывается, что эту конструкцию можно обобщить на случай, когда пространство $\mathscr{X}$ вместо евклидовой имеет произвольную риманову структуру. В этом случае нет никакого векторного пространства $\mathscr{K}$, единого для всего $\mathscr{X}$. Однако в каждой точке $x \in \mathscr{X}$ естественным образом определяется некоторое векторное пространство T_x (касательное пространство), элементы которого можно наглядно представлять себе как бесконечно малые смещения от точки x вдоль $\mathscr{X}$ (в бесконечно малой окрестности любой точки пространство $\mathscr{X}$ устроено точно так же, как евклидово пространство). Риманова структура пространства $\mathscr{X}$ означает введение некоторой билинейной формы в каждом касательном пространстве T_x, $x \in \mathscr{X}$. Если $\mathscr{X}$ — пространство-время, то форма должна иметь сигнатуру (1, 3). Пусть $n = \{n_\mu | \mu = 0, 1, 2, 3\}$ — базис пространства T_x, ортонормированный относительно билинейной формы в нем, т. е. удовлетворяющий условию $(n_\mu, n_\nu) = \eta_{\mu\nu}$, где η — тензор Минковского. Любые два ортонормированных базиса (репера) в T_x связаны преобразованием Лоренца: $n'_\mu = n_\nu l^\nu{}_\mu$ или проще $n' = nl$.

Теперь мы можем определить расслоение ортореперов над $\mathscr{X}$ как множество $\mathscr{N}$ пар (x, n), где $x \in \mathscr{X}$, а n — орторепер в T_x. Каноническая проекция $\pi: \mathscr{N} \to \mathscr{X}$ определяется как $\pi: (x, n) \longmapsto x$, а преобразование из структурной группы $l: \mathscr{N} \to \mathscr{N}$ как $l: (x, n) \longmapsto (x, nl)$. Слой $\pi^{-1}(x)$ над точкой x состоит из всех ортореперов в пространстве T_x, а любое преобразование из структурной группы $l \in L$ переводит каждый слой в себя. Более того, имеется взаимно-однозначное соответствие между структурной группой и любым слоем. Одним словом, налицо все характерные признаки главного расслоенного многообразия (мы опускаем условия, касающиеся структуры дифференцируемого многообразия на $\mathscr{N}$).

В терминах построенного только что расслоения ортореперов естественным образом формулируются все понятия, характеризующие геометрию риманова пространства, главными из которых являются параллельный перенос и ковариантная производная. Для целей же построения квантовой механики частицы в римановом пространстве-времени формализм расслоения реперов оказывается даже более удобным, чем классический формализм. Преимущество сказывается, например, при описании частиц полуцелого спина [32, 33, 78] и при формулировке процедуры фейнмановского интегрирования по путям [32, 33].

§ 5.2. Координатное представление

Задача построения пространства состояний, в котором диагонализовалась бы динамическая переменная «положение частицы в пространстве-времени», приводит к построению индуцированного представления $D(L) \uparrow P$. Пространство-носитель $\mathscr{H}_D$ этого представления содержит, в частности, векторы, соответствующие локализации строго в одной точке пространства-времени. Такие состояния не согласуются с представлением о стабильной частице, существующей в любой момент времени, однако в следующей главе мы увидим, что именно эти состояния возникают в процессе локальных взаимодействий частиц и без этих виртуальных состояний невозможна последовательная пространственно-временная интерпретация амплитуд реальных процессов.

Характерным признаком пространства $\mathscr{H}_D$ является нормировка его векторов на четырехмерный интеграл в пространстве Минковского. Представление с такой четырехмерной нормировкой было введено Штюкельбергом и переоткрыто в последние годы рядом авторов, однако встретилось с трудностями при его физической интерпретации.

В теоретико-групповом подходе к квантовой теории удобно называть представление $U_D = D \uparrow P$ группы Пуанкаре, действующее в пространстве $\mathscr{H}_D$ виртуальных локализованных состояний, — координатным представлением. В квантовой теории обычно координатным представлением называют само пространство состояний $\mathscr{H}_D$ (или его подпространство). Мы будем употреблять термин «координатное представление» как в том, так и в другом смысле, что оказывается удобным и не приводит к недоразумениям. Сказанное относится и к импульсному представлению, которое рассматривается в следующем параграфе.

1. Координатное представление группы Пуанкаре. Построим сначала пространство состояний частицы, в котором диагонализуется наблюдаемая «положение в пространстве-времени».

Значения этой наблюдаемой образуют пространство Минковского $\mathscr{X}$, и в соответствии с положениями § 4.2 для решения поставленной задачи нужно построить представление группы Пуанкаре с системой импримитивности, имеющей базу $\mathscr{X}$.

Поскольку база импримитивности $\mathscr{X}$ в данном случае оказывается однородным пространством, искомое представление группы Пуанкаре должно быть индуцированным. Это окончательно определяет рецепт построения пространства состояний и представления в нем следующим образом.

Реализуем однородное пространство $\mathscr{X}$ как фактор-пространство группы Пуанкаре. Это сделано в п. 5.1.4, где показано, что $\mathscr{X} = P/L$. Следовательно, индуцирование нужно проводить из подгруппы Лоренца L. В выборе представления этой группы остается произвол — единственный произвол при построении координатного представления. Выберем некоторое представление D, действующее в пространстве $\mathscr{L}_D$. В обычных теориях представление D конечномерно (векторное, тензорное, спинорное и т. д.). *Координатное представление* группы Пуанкаре, следовательно, должно быть эквивалентно индуцированному представлению $U_D(P) = D(L) \uparrow P$. Поскольку представление требуется нам лишь с точностью до преобразования эквивалентности, можно считать, что координатное представление совпадает с U_D.

Согласно общей теории это представление реализуется в пространстве $\mathscr{H}_D$ функций ψ на группе P со значениями в пространстве $\mathscr{L}_D$ и со структурным условием

$$\psi(pl) = D(l^{-1})\,\psi(p).$$

Представление U_D действует на такую функцию по формуле

$$U_D(p)\,\psi(p') = \psi(p^{-1}p').$$

Обычным образом функция на группе может быть сведена к функции на однородном пространстве. Для этого обозначим

$$\psi(x) = \psi(x_T); \quad \psi(p) = \psi(a_T l) = D(l^{-1})\,\psi(a).$$

Сдвигая аргумент x_T слева элементами группы Пуанкаре и преобразуя полученные выражения следующим образом: $a_T^{-1}x_T = (x-a)_T$; $l^{-1}x_T = (l^{-1}x)_T\, l^{-1}$, получим формулы преобразования функции $x \mapsto \psi(x)$:

$$U_D(a_T)\,\psi(x) = \psi(x-a); \quad U_D(l)\,\psi(x) = D(l)\,\psi(l^{-1}x).$$

2. Локализация в пространстве-времени. Конечномерное представление D некомпактной группы Лоренца не может быть унитарным. Это значит, что в $\mathscr{L}_D$ не существует скалярного произведения, инвариантного относительно этого представления. Однако такое утверждение справедливо лишь в том случае, если

мы требуем, чтобы скалярное произведение было положительно определенным. Может оказаться, что в $\mathscr{L}_D$ можно ввести билинейную форму $\langle\,,\rangle_D$, инвариантную относительно D, хотя она при этом заведомо индефинитна. Для построения координатного представления требуется именно такое представление $D(L)$ с инвариантной формой.

Изобразим вектор $F \in \mathscr{L}_D$ в виде столбца, и пусть $F^\dagger$ — строка из комплексно-сопряженных элементов. Тогда форму $\langle F, F'\rangle_D$ можно записать в виде $\langle F, F'\rangle_D = F^\dagger \Gamma F'$, где Γ — некоторая матрица, удовлетворяющая условию эрмитовости $\Gamma^\dagger = \Gamma$. Если обозначить $F^\dagger\Gamma = \bar{F}$, то форма принимает вид

$$\langle F, F'\rangle_D = F^\dagger \Gamma F' = \bar{F}F'.$$

Условие инвариантности этой формы записывается в виде

$$D^\dagger(l^{-1}) = \Gamma D(l)\,\Gamma^{-1}.$$

Представление $l \mapsto D^\dagger(l^{-1})$ называется ***контраградиентным*** или ***сопряженным*** по отношению к D, поэтому условие инвариантности означает, что представление D и сопряженное по отношению к нему эквивалентны друг другу. Для описания частиц используется обычно либо неприводимое самосопряженное представление D, либо сумма двух неприводимых сопряженных друг другу представлений.

Пользуясь инвариантной формой $\langle\,,\rangle_D$ в пространстве $\mathscr{L}_D$, обычным образом определяем в пространстве $\mathscr{H}_D$ индуцированного представления форму

$$(\psi, \psi')_D = \int_{\mathscr{X}} dx\,\langle\psi(x),\ \psi'(x)\rangle_D = \int_{\mathscr{X}} dx\,\bar{\psi}(x)\,\psi'(x).$$

Эта форма также индефинитна, поэтому для определения топологии в $\mathscr{H}_D$ нужно использовать ассоциированную с ней знакоопределенную форму $(\psi, \Gamma^{-1}\psi')_D = \int_{\mathscr{X}} dx\,\psi^\dagger(x)\,\psi'(x)$. В частности, векторами $\mathscr{H}_D$ являются только такие функции ψ: $\mathscr{X} \to \mathscr{L}_D$, для которых $(\psi, \Gamma^{-1}\psi')_D$ — конечное число.

Легко показать (это следует и из общей теории), что форма $(\psi, \psi')_D$ инвариантна относительно координатного представления $U_D(P)$, если, конечно, dx — инвариантная мера $\mathscr{X}$. Хорошо известно, что инвариантной мерой в евклидовом пространстве является обычная мера Лебега:

$$dx = d^4x = dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3.$$

Полученное таким образом представление U_D в пространстве $\mathscr{H}_D$ обладает теми свойствами, которые требуются от координатного представления. Именно, на пространстве Минковского определяется *спектральная мера,* играющая роль системы импримитивности представления U_D. Спектральную меру можно определить ее элементарными проекторами. Согласно общей теории, проектор, соответствующий точке $x \in \mathscr{X}$ (спектральная мера этой точки), имеет вид

$$\Pi_x \psi(x') = \delta(x - x')\psi(x),$$

где $x' \mapsto \delta_x(x') = \delta(x - x')$ — дельта-функция относительно меры dx, т. е. обычная четырехмерная дельта-функция. Проектор, соответствующий произвольному подмножеству $B \subset \mathscr{X}$, можно найти интегрированием:

$$\Pi(B) = \int_B dx\, \Pi_x, \quad \Pi(B)\psi = \eta_B \psi,$$

где $x \mapsto \eta_B(x)$ — характеристическая функция области B, равная единице в любой точке этой области и нулю вне ее. Нетрудно видеть, что пространство $\mathscr{H}_D$ содержит (в качестве обобщенных, ненормируемых векторов) *состояния, локализованные строго в одной точке пространства Минковского.* Состояние, локализованное в точке $x \in \mathscr{X}$, имеет вид $\psi_x = \delta_x F$, где $F \in \mathscr{L}_D$. Это значит, что в точке $x' \in \mathscr{X}$ функция ψ_x равна

$$\psi_x(x') = \delta(x - x')F.$$

Такие состояния нормированы (в обобщенном смысле) на дельта-функцию, т. е.

$$(\psi_x, \psi_{x'})_D = \langle F, F' \rangle_D \delta(x - x') = \bar{F}F'\delta(x - x').$$

3. Интерпретация координатного представления. Построенное только что пространство $\mathscr{H}_D$ обладает двумя неожиданными и иа первый взгляд неприемлемыми чертами. Во-первых, инвариантная эрмитова форма в нем $(\,,)_D$ *индефинитна* в том смысле, что скалярный квадрат $(\psi, \psi)_D$ может быть отрицательным, так что его нельзя интерпретировать как вероятность некоторого события. Во-вторых, *возможность локализации* частицы в любой области пространства-времени, в том числе в конечном временном интервале, кажется несовместимой с представлением о стабильной частице, существующей в любой момент времени.

Оба возражения правильны и показывают, что по крайней мере не все векторы из пространства $\mathscr{H}_D$ описывают наблюдаемые состояния частицы. Немного позднее мы увидим, что лишь некоторое подпространство $\mathscr{H}_{mj} \subset \mathscr{H}_D$ следует интерпретировать как пространство наблюдаемых состояний частицы массы m и спина j. Скалярное произведение в этом подпространстве совпадает с некоторой положительно определенной компонентой формы $(\,,)_D$, и среди векторов из $\mathscr{H}_{mj}$ нет таких, которые локализованы в конечном интервале времени.

Если подпространство $\mathscr{H}_{mj} \subset \mathscr{H}_D$ можно интерпретировать как пространство наблюдаемых состояний свободной частицы, то все пространство $\mathscr{H}_D$, оказывается, представляет собой совокупность *виртуальных состояний* частицы, возникающих в процессе ее взаимодействия с другими частицами. Это связано с предположением о локальности взаимодействия, т. е. о том, что оно происходит в одной точке пространства-времени. Для того чтобы такое взаимодействие произошло, частица должна находиться в локализованном состоянии $\psi_x = \delta_x F$. Для виртуальных состояний скалярное произведение $(\psi, \psi')_D$ интерпретируется как амплитуда вероятности перехода $\psi' \to \psi$, но не сама вероятность. Поэтому скалярный квадрат (ψ, ψ) не обязательно должен быть положительным. Это оправдывает индефинитность пространства $\mathscr{H}_D$.

Мы вернемся к интерпретации пространства $\mathscr{H}_D$ в связи с описанием взаимодействия частиц. Сейчас отметим еще, что представление *скалярной частицы* ($D = 1$) волновой функцией на пространстве Минковского со скалярным произведением в форме четырехмерного интеграла $(\psi, \psi') = \int dx\, \bar{\psi}(x)\psi'(x)$ было предложено Штюкельбергом в работах [92] и переоткрыто рядом авторов в последние годы [28, 30, 50, 57, 73]. Однако интерпретация этого формализма встретилась с трудностями. В главе 6 мы увидим, что эти трудности исчезают, если интерпретировать $\mathscr{H}_D$ как пространство виртуальных состояний, возникающих в процессе локального взаимодействия.

§ 5.3. Неприводимое представление и элементарная частица

Пространство состояний релятивистской частицы должно преобразовываться по некоторому представлению группы Пуанкаре, чтобы теория была пуанкаре-инвариантной *). Если это представление приводимо, то в нем можно выделить подпредставление, которое описывает физическую подсистему. Но по смыслу понятия элементарной частицы она не должна содержать нетривиальной подсистемы. Поэтому в пространстве состояний элементарной частицы должно действовать неприводимое представление группы Пуанкаре. Тем самым задача описания свободных элементарных частиц сводится к перечислению различных неприводимых представлений этой группы.

*) На самом деле, поскольку состояние квантовой системы определяется не вектором в пространстве состояний, а одномерным подпространством (лучом) векторов, из физических соображений следует лишь, что в пространстве состояний действует проективное представление группы Пуанкаре унитарными или антиунитарными операторами. Однако согласно известной теореме Вигнера (см., например, [1]), для связной компоненты группы Пуанкаре каждое такое представление эквивалентно некоторому обычному, притом унитарному, представлению.

Все неприводимые представления группы Пуанкаре, следовательно, все возможные элементарные частицы, можно найти методом малой группы, так как сдвиги образуют в группе Пуанкаре нормальный делитель (метод малой группы впервые был применен Вигнером именно в связи с этой задачей [99]). Мы рассматриваем лишь один класс представлений, соответствующий частицам с ненулевой действительной массой. Оказывается, что в пространстве состояний таких частиц диагонализуется наблюдаемая скорости или, что то же, импульса частицы. Частицы нулевой и мнимой массы могут быть изучены тем же самым методом.

1. Неприводимое представление группы Пуанкаре. Согласно результатам п. 3.1.2, чтобы построить неприводимое представление группы P с нормальным делителем T, нужно прежде всего задать некоторое неприводимое представление группы T и найти его малую группу. Все неприводимые представления группы сдвигов T одномерны и имеют вид $\Delta(a_T) = \exp[i(k, a)]$ с некоторым $k \in \mathscr{K}$ (4-вектором). Этот вектор действителен, поскольку мы интересуемся лишь унитарными представлениями. Далее преобразуем это представление с помощью элемента группы P как $\Delta \mapsto \Delta_p$, где $\Delta_p(a_T) = \Delta(p^{-1}a_T p)$. Ясно, что преобразование любым сдвигом не меняет представления, преобразование же элементом группы Лоренца $l \in L$ приводит к замене $k \mapsto lk$, так как $\Delta_l(a_T) = \Delta((l^{-1}a)_T) = \exp[i(lk, a)]$ (в последнем преобразовании использована инвариантность лоренцевской свертки).

Множество представлений группы T, определяемое как $\{\Delta_p \mid p \in P\}$, называется *орбитой представления* Δ. Нетрудно видеть, что разбиение множества всех неприводимых представлений группы T на орбиты соответствует разбиению векторного пространства $\mathscr{K}$ на области транзитивности относительно действия группы L. В п. 5.1.2 найдены все такие области транзитивности. Наиболее важен для приложений случай $\mathscr{C}^+_{m^2}$, $m^2 > 0$, когда

$$\mathscr{C}^+_{m^2} = \{k \in \mathscr{K} \mid (k, k) = m^2,\ k^0 > 0\}.$$

Это множество играет роль множества значений импульса частицы массы m (массовой поверхности). Записывая $k = mv$, легко свести массовую поверхность к гиперболоиду 4-скоростей

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}^+_1 = \{v \in \mathscr{K} \mid (v, v) = 1,\ v^0 > 0\}.$$

Процедура нахождения неприводимых представлений предполагает, что из каждой орбиты выбирается произвольным образом одно представление. Поэтому выберем на гиперболоиде $\mathscr{C}_1$ один вектор. Удобно выбрать вектор

$$e_0 = \{1, 0, 0, 0\}.$$

Тогда на массовой поверхности выделится вектор $k = me_0 = \{m, 0, 0, 0\}$. Ему соответствует представление группы T

$$\Delta_m\colon\ a_T \mapsto \exp[im(e_0, a)] = \exp(ia^0).$$

Преобразуя это представление различными элементами группы Пуанкаре, легко найти, что оно остается неизменным при действии элементов подгруппы $H = RT$ (стабилизатор точки $e_0 \in \mathscr{C}$, если $\mathscr{C}$ рассматривать как P-пространство). Следовательно, H — *малая группа* представления Δ_m.

Далее, согласно результатам п. 3.1.2, следует задать неприводимое представление малой ко-группы $R = H/T$. Как известно, неприводимое представление группы вращений R характеризуется весом $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ и действует в $(2j+1)$-мерном пространстве $\mathscr{L}_j$. Пусть $r \mapsto \Delta_j(r)$ является таким неприводимым представлением группы R. Тогда нужно построить представление Δ_{mj} группы H

$$\Delta_{mj}(a_T r) = \Delta_m(a_T)\,\Delta_j(r) = e^{im(e_0, a)}\Delta_j(r)$$

и реализовать неприводимое представление группы Пуанкаре как

$$U_{mj}(P) = \Delta_{mj}(H) \uparrow P.$$

Если представление U_{mj} описывает элементарную частицу, то параметры $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, и $j = 0, 1/2, 1, \ldots$ называются соответственно *массой* и *спином частицы*. Свободная частица полностью характеризуется этими параметрами. Мы рассмотрели лишь те представления, которые соответствуют орбитам $\mathscr{C}^+_m$ в импульсном пространстве, однако тем же методом находятся и представления, соответствующие остальным орбитам.

2. Наблюдаемая импульса. Мы получили представление U_{mj} группы Пуанкаре как одно из большого класса неприводимых представлений. Покажем теперь, что оно имеет смысл импульсного представления частицы ненулевой массы, т. е. что его система импримитивности является спектральной мерой на множестве значений импульса частицы.

В пп. 5.1.2 и 5.1.3 гиперболоид $\mathscr{C}$ и изоморфный ему гиперболоид $\mathscr{C}^+_{m^2}$ были введены формально как некоторые однородные пространства группы Лоренца или Пуанкаре. Однако очень легко придать им непосредственный физический смысл. Для этого достаточно вспомнить, что каждым двум точкам $x, x' \in \mathscr{X}$ пространства Минковского соответствует вектор $x' - x \in \mathscr{K}$ ассоциированного с ним линейного пространства $\mathscr{K}$. В частности, если $s \mapsto x(s)$ — траектория классической частицы в пространстве Минковского, параметризованная собственным временем, то ее 4-скорость $v = \frac{dx}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{x(s + \Delta s) - x(s)}{\Delta s}$ — вектор пространства $\mathscr{K}$. Вспоминая определение собственного времени $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, легко убеждаемся в том, что лоренцев квадрат

(v, v) вектора v равен единице. Наконец, принимая по определению, что собственное время возрастает при движении частицы из прошлого в будущее, получаем $v^0 > 0$. Следовательно, *4-скорость* v есть точка введенного ранее пространства $\mathscr{V}$. Далее, импульс (четырехмерный) классической частицы получается умножением 4-скорости на массу, поэтому $\mathscr{V}^+_{m^2}$ — пространство импульсов частицы *массы* m.

В п. 5.1.3 показано, что гиперболоид $\mathscr{V}$ можно реализовать как фактор-пространство P/H, причем изоморфизм между ними задается отображением $v \mapsto v_L H$. Поэтому индуцированное представление $U_{mj}(P) = \Delta_{mj}(H) \uparrow P$ можно реализовать в пространстве функций на $\mathscr{V}$. Для этого сначала реализуем его в пространстве функций на P со значениями в $\mathscr{L}_j$ и со структурным свойством

$$\varphi(pra_T) = \Delta_{mj}(a_T^{-1}r^{-1})\,\varphi(p).$$

Это свойство позволяет немедленно свести функцию на P к функции на $\mathscr{V}$, определенной условием $\varphi(v) = \varphi(v_L)$. Действительно, согласно структурному условию и пользуясь параметризацией группы P, выведенной в п. 5.1.3, получим

$$\varphi(p) = \varphi(v_L r a_T) = \Delta_j(r^{-1})\, e^{-im(e_0, a)}\varphi(v).$$

Действие индуцированного представления определяется в пространстве функций на P как левый сдвиг и немедленно может быть перенесено в пространство функций, определенных на $\mathscr{V}$. Удобно отдельно вывести формулы для сдвигов и преобразований Лоренца.

Имеем $U_{mj}(a_T)\varphi(v) = U_{mj}(a_T)\varphi(v_L) = \varphi(a_T^{-1}v_L)$. Напишем $a_T^{-1} = (-a)_T$ и преобразуем аргумент с помощью правила коммутации сдвигов и преобразований Лоренца. Получим $a_T^{-1}v_L = v_L(-v_L^{-1}a)_T$. Теперь можно использовать структурное условие и привести преобразованную функцию к виду $\exp[im(e_0, v_L^{-1}a)]\,\varphi(v)$. В силу инвариантности лоренцевой свертки показатель экспоненты можно преобразовать к виду $im(v_L e_0, a)$. По определению представителей, v_L, действуя на e_0, дает v. Поэтому получаем окончательно

$$U_{mj}(a_T)\varphi(v) = e^{im(v, a)}\varphi(v).$$

В показателе экспоненты стоит выражение $i(k, a)$, где $k = mv$ — импульс. Поэтому формула имеет знакомый вид преобразования волновой функции в импульсном представлении под действием сдвига. Обычно в качестве аргумента функции используют сам импульс $k = mv$ вместо 4-скорости. Мы, конечно, тоже могли бы с самого начала реализовывать представление функциями на *массовой поверхности* $\mathscr{V}^+_{m^2}$ (вспомним, что как однородное пространство она изоморфна гиперболоиду 4-скоростей $\mathscr{V}$). Однако удобнее пользоваться скоростями, так как тогда

более очевидно, что алгебраические конструкции по существу не зависят от массы. В частности, в наших обозначениях становится очевидным, что выбор представителей (бустов) v_L — один и тот же для массовых поверхностей, соответствующих разным массам.

Посмотрим теперь, как преобразуется функция φ под действием однородного преобразования Лоренца. Запишем $U_{mj}(l)\varphi(v) = \varphi(l^{-1}v_L)$. Далее преобразуем аргумент с помощью определения факторов: $l^{-1}v_L = (l^{-1}v)_L(l^{-1}, v)_R$. Наконец, используем структурное условие, чтобы получить

$$U_{mj}(l)\varphi(v) = \Delta_j\left((l^{-1}, v)_R^{-1}\right)\varphi(l^{-1}v).$$

Воспользовавшись тождеством $(l^{-1}, v)_R^{-1} = (l, l^{-1}v)_R$, можно привести эту формулу к виду

$$U_{mj}(l)\varphi(v) = \Delta_j\left((l, l^{-1}v)_R\right)\varphi(l^{-1}v).$$

Мы видим, что в преобразовании импульсного представления под действием преобразований Лоренца появляются факторы $(l, v)_R$, соответствующие факторизации $L/R = \mathscr{V}$. Они были введены именно в этой связи Вигнером и называются часто *вигнеровскими вращениями.*

3. Состояния с определенным импульсом и вероятностная интерпретация. Структура представления выявляется несколько лучше, если рассмотреть, как преобразуются состояния с определенным импульсом. Такие состояния являются, конечно, обобщенными (ненормируемыми). Вид их может быть получен по общему рецепту. Для этого достаточно найти элементарные проекторы, соответствующие системе импримитивности представления $\Delta_{mj} \uparrow P$. Но сначала нужно ввести инвариантную меру на гиперболоиде $\mathscr{V}$.

Инвариантная мера на гиперболоиде скоростей $\mathscr{V}$ имеет вид

$$dv = dv^1\,dv^2\,dv^3/v^0 = d^3v/v^0.$$

Чтобы показать это, достаточно воспользоваться инвариантной мерой $dk^0dk^1dk^2dk^3 = d^4k$ в пространстве $\mathscr{K}$ и интегрировать в нем функции с весом $\delta((k, k) - 1)$ (здесь $\delta(x)$ — обычная одномерная дельта-функция).

Теперь, имея инвариантную меру на однородном пространстве $\mathscr{V}$, мы можем окончательно определить пространство-носитель $\mathscr{H}_{mj}$ представления U_{mj}. Оно состоит из функций $\varphi : \mathscr{V} \to \mathscr{L}_j$, квадратично интегрируемых по мере dv, и скалярное произведение в нем определяется формулой

$$(\varphi, \varphi')_{mj} = \int dv\,\langle\varphi(v), \varphi'(v)\rangle_j,$$

где $\langle\,,\rangle_j$ — скалярное произведение в $\mathscr{L}_j$. Представление U_{mj} унитарно относительно произведения $(\,,)_{mj}$.

Пользуясь инвариантной мерой на $\mathscr{C}$, введем дельта-функцию на нем по формуле

$$\int_{\mathscr{C}} dv\, \delta(v, v')\, \varphi(v') = \varphi(v).$$

Пользуясь явным выражением для меры $dv = d^3v/v^0$, можно записать дельта-функцию в виде

$$\delta(v, v') = v^0 \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}'),$$

где $\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$ — дельта-функция относительно трехмерной меры Лебега:

$$\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = \delta(v^1 - v'^1)\,\delta(v^2 - v'^2)\,\delta(v^3 - v'^3).$$

Теперь элементарные проекторы определяются обычным образом по формуле

$$\Pi_u \varphi(v) = \delta(u, v)\, \varphi(u)$$

для любого $u \in \mathscr{C}$. Проектор, соответствующий произвольному подмножеству в $\mathscr{C}$, получается интегрированием:

$$\Pi(B) = \int_B du\, \Pi_u; \quad \Pi(B)\varphi = \eta_B \varphi$$

для любого $B \subset \mathscr{C}$. В явном виде последняя формула переписывается как

$$\Pi(B)\varphi(v) = \begin{cases} \varphi(v), & \text{если} \quad v \in B; \\ 0, & \text{если} \quad v \notin B. \end{cases}$$

Состояния с определенным импульсом mu, $u \in \mathscr{C}$, образуют подпространство обобщенных векторов в $\mathscr{H}_{mj}$, которое получается действием обобщенного проектора Π_u. Это подпространство состоит из функций вида

$$\varphi_u(v) = \delta(u, v) f, \quad \text{где} \quad f \in \mathscr{L}_j.$$

Посмотрим, как такое состояние преобразуется под действием представления. Подставляя его в формулы, найденные в предыдущем пункте, получим

$$U_{mj}(a_T)\varphi_u(v) = \{\exp[im(v, a)]\}\varphi_u(v).$$

Учитывая, что функция $\varphi_u(v)$ содержит множитель $\delta(u, v)$ и, следовательно, обращается в нуль, если $v \neq u$, мы можем в экспоненте заменить v на u и получим

$$U_{mj}(a_T)\varphi_u = e^{im(u, a)}\varphi_u.$$

Как и следовало ожидать, состояние с определенным импульсом под действием сдвига приобретает лишь дополнительную фазу, равную произведению этого импульса на вектор сдвига.

Аналогичным образом найдем преобразование состояния φ_u под действием преобразования Лоренца:

$$U_{mj}(l)\varphi_u = \Delta_j((l, u)_R)\varphi_{lu},$$

где мы воспользовались свойством инвариантности дельта-функции и обозначили $\varphi_{lu}(v) = \delta(lu, v) f$. Таким образом, при преобразовании Лоренца импульс меняется в соответствии с этим преобразованием, а спиновые индексы преобразуются в соответствии с представлением Δ_j вигнеровского вращения.

Положим в последней формуле $l = r \in R$. Учитывая, что $(r, u)_R = r$, запишем ее для этого случая в виде

$$U_{mj}(r)\varphi_u = \Delta_j(r)\varphi_{ru}.$$

Мы видим, что под действием пространственного вращения состояние с определенным импульсом преобразуется двояким образом: во-первых, вращению подвергается импульс, во-вторых, спиновый индекс преобразуется матрицей $\Delta_j(r)$. Говорят, что преобразование импульса $u \mapsto ru$ связано с *орбитальной* частью полного углового момента, а действие матрицы $\Delta_j(r)$ — со спиновой частью момента, или просто со *спином* (в нашем случае спин равен j).

Положим, в частности, $u = e_0 = \{1, 0, 0, 0\}$, т. е. рассмотрим *состояние покоя*. В этом случае импульс равен $me_0 = \{m, 0, 0, 0\}$ (энергия равна m, пространственная часть импульса нулевая). Учитывая, что вращение не меняет вектор e_0, получим формулу для преобразования состояния покоя под действием чистого пространственного вращения:

$$U_{mj}(r)\varphi_{e_0} = \Delta_j(r)\varphi_{e_0}.$$

Мы видим, что в этом случае остается лишь матричное преобразование — *орбитальный угловой момент в состоянии покоя равен нулю.*

Вероятностная интерпретация импульсного представления вводится, как всегда, с помощью скалярного произведения и спектральной меры. В произвольном состоянии $\varphi \in \mathscr{H}_{mj}$ вероятность того, что 4-скорость имеет значение в области $B \subset \mathscr{C}$ (или, что то же, импульс имеет значение в области mB), равна

$$\frac{(\varphi, \Pi(B)\varphi)_{mj}}{(\varphi, \varphi)_{mj}} = \frac{\int_B dv\, \langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle_j}{\int_{\mathscr{C}} dv\, \langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle_j}.$$

Поскольку представление $\Delta_{mj}(H)$ унитарно, т. е. скалярное произведение $\langle\,,\rangle_j$ в $\mathscr{L}_j$ положительно определено, форма $(\,,)_{mj}$ также оказывается положительно определенной, и вероятности — всегда неотрицательными. Если ввести в пространстве $\mathscr{L}_j$

канонический базис, векторы которого нумеруются проекцией момента, то скалярное произведение $\langle\, , \rangle_j$ в $\mathscr{L}_j$ принимает вид

$$\langle f, f'\rangle_j = f^+ f' = \sum_{j_3=-j}^{j} \bar{f}^{j_3} f'^{j_3}.$$

§ 5.4. Элементарная частица в координатном представлении

Оператор J_{mj}: $\mathscr{H}_{mj} \to \mathscr{H}_D$, переплетающий неприводимое представление с координатным, позволяет дать пространственно-временную интерпретацию реальных состояний частицы. При этом выясняются некоторые характерные черты пространства $\mathscr{H}_D$, связанные с интерпретацией его как пространства виртуальных состояний. Важнейшим является вывод о том, что эрмитова форма $(\psi, \psi')_D$, характерная для пространства $\mathscr{H}_D$, обращается в бесконечность на реальных состояниях одной частицы: $\psi, \psi' \in J_{mj}\mathscr{H}_{mj}$. Смысл имеет лишь произведение $(\psi, \psi_{mj})_D$ или $(\psi_{mj}, \psi)_D$, где ψ_{mj} — реальное, а ψ — виртуальное состояния частицы. Эти формы интерпретируются как амплитуды вероятности перехода из реального состояния в виртуальное или обратно.

В конце параграфа выводится выражение для скалярного произведения двух реальных состояний частиц, заданных своими координатными представлениями.

1. Переход от импульсного представления к координатному. Мы построили только что гильбертово пространство $\mathscr{H}_{mj}$, в котором действует неприводимое представление группы Пуанкаре, и по смыслу понятия элементарной частицы это пространство должно служить пространством состояний частицы массы m и спина j. Еще раньше было построено другое гильбертово пространство $\mathscr{H}_D$, которое допускает пространственно-временную интерпретацию. Остается связать эти два подхода, т. е. установить некоторое соответствие между пространствами $\mathscr{H}_{mj}$ и $\mathscr{H}_D$. Соответствие это, конечно, должно быть таким, чтобы сохранялось действие группы Пуанкаре.

Переводя на более точный язык только что сформулированную программу, можно сказать, что требуется найти линейное отображение J_{mj}: $\mathscr{H}_{mj} \to \mathscr{H}_D$, переплетающее представления U_{mj} и U_D, т. е. $J_{mj} \in [U_{mj}, U_D]$. Поскольку оба представления реализованы как индуцированные, задача сводится к переплетению двух индуцированных представлений:

$$J_{mj} \in [\Delta_{mj}(H) \uparrow P,\ D(L) \uparrow P]$$

и может быть решена при помощи теоремы о переплетении индуцированных представлений (п. 2.3.3). В этой теореме приводится общий вид оператора, переплетающего два индуцированных представления.

Окончательное выражение для оператора переплетения было получено в п. 2.3.4 после дополнительного исследования общей формулы теоремы (п. 2.3.3). Однако из-за наглядности этой общей формулы имеет смысл в нашем теперешнем случае опять начать с нее. Оператор J_{mj}: $\mathscr{H}_{mj} \to \mathscr{H}_D$ имеет вид

$$\psi(p) = (J_{mj}\varphi)(p) = \int_P dp'\, t(p')\, \varphi(pp'),$$

где при каждом $p' \in P$ величина $t(p')$ есть оператор из $\mathscr{L}_j$ в $\mathscr{L}_D$, причем функция $p' \mapsto t(p')$ удовлетворяет условию

$$t(l \cdot p' \cdot ra_T) = D(l)\, t(p')\, \Delta_{mj}(ra_T).$$

Это условие, во-первых, приводит к тому, что функция ψ обладает структурным свойством $\psi(pl) = D(l^{-1})\psi(p)$, как и полагается функции, представляющей вектор пространства $\mathscr{H}_D$. Во-вторых, это условие вместе со структурным условием для функции $\varphi \in \mathscr{H}_{mj}$ приводит к тому, что подынтегральное выражение постоянно на классах смежности $p'H$. Поэтому интегрирование по группе P можно заменить интегрированием по однородному пространству P/H, которое совпадает с гиперболоидом $\mathscr{C}$. Получаем

$$\psi(p) = \int_{\mathscr{C}} dv\, t(v_L)\, \varphi(pv_L).$$

Заметим, что на самом деле лишь эта форма интеграла имеет определенный смысл, тогда как в первоначальной форме интеграл расходится (см. замечание 1 в п. 2.3.3). Однако удобно все же начинать с первой, более наглядной, формы.

Далее, пользуясь структурным условием для функции t, записываем $t(v_L) = t(v_L \cdot 1) = D(v_L)\, t(1)$ и, вводя обозначение $t(1) = \frac{m}{4\pi^{3/2}} J_j$, приводим интеграл к виду

$$\psi(p) = \frac{m}{4\pi^{3/2}} \int dv\, D(v_L)\, J_j \varphi(pv_L).$$

В силу структурного условия на функцию ψ достаточно знать ее в точках $x_T \in T$. Полагая $p = x_T$, коммутируя сдвиг и преобразование Лоренца в аргументе функции φ и используя структурное условие на φ, получим

$$\psi(x) = (J_{mj}\varphi)(x) = \frac{m}{4\pi^{3/2}} \int dv\, e^{-im(v,\, x)} D(v_L)\, J_j\, \varphi(v).$$

Коэффициент перед интегралом введен для удобства (см. пункт 2).

Согласно результатам п. 2.3.4, появившийся здесь оператор $J_j \sim t(1)$ принадлежит пространству переплетения $[\Delta_{mj}{\downarrow}R, D{\downarrow}R]$.

Это ограничение является следствием структурного условия, налагаемого на функцию $p \longrightarrow t(p)$, и легко выводится из него с помощью следующей выкладки:

$$t(1)\Delta_j(r) = t(1)\Delta_{mj}(r) = t(1\cdot r) = t(r\cdot 1) = D(r)\,t(1).$$

Следовательно, оператор J_j существует, если разложение представления $D(L)\downarrow R$ на неприводимые содержит $\Delta_j(R)$, и количество линейно независимых операторов J_j равно кратности Δ_j в этом разложении. Если представление $D(L)$ — конечномерное неприводимое, то, как известно, разложение $D(L)\downarrow R$ на неприводимые имеет вид (см. замечание в п. 3.3.4)

$$D\downarrow R = \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} \Delta_j(R),$$

где суммирование ведется через единичный шаг от некоторого минимального до некоторого максимального значения, и каждое представление входит в сумму с кратностью единица. В этом случае, следовательно, J_j существует и является единственным при условии, что спин j, характеризующий представление U_{mj} (частицу), входит в множество $\{j_{\min}, \ldots, j_{\max}\}$, или, короче, $j \in D$. В некоторых случаях представление D равно сумме двух неприводимых сопряженных по отношению друг к другу представлений. В этом случае оператор J_j может быть выбран двумя способами.

Чтобы сделать формулу, связывающую координатное и импульсное представления, несколько более наглядной, введем в пространстве $\mathscr{L}_D$ представления D базис, соответствующий разложению $D\downarrow R$ на неприводимые. Если D — конечномерное неприводимое представление, то базисные векторы однозначно нумеруются моментом $j' \in \{j_{\min}, \ldots, j_{\max}\}$ и его проекцией $j'_3 \in \{-j', -j'+1, \ldots, j'\}$. В этом случае получаем для оператора J_j представление в виде прямоугольной матрицы

$$(J_j)^{j'j'_3}{}_{j_3} = \delta^{j'}_{j}\,\delta^{j'_3}_{j_3},$$

так что формула для перехода от импульсного представления к координатному принимает вид

$$\psi^{j'j'_3}(x) = \frac{m}{4\pi^{3/2}}\int dv\, e^{-im(v,\,x)} \sum_{-j\leqslant j_3\leqslant j} D^{j'j'_3}{}_{jj_3}(v_L)\,\varphi^{j_3}(v).$$

Выведенное выражение для функции $\psi \in J_{mj}\mathscr{H}_{mj}$ позволяет легко убедиться, что эта функция удовлетворяет *уравнению Клейна — Гордона*

$$(\Box + m^2)\,\psi(x) = 0,$$

где через $\Box$ обозначен *даламбертиан*

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} = \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}.$$

Это важное обстоятельство мы подробнее рассмотрим в дальнейшем в связи с изучением пропагатора (функции распространения) частицы.

2. Пространственно-временная интерпретация частицы. Пространство состояний частицы было построено первоначально в импульсном представлении. Теперь мы нашли способ отобразить его в другое пространство, в котором действует координатное представление. В силу обобщенной леммы Шура отображение J_{mj} имеет нулевое ядро, т. е. является вложением (см. задачу 5 в § 2.1). Таким образом, в пространстве $\mathscr{H}_D$ выделяется подпространство $J_{mj}\mathscr{H}_{mj}$, которое эквивалентно пространству $\mathscr{H}_{mj}$. Пространство $J_{mj}\mathscr{H}_{mj}$ можно считать пространством реальных (наблюдаемых) состояний элементарной частицы с тем же основанием, что и пространство $\mathscr{H}_{mj}$. Это просто другая реализация пространства состояний, и реализация эта отличается тем, что обеспечивает пространственно-временную интерпретацию теории.

Пространственно-временная интерпретация состояний частицы, заданных в координатном представлении, $\psi_{mj} = J_{mj}\varphi$, $\varphi \in \mathscr{H}_{mj}$, производится с помощью элементарных проекторов Π_x, $x \in \mathscr{X}$, и скалярного произведения $(\,,\,)_D$. Однако такую интерпретацию нельзя, очевидно, провести, не выходя за пределы самого физического подпространства $J_{mj}\mathscr{H}_{mj} \subset \mathscr{H}_D$. Действительно, нетрудно показать, что любой проектор $\Pi(B)$, $B \subset \mathscr{X}$, выводит из физического подпространства $J_{mj}\mathscr{H}_{mj}$ (за исключением, конечно, тривиальных проекторов $\Pi(\varnothing) = 0$, $\Pi(\mathscr{X}) = \mathbb{1}$), а скалярное произведение $(\psi_{mj}, \psi'_{mj})_D$ обращается в бесконечность, если оба вектора ψ_{mj}, ψ'_{mj} принадлежат подпространству $J_{mj}\mathscr{H}_{mj}$. Зато определены формы $(\psi, \psi_{mj})_D$, $(\psi_{mj}, \psi)_D$, где $\psi_{mj} \in J_{mj}\mathscr{H}_{mj}$, а ψ — нормируемый вектор пространства $\mathscr{H}_D$, т. е. такой, для которого $(\psi, \psi)_D$ — конечное число.

Постулируем, что форма $(\psi, \psi_{mj})_D$, где $\psi \in \mathscr{H}_D$, $\psi_{mj} \in J_{mj}\mathscr{H}_{mj}$, представляет собой *амплитуду вероятности* того, что частица, находящаяся в состоянии ψ_{mj}, окажется в виртуальном состоянии ψ. В частности, если $\psi_x = \delta_x F$ — состояние, локализованное в точке, то $(\psi_x, \psi_{mj})_D = \langle F, \psi_{mj}(x)\rangle_D = \bar{F}\psi_{mj}(x)$ — амплитуда вероятности того, что частица в состоянии ψ_{mj} локализуется в точке x пространства-времени и при этом будет иметь спиновое состояние $F \in \mathscr{L}_D$. Именно такие амплитуды нужны для вычисления вероятностей процессов, идущих за счет локальных взаимодействий. Аналогично (ψ_{mj}, ψ) — амплитуда вероятности того, что частица, находящаяся в виртуальном состоянии $\psi \in \mathscr{H}_D$, перейдет в реальное состояние $\psi_{mj} \in J_{mj}\mathscr{H}_{mj}$.

И все же естественно возникает вопрос, как связаны между собой скалярные произведения $(\,,)_D$ и $(\,,)_{mj}$ во всем пространстве $\mathscr{H}_D$ и в подпространстве $J_{mj}\mathscr{H}_{mj}$ реальных (макроскопически наблюдаемых) состояний. Для того чтобы ответить на этот вопрос, найдем $(\psi_{mj}, \psi'_{m'j'})_D$, где ψ_{mj}, $\psi'_{m'j'}$ — реальные состояния, соответствующие, вообще говоря, различным значениям массы и спина. Пользуясь разложением дельта-функции в интеграл Фурье и заменой $k = mv$, при которой $2d^4k = m^2dm^2dv$, получим

$$(\psi_{mj}, \psi'_{m'j'})_D = 2\pi\delta(m^2 - m'^2) \int dv \left\langle J_j\varphi_{mj}(v),\ J_{j'}\varphi'_{m'j'}(v)\right\rangle_D.$$

Остается исследовать оставшийся интеграл. Для этого уточним выбор оператора $J_j \in [\Delta_j, D(L)\downarrow R]$.

Скалярное произведение $\langle\,,\rangle_D$, инвариантное относительно конечномерного представления $D(l)$, $l \in L$, не является знакоопределенным, но может быть выражено через положительно определенное произведение $\langle\,,\rangle'_D$ в виде

$$\langle F, F'\rangle_D = \langle F, \Gamma F'\rangle'_D = \langle \Gamma F, F'\rangle'_D,$$

где оператор Γ: $\mathscr{L}_D \to \mathscr{L}_D$ удовлетворяет соотношению $\Gamma^2 = 1$, т. е. имеет собственные значения ± 1. Оператор Γ не коммутирует с представлением $D(L)$ (иначе оно было бы эквивалентно унитарному), но коммутирует с его ограничением $D(L)\downarrow R$. Пространство $\mathscr{L}_D$, таким образом, разлагается в сумму подпространств $\mathscr{L}_D = \mathscr{L}_D^+ + \mathscr{L}_D^-$, ортогональных относительно формы $\langle\,,\rangle_D$ и таких, что сужение этой формы на подпространства $\mathscr{L}_D^\pm$ дает соответственно положительно- и отрицательноопределенные формы. Каждое из подпространств $\mathscr{L}_D^\pm$ инвариантно относительно представления $D(L)\downarrow R$.

Оператор J_j переводит все пространство $\mathscr{L}_j$ в одно из подпространств $\mathscr{L}_D^\pm$, и всегда можно умножением его на число (нормировкой) добиться того, чтобы $\langle J_jf, J_jf'\rangle_D = \varepsilon_j\langle f, f'\rangle_j$, $\varepsilon_j = \pm 1$. Операторы J_j, $J_{j'}$, $j' \neq j$, отображают пространства $\mathscr{L}_j$, $\mathscr{L}_{j'}$ на ортогональные подпространства, поэтому получаем

$$\langle J_jf, J_{j'}f'\rangle_D = \varepsilon_j\delta_{jj'}\langle f, f'\rangle_j.$$

Мы всегда будем предполагать, что *выбор операторов J_j согласован с этим условием.* Если представление $D(L)\downarrow R$ содержит некоторые Δ_j более одного раза, то для перечисления соответствующих неприводимых компонент требуется еще один индекс α, так что операторы, осуществляющие вложение, нумеруются как $J_{\alpha j}$, и имеет место условие

$$\langle J_{\alpha j}f, J_{\alpha' j'}f'\rangle_D = \varepsilon_j\delta_{jj'}\delta_{\alpha\alpha'}\langle f, f'\rangle_j.$$

В случае, если представление D неприводимо, $D = D^{pq}$, каждый спин j входит в D не более одного раза, так что дополнительного индекса α не требуется. Однако если $p \neq q$, то для самосопряженности D требуется использовать две неприводимые компоненты: $D = D^{pq} + D^{qp}$, и каждый спин j либо не содержится в D, либо содержится в нем дважды. Индекс α в этом случае принимает два значения. В случае формализма Кеммера — Дэффина возникает еще более сложная ситуация. Мы, однако, будем использовать, как правило, лишь один индекс j. При необходимости можно совпадение j и j' понимать как совпадение не только численных значений спинов, но и соответствующих неприводимых компонент в представлении $D(L)\downarrow R$.

Учитывая сказанное, можно переписать выражение для $(\psi_{mj}, \psi'_{m'j'})_D$ в виде

$$(\psi_{mj}, \psi'_{m'j'})_D = 2\pi\delta(m^2 - m'^2)\,\varepsilon_j\delta_{jj'}(\varphi_{mj}, \varphi'_{m'j'})_{mj}.$$

Таким образом, векторы в $\mathscr{H}_D$, описывающие наблюдаемые состояния частиц различных масс, относительно формы $(\,,)_D$ нормированы на дельта-функцию $\delta(m^2 - m'^2)$. Это является выражением того факта, что подпространства $J_{mj}\mathscr{H}_{mj}$ являются подпространствами обобщенных векторов. В частности, из этой формулы следует, что при совпадении масс и спинов скалярное произведение обращается в бесконечность.

Рассматривая формально суперпозицию $\psi = 2\pi \sum\limits_j \int dm^2\psi_{mj}$ реальных состояний различных масс, находим скалярное произведение таких суперпозиций в виде

$$(\psi, \psi')_D = 2\pi \sum_{j \in D} \varepsilon_j \int dm^2 (\varphi_{mj}, \varphi'_{mj})_{mj}.$$

Таким образом, мы видим, что пространство $\mathscr{H}_D$ разлагается в *прямой интеграл гильбертовых пространств* $\mathscr{H}_{mj}$. Однако полное разложение включает еще компоненты, соответствующие нулевой и мнимым массам. Эти компоненты также могут быть найдены методом индуцированных представлений.

Отметим важное обстоятельство, состоящее в том, что векторы пространства $\mathscr{H}_D$ могут описывать частицу любой массы $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, и даже спин лишь отчасти фиксируется условием $j \in D$. Это, впрочем, не удивительно, если принять во внимание, что пространство $\mathscr{H}_D$ порождается множеством состояний ψ_x, $x \in \mathscr{X}$, локализованных в точке. Такое состояние не может характеризоваться массой, так как измерение массы частицы предполагает наблюдение ее в течение бесконечно длинного интервала времени. Квантовые числа, характеризующие частицу в локализованном состоянии ψ_x, определяются подгруппой преобразований, не нарушающих локализацию, т. е. оставляющих на месте точку x. Легко видеть, что такие преобразования образуют подгруппу $x_T L x_T^{-1}$, изоморфную группе Лоренца. Именно поэтому тип частицы, находящейся в локализованном состоянии, полностью определяется заданием представления D группы Лоренца, а состояние фиксируется заданием вектора $F \in \mathscr{L}_D$. Это находит свое отражение в том, что волновая функция локализованного состояния имеет вид $\psi_x = \delta_x F$.

3. Скалярное произведение реальных состояний в координатном представлении. Мы выяснили, что четырехмерный интеграл, входящий в определение формы $(\psi, \psi')_D$, равен бесконечности, если $\psi, \psi' \in J_{mj}\mathscr{H}_{mj}$ — реальные состояния. Это связано со свойством стабильности частицы, которое приводит к тому, что волновые функции ψ, ψ' не убывают при $x^0 \to \pm\infty$. Интуитивно ясно, что скалярное произведение реальных состояний должно в координатном представлении выражаться некоторым интегралом по трехмерной пространственноподобной поверхности. И действительно, скалярное произведение $(\varphi, \varphi')_{mj}$ можно выразить через волновые функции $\psi = J_{mj}\varphi$, $\psi' = J_{mj}\varphi'$ интегралом

$$(\varphi, \varphi')_{mj} = \varepsilon_j \int\limits_{\Sigma} d\sigma^\mu \left(\left\langle \psi(x),\, i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi'(x)\right\rangle_D + \left\langle i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi(x),\, \psi'(x)\right\rangle_D\right) =$$

$$= i\varepsilon_j \int\limits_{\Sigma} d\sigma^\mu\, \bar\psi(x) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x^\mu}\psi'(x).$$

Здесь интегрирование ведется по любой пространственноподобной гиперповерхности Σ по мере

$$d\sigma^\mu = {}^1/_6 \eta^{\mu\nu}\varepsilon_{\nu\varkappa\lambda\sigma}\, dx^\varkappa \wedge dx^\lambda \wedge dx^\sigma,$$

а двойной стрелкой над производной обозначена операция симметризации дифференцирования:

$$\bar\psi(x)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x^\mu}\psi'(x) = \bar\psi(x)\frac{\partial\psi'(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\bar\psi(x)}{\partial x^\mu}\psi'(x).$$

Чтобы доказать эту формулу, достаточно проверить, что она имеет место на некоторой одной гиперповерхности Σ и что интеграл справа не зависит от выбора гиперповерхности. Справедливость формулы на гиперповерхности $x^0 = 0$ (когда интеграл превращается в трехмерный интеграл по $d^3x = dx^1dx^2dx^3$) показывается непосредственной проверкой, если вместо ψ, ψ' подставить их выражения через φ, φ'. Независимость интеграла от гиперповерхности (при дополнительном условии, что функции ψ, ψ' достаточно быстро убывают в пространственноподобных направлениях) будет доказана, если удастся доказать, что интеграл от того же выражения по любой замкнутой трехмерной поверхности в $\mathscr{X}$ обращается в нуль.

