Н. В. МИЦКЕВИЧ

ФИЗИЧЕСКИЕ ПОЛЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

МОСКОВСКОЕ ОБЩЕСТВО ИСПЫТАТЕЛЕЙ ПРИРОДЫ

СЕКЦИЯ ФИЗИКИ

Н. В. МИЦКЕВИЧ

ФИЗИЧЕСКИЕ ПОЛЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1969

УДК 530.12

Физические поля в общей теории относительности. Мицкевич Н. В. Изд-во «Наука», 1969.

Монография посвящена исследованию гравитационного и других физических полей в римановом пространстве. В книге, в отличие от работ других авторов, используется единый подход ко всем полям. Здесь впервые собраны и сопоставлены с современной точки зрения публиковавшиеся ранее определения энергии-импульса полей в общей теории относительности; подробно проанализированы проблемы квантования гравитационного поля, гравитационно-электромагнитной аналогии, теории фермионного поля в присутствии гравитации и электромагнетизма. Автором получены новые результаты и рассчитан ряд эффектов. Дан обзор представлений и важнейших методов теории гравитации. Изложены метод хронометрических инвариантов Зельманова и двуметрический формализм Розена, рассмотрены тетрадное и близкие ему представления гравитационного поля. Библиография содержит краткие характеристики цитируемых работ.

Издание рассчитано не только на физиков-теоретиков и математиков, но и на студентов-физиков старших курсов, физиков, работающих в смежных областях, философов и других.

Иллюстраций — 16, библиография — 215 назв.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

профессор А. З. ПЕТРОВ

2-3-2
151-68(II)

Светлой памяти моего деда —
Максима Павловича РЕПНИКОВА
посвящаю.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Литература по общей теории относительности довольно обширна — имеется целый ряд фундаментальных монографий и учебников, непрерывно нарастает поток журнальных статей и диссертаций. Однако в подавляющем большинстве этих публикаций анализируется геометрический аспект теории, и в лучшем случае авторы подходят к ней как к разделу математической физики, избегая говорить о гравитационном поле как о физической реальности. Теория фермионных полей вообще почти не находит отражения в монографической литературе; аналогия между гравитацией и электромагнетизмом проводится чисто формально; крайне редко обсуждаются проблемы квантования физических полей (включая гравитационное) в общей теории относительности. И лишь проблема энергии дебатируется, начиная с основополагающих работ Эйнштейна, уже более полувека, найдя доступ почти во все книги, посвященные теории гравитации. Однако в этих книгах не только не дано сравнения разных определений гравитационной энергии, но даже часто нет и упоминания об альтернативных подходах.

Из сказанного читателю понятно, что автор хотел бы отойти от сложившейся традиции и исследовать гравитационное поле наравне с другими физическими полями, отнюдь не отбрасывая его глубокой специфики. В самом деле, любое физическое поле обладает своими особыми качествами, и лишь эти качества позволяют нам говорить о нем как о «самостоятельном» поле. В этом свете тесная связь гравитации и геометрии отражает прежде всего всеобщность гравитационного взаимодействия — главное отличительное свойство гравитационного поля.

Схематически план нашего изложения таков. Сначала формулируются и исследуются общие принципы классической теории поля. Далее, как их иллюстрация в соответствующих обозначениях и на базе общих методов, излагается стандартная теория гравитации Эйнштейна. Здесь, в частности, дается обзор состояния проблемы гравитационной энергии, с которой в последнее время связано много интенсивно проводящихся исследований. Затем применение общих принципов и методов иллюстрируется также на примерах других физических полей, причем особое внимание уделяется фермионным полям в общей теории относительности. Впервые анализируется общековариантное квадрированное уравнение Дирака с учетом интерференции гравитационного и электромагнитного взаимодействий. На основе этого теоретического анализа строится квазимаксвелловская теория гравитации, без каких-либо натяжек совмещающая содержание теории Эйнштейна с формой уравнений типа Максвелла. Наконец, мы рассматриваем квантовую теорию гравитационного поля: вначале дается общий анализ формализма квантования физических полей в общей теории относительности, а затем проводится расчет квантовых эффектов с участием гравитонов в рамках представления взаимодействия и обычной теории возмущений. В самом начале и в конце книги (разделы 1 и 8) приведены (отчасти из соображений единообразия обозначений) многие соотношения римановой геометрии и изложены избранные методы общей теории относительности, в своем большинстве не нашедшие еще отражения в монографической литературе.

Несмотря на то, что эта книга ни в коем случае не является учебником, от ее читателя требуется лишь минимум первоначальных знаний в области римановой геометрии и теории гравитации. Поэтому книга вполне доступна для студентов старших курсов, интересующихся общерелятивистской теорией поля, которая может оказаться существенной при дальнейшем развитии наших представлений в области физики элементарных частиц и релятивистской квантовой теории поля. Для студента (или неспециалиста) можно рекомендовать следующий систематический порядок чтения этой книги: сначала раздел 1 (введение), затем § 8.1, 8.6, 8.2; 2.1—2.5; 8.3, 8.4; 2.6; 8.9; 3.1—3.9; 8.7; 4.1—4.9; 5.1—5.7 и т. д. Читатели, знакомые с деталями аппарата общей теории относительности, могут обращаться к разделам 1 и 8 за справками и для расшифровки обозначений. Для удобства мы укажем здесь основные курсы тензорного анализа: Эйзенхарт (1948); Рашевский (1960); Схоутен и Стройк (1939); Схоутен (1965); Лихнерович (1960); Бишоп и Криттенден (1967); Леви-Чивита (1927); Шуликовский (1963), а также книги по общей теории относительности и смежным вопросам: Вейль (1922); Паули (1947); Фок (1961); де Дондер (1921); Ландау и Лифшиц (1960) [1]; Эддингтон (1934); Петров (1961, 1966); Йордан (1955); Тоннела (1962); Ланцош (1965); Полак (1960); Бергман (1947); Синг (1963). К стилю учебника наиболее близка книга Вебера (1962). Приведенная в конце нашей книги библиография не претендует на полноту и содержит ссылки на работы, так или иначе использованные в наших рассуждениях. В ряде случаев направленность цитированных работ указана после ссылки на них. Более обширную библиографию можно найти в книгах Паули (1947), Леката (1924), Петрова (1961, 1966), Синга (1963), Эддингтона (1934), а также в сборниках, указанных в конце нашей библиографии.

Автор чрезвычайно благодарен всем своим коллегам, на работы которых он опирался в этих исследованиях и которые нередко принимали живое участие в его поисках своей поддержкой, советами и, главное, критикой. Это прежде всего участники семинара теоретической физики Университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы, гравитационных семинаров Московского, Казанского и Иенского университетов. Некоторые результаты были получены в сотрудничестве с дипломниками УДН им. П. Лумумбы Хосе Альваресом Торресом, Раулем Эстевесом Лапреа, Сасао Тэцуо, Хосе Мухикой Маркано, Агустином Рафаэлем Карреньо, Эктором Поблете Девиа и Хосе дель Прадо Сегурой, а также с аспирантом В. Н. Захаровым, который, кроме того, оказал мне помощь при подготовке рукописи. Я рад поблагодарить здесь этих энергичных и трудолюбивых молодых коллег.

Н. МИЦКЕВИЧ

---

[1] При написании настоящей книги использовалась «Теория поля» (Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, 1960). Следует обратить внимание читателя на изменение обозначений в новом издании «Теории поля» (1967), облегчающее сравнение формул в этой и других книгах.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы не отойдем от традиции, восходящей к Эйнштейну, если скажем, что общая теория относительности — это взятая в целом классическая (неквантовая) физика, сформулированная в произвольных системах координат в римановом пространстве. При этом риманова характера пространства требуют законы, связывающие гравитацию с геометрией. При такой трактовке принцип эквивалентности, связанный с эйнштейновским лифтом, отступает на задний план, как справедливо замечают Фок и Синг, тем более, что частная теория относительности с успехом формулируется в произвольных системах отсчета, лишь бы пространство-время было плоским. Поэтому в общей теории относительности гравитационное поле неразрывно связывается с кривизной мира, и его присутствие определяется абсолютно, независимо от выбора системы отсчета.

Физики, привыкшие проводить исследования в рамках традиционной формулировки частной теории относительности (в декартовых координатах), обычно смешивают понятия систем отсчета и систем координат. В общей теории относительности такое смешение уже недопустимо. Так, например, неподвижные друг относительно друга декартова и сферическая системы координат с очевидностью принадлежат к одной и той же системе отсчета, и от выбора той или другой из них никак не могут зависеть результаты экспериментов, тогда как переход от одной системы координат к другой, связанной с первой, например, преобразованием Лоренца, ведет к известным *наблюдаемым* следствиям (сокращение длин, замедление хода часов и пр.). В последнем случае эти системы координат принадлежат уже к разным системам отсчета. Заметим, что по-английски термины «система координат» и «система отсчета», благодаря исторически сложившейся ситуации, звучат по-разному: это «system of coordinates» и «frame of reference». По-видимому, впервые четкое разграничение этих понятий было сделано Мёллером, но главные физические следствия из него извлекли лишь Зельманов с учениками, Каттанео и Шмутцер. Мы увидим далее, что это разграничение приводит к фундаментальным физическим результатам при исследовании проблемы гравитационной энергии.

В наши дни невозможно ограничиваться чисто классическим подходом к столь широкой области, как теория гравитации. Поэтому в общую теорию относительности все настойчивее проникают принципы и методы квантовой теории поля. Этой проблеме посвящены разделы 6 и 7 нашей книги. Может быть, следовало бы говорить не о проникновении квантовых концепций в общую теорию относительности, а наоборот, хотя, конечно, в самой теории гравитации формальное применение классической теории заводит нас далеко в область действия квантовых законов, например, когда мы исследуем явления на шварцшильдовском радиусе электрона. Этот факт уже демонстрирует неразрывность общей теории относительности и других областей физической теории.

Ценность и перспективность общей теории относительности состоит не только в возможности развития специфически общерелятивистских проблем, в центре которых стоит гравитация. Не менее важно установление места гравитации в физике и дальнейшее распространение эвристических общерелятивистских концепций. При незначительности наблюдаемых эйнштейновских гравитационных эффектов в земном эксперименте анализ теории Эйнштейна приводит к нетривиальным заключениям о структуре физических полей (лагранжианы, сохраняющиеся величины) и о структуре реального мира, учет которых представляет большую принципиальную ценность.

Говоря о месте гравитации в физике, естественно сравнить между собой гравитационное и другие взаимодействия. Обычно при классификации элементарных взаимодействий ограничиваются сильным, электромагнитным и слабым, и лишь изредка упоминают гравитационное [см., например, (Окунь, 1963, стр. 7—11)]. Его всегда характеризуют как сверхслабое ввиду малости гравитационной постоянной:

$$\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-8}\ \textit{см}^3\cdot \textit{сек}^{-2}\cdot \textit{г}^{-1} \tag{1.1}$$

(ньютонова константа). Ее малость зависит от выбора единиц измерения, в противоположность электромагнитной константе связи $\alpha_{em} = {}^1/_{137}$, являющейся безразмерной. Аналогом заряда в теории гравитации Ньютона является не масса частицы, а величина

$$e_g = \sqrt{\gamma}\, m, \tag{1.2}$$

обладающая размерностью электрического заряда в системе CGS. Поэтому, по аналогии с электродинамикой, безразмерная константа гравитационного взаимодействия имеет вид

$$\alpha_g = \frac{\gamma m_1 m_2}{\hbar c}. \tag{1.3}$$

Сравнение между собой гравитационного и электромагнитного взаимодействий не требует, однако, привлечения квантовой постоянной Планка в явном виде, так как безразмерным является уже отношение e_g / e_{em}, где e_{em} — электромагнитный заряд частицы. Заметим, однако, что масса, в противоположность электрическому заряду, характеризуется бо́льшим разнообразием своих значений уже у элементарных частиц (не говоря о космических объектах), и вместе с тем масса меняется при движении. Гравитационное поле порождается не массой покоя, а полной массой гравитирующей системы, или, говоря несколько иначе, ее *полной энергией* (общерелятивистский принцип эквивалентности Галилея — Этвёша — Эйнштейна). Мы видим, что гравитационная константа связи возрастает при росте энергии системы — *гравитационное взаимодействие является мигрирующим по своей силе.* Если учесть к тому же, что в весьма малых областях пространства-времени должны иметь место флуктуации энергии-импульса полей, обратно пропорциональные величине области, приходится признать, что «сила» гравитационного взаимодействия неограниченно возрастает при углублении в микромир. Правда, нужно оговориться, что гравитационная константа связи становится достаточно велика лишь в крайне малых (по всей видимости) областях — например, она сравнивается с электромагнитной константой лишь при $r \cong 10^{-32}$ *см* (см. также § 7.4). С другой стороны, в космологических масштабах сила гравитационного взаимодействия вновь возрастает и доминирует над всеми другими известными взаимодействиями ввиду сложения (факт *одинакового знака*) всех масс, тогда как крупные объекты по существу нейтральны в электрическом отношении. Здесь нужно отметить, однако, что энергия самого гравитационного поля, порожденного этими объектами, отрицательна, и гравитация начинает на некотором этапе экранировать сама себя (что отмечено с другой точки зрения Зельдовичем и Новиковым). Последовательно общерелятивистский анализ силы гравитационного взаимодействия должен несомненно дать еще много новых данных по сравнению с приведенным только что анализом с точки зрения ньютоновской теории.

В известном смысле классическая теория поля является *заготовкой* для построения квантовой теории (вторичное квантование), хотя по своему физическому смыслу первична именно квантовая теория, а все классические законы являются ее следствиями. На современном этапе мы вынуждены, однако, по понятным причинам исходить из классической теории и искать адекватную квантовую теорию методом проб и ошибок. Можно надеяться прийти со временем к последовательной теории микроявлений, которая не только правильно предсказывала бы квантовые эффекты, но и пользовалась независимым от макрофизики языком, объясняя в соответствующем пределе природу и происхождение макропонятий (включая, вероятно, и понятия пространства-времени).

Очевидно, что классификация взаимодействий тесно связана с классификацией физических полей и, далее,— элементарных частиц, квантов этих полей. Важную роль при этом играет тот факт, что существует два резко различающихся типа полей: поля с целым и поля с полуцелым спином соответствующих им квантов (можно сказать, бозе-поля и ферми-поля). Очевидно, что виртуальный квант бозе-поля может индивидуально («в одиночку») осуществлять перенос взаимодействия, тогда как для аналогичного акта необходимо четное число квантов ферми-полей. Мы предполагаем, что природа взаимодействующих таким образом частиц остается без изменения. С другой стороны, уравнения полей целого спина могут быть неоднородными (содержать источники), тогда как уравнения ферми-полей всегда однородны (обсуждение см.: Мицкевич, 1965е, стр. 217—218). Поля полуцелого спина можно назвать *полями частиц*, так как именно их кванты составляют окружающее нас вещество; с другой стороны, бозе-поля можно охарактеризовать как *поля квантов взаимодействия*. Это может быть также связано с возможностью изучения полей квантов взаимодействия в рамках компенсационной процедуры; в классической теории они характеризуются *напряженностью*, определяемой по движению квантов полей частиц (динамика), а в квантовой области этому соответствует наличие поперечных и продольных квантов у бозе-полей (не считая проблематичного скалярного или псевдоскалярного). Гравитацию следует отнести к числу полей квантов взаимодействия.

Каждое поле обладает своей спецификой (наряду с общими для всех полей свойствами). Для гравитационного поля специфична его универсальность — его источником являются энергия и импульс, присущие всем материальным объектам (отсюда нелинейность гравитационного поля). Это отражает тесную связь гравитации с другой всеобщей стороной мира — его геометрией (конкретнее — с метрикой пространства-времени). Поэтому, прежде чем переходить к физическим проблемам гравитации, остановимся на некоторых основах римановой геометрии.

В римановом пространстве V_4 может быть выбрана система координат x^μ (греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3). Переход к другой системе координат x'^μ осуществляется заданием соотношений

$$x'^\mu = f^\mu(x) \equiv x'^\mu(x), \tag{1.4}$$

где функции f^μ считаются достаточное число раз дифференцируемыми. Кроме того, преобразованию (1.4) должно отвечать обратное преобразование, для чего необходимо, чтобы якобиан преобразования (1.4) был отличен от нуля. Тогда

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \tag{1.5}$$

где δ_γ^α — символ Кронекера:

$$\delta_\mu^\nu \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \mu = \nu, \\ 0 & \text{при} \quad \mu \neq \nu. \end{cases} \tag{1.6}$$

Скаляр (или инвариант) есть величина, не изменяющаяся при преобразовании координат (в фиксированной точке):

$$\varphi'(x') \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \varphi(x). \tag{1.7}$$

Ковариантный вектор A_μ и контравариантный вектор A^μ суть четверки компонент, подчиняющихся соответственно законам преобразования

$$A_\mu'(x') \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} A_\alpha(x) \tag{1.8}$$

и

$$A'^\mu(x') \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha(x). \tag{1.9}$$

Обобщением их служит *тензор* ранга $r = r_1 + r_2$, r_1 раз ковариантный и r_2 раз контравариантный (математики чаще вместо слова «ранг» употребляют слово «валентность», обладающее некоторыми преимуществами) : это — совокупность 4^r компонент, преобразующихся как

$$T'^{\alpha_1 \dots \alpha_{r_2}}_{\beta_1 \dots \beta_{r_1}}(x') = \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_{r_1}}}{\partial x'^{\beta_{r_1}}} \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\alpha_{r_2}}}{\partial x^{\nu_{r_2}}} T^{\nu_1 \dots \nu_{r_2}}_{\mu_1 \dots \mu_{r_1}}. \tag{1.10}$$

Тензорная плотность веса w определяется таким же образом, только в законе преобразования справа добавляется в качестве множителя $|J|^{-w}$ (J — якобиан преобразования координат). Если видоизменить закон преобразования (1.10) так, чтобы в правой части присутствовал множитель $\operatorname{sgn} J$ ($\operatorname{sgn} J \stackrel{\mathrm{Def}}{=} J / |J|$), то мы получим закон преобразования *аксиального тензора* соответствующего ранга (иногда говорят: псевдотензора), а наличие обоих указанных множителей одновременно определяет закон преобразования *аксиальной тензорной плотности.* Мы будем обозначать плотности жирными буквами. Скаляр является тензором ранга 0, а вектор — тензором ранга 1. Аксиальный скаляр практически всегда называют псевдоскаляром; однако при его определении может возникнуть неоднозначность, если рассматривать отдельно пространственную и временну́ю инверсии; в связи с этим удобно использовать формализм Зельманова (см. § 8.9).

Сумма соответствующих компонент двух тензоров одинакового ранга и соответствующих вариантностей вновь является компонентой тензора, обладающего характеристиками исходных тензоров.

При перемножении компонент двух тензоров мы вновь получаем тензор, но более высокого ранга, равного общему числу свободных индексов в произведении. Автоматически изменяется и закон преобразования.

Если в каком-либо выражении (тензоре или произведении тензоров) индекс повторяется дважды (один раз как ковариантный, а другой раз — контравариантный), то по этому индексу производится суммирование (по всем значениям, которые может принимать индекс; в случае греческого индекса — от 0 до 3). Это правило называется *правилом Эйнштейна*; мы уже воспользовались им в предыдущих соотношениях. При этом говорят о *свертывании* тензора по данному индексу.

Тензор называется *симметричным*, если

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}, \tag{1.11}$$

и *антисимметричным* (кососимметричным), если

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}. \tag{1.12}$$

Эти свойства не зависят от выбора системы координат (являются *инвариантными*).

Иногда очень удобно совокупность индексов некоторой величины (ковариантных и контравариантных) обозначать с помощью одного *собирательного индекса*, записывая, например, A_B.

При бесконечно малых преобразованиях координат

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu} \tag{1.13}$$

бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование претерпевают и тензоры. Запишем преобразование A_B, соответствующее (1.13), в виде

$$\delta A_B = A_B'(x') - A_B(x) \tag{1.14}$$

и положим

$$\delta A_B = a_B|^{\tau}_{\sigma} \cdot \overset{\sigma}{\xi}_{,\tau}. \tag{1.15}$$

Здесь ξ^{μ} — инфинитезимальный вектор, являющийся функцией x^{μ}, причем обычную частную производную по координатам («градиент») мы будем обозначать с помощью запятой:

$$\overset{\sigma}{\xi}_{,\mu} \overset{\text{Def}}{=} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\mu}}; \tag{1.16}$$

символ «δ» обозначает изменение следующей за ним величины при преобразовании координат (*не вариация!*); под величиной $a_B|^{\tau}_{\sigma}$ (коэффициентом преобразования) мы будем понимать

$$a_B\Big|^{\tau}_{\sigma} = A_C a_B\Big|^{C}\Big|^{\tau}_{\sigma}, \tag{1.17}$$

где по повторяющемуся собирательному индексу C производится суммирование (по всей совокупности обычных индексов, которые включены в собирательный; если в него входят, кроме тензорных индексов, также матричные, то суммирование распространяется и на них). Например, если собирательный индекс B соответствует одному ковариантному и одному контравариантному обычным индексам (A_B — смешанный тензор ранга 2, A^{ν}_{μ}), то

$$a^{\nu}_{\mu}\Big|^{\tau}_{\sigma} = A^{\tau}_{\mu}\,\delta^{\nu}_{\sigma} - A^{\nu}_{\sigma}\,\delta^{\tau}_{\mu} \tag{1.18}$$

$$a^{\nu}_{\mu}\Big|^{\alpha}_{\beta}\Big|^{\tau}_{\sigma} = \delta^{\alpha}_{\mu}\,\delta^{\tau}_{\beta}\,\delta^{\nu}_{\sigma} - \delta^{\tau}_{\mu}\,\delta^{\nu}_{\beta}\,\delta^{\alpha}_{\sigma}. \tag{1.19}$$

Если же A_B — скалярная плотность (вообще без индексов), $A_B = \tilde{\varphi}$, то

$$\mathbf{a}\Big|^{\tau}_{\sigma} = -\tilde{\varphi}\delta^{\tau}_{\sigma}; \qquad a\Big|\Big|^{\tau}_{\sigma} = -\delta^{\tau}_{\sigma}. \tag{1.20}$$

Дифференциалы координат образуют контравариантный вектор; однако понятие квадрата интервала невозможно ввести без помощи специального тензора второго ранга, который называют *метрическим тензором* $g_{\mu\nu}$:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \tag{1.21}$$

Обратный ему тензор определяется условием

$$g_{\mu\nu}\, g^{\lambda\nu} = \delta^{\lambda}_{\mu}, \tag{1.22}$$

откуда видно, что

$$\operatorname{Det} g_{\mu\nu} \overset{\text{Def}}{=} g \neq 0. \tag{1.23}$$

Метрический тензор в римановой геометрии является симметричным. Он служит для определения квадрата любого вектора, а не только dx^μ, а также для поднятия и опускания тензорных индексов, например:

$$A^\alpha g_{\alpha\beta} = A_\beta. \tag{1.24}$$

При этом мы считаем A^α и A_α в (1.24) соответственно контравариантными и ковариантными компонентами одного и того же вектора A. В пределе плоского мира в декартовой системе координат, в соответствии с частной теорией относительности, мы примем [1]:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{array}{cc} \left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{matrix}\right\| & \begin{matrix}0\\1\\2\\3\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 & \;\;1 & \;\;2 & \;\;3\end{matrix} & \end{array} \tag{1.25}$$

Локально с помощью соответствующим образом подобранного преобразования координат метрику всегда можно в любой точке привести к такому виду и в римановом пространстве. Назовем теперь вектор A *временноподобным*, если

$$A_\nu A^\nu > 0, \tag{1.26}$$

пространственноподобным, если

$$A_\nu A^\nu < 0, \tag{1.27}$$

и *изотропным* (иногда говорят: «нулевым», «светоподобным»), если

$$A_\nu A^\nu = 0. \tag{1.28}$$

По ряду соображений часто вводят более элементарные объекты, чем метрика, предназначенные, в частности, для конструирования последней. Это — тетрады (или реперы, четверка векторов, определенная в каждой точке пространства) $g_\mu(\alpha)$:

$$g_\mu(\alpha) g_\nu(\alpha) = g_{\mu\nu}, \tag{1.29}$$

или γ-матрицы в представлении Зоммерфельда:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}I. \tag{1.30}$$

С помощью символа следа («шпура») можно также записать

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma_\mu \gamma_\nu). \tag{1.31}$$

В представлении Зоммерфельда γ-матрицы рассматриваются как компоненты истинного вектора (хотя каждая компонента этого вектора, в свою очередь, является матрицей!). Зоммерфельд (1956) предложил такой подход к матрицам Дирака в частной теории относительности, но он без труда обобщается на общую теорию и риманово пространство. Как тетрадный, так и матричный подходы к гравитационному (метрическому) полю мы подробнее рассмотрим в разделе 8, добавив к ним также обсуждение кватернионов.

Важную роль в тензорном анализе играет также символ Леви-Чивиты $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$, антисимметричный по всем индексам (число индексов совпадает с размерностью пространства), причем $\varepsilon_{0123} = +1$. Ясно, что

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = 4! = 24. \tag{1.32}$$

---

[1] Это условие определяет лишь сигнатуру метрики.

Символ Леви-Чивиты используется для образования детерминанта

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\operatorname{Det}\|a_{\sigma\tau}\| \overset{\mathrm{Def}}{=} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}a_{\alpha\mu}a_{\gamma\lambda}a_{\delta\rho} \tag{1.33}$$

и алгебраического дополнения

$$\operatorname{Adj} a_{\sigma\tau} \overset{\mathrm{Def}}{=} \frac{\partial}{\partial a_{\sigma\tau}}\operatorname{Det}\|a_{\alpha\beta}\| = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\sigma\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\tau\mu\nu\lambda}a_{\alpha\mu}a_{\beta\nu}a_{\gamma\lambda}. \tag{1.34}$$

Этот символ является не тензором, но может быть интерпретирован двояко: либо как плотность аксиального контравариантного тензора веса $(+1)$, либо как плотность аксиального ковариантного тензора веса (-1), причем оба случая не противоречат друг другу и реализуются одновременно [1]. Следует отметить, что большинство авторов не указывают свойства этой величины при инверсиях. Итак, если обозначить

$$E_{\mu\nu\lambda\rho} = \sqrt{-g}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}, \tag{1.35}$$

то получится аксиальный тензор, преобразующийся по закону

$$E'_{\alpha\beta\gamma\delta}(x') = \operatorname{sgn} J\,\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\delta}}E_{\mu\nu\lambda\rho}(x). \tag{1.36}$$

В свою очередь, поднятие индексов в (1.35) дает

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{g}E_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{1.37}$$

Очень важно, что произведение двух символов Леви-Чивиты (без суммирования по индексам) можно представить в виде комбинации символов Кронекера (1.6). Действительно, ввиду общего определения символов Леви-Чивиты,

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\varepsilon_{\sigma\tau\omega\varepsilon} = \begin{Bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{1.38}$$

и поэтому мы можем записать

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\varepsilon_{\sigma\tau\omega\varepsilon} = -\,E_{\mu\nu\lambda\rho}E^{\sigma\tau\omega\varepsilon} = \begin{vmatrix} \delta^{\sigma}_{\mu} & \delta^{\tau}_{\mu} & \delta^{\omega}_{\mu} & \delta^{\varepsilon}_{\mu} \\ \delta^{\sigma}_{\nu} & \delta^{\tau}_{\nu} & \delta^{\omega}_{\nu} & \delta^{\varepsilon}_{\nu} \\ \delta^{\sigma}_{\lambda} & \delta^{\tau}_{\lambda} & \delta^{\omega}_{\lambda} & \delta^{\varepsilon}_{\lambda} \\ \delta^{\sigma}_{\rho} & \delta^{\tau}_{\rho} & \delta^{\omega}_{\rho} & \delta^{\varepsilon}_{\rho} \end{vmatrix} \tag{1.39}$$

где переход к аксиальному тензору очевиден. Если обычным образом (высшая алгебра) раскрыть последний детерминант, то легко получить следующую полезную формулу:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\varepsilon_{\sigma\tau\omega\varepsilon} = {} & \delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\tau}_{\nu}\delta^{\omega}_{\lambda}\delta^{\varepsilon}_{\rho} - \delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\tau}_{\nu}\delta^{\varepsilon}_{\lambda}\delta^{\omega}_{\rho} + \delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\varepsilon}_{\nu}\delta^{\tau}_{\lambda}\delta^{\omega}_{\rho} - \delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\varepsilon}_{\nu}\delta^{\omega}_{\lambda}\delta^{\tau}_{\rho} + \delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\omega}_{\nu}\delta^{\varepsilon}_{\lambda}\delta^{\tau}_{\rho} - \\ & - \delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\omega}_{\nu}\delta^{\tau}_{\lambda}\delta^{\varepsilon}_{\rho} + \delta^{\tau}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\varepsilon}_{\lambda}\delta^{\omega}_{\rho} - \delta^{\tau}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\omega}_{\lambda}\delta^{\varepsilon}_{\rho} + \delta^{\tau}_{\mu}\delta^{\omega}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\lambda}\delta^{\varepsilon}_{\rho} - \delta^{\tau}_{\mu}\delta^{\omega}_{\nu}\delta^{\varepsilon}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\rho} + \\ & + \delta^{\tau}_{\mu}\delta^{\varepsilon}_{\nu}\delta^{\omega}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\rho} - \delta^{\tau}_{\mu}\delta^{\varepsilon}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\lambda}\delta^{\omega}_{\rho} + \delta^{\omega}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\tau}_{\lambda}\delta^{\varepsilon}_{\rho} - \delta^{\omega}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\varepsilon}_{\lambda}\delta^{\tau}_{\rho} + \delta^{\omega}_{\mu}\delta^{\varepsilon}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\lambda}\delta^{\tau}_{\rho} - \\ & - \delta^{\omega}_{\mu}\delta^{\varepsilon}_{\nu}\delta^{\tau}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\rho} + \delta^{\omega}_{\mu}\delta^{\tau}_{\nu}\delta^{\varepsilon}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\rho} - \delta^{\omega}_{\mu}\delta^{\tau}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\lambda}\delta^{\varepsilon}_{\rho} + \delta^{\varepsilon}_{\mu}\delta^{\tau}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\lambda}\delta^{\omega}_{\rho} - \delta^{\varepsilon}_{\mu}\delta^{\tau}_{\nu}\delta^{\omega}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\rho} + \\ & + \delta^{\varepsilon}_{\mu}\delta^{\omega}_{\nu}\delta^{\tau}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\rho} - \delta^{\varepsilon}_{\mu}\delta^{\omega}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\lambda}\delta^{\tau}_{\rho} + \delta^{\varepsilon}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\omega}_{\lambda}\delta^{\tau}_{\rho} - \delta^{\varepsilon}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\tau}_{\lambda}\delta^{\omega}_{\rho}.\end{aligned} \tag{1.40}$$

---

[1] Плотность тензора отличается от собственно тензора наличием в законе преобразования дополнительного множителя $|J|^{-w}$, где J — якобиан преобразования, а w — вес этой плотности (см. выше).

Ее последовательное свертывание дает

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\varepsilon_{\sigma\tau\omega\rho} = \delta^\sigma_\mu\delta^\tau_\nu\delta^\omega_\lambda - \delta^\sigma_\mu\delta^\omega_\nu\delta^\tau_\lambda + \delta^\omega_\mu\delta^\sigma_\nu\delta^\tau_\lambda - \delta^\omega_\mu\delta^\tau_\nu\delta^\sigma_\lambda + \delta^\tau_\mu\delta^\omega_\nu\delta^\sigma_\lambda - \delta^\tau_\mu\delta^\sigma_\nu\delta^\omega_\lambda; \quad (1.41)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\varepsilon_{\sigma\tau\lambda\rho} = 2\,(\delta^\sigma_\mu\delta^\tau_\nu - \delta^\tau_\mu\delta^\sigma_\nu); \quad (1.42)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\varepsilon_{\sigma\nu\lambda\rho} = 3!\,\delta^\sigma_\mu \quad (1.43)$$

и, наконец, (1.32).

Перейдем теперь от тензорной алгебры к собственно анализу. Отметим, что частная производная вектора является уже нетензорной величиной:

$$(A_{\mu,\,\nu})' = \frac{\partial}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}A_\alpha(x)\right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}A_{\alpha,\,\beta} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu\,\partial x'^\nu}A_\alpha. \quad (1.44)$$

Устранить последний член, вызывающий отклонение от тензорного закона преобразования, можно, введя *связность* — трехиндексный объект [1], преобразующийся по закону

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}(x') \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(x) + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu\partial x'^\nu}. \quad (1.45)$$

Тогда конструкция

$$A_{\mu;\,\nu} \stackrel{\mathrm{Def}}{=} A_{\mu,\,\nu} - A_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \quad (1.46)$$

является истинным тензором и называется *ковариантной производной* вектора A_μ. Часто используется обозначение

$$A_\mu{}^{;\lambda} = A_{\mu;\,\nu}g^{\nu\lambda}. \quad (1.47)$$

С помощью ковариантной производной естественно определить *абсолютный дифференциал:*

$$DA_\mu \stackrel{\mathrm{Def}}{=} A_{\mu;\,\nu}dx^\nu. \quad (1.48)$$

Нетрудно показать, что закон преобразования связности (1.45) справедлив для *символа Кристоффеля* — выражения, построенного из первых производных метрического тензора:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \frac{1}{2}g^{\lambda\varepsilon}(g_{\mu\varepsilon,\,\nu} + g_{\varepsilon\nu,\,\mu} - g_{\mu\nu,\,\varepsilon}). \quad (1.49)$$

Ковариантное дифференцирование с использованием символа Кристоффеля в качестве связности можно назвать ковариантным дифференцированием относительно метрического тензора (g-дифференцированием).

Операцию ковариантного дифференцирования можно ввести для любого тензора, тензорной плотности и аксиального тензора; эта операция приводит к новой величине того же типа, но имеющей на единицу больший ранг (добавляется один ковариантный индекс). Самая общая запись определения ковариантной производной для всех указанных величин имеет вид

$$A_{B;\nu} \stackrel{\mathrm{Def}}{=} a_B|_\lambda{}^\mu\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + A_{B,\nu}; \quad (1.50)$$

абсолютный дифференциал при этом равен

$$DA_B \stackrel{\mathrm{Def}}{=} A_{B;\nu}dx^\nu \quad (1.51)$$

[1] Под *геометрическим объектом* понимается величина, компоненты которой в новой системе координат выражаются через линейные комбинации ее компонент в старой системе, причем коэффициентами служат производные *различных порядков* от старых координат по новым, и наоборот. Эти линейные комбинации могут быть как однородными, так и неоднородными. Простейший пример объекта первого типа — обычный тензор, а объекта второго типа — коэффициент связности $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. К первому же типу относятся и величины, преобразующиеся по законам (2.5.10), (2.5.11) и (2.5.13).

(использованы обозначения, характерные для A_B). Отсюда следует, например, что метрический тензор g-ковариантно постоянен:

$$g_{\mu\nu;\lambda} \equiv 0; \qquad g^{\mu\nu}_{;\lambda} \equiv 0, \tag{1.52}$$

как и его детерминант. Интересно, что

$$\mathbf{A}^{\mu}_{;\mu} \equiv \mathbf{A}^{\mu}_{,\mu} \tag{1.53}$$

и

$$\mathbf{F}^{\mu\nu}_{;\nu} \equiv \mathbf{F}^{\mu\nu}_{,\nu}, \tag{1.54}$$

где $\mathbf{A}^{\mu}$ — векторная плотность, а $\mathbf{F}^{\mu\nu}$ — плотность *антисимметричного тензора* веса $+1$.

В противоположность тензору 2-го ранга ($g_{\mu\nu}$), вектор не может быть ковариантно постоянным, если только пространство-время не является плоским [это следует из соотношения (1.74)]. Однако если в пространстве определить каким-либо способом (например, алгебраически, а также с помощью дифференциальных уравнений, в том числе даже неголономно) поле *направлений*, то относительно этих направлений может существовать и ковариантно постоянный вектор (как и вообще ковариантно постоянный тензор любого ранга). Например, можно определить поле 4-мерных скоростей, ковариантно постоянное относительно своих же собственных направлений. Математически это утверждение записывается так: берется ковариантная производная 4-мерной скорости dx^{μ} / ds и строится ее проекция (скалярное произведение) на направление этой же скорости в той же точке. Такая проекция полагается равной нулю. Так как поле направлений определяется здесь условием ковариантного постоянства относительно самого себя, то это определение, конечно, неголономно и соответствует системе четырех уравнений

$$\frac{dx^{\nu}}{ds}\left(\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)_{;\nu} = 0, \tag{1.55}$$

или, что то же самое,

$$\frac{D}{ds}\left(\frac{dx^{\mu}}{ds}\right) = 0. \tag{1.56}$$

Огибающие этих направлений называются *геодезическими*, а уравнение (1.56), которое чаще расшифровывается подробнее как

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} = 0, \tag{1.57}$$

называется *уравнением геодезической*. Оно обобщает уравнение прямой, переходя в него, когда пространство становится плоским (нам привычна запись прямой в декартовых координатах). Умножая уравнение (1.56) на $g_{\mu\nu}dx^{\nu} / ds$ и пользуясь постоянством этого множителя относительно поля геодезических скоростей, получаем

$$\frac{D}{ds}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}\right) = 0, \tag{1.58}$$

т. е. заключение о *постоянстве* $g_{\mu\nu}(dx^{\mu} / ds) \cdot (dx^{\nu} / ds)$ *вдоль геодезической*. Строго говоря, мы не предполагали здесь, что канонический параметр s совпадает с интервалом, определяемым (1.21); но если этот интервал отличен от нуля, то s можно отождествить с ним, как это обычно и делается.

С понятием геодезической в римановой геометрии связаны многие пути вывода тензорных соотношений. Мы укажем в связи с этим на *локально геодезические системы координат*, в которых *в данной точке* (обычно в начале координат) обращаются в нуль все компоненты $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ (или, что то же, все $g_{\mu\nu,\,\alpha}$). Действительно, взяв преобразование координат

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} - x_0{}^{\alpha} + \frac{1}{2}(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})_0 (x^{\mu} - x_0{}^{\mu})(x^{\nu} - x_0{}^{\nu}), \qquad (1.59)$$

где помеченные значком «нуль» величины относятся к выбранной нами в качестве начала новой системы координат точке, мы приходим на основании закона (1.45) к равенствам

$$(\Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu})_0 = 0, \qquad (1.60)$$

что и требовалось получить. В других точках символ Кристоффеля, конечно, не равен нулю, и вторые производные компонент метрического тензора в локально геодезической системе, вообще говоря, не исчезают. Такие координаты существенно упрощают многие вычисления, так как для доказательства универсального выполнения какого-либо тензорного равенства достаточно показать, что оно выполняется в какой-либо специально выбранной системе координат (важно, чтобы доказываемое равенство было заведомо *тензорным*). Заметим, что обратить в нуль все компоненты $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ можно не только в любой наперед заданной точке, но и вдоль любой несамопересекающейся *линии*. Однако для того, чтобы $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$ сразу во всем мире, необходимо, чтобы мир был *плоским*.

В рамках одной и той же локально геодезической системы координат сохраняется еще некоторая свобода преобразований, и особенно близкими к декартовым координатам плоского мира здесь являются так называемые *нормальные системы координат*.

Задавая в пространстве-времени поле направлений (конгруэнцию кривых), можно найти угол, который составляет с этим полем в любой данной точке какой-либо вектор. Перейдя в другую точку, лежащую на той же кривой, можно в этой новой точке взять новый вектор, образующий тот же угол с этим полем, но уже в новой точке, и обладающий той же длиной (модулем). Такая операция называется *параллельным переносом* вектора относительно данного поля направлений. Если это поле предполагается голономным (задается аналитически), то, конечно, параллельный перенос не обязательно производить вдоль кривой, являющейся огибающей направлений; тогда параллельный перенос не зависит от пути, по которому он производился (его можно совершать от точки к точке, и в голономном поле вектор не «забывает» своего происхождения). Риманова геометрия не предполагает существования такого поля, и в ней нет, вообще говоря, такого *абсолютного* (*далекого*) *параллелизма*. Это поле, конечно, может быть в нее внесено, но его природа чужда геометрии Римана, и новое поле приводит к новым закономерностям (см., например, двуметрический формализм, § 8.5).

В римановой геометрии поле направлений задается *неголономно*, а именно уравнением геодезической (1.56). Таким образом, оно тесно связано здесь с метрикой (служащей для ковариантного дифференцирования через посредство $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$) и является глубоко геометрическим по своей природе. Мы определим параллельный перенос вектора A_{μ} из точки $x(\lambda)$ в точку $x(\lambda + \delta\lambda)$ (обе точки лежат на одной геодезической) как переход от $A_{\mu}(x(\lambda))$ к $A_{\mu}(x(\lambda + \delta\lambda)) + \delta A_{\mu}$. Требуется определить δA_{μ}. Это нетрудно сделать, требуя, чтобы не изменялся угол между вектором A_{μ} и касательной к геодезической до и после переноса в соответствующих точках. Так как точки предполагаются бесконечно близкими, то величины, начиная со второго порядка малости, следует отбросить. Если в качестве λ взять интервал и предположить, что скалярные величины (например, модуль вектора) при переносе не должны изменяться, то требование постоянства угла совпадет с требованием постоянства скалярного произведения:

$$A_\mu(x(\lambda))\frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}=[A_\mu(x(\lambda+\delta\lambda))+\delta A_\mu]\frac{dx^\mu(\lambda+\delta\lambda)}{d\lambda}, \tag{1.61}$$

откуда [учитывая уравнение геодезической (1.57)] получаем

$$\delta A_\mu=-DA_\mu, \tag{1.62}$$

если считать, что перенос может быть осуществлен вдоль *любой* геодезической, проходящей через данную точку.

Аналогично можно определить параллельный перенос любой величины A_B, для которой определен абсолютный дифференциал.

Выясним теперь, как различаются результаты переноса по двум путям PQR и PSR (рис. 1). Пусть соответствующий замкнутый контур будет бесконечно малым, а его стороны образованы линиями, принадлежащими к двум семействам геодезических, описываемым с помощью параметров u и v. Тогда из (1.62) следует

$$\begin{aligned}(A_\mu)_{PQ}&=A_\mu(x(u+\Delta u, v))+\delta A_\mu=\\&=(A_\mu)_P+(d_uA_\mu-D_uA_\mu)_P,\end{aligned} \tag{1.63}$$

где

$$d_u=\Delta u\frac{\partial x^\alpha}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{1.64}$$

и

$$D_u=\Delta u\frac{\partial x^\alpha}{\partial u}(\ldots)_{;\alpha}. \tag{1.65}$$

Окончательный перенос в точку R по пути PQR дает

$$(A_\mu)_{PQR}=(A_\mu)_P+(d_uA_\mu-D_uA_\mu)_P+(d_vA_\mu-D_vA_\mu)_Q. \tag{1.66}$$

Это выражение требуется расшифровать. Заметим, что

$$\begin{aligned}(d_vA_\mu-D_vA_\mu)_Q&=[\Gamma^\nu_{\mu\sigma}(A_\nu)_{PQ}\,d_vx^\sigma]_Q=\\&=\{[\Gamma^\nu_{\mu\sigma}d_vx^\sigma+d_u(\Gamma^\nu_{\mu\sigma}d_vx^\sigma)][A_\nu+(d_u-D_u)A_\nu]\}_P;\end{aligned} \tag{1.67}$$

нетрудно видеть, что правая часть этого выражения равна

$$[(d_v-D_v+d_ud_v-d_uD_v-d_vD_u+D_vD_u)A_\mu]_P. \tag{1.68}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}(A_\mu)_{PQR}=[(1&+d_u-D_u+d_v-D_v+d_ud_v-d_vD_u-\\&-d_uD_v+D_vD_u)A_\mu]_P.\end{aligned} \tag{1.69}$$

Аналогично можно получить и вектор, перенесенный по другому пути:

$$\begin{aligned}(A_\mu)_{PSR}=[(1&+d_v-D_v+d_u-D_u+d_ud_v-\\&-d_uD_v-d_vD_u+D_uD_v)A_\mu]_P.\end{aligned} \tag{1.70}$$

Сравнивая эти выражения, получаем

$$(A_\mu)_{PQR}-(A_\mu)_{PSR}=(D_vD_u-D_uD_v)A_\mu, \tag{1.71}$$

или

$$(A_\mu)_{PQR}-(A_\mu)_{PSR}=(A_{\mu;\nu;\lambda}-A_{\mu;\lambda;\nu})\frac{\partial x^\nu}{\partial u}\frac{\partial x^\lambda}{\partial v}\Delta u\Delta v. \tag{1.72}$$

Точно такое же выражение можно получить и для A_B вообще. Здесь учтено соотношение

$$D_vd_ux^\nu=D_ud_vx^\nu, \tag{1.73}$$

очевидное из определения абсолютного дифференциала (1.65).

Непосредственное вычисление дает

$$A_{\mu;\,\nu;\,\lambda} - A_{\mu;\,\lambda;\,\nu} = A_\alpha R^{\alpha}_{\cdot\mu\nu\lambda}, \tag{1.74}$$

где введено обозначение

$$R_{\cdot\mu\nu\lambda} \overset{\mathrm{Def}}{=} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}. \tag{1.75}$$

Так как вектор A_μ — *произвольный* и слева в (1.74) стоит заведомо тензор, то величина $R^{\alpha}_{\cdot\mu\nu\lambda}$ является истинным тензором 4-го ранга (один раз

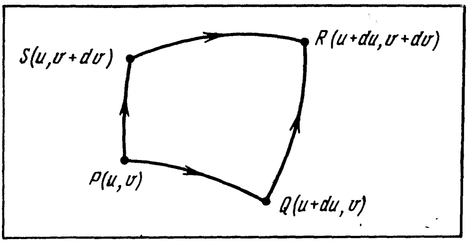


Рис. 1. Параллельный перенос вектора по двум разным путям

контравариантным и три раза ковариантным). Этот тензор называется *тензором кривизны Римана — Кристоффеля*. Очевидно, если тензор кривизны $R^{\alpha}_{\cdot\mu\nu\lambda}$ равен нулю, то параллельный перенос не зависит от выбора пути.

В общем случае можно записать

$$A_{B;\,\nu;\,\lambda} - A_{B;\,\lambda;\,\nu} = -a_B\big|^{\beta}_{\alpha} R^{\alpha}_{\cdot\beta\nu\lambda}. \tag{1.76}$$

Опуская один индекс, можно записать

$$R_{\alpha\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\lambda,\,\mu,\,\nu} + g_{\mu\nu,\,\alpha,\,\lambda} - g_{\alpha\nu,\,\mu,\,\lambda} - g_{\mu\lambda,\,\alpha,\,\nu}\right) +$$

$$+ g_{\sigma\tau}\left(\Gamma^{\sigma}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\tau}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\Gamma^{\tau}_{\mu\lambda}\right), \tag{1.77}$$

откуда следуют соотношения

$$R_{\alpha\mu\nu\lambda} = -R_{\mu\alpha\nu\lambda} = -R_{\alpha\mu\lambda\nu}, \tag{1.78}$$

$$R_{\alpha\mu\nu\lambda} = R_{\nu\lambda\alpha\mu} \tag{1.79}$$

и тождества Риччи

$$R_{\alpha\mu\nu\lambda}\varepsilon_{\beta\mu\nu\lambda} = 0, \tag{1.80}$$

характеризующие свойства симметрии тензора Римана — Кристоффеля. В силу этих алгебраических соотношений число ненулевых и независимых компонент этого тензора в 4-мерном мире, вообще говоря, равно 20.

В локально геодезической системе просто доказать, что имеют место также дифференциальные *тождества Бианки*

$$R_{\rho\mu\nu\lambda;\,\sigma} + R_{\rho\mu\lambda\sigma;\,\nu} + R_{\rho\mu\sigma\nu;\,\lambda} = 0, \tag{1.81}$$

которые можно также записать в виде

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\,\lambda}\varepsilon_{\gamma\mu\nu\lambda} = 0 \tag{1.82}$$

[ср. с (1.80)].