Пусть замкнутая поверхность является границей четырехмерной области Ω. Обозначим ее $\partial\Omega$. Тогда по теореме Гаусса — Остроградского

$$\int\limits_{\partial\Omega} d\sigma^\mu\, \Phi_\mu(x) = \int\limits_{\Omega} dx\, \frac{\partial\Phi^\mu(x)}{\partial x^\mu}.$$

Но в нашем случае

$$\eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\bar\psi\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x^\nu}\psi'\right) = \bar\psi(\Box\psi') - (\Box\bar\psi)\psi' =$$

$$= \bar\psi(\Box + m^2)\psi' - ((\Box + m^2)\bar\psi)\psi' = 0,$$

так как обе функции ψ, ψ' удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона. Тем самым формула для скалярного произведения доказана.

Мы видим, что скалярное произведение представляет собой поток через произвольную пространственноподобную гиперповерхность некоторого векторного поля, именно,

$$j_\mu(x) = \left\langle \psi,\, i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi'\right\rangle_D + \left\langle i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi,\, \psi'\right\rangle_D.$$

Поток этот не зависит от выбора поверхности в силу уравнения

$$\partial j^\mu(x)/\partial x^\mu = 0,$$

которому удовлетворяет это поле и которое представляет собой четырехмерную форму записи *уравнения непрерывности.*

Временная компонента этого вектора $j^0(x) = \rho(x)$ имеет смысл плотности вероятности нахождения частицы в данной точке в данный момент времени, а пространственная часть $\boldsymbol{j}(x)$ — плотности потока через элемент площади двумерной поверхности. Условие сохранения вероятности в этих трехмерных обозначениях принимает форму обычного *уравнения непрерывности*

$$\partial\rho/\partial x^0 + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0.$$

Заметим, что интеграл $\int\limits_{\Sigma} d\sigma_\mu j^\mu(x)$ знакоопределен лишь постольку, поскольку предполагается, что функция $\psi(x)$ принадлежит физическому подпространству: $\psi \in J_{mj}\mathscr{H}_{mj}$. В противном случае эта форма не является знакоопределенной, что приводит к известным трудностям при вероятностной интерпретации уравнения Клейна — Гордона (см., например, [47]). Для знакоопределенности существен не только тот факт, что функция $\psi \in J_{mj}\mathscr{H}_{mj}$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона, но в равной мере и то, что при разложении в интеграл Фурье она содержит лишь положительные частоты (т. е. зависимость от времени входит лишь через экспоненты $\exp(-i\omega x^0)$, $\omega > 0$), и то, что зависимость от спиновых индексов до некоторой степени регламентирована условием $\psi \in J_{mj}\mathscr{H}_{mj}$. Впоследствии мы увидим, что эта регламентация эквивалентна наложению на функцию ψ дополнительного условия (кроме уравнения Клейна — Гордона), выделяющего определенный спин.

Смысл *тока* $j_\mu(x)$ выясняется с несколько иной точки зрения, если заметить, что входящие в выражение для него производные волновой функции $i\partial\psi/\partial x^\mu$ получаются применением оператора J_{mj} к функции $v \mapsto v_\mu \varphi(v)$, т. е. к волновой функции частицы в импульсном представлении, на которую подействовал оператор компоненты 4-скорости или, что то же, компоненты импульса. Таким образом, вектор тока, характеризующий распределение вероятности частицы в пространстве-времени, связан с вектором 4-скорости частицы.

Глава 6

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

В этой главе теория взаимодействующих релятивистских частиц будет сформулирована в терминах амплитуд перехода и виртуальных состояний (см. § 4.3). Это позволяет обойтись без понятия квантованного поля. Поэтому получающуюся теорию естественно назвать *квантовой теорией частиц*, имея в виду ее отличие от традиционной *квантовой теории полей*.

Суть предлагаемой квантовой теории частиц состоит в постулате о том, что произвольный реальный процесс с элементарными частицами происходит только посредством серии элементарных актов, каждый из которых принадлежит к одному из следующих типов: 1) *локализация* реального состояния, т. е. переход его в состояние, локализованное в точке пространства-времени, и обратный процесс перехода локализованного состояния в реальное (*материализация*); 2) *локальное взаимодействие*, т. е. переход нескольких частиц, локализованных в данной точке пространства-времени, в несколько (вообще говоря, других) частиц, локализованных в той же точке; 3) *причинное распространение*, т. е. переход состояния, локализованного в одной точке, в состояние, локализованное в другой точке пространства-времени.

Амплитуды вероятности таких элементарных актов практически однозначно находятся с помощью метода индуцированных представлений из требования инвариантности относительно группы Пуанкаре. Амплитуды переходов реального состояния в локализованное и обратно являются инвариантными эрмитовыми формами с аргументами, лежащими в пространствах $\mathscr{H}_{mj}$ и $\mathscr{H}_D$. Такие формы однозначно определяются переплетением $J_{mj} \in [U_{mj}, U_D]$ и были найдены в предыдущей главе (п. 5.4.2).

Для построения причинного пропагатора принимается *концепция Штюкельберга — Фейнмана*, согласно которой частица и античастица отличаются знаками массы и распространяются соответственно в будущее и в прошлое. Кроме того, делается естественное предположение, что одно локализованное состояние может перейти в другое только через промежуточное состояние, являющееся реальным состоянием той же частицы (вектор из $\mathscr{H}_{mj}$). Тогда вычисление этой амплитуды сводится к нахождению проектора $\Pi_{mj} = J_{mj}K_{mj}$, $K_{mj} \in [U_D, U_{mj}]$.

Локальное взаимодействие ограничивается лишь требованием лоренц-инвариантности и задается как матрица Клебша — Гордана, выделяющая тривиальную компоненту из произведения нескольких представлений группы Лоренца. Задание этой матрицы фиксирует локальное взаимодействие частиц точно так же, как в квантовой теории поля взаимодействие полей фиксируется лагранжианом взаимодействия.

Каждый реальный процесс может происходить посредством различных последовательностей элементарных актов. Все такие альтернативы перечисляются с помощью *диаграмм Фейнмана*, и каждой из них сопоставляется амплитуда вероятности. Правило сложения амплитуд вероятности позволяет тогда найти полную амплитуду реального процесса. Окончательный рецепт совпадает с рецептом вычисления S-матрицы в квантовой теории полей по теории возмущений.

Таким образом, квантовая теория частиц представляет собой последовательную физическую интерпретацию каждой диаграммы Фейнмана в терминах амплитуд переходов виртуальных состояний. В традиционной квантовой теории полей диаграммы возникают в результате формальной математической процедуры разложения по малому параметру. В оригинальных работах Фейнмана диаграммы интерпретировались физически, однако эта интерпретация была основана на аналогии с нерелятивистской теорией и не была последовательной. Ключом к последовательной интерпретации оказалось координатное представление Штюкельберга (§ 5.2) и понятие виртуальных локализованных состояний.

Интерпретация причинного пропагатора не как амплитуды перехода, а как нормировочного оператора в духе п. 4.3.1 позволяет сделать вывод, что он является функцией Грина некоторого дифференциального уравнения (в квантовой теории полей это волновое уравнение или уравнение поля). Если же полную амплитуду перехода локализованных состояний (сумму диаграмм Фейнмана) интерпретировать как нормировочный оператор, то можно перейти к локальной формулировке всей теории.

§ 6.1. Амплитуда распространения частицы

В процессе локальных взаимодействий частиц могут рождаться и поглощаться состояния, локализованные в точке: $\psi_x = \delta_x F$ (виртуальные состояния). Эти состояния содержат компоненты, соответствующие всевозможным массам и спинам. Если бы после рождения локализованного состояния все эти компоненты играли существенную роль (были физическими), то амплитуда перехода одного локализованного состояния в другое определялась бы скалярным произведением $(\psi_x, \psi_{x'})_D = \delta(x-x')\langle F, F'\rangle_D$ и переход частицы из одной точки в другую был бы невозможен.

Однако естественно постулировать, что при расчете перехода частицы из точки в точку нужно учитывать только ту компоненту локализованного состояния, которая соответствует массе и спину данной частицы. Другими словами, переход из состояния $\psi_{x'}$ в состояние ψ_x совершается только через промежуточные состояния из подпространства $J_{mj}\mathscr{H}_{mj} \subset \mathscr{H}_D$. Это приводит к тому, что переход между различными точками становится возможным. Амплитуда вероятности такого перехода $(\psi_x, \Pi_{mj}\psi_{x'})_D$ определяется проектором Π_{mj} на подпространство $J_{mj}\mathscr{H}_{mj}$ и может быть найдена методом индуцированных представлений.

1. Переход от координатного представления к импульсному. Для дальнейшего анализа координатного и импульсного представлений нам понадобится оператор переплетения

$$K_{mj} \in [U_D, U_{mj}] = [D(L)\uparrow P, \Delta_{mj}(H)\uparrow P],$$

т. е. линейное отображение $K_{mj}\colon \mathscr{H}_D \to \mathscr{H}_{mj}$, коммутирующее с представлениями в соответствующих пространствах. Если оператор $J_{mj}\colon \mathscr{H}_{mj} \to \mathscr{H}_D$ имел смысл вложения пространства реальных состояний частицы в более широкое пространство локализованных состояний, то оператор K_{mj}, напротив, проектирует локализованные состояния на подпространство состояний частицы.

Оператор K_{mj} легко находится с помощью теоремы о переплетении индуцированных представлений совершенно аналогично тому, как в п. 5.4.1 был найден оператор J_{mj}. Для этого запишем оператор $K_{mj}\colon \mathscr{H}_D \to \mathscr{H}_{mj}$ в виде

$$\varphi(p) = (K_{mj}\psi)(p) = \int_P dp'\, t(p')\, \psi(pp'),$$

где операторнозначная функция $p \mapsto t(p)$, $t(p)\colon \mathscr{L}_D \to \mathscr{L}_j$, удовлетворяет условию

$$t(ra_T \cdot p \cdot l) = \Delta_{mj}(ra_T)\, t(p)\, D(l).$$

В силу этого условия и структурного условия на функцию ψ подынтегральное выражение постоянно на классах $p'L$, так что интеграл по группе P сводится к интегралу по фактор-пространству $P/L = \mathscr{X}$ (пространство Минковского):

$$\varphi(p) = \int_{\mathscr{X}} dx\, t(x_T)\, \psi(px_T).$$

Наконец, еще раз пользуясь условием на функцию t, получаем $t(x_T) = t(x_T \cdot 1) = \Delta_{mj}(x_T)\, t(1)$. Вводя обозначение $t(1) = \frac{m}{4\pi^{3/2}} K_j$, приведем формулу к виду

$$\varphi(p) = \frac{m}{4\pi^{3/2}} \int_{\mathscr{X}} dx\, \Delta_{mj}(x_T)\, K_j \psi(px_T).$$

Пользуясь результатами п. 2.3.4, нетрудно показать, что в силу условия на функцию t оператор K_j принадлежит пространству переплетения $[D(L)\downarrow R,\ \Delta_{mj}(H)\downarrow R]$. Но $\Delta_{mj}(H)\downarrow R = \Delta_j(R)$, так что для K_j получаем условие

$$K_j \in [D(L)\downarrow R,\ \Delta_j(R)].$$

Относительно оператора K_j можно почти дословно повторить все, что говорилось об операторе J_j. Существование такого оператора зависит от того, содержится ли представление Δ_j в разложении $D\downarrow R$ на неприводимые, а число линейно независимых операторов, которые можно выбрать в качестве K_j, равно кратности Δ_j в $D\downarrow R$. В частности, если D — конечномерное неприводимое, то оно характеризуется набором моментов $\{j_{\min}, j_{\min}+1, \ldots, j_{\max}\}$. Если спин j принадлежит этому набору, то существует единственный оператор $K_j \in [D\downarrow R,\ \Delta_j]$ и вместе с тем единственный оператор $K_{mj} \in [U_D, U_{mj}]$. В случае, когда D есть сумма двух сопряженных по отношению друг к другу неприводимых представлений, для K_j имеется два независимых выбора.

Преобразуем несколько формулу для K_{mj}. Для импульсного представления мы полагаем $\varphi(v) = \varphi(v_L)$, так что нас будет интересовать случай $p = v_L$. Используем формулу для представления Δ_{mj}, чтобы получить $\Delta_{mj}(x_T) = \exp[im(e_0, x)]$, и преобразуем аргумент функции ψ под интегралом, переставляя сдвиг и преобразование Лоренца. Получается $v_L x_T = (v_L x)_T v_L$ и, используя структурное условие для функции ψ, приводим ее к виду $\psi(v_L x_T) = D(v_L^{-1})\,\psi(v_L x)$. Теперь остается еще, воспользовавшись инвариантностью меры dx, заменить переменную интегрирования x на $v_L^{-1}x$, и окончательно получаем

$$\varphi(v) = (K_{mj}\psi)(v) = \frac{m}{4\pi^{3/2}} \int_{\mathscr{X}} dx\, e^{im(v,\, x)} K_j D(v_L^{-1})\,\psi(x).$$

Вместе с определением оператора J_{mj}:

$$\psi(x) = (J_{mj}\varphi)(x) = \frac{m}{4\pi^{3/2}} \int_{\mathscr{C}} dv\, e^{-im(v,\, x)} D(v_L)\, J_j \varphi(v),$$

эта формула представляет собой основу анализа, который будет проведен в настоящем параграфе.

Заметим, что с математической точки зрения эти две формулы представляют собой (с некоторыми оговорками) прямое и обратное *преобразования Фурье* функции, импульсное представление которой сосредоточено на массовой поверхности $\mathscr{C}^+_{m^2}$. Но дополнительные осложнения вносят спиновые индексы, имеющие в импульсном и координатном представлениях совершенно различную структуру. Техника индуцирования позволила построить эти формулы совершенно автоматически, исходя из единственного требования сохранения действия группы Пуанкаре в соответствующих пространствах.

В формулах для операторов J_{mj} и K_{mj} фигурируют операторы $J_j \in [\Delta_j,\ D\downarrow R]$ и $K_j \in [D\downarrow R,\ \Delta_j]$. Ясно, что их композиция $K_j J_j$ есть оператор из коммутанта $[\Delta_j(R)]$. Ввиду неприводимости Δ_j этот коммутант содержит лишь операторы, кратные единичному. В случае, если представление D приводимо, может, вообще говоря, оказаться, что $K_j J_j = 0$. Однако это означало бы лишь, что операторы J_j и K_j не соответствуют друг другу. Для их согласованности мы потребуем, чтобы подпространства $\operatorname{Im} J_j = J_j \mathscr{L}_j$ и $\operatorname{Ker} K_j$ имели единственный общий вектор — нулевой, и будем считать при этом, что операторы J_j и K_j *соответствуют друг другу*. В этом случае оператор $K_j J_j$ не равен нулю. Умножением на число одного из операторов J_j, K_j всегда можно добиться, чтобы имело место

$$K_j J_j = \mathbb{1}.$$

Тогда оператор

$$\Pi_j = J_j K_j,$$

действующий в $\mathscr{L}_D$, является проектором *). Он проектирует на подпространство, в котором действует неприводимая компонента Δ^j представления $D\downarrow R$. В п. 5.4.1 был описан базис в $\mathscr{L}_D$, соответствующий разложению $D\downarrow R$ на неприводимые. В этом базисе операторы J_j, K_j и Π_j, подчиненные сформулированным условиям, имеют вид

$$(J_j)^{j'j'_3}{}_{j_3} = \delta^{j'}_{j}\,\delta^{j'_3}_{j_3}, \qquad (K_j)^{j_3}{}_{j'j'_3} = \delta^{j}_{j'}\,\delta^{j_3}_{j'_3},$$

$$(\Pi_j)^{j'j'_3}{}_{j''j''_3} = \delta^{j'}_{j}\,\delta^{j}_{j''}\,\delta^{j'_3}_{j''_3}$$

(в последней формуле не предполагается суммирования по j).

При таком выборе оператор J_j удовлетворяет условию изометричности

$$\langle J_j f,\ J_j f'\rangle_D = \varepsilon_j \langle f,\ f'\rangle_j, \qquad \varepsilon_j = \pm 1.$$

*) В следующем пункте мы увидим, что такая нормировка операторов J_j, K_j оправдана.

Это требует некоторых пояснений. В силу инвариантности формы $\langle\, ,\rangle_D$ для любого элемента группы Лоренца и тем более для $r \in R$ имеет место $\langle D(r) J_j f, D(r) J_j f' \rangle_D = \langle J_j f, J_j f' \rangle_D$. Но, с другой стороны, пользуясь тем, что J_j переплетает представления Δ_j и $D \downarrow R$, мы можем привести то же выражение к виду $\langle J_j \Delta_j(r) f, J_j \Delta_j(r) f' \rangle_D$. Следовательно, форма, заданная отображением пары $f, f' \in \mathcal{L}_j$ в числе $\langle J_j f, J_j f' \rangle_D$, инвариантна относительно действия представления $\Delta_j(R)$. В силу единственности инвариантной формы в $\mathcal{L}_j$ она отличается от $\langle f, f' \rangle_j$ лишь множителем. Нормируя соответствующим образом оператор J_j, всегда можно добиться того, что этот множитель $\varepsilon_j = \pm 1$.

В базисе $j' j_3'$ форма $\langle\, ,\rangle_D$ имеет вид

$$\langle F, F' \rangle_D = \sum_{j' j_3'} \varepsilon_{j'} \overset{*}{F}{}^{j' j_3'} F'^{j' j_3'}.$$

Между прочим, это означает, что введенная ранее матрица Γ в данном базисе имеет вид

$$\Gamma_{j' j_3',\, j'' j_3''} = \varepsilon_{j'} \delta_{j' j''} \delta_{j_3' j_3''}.$$

2. Реальная часть локализованного состояния. Отображение K_{mj}: $\mathcal{H}_D \to \mathcal{H}_{mj}$ является вырожденным. Оно обращает в нуль многие векторы в $\mathcal{H}_D$, т. е. обладает нетривиальным ядром, и лишь подпространство $J_{mj}\mathcal{H}_{mj} \subset \mathcal{H}_D$ переводится в $\mathcal{H}_{mj}$ без искажений. Другими словами, отображение K_{mj} вырезает из $\mathcal{H}_D$ физическую часть (точнее, те компоненты, которые описывают реальные состояния частицы массы m и спина j). Однако выделенная таким образом физическая часть вектора реализуется в другом пространстве — в пространстве $\mathcal{H}_{mj}$. Чтобы смысл операции был яснее, удобно опять вернуться к реализации в $\mathcal{H}_D$ с помощью оператора J_{mj} (который уже не вносит искажений, а лишь меняет реализацию вектора — переводит импульсное представление в координатное).

Итак, взяв произвольный вектор $\psi \in \mathcal{H}_D$, мы получаем вектор $\varphi = K_{mj}\psi \in \mathcal{H}_{mj}$, описывающий физическую часть вектора ψ, а затем переводим его в $J_{mj}\varphi = J_{mj}K_{mj}\psi \in \mathcal{H}_D$. Вектор $J_{mj}K_{mj}\psi$ представляет собой физическую часть вектора ψ, записанную в том же координатном представлении, что и исходный вектор ψ. Другими словами, оператор

$$\Pi_{mj} = J_{mj} K_{mj}$$

осуществляет *проектирование пространства $\mathcal{H}_D$ на подпространство $J_{mj}\mathcal{H}_{mj} \subset \mathcal{H}_D$* реальных состояний частицы массы m и спина j. Пользуясь формулами для операторов J_{mj} и K_{mj}, получим для проектора Π_{mj} выражение

$$(\Pi_{mj}\psi)(x) = \int dx' \, \Pi_{mj}(x - x')\, \psi(x'),$$

где обозначено

$$\Pi_{mj}(x - x') = \frac{m^2}{2(2\pi)^3} \int dv \, e^{-im(v,\, x - x')} D(v_L)\, \Pi_j D(v_L^{-1}),$$

а Π_j — введенный ранее проектор на состояние определенного спина: $\Pi_j = J_j K_j$.

Нормировка операторов J_j, K_j выбрана нами таким образом, чтобы оператор Π_{mj} был обобщенным проектором. Действительно, используя соотношение

$$\Pi_j \Pi_{j'} = \delta_{jj'} \Pi_j,$$

легко показать, что

$$\int dx' \, \Pi_{mj}(x - x')\, \Pi_{m'j'}(x' - x'') = 2\pi \delta_{jj'} \delta(m^2 - m'^2)\, \Pi_{mj}(x - x'')$$

или

$$\Pi_{mj} \Pi_{m'j'} = 2\pi \delta_{jj'} \delta(m^2 - m'^2)\, \Pi_{mj}.$$

Следует помнить, что если один спин j содержится в представлении $D(L)$ более одного раза, то для различения соответствующих подпространств в $\mathcal{L}_D$, кроме спина j, требуется еще один индекс. В таком случае в предыдущей формуле добавляется еще один символ Кронекера, обеспечивающий совпадение значений этого дополнительного индекса.

Ядро $\Pi_{mj}(x - x')$ осуществляет проектирование локализованных состояний $\psi \in \mathcal{H}_D$ на реальные состояния частицы определенной массы и спина (ср. обсуждение в конце п. 5.4.2). Это наглядно проявляется в структуре ядра. Достаточно сравнить его с ядром единичного оператора:

$$(\mathbb{1}\psi)(x) = \int dx' \, \mathbb{1}_D(x - x')\, \psi(x'),$$

$$\mathbb{1}_D(x - x') = \delta(x - x') \cdot \mathbb{1}_D,$$

где $\delta(x - x')$ — четырехмерная дельта-функция, а $\mathbb{1}_D$ — единичный оператор в пространстве $\mathcal{L}_D$. Далее, дельта-функцию можно разложить в интеграл Фурье. Тогда получим

$$\mathbb{1}_D(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, e^{-i(k,\, x - x')} \cdot \mathbb{1}_D.$$

Ядро $\Pi_{mj}(x - x')$ отличается от $\mathbb{1}_D(x - x')$ тем, что в разложении Фурье для него содержатся лишь компоненты, сосредоточенные на массовой поверхности и, кроме того, выделение определенного спина j производится с помощью специальной операции «бустирования» (преобразования бустами $D(v_L)$, $D(v_L^{-1})$) и проектирования оператором Π_j.

Ядро $\Pi_{mj}(x - x')$ и сходные с ним ядра играют существенную роль в квантовой теории частиц. Рассмотрим появляющуюся в этом ядре операторнозначную функцию на гиперболоиде скоростей

$$S_j(v) = D(v_L)\, \Pi_j D(v_L^{-1}).$$

Легко видеть, что при каждом $v \in \mathscr{C}$ оператор $S_j(v)$ является проектором. Пользуясь тем, что $\Pi_j \in [D \downarrow R]$, легко найти трансформационные свойства функции S_j:

$$S_j(lv) = D(l) S_j(v) D(l^{-1}).$$

Для дальнейшего существенно, что если $D(L)$ — *конечномерное представление*, функция $v \mapsto S_j(v)$ является *полиномом* по компонентам 4-скорости v^0, v^1, v^2, v^3. Это свойство может быть доказано, если более детально изучить свойства представления D.

3. Амплитуда распространения частицы. В процессе локальных взаимодействий элементарных частиц могут возникать состояния этих частиц, локализованные в точке пространства-времени. Что происходит далее с этими состояниями? Мы уже предположили ранее (п. 5.4.2), что локализованное состояние может перейти в реальное («материализоваться»), и вычислили амплитуду этого процесса. Однако вместо этого локализованное состояние может перейти опять в локализованное, но с другой точкой локализации. Для вычисления амплитуды такого процесса постулируем, что *состояние частицы, локализованное в точке пространства-времени, может перейти в состояние, локализованное в другой точке, через одно из реальных состояний в качестве промежуточного*, т. е. по схеме $\psi_{x'} \to \varphi_{mj} \to \psi_x$. Амплитуду такого перехода можно вычислить, перечисляя альтернативы перехода (базисные векторы пространства $\mathscr{H}_{mj}$) и суммируя амплитуды отдельных альтернатив. Однако проще воспользоваться тем, что альтернативы образуют базис подпространства $J_{mj}\mathscr{H}_{mj} \in \mathscr{H}_D$, и использовать для вычисления проектор на это подпространство так, как это описано в п. 4.3.1:

$$A_{mj}(\psi_x, \psi_{x'}) = (\psi_x, \Pi_{mj}\psi_{x'})_D = \bar{F}\Pi_{mj}(x - x') F'.$$

Учитывая то обстоятельство, что частица с достоверностью присутствует хотя бы в некоторой точке каждой пространственно-подобной гиперповерхности Σ, мы должны ожидать, что сумма амплитуд перехода из точки x' в точку x через различные точки поверхности Σ равна полной амплитуде перехода $\bar{F}\Pi_{mj}(x - x')F'$. Используя выражение для скалярного произведения в форме интеграла по Σ (п. 5.4.3), запишем это в виде

$$i\varepsilon_j \int_\Sigma d\sigma^\mu(x') \Pi_{mj}(x - x') \overleftrightarrow{\partial'_\mu} \Pi_{mj}(x' - x'') = \Pi_{mj}(x - x'').$$

Поскольку функция $\Pi_{mj}(x - x')$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона, интеграл слева не зависит от выбора поверхности Σ. Выбирая в качестве Σ гиперплоскость $x^0 = \text{const}$ и подставляя явный вид амплитуды $\Pi_{mj}(x - x')$, можно вычислить левую часть этого равенства и убедиться, что оно выполняется.

Запишем амплитуду $\Pi_{mj}(x - x')$ в виде

$$\Pi_{mj}(x - x') = \frac{m^2}{2(2\pi)^3} \int dv\, e^{-im(v,\, x - x')} S_j(v),$$

где $v \to S_j(v)$ — проекторнозначная функция. Мы упоминали ранее, что в случае, если D — конечномерное представление, функция $S_j(v)$ является полиномом. Воспользовавшись этим, мы можем заменить функцию $S_j(v)$ под интегралом соответствующей комбинацией производных по x:

$$\Pi_{mj}(x - x') = S_j\left(\frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial x}\right) \Pi_m(x - x'),$$

где обозначено

$$\Pi_m(x - x') = \frac{m^2}{2(2\pi)^3} \int dv\, e^{-im(v,\, x - x')}.$$

Появившееся здесь ядро $\Pi_m(x - x')$ лишь множителем отличается от отрицательно-частотной части перестановочной функции Паули — Йордана [2]. Следовательно, *амплитуда распространения* частицы произвольного спина получается из этой функции действием некоторого полинома от градиента. Это обстоятельство играет существенную роль при формулировке квантовой теории.

§ 6.2. Причинный пропагатор

Постулат о переходе частицы из точки в точку через промежуточные состояния из физического подпространства $\mathscr{H}_{mj}$, принятый в предыдущем параграфе, следует дополнить постулатом о том, что частицы, имеющие положительную массу, распространяются только из прошлого в будущее, а частицы с отрицательной массой — только из будущего в прошлое. Частица, отличающаяся от данной частицы только знаком массы, называется античастицей, и сформулированный постулат представляет собой концепцию Штюкельберга — Фейнмана. Принятие ее окончательно определяет амплитуду переходов состояний, локализованных в точке, в виде $(\psi_x, \Pi^c_{mj}\psi_{x'})_D$, где Π^c_{mj} — причинный пропагатор частицы или, точнее, комплекса частица — античастица.

Между частицей и античастицей, которые отличаются только знаком массы, имеется симметрия, описываемая операцией зарядового сопряжения. Она особенно важна в связи с тем, что в локализованных состояниях $\psi_x \in \mathscr{H}_D$ различие между частицей и античастицей пропадает (так же, как и масса, это различие сказывается лишь при переходе из одной точки в другую). При описании взаимодействий в следующем параграфе мы увидим, что существует двойственность, позволяющая переходить от рождения частицы к уничтожению античастицы и обратно. Эта двойственность обсуждается в этом параграфе в связи со свойствами симметрии причинного пропагатора.

1. Частица и античастица. До сих пор мы неявно предполагали, что масса частицы положительна, $m > 0$. Вернемся, однако, к п. 5.3.1, в котором импульсное представление для частицы было получено как неприводимое представление $U_{mj} = \Delta_{mj}(H) \uparrow P$ группы Пуанкаре. Нетрудно видеть, что при $m < 0$ также получается неприводимое представление, причем оно не эквивалентно никакому представлению с положительной массой. Оказывается, что эта возможность также реализуется в природе и соответствует понятию античастицы. Именно, если представление U_{mj}, $m > 0$ описывает частицу, то $U_{-m,j}$ описывает соответствующую ей *античастицу*.

Чтобы не отступать от традиционных обозначений, мы будем считать массу всегда положительной, обозначая ее через m, а тот параметр, который фигурировал в определении представления, обозначим через εm, где $\varepsilon = \pm 1$. Тогда неприводимое представление группы Пуанкаре определяется как

$$U^{\varepsilon}_{mj}(P) = \Delta^{\varepsilon}_{mj}(H) \uparrow P,$$
$$\Delta^{\varepsilon}_{mj}(ra_T) = \Delta_j(r) \exp[i\varepsilon m (e_0, a)].$$

Это представление реализуется в пространстве функций $\varphi^{\varepsilon}: \mathscr{C} \to \mathscr{L}$ и действует на эти функции по формулам

$$U^{\varepsilon}_{mj}(l)\,\varphi^{\varepsilon}(v) = \Delta_j\big((l, l^{-1}v)_R\big)\,\varphi^{\varepsilon}(l^{-1}v),$$
$$U^{\varepsilon}_{mj}(a_T)\,\varphi^{\varepsilon}(v) = e^{i\varepsilon m (v, a)}\varphi^{\varepsilon}(v).$$

Импульс частицы и античастицы связан с параметром $v \in \mathscr{C}$ формулой $k = mv$.

Выпишем здесь основные формулы для частицы и античастицы, получающиеся заменой во всех выкладках предыдущих параграфов m на εm.

Частица и античастица описываются одним и тем же координатным представлением $U_D = D(L) \uparrow P$. Формулы, связывающие координатное и импульсное представления:

$$\psi^{\varepsilon}(x) = J^{\varepsilon}_{mj}\varphi^{\varepsilon}(x) = \frac{m}{4\pi^{3/2}} \int dv\, e^{-i\varepsilon m (v, x)} D(v_L) J^{\varepsilon}_j \varphi^{\varepsilon}(v),$$

$$\varphi^{\varepsilon}(v) = K^{\varepsilon}_{mj}\psi^{\varepsilon}(v) = \frac{m}{4\pi^{3/2}} \int dx\, e^{i\varepsilon m (v, x)} K^{\varepsilon}_j D(v_L^{-1})\,\psi^{\varepsilon}(x).$$

Амплитуда распространения частицы и античастицы из точки в точку:

$$\Pi^{\varepsilon}_{mj}(x - x') = \frac{m^2}{2(2\pi)^3} \int dv\, e^{-i\varepsilon m (v,\, x-x')} S^{\varepsilon}_j(v) = S^{\varepsilon}_j\left(\frac{i\varepsilon}{m}\frac{\partial}{\partial x}\right) \Pi^{\varepsilon}_m(x - x'),$$

где обозначено

$$S^{\varepsilon}_j(v) = D(v_L)\,\Pi^{\varepsilon}_j D(v_L^{-1}),$$
$$\Pi^{\varepsilon}_j = J^{\varepsilon}_j K^{\varepsilon}_j,$$
$$\Pi^{\varepsilon}_m(x - x') = \frac{m^2}{2(2\pi)^3} \int dv\, e^{-i\varepsilon m (v,\, x-x')}.$$

На проекторы Π^{ε}_j наложим некоторые естественные условия: эрмитовость относительно формы $\langle\,,\rangle_D$

$$(\Pi^{\varepsilon}_j)^{+}\,\Gamma = \Gamma \Pi^{\varepsilon}_j,$$

знакоопределенность метрики в подпространстве $\Pi^{\varepsilon}_j \mathscr{L}_D$

$$\Gamma \Pi^{\varepsilon}_j = \lambda^{\varepsilon}_j \Pi^{\varepsilon}_j, \quad \lambda^{\varepsilon}_j = \pm 1,$$

и свойство проектора

$$(\Pi^{\varepsilon}_j)^2 = \Pi^{\varepsilon}_j.$$

В соответствии с идеей Штюкельберга — Фейнмана [65, 92] мы примем, что *частица движется из прошлого в будущее, а античастица — из будущего в прошлое.* В классической теории это означает, что если траектория частицы или античастицы параметризована собственным временем $s \mapsto x(s)$, то $dx(s)/ds = \varepsilon v$, $v \in \mathscr{C}$. В квантовой теории это означает, что амплитуда распространения частицы $\Pi^{+}_{mj}(x - x')$ имеет смысл в том случае, если $x^0 > x'^0$, а амплитуда распространения античастицы $\Pi^{-}_{mj}(x - x')$ — в случае, если $x^0 < x'^0$.

Однако, если интервал $x - x'$ пространственноподобен, т. е. $(x - x', x - x') < 0$, условие, например $x^0 > x'^0$, зависит от системы отсчета. Если в одной системе отсчета оно выполняется, то преобразованием из группы Лоренца можно перейти в такую систему, в которой это условие переходит в противоположное: $x^0 < x'^0$. Поэтому для инвариантности теории необходимо, чтобы *амплитуда распространения античастицы на пространственноподобный интервал совпадала с амплитудой распространения частицы* на тот же интервал:

$$\Pi^{-}_{mj}(x - x') = \Pi^{+}_{mj}(x - x') \quad \text{при} \quad (x - x', x - x') < 0.$$

Это условие в рамках квантовой теории поля фигурирует как условие *локальной коммутативности операторов поля*, а в данном подходе его естественно было бы назвать *условием зарядовой симметрии.*

В случае скалярной частицы $(D(l) \equiv 1,\ j = 0)$ амплитуды $\Pi^{\pm}_{m0}(x - x')$ совпадают с $\Pi^{\pm}_m(x - x')$. Для этих функций условие зарядовой симметрии выполняется:

$$\Pi^{-}_m(x - x') = \Pi^{+}_m(x - x') \quad \text{при} \quad (x - x', x - x') < 0.$$

Это можно показать, пользуясь тем, что в силу инвариантности меры dv функции $\Pi_m^{\pm}(x-x')$ инвариантны при преобразовании Лоренца $x \mapsto lx$, $x' \mapsto lx'$. В общем случае амплитуды $\Pi_{mj}^{\pm}(x-x')$ получаются из $\Pi_m^{\pm}(x-x')$ действием дифференциальных операторов:

$$\Pi_{mj}^{\pm}(x-x') = S_j^{\pm}\left(\pm \frac{i}{m}\partial\right)\Pi_m^{\pm}(x-x').$$

Для того чтобы в пространственноподобной области эти функции совпадали, необходимо, очевидно, чтобы совпадали дифференциальные операторы:

$$S_j^{-}\left(-\frac{i}{m}\partial\right) = S_j^{+}\left(\frac{i}{m}\partial\right),$$

или, иначе, проекторы, зависящие от скорости:

$$S_j^{-}(-v) = S_j^{+}(v) = S_j(v).$$

Таким образом, функции $v \mapsto S_j^{\pm}(v)$ сводятся к одной функции, которую впредь мы будем обозначать через $S_j(v)$. Предполагая, что дифференциальные операторы $S_j^{\pm}\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ удовлетворяют условию зарядовой симметрии, можно переписать выражения для амплитуд распространения частицы и античастицы в виде

$$\Pi_{mj}^{\pm}(x-x') = S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)\Pi_m^{\pm}(x-x').$$

Строго говоря, условие зарядовой симметрии накладывает ограничения не на функции $v \mapsto S_j^{\pm}(v)$ от скоростей, а на расширение этих функций до функций, заданных на всем импульсном пространстве: $k \mapsto S_j^{\pm}(k)$, $k \in \mathscr{K}$. Если функции $S_j^{\pm}$ заданы на гиперболоиде скоростей и выражены на нем как полиномы от компонент скорости $\{v^{\mu} \mid \mu = 0, 1, 2, 3\}$, то тем самым уже задано некоторое расширение этих функций на все импульсное пространство. Однако добавление любых полиномов, исчезающих на гиперболоиде $\mathscr{V}$, приводит к другим расширениям, причем также полиномиальным. При этом нужно следить, чтобы функции $k \mapsto S_j^{\pm}(k)$ удовлетворяли условию зарядовой симметрии. Следовательно, произвол в выборе функций $S_j^{\pm}$ сводится к произволу в функции S_j:

$$S_j(k) \mapsto S_j(k) + Q_j(k)((k, k) - 1).$$

Чтобы эта функция оставалась ковариантной:

$$S_j(lk) = D(l)\, S_j(k)\, D(l^{-1}),$$

нужно наложить условие ковариантности на полином Q_j:

$$Q_j(lk) = D(l)\, Q_j(k)\, D(l^{-1}).$$

Практически это означает, что такой полином строится из ковариантных комбинаций компонент 4-вектора $k \in \mathscr{K}$.

Произвол в выборе функции $S_j(k)$ несуществен, пока дифференциальный оператор $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ действует на амплитуды $\Pi_m^{\pm}(x-x')$, удовлетворяющие уравнению Клейна — Гордона. Однако он окажется существенным в дальнейшем, при определении причинного пропагатора.

2. Зарядовое сопряжение. Между состояниями частицы и античастицы существует естественное соответствие. Чтобы показать это, рассмотрим операцию комплексного сопряжения для волновой функции в импульсном представлении $\varphi^{\varepsilon} \in \mathscr{H}_{mj}^{\varepsilon}$. Поскольку функция $p \mapsto \varphi^{\varepsilon}(p)$ удовлетворяет структурному условию

$$\varphi^{\varepsilon}(pa_T r) = \Delta_j(r^{-1})\, e^{-i\varepsilon m(e_0, a)}\varphi^{\varepsilon}(p),$$

комплексно-сопряженная функция удовлетворяет аналогичному условию с заменой $\Delta_j(r)$ на $\overset{*}{\Delta}_j(r)$. Но эти представления эквивалентны друг другу. Пусть $C_j \in [\overset{*}{\Delta}_j, \Delta_j]$, т. е.

$$C_j \overset{*}{\Delta}_j(r) = \Delta_j(r)\, C_j.$$

Отсюда следует, что $C_j^* \in [\Delta_j, \overset{*}{\Delta}_j]$. Следовательно, $C_j C_j^* \in [\Delta_j]$ и в силу неприводимости Δ_j оператор $C_j C_j^*$ кратен единичному. Нормируем оператор C_j таким образом, чтобы имело место соотношение

$$C_j C_j^* = C_j^* C_j = \mathbb{1}.$$

Полагая

$$I_C \varphi^{\varepsilon}(p) = C_j \overset{*}{\varphi}{}^{\varepsilon}(p),$$

получим

$$I_C \varphi^{\varepsilon}(pa_T r) = C_j \overset{*}{\Delta}_j(r^{-1})\, e^{i\varepsilon m(e_0, a)} \overset{*}{\varphi}{}^{\varepsilon}(p) = \Delta_j(r^{-1})\, e^{i\varepsilon m(e_0, a)} I_C \varphi^{\varepsilon}(p).$$

Следовательно, функция $p \mapsto I_C \varphi^{\varepsilon}(p)$ есть элемент пространства $\mathscr{H}_{mj}^{-\varepsilon}$, т. е. операция

$$I_C\colon \mathscr{H}_{mj}^{\varepsilon} \to \mathscr{H}_{mj}^{-\varepsilon}$$

переводит частицу в античастицу и обратно. Эта операция называется *зарядовым сопряжением*. Она *антиунитарна* в том смысле, что

$$(I_C\varphi, I_C\varphi')_{mj} = (\varphi', \varphi)_{mj}.$$

Это означает, что при операции зарядового сопряжения меняется направление всех процессов: амплитуда перехода состояния φ в состояние φ' превращается в амплитуду перехода состояния $I_C\varphi'$ в состояние $I_C\varphi$.

Чтобы записать операцию зарядового сопряжения в координатном представлении, построим координатное представление состояния $I_C\varphi^\varepsilon$ по формуле для оператора $J_{mj}^{-\varepsilon}$:

$$I_C\psi^\varepsilon(x) = J_{mj}^{-\varepsilon} I_C \varphi^\varepsilon(x) = \frac{m}{4\pi^{3/2}} \int dv\, e^{i\varepsilon m(v,x)} D(v_L)\, J_j^{-\varepsilon} C_j \overset{*}{\varphi}{}^\varepsilon(v).$$

С другой стороны, подвергая комплексному сопряжению функцию $\psi^\varepsilon(x)$, получим

$$\overset{*}{\psi}{}^\varepsilon(x) = \frac{m}{4\pi^{3/2}} \int dv\, e^{i\varepsilon m(v,x)} \overset{*}{D}(v_L)\, \overset{*}{J}{}_j^\varepsilon \overset{*}{\varphi}{}^\varepsilon(v).$$

Очевидно, что зарядовое сопряжение в координатном представлении можно записать в виде $I_C\psi^\varepsilon(x) = C\overset{*}{\psi}{}^\varepsilon(x)$, если матрица C удовлетворяет условию $C\overset{*}{D}(l)\,\overset{*}{J}{}_j^\varepsilon = D(l)\,J_j^{-\varepsilon}C_j$ для любого $l \in L$. В свою очередь для этого достаточно, чтобы $C \in [\overset{*}{D}, D]$; $C\overset{*}{J}{}_j^\varepsilon = J_j^{-\varepsilon}C_j$. И хотя формула зарядового сопряжения в координатном представлении выведена лишь для состояний с определенной массой, она может быть распространена на любые состояния из $\mathscr{H}_D$:

$$I_C\psi(x) = C\overset{*}{\psi}(x), \quad \psi \in \mathscr{H}_D,$$

в том числе на строго локализованные состояния.

Каждая частица имеет соответствующую античастицу. Однако в некоторых случаях состояния $\varphi^+ \in \mathscr{H}_{mj}^+$ и $I_C\varphi^+ \in \mathscr{H}_{mj}^-$ физически неразличимы, т. е. частица и античастица одинаковым образом взаимодействуют со всеми приборами. Такие частицы, тождественные своим античастицам, называются *истинно нейтральными.* В отличие от них, частицы, отличающиеся от своих античастиц, называются *заряженными.* При этом не обязательно имеется в виду электрический заряд. Кроме него, существует, например, барионный заряд. Важно, что имеется объективное различие между заряженной частицей и соответствующей античастицей. В то же время, конечно, отнесение одной из них к категории частиц, а второй — к категории античастиц, является чисто условным.

Замечание. Обычно античастицей по отношению к данной частице называется объект, имеющий противоположные знаки всех зарядов, но кинематически не отличающийся от частицы. В данной книге вместо этого под античастицей понимается объект *того же заряда*, однако имеющий противоположный (отрицательный) знак энергии и движущийся попятно во времени (в прошлое). Применение термина «античастица» в таком смысле не является традиционным, однако мы принимаем его во избежание усложнения формулировок. Исторически этот способ описания античастицы был первым и применялся еще до введения самого термина «античастица» (дираковский электрон, движущийся попятно во времени, как эквивалентное описание позитрона).

3. Причинный пропагатор. В релятивистской теории при вычислении амплитуд различных процессов оказывается удобным *описывать распространение частицы и античастицы одной амплитудой.* Это слияние настолько естественно, что следовало бы ввести специальный термин, обозначающий комплекс частица — античастица так же, как в квантовой теории поля вводится понятие, например, электронно-позитронного поля. Объединение частицы и античастицы в один объект возможно лишь в том случае, если мы принимаем *концепцию Штюкельберга — Фейнмана*, состоящую в том, что частица движется в будущее, а античастица — в прошлое. После этого замечания очевидно, что амплитуда распространения частицы — античастицы из точки x' в точку x равна

$$\theta(x - x')\, \bar{F}\Pi_{mj}^+(x - x')\, F' + \theta(x' - x)\, \bar{F}\Pi_{mj}^-(x - x')\, F',$$

где обозначено

$$\theta(x - x') = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x^0 > x'^0, \\ 0 & \text{при} \quad x^0 < x'^0. \end{cases}$$

Запишем эту амплитуду в виде

$$A_{mj}^c(\psi_x, \psi_{x'}) = \bar{F}\Pi_{mj}^c(x - x')\, F',$$

где введена функция

$$\Pi_{mj}^c(x - x') = \theta(x - x')\, \Pi_{mj}^+(x - x') + \theta(x' - x)\, \Pi_{mj}^-(x - x'),$$

которую принято называть *причинным пропагатором* или *причинной функцией* частицы.

Амплитуда A_{mj}^c представляет собой окончательное выражение, которое можно использовать для расчетов. Оно получено в предположении, что переход между локализованными состояниями, направленный в будущее, происходит за счет материализации в форме частицы, а переход в прошлое — за счет материализации в форме античастицы.

4. Доопределение причинного пропагатора. Способ, использованный нами для построения причинного пропагатора, фактически оставляет его неопределенным при $x^0 = x'^0$, так как на этой поверхности не определены тэта-функции $\theta(x - x')$ и $\theta(x' - x)$. Поэтому к полученному выше выражению можно прибавить еще член вида $A\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)\delta(x^0 - x'^0)$, где A — произвольный полином. Этой неопределенностью можно воспользоваться для того, чтобы сделать выражение для причинного пропагатора ковариантным. Вспомним, что, как показано в пункте 2, каждая из функций $\Pi^{+}_{mj}(x-x')$ и $\Pi^{-}_{mj}(x-x')$ может быть получена действием дифференциального оператора $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ соответственно на функции $\Pi^{+}_{m}(x-x')$ и $\Pi^{-}_{m}(x-x')$, где

$$\Pi^{+}_{m}(x-x') = \Pi^{-}_{m}(x'-x) = \frac{m^2}{2(2\pi)^3}\int dv \exp[-im(v,\ x-x')].$$

Если поставить дифференциальный оператор $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ левее обеих тэта-функций в формуле для причинного пропагатора, то этим причинный пропагатор будет изменен как раз на член, сосредоточенный на поверхности $x^0 = x'^0$. В результате получается для него выражение

$$\Pi^{c}_{mj}(x-x') = S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)\Pi^{c}_{m}(x-x'),$$

где

$$\Pi^{c}_{m}(x-x') = \theta(x-x')\,\Pi^{+}_{m}(x-x') + \theta(x'-x)\,\Pi^{-}_{m}(x-x').$$

Скалярная причинная функция $\Pi^{c}_{m}(x-x')$ инвариантна в силу инвариантности каждой из функций $\Pi^{\pm}_{m}(x-x')$ и зарядовой симметрии (равенства этих функций в пространственноподобных точках). Учитывая трансформационные свойства функции S_j (см. пункт 1), находим трансформационные свойства причинного пропагатора:

$$\Pi^{c}_{mj}(lx) = D(l)\,\Pi^{c}_{mj}(x)\,D(l^{-1}).$$

В этом смысле пропагатор, доопределенный формулой $\Pi^{c}_{mj} = S_j\Pi^{c}_{m}$, ковариантен.

Замечание. В квантовой теории поля ковариантное выражение для пропагатора используется в рамках *лагранжева формализма*, в котором на всех этапах сохраняется явная ковариантность. Однако при построении квантовой теории поля по схеме *гамильтонова* или *канонического формализма* используется то нековариантное выражение, которое мы получили первоначально: $\Pi^{c}_{mj}(x) = \theta(x)\,\Pi^{+}_{mj}(x) + \theta(-x)\,\Pi^{-}_{mj}(x)$. Различие между двумя вариантами причинной функции соответствует различию между так называемыми *виковским* и *дайсоновским определениями* T-произведения (упорядоченного по времени произведения) операторов в квантовой теории поля. За подробностями отсылаем читателя к специальной литературе [1, 2, 27].

Итак, мы доопределили причинный пропагатор или причинную функцию частицы спина j действием дифференциального оператора $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ на скалярную причинную функцию $\Pi^{c}_{m}(x-x')$. Последнюю удобно выражать через преобразование Фурье («в импульсном представлении»):

$$\Pi^{c}_{m}(x-x') = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{\exp[-i(k,\ x-x')]}{(k,\ k)-m^2+i0}.$$

В этой формуле член $i0$ в знаменателе понимается как добавление $i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и последующий переход к пределу $\varepsilon\to 0$ по положительным значениям. Если взять интеграл по k^0 с помощью вычетов, выражение для $\Pi^{c}_{m}(x-x')$ в виде интеграла Фурье приводится к выражению через тэта-функции.

В связи с тем, что преобразование Фурье причинного пропагатора содержит компоненты не только на массовой поверхности $k\in\mathscr{C}^{+}_{m^2}$, но и вне ее, говорят обычно, что описание взаимодействия требует *выхода за массовую поверхность*. Импульсное представление причинного пропагатора имеет максимум при физической массе $(k,\ k) = m^2$ и спадает при удалении от этой поверхности. Следует, однако, отдавать себе отчет в том, что это не означает на самом деле, что взаимодействие переносится частицами с массами, отличными от m. Действительная причина появления компонент с другими массами состоит в том, что частица и античастица, с массами $\pm m$, переносят взаимодействие, распространяясь в противоположных временных направлениях. Появляющиеся вследствие этого тэта-функции при формальном разложении в интеграл Фурье вносят искажения в спектр масс. Физический смысл имеют на самом деле лишь разложения Фурье амплитуд $\Pi^{\pm}(x-x')$, а они, как мы видели, содержат лишь компоненты, соответствующие физической массе m.

Из разложения Фурье видно, что функция $\Pi^{c}_{m}(x-x')$ удовлетворяет уравнению

$$(\Box + m^2)\,\Pi^{c}_{m}(x-x') = -i\delta(x-x'),$$

т. е. является *функцией Грина уравнения Клейна — Гордона*. Можно получить это уравнение и непосредственно из определения причинного пропагатора.

Вернемся к причинному пропагатору спиновой частицы, который мы определили как $\Pi^{c}_{mj}(x-x') = S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)\Pi^{c}_{m}(x-x')$. Если дифференциальный оператор $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ вполне определен, то тем самым определен и пропагатор для спина j. Однако в пункте 1 мы видели, что полином $k\to S_j(k)$ в импульсном пространстве определен лишь с точностью до члена, пропорционального $(k, k)-1$. Это дает неопределенность в операторе $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ и в конечном итоге — неопределенность в причинном пропагаторе.

Эта неопределенность, однако, невелика. К причинной функции $\Pi^c_{mj}(x-x')$ можно добавить обобщенную функцию, сосредоточенную в точке $x-x'=0$, т. е. линейную комбинацию дельта-функции $\delta(x-x')$ и любых ее производных в конечном числе. Действительно, добавление к функции $k \mapsto S_j(k)$ полинома $im^2Q_j(k)(1-(k, k))$ приводит к тому, что дифференциальный оператор $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ получает добавку $iQ_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)(\Box+m^2)$, а причинная функция меняется как

$$\Pi^c_{mj}(x-x') \mapsto \Pi^c_{mj}(x-x') + Q_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)\delta(x-x').$$

В п. 6.4.2 будет показано, что пропагатор должен быть функцией Грина некоторого уравнения. Это накладывает определенные ограничения на оператор $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ и уменьшает произвол в выборе причинного пропагатора. Более подробно этот вопрос будет проанализирован в главе 7. Оказывается, что в случае низших спинов $j \leqslant 1$ (описывающихся низшими представлениями группы Лоренца) это условие полностью устраняет произвол в причинном пропагаторе, но для высших спинов произвол, состоящий в добавлении квазилокального члена, остается. Этот произвол можно скомпенсировать соответствующим изменением амплитуды локальных взаимодействий частиц, поэтому имеет смысл говорить о доопределении причинного пропагатора только в том случае, если одновременно фиксируется взаимодействие частиц.

5*. Причинный пропагатор как амплитуда перехода. Для того чтобы причинный пропагатор можно было интерпретировать как амплитуду перехода из одной точки пространства-времени в другую, он должен удовлетворять условию самосогласованности, аналогичному тому, которое было сформулировано в п. 6.1.3 для амплитуды $\Pi^+_{mj}(x-x')$. Условие такого типа называют *условием Чепмена — Колмогорова* или *условием Эйнштейна — Смолуховского.* Смысл его состоит в требовании, чтобы амплитуда перехода была равна сумме амплитуд перехода через все возможные промежуточные состояния. Однако то, что теперь мы имеем дело с объектом частица — античастица, который может распространяться как в будущее, так и в прошлое, вносит изменения в рассуждения, проведенные в п. 6.1.3.

Амплитуда $\Pi^+_{mj}(x-x')$ — это амплитуда распространения частицы, описывающая распространение в будущее. Поэтому, чтобы перечислить все альтернативы, приводящие к переходу из x' в x, достаточно провести пространственноподобную гиперповерхность, разделяющую эти точки, вычислить амплитуды перехода через различные точки этой гиперповерхности и просуммировать их. Для частицы — античастицы все направления распространения в пространстве-времени допустимы, и чтобы перечислить альтернативы, мы должны использовать гиперповерхность, окружающую, например, точку x' со всех сторон (замкнутую поверхность).

Рассмотрим поэтому замкнутую поверхность Σ, являющуюся границей некоторой четырехмерной области Ω в пространстве Минковского. Это записывается символически как $\Sigma = \partial\Omega$. Вычислим интеграл

$$i\int_{\partial\Omega} d\sigma^\mu(x'')\,\Pi^c_{mj}(x-x'')\overleftrightarrow{\partial''_\mu}\Pi^c_{mj}(x''-x').$$

По теореме Гаусса — Остроградского этот интеграл преобразуется в четырехмерный интеграл по области Ω:

$$i\int_\Omega dx''\,\partial''^\mu\left[\Pi^c_{mj}(x-x'')\overleftrightarrow{\partial''_\mu}\Pi^c_{mj}(x''-x')\right] = \\ = i\int_\Omega dx''\,\Pi^c_{mj}(x-x'')\,\overleftrightarrow{\Box}''\,\Pi^c_{mj}(x''-x').$$

Это, очевидно, тождественно равно выражению

$$i\int_\Omega dx''\left\{\Pi^c_{mj}(x-x'')\left[(\Box''+m^2)\Pi^c_{mj}(x''-x')\right] - \right. \\ \left. - \left[(\Box''+m^2)\Pi^c_{mj}(x-x'')\right]\Pi^c_{mj}(x''-x')\right\}.$$

Используем уравнение для функции $\Pi^c_{mj}(x-x')$, выведенное в предыдущем пункте. Тогда интеграл принимает вид

$$\int dx''\left\{\Pi^c_{mj}(x-x'')\left[S_j\left(\frac{i}{m}\partial''\right)\delta(x''-x')\right] - \right. \\ \left. -\left[S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)\delta(x-x'')\right]\Pi^c_{mj}(x''-x')\right\}\eta_\Omega(x''),$$

где через η_Ω обозначена характеристическая функция области Ω, равная единице в этой области и нулю вне ее. Мы предполагаем, разумеется, что граница области Ω не содержит точек x и x' (она разделяет эти точки), поэтому, оперируя обычным образом с обобщенной функцией, получающейся дифференцированием дельта-функции, получим для этого интеграла

$$\eta_\Omega(x')S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)\Pi^c_{mj}(x-x') - \eta_\Omega(x)S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)\Pi^c_{mj}(x-x').$$

Воспользуемся опять формулой $\Pi^c_{mj} = S_j\Pi^c_m$ и тем, что S_j^2 отличается от S_j лишь членами, содержащими в качестве множителя клейниан $\Box + m^2$ (см. п. 7.2.1). Учитывая это, получаем

$$S_j\Pi^c_{mj}(x-x') = \Pi^c_{mj}(x-x') + Q_j\delta(x-x').$$

Если точки x, x' различны (а это имеет место, если поверхность окружает одну из них, а другая остается вне поверхности), то член с дельта-функцией исчезает. В результате получаем окончательно

$$i\int\limits_{\partial\Omega} d\sigma^{\mu}(x'')\,\Pi^{c}_{mj}(x-x'')\,\overleftrightarrow{\partial}''_{\mu}\,\Pi^{c}_{mj}(x''-x') = \\ = \left(\eta_{\Omega}(x')-\eta_{\Omega}(x)\right)\Pi^{c}_{mj}(x-x').$$

Множитель $\eta_{\Omega}(x')-\eta_{\Omega}(x)$ справа равен просто $+1$, -1 или 0 в зависимости от того, содержит ли область Ω точки x' и x. Например, если $x'\in\Omega$, $x\notin\Omega$, т. е. поверхность $\Sigma=\partial\Omega$ окружает точку x', а точка x остается вне этой поверхности, то

$$i\int\limits_{\Sigma} d\sigma^{\mu}(x'')\,\Pi^{c}_{mj}(x-x'')\,\overleftrightarrow{\partial}''_{\mu}\,\Pi^{c}_{mj}(x''-x') = \Pi^{c}_{mj}(x-x').$$

Это по форме напоминает *уравнение Чепмена — Колмогорова* [18].

Выведенное условие позволяет интерпретировать причинный пропагатор как амплитуду распространения и положить его в основу определения особого рода *функционального интеграла*. С помощью этого интеграла понятие причинного пропагатора или амплитуды распространения частицы — античастицы может быть распространено на случай произвольного риманова пространства-времени. Однако это выходит далеко за рамки данной книги, поэтому мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе.

6. Симметрия причинного пропагатора и тип статистики. Мы видели, что причинный пропагатор позволяет найти полную амплитуду перехода одного локализованного состояния в другое. Предполагается, что переход может осуществляться через промежуточное состояние, являющееся реальным состоянием частицы, или через реальное состояние античастицы. Здесь мы еще раз сталкиваемся с одним из самых существенных положений релятивистской квантовой теории, отмеченным уже в пункте 2, о том, что каждое локализованное состояние $\psi\in\mathscr{H}_D$ может интерпретироваться либо как (виртуальное) состояние частицы, либо как состояние античастицы.

Выражение $\bar{F}\Pi^{c}_{mj}(x-x')F'$ интерпретируется как амплитуда перехода состояния (x', F') в состояние (x, F). Можно сказать что это амплитуда уничтожения состояния (x', F') и рождения (x, F). Роль этих состояний, следовательно, существенно различна, и это сказывается в том, что один из векторов входит под знаком комплексного сопряжения: $\bar{F}=F^{+}\Gamma=\overset{*}{F}{}^{\mathrm{T}}\Gamma$. Здесь и в дальнейшем, при обсуждении локального взаимодействия, используется обычное для квантовой механики предположение, что амплитуда уничтожения некоторого состояния линейна по этому состоянию, а амплитуда рождения антилинейна (т. е. умножение вектора состояния на число приводит к умножению

амплитуды рождения этого состояния на комплексно-сопряженное число).

Используем теперь возможность интерпретации каждого локализованного состояния как состояния частицы или античастицы. Представим состояние $\psi_x=\delta_x F$, $\delta_x(x')=\delta(x-x')$ в виде $\psi_x=I_C^2\psi_x=C(I_C\psi_x)^*$ или $F=C(I_CF)^*$. (Мы перенесли здесь операцию I_C на пространство $\mathscr{L}_D$.) Тогда $\bar{F}=(I_CF)^{\mathrm{T}}C^{+}\Gamma$, и, следовательно, ту же самую амплитуду можно записать в форме $(I_CF)^{\mathrm{T}}\left(C^{+}\Gamma\Pi^{c}_{mj}(x-x')\right)F'$. Теперь эта амплитуда зависит от векторов локализованных состояний (x', F'), (x, I_CF), причем линейна по обоим векторам.

Очевидно, что это выражение можно интерпретировать как амплитуду взаимного уничтожения локализованных состояний (x', F') и (x, I_CF). Мы приходим естественным образом к выводу о том, что выражение

$$F^{\mathrm{T}}\Pi^{a}_{mj}(x-x')F' = \left[\Pi^{a}_{mj}(x-x')\right]_{ik}F^{i}F'^{k},$$

где

$$\Pi^{a}_{mj}(x-x') = C^{+}\Gamma\Pi^{c}_{mj}(x-x') = C^{+}\Gamma S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)\Pi^{c}_{m}(x-x'),$$

можно интерпретировать как амплитуду вероятности *аннигиляции пары локализованных состояний* (x', F') и (x, F). Индекс a означает annihilation — аннигиляция. Аналогичным образом для амплитуды *рождения пары локализованных состояний* получаем выражение

$$\bar{F}\Pi^{p}_{mj}(x-x')\bar{F}'^{\mathrm{T}} = \left[\Pi^{p}_{mj}(x-x')\right]^{ik}\bar{F}_i\bar{F}'_k;$$

$$\Pi^{p}_{mj}(x-x') = \Pi^{c}_{mj}(x-x')\,C\Gamma^{\mathrm{T}} = S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)C\Gamma^{\mathrm{T}}\Pi^{c}_{m}(x-x')$$

(индекс p означает production — рождение).

Можно показать, что для конечномерного представления D оператор $S_j(v)$ обладает следующим свойством симметрии:

$$S_j^{\mathrm{T}}(-v)B^{\mathrm{T}} = (-1)^{2j}BS_j(v), \qquad B=C^{+}\Gamma.$$

Отсюда, используя определение $\Pi^{c}_{mj}(x-x')=S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)\Pi^{c}_{m}(x-x')$ и симметричность скалярного причинного пропагатора

$$\Pi^{c}_{m}(x'-x) = \Pi^{c}_{m}(x-x'),$$

получаем, что амплитуда аннигиляции пары локализованных состояний симметрична в случае целого и антисимметрична в случае полуцелого спина:

$$\overset{\mathrm{T}}{\Pi}{}^{a}_{mj}(x'-x) = (-1)^{2j}\Pi^{a}_{mj}(x-x').$$

Оператор зарядового сопряжения C был выбран в пункте 2 из условия $C\in[D^*, D]$. Отсюда следует, что $C^*\in[D, D^*]$ и $CC^*\in[D]$. Условимся выбирать оператор C так, чтобы произведение CC^* было единичным оператором:

$$CC^* = \mathbb{1}.$$

В этом случае получаем $B^{\mathrm{T}} = (C^{\dagger}\Gamma)^{\mathrm{T}} = (C\Gamma^{\mathrm{T}})^{-1}$, и амплитуда рождения пары локализованных состояний обладает той же симметрией:

$$\overset{\mathrm{T}}{\Pi}{}^{p}_{mj}(x'-x) = (-1)^{2j}\,\Pi^{p}_{mj}(x-x').$$

Итак, мы пришли к выводу, что пары локализованных состояний частицы спина j могут рождаться или поглощаться только в том случае, если они определенным образом симметризованы, именно при перестановке умножаются на $(-1)^{2j}$. Это свойство связано с *принципом симметризации тождественных частиц*, согласно которому волновые функции для системы тождественных частиц целого спина должны быть симметричными, а для частиц полуцелого — антисимметричными. Говорят, что частицы целого спина подчиняются *статистике Бозе — Эйнштейна* (являются *бозонами*), а частицы полуцелого спина подчиняются *статистике Ферми — Дирака* (являются *фермионами*).

§ 6.3. Локальное взаимодействие и S-матрица

В дополнение к причинным переходам, описанным в предыдущем параграфе, в релятивистской теории частиц следует постулировать возможность переходов локализованных состояний друг в друга и происходящих в одной точке, вообще говоря, с изменением количества и типов частиц. Такой процесс называется локальным взаимодействием и описывается амплитудой локального взаимодействия $\gamma(F_1, \ldots, F_n)$.

Задание типов частиц (а значит — их причинных пропагаторов) и амплитуд локальных взаимодействий полностью фиксирует теорию частиц и позволяет свести расчет амплитуды вероятности любого реального процесса к разложению его на альтернативы и подсчету амплитуды каждой альтернативы. Так возникает известная техника диаграмм Фейнмана (и вместе с ней, разумеется, известные трудности, связанные с появлением в теории бесконечных величин). В результате удается показать, что теория релятивистских квантовых частиц может быть сформулирована с начала до конца в терминах частиц, без обращения к квантованным полям. Путь, позволяющий перейти к теории типа квантовой теории полей, намечен в следующем параграфе.

1. Локальные взаимодействия. В релятивистской квантовой теории число частиц не является сохраняющейся величиной: частицы превращаются друг в друга, при этом, вообще говоря, меняется их общее число. Эти превращения можно разложить на элементарные акты, и существенно, что *каждое элементарное превращение происходит в одной точке пространства-времени.*

Поэтому будем называть такие превращения в точке *локальными взаимодействиями.*

Мы знаем уже, что состояние локализации в точке x пространства-времени имеет вид $\psi_x \in \mathscr{H}_D$, где $\psi_x(x') = \delta(x-x')F$. Следовательно, каждое такое состояние характеризуется (кроме точки x, в которой происходит локализация) только вектором $F \in \mathscr{L}_D$, описывающим поляризацию, спиновое состояние частицы. Чтобы описать локальное взаимодействие, нужно указать, векторы каких пространств $\mathscr{L}_D$ могут превращаться друг в друга и с какой амплитудой вероятности. Поэтому локальное взаимодействие описывается набором представлений $D_1, \ldots, D_n$ группы Лоренца и отображением

$$\gamma_x\colon \mathscr{L}_{D_1} \times \ldots \times \mathscr{L}_{D_n} \to \mathbb{C},$$

которое сопоставляет каждому набору векторов $(F_1, \ldots, F_n) \in \mathscr{L}_{D_1} \times \ldots \times \mathscr{L}_{D_n}$ амплитуду перехода их друг в друга.

Мы уже говорили в п. 6.2.6 в связи с причинным пропагатором о том, что локализованное состояние можно интерпретировать как состояние частицы или античастицы, причем при переходе от одной интерпретации к другой процесс уничтожения локализованного состояния меняется на процесс рождения и наоборот. То же самое можно повторить в связи с амплитудой локального взаимодействия. В большинстве случаев мы будем пользоваться такой интерпретацией локальных взаимодействий, входящих в амплитуду, при которой функция γ_x линейна по каждому из своих аргументов, т. е. описывает уничтожение (аннигиляцию) соответствующих локализованных состояний. Тогда γ_x полностью задается матрицей $\gamma_{i_1 \ldots i_n}(x)$ и имеет вид

$$\gamma_x(F_1, \ldots, F_n) = \gamma_{i_1 \ldots i_n}(x) F_1^{i_1} \ldots F_n^{i_n}.$$

Взаимодействие, происходящее в точке $x \in \mathscr{X}$, должно быть инвариантно относительно преобразований из группы Пуанкаре, которые оставляют эту точку на месте. Наиболее общее преобразование из группы Пуанкаре, обладающее этим свойством, имеет вид $x_T l x_T^{-1}$, $l \in L$. Используя общие формулы для координатного представления группы Пуанкаре, легко убеждаемся, что локализованное состояние с поляризацией $F \in \mathscr{L}_D$ переходит при этом преобразовании в состояние $D(l)F$ (в той же точке). Следовательно, требование инвариантности взаимодействия сводится к тому, чтобы выражение $\gamma_x(F_1, \ldots, F_n)$ было *инвариантом группы Лоренца.*

Для того чтобы взаимодействие было лоренц-инвариантно, матрица γ_x должна быть набором *коэффициентов Клебша — Гордана*, выделяющих из произведения $D_1 \otimes \ldots \otimes D_n$ тождественное (тривиальное) представление группы Лоренца. Если в локальном взаимодействии участвуют частицы, характеризуемые представлениями $D_1, \ldots, D_n$, то между этими частицами возможно столько качественно различных видов взаимодействий, сколько раз тождественное представление содержится в произведении $D_1 \otimes \ldots \otimes D_n$.

Если задана одна такая тривиальная неприводимая компонента, то амплитуда локального взаимодействия определена тем самым с точностью до произвольного множителя — *константы взаимодействия.* Этот множитель может, вообще говоря, зависеть от точки x, в которой происходит взаимодействие. Однако, поскольку вся теория предполагается пуанкаре-инвариантной, естественно предположить, что и взаимодействие не зависит от того, в какой точке оно происходит. Будем считать поэтому, что $\gamma_x = \gamma = \mathrm{const}$. В некоторых случаях набор представлений $D_1, \ldots, D_n$ таков, что тождественное представление содержится в произведении этих представлений ровно один раз. Это значит, что между данными частицами возможен лишь один тип взаимодействия. Для того чтобы такое взаимодействие было полностью задано, достаточно задать лишь константу взаимодействия.

Групповые соображения проливают дополнительный свет на роль частиц и античастиц в локальном взаимодействии. Частица отличается от античастицы знаком массы и поведением во времени. Эти отличия описываются в рамках группы трансляций пространства-времени. Но они не существуют в рамках более узкой группы $x_T L x_T^{-1}$, описывающей симметрию локализованных состояний. *Относительно локализованного состояния не имеет смысла вопрос о том, является ли оно состоянием частицы или античастицы, как и вопрос о массе.*

Замечания. 1. Зависимость матрицы локального взаимодействия γ_x от точки пространства-времени можно ввести для того, чтобы описать процедуру *асимптотического* (в бесконечном прошлом и в бесконечном будущем) *выключения взаимодействия* или для исследования локальных свойств амплитуд процессов.

2. При описании локального взаимодействия можно считать точки локализации $x_1, \ldots, x_n$ взаимодействующих состояний $\psi^{(1)}_{x_1}, \ldots, \psi^{(n)}_{x_n}$, вообще говоря, различными. Тогда амплитуда локального взаимодействия зависит от этих точек, но сосредоточена на поверхности $x_1 = \ldots = x_n$. Если амплитуда равна произведению дельта-функций $\delta(x_1 - x_2) \ldots \delta(x_{n-1} - x_n)$, получается прежний результат, если же она выражается как результат дифференцирования этого произведения, то получаются взаимодействия, возможность которых не была учтена ранее. В квантовой теории полей такие взаимодействия описываются лагранжианом взаимодействия, зависящим не только от полей, но и от их *производных.*

2. Амплитуда реального процесса. Мы ввели до сих пор амплитуды вероятности некоторых квантовых переходов, в которых

могут участвовать элементарные частицы. Были рассмотрены переходы трех типов: 1) переход реального состояния частицы $\varphi_{mj} \in \mathscr{H}^{\pm}_{mj}$ или, что то же, $\psi_{mj} = J^{\pm}_{mj}\varphi_{mj} \in \mathscr{H}_D$ в состояние, локализованное в точке $\psi_x \in \mathscr{H}_D$, совершается с амплитудой вероятности

$$A(\psi_x, \varphi_{mj}) = (\psi_x, \psi_{mj})_D = \bar{F}\psi_{mj}(x).$$

Этот процесс можно назвать *локализацией* реального состояния. Обратный процесс перехода состояния, локализованного в точке, в реальное состояние происходит с амплитудой

$$A(\varphi_{mj}, \psi_x) = (\psi_{mj}, \psi_x)_D = \bar{\psi}_{mj}(x) F.$$

Этот переход можно назвать *материализацией* локализованного состояния. 2) *Рождение пары локализованных состояний* $\psi_x, \psi_{x'}$ происходит с амплитудой вероятности

$$\bar{F}\Pi^p_{mj}(x - x')\bar{F}^{\mathrm{T}|}.$$

Наконец, 3) аннигиляция состояний, локализованных в одной точке, посредством *локального взаимодействия*, происходит с амплитудой

$$\gamma(F_1, \ldots, F_n) = \gamma_{i_1 \ldots i_n} F_1^{i_1} \ldots F_n^{i_n}.$$

Оговоримся еще раз, что интерпретация локализованных состояний содержит произвол. Всегда можно перейти к комплексно-сопряженным состояниям, изменив одновременно направление процессов. Поэтому можно считать, что локальное взаимодействие описывает рождение нескольких локализованных состояний, а причинный пропагатор — аннигиляцию пары локализованных состояний. Еще одна возможность, использованная при первоначальном определении причинного пропагатора, состоит в том, что он интерпретируется как амплитуда перехода одного локализованного состояния в другое — *причинное распространение.* Этот вариант во многих случаях удобнее. Однако в этом случае локальное взаимодействие следует интерпретировать как уничтожение одних и рождение других состояний.

Постулируем, что *любой реальный процесс может происходить лишь как последовательность элементарных актов этих трех типов.* Тогда подсчет амплитуды вероятности реального процесса сводится к перечислению всех последовательностей элементарных актов, которые могут привести к данному процессу, — *альтернатив* этого процесса, и суммированию амплитуд всех альтернатив. Каждая альтернатива представляет собой совокупность элементарных актов, приводящих в итоге к данному реальному процессу. Для нахождения амплитуды вероятности этой альтернативы амплитуды входящих в нее элементарных актов следует перемножить (правило перемножения амплитуд вероятности). Поскольку реальный процесс может произойти через посредство любой из своих альтернатив, для нахождения амплитуды вероятности реального процесса следует сложить амплитуды вероятности всех альтернатив (правило сложения амплитуд).

Для перечисления альтернатив, приводящих к некоторому реальному процессу, удобно использовать *диаграммы* или *графы Фейнмана*. В такой диаграмме частицы изображаются линиями, причем разным частицам (отличающимся массой m, спином j или представлением D группы Лоренца) соответствуют *линии* разного типа (например, прямые, волнистые, штриховые и т. д.). Локальное взаимодействие γ изображается на диаграмме точкой, в которой сходятся несколько линий — в соответствии с тем, сколько и каких частиц участвует в данном взаимодействии. Такая точка называется *вершиной* диаграммы. Если в теории имеются локальные взаимодействия нескольких типов, то каждому из них сопоставляется своя вершина.

Линия может соединять две вершины. В таком случае она называется *внутренней линией* и изображает причинное распространение частицы или, что то же, рождение или аннигиляцию пары локализованных состояний. Если линия одним концом входит в вершину, а другой конец ее остается свободным, то такая линия соответствует реальному состоянию частицы и называется *внешней линией* или *хвостом* диаграммы. При этом каким-то образом должно быть отмечено, соответствует ли эта линия состоянию частицы до реакции или после нее. Например, можно считать, что направление вниз на диаграмме соответствует прошлому, а направление вверх — будущему. Тогда хвосты, направленные вниз, изображают частицы до реакции, а хвосты, направленные вверх, — после реакции.

Если каждой вершине диаграммы Фейнмана сопоставляется некоторая точка x в пространстве Минковского, каждой внешней линии — реальное состояние соответствующей частицы, а каждому концу внутренней линии — некоторый вектор F соответствующего пространства $\mathscr{L}_D$, то диаграмма очевидным образом описывает альтернативу реального процесса. Изменение точек x, приписанных вершинам, и векторов F, приписанных концам внутренних линий, дает другую альтернативу того же процесса (состояния, соответствующие внешним линиям, остаются неизменными). Чтобы перечислить все такие альтернативы, нужно заставить x пробегать все пространство Минковского, а F — множество всех базисных векторов $\{e_i\}$ пространства $\mathscr{L}_D$. При каждом выборе значений диаграмме соответствует некоторая амплитуда вероятности. Все такие амплитуды следует сложить, т. е. проинтегрировать по x и просуммировать по i. Аналогичное вычисление проводится для каждой диаграммы Фейнмана с заданными внешними линиями и затем берется сумма по всем таким диаграммам.

Замечание. Внешним линиям диаграммы Фейнмана правильнее сопоставить величины

$$i\varepsilon_j \int\limits_{\Sigma} d\sigma^{\mu}(x')\, \Pi^c_{mj}(x-x')\, \overleftrightarrow{\partial'_{\mu}} \psi^{\pm}_{mj}(x') = \theta^{\pm}_{\Sigma}(x)\, \psi^{\pm}_{mj}(x);$$

$$i\varepsilon_j \int\limits_{\Sigma} d\sigma^{\mu}(x')\, \bar{\psi}^{\pm}_{mj}(x')\, \overleftrightarrow{\partial'_{\mu}} \Pi^c_{mj}(x'-x) = \theta^{\mp}_{\Sigma}(x)\, \bar{\psi}^{\pm}_{mj}(x),$$

где интегрирование ведется по пространственноподобным поверхностям, а функция θ^{+}_{Σ} (соответственно θ^{-}_{Σ}) равна единице в точках, лежащих позднее (раньше) поверхности Σ, и нулю

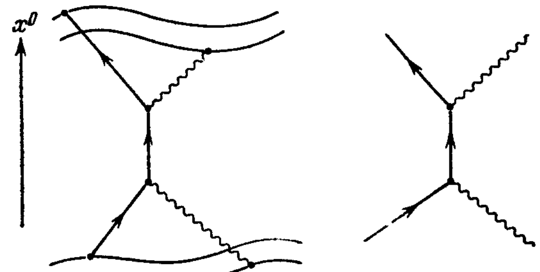


Рис. 12. Взаимодействие в пределах между заданными пространственно-временными поверхностями и взаимодействие во всем пространстве (S-матрица).

вне этой области. Фактически при этом выражения для амплитуд останутся такими же, как и при прежнем определении внешних линий, однако интегрирование по положениям вершин, в которые входят эти линии, будет производиться лишь по области, лежащей в одних случаях позже, в других — раньше поверхности Σ. Таким образом получается амплитуда процесса, в котором входящие и выходящие частицы фиксируются наблюдателем в определенные моменты времени. Если эти моменты времени (пространственноподобные поверхности) устремляются для входящих частиц в бесконечное прошлое, а для выходящих — в бесконечное будущее, получается прежнее выражение (S-матрица в терминологии квантовой теории поля). Наличие бесконечностей и необходимость их устранения вносит усложнения в это рассуждение.

3. Правила сложения амплитуд. В процессе локального взаимодействия локализованные состояния могут рождаться и поглощаться с различными поляризациями, что составляет различные альтернативы процесса. Амплитуды этих альтернатив нужно складывать с учетом нормировки векторов поляризации, что не так уж просто, потому что эти векторы не могут быть выбраны все ортонормированными (соответствующая эрмитова форма индефинитна). Однако здесь, как и в других случаях, требование инвариантности сразу дает правильный ответ: *волновые функции и причинные пропагаторы должны свертываться в вершине диаграммы Фейнмана с помощью матрицы γ лоренц-инвариантным образом.*

После того как в вершинах каждой диаграммы описанным образом свернуты причинные пропагаторы, волновые функции и матрицы локальных взаимодействий, нужно произвести интегрирование по положениям всех вершин в пространстве Минковского. Это дает амплитуду перехода через все альтернативы, описываемые данной диаграммой. Проделав те же операции с каждой из диаграмм, описывающих тот же процесс, и складывая получившиеся амплитуды, получаем полную амплитуду процесса. При последнем суммировании, однако, важны не только абсолютные величины, но и фазы складываемых амплитуд. В связи с этим нужно сделать еще два замечания.

Поскольку причинный пропагатор фермиона антисимметричен, то две вершины, прилегающие к внутренней линии, становятся неравноправными. Поэтому *фермионам сопоставляются направленные линии* (линии со стрелкой) и вводится условие, согласно которому аргумент x' и индекс i' пропагатора $[\Pi^p_{mj}(x-x')]^{ii'}$ сопоставляются той вершине, из которой выходит данная внутренняя линия, а аргумент x и индекс i — вершине, в которую она входит. При характеризации локального взаимодействия должно быть указано, какие фермионные линии входят в вершину, а какие — выходят из нее.

Из-за асимметрии фермионных линий для фермионов удобнее пользоваться причинным пропагатором в форме $[\Pi^c_{mj}(x-x')]^i_{i'}$, который интерпретируется не как рождение пары, а как причинное распространение локализованного состояния из точки x' в точку x. Если мы условимся пользоваться пропагатором в такой форме, то и локальное взаимодействие следует интерпретировать не как аннигиляцию некоторого количества локализованных состояний, а как переход одних локализованных состояний в другие. Матрица локализованного состояния в этом случае должна содержать как нижние, так и верхние индексы.

Вторая оговорка, которую требуется сделать, связана с *замкнутыми фермионными линиями.* Дело в том, что каждая вершина обязательно содержит четное число фермионных линий (иначе амплитуда локального взаимодействия не может быть инвариантом группы Лоренца), причем обязательно часть линий входит в вершину, а часть выходит из нее. Поэтому диаграмма может содержать замкнутые фермионные линии (петли).

Предположим, что диаграмма содержит две петли и каждая из петель содержит звено, соответствующее некоторому данному фермиону. Возьмем локализованное состояние, соответствующее

концу такого звена на одной из петель, и еще одно состояние, соответствующее концу выделенного звена на второй петле. Поменяем местами эти состояния. При этом получится новая диаграмма,которой сопоставляется другая амплитуда. В соответствии с принципом симметризации тождественных частиц (п. 6.2.6) примем, что новая амплитуда отличается знаком. В то же время очевидно, что в новой диаграмме вместо двух петель имеется лишь одна. Поэтому такое предположение означает введение дополнительного правила, по которому *каждому фермионному циклу (петле) в диаграмме сопоставляется множитель* (—1) *в амплитуде вероятности.*

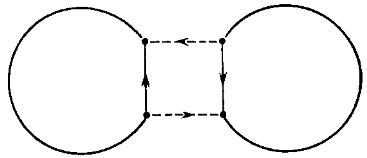


Рис. 13. Изменение числа фермионных петель при перестановке виртуальных локализованных состояний.

Конечно, в любой нетривиальной теории число диаграмм, дающих вклад в данный реальный процесс, бесконечно велико. Однако практически это не приводит к трудностям в тех случаях, когда взаимодействия достаточно слабы, т. е. абсолютные величины всех матричных элементов матриц локальных взаимодействий малы. В этом случае можно считать, что основной вклад в полную амплитуду дают диаграммы с небольшим числом вершин.

Гораздо более серьезные и не устраненные до сих пор трудности возникают из-за того, что при интегрировании по всевозможным положениям вершин диаграммы, т. е. по положениям точек, в которых происходят локальные взаимодействия, неизбежно учитываются и такие диаграммы, в которых несколько вершин соответствуют одной и той же точке пространства Минковского. Совпадение вершин диаграммы описывает процесс, происходящий в одной точке, т. е. локальное взаимодействие. Такая альтернатива должна была бы описываться диаграммой с меньшим числом вершин, и учет ее в данной диаграмме является некорректным.

Если бы амплитуда, соответствующая диаграмме, была регулярной функцией от положения вершин, то совпадение вершин, соответствующее интегрированию по множеству меры нуль, давало бы нулевой вклад и не приводило к неприятностям. На самом же деле из-за сингулярности причинного пропагатора совпадение вершин не только дает существенный вклад в интеграл, но приводит для большинства диаграмм к *расходимости* этого интеграла. Проблема, связанная с появлением этих расходимостей, является основной трудностью релятивистской квантовой теории. Практически для большого класса взаимодействий — так называемых *перенормируемых взаимодействий* — эта трудность обходится за счет специальной процедуры *устранения бесконечностей.* Однако с принципиальной точки зрения появление бесконечностей даже на промежуточном этапе является недопустимым. Удовлетворительного решения этой проблемы пока не найдено. Для того чтобы познакомиться с методами устранения расходимостей, читатель может обратиться к литературе по квантовой теории поля, например к книгам Боголюбова, Ширкова [2] и Боголюбова, Логунова, Тодорова [1].

§ 6.4. Переход к локальной формулировке теории частиц

Найденная на основании определенных физических предположений амплитуда вероятности перехода одного локализованного состояния в другое оказалась равной причинному пропагатору $\Pi^c_{mj}(x-x')$. Она имеет нелокальный характер, т. е. допускает переходы с изменением точки локализации. Эта картина, однако, не соответствует той формуле сложения амплитуд, которая была приведена в п. 4.3.1. Можно восстановить соответствие, если интерпретировать причинный пропагатор не как матрицу взаимных переходов локализованных состояний, а как обратную по отношению к ней матрицу, т. е. нормировочный оператор. При этом сама матрица взаимных переходов оказывается локальной: $\Lambda_{mj}(x, x') = \Lambda_j(\partial)\,\delta(x-x')$. Так в теории появляется дифференциальный оператор $\Lambda_j(\partial)$, который в теории полей фигурирует как левая часть уравнения поля. Причинный пропагатор должен быть функцией Грина этого уравнения (это следует из определения нормировочного оператора). В следующей главе это требование будет использовано для уточнения выбора причинного пропагатора и уравнения поля.

1. Сложение амплитуд и нормировочный оператор. Мы получили причинный пропагатор как амплитуду вероятности перехода одного локализованного состояния в другое. В этом, однако, следует разобраться более детально. В п. 4.3.1 мы видели, что если процесс перехода $\varphi' \to \varphi$ совершается через некоторый набор альтернатив e_i, то правило вычисления амплитуды вероятности такого процесса выражается формулой

$$A(\varphi, \varphi') = \sum_{ij} A(\varphi, e_i)\left(A^{-1}\right)^{ij} A(e_j, \varphi'),$$

где A^{-1} — матрица, обратная по отношению к матрице взаимных переходов альтернативных промежуточных состояний: $A_{ij} = A(e_i, e_j)$. Это правило сложения амплитуд можно вывести для простого случая, когда амплитуда выражается скалярным произведением. В общем же случае это правило является постулатом, который можно положить в основу формулировки квантовой механики.

Формулу сложения амплитуд можно записать как

$$A(\varphi, \varphi') = A(\varphi, P\varphi'),$$

где оператор P определяется следующим образом:

$$P\varphi = \sum_{ij} e_i \left(A^{-1}\right)^{ij} A(e_j, \varphi).$$

Нетрудно видеть, что этот оператор является проектором: $P^2 = P$. Мы приходим, таким образом, к выводу, что амплитуды квантовых переходов всегда выражаются проекторами. Формула для амплитуды перехода остается справедливой, если записать ее в виде

$$A(\varphi, \varphi') = (\varphi, P\varphi'),$$

где форма $(\,,\,)$ выбрана так, что $(\varphi, e_i) = A(\varphi, e_i)$. Именно в такой ситуации и используются обычно проекторы. Имеется некоторая форма $(\,,\,)$, обычно невырожденная, т. е. являющаяся скалярным произведением в некотором гильбертовом пространстве (может быть, индефинитном), но в силу физических условий или в силу некоторого физического принципа реальные переходы описываются вырожденной формой $A(\,,\,)$. Она, однако, легко может быть найдена, если известно скалярное произведение $(\,,\,)$ и проектор P. Именно такой ход рассуждений мы использовали, когда вычисляли амплитуду распространения частицы из точки в точку $\Pi^{\pm}_{mj}(x-x')$.

Вернемся к формуле сложения амплитуд. Мы видим, что для правильного сложения амплитуд в случае произвольного набора альтернатив $\{e_i\}$ в формуле сложения должна фигурировать матрица A^{-1}. Эта матрица обращается в единицу, если набор альтернатив является ортонормированным. Поэтому ее естественно назвать *нормировочной матрицей* или *нормировочным оператором*. Нормировочная матрица по определению является обратной по отношению к *матрице взаимных переходов альтернативных промежуточных состояний* e_i.

Нетрудно заметить, однако, что нормировочная матрица фигурирует в формуле сложения таким образом, что ее легко принять за саму амплитуду перехода. Действительно, при наивном подходе формулу сложения амплитуд можно интерпретировать как амплитуду тройного перехода: перехода $\varphi' \to e_j$ с амплитудой $A(e_j, \varphi')$, затем перехода $e_j \to e_i$ с амплитудой $(A^{-1})^{ij}$ и, наконец, перехода $e_i \to \varphi$ с амплитудой $A(\varphi, e_i)$. Однако неоднозначность интерпретации лишь кажущаяся и возникает вследствие того, что мы обращаемся с векторами альтернатив e_i так, как можно обращаться лишь с ортонормированным набором альтернатив.

Тем не менее в ряде случаев это оказывается оправданным. Если иметь в виду эти случаи и интерпретировать величины $(A^{-1})^{ij}$ как амплитуды переходов, то можно сказать, что использование в формуле сложения амплитуд неортонормированных промежуточных состояний можно скомпенсировать введением взаимных переходов этих состояний с правильно подобранными амплитудами. При этом выражение «правильно подобранные амплитуды» подразумевает набор амплитуд $(A^{-1})^{ij}$, т. е. нормировочную матрицу.

2. Причинный пропагатор как нормировочный оператор. Мы получили причинный пропагатор с помощью следующей процедуры. Сначала были найдены проекторы $\Pi^{\pm}_{mj}$, описывающие переходы локализованных состояний друг в друга через реальные состояния частицы и античастицы с массой m и спином j. На этом этапе все согласовалось с только что описанной общей схемой, так как амплитуда перехода локализованных состояний выражалась в виде $A^{\pm}_{mj}(\psi_x, \psi_{x'}) = \left(\psi_x, \Pi^{\pm}_{mj}\psi_{x'}\right)_D$, т. е. полностью описывалась некоторым проектором. Далее, однако, было постулировано, что в реальных процессах фигурируют не эти амплитуды, а причинная амплитуда. Она получается из амплитуд $A^{\pm}$ предположением, что при $x^0 > x'^0$ переход совершается посредством A^+, а при $x^0 < x'^0$ — посредством A^-. Тогда полная амплитуда перехода получилась в виде

$$A^c_{mj}(\psi_x, \psi_{x'}) = \left(\psi_x, \Pi^c_{mj}\psi_{x'}\right)_D,$$

где оператор Π^c_{mj} обычным образом определяется через «непрерывную матрицу» или ядро $\Pi^c_{mj}(x - x')$:

$$\Pi^c_{mj}\psi(x) = \int dx'\, \Pi^c_{mj}(x - x')\, \psi(x').$$

Теперь, однако, согласие с общей схемой нарушилось, потому что переход локализованных состояний друг в друга описывается оператором Π^c_{mj}, который не является проектором. Чтобы восстановить согласие, есть только один путь. Следует предположить, что причинный пропагатор — это не настоящая амплитуда перехода, а одна из тех фиктивных амплитуд, которые возникают в процессе вычислений из-за пользования ненормированными промежуточными состояниями. Другими словами, нам остается предположить, что причинный пропагатор на самом деле является нормировочной матрицей по отношению к некоторой истинной матрице взаимных переходов локализованных состояний

$$A(\psi_x, \psi_{x'}) = \Lambda_{mj}(x, x').$$

Поскольку обе матрицы являются непрерывными, удобнее говорить о соответствующих интегральных операторах, для которых они служат ядрами.

Итак, тот факт, что пропагатор Π^c_{mj} не является проектором, с необходимостью приводит нас к требованию, чтобы существовал обратный по отношению к нему оператор $i\Lambda_{mj}$:

$$\Lambda_{mj}\Pi^c_{mj} = -i \cdot \mathbb{1}.$$

Матрица $\Lambda_{mj}(x, x')$ описывает взаимные переходы локализованных состояний, причем на этот раз не фиктивные, введенные для нормировки, а истинные переходы. Естественно предположить, что сами эти переходы являются локальными, т. е. что переходить друг в друга могут лишь состояния, локализованные в одной и той же точке. Это значит, что матрица Λ_{mj} должна быть обобщенной функцией, сосредоточенной на поверхности $x = x'$, т. е.

$$\Lambda_{mj}(x, x') = \Lambda_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x - x'),$$

где Λ_j — полином. Теперь требование, чтобы оператор Λ_{mj} был обратным по отношению к Π^c_{mj}, сводится к уравнению

$$\Lambda_j(\partial)\,\Pi^c_{mj}(x - x') = -i\delta(x - x'),$$

и мы приходим к выводу, что *причинный пропагатор должен быть функцией Грина для некоторого дифференциального уравнения.*

В п. 6.2.4 было показано, что полный причинный пропагатор $\Pi^c_m(x - x')$, описывающий причинное распространение всех спинов, содержащихся в представлении D, является функцией Грина уравнения Клейна — Гордона. Однако функция $\Pi^c_{mj} = S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)\Pi^c_m$, описывающая распространение одного спина, вообще говоря, уже не обладает этим свойством. Поэтому требование, чтобы причинный пропагатор был функцией Грина, накладывает определенные требования на выбор оператора $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ и отчасти (а в простейших случаях полностью) ликвидирует произвол, имеющийся в определении этого оператора. Методика выбора операторов S_j, Λ_j будет рассмотрена в следующей главе. Отметим, что в рамках квантовой теории полей дифференциальный оператор $\Lambda_j(\partial)$ возникает как левая часть *уравнения поля.*

После введения амплитуды $\Lambda_{mj}(x, x')$ расчет процесса, соответствующего внутренней линии диаграммы Фейнмана, является точным аналогом простой модели, рассмотренной в пункте 1. Действительно, можно считать, что внутренняя линия описывает переход через локализованные состояния (альтернативы). Истинная амплитуда перехода локализованных состояний друг в друга равна $\Lambda_{mj}(x, x')$. Однако при сложении амплитуд для нормировки нужно ввести обратный оператор Π^c_{mj}. Таким образом, возникают фиктивные переходы между локализованными состояниями, компенсирующие отсутствие нормировки этих состояний. Нормировочный оператор Π^c_{mj} был бы не нужен, если бы истинная амплитуда взаимных переходов локализованных состояний была равна $\delta(x - x')$. Таким образом, расчет каждой внутренней линии становится совершенно понятным. Однако следует еще рассмотреть с той же точки зрения всю диаграмму в целом.

3*. Вычисление нормировочного оператора по теории возмущений. В предыдущем пункте теория частиц в терминах амплитуд перехода доформулирована таким образом, что для фиксации теории достаточно задать 1) дифференциальный оператор $\Lambda_j(\partial)$, описывающий амплитуды переходов локализованных состояний, при которых меняется лишь точка локализации, но не меняется число частиц и их тип; 2) амплитуды γ локальных взаимодействий, т. е. переходы локализованных состояний с изменением типов и даже числа частиц. И та, и другая амплитуды носят локальный характер, что согласуется с природой локализованных состояний. Амплитуда любого процесса вычисляется сведением этого процесса к цепочке превращений локализованных состояний. Амплитуда каждой такой цепочки полностью описывается в терминах амплитуды γ и нормировочного оператора Π_m^c к амплитуде Λ_j.

Утверждение о том, что теория полностью фиксируется заданием амплитуд Λ_j и γ, не совсем точно, потому что оператор Π_{mj}^c, обратный по отношению к дифференциальному оператору Λ_j, определяется неоднозначно. К функции $\Pi_{mj}^c(x-x')$ можно прибавить любую функцию $\Pi_{mj}^0(x-x')$, являющуюся решением уравнения

$$\Lambda_j(\partial)\,\Pi_{mj}^0(x-x')=0.$$

Новое ядро также определяет оператор, являющийся правым обратным (а при ограничении пространства функций, в котором действуют операторы — и левым обратным) по отношению к Λ_j. Значит, для фиксации теории следует наложить дополнительные условия, устраняющие этот произвол. Фактически построение, проделанное в этой главе, и представляет собой одну из формулировок этого условия. Она состоит в том, что в качестве нормировочного оператора к амплитуде Λ_j следует выбрать причинный пропагатор, причем причинность определяется как условие распространения частицы вперед, а античастицы — назад во времени.

Формулировку теории, основанную на амплитудах Λ_j и γ, можно считать уже удовлетворительной с логической точки зрения. Хотя фактически возникающие при расчете бесконечности являются принципиальным дефектом теории, можно было бы надеяться устранить этот дефект, не отклоняясь существенно от общей схемы, а лишь уточнив некоторые детали ее (например, рассматривая в качестве альтернатив не локализованные состояния, а некоторый другой набор состояний). Эта схема соответствует в квантовой теории полей разложению S-матрицы в ряд *теории возмущений.* При этом оператору Λ_j соответствует член *свободного лагранжиана* $\mathscr{L}_0=\bar\psi\Lambda_j\psi$, а амплитуде локального взаимодействия γ соответствует *лагранжиан взаимодействия* $\mathscr{L}_I=\gamma(\psi_1,\ldots,\psi_n)$.

Попытаемся, однако, еще модифицировать всю схему рассуждений таким образом, чтобы окончательно свести расчет полной амплитуды к простой модели перехода через некоторый набор альтернатив. Вернемся к этой модели (пункт 1) и предположим, что амплитуда взаимных переходов альтернатив A состоит из двух частей:

$$A=A_0-\gamma,$$

причем компонента γ мала, так что можно придать смысл разложению в степенной ряд по γ, а компонента A_0 обратима, т. е. существует $A_0^{-1}=\Pi_0$. Тогда

$$A^{-1}=\Pi=(1-\Pi\gamma)^{-1}\Pi$$

и, используя разложение в степенной ряд выражения $(1-x)^{-1}$, получим для нормировочного оператора ряд

$$\Pi=\Pi_0+\Pi_0\gamma\Pi_0+\Pi_0\gamma\Pi_0\gamma\Pi_0+\ \ldots$$

Подставляя это выражение в формулу сложения амплитуд, мы получаем для полной амплитуды ряд, который естественно интерпретируется в терминах многократных переходов. При этом чередуются переходы двух типов, описываемые амплитудами Π_0 и γ. Таким образом, если матрица взаимных переходов A разбивается на две части, из которых одна обратима, т. е. сама может служить матрицей взаимных переходов, то вычисление можно производить и интерпретировать таким способом, что эти части амплитуды фигурируют независимо друг от друга. При этом возникают цепочки многократных переходов.

Это наводит на мысль, что те цепочки и даже сети переходов, которые описываются диаграммами Фейнмана, также являются результатом искусственного разделения полной амплитуды перехода локализованных состояний на две части Λ_j и γ и что объединение этих частей позволит описывать взаимодействие проще. Это оказывается верным, и реализация подобной программы позволяет перейти к локальной формулировке теории частиц, эквивалентной обычной квантовой теории полей. Мы, однако, не будем останавливаться на этом более детально.

Глава 7
ПРОПАГАТОРЫ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ

Квантовая частица описывается представлением группы Лоренца $D(L)$, массой m и спином j. При этом причинный пропагатор ее имеет вид $\Pi^c_{mj} = S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)\Pi^c_m$, где Π^c_m — пропагатор, описывающий распространение всех спинов, содержащихся в представлении D. Вид дифференциального оператора S_j в основном определяется представлением D и спином j, однако здесь остается произвол. В этой главе излагаются методы доопределения оператора S_j, основанные на требовании, чтобы причинный пропагатор был функцией Грина: $\Lambda_j(\partial)\Pi^c_{mj} = -i\cdot\mathbb{1}$ (см. § 6.4).

Ортогональные проекторы $\Pi_{j'}$, осуществляющие разложение представления $D\downarrow R$ на неприводимые $\Delta_{j'}(R)$, определяют дифференциальные операторы $S_{j'}$, которые образуют множество ортогональных проекторов на пространстве решений уравнения Клейна — Гордона, однако в пространстве $\mathscr{H}_D$ не являются проекторами и не ортогональны. Можно построить из них ортогональные проекторы, если определенным образом нормировать операторы S_j умножением отдельных членов в них на отрицательные степени даламбертиана: $\Box^{-k}$. Однако получающиеся проекторы являются уже интегродифференциальными (содержат отрицательные степени дифференциального оператора — сингулярности).

Набор ортогональных проекторов $S_{j'}$ позволяет легко построить операторы $\Lambda_j(\partial)$, $d_j(\partial)$, произведение которых дает оператор Клейна — Гордона. Затем определенными методами можно перейти к операторам $\tilde{\Lambda}_j$, $\tilde{d}_j$, имеющим то же произведение, но не содержащим сингулярностей. Тогда причинный пропагатор $\Pi^c_{mj} = \tilde{d}_j\Pi^c_m$ удовлетворяет уравнению $\tilde{\Lambda}_j\Pi^c_{mj} = -i\cdot\mathbb{1}$.

Эта методика пригодна как для низших спинов $j \leqslant 1$, так и для высших $j > 1$. Однако в случае низших спинов, описываемых низшими представлениями группы Лоренца D^{pq}, $p+q \leqslant 1$, причинный пропагатор и уравнение поля находятся однозначно

и весь расчет можно провести, не переходя к интегродифференциальным операторам (не вводя сингулярностей). Для высших же спинов решение неоднозначно и требуются особые приемы для исключения сингулярностей.

Глава начинается с примеров спиновых частиц и нахождения уравнений и пропагаторов для низших спинов, и лишь в конце ее рассматривается (не во всей полноте) общий случай.

§ 7.1. Примеры частиц со спином

В этом параграфе рассматриваются простейшие представления группы Лоренца (скалярное, спинорное, векторное и тензорное), и развитый ранее формализм для описания спиновых частиц применяется к частицам, соответствующим этим представлениям. Цель состоит в том, чтобы в каждом случае найти дифференциальный оператор $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$, выделяющий определенный спин. Неопределенности, остающиеся в этом операторе, обсуждаются в следующих параграфах.

1. Скалярная частица. *Скалярное представление* $D^{00}(L)$ группы Лоренца одномерно, содержит лишь один спин $j=0$ и может описывать лишь частицу спина 0. Проектор, выделяющий нужный спин, тривиален: $\Pi^{\pm}_0 = 1$, $S^{\pm}_0(v) \equiv 1$. В результате для волновой функции частицы и причинного пропагатора получаем

$$\psi(x) = \int dv\, e^{-im(v,\,x)}\varphi(v);\quad \Pi^c_{m0}(x-x') = \Pi^c_m(x-x').$$

Отметим, что все сказанное относится не к любой частице спина 0, а к частице спина 0, описываемой скалярным представлением D^{00} группы Лоренца. При рассмотрении векторного представления мы встретимся с другим описанием частицы спина 0.

2. Спинорная частица. *Спинорное представление* (которое иногда называют *биспинорным*) $D = D^{\frac{1}{2}0}\oplus D^{0\frac{1}{2}}$ описывает частицу спина $^1/_2$ и соответствующую ей античастицу. Представление удобно описывать в терминах четырехмерных гамма-матриц Дирака $\{\gamma^\mu \mid \mu = 0, 1, 2, 3\}$ с правилом антикоммутации

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu},\quad \{\eta^{\mu\nu}\} = \mathrm{Diag}(1, -1, -1, -1),$$

и свойствами эрмитовского сопряжения

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0.$$

Представление тогда можно описать следующим образом. Представим произвольный элемент группы Лоренца $l \in L$ (который будем понимать как матрицу) в виде экспоненты: $l = \exp\Omega$, т. е. найдем генератор Ω этого элемента. Пусть четырехрядная матрица Ω имеет вид $\Omega = \{\Omega^\mu{}_\nu \mid \mu, \nu = 0, 1, 2, 3\}$.