Свертывание тензора Римана — Кристоффеля дает тензор кривизны Риччи

$$R^{\alpha}_{.\mu\nu\alpha} \overset{\text{Def}}{=} R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\,\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\,\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \tag{1.83}$$

и скалярную кривизну

$$R^{\alpha}_{\alpha} \overset{\text{Def}}{=} R. \tag{1.84}$$

Свертывание тождеств Бианки дает тождества

$$R^{\rho}_{.\mu\nu\lambda;\,\rho} + R_{\mu\lambda;\,\nu} - R_{\mu\nu;\,\lambda} = 0 \tag{1.85}$$

и

$$G^{\alpha}_{\beta;\,\alpha} = 0, \tag{1.86}$$

где

$$G^{\alpha}_{\beta} \overset{\text{Def}}{=} R^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2}\,\delta^{\alpha}_{\beta}\,R \tag{1.87}$$

носит название *консервативного тензора Эйнштейна.*

Равенство нулю тензора кривизны Римана — Кристоффеля является необходимым и достаточным условием того, чтобы мир был плоским и в нем существовали галилеевы (декартовы) глобальные системы координат. Необходимость этого совершенно очевидна; наглядный же подход к доказательству достаточности состоит в следующем. Если тензор Римана — Кристоффеля равен нулю, то в силу (1.72) и (1.74) параллельный перенос не зависит от выбора пути. Поэтому, взяв в какой-либо точке четверку взаимно ортогональных векторов (тетраду), можно *однозначно* построить с помощью параллельного переноса во всем мире поле тетрад, повсюду ортогональных друг другу и покрывающих сразу все пространство-время. Система координат, образованная этими тетрадами, везде непрерывна ввиду указанной однозначности, и ее следует назвать *голономной.* В этой декартовой системе метрика принимает сразу всюду вид (1.25), в чем и требовалось убедиться. Отражением того факта, что в искривленном мире неоднозначность параллельного переноса препятствует распространению декартовой системы на все пространство, является неголономность в этом случае связанной с тетрадами «системы координат», которая не образует координатной сетки над пространством-временем. Локально мы всегда можем опираться на ортогональный репер (тетрады), и это соответствует возможности выбора локально геодезических систем. Так как подобные системы можно распространять вдоль линий, то тетрадные системы координат успешно работают на бесконечно узких полосках пространства-времени. Однако лишь только мы попытаемся «сшить» эти полоски в искривленном мире, как они сразу же «разъезжаются», так как их принципиально невозможно согласовать друг с другом при отличном от нуля тензоре Римана — Кристоффеля.

Тот факт, что с помощью γ-матриц можно и в искривленном мире построить параллельный перенос, не зависящий от пути, не приводит к возможности распространения на этот мир декартовых координат, так как они связаны прежде всего с приданием метрическому тензору формы (1.25). (В связи с этим переносом см. § 2.3.)

Мы будем обычно пользоваться естественной системой единиц ($c=1$, $\hbar = 1$), лишь при необходимости переходя к системе CGS.

2. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

2.1. Аналогия между классической механикой и теорией поля

Для нашей интуиции ближе всего представления механики, т. е. представления о движении частиц; полевые же и квантовые концепции мы формулируем с помощью механических понятий: координат, скоростей, импульсов, масс и других величин, почерпнутых впервые из механики. В то же время сама классическая механика является следствием полевых и квантовых закономерностей и поэтому сохраняет в себе ряд принципиальных черт более элементарных (хотя, казалось бы, и более сложных) теорий. Именно поэтому следует обратить внимание на основные черты механики, определяющие всю ее структуру; мы напомним их здесь читателю [1]. Вместе с тем нельзя думать, что механические понятия могут быть без всякого изменения перенесены в теорию поля (в квантовую теорию) — читатель вскоре убедится в этом.

Основной характеристикой физических систем в классической механике являются обобщенные координаты, представляющие собой функции независимого параметра — времени:

$$q_i = q_i(t). \tag{2.1.1}$$

Производные этих координат по времени представляют собой компоненты скоростей

$$\dot{q}_i, \tag{2.1.2}$$

от которых, как и от самих координат, зависит *лагранжиан* механической системы:

$$L = L(q, \dot{q}). \tag{2.1.3}$$

Из вариационного принципа для интеграла действия

$$J = \int L\, dt \tag{2.1.4}$$

следуют уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{2.1.5}$$

— уравнения движения механической системы. Координаты (2.1.1) носят также название *канонических координат*; сопряженными им величинами (через лагранжиан) являются *канонические импульсы*

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{2.1.6}$$

Из рассмотренных величин конструируется *гамильтониан* механической системы

$$H = p_i\dot{q}_i - L \tag{2.1.7}$$

(здесь подразумевается суммирование по всем значениям, которые может

---

[1] Среди стандартных изложений теоретической механики с точки зрения современной теоретической физики следует указать книги Беленького (1964), Голдстейна (1958), Ландау и Лифшица (1958) и Лича (1961).

принимать индекс i). В канонической (гамильтоновой) формулировке механики уравнения движения (уравнения Гамильтона) имеют вид

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (2.1.8)$$

и

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \qquad (2.1.9)$$

Мы вернемся к канонической формулировке механики в § 2.6, когда будем обсуждать гамильтонов формализм в теории поля.

Представления о поле, разработанные в прошлом веке Фарадеем и Максвеллом, базировались на введении некоторой новой непрерывной среды. Если взять, например, теорию упругости, то можно представить упругое тело как предельный случай множества материальных точек, упруго связанных друг с другом, когда число этих точек неограниченно возрастает (реальная картина, между прочим, соответствует *конечному числу* таких «точек» — узлов кристаллической решетки — в единице объема). Обратимся, однако, к идеализированному предельному случаю. Теперь пространственные координаты сами по себе ничего не говорят о состоянии системы, которое описывается уже распределением поля *тензора деформаций* (краткое и изящное изложение такого перехода дает Лич, 1961). Тензор деформаций является функцией как времени, так и всех трех пространственных координат, взятых в качестве независимых переменных. Итак, в теории упругости роль канонических координат играют компоненты тензора деформаций, а роль прежнего времени — все четыре пространственно-временны́е координаты нашего мира.

В теории поля картина аналогична механике сплошных сред. Роль канонических координат играют компоненты потенциалов всех полей

$$A_B = A_B(x). \qquad (2.1.10)$$

Здесь B — собирательный индекс, нумерующий как тензорные, так, возможно, и матричные компоненты потенциалов; при повторении этого индекса (обозначаемого также как C, D) подразумевается суммирование по всем компонентам потенциалов всех полей, если специально не оговорено противное. Аргументом A_B служат все четыре пространственно-временны́е координаты. Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а латинские — лишь пространственные значения (1, 2, 3).

Число компонент канонических скоростей в теории поля

$$A_{B,\alpha} \qquad (2.1.11)$$

в четыре раза превышает число компонент канонических координат A_B в отличие от случая механики; указанные величины служат для построения *лагранжиана* (точнее: плотности функции Лагранжа) системы полей

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(A_B;\ A_{B,\alpha}). \qquad (2.1.12)$$

Из вариационного принципа для интеграла действия

$$J = \int \mathbf{L}(dx) \qquad (2.1.13)$$

следуют[1] уравнения Эйлера — Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_B} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\mu}} = 0 \qquad (2.1.14)$$

— уравнения полей.

[1] Некоторые особенности варьирования интеграла действия в общей теории относительности обсуждаются в следующем параграфе.

Аналогом *канонического импульса* (2.1.6) в теории поля будет выражение

$$\Pi^{B\alpha} \overset{\text{Def}}{=} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\alpha}}, \tag{2.1.15}$$

где вновь число компонент превышает число компонент канонических координат A_B (хотя не обязательно в четыре раза, как в случае скоростей, ввиду возможных специальных свойств симметрии канонических импульсов!). При этом в механике уравнения Лагранжа можно записать в форме второго закона Ньютона

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}; \tag{2.1.16}$$

аналогичным же образом можно представить и уравнения поля:

$$\Pi^{B\alpha}_{,\alpha} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_B}. \tag{2.1.17}$$

Анализ существующей параллели между механикой и теорией поля показывает, что производная по времени переносится в теорию поля в форме «градиента»; однако если она берется от величины, в которую уже вошла при ее определении «производная по времени» [импульс (2.1.6); в теории поля речь идет о дополнительном греческом индексе], то может появиться суммирование по обоим 4-мерным индексам, как, например, в уравнениях (2.1.17). Таким образом, перед нами имеется альтернатива и в определении аналога *гамильтониана* (плотности функции Гамильтона). С одной стороны, если исходить из требования, чтобы гамильтониан при определенных условиях описывал энергию, то его проще всего отождествить с квазитензором энергии-импульса (см. § 2.4). Для этого мы положим *без суммирования* по греческим индексам [см. (Мицкевич, 1962б)]

$$p_i \dot{q}_i \longleftrightarrow \Pi^{B\alpha} A_{B,\beta} \tag{2.1.18}$$

и в качестве аналога H (2.1.7) сконструируем

$$\mathbf{t}_\beta{}^\alpha \overset{\text{Def}}{=} \Pi^{B\alpha} A_{B,\beta} - \mathbf{L}\delta_\beta{}^\alpha. \tag{2.1.19}$$

Действительно, эта величина во многих отношениях аналогична H, что будет показано в § 2.6. Другой подход к гамильтоновой формулировке теории поля в релятивистски ковариантной форме был предложен позднее (Брежнев, 1964), и использованный в нем «гамильтониан»

$$\mathbf{H} = \Pi^{B\alpha} A_{B,\alpha} - \mathbf{L} \tag{2.1.20}$$

не имеет непосредственного смысла плотности энергии.

В отличие от механики, теория поля не запрещает включения в лагранжиан высших производных потенциалов — обычно вторых производных, причем входящих, как правило, так, чтобы уравнения поля были не выше второго порядка. Именно это характерно для гравитационного поля в его обычном представлении. Поэтому полезно рассмотреть случай зависимости лагранжиана от производных потенциалов любых порядков (Кнапец, 1959). В этом случае канонические импульсы следовало бы записать в виде

$$\Pi^{B\alpha} \overset{\text{Def}}{=} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\alpha,\beta}} \overset{\text{Def}}{=} \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_{B,\alpha}}, \tag{2.1.21}$$

а уравнения поля — в виде

$$\Pi^{B\alpha}_{,\alpha} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial A_B}. \qquad (2.1.22)$$

2.2. Принцип экстремума действия в общей теории относительности

Запись интеграла действия (2.1.13) предполагает, что мы «знаем» конкретную зависимость подынтегральной функции от x^μ, т. е. что заданы: 1) вид лагранжиана как функции канонических координат и скоростей и 2) зависимость канонических координат от x^μ. Так как вариационный принцип предшествует выводу уравнений поля, а тем более — решению этих уравнений (нахождению интересующей нас зависимости A_B от x^μ), то этот интеграл имеет пока символический характер, а его варьирование предполагает сравнение различных задаваемых произвольно наборов функций A_B. При этом постулируется, что тот набор канонических координат, которому соответствует экстремальное значение функционала J, и описывает реальное распределение и эволюцию поля. Таких позиций придерживается классическая (неквантовая) теория поля; в квантовой же теории понятие действия оказывается еще более широко применимым. Во-первых, там фундаментальную роль играет квант действия — постоянная Планка; во-вторых, и это главное, в квантовой области (в микромире) реализуются не только те распределения полей в пространстве и те их эволюции во времени, которые приводят к экстремуму действия, но, вообще говоря, и все прочие. Наиболее вероятны те ситуации, которые отвечают экстремальному действию; вероятность же остальных резко убывает при удалении от экстремума (Фейнман, 1955; Рязанов, 1957, 1958). В этом можно усматривать природу вероятностных закономерностей в микромире; теория должна приобрести бо́льшую стройность и замкнутость в будущем, когда удастся найти адекватный язык для описания явлений микромира вместо языка классической физики, используемого там в настоящее время с некоторыми оговорками и модификациями (введение волновых функций, соотношения неопределенностей и пр.).

Итак, требуется варьировать интеграл действия, приравнять его вариацию нулю и на этом пути получить уравнения поля (2.1.14) или какое-то их обобщение. Напомним, что мы сравниваем при этом *всевозможные* наборы функций A_B, с тем лишь ограничением, что эти функции в отношении непрерывности и дифференцируемости (вместе со своими производными) должны соответствовать требованиям, которые будут в дальнейшем предъявляться к решениям уравнений поля; иначе говоря, варьирование необходимо осуществлять на том классе функций, которым ограничивается в дальнейшем развиваемая теория (сужение класса функций, во всяком случае, недопустимо). Кроме того, как обычно, рассматриваемые величины на границах области интегрирования не варьируются. В механике такое требование весьма прозрачно: там интегрирование проводится по одной переменной (времени), так что берутся фиксированные положения системы в начальный и конечный моменты эволюции и сравниваются всевозможные «пути», соединяющие эти моменты. В теории поля мы интегрируем по 4-мерной области допустим (мы будем делать это часто), что она имеет вид гиперцилиндра, ограниченного гиперплоскостями (в искривленном мире берутся более общие гиперповерхности). Если ситуации на этих двух пространственно-подобных гиперплоскостях можно с полным правом назвать начальной и конечной (так что их фиксация не вызывает сомнений по аналогии с механикой), то распределение поля на временно-подобной боковой гиперповерхности гиперцилиндра нельзя привести в соответствие с какими-либо механическими представлениями, а отнести эту поверхность в «бесконечность», где нет полей, в общем случае тоже невозможно, если мы собираемся включить в рассмотрение космологические проблемы, касающиеся замкнутых моделей Вселенной (где попросту нет бесконечности, что выясняется, впрочем, апостериори, но имеет прямое отношение к выбираемому нами классу функций). Ситуация на боковой поверхности гиперцилиндра — это совокупность в разные моменты времени распределений полей на пространственных границах выбранной нами области (здесь следует заметить, что понятие «момент времени» и «область 3-мерного пространства» в искривленном мире далеко не всегда применимы; это обсуждается в § 8.9). Итак, мы считаем, что граничные условия не подвергаются варьированию. Если бы мы распространили интегрирование на весь 4-мерный мир (замкнутый или бесконечный), то можно было бы, по-видимому, обойтись без обсуждения ситуации на этой «боковой поверхности»; но тогда интеграл действия мог бы принять неопределенное значение, а кроме того, мы утратили бы возможность маневрирования при рассмотрении произвольных 4-мерных областей.

Варьируя

$$A_B(x) \to A_B(x) + \delta_v A_B(x), \tag{2.2.1}$$

мы не изменили ни системы координат, ни точки, от которой зависит A_B. Поэтому операция варьирования переставима с частным дифференцированием:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta_v = \delta_v \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \tag{2.2.2}$$

а также с операцией интегрирования. Поэтому мы прежде всего запишем вариацию лагранжиана, вызванную вариацией потенциалов (2.2.1):

$$\delta_v \mathbf{L}(A_B;\ A_{B,\alpha};\ A_{B,\alpha,\beta}) =$$

$$= \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B}\delta_v A_B + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_{B,\alpha}}\delta_v A_B + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\alpha,\beta}}\delta_v A_{B,\beta}\right). \tag{2.2.3}$$

Здесь вариационная производная

$$\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B} \overset{\text{Def}}{=} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_B} - \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\alpha}}\right)_{,\alpha} + \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\alpha,\beta}}\right)_{,\alpha,\beta}, \tag{2.2.4}$$

в силу установившихся традиций, записана в некотором несоответствии с общим правилом (см. § 8.3); второй же символ вариационной производной обозначает

$$\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_{B,\alpha}} \overset{\text{Def}}{=} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\alpha}} - \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\alpha,\beta}}\right)_{,\beta}. \tag{2.2.5}$$

Интегрируя теперь вариацию лагранжиана (2.2.3) по 4-мерной области и применяя теорему Гаусса, получаем

$$\delta_v J = \int \frac{\partial \mathbf{L}}{\delta A_B}\delta_v A_B (dx) +$$

$$+ \oint \left(\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_{B,\alpha}}\delta_v A_B + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\alpha,\beta}}\delta_v A_{B,\beta}\right) dS_\alpha, \tag{2.2.6}$$

где интеграл по гиперповерхности, окружающей рассматриваемый 4-объем, следует приравнять нулю. (Так как сюда входит вариация канонических скоростей $A_{B,\beta}$, то требование обращения ее в нуль на границах может сказаться на выборе класса рассматриваемых функций, что здесь, впрочем, несущественно.)

Так как интеграл действия является скаляром, то и его вариация (2.2.6) — скаляр (инвариант); а так как область интегрирования была выбрана произвольно, то

$$\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B} \delta_v A_B \text{ — скалярная плотность.} \tag{2.2.7}$$

Если бы теперь вариации не обращались в нуль на границе, то заключение (2.2.7) сохранило бы свою силу; однако сверх этого мы получим

$$\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_{B,\,\alpha}} \delta_v A_B + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\,\alpha,\,\beta}} \delta_v A_{B,\,\beta} = \mathbf{A}^\alpha, \tag{2.2.8}$$

где $\mathbf{A}^\alpha$ — истинная векторная плотность. Отметим, что для последнего заключения совершенно необходимо, чтобы лагранжиан был скалярной плотностью [например, аффинная скалярная плотность, отличающаяся от истинной на дивергенцию и приводящая поэтому к тем же уравнениям поля (2.2.10), не дает настоящей векторной плотности в конструкции (2.2.8), как, например, в случае эйнштейновского неинвариантного лагранжиана гравитации]. Векторную плотность $\mathbf{A}^\alpha$ можно представить в виде суммы двух векторных плотностей, если воспользоваться сокращенным правилом дифференцирования A_B (8.1.9):

$$\mathbf{A}^\alpha = \left[\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_{B,\,\alpha}} \delta_v A_B - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\,\alpha,\,\beta}} \delta_v (a_{B\sigma}{}^{\tau} \Gamma_{\tau\beta}{}^{\sigma}) \right] + \\ + \left[\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\,\alpha,\,\beta}} \delta_v A_{B;\,\beta} \right] \tag{2.2.9}$$

(указанные векторные плотности выделены квадратными скобками). Заметим сразу же, что это правило совершенно бесполезно, когда речь идет о метрическом тензоре как потенциале поля, так как $g_{\mu\nu;\,\alpha} \equiv 0$.

Приравнивая теперь $\delta_v J$ нулю и требуя исчезновения вариаций на границах, мы получаем, вследствие произвольности $\delta_v A_B$ внутри области интегрирования,

$$\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B} = 0 \tag{2.2.10}$$

— уравнения поля, совпадающие с (2.1.14), за исключением последнего члена в (2.2.4), возникшего ввиду зависимости лагранжиана от вторых производных потенциалов. Одновременно мы получаем данные и о трансформационных свойствах этих уравнений; а именно, величина

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B} \tag{2.2.11}$$

преобразуется контравариантным образом по сравнению с потенциалами A_B ввиду свойств (2.2.7), так как $\delta_v A_B$ — произвольный «тензор» (имеется в виду критерий тензорных свойств, § 8.1) [1].

В некоторых случаях удобнее проводить все вычисления (на каждом этапе) в тензорной форме; тогда вместо $\mathbf{L}(A_B;\ A_{B,\,\alpha};\ A_{B,\,\alpha,\,\beta})$ следует взять

[1] «Контравариантным образом» — в смысле «вариантности», противоположной A_B. Так, например, если собирательный индекс «B» сводится просто к одному тензорному (векторному) индексу, то ковариантному вектору A_μ соответствует свойство величины (2.2.11) преобразоваться по закону контравариантного вектора; если же A_B — контравариантный вектор (A^μ), то величина (2.2.11) является ковариантным вектором, и т. д.

$\overline{\mathrm{L}}(A_B;\ A_{B;\,\alpha};\ A_{B;\,\alpha;\,\beta})$ — функцию, отличающуюся от предыдущей лишь перегруппировкой членов, так что

$$\mathrm{L}(A_B;\ A_{B,\,\alpha};\ A_{B,\,\alpha,\,\beta}) = \overline{\mathrm{L}}(A_B;\ A_{B;\,\alpha};\ A_{B;\,\alpha;\,\beta}). \tag{2.2.12}$$

Вообще говоря, мы включаем в число потенциалов (канонических координат) компоненты метрического тензора или другие величины, служащие для свертывания индексов и образования коэффициентов связности при ковариантном дифференцировании. Если бы эти величины не варьировались, то ковариантная производная коммутировала бы с операцией варьирования, и во всех проделанных выкладках было бы достаточно просто заменить запятые перед соответствующим индексом (частное дифференцирование) на точки с запятой (ковариантное дифференцирование), чтобы перейти к явно тензорной записи. Однако метрика является *физическим* полем и определяется из динамических соображений, так что варьировать ее необходимо. Но так как все поля (разные компоненты A_B, при разных значениях собирательного индекса «B») варьируются независимо (как и разные компоненты одного и того же поля!), то, значит, для всех полей, *кроме метрического*, мы вправе произвести такую замену частных производных на ковариантные (поставив при этом черточку над символом лагранжиана):

$$\frac{\partial\overline{\mathrm{L}}}{\partial A_{B'}} - \left(\frac{\partial\overline{\mathrm{L}}}{\partial A_{B';\,\alpha}}\right)_{;\,\alpha} + \left(\frac{\partial\overline{\mathrm{L}}}{\partial A_{B';\,\alpha;\,\beta}}\right)_{;\,\beta;\,\alpha} = 0 \tag{2.2.13}$$

(штрих у индекса «B» означает, что в $A_{B'}$ не входит $g_{\mu\nu}$ или другие метрические конструкции).

К обычному метрическому полю такой подход неприменим, поскольку метрика ковариантно постоянна, и не имеет смысла говорить о «зависимости» лагранжиана от $g_{\mu\nu;\,\alpha}$. Однако существует ряд других подходов к гравитации (тетрадный формализм, матричная формулировка, двуметрический формализм, о которых будет идти речь в разделе 8), когда понятие ковариантной производной от величины, лежащей в основе метрических представлений, имеет смысл. Тогда, считая коэффициенты преобразования $a_B|^{C}|^{\tau}_{\delta}$ постоянными[1] (что заведомо имеет место для всех тензоров и тензорных плотностей), можно записать

$$\delta_v A_{B;\alpha} = (\delta_v A_B)_{,\alpha} + \delta_v A_C\cdot a_B|^C|^{\tau}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\tau\alpha} + A_C a_B|^C|^{\tau}_{\sigma}\,\delta_v\Gamma^{\sigma}_{\tau\alpha} =$$

$$= (\delta_v A_B)_{;\alpha} + A_C\, a_B|^C|^{\tau}_{\sigma}\,\delta_v\Gamma^{\sigma}_{\tau\alpha} \tag{2.2.14}$$

— явное свидетельство некоммутативности варьирования и ковариантного дифференцирования, когда $\delta_v\Gamma^{\sigma}_{\tau\alpha} \neq 0$. Так как коэффициент преобразования $A_{B;\,\alpha}$ равен

$$A_{C;\varepsilon}\, a_{B\alpha}|^{C\varepsilon}|^{\tau}_{\sigma} = A_{C;\alpha}\, a_B|^C|^{\tau}_{\sigma} - A_{B;\sigma}\,\delta^{\tau}_{\alpha}, \tag{2.2.15}$$

или

$$a_{B\alpha}|^{C\varepsilon}|^{\tau}_{\sigma} = \delta^{\varepsilon}_{\alpha}\, a_B|^C|^{\tau}_{\sigma} - \delta^{C}_{B}\,\delta^{\varepsilon}_{\sigma}\,\delta^{\tau}_{\alpha}, \tag{2.2.16}$$

то

$$\delta_v A_{B;\alpha;\beta} = (\delta_v A_B)_{;\alpha;\beta} + (A_C a_B|^C|^{\tau}_{\sigma}\,\delta_v\Gamma^{\sigma}_{\tau\alpha})_{;\beta} + A_{C;\alpha}\, a_B|^C|^{\tau}_{\sigma}\,\delta_v\Gamma^{\sigma}_{\tau\beta} -$$

$$- A_{B;\,\sigma}\,\delta_v\Gamma_{\alpha\beta}. \tag{2.2.17}$$

Заметим, что $\delta_v\Gamma^{\ \ \delta}_{\alpha\beta}$ — истинный тензор, так как закон преобразования

[1] Эти коэффициенты входят в состав $a_B|^{\tau}_{\sigma}$ по правилу $a_B|^{\tau}_{\sigma} = A_C a_B|^C|^{\tau}_{\sigma}$ [ср. (8.1.20) и (2.4.10)].

$\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\Gamma'^{\sigma}_{\alpha\beta}(x') = \Gamma^{\tau}_{\omega\varepsilon}(x)\,\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\tau}}\,\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x'^{\alpha}}\,\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\beta}} + \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}\partial x'^{\beta}}\,\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}}, \tag{2.2.18}$$

а варьирование производится при неизменных (как старых, так и новых в случае преобразования) координатах, так что вариация члена со второй производной старых координат по новым равна нулю, и остается чисто тензорный закон преобразования. Имея в виду, что $\delta_v g_{\mu\nu}$ — также тензор, из определения символов Кристоффеля получаем

$$\delta_v \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}g^{\sigma\lambda} - g_{\alpha\mu}\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\sigma}_{\nu} - g_{\beta\mu}\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\nu}\right)(\delta_v g^{\mu\nu})_{;\lambda}. \tag{2.2.19}$$

Подставив выражения (2.2.14), (2.2.17) и (2.2.19) в обычное разложение для вариации

$$\delta_v \overline{\mathbf{L}} = \frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_B}\,\delta_v A_B + \frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\alpha}}\,\delta_v A_{B;\,\alpha} + \frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\alpha;\,\beta}}\,\delta_v A_{B;\,\alpha;\,\beta} \tag{2.2.20}$$

и произведя простые преобразования, получим

$$\begin{aligned}
\delta_v \overline{\mathbf{L}} = {} & \left[\frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_B} - \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\alpha}}\right)_{;\alpha} + \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\alpha;\,\beta}}\right)_{;\beta;\,\alpha}\right]\delta_v A_B + \\
& + \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\mu}\delta^{\lambda}_{\tau}\delta^{\sigma}_{\nu} + g_{\tau\mu}\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\nu} - g_{\alpha\mu}g_{\tau\nu}g^{\sigma\lambda}\right)\left\{\left[\frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\alpha}} - \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\alpha;\,\beta}}\right)_{;\beta}\right]\times\right. \\
& \left.\times A_C a_B|^C|^{\tau}_{\sigma} + \frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\beta;\,\alpha}}\,A_{C;\,\beta} a_B|^C|^{\tau}_{\sigma} - \frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\alpha;\,\tau}}\,A_{B;\,\sigma}\right\}_{;\lambda}\delta_v g^{\mu\nu} + \\
& + \left\{\left[\frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\alpha}} - \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\alpha;\,\beta}}\right)_{;\beta}\right]\delta_v A_B + \frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\beta;\,\alpha}}\,\delta_v A_{B;\beta} + \right. \\
& + \frac{1}{2}\left(g_{\varepsilon\mu}g_{\tau\nu}g^{\sigma\alpha} - g_{\varepsilon\mu}\delta^{\alpha}_{\tau}\delta^{\sigma}_{\nu} - g_{\tau\mu}\delta^{\alpha}_{\varepsilon}\delta^{\sigma}_{\nu}\right)\times \\
& \times\left(\left[\frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\varepsilon}} - \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\varepsilon;\,\beta}}\right)_{;\,\beta}\right]A_C a_B|^C|^{\tau}_{\sigma} + \right. \\
& \left.\left. + \frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\beta;\,\varepsilon}}\,A_{C;\,\beta} a_B|^C|^{\tau}_{\sigma} - \frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\varepsilon;\,\tau}}\,A_{B;\,\sigma}\right)\delta_v g^{\mu\nu}\right\}_{;\,\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

Из условия экстремума действия тогда следуют уравнения поля в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_B} - \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\alpha}}\right)_{;\,\alpha} + \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\alpha;\,\beta}}\right)_{;\,\beta;\,\alpha} + \\
& + \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\mu}\delta^{\lambda}_{\tau}\delta^{\sigma}_{\nu} + g_{\tau\mu}\,\delta^{\lambda}_{\alpha}\,\delta^{\sigma}_{\nu} - g_{\alpha\mu}g_{\tau\nu}g^{\sigma\lambda}\right)\times \\
& \times\left\{\left[\frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\alpha}} - \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\alpha;\,\beta}}\right)_{;\,\beta}\right]A_C a_B|^C|^{\tau}_{\sigma} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\beta;\,\alpha}}\,\mathrm{A}_{C;\,\beta} a_B|^C|^{\tau}_{\sigma} - \frac{\partial \overline{\mathbf{L}}}{\partial A_{B;\,\alpha;\,\tau}}\,A_{B;\,\sigma}\right\}_{;\,\lambda}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial A_B} = 0,
\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

где множитель $\partial g^{\mu\nu} / \partial A_B$ отличен от нуля лишь в том случае, если существует алгебраическая связь между метрическим тензором и (более элементарными) компонентами некоторого потенциала, ответственного за существование метрики. Соотношение (2.2.22) можно непосредственно применять в ряде конкретных случаев (например, при тетрадной формулировке теории гравитации, причем и без отбрасывания членов со вторыми производными тетрад). Проиллюстрируем здесь это соотношение на примере матричного представления гравитационного поля, когда из лагранжиана уже исключен член со вторыми производными. Тогда уравнения поля γ-матриц в общерелятивистском обобщении представления Зоммерфельда (§ 8.6) имеют вид

$$\frac{\partial \overline{\mathrm{L}}}{\partial \gamma^{\alpha}_{ab}} - \left(\frac{\partial \overline{\mathrm{L}}}{\partial \gamma^{\alpha}_{ab;\,\beta}} \right)_{;\,\beta} + \frac{1}{8} \left(\delta^{\varepsilon}_{\alpha} \delta^{\nu}_{\omega} g_{\lambda\mu} + \delta^{\varepsilon}_{\alpha} \delta^{\nu}_{\lambda} g_{\omega\mu} + \right.$$

$$+ \delta^{\varepsilon}_{\mu} \delta^{\nu}_{\omega} g_{\lambda\alpha} + \delta^{\varepsilon}_{\mu} \delta^{\nu}_{\lambda} g_{\omega\alpha} - g_{\lambda\mu} g_{\omega\alpha} g^{\varepsilon\nu} -$$

$$\left. - g_{\omega\mu} g_{\lambda\alpha} g^{\varepsilon\nu} \right) \gamma^{\mu}_{ba} \left[\mathrm{Sp} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \gamma^{\varepsilon}_{;\,\omega}} \gamma^{\lambda} \right) \right]_{;\,\nu} = 0. \qquad (2.2.23)$$

Итак, в общей теории относительности возможен двоякий подход к принципу экстремума действия: 1) нетензорный (используются частные производные), при котором все поля равноправны, в том числе и гравитационное, а уравнения ковариантны как в смысле сохранения ими их формы в любой системе координат, так и в более узком смысле простоты закона преобразования (2.2.11); 2) тензорный (используются ковариантные производные), эквивалентный предыдущему, но выделяющий то поле, из производных которого образована связность (метрическое поле или более элементарные поля). От одного подхода к другому можно перейти и более формальным образом, чем это сделано здесь,— достаточно произвести замену переменных в лагранжиане (вместо A_B и $A_{B,\,\alpha}$ взять в качестве независимых аргументов лагранжиана A_B и $A_{B;\,\alpha}$) и воспользоваться соответствующими правилами дифференцирования.

Возвращаясь к обсуждению значения принципа экстремума действия, укажем на его универсальность: он лежит в основе всех физических процессов, и если когда-то создается впечатление, что какой-то процесс не укладывается в его рамки, то можно полагать, что просто не были учтены некоторые детали (поля, взаимодействия), и после их учета принцип экстремума действия должен восторжествовать. Этот принцип кладется в основу и приближенных методов вычисления (в частности, метод Галеркина — Ритца). Можно думать, что вариационные методы вычислений хороши именно тем, что они моделируют принципиальную сторону процессов в природе.

2.3. Законы сохранения: общий анализ [1]

В этом параграфе мы выясняем в самом общем случае, какие соотношения могут быть названы «законами сохранения», т. е., какой вид должен иметь закон сохранения, если он действует. Мы не будем здесь исследовать «происхождение» законов сохранения и их классификацию — это задача следующего параграфа, для которого в данном случае мы подготавливаем почву. Естественно, что здесь нам приходится принимать законы сохранения как данные.

---

[1] В связи с используемыми здесь операциями интегрирования по многообразиям и интегральными теоремами см. § 8.2.

Вспомним, что в нерелятивистской механике закон сохранения (например, энергии) имеет вид

$$H = \mathrm{const} \quad \text{или} \quad H|_{t_1} = H|_{t_2}, \tag{2.3.1}$$

где t_1 и t_2 — некоторые моменты времени. В релятивистской механике сохранение энергии образует вместе с сохранением импульса единый 4-мерный закон:

$$p^\mu = \mathrm{const} \quad \text{или} \quad p^\mu|_{s_1} = p^\mu|_{s_2}, \tag{2.3.2}$$

где s_1 и s_2 — некоторые моменты собственного времени. Конечно, для того, чтобы эти законы выполнялись, должны удовлетворяться соответствующие условия, которые, однако, нас пока не интересуют.

Физические поля представляют собой распределенные в пространстве системы. Это значит, что сохраняющиеся величины типа энергии характеризуют сразу целые области пространства, занимаемые полями; таким образом, законы сохранения, аналогичные (2.3.1) или (2.3.2), должны быть *интегральными*. Роль «момента времени» выполняет теперь пространственно-подобная гиперповерхность, фиксирующая «одновременность» взятой нами полевой ситуации во всех областях пространства (мы вернемся к обсуждению тонкостей понимания этой «одновременности» в конце параграфа).

Кроме того, любая величина, характеризующая физическую ситуацию в целой области, а также и во всех частях этой области, если последнюю разбить на части, может быть представлена некоторым образом *распределенной* в пространстве — в данном случае, на гиперповерхности — величиной

$$C = \int_\Sigma \mathrm{i}^\alpha dS_\alpha. \tag{2.3.3}$$

Здесь C — рассматриваемая интегральная величина; i^α — ее плотность; Σ — гиперповерхность, отвечающая моменту времени, в который мы берем величину C; dS_α — элемент этой гиперповерхности, являющийся ковариантной векторной (точнее: аксиальной векторной) плотностью веса -1 и пропорциональный единичному вектору нормали к гиперповерхности n^α. Так как берется *пространственно-подобная* гиперповерхность Σ, вектор n^α обладает свойством

$$n^\alpha n_\alpha = +1. \tag{2.3.4}$$

Величина i^α (мы не предполагаем, что это — вектор, так как оставляем за собой право придавать ей любые новые индексы, кроме α) обладает свойствами плотности (веса $+1$) и в обычном тензорном смысле.

Если C — величина сохраняющаяся, то для замкнутой системы выполняется соотношение типа (2.3.2):

$$C|_{\Sigma_1} = C|_{\Sigma_2} \tag{2.3.5}$$

или

$$\int_{\Sigma_1} \mathrm{i}^\alpha dS_\alpha = \int_{\Sigma_2} \mathrm{i}^\alpha dS_\alpha. \tag{2.3.6}$$

Возьмем гиперцилиндр, ограниченный двумя пространственно-подобными основаниями Σ_1 и Σ_2 (рис. 2); боковую поверхность гиперцилиндра обозначим через Σ'. Отметим, что в соотношении (2.3.6) обе нормали (как к Σ_1, так и к Σ_2) были взяты в направлении будущего; если теперь перейти к *внешним* нормалям нашего гиперцилиндра, то это соотношение перепишется в виде

$$\int_{\Sigma_1} \mathrm{i}^{\alpha} dS_{\alpha} + \int_{\Sigma_2} \mathrm{i}^{\alpha} dS_{\alpha} = 0. \tag{2.3.7}$$

Так как рассматриваемая система замкнута (изолирована), а Σ' лежит в той области 3-пространства, где эта система «кончается», то в силу условия изолированности все физические характеристики (в том числе i^{α})

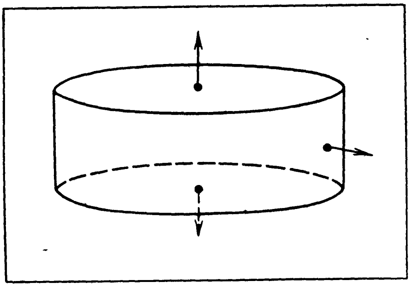


Рис. 2. Область интегрирования в (2.3.16); вместо 3-мерного объема, изображенного в перспективе, следует иметь в виду 4-мерный объем

должны обращаться в нуль на Σ', и интеграл типа (2.3.6), взятый по Σ', должен давать *нуль*. Добавим его к соотношению (2.3.7):

$$\int_{\Sigma} \mathrm{i}^{\alpha} dS_{\alpha} = 0, \tag{2.3.8}$$

где $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma'$. Перейдем, пользуясь теоремой Гаусса для 4-мерного случая (совершенно аналогичной этой теореме в 3-мерном мире), к интегралу по 4-объему:

$$\int_{\Omega} \mathrm{i}^{\alpha}_{,\alpha} (dx) = 0. \tag{2.3.9}$$

Здесь Ω — область 4-пространства, заключенная внутри замкнутой гиперповерхности Σ, а $(dx) = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$.

Приведенное рассуждение еще не доказывает, что $\mathrm{i}^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ для сохраняющихся величин, так как Ω не есть *произвольный* объем (мы требовали изоляции системы на границах этого объема). Весь проделанный анализ можно было бы повторить теперь и для незамкнутой системы, введя *поток* величины C через боковые (фактически уже 2-мерные) поверхности, ограничивающие нашу систему. Мы будем, однако, использовать соотношение (2.3.9) как эвристический трамплин, *постулируя* теперь, что *дифференциальный закон сохранения* величины C всегда должен иметь вид

$$\mathrm{i}^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0. \tag{2.3.10}$$

Чтобы выяснить, к чему приводит этот закон при интегрировании по некоторой физической системе, теперь уже *не изолированной*, мы проведем рассуждения в обратном порядке. Рассмотрим сначала 3-мерный случай, когда закон (2.3.10) принимает вид

$$\mathrm{i}^{\alpha}{}_{,\alpha} \equiv \mathrm{i}^{0}{}_{,0} + \operatorname{div} \mathbf{i} = 0, \tag{2.3.11}$$

где вектор $\mathbf{i}$ имеет компоненты i^1, i^2, i^3. Производя 3-мерное интегрирование, получаем:

$$\int_{V} \frac{\partial \mathrm{i}^0}{\partial x^0} dV = -\int_{V} \operatorname{div} \mathbf{i} dV = -\oint_{S} \mathbf{i} d\mathbf{s}, \tag{2.3.12}$$

где dV — элемент 3-мерного объема, а $d\mathbf{s}$ — векторный элемент 2-мерной поверхности, окружающей этот объем и взятой с точки зрения 3-мерной геометрии. Окончательно (если не изменяются границы области интегрирования) можно написать соотношение

$$\frac{d}{dx^0}\int\limits_V \mathrm{i}^0 dV = -\oint\limits_S \mathbf{i}\, d\mathbf{s} \tag{2.3.13}$$

или, вводя обозначения

$$\int\limits_V \mathrm{i}^0 dV = C, \qquad \oint\limits_S \mathbf{i}\, d\mathbf{s} = P, \tag{2.3.14}$$

— соотношение

$$\frac{dC}{dx^0} = -P. \tag{2.3.15}$$

Интегральный закон (2.3.15) можно истолковать следующим образом: изменение за единицу времени величины C, заключенной в объеме V, численно равно потоку P этой величины (взятому с обратным знаком) через поверхность S, окружающую объем V. Если поток отсутствует ($P=0$), то система изолирована и действует закон сохранения в форме (2.3.1). Если поток положителен (какие-то физические агенты «вытекают» наружу — в сторону положительной, внешней нормали 2-мерной поверхности S, окружающей объем V, унося с собой некоторое количество величины C), то количество C в объеме V уменьшается со временем, и наоборот. Таким образом, с 3-мерной точки зрения i^0 следует интерпретировать как плотность C, а $\mathbf{i}$ — как 3-вектор плотности потока P величины C.

Примером реализации рассмотренных законов может служить электродинамика: там роль i^0 играет плотность заряда ρ, а роль $\mathbf{i}$ — вектор плотности тока $\mathbf{j}$. Рассмотренный подход весьма характерен для специальной теории относительности, и в этом случае все величины, входящие в наши соотношения, обладают правильными тензорными размерностями (в общей теории относительности сюда войдут уже аффинные тензоры).

Перейдем к 4-мерной трактовке законов сохранения. Такая трактовка, как и 3-мерная, не во всех случаях полностью соответствует духу общей теории относительности, как мы увидим вскоре при обсуждении трудностей формулировки интегральных законов сохранения.

Если мы хотим получить ковариантный аналог производной d/dx^0 в интегральном смысле, то необходимо приблизить друг к другу основания гиперцилиндра (см. рис. 2) так, чтобы в пределе обе пространственно-подобные гиперповерхности Σ_1 и Σ_2 совпали. Обозначим различие во «времени» (инвариантном!) между этими гиперповерхностями через $d\tau$. Тогда высота гиперцилиндра (вдоль его образующей) изображается вектором $n^\alpha d\tau$. Очевидно,

$$\int\limits_\Omega \mathrm{i}^\alpha_{,\alpha}(dx) = 0 \tag{2.3.16}$$

и

$$\oint\limits_\Sigma \mathrm{i}^\alpha dS_\alpha = 0 \tag{2.3.17}$$

являются следствиями дифференциального закона (2.3.10), постулативно принятого нами. Переходя к направлению нормалей на Σ_1 и Σ_2 в одну и ту же сторону (вперед по времени), перепишем соотношение (2.3.17) в виде

$$\int\limits_{\Sigma_2} \mathrm{i}^\alpha dS_\alpha - \int\limits_{\Sigma_1} \mathrm{i}^\alpha dS_\alpha = -\int\limits_{\Sigma'} \mathrm{i}^\alpha dS_\alpha. \tag{2.3.18}$$

Ввиду близости гиперповерхностей Σ_1 и Σ_2, левую часть равенства (2.3.18) можно переписать в виде

$$\int_{\Sigma_2} \mathrm{i}^\alpha dS_\alpha - \int_{\Sigma_1} \mathrm{i}^\alpha dS_\alpha = d\tau \cdot \frac{d}{d\tau} \int_{\Sigma_0} \mathrm{i}^\alpha dS_\alpha, \tag{2.3.19}$$

где Σ_0 — некоторая пространственно-подобная гиперповерхность, средняя между Σ_1 и Σ_2 (считается, что Σ_1 соответствует τ, а Σ_2 соответствует $\tau + d\tau$). Заметим теперь, что на боковой гиперповерхности Σ', ввиду малости вектора образующей гиперцилиндра $n^\alpha d\tau$, можно принять

$$dS_\alpha = -n^\beta d\tau d\sigma_{\alpha\beta}, \tag{2.3.20}$$

где $d\sigma_{\alpha\beta}$ — элемент 2-мерной поверхности, окружающей Σ_0 (мы будем обозначать полную замкнутую 2-мерную поверхность через θ_0). Тогда, в свою очередь, правая часть соотношения (2.3.18) может быть приведена к виду

$$-\int_{\Sigma'} \mathrm{i}^\alpha dS_\alpha = \oint_{\theta_0} \mathrm{i}^\alpha n^\beta d\sigma_{\alpha\beta} d\tau. \tag{2.3.21}$$

Можно сказать, что при этих преобразованиях мы воспользовались теоремой о среднем, упрощающейся ввиду бесконечной близости гиперповерхностей Σ_1 и Σ_2. Сокращая теперь на $d\tau$, имеем вместо (2.3.18) соотношение

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Sigma_0} \mathrm{i}^\alpha dS_\alpha = + \oint_{\theta_0} \mathrm{i}^\alpha n^\beta d\sigma_{\alpha\beta}. \tag{2.3.22}$$

Это и есть окончательный вид 4-мерной записи интегрального закона сохранения (и изменения) величины C, определенной через ее плотность равенством (2.3.3), в случае, когда физическая система, вообще говоря, не является замкнутой (изолированной).

Для сравнения полученного 4-мерного соотношения с 3-мерным (2.3.13) заметим, что, взяв в качестве Σ_0 гиперплоскость, нормаль к которой направлена по оси времени (что явно отвечает только специальной теории относительности — поэтому мы будем здесь оперировать лишь с метрикой специальной теории относительности), мы получим

$$(dS_\alpha) = (dV, 0, 0, 0), \tag{2.3.23}$$

т. е. $dS_0 = dV$, $dS_i = 0$. Кроме того, в этом случае $n^\beta d\sigma_{\alpha\beta} = d\sigma_{\alpha 0}$, причем

$$(d\sigma_{\alpha 0}) = (0, d\mathbf{s}), \tag{2.3.24}$$

т. е. $d\sigma_{00} = 0$, $d\sigma_{i0} = ds_i$ (заметим, что вообще $d\sigma_{\alpha\beta} = -d\sigma_{\beta\alpha}$). Тогда

$$\frac{d}{d\tau} \int \mathrm{i}^0 dV = - \oint \mathbf{i} d\mathbf{s}, \tag{2.3.25}$$

что полностью совпадает с законом (2.3.13).

Мы не излагали в этом параграфе подробностей определения и проведения интегральных операций в 4-мерном мире, так как они здесь весьма аналогичны известным 3-мерным операциям. Более строго сформулированные детали, касающиеся интегральных соотношений, можно найти в § 8.2.

Однако определение интегральной сохраняющейся величины C наталкивается на принципиальные трудности. Во-первых, мы производили интегрирование в (2.3.3) по пространственно-подобной гиперповерхности и истолковывали результат как величину, характеризующую распределенную физическую систему в некоторый момент времени. Хотя 3-мерное пространство и соответствует такой гиперповерхности (сечению 4-мерного мира), определить понятие одновременности в нем можно не всегда. Такая синхронизация возможна лишь в особых «синхронных системах отсчета» (Арифов), и только в них интегральная величина может толковаться как одновременная характеристика физической системы. Вместе с тем, как заметил недавно Бом, констатация одновременной в разных точках физической ситуации противоречит принципу причинности в его релятивистской форме, особенно если берутся неограниченные 3-области. В самом деле, 4-мерный мир в целом является не более чем наглядной абстракцией, реально же наблюдатель каждый раз находится в некоторой мировой точке и может располагать лишь той информацией, которая содержится внутри светового конуса прошлого с вершиной в этой точке. Ясно, что в этот световой конус может попасть лишь ограниченная часть гиперповерхности одновременности. Бом предлагает поэтому заменить интегралы по пространственно-подобным гиперповерхностям интегралами по световым конусам, вершины которых фиксируют момент времени наблюдения и положение наблюдателя. Подобным же образом предлагается переформулировать задачи типа Коши, что дает существенно иные задачи с данными, определенными на характеристиках. Мы будем, однако, чаще пользоваться старым подходом к интегральным величинам из соображений наглядности. Во-вторых, мы не касались пока проблемы *ковариантного интегрирования*. Так как в процессе интегрирования суммируются величины, относящиеся к разным точкам, а тензорные коэффициенты преобразования существенно зависят от точки в искривленном мире, эти коэффициенты не могут быть вынесены за знак интеграла, и интегральная величина не может быть тензорной. Исключение составляет лишь случай скаляра (инвариантность *произведения* $\mathbf{i}^\alpha dS_\alpha$). Это обстоятельство связано с неоднозначностью параллельного переноса на конечные расстояния; в частной теории относительности всегда можно (даже в криволинейных координатах) ковариантно сформулировать операцию интегрирования, приурочив результат к некоторой *опорной точке*, в которой условно расположен наблюдатель. Близкий подход был сформулирован в римановом пространстве Рыловым в его теории «относительного гравитационного поля» (развитие двуметрического формализма, см. § 8.5). Ограничиваясь областями, намного меньшими локального значения радиуса кривизны, мы можем обойти эту трудность, так как в исследуемых операциях риманово пространство равноценно псевдоевклидову в таких малых (но макроскопических) областях. Именно здесь просто устанавливается согласие с частной теорией относительности, что должно служить основой для интерпретации и систематизации конкретных сохраняющихся величин.