Опуская индекс μ, с помощью тензора Минковского $\eta_{\mu\nu}$ получим матрицу $\{\omega_{\mu\nu}\}$, $\omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\lambda}\Omega^{\lambda}{}_{\nu}$. Если l — элемент группы Лоренца, то соответствующая ему матрица $\omega = \{\omega_{\mu\nu}\}$ антисимметрична. Можно записать $\omega = \eta\Omega = \eta \ln l$. Спинорное представление определяется через матрицу $\{\omega_{\mu\nu}\}$ и гамма-матрицы следующим образом:

$$D(l) = \exp({}^1/_4 \omega_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}).$$

Пользуясь свойством гамма-матриц, можно теперь найти представление бустов (чистых лоренцевских поворотов).

Задача 1. Показать, что если 4-скорость имеет вид $v = \{\operatorname{ch}\chi, \boldsymbol{n}\operatorname{sh}\chi\}$, где $\boldsymbol{n}$ — единичный трехмерный вектор, то

$$D(v_L) = \operatorname{ch}\frac{\chi}{2} + \gamma^0(\boldsymbol{n\gamma})\operatorname{sh}\frac{\chi}{2}, \quad D(v_L^{-1}) = \operatorname{ch}\frac{\chi}{2} - \gamma^0(\boldsymbol{n\gamma})\operatorname{sh}\frac{\chi}{2}.$$

Задача 2. Показать, что инвариантная форма в пространстве $\mathscr{L}_D$ спинорного представления имеет вид $\langle F, F'\rangle_D = F^{+}\gamma^0 F'$, т. е. $\Gamma = \gamma^0$.

Выберем теперь проектор $\Pi^{+}_{1/2} = \Pi^{+}$. Наиболее общий оператор, коммутирующий со всеми вращениями, имеет вид $\Pi = {}^1/_2 (a + b\gamma^5 + c\gamma^0 + d\gamma^5\gamma^0)$, где $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Условие $\Pi^2 = \Pi$ дает связь между коэффициентами: $a = 1$, $b^2 + c^2 - d^2 = 1$. Наложим естественное требование $\Gamma\Pi = \lambda\Pi$, означающее, что отображения $J^{\pm}_{1/2}$ и $K^{\pm}_{1/2}$ согласованы со скалярными произведениями $\langle\,,\rangle_D$ и $\langle\,,\rangle_J$. Поскольку $\Gamma^2 = (\gamma^0)^2 = 1$, имеется две возможности: $\lambda = \pm 1$. Они приводят к эквивалентным картинам, так что достаточно рассмотреть одну из них, $\lambda = 1$. Из условия $\gamma^0\Pi^{+} = \Pi^{+}$ получим $c = 1$, $b = -d$. Наконец, требуя эрмитовости проектора Π^{+} относительно формы $\langle\,,\rangle_D$, т. е. $\langle\Pi^{+}F, F'\rangle_D = \langle F, \Pi^{+}F'\rangle_D$ или $\Gamma^{-1}(\Pi^{+})^{\dagger}\Gamma = \Pi^{+}$, получим окончательно $b = 0$. Это дает для оператора Π^{+} выражение

$$\Pi^{+} = {}^1/_2 (1 + \gamma^0).$$

Операция бустирования дает проектор, зависящий от скорости:

$$S^{+}_{1/2}(v) = S_{1/2}(v) = D(v_L)\Pi^{+}D(v_L^{-1}) = {}^1/_2(1 + (v, \gamma)).$$

$$S^{-}_{1/2}(v) = S_{1/2}(-v) = {}^1/_2(1 - (v, \gamma)); \quad \Pi^{-} = {}^1/_2(1 - \gamma^0).$$

Это позволяет записать причинный пропагатор в виде

$$\Pi^{c}_{m1/2}(x - x') = {}^1/_2\left[1 + \frac{i}{m}(\gamma, \partial)\right]\Pi^{c}_{m}(x - x').$$

Чтобы найти координатное представление для состояний частицы и античастицы, нужно построить операторы $J^{+}_{1/2}$: $\mathscr{L}_{1/2} \to \mathscr{L}_D$

и $J^{-}_{1/2}$: $\mathscr{L}_{1/2} \to \mathscr{L}_D$. Обозначим $J^{\pm}_{1/2} = J^{\pm}$. Они однозначно определяются требованием

$$\Pi^{\pm}J^{\pm} = J^{\pm}$$

и условием коммутации с представлениями:

$$J^{\pm}\Delta_{1/2}(r) = D(r)J^{\pm}, \qquad r \in R.$$

Выберем для представления $\Delta_{1/2}(R)$ канонический базис, векторы которого нумеруются проекцией момента: $j_3 = \pm{}^1/_2$, а для гамма-матриц — реализацию

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix},$$

где $\mathbb{1}$, $\boldsymbol{\sigma}$ — двурядные единичная матрица и матрицы Паули:

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда операторы вложения $J^{\pm}$ имеют вид

$$J^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad J^{-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а операторы проектирования

$$K^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad K^{-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с общими формулами координатное представление для состояний частицы или античастицы имеет вид

$$\psi^{\pm}(x) = \int dv e^{\mp im(v,\, x)} D(v_L) J^{\pm}\varphi^{\pm}(v), \qquad \varphi^{\pm} \in \mathscr{H}^{\pm}_{m1/2}.$$

Задача 3. Показать, что из требований $C^{-1}D(l)C = D^{*}(l)$ и $C\overset{*}{J}{}^{+} = J^{-}C_{1/2}$ оператор зарядового сопряжения C определяется однозначно и в упомянутом выше представлении равен

$$C = \lambda_C \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}; \quad |\lambda_C| = 1.$$

Указание. Предварительно показать, что $C_{1/2} = \lambda_C\sigma_2$, $|\lambda_C| = 1$.

3. Векторные частицы. *Векторное представление* $D^{1/2\,1/2}$ группы Лоренца — это то самое представление, по которому преобразуется само пространство Минковского (точнее, ассоциированное с ним векторное пространство $\mathscr{K}$). Следовательно, обозначая $D = D^{1/2\,1/2}$, получим $D^{\mu}{}_{\nu}(l) = l^{\mu}{}_{\nu}$.

Задача 4. Используя данное в п. 5.1.2 определение бустов v_L, показать, что

$$(v_L)^0{}_0 = v^0;$$
$$(v_L)^n{}_0 = (v_L)^0{}_n = v^n;$$
$$(v_L)^m{}_n = \delta^m_n + \frac{v^m v^n}{v^0+1}; \quad m,\ n = 1,\ 2,\ 3.$$

Представление D может описывать частицы спинов 0 и 1. Соответствующие проекторы Π_0, Π_1 определяются однозначно и имеют вид

$$\Pi_0 = \Pi_0^+ = \Pi_0^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Pi_1 = \Pi_1^+ = \Pi_1^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Зная их, можно вычислить зависящие от импульса проекторы $S_0(v)$ и $S_1(v)$. Они принимают особенно простой вид, если наряду с контравариантными компонентами 4-скорости $\{v^\mu\}$ ввести ковариантные $\{v_\mu\}$, $v_\mu = \eta_{\mu\nu}v^\nu$. Тогда

$$[S_0(v)]^\mu{}_\nu = v^\mu v_\nu; \quad [S_1(v)]^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - v^\mu v_\nu.$$

Эти выражения позволяют определить причинные пропагаторы векторных частиц спинов 0 и 1 с обычным квазилокальным произволом, который будет устранен в следующем параграфе.

Поскольку векторное представление осуществляется действительными матрицами, $D^*(l) = D(l)$, матрица зарядового сопряжения $C \in [D]$ и в силу неприводимости представления D кратна единичной. Из условия $I_C^2 = 1$ получаем $C = \lambda_C \cdot \mathbb{1}$, $|\lambda_C| = 1$, так что зарядовое сопряжение векторной частицы сводится к комплексному сопряжению и умножению на фазовый множитель (зарядовая четность): $I_C\psi(x) = \lambda_C\overset{*}{\psi}(x)$.

4*. Тензорные частицы. *Тензорное представление* группы Лоренца действует в пространстве тензоров второго ранга $F = \{F^{\mu\nu} | \mu,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ по закону

$$\left(D^T(l)\,F\right)^{\mu\nu} = l^\mu{}_{\mu'} l^\nu{}_{\nu'} F^{\mu'\nu'},$$

т. е. образуется как прямое произведение векторного представления на себя. Разложение этого представления на неприводимые компоненты имеет вид $D^T = D^{00} \oplus D^{10} \oplus D^{01} \oplus D^{11}$.

Антисимметричный тензор $F^{\mu\nu} + F^{\nu\mu} = 0$ преобразуется по представлению $D = D^{01} + D^{10}$ и описывает две частицы спина 1. Представление $\Delta_1(R)$ действует в пространстве трехмерных (комплексных) векторов. Введем в нем декартову систему координат, так что вектор $f \in \mathscr{L}_1$ определяется своими компонентами $\{f^i | i = 1,\ 2,\ 3\}$ и преобразуется матрицей $\Delta_1(r) = r$. Тогда наиболее общий вид операторов переплетения $J_1^+ = J \in [\Delta_1, D \downarrow R]$ и $K_1^+ = K \in [D \downarrow R,\ \Delta_1]$:

$$(Jf)^{0i} = af^i; \quad (Jf)^{ij} = b\varepsilon^{ijk} f^k;$$
$$(KF)^i = cF^{0i} + d\varepsilon^{ijk}F^{jk}; \qquad i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3,$$

где $f \in \mathscr{L}_1$, $F \in \mathscr{L}_D$, а через ε^{ijk} обозначены компоненты абсолютно антисимметричного тензора, равные ± 1, если $(i,\ j,\ k)$ — перестановка из $(1,\ 2,\ 3)$, и нулю в противном случае.

Требуя, чтобы $KJ = 1$, получим условие $ac + 2bd = 1$. При этом условии оператор $\Pi = JK$ является проектором. В явном виде он определяется формулой

$$(\Pi F)^{0i} = a\left(cF^{0i} + d\varepsilon^{ijk}F^{jk}\right);$$
$$(\Pi F)^{ij} = b\left(c\varepsilon^{ijk}F^{0k} + 2\,dF^{ij}\right).$$

Потребуем, чтобы он был согласован со скалярным произведением $\langle F,\ F'\rangle_D = F^\dagger \Gamma F'$. Матрицу Γ можно найти из явного вида инвариантной свертки:

$$\langle F,\ F'\rangle_D = {}^1\!/_2\,\eta_{\mu\mu'}\eta_{\nu\nu'}\overset{*}{F}{}^{\mu\nu}F'^{\mu'\nu'} = \sum_{i<j} \overset{*}{F}{}^{ij}F'^{ij} - \sum_i \overset{*}{F}{}^{0i}F'^{0i}.$$

Потребуем сначала, чтобы оператор Π проектировал на подпространство, на котором форма $\langle\,,\rangle_D$ знакоопределена. Это требование можно записать в виде $\Gamma\Pi = \lambda\Pi$. Нетрудно показать, что оно выполняется в любом из двух случаев: 1) $a = 0$, 2) $b = 0$. Потребуем далее, чтобы проектирование Π было ортогональным, т. е. выполнялось равенство $\langle F,\ \Pi F'\rangle_D = \langle \Pi F,\ F'\rangle_D$. Легко получаем уточнение только что упомянутой альтернативы: 1) $a = c = 0$; 2) $b = d = 0$. Окончательно получаем следующие две возможности:

$$(\Pi F)^{0i} = 0; \qquad (\Pi F)^{ij} = F^{ij}$$

и

$$(\tilde{\Pi} F)^{0i} = F^{0i}; \qquad (\tilde{\Pi} F)^{ij} = 0.$$

Частицы, получающиеся в этих двух случаях, отличаются несущественно, если только не рассматривать операции инверсии пространственных осей (относительно этой операции они ведут себя по-разному, т. е., как говорят, обладают различной *четностью*). Один случай переходит в другой, если вместо тензора $F^{\mu\nu}$ мы рассмотрим дуальный тензор $\tilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}F^{\sigma}{}_{\rho}$ (здесь $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ — четырехмерный полностью антисимметричный тензор).

Оператор проекции во втором случае можно записать в виде

$$(\tilde{\Pi} F)^{\mu\nu} = \delta_0^\mu F^{0\nu} + \delta_0^\nu F^{\mu 0}.$$

Результат его бустирования $\tilde{S}(v)$ можно написать сразу, если учесть, что это должен быть ковариантный оператор, удовлетворяющий условию $\tilde{S}(e_0) = \Pi$, где $e_0 = \{1, 0, 0, 0\}$ — 4-скорость в состоянии покоя. Таким способом получаем

$$\tilde{S}(v) F^{\mu\nu} = v^\mu v_{\mu'} F^{\mu'\nu} + v^\nu v_{\nu'} F^{\mu\nu'}.$$

В первом случае проектор можно записать в четырехмерных обозначениях следующим образом:

$$(\Pi F)^{\mu\nu} = {}^1/_2 \varepsilon^{0\sigma\mu\nu} \varepsilon_{0\sigma\varkappa\lambda} F^{\varkappa\lambda}.$$

Результат бустирования находится тем же способом — строится ковариантный оператор $S(v)$, который при $v = e_0$ превращается в Π. Получим

$$(S(v) F)^{\mu\nu} = {}^1/_2 v_\rho v^{\rho'} \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu} \varepsilon_{\rho'\sigma\varkappa\lambda} F^{\varkappa\lambda}.$$

Проекторы, соответствующие античастицам, находятся изменением знака у аргумента v. Таким образом, получаем

$$S_1^-(v) = S_1^+(v) = S(v); \quad \tilde{S}_1^-(v) = \tilde{S}_1^+(v) = \tilde{S}(v).$$

Симметричный тензор с нулевым следом $F^{\mu\nu} = F^{\nu\mu}$, $\eta_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0$, преобразуется по неприводимому представлению D^{11}. Рассмотрим частицу, описывающуюся этим представлением. Очевидно, волновая функция ее имеет вид $F(x) = \{F^{\mu\nu}(x)\}$ (в координатном представлении). Выделим в волновой функции части, описывающие соответственно спины 0, 1 и 2. Для этого нужно найти проекторы Π_0, Π_1, Π_2, которые вырезают в $\mathscr{L}_D$ части, преобразующиеся при вращениях по представлениям Δ_0, Δ_1 и Δ_2. Можно показать, что эти проекторы имеют вид

$$(\Pi_0 F)^{\mu\nu} = {}^1/_3 \left(4\delta_0^\mu \delta_0^\nu - \eta^{\mu\nu}\right) F^{00};$$
$$(\Pi_1 F)^{\mu\nu} = \delta_0^\mu F^{0\nu} + \delta_0^\nu F^{\mu 0} - 2\delta_0^\mu \delta_0^\nu F^{00};$$
$$(\Pi_2 F)^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} - \delta_0^\mu F^{0\nu} - \delta_0^\nu F^{\mu 0} + {}^1/_3 \left(2\delta_0^\mu \delta_0^\nu + \eta^{\mu\nu}\right) F^{00}.$$

С их помощью находятся проекторы, зависящие от импульса:

$$S_0(v) F^{\mu\nu} = {}^1/_3 \left(4v^\mu v^\nu - \eta^{\mu\nu}\right) v_{\mu'} v_{\nu'} F^{\mu'\nu'};$$
$$S_1(v) F^{\mu\nu} = v^\mu v_{\mu'} F^{\mu'\nu} + v^\nu v_{\nu'} F^{\mu\nu'} - 2v^\mu v^\nu v_{\mu'} v_{\nu'} F^{\mu'\nu'};$$
$$S_2(v) F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} - v^\mu v_{\mu'} F^{\mu'\nu} - v^\nu v_{\nu'} F^{\mu\nu'} + {}^1/_3 \left(2v^\mu v^\nu + \eta^{\mu\nu}\right) v_{\mu'} v_{\nu'} F^{\mu'\nu'}.$$

Далее подстановкой $\frac{i}{m}\partial$ вместо v получаем дифференциальные операторы $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ и пропагатор частицы спина j находим действием оператора $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ на пропагатор скалярной частицы. Конечно, при этом к оператору $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ всегда можно добавить член вида $Q_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)(\Box + m^2)$.

§ 7.2. Пропагаторы и уравнения для низших спинов

Условие, что причинный пропагатор должен быть функцией Грина некоторого дифференциального уравнения — уравнения поля (§ 6. 4), позволяет в случае низших спинов $j \leqslant 1$ и представлений группы Лоренца D^{pq}, $p + q \leqslant 1$, полностью устранить произвол в определении причинного пропагатора. Здесь мы рассматриваем все такие представления и находим в каждом случае уравнение поля и пропагатор. Каждое такое уравнение, как оказывается, имеет вид $(S_j - 1)\psi = 0$, где S_j — оператор, проектирующий на физический спин. Следствиями такого уравнения являются уравнение Клейна — Гордона $(\Box + m^2)\psi = 0$ и условие исключения лишних спинов: $S_{j'}\psi = 0$, $j' \neq j$.

1. Формализм проекторов на спины. Мы знаем, что спиновая частица описывается представлением группы Лоренца D, причем отдельный спин $j \in D$ выделяется проектором $S_j(v) = D(v_L^{-1}) \Pi_j D(v_L)$. Пусть $\{\Pi_j | j \in D\}$ — система проекторов на все спины, содержащиеся в D, т. е. система проекторов, осуществляющих разложение на неприводимые компоненты представления $D(L) \downarrow R$. Это значит, что проекторы удовлетворяют условиям

$$\Pi_j \Pi_{j'} = \delta_{jj'} \Pi_j; \quad \sum_{j \in D} \Pi_j = \mathbb{1}.$$

Для простоты мы предполагаем сейчас, что каждый спин входит в представление D не более одного раза (представление неприводимо). Однако все рассуждения непосредственно переносятся на общий случай. Например, если $D = D^{pq} + D^{qp}$, так что каждый спин j, $|p - q| \leqslant j \leqslant p + q$, входит в представление D дважды, нужно ввести дополнительный индекс $\varepsilon = \pm$ и подчинить проекторы условиям

$$\Pi_j^\varepsilon \Pi_{j'}^{\varepsilon'} = \delta^{\varepsilon\varepsilon'} \delta_{jj'} \Pi_j^\varepsilon; \quad \sum_j \sum_{\varepsilon = \pm} \Pi_j^\varepsilon = \mathbb{1}.$$

Условия на проекторы $\{\Pi_j\}$ означают, что они составляют полную *ортогональную систему эрмитовых* (относительно формы $\langle , \rangle_D$) *проекторов*. Легко видеть, что это верно и относительно $\{S_j(v) | j \in D\}$. Однако дифференциальные операторы $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ уже не являются ортогональными проекторами. Для них выполняются более слабые соотношения:

$$S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right) S_{j'}\left(\frac{i}{m}\partial\right) = \delta_{jj'} S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right) + Q_{jj'}(\partial)(\Box + m^2);$$
$$\sum_j S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right) = \mathbb{1} + Q(\partial)(\Box + m^2).$$

Следовательно, операторы $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ образуют ортогональную систему проекторов *в пространстве решений уравнения Клейна—*

Гордона, т. е. в подпространстве $\sum\limits_{j \in D} J^{+}_{mj}\mathscr{H}^{+}_{mj} \subset \mathscr{H}_D$. В более широком пространстве они уже не являются проекторами. Все же для упрощения терминологии будем называть операторы $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ *дифференциальными проекторами.*

Далее нашей задачей будет отыскание такого проектора на физический спин $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$, который позволял бы найти причинный пропагатор $\Pi^c_{mj} = S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)\Pi^c_m$. Согласно результатам п. 6.4.2, для этого необходимо, чтобы существовал дифференциальный оператор $\Lambda_j = \Lambda_j(\partial)$, такой, что $\Lambda_j S_j \sim (\Box + m^2)$. В этом случае пропагатор Π^c_{mj} является функцией Грина уравнения $\Lambda_j(\partial)\psi = 0$.

2. Пропагатор и уравнение поля для спинора. Если D — *спинорное представление*, то оно дважды содержит спин $^1/_2$. Полная система проекторов имеет вид (см. п. 7.1.2) $\Pi^{\pm} = \Pi^{\pm}_{1/2} = {}^1/_2\,(1 \pm \gamma^0)$, откуда получаем дифференциальные проекторы

$$S^{\pm}\left(\frac{i}{m}\partial\right) = {}^1/_2\left(1 \pm \frac{i}{m}(\gamma,\, \partial)\right).$$

Если частица соответствует выбору знака $+$, то дифференциальный проектор на физический спин равен $S^+\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ или отличается от этого оператора членом, пропорциональным клейниану (оператору Клейна — Гордона). Произвол устраняется, если потребовать в соответствии с результатами п. 6.2.4, чтобы существовал дифференциальный оператор $\Lambda_{1/2}$, обратный по отношению к причинному пропагатору, т. е. такой, который при умножении на проектор давал бы клейниан.

Действительно, пользуясь свойствами гамма-матриц, легко убедиться, что

$$S^-\left(\frac{i}{m}\partial\right) S^+\left(\frac{i}{m}\partial\right) = \frac{1}{4m^2}(\Box + m^2).$$

Значит, S^+ можно выбрать в качестве проектора на спин, а $\Lambda_{1/2} \sim S^-$. Уравнение поля имеет вид $\Lambda_{1/2}\psi = 0$ или

$$(i(\gamma,\, \partial) - m)\,\psi = 0$$

и называется *уравнением Дирака*. Причинный пропагатор равен $\Pi^c_{m1/2} = S^+\Pi^c_m$ и является функцией Грина уравнения Дирака:

$$(i(\gamma,\, \partial) - m)\,\Pi^c_{m1/2}(x - x') = \frac{i}{2m}\,\delta(x - x').$$

Нетрудно показать, что никакой другой выбор проектора на спин (в пределах допустимого произвола) невозможен. Требование, чтобы причинный пропагатор был функцией Грина, в данном случае однозначно фиксирует проектор на спин.

3. Пропагатор и уравнение поля для вектора. Рассмотрим теперь векторное представление $D = D^{1/2\,1/2}$. Оно содержит спины 0 и 1, проекторы на которые были найдены в п. 7.1.3:

$$\left[S_0\left(\frac{i}{m}\partial\right)\right]^{\mu}{}_{\nu} = -\frac{1}{m^2}\partial^{\mu}\partial_{\nu};$$

$$\left[S_1\left(\frac{i}{m}\partial\right)\right]^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{m^2}\partial^{\mu}\partial_{\nu}.$$

Эти операторы удовлетворяют, как легко проверить, соотношениям

$$S_0^2 = S_0 - \frac{1}{m^2}S_0(\Box + m^2); \qquad S_1^2 = S_1 - \frac{1}{m^2}S_0(\Box + m^2);$$

$$S_0S_1 = \frac{1}{m^2}S_0(\Box + m^2); \qquad S_0 + S_1 = \mathbb{1}.$$

Предположим, что векторное представление описывает частицу спина 1. Тогда должен существовать дифференциальный оператор $\Lambda_1 = \Lambda_1\left(\frac{i}{m}\partial\right)$, который при умножении на $S_1\left(\frac{i}{m}\partial\right)$ давал бы оператор Клейна — Гордона. Если это невозможно, то мы должны по-другому определить дифференциальный проектор $S_1\left(\frac{i}{m}\partial\right)$, воспользовавшись имеющимся произволом.

Любой ковариантный дифференциальный оператор, действующий на волновую функцию векторной частицы, можно записать в виде $\Lambda_1 = a\cdot\mathbb{1} + bS_0$, где a и b — произвольные полиномы от даламбертиана $\Box$. Умножим этот оператор на S_1 и потребуем, чтобы произведение было кратно клейниану. Воспользовавшись выражением для S_0S_1, легко получим из этого требования

$$\Lambda_1 = \frac{1}{m^2}(\Box + m^2) + S_0.$$

Это значит, что уравнение для векторного поля, описывающего частицу спина 1, имеет вид $\Lambda_1\psi = 0$ или

$$(\Box + m^2)\,\psi^{\mu} - \partial^{\mu}\partial_{\nu}\psi^{\nu} = 0.$$

Умножая это уравнение слева на S_0, получим в качестве его следствия равенство $S_0\psi = 0$, т. е. условие исключения лишнего (нефизического) спина. Учитывая это условие в уравнении, убеждаемся, что уравнение Клейна — Гордона также является его следствием. Причинный пропагатор $\Pi^c_{m1} = S_1\Pi^c_m$ частицы спина 1 имеет вид

$$\left[\Pi^c_{m1}(x - x')\right]^{\mu}{}_{\nu} = \left(\delta^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{m^2}\partial^{\mu}\partial_{\nu}\right)\Pi^c_m(x - x')$$

и удовлетворяет уравнению для функции Грина:

$$\left[(\Box + m^2)\,\delta^{\mu}_{\lambda} - \partial^{\mu}\partial_{\lambda}\right]\left[\Pi^c_{m1}(x - x')\right]^{\lambda}{}_{\nu} = -i\delta^{\mu}_{\nu}\delta(x - x').$$

Посмотрим, можно ли иначе выбрать дифференциальный проектор на спин 1 так, чтобы причинный пропагатор был все же функцией Грина. Положим $S_1' = S_1 + Q_1(\Box + m^2)$, $\Lambda_1' = a' + b'S_0$. Тогда

$$\Lambda_1' S_1' = a'\left(1 + Q_1(\Box + m^2)\right) + \left(b'(\Box + m^2) - a'\right)\left(Q_1 + \frac{1}{m^2}\right) S_0.$$

Очевидно, что ни при каком выборе полиномов $a'(\Box)$ и $Q_1(\Box)$, кроме $Q_1 \equiv 0$, $a' \sim (\Box + m^2)$, невозможно добиться, чтобы первый член в этом выражении был пропорционален $\Box + m^2$. Следовательно, *причинный пропагатор для частицы спина* 1 *в векторном представлении находится однозначно.*

Предположим теперь, что физическим является спин $j = 0$, т. е. попытаемся построить формализм для описания частицы спина 0 в рамках векторного представления. Аналогично тому, как это делалось для спина 1, однозначно находим проектор на спин и уравнение поля:

$$S_0' = S_0 + \frac{1}{m^2}(\Box + m^2); \quad \Lambda_0 = S_1.$$

Это значит, что уравнение поля и причинный пропагатор имеют для этого случая вид

$$\partial^\mu \partial_\nu \psi^\nu + m^2 \psi^\mu = 0;$$

$$\left[\Pi^c_{m0}(x - x')\right]^\mu{}_\nu = \frac{1}{m^2}\left[(\Box + m^2)\,\delta^\mu_\nu - \partial^\mu \partial_\nu\right] \Pi^c_m (x - x'),$$

причем пропагатор является функцией Грина этого уравнения. Само уравнение поля $S_1\psi = 0$ имеет форму условия, исключающего лишний спин 1. Кроме того, умножая уравнение слева на S_0', легко убедиться, что следствием его является уравнение Клейна — Гордона.

Замечание. Мы сейчас ставим себе целью найти пропагатор и уравнение, описывающее лишь один из спинов, содержащихся в представлении группы Лоренца $D(L)$. Это удается сделать, если подействовать на функцию $\Pi^c_m(x - x')$ оператором $S_j\left(\frac{i}{m}\partial\right)$. В импульсном представлении пропагатор определенного спина имеет вид $S_j(k/m)/[(k, k) - m^2 + i0]$. Множитель $S_j(k/m)$ приводит к более медленному убыванию или к возрастанию пропагатора с ростом импульса (по сравнению с пропагатором скалярной частицы), а это в свою очередь приводит к дополнительным расходящимся интегралам при вычислении диаграмм Фейнмана, т. е. к усилению *ультрафиолетовых расходимостей.* В связи с этим особый интерес представляют те случаи, когда для расчетов вместо пропагатора Π^c_{mj} можно использовать менее сингулярный пропагатор Π^c_m, описывающий распространение всех спинов, содержащихся в представлении D. Такая

замена возможна в том случае, если в силу специфики взаимодействия нефизические спины $j' \neq j$ в процессе взаимодействия не порождают физический спин j. Для этого достаточно, чтобы источник J исследуемого поля (т. е. правая часть соответствующего уравнения поля со взаимодействием) удовлетворял условиям $S_{j'}J = 0$ в силу уравнений для входящих в этот источник полей. Примером является квантовая электродинамика, где источник векторного поля $J^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\psi$ удовлетворяет условию $S_0 J = 0$. Поэтому в электродинамике для векторного поля можно использовать полный пропагатор. Более глубокая причина этого кроется в *калибровочной инвариантности* электродинамики, которая одновременно приводит к взаимному уничтожению некоторых расходящихся диаграмм, из которых расходимости не могут быть устранены.

4*. Пропагатор и уравнение для антисимметричного тензора. *Антисимметричный тензор* (представление $D^{10} + D^{01}$) описывает две частицы спина 1, и соответствующие проекторы равны (см. п. 7.1.4)

$$(S(v)\,F)^{\mu\nu} = {}^1/_2 v_\rho v^\sigma \varepsilon^{\rho\lambda\mu\nu} \varepsilon_{\sigma\lambda\mu'\nu'} F^{\mu'\nu'};$$

$$(\tilde S(v)\,F)^{\mu\nu} = \left(v^\mu v_{\mu'} \delta^\nu_{\nu'} + v^\nu v_{\nu'} \delta^\mu_{\mu'}\right) F^{\mu'\nu'}.$$

Чтобы получить дифференциальные проекторы, нужно подставить вместо v оператор $\frac{i}{m}\partial$. Чтобы не осложнять обозначения, не будем делать этой подстановки явно, а просто в тех же формулах будем считать, что v — не вектор 4-скорости, а дифференциальный оператор $v = \frac{i}{m}\partial$. Все вычисления можно производить с этим оператором так же, как с вектором, однако следует помнить, что теперь величина

$$K = (v, v) - 1$$

не равна нулю, а является дифференциальным оператором, пропорциональным оператору Клейна — Гордона.

Воспользуемся формулой

$$\varepsilon^{\rho\mu\nu\lambda} \varepsilon_{\sigma\mu'\nu'\lambda} = \delta^{\rho\mu\nu}_{\sigma\mu'\nu'},$$

где справа стоит символ, обобщающий символ Кронекера, антисимметричный по верхним индексам и равный $+1$ или -1, если верхние индексы получаются перестановкой нижних (знак зависит от четности перестановки), и нулю в противном случае. Такой символ можно выразить в виде суммы произведений обычных символов Кронекера. После этого легко показать, что

$$S + \tilde S = 1 + K; \quad \tilde S^2 = \tilde S + \tilde S K.$$

Остальные соотношения между проекторами выводятся из этих двух:

$$S^2 = S + SK; \quad S\tilde S = \tilde S S = 0.$$

Теперь легко найти причинный пропагатор и уравнение поля для частицы спина 1, описываемой антисимметричным тензором. Пусть

$$\Pi^c_{m1} = S'\Pi^c_m; \quad S' = S + QK; \quad \Lambda = \tilde{S} + \tilde{Q}K.$$

Требуя, чтобы произведение $\Lambda S'$ было пропорционально клейниану K, получим $Q = \tilde{Q} = -1$.

Подставляя во всех формулах $v = \frac{i}{m}\partial$, получим уравнение поля, пропагатор и уравнение для пропагатора в виде

$$(\Box + m^2) F^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial_\lambda F^{\nu\lambda} - \partial^\nu \partial_\lambda F^{\mu\lambda} = 0;$$

$$[\Pi^c_{m1}(x-x')]^{\mu\nu}_{\varkappa\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2m^2}[m^2\delta^{\mu\nu}_{\varkappa\lambda} + \delta^\mu_\varkappa \partial^\nu \partial_\lambda + \delta^\nu_\lambda \partial^\mu \partial_\varkappa - \delta^\mu_\lambda \partial^\nu \partial_\varkappa - \delta^\nu_\varkappa \partial^\mu \partial_\lambda]\,\Pi^c_m(x-x');$$

$$[(\Box + m^2)\delta^\mu_{\mu'}\delta^\nu_{\nu'} - \delta^\mu_{\mu'}\partial^\nu\partial_{\nu'} - \delta^\nu_{\nu'}\partial^\mu\partial_{\mu'}]\,[\Pi^c_{m1}(x-x')]^{\mu'\nu'}_{\varkappa\lambda} =$$

$$= -\frac{i}{2}\delta^{\mu\nu}_{\varkappa\lambda}\delta(x-x'),$$

где опять использован обобщенный символ Кронекера, на этот раз с двумя индексами вверху и двумя внизу: $\delta^{\mu\nu}_{\varkappa\lambda} = \delta^\mu_\varkappa\delta^\nu_\lambda - \delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\varkappa$.

Те же рассуждения почти дословно можно повторить, меняя местами проекторы S и $\tilde{S}$. В результате получаем уравнение поля

$$\tilde{\Lambda} H = (S - K) H = 0,$$

причинный пропагатор

$$\tilde{\Pi}^c_{m1}(x-x') = (\tilde{S} - K)\,\Pi^c_m(x-x')$$

и уравнение для него

$$(S-K)\,\tilde{\Pi}^c_{m1}(x-x') = -K\Pi^c_m(x-x').$$

В обычных обозначениях то же самое переписывается так:

$$\partial^\mu\partial_\lambda H^{\lambda\nu} + \partial^\nu\partial_\lambda H^{\mu\lambda} + m^2 H^{\mu\nu} = 0;$$

$$[\tilde{\Pi}^c_{m1}(x-x')]^{\mu\nu}_{\varkappa\lambda} =$$

$$= -\frac{1}{m^2}[\partial^\mu\partial_{[\varkappa}\delta^\nu_{\lambda]} + \partial^\nu\partial_{[\lambda}\delta^\mu_{\varkappa]} - \delta^\mu_{[\varkappa}\delta^\nu_{\lambda]}(\Box + m^2)]\,\Pi^c_m(x-x');$$

$$(\partial^\mu\partial_{\mu'}\delta^\nu_{\nu'} + \partial^\nu\partial_{\nu'}\delta^\mu_{\mu'} + m^2\delta^\mu_{\mu'}\delta^\nu_{\nu'})\,[\tilde{\Pi}^c_{m1}(x-x')]^{\mu'\nu'}_{\varkappa\lambda} = -\frac{i}{2}\delta^{\mu\nu}_{\varkappa\lambda}\delta(x-x'),$$

где скобка $[\varkappa\lambda]$ означает антисимметризацию по индексам $\varkappa$, λ.

Уравнение поля для тензора $H^{\mu\nu}$ очень просто связано с уравнением для вектора ψ^μ, выведенным в предыдущем пункте.

Обозначим через $H^{\mu\nu}$ *ротор* этого вектора:

$$H^{\mu\nu} = \partial^\mu\psi^\nu - \partial^\nu\psi^\mu.$$

Тогда векторное уравнение $(\Box + m^2)\psi^\mu - \partial^\mu\partial_\nu\psi^\nu = 0$ можно переписать в виде

$$\partial_\lambda H^{\lambda\mu} + m^2\psi^\mu = 0$$

(так называемое *уравнение Прока*). Чтобы исключить из этого уравнения вектор ψ^μ, заменив его тензором $H^{\mu\nu}$, подействуем на это уравнение оператором ∂^ν и затем антисимметризуем по индексам μ и ν. Очевидно, что при этом получится в точности то же уравнение для $H^{\mu\nu}$, которое мы нашли выше. Векторное поле ψ^μ, из которого антисимметричный тензор получается как ротор, называется *вектор-потенциалом* данного тензорного поля. Тензор $F^{\mu\nu}$ получается как дуальный по отношению к $H^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}H_{\sigma\rho}.$$

§ 7.3*. Высшие спины

На примерах, соответствующих низшим спинам, мы видели, что удается построить уравнение поля, для которого пропагатор был бы функцией Грина. Для этого следует, используя произвол в определении дифференциальных проекторов, найти такие два проектора S'_j и S''_j на физический спин j, чтобы выполнялось условие

$$S'_j(1 - S''_j) = (1 - S''_j)S'_j = \lambda K,$$

где λ — число, а K — оператор Клейна — Гордона. Тогда уравнение поля имеет вид $(1 - S''_j)\psi = 0$, а пропагатор выбирается в виде $\Pi^c_{mj} = S'_j\Pi^c_m$. В этом случае из того, что Π^c_m — функция Грина для уравнения Клейна — Гордона, следует, что Π^c_{mj} — функция Грина для данного уравнения поля.

Такахаши и Умэдзава построили формализм квантования для высших спинов, основанный на том же принципе [41, 51, 94], и разработали методы нахождения уравнения поля $\Lambda_j = 1 - S''_j$ и оператора $d_j = S'_j$, который в этом случае называется *дивизором* (divisor), т. е. делителем клейниана. Изложим кратко и с некоторыми изменениями основные из этих результатов.

1. Обобщение спиновых проекторов. Предварительно нам придется несколько обобщить понятие дифференциальных проекторов. Пусть полином $S_j(v)$ содержит в качестве слагаемого некоторый полином $A(v)$. Пользуясь произволом в определении проектора $S_j(v)$, мы можем добавить к нему полином $A(v)K = A(v)[(v, v) - 1]$. Это приведет к тому, что слагаемое $A(v)$ в полиноме $S_j(v)$ заменится на $(v, v)A(v)$. Следовательно, произвол в определении дифференциального проектора позволяет любой член его умножать на (v, v). Пользуясь этим, можно попытаться уравнять степени всех членов, входящих в $S_j(v)$. Это удается в полной мере для случая, когда спин j — целое число. В этом случае полином $S_j(v)$ содержит только четные степени, и указанным приемом можно добиться того, чтобы все они были равны $2n$, так что $S_j(v)$ — однородная функция степени $2n$. Если спин j полуцелый, можно преобразовать проектор $S_j(v)$ к такой форме, когда он представляется в виде суммы двух однородных функций степени $2n$ и $2n+1$ соответственно.

Расширим произвол в определении $S_j(v)$, предположив, что к этой функции можно добавить член вида $Q_j(v)K$, где $Q_j(v)$ — не обязательно полином. Например, Q_j может содержать отрицательные степени $(v, v)^{-n}$, $n > 0$. Тогда добавлением слагаемого $-(v, v)^{-1}A(v)K$ можно любой член $A(v)$ полинома $S_j(v)$ превратить в $(v, v)^{-1}A(v)$. Очевидно, что теперь мы можем добиться того, чтобы проектор на целый спин был однородной функцией нулевой степени, а проектор на полуцелый спин — суммой двух однородных функций соответственно нулевой и первой степени.

Расширение произвола не является, конечно, безобидной операцией, потому что теперь оператор $S_j(v)$ становится не дифференциальным, а интегродифференциальным. Например, оператор $(v, v)^{-1} = -m^2\Box^{-1}$ можно понимать как интегральный оператор с ядром $L(x-x')$, удовлетворяющим уравнению $\Box L(x-x') = -m^2\delta(x-x')$. Тогда $(v,v)(v,v)^{-1} = 1$, а если соответствующим образом ограничить пространство функций, в котором действуют операторы, то выполняется и равенство $(v,v)^{-1}(v,v) = 1$.

Расширение произвола оказывается оправданным, так как, например, оператор $(v, v)^{-1}K$ обращает в нуль любую волновую функцию, т. е. реальное состояние частицы (определенной массы). Кроме того, во многих случаях мы будем пользоваться отрицательными степенями (сингулярными членами) лишь в промежуточных выкладках, а в конце исключать такие члены. Тогда введение их можно считать просто вспомогательным приемом, позволяющим упростить тождественные алгебраические преобразования.

2. Целые спины. Рассмотрим теперь проекторы S_j, приведенные к «канонической» форме, в которой они имеют лишь члены нулевой и первой степени. Обратимся сначала к случаю целого спина. Пусть $\{S_j \mid j \in D\}$ — полная система спиновых проекторов нулевой степени. Нетрудно видеть, что они удовлетворяют условиям

$$S_jS_{j'} = \delta_{jj'}S_j; \quad \sum_{j\in D} S_j = 1.$$

Действительно, согласно п. 7.2.1, правые части этих равенств могли бы еще содержать только слагаемые вида QK, причем, если функцию $Q(v)$ разложить в сумму однородных функций различных степеней, то получится лишь конечное число слагае-

мых. Нетрудно видеть, что функция QK может быть однородной нулевой степени лишь в тривиальном случае $Q = 0$.

Итак, в случае целого спина операторы $\{S_{j'} \mid j' \in D\}$ на самом деле образуют полную систему ортогональных проекторов. Пользуясь этим, построим из них уравнение поля и дивизор по формулам

$$d_j = S'_j = S_j - \sum_{j'\neq j} a_{j'}S_{j'}K; \quad \Lambda_j = -S_jK + \sum_{j'\neq j} a_{j'}^{-1}S_{j'}.$$

Легко видеть, что эти операторы удовлетворяют условию

$$\Lambda_jd_j = d_j\Lambda_j = -K.$$

Константы $a_{j'}$ подбираются таким образом, чтобы исключить как можно больше сингулярных членов (отрицательных степеней (v, v)). Особо выделен случай $a_{j'} = 1$, когда

$$d_j = S'_j = S_j - \sum_{j'\neq j} S_{j'}K = -K + (v, v)S_j;$$

$$\Lambda_j = 1 - S''_j = -S_jK + \sum_{j'\neq j} S_{j'} = 1 - (v, v)S_j$$

(мы воспользовались здесь тем, что $\sum_{j'\in D} S_{j'} = 1$). Легко видеть, что при таком выборе низшие сингулярности (степень $(v, v)^{-1}$) уничтожаются. Поэтому в случае низших представлений группы Лоренца, достаточных для описания спина $j \leqslant 1$, этот выбор приводит к устранению всех сингулярностей. Фактически именно он использовался в предыдущем параграфе.

В случае более высоких представлений группы Лоренца D^{pq}, $p+q > 1$, выбор $a_{j'} = 1$ или какой-либо другой не устраняет всех сингулярностей. Тогда можно использовать для устранения сингулярностей следующий прием. Заменим уравнение поля и дивизор по формулам

$$\tilde{d}_j = (1 + S_jAS_{j'})d_j; \quad \tilde{\Lambda}_j = \Lambda_j(1 - S_jAS_{j'}),$$

где $A = A(v)$ — произвольная матрица, а $j' \neq j$. Нетрудно видеть, что для новых операторов по-прежнему справедливо свойство $\tilde{\Lambda}_j\tilde{d}_j = \tilde{d}_j\tilde{\Lambda}_j = -K$. Однако при подходящем выборе матрицы A эта операция устраняет еще часть сингулярностей. При необходимости можно еще раз подвергнуть операторы аналогичной процедуре *смешивания спинов*. Последовательное применение этой операции достаточное число раз позволяет устранить все сингулярности.

Новый дивизор и уравнение поля имеют вид

$$\tilde{d}_j = d_j + S_jAS_{j'}K; \quad \tilde{\Lambda}_j = \Lambda_j - S_jAS_{j'}K.$$

Мы видим, что новый дивизор по-прежнему отличается от проектора S_j лишь членом, содержащим множитель K. Кроме того, действуя на уравнение $\tilde{\Lambda}_j\psi = 0$ операторами $S_{j''}$, $j'' \neq j$, легко показать, что следствиями этого уравнения являются дополнительные условия $S_{j''}\psi=0$ $(j''\neq j)$.

Можно модифицировать процедуру смешивания спинов, полагая

$$\tilde{d}_j=d_j(1+S_jAS_{j'})=d_j+S_jAS_{j'};$$
$$\tilde{\Lambda}_j=(1-S_jAS_{j'})\Lambda_j=\Lambda_j-S_jAS_{j'}.$$

Тогда по-прежнему из уравнения $\tilde{\Lambda}_j\psi=0$ следуют условия $S_{j''}\psi=0$ $(j''\neq j)$. Однако теперь дивизор содержит смешивающий член $S_jAS_{j'}$ без множителя K. Значит, пропагатор $\Pi^c_{mj}=\tilde{d}_j\Pi^c_m$ описывает в этом случае переходы между состояниями со спинами j и j'. Для того чтобы присутствие нефизического спина не сказывалось на вычислении амплитуд, в этом случае необходимо, чтобы источник поля ψ удовлетворял условию $S_{j'}J=0$. Тогда в вершинах диаграмм не может происходить рождения нефизического спина, поэтому тот факт, что пропагатор переносит его, не имеет значения. В этом случае, если все внешние линии диаграммы соответствуют физическим спинам, член, смешивающий j' и j в пропагаторе, не дает вклада в амплитуду.

3. **Полуцелые спины.** Обратимся теперь к случаю полуцелого спина. Полуцелые спины входят в любое самосопряженное представление парами. Проекторы на спины, входящие в одну пару, обозначим через $S_j^{\pm}(v)$. При этом согласно п. 6.2.1 $S_j^-(v)=S_j^+(-v)$. Приведем эти проекторы к виду

$$S_j^{\pm}(v)={}^1/_2\,[S_j(v)\pm A_j(v)],$$

где S_j, A_j — однородные функции соответственно нулевой и первой степени. Очевидно, оператор S_j имеет смысл проектора на пару спинов и поэтому равенство

$$S_j^2=S_j$$

должно выполняться по крайней мере с точностью до члена, содержащего множитель K. В силу однородности функции S_j оно выполняется точно.

Рассмотрим теперь выражение $S_jS_j^+-S_j^+$. Подставляя в него выражение для S_j^+ и пользуясь тем, что S_j — проектор, можно привести это выражение к виду ${}^1/_2(S_j-1)A_j$, откуда видно, что оно является однородной функцией. Но по смыслу операторов S_j и S_j^+ (проектор на пару спинов и проектор на один из этих спинов) формула $S_jS_j^+=S_j^+$ должна выполняться по крайней мере с точностью до члена, содержащего K. В силу доказанной только что однородности функции $S_jS_j^+-S_j^+$ эта

формула выполняется точно. Аналогичным образом доказываются формулы для S_j^-:

$$S_jS_j^{\pm}=S_j^{\pm}S_j=S_j^{\pm}.$$

Беря их разность, получим равенство

$$S_jA_j=A_jS_j=A_j.$$

С помощью полученных соотношений можно доказать еще следующие формулы:

$$[S_j^{\pm}]^2=S_j^{\pm}+{}^1/_4S_jK;\quad S_j^+S_j^-=S_j^-S_j^+=-{}^1/_4S_jK.$$

Перенося все члены в одну сторону равенства в каждой из формул и преобразуя полученное выражение, показываем, что оно является однородной функцией. Так как априори известно, что эта функция должна содержать множителем K, заключаем, что она равна нулю. Аналогично доказывается, что все проекторы, относящиеся к разным спинам, при умножении дают нуль:

$$S_jS_{j'}=S_jS_{j'}^{\pm}=S_j^{\pm}S_{j'}^{\mp}=S_j^{\pm}S_{j'}=0\qquad(j\neq j').$$

Кроме того, имеет место соотношение

$$\sum_{j\in D}S_j=1.$$

Мы видим, таким образом, что проекторы S_j на пары полуцелых спинов образуют полную ортогональную систему проекторов в обычном смысле, а проекторы на отдельные спины удовлетворяют более сложным соотношениям. Пользуясь выведенными формулами, легко показать, что операторы

$$d_j=S_j'^{+}=S_j^+-\sum_{j'\neq j}a_{j'}S_{j'}K;\quad \Lambda_j=S_j^-+{}^1/_4\sum_{j'\neq j}a_{j'}^{-1}S_{j'}$$

могут служить дивизором и уравнением поля для волновой функции, описывающей спин $(j,+)$. Нетрудно показать, что

$$d_j\Lambda_j=\Lambda_jd_j=-{}^1/_4K.$$

Простейший выбор $a_{j'}={}^1/_2$ дает выражения

$$d_j=S_j'^{+}=S_j^+-{}^1/_2\sum_{j'\neq j}S_{j'}K={}^1/_2(-K+(v,\,v)S_j+A_j);$$
$$\Lambda_j={}^1/_2(1-S_j^++S_j^-)=S_j^-+{}^1/_2\sum_{j'\neq j}S_{j'}={}^1/_2(1-A_j).$$

Эти выражения использовались в предыдущем параграфе для частицы спина ${}^1/_2$, описываемой спинорным представлением. В случае более высоких представлений группы Лоренца операторы d_j, Λ_j содержат сингулярные члены. Для их устранения можно использовать операцию умножения этих операторов на

$(1 \pm S_j A S_{j'})$ с подходящим выбором спина $j' \neq j$ и матрицы A. Получаем

$$\tilde{d}_j = (1 + S_j A S_{j'})\, d_j = d_j - {}^1/_2 S_j A S_{j'} K;$$
$$\tilde{\Lambda}_j = \Lambda_j (1 - S_j A S_{j'}) = \Lambda_j - S_j^- A S_{j'}$$

или, при умножении с другой стороны,

$$\tilde{d}_j = d_j (1 + S_j A S_{j'}) = d_j + S_j^+ A S_{j'};$$
$$\tilde{\Lambda}_j = (1 - S_j A S_{j'})\, \Lambda_j = \Lambda_j - {}^1/_2 S_j A S_{j'}.$$

В последнем случае пропагатор смешивает спины, поэтому источник поля должен удовлетворять условию $S_{j'} J = 0$. При необходимости операцию исключения сингулярностей нужно повторить несколько раз. Кроме того, эту операцию можно видоизменять в зависимости от используемого представления.

В качестве примеров рассмотрим частицу спина 2, описываемую симметричным тензором, и частицу спина $^3/_2$, описываемую вектор-спинором.

4. Частица спина 2. Спиновые проекторы для *симметричного тензора* второго ранга с нулевым следом были найдены в п. 7.1.4. Если нормировать их так, чтобы они были однородными функциями нулевой степени, проекторы принимают вид

$$(S_0)^{\mu\nu}{}_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{3}\left(4\,\frac{v^\mu v^\nu}{v^2} - \eta^{\mu\nu}\right)\frac{v_\varkappa v_\lambda}{v^2};$$
$$(S_1)^{\mu\nu}{}_{\varkappa\lambda} = \left(\frac{v^\mu v_\varkappa}{v^2}\,\delta^\nu_\lambda + \frac{v^\nu v_\lambda}{v^2}\,\delta^\mu_\varkappa\right) - 2\,\frac{v^\mu v^\nu v_\varkappa v_\lambda}{v^2};$$
$$(S_2)^{\mu\nu}{}_{\varkappa\lambda} = \delta^\mu_\varkappa \delta^\nu_\lambda - \left(\frac{v^\mu v_\varkappa}{v^2}\,\delta^\nu_\lambda + \frac{v^\nu v_\lambda}{v^2}\,\delta^\mu_\varkappa\right) + \frac{1}{3}\left(2\,\frac{v^\mu v^\nu}{v^2} + \eta^{\mu\nu}\right)\frac{v_\varkappa v_\lambda}{v^2},$$

где для простоты обозначено

$$v^2 = (v,\ v).$$

В соответствии с общей схемой, описанной в предыдущем пункте, построим проектор $S_2' = d_2$ и уравнение поля Λ_2:

$$d_2 = S_2' = S_2 - (a_1 S_1 + a_0 S_0)(v^2 - 1);$$
$$\Lambda_2 = -S_2 (v^2 - 1) + (a_1^{-1} S_1 + a_0^{-1} S_0).$$

Нетрудно видеть, что при некотором выборе коэффициентов можно добиться того, что уравнение не будет содержать некоторых сингулярностей, но невозможно устранить их все.

Простейший выбор коэффициентов $a_1 = a_2 = 1$ дает

$$d_2 = S_2' = S_2 + (1 - v^2)(S_1 + S_0) = (1 - v^2) + v^2 S_2;$$
$$\Lambda_2 = -S_2 (v^2 - 1) + (S_1 + S_0) = -v^2 S_2 + 1.$$

При этом, очевидно, подавляются все слабые сингулярности, т. е. члены, имеющие множители v^{-2}, освобождаются от этих множителей. Сильные же сингулярности (члены, пропорциональные v^{-4}) ослабляются.

Для окончательного подавления сингулярностей произведем смешивание спинов с помощью множителя $1 + S_{j'} A S_{j''}$. В качестве матрицы A выберем произвольное ковариантное выражение второй степени по v:

$$A^{\mu\nu}{}_{\varkappa\lambda} = a\delta^\mu_\varkappa \delta^\nu_\lambda + b\eta^{\mu\nu} v_\varkappa v_\lambda.$$

Первый член не дает вклада в $S_{j'} A S_{j''}$ при $j' \neq j''$, второй дает отличное от нуля выражение лишь при $j' = 2$, $j'' = 0$:

$$(S_2 A S_0)^{\mu\nu}{}_{\varkappa\lambda} = b\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{v^\mu v^\nu}{v^2}\right) v_\varkappa v_\lambda.$$

Используя его, легко найти явные выражения для матриц:

$$\tilde{d}_2 = d_2 (1 + S_2 A S_0) = d_2 + S_2 A S_0;$$
$$\tilde{\Lambda}_2 = (1 - S_2 A S_0)\, \Lambda_2 = \Lambda_2 - S_2 A S_0.$$

Эти выражения не содержат сингулярностей, если $b = {}^2/_3$. При этом уравнение поля $\tilde{\Lambda}_2 F = 0$ и пропагатор $\Pi^c_{m2} = \tilde{d}_2 \Pi^c_m$ принимают вид

$$(\Box + m^2) F^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\varkappa F^{\varkappa\nu} - \partial^\nu \partial_\varkappa F^{\mu\varkappa} + \eta^{\mu\nu} \partial_\varkappa \partial_\lambda F^{\varkappa\lambda} = 0;$$

$$[\Pi^c_{m2}(x - x')]^{\mu\nu}{}_{\varkappa\lambda} =$$
$$= \left(\delta^\mu_\varkappa \delta^\nu_\lambda - \frac{1}{m^2}\,\eta^{\mu\nu}\partial_\varkappa \partial_\lambda + \frac{1}{m^2}\,\partial^\mu \partial_\varkappa \delta^\nu_\lambda + \frac{1}{m^2}\,\partial^\nu \partial_\lambda \delta^\mu_\varkappa\right) \Pi^c_m (x - x').$$

Легко проверить непосредственно, что следствием уравнения поля является дополнительное условие $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ и уравнение Клейна — Гордона. Однако пропагатор в этом случае смешивает спины 0 и 2, поэтому источник поля F (т. е. правая часть уравнения поля, описывающая взаимодействие) должен удовлетворять условию $S_0 J = 0$. Например, достаточно потребовать, чтобы выполнялось $\partial_\mu \partial_\nu J^{\mu\nu} = 0$.

Второй способ устранения сингулярностей приводит к операторам

$$\tilde{d}_2 = (1 + S_2 A S_0)\, d_2 = d_2 + (1 - v^2)\, S_2 A S_0;$$
$$\tilde{\Lambda}_2 = \Lambda_2 (1 - S_2 A S_0) = \Lambda_2 + (v^2 - 1)\, S_2 A S_0.$$

В явном виде получаем в этом случае уравнение поля

$$(\Box + m^2) F^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\lambda F^{\lambda\nu} - \partial^\nu \partial_\lambda F^{\mu\lambda} - \frac{2}{3m^2}\,\partial^\mu \partial^\nu \partial_\varkappa \partial_\lambda F^{\varkappa\lambda} +$$
$$+ \frac{2}{3m^2}\,(\Box + m^2)\, \eta^{\mu\nu} \partial_\varkappa \partial_\lambda F^{\varkappa\lambda} = 0$$

и пропагатор

$$[\Pi^c_{m2}(x-x')]^{\mu\nu}_{\varkappa\lambda} = \Big[\delta^\mu_\varkappa\delta^\nu_\lambda + \frac{1}{m^2}(\partial^\mu\partial_\varkappa\delta^\nu_\lambda + \partial^\nu\partial_\lambda\delta^\mu_\varkappa) -$$
$$- \frac{1}{m^2}\eta^{\mu\nu}\partial_\varkappa\partial_\lambda\left(1+\frac{2}{3m^2}\Box\right) + \frac{2}{3m^4}\partial^\mu\partial^\nu\partial_\varkappa\partial_\lambda\Big]\Pi^c_m(x-x').$$

В этом случае пропагатор не переносит лишних спинов, зато уравнение и дивизор имеют более высокую степень производных.

5. Частица спина $^3/_2$. *Вектор-спинор* преобразуется по представлению $D^s \otimes D^v$, где D^s — спинорное, а D^v — векторное представление (см. § 7.1). Вектор соответствующего пространства имеет векторный и спинорный индексы. Мы будем явно выписывать только векторный индекс. Таким образом, вектор-спинор $\psi = \{\psi^\mu\}$ преобразуется по закону

$$\psi^\mu \overset{l}{\longmapsto} l^\mu{}_\nu D^s(l)\psi^\nu.$$

Пользуясь явным видом спинорного представления, можно показать, что вектор, удовлетворяющий условию

$$\gamma_\mu\psi^\mu = 0,$$

после преобразования по-прежнему удовлетворяет ему. Следовательно, подпространство векторов с таким условием инвариантно. В нем реализуется представление $D^{1/2\,1} \oplus D^{1\,1/2} = D$. Это представление содержит два спина $^3/_2$ и два спина $^1/_2$, и именно оно будет нас пока интересовать.

Для того чтобы найти проекторы на спины, рассмотрим ограничение представления D на подгруппу вращений. Пользуясь проекторами $^1/_2(1\pm\gamma^0)$, осуществляющими разложение спинора на неприводимые относительно вращений части, разобьем наш вектор-спинор на две части: $\psi^\mu_\pm = {}^1/_2(1\pm\gamma^0)\psi^\mu$, каждая из которых содержит уже только один спин $^3/_2$ и один спин $^1/_2$. Нулевая компонента ψ^0_+ может, очевидно, содержать только спин $^1/_2$. Следовательно, спин $^3/_2$ содержится в трехмерной части $\{\psi^i_\pm \mid i = 1, 2, 3\}$.

Пользуясь описанным в п. 7.1.2 представлением гамма-матриц и реализуя представление $\Delta_{1/2}(R)$ через сигма-матрицы Паули $\{\sigma_i \mid i = 1, 2, 3\}$, можно показать, что комбинации $(\psi^{1/2}_+)^i = \Sigma^i\Sigma_j\psi^j_+$, где $\Sigma^i = \Sigma_i = {}^1/_2\varepsilon_{ijk}\gamma^j\gamma^k$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$, преобразуются по представлению $\Delta_{1/2}$. Следовательно, оставшаяся часть $(\psi^{3/2}_+)^i = (\delta^i_j + {}^1/_3\Sigma^i\Sigma_j)\psi^j_+$ преобразуется по представлению $\Delta_{3/2}$. Мы получили, таким образом, проектор на спин $^3/_2$:

$$(\Pi^+_{3/2}\psi)^\mu = \delta^\mu_i(\delta^i_k + {}^1/_3\Sigma^i\Sigma_k)\,{}^1/_2(1+\gamma^0)\psi^k$$

(здесь по j, k суммирование производится от 1 до 3). Используя выражение для Σ_i, нетрудно привести этот проектор к виду

$$\Pi^+_{3/2}\psi^\mu = {}^1/_2(1+\gamma^0)\delta^\mu_i\delta^i_j(\delta^j_k - {}^1/_3\gamma^j\gamma_k)\psi^k.$$

Теперь воспользуемся тем, что $\delta^\mu_i\delta^i_\nu = \delta^\mu_\nu - \delta^\mu_0\delta^0_\nu$, и тем, что в силу дополнительного условия на ψ

$$\gamma_k\psi^k = -\gamma_0\psi^0 = -\gamma_0\delta^0_\lambda\psi^\lambda.$$

В результате можно записать проектор в четырехмерных обозначениях:

$$(\Pi^+_{3/2}\psi)^\mu = {}^1/_2(1+\gamma^0)(\delta^\mu_\nu - \delta^\mu_0\delta^0_\nu)(\delta^\nu_\lambda + {}^1/_3\gamma^\nu\gamma_0\delta^0_\lambda)\psi^\lambda.$$

Переход к зависящему от 4-скорости проектору осуществляется теперь очень просто. Достаточно в нужных местах заменить δ^μ_0 на v^μ и δ^0_μ на v_μ. Разумеется, аналогичным образом находится проектор на второй спин из пары спинов $^3/_2$. Окончательно имеем для этих двух проекторов

$$S^\pm_{3/2}(v)\psi^\mu = {}^1/_2(1\pm(\gamma, v))(\delta^\mu_\nu - v^\mu v_\nu)(\delta^\nu_\lambda + {}^1/_3\gamma^\nu(\gamma, v)v_\lambda)\psi^\lambda.$$

Вводя обозначение

$$(\gamma, v) = \hat{v},$$

запишем эти проекторы в виде

$$[S^\pm_{3/2}(v)]^\mu_\lambda = {}^1/_2(1\pm\hat{v})(\delta^\mu_\nu - v^\mu v_\nu)(\delta^\nu_\lambda + {}^1/_3\gamma^\nu\hat{v}v_\lambda) =$$
$$= {}^1/_2(1\pm\hat{v})(\delta^\mu_\lambda + {}^1/_3\gamma^\mu\hat{v}v_\lambda - v^\mu v_\lambda - {}^1/_3v^2v^\mu v_\lambda).$$

Пользуясь произволом в определении проекторов, приведем их к стандартному виду (сумма однородных функций нулевой и первой степени):

$$[S^\pm_{3/2}(v)]^\mu_\lambda = {}^1/_2(1\pm\hat{v})\left(\delta^\mu_\lambda - \frac{1}{3v^2}\hat{v}\gamma^\mu v_\lambda - \frac{2}{3v^2}v^\mu v_\lambda\right).$$

Проекторы на спины $^1/_2$ находятся по формуле $S^\pm_{1/2} = {}^1/_2(1\pm\hat{v}) - S^\pm_{3/2}$ и равны

$$[S^\pm_{1/2}(v)]^\mu_\lambda = {}^1/_2(1\pm\hat{v})\left(\frac{1}{3v^2}\hat{v}\gamma^\mu v_\lambda + \frac{2}{3v^2}v^\mu v_\lambda\right).$$

Теперь, зная проекторы, мы можем действовать по стандартной схеме, описанной в предыдущем параграфе, и находим для частицы спина $^3/_2$

$$(d_{3/2})^\mu_\lambda = (S^+_{3/2} - {}^1/_2S_{1/2})^\mu_\lambda =$$
$$= {}^1/_2(1+\hat{v})(\delta^\mu_\lambda - {}^1/_3\gamma^\mu v_\lambda) - {}^1/_3v^\mu v_\lambda - \frac{1}{3v^2}\hat{v}v^\mu v_\lambda;$$

$$(\Lambda_{3/2})^\mu_\lambda = (S^-_{3/2} + {}^1/_2S_{1/2})^\mu_\lambda = {}^1/_2(1-\hat{v})\delta^\mu_\lambda + {}^1/_6\gamma^\mu v_\lambda + \frac{1}{3v^2}\hat{v}v^\mu v_\lambda.$$

Сингулярные члены в этом операторе можно устранить умножением на операторы $(1 \pm S_{3/2} A S_{1/2})$, где $A^\mu_\lambda = a\gamma^\mu v_\lambda$. С помощью коммутационных соотношений для гамма-матриц легко показать, что

$$(S_{3/2} A S_{1/2})^\mu_\lambda = {}^4/_3 a \left(\gamma^\mu v_\lambda - \frac{1}{v^2}\hat{v} v^\mu v_\lambda\right).$$

Полагая $a = -{}^1/_2$, получим

$$(\tilde{d}_{3/2})^\mu_\lambda = [(1 + S_{3/2} A S_{1/2}) d_{3/2}]^\mu_\lambda =$$

$$= {}^1/_2 (1 + \hat{v})(\delta^\mu_\lambda - {}^1/_3 \gamma^\mu v_\lambda - {}^2/_3 v^\mu v_\lambda) + (v^2 - 1)\gamma^\mu v_\lambda;$$

$$(\tilde{\Lambda}_{3/2})^\mu_\lambda = [\Lambda_{3/2}(1 - S_{3/2} A S_{1/2})]^\mu_\lambda =$$

$$= {}^1/_2 (1 - \hat{v})\delta^\mu_\lambda + {}^1/_2 \gamma^\mu v_\lambda - {}^1/_3 \hat{v}\gamma^\mu v_\lambda + {}^1/_3 v^\mu v_\lambda.$$

Как видим, в этом случае уравнение содержит член со вторыми производными. Если использовать второй вариант компенсации сингулярностей, в котором происходит смешивание спинов, то при $a = -{}^1/_2$ получим

$$(\tilde{d}_{3/2})^\mu_\lambda = [d_{3/2}(1 + S_{3/2} A S_{1/2})]^\mu_\lambda = {}^1/_2 (1 + \hat{v})(\delta^\mu_\lambda - \gamma^\mu v_\lambda);$$

$$(\tilde{\Lambda}_{3/2})^\mu_\lambda = [(1 - S_{3/2} A S_{1/2})\Lambda_{3/2}]^\mu_\lambda = {}^1/_2 (1 - \hat{v})\delta^\mu_\lambda + {}^1/_2 \gamma^\mu v_\lambda.$$

Предположим теперь, что частица описывается вектор-спинором ψ^μ, на который *не наложено дополнительного условия.* Тогда он преобразуется по представлению $D^{1\,1/2} \oplus D^{1/2\,1} \oplus D^{0\,1/2} \oplus D^{1/2\,0}$ и содержит спины ${}^3/_2$ (два раза) и ${}^1/_2$ (четыре раза). Проекторы на *пары спинов* равны

$$S^0_{3/2}(v) = S_{3/2}(v)(1 - \Pi); \quad S^0_{1/2}(v) = S_{1/2}(v)(1 + \Pi); \quad S^1_{1/2}(v) = \Pi,$$

где Π — проектор на подпредставление $D^{0\,1/2} \oplus D^{1/2\,0}$:

$$\Pi\psi^\mu = {}^1/_4 \gamma^\mu \gamma_\nu \psi^\nu.$$

Проекторы на *отдельные спины* получаются из выписанных проекторов умножением на ${}^1/_2(1 \pm \hat{v})$. Уравнение для спина ${}^3/_2$ принимает вид

$$[\Lambda^0_{3/2}]^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - [A^0_{3/2}]^\mu_\nu =$$

$$= (1 - \hat{v})\delta^\mu_\nu - {}^1/_3 \gamma^\mu \hat{v}\gamma_\nu + {}^1/_3 \gamma^\mu v_\nu + {}^1/_3 v^\mu \gamma_\nu + {}^2/_3 \frac{\hat{v}}{v^2} v^\mu v_\nu.$$

Дивизор мы не выписываем, но он легко находится по общим формулам пункта 3. Для устранения сингулярности можно использовать то же самое преобразование, смешивающее $S_{3/2}$ и $S_{1/2}$:

$$\tilde{\Lambda}^0_{3/2} = \Lambda^0_{3/2}(1 - S_{3/2} A S_{1/2}); \quad \tilde{d}^0_{3/2} = (1 + S_{3/2} A S_{1/2}) d^0_{3/2},$$

где $A^\mu_\nu = -{}^1/_2 \gamma^\mu v_\nu$. В результате получим

$$[\tilde{\Lambda}^0_{3/2}(v)]^\mu_\nu = (1 - \hat{v})\delta^\mu_\nu - {}^1/_3 \gamma^\mu \hat{v}\gamma_\nu + \gamma^\mu v_\nu + {}^1/_3 v^\mu \gamma_\nu.$$

Можно преобразовать еще это уравнение (и соответствующий дивизор), воспользовавшись для этого проектором Π:

$$\tilde{\tilde{\Lambda}}{}^0_{3/2} = e^{\alpha\Pi}\tilde{\Lambda}{}^0_{3/2}; \quad \tilde{\tilde{d}}{}^0_{3/2} = \tilde{d}^0_{3/2} e^{-\alpha\Pi}; \quad e^{\alpha\Pi} = 1 + (e^\alpha - 1)\Pi.$$

В результате получим целый класс уравнений и соответствующих дивизоров (произвол, характерный для высших спинов). При $e^\alpha = {}^2/_3$ получаем *уравнение Рарита — Швингера* [89]:

$$[\tilde{\tilde{\Lambda}}{}^0_{3/2}(v)]^\mu_\nu = (1 - \hat{v})\delta^\mu_\nu - {}^1/_3 \gamma^\mu (1 + \hat{v})\gamma_\nu + {}^1/_3 (\gamma^\mu v_\nu + v^\mu \gamma_\nu).$$

В группе Галилея выделяется несколько характерных подгрупп, каждая из которых играет особую роль в построении квантовой механики. Прежде всего, это *подгруппа трансляций* T. Элементы этой группы находятся во взаимно-однозначном соответствии с векторами из четырехмерного векторного пространства $a \in \mathscr{K}$, $a = \{a^\mu | \mu = 0, 1, 2, 3\}$. Каждому вектору $a \in \mathscr{K}$ сопоставляется элемент группы $a_T \in T$, действующий в $\mathscr{X}$ по закону

$$a_T x = x + a = \{x^0 + a^0, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}\}.$$

Еще одна характерная подгруппа — это *подгруппа вращений* R. Каждое вращение $r \in R$ действует в $\mathscr{X}$ так, что не меняет временной координаты x^0 точки x и сохраняет абсолютную величину трехмерного вектора $\boldsymbol{x}$:

$$rx = \{x^0, r\boldsymbol{x}\}, \quad |r\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|.$$

Наконец, группа Галилея содержит элементы, которые называются *собственными преобразованиями Галилея*. Каждый такой элемент $\boldsymbol{v}_L$ задается вектором скорости $\boldsymbol{v} = \{v^1, v^2, v^3\}$ и действует в пространстве-времени по формуле

$$\boldsymbol{v}_L x = \{x^0, \boldsymbol{x} + x^0\boldsymbol{v}\}.$$

Собственные преобразования Галилея сами по себе не образуют группы, но множество элементов вида $l = \boldsymbol{v}_L r$, где $r \in R$, образует группу, аналогичную подгруппе Лоренца в группе Пуанкаре. Эта группа описывает повороты системы отсчета и переходы от одной инерциальной системы к другой, при которых точка $O = \{0, 0, 0, 0\}$ переходит в себя. Для удобства будем называть эту подгруппу *группой ускорений* системы отсчета.

Произвольное преобразование из группы Галилея $p \in P$ единственным образом представляется в виде $p = la_T = \boldsymbol{v}_L r a_T$. Закон композиции в группе P легко выводится из соотношений

$$a_T a'_T = (a + a')_T; \quad \boldsymbol{v}_L \boldsymbol{v}'_L = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}')_L;$$

$$r\boldsymbol{v}_L r^{-1} = (r\boldsymbol{v})_L; \quad la_T l^{-1} = (la)_T,$$

где действие элемента $l \in L$ на 4-вектор $a \in \mathscr{K}$ определяется так же, как и действие элемента l на пространстве-времени $\mathscr{X}$:

$$la = \boldsymbol{v}_L ra = \{a^0, r\boldsymbol{a} + a^0\boldsymbol{v}\}.$$

Из выписанных соотношений видно, что группа L элементов вида $\boldsymbol{v}_L r$ изоморфна трехмерной евклидовой группе E_3 (см. п. 3.2.4). Разумеется, то же самое строение имеет и подгруппа элементов вида $a_T r$, где $a_T = \{0, \boldsymbol{a}\}_T$ — трехмерный сдвиг, не меняющий временной координаты.

2. Система мультипликаторов. В квантовой механике, поскольку интерпретация ее производится только через скалярное произведение, векторы, пропорциональные друг другу, описывают одно и то же состояние. Можно сказать, что пространством состояний квантовой системы является не само гильбертово пространство $\mathscr{H}$, а множество лучей, т. е. подмножеств вида $\{\lambda\varphi | \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0\}$ в этом пространстве. Рассматривая преобразования симметрии в этом пространстве, мы не должны, очевидно, отличать преобразования $U(p)$ и $\lambda U(p)$. Поэтому совокупность операторов, соответствующих элементам группы симметрии, не должна образовывать представления этой группы в обычном смысле. Вместо этого должно выполняться более слабое требование:

$$U(p)U(p') = (p, p')U(pp'),$$

где (p, p') — некоторое комплексное число. Совокупность чисел (p, p') называется *системой мультипликаторов*, а отображение $p \mapsto U(p)$ — *проективным представлением* с данной системой мультипликаторов (см. п. 2.3.8).

В отличие, например, от группы Пуанкаре, группа Галилея обладает проективными представлениями, которые не сводятся к обычным (векторным) представлениям. Можно показать [19, 44, 53], что любая система мультипликаторов группы Галилея преобразованием эквивалентности может быть приведена к виду

$$(a_T \boldsymbol{v}_L r, a'_T \boldsymbol{v}'_L r') = \exp\{im[\boldsymbol{v}r\boldsymbol{a}' + {}^1/_2\boldsymbol{v}^2 a'^0]\},$$

где $m \in \mathbb{R}$ — параметр, характеризующий эту систему.

3. Координатное представление. В дальнейшем наша задача — построить квантовую механику *нерелятивистской элементарной частицы*. Будем предполагать, что теория инвариантна относительно группы Галилея. Это значит, что в пространстве состояний частицы действует представление (в общем случае проективное) группы Галилея.

Невозможно представить себе теории частицы, в которой не была бы определена наблюдаемая (или динамическая переменная) *«положение в пространстве-времени»*. Без этого просто нельзя было бы интерпретировать квантовую систему как частицу. Поэтому построим сначала представление группы Галилея, действующее в пространстве, состояния которого интерпретируются в терминах положения в пространстве-времени. Такое представление будем называть *координатным*.

Пространство значений наблюдаемой положения есть пространство-время $\mathscr{X}$. Поскольку группа Галилея действует в этом пространстве транзитивно, его можно изоморфно отобразить на пространстве некоторое фактор-пространство группы. Для этого выбираем в качестве центра однородного пространства точку $O = \{0, 0, 0, 0\}$ и находим стабилизатор этой точки. Им оказывается группа ускорений L. Теперь в соответствии с общими правилами (§ 4.2) следует построить представление группы P, индуцированное из подгруппы L.

Глава 8

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Нерелятивистскую квантовую механику можно построить совершенно аналогично тому, как в главах 5 и 6 была построена релятивистская квантовая теория. Для этого нужно только предположить, что группой симметрии пространства-времени является группа Галилея P, содержащая четырехмерные сдвиги T, пространственные вращения R, а также собственные преобразования Галилея, описывающие переход к движущейся системе отсчета. Собственные преобразования Галилея вместе с вращениями образуют группу L, которую можно назвать группой ускорений.

Пространство-время Галилея $\mathscr{X}$ можно реализовать как фактор-пространство P/L, поэтому координатное представление, диагонализующее наблюдаемую «положение в пространстве-времени», строится как индуцированное $U(P) = D_j(L) \uparrow P$. Пространство-носитель этого представления содержит виртуальные состояния, локализованные в пространстве-времени. Неприводимое представление строится как индуцированное $U_\varepsilon(P) = \Delta_{\varepsilon j}(RT) \uparrow P$, его пространство-носитель состоит из реальных состояний частицы и диагонализует наблюдаемую импульса. И координатное, и импульсное представления группы Галилея являются проективными, причем система мультипликаторов этих представлений характеризуется одним параметром — массой частицы.

Операторы, осуществляющие связь координатного и импульсного представлений, однозначно находятся как операторы переплетения индуцированных представлений и позволяют найти амплитуду распространения частицы из одной точки пространства-времени в другую. Предположение о том, что частица распространяется лишь в будущее (в направлении увеличения времени), позволяет построить причинный пропагатор свободной частицы.

Взаимодействие с внешним полем вводится как амплитуда прямого перехода локализованного состояния в состояние, локализованное в той же точке. Тогда амплитуда вероятности перехода между двумя реальными состояниями выражается бесконечным рядом, содержащим причинные пропагаторы и амплитуду взаимодействия (потенциал внешнего поля). Поскольку амплитуда распространения квантовой частицы определена без использования какого бы то ни было динамического принципа, ее можно использовать для того, чтобы вывести принцип действия для движения классической частицы.

Если интерпретировать причинный пропагатор как нормировочный оператор для амплитуды взаимных переходов локализованных состояний (в духе пп. 4.3.1 и 6.4.1), то эта амплитуда оказывается локальной и выражается через оператор Шредингера. Включение в локальную амплитуду также потенциала внешнего поля позволяет и полную амплитуду перехода взаимодействующей частицы получить как нормировочный оператор и перейти к локальной формулировке теории, близкой к традиционной формулировке через уравнение Шредингера.

§ 8.1. Свободная частица в пространстве Галилея

Теория свободной элементарной частицы в нерелятивистском приближении строится точно так же, как и релятивистская теория, с той разницей, что группой симметрии вместо группы Пуанкаре служит группа Галилея. С этим связано чисто техническое различие, возникающее из-за того, что группа Галилея обладает проективными представлениями, и именно они нужны для теории частиц. В остальном отличия невелики, так как в группе Галилея имеются аналоги всех тех подгрупп группы Пуанкаре, которые играли существенную роль при построении релятивистской теории. Это, впрочем, неудивительно, так как группа Галилея может быть получена с помощью некоторого предельного процесса — «сжатия» или «сокращения» (contraction) группы Пуанкаре в смысле Вигнера — Иноню [72]. Разумеется, квантовая теория в пространстве Галилея может быть получена как предельный случай релятивистской теории. Однако независимое построение ее оказывается поучительным, особенно в части, касающейся описания взаимодействия (см. следующий параграф).

1. Группа Галилея. Обозначим через $\mathscr{X}$ пространство-время, точками которого являются четверки чисел

$$x = \{x^0, \boldsymbol{x}\} = \{x^\mu \mid \mu = 0, 1, 2, 3\}, \quad \boldsymbol{x} = \{x^i \mid i = 1, 2, 3\}.$$

Будем предполагать, что время $t = x^0$ абсолютно, так что $\mathscr{X}$ — *пространство-время Галилея*. Тогда симметрия пространства-времени описывается *группой Галилея*, которую мы обозначим через P, по аналогии с группой Пуанкаре. Вообще обозначения будем стараться выбирать так, чтобы они помогали прослеживать аналогию между нерелятивистской и релятивистской квантовой механикой.

Выберем в качестве индуцирующего представления такое представление группы L, которое по существу сводится к неприводимому представлению Δ_j группы вращений (см. п. 3.1.4):

$$D_j(l) = D_j(v_L r) = \Delta_j(r),$$

где $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ Поскольку представление группы Галилея, вообще говоря, является проективным, индуцированное представление следует строить, руководствуясь общими формулами п. 2.3.8. Реализуем индуцированное представление $U(P) = D_j(L) \uparrow P$ в пространстве функций на группе P со значениями в пространстве-носителе $\mathscr{L}_j$ представления Δ_j. Наложим на эти функции структурное условие

$$(l^{-1}, p^{-1})\,\psi(pl) = D_j(l^{-1})\,\psi(p)$$

и определим действие операторов представления на эти функции формулой

$$U(p)\,\psi(p') = (p'^{-1}, p)\,\psi(p^{-1}p').$$

Нетрудно видеть, что в силу структурного условия функция на группе сводится к функции на пространстве-времени по формуле

$$\psi(x_T v_L r) = e^{-im(1/2 v^2 x^0 + vx)} \Delta_j(r^{-1})\,\psi(x),$$

а действие на такие функции операторов представления определяется следующим образом:

$$U(a_T)\,\psi(x) = \psi(x-a);$$
$$U(v_L)\,\psi(x) = e^{-im(1/2 v^2 x^0 - vx)}\psi(v_L^{-1}x);$$
$$U(r)\,\psi(x) = \Delta_j(r)\,\psi(r^{-1}x).$$

Скалярное произведение в пространстве $\mathscr{H}$ представления U определяется как

$$(\psi, \psi') = \int dx\,\langle \psi(x), \psi'(x)\rangle,$$

где $dx = d^4x$ — инвариантная мера на фактор-пространстве $\mathscr{X} = P/L$, а $\langle\,,\rangle$ — инвариантное скалярное произведение в $\mathscr{L}_j$. Представление U унитарно относительно формы $(\,,)$.

Нетрудно видеть, что функции ψ преобразуются именно так, как должны преобразовываться волновые функции частицы *массы* m и *спина* j в координатном представлении [19].

4. Неприводимое (импульсное) представление. Если пространство состояний системы можно разложить в сумму подпространств, инвариантных относительно действия группы симметрии, то каждое из этих подпространств можно рассматривать как пространство состояний некоторой подсистемы. При описании элементарной частицы естественно предположить, что

такого разложения не существует, т. е. *в пространстве состояний элементарной частицы действует неприводимое представление группы Галилея.*

Неприводимые представления группы Галилея можно найти методом малой группы. Для этого нужно либо обобщить этот метод на случай проективных представлений, либо перейти от группы Галилея к ее *накрывающей*, обладающей тем свойством, что векторные представления накрывающей при ограничении их на группу Галилея дают проективные представления этой группы [44]. Тогда для нахождения неприводимых представлений накрывающей группы можно воспользоваться методом малой группы в его обычной форме. Унитарные неприводимые представления группы Галилея найдены в статье [97]. Нам понадобится лишь одна серия этих представлений, к описанию которой мы и перейдем.

Рассмотрим представление группы трансляций T, определяемое формулой

$$\Delta_\varepsilon(a_T) = e^{i\varepsilon a^0},$$

т. е. характеризуемое 4-импульсом $k = \{\varepsilon, 0, 0, 0\}$. *Малой группой* этого представления является группа $H = RT$, состоящая из трансляций и вращений. Неприводимое представление этой группы определим формулой

$$\Delta_{\varepsilon j}(a_T r) = e^{i\varepsilon a^0}\Delta_j(r)$$

(позднее мы увидим, что момент j, возникающий здесь, должен совпадать с моментом, характеризующим координатное представление). Интересующее нас неприводимое проективное представление группы Галилея получается индуцированием $U_\varepsilon(P) = \Delta_{\varepsilon j}(H) \uparrow P$.

Реализуем это неприводимое представление в пространстве функций $\varphi : P \to \mathscr{L}_j$ со структурным условием

$$(h^{-1}, p^{-1})\,\varphi(ph) = \Delta_{\varepsilon j}(h^{-1})\,\varphi(p), \qquad h \in H, \quad p \in P.$$

Операторы представления действуют по формуле

$$U_\varepsilon(p)\,\varphi(p') = (p'^{-1}, p)\,\varphi(p^{-1}p').$$

Легко видеть, что функции на группе сводятся к функциям от скорости:

$$\varphi(v_L a_T r) = e^{-i\varepsilon a^0}\Delta_j(r^{-1})\,\varphi(v),$$

а операторы представления действуют на эти функции следующим образом:

$$U_\varepsilon(a_T)\,\varphi(v) = e^{i[(\varepsilon + 1/2 m v^2)a^0 - m v a]}\varphi(v);$$
$$U_\varepsilon(v_L)\,\varphi(v') = \varphi(v' - v);$$
$$U_\varepsilon(r)\,\varphi(v) = \Delta_j(r)\,\varphi(r^{-1}v).$$

Скалярное произведение в пространстве $\mathscr{H}_\varepsilon$ таких функций определяется интегралом

$$(\varphi, \varphi')_\varepsilon = \int d\boldsymbol{v} \langle \varphi(\boldsymbol{v}), \varphi'(\boldsymbol{v})\rangle,$$

где $d\boldsymbol{v} = d^3v$ — инвариантная мера на фактор-пространстве P/H, а $\langle , \rangle$ — инвариантное скалярное произведение в $\mathscr{L}_j$. Относительно произведения $(,)_\varepsilon$ представление U_ε унитарно.

Сравнивая эти формулы с обычным формализмом квантовой механики, нетрудно убедиться, что построенное пространство — это пространство состояний частицы *массы* m и *спина* j, функция φ — не что иное, как волновая функция частицы в *импульсном представлении*, $\boldsymbol{v}$ — скорость частицы, $m\boldsymbol{v}$ — импульс ее, ε — *энергия покоя*.

5. Переплетение координатного и импульсного представлений. Поскольку координатное и импульсное (неприводимое) представления реализованы как индуцированные, связь между ними легко находится по теореме о переплетении проективных индуцированных представлений (п. 2.3.8). Найдем сначала оператор $J_\varepsilon \in [U_\varepsilon, U]$, переводящий импульсное представление в координатное. Он имеет вид

$$\psi(x) = J_\varepsilon\varphi(x) = \int d\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{v}_L^{-1}, a_T^{-1}\right) t\left(\boldsymbol{v}_L\right) \varphi\left(a_T \boldsymbol{v}_L\right).$$

Структурное условие на ядро t, найденное по общим правилам, приводит к тому, что $t(v_L) = t(1) \in [\Delta_j(R)] = \mathbb{C}$. Отметим здесь, что если бы импульсное представление определялось другим значением момента $j' \neq j$, то структурное условие имело бы вид $t(1) \in [\Delta_{j'}, \Delta_j] = 0$, так что совпадение моментов $j' = j$ непосредственно следует из требования, чтобы координатное и импульсное представления переплетались.

Выберем из соображений нормировки $t(1) = (m/2\pi)^{3/2}$. Окончательное выражение для оператора J_ε получается, если переставить в аргументе функции трансляцию и ускорение: $a_T\boldsymbol{v}_L = \boldsymbol{v}_L(\boldsymbol{v}_L^{-1}a)_T$, воспользоваться структурным условием на φ и подставить значение мультипликатора $(\boldsymbol{v}_L^{-1}, a_T^{-1})$. Таким путем получаем

$$\psi(x) = J_\varepsilon\varphi(x) = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{3/2} \int d\boldsymbol{v}\, e^{-i[(\varepsilon + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2)x^0 - m\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}]}\varphi(\boldsymbol{v}).$$

Нетрудно показать, что скалярное произведение $(\varphi, \varphi')_\varepsilon$ выражается через волновые функции в координатном представлении $\psi_\varepsilon = J_\varepsilon\varphi$, $\psi'_\varepsilon = J_\varepsilon\varphi'$ интегралом по трехмерному пространству в один и тот же момент времени:

$$(\varphi, \varphi')_\varepsilon = \int\limits_{x^0 = \text{const}} d\boldsymbol{x} \langle \psi_\varepsilon(x), \psi'_\varepsilon(x)\rangle,$$

где обозначено $d\boldsymbol{x} = d^3\boldsymbol{x} = dx^1\,dx^2\,dx^3$.

Аналогичным образом находится и оператор $K_\varepsilon \in [U, U_\varepsilon]$, переводящий из пространства координатного представления в пространство импульсного представления:

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = K_\varepsilon\psi(\boldsymbol{v}) = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{3/2} \int dx\, e^{i[(\varepsilon + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2)x^0 - m\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}]}\psi(x).$$

Два проективных представления могут переплетаться лишь в том случае, если они имеют одну и ту же систему мультипликаторов. Поэтому неприводимое представление U_ε, характеризуемое массой m, можно вложить лишь в координатное представление U с той же самой массой m. В этом проявляется *принцип суперотбора по массе*, справедливый в нерелятивистской теории: не может существовать суперпозиция состояний, соответствующих различным массам.

Оператор J_ε отображает пространство $\mathscr{H}_\varepsilon$ неприводимого представления на некоторое подпространство в пространстве $\mathscr{H}$ координатного представления, т. е. $J_\varepsilon\mathscr{H}_\varepsilon \subset \mathscr{H}$. Найдем скалярное произведение векторов из двух таких подпространств: $\psi_\varepsilon = J_\varepsilon\varphi$, $\varphi \in \mathscr{H}_\varepsilon$; $\psi_{\varepsilon'} = J_{\varepsilon'}\varphi'$, $\varphi' \in \mathscr{H}_{\varepsilon'}$. Используя представлеие дельта-функции в виде интеграла Фурье, легко находим

$$(\psi_\varepsilon, \psi'_{\varepsilon'}) = (J_\varepsilon\varphi, J_{\varepsilon'}\varphi') = 2\pi\delta(\varepsilon - \varepsilon')(\varphi, \varphi')_\varepsilon.$$

Аналогичным образом легко показывается, что координатное представление U разлагается в прямой интеграл неприводимых представлений U_ε, причем выделение неприводимой компоненты производится оператором K_ε:

$$(\psi, \psi') = \frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon\left(\varphi_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon\right)_\varepsilon; \quad \varphi_\varepsilon = K_\varepsilon\psi, \quad \varphi'_\varepsilon = K_\varepsilon\psi'.$$

§ 8.2. Пропагаторы и взаимодействия нерелятивистских частиц

Аналогично тому, как это было сделано в релятивистском случае, можно найти амплитуду распространения частицы из одной точки пространства-времени в другую. Причинные свойства частиц в нерелятивистском приближении формулируются проще — как распространение всех частиц из прошлого в будущее. Это связано с тем, что частицы и античастицы рассматриваются независимо друг от друга, процессами типа аннигиляции можно пренебречь. Поэтому античастицы можно точно так же, как и соответствующие им частицы, наделить положительной массой и способностью двигаться только в будущее. В релятивистском случае, когда важно учесть двойственность между частицей и античастицей, оказывается удобным (хотя и не обязательным) приписать античастице отрицательную массу и необычный способ распространения в пространстве-времени.

В нерелятивистской теории переход от описания в терминах амплитуд к полностью локальной формулировке теории производится легко и может служить ориентиром при аналогичном переходе в релятивистской теории.

1. Пропагатор нерелятивистской частицы. Инвариантные эрмитовы формы, связывающие друг с другом векторы пространств $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_\varepsilon$, имеют определенный физический смысл — являются амплитудами вероятности различных переходов. Чтобы разобраться в них, заметим, что пространство $\mathscr{H}$ слишком широко, чтобы быть пространством реальных состояний частицы. Состояния $\psi \in \mathscr{H}$ можно интерпретировать лишь как виртуальные состояния, возникающие как промежуточные в процессе взаимодействия частицы. В отличие от этого, векторы $\varphi \in \mathscr{H}_\varepsilon$ описывают реальные, наблюдаемые состояния частицы. Параметр ε, который нужно произвольно выбрать и зафиксировать,— это энергия покоя или уровень, от которого отсчитывается энергия частицы.

Форма $(\varphi, \varphi')_\varepsilon$; $\varphi, \varphi' \in \mathscr{H}_\varepsilon$, равна амплитуде вероятности перехода из одного реального состояния частицы в другое реальное состояние. В частности, условие нормировки $(\varphi, \varphi)_\varepsilon = 1$ выражает стабильность реального состояния. Форма $A(\psi, \varphi) = (\psi, J_\varepsilon \varphi)$, $\psi \in \mathscr{H}$, $\varphi \in \mathscr{H}_\varepsilon$, равна (по предположению) амплитуде перехода реального состояния в виртуальное. В частности, амплитуда перехода из реального состояния в состояние, локализованное в точке, равна

$$A(\psi_x, \varphi) = (\psi_x, J_\varepsilon \varphi) = \langle F, (J_\varepsilon \varphi)(x)\rangle.$$

Амплитуда перехода состояния, локализованного в точке, в реальное, равна

$$A(\varphi, \psi_x) = (J_\varepsilon \varphi, \psi_x) = \langle (J_\varepsilon \varphi)(x), F\rangle.$$

Наличие двух последних амплитуд приводит к тому, что точечно-локализованное состояние может перейти в состояние, локализованное в другой точке, через промежуточное состояние из пространства $\mathscr{H}_\varepsilon$. Амплитуду такого перехода, учитывающую все альтернативы (базисные векторы в $\mathscr{H}_\varepsilon$) можно выразить через проектор, вырезающий из пространства $\mathscr{H}$ наблюдаемую часть $J_\varepsilon \mathscr{H}_\varepsilon$. Очевидно, этот проектор равен $\Pi_\varepsilon = J_\varepsilon K_\varepsilon$. Легко найти его явный вид:

$$\Pi_\varepsilon \psi(x) = \int dx' \, \Pi_\varepsilon(x - x') \psi(x');$$

$$\Pi_\varepsilon(x - x') = $$
$$= \left(\frac{m}{2\pi}\right)^3 \int d\boldsymbol{v} \exp\left\{- i\left[(\varepsilon + {}^1\!/_2 m\boldsymbol{v}^2)(x^0 - x'^0) - m\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\right]\right\}.$$

Появившееся здесь ядро $\Pi_\varepsilon(x - x')$ — не что иное, как *пропагатор нерелятивистской частицы*, выраженный в виде интеграла по импульсному пространству. Такое выражение часто

удобно для применений. Однако интеграл по $\boldsymbol{v}$ относится к гауссовскому типу и может быть вычислен по формуле [42]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(a\lambda^2 + b\lambda)\, d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{-a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Тогда получается явное выражение для пропагатора:

$$\Pi_\varepsilon(x - x') = \left(\frac{m}{2\pi i (x^0 - x'^0)}\right)^{3/2} \exp\left[i \frac{m}{2} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^2}{x^0 - x'^0} - i\varepsilon (x^0 - x'^0)\right].$$

Это выражение совпадает с тем, которое вычислено Фейнманом методом интегрирования по путям [42].

2. Описание взаимодействия. Пользуясь выражением для пропагатора в виде интеграла по $\boldsymbol{v}$, легко показать, что он удовлетворяет условию

$$\int_{x'^0 = \mathrm{const}} d\boldsymbol{x}' \, \Pi_\varepsilon(x - x') \Pi_\varepsilon(x' - x'') = \Pi_\varepsilon(x - x''),$$

которое естественно интерпретируется в терминах амплитуд перехода. Действительно, при переходе из точки пространства-времени x'' в точку x частица должна пройти последовательно через все моменты времени x'^0. При этом в некоторый выделенный промежуточный момент времени x'^0 она может пройти через любую пространственную точку $\boldsymbol{x}'$. Амплитуда перехода из x'' в x при условии прохождения в момент x'^0 через точку $\boldsymbol{x}'$ равна $\Pi_\varepsilon(x - x') \Pi_\varepsilon(x' - x'')$. Полная амплитуда перехода из точки x'' в точку x получается суммированием (интегрированием) этого выражения по всем $\boldsymbol{x}'$ (по всем альтернативам).

В этом рассуждении существенно, что моменты времени x''^0, x'^0, x^0 следуют друг за другом в таком порядке: $x''^0 < x'^0 < x^0$, так как сделанное предположение о движении частицы из прошлого в будущее не позволяет провести то же рассуждение при другом порядке следования моментов времени. Для того чтобы автоматически учесть это *требование причинности*, будем считать, что амплитуда перехода из точки x' в точку x равна $\Pi_\varepsilon(x - x')$, если $x'^0 < x^0$, и равна нулю в противном случае. Другими словами, будем считать, что амплитуда вероятности перехода равна *причинному пропагатору*, который выражается следующим образом:

$$\Pi^c_\varepsilon(x - x') = \theta(x - x') \Pi_\varepsilon(x - x'),$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x^0 > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x^0 < 0. \end{cases}$$

Причинный пропагатор позволяет описать взаимодействие частицы с внешним полем, если постулировать, что это *взаимо-*

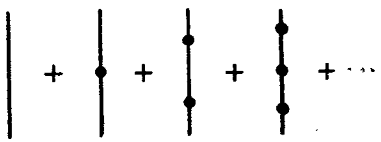
действие является локальным, т. е. происходит в одной точке пространства-времени. Точнее, предположим, что взаимодействие частицы с внешним полем в точке $x \in \mathscr{X}$ означает наличие амплитуды прямого перехода из состояния ψ_x локализации в этой точке в это же состояние. Предположим, что амплитуда перехода между состояниями $\psi_{x'}$ и ψ_x за счет взаимодействия равна

$$\gamma(\psi_x, \psi_{x'}) = -iV(x)(\psi_x, \psi_{x'}) = -iV(x)\,\delta(x-x')\langle F, F'\rangle.$$

Появившуюся здесь функцию $x \mapsto V(x)$ назовем *потенциальной энергией* частицы во внешнем поле или *потенциалом внешнего поля*.

Постулируем, что частица может перейти из одного реального состояния $\varphi' \in \mathscr{H}_\varepsilon$ в другое $\varphi \in \mathscr{H}_\varepsilon$ лишь посредством цепочки элементарных актов, каждый из которых относится к одному из следующих трех типов: 1) переход реального состояния $\psi_\varepsilon \in J_\varepsilon \mathscr{H}_\varepsilon$ в локализованное в точке — *локализация*, совершаемая с амплитудой вероятности $(\psi_x, \psi_\varepsilon) = \langle F, \psi_\varepsilon(x)\rangle$, и обратный процесс перехода локализованного состояния в реальное — *материализация* с амплитудой $(\psi_\varepsilon, \psi_x) = \langle \psi_\varepsilon(x), F\rangle$; 2) переход одного локализованного состояния в другое посредством *причинного распространения* с амплитудой $A^c_\varepsilon(\psi_x, \psi_{x'}) = \Pi^c_\varepsilon(x-x')\langle F, F'\rangle$; 3) переход из состояния, локализованного в точке, в аналогичное состояние, совершаемый посредством *локального взаимодействия* с внешним полем, с амплитудой $\gamma(\psi_x, \psi_{x'}) = -iV(x)\,\delta(x-x')\langle F, F'\rangle$.

Теперь вычисление амплитуды вероятности любого реального перехода сводится просто к перечислению альтернатив этого процесса и суммированию их амплитуд. Переход $\psi'_\varepsilon \to \psi_\varepsilon$ всегда начинается с локализации состояния ψ'_ε в любой точке пространства в фиксированный момент времени и кончается материализацией некоторого локализованного состояния в состояние ψ_ε. А между этими двумя элементарными актами может реализоваться любая из многочисленных альтернативных цепочек превращений. Простейшая из них — причинный переход одного локализованного состояния в другое. Более сложная — причинный переход локализованного состояния, затем локальное взаимодействие и затем опять причинный переход. Альтернативы можно описать с помощью следующих диаграмм, имеющих очевидную интерпретацию:



Сопоставляя этим альтернативам их амплитуды и складывая их, получим полную амплитуду процесса в виде

$$A_{tt'}(\psi_\varepsilon, \psi'_\varepsilon) = \int\limits_{x^0=t} d\boldsymbol{x} \int\limits_{x'^0=t'} d\boldsymbol{x}' \left\langle \psi_\varepsilon(x), \Pi^c_{\varepsilon V}(x, x')\,\psi'_\varepsilon(x')\right\rangle,$$

где

$$\Pi^c_{\varepsilon V}(x, x') = \Pi^c_\varepsilon(x-x') + (-i)\int dx_1\, \Pi^c_\varepsilon(x-x_1)\, V(x_1)\, \Pi^c_\varepsilon(x_1-x') +$$
$$+ (-i)^2 \int dx_1 \int dx_2\, \Pi^c_\varepsilon(x-x_1)\, V(x_1)\, \Pi^c_\varepsilon(x_1-x_2)\, V(x_2)\, \Pi^c_\varepsilon(x_2-x') + \ldots$$

— *полный пропагатор* частицы.

Используя явный вид оператора J_ε, легко показать, что для любого реального состояния, записанного в координатном представлении, $\psi_\varepsilon = J_\varepsilon\varphi$, $\varphi \in \mathscr{H}_\varepsilon$, выполняются соотношения

$$\int\limits_{x'^0=t} d\boldsymbol{x}'\, \Pi^c_\varepsilon(x-x')\,\psi_\varepsilon(x') = \theta(x^0-t)\,\psi_\varepsilon(x);$$

$$\int\limits_{x'^0=t} d\boldsymbol{x}'\, \psi^+_\varepsilon(x')\,\Pi^c_\varepsilon(x'-x) = \theta(t-x^0)\,\psi^+_\varepsilon(x).$$

Учитывая это, можно переписать выражение для амплитуды перехода в виде

$$A_{tt'}(\psi_\varepsilon, \psi'_\varepsilon) =$$
$$= \theta(t-t')(\psi_\varepsilon, \psi'_\varepsilon)_\varepsilon + \int dx \int dx'\, \theta(t-x)\, S_{\varepsilon V}(x, x')\, \theta(x'-t'),$$

где

$$S_{\varepsilon V}(x, x') = (-i)\, V(x)\, \delta(x-x') + (-i)^2\, V(x)\, \Pi^c_\varepsilon(x-x')\, V(x') +$$
$$+ (-i)^3 \int dx_1\, V(x)\, \Pi^c_\varepsilon(x-x_1)\, V(x_1)\, \Pi^c_\varepsilon(x_1-x')\, V(x') + \ldots$$

Выражение $A_{tt'}(\psi_\varepsilon, \psi'_\varepsilon)$ представляет собой амплитуду перехода $\psi'_\varepsilon \to \psi_\varepsilon$ при условии, что начальное состояние было зафиксировано в момент времени t', а конечное — в момент t. Между этими моментами на частицу действовало внешнее поле. Можно сказать вместо этого, что вычисляется амплитуда перехода одного состояния в другое при условии, что взаимодействие с внешним полем было включено лишь в интервале времени $[t', t]$. Полная амплитуда перехода получается в том случае, если этот интервал простирается от $-\infty$ до $+\infty$:

$$A(\psi_\varepsilon, \psi'_\varepsilon) = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ t'\to-\infty}} A_{tt'}(\psi_\varepsilon, \psi'_\varepsilon) = (\psi_\varepsilon, \psi'_\varepsilon)_\varepsilon + \int dx \int dx'\, S_{\varepsilon V}(x, x').$$

3. Вывод принципа действия. Рассуждения, которые использованы в предыдущем пункте для вывода амплитуды перехода между реальными состояниями частицы, повторяют соответствующий анализ, проведенный Фейнманом при формулировке квантовой механики с помощью интегралов по путям. Существенно, однако, что причинный пропагатор нерелятивистской частицы $\Pi^c_\varepsilon(x-x')$ был выведен здесь лишь из соображений симметрии, без использования классического действия или какого-либо другого динамического принципа. Динамика свободной частицы в данном случае полностью регламентируется требованием инвариантности относительно группы Галилея и формулируется сразу на квантовом уровне.

Это открывает возможность, обращая ход рассуждений Фейнмана, вывести принцип действия для классической частицы. Наметим этот путь в общих чертах.

Движение классической частицы по определенной траектории можно рассматривать как последовательное прохождение ею ряда пространственно-временных точек. Имея причинный пропагатор, мы можем вычислить амплитуду вероятности такого процесса и найти, по какой кривой движение наиболее вероятно.