Тем не менее интегральный подход имеет большие перспективы в формализме хронометрических инвариантов Зельманова (§ 8.9) и γ-матричном формализме (§ 8.6). В первом случае легко получить хронометрически инвариантное 3-скалярное выражение для энергии элемента гиперповерхности (3-мерного элементарного объема). Такой скаляр однозначно переносится в рамках гиперповерхности, так что интеграл имеет вполне определенный смысл; хронометрическая инвариантность интегральной величины гарантируется формой уравнения непрерывности. Однако применение метода хронометрических инвариантов здесь имеет еще более серьезную базу: совершенно очевидным руководящим принципом является требование хронометрической инвариантности и 3-мерной тензорности наблюдаемых в общей теории относительности (и в частной теории, если таковая формулируется в криволинейных координатах!). С другой стороны, из теоремы Нётер можно получить уравнения вида

$$(\mathbf{p}_\sigma{}^\alpha \gamma^\sigma)_{,\alpha} = 0, \qquad (2.3.26)$$

приводящие к матричной сохраняющейся величине

$$C = \int \mathbf{p}_{\sigma}^{\alpha} \gamma^{\sigma} dS_{\alpha}. \tag{2.3.27}$$

Шпурование этой величины с γ-матрицами, отнесенными к мировой точке наблюдателя (опорной точке), дает *тензорную* интегральную величину (в данном случае — вектор),

$$P_{\mu} = \frac{1}{4} \mathrm{Sp}(\gamma_{\mu} {}^{Q} C). \tag{2.3.28}$$

Такое последовательное применение γ-матриц, взятых в разных точках пространства-времени, соответствует новому типу параллельного переноса (типа Вейтценбека) с несимметричной связностью. Действительно, переходя к бесконечно малому пути переноса, имеем

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \to \gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{4} \mathrm{Sp}(\gamma^{\lambda} \gamma_{\mu,\nu}). \tag{2.3.29}$$

Это 4-мерное построение нетрудно переформулировать в хронометрически инвариантном виде.

В заключение необходимо заметить, что в общей теории относительности отсутствует, вообще говоря, понятие глобальной инерциальной системы отсчета (реализуются лишь *локально геодезические* аналоги инерциальных систем). Однако законы сохранения механики предполагают еще в частнорелятивистском пределе использования инерциальных систем отсчета; в неинерциальных системах сохранение в обычном смысле не имеет места. Например, неинерциально движущийся наблюдатель в связи с изменением *своей* скорости отметит «беспричинное» изменение кинетической энергии наблюдаемых им инерциально движущихся тел. Эти обстоятельства приводят к тому, что в общей теории относительности (и в частной, если пользоваться неинерциальными системами отсчета) законы сохранения энергии и импульса приходится обобщать в духе (2.3.27); дальнейшее шпурование, дающее 4-вектор в точке наблюдения (2.3.28), связано с использованием γ-матрицы в этой точке, причем матрицу следует брать в системе, движущейся вместе с наблюдателем. Тем самым учитывается влияние глобальной неинерциальности системы отсчета в римановом пространстве, а характер нарушения законов сохранения оказывается тот же, что в плоском мире в неинерциальных системах отсчета. Эти замечания следует учитывать при чтении тех параграфов, в которых идет речь о законах сохранения; мы не будем там возвращаться к ним снова.

2.4. Законы сохранения: теорема Нётер

В предыдущем параграфе мы выяснили, какой вид должны иметь законы сохранения в дифференциальной форме. При этом, если интегральные законы не удается даже сформулировать (трудность состоит прежде всего в выражении интегральной сохраняющейся величины через ее плотность), то дифференциальные законы сохранения остаются в силе и не теряют своего смысла. Теперь мы должны выяснить, следуют ли эти законы сохранения из самых общих положений теории поля; положительный ответ на этот вопрос дает *теорема Нётер* (Нётер, 1918) [1].

Теорема Нётер утверждает, что инвариантности интеграла действия относительно преобразований потенциалов полей соответствуют законы сохранения, причем конкретным группам преобразований соответствует

---

[1] См. также обзор Хилла (1951), в котором подробно рассмотрены нерелятивистские и частнорелятивистские законы сохранения.

сохранение определенных комплексов физических величин. Такая формулировка этой теоремы характерна для частной теории относительности; в общей теории говорить о группах преобразований затруднительно (так как набор координат x^μ не образует вектора, то и преобразования не удается в общем случае определить ковариантным образом). Однако привлечение групповых соображений в общей теории относительности для доказательства теоремы Нётер излишне, так как самые общие допустимые в ней преобразования координат (о других видах преобразований, например градиентных, мы говорить здесь не будем) сразу дают всю совокупность интересующих нас сохраняющихся величин. Главная ценность теоремы Нётер состоит именно в том, что она дает конкретные конструкции для величин, сохранение которых в ней доказывается.

Законы сохранения делятся на сильные и слабые. Если для их получения достаточно только инвариантности некоторой величины (пусть даже действия), то говорят, что эти законы сохранения *сильные*. Если же сохранение существенным образом следует, кроме инвариантности, еще и из обязательного выполнения уравнений поля (в механике — уравнений движения), то оно называется *слабым*. Сильные законы сохранения можно получить, исследуя на инвариантность любые инвариантные величины, построенные из потенциалов полей и их производных, и поэтому более глубокий физический смысл имеют *слабые законы*, опирающиеся сразу и на математически корректную формулировку действия (его инвариантность), и на реально действующие законы физики (уравнения полей).

Мы обсуждаем здесь ортодоксальный подход к теореме Нётер, восходящей к работе самой Нётер, и усовершенствуем лишь ее математическую формулировку. Вместе с этим нужно указать на существование другого подхода к этой теореме, часто применяемого в классической и в квантовой механике. В этом случае исследуется не инвариантность действия при преобразовании координат, когда физическая система остается прежней, а неизменность этой величины при движении физической системы относительно фиксированной системы координат. Оба подхода самостоятельны, но дают одинаковые результаты, так как в них фактически используются одни и те же физические законы (уравнения поля). В общей теории относительности движения физических систем как целого относительно фиксированного пространства не всегда возможны ввиду неоднородности искривленного пространства, но инвариантность действия задается тензорным характером теории, так что ортодоксальная форма теоремы Нётер здесь остается в силе. Кроме того, в малом риманово пространство проявляет те же свойства однородности, что и псевдоэвклидово, так как в соответствующие соотношения не входит кривизна, и это допускает формулировку *дифференциальных* законов сохранения. Наконец, следует отметить, что и преобразования координат, и движение физической системы можно рассматривать как частные случаи *канонических преобразований* (также и в теории поля). К этому вопросу мы вернемся позднее.

В классической (неквантовой) физике теорема Нётер доказывается лишь для бесконечно малых преобразований. Эти преобразования рассматривались в применении к величинам A_B (теперь мы обозначаем так канонические координаты — потенциалы полей) во введении [см. формулы (1.13) — (1.20)]. Итак, при замене координат

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu \tag{2.4.1}$$

потенциалы преобразуются по закону

$$\eta A_B = A_B'(x') - A_B(x), \tag{2.4.2}$$

причем

$$\eta A_B = a_B|_\sigma{}^\tau \cdot \xi^\sigma{}_{,\tau}. \tag{2.4.3}$$

Заметим, что операция η неперестановочна с частным дифференцированием,

$$\eta (A_{B,\,\alpha}) = (\eta A_B)_{,\,\alpha} - A_{B,\,\beta} \cdot \xi^{\beta}_{,\,\alpha}, \tag{2.4.4}$$

а для упрощения вычислений была бы очень полезна перестановочность. Это обстоятельство — появление соотношения (2.4.4) — связано с тем, что формально в определении операции η величины A_B' и A_B имеют разные аргументы, хотя и относятся к одной и той же точке пространства. Если же взять их в разных точках, таких, чтобы координаты одной точки до преобразования совпадали с координатами другой, взятыми после преобразования, то должна иметь место перестановочность сконструированной таким образом новой операции типа дифференциала Ли

$$\eta^* A_B \stackrel{\mathrm{Def}}{=} A_B'(x) - A_B(x) \tag{2.4.5}$$

и частного дифференцирования. Учитывая инфинитезимальность изменения ξ^μ, которое можно записать как

$$\xi^\mu = \eta x^\mu, \tag{2.4.6}$$

нетрудно придать определению (2.4.5) более удобную для практических расчетов форму (иногда мы будем писать δ и δ^*)

$$\eta^* = \eta - \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \tag{2.4.7}$$

Теперь, пользуясь равенством (2.4.4), можно просто доказать факт перестановочности η^* и $\partial / \partial x^\mu$, независимо от того, на какую величину будут действовать эти операторы. Интересно, что, пользуясь формой (2.4.3) и определением ковариантного дифференцирования (1.50)

$$A_{B;\alpha} = A_{B,\alpha} + a_B|_{\sigma}{}^{\tau} \cdot \Gamma^{\sigma}_{\tau\alpha}, \tag{2.4.8}$$

можно представить $\eta^* A_B$ в явно тензорной форме:

$$\eta^* A_B = a_B|_{\sigma}{}^{\tau} \cdot \xi^{\sigma}_{;\tau} - \xi^\alpha A_{B;\alpha}, \tag{2.4.9}$$

откуда следует, что $\delta^* A_B$ обладает теми же трансформационными свойствами, что и A_B, т. е.

$$\eta(\eta^* A_B) = \eta^* A_C \cdot a_B|^C|^{\tau}_{\sigma} \cdot \xi^{\sigma}_{,\,\tau}. \tag{2.4.10}$$

Нётер рассматривала инвариантность интеграла действия; однако если считать, что этот интеграл инвариантен при любом выборе области интегрирования (что естественно, если учесть большую самостоятельную важность понятия действия), то это эквивалентно выбору лагранжиана в виде скалярной плотности. Действительно, скалярный интеграл $\int \mathbf{L}(dx)$ должен при произвольной области интегрирования содержать в качестве $\mathbf{L}(dx)$ псевдоскаляр (аксиальный скаляр), так как сам знак интеграла $\int$ при преобразованиях координат преобразуется по закону

$$\Big[\int\limits_{\Omega}\Big]' = \int\limits_{\Omega'} = \operatorname{sgn} J \cdot \int\limits_{\Omega} \tag{2.4.11}$$

ввиду перестановки пределов интегрирования при $J < 0$. Так как элемент объема преобразуется по закону

$$(dx') = J \cdot (dx), \tag{2.4.12}$$

то ввиду псевдоскалярной природы $\mathbf{L} \cdot (dx)$ лагранжиан должен обладать трансформационными свойствами:

$$\mathrm{L}'(x') = |J|^{-1}\cdot \mathrm{L}(x), \tag{2.4.13}$$

т. е. быть скалярной плотностью веса $+1$. При инфинитезимальных преобразованиях (2.4.1) якобиан равен

$$J = 1 + \xi^{\alpha}{}_{,\alpha}, \tag{2.4.14}$$

и поэтому

$$\eta \mathrm{L} = -\mathrm{L}\cdot \xi^{\alpha}_{,\alpha}. \tag{2.4.15}$$

Переходя к операции η^*, получаем

$$\eta^*\mathrm{L} + (\mathrm{L}\xi^{\alpha})_{,\alpha} = 0 \tag{2.4.16}$$

— основное соотношение для вывода теоремы Нётер.

Концентрируя свое внимание на вопросе о преобразовании величин (инвариантность действия, свойства скалярной плотности L), мы рассмотрим прежде всего математическую сторону проблемы — вывод *соотношений Нётер*, не пользуясь пока уравнениями полей, т. е. подходя к L не как к лагранжиану, а как к произвольной скалярной плотности, построенной из потенциалов и их производных:

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}(A_B; A_{B,\alpha}; A_{B,\alpha,\beta}). \tag{2.4.17}$$

(Как и в § 2.2, мы включили в L вторые производные A_B.)

Бесконечно малая величина $\eta^*\mathrm{L}$ может быть записана как

$$\eta^*\mathrm{L} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial A_B}\eta^* A_B + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial A_{B,\alpha}}\eta^* A_{B,\alpha} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial A_{B,\alpha,\beta}}\eta^* A_{B,\alpha,\beta}. \tag{2.4.18}$$

Благодаря перестановочности η^* и $\partial / \partial x^{\alpha}$, можно воспользоваться равенством (2.2.3), заменив в нем δ на η^*:

$$\eta^*\mathrm{L}(A_B; A_{B,\alpha}; A_{B,\alpha,\beta}) = \frac{\delta \mathrm{L}}{\delta A_B}\eta^* A_B + \left(\frac{\delta \mathrm{L}}{\delta A_{B,\alpha}}\eta^* A_B + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial A_{B,\alpha,\beta}}\eta^* A_{B,\beta}\right)_{,\alpha}. \tag{2.4.19}$$

Заметим, что оба слагаемые в (2.4.16), как и в (2.4.19),— скалярные плотности.

Если теперь учесть соотношения (2.4.3) и (2.4.7), то подстановка выражения (2.4.19) в (2.4.16) после простых преобразований дает

$$-\left[\frac{\delta \mathrm{L}}{\delta A_B}A_{B,\alpha} + \left(\frac{\delta \mathrm{L}}{\delta A_B}a_B|^{\beta}_{\alpha}\right)_{,\beta}\right]\xi^{\alpha} +$$

$$+ [\mathrm{U}_{\sigma}{}^{\alpha}\xi^{\sigma} + \mathrm{M}_{\sigma}^{\alpha\tau}\xi^{\sigma}_{,\tau} + \mathrm{N}_{\sigma}^{\alpha\tau\beta}\xi^{\sigma}_{,\beta,\tau}]_{,\alpha} = 0. \tag{2.4.20}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathrm{U}_{\sigma}{}^{\alpha} = \mathrm{L}\delta_{\sigma}{}^{\alpha} + \frac{\delta \mathrm{L}}{\delta A_B}a_B|_{\sigma}{}^{\alpha} - \frac{\delta \mathrm{L}}{\delta A_{B,\alpha}}A_{B,\sigma} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial A_{B,\alpha,\beta}}A_{B,\sigma,\beta}, \tag{2.4.21}$$

$$\mathrm{M}_{\sigma}^{\alpha\tau} = \frac{\delta \mathrm{L}}{\delta A_{B,\alpha}}a_B|_{\sigma}{}^{\tau} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial A_{B,\alpha,\tau}}A_{B,\sigma} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial A_{B,\alpha,\beta}}a_B|^{\tau}_{\sigma,\beta}, \tag{2.4.22}$$

$$\mathrm{N}_{\sigma}^{\alpha\tau\beta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial A_{B,\alpha,\beta}}a_B|_{\sigma}{}^{\tau} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial A_{B,\alpha,\tau}}a_B|_{\sigma}{}^{\beta}\right]. \tag{2.4.23}$$

Полученное условие *инвариантности лагранжиана* (мы будем так говорить вместо «*свойство скалярной плотности лагранжиана*») (2.4.20) явно включает инфинитезимальный вектор ξ^{μ}, который следует теперь исключить, так как лагранжиан должен быть инвариантным относительно *всех* преобразований (2.4.1) с трижды дифференцируемым бесконечно малым вектором ξ^μ. Произвольность этого вектора означает, что в качестве ξ^μ, $\xi^\mu_{,\alpha}$, $\xi^\mu_{,\alpha,\beta}$ и $\xi^\mu_{,\alpha,\beta,\gamma}$ берутся *любые* величины, с тем лишь условием, чтобы последние две из них были симметричными по своим нижним индексам [1].

Для исключения ξ^μ продифференцируем явно выражение, стоящее под знаком дивергенции в (2.4.20). Комбинируя полученные слагаемые, находим:

$$\left[\mathbf{U}^{\beta}_{\alpha,\beta}-\frac{\partial\mathbf{L}}{\delta A_B}A_{B,\alpha}-\left(\frac{\delta\mathbf{L}}{\delta A_B}a_B\big|^{\beta}_{\alpha}\right)_{,\beta}\right]\xi^\alpha+[\mathbf{U}^{\alpha}_{\sigma}+\mathbf{M}^{\beta\alpha}_{\sigma,\beta}]\xi^{\sigma}_{,\alpha}+$$

$$+[\mathbf{M}^{\alpha\tau}_{\sigma}+\mathbf{N}^{\beta\tau\alpha}_{\sigma,\beta}]\xi^{\sigma}_{,\alpha,\tau}+\mathbf{N}^{\alpha\tau\beta}_{\sigma}\xi^{\sigma}_{,\alpha,\tau,\beta}=0. \tag{2.4.24}$$

Ввиду произвольности ξ^μ и его производных, заключаем отсюда, что

$$\frac{\delta\mathbf{L}}{\delta A_B}A_{B,\alpha}+\left(\frac{\delta\mathbf{L}}{\delta A_B}a_B\big|^{\beta}_{\alpha}\right)_{\beta}=\mathbf{U}^{\beta}_{\alpha,\beta}, \tag{2.4.25}$$

$$\mathbf{U}_\sigma{}^\alpha+\mathbf{M}^{\beta\alpha}_{\sigma,\beta}=0, \tag{2.4.26}$$

$$\mathbf{M}^{\alpha\tau}_{\sigma}+\mathbf{N}^{\beta\tau\alpha}_{\alpha,\beta}=\mathbf{F}^{\alpha\tau}_{\sigma},\ \mathbf{F}^{\{\alpha\tau\}}_{\sigma}\equiv 0, \tag{2.4.27}$$

$$\mathbf{N}^{\{\alpha\tau\beta\}}_{\sigma}=0. \tag{2.4.28}$$

Здесь фигурные скобки означают симметризацию по всем индексам, которые стоят в этих скобках; ввиду симметрии $\mathbf{N}^{\alpha\tau\beta}_{\sigma}$ ($\mathbf{N}^{\alpha\tau\beta}_{\sigma}=\mathbf{N}^{\alpha\beta\tau}_{\sigma}$) здесь можно записать

$$\mathbf{N}^{\{\alpha\tau\beta\}}_{\sigma}\equiv\frac{1}{3}[\mathbf{N}^{\alpha\tau\beta}_{\sigma}+\mathbf{N}^{\tau\alpha\beta}_{\sigma}+\mathbf{N}^{\beta\tau\alpha}_{\sigma}]=0. \tag{2.4.29}$$

Заметим однако, что

$$\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial A_B}A_{B,\alpha}+\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial A_{B,\beta}}A_{B,\alpha,\beta}+\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial A_{B,\beta,\tau}}A_{B,\alpha,\beta,\tau}=$$

$$=\frac{\delta\mathbf{L}}{\delta A_B}A_{B,\alpha}+\left[\frac{\delta\mathbf{L}}{\delta A_{B,\beta}}A_{B,\alpha}+\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial A_{B,\beta,\tau}}A_{B,\alpha,\tau}\right]_{,\beta}. \tag{2.4.30}$$

Поэтому, если подставить выражение (2.4.21) в соотношение (2.4.25) и учесть (2.4.30), легко увидеть, что указанное соотношение выполняется тождественно — независимо от того, будет $\mathbf{L}$ скалярной плотностью или нет. Остальные соотношения (2.4.26)—(2.4.28) выполняются лишь в том случае, когда $\mathbf{L}$ является действительно скалярной плотностью; это и есть искомые *соотношения Нётер* — записанные в явном виде условия инвариантности лагранжиана (интеграла действия).

Из соотношений Нётер (2.4.26)—(2.4.28) следует важное равенство

$$\mathbf{U}^{\alpha}_{\sigma,\alpha}=0, \tag{2.4.31}$$

имеющее вид *дифференциального закона сохранения*. Это — сильный закон сохранения, и поэтому он не может сам играть важной роли в теории, но из него следуют фундаментальные слабые законы сохранения. На основании тождеств (2.4.25) соотношение (2.4.31) можно записать в виде

$$\frac{\delta\mathbf{L}}{\delta A_B}A_{B,\alpha}+\left(\frac{\delta\mathbf{L}}{\delta A_B}a_B\big|^{\beta}_{\alpha}\right)_{,\beta}=0. \tag{2.4.32}$$

---

[1] Связь между этими величинами через частное дифференцирование здесь несущественна, так как фактически все рассмотрения производятся локально, в точке.

Имея в виду, что величина $\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B} a_B\Big|_\alpha^\beta$ является тензорной плотностью второго ранга (веса $+1$), т. е.

$$\eta\left(\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B} a_B\Big|_\alpha^\beta\right) = \left[\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B} a_B\Big|_\alpha^\tau \delta_\sigma^\beta - \right.$$
$$\left. - \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B} a_B\Big|_\sigma^\beta \delta_\alpha^\tau - \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B} a_B\Big|_\alpha^\beta \delta_\sigma^\tau\right]\xi^\sigma_{,\tau}, \tag{2.4.33}$$

мы можем записать равенство (2.4.32) в явно тензорной форме:

$$\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B} A_{B;\alpha} + \left(\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B} a_B\Big|_\alpha^\beta\right)_{;\beta} = 0. \tag{2.4.34}$$

Это — снова «сильное» равенство, так **как** оно вытекает только из инвариантности $\mathbf{L}$ и не зависит от выполнения уравнений поля (не зависит от того, считаем ли мы $\mathbf{L}$ лагранжианом или нет).

Чисто математическое содержание теоремы Нётер этим исчерпывается; теперь необходимо дать физическое истолкование полученных соотношений. Прежде всего мы интерпретируем $\mathbf{L}$ как лагранжиан полей; однако так как физические характеристики (например, энергия) могут распределяться между разными полями (с точностью до энергии взаимодействия этих полей), то полезно сначала обсудить вопрос о разделении лагранжиана на лагранжианы отдельных полей и лагранжианы взаимодействия этих полей друг с другом. Как мы делали это в уравнениях (2.2.13), можно разделить метрическое поле и другие поля, обозначая через $A_{B'}$ потенциалы всех полей, кроме метрического. Тогда лагранжиан полной системы полей ($\mathbf{L}_t$) можно записать как

$$\mathbf{L}_t(A_B;\ A_{B,\alpha};\ A_{B,\alpha,\beta}) =$$
$$= \mathbf{L}_t(A_{B'};\ A_{B',\alpha};\ A_{B',\alpha,\beta};\ g_{\mu\Lambda};\ g_{\mu\Lambda,\alpha};\ g_{\mu\Lambda,\alpha,\beta}). \tag{2.4.35}$$

Из соображений общности мы взяли в качестве метрического поля не метрический тензор $g_{\mu\nu}$, а некоторый другой объект $g_{\mu\Lambda}$ (с одним собирательным греческим индексом Λ), из которого строится некоторым образом и поле метрического тензора:

$$g_{\mu\Lambda}\cdot g_\nu{}^\Lambda = g_{\mu\nu}. \tag{2.4.36}$$

В частности, это метрическое поле может быть полем тетрад

$$g_{\mu\Lambda} \to g_\mu(a);\ g_\mu{}^\Lambda \to g_\mu(a); \tag{2.4.37}$$

или полем матриц Дирака в представлении Зоммельфельда

$$g_{\mu\Lambda} \to \frac{1}{2}\gamma_{\mu ab};\ g_\mu{}^\Lambda \to \frac{1}{2}\gamma_{\mu ba} \tag{2.4.38}$$

(малые латинские буквы в индексах обозначают в первом случае номер тетрадного вектора, а во втором — обычные матричные индексы); ср. эти обозначения с формулами (1.29) и (1.31). «Чистый» лагранжиан метрического поля следует тогда определить, положив в (2.4.35) потенциалы остальных полей равными нулю:

$$\mathbf{L}_g \overset{\mathrm{Def}}{=} \mathbf{L}_t(0;\ 0;\ 0;\ g_{\mu\Lambda};\ g_{\mu\Lambda,\alpha};\ g_{\mu\Lambda,\alpha,\beta}); \tag{2.4.39}$$

тогда лагранжиан других полей, включающий также их взаимодействие с метрическим полем, определится как

$$\mathbf{L}_f \overset{\mathrm{Def}}{=} \mathbf{L}_t - \mathbf{L}_g. \tag{2.4.40}$$

Мы не могли положить метрическое поле равным нулю, так как, например, метрический тензор в пределе плоского мира равен не нулю, а (1.25). Мы не могли положить его равным и этому значению, так как форма (1.25) performance нековариантна (она выделяет определенные — декартовы — системы координат; конечно, можно было бы найти выход из положения и на этом пути, а именно, взять вместо $g_{\mu\nu}$ вторую метрику двуметрического формализма, см. § 8.5). Отсортировать друг от друга прочие поля в $\mathbf{L}_f$ можно, последовательно полагая их потенциалы равными нулю; эту операцию при необходимости легко осуществить, и мы фактически сделаем это в разделе 4. Полагая, что $\mathbf{L}_t$ — лагранжиан системы физических полей, мы имеем в виду выполнение уравнений поля (2.2.10). Поскольку мы выделили метрическое поле, следует провести такое разделение не только в лагранжиане, но и в уравнениях (2.2.10),

$$\frac{\delta \mathbf{L}_t}{\delta A_B} = 0, \tag{2.4.41}$$

т. е. записать

$$\frac{\delta \mathbf{L}_t}{\delta A_{B'}} = 0 \tag{2.4.42}$$

и

$$\frac{\delta \mathbf{L}_t}{\delta g_{\mu\Lambda}} = 0. \tag{2.4.43}$$

Однако в силу определений (2.4.39) и (2.4.40) вместо (2.4.42) можно взять

$$\frac{\delta \mathbf{L}_f}{\delta A_{B'}} = 0. \tag{2.4.44}$$

Впредь в этом разделе мы будем обозначать через $\mathbf{L}$ (без индекса) любой (по выбору) из лагранжианов $\mathbf{L}_t$, $\mathbf{L}_g$ и $\mathbf{L}_f$, так что все соотношения с $\mathbf{L}$ будут справедливы для всей триады.

Взяв любую величину f_B, можно записать

$$\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B} f_B = \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_{B'}} f_{B'} + \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta g_{\mu\Lambda}} f_{\mu\Lambda}. \tag{2.4.45}$$

Однако первое слагаемое здесь *всегда* равно нулю [если $\mathbf{L} = \mathbf{L}_t$,— то в силу уравнений (2.4.42); если $\mathbf{L} = \mathbf{L}_f$,— то в силу (2.4.44), если же $\mathbf{L} = \mathbf{L}_g$,— то просто ввиду независимости $\mathbf{L}_g$ от $A_{B'}$], так что

$$\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B} f_B = \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta g_{\mu\Lambda}} f_{\mu\Lambda} \tag{2.4.46}$$

(*слабое соотношение*). Поэтому, например, равенство (2.4.34) принимает вид

$$\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta g_{\mu\Lambda}} g_{\mu\Lambda;\,\alpha} + \left(\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta g_{\mu\Lambda}} a_{\mu\Lambda} \Big|_{\alpha}^{\beta} \right)_{;\,\beta} = 0; \tag{2.4.47}$$

если под метрическим полем понимать поле метрического тензора (который, конечно, ковариантно постоянен), то мы получим просто

$$\left(\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta g_{\mu\nu}} a_{\mu\nu} \Big|_{\alpha}^{\beta} \right)_{;\,\beta} = 0. \tag{2.4.48}$$

Так как

$$a_{\mu\nu}|_{\alpha}{}^{\beta} = -g_{\mu\alpha}\delta_{\nu}{}^{\beta} - g_{\alpha\nu}\delta_{\mu}{}^{\beta}, \tag{2.4.49}$$

то в этом случае

$$T_{\alpha;\,\beta}^{\beta} = 0, \tag{2.4.50}$$

где использовано обозначение

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta g_{\mu\nu}}. \tag{2.4.51}$$

Если же лагранжиан зависит лишь от $g_{\mu\Lambda}$, а не от их комбинаций — $g_{\mu\nu}$, причем $\mathbf{T}_\alpha{}^\beta = \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta g_{\mu\Lambda}} a_{\mu\Lambda}|_\alpha{}^\beta$, то закон (2.4.50) не выполняется, и следует использовать закон (2.4.47). При этом возникают трудности, касающиеся непротиворечивости уравнений гравитационного поля, как мы увидим в следующем разделе. В начале локально геодезической системы координат (т. е локально при «свободном падении» в метрическом поле, когда движение точки наблюдения описывается уравнением геодезической линии) $\Gamma^\lambda_{\mu\upsilon} = 0$, и уравнение (2.4.50) принимает вид дифференциального закона сохранения. Однако следует подчеркнуть, что свободно падающая система — это весьма специальный случай, где важную роль играет принцип эквивалентности в эйнштейновской формулировке. В этом случае действие гравитационного поля исчезает, если рассматриваются законы, не зависящие от вторых производных метрического тензора (от кривизны), и получаемые выводы уже не имеют общей применимости.

Расширим теперь определение тензора $T^{\mu\nu}$, а именно, под его плотностью $\mathbf{T}^{\mu\nu}$ будем понимать величину

$$\mathbf{T}_\beta{}^\alpha \stackrel{\text{Def}}{=} a_B \Big|_\beta^\alpha \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B} = a_{\mu\Lambda} \Big|_\beta^\alpha \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta g_{\mu\Lambda}}, \tag{2.4.52}$$

эквивалентную (2.4.51), если вместо $g_{\mu\Lambda}$ взять метрический тензор $g_{\mu\nu}$. Тогда выражение (2.4.21) для $\mathbf{U}_\sigma{}^\alpha$ примет вид

$$\mathbf{U}_\sigma{}^\alpha = \mathbf{T}_\sigma{}^\alpha + \delta_\sigma{}^\alpha \mathbf{L} - \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_{B,\alpha}} A_{B,\sigma} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\alpha,\beta}} A_{B,\sigma,\beta}, \tag{2.4.53}$$

и мы можем записать

$$\mathbf{T}_\sigma{}^\alpha = \mathbf{U}_\sigma{}^\alpha + \mathbf{t}_\sigma{}^\alpha, \tag{2.4.54}$$

если ввести обозначение

$$\mathbf{t}_\sigma{}^\alpha \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_{B,\alpha}} A_{B,\sigma} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\alpha,\beta}} A_{B,\sigma,\beta} - \mathbf{L}\delta_\sigma{}^\alpha. \tag{2.4.55}$$

Однако справедливо слабое равенство

$$T_t^{\mu\nu} = 0, \tag{2.4.56}$$

где теперь

$$T^{\nu\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} g^{\nu\sigma} \mathbf{T}_\sigma{}^\mu, \tag{2.4.57}$$

поскольку выполняются уравнения (2.4.41) и справедливо определение (2.4.52). Поэтому

$$\mathbf{t}^\alpha_{t\sigma} = -\mathbf{U}^\alpha_{t\sigma}, \tag{2.4.58}$$

и сильный закон (2.4.31) приводит к слабому закону

$$\mathbf{t}^\alpha_{t\sigma,\alpha} = 0, \tag{2.4.59}$$

играющему фундаментальную роль в физике.

Очевидно, что в случае лагранжиана (2.1.12), не зависящего от вторых производных потенциалов, определение (2.4.55) величины $\mathbf{t}_\sigma{}^\alpha$ совпадает с определением (2.1.19). Следовательно, эта величина может рассматриваться как аналог гамильтониана в механике, тем более, что действует закон сохранения (2.4.59), соответствующий механическому закону сохранения энергии (2.3.1). Величина $t_\sigma{}^\alpha$ хорошо известна в частной теории относительности и носит там название *канонического тензора энергии-импульса натяжений* [см., например, (Ландау и Лифшиц, 1960, стр. 98 и далее)]. Так как в общей теории относительности конструкция (2.4.55) преобразуется уже не по тензорному закону (точный закон преобразования будет выведен в следующем параграфе), то мы будем называть $t_\sigma{}^\alpha$ *каноническим квазитензором энергии-импульса*. Тесную связь его с каноническим формализмом подтверждают соображения, высказанные в § 2.1 и 2.6.

Отождествление величин, выступающих в теореме Нётер, с физическими величинами, известными из механики (энергия, импульс, момент импульса), равносильно систематизации этих величин. Такая систематизация базируется: 1) на аналогии с частной теорией относительности, где эти величины уже введены в теории поля [см. (Иваненко и Соколов, 1952); (Ландау и Лифшиц, 1960); (Боголюбов и Ширков, 1957)]; 2) на тех конкретных преобразованиях, которым эти величины соответствуют в теореме Нётер в пределе частной теории относительности (трансляции, повороты и пр.); 3) на «ранге» этих, хотя и не тензорных, величин (число свободных индексов), когда двухиндексные величины считаются относящимися к энергии-импульсу, трехиндексные — к моменту.

Весьма характерно то преимущество, которое имеет закон сохранения $t_\sigma{}^\alpha$ (слабый) перед законом сохранения $U_\sigma{}^\alpha$ (сильным). Если закон сохранения (2.4.59) выполняется лишь для полной системы полей (t_σ^α строится с помощью L_t) и содержит, таким образом, возможность *обмена* энергией и импульсом между разными полями (в частности, сюда входит и метрическое поле, равноправное, таким образом, с другими физическими полями!), то, напротив, закон (2.4.31), будучи *сильным*, выполняется для каждого поля в отдельности (для L_g, L_f, а также при дальнейшем разбиении L_f на отдельные поля, лишь бы лагранжиан каждого из них был инвариантен!). Таким образом, сильный закон изолирует все физические поля друг от друга и не отражает никаких процессов обмена энергией и импульсом (а в прочих случаях — и другими величинами) между этими полями, т. е. сильный закон никогда не может описывать физических взаимодействий. Поэтому мы отдаем предпочтение *слабым* законам, органически связанным с динамикой (уравнениями) полей. Эту сторону слабых законов часто недооценивают.

Согласно § 2.3, квазитензору $t_\sigma{}^\alpha$ соответствует сохраняющаяся величина

$$P_\sigma = \int_\Sigma t_\sigma{}^\alpha dS_\alpha, \tag{2.4.60}$$

принимающая в частной теории относительности в декартовых координатах вид

$$P_\sigma = \int_V \overset{0}{t}_\sigma{}^0 dV, \tag{2.4.61}$$

которую называют 4-вектором энергии-импульса физической системы (мы увидим, что это, конечно, не общековариантный вектор). Плотность потока энергии-импульса, согласно (2.3.22), равна

$$\pi_\sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(t_\sigma{}^\alpha n^\beta - t_\sigma{}^\beta n^\alpha\right) \tag{2.4.62}$$

(антисимметризация проведена ввиду антисимметрии элемента $d\sigma_{\alpha\beta}$); в трехмерной форме, употребляемой в частной теории относительности:

$$\pi_\sigma{}^i = t_\sigma{}^i \tag{2.4.63}$$

[см. (2.3.14)].

Тензор $T^{\mu\nu}$ (2.4.57) называют *метрическим тензором энергии-импульса* (это — истинный тензор). Его называют также *симметричным тензором энергии-импульса*, поскольку в случае обычных классических полей их лагранжианы зависят непосредственно от $g_{\mu\nu}$ (а не от $g_{\mu\lambda}$), так что выполняется равенство (2.4.51). [В противном случае этот тензор не обязательно симметричен, что влечет за собой трудности при введении эйнштейновского гравитационного поля, так же, как и уже упоминавшееся невыполнение в этом случае закона (2.4.50); к обсуждению этой проблемы мы вернемся позднее]. Величина $\mathrm{U}_\sigma{}^\alpha$, дополняющая согласно (2.4.54) канонический квазитензор до метрического тензора энергии-импульса, называется *спиновой долей энергии-импульса*, так как она тесно связана с понятием *спина* физических полей, к обсуждению которого мы теперь переходим.

Мы будем пользоваться теперь четверкой координат x^μ как радиус-«вектором», хотя закон преобразования здесь явно не векторный (даже в частной теории относительности x^μ преобразуется при трансляциях не как свободный вектор, который, очевидно, при таких преобразованиях не изменяется). Главное для нас свойство x^μ выражается соотношением

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}x^\mu = \delta_\alpha{}^\mu, \tag{2.4.64}$$

благодаря которому имеем

$$(x^\alpha f^\beta)_{,\,\beta} = f^\alpha + x^\alpha f^\beta{}_{,\,\beta}, \tag{2.4.65}$$

где f^β — любая величина (имеющая, вообще говоря, любые индексы в дополнение к написанному здесь). Если взять в качестве f^β спиновую долю энергии-импульса $U_\sigma{}^\beta$, то в силу (2.4.31) получим

$$(x^\alpha \mathrm{U}_\sigma{}^\beta)_{,\,\beta} = \mathrm{U}_\sigma{}^\alpha, \tag{2.4.66}$$

откуда на основании (2.4.26) следует сильный закон сохранения

$$(x^\alpha \mathrm{U}_\sigma{}^\beta + \mathrm{M}_\sigma^{\beta\alpha})_{,\,\beta} = 0. \tag{2.4.67}$$

Взяв теперь в качестве f^β величину

$$\mathrm{R}_\sigma^{\beta\alpha} \overset{\mathrm{Def}}{=} x^\alpha \mathrm{U}_\sigma{}^\beta + \mathrm{M}_\sigma^{\beta\alpha}, \tag{2.4.68}$$

получим

$$(x^\gamma \mathbf{R}_\sigma^{\beta\alpha})_{,\,\beta} = \mathbf{R}_\sigma^{\gamma\alpha} \tag{2.4.69}$$

Но ввиду соотношения (2.4.26) имеем

$$\mathrm{R}_\sigma^{\gamma\alpha} = -(x^\alpha \mathrm{M}_\sigma^{\beta\gamma})_{,\,\beta} + \mathrm{M}_\sigma^{\gamma\alpha} + \mathrm{M}_\sigma^{\alpha\gamma}, \tag{2.4.70}$$

а при учете (2.4.27) —

$$\mathrm{R}_\sigma^{\gamma\alpha} = -(x^\alpha \mathrm{M}_\sigma^{\beta\gamma} + 2\mathrm{N}_\sigma^{\beta\gamma\alpha})_{,\,\beta} \tag{2.4.71}$$

(величина $\mathrm{N}_\sigma^{\beta\gamma\alpha}$ симметрична по последним двум верхним индексам). Поэтому существует сильный закон

$$\mathrm{K}_{\sigma,\,\beta}^{\beta\gamma\alpha} = 0, \tag{2.4.72}$$

где

$$\mathrm{K}_\sigma^{\beta\gamma\alpha} \overset{\mathrm{Def}}{=} x^\alpha x^\gamma \mathrm{U}_\sigma{}^\beta + x^\alpha \mathrm{M}_\sigma^{\beta\gamma} + x^\gamma \mathrm{M}_\sigma + 2\mathrm{N}_\sigma^{\beta\gamma\alpha}. \tag{2.4.73}$$

Мы получили, таким образом, два новых сильных закона сохранения. Рассмотрим первый из них:

$$\mathrm{R}_{\sigma,\,\beta}^{\beta\alpha} = 0. \tag{2.4.74}$$

Ему соответствует слабый закон

$$\mathfrak{l}^{\beta\alpha}_{t\sigma,\,\beta} = 0 \tag{2.4.75}$$

для величины

$$\mathfrak{l}^{\beta\alpha}_{\sigma} \overset{\mathrm{Def}}{=} x^{\alpha}\mathfrak{t}_{\sigma}{}^{\beta} - \mathfrak{M}^{\beta\alpha}_{\sigma}, \tag{2.4.76}$$

где характерно умножение канонического квазитензора $\mathfrak{t}_{\sigma}{}^{\beta}$ на радиус-«вектор» x^{α}. Подобное же произведение (но с последующей антисимметризацией) фигурирует и в частнорелятивистском определении плотности момента импульса [см., например (Ландау и Лифшиц, 1960), формула (32.7)]. Поэтому мы назовем $\mathfrak{l}^{\beta\alpha}_{\sigma}$ *квазитензором обобщенного момента.*

Сильному закону (2.4.72) соответствует слабый закон

$$\mathfrak{b}^{\beta\gamma\alpha}_{t\sigma,\,\beta} = 0 \tag{2.4.77}$$

для величины

$$\mathfrak{b}^{\beta\gamma\alpha}_{\sigma} \overset{\mathrm{Def}}{=} \mathfrak{t}_{\sigma}{}^{\beta}x^{\gamma}x^{\alpha} - \mathfrak{M}^{\beta\gamma}_{\sigma}x_{\alpha} - \mathfrak{M}^{\beta\alpha}_{\sigma}x^{\gamma} - 2\mathfrak{N}^{\beta\gamma\alpha}_{\sigma}, \tag{2.4.78}$$

которую мы назовем, по аналогии с $\mathfrak{l}^{\beta\alpha}_{\sigma}$, квазитензором *бимомента.* Продолжая рассуждения, использованные при выводе соотношений (2.4.64) — (2.4.73), легко получить законы сохранения для *высших моментов* любых рангов, так что в этом смысле и канонический квазитензор $\mathfrak{t}_{\sigma}{}^{\beta}$ может быть назван моментом (порядка 0). Существенно, что если при введении квазитензоров обобщенного момента и бимомента каждый раз в игру входили новые величины, кроме $\mathfrak{t}_{\sigma}{}^{\alpha}$ (сначала $\mathfrak{M}^{\beta\alpha}_{\sigma}$, а затем $\mathfrak{N}^{\beta\alpha\gamma}_{\sigma}$), то высшие моменты содержат лишь старый «строительный материал», не обнаруживая в своей структуре ничего нового, пока мы ограничиваемся лагранжианом (2.4.17), содержащим производные потенциалов полей лишь до второго порядка включительно. Случай более общего лагранжиана рассмотрел Кнапец (1959, 1960).

Чтобы лучше понять физический смысл квазитензора обобщенного момента, полезно перейти на время к частной теории относительности — по крайней мере, взяв не произвольные преобразования координат, а только *повороты* (линейные ортогональные преобразования). Для них

$$\xi_{\mu} = \omega_{\mu\nu}x^{\nu} \tag{2.4.79}$$

и

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} = \mathrm{const}. \tag{2.4.80}$$

Подставляя такой вектор ξ^{μ} в соотношение (2.4.20) и учитывая уравнения поля (2.4.41), а также соотношение (2.4.58), мы получаем

$$[\mathfrak{t}^{\alpha}_{t\sigma}g^{\sigma\mu}x^{\nu} - \mathfrak{M}^{\alpha\tau}_{t\sigma}\,(g^{\sigma\mu}x^{\nu})_{,\,\tau}]_{,\,\alpha}\,\omega_{\mu\nu} = 0 \tag{2.4.81}$$

или, ввиду произвольности $\omega_{\mu\nu}$ во всем, кроме свойств симметрии (2.4.80),— закон сохранения

$$\mathfrak{m}^{\alpha\mu\nu}_{t,\,\alpha} = 0. \tag{2.4.82}$$

где

$$\mathfrak{m}^{\alpha\mu\nu} \overset{\mathrm{Def}}{=} \mathfrak{t}_{\sigma}{}^{\alpha}g^{\sigma\mu}x^{\nu} - \mathfrak{t}_{\sigma}{}^{\alpha}g^{\sigma\nu}x^{\mu} + \mathfrak{M}^{\alpha\tau}_{\sigma}\,(g^{\sigma\nu}x^{\mu} - g^{\sigma\mu}x^{\nu})_{,\,\tau}\,. \tag{2.4.83}$$

Первая часть $\mathfrak{m}^{\alpha\mu\nu}$ сразу же отождествляется с обычной плотностью тензора момента импульса — с плотностью так называемого *орбитального момента.* Вторая же часть, содержащая $\mathfrak{M}^{\alpha\tau}_{\delta}$, должна иметь смысл *плотности спина*, потому что, как известно, сохраняется лишь полный момент — орбитальный плюс спиновый. Это утверждение часто ассоциируется с квантовой теорией, но на самом деле оно характерно уже для классической теории поля в рамках частной теории относительности, так как и квантовый спин всегда получают при вторичном квантовании путем подстановки операторов порождения и уничтожения в классический интегральный спин.

Таким образом, появление спинового момента в общей теории относительности не влечет за собой никаких противоречий, а его структура полностью соответствует тому, что дает частная теория относительности, так что между обеими теориями существует полная преемственность. Для нас существенно, что в общей теории относительности закон сохранения момента может быть записан не только в привычной антисимметричной форме (2.4.82), которая *точно* реализуется и здесь, но он может быть записан также более простым способом (2.4.75); при этом уравнение (2.4.82) является следствием (2.4.75). Оба закона, естественно, являются слабыми. Что же касается закона сохранения бимомента, включающего *плотность биспина*, то он был неизвестен ранее, и плодотворность его введения зависит от существования биспина (присутствия в лагранжиане вторых производных потенциалов). Если при интерпретации закона сохранения бимомента опираться на преобразования, аналогичные (2.4.79), но квадратичные по x^μ [тогда приходится отказаться от ортогональности этих преобразований, и поэтому ясно, что они не могли рассматриваться в традиционной частной теории относительности, хотя и появляются в формулировке Фока (1961)], то мы должны связать бимомент с ускоренными движениями и искажениями масштабов, тогда как обычный момент был связан с поворотами.

Резюмируя, можно сказать, что в общей теории относительности теорема Нётер дает слабые (физически полноценные) законы сохранения

$$\mathbf{t}^{\nu}_{t\mu,\nu} = 0; \qquad \text{(энергия-импульс)}$$

$$\mathbf{l}^{\nu\lambda}_{t\mu,\nu} = 0; \qquad \text{(обобщенный момент)}$$

$$\mathbf{m}_t{}^{\alpha\mu\nu}{}_{,\alpha} = 0, \qquad \text{(обычный момент)}$$

которые выполняются *точно* в любой системе отсчета и являются поэтому общековариантными (хотя и не тензорными) законами сохранения. Кроме того, с помощью метрического тензора энергии-импульса можно построить соотношения, близкие к законам сохранения (в том числе момента), принимающие, однако, вид этих законов лишь в начале локально геодезической системы координат. Стремление пользоваться симметричной величиной в качестве плотности энергии-импульса берет начало с раннего этапа развития теории поля, когда понятие спина было еще неизвестно, и считалось, что для вывода сохранения момента импульса необходимо конструировать этот момент из симметричного тензора и x^μ [1]. После открытия спина и выяснения его фундаментального значения в физике полей и частиц тензор энергии-импульса продолжали симметризовать по традиции, что не приводило к ошибкам, так как можно показать, что в частной теории относительности различие между симметричной и канонической величинами сводится к дивергенции. Поэтому в обоих случаях интегральные значения сохраняющихся величин для изолированных систем будут равны, хотя локализация определенной таким образом энергии и импульса уже в частной теории относительности различна. Мы считаем, что явный учет спина в общей теории относительности дает важные преимущества, будучи весьма специфическим моментом в теории поля по сравнению с механикой.

Рассмотрим теперь сочетание операции ковариантного интегрирования с помощью γ-матриц с методом хронометрических инвариантов (см. конец предыдущего параграфа). Возьмем слабый вариант уравнения Нётер (2.4.20), когда первая скобка равна нулю. Тогда, учитывая сильные

[1] См. пример такой аргументации у Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица (1960), стр. 100 и 101.

соотношения Нётер (2.4.26)—(2.4.28), получим для сохраняющейся величины плотность

$$\varepsilon w^{\alpha} = -[U_{\sigma}{}^{\alpha}\xi^{\sigma} + M_{\sigma}^{\alpha\tau}\xi^{\sigma}_{,\tau} + N_{\sigma}^{\alpha\tau\beta}\xi^{\sigma}_{,\tau,\beta}] =$$

$$= [M_{\sigma}^{\tau\alpha}\xi^{\sigma} + N_{\sigma}^{\tau\beta\alpha}\xi^{\sigma}_{,\beta}]_{,\tau} = \varepsilon\cdot\theta^{\tau\alpha}_{,\tau}, \qquad (2.4.84)$$

где параметр ε отражает малость вектора ξ^{μ}, а через $\theta^{\tau\alpha}$ обозначен суперпотенциал, который легко поддается антисимметризации. Мы имеем тогда закон сохранения в дифференциальной форме:

$$w^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0. \qquad (2.4.85)$$

Формально здесь можно брать любые ξ^{μ}, в том числе их комбинации в виде матриц. Поэтому мы вправе взять в хронометрически инвариантной форме:

$$\xi_0/\sqrt{g_{00}} = \varepsilon I, \quad \xi^i = \varepsilon\cdot\alpha^i, \qquad (2.4.86)$$

где 3-мерные матрицы Дирака (векторная и скалярная) суть

$$\alpha^i = \beta\gamma^i = -\gamma^i\beta, \qquad \beta^2 = I. \qquad (2.4.87)$$

Подставляя (2.4.86) в конструкцию (2.4.84), получаем аналог сохраняющейся плотности, стоящей в уравнении (2.3.26). Отсюда следует интегральная величина по аналогии с (2.3.27). Ее шпур, деленный на 4, дает энергию системы (соответственно легко получить и плотность этой энергии), а шпур ее произведения с матрицами α_j, взятыми в мировой точке наблюдения, дает импульс. Плотность импульса в этом случае содержит взаимосвязь матриц α^i в точках локализации поля и положения наблюдателя, что, однако, неизбежно. Совершенно очевидно, что мы получили таким образом хронометрически инвариантные выражения для энергии и импульса в общей теории относительности (первое — 3-скаляр, второе — 3-вектор, отнесенный к точке наблюдения). Эти величины подчиняются точному закону сохранения в силу (2.4.85) и определены однозначно при задании лагранжианов полей и поля γ-матриц. Аналогичные операции могут быть просто проделаны и в тетрадном формализме, что ввиду изоморфизма между обоими подходами, конечно, дает тот же самый хронометрически инвариантный результат.