Аппроксимируем непрерывную кривую

$$[x]=\{x\in\mathscr{X}\,|\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(x^0),\ t_0\leqslant x^0\leqslant t\}$$

конечным множеством пространственно-временных точек, например, разделив временной интервал $[t_0, t]$ на равные части точками

$$t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_{n-1},\ t_n=t;\quad t_i-t_{i-1}=\Delta t=\frac{1}{n}(t-t_0).$$

Тогда кривая $[x]$ заменяется последовательностью

$$[x]_n=\{x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\},\qquad x_i=\{t_i,\ \boldsymbol{x}(t_i)\}=\{t_i,\ \boldsymbol{x}_i\}.$$

Амплитуда вероятности последовательного прохождения частицей этих точек равна

$$A[x]_n=\Pi^c_\varepsilon(x_n-x_{n-1})\ \ldots\ \Pi^c_\varepsilon(x_1-x_0)=$$
$$=\left(\frac{m}{2\pi i\,\Delta t}\right)^{3n/2}\exp\left\{\frac{im}{2\,\Delta t}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_{i-1})^2-i\varepsilon(t-t_0)\right\}.$$

Если выражаться точнее, это — плотность амплитуды вероятности, а конечная амплитуда получится, если позволить каждой точке $\boldsymbol{x}_i$ пробегать небольшой интервал вблизи $\boldsymbol{x}(t_i)$ и проинтегрировать в пределах этого интервала по $d\boldsymbol{x}_i$:

$$A([x]_n,\ \Delta[x]_n)=\exp[-i\varepsilon(t-t_0)]\left(\frac{m}{2\pi i\,\Delta t}\right)^{3n/2}\times$$
$$\times\int\limits_{|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}(t_i)|<\delta}d\boldsymbol{x}_1\ \ldots\int d\boldsymbol{x}_n\exp\left[\frac{im}{2\,\Delta t}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_{i-1})^2\right].$$

В пределе $n\to\infty$ это выражение дает амплитуду вероятности движения частицы по одной из траекторий $[x']$, лежащих в окрестности траектории $[x]$. Нетрудно видеть, что такая амплитуда выражается функциональным интегралом по этой окрестности траекторий, причем интегрирование ведется с весом $\exp\{iS[x']\}$, где S — *функционал действия*:

$$S[x]=\int\limits_{t_0}^{t}dx^0\,\frac{m}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dx^0}\right)^2.$$

Мы вычислили амплитуду перехода частицы вдоль кривой, не учитывая ее взаимодействия с внешним полем. Однако легко включить в рассмотрение и взаимодействие. Для этого заметим, что полная амплитуда перехода складывается из амплитуды свободного (без взаимодействия) перехода, амплитуды перехода, при котором один раз происходит взаимодействие в произвольной точке кривой (по всем положениям этой точки на кривой следует просуммировать), амплитуды перехода с двукратным взаимодействием и т. д. Сложение всех таких амплитуд приводит к появлению еще одного члена в показателе экспоненты, т. е. еще одного члена в выражении для действия:

$$S[x]=\int\limits_{t_0}^{t}dx^0\left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dx^0}\right)^2-V(x)\right].$$

Это вычисление совпадает с соответствующей выкладкой Фейнмана [42], только проводится в обратном порядке.

При интегрировании по окрестности траекторий функционал действия меняется от траектории к траектории. Но поскольку этот функционал равен фазе подынтегрального выражения (т. е. аргументу его как комплексного числа), то очевидно, что при сильном изменении фазы от траектории к траектории вклады отдельных траекторий полностью компенсируют друг друга. (Это вполне аналогично тому, как гасят друг друга вклады различных частот в фурье-разложении дельта-функции.) Следовательно, амплитуда перехода по окрестности траекторий будет заметно отличаться от нуля лишь в том случае, если функционал действия очень мало меняется от траектории к траектории, т. е. если функционал действия достигает экстремума на траектории $[x]$. Таким образом, *классическая частица движется по той траектории, на которой функционал действия достигает экстремума.*

4. Уравнение Шредингера и локальная формулировка теории. Причинный пропагатор был построен для вычисления амплитуды вероятности перехода друг в друга реальных состояний в предположении, что переход совершается через промежуточные состояния, локализованные в точке пространства-времени.

Однако согласно результатам п. 4.3.1 (ср. также пп. 6.4.1 и 6.4.2) в формуле для сложения амплитуд должна фигурировать не сама матрица взаимных переходов промежуточных состояний (альтернатив), а обратный к ней нормировочный оператор:

$$A(\varphi, \varphi') = \sum_{ij} A(\varphi, e_i)(A^{-1})^{ij} A(e_j, \varphi'), \qquad A_{ij} = A(e_i, e_j).$$

Следовательно, причинный пропагатор правильнее интерпретировать не как амплитуду перехода друг в друга локализованных состояний, а как *нормировочный оператор* для этой амплитуды. Саму амплитуду можно найти как оператор, обратный по отношению к Π^c_ε:

$$\Lambda_\varepsilon \Pi^c_\varepsilon = -i\mathbb{1}.$$

По смыслу локализованных состояний ядро оператора Λ_ε (матрица переходов) должно быть сосредоточено на поверхности $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ так, чтобы допустимыми были лишь переходы без изменения точки локализации. Следовательно,

$$\Lambda_\varepsilon(x, x') = \Lambda_\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x - x'),$$

где $\Lambda_\varepsilon(\partial)$ — полином. Интегральный оператор с таким ядром сводится к дифференциальному оператору $\Lambda_\varepsilon(\partial)$. Нетрудно видеть, что роль этого оператора играет *оператор Шредингера*:

$$\Lambda_\varepsilon(\partial) = -i\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \varepsilon.$$

Действительно, явное выражение для причинного пропагатора позволяет показать, что он является функцией Грина для *уравнения Шредингера*:

$$\Lambda_\varepsilon(\partial)\,\Pi^c_\varepsilon(x - x') = -i\delta(x - x').$$

Переход локализованных состояний друг в друга с учетом взаимодействия описывается полным пропагатором, т. е. бесконечным рядом

$$\Pi^c_{\varepsilon V} = \Pi^c_\varepsilon + (-i)\,\Pi^c_\varepsilon V \Pi^c_\varepsilon + (-i)^2\,\Pi^c_\varepsilon V \Pi^c_\varepsilon V \Pi^c_\varepsilon + \ldots$$

Нетрудно убедиться, что он удовлетворяет уравнению

$$\Lambda_{\varepsilon V}\Pi^c_{\varepsilon V} = (\Lambda_\varepsilon + V)\,\Pi^c_{\varepsilon V} = -i\mathbb{1}$$

или

$$(\Lambda_\varepsilon(\partial) + V(x))\,\Pi^c_{\varepsilon V}(x, x') = -i\delta(x - x').$$

С математической точки зрения это значит, что полный пропагатор является функцией Грина для *уравнения Шредингера с потенциалом*. С точки зрения теории амплитуд это означает, что полный пропагатор является нормировочным оператором для матрицы взаимных переходов локализованных состояний. Сама же матрица равна $A(\psi_x, \psi_{x'}) = \Lambda_{\varepsilon V}(\partial)\,\delta(x - x')\langle F, F'\rangle$.

Таким образом, мы получаем альтернативную локальную формулировку теории нерелятивистских частиц. Она исходит из того, что 1) переходы реальных состояний частиц совершаются через посредство промежуточных состояний, локализованных в точке пространства-времени; амплитуды таких переходов находятся по формуле сложения амплитуд:

$$A(\varphi_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon) = \int\limits_{x^0=t} d\boldsymbol{x} \int\limits_{x'^0=t'} d\boldsymbol{x}' \langle \psi_\varepsilon(x), \Pi^c_{\varepsilon V}(x, x')\,\psi'_\varepsilon(x')\rangle;$$

2) пропагатор $\Pi^c_{\varepsilon V}(x, x')$ находится как нормировочный оператор к полной амплитуде взаимных переходов локализованных состояний

$$A(\psi_x, \psi_{x'}) = \Lambda_{\varepsilon V}(\partial)\,\delta(x - x').$$

Производя разложение по степеням потенциала V, можно найти решение уравнения для пропагатора $\Pi^c_{\varepsilon V}(x, x')$ в виде бесконечного ряда, найденного ранее другим способом. При этом ряд будет содержать оператор (или ядро) Λ_ε^{-1}. В качестве него следует использовать причинный пропагатор Π^c_ε. Таким образом, условие причинности распространения частицы играет роль граничных условий при решении дифференциального уравнения.

Эта схема постулатов очень близка к формулировке квантовой механики с помощью уравнения Шредингера и по существу представляет собой переинтерпретацию вычислений, обычно производимых в рамках шредингеровской формулировки. Однако по сравнению с ранее изложенной эта формулировка имеет один недостаток. Он состоит в том, что требуется постулировать вид матрицы $A(\psi_x, \psi_{x'})$ (оператор Шредингера). Этого нельзя сделать, опираясь только на соображения симметрии. Вместо этого следует, как это обычно делается, отталкиваться от классической механики. Например, оператор $\Lambda_{\varepsilon V}$ можно получить из выражения $H - E$ (H — классический гамильтониан), заменив энергию на $i\frac{\partial}{\partial x^0} - \varepsilon$ и импульс на $-i\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}$.

Мы приходим к выводу, что обычный подход, основанный на постулировании уравнения Шредингера и переформулированный здесь в терминах амплитуд и нормировочных операторов, является по своему духу схемой квантования классической теории, т. е. представляет собой совокупность принципов, позволяющих данной классической теории сопоставить квантовую теорию той же системы. В отличие от этого, подход, развивавшийся в пунктах 1—3, не предполагал априори никакой классической теории. Наоборот, уже после построения квантовой теории частицы оказалось возможным осуществить предельный переход и построить соответствующую ей классическую теорию.

Вместо классического динамического принципа в основу построения квантовой теории в этом случае были положены предположения о том, что 1) теория обладает *группой Галилея* как группой симметрии; 2) частица описывается *неприводимым представлением* группы Галилея; 3) частица описывается *в терминах пространства-времени*; 4) амплитуды переходов ограничены *принципом причинности*, т. е. распространение частицы происходит только из прошлого в будущее.

Замечание. Выбор значения параметра ε во многих случаях кажется несущественным, однако играет важную роль при переходе к стационарным состояниям и уравнению Шредингера, не содержащему времени. Легко показать, что функция, получающаяся из причинного пропагатора интегрированием по времени

$$\Pi_\varepsilon^c(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx^0\, \Pi_{\varepsilon-i0}^c(x^0, \boldsymbol{x}),$$

является решением уравнения

$$\left(-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \varepsilon\right)\Pi_\varepsilon^c(\boldsymbol{x}) = -i\delta(\boldsymbol{x})$$

и может служить для решения итерациями уравнения Шредингера с потенциалом

$$\left(-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \varepsilon + V(\boldsymbol{x})\right)\psi(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Обобщение этого формализма на релятивистский случай приводит к интересной физической интерпретации метода собственного времени Швингера. Этот метод [90] позволяет определить релятивистский причинный пропагатор при помощи введения лишней степени свободы (собственного времени) и последующего исключения ее интегрированием. Достоинство метода состоит в том, что он, в отличие от других определений причинного пропагатора, легко переносится на случай искривленного пространства-времени [32, 33].

Глава 9

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ СИТТЕРА

Квантовая теория частиц в пространстве-времени де Ситтера, так же как и в пространстве Минковского, может быть построена на основе теоретико-группового подхода, так как в этом случае пространство-время обладает достаточно широкой (десятипараметрической) группой движений — группой де Ситтера $P = SO(1, 4)$. Факторизация этой группы по подгруппе Лоренца $L = SO(1, 3)$ дает модель самого пространства де Ситтера $\mathscr{X}$ и позволяет построить координатное представление, в терминах которого производится пространственно-временная интерпретация элементарной частицы.

Пространство реальных состояний частицы строится как пространство-носитель неприводимого представления группы де Ситтера. Это представление находится индуцированием из подгруппы $H = RT$, где $R = SO(3)$ — группа пространственных вращений, а T — четырехпараметрическая группа, являющаяся аналогом группы сдвигов пространства Минковского. «Группа сдвигов» в пространстве де Ситтера, однако, существенно отличается как по своей структуре, так и по физической интерпретации.

Античастицы в пространстве де Ситтера нельзя определить как частицы с отрицательной массой, так как представления, соответствующие противоположным значениям непрерывного параметра, эквивалентны. Поэтому частица и античастица описываются одним и тем же представлением, но пространственно-временная интерпретация состояний частицы и античастицы определяется по-разному. Это устраняет трудность, связанную с тем, что каждая частица в пространстве де Ситтера обладает состояниями как с положительной, так и с отрицательной энергией.

Причинный пропагатор определяется на основе предположения, что частица распространяется в будущее, а античастица — в прошлое. Вид причинного пропагатора легко находится для любого спина. В случае скалярной частицы показано, что волновые функции частицы и античастицы удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона с ковариантным даламбертианом, а причинный пропагатор является функцией Грина этого уравнения. Амплитуды распространения частицы и античастицы (входящие в качестве составных частей в причинный пропагатор) выражены в виде интегралов от соответствующих амплитуд в пространстве Минковского. Показано, что эти амплитуды обладают такими же особенностями на световом конусе, как и в случае пространства Минковского, и удовлетворяют интегральным соотношениям типа условия Эйнштейна — Смолуховского. Результатом этих построений является теория частиц в пространстве-времени де Ситтера, в которой вакуум и одночастичные состояния стабильны, рождения пар из вакуума не происходит.

Некоторые особенности теории частиц в пространстве де Ситтера связаны с неевклидовой топологией этого пространства. В частности, световой конус, если его определять как множество точек, времениподобных по отношению к фиксированной точке, распадается на две компоненты связности. Те же особенности пространства де Ситтера приводят к тому, что связная подгруппа группы де Ситтера содержит аналоги дискретных операций обычной квантовой теории (в пространстве Минковского). Этот факт нуждается в дополнительном исследовании. Не исключено, что он может послужить основой для нового подхода к CPT-теореме.

§ 9.1. Пространство де Ситтера и факторизация группы де Ситтера

Группа де Ситтера и ее факторизация по «малой группе» $H = RT$ была рассмотрена в § 3.4 в связи с построением неприводимых представлений. Здесь мы изучим факторизацию по подгруппе Лоренца L и разложение на двойные классы по группам H, L. Кроме того, будет дана геометрическая интерпретация группы T как группы четырехмерных сдвигов пространства-времени. Эта группа определяет в пространстве де Ситтера некоторую систему отсчета, т. е. систему координат, естественным образом связанную с состоянием частицы, которое можно назвать состоянием покоя. Другие системы отсчета определяются сопряженными группами pTp^{-1} и соответствуют состояниям частицы, в которых она имеет «определенный импульс». Совокупность всех систем отсчета находится во взаимно-однозначном соответствии с пространством значений импульса частицы P/H (аналог массовой поверхности).

1. Пространство де Ситтера. Пространство-время де Ситтера — это четырехмерное псевдориманово пространство постоянной ненулевой кривизны (случай нулевой кривизны соответствует пространству Минковского). Эта кривизна может быть положительной или отрицательной, т. е. имеется два существенно различных пространства де Ситтера. В одном из них пространственные сечения бесконечны (топологически изоморфны трехмерному евклидову пространству), а времениподобные линии могут быть замкнутыми. В этом случае пространство-время обладает группой симметрии (группой движений), изоморфной группе $SO(2,3)$. Мы рассмотрим второй случай, когда пространственные сечения пространства-времени замкнуты (гомеоморфны трехмерной сфере), а времениподобные линии бесконечны. Такое пространство де Ситтера обладает группой движений, изоморфной $SO(1,4)$.

Пространство де Ситтера $\mathscr{X}$ удобно реализовать как поверхность в пятимерном псевдоевклидовом пространстве $E^{1,4}$ сигнатуры (1, 4). Введем в этом объемлющем пространстве декартовы координаты $x = \{x^a | a = 0, 1, 2, 3, 4\}$ и определим метрический тензор как диагональную матрицу

$$\eta = \mathrm{Diag}\,(1, -1, -1, -1, -1),$$

так что подматрица $\{\eta_{\mu\nu} | \mu, \nu = 0, 1, 2, 3\}$ совпадает с тензором Минковского. Метрика в пятимерном пространстве $E^{1,4}$ определяется формулой

$$ds^2 = \eta_{ab}\, dx^a\, dx^b = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu - (dx^4)^2 = (dx^0)^2 - d\boldsymbol{x}^2 - (dx^4)^2.$$

Нам понадобятся в будущем как инвариантная билинейная форма в пятимерном пространстве, так и четырехмерные формы, определенные частью компонент пятимерных векторов. Положим

$$[x, y] = \eta_{ab} x^a y^b = x^0 y^0 - \boldsymbol{xy} - x^4 y^4,$$
$$(x, y) = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \boldsymbol{xy},$$
$$x \cdot y = \boldsymbol{xy} + x^4 y^4.$$

В этих обозначениях пятимерную метрику можно записать одним из следующих способов:

$$ds^2 = [dx, dx] = (dx, dx) - (dx^4)^2 = (dx^0)^2 - dx \cdot dx.$$

Определим *пространство де Ситтера* $\mathscr{X}$ как гиперболоид в пространстве $E^{1,4}$, т. е. как подмногообразие точек, удовлетворяющих условию

$$[x, x] = (x^0)^2 - \boldsymbol{x}^2 - (x^4)^2 = -\rho^2.$$

Число $\rho > 0$ назовем *радиусом кривизны* пространства де Ситтера. Метрика на $\mathscr{X}$ индуцируется метрикой объемлющего пятимерного пространства, т. е. определяется той же формулой $ds^2 = [dx, dx]$, однако с учетом того, что смещение dx не выводит за пределы гиперболоида $\mathscr{X}$. Этим гиперболоид превращается в четырехмерное псевдориманово пространство постоянной кривизны.

Часто удобно вместо координат $\{x^a \mid a = 0, 1, 2, 3, 4\}$ использовать безразмерные координаты

$$\xi^a = x^a/\rho.$$

В этих координатах уравнение гиперболоида имеет вид

$$[\xi, \xi] = (\xi^0)^2 - \boldsymbol{\xi}^2 - (\xi^4)^2 = -1.$$

Гиперболоид $\mathscr{X}$ переводится в себя группой $P = SO(1, 4)$ псевдоортогональных преобразований пространства $E^{1,4}$, т. е. линейных однородных преобразований, сохраняющих форму $[x, y]$. Легко видеть, что метрика на $\mathscr{X}$ также инвариантна относительно этих преобразований. Следовательно, группа P является группой движений пространства $\mathscr{X}$. Она называется *группой де Ситтера*. Неприводимые представления этой группы и отчасти структура ее были описаны в § 3.4.

Группа P действует на $\mathscr{X}$ транзитивно, так что $\mathscr{X}$ можно реализовать как фактор-пространство этой группы. Для этого выберем в качестве центра однородного пространства $\mathscr{X}$, например, точку

$$\mathrm{O} = \{0, 0, 0, 0, \rho\} = \rho e_4$$

или, в безразмерных координатах,

$$\mathrm{O} = \{0, 0, 0, 0, 1\} = e_4$$

и найдем ее стабилизатор. Нетрудно видеть, что стабилизатором этой точки является *группа Лоренца* $L = SO(1, 3)$, преобразующая обычным образом первые четыре компоненты пятимерных векторов и сохраняющая пятую компоненту. Следовательно, $\mathscr{X} = P/L$. Выберем для каждой точки $x \in \mathscr{X}$ некоторый элемент $x_P \in P$, переводящий точку O в точку x. Тогда при реализации $\mathscr{X}$ как фактор-пространства точке x сопоставляется смежный класс $x_P L$. Выбор представителей x_P можно производить по-разному. Некоторые способы выбора будут указаны в дальнейшем.

2. Сдвиги в пространстве де Ситтера. В § 3.4 показано, что в группе де Ситтера есть подгруппа, играющая при построении неприводимых представлений такую же роль, как подгруппа сдвигов в группе Пуанкаре. Это группа $T = AT$, где A — однопараметрическая подгруппа с элементами τ_A, аналогичная группе сдвигов времени, а $\boldsymbol{T}$ — трехпараметрическая абелева группа «пространственных сдвигов» с элементами $\boldsymbol{a}_T$. Одно из основных отличий сдвигов в пространстве де Ситтера от сдвигов в пространстве Минковского состоит в том, что «сдвиги времени» не коммутируют с «пространственными сдвигами». Вместо этого выполняется соотношение

$$\tau_A \boldsymbol{a}_T \tau_A^{-1} = (e^{-\tau}\boldsymbol{a})_T.$$

Воспользовавшись явным видом матриц τ_A, $\boldsymbol{a}_T$ (п. 3.4.1), легко найти действие группы сдвигов в пространстве де Ситтера. Найдем результат действия сдвигов на центр однородного пространства $\mathrm{O} = e_4$. Обозначая $\boldsymbol{\xi}(\tau, \boldsymbol{a}, +) = \tau_A \boldsymbol{a}_T \mathrm{O}$, получаем в безразмерных координатах

$$\xi^0(\tau, \boldsymbol{a}, +) = \left(1 - \frac{\boldsymbol{a}^2}{2}\right)\operatorname{sh}\tau + \frac{\boldsymbol{a}^2}{2}\operatorname{ch}\tau;$$

$$\boldsymbol{\xi}(\tau, \boldsymbol{a}, +) = -\boldsymbol{a};$$

$$\xi^4(\tau, \boldsymbol{a}, +) = \frac{\boldsymbol{a}^2}{2}\operatorname{sh}\tau + \left(1 - \frac{\boldsymbol{a}^2}{2}\right)\operatorname{ch}\tau.$$

Нетрудно видеть, что группа сдвигов действует на пространстве де Ситтера интранзитивно. Мы нашли область транзитивности, в которую входит точка O:

$$\mathscr{X}^+ = \{x \in \mathscr{X} \mid x^4 + x^0 > 0\}.$$

Вторую область транзитивности, во всем аналогичную первой, можно найти, действуя всевозможными сдвигами на точку

$$I\mathrm{O} = \{0, 0, 0, 0, -1\} = -e_4,$$

где I — элемент группы P, который можно определить как инверсию осей с номерами 1, 2, 3, 4 или как композицию поворотов на углы π в плоскостях (1, 2) и (3, 4). С формальной точки зрения матрица, соответствующая элементу $I \in P$, совпадает с метрическим тензором η:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(мы воспользовались здесь матричными обозначениями для блока, соответствующего компонентам векторов с номерами $i = 1, 2, 3$). Действуя на точку $I\mathrm{O}$ всевозможными сдвигами, получим область

$$\mathscr{X}^- = \{x \in \mathscr{X} \mid x^4 + x^0 < 0\}.$$

Обозначая $\boldsymbol{\xi}(\tau, \boldsymbol{a}, -) = \tau_A \boldsymbol{a}_T I\mathrm{O}$, найдем для отдельных точек этой области $\boldsymbol{\xi}(\tau, \boldsymbol{a}, -) = -\boldsymbol{\xi}(\tau, \boldsymbol{a}, +)$. В дальнейшем будет использован тот факт, что

$$\xi^4(\tau, \boldsymbol{a}, \pm) + \xi^0(\tau, \boldsymbol{a}, \pm) = [\boldsymbol{\xi}(\tau, \boldsymbol{a}, \pm), e_0 - e_4] = \pm e^{\tau}.$$

Наконец, еще целое семейство областей транзитивности получим, действуя всевозможными сдвигами на точки, имеющие вид (в безразмерных координатах) $\boldsymbol{n} = \{0, \boldsymbol{n}, 0\}$, $\boldsymbol{n}^2 = 1$. Каждую такую точку можно получить из точки O действием элемента из компактной группы: $\boldsymbol{n}_K \mathrm{O} = \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}_K \in K$. Действуя далее на эти точки сдвигами, получим области

$$\mathscr{X}^{\boldsymbol{n}} = \{x \in \mathscr{X} \mid \boldsymbol{x} = \rho\boldsymbol{n},\ x^4 + x^0 = 0\},$$

содержащие точки

$$\xi(\tau, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = \tau_A \boldsymbol{a}_T \boldsymbol{n}_K \mathrm{O};$$

$$\xi^0(\tau, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = -\xi^4(\tau, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = -e^{-\tau}(\boldsymbol{an});$$

$$\boldsymbol{\xi}(\tau, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}.$$

Каждая из областей $\mathscr{X}^n$ представляет собой прямую (геодезическую) в пространстве де Ситтера, изотропную в том смысле, что интервал, измеренный вдоль нее, равен нулю, $ds = 0$.

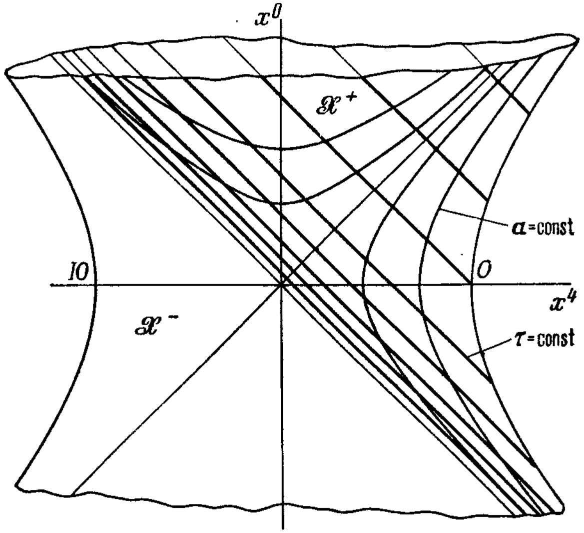


Рис. 14. Траектории группы сдвигов в пространстве де Ситтера.

Вид областей транзитивности группы сдвигов и траекторий сдвигов на каждой из этих областей показан на рис. 14, где гиперболоид $\mathscr{X}$ спроектирован на плоскость x^0, x^4. Рассмотрим, например, область $\mathscr{X}^+$. В этой области аналоги пространственных сечений, т. е. поверхности $\tau = \text{const}$, получаются пересечением гиперболоида плоскостями $x^4 + x^0 = \rho e^{\tau} = \text{const}$, в то время как аналоги линий времени — это гиперболы, пронизывающие по очереди все пространственные сечения. Эта картина, конечно, сильно отличается от той, что имеет место в пространстве Минковского. Отличие настолько велико, что некоторые из «линий времени» пространственноподобны, т. е. приращение интервала вдоль них $ds^2 < 0$.

Нетрудно видеть, что параметры τ, $\boldsymbol{a}$ могут служить в каждой из областей $\mathscr{X}^{\pm}$ системой координат. Метрика, выраженная через эти координаты, имеет вид

$$ds^2 = \rho^2 [(1 - \boldsymbol{a}^2)\, d\tau^2 + 2\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{a}\, d\tau - d\boldsymbol{a}^2].$$

Отсюда видно, в частности, что пространственные сечения $\tau = \text{const}$ являются плоскими трехмерными пространствами, в которых параметры ρa^i, $i = 1, 2, 3$, играют роль декартовых координат. Эти плоские сечения пространства де Ситтера называют обычно *орисферами*. Легко видеть также, что линии времени $\boldsymbol{a} = \text{const}$ являются времениподобными, пространственноподобными или изотропными в зависимости от того, является ли величина $1 - \boldsymbol{a}^2$ соответственно положительной, отрицательной или нулевой.

3*. Системы отсчета. Группа сдвигов в пространстве де Ситтера не единственна. Если проделать те же построения, отправляясь не от точки O, а от некоторой другой точки, получим другую группу сдвигов и связанную с ней систему орисфер и изотропных прямых. Позднее мы увидим, что каждая группа сдвигов и система орисфер однозначно соответствует состоянию элементарной частицы, которое можно назвать состоянием с определенным импульсом, и играет по отношению к этому состоянию роль декартовой системы координат, в которой частица покоится. Поэтому, может быть, система орисфер и пронизывающих их линий времени заслуживает названия *системы отсчета*. Во всяком случае, нам удобно будет пользоваться этим термином.

Только что была описана система отсчета, ассоциированная с точкой O пространства де Ситтера. Любую другую систему отсчета можно получить, совершив произвольное преобразование из группы де Ситтера. После преобразования $p \in P$ система отсчета $\xi(\tau, \boldsymbol{a}, \varepsilon)$, $\varepsilon = \pm, \boldsymbol{n}$, перейдет в $\xi'(\tau, \boldsymbol{a}, \varepsilon) = p\xi(\tau, \boldsymbol{a}, \varepsilon)$.

Легко убедиться в том, что выбор в качестве преобразования p сдвига: $p \in T$, дает ту же систему орисфер и линий времени, приводя лишь к перенумерации точек на каждой орисфере и к общему сдвигу времени τ. То же относится и к выбору в качестве преобразования p вращения: $p \in R$. В этом случае время остается без изменения, а «пространственные координаты» $\boldsymbol{a}$ подвергаются вращению. Таким образом, преобразования из группы $H = RT$ представляют собой преобразования координат в рамках одной и той же системы отсчета. Любое преобразование $p \notin H$ представляет собой переход к новой системе отсчета, причем если p и p' принадлежат к одному и тому же правому смежному классу по H, то они, очевидно, переводят исходную систему отсчета $\xi(\tau, \boldsymbol{a}, \varepsilon)$ в одну и ту же новую систему отсчета. Следовательно, системы отсчета находятся во взаимно-однозначном соответствии с точками фактор-пространства P/H. Роль группы сдвигов в системе отсчета pH играет группа pTp^{-1}, а все преобразования координат, не меняющие системы отсчета pH, составляют группу pHp^{-1}.

4. Группа Лоренца и факторизация по малой группе. В дальнейшем существенную роль будет играть группа $H = RT = RAT$ (малая группа), которая кроме сдвигов содержит еще трехмерные вращения $r \in R = SO(3)$, действующие на компоненты пятимерных векторов с номерами $i = 1, 2, 3$. Каждая из областей $\mathscr{X}^{\pm}$ остается инвариантной под действием этой группы, а изотропные прямые $\mathscr{X}^{n}$ преобразуются при вращениях друг в друга, так что областью транзитивности относительно группы H является не каждая из изотропных прямых в отдельности, а все семейство этих прямых:

$$\mathscr{X}^0 = \{x \in \mathscr{X} \mid x^4 + x^0 = 0\}.$$

Еще одна важная подгруппа группы де Ситтера — это группа Лоренца $L = SO(1, 3)$. Сейчас мы проанализируем структуру группы де Ситтера с точки зрения ее подгрупп H и L.

Проведенный в пункте 2 анализ позволяет найти множество двойных классов группы де Ситтера P по подгруппам H, L. Рассмотрим сначала двойные классы $HpL \in H\backslash P/L$. Поскольку каждый правый класс pL соответствует точке пространства де Ситтера $x = p\mathrm{O} \in \mathscr{X}$ (см. пункт 1), двойной класс HpL можно отождествить с множеством точек $Hx = Hp\mathrm{O}$, т. е. с областью транзитивности группы H. Значит, множество двойных классов соответствует множеству областей транзитивности. Как мы знаем, таких областей всего три: $\mathscr{X}^+$, $\mathscr{X}^-$, $\mathscr{X}^0$. Чтобы найти представители соответствующих двойных классов, достаточно выбрать по одной точке в каждой из областей транзитивности.

Выберем в области $\mathscr{X}^+$ точку O. Она служит центром однородного пространства $\mathscr{X}$, т. е. соответствует правому классу $1 \cdot L$. Следовательно, область $\mathscr{X}^+$ соответствует двойному классу $\mathscr{X}^+ = H \cdot 1 \cdot L$. В области $\mathscr{X}^-$ выберем точку $I\mathrm{O}$. Тогда ей соответствует правый класс IL, а всей области $\mathscr{X}^-$ — двойной класс $\mathscr{X}^- = HIL$. Наконец, в качестве представителя области $\mathscr{X}^0$ можно выбрать точку $I_0\mathrm{O}$, где через I_0 обозначен поворот на угол $\pi/2$ в плоскости $(3, 4)$, т. е.

$$I_0 = k_{\pi/2}^{(3,\,4)} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & 0 & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Тогда последний двойной класс получаем в виде $\mathscr{X}^0 = HI_0L$.

Отображение $p \mapsto p^{-1}$ переводит двойной класс HpL в двойной класс $Lp^{-1}H$. Таким образом, убеждаемся в том, что множество $L\backslash P/H$ состоит из трех классов:

$$L\backslash P/H = \{LH,\ LIH,\ LI_0H\}.$$

Поскольку каждый элемент группы P принадлежит некоторому из этих двойных классов, очевидно, что каждый $p \in P$ можно представить в одном из следующих видов: $p = lh$, или lIh, или lI_0h. Это значит, что представители правых классов pH по подгруппе H можно выбрать среди множества элементов $\{l, lI, lI_0 \mid l \in L\}$. Поскольку группа H содержит подгруппу вращений R, можно уточнить это утверждение и найти, что множество правых классов P/H имеет вид

$$P/H = \{v_LH,\ v_LIH,\ v_L\boldsymbol{n}_KH \mid v \in \mathscr{V},\ \boldsymbol{n} \in S^2 \subset S^3\}.$$

Здесь v — 4-скорость, v_L — соответствующий ей буст (см. п. 5.1.2), $\boldsymbol{n} = \{n^1, n^2, n^3, 0\}$, $\boldsymbol{n}^2 = 1$, — точка двумерной сферы, рассматриваемой как подмногообразие трехмерной сферы, $\boldsymbol{n}_K$ — элемент группы K, переводящий полюс трехмерной сферы $e_4 = \{0, 0, 0, 1\}$ в точку $\boldsymbol{n}$.

Другой способ параметризации пространства P/H получается, если выбрать в качестве представителей классов элементы компактной подгруппы K. Тогда

$$P/H = \{n_KH \mid n \in S^3\},$$

так что пространство P/H можно отождествить с трехмерной сферой: $S^3 = \{n = \{n^1, n^2, n^3, n^4\} \mid n \cdot n = 1\}$, $n_Ke_4 = n$.

Нам понадобится квазиинвариантная мера на P/H, факторизующая меру Хаара на P по формуле (см. п. 2.2.6)

$$\int_P dp\, f(p) = \int_{P/H} dz \int_H d_Rh\, f(z_Ph)$$

и преобразующаяся по закону $d(pz) = dz/\Delta_H((p, z)_H)$, где факторы определяются из формулы $pz_P = (pz)_P(p, z)_H$, а отображение $z \mapsto pz$ есть отображение смежных классов, т. е. совпадает с отображением $z_PH \mapsto pz_PH$. Это разъяснение необходимо вследствие того, что в некоторых случаях точка $z \in P/H$ реализуется как пятимерный вектор, так что отображение $z \mapsto pz$ можно было бы понимать как преобразование этого вектора пятирядной матрицей $p \in SO(1, 4)$. Для некоторых $p \in P$ эти два отображения могут совпадать, в общем же случае они отличаются друг от друга.

Рассмотрим с этой точки зрения реализацию пространства P/H как сферы S^3. Пусть $pn_K = n'_Kh$, где $h = \tau_A\boldsymbol{a}_Tr \in H$. В обозначениях, о которых только что говорилось, очевидно, $n' = pn$, $h = (p, n)_H$. Чтобы найти эти элементы, воспользуемся результатом следующей задачи.

З а д а ч а 1. Показать, что характеристическим свойством элементов $h \in H$ является следующее:

$$h(e_0 - e_4) = e^{-\tau}(e_0 - e_4), \qquad \tau \in \mathbb{R},$$

причем τ — параметр из разложения $h = \tau_A\boldsymbol{a}_Tr$.

Учитывая это свойство элементов группы H, а также то, что элемент n_K переводит e_0 в себя, а e_4 в n, легко получаем, что $p(e_0 - n) = e^{-\tau}(e_0 - n')$. Здесь мы воспользовались тем, что точку сферы $n \in S^3$ можно представить как пятимерный вектор $n = \{0, \boldsymbol{n}, n^4\}$.

В других обозначениях то же равенство выглядит так: $p\{1, -n\} = \{e^{-\tau}, -e^{-\tau}n'\}$. Эта формула дает рецепт нахождения отображения $p: n \mapsto n' = pn$, а также системы факторов $(p, n)_H$, точнее, лишь параметра τ, характеризующего этот фактор. Можно было бы вычислить и другие параметры, но нам в дальнейшем понадобится лишь τ.

Таким образом, мы реализовали пространство P/H как трехмерную сферу S^3 и нашли действие группы P на ней. В п. 3.4.2 было показано, что квазиинвариантная мера на P/H совпадает с мерой на S^3, инвариантной относительно группы $K = SO(4)$, естественно действующей на S^3.

Если воспользоваться параметризацией пространства P/H с помощью 4-скоростей, как это описано выше, то та же самая мера на P/H имеет вид

$$\int_{S^3} dn\, f(n_K H) = \int_{\mathscr{C}} dv\, [f(v_L H) + f(v_L I H)],$$

где dv — инвариантная мера на гиперболоиде скоростей. Действительно, точки $v_L n_K H$ при реализации P/H в виде сферы S^3 образуют на этой сфере подмногообразие $S^2 \subset S^3$ меньшей размерности, т. е. множество меры нуль. Именно по этой причине они выпадают из интеграла. Если учесть это, то вид квазиинвариантной меры в терминах v однозначно следует из требования инвариантности относительно левых сдвигов с помощью элементов $l \in L$ и I.

§ 9.2. Частицы в пространстве де Ситтера

Так же, как в случае пространства Минковского, частица в пространстве де Ситтера описывается координатным представлением, обеспечивающим пространственно-временную интерпретацию теории, и неприводимым (импульсным) представлением, которое определяет пространство реальных состояний частицы. Неприводимое представление импримитивно с базой P/H, так что аналогом импульса является точка из P/H. Это пространство можно реализовать как совокупность двух экземпляров гиперболоида скоростей $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1^+$. Условно можно считать, что один из них соответствует значениям импульса с положительной энергией, а другой — импульсам с отрицательной энергией. Однако действие группы де Ситтера (даже ее связной компоненты) переводит с одного гиперболоида на другой. Это важное обстоятельство становится очевидным, если вместо двух гиперболоидов реализовать пространство P/H как трехмерную сферу S^3, в которой гиперболоидам соответствуют две полусферы.

Из-за того, что группа перемешивает положительные и отрицательные энергии (частоты), знак энергии нельзя использовать для различения частицы и античастицы. Однако вместо этого

в случае пространства де Ситтера появляется другая возможность: оператор, переплетающий импульсное представление с координатным, определен неоднозначно. В случае скалярной частицы пространство таких операторов двумерно. Постулируя, что частице и античастице соответствуют различные операторы переплетения, мы получаем теорию, в которой пространства состояний частицы и античастицы преобразуются под действием группы одинаково (представления эквивалентны), но имеют различные свойства по отношению к пространству-времени.

1. Координатное представление и локализация. Для того чтобы построить теорию элементарной частицы в пространстве де Ситтера, необходимо рассмотреть представление группы де Ситтера, система импримитивности которого имеет базу $\mathscr{X}$. В таком представлении диагонализуется наблюдаемая *«положение в пространстве-времени $\mathscr{X}$»*. Согласно общим результатам главы 4, такое представление эквивалентно индуцированному представлению $U_D(P) = D(L) \uparrow P$. Пространство-носитель $\mathscr{H}_D$ этого представления реализуется как обычно функциями $\psi: P \to \mathscr{L}_D$ со структурным условием

$$\psi(pl) = D(l^{-1})\, \psi(p),$$

а представление U_D действует на эти функции как левый сдвиг:

$$U_D(p)\, \psi(p') = \psi(p^{-1}p').$$

В силу структурного условия функции на группе сводятся к функциям на пространстве $\mathscr{X}$ по формуле

$$\psi(x_P l) = D(l^{-1})\, \psi(x).$$

Инвариантная эрмитова форма в пространстве $\mathscr{H}_D$ определяется как всегда для индуцированного представления:

$$(\psi, \psi')_D = \int_{\mathscr{X}} dx\, \langle \psi(x), \psi'(x) \rangle_D,$$

где интегрирование ведется по инвариантной мере на $\mathscr{X}$, например $dx = dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4/x^0$, а через $\langle\,,\rangle_D$ обозначена эрмитова форма в $\mathscr{L}_D$, инвариантная относительно $D(L)$. Наличие такой формы означает самосопряженность представления D. Вообще об этом представлении можно повторить почти все, что говорилось в этой связи в главах 5, 6. В этом пункте теория в пространстве де Ситтера не отличается от теории в плоском пространстве.

Функции $\psi(x)$ преобразуются под действием представления U_D по формуле

$$U_D(p)\, \psi(x) = D\left((p^{-1}, x)_L^{-1}\right) \psi(p^{-1}x),$$

где факторы определяются из формулы

$$p^{-1}x_P = (p^{-1}x)_P\, (p^{-1}, x)_L.$$

В частности, для скалярной частицы $D(l) \equiv 1$, так что это преобразование задано явно.

Векторы $\psi \in \mathscr{H}_D$ играют роль виртуальных состояний частицы, возникающих в процессе взаимодействия. Среди них содержатся состояния, *локализованные* в точке пространства-времени $\psi_x(x') = \delta(x, x')F$, где $F \in \mathscr{L}_D$ — вектор, описывающий поляризацию такого локализованного состояния, а дельта-функция определена относительно инвариантной меры:

$$\int dx' \, \delta(x, x') f(x') = f(x).$$

Один из способов выбора представителей x_p подсказывается наличием в группе де Ситтера подгруппы сдвигов (п. 9.1.2). Каждая точка $x \in \mathscr{X}$ может быть получена из точки $O = \{0, 0, 0, 0, \rho\}$ действием элемента группы сдвигов $\tau_A \boldsymbol{a}_T$, или элемента вида $\tau_A \boldsymbol{a}_T I$, или, наконец, действием элемента вида $\tau_A \boldsymbol{a}_T \boldsymbol{n}_K$, $\boldsymbol{n} \in S^2$. При этом имеется взаимно-однозначное соответствие между точками, скажем, области $\mathscr{X}^+ \subset \mathscr{X}$ и параметрами τ, $\boldsymbol{a}$ группы сдвигов. Следовательно, можно выбрать представители классов $x = pL$ следующим образом:

$$x_T = \begin{cases} \tau_A \boldsymbol{a}_T & \text{при} \quad x = \rho\xi(\tau, \boldsymbol{a}, +) \in \mathscr{X}^+, \\ \tau_A \boldsymbol{a}_T I & \text{при} \quad x = \rho\xi(\tau, \boldsymbol{a}, -) \in \mathscr{X}^-, \\ \tau_A \boldsymbol{a}_T \boldsymbol{n}_K & \text{при} \quad x = \rho\xi(\tau, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) \in \mathscr{X}^n. \end{cases}$$

При этом удобно обозначить представители через x_T, несмотря на то, что они не обязательно принадлежат группе сдвигов T, а могут отличаться от чистого сдвига множителем I или $\boldsymbol{n}_K$.

Из формул для функций $\xi(\tau, \boldsymbol{a}, \pm)$, полученных в п. 9.1.2, видно, что если $x \notin \mathscr{X}^0$, то

$$[x, e_0 - e_4]/\rho = \pm e^\tau,$$

где τ — параметр, фигурирующий в разложении $x_T = \tau_A \boldsymbol{a}_T$ или $x_T = \tau_A \boldsymbol{a}_T I$. Эта формула будет использована при нахождении связи между координатным и импульсным представлениями и для вычисления пропагатора.

При выборе x_T в качестве представителей можно в явном виде найти операторы $U_D(\tau_A \boldsymbol{a}_T)$, соответствующие сдвигам. Для этого удобно воспользоваться соответствием между точками $x \in \mathscr{X}$ и параметрами $\tau, \boldsymbol{a}$ в каждой из областей $\mathscr{X}^\pm, \mathscr{X}^n$ и перейти от функции $\psi(x)$ к функциям

$$\psi(\tau, \boldsymbol{a}, \varepsilon) = \psi(\rho\xi(\tau, \boldsymbol{a}, \xi)) = \psi(x_T),$$

где ε принимает значения $\varepsilon = +, -, \boldsymbol{n}$. Закон преобразования функции ψ под действием сдвигов находится непосредственно:

$$U_D(\tau_A \boldsymbol{a}_T) \psi(\tau', \boldsymbol{a}', \varepsilon) = \psi(\tau' - \tau, \boldsymbol{a}' - e^{\tau' - \tau} \boldsymbol{a}, \varepsilon).$$

Инвариантную меру на пространстве $\mathscr{X}$ можно выразить через координаты $\tau, \boldsymbol{a}$, используя вид метрики в этих координатах (п. 9.1.2):

$$\int_{\mathscr{X}} dx \, f(x) = \int d\tau \int d^3\boldsymbol{a} \, [f(\tau_A \boldsymbol{a}_T L) + f(\tau_A \boldsymbol{a}_T I L)].$$

Инвариантная форма в пространстве $\mathscr{H}_D$, записанная через параметры τ, $\boldsymbol{a}$, принимает вид

$$(\psi, \psi')_D = \int d\tau \int d^3\boldsymbol{a} \, [\langle \psi(\tau, \boldsymbol{a}, +), \psi'(\tau, \boldsymbol{a}, +) \rangle_D + \langle \psi(\tau, \boldsymbol{a}, -), \psi'(\tau, \boldsymbol{a}, -) \rangle_D].$$

2. Неприводимые представления и элементарные частицы. Предположим, что пространство реальных состояний элементарной частицы преобразуется по неприводимому представлению группы P. Неприводимые унитарные представления группы де Ситтера были построены в § 3.4 как индуцированные представления $U_{\mu j}(P) = \Delta_{\mu j}(H) \uparrow P$, где $H = RT = RAT$ — подгруппа в P, получающаяся с помощью разложения Ивасавы и являющаяся аналогом малой группы в группе Пуанкаре.

Представление $\Delta_{\mu j}(H)$, индуцирующее неприводимое представление группы де Ситтера, строится в полной аналогии с соответствующим представлением группы Пуанкаре:

$$\Delta_{\mu j}(\tau_A \boldsymbol{a}_T r) = e^{i\mu\tau} \Delta_j(r),$$

однако индуцирование должно производиться с учетом того, что группа H имеет неединичный *модуль*. Поэтому пространство представления $\mathscr{H}_{\mu j}$ реализуется функциями φ: $P \to \mathscr{L}_j$ со структурным условием

$$\varphi(ph) = \tilde{\Delta}_{\mu j}(h^{-1}) \varphi(p);$$

$$\tilde{\Delta}_{\mu j}(\tau_A \boldsymbol{a}_T r) = e^{(i\mu - 3/2)\tau} \Delta_j(r).$$

Как показано в п. 9.1.4, функции на группе можно свести к функциям на трехмерной сфере φ: $S^3 \to \mathscr{L}_j$. Скалярное произведение в пространстве $\mathscr{H}_{\mu j}$ выражается тогда интегралом

$$(\varphi, \varphi')_{\mu j} = \int_{S^3} dn \, \langle \varphi(n), \varphi'(n) \rangle_j,$$

где интегрирование ведется по мере на S^3, инвариантной относительно четырехмерных вращений из K. В этой реализации явным образом выражается действие элементов из компактной подгруппы $K \subset P$:

$$U_{\mu j}(k) \varphi(n) = \Delta_j\left((k^{-1}, n)_R^{-1}\right) \varphi(k^{-1} n);$$

$$k^{-1} n_K = (k^{-1} n)_K (k^{-1}, n)_R.$$

Для некоторых целей и, в частности, для сравнения с теорией в пространстве Минковского оказывается более удобной другая реализация пространства $\mathscr{H}_{\mu j}$. Она получается, если фактор-пространство P/H параметризовать с помощью 4-скоростей $v \in \mathscr{C}$ (см. п. 9.1.4). Положим

$$\varphi^{(1)}(v) = \varphi(v_L); \quad \varphi^{(2)}(v) = \varphi(v_L I).$$

Тогда скалярное произведение в $\mathscr{H}_{\mu j}$ можно записать в виде

$$(\varphi, \varphi')_{\mu j} = \int_{\mathscr{C}} dv \left[\langle\varphi^{(1)}(v), \varphi'^{(1)}(v)\rangle_j + \langle\varphi^{(2)}(v), \varphi'^{(2)}(v)\rangle_j\right].$$

Представление $U_{\mu j}$, реализованное в пространстве функций от скорости, имеет явное сходство с импульсным представлением в пространстве Минковского. Эта реализация позволяет явным образом записать действие элементов группы Лоренца:

$$U_{\mu j}(l)\varphi^{(\sigma)}(v) = \Delta_j\left(\left(l^{-1}, v\right)_R^{-1}\right)\varphi^{(\sigma)}\left(l^{-1}v\right), \qquad \sigma = 1, 2.$$

Чтобы увидеть, как действуют сдвиги, рассмотрим состояние покоя: $\varphi_0^{(1)}(v) = \delta(e_0, v) f$, $\varphi_0^{(2)}(v) = 0$. Тогда, применяя оператор из группы сдвигов $U_{\mu j}(\tau_A a_T)$, найдем

$$U_{\mu j}(\tau_A a_T)\varphi_0 = e^{(i\mu + 3/2)\tau}\varphi_0.$$

Мы видим, что «состояние покоя» преобразуется под действием сдвигов обычным образом (так же, как в плоском пространстве): пространственные сдвиги не меняют это состояние, а временной сдвиг умножает на экспоненту с показателем, пропорциональным величине сдвига. Однако коэффициент пропорциональности имеет действительную часть, т. е. «энергия покоя» имеет мнимую часть.

Это вычисление проясняет смысл группы сдвигов в пространстве де Ситтера. Эта группа подобрана так, что одна компонента неприводимого представления, «состояние с определенным импульсом» $v = e_0$ (или $n = e_4 = \{0, 0, 0, 1\}$), преобразуется под действием сдвигов так, как должно преобразовываться состояние покоя. Для состояния с определенным импульсом $v \neq e_0$ (или $n \neq e_4$) группа сдвигов будет уже другой (см. п. 9.1.3).

В плоском пространстве имеется похожая картина. Если состояние покоя $v = e_0$ под действием пространственных сдвигов не преобразуется, а под действием сдвигов времени умножается на соответствующий фазовый множитель, то состояние с ненулевым (но определенным) импульсом $v \neq e_0$ этим свойством не обладает. Однако если перестроить группу сдвигов, подвергнув генераторы сдвигов преобразованию Лоренца v_L, то относительно преобразованной группы состояние с импульсом v ведет себя точно так же. То, что играет роль трансляций времени в перестроенной группе сдвигов, — это, как известно, собственное время частицы, т. е. время в системе отсчета, в которой частица покоится.

Это наводит на мысль интерпретировать группу A как группу сдвигов *собственного времени покоящейся частицы*, причем под состоянием покоя (в некоторой степени условно) понимается состояние φ_0, описанное выше. При реализации импульсного пространства на сфере S^3 состояние покоя описывается как состояние с импульсом $n = e_4$, т. е. $\varphi_0(n) = \delta(e_4, n) f$.

3. Переход от неприводимого (импульсного) представления к координатному. Найдем оператор $J_{\mu j}$: $\mathscr{H}_{\mu j} \to \mathscr{H}_D$, переплетающий представления $U_{\mu j}$ и U_D, т. е. оператор, который позволяет реальные состояния частицы $\varphi \in \mathscr{H}_{\mu j}$ записать в координатном представлении. Для этого воспользуемся тем, что оба представления реализованы как индуцированные: $U_{\mu j} = \Delta_{\mu j}(H) \uparrow P$, $U_D = D(L) \uparrow P$. Следовательно, оператор $J_{\mu j}$ можно записать как интегральный оператор (см. п. 2.3.7)

$$\psi(g) = J_{\mu j}\varphi(g) = \int_{P/H} dz\, J(z_P)\,\varphi(g z_P) = \int_{P/H} dz\, J(g^{-1} z_P)\,\varphi(z_P)$$

с ядром, удовлетворяющим структурному условию

$$J(lph) = D(l)\,J(p)\,\underset{\sim}{\Delta}_{\mu j}(h),$$

где обозначено

$$\underset{\sim}{\Delta}_{\mu j}(h) = \underset{\sim}{\Delta}_{\mu j}(\tau_A a_T r) = e^{(i\mu + 3/2)\tau}\Delta_j(r).$$

В силу структурного условия достаточно знать функцию J в точках $p = 1, I$, являющихся представителями двойных классов LpH. Двойной класс LI_0H, если его рассматривать как совокупность правых классов pH, образует в пространстве P/H множество меры нуль. Этот двойной класс дает вклад в оператор переплетения лишь в том случае, если J — обобщенная функция, имеющая сингулярность на LI_0H. В этом случае требуется особое рассмотрение. Оно приводит к тому, что класс LI_0H дает вклад в оператор переплетения лишь в случае, если $i\mu + 1/2$ — целое число. На этом пути можно построить теорию *безмассовых частиц*.