2.5. Трансформационные свойства сохраняющихся величин

Вопрос о том, по каким законам преобразуются в общей теории относительности сохраняющиеся величины (точнее: их плотности), не просто плод любознательности, но необходимая деталь в понимании природы энергетических характеристик физических объектов. Когда Эйнштейн ввел понятие энергии гравитационного поля, то Бауэр сразу же показал, что, хотя в плоском мире в декартовых координатах гравитационная энергия равна нулю, в том же плоском мире при введении сферических координат эта энергия оказывается бесконечно большой![1] Но ведь в плоском мире гравитационное поле отсутствует· более того, переход от декартовой системы к сферической не предполагает никакого движения этих систем друг относительно друга, т. е. преобразование координат в этом случае совершается в рамках одной и той же системы отсчета. Поэтому нельзя говорить о появлении какого-либо аналога кинетической энергии или об энергии поля сил инерции — ничего подобного здесь не может быть. И все же энергия в форме, данной Эйнштейном, резко изменилась при таком «безобидном» преобразовании...

[1] Конкретные величины и обсуждение см. в § 3.7 и 3.8.

Следовательно, так как энергия — одна из важнейших характеристик физических систем, ее следует с самого начала подчинить каким-то достаточно жестким требованиям. Для этого следует руководствоваться физическими соображениями, которые, к сожалению, часто формулируются только в интегральном смысле — для мира в целом. Речь идет о том, что, как обычно, мерилом разумного определения основных понятий служит здесь соответствие частной теории относительности, т. е. существующей в ней ситуации. В этой теории энергия и импульс вместе образуют 4-вектор (относительно лоренцовых преобразований). Но в общей теории относительности нельзя ввести преобразования, последовательно аналогичные лоренцовым, так как в искривленном мире не существует понятия прямой линии, а значит, и равномерного прямолинейного движения, тем более, что речь идет не о локальном преобразовании, а о преобразовании для конечной области пространства. Поэтому, сосредоточив всю материю в ограниченной области пространства и оставив «пустой» бесконечность (так называемая «островная модель» вселенной), можно посмотреть на такую вселенную «со стороны». Наблюдатель окажется тогда в практически плоском пространстве и сможет описывать рассматриваемую систему (вселенную) на фоне этого плоского мира, т. е. в терминах частной теории относительности. И хотя Вселенная (с большой буквы, т. е. реально существующая) имеется у нас лишь в единственном издании, теория вовсе не обязана описывать только ее одну — теория должна давать разумное описание любой системы, лишь бы мы задали какие-то начальные и граничные условия. Поэтому, худо ли, хорошо ли, мы и обратимся к вопросу об энергии-импульсе с точки зрения «стороннего» наблюдателя. Такой подход сформулировал Мёллер (1961а, б).

Требования Мёллера

I. Канонический квазитензор $\mathfrak{t}_\mu{}^\nu$ в произвольной мировой точке (x^μ) должен быть аффинной тензорной плотностью веса $+1$, алгебраически зависящей от потенциалов полей, их первых и вторых производных в этой же точке (x^μ).

II. Величина $\mathfrak{t}_\mu{}^\nu$ должна удовлетворять слабому аффинному закону сохранения

$$\mathfrak{t}_{t\mu,\nu}^{\nu} = 0.$$

III. Плотность энергии $\mathfrak{t}_0{}^\nu$ должна преобразоваться как плотность 4-мерного контравариантного вектора при чисто пространственных преобразованиях координат

$$x'^i = x'^i(x^k); \qquad x'^0 = x^0. \tag{2.5.1}$$

IV. При линейных преобразованиях координат интегральный «вектор» энергии-импульса

$$P_\alpha = \int \mathfrak{t}_\alpha{}^\beta dS_\beta \tag{2.5.2}$$

преобразуется как свободный 4-вектор; кроме того, он не должен изменяться при преобразованиях, совпадающих с тождественным преобразованием на больших пространственных расстояниях, а в остальном произвольных.

V. В системе центра масс «вектор» энергии-импульса должен иметь вид

$$(P_\alpha) = (M, 0, 0, 0). \tag{2.5.3}$$

Мы почти не изменили формулировки Мёллера, заменив только сильный закон на слабый и причислив добавочное утверждение, сделанное самим Мёллером, к числу его требований (требование V). Эти требования вполне естественны, и первые два автоматически выполняются для величин, следующих из теоремы Нётер. Требование III, очевидно, обеспечивает инвариантность интегральной энергии любого (в том числе не изолированного) объема при чисто пространственных преобразованиях, что не допускает возникновения уже упоминавшегося парадокса Бауэра (в этом смысле это требование необходимо и достаточно). Лишь требования IV и V предполагают островную модель вселенной, и эта модель их вполне оправдывает. Прокомментируем лишь неизменность P_α при произвольных преобразованиях (пространственных и временно́й координат), совпадающих с тождественным преобразованием на бесконечности. Дело в том, что, говоря о линейных преобразованиях, Мёллер имел в виду преобразования Лоренца и пространственные повороты частной теории относительности; все они хорошо определяются вдали от физической системы, где пространство практически плоское; вблизи от системы и в ней самой, где мир искривлен, понятие прямой теряет смысл, и мы не знаем (в принципе), какие преобразования считать линейными. Поэтому *там* предлагается использовать любые преобразования четырех координат.

Обсуждение вопроса о том, как согласуются с требованиями Мёллера конкретные выражения для квазитензора энергии-импульса, полученные разными авторами, мы отложим до вывода этих конкретных выражений. На данном этапе мы можем только воспользоваться общим аппаратом теоремы Нётер. Покажем, пользуясь им, что инвариантность лагранжиана гарантирует выполнение условия III.

Мы уже отметили присутствие истинных скалярных плотностей в выражениях (2.4.16) и (2.4.19). Кроме того, мы придали явно тензорную форму (форму плотности ковариантного вектора) выражению, стоящему в первых квадратных скобках в равенстве (2.4.20), а именно (2.4.34). Так как это выражение скалярно умножается на контравариантный вектор, то это дает скалярную плотность [что можно проследить и с помощью выражений (2.4.16) и (2.4.19)]. Поэтому дивергенция, фигурирующая в (2.4.20), также дает скалярную плотность, и следовательно стоящее во вторых квадратных скобках выражение

$$\mathbf{A}^\alpha = \mathbf{U}_\sigma{}^\alpha \xi^\sigma + \mathbf{M}_\sigma^{\alpha\tau} \xi^\sigma_{,\tau} + \mathbf{N}_\sigma^{\alpha\tau\beta} \xi^\sigma_{,\beta,\tau} \tag{2.5.4}$$

является плотностью контравариантного вектора, т. е. преобразуется по закону

$$\mathbf{A}'^\alpha(x') = |J|^{-1}\mathbf{A}^\lambda(x)\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda} \tag{2.5.5}$$

при самых общих допустимых теорией относительности преобразованиях координат

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\alpha) \tag{2.5.6}$$

(теперь это уже не обязательно бесконечно малые преобразования!). Мы знаем, однако, что ξ^μ — контравариантный вектор, так что

$$\xi'^\sigma(x') = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\xi^\mu(x), \tag{2.5.7}$$

$$(\xi^\sigma_{,\tau})' = \xi^\mu_{,\nu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\tau} + \xi^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\tau}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \tag{2.5.8}$$

и

$$(\xi^\sigma_{,\tau,\beta})' = \xi^\mu_{,\nu,\rho}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\tau}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\beta} + \xi^\mu_{,\nu}\left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\tau\,\partial x'^\beta} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\tau}\frac{\partial}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} + \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\frac{\partial}{\partial x'^\tau}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\right) + \xi^\mu\frac{\partial^2}{\partial x'^\tau\,\partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}. \tag{2.5.9}$$

Подставим теперь эти соотношения вместе с выражением (2.5.4) в закон преобразования (2.5.5); в получившемся равенстве следует собрать вместе члены с ξ^{μ}, $\xi^{\mu}{}_{,\nu}$ и $\xi^{\mu}{}_{,\nu,\rho}$. Если здесь снова, как и в теореме Нётер, воспользоваться произвольностью вектора ξ^{μ} и его производных (имея, конечно, в виду, что вторая производная $\xi^{\mu}_{,\nu,\rho}$ симметрична по нижним индексам), нетрудно вывести из полученного равенства законы преобразования:

$$\mathrm{U}_{\mu}^{\nu}=|J|\,\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}}\left(\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}}\mathrm{U}_{\sigma}^{\prime\alpha}+\frac{\partial}{\partial x'^{\tau}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}}\mathrm{M}_{\sigma}^{\prime\alpha\tau}+\frac{\partial^{2}}{\partial x'^{\tau}\,\partial x'^{\beta}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}}\mathrm{N}_{\sigma}^{\prime\alpha\tau\beta}\right), \tag{2.5.10}$$

$$\mathrm{M}_{\mu}^{\nu\lambda}=|J|\,\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}}\left[\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}}\mathrm{M}_{\sigma}^{\prime\alpha\tau}+\left(\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}}\frac{\partial}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial}{\partial x'^{\tau}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial^{2}x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}\,\partial x'^{\beta}}\right)\mathrm{N}_{\sigma}^{\prime\alpha\tau\beta}\right] \tag{2.5.11}$$

и

$$\mathrm{N}_{\mu}^{\nu\lambda\rho}=|J|\,\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}}\mathrm{N}_{\sigma}^{\prime\alpha\tau\beta}. \tag{2.5.12}$$

Таким образом, мы получили обратные преобразования — от штрихованной системы координат в нештрихованную; чтобы перейти к прямым преобразованиям, в полученных соотношениях следует просто переставить штрихи и взять вместо $|J|$ обратную величину $|J|^{-1}$. Так как в соотношении (2.4.54) $\mathrm{T}_{\sigma}{}^{\alpha}$ — тензорная плотность, то (2.5.10) сразу же дает закон преобразования канонического квазитензора энергии-импульса:

$$\mathrm{t}_{\mu}=|J|^{-1}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}}\mathrm{t}_{\sigma}-\frac{\partial}{\partial x^{\tau}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}}\mathrm{M}_{\sigma}-\frac{\partial^{2}}{\partial x^{\tau}\,\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}}\mathrm{N}_{\sigma}\right) \tag{2.5.13}$$

Итак, плотность биспина является просто тензорной плотностью веса $+1$ и ранга 4; плотность обобщенного спина образует вместе с плотностью биспина геометрический объект; канонический квазитензор (или спиновая доля энергии-импульса) также образует вместе с плотностью обобщенного спина и плотностью биспина геометрический объект. Напомним (см. сноску на стр. 12), что под объектом мы понимаем величину, компоненты которой при преобразованиях координат комбинируются друг с другом, причем коэффициентами в этих комбинациях служат производные (различных порядков) одних координат по другим (важно, чтобы никакие другие величины не входили в закон преобразования объекта!). Можно сказать, что полученные из теоремы Нётер физические величины типа плотностей образуют три объекта, «вложенных» друг в друга, и простейший из этих объектов представляет собой плотность тензора.

Можно показать, что благодаря таким простым трансформационным свойствам U, M и N из них легко построить истинно тензорные величины, пользуясь символом Кристоффеля и его производной:

$$u_{\sigma}^{\alpha}\sqrt{-g}=\mathrm{U}_{\sigma}^{\alpha}+\mathrm{M}_{\omega}^{\alpha\tau}\,\Gamma_{\sigma\tau}^{\omega}-\mathrm{N}_{\omega}^{\alpha\tau\beta}\left(\frac{\partial\Gamma_{\sigma\beta}^{\omega}}{\partial x^{\tau}}+\Gamma_{\sigma\tau}^{\varepsilon}\,\Gamma_{\varepsilon\beta}^{\omega}-\Gamma_{\tau\beta}^{\varepsilon}\,\Gamma_{\varepsilon\sigma}^{\omega}\right) \tag{2.5.14}$$

$$m_{\sigma}^{\alpha\tau}\sqrt{-g}=\mathrm{M}_{\sigma}^{\alpha\tau}+\mathrm{N}_{\sigma}^{\alpha\omega\beta}\Gamma_{\omega\beta}^{\tau}-2\mathrm{N}_{\omega}^{\alpha\tau\beta}\,\Gamma_{\sigma\beta}^{\omega}, \tag{2.5.15}$$

$$n_{\sigma}^{\alpha\tau\beta}\sqrt{-g}=\mathrm{N}_{\sigma}^{\alpha\tau\beta}. \tag{2.5.16}$$

Эти же истинно тензорные величины $u_{\sigma}{}^{\alpha}$, $m_{\sigma}^{\alpha\tau}$ и $n_{\sigma}^{\alpha\tau\beta}$ нетрудно получить непосредственно с помощью теоремы Нётер, если, начиная с соотношения

(2.4.20), заменить в ней частные производные ξ^μ на ковариантные (производя симметризацию при повторном дифференцировании). Однако в этом случае мы не получим уже точных (аффинных) законов сохранения для новых величин (Мицкевич, 1964б, 1965б).

Если теперь, согласно III требованию Мёллера, рассмотреть поведение $t_0{}^\alpha$ при чисто пространственных преобразованиях координат (2.5.1), мы получим из (2.5.13)

$$\mathrm{t}_0{}'^\nu = |J|^{-1} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \mathrm{t}_0{}^\alpha, \tag{2.5.17}$$

т. е. закон преобразования векторной плотности, что и требовалось показать, так как $\partial x^\sigma / \partial x'^0 = \delta_0{}^\sigma$ при этих преобразованиях координат. Итак, требование III выполняется автоматически вследствие инвариантности лагранжиана (причина парадокса Бауэра состояла в том, что эйнштейновское выражение для энергии-импульса следовало из неинвариантного лагранжиана гравитации).

Любопытно отметить, что и величина $\mathrm{M}^{\alpha 0}_{\ \ 0}$ ведет себя при чисто пространственных преобразованиях (2.5.1) как векторная плотность. Следует, однако, сделать ту оговорку, что «чисто пространственные» преобразования координат не исчерпывают всех преобразований, которые не выводят за рамки исходной *системы отсчета*. Самые общие преобразования такого рода будут рассмотрены нами позднее и связаны с *формализмом хронометрических инвариантов Зельманова*.

Исследуя законы преобразования «вектора» P_σ с точки зрения удаленного от физической системы наблюдателя, т. е. на языке частной теории относительности, следует различать две возможности преобразований. *Первая* — это просто преобразования координат, когда гиперповерхность, по которой производится интегрирование (2.5.2), остается прежней. Если удаленный наблюдатель взял в качестве такой гиперповерхности гиперплоскость (следуя традициям частной теории относительности), фиксирующую в данной исходной системе отсчета момент времени, то в новой системе координат, движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой (новая система отсчета!), он должен взять *новую* гиперповерхность (гиперплоскость), поскольку его представления об одновременности, конечно, изменились. Гиперплоскость же, по которой производится интегрирование, пока осталась прежней, так как одного лишь перехода к новой системе координат для ее изменения недостаточно (изменилось всего лишь только ее описание). Поэтому естественно обратиться ко *второй возможности*, когда одновременно с преобразованием Лоренца удаленный наблюдатель переходит еще и к интегрированию по *новой* гиперплоскости, отвечающей его новым представлениям об одновременности. Это должно, конечно, иметь место и в частной теории относительности. Такая альтернатива была замечена Шмутцером (1964), который, однако, предпочел первый вариант, по-видимому, из технических соображений. Интересно, что Мёллер высказал свое требование IV именно в смысле *второй* возможности (комбинированного преобразования). На самом деле он пользуется типично трехмерной записью интегрального выражения P_σ типа C в равенстве (2.3.14), отрывая dV от остальных компонент dS_α. На основании требования I (свойство аффинной тензорной плотности) и при учете преобразования dS_α трансформационный закон для интегрального «вектора» энергии-импульса при линейных преобразованиях (в частности, при преобразованиях Лоренца) имеет вид

$$(P_\sigma{}')_{\Sigma'} = \int\limits_{\Sigma'} \mathrm{t}'^{\alpha}_{t\sigma} dS_\alpha{}' = \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\sigma} \int\limits_{\Sigma'} \mathrm{t}_{t\tau}{}^\beta \, dS_\beta. \tag{2.5.18}$$

Здесь берется именно *преобразование координат*, но гиперповерхность интегрирования осталась прежней. Сравним этот результат с интегралом по новой гиперповерхности (новый выбор «одновременности»), снабженным дополнительным коэффициентом в целях удобства:

$$\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\sigma}}(P_{\tau})_{\Sigma} \equiv \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\sigma}} \int_{\Sigma} \mathrm{t}_{t\tau}{}^{\beta}\, dS_{\beta}. \tag{2.5.19}$$

Получим

$$(P_{\sigma}')_{\Sigma'} - \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\sigma}}(P_{\tau})_{\Sigma} = \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\sigma}} \oint \mathrm{t}_{t\tau}{}^{\beta}\, dS_{\beta} = \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\sigma}} \int_{\Omega} \mathrm{t}^{\beta}_{t\tau,\,\beta}(dx). \tag{2.5.20}$$

Так как гиперповерхность интегрирования уходит в пространственную бесконечность, где поля отсутствуют по предположению об островной модели вселенной, для которой формулируется требование IV, мы дополнили гиперповерхность интегрирования боковыми сторонами, переопределили направление нормалей и применили теорему Гаусса. Это можно было сделать только при том условии, что интеграл по «боковой» гиперповерхности (которая теперь имеет пространственно-подобную нормаль!) при уходе этой гиперповерхности на пространственную бесконечность стремится к нулю, что и составляет содержание IV требования Мёллера. Теперь, ввиду требования II, (дифференциальный закон сохранения, полученный из теоремы Нётер), следует заключить, что

$$(P_{\sigma}')_{\Sigma'} = \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\sigma}}(P_{\tau})_{\Sigma}, \tag{2.5.21}$$

т. е. требование IV выполнено.

Итак, если требования I и II определяют необходимые дифференциальные свойства сохраняющихся величин типа плотности энергии-импульса, то требование III гарантирует неизменность энергии при чисто пространственных преобразованиях (уже в интегральной форме), а требование IV связывает законы преобразования интегральной энергии при преобразованиях Лоренца с требованием пересмотра одновременности при этих преобразованиях, так как речь идет не о локальной, а об интегральной величине. Требование V равносильно постулированию принципа эквивалентности Галилея — Этвёша — Эйнштейна.

Как мы увидим, все эти требования могут быть выполнены одновременно только в γ-матричном, тетрадном или кватернионном подходах к гравитации, которые, в сущности, изоморфны друг другу.

2.6. Канонический формализм в классической теории поля

Под каноническим формализмом в механике понимают такое описание механических систем, при котором в качестве системы подлежащих определению неизвестных берутся канонические координаты (2.1.1) и канонические импульсы (2.1.6). Уравнения механики в этом случае оказываются первого порядка по времени, а не второго, как это имело место в лагранжевом формализме (2.1.5) [1].

Здесь для нас основной ценностью канонического (или гамильтонова) формализма является то большое удобство, что его использование облегчает переход к квантовой теории (в случае полевого подхода — ко вторично квантованной теории). Поэтому, опираясь на результаты предыдущих параграфов, мы сформулируем здесь основной аппарат классического

[1] Для простоты мы положим сначала, что лагранжиан зависит лишь от потенциалов полей и их первых производных.

гамильтонова формализма для полей, обратив особое внимание на вывод скобок Пуассона.

Как правило, каноническая формулировка теории поля сопровождалась выделением временной координаты по грубой аналогии с классической нерелятивистской механикой. Такой подход не может быть признан ни достаточно полноценным с точки зрения ковариантной теории, ни необходимым, если учесть возможность общековариантной в явном виде (хотя и нетензорном) гамильтоновой формулировки теории поля. Мы приводим здесь эту формулировку, построенную в соответствии с механико-полевой аналогией, указанной в § 2.1. Заметим, что позднее, в результате обсуждения наших результатов, общековариантную формулировку гамильтонова формализма в теории поля рассмотрел также В. С. Брежнев; однако его вариант теории имеет менее физический характер.

Гамильтониан механической системы (2.1.7) является аналогом функции Лагранжа, а именно представляет собой результат совершаемого над ней преобразования Лежандра. Это преобразование производит замену переменных в функциях многих переменных, и его реализация очевидна из формы (2.1.7) и (2.1.6). Как известно, гамильтониан обычно рассматривается как выражение для энергии системы; однако в релятивистской теории энергия представляет собой временную компоненту 4-вектора энергии-импульса, который в теории поля, конечно, не может быть истинным вектором относительно преобразований координат общей теории относительности (если не подходить к нему с точки зрения Рылова), о чем мы уже говорили в предыдущих параграфах.

Итак, в теории поля ковариантная (хотя и нетензорная) форма интегральной величины энергии-импульса физической системы (2.4.60)

$$P_\sigma = \int\limits_\Sigma \mathbf{t}_\sigma{}^\alpha \, dS_\alpha \tag{2.6.1}$$

указывает, что плотностью энергии-импульса является квазитензор

$$\mathbf{t}_\sigma{}^\alpha = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\,\alpha}} A_{B,\,\sigma} - \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B} a_B |_\sigma{}^\alpha - \mathbf{L}\delta_\sigma{}^\alpha, \tag{2.6.2}$$

который при учете уравнений поля естественно переписать в виде

$$\mathbf{t}_\sigma{}^\alpha = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\,\alpha}} A_{B,\,\sigma} - \mathbf{L}\delta_\sigma{}^\alpha, \tag{2.6.3}$$

совпадающем с (2.1.19). Напомним, что роль канонических координат играют компоненты потенциалов полей A_B, а роль канонических импульсов — величины

$$\Pi^{B\alpha} = \partial \mathbf{L} / \partial A_{B,\,\alpha}. \tag{2.6.4}$$

Аналогия формы (2.6.3) и соответствующей механической величины — гамильтониана — очевидна; однако наличие двух свободных индексов требует специальной интерпретации, которую будет нетрудно дать, а кроме того, необходимо выяснить, можно ли понимать переход от лагранжиана $\mathbf{L}$ к гамильтоновой плотности (гамильтониану) $\mathbf{t}_\mu{}^\nu$ в каком-либо смысле как преобразование Лежандра.

Очевидно, что один из двух свободных индексов в (2.6.3), а именно нижний, относится к номеру компоненты «вектора» энергии-импульса, получаемого при интегрировании (2.6.1), другой же — верхний индекс — необходим вследствие интегрирования по гиперповерхности 4-мерного мира. Это последнее обстоятельство может быть выражено как факт физического расслоения 4-мерного многообразия на семейства пространственно-подобных гиперповерхностей, фиксирующих «одновременность» рассматриваемой физической ситуации. Эта одновременность, конечно, не абсолютна, так как выбор гиперповерхностей до некоторой степени произволен — главное требование состоит в том, чтобы они все были пространственно-подобными (вектор нормали n_μ в каждой точке каждой гиперповерхности семейства направлен в будущее). Наглядно это требование можно выразить как недопустимость более чем однократного пересечения рассматриваемой гиперповерхности мировой линией любой материальной точки. Можно сказать, что учет энергии, импульса и самих объектов проводится на этой гиперповерхности, причем недопустимость многократного учета одного и того же фактора совершенно очевидна. Это утверждение непосредственно связано с релятивистским принципом причинности.

Итак, мы сохраняем физический смысл механического гамильтониана, переходя к теории поля, и поэтому должны отнести его к некоторой физической ситуации, т. е. рассматривать как величину интегральную, а именно — как интеграл от некоторой плотности по пространственно-подобной гиперповерхности. Напротив, в подходе В. С. Брежнева гамильтониан образует поле в пространстве-времени, т. е. берется в каждой мировой точке, а затем, когда мы переходим к вариационному принципу в каноническом формализме, интегрируется по всему 4-пространству. Математически такая процедура, возможно, привлекательна, но при этом теряется глубокий физический смысл, которым гамильтониан обладал в механике.

Переходя к вопросу о преобразованиях Лежандра, заметим, что гамильтониан (2.6.3) является плотностью, так что должна исследоваться зависимость интегрального гамильтониана (2.6.1) от канонических координат и импульсов (функциональная зависимость!). Итак, мы приходим к необходимости использования функциональных производных на гиперповерхности (см. § 8.3), по которой проводится интегрирование в (2.6.1). Проварьируем интегральный гамильтониан; так как при этом геометрические координаты [1] не подвергаются изменениям, то операция варьирования вносится под знак производной, и мы должны рассматривать выражение

$$\delta t_\beta{}^\alpha = A_{B,\,\beta}\cdot\delta\Pi^{B\alpha} - \Pi^{B\alpha}_{,\,\beta}\cdot\delta A_B + [(\Pi^{B\alpha}\delta_\beta{}^\gamma - \Pi^{\beta\gamma}\delta_\beta{}^\alpha)\,\delta A_B]_{,\,\gamma}. \qquad (2.6.5)$$

Считая, что вариации δA_B обращаются в нуль на границе области интегрирования, и учитывая антисимметрию выражения, стоящего под знаком дивергенции в (2.6.5), мы можем, интегрируя (2.6.5), применить теорему Стокса (8.2.26); в результате получим

$$\delta P_\beta = \int\limits_\Sigma (A_{B\,,\beta}\,\delta\Pi^{B\alpha} - \Pi^{B\alpha}_{\,,\beta}\,\delta A_B)\,dS_\alpha. \qquad (2.6.6)$$

Отсюда видно, что функционал P_β зависит явно только от канонических координат A_B и канонических импульсов $\Pi^{\beta\alpha}$, что и требовалось.

Мы пока ограничивались рассмотрением лагранжианов, зависящих лишь от канонических координат A_B и канонических скоростей $A_{B,\,\alpha}$. Включим теперь в лагранжиан также вторые производные канонических

---

[1] Под геометрическими координатами мы понимаем обычные пространственные и временную координаты, в отличие от канонических координат — компонент потенциалов физических полей. Соответственно канонические импульсы в теории поля не имеют ничего общего с обычным физическим импульсом (количеством движения). Из соображений удобства мы будем также употреблять термин «канонические скорости», понимая под ними производные потенциалов полей по геометрическим координатам, хотя, конечно, в каноническом формализме (в противоположность лагранжеву) понятие скорости является чуждым элементом.

координат (потенциалов) и определим:

$$\Pi^{B\alpha} = \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_{B,\alpha}}, \tag{2.6.7}$$

$$\Pi^{B\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B,\alpha,\beta}}. \tag{2.6.8}$$

Канонический квазитензор (2.4.55) в этих обозначениях принимает вид

$$\mathbf{t}_\sigma^\alpha = \Pi^{\beta\alpha} A_{B,\sigma} + \Pi^{B\alpha\beta} A_{B,\sigma,\beta} - \mathbf{L}\delta_\sigma^\alpha, \tag{2.6.9}$$

а его вариация после тождественных преобразований равна:

$$\delta \mathbf{t}_\sigma^\alpha = A_{B,\sigma}\delta\Pi^{B\alpha} + A_{B,\sigma,\beta}\delta\Pi^{\beta\alpha\beta} - \left[\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B}\delta_\sigma^\alpha + \Pi^{B\alpha}_{\ \ ,\sigma} - \Pi^{B\alpha\beta}_{\ \ \ ,\sigma,\beta}\right]\delta A_B +$$
$$+ [(\Pi^{B\alpha}\delta_\sigma^\beta - \Pi^{B\beta}\delta_\sigma^\alpha)\delta A_B + (\Pi^{B\alpha\gamma}\delta_\sigma^\beta -$$
$$- \Pi^{B\beta\gamma}\delta_\sigma)\delta A_{B,\gamma}]_{,\beta} - (\Pi^{B\alpha\beta}_{\ \ \ ,\sigma}\delta A_B)_{,\beta}. \tag{2.6.10}$$

Здесь в последнем члене под знаком дивергенции стоит симметричная по индексам α и β величина (а не антисимметричная!), так что теорема Стокса не может избавить нас от этого члена. Подобная же ситуация имеет место и в классической механике, если взять там лагранжиан, включающий ускорения [1]:

$$L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}). \tag{2.6.11}$$

Введем определения:

$$p = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}}, \tag{2.6.12}$$

$$P = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}. \tag{2.6.13}$$

Тогда гамильтониан механики примет вид

$$H = p\dot{q} + P\ddot{q} - L, \tag{2.6.14}$$

и его вариация (или просто дифференциал)

$$\delta H = \dot{q}\delta p + \ddot{q}\delta P - \left(\frac{\delta L}{\delta q} + \dot{p} - \ddot{P}\right)\delta q - \frac{d}{dt}(\dot{P}\delta q) \tag{2.6.15}$$

будет включать член с *вариацией скоростей*. Таким образом, при зависимости лагранжиана от вторых производных канонических координат как в механике, так и в теории поля гамильтониан системы зависит не только от канонических координат и канонических импульсов (теперь уже двух типов), но и от скоростей.

Так как в известных физических теориях, где уравнения имеют порядок не выше второго, из лагранжиана могут быть исключены производные потенциалов выше первого порядка (в случае гравитации для ковариантности такой операции необходимо перейти от метрического тензора $g_{\mu\nu}$ к γ-матрицам или другим величинам), то мы ограничимся в дальнейшем исследованием случая

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(A_B;\ A_{B,\alpha}). \tag{2.6.16}$$

---

[1] В теории гравитационного поля при использовании подхода Палатини удается обойти эту трудность и рассматривать лагранжиан, включающий вторые производные метрического тензора (плотность скалярной кривизны).

Вспомним определения вариационных производных как коэффициентов при вариациях соответствующих переменных под знаком интеграла в выражении вариации исследуемого функционала. В зависимости от того, какие именно интегралы мы рассматриваем, вариационные производные могут быть определены на различных многообразиях. В нашем случае, когда берется функционал, привязанный к данному «моменту времени» и пространственно распространенный в этот «момент» на всю физическую систему, мы должны брать вариационные производные на гиперповерхности. Существует несколько возможностей введения таких вариационных производных, описанных в § 8.3; а именно, на основании определений (8.3.7) и (8.3.8) можно взять варианты (8.3.11) и (8.3.12) с дополнительным индексом, соответствующим ориентации гиперповерхности в каждой ее точке, или вариант (8.3.13) без этого индекса, но все же с учетом нормали к гиперповерхности. Варианты (8.3.11) и (8.3.12) могут браться в комбинации друг с другом.

Возвращаясь в вариации интегрального гамильтониана (2.6.6), мы можем заключить из него, какой вид имеют соответствующие вариационные производные. Соответственно только что упомянутым альтернативам можно принять либо

$$\frac{\Delta^{\alpha} P_{\beta}}{\Delta \Pi^{B\gamma}} = A_{B,\,\beta}\delta^{\alpha}_{\gamma} \tag{2.6.17}$$

и

$$\frac{\Delta^{\alpha} P_{\beta}}{\Delta A_{B}} = -\Pi^{B\alpha}_{\ \ ,\beta}, \tag{2.6.18}$$

либо

$$\frac{\Delta^{\alpha} P_{\beta}}{\Delta \Pi^{B\gamma}} = A_{B,\,\beta} n^{\alpha} n_{\gamma} \tag{2.6.19}$$

и

$$\frac{\Delta^{\alpha} P_{\beta}}{\Delta A_{B}} = -\Pi^{B\gamma}_{\ \ ,\beta} n^{\alpha} n_{\gamma}, \tag{2.6.20}$$

а при использовании определения (8.3.13) —

$$\frac{\Delta P_{\beta}}{\Delta \Pi^{B\gamma}} = A_{B,\,\beta} n^{\gamma} \tag{2.6.21}$$

и

$$\frac{\Delta P_{\beta}}{\Delta A_{B}} = -\Pi^{B\alpha}_{\ \ ,\beta} n_{\alpha}. \tag{2.6.22}$$

Вопрос о том, какие именно выражения следует использовать в действительности, решается на основании близости свойств вытекающих из них скобок Пуассона в теории поля и общеизвестных механических скобок Пуассона [1]. Если потребовать, чтобы вариационные производные не зависели от конкретного выбора гиперповерхности (т. е. в их структуре не фигурировали компоненты вектора нормали), то следует предпочесть первый вариант — уравнения (2.6.17) и (2.6.18). Более того, как легко проверить, исходя из приводимого ниже выражения для скобок Пуассона,

[1] Мы рассматриваем здесь лишь так называемые «невырожденные поля», у которых число тождественно не равных нулю и линейно независимых компонент $\Pi^{B\alpha}$ строго в четыре раза превышает число аналогичных компонент A_B (например, фермионное поле). В противном случае приходится вводить в рассмотрение так называемые связи (см., например, Дирак, 1961; Фаддеев, 1968), значительно усложняющие анализ теории. «Вырожденные поля», по-видимому, требуют каждый раз индивидуального рассмотрения. Мы кратко коснёмся некоторых общих свойственных им черт в конце этого параграфа.

форма (2.6.20) не приводит к противоречиям лишь в том случае, когда дифференцируемая функция зависит от канонических импульсов лишь в комбинации с вектором нормали: $\Pi^{B\alpha}n_{\alpha}$.

В классической механике скобки Пуассона часто вводятся, исходя из дифференцирования по времени некоторой функции координат и импульсов (можно также исходить из так называемых скобок Лагранжа и строить обратные им выражения, но такой путь сложнее). В теории поля при установлении вида скобок Пуассона мы также будем исходить из результатов дифференцирования некоторой функции канонических координат и импульсов $F(A_B, \Pi^{B\alpha})$ по геометрическим координатам x^{β}, заметив сначала, что символические уравнения (2.6.17) и (2.6.18) являются не чем иным, как *уравнениями Гамильтона в теории поля*, так что их следует использовать при выводе скобок Пуассона точно так же, как это делалось в классической механике.

Подставляя в выражение для производной некоторой функции F

$$\frac{\partial F}{\partial x^{\beta}}=\frac{\partial F}{\partial A_B}A_{B,\,\beta}+\frac{\partial F}{\partial \Pi^{B\alpha}}\Pi^{B\alpha}_{\ \ ,\beta} \tag{2.6.23}$$

производные канонических координат и импульсов из уравнений Гамильтона (2.6.17) и (2.6.18), мы получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x^{\beta}}=\int\left[\frac{\partial F(\xi)}{\partial A_B(\xi)}\frac{\Delta^{\sigma}P_{\beta}}{\Delta\Pi^{\beta\gamma}(\xi)}\delta^{\gamma}(x,\xi)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F(\xi)}{\partial \Pi^{B\gamma}(\xi)}\frac{\Delta^{\gamma}P_{\beta}}{\Delta A_B(\xi)}\delta^{\sigma}(x,\xi)\right]dS_{\sigma}^{(\xi)}, \tag{2.6.24}$$

а так как (см. § 8.4)

$$\frac{\Delta^{\gamma}F(x)}{\Delta A_B(\xi)}=\frac{\partial F(\xi)}{\partial A_B(\xi)}\delta^{\gamma}(x,\xi) \tag{2.6.25}$$

и

$$\frac{\Delta^{\sigma}F(x)}{\Delta\Pi^{B\gamma}(\xi)}=\frac{\partial F(\xi)}{\partial\Pi^{B\gamma}(\xi)}\delta^{\sigma}(x,\xi), \tag{2.6.26}$$

то окончательно имеем определение классических скобок Пуассона в теории поля

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x^{\beta}}=\{F(x),P_{\beta}\}\overset{\text{Def}}{=}\int\left[\frac{\Delta^{\tau}F(x)}{\Delta A_B(\xi)}\frac{\Delta^{\sigma}P_{\beta}}{\Delta\Pi^{B\tau}(\xi)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Delta^{\sigma}F(x)}{\Delta\Pi^{B\tau}(\xi)}\frac{\Delta^{\tau}P_{\beta}}{\Delta A_B(\xi)}\right]dS_{\sigma}^{(\xi)}. \tag{2.6.27}$$

Мы были вынуждены воспользоваться здесь интегральным выражением, так как в дальнейшем скобки Пуассона должны записываться также для двух функционалов, а не только для функции и функционала. Кроме того, только такое выражение обладает характерными для обыкновенных скобок Пуассона свойствами (например, антисимметрией относительно перестановки входящих в них величин).

Итак, классические скобки Пуассона в теории поля имеют, при нашем подходе, вид

$$\{F,G\}\overset{\text{Def}}{=}\int\left[\frac{\Delta^{\tau}F}{\Delta A_B}\frac{\Delta^{\sigma}G}{\Delta\Pi^{B\tau}}-\frac{\Delta^{\sigma}F}{\Delta\Pi^{B\tau}}\frac{\Delta^{\tau}G}{\Delta A_B}\right]dS_{\sigma}. \tag{2.6.28}$$

Если же как F, так и G являются не функционалами, а функциями [в выражении (2.6.28) они обе могут быть и функционалами!], то на основании определений (2.6.25) и (2.6.26) получим

$$\{F(x), G(x')\} = \left(\frac{\partial F}{\partial A_B}\frac{\partial G}{\partial \Pi^{B\tau}} - \frac{\partial F}{\partial \Pi^{B\tau}}\frac{\partial G}{\partial A_B}\right)\delta^\tau(x, x'). \tag{2.6.29}$$

Приведем теперь конкретные результаты применения скобок Пуассона в теории поля к различным величинам для того, чтобы показать, насколько далеко простирается аналогия между механическими и полевыми закономерностями. Сначала введем следующие удобные обозначения:

$$\Pi^C = \int \Pi^{C\sigma}\,dS_\sigma \tag{2.6.30}$$

и

$$A_{B\sigma} = \int A_B\,dS_\sigma. \tag{2.6.31}$$

Выпишем теперь значения скобок Пуассона для различных величин (проверка этих значений не представляет затруднений):

$$\{A_B(x), \Pi^{C\alpha}(x')\} = \delta_B^C\,\delta^\alpha(x, x'), \tag{2.6.32}$$

$$\{A_B(x), \Pi^C\} = \delta_B^C, \tag{2.6.33}$$

$$\{A_{B\sigma}, \Pi^{C\tau}(x)\} = \delta_B^C\,\delta_\sigma^\tau, \tag{2.6.34}$$

$$\{A_{B\sigma}, \Pi^C\} = \delta_B^C \int dS_\sigma, \tag{2.6.35}$$

$$\{A_B(x), \mathbf{M}_\beta^{\tau\alpha}(x')\} = a_B|_\beta^\alpha\,\delta^\tau(x, x'), \tag{2.6.36}$$

$$\{A_B, S_\beta{}^\alpha\} = a_B|_\beta^\alpha, \tag{2.6.37}$$

$$\{A_{B\sigma}, S_\beta{}^\alpha\} = \int a_B|_\beta^\alpha\,dS_\sigma, \tag{2.6.38}$$

$$\{\mathbf{M}_\beta^{\tau\alpha}(x), \Pi^{B\nu}(x')\} = \Pi^{C\tau}a_C^B|_\beta^\alpha\,\delta^\nu(x, x'), \tag{2.6.39}$$

$$\{S_\beta{}^\alpha, \Pi^{B\nu}(x)\} = \Pi^{C\tau}n_\tau n^\nu a_C^B|_\beta^\alpha, \tag{2.6.40}$$

$$\{\mathbf{M}_\beta^{\tau\alpha}(x), \Pi^B\} = \Pi^{C\tau}(x)\,a_C^B|_\beta^\alpha(x) \tag{2.6.41}$$

$$\{S_\beta{}^\alpha, \Pi^B\} = \int \Pi^{C\sigma}a_C^B|_\beta^\alpha\,dS_\sigma, \tag{2.6.42}$$

$$\{S_\beta{}^\alpha, P_\sigma\} = \int M^{\omega\alpha}{}_{\beta,\sigma}\,dS_\omega. \tag{2.6.43}$$

Из этих выражений видно, прежде всего, что операция интегрирования может быть внесена внутрь скобок Пуассона, как если бы они представляли собой просто алгебраические конструкции из величин, стоящих в этих скобках. В самом деле, например,

$$\int \{\mathbf{M}_\beta^{\tau\alpha}(x), \Pi^{B\nu}(x')\}\,dS_\tau^{(x)} = \Pi^{C\tau}n_\tau n^\nu a_C^B|_\beta^\alpha, \tag{2.6.44}$$

что можно сравнить с выражениями (2.6.40) и (2.6.39), а также [см. (2.6.43)]

$$\{M_\beta^{\tau\alpha}, P_\sigma\} = M_{\beta,\sigma}^{\tau\alpha},$$
$$\int \{M_\beta^{\tau\alpha}, P_\sigma\}\, dS_\tau = \int M_{\beta,\sigma}^{\lambda\alpha}\, dS_\tau. \tag{2.6.45}$$

Такое соответствие делает весьма вероятным обычный путь перехода от классической теории к квантовой с помощью предлагаемых скобок Пуассона в теории поля.

Кроме того, как легко проверить, классические скобки Пуассона в теории поля обладают следующими алгебраическими свойствами: антисимметрией, о которой уже говорилось,

$$\{F, G\} = -\{G, F\}; \tag{2.6.46}$$

$$\{F, G+H\} = \{F, G\} + \{F, H\}; \tag{2.6.47}$$

$$\{F, GH\} = G\{F, H\} + \{F, G\}H; \tag{2.6.48}$$

$$\{FH, G\} = F\{H, G\} + \{F, G\}H; \tag{2.6.49}$$

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} \text{ (тождество Якоби)}; \tag{2.6.50}$$

$$\frac{\partial}{\partial A_B}\{F, H\} = \left\{\frac{\partial F}{\partial A_B}, H\right\} + \left\{F, \frac{\partial H}{\partial A_B}\right\}. \tag{2.6.51}$$

Эти свойства будут полезны при формулировке основ вторичного квантования полей.

Заметим теперь, что уравнения Гамильтона (2.6.17) и (2.6.18) следуют из вариационного принципа. Введем для этого интегральный 4-лагранжиан:

$$L_\beta = \int \mathrm{L}\, dS_\beta \tag{2.6.52}$$

и выразим через него интегральный «вектор» энергии-импульса системы как

$$P_\beta = \int \Pi^{B\alpha} A_{B,\beta} dS_\alpha - L_\beta. \tag{2.6.53}$$

Варьируя теперь интеграл действия

$$J = \int L_\beta\, dx^\beta = \int \Pi^{B\alpha} A_{B,\beta}\, dS_\alpha\, dx^\beta - \int P_\beta\, dx^\beta \tag{2.6.54}$$

по каноническим координатам и импульсам, получаем уравнения поля в форме (2.6.17) и (2.6.18).

При выводе уравнений, обобщающих уравнение Гамильтона — Якоби классической механики, следует произвести сдвиг верхнего (во времени) предела области интегрирования в (2.6.54), взяв для удобства эту область в форме гиперцилиндра. После соответствующих выкладок получим

$$\frac{\partial J}{\partial x^\mu} = -P_\mu, \tag{2.6.55}$$

а так как то же варьирование дает

$$\frac{\Delta^\alpha J}{\Delta A_B} = \Pi^{B\alpha}, \tag{2.6.56}$$

то уравнения (2.6.55) могут быть названы полевыми символическими уравнениями Гамильтона — Якоби, в которых интегральный гамильтониан P_μ рассматривается как функционал A_B, $\Delta^\alpha J / \Delta A_B$.

В предлагаемой теории могут быть также определены канонические преобразования для полей (Мицкевич, 1965а). Интересно, что эти преобразования вполне аналогичны каноническим преобразованиям классической механики (конечно, при введении интегрирования по гиперповерхности). С другой стороны, классическую теорию поля можно рассматривать как «первично-квантованную» (не вторично квантованную!) теорию по сравнению с механикой точек, причем стандартный процесс такого квантования, как известно, приводит к переходу от канонических преобразований классической механики к унитарным преобразованиям квантовой механики (аналогу теории поля с волновой функцией, квадрат которой имеет смысл плотности вероятности, вместо потенциала поля). В теории поля к подобному изменению канонических преобразований приводит вторичное квантование.

В заключение рассмотрим другой способ введения классических скобок Пуассона, удобный в дальнейшем для проведения вторичного квантования физических полей. Этот способ был предложен Пайерлсом (1952); мы будем говорить здесь не о первоначальной формулировке этого метода, а об обобщении его на 4-мерный симметричный подход, которому было посвящено предыдущее изложение.

Исходя из интегрального 4-лагранжиана (2.6.52) и действия в форме (2.6.54), мы рассматриваем плотность возмущенного лагранжиана

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \lambda\Phi\cdot\delta^{(4)}(x, x'), \tag{2.6.57}$$

тогда интеграл действия будет соответственно возмущен:

$$J' = J + \lambda\Phi, \tag{2.6.58}$$

где Φ — некоторая функция канонических координат и импульсов, а λ — бесконечно малый параметр, причем нас интересуют в дальнейшем лишь члены до первого порядка малости включительно. Соответственно возмущению действия должны быть модифицированы уравнения поля и их решения, причем все эти возмущения можно разлагать по степеням параметра λ. Так, в первом порядке мы получим

$$A_B'(x) = A_B(x) + \lambda\mathbf{D}_\Phi A_B(x). \tag{2.6.59}$$

Из формы возмущенного лагранжиана (2.6.57) видно, что возмущение действует в момент $t = t'$, так что при использовании запаздывающих решений физическая система не должна «знать» о возмущении до этого момента (пригодны старые решения). Выражаясь на релятивистском языке, функция $\mathbf{D}_\Phi A_B(x)$ должна обращаться в нуль вне светового конуса с вершиной в точке x', уходящего в будущее. Подобным же образом можно рассматривать и опережающие решения

$$\dot{A}_B(x) = A_B(x) + \lambda\mathfrak{A}_\Phi A_B(x), \tag{2.6.60}$$

где функция $\mathfrak{A}_\Phi A_B(x)$ равна нулю вне светового конуса с вершиной в точке x', уходящего в прошлое. Можно было бы ввести и «размазанные» во времени возмущения, взяв в качестве Φ в сотношении (2.6.58) не функцию, а интеграл [1], который не должен включать бесконечно удаленные во времени (в прошлом и в будущем) области. Тогда вместо светового конуса следовало бы рассмотреть стремление к $\pm\infty$ гиперповерхностей, аналогичных этому конусу, а вместо точного равенства нулю можно было бы взять стремление к нулю в пределе.

Если теперь вместо A_B рассматривать какую-либо функцию полевых переменных, Ψ, то и ее изменение можно записать в виде

$$\Psi' = \Psi + \lambda\mathbf{D}_\Phi\Psi \tag{2.6.61}$$

[1] Подчеркнем, что здесь бралась функция, а не функционал канонических координат и импульсов даже в выражении для интеграла действия, согласно подходу, предложенному Пайерлсом.

в первом случае и

$$\Psi' = \Psi + \lambda \mathfrak{A}_\Phi \Psi \tag{2.6.62}$$

— во втором. Пайерлс предложил определить скобки Пуассона через эти изменения функций как

$$\lambda \cdot \{\Phi, \Psi\} = \mathbf{D}_\Phi \Psi \,\mathfrak{A} - {}_\Phi \Psi. \tag{2.6.63}$$

Действительно, изменение интегрального гамильтониана при возмущении равно

$$\Delta P_\beta = -\lambda \int \Phi \delta^{(4)}(x, x')\, dS_\beta. \tag{2.6.64}$$

Если теперь разбить 4-мерную δ-функцию на ковариантную (многокомпонентную) 3-мерную и (временно-подобную) одномерную в соответствии с формулой

$$\delta^{(4)}(x, x') = \delta^\alpha(x, x') \cdot \delta_\alpha(t, t'), \tag{2.6.65}$$

то мы получим

$$\Delta P_\beta = -\lambda \Phi \delta_\beta(t, t'), \tag{2.6.66}$$

причем одномерная δ-функция обладает свойством

$$\int f \cdot \delta_\beta(t, t')\, dx^\beta = f|_{t=t'}. \tag{2.6.67}$$

Через t мы обозначаем здесь не время, а временно-подобное направление, нормальное к рассматриваемой гиперповерхности, так что равенство $t = t'$ в (2.6.67) означает, что функция берется на этой гиперповерхности. Обращаясь к уравнениям Гамильтона (2.6.18), запишем выражение для возмущенных производных канонического импульса:

$$\Pi'^{B\alpha}{}_{,\beta} = -\frac{\Delta^\alpha P_\beta'}{\Delta A_B} = \Pi^{B\alpha}{}_{,\beta} + \lambda \frac{\Delta^\alpha \Phi}{\Delta A_B} \delta_\beta(t, t'). \tag{2.6.68}$$

Это выражение дает величину производной возмущения импульса, пропорциональную одномерной δ-функции, что означает, как заметил Пайерлс, скачкообразное изменение канонического импульса в момент включения возмущения на величину

$$\Delta \Pi^{B\alpha} = \lambda \frac{\Delta^\alpha \Phi}{\Delta A_B}. \tag{2.6.69}$$

Подобным же образом, пользуясь соотношением, следующим из уравнений Гамильтона (2.6.17),

$$\frac{\Delta^\alpha}{\Delta \Pi^{B\gamma}} \Delta P_\beta = -\lambda \frac{\Delta^\alpha \Phi}{\Delta \Pi^{B\gamma}} \delta_\beta(t, t') = \Delta A_{B,\beta} \cdot \delta_\gamma{}^\alpha, \tag{2.6.70}$$

найдем величину скачка канонических координат при включении возмущения:

$$\Delta A_B \cdot \delta_\gamma{}^\alpha = -\lambda \frac{\Delta^\alpha \Phi}{\Delta \Pi^{B\gamma}}. \tag{2.6.71}$$

Очевидно, что, согласно определению вариационной производной (8.3.7), изменение некоторой функции канонических импульсов и координат Ψ при включении возмущения должно записываться в виде

$$\lambda D_\Phi \Psi = \int \left[\frac{\Delta^\sigma \Psi}{\Delta A_B} \Delta_\Phi A_B + \frac{\Delta^\sigma \Psi}{\Delta \Pi^{B\tau}} \Delta_\Phi \Pi^{B\tau} \right] dS_\sigma, \tag{2.6.72}$$

что вследствие (2.6.69) и (2.6.71) поддается следующему преобразованию:

$$\mathbf{D}_{\Phi}\Psi = \int \left[\frac{\Delta^{\sigma}\Psi}{\Delta\Pi^{B\tau}} \frac{1}{\lambda} \Delta_{\Phi}\Pi^{B\tau} + \frac{\Delta^{\tau}\Psi}{\Delta A_B} \frac{1}{\lambda} \Delta_{\Phi} A_B \delta_{\tau}{}^{\sigma} \right] dS_{\sigma} =$$

$$= \int \left[\frac{\Delta^{\tau}\Phi}{\Delta A_B} \frac{\Delta^{\sigma}\Psi}{\Delta\Pi^{B\tau}} - \frac{\Delta^{\sigma}\Phi}{\Delta\Pi^{B\tau}} \frac{\Delta^{\tau}\Psi}{\Delta A_B} \right] dS_{\sigma} = \{\Phi, \Psi\}. \tag{2.6.73}$$

Как уже было отмечено, физические величины при включении возмущения изменяются скачком; таким образом, мы должны положить, что в выражении (2.6.73) функции Φ и Ψ взяты в моменты t_1 и $t_1 + 0$ соответственно. Если бы мы взяли эти же функции в моменты t_1 и $t_1 - 0$, то нашли бы, что возмущение отсутствует:

$$\lambda\, \mathbf{\mathfrak{A}}_{\Phi}\Psi = 0, \tag{2.6.74}$$

как и следовало ожидать из соображений причинности (запаздывание). Совершенно аналогичные соотношения, отличающиеся от только что полученных лишь знаком и порядком моментов времени, справедливы при рассмотрении опережающего взаимодействия, т. е. для $\mathbf{\mathfrak{A}}_{\Phi}\Psi$. Взяв разность этих величин, мы получим выражение, одинаковое для всех моментов времени и совпадающее со скобками Пуассона (2.6.63), что и требовалось доказать.

В случае вырожденных полей (см. примечание на стр. 53) напряженность поля $F_{B\alpha}$ обладает меньшим числом независимых компонент, чем обычная каноническая скорость $A_{B,\,\alpha}$, что связано со свойствами симметрии величин $F_{B\alpha}$, от которых зависит лагранжиан. При этом уравнения

$$F_{B\alpha} = k_{B\alpha}^{C\beta} A_{C,\,\beta} \tag{2.6.75}$$

невозможно разрешить относительно $A_{C,\,\beta}$. Вводя тогда наряду с A_B и $\Pi^{B\alpha}$ величины $\Xi_{C\mu}^{\alpha}$ и $\Sigma^{C\beta}$,

$$\Xi_{C\mu}^{\alpha} = k_{C\mu}^{B\alpha} A_B; \tag{2.6.76}$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma^{C\beta} &= \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial F_{C\beta}}; \\ \Pi^{B\alpha} &= k_{C\beta}^{B\alpha} \Sigma^{C\beta}, \end{aligned}\right\} \tag{2.6.77}$$

получим вместо (2.6.6)

$$\delta P_{\beta} = \int [\Xi_{C\mu,\,\beta}^{\alpha} \delta\Sigma^{C\mu} - \Pi_{,\beta}^{B\alpha} \delta A_B]\, dS_{\alpha}, \tag{2.6.78}$$

так что уравнения Гамильтона в теории поля примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta^{\alpha} P_{\beta}}{\Delta\Sigma^{C\mu}} &= \Xi_{C\mu,\,\beta}^{\alpha}; \\ \frac{\Delta^{\alpha} P_{\beta}}{\Delta A_B} &= -\Pi_{,\beta}^{B\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{2.6.79}$$

Второе из этих уравнений в точности совпадает с (2.6.18), первое же выгодно отличается от (2.6.17) в том отношении, что его левая и правая части всегда обладают одинаковыми свойствами симметрии в группе индексов $C\mu$. Дальнейший анализ скобок Пуассона в вырожденном случае, однако, довольно громоздок и требует индивидуального подхода к различным конкретным полям, так что мы не будем на нем здесь останавливаться.

Полученные в этом параграфе соотношения важны для построения квантовой теории поля и используются в § 6.1, где мы рассматриваем также независимый подход к квантованию, применимый непосредственно в случае вырожденных полей.

3. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ ЭЙНШТЕЙНА

3.1. Лагранжианы метрического (гравитационного) поля

Наиболее удобный и плодотворный подход в теории поля основывается на использовании принципа экстремума действия. В этом параграфе мы дадим сводку различных выражений лагранжиана метрического поля, а последнее будет идентифицировано с гравитационным в следующих параграфах. Эта сводка не претендует на абсолютную полноту и нужна лишь для систематизации гравитационных сохраняющихся величин (§ 3.7).

Общий метод построения лагранжианов физических полей состоит в комбинировании инвариантов, сконструированных из потенциалов этих полей и их производных. В принципе можно было бы брать производные любых порядков, но оказывается достаточным ограничиться такими лагранжианами, из которых следуют уравнения не выше второго порядка для потенциалов. Поэтому и в лагранжианах не следует брать производных выше второго порядка, причем допустимы любые конструкции из самих потенциалов и их первых производных, но вторые производные могут входить лишь в произведении с потенциалами, а не с их производными. Между прочим, именно этот факт позволяет отбросить вторые производные, введя их под знак дивергенции (уравнения поля при этом остаются прежними!); но поле метрического тензора, в противоположность всем другим полям, не допускает ковариантного проведения такой процедуры, так что со вторыми производными потенциалов пишется лагранжиан лишь этого поля.

Кроме инвариантности лагранжианы полей, как оказывается, подчиняются требованию *простоты* (отсутствие высших производных уже отражает существование такого требования). Мы не даем здесь подробной математической формулировки требования простоты и отсылаем читателя к нашей статье (1958а), где проиллюстрирована «работа» такого рода требования. В частности, простейшим инвариантным лагранжианом метрического поля оказывается скалярная кривизна (с точностью до коэффициента):

$$\mathrm{L}_g = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa} R. \tag{3.1.1}$$

Как уже говорилось, вторые производные потенциала (здесь: метрического тензора) можно выделить под знаком дивергенции

$$\mathrm{L}_g = \Lambda + \lambda^{\alpha}{}_{,\alpha}. \tag{3.1.2}$$

Простой расчет дает при этом

$$\Lambda = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa} g^{\mu\nu} (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}) \tag{3.1.3}$$

и

$$\lambda^{\alpha} = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa} (\Gamma^{\nu}_{\beta\nu} g^{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} g^{\beta\nu}). \tag{3.1.4}$$

Мы предупреждали о нековариантности такой процедуры; действительно, величина (3.1.3) является *аффинной* скалярной плотностью, и ее можно локально обратить в нуль, перейдя к геодезической системе. Поэтому, в частности, к величинам, вытекающим из нее в теореме Нётер (а инвариантность относительно линейных преобразований позволяет применить эту теорему и здесь, хотя не в полном ее объеме), теряет свою силу заключения о трансформационных свойствах, полученные в § 2.5 для случая инвариантного лагранжиана.

Однако метрическое поле может быть описано и другими средствами, кроме метрического тензора. Мы будем называть потенциалом поля ту простейшую величину, от которой зависит лагранжиан в данной формулировке. Тогда, если лагранжианы (3.1.1) и (3.1.3) зависели от метрического тензора как от потенциала, то, переходя к тетрадам (детали см. в § 8.7), мы можем *ковариантным образом*, в противоположность (3.1.2), выделить дивергенциальный член, уносящий вторые производные тетрад; в этом случае лагранжиан метрического (тетрадного) поля, не включающий вторых производных, примет вид

$$\mathbf{L}_{\mathrm{tetr}} = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}\left(\Delta_{\gamma[\alpha\beta]}\Delta^{\beta[\alpha\gamma]} - \Delta_{[\beta\alpha]}\,\Delta_{\gamma}^{[\gamma\alpha]}\right). \tag{3.1.5}$$

Если же обратиться к зоммерфельдовскому представлению γ-матриц, обобщенному на случай общей теории относительности (см. § 8.6), то соответствующий лагранжиан метрического поля запишется как

$$\mathbf{L}_{\gamma} = \frac{\sqrt{-g}}{8\varkappa}\,\mathrm{Sp}\,(\overset{\alpha}{\gamma}_{;\nu}\overset{\nu}{\gamma}_{;\alpha} - \overset{\alpha}{\gamma}_{;\alpha}\overset{\nu}{\gamma}_{;\nu}). \tag{3.1.6}$$

Подобная же операция возможна и в кватернионном представлении метрического поля:

$$\mathbf{L}_{q} = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}\,(\overset{\alpha}{\sigma}_{;\nu}\overset{\nu}{\sigma}_{;\alpha} - \overset{\alpha}{\sigma}_{;\alpha}\overset{\nu}{\sigma}_{;\nu}) \tag{3.1.7}$$

(см. § 8.8). Наконец, двуметрический формализм (§ 8.5) дает просто «тензорное продолжение» лагранжиана (3.1.3):

$$\Lambda_{\mathrm{cov}} = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}\,g^{\mu\nu}\,(\overset{\alpha}{\Pi}_{\mu\nu}\overset{\beta}{\Pi}_{\alpha\beta} - \overset{\alpha}{\Pi}_{\beta\mu}\overset{\beta}{\Pi}_{\alpha\nu}). \tag{3.1.8}$$

Следует заметить, что при выводе законов сохранения из этого лагранжиана приходится учитывать некоторые нюансы (см. Мицкевич, 1965б), без которых можно обойтись, специфическим образом добавив (также с помощью дивергенции) вторые производные, так что получается другой лагранжиан двуметрического формализма:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{bm} = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}\Big[\frac{3}{4}\,g_{\omega\varepsilon|\sigma|\tau}\Big(g^{\omega\sigma}g^{\varepsilon\tau} - \frac{1}{2}\,g^{\omega\varepsilon}g^{\sigma\tau}\Big) + \overset{\sigma}{\Pi}_{\omega\varepsilon}\overset{\tau}{\Pi}_{\sigma\tau}g^{\omega\varepsilon} - {}\\ - \frac{5}{2}\,\overset{\tau}{\Pi}_{\omega\sigma}\overset{\sigma}{\Pi}_{\varepsilon\tau}g^{\omega\varepsilon} - \frac{3}{4}\,\overset{\lambda}{\Pi}_{\omega\varepsilon}\overset{\rho}{\Pi}_{\sigma\tau}g_{\lambda\rho}g^{\omega\varepsilon}g^{\sigma\tau}\Big].\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Наконец, можно отказаться от плотности скалярной кривизны (3.1.1) как от исходного лагранжиана гравитационного поля и строить новые лагранжианы метрического поля (когда его потенциал — не метрический тензор!) непосредственно из соображений простоты и сравнения с опытными фактами. По такому пути пошли, например, Пеллегрини и Плебаньский (1963), взяв лагранжиан в форме

$$\mathbf{L}_{PP} = \mathbf{L}_{\mathrm{tetr}} + k\sqrt{-g}\,\varepsilon_{\rho\sigma\lambda\nu}g^{\gamma\beta}\Delta_{\sigma[\lambda\nu]}\Delta_{\gamma[\rho\beta]}, \tag{3.1.10}$$

где $\mathbf{L}_{\text{tetr}}$ — лангражиан (3.1.5), а через $\Delta_{\sigma[\lambda\nu]}$ обозначена конструкция

$$\Delta_{\sigma[\alpha\beta]} = (g_\alpha(\lambda),_\beta - g_\beta(\lambda),_\alpha) g_\sigma(\lambda) \equiv \Phi_{\sigma\alpha\beta}. \qquad (3.1.11)$$

Теперь, однако (при $k \neq 0$), теория уже не будет эйнштейновской.

Следует отметить в заключение тот важный факт, что на уровне лагранжиана мы не имеем права накладывать каких-либо дополнительных условий (типа условия Лоренца в электродинамике), если не хотим повлиять на вытекающие из взятого лагранжиана соотношения (например, на сохраняющиеся величины). Дело в том, что член, обращающийся в нуль в силу условия типа Лоренца в лагранжиане, может дать *ненулевой* вклад (с учетом того же условия) в динамических переменных. Простой расчет подтверждает это кажущееся парадоксальным утверждение.

3.2. Уравнения Эйнштейна

Уравнения Эйнштейна — это уравнения для поля метрического тензора. Естественно, что при таком их понимании предполагают, что все лагранжианы зависят непосредственно от $g_{\mu\nu}$, так что можно воспользоваться лишь двумя лагранжианами предыдущего параграфа — (3.1.1) и (3.1.3). Как мы увидим, к тому же результату приводят и все другие лагранжианы $\mathbf{L}_g$, но может появиться существенное различие в выводах, следующих из $\mathbf{L}_f$. Прежде всего мы выведем уравнения Эйнштейна непосредственно для $g_{\mu\nu}$, пользуясь в качестве $\mathbf{L}_g$ плотностью скалярной кривизны с соответствующим коэффициентом (3.1.1).

Для этого удобнее всего воспользоваться *методом Палатини* (Палатини, 1919), который мы лишь незначительно модифицируем. Метод Палатини — это тензорный на каждом этапе вывод уравнений Эйнштейна из вариационного принципа через δ обозначена вариация).

Заметим сначала, что вариация символа Кристоффеля (1.49) является *истинным тензором* в силу закона преобразования (1.45), так как последнее слагаемое в этом законе зависит лишь от соотношения старых и новых координат, а координаты не варьируются. Поэтому к $\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ применимо обычное ковариантное дифференцирование, которое дает

$$(\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda})_{;\rho} = \delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda,\rho} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\tau_{\nu\rho}\delta\Gamma^\mu_{\tau\lambda} - \Gamma^\tau_{\lambda\rho}\delta\Gamma^\mu_{\nu\tau}. \qquad (3.2.1)$$

Антисимметризация по индексам λ и ρ приводит к соотношению

$$(\delta\Gamma_{\nu\lambda})_{;\rho} - (\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho})_{;\lambda} = \delta R^{\mu}_{\cdot\nu\rho\lambda}, \qquad (3.2.2)$$

откуда

$$\delta R_{\nu\rho} = (\delta\Gamma^\lambda_{\nu\lambda})_{;\rho} - (\delta\Gamma^\lambda_{\nu\rho})_{;\lambda}. \qquad (3.2.3)$$

Однако нас интересует вариация плотности скалярной кривизны; поэтому умножим последнее равенство на $\mathbf{g}^{\nu\rho}$ и получим

$$\delta R_{\nu\rho}\mathbf{g}^{\nu\rho} = \delta\mathbf{R} - R_{\nu\rho}\delta\mathbf{g}_{\nu\rho}, \qquad (3.2.4)$$

$$g^{\nu\rho}\delta R_{\nu\rho} = (\mathbf{g}^{\nu\rho}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\lambda} - \mathbf{g}^{\nu\lambda}\delta\Gamma_{\nu\lambda})_{;\rho} \equiv (\mathbf{g}^{\nu\rho}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\lambda} - \mathbf{g}^{\nu\lambda}\delta\Gamma_{\nu\lambda})_{,\rho}. \qquad (3.2.5)$$

Так как дивергенциальный член не дает вклада в уравнения поля, мы можем записать

$$\delta\mathbf{R} = R_{\nu\rho}\delta\mathbf{g}^{\nu\rho} + \mathrm{Div}, \qquad (3.2.6)$$

где через Div обозначено выражение (3.2.5), и так как

$$\delta\mathbf{g}^{\nu\rho} \equiv \sqrt{-g}\,\delta g^{\nu\rho} + g^{\nu\rho}\delta\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\left(\delta g^{\lambda\rho} - \frac{1}{2}g^{\nu\rho}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\right), \qquad (3.2.7)$$

то

$$\frac{\delta \mathbf{R}}{\delta g^{\nu\rho}} = \sqrt{-g}\left(R_{\nu\rho} - \frac{1}{2} g_{\nu\rho} R\right) \equiv \mathbf{G}_{\nu\rho}. \tag{3.2.8}$$

Здесь мы использовали обозначение (1.87) консервативного тензора Эйнштейна $G_{\mu\nu}$.

Так как полный лагранжиан системы полей равен

$$\mathbf{L}_t = \frac{1}{2\varkappa}\mathbf{R} + \mathbf{L}_f, \tag{3.2.9}$$

а тензор энергии-импульса (симметричный) определяется, согласно (2.4.51), как

$$\frac{\delta \mathbf{L}_f}{\delta g^{\nu\rho}} = \frac{1}{2}\mathbf{T}_{\nu\rho} \tag{3.2.10}$$

(знак плюс соответствует противоположной вариантности $g_{\mu\nu}$), то

$$G_{\nu\rho} = -\varkappa T_{\nu\rho} \tag{3.2.11}$$

и являются уравнениями (2.2.10) для метрического тензора. Обычно эти уравнения — *уравнения Эйнштейна* — записывают в виде

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\varkappa T_{\mu\nu}. \tag{3.2.12}$$

Эти уравнения описывают поведение *гравитационного поля*, а тензор $T_{\mu\nu}$ является его *источником* (мы еще будем говорить о принципе соответствия между теориями тяготения Эйнштейна и Ньютона). Выведем теперь уравнения Эйнштейна для γ-матриц в представлении Зоммерфельда для того, чтобы воспользоваться ими в дальнейшем. При этом можно воспользоваться лагранжианом (3.1.6), не содержащим вторых производных, и подставить его в формулу (2.2.23), чтобы получить левую часть уравнений. Итак,

$$\mathbf{L}_g = \frac{\sqrt{-g}}{8\varkappa}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma^{\mu}_{;\nu}\gamma^{\nu}_{;\mu} - \gamma^{\mu}_{;\mu}\gamma^{\nu}_{;\nu}). \tag{3.2.13}$$

Если учесть, что

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial\gamma^{\alpha}{}_{ab}} = -\frac{\sqrt{-g}}{4}\gamma_{\alpha ba} \tag{3.2.14}$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{L}_g}{\partial\gamma^{\alpha}{}_{ab\,;\beta}} = \frac{\sqrt{-g}}{4\varkappa}\,(\gamma^{\beta}_{;\alpha} - \gamma^{\nu}_{;\nu}\delta_{\alpha}{}^{\beta})_{ba}, \tag{3.2.15}$$

то мы получим при такой подстановке

$$\frac{\delta \mathbf{L}_g}{\delta\gamma^{\alpha}{}_{ab}} = -\frac{\mathbf{L}_g}{4}\gamma_{\alpha ba} - \frac{\sqrt{-g}}{4\varkappa}\,(\gamma^{\beta}_{;\alpha;\beta} - \gamma^{\beta}_{;\beta;\alpha})_{ba} +$$

$$+ \frac{\sqrt{-\sigma}}{32\varkappa}\,(\delta_{\alpha}{}^{\varepsilon}\delta_{\omega}{}^{\nu}g_{\lambda\mu} + \delta_{\alpha}{}^{\varepsilon}\delta_{\lambda}{}^{\nu}g_{\omega\mu} + \delta_{\mu}{}^{\varepsilon}\delta_{\omega}{}^{\nu}g_{\lambda\alpha} +$$

$$+ \delta_{\mu}{}^{\varepsilon}\delta_{\lambda}{}^{\nu}g_{\omega\alpha} - g_{\lambda\mu}g_{\omega\alpha}g^{\varepsilon\nu} - g_{\omega\mu}g_{\lambda\alpha}g^{\varepsilon\nu})\,\gamma_{ba}\cdot\mathrm{Sp}\,[\gamma^{\lambda}\gamma_{;\varepsilon} - \gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma}_{;\sigma}\delta_{\varepsilon}{}^{\omega}]_{;\nu} \tag{3.2.16}$$

Множитель в круглых скобках перед знаком шпура симметричен по индексам ω и λ, так что выражение $\gamma^\lambda\gamma^\omega{}_{;\varepsilon}$ под знаком шпура, антисимметричное по этим индексам, можно отбросить. Символ Кронекера в оставшемся слагаемом приводит выражение в упомянутых круглых скобках к виду $2\delta_\lambda{}^\nu g_{\alpha\mu}$. Кроме того, второе слагаемое в (3.2.16), на основании (1.74) [или (1.76)], просто выражается через тензор кривизны Риччи $R_{\mu\nu}$. Поэтому

$$\frac{\delta \mathrm{L}_g}{\delta\gamma^\alpha_{\ ab}} = -\frac{\mathrm{L}_g}{4}\gamma_{\alpha ba} + \frac{\sqrt{-g}}{4\varkappa}R_{\sigma\alpha}\gamma^{\ \ \sigma}_{ba} - \frac{\sqrt{-g}}{16\varkappa}\mathrm{Sp}(\gamma^\nu\gamma^{\ \sigma}_{;\sigma})_{;\nu}\cdot\gamma_{\alpha ba}. \quad (3.2.17)$$

Сравнивая сумму первого и последнего слагаемых в (3.2.17) с выражением для скалярной кривизны (8.6.33), окончательно находим:

$$\frac{\delta \mathrm{L}_g}{\delta\gamma^\alpha_{\ ab}} = \frac{\sqrt{-g}}{4\varkappa}\left[R_{\sigma\alpha} - \frac{1}{2}Rg_{\sigma\alpha}\right]\gamma^{\ \ \sigma}_{ba}. \quad (3.2.18)$$

Отсюда и из выражения для $\mathrm{T}_\alpha{}^\beta$ (2.4.52) следуют уравнения Эйнштейна (3.2.12), в которых, однако, теперь следует писать

$$\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\mathrm{T}_\nu{}^\alpha = g_{\mu\alpha}a^{\ \ \sigma}_{ab}\Big|^{\alpha}_{\nu}\frac{\delta \mathrm{L_f}}{\delta\gamma^\sigma_{\ ab}} = \gamma_{\mu ab}\frac{\delta \mathrm{L_f}}{\delta\gamma^\nu_{\ ab}}. \quad (3.2.19)$$

В силу дважды свернутых тождеств Бианки (1.86) дивергенция левой части уравнений Эйнштейна равна нулю, так что должна обращаться в нуль и дивергенция правой части уравнений:

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (3.2.20)$$

Это совпадает с законом (2.4.50), который выполняется автоматически, но лишь в том случае, когда лагранжиан $\mathrm{L_f}$ зависит непосредственно от $g_{\mu\nu}$. В случае (3.2.19) имеет место закон

$$\mathrm{T}^{\beta}_{\alpha;\beta} + \frac{\delta \mathrm{L_f}}{\delta\gamma^\beta_{\ ab}}\gamma^{\ \ \ \beta}_{ab;\alpha} = 0, \quad (3.2.21)$$

следующий из (2.4.47). Так как равенство

$$\gamma^{\ \beta}_{;\alpha} = 0 \quad (3.2.22)$$

может выполняться *лишь* в *плоском* мире, то, очевидно, из уравнений Эйнштейна следует условие

$$\frac{\delta \mathrm{L_f}}{\delta\gamma^\beta_{\ ab}}\gamma^{\ \ \ \beta}_{ab;\alpha} = 0, \quad (3.2.23)$$

которому должен подчиняться лагранжиан $\mathrm{L_f}$. Однако это «противоречие» проявляется не только в законе для дивергенции $T^{\mu\nu}$. Заметим, что левая часть уравнений Эйнштейна симметрична по μ и ν; значит, должен быть симметричным и тензор $T_{\mu\nu}$. На основании (3.2.19) это соответствует условию

$$\gamma_{\mu ab}\frac{\delta \mathrm{L_f}}{\delta\gamma^\nu_{\ ab}} = \gamma_{\nu ab}\frac{\delta \mathrm{L_f}}{\delta\gamma^\mu_{\ ab}}, \quad (3.2.24)$$

также налагаемому на $\mathrm{L_f}$. Мы вернемся к этим проблемам при рассмотрении фермионных полей (§ 4.5—4.7).

Сравним теперь теории тяготения Эйнштейна и Ньютона, чтобы определить величину эйнштейновской гравитационной постоянной $\varkappa$. В случае всюду слабого поля тензор Римана — Кристоффеля можно записать приближенно как

$$R_{\alpha\mu\nu\lambda} \cong \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\lambda,\mu,\nu} + h_{\mu\nu,\alpha,\lambda} - h_{\alpha\nu,\mu,\lambda} - h_{\mu\lambda,\alpha,\nu}\right), \tag{3.2.25}$$

где

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}. \tag{3.2.26}$$

Главная часть метрического тензора $\delta_{\mu\nu}$ имеет вид (1.25). Переходя к переменным

$$h_{\mu\nu} = y_{\mu\nu} - \frac{1}{2} y\delta_{\mu\nu}, \tag{3.2.27}$$

представим консервативный тензор Эйнштейна, на основании (3.2.25), в виде

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R \approx \frac{1}{2}\left[y_{\mu\nu,\alpha\beta}\delta^{\alpha\beta} + y^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} - y^{\alpha}_{\nu,\alpha\mu} - y^{\alpha}_{\mu,\alpha\nu}\right]. \tag{3.2.28}$$

Как показал Гильберт (Гильберт, 1917; см. также Эддингтон, 1934, стр. 233—234; Вебер, 1962, стр. 120), всегда можно с помощью бесконечно малого преобразования координат (что не нарушает предположения о слабости поля) перейти к такой системе, что

$$y^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0. \tag{3.2.29}$$

Заметим, что для поля произвольной силы это соотношение соответствует условию гармоничности де Дондера — Фока

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0, \tag{3.2.30}$$

которое, конечно, выполняется не всегда, в отличие от условия (3.2.29) для слабого поля; эти два условия связаны друг с другом ввиду соотношения (с точностью до малых первого порядка)

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} - y^{\alpha\beta}. \tag{3.2.31}$$

Из соотношений (3.2.28), (3.2.29) и (3.2.12) следует, что

$$\Box\, y_{\mu\nu} = 2\varkappa T_{\mu\nu}. \tag{3.2.32}$$

Это — уравнения Эйнштейна для слабого поля $\left(\Box = -\,\delta^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right)$, переходящие в статическом случае в уравнения поля тяготения Ньютона. Для перехода к последним необходимо узнать, какая компонента $y_{\mu\nu}$ соответствует ньютоновскому гравитационному потенциалу φ, что будет сделано в § 3.5.

3.3. Решение Шварцшильда

Решением Шварцшильда (1916) называется решение уравнений Эйнштейна (относительно $g_{\mu\nu}$) в случае статического сферически симметричного метрического поля при правой части уравнений Эйнштейна, равной нулю всюду, кроме точки начала координат. Это решение, конечно, можно записать в самых различных координатных системах, но для удобства его вывода необходимо подходящим образом выбрать систему координат.

Так как конкретная, позволяющая проводить непосредственные расчеты запись уравнений поля достигается в общей теории относительности с известным трудом, то мы постараемся привести первоначально уравнения Эйнштейна к пригодному для таких расчетов виду, не сужая чрезмерно наших предположений о выборе формы метрического тензора. Полученные уравнения можно использовать для решения нескольких задач. Мы ограничимся предположением о том, что метрический тензор имеет диагональный вид. Для этого случая уравнения Эйнштейна записывал Толмен (1934); мы дадим здесь иной вывод уравнений в этом случае.

Итак, пусть метрика диагональна, т. е.

$$g^{\mu\nu} = \delta_\mu{}^\nu \varepsilon_\nu a_\nu^2 \tag{3.3.1}$$

и

$$g_{\mu\nu} = \delta_\mu{}^\nu \varepsilon_\nu a_\nu^{-2}, \tag{3.3.2}$$

где по повторяющимся индексам не предполагается суммирования (вплоть до конца этого параграфа мы будем обозначать сумму только знаком Σ!). Необходимую сигнатуру метрики гарантирует значок Эйзенхарта

$$\varepsilon_\nu = \begin{cases} +1 & \text{при } \nu = 0, \\ -1 & \text{при } \nu \neq 0. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Тогда

$$\sqrt{-g} = (a_0 a_1 a_2 a_3)^{-1}. \tag{3.3.4}$$

Диагональность метрики фиксируется выбором наиболее удобной (на наш взгляд) системы координат для статического сферически симметричного поля (а также и для некоторых других случаев).

Переходя к γ-матрицам, введем здесь наряду с переменными матрицами в представлении Зоммерфельда также постоянные дираковские матрицы $\overset{0}{\gamma}{}^\mu$, для которых

$$\mathrm{Sp}\, \overset{0}{\gamma}{}^\mu \overset{0}{\gamma}{}^\nu = 4\delta_\mu{}^\nu \varepsilon_\nu, \tag{3.3.5}$$

так что к метрике (3.3.1) приводит простая конструкция

$$\gamma^\mu = a_\mu \overset{0}{\gamma}{}^\mu. \tag{3.3.6}$$

Вместо того чтобы подставлять тензор $g^{\mu\nu}$ в форме (3.3.1) в уравнения Эйнштейна (3.2.12), мы подставим γ-матрицы в форме (3.3.6) в лагранжиан метрического поля в форме (3.1.6) и проведем варьирование по $\ln a_\nu$, что даст нам требуемые уравнения. Лагранжиан (3.1.6) просто привести к виду

$$\mathrm{L}_g = \frac{1}{8\varkappa}\Big\{\sqrt{-g}\sum_{\mu,\nu}\mathrm{Sp}(\gamma^\mu{}_{,\nu}\gamma^\nu{}_{,\mu}) - \\ - \frac{1}{\sqrt{-g}}\mathrm{Sp}\Big[\sum_\nu(\gamma^\nu\sqrt{-g})_{,\nu}\Big]^2 + 2\sqrt{-g}\sum_{\mu,\nu,\lambda} g^{\nu\lambda}{}_{,\mu}\Gamma_{\nu\lambda}\Big\}, \tag{3.3.7}$$

где мы благодаря соотношениям типа (1.53) освободились от части ковариантных производных, а другую их часть записали явно. Имея в виду, что символ Кристоффеля в (3.3.7) дает

$$2\sqrt{-g}\sum_{\mu,\nu,\lambda} g^{\nu\lambda}_{,\mu}\ \Gamma_{\nu\lambda}{}^\mu = \sum_{\mu,\nu} 4\sqrt{-g}\,\varepsilon_\mu a_\mu^2[((\ln a_\nu)_{,\mu})^2 - 2((\ln a_\mu)_{,\mu})^2], \tag{3.3.8}$$

мы можем, пользуясь записанными здесь соотношениями, очень просто привести $2\varkappa\mathrm{L}_g$ к виду

$$2\varkappa \mathbf{L_g} = \sqrt{-g} \sum_\nu \varepsilon_\nu a_\nu^2 [-2(\ln a_\nu)_{,\nu} (\ln \sqrt{-g})_{,\nu} -$$

$$-((\ln \sqrt{-g})_{,\nu})^2 + \sum_\mu ((\ln a_\mu)_{,\nu})^2 - 2((\ln a_\nu)_{,\nu})^2]. \qquad (3.3.9)$$

Отсюда видно, что полезно ввести новые обозначения:

$$\ln a_\nu = u_\nu, \quad \ln \sqrt{-g} = -\sum_\sigma u_\sigma \equiv -u, \qquad (3.3.10)$$

причем

$$\frac{\partial u}{\partial u_\tau} = 1, \quad \frac{\partial u_\nu}{\partial u_\tau} = \delta_\nu{}^\tau. \qquad (3.3.11)$$

Тогда лагранжиан поддается следующим упрощающим его преобразованиям:

$$2\varkappa \mathbf{L}_g \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \sum_\nu \varepsilon_\nu e^{2u_\nu - u} \left[2u_{\nu,\nu}(u_{,\nu} - u_{\nu,\nu}) + \sum_\mu u_{\mu,\nu}(u_{\mu,\nu} - u_{,\nu}) \right] =$$

$$= \sum_{\mu\neq\nu} 2\varepsilon_\nu e^{2u_\nu - u} u_{\nu,\nu} u_{\mu,\nu} - \sum_{\mu\neq\lambda} \sum_\nu \varepsilon_\nu e^{2u_\nu - u} u_{\mu,\nu} u_{\lambda,\nu} =$$

$$= - \sum_{\mu,\nu,\lambda,\neq} \varepsilon_\nu e^{2u_\nu - u} \cdot u_{\mu,\nu} u_{\lambda,\nu}. \qquad (3.3.12)$$

Последнее выражение — наиболее простая запись гравитационного лагранжиана при взятом нами виде метрического тензора. Здесь использовано сокращенное обозначение суммы, в которой все индексы, по которым проводится суммирование, принимают лишь *отличные* друг от друга значения: $\sum\limits_{\mu,\nu,\lambda,\neq}$; в дальнейшем нам придется, кроме индексов, по которым производится суммирование, указывать в символе суммы также и фиксированный индекс, к которому также применено указанное условие (*несовпадение значений индексов*); тогда мы будем брать такой фиксированный индекс в скобки, например, $\sum\limits_{\mu,\nu,(\tau),\neq}$.

Вариационная производная лагранжиана (3.3.12) по u_τ записывается также довольно просто:

$$\frac{\delta}{\delta u_\tau}\left(2\varkappa \mathbf{L_g}\right) = \sum_{\mu,\nu,\lambda,\neq} \varepsilon_\nu e^{2u_\nu - u} u_{\mu,\nu} u_{\lambda,\nu} - 2\varepsilon_\tau e^{2u_\tau - u} \sum_{\mu,\lambda,(\tau),\neq} u_{\mu,\tau} u_{\lambda,\tau} +$$

$$+ \sum_{\mu,\nu,\lambda,\neq} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (2\varepsilon_\nu e^{2u_\nu - u} \cdot u_{\lambda,\nu} \delta_\mu{}^\tau). \qquad (3.3.13)$$

Замечая, что

$$\sum_{\mu(\neq\nu,\lambda)} \delta_\mu{}^\tau = 1 - \delta_\nu{}^\tau - \delta_\lambda{}^\tau \qquad (3.3.14)$$

или, иначе,

$$\sum_{\mu,\nu,\lambda,\neq} \text{нечто}_{\nu\lambda} \delta_\mu{}^\tau = \sum_{\nu,\lambda,(\tau),\neq} \text{нечто}_{\nu\lambda}, \qquad (3.3.15)$$

нетрудно привести (3.3.13) к более симметричному виду:

$$\frac{\delta}{\delta u_\tau}(-2\varkappa L_g) = \sum_{\mu, \nu, (\tau), \neq} \{\varepsilon_\tau e^{2u_\tau - u} u_{\mu, \tau} u_{\nu, \tau} +$$
$$+ 2\varepsilon_\nu e^{2u_\nu - u}[u_{\mu, \nu} u_{\mu, \nu} - u_{\mu, \nu} u_{\nu, \nu} - u_{\mu, \nu, \nu}]\} +$$
$$+ \sum_{\mu, \nu, \lambda, (\tau), \neq} \varepsilon_\nu e^{2u_\nu - u} u_{\lambda, \nu} u_{\mu, \nu}. \tag{3.3.16}$$

Это — левая часть уравнений Эйнштейна; правая часть уравнений имеет на основании определения (2.4.51) вид

$$2\varkappa \frac{\delta L_f}{\delta u_\tau} = 2\varkappa \sum_{\mu, \nu} \frac{\delta L_f}{\delta g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial u_\tau} = 2\sqrt{-g}\varkappa \sum_{\mu, \nu} T_{f\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta_\tau{}^\nu. \tag{3.3.17}$$

Запишем окончательно уравнения для u_σ (преобразованные уравнения Эйнштейна):

$$\sum_{\mu, \nu, (\tau), \neq} \{\varepsilon_\tau e^{2u_\tau} u_{\mu, \tau} u_{\nu, \tau} + 2\varepsilon_\nu e^{2u_\nu}[u_{\mu, \nu} u_{\mu, \nu} -$$
$$- u_{\mu, \nu} u_{\nu, \nu} - u_{\mu, \nu, \nu}]\} + \sum_{\mu, \nu, \lambda, (\tau), \neq} \varepsilon_\nu e^{2u_\nu} u_{\lambda, \nu} u_{\mu, \nu} = 2\varkappa T_{f\tau}^{\tau}. \tag{3.3.18}$$

Будем теперь искать решение этих уравнений при конкретных предположениях о форме $T_\tau{}^\tau$ и специфике u_μ.

Прежде всего рассмотрим решение Шварцшильда. Вернемся для этого к рассуждениям о системах координат. Очевидно, если выбрать x^1, x^2 и x^3 так, чтобы параметр r, относительно которого требуется сферическая симметрия, был равен $r = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}}$, то автоматически следует предположить полную равнозначность трех координат x^i $(i = 1, 2, 3)$. Поэтому $g_{11} = g_{22} = g_{33}$, и

$$u_1 = u_2 = u_3 = R(r); \qquad u_0 = T(r). \tag{3.3.19}$$

Подтвердим, вместе с тем, допустимость предположения о диагональности метрики. Произведем для этого инверсию *одной* пространственной координаты x^a (индекс a фиксирован). Тогда

$$g'_{\mu\alpha}(x') = -g_{\mu\alpha}(x), \tag{3.3.20}$$

если

$$x'^\mu = x^\mu, \quad x'^a = -x^a, \quad \mu \neq a. \tag{3.3.21}$$

Такая инверсия в силу симметрии и неизменности r, не должна ничего изменить, и штрихованный метрический тензор должен быть равен нештрихованному, так что в силу (3.3.20) недиагональные компоненты должны обратиться в нуль. Конечно, все это зависит от выбора системы координат, но самая возможность диагонализации метрического тензора сразу во всем пространстве — времени является следствием сферической симметрии.

Заметим, что $(R' = dR\,/\,dr)$

$$\left.\begin{aligned} &R_{,i} = R'\frac{x^i}{r}, \quad \sum_i (R_{,i})^2 = (R')^2, \\ &\sum_i R_{,i,i} = \Delta R = R'' + \frac{2}{r}R'; \end{aligned}\right\} \tag{3.3.22}$$

аналогичные выражения могут быть записаны и для $T(r)$.

Рассмотрим сначала уравнение (3.3.18) для $T^{\tau}_{i\tau}=0$ при $\tau=0$. Ввиду статического характера поля получим

$$\sum_{i,j,k,\neq} u_{j,i}u_{k,i}-2\sum_{i,j,\neq} u_{j,ii}=0. \tag{3.3.23}$$

Раскрытие этих сумм дает

$$\Delta R-\frac{1}{2}(R')^2=0. \tag{3.3.24}$$

Здесь удобно использовать подстановку

$$R(r)=-2\ln\alpha(r), \tag{3.3.25}$$

приводящую уравнение (3.3.24) к виду

$$\Delta\alpha=0. \tag{3.3.26}$$

Имея в виду, что при $r=0$ может существовать особенность, следует взять решение этого уравнения в виде

$$\alpha(r)=\frac{C}{r}+\mathrm{const}. \tag{3.3.27}$$

Константу интегрирования определим из тех соображений, что на пространственной бесконечности мир предполагается плоским, так что при $r\to\infty$, $g_{ii}\to-1$, $a_i\to 1$, $R\to 0$:

$$\alpha=1+\frac{C}{r}. \tag{3.3.28}$$

Примем теперь $\tau=k$. Тогда уравнение (3.3.18) при $T^{\tau}_{i\tau}=0$ примет вид

$$\sum_{\mu,\nu,(k),\neq} u_{\mu,k}u_{\nu,k}+2\sum_{\mu,i,(k),\neq}(u_{\mu,i}u_{\mu,i}-u_{\mu,i}u_{i,i}-$$
$$-u_{\mu,i,i})+\sum_{\mu,i,\lambda\ (k),\neq} u_{\lambda,i}u_{\mu,i}=0. \tag{3.3.29}$$

Явно выделяя в этих суммах временны́е и пространственные члены и производя приведение подобных, получаем

$$-\Delta T-\Delta R+T_{,k,k}+R_{,k,k}+2T_{,k}R_{,k}+$$
$$+R_{,k}R_{,k}-T_{,k}T_{,k}+(T')^2=0. \tag{3.3.30}$$

Мы получили систему уравнений, каждое из которых содержит ряд одинаковых членов, которые полезно выделить. Для этого мы воспользуемся соотношениями (3.3.22) и выражениями типа

$$T_{,k,k}=\frac{1}{r}T'-\frac{x^kx^k}{r^3}T'+\frac{x^kx^k}{r^2}T''. \tag{3.3.31}$$

Тогда мы получим

$$\Delta T+\Delta R-(T')^2-\frac{1}{r}T'-\frac{1}{r}R'=$$
$$=\frac{x^kx^k}{r^2}\left[\Delta T+\Delta R-\frac{3}{r}T'-\frac{3}{r}R'+(R')^2-(T')^2+2T'R'\right]. \tag{3.3.32}$$

Обе части этого равенства должны обращаться в нуль порознь ввиду присутствия справа множителя $x^k x^k$. Сравнивая выражения в обеих частях, можно заключить, что

$$\frac{2}{r}(T+R)' = R'(R+2T)'. \tag{3.3.33}$$

Подставляя сюда (3.3.25) и полагая

$$T(r) = \ln\alpha(r) - \ln\beta(r), \tag{3.3.34}$$

получаем уравнение

$$\alpha'\beta + \beta'\alpha = -2r\alpha'\beta'. \tag{3.3.35}$$

Решением этого уравнения, с учетом (3.3.28), является

$$\beta = 1 - \frac{C}{r}, \tag{3.3.36}$$

где уже определено значение константы интегрирования на основании поведения метрического тензора на бесконечности. Переходя к первоначальным переменным, можно записать полученное решение в виде

$$a_1 = a_2 = a_3 = \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-2} \tag{3.3.37}$$

и

$$a_0 = \left(\frac{1+\frac{C}{r}}{1-\frac{C}{r}}\right), \tag{3.3.38}$$

или для метрического тензора

$$g_{00} = \left(\frac{1-\frac{C}{r}}{1+\frac{C}{r}}\right), \tag{3.3.39}$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\left(1 + \frac{C}{r}\right)^4.$$

Тогда квадрат четырехмерного интервала имеет простой вид

$$ds^2 = \left(\frac{1-\frac{C}{r}}{1+\frac{C}{r}}\right)^2 dt^2 - \left(1+\frac{C}{r}\right)^4 dl^2, \tag{3.3.40}$$

где

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{3.3.41}$$

в декартовой и

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{3.3.42}$$

в сферической системе координат. Использованная здесь система носит название *однородной* системы координат, так как в ней $g_{11} = g_{22} = g_{33}$. Она весьма удобна, но не по той причине, как ошибочно полагают некоторые авторы [например, Эддингтон, 1934, стр. 172], что *только* в ней скорость света одинакова во всех направлениях. Однако часто пользуются координатами кривизн; их иногда просто называют сферическими, в которых

$$ds^2 = \left(1 - \frac{C'}{r'}\right)dt^2 - \frac{dr'^2}{1 - \dfrac{C'}{r'}} - r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (3.3.43)$$

Решение Шварцшильда характерно тем, что имеет резко различные свойства в двух указанных системах координат, хотя переход между этими системами осуществляется простым преобразованием:

$$r' = r\left(1 + \frac{C}{r}\right)^2, \qquad (3.3.44)$$

причем

$$C' = 4C. \qquad (3.3.45)$$

Это преобразование, однако, своеобразным образом смешивает разные области пространства; можно, например, установить такие соответствия:

$$r' = \infty \leftrightarrow \begin{cases} r = 0, \\ r = \infty; \end{cases} \qquad (3.3.46)$$

$$r' = C' = 4C \leftrightarrow r = C \qquad (3.3.47)$$

и

$$r' = 0 \leftrightarrow r = -C. \qquad (3.3.48)$$

Последнее, очевидно, не имеет смысла, так как r, по своему определению,— величина положительная.

В форме (3.3.43) решение Шварцшильда испытывает удивительное превращение на «особой сфере» $r' = C'$, когда первые два слагаемых в (3.3.43) меняют знаки. Если мы требуем, чтобы положительный член в квадрате интервала определял *время*, то следует заключить, что временна́я и радиальная координаты меняются здесь местами, и метрика становится внутри «особой сферы» принципиально нестатической:

$$ds^2 = \frac{d\bar{t}^2}{C'/\bar{t} - 1} - \left(\frac{C'}{\bar{t}} - 1\right) d\bar{r}^2 - \bar{t}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (3.3.49)$$

Однако это «время» ограничено сверху величиной C', по «истечении» которой метрика становится снова статической (3.3.43), а вторгнувшийся в сферу объект оказывается тогда «вытолкнутым». Впрочем, исследованию особенности такой формы интервала посвящено много работ, и их обзор потребовал бы надолго отклониться от нашей темы [1].

В форме (3.3.40) решение Шварцшильда всегда сохраняет время и пространство описываемыми одними и теми же переменными; однако выясняется одно не менее удивительное, чем в предыдущем случае, обстоятельство относительно топологии (связности) мира. Производя преобразование «выворачивания» вселенной

$$r'' = C^2 / r, \qquad (3.3.50)$$

мы приходим опять к той же самой метрике (3.3.40), т. е. внутренняя область особой сферы в этом случае оказывается точно такой же, как и внешняя по отношению к ней область. Такую симметрию удобно продемонстрировать еще и таким образом. Возьмем окружность координатного [2] (не

[1] См., например, Финкельштейн (1958), Крускал (1960), Новиков (1962), Галкин (1963), Фронсдаль (1959).

[2] Напомним, что r — лишь радиальная координата, но отнюдь не физическое расстояние от начала координат.

инвариантного!) радиуса r с центром в начале координат. Инвариантный элемент ее дуги равен

$$d\lambda = \sqrt{-ds^2}, \tag{3.3.51}$$

причем $dt = 0$, $dr = 0$ и $d\theta = 0$ (взята «экваториальная» окружность $\theta = \pi/2$). Поэтому

$$d\lambda = \left(1 + \frac{C}{r}\right)^2 r d\varphi. \tag{3.3.52}$$

Полная длина этой окружности (от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$) равна

$$\lambda = 2\pi r \left(1 + \frac{C}{r}\right)^2. \tag{3.3.53}$$

При больших r с ростом r растет и λ, стремясь к бесконечности при $r \to \infty$ как $2\pi r$ (по закону, асимптотически совпадающему с законом для плоского пространства). При малых r и $r \to 0$ вновь $\lambda \to \infty$ (!). Иначе говоря, при стягивании окружности к «точке» $r = 0$ ее длина неограниченно возрастает, и притом точно так же, как при $r \to \infty$. Действительно, воспользовавшись преобразованием (3.3.50), переводящим $r = \infty$ в $r = 0$ и $r = 0$ в $r = \infty$, получим

$$\lambda = 2\pi r'' \left(1 + \frac{C}{r''}\right)^2, \tag{3.3.54}$$

т. е. обнаружим *форм-инвариантность* λ относительно такого преобразования! Итак, внутри сферы $r = C$ заключается такой же обширный и вообще во всех отношениях такой же мир, как и вне этой сферы, а на их границе существует перемычка конечного размера, так как минимальная длина нашей окружности равна

$$\lambda_{\min} = 8\pi C \tag{3.3.55}$$

(окружность эта в принципе не может быть стянута в настоящую точку!).