С учетом сказанного предположим, что функция J отлична от нуля лишь на двойных классах LH и LIH. Тогда она определяется своими значениями $J_j^{(1)} = J(1)$, $J_j^{(2)} = J(I)$, которые в силу того же структурного условия должны быть операторами переплетения:

$$J_j^{(\sigma)} \in [\Delta_j(R), D(L) \downarrow R].$$

Положим в формуле для переплетения $g = x_P$, чтобы слева получилось $\psi(x_P) = \psi(x)$. Тогда ядро требуется знать в точке $x_P^{-1} z_P$, $x \in \mathscr{X}$, $z \in P/H$. Рассмотрим обратный элемент $z_P^{-1} x_P$. Действуя этим элементом на точку O (центр пространства де Ситтера), получим точку $z_P^{-1} x$. Это значит, что элемент $z_P^{-1} x_P$

принадлежит к смежному классу $(z_P^{-1}x)_P L$ и может быть представлен в виде $z_P^{-1}x_P = (z_P^{-1}x)_P (z_P^{-1}, x)_L$. Переходя к обратным элементам и используя структурное условие на функцию J, получим

$$J(x_P^{-1}z_P) = D\left((z_P^{-1}, x)_L^{-1}\right) J\left((z_P^{-1}x)_P^{-1}\right).$$

Рассмотрим сначала случай, когда представители x_P связаны с группой сдвигов, т. е. $x_P = x_T$ (см. пункт 1). В этом случае получаем

$$J\left(x_T'^{-1}\right) = \begin{cases} J\left(a_T^{-1}\tau_A^{-1}\right) = e^{-\tau(i\mu+3/2)} J_l^{(1)} & \text{при} \quad x' \in \mathscr{X}^+, \\ J\left(Ia_T^{-1}\tau_A^{-1}\right) = e^{-\tau(i\mu+3/2)} J_l^{(2)} & \text{при} \quad x' \in \mathscr{X}^-. \end{cases}$$

Выражая экспоненту e^{τ} через x' так, как это сделано в пункте 1, приведем это выражение к виду

$$J\left(x_T'^{-1}\right) = \left|\frac{[x', e_0 - e_4]}{\rho}\right|^{-i\mu-3/2} \times$$
$$\times \left\{\theta\left([x', e_0 - e_4]\right) J_l^{(1)} + \theta\left(-[x', e_0 - e_4]\right) J_l^{(2)}\right\}$$

Случай произвольного выбора представителей легко сводится к этому, так как произвольные представители отличаются лишь множителем из группы Лоренца: $x_P = x_T x_L$, $x_L \in L$. Поэтому $J\left(x_P'^{-1}\right) = D\left(x_L'^{-1}\right) J\left(x_T'^{-1}\right)$. Наконец, полагая $x' = z_P^{-1}x$ и подставляя полученные выражения в формулу для оператора $J_{\mu l}$, получим окончательно

$$\psi(x) = J_{\mu l}\varphi(x_P) =$$
$$= \int\limits_{P/H} dz \left|\frac{[x, z_P(e_0 - e_4)]}{\rho}\right|^{-i\mu-3/2} D\left((z_P^{-1}, x)_L^{-1} (z_P^{-1}x)_L^{-1}\right) \times$$
$$\times \left\{\theta\left([x, z_P(e_0 - e_4)]\right) J_l^{(1)} + \theta\left(-[x, z_P(e_0 - e_4)]\right) J_l^{(2)}\right\} \varphi(z).$$

Для того чтобы не осложнять обсуждение принципиальных вопросов чисто техническими деталями, мы далее будем предполагать, что исследуется скалярная частица, т. е. представление группы Лоренца $D(l)$ будем предполагать тривиальным: $D(l) \equiv 1$. В этом случае формула существенно упрощается:

$$\psi(x) = J_{\mu 0}\varphi(x) = \int\limits_{P/H} dz \left|\frac{[x, z_P(e_0 - e_4)]}{\rho}\right|^{-i\mu-3/2} \times$$
$$\times \left\{\theta\left([x; z_P(e_0 - e_4)]\right) J_0^{(1)} + \theta\left(-[x, z_P(e_0 - e_4)]\right) J_0^{(2)}\right\} \varphi(z),$$

причем $J_0^{(\sigma)}$ — теперь просто числа.

Конкретизируем эту формулу, задав некоторую систему представителей z_P классов $z \in P/H$. Рассмотрим сначала реализацию P/H как трехмерной сферы, так что представителем точки

$n \in S^3 = P/H$ является элемент n_K компактной группы K. Такой элемент оставляет неизменным вектор e_0, а вектор e_4 (полюс сферы) переводит в n. Поэтому формула принимает простой вид

$$\psi(x) = J_{\mu 0}\varphi(x) = \int\limits_{S^3} dn \left|\frac{x^0 + x \cdot n}{\rho}\right|^{-i\mu-3/2} \times$$
$$\times \left[\theta(x^0 + x \cdot n) J_0^{(1)} + \theta(-x^0 - x \cdot n) J_0^{(2)}\right] \varphi(n).$$

Если в качестве представителей классов $pH \in P/H$ выбрать бусты v_L и $v_L I$, то формула преобразования от неприводимого представления к координатному переписывается следующим образом:

$$\psi(x) = J_{\mu 0}\varphi(x) = \int\limits_{\mathscr{C}} dv \left\{\left|\frac{(x, v) + x^4}{\rho}\right|^{-i\mu-3/2} \times\right.$$
$$\times \left[\theta((x, v) + x^4) J_0^{(1)} + \theta(-(x, v) - x^4) J_0^{(2)}\right] \varphi^{(1)}(v) +$$
$$\left. + \left|\frac{(x, v) - x^4}{\rho}\right|^{-i\mu-3/2} \left[\theta((x, v) - x^4) J_0^{(1)} + \theta(-(x, v) + x^4) J_0^{(2)}\right] \varphi^{(2)}(v)\right\}.$$

4. Регуляризация степенных особенностей. Переход от импульсного представления к координатному есть интегральное преобразование с сингулярным ядром. Для примера рассмотрим случай, когда импульсное представление реализовано на сфере. В этом случае преобразование содержит два характерных интеграла

$$\int dn\, |\xi \cdot n + \xi^0|^{-i\mu-3/2}\, \theta(\pm(\xi \cdot n + \xi^0))\, \varphi(n)$$

(мы воспользовались здесь безразмерными координатами). Очевидно, что ядро имеет сингулярность при $\xi \cdot n + \xi^0 = 0$.

Для исследования этой особенности введем переменную $z = \xi \cdot n + \xi^0$ и запишем интеграл в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\, |z|^{-i\mu-3/2}\, \theta(\pm z)\, \Phi_\xi(z),$$

где

$$\Phi_\xi(z) = \int\limits_{S^3} dn\, \delta(z - \xi \cdot n - \xi^0)\, \varphi(n).$$

Теперь видно, что в общем случае это неинтегрируемая особенность, т. е. интеграл по z расходится. В результате при любой функции $\varphi(n)$ координатное представление $\psi(\xi)$ не определено по крайней мере для некоторых значений ξ. Для устранения этой трудности можно воспользоваться регуляризацией, предложенной Гельфандом и Шиловым [10].

Для регуляризации интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\,|z|^p f(z)\,\theta(\pm z)$ Гельфанд и Шилов предложили воспользоваться тем, что этот интеграл определен при $\operatorname{Re} p > -1$ (функция $f(z)$ предполагается регулярной), и распространить его на остальные значения показателя p с помощью аналитического продолжения. Это удается сделать для любого комплексного значения p, кроме $p = -1$, $-2, -3, \ldots$ В случае, если $-n-2 < \operatorname{Re} p < -n-1$, интеграл доопределяется следующим образом:

$$\langle z_\pm^p \,|\, f\rangle = \int\limits_0^\infty dz\, z^p \left[f(\pm z) - f(0) \mp z f'(0) - \ldots - (\pm z)^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right],$$

$$-n-2 < \operatorname{Re} p < -n-1.$$

Определенные таким образом обобщенные функции $z_\pm^p$ как и всякие обобщенные функции, допускают дифференцирование:

$$\frac{d}{dz} z_\pm^p = \pm p z_\pm^{p-1} \qquad (p \neq -1, -2, \ldots).$$

Воспользовавшись такой регуляризацией, перепишем формулу перехода к координатному представлению в виде

$$\psi(\xi) = \int dz \left[J_0^{(1)} z_+^{-i\mu-3/2} + J_0^{(2)} z_-^{-i\mu-3/2} \right] \Phi_\xi(z),$$

где функция $\Phi_\xi(z)$ определена по-прежнему. Условимся записывать эту формулу упрощенно:

$$\psi(\xi) = J_{\mu 0}\varphi(\xi) = \int\limits_{S^3} dn \left[J_0^{(1)} (\xi \cdot n + \xi^0)_+^p + J_0^{(2)} (\xi \cdot n + \xi^0)_-^p \right] \varphi(n),$$

$$p = -i\mu - 3/2.$$

Можно проверить непосредственно, что доопределенный таким образом оператор $J_{\mu 0}$ является оператором переплетения, т. е. коммутирует с представлениями $U_{\mu 0}$ и U_D. При доказательстве существенным является тот факт, что обобщенные функции $z_\pm^p$ являются однородными степени p.

Формулу, определяющую переход к координатному представлению от импульсного представления, заданного на гиперболоиде скоростей $\varphi(v)$, $v \in \mathscr{V}$, а также общую формулу для произвольной реализации импульсного представления $\varphi(z)$, $z \in P/H$, следует регуляризовать так же, как это сделано выше для импульсного представления, реализованного на сфере $\varphi(n)$. В каждом случае появляющуюся при переходе степенную особенность z^p, $p = -i\mu - 3/2$, следует регуляризовать при помощи обобщенных функций $z_\pm^p$. После регуляризации оператор переплетения $J_{\mu j}$ выражается как интегральный оператор с ядром вида $J_j^{(1)} z_+^p + J_j^{(2)} z_-^p$. Появляющаяся таким образом обобщенная функция однородна степени p и определена при всех значениях p, кроме $p = -1, -2, \ldots$

Вместо функций $z_\pm^p$ удобно использовать их линейные комбинации [10]

$$(z \pm i0)^p = \lim_{\varepsilon \to +0} (z \pm i\varepsilon)^p = z_+^p + e^{\pm i\pi p} z_-^p.$$

Эти функции также однородны степени p и имеют перед $z_\pm^p$ то преимущество, что определены при всех без исключения значениях параметра p. Кроме того, как будет видно из следующего пункта, они оказываются преимущественными с физической точки зрения. Дифференцируются эти функции по формуле

$$\frac{d}{dz}(z \pm i0)^p = p(z \pm i0)^{p-1}.$$

В терминах этих функций оператор переплетения выражается следующим образом:

$$\psi(\xi) = J_{\mu j}\varphi(x_P) =$$

$$= \int\limits_{P/H} dz\, D\left((z_P^{-1}, x)_L^{-1} (z_P^{-1} x)_L^{-1} \right) \left\{ ([\xi, z_P(e_0 - e_4)] - i0)^p J_j^+ + \right.$$

$$\left. + ([\xi, z_P(e_0 - e_4)] + i0)^p J_j^- \right\} \varphi(z),$$

а для скалярной частицы

$$\psi(\xi) = J_{\mu 0}\varphi(\xi) = \int dn \left\{ (\xi \cdot n + \xi^0 - i0)^p J_0^+ + \right.$$

$$\left. + (\xi \cdot n + \xi^0 + i0)^p J_0^- \right\} \varphi(n),$$

где введено обозначение, которое мы будем использовать и в дальнейшем:

$$p = -i\mu - 3/2.$$

5. Частица и античастица. Теперь мы имеем возможность ввести различие между частицей и античастицей. Это нельзя сделать так, как в случае пространства Минковского (глава 6), переходом к отрицательному значению параметра μ, так как представления, отличающиеся знаком μ, эквивалентны (см. п. 3.5.3) и такой переход по сути дела ничего бы не изменил. Вместо этого постулируем, что частица и античастица описываются одним и тем же неприводимым представлением, но это представление в случаях частицы и античастицы по-разному переплетается с координатным. Другими словами, с алгебраической точки зрения представления, действующие в пространстве состояний частицы и в пространстве состояний античастицы, эквивалентны, но пространственно-временная интерпретация состояний частицы и античастицы производится по-разному.

В соответствии со сказанным необходимо выбрать значения постоянных $J_j^{\pm}$ по-разному для частицы и античастицы. Мы сделаем это так, чтобы впоследствии получить амплитуды распространения частицы и античастицы, обладающие некоторыми необходимыми свойствами. Это обеспечит применимость в пространстве де Ситтера той же схемы построения квантовой теории частиц, которая была использована в главе 6 для пространства Минковского. Достаточно потребовать, чтобы амплитуды распространения частицы и античастицы имели такие же особенности на световом конусе, как и в пространстве Минковского, и удовлетворяли условию типа условия Эйнштейна — Смолуховского (см. п. 6.1.3). Можно показать, что из этих требований однозначно следует выбор определения частицы и античастицы. Мы, однако, не будем проводить этот вывод последовательно. Вместо этого приведем сейчас готовое определение, а в следующем параграфе докажем, что оно приводит к амплитудам распространения с требуемыми свойствами.

Оказывается, что для частицы следует выбрать $J_j^- = 0$, а для античастицы $J_j^+ = 0$. Получаем операторы

$$\psi^{\pm}(x) = J_{\mu j}^{\pm}\varphi(x_P) =$$
$$= \int\limits_{P/H} dz\, D\Big(\big(z_P^{-1}, x\big)_L^{-1}\big(z_P^{-1}x\big)_L^{-1}\Big)\big([\xi, z_P(e_0 - e_4)] \mp i0\big)^{-i\mu - 3/2} J_j^{\pm}\varphi(z).$$

Первый из них переводит реальное состояние частицы, заданное функцией $\varphi(z)$ на P/H, в форму координатного представления $\psi^+(x)$. Второй оператор делает то же самое для реального состояния античастицы.

Ограничиваясь далее случаем скалярной частицы и реализуя пространство импульсов P/H как трехмерную сферу, получим

$$\psi^{\pm}(x) = J_{\mu 0}^{\pm}\varphi(x) = J_0^{\pm}\int dn\,(\xi\cdot n + \xi^0 \mp i0)^p\,\varphi(n),$$

где $J_0^{\pm}$ — просто числа (нормировочные постоянные). Если пространство P/H реализовано как удвоенный гиперболоид скоростей, то

$$\psi^{\pm}(x) = J_{\mu 0}^{\pm}\varphi(x) = J_0^{\pm}\int dv\,\big[\big((\xi, v) + \xi^4 \mp i0\big)^p\,\varphi^{(1)}(v) +$$
$$+ \big((\xi, v) - \xi^4 \mp i0\big)^p\,\varphi^{(2)}(v)\big].$$

Используем последнюю формулу для того, чтобы сравнить описания частиц в пространстве де Ситтера и в пространстве Минковского. Для этого рассмотрим волновую функцию $\psi^+(x)$ в окрестности точки O. Эта точка, разумеется, ничем не отличается от других, однако разделение пространства P/H на две половины в v-представлении произведено применительно к этой точке, поэтому анализ волновой функции удобнее произвести в окрестности именно этой точки.

Если $x \approx$ O, то $\xi^4 \approx 1$, $\xi^0 \approx 0$, $\boldsymbol{\xi} \approx 0$. Первые четыре компоненты вектора ξ в этом случае малы. Однако для достаточно больших скоростей $v \in \mathscr{V}$ величина (ξ, v) может при этом стать большой. Чтобы этого не случилось, предположим, что носители функций $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ ограничены, так что скорость не может быть сколь угодно большой. В этом случае всегда можно выбрать окрестность точки O так, что в пределах этой окрестности $|(\xi, v)| < \xi^4$ и даже $|(\xi, v)| \ll \xi^4$. Поэтому точки, в которых ядро преобразования $J_{\mu 0}^+$ сингулярно, не достигаются, и с обобщенными функциями можно обращаться как с обычными.

Разложим обобщенную функцию $(z - i0)^p$ по $z_{\pm}^p$ так, как это сделано в предыдущем пункте. Учитывая, что, например, $(\xi, v) + \xi^4 > 0$, так что $((\xi, v) + \xi^4)_-^p = 0$, получим

$$\psi^+(x) = J_0^+\int dv\,\big[((\xi, v) + \xi^4)_+^p\,\varphi^{(1)}(v) +$$
$$+ e^{-i\pi p}((\xi, v) - \xi^4)_-^p\,\varphi^{(2)}(v)\big].$$

Учитывая, что $|(\xi, v)| \ll \xi^4$, приведем это выражение к виду

$$\psi^+(x) \approx J_0^+\int dv\Big[e^{-i\left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{3i}{2\rho}\right)(v,\, x)}\varphi^{(1)}(v) +$$
$$+ e^{-\pi\mu + \frac{3\pi}{2}i}\,e^{i\left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{3i}{2\rho}\right)(v,\, x)}\varphi^{(2)}(v)\Big].$$

С увеличением ρ кривизна пространства де Ситтера становится все меньше и в пределе $\rho \to \infty$ становится равной нулю. Пространство де Ситтера превращается в пространство Минковского. Точнее, этот предельный переход следует проводить так. Выберем произвольную точку в пространстве де Ситтера (в качестве нее удобно использовать точку O) и рассмотрим окрестность этой точки диаметром $\alpha\rho$. Если α мало, то в пределах этой окрестности кривизной можно пренебречь. Между тем при $\rho \to \infty$, $\alpha = \mathrm{const}$ размеры такой области становятся сколь угодно большими, так что малая (относительно) область пространства де Ситтера превращается во все пространство Минковского.

Поскольку в таком предельном переходе участвует фактически лишь малая область пространства де Ситтера, можно использовать выражение для волновой функции $\psi^+(x)$, выведенное в предположении $x \approx$ O. Если при увеличении радиуса кривизны ρ увеличивается и параметр μ так, что отношение μ/ρ стремится к определенному пределу m, то в пределе получаем обычное выражение для волновой функции частицы в пространстве Минковского:

$$\psi^+(x) = J_0^+\int dv\,e^{-im(v,\,x)}\varphi^{(1)}(v).$$

Мы видим, что функция $\varphi^{(1)}(v)$ в плоском пределе переходит в волновую функцию частицы в импульсном представлении, а функция $\psi^+(x)$ в том же пределе содержит лишь положительно-частотные компоненты: в показателе экспоненты перед $(-x^0)$ стоит положительный коэффициент — положительная частота. Для античастицы тем же способом мы бы получили в качестве волновой функции в импульсном представлении $\varphi^{(2)}(v)$, а $\psi^-(x)$ содержала бы лишь отрицательно-частотные компоненты. При любом конечном значении ρ состояние частицы описывается обеими функциями $\varphi^{(1)}(v)$ и $\varphi^{(2)}(v)$ и обе они вносят вклад в волновую функцию частицы в координатном представлении $\psi^+(x)$. То же относится и к античастице.

Нетрудно показать, что волновые функции реальных состояний частицы и античастицы удовлетворяют ковариантному уравнению Клейна — Гордона. Рассмотрим случай скалярной частицы. Выберем в качестве системы координат на пространстве де Ситтера четыре из пяти компонент пятимерных векторов: $\{x^\alpha | \alpha = 1, 2, 3, 4\}$. Тогда ковариантный даламбертиан $\Box = g^{\alpha\beta}(x)\nabla_\alpha\nabla_\beta$ действует на скалярную функцию по формуле

$$\Box\,\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x^\beta}\right) = \left(\frac{1}{\rho^2}x^\alpha x^\beta - \delta^{\alpha\beta}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta} + \frac{4}{\rho^2}x^\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}, \qquad g = \det[g_{\alpha\beta}].$$

С помощью этой формулы легко показать, что если $\psi(x) = \Psi\left(\frac{n\cdot x + x^0}{\rho}\right) = \Psi(z)$, где $n \in S^3$, то

$$\Box\,\psi(x) = \frac{1}{\rho^2}[z^2\Psi''(z) + 4z\Psi'(z)].$$

Теперь, используя правило дифференцирования обобщенных функций $(z \pm i0)^p$, получаем, что волновая функция в координатном представлении $\psi^\pm(x)$ удовлетворяет *ковариантному уравнению Клейна — Гордона*:

$$(\Box + m^2 + 2/\rho^2)\,\psi(x) = 0,$$

где через m^2 обозначена величина

$$m^2 = (\mu^2 + 1/4)/\rho^2,$$

играющая роль *массы* в пространстве де Ситтера. В волновое уравнение, как видим, кроме квадрата массы входит еще величина $2/\rho^2$, пропорциональная скалярной кривизне пространства де Ситтера:

$$2/\rho^2 = 1/6\,R; \quad R = g^{\alpha\beta}R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta};$$

$$R^\gamma{}_{\alpha\delta\beta} = \Gamma^\gamma{}_{\alpha\delta,\beta} - \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta,\delta} + \Gamma^\gamma_{\beta\varepsilon}\Gamma^\varepsilon_{\alpha\delta} - \Gamma^\gamma_{\delta\varepsilon}\Gamma^\varepsilon_{\alpha\beta};$$

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = 1/2\, g^{\gamma\varepsilon}(g_{\alpha\varepsilon,\beta} + g_{\beta\varepsilon,\alpha} - g_{\alpha\beta,\varepsilon})$$

(индекс, отделенный запятой, означает дифференцирование).

Замечание. Из сказанного до сих пор уже видно, что величина μ/ρ в пределе $\rho \to \infty$, когда пространство де Ситтера переходит в плоское, играет роль массы. Однако выбор параметра массы до перехода к пределу — это, конечно, вопрос определения. Например, можно было бы назвать массой саму величину μ/ρ. Однако определение $m^2 = (\mu^2 + 1/4)/\rho^2$ естественнее в том отношении, что при таком определении значение $m^2 = 0$ соответствует конформно-инвариантному уравнению. В плоском пространстве частицы нулевой массы всегда описываются конформно-инвариантными уравнениями.

§ 9.3. Пропагаторы в пространстве де Ситтера

Амплитуда распространения частицы в пространстве де Ситтера, определенная обычным образом с помощью перехода от координатного представления к импульсному и обратно, оказывается двухточечной функцией, которая, как и в плоском пространстве, легко сводится к функции одной переменной. Причинный пропагатор определяется через функции распространения частицы и античастицы с помощью тэта-функций от времени, но, несмотря на это, оказывается ковариантным.

Имея причинные пропагаторы и вводя амплитуды локальных взаимодействий, можно обычным образом (так же, как в плоском пространстве) вычислять амплитуды процессов, происходящих с частицами, разлагая их на альтернативы. Тем самым построение теории частиц в пространстве де Ситтера можно считать в основном завершенным. На самом деле, однако, имеется еще много интересных и важных вопросов, которые здесь не рассматриваются и которые связаны с локальным подходом в теории частиц.

1. Переход от координатного представления к импульсному. Для построения пропагаторов тем же способом, который был применен в случае пространства Минковского, понадобится оператор, переводящий векторы пространства $\mathscr{H}_D$ в векторы пространства $\mathscr{H}_{\mu j}$. Этот оператор должен быть согласован с симметрией задачи, т. е. должен переплетать соответствующие представления: $K_{\mu j} \in [U_D, U_{\mu j}]$. Построим этот оператор с помощью теоремы о переплетении индуцированных представлений (см. п. 2.3.7). Все рассуждения аналогичны тем, что использовались в п. 9.2.3. Согласно теореме оператор переплетения выражается как интегральный оператор

$$\varphi(g) = K_{\mu l}\psi(g) = \int_{\mathscr{X}} dx\, K(g^{-1}x_P)\,\psi(x)$$

с ядром, удовлетворяющим структурному условию

$$K(hpl) = \tilde{\Delta}_{\mu l}(h)\,K(p)\,D(l).$$

Пользуясь определением факторов, преобразуем ядро к виду

$$K(g^{-1}x_P) = K((g^{-1}x)_P(g^{-1}, x)_L) = K((g^{-1}x)_P)\,D((g^{-1}, x)_L).$$

Теперь воспользуемся тем, что представители x_P отличаются от представителей x_T, связанных со сдвигами (см. п. 9.2.1), множителями из группы Лоренца: $x_P = x_T x_L$, $x_L \in L$. Это позволяет привести ядро к виду

$$K(g^{-1}x_P) = K((g^{-1}x)_T)\, D((g^{-1}x)_L (g^{-1}, x)_L).$$

Значение $K(x'_T)$, $x' = g^{-1}x$, легко вычисляется с помощью определения представителей x'_T и структурного условия на функцию $K(g)$. Получаем, таким образом,

$$K(x'_T) = \\ = \left| \frac{[x', e_0 - e_4]}{\rho} \right|^{i\mu - 3/2} \{\theta([x', e_0 - e_4])\, K_l^{(1)} + \theta(-[x', e_0 - e_4])\, K_l^{(2)}\},$$

где обозначено $K_l^{(1)} = K(1)$, $K_l^{(2)} = K(I)$, причем оба оператора в силу структурного условия принадлежат пространству переплетения

$$K_l^{(1)} K_l^{(2)} \in [D(L) \downarrow R,\ \Delta_l(R)].$$

Подставляя $x' = g^{-1}x$ и регуляризуя степенные особенности так, как это сделано в п. 9.2.4, получим окончательно

$$\varphi(g) = K_{\mu l}\psi(g) = \\ = \int_{\mathscr{X}} dx \left\{ \left(\frac{[x, g(e_0 - e_4)]}{\rho} \right)_+^q K_l^{(1)} + \left(\frac{[x, g(e_0 - e_4)]}{\rho} \right)_-^q K_l^{(2)} \right\} \times \\ \times D((g^{-1}x)_L (g^{-1}, x)_L)\, \psi(x) = \\ = \int_{\mathscr{X}} dx \, \{([\xi, g(e_0 - e_4)] + i0)^q K_l^+ + ([\xi, g(e_0 - e_4)] - i0)^q K_l^-\} \times \\ \times D((g^{-1}x)_L (g^{-1}, x)_L)\, \psi(x),$$

где введено обозначение, которое будет использоваться и в дальнейшем:

$$q = -p - 3 = i\mu - {}^3/_2.$$

Полученную формулу следует конкретизировать для случаев частицы и античастицы. Положим для частицы $K_l^- = 0$, а для античастицы $K_l^+ = 0$. Оправдание этого выбора состоит в том, что он приводит к амплитудам распространения частицы и античастицы, обладающим необходимыми свойствами, что будет видно из дальнейшего. При сделанном выборе преобразование от координатного представления к неприводимому (импульсному) для частицы и античастицы имеет вид

$$\varphi(g) = K_{\mu l}^{\pm}\psi(g) = \\ = \int dx \left(\frac{[x, g(e_0 - e_4)]}{\rho} \pm i0 \right)^q K_l^{\pm} D((g^{-1}x)_L (g^{-1}, x)_L)\, \psi(x).$$

Предполагая, что частица скалярная, и реализуя импульсное представление на сфере: $\varphi(n) = \varphi(n_K)$, получим

$$\varphi(n) = K_{\mu 0}^{\pm}\psi(n_K) = K_0^{\pm} \int dx \left(\frac{x \cdot n + x^0}{\rho} \pm i0 \right)^q \psi(x).$$

Если же реализовать импульсное пространство как удвоенный гиперболоид скоростей, то для скалярной частицы формула принимает вид

$$\varphi^{(1)}(v) = K_{\mu 0}^{\pm}\psi(v_L) = K_0^{\pm} \int dx \left(\frac{(x, v) + x^4}{\rho} \pm i0 \right)^q \psi(x);$$

$$\varphi^{(2)}(v) = K_{\mu 0}^{\pm}\psi(v_L I) = K_0^{\pm} \int dx \left(\frac{(x, v) - x^4}{\rho} \pm i0 \right)^q \psi(x).$$

2. Амплитуды распространения частицы и античастицы. Следуя той же схеме, что была использована в главе 6 для теории частиц в пространстве Минковского, мы должны при помощи операторов $J_{\mu l}^{\pm}$, $K_{\mu l}^{\pm}$ определить амплитуды вероятности для процессов локализации и материализации частиц и далее — амплитуды перехода из точки в точку (амплитуды распространения). Положим, что *амплитуды локализации*, т. е. перехода реального состояния $\varphi \in \mathscr{H}_{\mu j}$ в локализованное состояние $\psi \in \mathscr{H}_D$, для частицы и античастицы равны соответственно

$$A^{\pm}(\psi, \varphi) = (\psi, J_{\mu l}^{\pm}\varphi)_D,$$

а *амплитуда материализации*, т. е. перехода локализованного состояния в реальное, равна

$$A^{\pm}(\varphi, \psi) = (\varphi, K_{\mu l}^{\pm}\psi)_{\mu l}.$$

Переход частицы из одного локализованного состояния в другое может произойти за счет перехода в одно из реальных состояний, т. е. по схеме $\psi' \to \varphi \to \psi$. Амплитуда такого перехода равна

$$A_{\varphi}^{\pm}(\psi, \psi') = A^{\pm}(\psi, \varphi)\, A^{\pm}(\varphi, \psi').$$

Для того чтобы найти полную амплитуду перехода между локализованными состояниями, рассмотрим множество реальных состояний — состояний с определенным импульсом и поляризацией:

$$\varphi_n^{l_3}(n') = \delta(n, n')\, e_{l_3}.$$

Если e_{l_3} — ортонормированный базис в пространстве $\mathscr{L}_l$ представления $\Delta_l(R)$, то введенная система состояний ортонормирована на дельта-функцию:

$$\left(\varphi_n^{l_3}, \varphi_{n'}^{l'_3}\right)_{\mu l} = \int dn'' \left\langle \varphi_n^{l_3}(n''), \varphi_{n'}^{l'_3}(n'') \right\rangle_l = \delta^{l_3 l'_3}\, \delta(n, n').$$

Полная амплитуда перехода из состояния ψ' в состояние ψ получается суммированием амплитуды $A_{\varphi}^{\pm}(\psi, \psi')$ по всем альтернативным реальным состояниям $\varphi = \varphi_n^{j_3}$, $n \in S^3$, $-j \leqslant j_3 \leqslant j$:

$$A_{\mu j}^{\pm}(\psi, \psi') = \sum_{j_3=-j}^{j} \int dn \left(\psi, J_{\mu j}^{\pm}\varphi_n^{j_3}\right)_D \left(\varphi_n^{j_3}, K_{\mu j}^{\pm}\psi'\right)_{\mu j}.$$

В силу полноты ортонормированной системы $\{\varphi_n^{j_3}\}$ в пространстве $\mathscr{H}_{\mu j}$ имеем

$$\sum_{j_3} \int dn\, \varphi_n^{j_3}\left(\varphi_n^{j_3}, K_{\mu j}^{\pm}\psi'\right)_{\mu j} = K_{\mu j}^{\pm}\psi'.$$

Это позволяет окончательно привести амплитуду перехода между двумя локализованными состояниями к виду

$$A_{\mu j}^{\pm}(\psi, \psi') = \left(\psi, J_{\mu j}^{\pm}K_{\mu j}^{\pm}\psi'\right)_D.$$

Выбирая в качестве ψ, ψ' состояния, локализованные в точках соответственно x и x' пространства де Ситтера, например $\psi_x(x'') = \delta(x, x'')F$, получим для амплитуды перехода из точки в точку

$$A_{\mu j}^{\pm}(\psi_x, \psi_{x'}) = \left\langle F, \Pi_{\mu j}^{\pm}(x, x')F'\right\rangle,$$

где введено ядро оператора $\Pi_{\mu j}^{\pm} = J_{\mu j}^{\pm}K_{\mu j}^{\pm}$:

$$\Pi_{\mu j}^{\pm}\psi(x) = J_{\mu j}^{\pm}K_{\mu j}^{\pm}\psi(x) = \int dx'\, \Pi_{\mu j}^{\pm}(x, x')\psi(x').$$

Назовем это ядро *амплитудой распространения частицы или античастицы* из точки в точку.

Пользуясь инвариантностью меры dx и тем, что оператор $\Pi_{\mu j}^{\pm}$ переплетает представление $U_D(P)$, легко доказать *ковариантность амплитуды распространения*:

$$\Pi_{\mu j}^{\pm}(px, px') = D\left((p, x)_L\right)\Pi_{\mu j}^{\pm}(x, x')D\left((p, x')_L^{-1}\right).$$

Подставляя сюда $p = x_P'^{-1}$ и обозначая

$$\Pi_{\mu j}^{\pm}(x) = \Pi_{\mu j}^{\pm}(x, \mathrm{O}),$$

выразим ядро $\Pi_{\mu j}^{\pm}(x, x')$ через функцию одного переменного:

$$\Pi_{\mu j}^{\pm}(x, x') = D\left(\left(x_P'^{-1}, x\right)_L^{-1}\right)\Pi_{\mu j}^{\pm}\left(x_P'^{-1}x\right).$$

Ядро $\Pi_{\mu j}^{\pm}(x, x')$ легко находится в самом общем случае с помощью формул для операторов $J_{\mu j}^{\pm}$ и $K_{\mu j}^{\pm}$. Если частица скалярная ($D = 1$), то ядро представляется в виде

$$\Pi_{\mu 0}^{\pm}(x, x') = \Pi_{\mu 0}^{\pm}(\xi, \xi') = \Pi_0^{\pm}\int dn\left(\xi\cdot n + \xi^0 \mp i0\right)^p\left(\xi'\cdot n + \xi'^0 \pm i0\right)^q$$

$$(p = -i\mu - {}^3/_2,\ q = i\mu - {}^3/_2),$$

где $\Pi_0^{\pm} = J_0^{\pm}K_0^{\pm}$ — нормировочный множитель. Подставляя в это выражение $\xi' = e_4 = \mathrm{O}$, найдем то же самое ядро как функцию одного переменного:

$$\Pi_{\mu 0}^{\pm}(x) = \Pi_{\mu 0}^{\pm}(\xi) = \Pi_0^{\pm}\int dn\left(n^4 \pm i0\right)^q\left(\xi\cdot n + \xi^0 \mp i0\right)^p.$$

Если использовать реализацию импульсного пространства на гиперболоиде скоростей, то же самое ядро можно привести к виду

$$\Pi_{\mu 0}^{\pm}(\xi, \xi') = \Pi_0^{\pm}\int dv\left[\left((\xi, v) + \xi^4 \mp i0\right)^p\left((\xi', v) + \xi'^4 \pm i0\right)^q + \right.$$
$$\left. + \left((\xi, v) - \xi^4 \mp i0\right)^p\left((\xi', v) - \xi'^4 \pm i0\right)^q\right].$$

Для того чтобы получить соответствующую одноточечную функцию, положим $\xi' = \{0, 0, 0, 0, 1\}$ (что соответствует точке O) и для вычисления $(\pm 1 \pm i0)^q$ воспользуемся разложением $(z \pm i0)^q$ по $z_{\pm}^q$. Тогда получим

$$\Pi_{\mu 0}^{\pm}(\xi) = \Pi_0^{\pm}\int dv\left[\left((\xi, v) + \xi^4 \mp i0\right)^p - e^{\mp i\pi p}\left((\xi, v) - \xi^4 \mp i0\right)^p\right].$$

Эта формула позволяет установить, что амплитуды распространения частицы и античастицы $\Pi_{\mu 0}^{\pm}(\xi)$ получаются друг из друга при замене точки ξ на точку, симметричную ей относительно центра симметрии O:

$$\Pi_{\mu 0}^{+}(-\xi^0, -\boldsymbol{\xi}, \xi^4) = \Pi_{\mu 0}^{-}(\xi^0, \boldsymbol{\xi}, \xi^4).$$

Это важное соотношение выполняется, если нормировочные постоянные обеих амплитуд связаны формулой

$$\Pi_0^{-} = -e^{-2i\pi p}\Pi_0^{+} = e^{-2\pi\mu}\Pi_0^{+},$$

что мы и будем предполагать. Для доказательства приведенного соотношения достаточно воспользоваться разложением функций $(z \pm i0)^p$ по $z_{\pm}^p$ и тем, что $(-z)_{+}^p = z_{-}^p$. Отсюда получаем

$$(-z - i0)^p = e^{-i\pi p}(z + i0)^p$$

и с помощью этой формулы выводим связь между амплитудами.

Доказанное свойство одноточечных функций приводит к *симметрии между двухточечными функциями частицы и античастицы*:

$$\Pi_{\mu 0}^{+}(\xi', \xi) = \Pi_{\mu 0}^{-}(\xi, \xi').$$

Для доказательства этого достаточно воспользоваться ковариантностью двухточечных функций, которая в случае скалярной частицы принимает форму *инвариантности*:

$$\Pi_{\mu 0}^{\pm}(p\xi, p\xi') = \Pi_{\mu 0}^{\pm}(\xi, \xi'), \qquad p \in P,$$

а также результатом следующей задачи:

Задача 1. Сопоставим точке $\xi \in \mathscr{X}^+ \cup \mathscr{X}^-$ две другие точки $\xi' = \{-\xi^0, -\xi, \xi^4\}$ и $\xi'' = \xi_T^{-1}O$. Показать, что найдется такой элемент группы Лоренца l, что

$$\xi' = \begin{cases} l\{-\xi''^0, \xi'', \xi''^4\}, & \text{если} \quad \xi^0 > 0, \quad \xi^4 > 0, \\ l\xi'' & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Другое важнейшее свойство амплитуд распространения состоит в том, что обе они удовлетворяют ковариантному уравнению Клейна — Гордона:

$$\left(\Box + m^2 + \frac{2}{\rho^2}\right) \Pi^{\pm}_{\mu 0}(x, x') = 0, \qquad m^2 = \frac{1}{\rho^2}\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right).$$

Это можно доказать тем же способом, что и для волновых функций $\psi^{\pm}(x)$.

3. Причинный пропагатор. Далее следует, в соответствии со схемой, разработанной в главе 6, перейти к причинному распространению частиц. Для этого принимаем концепцию Штюкельберга — Фейнмана, предполагая, что *частицы распространяются в будущее, а античастицы — в прошлое.* Таким образом, амплитуда вероятности причинного перехода частицы из точки в точку должна быть равна $\Pi^+_{\mu j}(\xi, \xi')$, если точка ξ соответствует более позднему моменту времени, чем точка ξ', и $\Pi^-_{\mu j}(\xi, \xi')$, если порядок следования точек обратный. Однако для того чтобы реализовать эту программу, нужно определить в пространстве де Ситтера понятия «раньше» и «позже», т. е. ввести причинную упорядоченность.

Очевидно, достаточно указать, какие точки пространства де Ситтера относятся к моментам времени более поздним, чем точка O, и какие — к более ранним. Сделаем это простейшим образом — с помощью временной координаты ξ^0. Тогда амплитуда причинного распространения объекта частица — античастица из точки O в точку ξ определяется как

$$\Pi^c_{\mu j}(\xi) = \theta(\xi^0)\,\Pi^+_{\mu j}(\xi) + \theta(-\xi^0)\,\Pi^-_{\mu j}(\xi).$$

Амплитуда причинного распространения между любыми двумя точками $\xi', \xi \in \mathscr{X}$ равна в этом случае

$$\Pi^c_{\mu j}(\xi, \xi') = D\left(\left(\xi_P'^{-1}, \xi\right)_L^{-1}\right) \Pi^c_{\mu j}\left(\xi_P'^{-1}\xi\right) =$$
$$= \theta\left([\xi, \xi'_P e_0]\right) \Pi^+_{\mu j}(\xi, \xi') + \theta\left(-[\xi, \xi'_P e_0]\right) \Pi^-_{\mu j}(\xi, \xi').$$

Поскольку понятия «раньше», «позже» введены неинвариантным способом, следует убедиться, что выражение для причинного пропагатора получается тем не менее инвариантным. Функция $\Pi^c_{\mu j}(\xi)$ выражает амплитуду причинного распространения из точки O в точку ξ. Если $\xi^0 > 0$, то амплитуда эта совпадает с амплитудой $\Pi^+_{\mu j}(\xi)$ распространения частицы; если же

$\xi^0 < 0$, — то с амплитудой $\Pi^-_{\mu j}(\xi)$ распространения античастицы. Однако может случиться, что после некоторого преобразования из группы де Ситтера знак временной компоненты ξ^0 изменится. Если для точки ξ имеется такое преобразование из группы, меняющее знак ξ^0, то для этой точки амплитуды распространения частицы и античастицы должны совпадать: $\Pi^+_{\mu j}(\xi) = \Pi^-_{\mu j}(\xi)$. При этом упомянутое преобразование из группы де Ситтера точку O должно оставлять на месте. Другими словами, преобразование должно входить в группу Лоренца — стабилизатор точки O.

Итак, для проверки ковариантности причинного пропагатора нужно сначала найти такие точки $\xi \in \mathscr{X}$, для которых преобразование из группы Лоренца может изменить знак временной координаты ξ^0. Такие точки (по определению) лежат по отношению к точке O в пространственноподобном направлении. Затем следует убедиться, что для каждой такой точки амплитуды $\Pi^+_{\mu j}(\xi)$ и $\Pi^-_{\mu j}(\xi)$ совпадают.

Перечислить пространственноподобные (по отношению к O) точки не составляет труда, потому что при принятом определении пространственноподобные точки (и только они) обладают отрицательной лоренцевской сверткой: $(\xi, \xi) = (\xi^0)^2 - \boldsymbol{\xi}^2 < 0$. Поскольку точка ξ лежит на гиперболоиде $\mathscr{X}$, это условие можно переписать как $|\xi^4| < 1$. Итак, получаем в качестве условия ковариантности причинного пропагатора

$$\Pi^+_{\mu j}(\xi) = \Pi^-_{\mu j}(\xi) \quad \text{при} \quad |\xi^4| < 1$$

(условие *зарядовой симметрии* по терминологии главы 6).

Докажем, что это условие выполняется для амплитуды скалярной частицы. В этом случае из инвариантности двухточечных амплитуд распространения относительно группы де Ситтера следует лоренц-инвариантность одноточечных функций:

$$\Pi^{\pm}_{\mu 0}(l\xi) = \Pi^{\pm}_{\mu 0}(\xi), \qquad l \in L.$$

Но для пространственноподобной точки ξ существует преобразование $l \in L$, обращающее в нуль временную компоненту: $(l\xi)^0 = 0$. Поэтому достаточно показать, что $\Pi^-_{\mu 0}(0, \boldsymbol{\xi}, \xi^4) = \Pi^+_{\mu 0}(0, \boldsymbol{\xi}, \xi^4)$. Совершим пространственный поворот на угол π в плоскости, содержащей вектор $\boldsymbol{\xi}$. Воспользовавшись в этом случае инвариантностью амплитуды распространения частицы, получим $\Pi^+_{\mu 0}(0, \boldsymbol{\xi}, \xi^4) = \Pi^+_{\mu 0}(0, -\boldsymbol{\xi}, \xi^4)$. Теперь доказательство легко завершается, если учесть, что при инверсии точки ξ относительно точки O амплитуда $\Pi^+_{\mu 0}(\xi)$ переходит в $\Pi^-_{\mu 0}(\xi)$ (это доказано в предыдущем пункте). В данном случае это дает $\Pi^+_{\mu 0}(0, -\boldsymbol{\xi}, \xi^4) = \Pi^-_{\mu 0}(0, \boldsymbol{\xi}, \xi^4)$.

Из доказанного следует лоренц-инвариантность одноточечного причинного пропагатора:

$$\Pi^c_{\mu 0}(l\xi) = \Pi^c_{\mu 0}(\xi), \qquad l \in L.$$

Что касается двухточечного пропагатора, то он инвариантен относительно группы де Ситтера:

$$\Pi^c_{\mu 0}(p\xi,\ p\xi') = \Pi^c_{\mu 0}(\xi,\ \xi'), \qquad p \in P.$$

Еще одно важное свойство этого пропагатора следует из свойства симметрии между амплитудами распространения частицы и античастицы. Переставим аргументы причинного пропагатора и воспользуемся тем, что перестановка аргументов в амплитуде распространения частицы дает амплитуду распространения античастицы и наоборот (это доказано в предыдущем пункте). Нетрудно видеть тогда, что причинный пропагатор при перестановке индексов не меняется:

$$\Pi^c_{\mu 0}(\xi',\ \xi) = \Pi^c_{\mu 0}(\xi,\ \xi')$$

(разумеется, это относится лишь к пропагатору скалярной частицы).

4. Уравнение для причинного пропагатора. Покажем теперь, что причинный пропагатор скалярной частицы является функцией Грина уравнения Клейна — Гордона. В качестве координат используем первые четыре компоненты пятимерных векторов: $x = \{x^\mu \mid \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$. В этом случае метрика принимает вид

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu; \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{x_{(\mu)}x_{(\nu)}}{\rho^2 + (x,\ x)},$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \frac{x^\mu x^\nu}{\rho^2},$$

где обозначено $x_{(\mu)} = \eta_{\mu\nu}x^\nu$. Действие ковариантного даламбертиана на скалярную функцию определяется как

$$\Box f(x) = \left(\eta^{\mu\nu} + \frac{x^\mu x^\nu}{\rho^2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} + \frac{4x^\mu}{\rho^2}\,\frac{\partial f}{\partial x^\mu} =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[\left(\eta^{\mu\nu} + \xi^\mu\xi^\nu\right)\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^\mu\,\partial \xi^\nu} + 4\xi^\mu\,\frac{\partial f}{\partial \xi^\mu}\right].$$

Подействуем этим дифференциальным оператором на пропагатор $\Pi^c_{\mu 0}(\xi)$, выраженный через $\Pi^\pm_{\mu 0}(\xi)$ с помощью тэта-функций. При этом пространственные производные $\partial/\partial\xi^i$ действуют лишь на амплитуды $\Pi^\pm_{\mu 0}(\xi)$, а временная производная $\partial/\partial\xi^0$ может действовать как на эти амплитуды, так и на тэта-функции. В результате действия даламбертиана получается выражение

$$\theta\left(\xi^0\right)\Box\,\Pi^+_{\mu 0}(\xi) + \theta\left(-\xi^0\right)\Box\,\Pi^-_{\mu 0}(\xi)$$

и, кроме этого, еще некоторые члены, в которых тэта-функции дифференцируются по времени. Учитывая, что амплитуды $\Pi^\pm_{\mu 0}(\xi)$ удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона, преобразуем написанное выражение к виду $-\left(m^2 + \frac{2}{\rho^2}\right)\Pi^c_{\mu 0}(\xi)$.

Среди оставшихся членов имеются такие, в которых тэта-функция дифференцируется два раза, давая при этом $\delta'(\xi^0)$. Преобразуем эти члены по формуле

$$\delta'(t)\,F(t) = \delta'(t)\,F(0) - \delta(t)\,F'(0).$$

В нашем случае в качестве коэффициента перед производной дельта-функции стоит разность $\Pi^+_{\mu 0}(\xi) - \Pi^-_{\mu 0}(\xi)$, которая при $\xi^0 = 0$ обращается в нуль в силу зарядовой симметрии. Поэтому член с производной от дельта-функции исчезает. Коэффициент перед дельта-функцией $\delta(\xi^0)$ также содержит члены, пропорциональные разности $\Pi^+_{\mu 0} - \Pi^-_{\mu 0}$, которые исчезают по той же причине. Окончательно получаем

$$\left(\Box + m^2 + \frac{2}{\rho^2}\right)\Pi^c_{\mu 0}(x) = \delta\left(x^0\right)\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\Pi^+_{\mu 0}(x) - \Pi^-_{\mu 0}(x)\right).$$

Поскольку разность $\Pi^+_{\mu 0}(x) - \Pi^-_{\mu 0}(x)$ равна нулю в открытой области $(x^0)^2 - \boldsymbol{x}^2 < 0$, все ее производные конечного порядка также равны нулю в этой области. На поверхности $x^0 = 0$ производная $\partial_0\left(\Pi^+_{\mu 0} - \Pi^-_{\mu 0}\right)$ равна нулю везде, кроме, может быть, точки $\boldsymbol{x} = 0$, $x^4 = \rho$. Следовательно, на этой поверхности она сводится к сумме трехмерной дельта-функции и ее производных в конечном числе. Получаем

$$\left(\Box + m^2 + \frac{2}{\rho^2}\right)\Pi^c_{\mu 0}(x) = -i\delta\left(x^0\right)\theta\left(x^4\right)Q\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\delta(\boldsymbol{x}).$$

Но поскольку выражение слева лоренц-инвариантно, этим же свойством обладает и выражение справа. Следовательно, на самом деле Q — число. Ясно, что нормировочные постоянные $\Pi^\pm_0$ в определении амплитуд распространения можно выбрать так, чтобы Q было равно единице. Тогда

$$\left(\Box + m^2 + \frac{2}{\rho^2}\right)\Pi^c_{\mu 0}(x) = -i\delta\left(x^0\right)\delta(\boldsymbol{x})\,\theta\left(x^4\right).$$

Вблизи точки O инвариантная мера выражается через координаты $\{x^\mu \mid \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ в виде $dx = d^4x = dx^0\,d^3\boldsymbol{x}$. Поэтому произведение дельта-функций, стоящее в правой части уравнения, представляет собой фактически дельта-функцию, инвариантную относительно всей группы де Ситтера: $\delta(x, \mathrm{O})$. Уравнение приобретает явно ковариантный вид, если перейти к двухточечному пропагатору:

$$\left(\Box + m^2 + \frac{2}{\rho^2}\right)\Pi^c_{\mu 0}(x,\ x') = -i\delta(x,\ x').$$

Таким образом, причинный пропагатор является функцией Грина уравнения Клейна — Гордона.

З а м е ч а н и е. При выводе уравнения для причинного пропагатора существенно использовались свойства разности $\Pi^+_{\mu 0}(x) - \Pi^-_{\mu 0}(x)$. На языке квантовой теории поля эта разность представляет собой *коммутатор операторов свободного скалярного поля.* То, что она исчезает для пространственноподобных значений x, формулируется как локальная коммутативность операторов поля. Соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\Pi^+_{\mu 0}(x) - \Pi^-_{\mu 0}(x)\right)\Big|_{x^0=0} = -\,i\theta\left(x^4\right)\delta(\boldsymbol{x})$$

эквивалентно *каноническим перестановочным соотношениям*, так как выражает собой коммутатор оператора поля (играющего роль обобщенной координаты в теории поля) и его производной по времени (обобщенного импульса) в один и тот же момент времени. В следующем пункте это соотношение будет доказано явно.