Лучше всего можно использовать указанные своеобразные свойства метрики Шварцшильда, введя новые координаты; при этом новая «радиальная» переменная ρ принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$ и обращается в нуль на прежней «особой сфере»; разрешим там преобразования координат, не сохраняющие непрерывными высшие производные старых координат по новым. Такая непрерывность для предлагаемого преобразования имеет место во всех прочих точках пространства. Действительно, взяв

$$\rho = \begin{cases} r - C & \text{при} \quad r > C, \\ C\left(1 - \dfrac{C}{r}\right) & \text{при} \quad r < C, \end{cases} \tag{3.3.56}$$

получим

$$d\rho = \begin{cases} dr & \text{при} \quad r > C, \\ \dfrac{C^2}{r^2} dr & \text{при} \quad r < C, \end{cases} \tag{3.3.57}$$

а квадрат интервала примет одинаковый для $\rho > 0$ и $\rho < 0$ вид:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2C}{|\rho|}\right)^{-2} dt^2 - \left(\frac{1 + \dfrac{2C}{|\rho|}}{1 + \dfrac{C}{|\rho|}}\right)^4 \cdot [d\rho^2 + (|\rho| + C)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \tag{3.3.58}$$

При $\rho = 0$ ($r = C$) оба варианта ($\rho > 0$ и $\rho < 0$) сшиваются. Конечно, «точка» $\rho = 0$ при этом не становится истинной точкой в топологическом смысле, т. е. в ней окружность не стягивается в нуль. Для полной симметрии можно себе также представить совмещение $+\infty$ и $-\infty$ в новых координатах, что, впрочем, ничего не меняет. Возможно, что новые координаты t, ρ, θ и φ лучше отражают физическую (геометрическую) ситуацию, чем использовавшиеся ранее.

Перейдем к важному вопросу об источнике поля Шварцшильда. Нам нужно исследовать вопрос о том, какая особенность присутствует в правой части уравнений Эйнштейна и соответствует особенности в выражении (3.3.27). Для этого вспомним уравнение в форме (3.3.18). Если не отбрасывать его правую часть, то вместо уравнения (3.3.24) следует писать

$$\Delta R - \frac{1}{2}(R')^2 = \frac{\varkappa}{2} T_{t0}{}^0 e^{-2R}, \tag{3.3.59}$$

а после подстановки (3.3.25) —

$$\Delta\alpha = -\frac{\varkappa}{4}\alpha^5 T_{t0}{}^0. \tag{3.3.60}$$

Используя полученное решение (3.3.28), без труда находим

$$T_{t0}{}^0 = \frac{16\pi C}{\varkappa\alpha^5}\delta(\mathbf{r}) = \frac{16\pi C}{\varkappa}\frac{\delta(\mathbf{r})}{\left(1+\frac{C}{r}\right)^5}. \tag{3.3.61}$$

Итак, источники гравитационного поля в случае решения Шварцшильда не равны нулю всюду: в начале координат имеется особенность. Эта особенность приведена здесь в виде, не согласующемся с нашими выводами о топологических свойствах решения Шварцшильда, так как она не инвариантна относительно преобразования «выворачивания» (3.3.50). Однако ее можно до некоторой степени исправить, имея в виду, что наличие в тензоре (3.3.61) δ-функции фиксирует лишь величину множителя при этой функции в точке ее особенности.

3.4. Решение Фридмана. Расширяющаяся Вселенная

В предыдущем параграфе было получено уравнение (3.3.18), эквивалентное уравнениям Эйнштейна, записанным для специального случая, когда метрический тензор всюду диагонален. Таким образом, это уравнение пригодно для отыскания и других решений, кроме шварцшильдовского. Именно, одно из важнейших космологических решений — решение Фридмана (1922) может быть очень просто получено из уравнения (3.3.18).

В пространстве — времени Фридмана метрика конформно псевдоэвклидова. Это значит, что интервал может быть записан как

$$ds^2 = G^2(x)(dt^2 - dl^2), \tag{3.4.1}$$

так что

$$g_{\mu\nu} = G^2(x)\varepsilon_\nu\delta_\mu{}^\nu. \tag{3.4.2}$$

Если предположить, что пространство—время однородно, то форма (3.4.1) показывает, что функция $G(x)$ должна быть форм-инвариантна относительно преобразований, оставляющих форм-инвариантным интервал псевдоэвклидова мира в декартовых координатах, которому конформна наша метрика; эти преобразования являются лоренцовыми в таком псевдоэвклидовом мире. Следовательно, функция G должна быть

$$G(x) = G(S), \tag{3.4.3}$$

где

$$S = t^2 - l^2 = \sum_\nu \varepsilon_\nu x^\nu x^\nu. \tag{3.4.4}$$

Тогда, возвращаясь к обозначениям предыдущего параграфа,

$$a_\nu = e^u = G^{-1} \tag{3.4.5}$$

и

$$u_\nu = -\ln G = U. \tag{3.4.6}$$

Прежде всего можно заметить некоторое упрощение уравнения (3.3.18) при данном выборе метрики:

$$\Big\{ \sum_{\mu, \nu, (\tau), \neq} (\varepsilon_\tau u_{\mu,\tau} u_{\nu,\tau} - 2\varepsilon_\nu u_{\mu,\nu,\nu}) + \\ + \sum_{\mu, \nu, \lambda, (\tau), \neq} \varepsilon_\nu u_{\mu,\nu} u_{\lambda,\nu} \Big\} e^{2U} = 2\varkappa T_{\mathrm{f}\tau}^{\tau}. \tag{3.4.7}$$

Подстановка (3.4.5) и (3.4.6) окончательно дает

$$3\varepsilon_\tau (U_{,\tau})^2 + \sum_{\nu, (\tau), \neq} \varepsilon_\nu [(U_{,\nu})^2 - 2U_{,\nu,\nu}] = \varkappa T_{\mathrm{f}\tau} e^{-2U}. \tag{3.4.8}$$

Здесь полезно дополнить суммы до обычных 4-мерных сумм, компенсировав уравнение соответствующими членами:

$$2\varepsilon_\tau [(U_{,\tau})^2 + U_{,\tau,\tau}] + \sum_\nu \varepsilon_\nu [(U_{,\nu})^2 - 2U_{,\nu,\nu}] = \varkappa T_{\mathrm{f}\tau}{}^{\tau} e^{-2U}. \tag{3.4.9}$$

Замечая теперь, что

$$U_{,\tau} = \frac{\varepsilon_\tau x^\tau}{S} U' \tag{3.4.10}$$

и

$$N_{,\tau,\tau} = \frac{\varepsilon_\tau}{S} U' - \frac{x^\tau x^\tau}{S^3} U' + \frac{x^\tau x^\tau}{S^2} U'', \tag{3.4.11}$$

мы без труда выделяем в уравнении (3.4.9) часть, зависящую непосредственно от x^τ:

$$(U')^2 - 2\left(U'' + \frac{2}{S} U'\right) + \\ + 2\varepsilon_\tau \frac{x^\tau x^\tau}{S^2} \left[U'' - \frac{U'}{S} + (U')^2\right] = \varkappa T_{\mathrm{f}\tau}{}^{\tau} e^{-2U}. \tag{3.4.12}$$

Если теперь вспомнить, что речь идет о модели Вселенной, то нетрудно уточнить выражение для симметричного тензора энергии-импульса; предположим, что главную роль во Вселенной играет *вещество*, а не излучение; при этом столкновения в таком веществе несущественны — «давлением» при взаимодействии между галактиками пренебрегаем. Следовательно, можно воспользоваться тензором энергии-импульса некогерентного газа («облака пыли»):

$$T_{\mathrm{f}\tau}{}^{\tau} = \rho v_\tau v^\tau. \tag{3.4.13}$$

Так как левая часть уравнений Эйнштейна в форме (3.4.12) не содержит линейной зависимости от x^τ, а правая их часть квадратична по v^τ, то для того, чтобы можно было удовлетворить этим уравнениям, необходимо потребовать выполнения уравнения

$$U'' + \frac{2}{S}U' - \frac{1}{2}(U')^2 = 0. \tag{3.4.14}$$

Но полученное уравнение формально совпадает с уже исследованным уравнением (3.3.24), если вспомнить последнее из равенств (3.3.22). Поэтому можно сразу же написать решение уравнения (3.4.14), а именно

$$U = -2\ln\left(1 - \frac{A}{S}\right). \tag{3.4.15}$$

Мы изменили здесь выбор постоянной интегрирования так, чтобы перед нею стоял знак минус; причина выбора знаков здесь и в решении Шварцшильда будет ясна из дальнейшего изложения. Подставим теперь полученное решение в уравнение (3.4.12), чтобы найти ρ и v^τ. Получим

$$12A\,\frac{\varepsilon_\tau x^\tau x^\tau}{S^5}\left(1 - \frac{A}{S}\right)^{-6} = \varkappa \hat{T}_{\mathrm{f}\tau}{}^{\tau}. \tag{3.4.16}$$

Учитывая выражение (3.4.13) и обычную величину квадрата 4-мерной скорости

$$\sum_\tau v_\tau v^\tau = 1, \tag{3.4.17}$$

находим

$$\frac{12A}{S^3}\left(1 - \frac{A}{S}\right)^{-6} = \varkappa\rho, \tag{3.4.18}$$

а отсюда —

$$\rho = \frac{12A}{\varkappa S^3 G^3}, \tag{3.4.19}$$

где для краткости мы вернулись к G:

$$G = e^{-U} = \left(1 - \frac{A}{S}\right)^2. \tag{3.4.20}$$

Таким образом (фактически взятое с самого начала) предположение об однородном распределении вещества во Вселенной (в среднем по сравнительно небольшим частям Мегагалактики хорошо подтверждаемое наблюдениями) оправдало себя. Кроме того, такое равномерное распределение поддерживает само себя, обусловливая соответствующий характер движения масс. Найдем выражение для скоростей этих («размазанных») масс. Прежде всего

$$T_{\mathrm{f}\tau\tau} = \varepsilon_\tau G^2 T_{\mathrm{f}\tau}{}^{\tau}, \tag{3.4.21}$$

откуда и из (3.4.16)

$$x^\tau x^\tau \frac{12A}{S^5 G} = \varkappa\rho v_\tau v_\tau, \tag{3.4.22}$$

так что мы приходим к весьма простой зависимости

$$\frac{G^2}{S^2} x^\tau x^\tau = v_\tau v_\tau \tag{3.4.23}$$

или

$$\left.\begin{aligned} v_\tau &= \frac{G}{S}\,\varepsilon_\tau x^\tau, \\ v^\tau &= \frac{x^\tau}{SG}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.24)$$

Полученное решение обладает неожиданно тесным «родством» с решением Шварцшильда. Вспомним в связи с этим преобразование (3.3.50) — «выворачивание» 3-мерного мира, при котором решение Шварцшильда не меняет своей формы. В случае решения Фридмана можно произвести аналогичное 4-мерное «выворачивание» (Фок, 1961). Именно, можно взять преобразование

$$x'^\mu = \frac{A^2}{S^2}\,x^\mu \qquad (3.4.25)$$

или, в более близкой к (3.3.50) форме,

$$S' = \frac{A^2}{S}. \qquad (3.4.26)$$

Чтобы проследить такую аналогию между обоими решениями, следует перейти к 4-мерным сферическим координатам, в которых

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= S\,\mathrm{ch}\,\psi, \\ x^1 &= S\,\mathrm{sh}\,\psi\cos\theta, \\ x^2 &\, S\,\mathrm{sh}\,\psi\sin\theta\cos\varphi, \\ x^3 &= S\,\mathrm{sh}\,\psi\sin\theta\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.27)$$

так что

$$ds^2 = \left(1 - \frac{A}{S}\right)^4 [dS^2 - S^2(d\psi^2 + \mathrm{sh}^2\psi\, d\theta^2 + \mathrm{sh}^2\psi\sin^2\theta\, d\varphi^2)]. \qquad (3.4.28)$$

Последняя форма квадрата интервала явно напоминает пространственную часть квадрата интервала Шварцшильда. Поэтому можно сравнить решение Фридмана с сечением в некотором пространстве большего числа измерений, в котором реализуется соответствующий мир Шварцшильда. Тогда распределенное и движущееся по законам (3.4.19) и (3.4.24) вещество в этом «сверхмире» должно интерпретироваться чисто геометрически.

Что касается космологических приложений решения Фридмана, то мы не можем подробно останавливаться на этом вопросе, так как это заняло бы слишком много места. Основные идеи, с которых можно начать исследование таких приложений, относятся к установлению зависимости между расстоянием «частицы» (галактики) от «центра» вселенной (произвольно выбираемого начала координат) и скоростью ее движения от этого центра (скорость «разбегания»). В самом деле, из (3.4.24) непосредственно видно, что

$$dx^i / dx^0 = v^i / v^0 = x^i / x^0, \qquad (3.4.29)$$

или

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}\cdot x^0. \qquad (3.4.30)$$

В фиксированный момент времени $t = x^0$

$$v \sim r, \qquad (3.4.31)$$

так что скорости галактик должны быть пропорциональны расстоянию до них [1]. Такое утверждение делается в терминах псевдоэвклидова мира, а в «истинном» мире Фридмана это требует уточнения; однако качественно подобная картина реализуется и там.

Замечательно, что уже после работ Фридмана наблюдения дали отличное подтверждение этому предсказанию: Хаббл открыл *расширение Вселенной*, проявляющееся через допплеровское смещение спектральных линий в излучении разбегающихся галактик. Согласно закону Хаббла, скорость действительно (в первом приближении) пропорциональна удаленности галактики:

$$v = hr. \tag{3.4.32}$$

За последнее время наблюдения указали, что принимавшиеся прежде масштабы Вселенной были заниженными. Приведем здесь значение постоянной Хаббла с соответствующей поправкой; если пользоваться принятыми в астрономии единицами (св. год), то (Мак-Витти, 1961)

$$1/h \approx 8\cdot 10^9 \text{ лет}; \tag{3.4.33}$$

или, если выразить постоянную Хаббла h в $сек^{-1}$ (Синг, 1963):

$$h \approx 4\cdot 10^{-18}\ сек^{-1}. \tag{3.4.34}$$

Наконец, вычисляя согласно сформулированному в § 3.8 методу энергию вещества и гравитационного поля для мира Фридмана, получаем [ср. (3.8.24)]:

$$w_F{}^0 = \frac{4A}{\varkappa S^2}\left[\frac{A}{S^2} - \frac{4Ax^{02}}{S^4} + \frac{3x^0x^0}{S^3}\right]. \tag{3.4.35}$$

В этом выражении явно содержится вклад негравитационных составляющих, соответствующий тензору энергии-импульса (3.4.13) при учете выражений для 4-скорости (3.4.24):

$$\sqrt{\frac{-g}{g_{00}}}\,T_{F0}{}^0 = \frac{12A}{\varkappa}\frac{x^0x^0}{S^5}. \tag{3.4.36}$$

Остальная часть энергии (3.4.35) имеет чисто гравитационную природу; легко видеть, что она является отрицательно определенной.

3.5. Уравнения движения. Девиация геодезических

Вопрос об уравнениях движения является промежуточным между собственно теорией гравитационного поля Эйнштейна и законами эволюции его источников; на первый взгляд он должен был бы относиться к последним. В действительности положение оказывается нетривиальным, так как основные законы механики — уравнения движения — в общей теории относительности настолько тесно связаны с уравнениями гравитационного поля [2], настолько переплетаются с ними, что оказываются уже следствием уравнений Эйнштейна. В этом параграфе мы рассмотрим движение пробных масс в уже «готовом» гравитационном поле, не заботясь специально, чтобы оно отвечало уравнениям Эйнштейна.

Уравнение геодезической (1.56) является, как уже говорилось, самым непосредственным обобщением уравнения прямой, понятие которой утра-

[1] См. также работу Мак-Витти (1933), где рассмотрена задача о поле точечной массы на фоне расширяющейся вселенной.

[2] Уравнение гравитационного поля в этом случае можно рассматривать чисто геометрически — когда выводы применяются к тому вместилищу, в котором разыгрываются механические процессы.

тило законность в римановой геометрии. Это уравнение

$$\frac{D}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} \equiv \frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{3.5.1}$$

поэтому естественно принять в качестве уравнения движения пробной массы в отсутствие всех полей, кроме гравитационного, т. е. уравнения движения по инерции. Такой выбор диктуется не только принципом соответствия с нерелятивистской теорией, но и соображениями, только что приведенными здесь. Кроме того, оно может быть (точно из того же интеграла действия, что и в частной теории относительности) получено вариационным путем. Этот вывод неизменно приводится во всех курсах римановой геометрии и общей теории относительности; поэтому мы не будем его здесь повторять (см. § 8.6, где он дан в матричной модификации).

Необходимо подчеркнуть, что уравнение (3.5.1) описывает движение *пробной массы*, так как, особенно в силу нелинейности уравнений Эйнштейна, поле, создаваемое рассматриваемой массой, будучи сильным, может существенно изменить характер движения. Кроме того, естественно, берутся лишь *временноподобные* геодезические, так что уравнение (3.5.1) содержит некоторую излишнюю информацию о пространственно-подобных линиях.

Уравнение геодезической (3.5.1), совместно с уравнениями Эйнштейна в случае слабого поля (3.2.32), позволяет идентифицировать метрическое поле с *гравитационным*. Рассмотрим нерелятивистский случай: $|v^i| \ll 1$, предполагая метрическое поле повсюду слабым: $|g_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}| \ll 1$. Тогда в уравнении (3.5.1) достаточно взять члены

$$\frac{d^2x^i}{dx^{02}} + \Gamma_{00}{}^i = 0 \tag{3.5.2}$$

или, вспоминая обозначения (3.2.26),

$$\frac{d^2x^i}{dx^{02}} = -\frac{1}{2}h_{00,\,i} = -(\operatorname{grad}\varphi)_i, \tag{3.5.3}$$

где мы положили метрическое поле *статическим*, чтобы облегчить его сопоставление с полем Ньютона. Мы видим, что ускорение $\frac{d^2x^i}{dx^{02}}$ для всех пробных тел *не зависит от их масс*, т. е. выполняется принцип эквивалентности Галилея — Этвёша — Эйнштейна (равенство инертной и тяготеющей масс), ввиду чего уже естественно предположить, что рассматриваемое (метрическое) поле тождественно гравитационному. Вводя в рассмотрение потенциал последнего φ, мы должны в силу (3.5.3) положить

$$\varphi = \frac{1}{2}h_{00} \equiv \frac{1}{4}\sum_\alpha y_{\alpha\alpha} \tag{3.5.4}$$

[здесь использованы обозначения (3.2.27)]. Однако мы уже знаем вид уравнений Эйнштейна для всюду слабого поля (3.2.32):

$$\Delta y_{\mu\nu} = 2\varkappa T_{\mu\nu}. \tag{3.5.5}$$

Взяв покоящийся источник статического поля, когда

$$T_{i\alpha} = 0, \qquad T_{00} = \rho \tag{3.5.6}$$

(знак при плотности массы ρ определяется прежде всего непротиворечивостью сопоставления с нерелятивистской теорией), получим

$$\Delta y_{00} = 2\varkappa T_{00} \tag{3.5.7}$$

и

$$y_{i\alpha} = 0. \tag{3.5.8}$$

Переходя к потенциалу φ, уравнение (3.5.7) можно записать в виде

$$\Delta\varphi = \frac{\varkappa}{2}\rho. \tag{3.5.9}$$

С другой стороны, в теории Ньютона

$$\Delta\varphi = 4\pi\gamma\rho. \tag{3.5.10}$$

Действительно, для точечной массы-источника M и пробной массы m в поле этого источника

$$\varphi = -\gamma\frac{M}{r}, \quad \frac{1}{m}\mathbf{F} = -\gamma\frac{M}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{3.5.11}$$

а также

$$\Delta\varphi = 4\pi\gamma M\delta(\mathbf{r}), \tag{3.5.12}$$

так как

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}). \tag{3.5.13}$$

Сравнение (3.5.9) и (3.5.10) дает

$$\varkappa = 8\pi\gamma; \tag{3.5.14}$$

переходя к обычной системе CGS, можно взять

$$\varkappa = \frac{8\pi\gamma}{c^2} \tag{3.5.15}$$

так, чтобы

$$[\varkappa] = \text{см}^{+1}\cdot\text{г}^{-1}; \quad [T_{00}] = \text{см}^{-3}\cdot\text{г}^{+1}. \tag{3.5.16}$$

Мы можем теперь выразить и постоянную интегрирования C в решении Шварцшильда (3.3.40) через гравитационную постоянную и массу «шварцшильдовского центра», если, считая $C/r \ll 1$, подставим h_{00} из (3.3.40) в (3.5.4), а затем сравним результат с (3.5.11). Мы получим при этом

$$C = \frac{\gamma M}{2} = \frac{\varkappa M}{16\pi}. \tag{3.5.17}$$

Эта величина, имеющая размерность длины, называется *гравитационным радиусом* источника данного поля (часто так называют вдвое бо́льшую величину). Полученные здесь выводы понадобятся при расчете эффектов, которые рассматриваются в следующем параграфе.

Хотя этот расчет будет производиться с помощью уравнения геодезической, такой подход к нему не вполне законен. Дело в том, что движение (особенно в общей теории относительности) должно рассматриваться *относительно* каких-то объектов. Однако уравнение геодезической (3.5.1) описывает это движение относительно системы координат, которая, конечно, не является наблюдаемым объектом. Хотя указание метрического тензора в каждой точке пространства — времени и позволяет судить о виде и характере эволюции системы координат (например, мы можем таким образом отличить декартову систему от сферической), тем не менее этот подход реализуется полностью лишь в плоском мире и частично — *на фоне* плоского мира (касательного к реальному искривленному). Следовательно, в общем случае движение следует описывать, взяв *два* (по меньшей мере) тела и сравнивая их геодезические. Эти тела мы опять понимаем как пробные.

Рассмотрим сначала две мировые линии, не предполагая, что они являются геодезическими. Будем нумеровать точки вдоль них с помощью параметра v (для временно-подобных кривых это — собственное время, для изотропных — некоторый «канонический» параметр; пространственно-подобных кривых мы здесь не рассматриваем, так как исследуем *движение пробных масс*); поперек мировых линий пусть изменяется параметр u (нумерация мировых линий в семействе). Фактически таких поперечных направления *три*, так что следовало бы взять три параметра u_i (не вектор!), однако мы будем обычно писать просто u, так как это ничего не изменит в расчетах. Если рассматриваемые две мировые линии близки друг к другу, то можно построить дифференциал $d_u x^\mu$, являющийся инфинитезимальным вектором [1] и имеющий смысл *относительного положения* точек, движение которых описывается мировыми линиями, в момент «времени» v. Относительную скорость следует определить как

$$V^\mu \overset{\text{Def}}{=} \frac{D_v}{dv}(d_u x^\mu). \tag{3.5.18}$$

В свою очередь, «абсолютная» скорость равна

$$v^\mu \overset{\text{Def}}{=} \frac{d_v x^\mu}{dv}. \tag{3.5.19}$$

Из этих двух векторов нетрудно построить инвариант

$$L = v_\alpha V^\alpha, \tag{3.5.20}$$

который мы и попытаемся использовать в качестве «функции Лагранжа механики». Рассмотрим уравнения, вытекающие из вариационного принципа.

$$\delta \int\limits_v L\, dv = 0, \tag{3.5.21}$$

положив здесь и в (3.5.18), (3.5.19)

$$dv = d_v s = \sqrt{d_v x^\mu\, d_v x^\nu \cdot g_{\mu\nu}}. \tag{3.5.22}$$

Прежде всего заметим, что

$$\delta(L\, dv) = \delta v_\nu \cdot D_v(d_u x^\nu) + v_\nu \cdot \delta[D_v(d_u x^\nu)]. \tag{3.5.23}$$

Здесь

$$\delta v_\nu = v^\mu g_{\mu\nu,\lambda}\, \delta x^\lambda + g_{\mu\nu} \frac{d_v}{dv}(\delta x^\mu) - v_\nu \delta(\ln|dv|). \tag{3.5.24}$$

Если теперь учесть, что

$$\delta(\ln|dv|) = \frac{1}{2}\delta[\ln(dv)^2] = v_\lambda \frac{D_v \delta x^\lambda}{dv}, \tag{3.5.25}$$

то мы получим для δv_ν выражение

$$\delta v_\nu = (g_{\lambda\nu} - v_\lambda v_\nu)\frac{D_v \delta x^\lambda}{dv} - g_{\mu\nu}\Gamma^{\mu}_{\lambda\rho} v^\lambda \delta x^\rho. \tag{3.5.26}$$

В свою очередь,

$$\delta D_v(d_u x^\nu) \equiv \delta(d_v d_u x^\nu + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} d_u x^\mu d_v x^\lambda) \tag{3.5.27}$$

[1] Строго говоря, существуют три таких вектора соответственно числу независимых параметров u_i.

после несложных преобразований приводится к виду

$$\delta D_v(d_u x^\nu) = D_v D_u \delta x^\nu + R^{\nu}_{\cdot\lambda\mu\rho} d_u x^\lambda d_v x^\rho \delta x^\mu - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} D_v(d_u x^\lambda)\delta x^\mu. \qquad (3.5.28)$$

Поэтому вариация (3.5.23) принимает вид

$$\delta_u(Ldv) = d_v\left\{v_\mu D_u \delta x^\mu + (g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu)\frac{D_v}{dv}(d_u x^\nu)\delta x^\mu\right\} -$$

$$- \frac{D_v v_\nu}{dv} D_u \delta x^\nu dv - \left\{\frac{D_v}{dv}\frac{D_v}{dv}(d_u x^\mu) - R^{\mu}_{\cdot\rho\nu\lambda} v^\rho v^\nu d_u x^\lambda - \right.$$

$$\left. - v^\mu v_\nu \frac{D_v}{dv}\frac{D_v}{dv}(d_u x^\nu) - \frac{D_v}{dv}(d_u x^\nu)\frac{D_v}{dv}(v^\mu v_\nu)\right\} g_{\mu\sigma}\delta x^\sigma dv. \qquad (3.5.29)$$

При этих вычислениях мы приняли во внимание переставимость знака дифференциала и операции варьирования и ковариантное постоянство метрического тензора. Подставляя полученный результат в вариацию действия,

$$\delta\int_v Ldv = \int_v \delta(Ldv), \qquad (3.5.30)$$

мы можем отбросить «дивергенциальный» член, предполагая, как обычно, что вариации (и их первые производные по u) обращаются в нуль на границах области интегрирования. При этом, однако, в подынтегральном выражении сохранится один член, содержащий δx_μ под знаком дифференциала (по u). Его бессмысленно выделять в «дивергенцию» (здесь: дифференциал), так как интегрирование проводится по v, а не по u. Заметим, однако, что наши вариации δx^μ зависят как от v, так и от u. Вместе с тем они произвольны, а равенство нулю вариации интеграла действия не должно зависеть от конкретного выбора δx^μ, обращающихся в нуль на границах; точно так же и уравнения, следующие из принципа экстремума действия при конкретных выборах δx^μ, выполняются универсально и не зависят от δx^μ, что совершенно естественно. Итак, положим сначала, что вектор δx^μ ковариантно постоянен вдоль направления u, т. е. $D_u \delta x^\mu = 0$. Тогда в $\delta(Ldv)$ исчезает член $-(D_r v_\nu / dv) D_u \delta x^\nu dv$, и мы получаем (в силу произвольности во всех остальных отношениях δx^μ) уравнения

$$\frac{D_v}{dv}\frac{D_v}{dv}(d_u x^\mu) - R^{\mu}_{\cdot\rho\nu\lambda} v^\rho v^\nu d_u x^\lambda - v^\mu v_\nu \frac{D_v}{dv}\frac{D_v}{dv}(d_u x^\nu) -$$

$$- \frac{D_v}{dv}(d_u x^\nu)\frac{D_v}{dv}(v^\mu v_\nu) = 0. \qquad (3.5.31)$$

Рассматривая теперь все прочие функции δx^μ, получаем

$$D_v v_\nu / dv = 0. \qquad (3.5.32)$$

Последнее уравнение утверждает, что взятые нами мировые линии являются *геодезическими* (можно сказать, что мы получили новым путем уравнение геодезической). В силу этого уравнения последний член в (3.5.31) обращается в нуль. Кроме того, мы имеем теперь право вносить v^μ под знак абсолютного дифференцирования по v. Поэтому в предпоследнем члене уравнения (3.5.31) можно произвести следующие перегруппировки сомножителей:

$$v_\nu \frac{D_v}{dv}\frac{D_v}{dv}(d_u x^\nu) = \frac{D_v}{dv}\left[v_\nu \frac{D_v}{dv}(d_u x^\nu)\right] = \frac{D_v}{dv}\left[v_\nu D_u\left(\frac{d_v x^\nu}{dv}\right)\right]. \qquad (3.5.33)$$

Мы воспользовались здесь также соотношением (1.73)

$$D_u d_v x^\nu = D_v d_u x^\nu, \tag{3.5.34}$$

которое справедливо, так как мы имеем дело фактически с «частным» ковариантным дифференцированием. Теперь, однако, видно, что

$$v_\nu \frac{D_v}{dv}\frac{D_v}{dv}(d_u x^\nu) = \frac{1}{2} d_u \frac{d_v}{dv}(v_\nu v^\nu) = 0 \tag{3.5.35}$$

[для скаляра ковариантная производная совпадает с обычной; вспомним также первый интеграл уравнения геодезической (1.58)]. Итак, окончательно уравнение (3.5.31) приводится к виду

$$\frac{D_v}{dv}\frac{D_v}{dv}(d_u x^\mu) = R^{\mu}_{\cdot\,\rho\nu\lambda}\, v^\rho v^\nu d_u x^\lambda. \tag{3.5.36}$$

Это — известное уравнение девиации геодезических (Леви-Чивита, 1927; Синг и Шилд, 1956; Синг, 1963), названное так по той причине, что оно описывает сравнение двух близких геодезических, расходящихся (либо сходящихся) ввиду наличия внешнего гравитационного поля. Действительно, возьмем уравнение геодезической (3.5.32) и ковариантно продифференцируем его по u:

$$D_u D_v v_\nu = 0 \tag{3.5.37}$$

[мы умножили уравнение (3.5.32) на dv, чтобы читателю было удобнее сравнивать его с выражением (1.71)]. Меняя порядок дифференцирования и учитывая равенство (1.74), получаем

$$\begin{aligned}(D_v D_u v_\nu) &= (D_v D_u - D_u D_v) v_\nu = (v_{\nu;\,\mu;\,\lambda} - v_{\nu;\,\lambda;\,\mu})\, d_v x^\lambda d_u x^\mu = \\ &= v_\alpha R_{\cdot}{}^{\alpha}{}_{\nu\mu\lambda} d_u x^\mu d_v x^\lambda;\end{aligned} \tag{3.5.38}$$

вновь деля на dv и учитывая (3.5.34) и (3.5.19), снова получаем уравнение девиации геодезических (3.5.36).

Тот факт, что мы получили сразу как уравнение геодезической (3.5.32), так и уравнение девиации (3.5.36) из единого вариационного принципа (3.5.21), (3.5.20), совершенно естествен, так как лагранжиан (3.5.20) представляет собой дифференциал лагранжиана одной частицы по u, т. е. является *разностью* лагранжианов двух частиц:

$$d_u \sqrt{g_{\mu\nu} d_v x^\mu d_v x^\nu} = g_{\mu\nu} \frac{d_v x^\mu}{dv} D_u (d_v x^\nu) \tag{3.5.39}$$

[вспомним выражения (3.5.22), (3.5.19), (3.5.18) и (3.5.20)].

Уравнение девиации геодезических можно записать в виде

$$\frac{D_v}{dv} V^\mu = R^{\mu}_{\cdot\,\rho\nu\lambda} v^\rho v^\nu d_u x^\lambda, \tag{3.5.40}$$

в котором оно может быть истолковано как появление *относительного ускорения* у двух пробных тел в искривленном пространстве. В обеих частях этого уравнения стоят векторы, так что стоящая справа *относительная «сила»*, действующая на два тела со стороны внешнего гравитационного поля, оказывается *абсолютной*, не уничтожимой путем преобразования координат. Это обстоятельство, однако, не вступает в конфликт с принципом эквивалентности, так как для обнаружения относительной силы необходимо две частицы, т. е. нелокальный эксперимент, тогда как принцип эквивалентности строго локален. Чем меньше 4-мерная область, в которой мы следим за поведением пробных масс, тем труднее обнаружить относительную силу; так можно сформулировать здесь принцип эквивалентности Эйнштейна.

Заканчивая обсуждение вопроса об относительном движении тел в заданном гравитационном (метрическом) поле, сделаем еще несколько замечаний. В отношении абсолютных 4-скорости и 4-ускорения известно, что они взаимно ортогональны:

$$v_\mu \frac{D_v v^\mu}{dv} = 0. \tag{3.5.41}$$

То же самое имеет место для абсолютной 4-скорости и относительного 4-ускорения, как видно из соотношения (3.5.35). Более того, из этого соотношения следует, что произведение $v_\nu V^\nu$ должно *сохраняться* вдоль геодезической. Так как мы всегда можем выбрать такой способ измерения «времени» v, чтобы гиперповерхность $u = \text{const}$ вначале была ортогональна геодезической в точке их пересечения, то при этом мы обнаружим, что скорости всюду ортогональны:

$$v_\nu V^\nu = 0. \tag{3.5.42}$$

Однако и без этого легко увидеть, что если вектор v^μ временно-подобен, то вектор V^μ пространственно-подобен. Пространственно-подобный характер скорости не должен нас смущать, ибо речь идет об *относительной* скорости, равной разности двух близких скоростей (в смысле вычитания 4-мерных векторов, а не «релятивистского закона сложения скоростей» частной теории относительности).

Вариационные принципы требуют для вывода уравнений движения пробного тела постулировать форму интеграла действия. Однако уравнение движения может быть получено и непосредственно из уравнений метрического (гравитационного) поля как условие их интегрируемости. Действительно, как обсуждалось в § 3.2, в левой части уравнений Эйнштейна (3.2.12) стоит консервативный тензор $G_{\mu\nu}$, так что должна обращаться в нуль и дивергенция правой части этих уравнений. Выполнение этого требования связано с инвариантностью действия для системы полей, если в лагранжианах метрику представляет тензор $g_{\mu\nu}$, как это видно из уравнения (2.4.50). Таким образом, дважды свернутые тождества Бианки, с одной стороны, и инвариантность лагранжианов — с другой, требуют выполнения равенства

$$\mathbf{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{3.5.43}$$

Мы взяли здесь плотность симметричного тензора энергии-импульса, так как будем далее использовать плотность массы ρ, которую лучше всего представить в виде скалярной плотности. При этом масса является интегралом по пространственно-подобной гиперповерхности от ρv^μ, а 4-скорость v^μ одновременно может играть роль вектора нормали к этой гиперповерхности (имея в виду постулированную при определении вектора v^μ его единичную нормировку). Рассмотрим случай некогерентной жидкости типа использованной в § 3.4; тогда

$$\mathbf{T}^{\mu\nu} = \rho v^\mu v^\nu. \tag{3.5.44}$$

При подстановке в (3.5.43) получим

$$\mathbf{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \rho \frac{D_v v^\mu}{dv} + v^\mu (\rho v^\nu)_{,\nu} = 0, \tag{3.5.45}$$

ввиду равенства

$$\frac{D_v v^\mu}{dv} = v^\mu{}_{;\nu} v^\nu \tag{3.5.46}$$

и плотностных свойств произведения ρv^ν. Заметим теперь, что равенство квадрата вектора v^μ единице приводит к ортогональности 4-мерных скорости и ускорения:

$$v_\mu \frac{D_v v^\mu}{dv} = 0. \tag{3.5.47}$$

Поэтому, умножая уравнение (3.5.45) на v_μ, получаем

$$(\rho v^\nu)_{,\nu} = 0 \tag{3.5.48}$$

— уравнение непрерывности, описывающее закон сохранения массы. Итак, уравнение (3.5.45) принимает вид

$$D_v v^\mu / dv = 0 \tag{3.5.49}$$

независимо от характера распределения масс (конкретной формы ρ). Поэтому можно взять и δ-образное распределение, представляющее всего *одну* точечную массу, хотя в этом случае, конечно, следует провести дополнительное исследование в (3.5.48), имея в виду несобственный характер δ-функции. Это исследование неоднократно проводилось и показало полную законность произведенных здесь преобразований. Следует отметить, что мы предполагали существование где-то в пространстве других масс, создающих гравитационное поле, так что взятая нами частица движется в их поле как в заданном. Поэтому ее следует рассматривать как пробную, иначе пришлось бы учитывать реакции остальных масс на движение взятой нами, и задача значительно усложнилась бы. Такую задачу рассматривали многие авторы, начиная с Эйнштейна, Инфельда и Гоффмана (1938), а также Фока (1939). Представляют большой интерес работы Бертотти (1954, 1955, 1956), Бертотти и Плебаньского (1960), Гутмана (1959). Систематическое изложение вопроса можно найти у Фока (1961) и Инфельда и Плебаньского (1962), подход которых к проблеме различен. Объем и тематика нашей книги не позволяют подробнее остановиться на этих вопросах, хотя мы и вернемся к законам движения (для пробных масс) в разделе 5.

3.6. Три классических эффекта общей теории относительности[1]

Для того чтобы можно было сопоставлять выводы теории относительности, сформулированные в терминах римановой геометрии, с данными эксперимента, следует прежде всего выяснить, что именно (в геометрических терминах) мы *измеряем* как длины и интервалы времени. Вероятно, удобнее всего исходить из интервалов времени, а расстояния измерять с помощью световых лучей — по тому времени, которое им требуется для преодоления этих расстояний. Время же мы измеряем с помощью *часов*, т. е. физических процессов, либо обладающих периодичностью, либо необратимых и подчиняющихся характерному закону (чаще всего — экспоненциальному, типичному, например, для радиоактивного распада и для ряда случайных процессов). Однако такое время не есть *координатное* время x^0, а совпадает с собственным временем. Это предположение — весьма правдоподобная гипотеза, «вытекающая» из того «факта», что ло-

---

[1] Мы не могли здесь коснуться целого ряда экспериментальных проблем общей теории относительности, обзоры положения в которых читатель найдет в журнале «Успехи физических наук» (Гинзбург, 1967; Брагинский, 1965). См. также классическую книгу С. И. Вавилова (1928), посвященную главным образом частной теории относительности. В настоящее время весьма актуальна проблема исследования и обнаружения гравитационных волн, которой посвящено много работ (см. Петров, 1966; Бонди, 1957, 1959; Компанеец, 1958; Боннор, 1959; Вебер, 1962, 1965; Захаров, 1964, 1965 и др.).

кально в свободно падающей системе в декартовых координатах [когда метрический тензор имеет вид (1.25)] собственное время, совпадая с координатным, имеет тот же смысл, что и время в частной теории относительности. В действительности последнее утверждение — это постулат, являющийся частью принципа эквивалентности в эйнштейновской формулировке, обеспечивающий выполнение принципа соответствия между общей и частной теорией относительности. Мы будем придерживаться этого постулата.

Нельзя также преуменьшать роль координатного времени; оно служит единым связующим звеном между всеми объектами, как бы они ни двигались; каждому объекту, движущемуся по-своему, сопоставляется течение его собственного времени, и если бы не удивительная всеобщность координатного времени, исчисление времен и длин во Вселенной было бы невероятно сложной задачей.

Продемонстрируем методику измерения длин с помощью часов и световых сигналов, придерживаясь схемы, которую можно найти, например, в книге Ландау и Лифшица (1960). Возьмем две геодезические, лежащие близко друг к другу всюду в рассматриваемой области. Пусть часы, движущиеся по этим геодезическим, обмениваются световыми импульсами, последовательно их отражая. (Ясно, что такой процесс мы будем сейчас рассматривать в рамках классической теории; в квантовой области существенно учитывать возмущение, вносимое обменом фотонами, и возможно, что анализ такого процесса поможет исследовать квантовую сторону геометрии.)

Так как тензорные соотношения, не включающие высших производных от $g_{\mu\nu}$ (например, без $R_{\mu\nu\lambda\rho}$), работают в общей теории относительности точно так же, как и в частной (упомянутый нами постулат!), то мировую линию света придется признать изотропной:

$$(ds^2)_{\text{свет}} = g_{00}dx^{02} + 2g_{i0}dx^i dx^0 + g_{ik}dx^i dx^k = 0. \tag{3.6.1}$$

Решая это уравнение относительно интервала координатного времени dx^0, получаем

$$dx^0 = -\frac{g_{i0}}{g_{00}}dx^i \pm \sqrt{\frac{g_{i0}\,g_{k0}}{g_{00}^2}dx^i\,dx^k - \frac{g_{ik}}{g_{00}}dx^i\,dx^k}\,. \tag{3.6.2}$$

Разность этих двух корней дает интервал координатного времени между испусканием исходного сигнала и приемом отраженного одними и теми же часами. Путь, пройденный светом в обе стороны, равен этому интервалу, если измерение проводится в системе, связанной с данными часами; если же отказаться от часов, движущихся по геодезической, и взять какие-то произвольные часы, то в связанной с ними системе

$$\sqrt{g_{00}}\Delta dx^0 = 2d\lambda \tag{3.6.3}$$

(двойка справа отвечает путешествию светового сигнала туда и обратно). Отсюда

$$d\lambda = \sqrt{\left(\frac{g_{i0}\,g_{k0}}{g_{00}} - g_{ik}\right)dx^i\,dx^k}. \tag{3.6.4}$$

Это важное соотношение удобно переписать как

$$d\lambda^2 = b_{ik}dx^i dx^k, \tag{3.6.5}$$

где

$$b_{ik} = g_{i0}g_{k0}\,/\,g_{00} - g_{ik} \tag{3.6.6}$$

— трехмерный метрический тензор. Заметим, что

$$ds^2 = d\tau^2 - d\lambda^2, \tag{3.6.7}$$

где

$$d\tau = \frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} dx^\alpha. \tag{3.6.8}$$

Очень существенно, что как $d\lambda$, так и $d\tau$ *не изменяются* при тех преобразованиях координат, которые не выводят за рамки одной и той же системы отсчета. Здесь полезно определить понятие *системы отсчета* более явно, чем просто на базе интуиции. *Все координатные системы, которые связаны между собой преобразованиями, не включающими движения, относятся к одной и той же системе отсчета.* Иными словами, мы можем любым способом менять нумерацию точек в 3-мерном пространстве и произвольно регулировать ход часов в каждой такой точке, оставаясь в данной фиксированной системе отсчета:

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3), \quad \partial x'^i / \partial x^0 = 0. \tag{3.6.9}$$

Инвариантность по отношению к таким преобразованиям носит название *хронометрической инвариантности*, и соответствующая теория особенно подробно разработана Зельмановым (см. § 8.9).

Пусть наши часы покоятся в гравитационном поле $(dx^i = 0)$ в точке I; тогда

$$(d\tau)_{\mathrm{I}} = \sqrt{(g_{00})_{\mathrm{I}}}\, dx^0. \tag{3.6.10}$$

Для других часов, покоящихся в точке II, где гравитационное поле отличается от поля в точке I, можно написать аналогичную формулу. *Координатное время* в обоих случаях мы возьмем *одно и то же*. Тогда

$$\frac{(d\tau)_{\mathrm{II}}}{(d\tau)_{\mathrm{I}}} = \sqrt{\frac{(g_{00})_{\mathrm{II}}}{(g_{00})_{\mathrm{I}}}}. \tag{3.6.11}$$

Вспоминая связь с ньютоновым гравитационным потенциалом (3.5.4),

$$g_{00} = 1 + 2\varphi, \tag{3.6.12}$$

и считая поле слабым $(|\varphi| \ll 1)$, приближенно получаем

$$\frac{(d\tau)_{\mathrm{II}}}{(d\tau)_{\mathrm{I}}} = 1 + \Delta\varphi, \tag{3.6.13}$$

где $\Delta\varphi = \varphi_{\mathrm{II}} - \varphi_{\mathrm{I}}$. Обозначая

$$(d\tau)_{\mathrm{I}} = T, \qquad (d\tau)_{\mathrm{II}} = T + \Delta T, \tag{3.6.14}$$

получаем окончательно

$$\Delta T / T = \Delta\varphi. \tag{3.6.15}$$

Этот вывод можно сформулировать так: часы, находящиеся в более сильном гравитационном поле, идут медленнее, чем часы, находящиеся в более слабом поле. Наблюдается этот эффект на фотонах, излучаемых атомами; эти фотоны излучаются с определенными частотами, характерными для атомных спектров и одинаковыми для всех атомов данного сорта в данном исходном состоянии, где бы эти атомы ни находились. Поэтому мы можем сравнить частоты, приходящие к нам от атомов, находящихся в другом (чаще: более сильном) гравитационном поле, и частоты, излучаемые в лаборатории. Этот эффект называется *гравитационным красным смещением*, которое не следует смешивать с космологическим красным смещением, вызванным разбеганием галактик (см. § 3.4). В последнее время экспериментальная проверка гравитационного красного смещения не вызывает затруднений; этот эффект удается наблюдать в лабораторных условиях, когда излучающие атомы и атомы сравнения располагаются на уровнях, разница между которыми составляет всего несколько метров (см. «Новейшие проблемы гравитации», 1961).

Другое наглядное объяснение красного смещения опирается на квантовые представления. Пусть в точке A излучается фотон, который мы наблюдаем, когда он приходит в точку B (рис. 3). Чтобы попасть из точки A

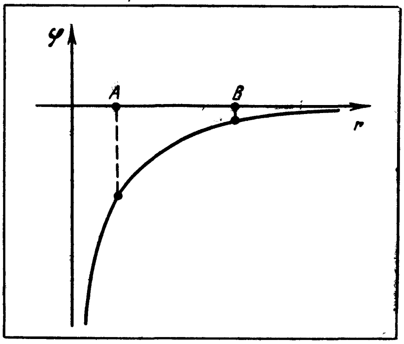


Рис. 3. Ход ньютоновского гравитационного потенциала

в точку B, фотону нужно «подняться из ямы» гравитационного потенциала, и он тратит на это энергию, а с уменьшением энергии падает и частота фотона, определяемая, как известно, формулой

$$E = h\nu = \nu / T. \tag{3.6.16}$$

Изменение же этой энергии (массы) связано с изменением частоты (и периода «колебаний») фотона, очевидно, по закону

$$\Delta m = \Delta E = h\Delta\nu = -h\Delta T / T^2. \tag{3.6.17}$$

В свою очередь, эта *работа* равна изменению потенциальной энергии фотона, взятой с обратным знаком:

$$-\Delta U = -\Delta(m\varphi) = -\Delta m \cdot \varphi - m\Delta\varphi. \tag{3.6.18}$$

Сравнивая обе формулы, получаем

$$\Delta m (1 + \varphi) = -m\Delta\varphi, \tag{3.6.19}$$

или, пренебрегая малыми второго порядка,

$$\Delta m = -m\Delta\varphi, \quad \Delta\nu = -\nu\Delta\varphi, \quad \Delta T = T\Delta\varphi, \tag{3.6.20}$$

что совпадает с результатом (3.6.15).

Выясним теперь, к каким эффектам приводит в общей теории относительности гравитация в движении различных объектов; для этого рассмотрим движение пробных масс (геодезические линии). Пространственная часть уравнения геодезической приводится к виду

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \left(g^{i\nu} g_{\alpha\nu,\beta} - \frac{1}{2} g^{i\nu} g_{\alpha\beta,\nu}\right)\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0. \tag{3.6.21}$$

Если ограничиться здесь движением в поле Шварцшильда (как это делается обычно) и вспомнить, что соответствующая метрика диагональна, мы получим

$$w^i = Ax^i - Bv^i, \tag{3.6.22}$$

где введены обозначения

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = w^i, \quad \frac{dx^i}{ds} = v^i, \tag{3.6.23}$$

а величины A и B, благодаря свойствам метрики Шварцшильда, не зависят от номера i. Такая линейная зависимость между радиусом-вектором x^i, скоростью v^i и ускорением w^i означает, что движение совершается все время в одной плоскости. Удобно, не нарушая общности, выбрать для этого движения плоскость $z = 0$ $(\theta = \pi/2)$.

От контравариантных компонент уравнения геодезической перейдем теперь к его ковариантным компонентам:

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\right) = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\nu}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}. \tag{3.6.24}$$

При движении в плоскости $z = 0$ метрику достаточно взять в виде

$$ds^2 = \left(\frac{1-\frac{C}{r}}{1+\frac{C}{r}}\right)^2 dt^2 - \left(1+\frac{C}{r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\varphi^2). \tag{3.6.25}$$

Рассмотрим случай $\nu = 0$. Тогда

$$\frac{d}{ds}\left(g_{00}\frac{dt}{ds}\right) = 0 \text{ или } g_{00}\frac{dt}{ds} = \text{const}, \tag{3.6.26}$$

т. е.

$$\left(\frac{1-\frac{C}{r}}{1+\frac{C}{r}}\right)^2 \frac{dt}{ds} = \text{const} = j. \tag{3.6.27}$$

Для изотропной геодезической (свет) $ds = 0$, а $dx^0 \neq 0$, так что $j = \infty$. В случае же временно-подобной геодезической, взяв предельный случай $r \to \infty$, когда $dx^0 \to ds$, найдем $j = 1$.

Другой первый интеграл уравнения геодезической легко получить, взяв $\nu = 2$. Уравнение (3.6.24) принимает тогда вид

$$\frac{d}{ds}\left(g_{22}\frac{dx^2}{ds}\right) = 0, \tag{3.6.28}$$

откуда

$$r^2\left(1+\frac{C}{r}\right)^4 \frac{d\varphi}{ds} = \text{const} = hj, \tag{3.6.29}$$

где в качестве постоянной интегрирования взято произведение hj для того, чтобы выделить всегда конечный множитель h. Деля интеграл (3.6.27) на интеграл (3.6.29), получаем

$$r^2 \frac{\left(1+\frac{C}{r}\right)^6}{\left(1-\frac{C}{r}\right)^2}\frac{d\varphi}{dt} = h. \tag{3.6.30}$$

Последние две формулы выражают II закон Кеплера — «закон площадей», принимающий в данном случае более сложную форму, чем он имеет в обычной ньютоновской теории. Этот закон, конечно, лучше формулировать на современном языке как сохранение момента импульса пробного тела в поле центральных сил, так как в общей теории относительности площадь не является непосредственно наблюдаемой величиной. В приложении к свету, конечно, вместо собственного времени s следовало бы брать канонический параметр; однако в данных вычислениях это несущественно.

В дальнейших вычислениях удобнее воспользоваться известным первым интегралом геодезической (1.58):

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = \text{const}. \tag{3.6.31}$$

Умножив обе части этого равенства на ds^2 (заметим, что $\text{const}\cdot ds^2 = ds^2$), разделив на dt^2 и явно подставив метрику Шварцшильда, получаем, обозначая $j^2 = \sigma^{-1}$:

$$\sigma\left(\frac{1-\frac{C}{r}}{1+\frac{C}{r}}\right)^4 = \left(\frac{1-\frac{C}{r}}{1+\frac{C}{r}}\right)^2 - \left(1+\frac{C}{r}\right)^4\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \tag{3.6.32}$$

Отсюда после простых преобразований и замены $r = u^{-1}$, с учетом соотношения (3.6.30), найдем

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{h^2}\left[1-\sigma\left(\frac{1-Cu}{1+Cu}\right)^2\right]\frac{(1+Cu)^6}{(1-Cu)^2}. \tag{3.6.33}$$

Упростим это *уравнение траектории* пробного тела. Приближенное (с точностью до C^2) уравнение имеет вид

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{h^2}[1+8Cu+30C^2u^2-\sigma(1+4Cu+6C^2u^2)]. \tag{3.6.34}$$

Чтобы избавиться от нелинейности, продифференцируем это уравнение по φ; сократив на $2du\,/\,d\varphi$, получим:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\left[1-6C^2\frac{(5-\sigma)}{h^2}\right] = 2C\frac{2-\sigma}{h^2}. \tag{3.6.35}$$

Производя замены

$$\psi = \varphi\sqrt{1-\frac{6C^2(5-\sigma)}{h^2}}, \qquad l = \frac{h^2-6C^2(5-\sigma)}{2C(2-\sigma)}, \tag{3.6.36}$$

получаем уравнение траектории в простом виде

$$\frac{d^2u}{d\psi^2} + u = \frac{1}{l}, \tag{3.6.37}$$

интеграл которого равен

$$u = \frac{1}{l}[1+\varepsilon\cos(\psi-\alpha)]. \tag{3.6.38}$$

Мы получили уравнение кривой второго порядка (эллипс, гипербола либо парабола, в зависимости от выбора постоянной интегрирования ε — эксцентриситета). Вторая постоянная интегрирования, α, определяет ориентацию траектории относительно полярной оси. Дальнейшее исследование решения требует конкретизации типа геодезической.

Случай временно-подобной геодезической (орбита планеты). Теперь $\sigma = 1$, так что

$$l = \frac{h^2 - 24C^2}{2C}, \quad \psi = \varphi \sqrt{1 - \frac{24C^2}{h^2}}. \tag{3.6.39}$$

Заметим, что, хотя радиальная координата при изменении ψ на 2π возвращается к своему прежнему значению, это совсем не соответствует изменению на 2π истинной угловой координаты φ, так что орбита будет *незамкнутой*. Как известно, большая полуось орбиты равна

$$a = \frac{1}{2}(\overset{-1}{u}_{\max} + \overset{-1}{u}_{\min}) = \frac{l}{(1 - \varepsilon^2)}. \tag{3.6.40}$$

Здесь задается параметр l, тогда как параметр h является вторичным и выражается через l и C:

$$h^2 = 2Cl + 24C^2. \tag{3.6.41}$$

Теперь нам достаточно учитывать лишь малые вплоть до 1-й степени C, так что эффективный «угол» ψ можно представить как

$$\psi \cong \varphi \left(1 - \frac{6C}{l}\right). \tag{3.6.42}$$

Следовательно, при переходе между двумя последовательными одинаковыми значениями r «угол» ψ изменяется на 2π, а истинный угол φ — на

$$\Delta\varphi = 2\pi + \Delta, \tag{3.6.43}$$

где

$$\Delta = 2\pi \frac{6C}{l} = \frac{6\pi\gamma m}{ac^2(1 - \varepsilon^2)}. \tag{3.6.44}$$

Это и есть тот угол, на который поворачивается орбита планеты (для определенности — ее перигелий) при одном обороте вокруг Солнца, что и характеризует незамкнутость орбиты. Для планеты Меркурия, поскольку она расположена ближе всего к Солнцу, и поэтому находится в наиболее сильном гравитационном поле, так что движется быстрее других планет, за столетие, согласно предсказанию теории, должен накапливаться поворот перигелия на 43″,0. Наблюдения дают в этом случае очень близкое значение угла поворота, равное (42″,6 ± 0,9) за столетие. Это — одно из лучших подтверждений общей теории относительности, хотя и следует помнить, что наблюдаемое значение поворота перигелия выделено из его полного поворота, обязанного целому ряду эффектов, и может содержать довольно высокую систематическую ошибку, которую крайне трудно учесть (см. «Гравитация и относительность», 1965).

Случай изотропной геодезической (луч света). Теперь $\sigma = 0$, и удобнее взять решение (3.6.38) в форме

$$u = \frac{1}{p}[\cos\beta + \cos(\psi - \alpha)], \tag{3.6.45}$$

где

$$\beta = \arccos\frac{1}{\varepsilon} \text{ и } p = l/\varepsilon, \tag{3.6.46}$$

так что

$$u = \frac{2}{p}\cos\frac{\psi - \alpha + \beta}{2}\cos\frac{\psi - \alpha - \beta}{2}. \tag{3.6.47}$$

Будем иметь в виду, что в случае света ($\sigma = 0$)

$$\psi = \varphi \sqrt{1 - \frac{30C^2}{h^2}} \tag{3.6.48}$$

и

$$l = \frac{h^2 - 30C^2}{4C}, \tag{3.6.49}$$

так что теперь мы выбрали в качестве независимого параметра h. Выясним прежде всего смысл параметра p, фиксировав его и h и устремив

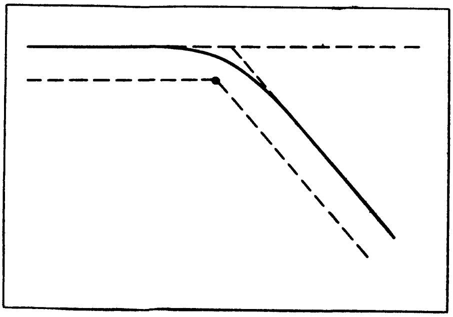


Рис. 4. Отклонение луча света в поле точечной массы

гравитационное поле к нулю — «выключив» его ($C \to 0$, $1/\varepsilon \to 0$).

При этом

$$u \to (1/p) \cos(\psi - \alpha). \tag{3.6.50}$$

Это — уравнение прямой, где p — прицельный параметр относительно начала координат. Заметим, что на основании (3.6.30)

$$h = \lim_{r \to \infty} r^2 \frac{d\varphi}{dt}. \tag{3.6.51}$$

Как видно из рис. 4,

$$r d\varphi = \sin\theta \cdot dS. \tag{3.6.52}$$

Если же учесть, что скорость света равна 1, то $ds^2 = 0$, а $dS/dt = 1$, так что

$$r \frac{d\varphi}{dt} = \sin\theta. \tag{3.6.53}$$

Подставляя это выражение в (3.6.51), получаем

$$h = \lim_{r \to \infty} (r \sin\theta) = p. \tag{3.6.54}$$

Поэтому в (3.6.46) угол β определится из равенства

$$\cos\beta = 4C/p > 0,$$

и поэтому, не ограничивая общности рассуждений, можно взять этот угол в первой четверти (рис. 4). Из уравнения (3.6.47) видно, что фотон находится на бесконечности, когда один из косинусов обращается в нуль. Мы скажем, что это происходит соответственно для первого и второго косинусов при «углах» $\psi_{\rm I}$ и $\psi_{\rm II}$. При этом *одновременно* должны выполняться два двойных неравенства

$$+\frac{\pi}{2} \geqslant \frac{\psi - \alpha + \beta}{2} \geqslant -\frac{\pi}{2} \tag{3.6.56}$$

и

$$+\frac{\pi}{2} \geqslant \frac{\psi - \alpha - \beta}{2} \geqslant -\frac{\pi}{2} \tag{3.6.57}$$

(так как переменная u всегда неотрицательна). Предположим, что

$$\frac{\psi_{\rm I} - \alpha + \beta}{2} = +\frac{\pi}{2} \tag{3.6.58}$$

и

$$\frac{\psi_{\rm II} - \alpha - \beta}{2} = -\frac{\pi}{2}. \tag{3.6.59}$$

Легко проверить, что неравенства (3.6.56) и (3.6.57) при этом выполняются. Отсюда

$$\psi_{\rm I} - \psi_{\rm II} = 2(\pi - \beta), \tag{3.6.60}$$

и с необходимой степенью точности

$$\psi_{\rm I} - \psi_{\rm II} = \varphi_{\rm I} - \varphi_{\rm II} = 2\left(\pi - \arccos\frac{4C}{p}\right). \tag{3.6.61}$$

Приближенно представляя $\arccos\frac{4C}{p}$ в виде

$$\arccos\frac{4C}{p} = \frac{\pi}{2} - \frac{4C}{p}, \tag{3.6.62}$$

получаем

$$\delta = \varphi_{\rm I} - \varphi_{\rm II} - \pi = \frac{4\gamma m}{pc^2}. \tag{3.6.63}$$

Подставляя сюда в качестве прицельного параметра радиус Солнца $p = 7\cdot 10^{10}$ *см*, массу Солнца $m = 2\cdot 10^{33}$ *г*, гравитационную постоянную Ньютона и скорость света, находим окончательно

$$\delta = 1'',75. \tag{3.6.64}$$

Результаты наблюдений, выполняемых во время полных солнечных затмений, дают эффект примерно на 20% выше предсказываемого, но это может быть связано с трудностями наблюдения, в частности с неспокойствием земной атмосферы при дневных наблюдениях. Конечно, такие наблюдения следует вынести за пределы земной атмосферы.

В заключение нужно заметить, что последний эффект (в теории Ньютона) был рассчитан Зольднером (1801) (см. также статью Вебера в сб. «Гравитация и относительность», 1965), который получил ровно половину эйнштейновского значения угла, на который отклоняется луч света. Иногда говорят, что вторую половину дает «искривление пространства»; это неверно, так как легко проверить, что эта вторая половина эффекта целиком обязана чисто релятивистскому характеру фотона, и что для ультрарелятивистских объектов тяготение «возрастает» вдвое. В действительности искривление пространства связано с обоими эффектами.

3.7. Гравитационные сохраняющиеся величины

В общей теории относительности понятие энергии физических полей имеет двоякий смысл: с одной стороны, это — источник гравитационного поля, стоящий в правой стороне уравнений Эйнштейна, и тогда собственно гравитационная часть (пропорциональная консервативному тензору Эйштейна) не причисляется к нему. С другой стороны, энергия понимается как точно сохраняющаяся величина, т. е., в наиболее симметричном случае, как несимметричный (игра слов!) канонический квазитензор полной системы полей, включая гравитацию. С точки зрения проблемы локализации энергии и вообще понимания ее физического смысла важно знать, насколько однозначно определяется ее значение из физических соображений (уравнений поля и т. п.) в малом. Источник гравитационного поля, т. е. симметричный тензор энергии-импульса, определяемый с помощью вариационной производной (2.4.52) или, в слабом варианте (2.4.51), с очевидностью инвариантен как относительно алгебраических замен потенциалов, так и относительно добавления к лагранжиану дивергенциальных членов, если полагать вариации (а по мере необходимости и их производные) равными нулю на границе в принципе действия; такая инвариантность может быть проверена непосредственными вычислениями и независимо от принципа действия. Поэтому распределение энергии как источника гравитационного поля однозначно диктуется уравнениями физических полей.

Для того чтобы подобным же образом проанализировать определение канонической энергии, перепишем прежде всего соотношение (2.4.20) в форме

$$\frac{\delta \mathbf{L}_t}{\delta A_B}\delta^* A_B + [-\mathbf{t}_{t\sigma}^{\alpha}\xi^{\sigma} + \mathbf{M}_{t\sigma}^{\alpha\tau}\xi^{\sigma}_{,\tau} + \mathbf{N}_{t\sigma}^{\alpha\tau\beta}\xi^{\sigma}_{,\tau,\beta}]_{,\alpha} = 0. \qquad (3.7.1)$$

Перейдем от потенциалов A_B к некоторым новым потенциалам a_b, от которых старые потенциалы зависят алгебраически. Тогда

$$\delta^* A_B = \frac{\partial A_B}{\partial a_b}\delta^* a_b, \qquad (3.7.2)$$

причем первый член в (3.7.1) не изменится, что легко заключить из принципа действия:

$$\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta A_B}\delta^* A_B = \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta a_b}\delta^* a_b. \qquad (3.7.3)$$

Поэтому не изменится в целом и выражение, стоящее в квадратных скобках. Так как мы произвели замену потенциала, а не координат, то «обмен» между коэффициентами при ξ^{σ}, $\xi^{\sigma}_{,\tau}$ и $\xi^{,\sigma}_{\alpha\tau,\beta}$ не может иметь места. Таким образом, показано, что величины $\mathbf{t}_{\sigma}{}^{\alpha}$, $\mathbf{M}^{\sigma\tau}$ и $\mathbf{N}_{\sigma}^{\alpha\tau\beta}$ остаются прежними при любых алгебраических заменах потенциалов (в уравнения, связывающие A_B и a_b, не должны входить больше никакие функции координат). Следовательно, выбор системы потенциалов полей не играет роли при выводе выражений для сохраняющихся величин. Напротив, добавление или отбрасывание дивергенциального члена, хотя и не меняет уравнений поля и вариационной производной в (3.7.3), соответствует не преобразованию, а переходу к новой форме лагранжиана, и поэтому приводит к изменению величин $\mathbf{t}_{\sigma}{}^{\alpha}$, $\mathbf{U}_{\sigma}{}^{\alpha}$, $\mathbf{M}_{\sigma}^{\alpha\tau}$ и $\mathbf{N}_{\sigma}^{\alpha\tau\beta}$. Примером этого может служить появление обсуждающегося ниже парадокса Бауэра вследствие нековариантного отбрасывания дивергенциального члена из плотности скалярной кривизны, (3.1.1) и (3.1.2). Конечно, следует заметить, что само выделение дивергенциального члена существенным образом зависит от выбора потенциалов, хотя отнюдь не сводится к переходу от старых потенциалов к новым. Поэтому мы прежде всего будем анализировать динамические величины гравитационного поля, исходя из *полного лагранжиана* (3.1.1). Эти величины будут универсальными, а все прочие — следствия отбрасывания того или иного дивергенциального члена от этого исходного лагранжиана. Так, не отбрасывая дивергенциальный член в (3.1.1), мы пришли бы в матричном или тетрадном представлении к тем же величинам, что и в представлении гравитации с помощью обычного метрического тензора. Можно доказать и более сильное утверждение, а именно, что при переходе к новым потенциалам и не алгебраическим путем (включая также производные потенциалов по координатам), если в теорию непосредственно не вводятся новые функции координат, динамические величины полной системы полей не меняются. Так, можно рассматривать как формально не связанные на уровне лагранжиана потенциалы метрический тензор и символы Кристоффеля (учитывая специфику преобразования последних), и из лагранжиана (3.1.1) тогда будут следовать старые выводы. Следовательно, при базировании на каноническом квазитензоре физические соображения в принципе могут фиксировать форму лагранжиана, не допуская уже добавления к нему дивергенциальных членов.

Мы будем придерживаться следующей схемы изложения. Сначала приводится значение биспина (если он существует) (2.4.23), затем — плотности обобщенного спина (2.4.22) и некоторых других очевидных из соотношений Нётер величин. Спин как «суперпотенциал» удобен для выражения спиновой доли энергии (2.4.21) ввиду соотношения (2.4.26). Тензор $T_{\mu\nu}$ достаточно дать всего один раз ввиду его единственности; для гравитации это — просто левая часть уравнений Эйнштейна с соответствующим коэффициентом. Наконец, канонический квазитензор энергии-импульса определяется по формуле (2.4.55), хотя бывает удобно пользоваться и соотношением (2.4.54), что существенно для выражения полных величин. Дальнейшая часть этого параграфа будет просто перечислением форм сохраняющихся и вообще динамических величин гравитационного поля; их обсуждение можно найти в следующем параграфе.

Случай лагранжиана (3.1.1) — общий для всех способов выбора потенциала:

$$\mathrm{N}_\sigma^{\alpha\tau\beta} = \frac{\sqrt{-g}}{4\varkappa}\left(2g^{\tau\beta}g_\sigma^\alpha - g^{\alpha\beta}g_\sigma^\tau - g^{\alpha\tau}g_\sigma^\beta\right), \tag{3.7.4}$$

$$\mathrm{M}_\sigma^{\alpha\tau} = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}\left(2\Gamma^\alpha_{\sigma\omega}g^{\tau\omega} - \Gamma^\omega_{\sigma\omega}g^{\alpha\tau} - \Gamma^\tau_{\omega\varepsilon}g^{\omega\varepsilon}g^\alpha_\sigma\right) \tag{3.7.5}$$

и

$$\mathrm{F}_\sigma^{\alpha\tau} = -\frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}\left[2g^{\omega\varepsilon}\left(\Gamma^\tau_{\omega\varepsilon}g^\alpha_\sigma - \Gamma^\alpha_{\omega\varepsilon}g^\tau_\sigma\right) + \Gamma^\tau_{\sigma\omega}g^{\alpha\omega} - \Gamma^\alpha_{\sigma\omega}g^{\tau\omega}\right]. \tag{3.7.6}$$

Спиновую долю энергии, ввиду сильного закона ее сохранения, всегда можно выразить как

$$\mathrm{U}_\tau^\sigma = -\mathrm{M}^{\alpha\sigma}_{\tau,\,\alpha} = \chi^{\alpha\sigma}_{\tau,\,\alpha};\quad \chi_\tau^{\alpha\sigma} = -\chi_\tau^{\sigma\alpha}, \tag{3.7.7}$$

где антисимметричный «суперпотенциал» имеет вид

$$\chi_\tau^{\alpha\sigma} = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}\left(g_{\tau\omega,\,\varepsilon} - g_{\tau\varepsilon,\,\omega}\right)g^{\varepsilon\alpha}g^{\omega\sigma}. \tag{3.7.8}$$

Явно же спиновую долю энергии можно записать в виде

$$\mathrm{U}_\sigma^\alpha = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}\left(g^{\alpha\lambda}g^{\omega\varepsilon} - g^{\alpha\varepsilon}g^{\omega\tau}\right)\left(g_{\lambda\sigma,\,\omega\varepsilon} + \Gamma^{\nu}_{\omega\varepsilon}\Gamma_{\lambda\sigma,\,\nu} - \Gamma^{\nu}_{\omega\varepsilon}\Gamma_{\nu\sigma,\,\lambda}\right). \qquad (3.7.9)$$

Здесь же выпишем и универсальную для всех лагранжианов величину

$$T_g^{\alpha\beta} = \frac{1}{\varkappa}\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta}\right) = -\frac{1}{2\varkappa}g^{\beta\sigma}[Rg_\sigma^\alpha - \left(g^{\omega\varepsilon}g^{\alpha\lambda} - g^{\omega\lambda}g^{\alpha\varepsilon}\right)\times$$

$$\times\left(g_{\lambda\sigma,\,\omega\varepsilon} + g_{\omega\varepsilon,\,\lambda\sigma} + 2\Gamma^{\nu}_{\omega\varepsilon}\Gamma_{\lambda\sigma,\,\nu}\right)], \qquad (3.7.10)$$

причем для лагранжиана (3.1.1.) канонический квазитензор равен [1]

$$t_\sigma{}^\alpha = -\frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}[Rg_\sigma{}^\alpha - \left(g^{\omega\varepsilon}g^{\alpha\lambda} - g^{\omega\lambda}g^{\alpha\varepsilon}\right)\times$$

$$\times\left(g_{\omega\varepsilon,\,\lambda\sigma} + \Gamma^{\nu}_{\omega\varepsilon}\Gamma_{\lambda\sigma,\,\nu} - \Gamma^{\nu}_{\omega\varepsilon}\Gamma_{\nu\sigma,\,\lambda}\right)]. \qquad (3.7.11)$$

Случай нековариантного лагранжиана (3.1.3). Плотность спина

$$\mathrm{M}_{\Lambda\sigma}^{\alpha\tau} = -\frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}[\Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda}g^{\alpha\tau} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}\left(g^{\rho\tau}g_\sigma{}^\alpha - g^{\alpha\rho}g_\sigma{}^\tau\right) +$$

$$+ \Gamma^{\alpha}_{\rho\lambda}g^{\rho\lambda}g_\sigma{}^\tau - 2\Gamma^{\alpha}_{\sigma\lambda}g^{\lambda\tau}] \qquad (3.7.12)$$

в этом случае не антисимметрична по верхним индексам, хотя лагранжиан Λ и не включает вторых производных; все дело в том, что этот лагранжиан является лишь *аффинной* скалярной плотностью. При этом, однако, продолжает выполняться сильный закон сохранения (2.4.31), поэтому возможно введение антисимметричного суперпотенциала. Как заметил Мёллер, для этого можно добавить к плотности обобщенного спина (3.7.12) дивергенцию антисимметричной величины $a_\tau^{\alpha\beta\sigma} = -a_\tau^{\beta\alpha\sigma}$, получив

$$h_\tau^{\alpha\sigma} = \mathrm{M}_{\Lambda\tau}^{\alpha\sigma} + a_\tau{}^{\beta\alpha\sigma}{}_{,\,\beta}, \qquad (3.7.13)$$

причем $\mathrm{U}_\tau{}^\sigma$ не меняется ввиду его определения:

$$\mathrm{U}_{\Lambda\tau}^{\sigma} = -\mathrm{M}_{\Lambda\tau}^{\alpha\sigma}{}_{,\,\alpha} = -h_\tau^{\alpha\sigma}{}_{,\,\alpha}. \qquad (3.7.14)$$

Требуя далее, чтобы величина $h_\tau^{\alpha\sigma}$ была антисимметричной по верхним индексам, нетрудно получить [2]

$$h_\tau^{\alpha\sigma} = -\frac{g_{\tau\varepsilon}}{2\varkappa\sqrt{-g}}[(-g)\left(g^{\alpha\varepsilon}g^{\sigma\omega} - g^{\alpha\omega}g^{\sigma\varepsilon}\right)]_{,\,\omega}. \qquad (3.7.15)$$

Канонический квазитензор, называемый в этом случае «псевдотензором Эйнштейна», конструируется тогда по обычному правилу:

$$\mathbf{t}_{\Lambda\sigma}^{\alpha} = \mathbf{T}_{g\sigma}^{\alpha} - \mathrm{U}_{\Lambda\sigma}^{\alpha} = -\mathbf{T}_{f\sigma}^{\alpha} - \mathrm{U}_{\Lambda\sigma}^{\alpha} \qquad (3.7.16)$$

и имеет простой вид

$$\mathbf{t}_{\Lambda\sigma}^{\alpha} = \frac{\partial\Lambda}{\partial g_{M,\,\alpha}}g_{M,\,\sigma} - \Lambda\delta_\sigma{}^\alpha \qquad (3.7.17)$$

---

[1] «Квазитензор 1958 года».

[2] В том случае, когда некоторый ковариантный лагранжиан приводит к существованию $\mathrm{N}_\sigma^{\alpha\tau\beta}$, т. е. когда спин $\mathrm{M}_\sigma^{\alpha\tau}$ неантисимметричен, нетрудно вести антисимметричный суперпотенциал по правилу:

$$\mathrm{U}_\tau{}^\sigma = -\left[\mathrm{F}_\tau{}^{\alpha\sigma} + \frac{1}{3}\left(\mathrm{N}_\tau^{\sigma\alpha\beta} - \mathrm{N}_\tau^{\alpha\sigma\beta}\right)_{,\beta}\right]_{,\alpha} \equiv -\left[\mathrm{M}_\tau^{\alpha\sigma} + \frac{2}{3}\left(\mathrm{N}_\tau^{\beta\alpha\sigma} - \mathrm{N}_\tau^{\alpha\beta\sigma}\right)_{,\beta}\right]_{,\alpha}.$$

(под g_M понимается метрический тензор, его плотность или другие более элементарные образования).

Случаи матричного и тетрадного представлений гравитационного поля, как уже упоминалось, изоморфны между собой. Соответствующие лагранжианы переходят друг в друга при заменах типа

$$\frac{1}{4}\operatorname{Sp}(\gamma^{\mu}{}_{;\nu}\gamma^{\lambda}{}_{;\rho}) \longleftrightarrow g^{\mu}(\alpha)_{;\nu}g^{\lambda}(\alpha)_{;\rho}. \qquad (3.7.18)$$

Подобные же замены переводят друг в друга и остальные величины, так что мы запишем их здесь совместно:

$$\mathbf{M}_{\sigma}^{\alpha\tau} = \frac{\sqrt{-g}}{4\varkappa}\operatorname{Sp}(\gamma^{\tau}\gamma^{\alpha}{}_{;\sigma} + \gamma^{\alpha}\gamma^{\varkappa}{}_{;\varkappa}g_{\sigma}{}^{\tau} - \gamma^{\tau}\gamma^{\varkappa}{}_{;\varkappa}g_{\sigma}{}^{\alpha}) =$$

$$= -\frac{\sqrt{-g}}{\varkappa}(\Phi_{\sigma}{}^{\tau\alpha}_{\cdot\cdot} + g_{\sigma}{}^{\alpha}\Phi_{\varkappa}{}^{\varkappa\tau}_{\cdot\cdot} - g_{\sigma}{}^{\tau}\Phi_{\varkappa}{}^{\varkappa\alpha}_{\cdot\cdot}). \qquad (3.7.19)$$

Эту величину можно выразить через антисимметричный тензор $f_{\mu\nu}$:

$$\mathbf{M}_{\sigma}^{\alpha\tau} = -\frac{\sqrt{-g}}{8\varkappa}\operatorname{Sp}[2\gamma^{\nu}f_{\beta\nu}(g^{\beta\tau}g_{\sigma}{}^{\alpha} - g^{\beta\alpha}g_{\sigma}{}^{\tau}) -$$

$$-g^{\beta\tau}g^{\alpha\mu}(\gamma_{\beta}f_{\sigma\mu} + \gamma_{\mu}f_{\beta\sigma} + \gamma_{\sigma}f_{\beta\mu})]. \qquad (3.7.20)$$

Канонический квазитензор запишется в виде

$$\mathbf{t}_{\beta}{}^{\alpha} = -\frac{\sqrt{-g}}{4\varkappa}\operatorname{Sp}[\gamma^{\nu}{}_{;\nu}\gamma^{\alpha}{}_{,\beta} - \gamma^{\alpha}{}_{;\nu}\gamma^{\nu}{}_{,\beta} + \gamma^{\alpha}\gamma^{\varkappa}{}_{;\varkappa}\Gamma^{\nu}_{\beta\nu} -$$

$$-\frac{1}{2}g_{\beta}{}^{\alpha}(\gamma^{\mu}{}_{;\mu}\gamma^{\nu}{}_{;\nu} - \gamma^{\mu}{}_{;\nu}\gamma^{\nu}{}_{;\mu})] = \frac{\sqrt{-g}}{\varkappa}[\Phi(\varepsilon)^{\alpha\omega} + g^{\omega}(\varepsilon)\Phi_{\varkappa}{}^{\varkappa\alpha}_{\cdot\cdot} -$$

$$-g^{\alpha}(\varepsilon)\Phi_{\varkappa}{}^{\varkappa\omega}_{\cdot\cdot}]g_{\omega}(\varepsilon)_{,\beta} - g_{\beta}{}^{\alpha}\mathbf{L}_{\mathrm{tetr}}. \qquad (3.7.21)$$

Случай кватернионного представления также изоморфен двум предыдущим; для него

$$\mathbf{M}_{\sigma}^{\alpha\tau} = \frac{\sqrt{-g}}{\varkappa}(\delta_{\sigma}{}^{\alpha}\cdot\sigma^{\tau}\cdot\sigma^{\varkappa}{}_{;\varkappa} - \delta_{\sigma}{}^{\tau}\sigma^{\alpha}\cdot\sigma^{\varkappa}{}_{;\varkappa} - \sigma^{\tau}\cdot\sigma^{\alpha}{}_{;\sigma}) \qquad (3.7.22)$$

и

$$\mathbf{t}_{\beta}{}^{\alpha} = -\frac{\sqrt{-g}}{\varkappa}\Big[\sigma^{\alpha}{}_{;\nu}\cdot\sigma^{\nu}{}_{,\beta} - \sigma^{\nu}{}_{;\nu}\cdot\sigma^{\alpha}{}_{,\beta} - \sigma^{\alpha}\cdot\sigma^{\varkappa}{}_{;\varkappa}\Gamma^{\nu}_{\beta\nu} -$$

$$-\frac{1}{2}\delta_{\beta}{}^{\alpha}(\sigma^{\mu}{}_{;\nu}\cdot\sigma^{\nu}{}_{;\mu} - \sigma^{\mu}{}_{;\mu}\cdot\sigma^{\nu}{}_{;\nu})\Big]. \qquad (3.7.23)$$

В двуметрическом формализме удобно пользоваться e-ковариантными производными; ввиду возможности превращения их сразу везде в частные производные (выбор системы координат) напрашивается вопрос о допустимости выбора дифференциальных законов сохранения в форме равенства нулю e-ковариантных дивергенций. Этот вопрос мы обсудим позже, теперь же для простоты записи величин будем пользоваться символом e-ковариантной производной. Тогда для лагранжиана (3.1.8):

$$\mathbf{M}_{\sigma}^{\alpha\tau} = \frac{1}{2\varkappa}(g_{\mu\sigma}g^{\lambda\rho} - e_{\mu\sigma}e^{\lambda\rho})[\sqrt{-g}(g^{\tau\mu}g_{\lambda}^{\alpha} - g^{\alpha\mu}g_{\lambda}^{\tau})]_{|\rho}; \qquad (3.7.24)$$

$$\mathbf{t}_\sigma{}^\tau = \frac{\partial\Lambda_{\mathrm{cov}}}{\partial g_{\mu\nu|\tau}} g_{\mu\nu|\sigma} - \Lambda_{\mathrm{cov}} g_\sigma{}^\tau + \Big[\frac{\partial\Lambda_{\mathrm{cov}}}{\partial \Pi^\sigma_{\tau\alpha}} +$$

$$+ \frac{\partial\Lambda_{\mathrm{cov}}}{\partial \Pi^\rho_{\mu\alpha}} e^{\rho\tau} e_{\mu\sigma} - \frac{\partial\Lambda_{\mathrm{cov}}}{\partial \Pi^\rho_{\mu\tau}} e^{\rho\alpha} e_{\mu\sigma}\Big]_{|\alpha} +$$

$$+ \frac{\partial\Lambda_{\mathrm{cov}}}{\partial \Pi^\rho_{\omega\tau}} e_{\omega\lambda,\,\sigma}(g^{\lambda\rho} - e^{\lambda\rho}) - \frac{1}{2}\frac{\partial\Lambda_{\mathrm{cov}}}{\partial \Pi^\rho_{\omega\varepsilon}} e_{\omega\varepsilon,\,\sigma}(g^{\rho\tau} - e^{\rho\tau}). \qquad (3.7.25)$$

Недостатки псевдотензора Эйнштейна (3.7.17), обсуждающиеся в следующем параграфе, могут быть устранены в двуметрическом формализме при введении тензорного продолжения этого псевдотензора:

$$\mathbf{t}_\sigma{}^\tau = \frac{\partial\Lambda_{\mathrm{cov}}}{\partial g_{\mu\nu|\tau}} g_{\mu\nu|\sigma} - \Lambda g_\sigma{}^\tau; \qquad (3.7.26)$$

однако для этого не требуется такого избытка дополнительных членов, который присутствует в (3.7.25). В частности, излишни члены, стоящие там под знаком дивергенции. Чтобы избавиться от них, можно выбрать равные пути, и один из них — введение нового лагранжиана (3.1.9) (детали см. в § 8.5), для которого [ср. с (2.5.14) — (2.5.16)]

$$\mathbf{n}_\lambda{}^{\beta\nu\alpha} = \frac{\sqrt{-g}}{8\varkappa}\left(2g^{\alpha\nu} g_\lambda{}^\beta - g^{\beta\nu} g_\lambda{}^\alpha - g^{\alpha\beta} g_\lambda{}^\nu\right), \qquad (3.7.27)$$

$$\mathbf{M}_\sigma^{\alpha\tau} = \mathbf{m}_\sigma^{\alpha\tau} + 2\mathbf{n}_\nu^{\alpha\beta\tau} \overset{\nu}{\gamma}_{\beta\sigma} - \mathbf{n}_\sigma^{\alpha\nu\beta} \overset{\tau}{\gamma}_{\nu\beta}, \qquad (3.7.28)$$

$$\mathbf{U}_\sigma{}^\alpha = \mathbf{u}_\sigma{}^\alpha + \mathbf{m}_\nu^{\alpha\tau} \overset{\nu}{\gamma}_{\sigma\tau} + \mathbf{n}_\nu^{\alpha\tau\beta} \overset{\nu}{\gamma}_{\tau\beta,\,\sigma}, \qquad (3.7.29)$$

где может быть полезно ввести соотношения

$$h_\lambda^{\alpha\beta} = \mathbf{m}_\lambda^{\beta\alpha} + \frac{2}{3}\left(\mathbf{n}_\lambda^{\nu\beta\alpha} - \mathbf{n}_\lambda^{\beta\nu\alpha}\right)_{|\nu} \qquad (3.7.30)$$

(аналог данного в примечании к стр. 95),

$$h_\mu^{\lambda\nu} = \frac{g_{\mu\sigma}}{2\varkappa\sqrt{-g}}\left[(-g)\left(g^{\nu\sigma} g^{\lambda\tau} - g^{\lambda\sigma} g^{\nu\tau}\right)\right]_{|\tau} \qquad (3.7.31)$$

[то же самое, но приведенное к виду, аналогичному (3.7.15)] и

$$\mathbf{u}_\mu{}^\nu = -\theta_\mu{}^\nu = h_\mu^{\nu\lambda}{}_{|\lambda}. \qquad (3.7.32)$$

Существует и другой подход, о котором мы будем говорить позднее и который тесно связан с обобщением понятия ортогональных линейных преобразований координат на общековариантную теорию.

Упомянем симметричный псевдотензор Ландау — Лифшица и Фока, не следующий непосредственно из теоремы Нётер и полученный этими авторами из требования выполнения сильного закона сохранения:

$$\left[(-g)\left(T^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta}\right)\right]_{,\,\beta} = 0. \qquad (3.7.33)$$

Это достигается простым выбором суперпотенциала

$$\mathbf{u}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\varkappa}\left[(-g)\left(g^{\alpha\beta} g^{\gamma\eta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\eta}\right)\right]_{,\,\eta}, \qquad (3.7.34)$$

просто связанного с суперпотенциалом (3.7.15):

$$h_\lambda^{\sigma\tau} = \frac{g_{\alpha\lambda}}{\sqrt{-g}} \mathbf{u}^{\alpha\sigma\tau}. \qquad (3.7.35)$$

При этом выполнение закона сохранения (3.7.33) обеспечивается ввиду равенства

$$(-g)(T^{\alpha\beta}+t^{\alpha\beta})=\mathbf{u}^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\,\gamma}. \tag{3.7.36}$$

Обсуждение приведенной конструкции с точки зрения ее плотностного веса мы перенесем в следующий параграф, отметив здесь лишь, что Голдберг дал общую формулу для конструирования симметричных псевдотензоров различных весов, тривиально обобщающую результат Фока и Ландау — Лифшица:

$$\mathbf{u}_G^{\alpha\sigma\tau}=\frac{1}{2\varkappa}[(-g)^A(g^{\alpha\sigma}g^{\beta\tau}-g^{\alpha\tau}g^{\beta\sigma})]_{,\,\beta}. \tag{3.7.37}$$

Гутман показал, что в двуметрическом формализме вес таких сохраняющихся величин может быть исправлен путем введения в них соответствующей степени от детерминанта второй метрики.

3.8. Проблема гравитационной энергии

При постановке проблемы гравитационной энергии сразу же обнаруживается критический пункт, когда ставится вопрос: не является ли гравитационное поле чисто геометрическим феноменом, т. е., говоря языком философии, не относится ли оно всецело к *форме* существования материи, а не к *видам* материи, как другие (физические) поля? При такой постановке вопроса очевидно резкое разделение физики и геометрии, хотя, конечно, в наши дни для всех привычно, что геометрия реального мира является разделом физики, как это предсказывал еще Риман более столетия назад. Однако в философском плане действует разделение агентов реального мира на содержание (материю) и форму (геометрию), в которую это содержание заключено. И с точки зрения философии вполне естественно, когда обе стороны науки — о содержании в его конкретных качествах (о частицах, полях и веществе) и о форме (геометрия) в равной мере являются опытными, и решающее слово в них принадлежит эксперименту.

Поэтому естественно обратиться именно к эксперименту для решения вопроса о том, является ли гравитация чисто геометрическим свойством реального мира, или она может быть поставлена в один ряд с другими физическими полями (при всей специфике, на которую она, как и всякое поле, «имеет право»). Мы говорим в физике о материальных объектах, т. е. о разных конкретных проявлениях (видах) материи, как о носителях характеристик взаимодействия. Тогда можно с уверенностью утверждать, что *объективно* существующий объект, взаимодействующий с другими объектами, будет вполне соответствовать обычному определению *материи*, т. е. будет дан нам в *ощущении*. Таким образом, проблема материальности переводится на язык взаимодействия. Наиболее универсальной характеристикой взаимодействия является энергия (масса), которой, как известно, обладают все материальные объекты без исключения.

Проблема существования гравитационной энергии, конечно, интересна и сама по себе, но в этом плане она приобретает особую остроту. Мы укажем еще одно хорошо известное обстоятельство, дающее несомненное решение этой проблемы с качественной стороны. Прежде всего, подчеркнем, что мы исходим из концепций близкодействия и физического релятивизма, т. е. считаем, что при взаимодействии на расстоянии та характеристика, которой обмениваются взаимодействующие тела, может передаваться лишь через посредство некоторого агента, распространяющегося с конечной (не превышающей световую) скоростью в соответствии с принципом причинности. В связи с этим можно утверждать, что потенциальная энергия, приобретаемая закручивающейся нитью подвеса крутильных весов, когда мы подносим к ним исследуемую массу, или кинетическая энергия маятника, возбуждаемая движущейся вблизи него в резонанс с его собственной частотой механически изолированной массой, переданы исключительно через гравитационное поле.

Другой важный пример относится к явлению, протекающему в космических масштабах. Это — приливные процессы, в которых в результате трения выделяется тепловая энергия, так что для поддержания приливной волны в пространстве между источником (притягивающей массой) и нагрузкой (притягиваемой массой, подверженной трению) должен образоваться поток энергии. Так как в этом промежуточном пространстве нет ничего, кроме гравитационного поля, то на промежуточном этапе передачи энергии она должна принадлежать только этому последнему. Отсюда с необходимостью следует факт существования гравитационной энергии. Такой эффект передачи энергии гравитационным полем хорошо изучен, и на основании его даже построена теория эволюции системы Земля — Луна [1]. Для более детального анализа разберем следующий мысленный эксперимент. Пусть имеется система двух тяготеющих тел (назовем их «Землей» и «Луной»). Пусть «Земля» неподвижна (в частности, не вращается) относительно далеких звезд, а приливное трение отсутствует. Вращение «Луны» пусть осуществляется по строго круговой орбите, а все процессы стационарны. Естественно, что при этом потока энергии между «Луной» и «Землей» нет. Мгновенно включим теперь приливное трение. Так как взаимодействие может распространяться лишь с конечной скоростью, то первоначально удаленные от «Земли» участки гравитационного поля «не будут знать» о включении трения, и энергия должна будет отниматься от ближайших участков гравитационного поля. Такая зона пониженной энергии в гравитационном поле будет постепенно приближаться к «Луне», пока, наконец, эта последняя не начнет отдавать свою энергию полю, поддерживая поток энергии в пространстве. Так как из теории Ньютона хорошо известно, что в случае статического слабого гравитационного поля плотность его энергии отрицательна, то это же можно заключить и для квазистатического поля вблизи медленно движущихся тел. Поэтому извлечение энергии из поля приливным трением влечет за собой еще большее уменьшение плотности гравитационной энергии в области ее переноса. Это приводит к *усилению* гравитационного поля в этой области (энергия поля отрицательная, а ее модуль пропорционален квадрату напряженности поля). Наконец, если даже не рассматривать гипотетического процесса включения приливного трения, а брать первоначально (начальное условие) не вращающуюся «Землю», то за счет приливного трения она через некоторое время приобретет какую-то скорость вращения, а с нею и соответствующую энергию. Очевидно, что эта энергия может поступить к ней лишь от «Луны», и только через гравитационное поле (то же можно заключить и о переносе момента импульса). Все сказанное позволяет сделать совершенно строго заключение о наличии у гравитационного поля энергии, способной превращаться в другие ее формы (механическую, тепловую и т. п.).

Мы рассмотрели процессы, протекающие в зоне индукции (ближней зоне) гравитационного поля. Нам пока ничего не известно о реальности гравитационных волн (зона излучения) ввиду ряда технических трудностей, стоящих на пути исследования. Однако для принципиального доказательства существования гравитационной энергии достаточно и приведенного примера, независимо от решения проблемы волн. Вывод, полученный в зоне индукции, позволяет надеяться на существование реальных

---

[1] См. (Дж. Дарвин, 1965), где обсуждается этот вопрос и приведена литература.

гравитационных волн, переносящих энергию (и информацию). Во всяком случае, проблема гравитационной энергии никак не может рассматриваться как область чисто абстрактного исследования, и связь гравитационной энергии с реально протекающими в космических масштабах процессами несомненна.

Первое определение плотности гравитационной энергии принадлежит Эйнштейну; это — псевдотензор (3.7.17). Как видно из равенства (3.7.16), его сумма с симметричным тензором энергии-импульса других полей точно сохраняется:

$$(\mathrm{T}_{f\mu} + \mathrm{t}_{\Lambda\mu}^{\nu})_{,\nu} = 0. \tag{3.8.1}$$

Первоначальный вывод этого закона основывался на преобразовании тензорного закона «сохранения» для $\mathrm{T}^{\mu\nu}$,

$$\mathrm{T}_{f\mu;\,\nu}^{\nu} \equiv \mathrm{T}_{f\mu,\,\nu}^{\nu} - \mathrm{T}_{f\lambda}^{\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0, \tag{3.8.2}$$

при учете уравнений Эйнштейна в форме

$$\mathrm{T}_{f\lambda}^{\nu} = -\frac{\sqrt{-g}}{\varkappa}\left(R_{\lambda}^{\nu} - \frac{1}{2}g_{\lambda}^{\nu}R\right). \tag{3.8.3}$$

При этом произведение $\mathrm{T}_{f\lambda}^{\nu}\ \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ приводится к виду аффинной дивергенции — $\mathrm{t}_{\Lambda\mu,\nu}^{\nu}$. Позднее Толман показал, что сумму $\mathrm{T}^{f\nu}{}_{\mu} + \mathrm{t}_{\Lambda\mu}^{\nu}$ можно представить в виде дивергенции суперпотенциала (3.7.14). Учет уравнений (3.8.3) часто характеризуют как процедуру исключения негравитационных переменных. Псевдотензор Эйнштейна сразу же подвергся критике. В 1918 г. Бауэр нашел, что в пустом плоском мире в декартовых координатах как плотность, так и интегральная величина энергии, вычисленные с помощью этого псевдотензора, равны нулю, но при переходе к сферической системе (неподвижной относительно предыдущей) плотность энергии становится отличной от нуля, а ее интегральное значение — бесконечным! Появилось сомнение в правомерности понятия *локализации* гравитационной энергии. Этот беспрецедентный случай вызвал острую полемику. Эйнштейн признал, что его псевдотензор пригоден лишь в случае замкнутых (островных) систем, причем необходимо, чтобы на бесконечности координаты становились истинно декартовыми. Если, однако, взять свободно падающую систему отсчета (локально геодезические координаты), то в ее начале символы Кристоффеля, а вместе с ними — псевдотензор Эйнштейна, обратятся в нуль, так что здесь определенная с его помощью плотность гравитационной энергии оказывается равной нулю. Отходя от этой системы отсчета, мы можем по своему желанию найти другие системы, в которых в той же точке плотность гравитационной энергии в эйнштейновском определении будет иметь любой наперед заданный знак. В 1918 г. Шрёдингер исследовал значения компонент $\mathrm{t}_{\Lambda\mu}^{\nu}$ для решений Шварцшильда и Райснера — Нордстрёма и обнаружил, что существуют системы координат, в которых все компоненты $\mathrm{t}_{\Lambda\mu}^{\nu}$ сразу обращаются в нуль. Несмотря на эти недостатки формулировки плотности энергии, Эйнштейн привел решающие доводы в пользу ее применения для расчетов *интегральной* энергии (Эйнштейн [1], работы 47 и 51), показав, в частности, что плотность энергии гравитационного поля *при взаимодействии* тел не может быть повсюду обращена в нуль. Так возникло и до недавнего времени продержалось убеждение в принципиальной нелокализуемости энергии гравитационного поля.

---

[1] В ссылках на работы А. Эйнштейна указаны номера работ в тт. I и II его «Собрания научных трудов» (см. Эйнштейн, 1965—1966).