5. Свойства амплитуд распространения. Амплитуды распространения частицы и античастицы в пространстве де Ситтера можно выразить в виде интегралов от соответствующих амплитуд в плоском пространстве (пространстве Минковского). Рассмотрим амплитуду скалярной частицы, найденную в пункте 2. Удобно исходить из v-представления этой амплитуды

$$\Pi^+_{\mu 0}(x) = \Pi^+_0 \int dv\left[\left(\frac{(x, v) + x^4}{\rho} - i0\right)^p - e^{-i\pi p}\left(\frac{(x, v) - x^4}{\rho} - i0\right)^p\right].$$

Выделяя явным образом степенные сингулярности, получим

$$\Pi^+_{\mu 0}(x) = \Pi^+_0 \int dz\,(z - i0)^p \int dv\left[\delta\left(z - \frac{(x, v)}{\rho} - \frac{x^4}{\rho}\right) - \right.$$
$$\left. - e^{-i\pi p}\delta\left(z - \frac{(x, v)}{\rho} + \frac{x^4}{\rho}\right)\right].$$

Используя разложение дельта-функции в интеграл Фурье, преобразуем это выражение к виду

$$\Pi^+_{\mu 0}(x) = \frac{\Pi^+_0}{2\pi}\int d\nu\left[e^{-i\nu\xi^4} - e^{-i\pi p}e^{i\nu\xi^4}\right]\int dz\,(z - i0)^p\, e^{i\nu z}\int dv\, e^{-i\frac{\nu}{\rho}(x, v)}.$$

В этой форме интеграл по z представляет собой преобразование Фурье обобщенной функции $(z - i0)^p$. Согласно [10], это преобразование дает функцию, пропорциональную ν_+^{-p-1}:

$$\int dz\,(z - i0)^p \exp(i\nu z) = \frac{2\pi\exp(-ip\pi/2)}{\Gamma(-p)}\,\nu_+^{-p-1}.$$

С другой стороны, интеграл по v пропорционален (при положительных ν) амплитуде распространения частицы в пространстве Минковского (см. п. 6.1.3):

$$\int dv\exp\left[-i\frac{\nu}{\rho}(x, v)\right] = \frac{16\pi^3\rho^2}{\nu^2}\,\Pi^+_{\nu/\rho}(x).$$

Таким образом, под знаком интеграла по ν возникает произведение обобщенной функции ν_+^{-p-1} и функции ν^{-2}. Интеграл по ν имеет смысл, если доопределить это произведение как $\nu_+^{-p-3} = \nu_+^q$. Окончательно получаем

$$\Pi^+_{\mu 0}(x) = \frac{16\pi^3\rho^2\exp(-ip\pi/2)}{\Gamma(-p)}\,\Pi^+_0\int d\nu\,\nu_+^q\,\Pi^+_{\nu/\rho}(x)\left[e^{-i\nu\xi^4} - e^{-i\pi p}e^{i\nu\xi^4}\right].$$

Таким образом, амплитуда распространения в пространстве де Ситтера выражается через амплитуду в пространстве Минковского. При этом в функцию $\Pi^+_m(x)$ подставляются первые четыре компоненты пятимерного вектора $x = \{x^0, \boldsymbol{x}, x^4\}$, а от знака компоненты x^4 эта функция не зависит.

Полученная формула позволяет доказать свойства амплитуд, важные для их интерпретации. Возьмем производную от $\Pi^+_{\mu 0}(x)$ по x^0 и после этого положим $x^0 = 0$. Учтем, что эта же операция, примененная к амплитуде в плоском пространстве $\Pi^+_m(x)$, дает трехмерную дельта-функцию с коэффициентом, не зависящим от массы m:

$$\frac{\partial\Pi^+_m(x)}{\partial x^0}\Big|_{x^0=0} = -\frac{i}{2}\,\delta(\boldsymbol{x}), \qquad m > 0.$$

Это легко доказывается с помощью явного вида амплитуды $\Pi^+_m(x)$ в v-представлении. Остается воспользоваться формулой для преобразования Фурье функции ν_+^q (см. [10]):

$$\int d\nu\,\nu_+^q e^{i\nu\sigma} = e^{i(q+1)\pi/2}\Gamma(q+1)(\sigma + i0)^{-q-1} =$$
$$= i\Gamma(q+1)\left[e^{iq\pi/2}\sigma_+^{-q-1} - e^{-iq\pi/2}\sigma_-^{-q-1}\right].$$

В результате получаем

$$\frac{\partial\Pi^+_{\mu 0}(x)}{\partial x^0}\Big|_{x^0=0} = -\frac{i}{2}\,\theta(x^4)\,\delta(\boldsymbol{x})\,\frac{16\pi^3\rho^2\Gamma(-p-2)}{\Gamma(-p)}\left(1 - e^{-ip\pi}\right)\Pi^+_0.$$

Если нормировочную постоянную выбрать подходящим образом,

$$\Pi^+_0 = \frac{\mu^2 + 1/4}{16\pi^3\rho^2\left(1 + \exp(-2\pi\mu)\right)},$$

то амплитуды распространения в пространстве де Ситтера удовлетворяют такому же точно соотношению, как и амплитуды в пространстве Минковского:

$$\frac{\partial\Pi^\pm_{\mu 0}(x)}{\partial x^0}\Big|_{x^0=0} = \mp\frac{i}{2}\,\theta(x^4)\,\delta(\boldsymbol{x}).$$

Эти соотношения играют важную роль в корпускулярной интерпретации теории (см. следующий пункт).

Найдем теперь асимптотическое выражение для амплитуды $\Pi^+_{\mu 0}(x)$ вблизи светового конуса, т. е. вблизи поверхности

$x^4 = \pm\rho$. При этом будем исходить из того, что асимптотика амплитуды в пространстве Минковского известна [2]:

$$\Pi^+_{\nu/\rho}(x) \approx -\frac{i}{4\pi}\operatorname{Sgn} x^0 \delta((x, x)) - \frac{1}{4\pi^2 (x, x)} +$$

$$+ \frac{i\nu^2}{16\pi\rho^2}\operatorname{Sgn} x^0 \theta((x, x)) + \frac{\nu^2}{8\pi^2\rho^2}\ln\frac{\nu\sqrt{(x, x)}}{2\rho}, \qquad \nu > 0, \ (x, x)\to 0.$$

Подставляя это выражение в интеграл по ν, легко находим асимптотику для функции $\Pi^+_{\mu 0}(x)$. Для этого, кроме преобразования Фурье функции ν^λ_+, требуется еще преобразование Фурье функции $\nu^\lambda_+ \ln \nu_+$. Оно равно [10]

$$\int d\nu\, \nu^\lambda_+ \ln\nu_+ e^{i\nu\sigma} = e^{i(\lambda+1)\pi/2}\Gamma(\lambda+1)\times$$

$$\times\{[\psi(\lambda+1) + i\pi/2](\sigma + i0)^{-\lambda-1} - (\sigma + i0)^{-\lambda-1}\ln(\sigma + i0)\},$$

где ψ обозначает логарифмическую производную гамма-функции:

$$\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z).$$

В результате для функции $\Pi^+_{\mu 0}(x)$ вблизи светового конуса находим выражение

$$\Pi^+_{\mu 0}(x) \approx -\frac{i}{4\pi}\operatorname{Sgn} x^0\cdot\delta((x, x)) - \frac{1}{4\pi^2 (x, x)} +$$

$$+ \frac{\mu^2 + {}^1\!/_4}{\rho^2}\left(\frac{i}{16\pi}\operatorname{Sgn} x^0\cdot\theta((x, x)) + \frac{1}{8\pi^2}\ln\frac{\sqrt{(x, x)}}{2\rho}\right) +$$

$$+ \frac{\mu^2 + {}^1\!/_4}{8\pi^2\rho^2}\left[\psi(i\mu + {}^3\!/_2) - i\frac{\pi}{2}\,\frac{1 - \exp(-2\pi\mu)}{1 + \exp(-2\pi\mu)}\right], \qquad x^4 \to +\rho;$$

$$\Pi^+_{\mu 0}(x) \approx \frac{\mu^2 + {}^1\!/_4}{8\pi\rho^2\,[\exp(\pi\mu) + \exp(-\pi\mu)]}, \qquad x^4 \to -\rho.$$

Нетрудно видеть, что асимптотика амплитуды распространения на световом конусе в пространстве де Ситтера имеет почти такой же вид, что и в плоском пространстве, если положить квадрат массы равным $m^2 = (\mu^2 + {}^1\!/_4)/\rho^2$. Выражаясь точнее, функция $\Pi^+_{\mu 0}(x)$ при $x^4 \approx \rho$, будучи выражена через x^0, $\boldsymbol{x}$, отличается от $\Pi^+_m(x)$ аддитивной добавкой, не зависящей от x. Нетрудно показать, что эта добавка стремится к нулю при большом действительном значении параметра μ. Это следует из того, что при большом чисто мнимом значении аргумента логарифмическая производная $\psi(z) = (\ln\Gamma(z))'$ мало отличается от конечной разности $(\ln\Gamma(z+2) - \ln\Gamma(z))/2$.

6. Интегральные соотношения для амплитуд распространения. Вид производной $\partial_0\Pi^+_{\mu 0}(x)\big|_{x^0=0}$, найденный в предыдущем пункте, позволяет доказать важное интегральное соотношение, необходимое для того, чтобы функцию $\Pi^\pm_{\mu 0}(x, x')$ можно было

интерпретировать как амплитуду перехода из точки в точку:

$$i\varepsilon\int\limits_\Sigma d\sigma^\lambda(x')\,\Pi^{(\varepsilon)}_{\mu 0}(x, x')\,\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x'^\lambda}\,\Pi^{(\varepsilon')}_{\mu 0}(x', x'') = \delta^{\varepsilon\varepsilon'}\Pi^{(\varepsilon)}_{\mu 0}(x, x''), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

В этой формуле Σ — любая пространственноподобная поверхность в пространстве де Ситтера $\mathscr{X}$, а

$$d\sigma^\lambda(x) = {}^1\!/_6\sqrt{-g(x)}\,g^{\lambda\sigma}(x)\,\varepsilon_{\sigma\rho\varkappa\nu}\,dx^\rho\wedge dx^\varkappa\wedge dx^\nu$$

— дифференциальная форма, позволяющая интегрировать по такой поверхности. Соотношение означает, что амплитуда вероятности перехода частицы из точки в точку равна сумме амплитуд вероятности такого перехода при условии прохождения через всевозможные точки некоторой пространственноподобной поверхности. В теории функционального интегрирования условие такого типа называется *условием Эйнштейна — Смолуховского.* Приведем схему доказательства этого соотношения.

Прежде всего, используя тот факт, что амплитуды $\Pi^\pm_{\mu 0}(x, x')$ удовлетворяют уравнению Клейна — Гордона по обоим аргументам, а также обобщенную формулу Гаусса — Остроградского

$$\int\limits_V dx\,\partial_\mu\Phi^\mu(x) = \int\limits_{\partial V} d\sigma_\mu(x)\Phi^\mu(x); \quad dx = \sqrt{-g(x)}\,dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$$

(∂V — граница области V в пространстве-времени $\mathscr{X}$), показываем, что интеграл не зависит от выбора пространственноподобной поверхности Σ. Далее, задача Коши для уравнения Клейна — Гордона в пространстве де Ситтера имеет единственное решение. Исследуемый интеграл является решением уравнения Клейна — Гордона, и поэтому его значение при любом x восстанавливается по значениям при x, лежащих вблизи заданной пространственноподобной поверхности. Если провести эту поверхность через точку x'', то задача сводится к доказательству той же формулы для частного случая, когда $x, x'' \in \Sigma$. Без потери общности можно считать, что $x'' = O$, а x получается из O действием элемента компактной подгруппы: $x = n_K O$. В качестве поверхности Σ выбираем поверхность $x'^0 = 0$. Теперь искомое соотношение непосредственно следует из инвариантности амплитуд

$$\Pi^{(\varepsilon)}_{\mu 0}(n_K O, x) = \Pi^{(\varepsilon)}_{\mu 0}(O, n_K^{-1}x),$$

формулы

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\Pi^{(\varepsilon)}_{\mu 0}(x, O)\Big|_{x^0=0} = -\varepsilon\frac{i}{2}\theta(x^4)\,\delta(\boldsymbol{x})$$

и аналогичной формулы, получающейся при перестановке аргументов:

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\Pi^{(\varepsilon)}_{\mu 0}(O, x)\Big|_{x^0=0} = \varepsilon\frac{i}{2}\theta(x^4)\,\delta(\boldsymbol{x}).$$

Доказанное таким путем соотношение позволяет показать, что операторы $P^{\pm}_{\mu 0}$, определенные на множестве решений уравнения Клейна — Гордона формулой

$$P^{\pm}_{\mu 0}\psi(x) = \pm i \int\limits_{\Sigma} d\sigma^{\lambda}(x')\, \Pi^{\pm}_{\mu 0}(x,\ x') \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x'^{\lambda}} \psi(x'),$$

являются проекторами. Нетрудно видеть, что они проектируют на волновые функции соответственно частицы и античастицы. Действительно, введем пространственноподобную поверхность Σ', расположенную по отношению к Σ в прошлом, и «функцию включения» $g(x)$, которая 1) равна нулю в открытой области, содержащей Σ', а также все точки, лежащие в прошлом по отношению к Σ'; 2) равна единице в открытой области, содержащей Σ и все точки, лежащие в будущем по отношению к Σ. Тогда

$$P^{\pm}_{\mu 0}\psi(x) = \pm i \int\limits_{\Sigma - \Sigma'} d\sigma^{\lambda}(x')\, \Pi^{\pm}_{\mu 0}(x,\ x') \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x'^{\lambda}} g(x')\, \psi(x'),$$

где через $\Sigma - \Sigma'$ обозначена поверхность, являющаяся объединением поверхности Σ и взятой с противоположным направлением нормали поверхности Σ'. Поверхность $\Sigma - \Sigma'$ является границей для области, заключенной между Σ' и Σ (состоящей из точек, лежащих позже Σ' и раньше Σ). Используя теорему Гаусса — Остроградского, перейдем к интегрированию по четырехмерному объему и получим

$$P^{\pm}_{\mu 0}\psi(x) = \int\limits_{\mathscr{X}} dx'\, \Pi^{\pm}_{\mu 0}(x,\ x')\, j(x'),$$

где обозначено

$$j(x) = \pm i(\Box + m^2 + 2/\rho^2)\, g(x)\, \psi(x).$$

Интеграл здесь можно распространить на все пространство $\mathscr{X}$, так как ток $j(x)$ заведомо равен нулю вне области, лежащей между Σ' и Σ. Вспоминая теперь определение амплитуд $\Pi^{\pm}_{\mu 0}(x, x')$ как ядер для операторов $\Pi^{\pm}_{\mu 0} = J^{\pm}_{\mu 0} K^{\pm}_{\mu 0}$, мы видим, что функции $\psi^{\pm} = P^{\pm}_{\mu 0}\psi$ действительно являются волновыми функциями соответственно частицы и античастицы.

Таким образом, амплитуды $\Pi^{\pm}_{\mu 0}(x, x')$ позволяют из любого решения уравнения Клейна — Гордона выделить части, описывающие состояния частицы и античастицы. Поскольку причинный пропагатор в зависимости от упорядочения во времени его аргументов сводится к одной из этих амплитуд, ту же операцию можно записать через причинный пропагатор:

$$P^{\pm}_{\mu 0}\psi(x) = \pm i \int\limits_{\Sigma^{\mp}} d\sigma^{\lambda}(x')\, \Pi^{c}_{\mu 0}(x,\ x') \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x'^{\lambda}} \psi(x'),$$

где интегрирование ведется по поверхности, лежащей в одном случае раньше, а в другом — позже точки x:

$$\Sigma^{-} < x < \Sigma^{+}.$$

Пользуясь уравнением для причинного пропагатора (пункт 4), симметрией его относительно перестановки аргументов, а также теоремой Гаусса — Остроградского, легко доказать, что действие суммы $P^{+}_{\mu 0} + P^{-}_{\mu 0}$ на любое решение уравнения Клейна — Гордона не меняет его, так что на множестве решений уравнения справедливо операторное равенство

$$P^{+}_{\mu 0} + P^{-}_{\mu 0} = \mathbb{1}.$$

Таким образом, операторы $P^{\pm}_{\mu 0}$ производят разложение любого решения уравнения на части, связанные с частицей и античастицей.

7. Обсуждение результатов. Подведем итоги сделанному в этой главе, поговорив, во-первых, о классификации частиц в пространстве де Ситтера и, во-вторых, — об особенностях квантовой теории частиц в пространстве де Ситтера.

Элементарные частицы в пространстве де Ситтера описываются унитарными неприводимыми представлениями группы де Ситтера $U_{\mu j}(P)$ и характеризуются непрерывным параметром μ и дискретным параметром j (спином). Спин может принимать обычный набор значений $j = 0,\ ^1/_2,\ 1,\ \ldots$, а значения параметра μ при каждом j ограничиваются требованием, чтобы соответствующее представление группы де Ситтера было унитарным и неприводимым. В общем случае эти ограничения сложны, но во всяком случае все действительные значения $\mu \in \mathbb{R}$ удовлетворяют ограничениям. Значения $\mu \in (0,\ +\infty)$; $j = 0,\ ^1/_2,\ 1,\ \ldots$ соответствуют *главной серии* неприводимых унитарных представлений группы де Ситтера и главной серии частиц. Отрицательные значения параметра μ дают эквивалентные представления, так что не требуют отдельного рассмотрения. Кроме главной, имеется *дополнительная серия* представлений, соответствующая небольшим по величине чисто мнимым значениям параметра μ, именно $-i\mu \in [0,\ ^3/_2)$; $j = 0,\ ^1/_2,\ 1,\ \ldots$ Эта серия описывает частицы малых масс.

Более подробно был рассмотрен случай нулевого спина: $j = 0$. В этом случае масса частицы определяется через параметр μ формулой $m^2 = (\mu^2 + {}^1/_4)/\rho^2$. Поэтому часть дополнительной серии $-i\mu \in [0,\ ^1/_2)$ соответствует обычным частицам малых масс $0 < m^2 \leqslant 1/4\rho^2$ (комптоновская длина для них имеет порядок радиуса кривизны ρ), а другая часть дополнительной серии $-i\mu \in (^1/_2,\ ^3/_2)$ приводит к отрицательному квадрату масс: $-2/\rho^2 < m^2 < 0$. Эта серия представлений либо не имеет физической интерпретации, либо описывает *тахионы* (частицы, имеющие пространственноподобные импульсы, т. е. движущиеся со скоростью больше скорости света) малых масс. Вопрос нуждается в дополнительном исследовании.

Кроме того, значению $-i\mu = 1/2$ соответствует унитарное представление, не входящее в дополнительную серию (это тот случай, когда точка дискретного спектра накладывается на непрерывный спектр). Оно качественно отличается от представлений дополнительной серии, в частности, видом скалярного произведения. Это представление описывает, по-видимому, *частицы нулевой массы*. На первый взгляд кажется, что разница между частицами нулевой массы и частицами очень малых масс (из дополнительной серии) физически несущественна, потому что комптоновская длина для частиц дополнительной серии сравнима с размерами всего пространства-времени де Ситтера. Однако прежде чем сделать такой вывод, следует убедиться, что не существует качественных отличий между теми и другими.

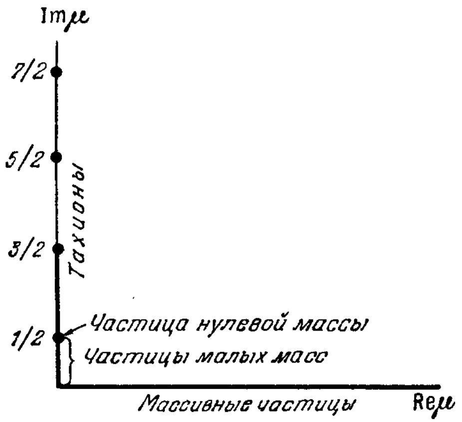


Рис. 15. Унитарные неприводимые представления группы де Ситтера и соответствующие им частицы.

Кроме главной и дополнительной, имеется еще *дискретная серия* унитарных представлений. При $j = 0$ она соответствует значениям $-i\mu = 3/2,\ 5/2,\ \ldots$ или $-i\mu - 3/2 = p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ При каждом таком значении индуцированное представление $U_{\mu 0} = \Delta_{\mu 0} \uparrow P$ оказывается приводимым, однако содержит неприводимое унитарное подпредставление $U_{(p)}$, фактор-представление по которому $D_{(p)} = U_{\mu 0}/U_{(p)}$ конечномерно. Этим точкам спектра соответствует дискретный спектр масс $m^2 = -(p+1)(p+2)/\rho^2$ с очень малыми интервалами (порядка $1/\rho$). О дискретной серии также можно сказать, что она либо не имеет физической интерпретации, либо описывает *тахионы* (на этот раз сравнительно больших масс). Предварительный анализ показывает, что неунитарные неприводимые представления, соответствующие действительным, но не целым значениям параметра p, также, по-видимому, описывают тахионы. Таким образом, тахионы (частицы с отрицательным квадратом масс), если они существуют, не обязаны иметь в пространстве де Ситтера дискретный спектр масс.

Для полного описания частицы недостаточно указать неприводимое представление группы де Ситтера, которое ей соответствует. Необходима пространственно-временная интерпретация состояний частицы, которая производится в терминах *координатного представления* $U_D(P)$. Следовательно, кроме параметров μ и j, для характеризации частицы необходимо задать представление D группы Лоренца. Пространственно-временная интерпретация состояний частицы производится с помощью операторов $J^{\pm}_{\mu j}$ и $K^{\pm}_{\mu j}$, переплетающих неприводимое и координатное представления. Построение этих операторов содержит произвол, который используется для определения частицы и античастицы. Далее по этим операторам строятся амплитуды распространения частицы и античастицы $\Pi^{\pm}_{\mu j}(x, x')$ и причинный пропагатор $\Pi^{c}_{\mu j}(x, x')$. Определения частицы и античастицы подобраны таким образом, чтобы амплитуды распространения удовлетворяли интегральным соотношениям типа условия Эйнштейна — Смолуховского. Это позволяет интерпретировать их как амплитуды вероятности перехода частицы или античастицы из одной точки пространства-времени в другую.

В результате проделанных построений возникает возможность вычислять *амплитуды вероятности реальных процессов* по той же схеме, что и в плоском пространстве (см. главу 6). Именно, каждому реальному процессу сопоставляются *диаграммы Фейнмана* с заданными внешними линиями, а затем каждой диаграмме — амплитуда вероятности некоторой альтернативы данного процесса. Для этого достаточно воспользоваться *правилами соответствия*, сопоставив внутренним линиям диаграммы причинные пропагаторы, внешним линиям — реальные состояния частиц или античастиц, а вершинам — амплитуды *локальных взаимодействий*. Последние формулируются целиком в терминах представлений группы Лоренца $D(L)$, и поэтому их определение в пространстве де Ситтера по существу не отличается от того, которое было дано в главе 6 для пространства Минковского.

В произвольном римановом пространстве-времени возникают трудности с определением понятия частицы [61]. В работе [34] автором было предложено использовать для этой цели причинный пропагатор, интерпретируя его как амплитуду перехода и постулируя концепцию Штюкельберга — Фейнмана. Сам пропагатор должен при этом определяться независимо.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В нескольких последних главах были рассмотрены приложения метода индуцированных представлений к проблеме построения квантовой теории частиц. Подведем некоторые итоги, сосредоточив внимание на существе принципа квантования, лежащего в основе этого построения, и на возможности распространения этого принципа на случай произвольного риманова пространства-времени, т. е. на случай, когда принимаются во внимание гравитационные эффекты.

Принято считать, что релятивистская квантовая теория принципиально отличается от нерелятивистской, являясь теорией полей, а не теорией частиц. Другими словами, для описания элементарных частиц в релятивистском случае привлекаются системы с бесконечным числом степеней свободы. К этому есть веские основания, состоящие в том, что при взаимодействии число частиц не сохраняется, так что не удается изолированно описать систему, состоящую из одной частицы, из двух и т. д. Все эти системы приходится описывать в совокупности, и это приводит к понятию квантованного поля.

Однако такое описание имеет и свои недостатки. Одним из них является усложнение интерпретации теории в терминах эксперимента. В этой книге предпринята попытка изложить релятивистскую теорию как теорию систем с конечным числом степеней свободы, как теорию частиц, а не полей. Этого удается достичь за счет явного введения в теорию виртуальных состояний частиц, локализованных в точке пространства-времени, и последовательного использования амплитуд вероятности квантовых переходов.

Результатом является построение релятивистской и нерелятивистской теорий по одной и той же схеме, изображенной на рис. 16. Более того, по той же схеме строится и теория частиц в пространстве-времени с геометрией де Ситтера, т. е. при учете (в рамках простейшей модели) гравитации. Хотя эта схема иллюстрируется подробнейшим образом всем содержанием последних глав, не лишним будет еще раз резюмировать некоторые ее особенности. Рассмотрим сначала теорию в пространстве Минковского.

1. Координатное представление реализуется в пространстве $\mathscr{H}_D$ волновых функций, нормируемых на четырехмерный интеграл. Такое пространство содержит в качестве обобщенных векторов состояния локализации в одной точке пространства-времени. Кроме координатного, рассматривается импульсное (неприводимое) представление в пространстве $\mathscr{H}_{mj}$ реальных состояний, обладающих определенными массой и спином. Многочастичные реальные состояния строятся как прямые произведения одночастичных.

2. Постулируется, что квантовый переход между двумя реальными многочастичными состояниями происходит не иначе

Рис. 16. Схема построения квантовой теории частиц.

как посредством предварительной локализации этих состояний, т. е. по схеме

$$S_{nn'}\colon (\mathscr{H}_{mj})^{n'} \to (\mathscr{H}_D)^{n'} \xrightarrow{G_{nn'}} (\mathscr{H}_D)^{n} \to (\mathscr{H}_{mj})^{n}$$

(различия частиц, входящих в многочастичные состояния, не отражены). В этой схеме переходы $(\mathscr{H}_{mj})^{n'} \to (\mathscr{H}_D)^{n'}$ и $(\mathscr{H}_D)^{n} \to (\mathscr{H}_{mj})^{n}$ (которые мы условились называть процессами локализации и материализации) соответствуют внешним линиям диаграмм Фейнмана. Они определяются требованием ковариантности относительно группы Пуанкаре. Описание процессов сводится, таким образом, к матрице $G_{nn'}$, т. е. к описанию переходов между локализованными состояниями (внутренние части диаграмм Фейнмана).

3. Постулируется, что переходы между локализованными состояниями могут происходить за счет локальных взаимодей-

ствий и причинного распространения:

$$G_{nn'}\colon (\mathscr{H}_D)^{n'} \overset{\gamma}{\underset{\Pi^c}{\rightrightarrows}} (\mathscr{H}_D)^n.$$

При этом полная амплитуда перехода между локализованными состояниями находится путем суммирования альтернатив, представляющих собой композиции этих двух элементарных переходов. Получающаяся таким образом амплитуда $G_{nn'}$ соответствует внутренним частям диаграмм Фейнмана и называется иногда обобщенной функцией Грина.

4. Локальное взаимодействие происходит в одной точке пространства-времени:

$$\gamma\colon (\Pi_x\mathscr{H}_D)^{k'} \to (\Pi_x\mathscr{H}_D)^k$$

(Π_x — проектор на состояния, локализованные в точке x), и регламентируется требованием инвариантности относительно преобразований, оставляющих на месте эту точку. Это сводится к инвариантности относительно группы Лоренца. В пределах этого условия амплитуды локальных взаимодействий (соответствующие лагранжианам взаимодействий в квантовой теории полей) произвольны.

5. Причинное распространение определяется постулатом о том, что частицы распространяются в будущее, а соответствующие античастицы — в прошлое:

$$\Pi^c\colon \mathscr{H}_D \overset{\Pi^+ \text{ в будущее}}{\underset{\Pi^- \text{ в прошлое}}{\rightrightarrows}} \mathscr{H}_D.$$

6. Частица и соответствующая ей античастица в пространстве Минковского описываются неприводимыми представлениями группы Пуанкаре, отличающимися знаком энергии.

Описание частиц в пространстве-времени Галилея или де Ситтера следует той же самой схеме. Отличие возникает лишь при определении античастиц (пункт 6). В случае пространства Галилея понятие античастицы оказывается излишним, так как в нерелятивистской теории не возникает ситуаций, в которых частица и античастица взаимодействуют друг с другом и должны поэтому рассматриваться одновременно. В пространстве-времени де Ситтера античастицы определяются не так, как в пространстве Минковского:

6′. Частица и соответствующая ей античастица в пространстве де Ситтера описываются одним и тем же неприводимым представлением группы де Ситтера, но отличаются пространственно-временной интерпретацией этого представления.

Таким образом, *квантовая теория частиц* в пространстве-времени, описываемом одной из трех моделей: Галилея, Минковского или де Ситтера — формулируется в развиваемом подходе в терминах небольшого числа определений и постулатов, имеющих непосредственный и прозрачный физический смысл.

К числу *основных понятий*, используемых в теории, относятся: 1) реальное состояние частицы или античастицы (неприводимое представление группы симметрии); 2) локализованное состояние (представление, имеющее в качестве базы импримитивности само пространство-время). Утверждения теории формулируются как утверждения об *амплитудах вероятности* переходов между различными состояниями. При этом используются обычные для квантовой теории правила перемножения амплитуд последовательно происходящих процессов и сложения амплитуд альтернативных процессов.

Основные постулаты теории сводятся к тому, что возможны лишь три типа процессов с участием элементарных частиц: 1) локализация реальных состояний и материализация локализованных состояний (амплитуды этих процессов определяются требованием инвариантности относительно группы симметрии); 2) причинное распространение объекта частица — античастица (амплитуда определяется тем, что переход совершается через промежуточные реальные состояния в рамках концепции Штюкельберга — Фейнмана); 3) локальные взаимодействия частиц (амплитуды их регламентируются требованием инвариантности). Предполагается, что все многообразие наблюдаемых в природе процессов порождается различными комбинациями этих трех элементарных процессов, и амплитуда любого процесса с помощью правил сложения и умножения амплитуд может быть сведена к элементарным амплитудам. Практически это сведение осуществляется с помощью диаграмм Фейнмана.

Построенная по этой схеме теория эквивалентна *квантовой теории поля в рамках теории возмущений*. Однако по своей логической и математической структуре она значительно проще теории поля, так как не требует явного введения систем с бесконечным числом степеней свободы (полей).

Качественно можно охарактеризовать развитую схему построения квантовой теории, сказав, что она включает локальный аспект описания частиц (координатное представление), глобальный аспект (неприводимое представление), а также их связь друг с другом (переплетение этих представлений). При этом именно связь локального и глобального аспектов, т. е. переплетение координатного и импульсного представлений играет в этой схеме роль *принципа квантования* и заменяет собой коммутационные соотношения операторов поля в обычной квантовой теории полей.

Наличие группы симметрии играет в такой теории весьма важную роль, так как позволяет определить глобальные свойства частицы (неприводимое представление) и связь глобальных и локальных свойств (переплетение). Представляет интерес непосредственный переход от теории частиц в той форме, как она здесь развивается, к локальной теории, эквивалентной квантовой теории полей. Такой переход намечен в § 6.4 и содержит интересные возможности, однако для полной формулировки его следует провести дополнительные исследования. В нерелятивистской теории такой переход осуществляется гораздо легче (п. 8.2.4).

Оценивая в целом развитый здесь подход к релятивистской квантовой теории как теории частиц, следует сказать, что этот подход вряд ли может заменить собой богатую по идеям и возможностям квантовую теорию полей, однако он позволяет осветить с новой и неожиданной стороны некоторые принципиальные вопросы теории. Это может быть полезно для дальнейшего развития теории и распространения ее на новые области явлений.

С этой точки зрения следует отметить проблему построения *квантовой теории в искривленном пространстве-времени*, т. е. учет гравитации. Обычно для обобщения на случай искривленного пространства используется полностью локальная формулировка теории (в терминах только координатного представления). Обобщение опирается на принцип эквивалентности и сводится по существу к замене в уравнениях поля обычных производных на ковариантные. В главе 9 для частного случая пространства де Ситтера такое обобщение осуществляется на основе теоретико-группового или глобального подхода.

В общем случае в точности такое построение невозможно, так как произвольное риманово пространство не обладает достаточно широкой группой движений. Тем не менее *теоретико-групповой подход* в этом случае также возможен. Он должен основываться на группе симметрии, которой обладает любое риманово пространство. Оказывается, что такая группа существует. Ее можно назвать *группой параллельных переносов*. Определяется она в терминах расслоения реперов над римановым пространством (см. п. 5.1.4) методами, развитыми в работах автора [31—33]. С математической точки зрения эта группа очень сложна. Ее элементы можно поставить в соответствие с множеством кривых в некотором пространстве. Следовательно, элементы группы не могут быть заданы конечным числом параметров, т. е. эта группа не является группой Ли. Несмотря на эти чисто технические трудности, можно надеяться, что группа параллельных переносов окажется эффективным инструментом для исследования квантовой теории частиц в римановом пространстве и для квантования гравитационного поля.

ЛИТЕРАТУРА

ТЕМАТИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ К СПИСКУ ЛИТЕРАТУРЫ

В круглых скобках отмечены разделы книги, в которых затронут данный вопрос. В квадратных скобках — ссылки на дополнительную литературу по этому вопросу.

1. Общие руководства по теории групп и методу индуцированных представлений (часть I; § 4.2) [21, 22, 37, 44, 59, 71, 79, 81, 82].
2. Бинарные отношения (§ 1.2) [23, 24, 43].
3. Факторизация и индуцированные представления конечных групп (глава 1) [46, 79].
4. Проективные представления (пп. 2.3.8; 8.1.2; 8.1.4) [19, 25, 44, 53, 86, 97].
5. Представления групп с нормальным делителем — метод малой группы (§ 3.1) [25, 29, 44, 49, 54, 59, 79, 82, 99].
6. Представления группы Пуанкаре (§ 5.3) [29, 48, 49, 54, 86, 99].
7. Представления группы Галилея (п. 8.1.4) [19, 53, 97].
8. Представления некомпактных полупростых групп (§ 3.2) [21, 22, 68, 77, 91].
9. Унитарные представления группы Лоренца (§ 3.3) [9, 12, 13, 35].
10. Конечномерные представления группы Лоренца (§ 7.1) [1, 12, 13, 25, 35].
11. Унитарные представления 1 + 4 группы де Ситтера (§ 3.4) [9, 56, 62, 75].
12. Сжатие (contraction) группы де Ситтера в группу Пуанкаре (п. 9.2.5) [72, 83, 87].
13. Представления конформной группы (п. 3.4.4) [74, 80].
14. Топология [1, 3, 23, 36, 37, 43, 59].
15. Теория меры и интегрирования [4, 6, 23, 36, 43, 59].
16. Функциональный анализ [1, 9, 11, 23, 36, 37, 59].
17. Общие руководства по квантовой теории полей (часть II) [1, 2, 42, 47, 65].
18. Квантовые наблюдаемые и спектральные меры (§ 4.1) [11, 26, 67, 88].
19. Оператор положения Ньютона — Вигнера и индуцированные представления (§ 4.2) [70, 82, 98].
20. Амплитуды переходов и виртуальные состояния (§ 4.3) [42, 65, 66].
21. Оператор положения в пространстве-времени (§ 5.2) [28, 30, 34, 50, 57, 60, 73, 92].
22. Диаграммы Фейнмана (§ 6.3) [2, 34, 47, 65, 66].
23. Высшие спины (§ 7.3) [39, 41, 51, 52, 89, 94].
24. Пропагаторы нерелятивистских частиц (§ 8.2) [42, 65].
25. Интегрирование по путям (§ 8.2; п. 6.2.5) [11, 18, 32, 33, 42, 65].
26. Пространство де Ситтера и группа де Ситтера (§ 9.1) [69, 70].
27. Частицы в пространстве де Ситтера (§ 9.2) [56, 58, 69, 70, 83, 87, 93, 95].
28. Пропагаторы в пространстве де Ситтера (§ 9.3) [56, 93].
29. Тахионы — частицы с мнимой массой (п. 9.3.7) [20, 55, 64].
30. Квантовая теория в произвольном искривленном пространстве-времени (п. 9.3.7, Заключение) [14, 31, 32, 33, 61, 78, 85].
31. Расслоение реперов в квантовой теории (п. 5.1.4) [31, 32, 33, 78].

32. Принципы симметрии в квантовой теории (не рассмотренные в книге аспекты) [7, 8, 17, 25, 26, 38, 44, 45, 63, 82, 96, 100, GTIA].
33. Конформная инвариантность в квантовой теории [96].
34. Импульсное пространство с геометрией де Ситтера [17].
35. Нелинейные представления групп (G-пространства) в квантовой теории (§ 1.3) [63].
36. Разное (цитировано в тексте книги или в дополнительных указаниях к списку литературы) [5, 10, 15, 16, 27, 40, 76, 84, 90].

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ К СПИСКУ ЛИТЕРАТУРЫ

В настоящей книге рассматривается лишь одно из многочисленных направлений применения теории групп и принципов симметрии в квантовой физике. Общеизвестна теоретико-групповая классификация элементарных частиц, основанная на группе $SU(3)$ и различных ее расширениях. Перечислим некоторые другие приложения. В серии работ Кадышевского с соавторами (см., например, [17]) предполагается, что импульсное пространство обладает геометрией $3+2$ пространства де Ситтера, и за счет этого ликвидируется большинство расходимостей, характерных для квантовой теории поля. В последнее время появились работы, в которых ковариантность относительно конформных преобразований пространства Минковского используется для того, чтобы эффективно избавиться от расходимостей (см., например, обзор Тодорова [96]). Много работ посвящается изучению точной и нарушенной конформной и масштабной инвариантности. Оригинальная концепция материи и гравитации, основанная на масштабной инвариантности, разработана в книге Станюковича [40]. Имеются попытки использовать в квантовой теории нелинейные представления групп, т. е. представления преобразованиями многообразий, не имеющих линейной структуры, например, однородных пространств (см. статью Дрездена [63]). Книги, в которых рассматриваются другие приложения теории групп в квантовой механике, собраны в тематической рубрике {32}. Обзоры, в которых рассматриваются приложения теории групп в атомной и ядерной физике, физике твердого тела и теории частиц, содержатся в сборнике GTIA.

Развитая в главе 4 физическая интерпретация индуцированных представлений обобщает результаты работы Вайтмана [98], в которой она используется для вывода оператора положения Ньютона — Вигнера. Понятие локализации в пространстве-времени было введено этим способом автором в работах [30]. Само понятие четырехмерной локализации восходит к Штюкельбергу [92], но было забыто и переоткрыто в последние годы рядом авторов [50, 57, 60, 73], в том числе (в связи с задачей конструирования геометрической модели элементарной частицы) — автором настоящей книги [28]. Последовательное использование четырехмерной локализации для интерпретации диаграмм Фейнмана предложено автором, по-видимому, впервые [34]. Диаграммы для расчета процессов в релятивистской квантовой теории частиц были введены Фейнманом в работах [65] на основе аналогии с нерелятивистской квантовой механикой и доказаны им же в [66] в рамках квантовой теории полей. Вывод диаграммной техники без обращения к понятию поля, в терминах только частиц, принадлежит автору.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Литература расположена в алфавитном порядке. В фигурных скобках указаны рубрики тематического указателя. Названия статей приведены лишь в тех случаях, когда содержание недостаточно характеризуется этими рубриками. Приняты следующие сокращения: ЭС73 — «Эйнштейновский сборник 1973», «Наука», 1974; НРКЭ — «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954; GTIA — «Group Theory and Its Applications», ed. E. M. Loebl, Acad. Press, New York — London, 1968.

1. *Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров*, Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, «Наука», 1969 {10, 14, 16, 17}.
2. *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков*, Введение в теорию квантованных полей, «Наука», 1973 {17, 22}.
3. *Н. Бурбаки*, Общая топология (основные структуры), «Наука», 1968 {14}.
4. *Н. Бурбаки*, Интегрирование (меры, интегрирование мер), «Наука», 1967; Интегрирование (векторное интегрирование, мера Хаара, свертка и представления), «Наука», 1970 {15}.
5. *А. Вайтман*, Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей, «Наука», 1968.
6. *А. Вейль*, Интегрирование в топологических группах и его применения, ИЛ, 1950 {15}.
7. *Е. Вигнер*, Теория групп, ИЛ, 1961 {32}.
8. *Е. Вигнер*, Этюды о симметрии, «Мир», 1971 {32}.
9. *Н. Я. Виленкин*, Специальные функции и теория представлений групп, «Наука», 1965 {9, 11, 16}.
10. *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов*, Обобщенные функции и действия над ними. «Обобщенные функции», т. 1, Физматгиз, 1959.
11. *И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин*, Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. «Обобщенные функции», т. 4, Физматгиз, 1961 {16, 18, 25}.
12. *И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин*, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. «Обобщенные функции», т. 5, Физматгиз, 1962 {9, 10}.
13. *И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро*, Представления группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, 1958 {9, 10}.
14. *А. А. Гриб, С. Г. Мамаев*, Ядерная физика **14**, 800 (1971) {30}.
15. *П. А. М. Дирак*, Принципы квантовой механики, Физматгиз, 1960.
16. *Д. П. Желобенко*, Компактные группы Ли и их представления, «Наука», 1970.
17. *В. Г. Кадышевский*, Квантовая теория поля и импульсное пространство постоянной кривизны, В сб. «Проблемы теоретической физики» (памяти И. Е. Тамма), «Наука», 1972, стр. 52 {32, 34}.
18. *М. Кац*, Вероятность и смежные вопросы в физике, «Мир», 1965 {25}.
19. *Ф. Кемпфер*, Основные положения квантовой механики, «Мир», 1967 {4, 7}.
20. *Д. А. Киржниц, В. Н. Сазонов*, ЭС73, стр. 84 {29}.
21. *А. А. Кириллов*, Элементы теории представлений, «Наука», 1972 {1, 8}.
22. *А. А. Кириллов*, Метод орбит в теории представлений, Вестник МГУ, № 2, 41 (1970) {1, 8}.
23. *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин*, Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», 1972 {2, 14, 15, 16}.
24. *А. Г. Курош*, Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962 {2}.
25. *Г. Я. Любарский*, Теория групп и ее применение в физике, Физматгиз, 1958 {4, 5, 10, 32}.
26. *Дж. Макки*, Лекции по математическим основам квантовой механики, «Мир», 1965 {18, 32}.
27. *Б. В. Медведев, М. К. Поливанов*, К аксиоматическому построению матрицы рассеяния, Труды Международной зимней школы теоретической физики, ОИЯИ, т. 1, Дубна, 1964, стр. 77.
28. *М. Б. Менский*, Геометрическая модель элементарной частицы, Ядерная физика **9**, 1293 (1969) {21}.
29. *М. Б. Менский*, В сб. «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц», вып. 3, Атомиздат, 1970, стр. 25 {5, 6}.
30. *М. Б. Менский*, VIII Всесоюзная конф. по теории элементарных частиц (Ужгород, янв. 1971 г.), Киев, 1971, стр. 90; Сб. «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц», Труды ВНИИФТРИ, вып. 16 (46), 1972, стр. 115 {21}.
31. *М. Б. Менский*, Принцип эквивалентности и симметрия риманова пространства, В сб. «Гравитация: проблемы и перспективы» (памяти А. З. Петрова), «Наукова думка», Киев, 1972, стр. 157 {30, 31}.

32. *M. B. Mensky*, Int. Seminar on Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistics, Moscow, 1971, Препринт ФИАН, № 140, 1971, p. 29; *М. Б. Менский*, В сб. «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц», Труды ВНИИФТРИ, вып. 16 (46), 1972, стр. 73 {25, 30, 31}.
33. *М. Б. Менский*, Теоретическая и математическая физика **18**, 190 (1974) {25, 30, 31}.
34. *M. B. Mensky*, Relativistic Quantum Theory without Quantized Fields. I. Particles in the Minkowski Space, Commun. math. Phys. **47**, 97 (1976) {21, 22}.
35. *М. А. Наймарк*, Линейные представления группы Лоренца, Физматгиз, 1958 {9, 10}.
36. *М. А. Наймарк*, Нормированные кольца, «Наука», 1968 {14, 15, 16}.
37. *М. А. Наймарк*, Теория представлений групп, «Наука», 1976 {1, 14, 16}.
38. *М. И. Петрашень, Е. Д. Трифонов*, Применение теории групп в квантовой механике, «Наука», 1967 {32}.
39. *Г. Л. Ставраки*, Укр. физ. ж. **10**, 10 (1965); *G. L. Stavraki*, Preprint ITP 68-42, Kiev, 1968 {23}.
40. *К. П. Станюкович*, Гравитационное поле и элементарные частицы, «Наука», 1965.
41. *Х. Умэдзава*, Квантовая теория поля, ИЛ, 1958 {23}.
42. *Р. Фейнман, А. Хибс*, Квантовая механика и интегралы по траекториям, «Мир», 1968 {17, 20, 24, 25}.
43. *Р. Фор, А. Кофман, М. Дени-Пален*, Современная математика, «Мир», 1966 {2, 14, 15}.
44. *М. Хаммермеш*, Теория групп и ее применение к физическим проблемам, «Мир», 1966 {1, 4, 5, 32}.
45. *В. Хейне*, Теория групп в квантовой механике, ИЛ, 1963 {32}.
46. *М. Холл*, Теория групп, ИЛ, 1962 {3}.
47. *С. Швебер*, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963 {17, 22}.
48. *Ю. М. Широков*, ЖЭТФ **33**, 861, 1196 (1957) {6}.
49. *Ю. М. Широков*, Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра (ЭЧАЯ) **3**, 606 (1972) {5, 6}.
50. *J. J. Aghassi, P. Roman, R. M. Santilli*, Phys. Rev. **D1**, 2753 (1970) {21}.
51. *A. Aurilia, H. Umezawa*, Phys. Rev. **182**, 1682 (1969) {23}.
52. *A. P. Balachandran, J. Nilsson, L. O'Raifeartaigh*, Scattering of Particles with Spin; Mackey-State Formulation. Nucl. Phys. **B49**, 221 (1972) {23}.
53. *V. Bargmann*, Ann. Math. **59**, 1 (1954) {4, 7}.
54. *V. Bargmann, E. P. Wigner*, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **34**, 211 (1948) {5, 6}.
55. *O. M. Bilaniuk, E. C. Sudarshan*, Phys. Today **22**, 43 (1969) (перевод в ЭС73, стр. 112) {29}.
56. *G. Börner, H. P. Dürr*, Nuovo Cimento **64**, 669 (1969) {11, 27, 28}.
57. *A. A. Broyles*, Phys. Rev. **D1**, 979 (1970) {21}.
58. *N. A. Chernikov, E. A. Tagirov*, Ann. Inst. H. Poincaré **9**, 109 (1968) {27}.
59. *A. J. Coleman*, Induced and Subduced Representations, GTIA, p. 57 {1, 5, 14, 15, 16}.
60. *J. H. Cooke*, Phys. Rev. **166**, 1293 (1968) {21}.
61. *Bryce S. DeWitt*, Quantum Field Theory in Curved Spacetime, Phys. Reports **19**, 295 (1975) {30}.
62. *J. Dixmier*, Bull. Soc. Math. de France **89**, 9 (1960) {11}.
63. *M. Dresden*, «Causality and Phys. Theories Conf. AIP, Wayne State Univ., 1973», New York, 1974, p. 65 {32, 35}.
64. *G. Feinberg*, Phys. Rev. **159**, 1089 (1967) (перевод в ЭС73, стр. 134) {29}.
65. *R. P. Feynman*, Phys. Rev. **76**, 749; 769 (1949) (перевод в НРКЭ, стр. 138, 161) {17, 20, 22, 24, 25}.
66. *R. P. Feynman*, Phys. Rev. **80**, 440 (1950) {20, 22}.
67. *K. O. Friedrichs*, Spectral Theory of Operators in Hilbert Space, Lecture Notes, New York University, New York, 1960 {18}.
68. *C. Fronsdal*, «High-Energy Physics and Elementary Particles, IAEA», Vienna, 1965, p. 585 (перевод в сб. «Теория групп и элементарные частицы», «Мир», 1967, стр. 324) {8}.
69. *C. Fronsdal*, Rev. Mod. Phys. **37**, 221 (1965); Phys. Rev. **D10**, 589 (1974) {26, 27}.
70. *K. C. Hannabus*, Proc. Camb. Phil. Soc. **70**, 283 (1971) {19, 26, 27}.
71. *R. Hermann*, Lie Groups for Physicists, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1966 {1}.
72. *E. Inönü, E. P. Wigner*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 510 (1953) {12}.
73. *J. E. Johnson*, Phys. Rev. **181**, 1755 (1969); Phys. Rev. **D3**, 1735 (1971) {21}.
74. *A. Kihlberg, V. Müller, F. Halbwachs*, Commun. math. Phys. **3**, 194 (1966) {13}.
75. *A. Kihlberg, S. Ström*, Arkiv för Fysik **31**, 491 (1966) {11}.
76. *D. Kleima, W. Holman*, III, *L. Biedenhorn*, The Algebras of Lie Groups and Their Representations, GTIA, p. 1.
77. *W. H. Klink*, J. Math. Phys. **9**, 1669 (1968) {8}.
78. *A. Lichnerowicz*, Ann. Inst. H. Poincaré **A1**, 233 (1964) {30, 31}.
79. *J. S. Lomont*, Applications of Finite Groups, Acad. Press, New York — London, 1959 {1, 3, 5}.
80. *N. W. Macfadyen*, J. Math. Phys. **12**, 1436; Nuovo Cimento **A10**, 268 (1972) {13}.
81. *G. W. Mackey*, Group Representations and Non-Commutative Harmonic Analysis, Univ. of California, 1965 {1}.
82. *G. W. Mackey*, Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics, W. A. Benjamin, New York — Amsterdam, and Editore Boringhieri, Torino, 1968 {1, 5, 19, 32}.
83. *J. Mickelsson, J. Niederle*, Commun. math. Phys. **27**, 167 (1972) {12, 27}.
84. *C. C. Moore*, On the Frobenius Reciprocity Theorem for Locally Compact Groups, Pacific J. Math. **12**, 359 (1962).
85. *L. Parker*, Phys. Rev. **183**, 1057 (1969); Phys. Rev. **D3**, 346 (1971) {30}.
86. *K. R. Parthasarathy*, Commun. math. Phys. **15**, 305 (1970) {4, 6}.
87. *T. O. Philips, E. P. Wigner*, GTIA, p. 631 {12, 27}.
88. *C. Piron*, Helv. Phys. Acta **37**, 439 (1964) {18}.
89. *W. Rarita, J. Schwinger*, Phys. Rev. **60**, 61 (1941) {23}.
90. *J. Schwinger*, On Gauge Invariance and Polarization of Vacuum, Phys. Rev. **82**, 664 (1951) (перевод в НРКЭ, стр. 224).
91. *E. M. Stein*, «High-Energy Phys. and Elementary Particles», Vienna, 1965, p. 563 {8}.
92. *E. C. Stueckelberg*, Helv. Phys. Acta **14**, 322 (1941); **15**, 23 (1942) {21}.
93. *E. A. Tagirov*, Ann. Phys. **76**, 561 (1973) {27, 28}.
94. *Y. Takahashi*, An Introduction to Field Quantization, Pergamon Press, Oxford, 1969 {23}.
95. *W. Thirring*, «Spec. Probl. High Energy Phys.», Wien — New York, Springer, 1967, p. 269 {27}.
96. *I. T. Todorov*, Acta phys. austr. Suppl. **11**, 241 (1973) {32, 33}.
97. *J. Voisin*, J. Math. Phys. **6**, 1519 (1965) {4, 7}.
98. *A. S. Wightman*, Rev. Mod. Phys. **34**, 845 (1962) {19}.
99. *E. P. Wigner*, Ann. Math. **40**, 149 (1939) {5, 6}.
100. *E. P. Wigner*, Reduction of Direct Products and Restriction of Representations to Subgroups: the Everyday Tasks of the Quantum Theorists, SIAM J. Appl. Math. **25**, 169 (1973) {32}.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Для каждой предметной рубрики указаны пункты или параграфы книги, в которых обсуждаются соответствующие вопросы или вводятся соответствующие понятия. При обозначении пунктов и параграфов опускаются точки. Например, вместо п. 7.3.2. и § 7.3 пишется 732 и § 73.

Михаил Борисович Менский

МЕТОД ИНДУЦИРОВАННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

•

ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ И КОНЦЕПЦИЯ ЧАСТИЦ

М., 1976 г., 288 стр. с илл.

Редактор *Л. П. Русакова*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректор *Г. В. Подвольская*

Сдано в набор 3/XII 1975 г. Подписано к печати 7/VI 1976 г. Бумага 60×90$^{1}/_{16}$. тип. № 1. Физ. печ. л. 18. Условн. печ. л. 18. Уч.-изд. л. 18,34. Тираж 4 800 экз. Т-12212. Цена книги 1 р. 72 к. Заказ № 941

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
198052, Ленинград, Л-52,
Измайловский проспект, 29.