Лоренц (1916) и Леви-Чивита (1917) выдвинули требование о *тензорном характере*[1] гравитационной энергии, предложив для ее плотности величину $T_g^{\mu\nu}$. Так как в силу уравнений Эйнштейна можно записать соотношение (2.4.56), то вместо тензорного закона сохранения для $T_t^{\mu\nu}$ можно записать равенство с аффинной дивергенцией:

$$T_t^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \tag{3.8.4}$$

Эйнштейн подверг это предложение резкой критике на том основании, что «сохранение» величины, всегда равной нулю, не содержит никакой полезной информации: оно говорит лишь, что уравнения Эйнштейна, удовлетворявшиеся вначале, должны удовлетворяться и впредь.

С точки зрения получения интегральных величин, определенных в системах, декартовых на бесконечности, совершенно неважно, какими плотностными весами обладают эти величины. Только в этом случае применим псевдотензор Ландау — Лифшица — Фока и псевдотензоры Голдберга, рассмотренные в конце предыдущего параграфа. Однако ясно, что эти величины, будучи аффинными плотностями веса, иного, чем $+1$, не могут обеспечить локализационных свойств для энергии. Что касается основной идеи при конструировании этих псевдотензоров — их симметрии, то это свойство вводилось авторами в целях получения закона сохранения момента импульса без явного учета спина полей. Понять это стремление можно лишь как продолжение старых, доквантовых традиций, когда возникающее при вычислениях классической теории поля выражение для спина (получавшееся еще в десятых годах этого века) отбрасывалось ввиду отсутствия его интерпретации. Нам кажется, что явный учет спина придает теории более глубокий физический смысл, и этого нельзя игнорировать.

Более тесно, чем в предыдущих подходах, связываются свойства сохранения, суперпотенциалы и общие свойства инвариантности (теорема Нётер) в работах Бергмана и сотрудников (Шиллера, Голдберга и др.)[2]. Кроме трехиндексных суперпотенциалов, Бергману удалось таким образом сконструировать двухиндексные (антисимметричные по этим индексам), так что плотность сохраняющейся величины оказывается контравариантной векторной плотностью. Процедура, с помощью которой это достигается, достаточно проста. В основном соотношении Нётер (2.4.20) вектор ξ^μ полагается не произвольным, а приравнивается некоторому конкретному, имеющему определенный физический смысл вектору (например, вектору Киллинга; мы будем продолжать обозначать его через ξ^μ). Тогда первая скобка в (2.4.20) обратится в нуль слабым образом (вариационные производные для лагранжиана), и выражение, стоящее под знаком дивергенции, будет точно сохраняться в дифференциальном смысле. К тому же это выражение является, как мы видели в § 2.5, плотностью контравариантного вектора. В том случае, когда лагранжиан не содержит вторых производных потенциалов, плотность биспина в (2.4.20) исчезает, и в силу соотношения (2.4.26) стоящее под знаком дивергенции выражение само может быть представлено в дивергенциальной форме — через суперпотенциал с двумя свободными индексами:

$$U^{\alpha}_{\sigma}\xi^{\sigma} + M_{\sigma}^{\alpha\tau}\xi^{\sigma}_{,\tau} = -(M_{\sigma}^{\tau\alpha}\xi^{\sigma})_{,\tau}. \tag{3.8.5}$$

---

[1] Представляют интерес исследования Беля (1958а, б, 1959) и Дебевера (1959а, б, 1960) в области тензорных законов сохранения и тензорных сохраняющихся величин. Им принадлежит исследование так называемого «тензора Беля», имеющего, впрочем, больше отношения к проблеме аналогии между гравитацией и электромагнетизмом, чем к проблеме энергии в стандартном понимании.

[2] Хороший обзор некоторых направлений исследования проблемы гравитационной энергии можно найти в докладе Каттанео (1965) на Международной конференции по гравитации в Лондоне.

В более общем случае такого рода процедура дана в (2.4.84), случай же (3.8.5) соответствует результату Бергмана. Интерпретация результата Бергмана затрудняется тем, что не вполне ясен смысл вектора ξ^μ. Если брать в качестве него вектор Киллинга, отражающий свойства *подвижности* пространства-времени, то следует иметь в виду, что в общей теории относительности вектор Киллинга существует не всегда. Поэтому иногда предлагают брать его на пространственной бесконечности, что вносит элемент произвола в теорию, ибо локально внутри рассматриваемой области этот вектор расположить невозможно ввиду неоднозначности переноса. В этом направлении проводил исследования также Ко́мар, продолжая работы Мёллера. В связи с применением векторов Киллинга при определении сохраняющихся величин следует указать на работы Траутмана, одним из первых осветившего этот аспект проблемы.

Рассмотренный в конце § 2.4 подход к законам сохранения с хронометрически инвариантной точки зрения родствен подходу Бергмана — Ко́мара, однако в нем используется поле, векторными компонентами которого являются матрицы (γ-матрицы). Это поле самым тесным образом связано с гравитацией (представляет ее) и, как мы увидим позднее, дает физически полноценные результаты при определении энергии.

Квазитензор (3.7.11), выражаемый через суперпотенциал (3.7.8) или плотность спина (3.7.5), был впервые получен автором в 1956 г. и опубликован в 1958 г., практически одновременно с Мёллером (1958а, б), так что в ряде случаев его называют «квазитензором Мёллера — Мицкевича»; мы будем называть его квазитензором 1958 года[1]. Мёллер получил этот квазитензор (в его терминологии — комплекс энергии-импульса), исходя из физических соображений устранения парадокса Бауэра, иначе говоря, потребовав инвариантности энергии относительно чисто пространственных преобразований координат. Он воспользовался, таким образом, лишь требованиями I—III и, с некоторыми оговорками, как мы увидим, требованием V (см. § 2.5). Требование IV было введено им позднее, и тогда обнаружилось, что этот квазитензор ему не удовлетворяет. Как видно из законов преобразования (2.5.10) и (2.5.13) и особенно из частной формы (2.5.17), плотность энергии $\mathfrak{t}_{g0}{}^0$ автоматически инвариантна относительно 3-мерных преобразований, не изменяющих координатного времени, т. е. ведет себя как плотность 3-скаляра, если лагранжиан является истинной скалярной плотностью. Это и есть условие *локализуемости* гравитационной энергии. В нашей работе мы исходили из более формальных соображений, исследуя теорему Нётер. Полученный нами и Мёллером квазитензор энергии-импульса гравитационного поля содержит вторые производные метрического тензора. О величинах такого рода говорил еще Лоренц (1916), называя их «комплексами» (термин, принятый затем Мёллером). Оба результата (наш и Мёллера) содержат в точности одну и ту же зависимость от метрического тензора и его производных, однако различаются постоянным множителем, как обнаружилось лишь недавно. Позднее Станюкович (1965) также получил квазитензор из инвариантного лагранжиана, и его результат совпал с нашим (отличаясь лишь множителем 2 от результата Мёллера), тогда как сам Станюкович полагал, что оба результата 1958 г. совпадают. Недоразумение было вызвано выбором автором этой книги неудачной системы единиц в первоначальной записи квазитензора.

Различие результатов наших и Мёллера вызвано тем, что мы не добавляли никаких искусственных требований к собственно теореме Нётер, тогда как Мёллер методом подгонки [пользуясь суперпотенциалами в духе Толмана и фон Фройда (1939)] конструировал величину, удовлетворяющую также *требованию V*. Кроме того, он брал в качестве плотности энергии-импульса полной системы полей сумму канонического квазитензора

[1] См. также (Шрёдингер, 1951).

гравитационного поля и симметричного тензора других полей, что, по-видимому, в некоторых случаях диктуется необходимостью (например, для поля Шварцшильда мы знаем лишь форму симметричного тензора, который стоит в правой части уравнений Эйнштейна и сингулярен, но не форму канонического). Тогда

$$\mathbf{T}_{f0}^{0} + \mathbf{t}_{g0}^{0} = -\mathbf{U}_{g0}^{0}. \tag{3.8.6}$$

Если, согласно требованию V, подставить в выражение для $\mathbf{U}_{g0}{}^{0}$ через суперпотенциал (обобщенный спин) (3.7.5) решение Шварцшильда, действующее вдали от островной системы, то результат интегрирования по бесконечному объему с применением теоремы Гаусса дает

$$\int (\mathbf{T}_{f0}^{0} + \mathbf{t}_{g0}^{0})\, dv = \frac{M}{2}, \tag{3.8.7}$$

а не полную шварцшильдовскую массу M (!). Этот странный вывод истолковывался Станюковичем как следствие того, что часть массы содержится в особенности, образованной источниками поля, т. е. (3.8.7), а часть компенсируется давлением. Эта интерпретация, как мы думаем, противоречит данным, которые будут установлены ниже. Мёллер же, чтобы получить, согласно требованию V, в интеграле (3.8.7) полное значение массы M, искусственно добавлял к гравитационной части квазитензора величину спиновой доли энергии-импульса гравитационного поля, взятую с обратным знаком, тем самым удваивая результат и не нарушая сохранения.

Кроме этого недостатка квазитензора 1958 года, существует и другой его недостаток — он не удовлетворяет мёллеровскому требованию IV (см. критическое обсуждение этого требования в конце § 2.5). Если подходить к вопросу о фиксации наблюдаемых, характеризующих распределенные системы, на световом конусе в духе Бома (см. § 2.3), то необходимость в требовании IV отпадает, однако тогда невозможна полная аналогия с существующей частной теорией относительности. Мы думаем, что решающим пунктом в критике квазитензора 1958 года является несовпадение сингулярной части в правой стороне (3.8.6) при подстановке решения Шварцшильда с выражением для источников в этом случае [см. (3.3.61)].

Сформулировав в 1960 г. все пять своих требований, Мёллер одновременно доказал теорему, что, исходя в определении канонического квазитензора из метрического тензора и его первых и вторых производных, в принципе невозможно удовлетворить сразу всем требованиям. В связи с этим возник вопрос о практическом выборе гравитационного потенциала, так как недостаточность метрического тензора можно понимать как недостаточность его 10 компонент (10 функций). Исследователям пришлось отойти от традиционной формулировки теории гравитационного поля Эйнштейна и заняться поисками новых «потенциалов» этого поля. Первые успехи на этом пути принадлежат самому Мёллеру, обратившемуся к тетрадному формализму, в рамках которого он удовлетворил всем сформулированным здесь требованиям. Полученный им при этом квазитензор (3.7.21), записанный нами одновременно в γ-матричном представлении, а также эквивалентный ему кватернионный квазитензор (3.7.23) и дают указанный результат. Однако они неинвариантны относительно локальных поворотов тетрадных векторов (на языке γ-матриц — относительно преобразования подобия, зависящего от координат), так что локализуемость гравитационной энергии в этих работах была признана с оговорками. В самом деле, взяв определенную калибровку тетрад или γ-матриц, легко даже в плоском мире получить отличное от нуля значение плотности гравитационной энергии (в том числе бесконечную интегральную энергию), что вполне соответствует парадоксу Бауэра в нековариантном подходе

Эйнштейна. Подобный же парадокс возникает и в двуметрическом формализме Розена, развивавшемся Пугачевым, Колером, Гутманом и Мицкевичем, а затем в применении к проблеме энергии вновь Розеном (Труды Международной конференции по гравитации и теории относительности, Варшава, 1962). Мёллер пытался устранить эту неоднозначность, вводя дополнительные условия, накладываемые на поле тетрад (в духе единой теории поля). Мы предлагаем базироваться либо на условиях типа Лоренца (см. § 4.8), либо на конкретной формулировке принципа Маха. Действительно, можно положить в случае островной модели, что

$$e_{\mu\nu} = \lim_{\varkappa \to 0} g_{\mu\nu}[\varkappa, T_{\alpha\beta}], \tag{3.8.8}$$

где $g_{\mu\nu}[\varkappa, T_{\alpha\beta}]$ — метрический тензор, являющийся решением уравнений Эйнштейна для данного распределения источников $T_{\alpha\beta}$. Предельный переход (3.8.8) однозначен, если пределом для соответствующих граничных условий однозначным образом является плоская метрика. Подобная же формулировка принципа Маха возможна и в тетрадном и γ-матричном формализмах, где в пределе плоского мира в декартовых координатах должна браться простейшая калибровка тетрад или матриц Дирака. Тем самым реализуется привилегированная система отсчета (с точностью до перехода к другим «инерциальным» по отношению к ней системам), обусловленная мировым распределением и движением материи, в чем и состоит принцип Маха. Если же взять с самого начала пустой мир, то задача оказывается, как и следовало ожидать, неопределенной. Однако существует и другой подход, основанный Рыловым,— теория относительного гравитационного поля, использующая мировую функцию Синга и рассматривающая касательные в некоторой «опорной точке» к риманову миру плоские пространства. Можно считать, что в опорной точке размещается наблюдатель. При этом, как показал Ву Тхань Кхиет, гравитационная энергия может локально менять знак в зависимости от того, как выбирается эта опорная точка.

В духе анализа 4-мерного мира как совокупности проявляющихся в опыте пространства и времени, что отражает формализм хронометрических инвариантов Зельманова (см. § 8.9 и обсуждение с этой точки зрения законов сохранения в конце § 2.3 и 2.4), необходимо, чтобы наблюдаемые величины были хронометрически инвариантными 3-мерными скалярами или тензорами (у последних наблюдаются лишь 3-мерные инвариантные комбинации). Поэтому третье требование Мёллера необходимо переформулировать, например, в следующей форме [1]

III. Энергия элемента 3-мерного объема $dE = \mathrm{w}^{\alpha} dS_{\alpha}$, должна быть хронометрически инвариантным 3-мерным скаляром.

Тогда согласно соотношениям (2.4.84)—(2.4.86) энергия просто выражается через суперпотенциал:

$$\mathrm{w}^{\sigma} = \theta^{\alpha\sigma}_{,\alpha} = \bar{\theta}^{\alpha\sigma}_{,\alpha}, \tag{3.8.9}$$

$$\theta^{\alpha\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \mathrm{M}_0{}^{\alpha\sigma} + \left(\frac{2}{\sqrt{g_{00}}}\right)_{,\beta} \mathrm{N}_0^{\alpha\beta\sigma} \tag{3.8.10}$$

или (антисимметризованная форма)

$$\bar{\theta}^{\alpha\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{g_{00}}} (\mathrm{M}_0{}^{\alpha\sigma} - \mathrm{M}_0{}^{\sigma\alpha}) + \frac{1}{3\sqrt{g_{00}}} (\mathrm{N}_0^{\sigma\beta\alpha} - \mathrm{N}_0^{\alpha\beta\sigma})_{,\beta} +$$
$$+ \left(\frac{2}{3\sqrt{g_{00}}}\right)_{,\beta} (\mathrm{N}_0^{\alpha\beta\sigma} - \mathrm{N}_0^{\sigma\beta\alpha}). \tag{3.8.11}$$

---

[1] См. также новую формулировку требований Мёллера (Мёллер, 1966).

Если подставлять сюда полные («тотальные») выражения, то полученная энергия соответствует сумме канонических выражений для всех полей, если же подставить чисто гравитационные, то мы получим аналог суммы канонического квазитензора гравитационного поля и симметричного тензора других полей.

Кроме того, мы добавим к пяти требованиям Мёллера шестое:

VI. В квазиньютоновском приближении теории Эйнштейна плотность энергии гравитационного поля должна переходить в соответствующее выражение теории Ньютона (принцип соответствия).

Принцип соответствия между теориями тяготения Эйнштейна и Ньютона сыграл важную роль для понимания общей теории относительности (см. § 3,5, а также анализ в книге Фока), однако он до настоящего времени не применялся в энергетическом аспекте. Как нетрудно показать по аналогии со случаем электростатики, плотность гравитационной энергии в теории Ньютона имеет вид

$$\mathrm{w}_N = -\frac{1}{8\pi\gamma}(\operatorname{grad}\varphi)^2. \tag{3.8.12}$$

Другим путем тот же результат был получен Ландау и Лифшицем (Теория поля, 1960, стр. 377). Отрицательный знак этой энергии есть выражение факта существования лишь сил притяжения между положительными массами [см. также знак правой части уравнения (3.5.10)].

Для того чтобы проанализировать следствия требования VI (третий аспект принципа соответствия), мы используем наиболее близкий к ньютоновскому точный вариант гравитационного поля — поле Шварцшильда (приводя также данные для общего случая диагональной статической метрики). Сравним хронометрически инвариантный и неинвариантный случаи. Из лагранжиана (3.1.1) следуют выражения (в нашем случае):

$$\mathrm{M}_{g0}^{i0} = \frac{1}{2\varkappa}\sqrt{\frac{-g_{ii}}{g_{00}}}\, g_{00,\,i} = \frac{M}{8\pi}\frac{x^i}{r^3}, \tag{3.8.13}$$

$$\mathrm{N}_{g0}^{ik0} = \frac{\sqrt{-g_{00}g_{ii}}}{4\varkappa}\delta_k{}^i = \frac{\delta_k{}^i}{4\varkappa}\left(1-\frac{\gamma^2M^2}{4r^2}\right). \tag{3.8.14}$$

Нековариантный лагранжиан (3.1.3) дает в этом случае тот же результат, что γ-матричный и тетрадный лагранжианы:

$$\mathrm{M}_{\gamma0}^{i0} = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{g_{00}}{-g_{ii}}}\, g_{ii,\,i} = \frac{M}{4\pi}\frac{x^i}{r^3}\left(1-\frac{\gamma M}{2r}\right). \tag{3.8.15}$$

Так как в хронометрически неинвариантном подходе плотность энергии определяется здесь как

$$\mathrm{w} = \mathrm{M}_{0,\,i}^{i0} \tag{3.8.16}$$

[сумма канонического гравитационного квазитензора и симметричного тензора источников, см. (3.8.6)], то из (3.8.13) мы получим

$$\mathrm{w}_g = \frac{M}{2}\delta(\mathbf{r}), \tag{3.8.17}$$

т. е. вывод, что квазитензор 1958 года дает плотность гравитационной энергии, равную нулю везде, кроме начала координат; из (3.8.15) следует

$$\mathrm{w}_\gamma = M\delta(\mathbf{r}) + \frac{\gamma M^2}{8\pi r^4}. \tag{3.8.18}$$

В последнем случае мы получили распределенную в пространстве энергию, плотность которой, однако, *положительна*, что противоречит (3.8.12). Действительно, если взять ньютоновский потенциал

$$\varphi = -\frac{\gamma M}{r}, \tag{3.8.19}$$

то (3.8.12) дает

$$w_N = -\frac{\gamma M^2}{8\pi r^4} \tag{3.8.20}$$

(ср. это выражение и (3.8.18)!).

Перходя к хронометрически инвариантному подходу, заметим, что псевдотензор Эйнштейна ввиду плохих трансформационных свойств непригоден для конструирования интересующих нас выражений. Согласно (3.8.10) получим для лагранжиана (3.1.1)

$$\theta_g^{i0} = \frac{M}{16\pi}\frac{x^i}{r^3}\frac{1+\dfrac{\gamma M}{2r}}{1-\dfrac{\gamma M}{2r}} \tag{3.8.21}$$

и плотность энергии

$$w_g{}^0 = \frac{M}{4}\frac{1+\dfrac{\gamma M}{2r}}{1-\dfrac{\gamma M}{2r}}\delta(\mathbf{r}) - \frac{\gamma M^2}{16\pi r^4}\left(1-\frac{\gamma M}{2r}\right)^{-2}, \tag{3.8.22}$$

которая на больших расстояниях от начала имеет верный знак, но по модулю в два раза меньше требуемого значения. В случае же (3.8.15) получим

$$\theta_\gamma^{i0} = \frac{M}{4\pi}\frac{x^i}{r^3}\left(1+\frac{\gamma M}{2r}\right) \tag{3.8.23}$$

и

$$w_\gamma{}^0 = M\left(1+\frac{\gamma M}{2r}\right)\delta(\mathbf{r}) - \frac{\gamma M^2}{8\pi r^4}. \tag{3.8.24}$$

Мы видим, что тем самым требование VI удовлетворяется автоматически в случае γ-матричного и тетрадного лагранжианов, а также, как легко видеть, кватернионного и двуметрического в том случае, когда для последнего вторая метрика принимает галилеевы значения в изотропной системе координат (3.3.40). При этом мы пользовались калибровкой γ-матриц, принятой в § 3.3, или соответствующей калибровкой тетрадных векторов. Подчеркнем, что оба выражения — и (3.8.22), и (3.8.24) — соответствуют распределенной в пространстве энергии, причем в коэффициентах при δ-функциях стоят принципиально разные выражения (мы не будем здесь критиковать расходимости получающихся выражений с формальной точки зрения, так как для реальных тел вблизи начала координат должно иметь место другое решение уравнений Эйнштейна). Окончательный выбор выражения для энергии проводится на основании этих δ-членов. Вспоминая выражение (3.3.61), а также имея в виду, что в состав плотности хронометрически инвариантной энергии вследствие (3.8.6) и метода построения хронометрических инвариантов входит член

$$\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{g_{00}}}T_{f0}{}^0 = M\left(1+\frac{\gamma M}{2r}\right)\delta(\mathbf{r}), \tag{3.8.25}$$

мы сразу же можем отметить его точное совпадение с соответствующим слагаемым в (3.8.24), но не в (3.8.22).

При вычислении интегральной энергии (массы) системы, называемой полем Шварцшильда, необходимо иметь в виду, что вблизи начала координат («центр частицы») применение классической теории гравитационного поля в пустоте является чрезмерной идеализацией. С одной стороны, в столь малых областях необходимо перейти к квантовой теории, где свойства пространства-времени будут резко отличаться от макроскопических (см. § 6.2). С другой стороны, все частицы должны, по-видимому, обладать пространственной структурой (в тех рамках, в которых применимо само понятие пространства). Следовательно, внутри этой структуры применять решение Шварцшильда в вакууме было бы незаконно уже в классической теории. Поэтому разумно предполагать, что в некоторых достаточно малых (но значительно превышающих величину шварцшильдовского радиуса) окрестностях начала координат гравитационное поле отличается от поля Шварцшильда и что там это поле достаточно регулярно, чтобы можно было применять теорему Гаусса. Тогда, переходя к поверхности, окружающей нашу систему, и устремляя эту поверхность к бесконечности, мы получим следующие выражения для интегральной энергии поля Шварцшильда: из (3.8.13)

$$E_g = \oint{}' \mathrm{M}_{g0}{}^{i0} ds_i = M/2; \tag{3.8.26}$$

из (3.8.15)

$$E_\gamma = \oint \mathrm{M}_{\gamma 0}{}^{i0} ds_i = M; \tag{3.8.27}$$

из (3.8.21)

$$E_g^{\mathrm{ch}} = \oint \theta_g{}^{i0} ds_i = M/4; \tag{3.8.28}$$

и из (3.8.23)

$$E_\gamma^{\mathrm{ch}} = \oint \theta_\gamma{}^{i0} ds_i = M. \tag{3.8.29}$$

Здесь мы учли, что элемент сферы интегрирования равен

$$ds_i = x^i r \sin\theta d\varphi d\theta, \tag{3.8.30}$$

и в дальнейшем устремляли r к бесконечности. Полученные результаты очевидны сами по себе, однако полезно напомнить здесь об одном обстоятельстве. Мы видим, что выражения (3.8.27) и (3.8.29) соответствуют V требованию Мёллера. Это требование по существу состоит в том, чтобы энергия системы была равна ее гравитационной массе (скорость света равна единице), иначе говоря, это требование как бы замыкает в единое целое принцип эквивалентности массы и энергии частной теории относительности (где под массой понимается инертная масса) и принцип эквивалентности инертной и тяготеющей масс общей теории относительности; этот объединенный принцип мы будем называть принципом эквивалентности Галилея — Этвёша — Эйнштейна (см. его квантовое обсуждение в § 7.3). В то время как несколько иной принцип эквивалентности, связанный с так называемым «лифтом Эйнштейна», бесспорно утратил свою роль в современной теории гравитации (см. Фок, Синг), принцип Галилея — Этвёша — Эйнштейна оказывается связанным с проблемой энергии и совершенно нетривиальным.

3.9. О числе измерений физического мира

Прежде чем перейти к анализу свойств других физических полей, остановимся на характерных различиях в ситуации, складывающейся для гравитационного поля при выборе числа измерений физического мира, меньшего четырех (включая время!). По-видимому, факт четырехмерности нашего мира сам по себе содержит важную информацию и не является тривиальным, хотя мы о нем так редко задумываемся. Конечно, можно отказаться рассматривать этот вопрос, попросту постулируя, что физический мир обладает четырьмя измерениями; однако такой подход, в сущности, повторяет концепции Канта об априорности нашего представления о пространстве и времени — концепции, устаревшие хотя бы в связи с принципом Маха.

В этом параграфе мы сделаем первые шаги в указанном направлении и отметим, что конкретные выводы из свойств гравитационного поля, связанных с числом измерений мира, могут быть довольно просто истолкованы физически.

Конечно, использование всего-навсего одного измерения дает чрезмерно бедную картину мира, не содержащую даже понятия кривизны; поэтому с точки зрения теории гравитации Эйнштейна (в рамках которой проводится этот анализ) случай $n = 1$ следует отбросить.

При $n = 2$ в качестве символа Леви-Чивиты следует взять двухиндексный символ $\varepsilon_{\mu\nu}$, которому должна быть пропорциональна любая ковариантная антисимметричная величина, т. е. если

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}, \tag{3.9.1}$$

то

$$A_{\mu\nu} = a\varepsilon_{\mu\nu}. \tag{3.9.2}$$

Тогда тензор кривизны Римана — Кристоффеля в силу свойств [1]

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = -R_{\nu\mu\lambda\rho} = -R_{\mu\nu\rho\lambda} \tag{3.9.3}$$

записывается в виде

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = K\cdot\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\rho}. \tag{3.9.4}$$

Однако по аналогии с равенством (1.40)

$$\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\rho} = \frac{1}{-g}\left(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}\right) \tag{3.9.5}$$

или

$$\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\rho} = \delta_\lambda{}^\mu\delta_\rho{}^\nu - \delta_\rho{}^\mu\delta_\lambda{}^\nu, \tag{3.9.6}$$

так что [2]

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = -\frac{K}{g}\left(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}\right). \tag{3.9.7}$$

Производя двойное свертывание, находим связь K со скалярной кривизной

$$R = \frac{2K}{g}, \tag{3.9.8}$$

---

[1] Тождества Риччи не имеют смысла при $n = 2$, как и тождества Бианки,— все они выполняются тогда не в силу структуры тензора кривизны, а просто ввиду числа измерений, равного двум.

[2] Мы считаем детерминант метрического тензора отрицательным, что, между прочим, позволяет не только диагонализировать, но и антидиагонализировать этот тензор.

что позволяет более удобно выразить тензор Римана — Кристоффеля как

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = -\frac{R}{2}\left(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}\right), \tag{3.9.9}$$

а тензор Риччи — как

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \tag{3.9.10}$$

Из последнего равенства следует тождественное обращение в нуль консервативного тензора Эйнштейна в двумерном мире:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \equiv 0. \tag{3.9.11}$$

Если смотреть на эти хорошо известные выводы с точки зрения уравнений гравитации Эйнштейна, то мы должны принять, что в двумерном мире симметричный тензор энергии-импульса всех полей должен быть равен нулю:

$$T_{f\mu\nu} \equiv 0. \tag{3.9.12}$$

Иначе говоря, в двумерном мире могут существовать лишь такие физические поля, у которых нет энергии и импульса (по крайней мере, как источников гравитационного поля) и которые поэтому не взаимодействуют с гравитацией (не могут быть ее источниками). Подчеркнем, что эти заключения верны только в том случае, если придерживаться ортодоксального эйнштейновского подхода к гравитационному полю.

Из выражения (3.9.4) следует, что тензор Римана — Кристоффеля в двумерном случае обладает лишь одной независимой и не равной нулю компонентой, в качестве которой можно выбрать R_{1212}. Закон ее преобразования (обычный тензорный!) имеет вид

$$R'_{1212} = \left[\left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\right)^2\left(\frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\right)^2\left(\frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\right)^2 - 2\frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\right] R_{1212}, \tag{3.9.13}$$

тогда как якобиан обратного преобразования равен в двумерном мире

$$J^{-1} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\frac{\partial x^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\frac{\partial x^2}{\partial x'^1}, \tag{3.9.14}$$

так что

$$R'_{1212} = J^{-2} R_{1212}. \tag{3.9.15}$$

Этот закон как нельзя лучше согласуется с формой (3.9.9), принимающей для компоненты R_{1212} вид

$$R_{1212} = -Rg/2, \tag{3.9.16}$$

поскольку детерминант метрического тензора в нашем случае равен

$$g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2, \tag{3.9.17}$$

так что плотность скалярной кривизны можно переписать в виде

$$\sqrt{-g}R = 2R_{1212}/\sqrt{-g}. \tag{3.9.18}$$

Заметим, что в этом параграфе мы рассматриваем мир в целом, не выделяя пространственных и временной координат, так что использование греческих индексов здесь не предполагает того, чтобы они пробегали четыре значения.

Перейдем к случаю $n = 3$. Теперь число компонент как тензора Римана — Кристоффеля, так и тензора Риччи равно 6, так что каждый из них можно выразить с помощью другого (и метрического тензора); вспомним, что в двумерном случае все выражается через скалярную кривизну. Символ Леви-Чивиты обладает здесь тремя индексами, и к свойствам тензора Римана — Кристоффеля (3.9.3) следует добавить тождества Риччи

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\nu\lambda} = 0, \tag{3.9.19}$$

а также тождества Бианки. Однако антисимметризация сразу по четырем индексам должна давать тождественно нуль в силу числа измерений мира; например,

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}E_{\omega\varepsilon\alpha} + R_{\mu\nu\omega\varepsilon}E_{\lambda\rho\alpha} - R_{\mu\nu\varepsilon\rho}E_{\omega\lambda\alpha} - \\ - R_{\mu\nu\lambda\omega}E_{\rho\varepsilon\alpha} - R_{\mu\nu\omega\rho}E_{\lambda\varepsilon\alpha} - R_{\mu\nu\lambda\varepsilon}E_{\omega\rho\alpha} = 0 \tag{3.9.20}$$

(левая часть антисимметрична по индексам λ, ρ, ω и ε). Умножим теперь это выражение на $E_{\sigma\tau\beta}g^{\mu\omega}g^{\nu\varepsilon}g^{\alpha\beta}$ и воспользуемся соотношением

$$E^{\mu\nu\alpha}E_{\sigma\tau\alpha} = -\delta_\sigma{}^\mu\delta_\tau{}^\nu + \delta_\tau{}^\mu\delta_\sigma{}^\nu. \tag{3.9.21}$$

После простых преобразований получим искомое выражение тензора Римана — Кристоффеля через тензор Риччи (и через скалярную кривизну, также, очевидно, выражающуюся через тензор Риччи):

$$R_{\sigma\tau\lambda\rho} = R_{\sigma\rho}g_{\tau\lambda} + R_{\tau\lambda}g_{\sigma\rho} - R_{\sigma\lambda}g_{\tau\rho} - \\ - g_{\sigma\lambda}R_{\tau\rho} + {}^1\!/_2R(g_{\sigma\lambda}g_{\tau\rho} - g_{\sigma\rho}g_{\tau\lambda}). \tag{3.9.22}$$

Эта связь существует лишь в мире с тремя измерениями [1].

Уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\varkappa T_{\mu\nu} \tag{3.9.23}$$

приводят в 3-мерном случае к соотношениям

$$R = 2\varkappa T \tag{3.9.24}$$

и

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa(T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T), \tag{3.9.25}$$

так что выражение (3.9.22) для $R_{\sigma\tau\lambda\rho}$ можно переписать в виде

$$R_{\sigma\tau\lambda\rho} = -\varkappa[T_{\sigma\rho}g_{\tau\lambda} + T_{\tau\lambda}g_{\sigma\rho} - \\ - T_{\sigma\lambda}g_{\tau\rho} - T_{\tau\rho}g_{\sigma\lambda} + T\,(g_{\sigma\lambda}g_{\tau\rho} - g_{\rho\sigma}g_{\tau\lambda})]. \tag{3.9.26}$$

Мы видим отсюда, что тензор Римана — Кристоффеля обращается в нуль всюду, где равен нулю симметричный тензор энергии-импульса, т. е. в отсутствие других полей и вещества пространство — время должно быть плоским — гравитация должна отсутствовать. Иначе говоря, гравитационное взаимодействие в 3-мерном мире не может передаваться через пустоту, без какого-либо посредника (если придерживаться ортодоксальной эйнштейновской трактовки гравитации), и там невозможны, например, планетные системы наподобие солнечной.

Простейшим случаем (в смысле минимальности числа измерений), когда наиболее характерная черта наблюдаемого нами мира реализуется (по крайней мере, в эйнштейновской интерпретации!), т. е. когда гравитационное поле обладает самостоятельностью и действует через пустое (как в смысле отсутствия вещества, так и других полей) пространство, является *случай 4 измерений* — реально существующий 4-мерный мир оказывается простейшей возможной «конструкцией» в духе Эйнштейна.

[1] Отсюда видно, что в этом случае тензор конформной кривизны Вейля тождественно равен нулю.

4. ФИЗИЧЕСКИЕ ПОЛЯ (КРОМЕ ГРАВИТАЦИОННОГО)

4.1. Электромагнитное поле Максвелла: лагранжиан и уравнения

Описание в общей теории относительности наряду с гравитацией электромагнитного поля не составляет трудности, по крайней мере, если исходить из принципа экстремума действия и из связи между тензором напряженности электромагнитного поля и 4-потенциалом. Так как эти величины не включают (как можно думать) вторых производных метрического тензора, сначала полезно использовать локально геодезическую систему координат, в которой для величин такого рода существует полная параллель со случаем частной теории относительности. Мы можем тогда принять определение 4-потенциала через его компоненты в 3-мерной электродинамике:

$$(A^{\mu}) \rightarrow (\varphi, \mathbf{A}), \tag{4.1.1}$$

так что

$$(A_{\mu}) \rightarrow (\varphi, -\mathbf{A}). \tag{4.1.2}$$

Тензор напряженности, как обычно, выражается через производные 4-потенциала в виде

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\,\mu} - A_{\mu,\,\nu} \equiv A_{\nu;\,\mu} - A_{\mu;\,\nu} \tag{4.1.3}$$

(мы записали здесь и *явно* тензорную форму напряженности). Связь между компонентами тензора напряженности и трехмерными электрической напряженностью и магнитной индукцией (величинами, как известно, родственными друг другу и традиционно называемыми по-разному) выводится следующим образом:

$$F_{0i} = A_{i,\,0} - A_{0,\,i} \rightarrow -A^{i}{}_{,\,0} - A_{0,\,i} =$$
$$= -(\partial \mathbf{A} / \partial x^0 + \operatorname{grad} \varphi)^i = E^i \tag{4.1.4}$$

и

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}F_{jk} = -\varepsilon_{ijk}A_{j,k} \approx \varepsilon_{ijk}A^{j}{}_{,k} = -(\operatorname{rot}\mathbf{A})^i = -B^i. \tag{4.1.5}$$

Тогда в хронометрически инвариантной форме (см. § 8.9) можно строго (не переходя к локально геодезической системе) определить

$$E_i = \frac{F_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}, \qquad E^i = \frac{F^{i}{}_{\cdot 0}}{\sqrt{g_{00}}} \tag{4.1.6}$$

и

$$B_i = -\frac{1}{2}E_{ijk}F^{jk} \tag{4.1.7}$$

или

$$B^i = -\frac{1}{2}E^{ijk}\left[F_{jk} + \frac{1}{\sigma}\,(F_{0j}g_{0k} - F_{0k}g_{0j})\right]. \tag{4.1.8}$$

Здесь аксиальный тензор Леви-Чивиты 3-мерного мира равен

$$E_{ijk} = \frac{E_{0ijk}}{\sqrt{g_{00}}} = \sqrt{b}\,\varepsilon_{ijk}, \tag{4.1.9}$$

где b — детерминант 3-мерного метрического тензора b_{ij}.

Для удобства и симметрии записи ряда выражений можно ввести *дуальные* величины [общие определения см. в (8.2.28)—(8.2.32)]; а именно, пусть тензору $F_{\mu\nu}$ дуально сопряженным будет аксиальный тензор

$$*F^{\lambda\rho} = \frac{1}{2} E^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} \tag{4.1.10}$$

и обратно

$$\frac{1}{2} E_{\mu\nu\lambda\rho} *F^{\lambda\rho} = **F_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}. \tag{4.1.11}$$

Между исходным тензором и дуальным ему существуют промежуточные градации. Так, можно определить непрерывный *поворот дуальности*,

$$e^{*\alpha} F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \cos\alpha + *F_{\mu\nu} \sin\alpha, \tag{4.1.12}$$

оператор которого обладает хорошо знакомыми свойствами:

$$e^{*\alpha} e^{*\beta} = e^{*(\alpha+\beta)}, \tag{4.1.13}$$

так что

$$e^{*\frac{\pi}{2}} F_{\mu\nu} = *F_{\mu\nu}, \tag{4.1.14}$$

$$e^{*0} F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \tag{4.1.15}$$

и

$$*e^{*\alpha} = e^{*\frac{\pi}{2}} e^{*\alpha} = e^{*\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}. \tag{4.1.16}$$

Для того чтобы разложить аксиально сопряженную напряженность электромагнитного поля в хронометрически инвариантном виде, запишем сначала

$$*F^{\lambda\rho} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} \tag{4.1.17}$$

и учтем, что существует простая связь между детерминантами 4-мерного и 3-мерного метрических тензоров:

$$-g = b \cdot g_{00}. \tag{4.1.18}$$

Поэтому можно записать, исходя из (5.1.9), что

$$B_i = -\frac{*F_{0i}}{\sqrt{g_{00}}} \tag{4.1.19}$$

или

$$B^i = -\frac{*F^i{}_0}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{4.1.20}$$

Аналогично

$$E_i = -\frac{1}{2} E_{ijk} *F^{jk}. \tag{4.1.21}$$

Для наглядности те же результаты можно представить в локально геодезической системе вблизи начала координат. Мы получим тогда выражение 3-векторов **E** и **B** через $F_{\mu\nu}$ и $*F_{\mu\nu}$:

$$\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\} \cong \{F_{0i}, *F^{0i}\} \cong \left\{-\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} * F^{jk}, \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk}\right\} \tag{4.1.22}$$

и обратное выражение тензоров $F_{\mu\nu}$ и $*F_{\mu\nu}$ через 3-мерные векторы (также в локально геодезической системе):

$$F_{\mu\nu} \approx \begin{Vmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{4.1.23}$$

и

$$*F^{\mu\nu} \approx \begin{Vmatrix} 0 & B^1 & B^2 & B^3 \\ -B^1 & 0 & -E^3 & E^2 \\ -B^2 & E^3 & 0 & -E^1 \\ -B^3 & -E^2 & E^1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{4.1.24}$$

Для того чтобы перейти от этих выражений к противоположным по вариантности, следует помнить, что в локально геодезической системе переход между противоположными вариантностями приводит к изменению знака компоненты на обратный, если операция касается нечетного числа индексов с пространственными значениями (1, 2, 3); в других случаях знак не меняется.

Трехмерные дифференциальные операции записываются в хронометрически инвариантном виде как

$$(\operatorname{grad}\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial l^i}, \qquad (\operatorname{grad}\varphi)^i = -g^{i\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha};$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla_i A^i; \tag{4.1.25}$$

$$(\operatorname{rot} A)^i = E^{ijk}\nabla_k A_j,$$

так что связь между напряженностями и потенциалами имеет вид

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\tau} - \operatorname{grad}\varphi + \varphi\mathbf{G};$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} + \varphi\boldsymbol{\omega}. \tag{4.1.26}$$

Свернутые комбинации $F_{\mu\nu}$ и $*F_{\nu\mu}$ равны: инварианту

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -*F^{\mu\nu}*F_{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2), \tag{4.1.27}$$

инварианту

$$e^{*\alpha}F_{\mu\nu}e^{-*\alpha}F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \tag{4.1.28}$$

и псевдоскаляру

$$F^{\mu\nu} * F_{\mu\nu} = 4(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}). \tag{4.1.29}$$

Тензор напряженности и все построенные с его помощью величины инвариантны относительно *преобразования калибровки* (градиентного преобразования)

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}, \qquad F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}, \tag{4.1.30}$$

так что имеется некоторая свобода в выборе потенциала при заданном тензоре напряженности. Удобно (особенно в квантовой теории поля) воспользоваться условием Лоренца (калибровкой Лоренца):

$$A^\mu{}_{;\mu} = 0 \text{ или } \mathbf{A}^\mu{}_{;\mu} \equiv \mathbf{A}^\mu{}_{,\mu} = 0, \tag{4.1.31}$$

которая выделяет из всех спиновых состояний (0 и 1), соответствующих полю A_μ, состояние со спином 1 в соответствии с градиентной инвариантностью теории.

Лагранжиан поля Максвелла проще всего записать в форме инварианта (4.1.27) (с точностью до множителя):

$$\mathrm{L}_{\mathrm{em}} = -\frac{\sqrt{-g}}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{4} * F^{\mu\nu} * F_{\mu\nu}, \qquad (4.1.32)$$

так что он равен

$$\mathrm{L}_{\mathrm{em}} = \frac{\sqrt{-g}}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \qquad (4.1.33)$$

в 3-мерных обозначениях. Фок и Подольский, а также Ферми (см. Фок, 1957) предложили другие виды лагранжиана, облегчающие каноническое квантование электромагнитного поля (см., например, Вентцель, 1947). Лагранжиан такого рода равен (Фок, 1957):

$$\mathrm{L}_{\mathrm{em}} = -\frac{\sqrt{-g}}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\sqrt{-g}}{2} (A^{\mu}{}_{;\,\mu})^2 \qquad (4.1.34)$$

или (Швебер, 1963)

$$\mathrm{L}_{\mathrm{em}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} A^{\mu;\nu} A_{\mu;\nu}. \qquad (4.1.35)$$

Оба эти лагранжиана инвариантны по отношению к преобразованиям 4-мерных координат, но калибровочно неинвариантны.

Источники электромагнитного поля входят в лагранжиан взаимодействия этого поля и его источников; такой лагранжиан записывается в виде

$$\mathrm{L}_{\mathrm{int}} = -\mathrm{j}^{\mu} A_{\mu}, \qquad (4.1.36)$$

так что

$$\frac{\delta \mathrm{L}_{\mathrm{int}}}{\delta A} = -\mathrm{j}^{\alpha} \qquad (4.1.37)$$

— обычное определение тока, не зависящего, по предположению, от 4-потенциала. Этот лагранжиан не является калибровочно инвариантным, и его изменение при преобразованиях (4.1.30) должно компенсироваться изменением лагранжиана заряженных частиц или комплексных полей, которого мы здесь пока не выписываем (см. § 4.4 и 4.5). Собственно, взаимодействие между заряженными полями и электромагнитным полем может быть получено так называемым «компенсационным» путем, когда калибровка поля зарядов полагается зависящей от мировой точки, в которой взят потенциал поля зарядов.

Итак, из введенных лагранжианов требуется получить соответствующие им уравнения, явно записав общее уравнение:

$$\frac{\delta}{\delta A_\alpha} (\mathrm{L}_{\mathrm{em}} + \mathrm{L}_{\mathrm{int}}) = 0. \qquad (4.1.38)$$

Для этого заметим, что

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial A_{\alpha,\beta}} = \delta_\mu{}^\beta \delta_\nu{}^\alpha - \delta_\mu{}^\alpha \delta_\nu{}^\beta, \qquad (4.1.39)$$

и перейдем к первому лагранжиану (4.1.32), для которого

$$\frac{\partial \mathbf{L}_{\text{em}}}{\partial F_{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} F^{\mu\nu}. \tag{4.1.40}$$

Тогда

$$\frac{\delta \mathbf{L}_{\text{em}}}{\delta A_\alpha} = -\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{\text{em}}}{\partial A_{\alpha,\beta}}\right)_{,\beta} = -(\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})_{,\beta} \equiv -\mathbf{F}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \mathbf{j}^\alpha. \tag{4.1.41}$$

Перейдем в этом уравнении к потенциалам:

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \Box A^\alpha + A^\beta{}_{;\beta}{}^{;\alpha} - A^\lambda R_\lambda{}^\alpha = -j^\alpha, \tag{4.1.42}$$

где даламбертиан равен

$$\Box A^\alpha = -g^{\mu\nu} A^\alpha{}_{;\mu;\nu}. \tag{4.1.43}$$

Лагранжиан (4.1.34) дает, в свою очередь, уравнения

$$[-\mathbf{F}^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \mathbf{A}^\mu{}_{;\mu}]_{;\beta} = \mathbf{j}^\alpha, \tag{4.1.44}$$

а лагранжиан (4.1.35) —

$$\Box A^\alpha = -j^\alpha. \tag{4.1.45}$$

В уравнениях (4.1.44) можно отбросить дивергенцию 4-потенциала, если принять калибровку Лоренца (4.1.31); то же самое можно сделать и в (4.1.42). Однако, если учесть форму последних уравнений и не применять условия Лоренца, то можно без всяких ограничений, наложенных на калибровку, записать для лагранжиана (4.1.34):

$$\Box A^\alpha - A^\lambda R_\lambda{}^\alpha = -j^\alpha. \tag{4.1.46}$$

Обратно, уравнения для тензора напряженности электромагнитного поля, следующие из лагранжиана (4.1.35), имеют вид

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - A^\beta{}_{;\beta}{}^{;\alpha} + A^\lambda R_\lambda{}^\alpha = -j^\alpha. \tag{4.1.47}$$

До настоящего времени нет экспериментальных указаний на то, какие из этих уравнений (и лагранжианов) следует предпочесть; однако в общей теории относительности по преимуществу пользуются лагранжианом (4.1.32) и соответствующими ему уравнениями (4.1.41), (4.1.42). Достоинство этих уравнений состоит в том, что из них просто на основании свойств симметрии тензора $F^{\mu\nu}$, без использования предположений о конкретной калибровке потенциала, следует закон сохранения заряда

$$\mathbf{j}^\alpha{}_{,\alpha} = 0; \tag{4.1.48}$$

точно так же из тождеств Бианки следует равенство нулю ковариантной дивергенции симметричного тензора энергии-импульса в уравнениях гравитационного поля Эйнштейна.

Кроме уравнений для напряженности, следующих из вариационного принципа, существуют еще уравнения, которые могут заменить связь между тензором напряженности и 4-потенциалом (4.1.3), а именно

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\lambda\mu,\nu} + F_{\nu\lambda,\mu} = 0, \tag{4.1.49}$$

или, что то же,

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0. \tag{4.1.50}$$

Существуют еще две эквивалентные формы записи этих уравнений:

$$*F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{4.1.51}$$

и

$$*\mathbf{F}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \tag{4.1.52}$$

явно демонстрирующие тот факт, что число этих уравнений равно 4, и в высшей степени аналогичные динамическим уравнениям электромагнетизма (4.1.41):

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -j^{\mu}, \tag{4.1.53}$$

или, что то же,

$$\mathbf{F}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\mathbf{j}^{\mu}. \tag{4.1.54}$$

Уравнения (тождества) (4.1.50), с одной стороны, полезны для введения волнового уравнения для напряженности электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu;\lambda}{}^{;\lambda} &= -F_{\lambda\mu;\nu}{}^{;\lambda} - F_{\nu\lambda;\mu}{}^{;\lambda} = -F_{\lambda\mu}{}^{;\lambda}{}_{;\nu} - F_{\nu\lambda}{}^{;\lambda}{}_{;\mu} - F_{\alpha\mu}R^{\alpha}_{\cdot\lambda\nu\cdot}{}^{\lambda} - \\ &- F_{\lambda\alpha}R^{\alpha}_{\cdot\mu\nu\cdot}{}^{\lambda} - F_{\alpha\lambda}R^{\alpha}_{\cdot\nu\mu\cdot}{}^{\lambda} - F_{\nu\alpha}R^{\alpha}_{\cdot\lambda\mu\cdot}{}^{\lambda}, \end{aligned} \tag{4.1.55}$$

откуда

$$\Box F_{\mu\nu} = +j_{\mu;\nu} - j_{\nu;\mu} - F_{\alpha\mu}R_{\nu}{}^{\alpha} + F_{\alpha\nu}R_{\mu}{}^{\alpha} + F_{\alpha\lambda}R^{\alpha\lambda}_{\cdot\ \cdot\mu\nu}. \tag{4.1.56}$$

Мы исключили здесь дивергенции тензора напряженности, пользуясь уравнениями (4.1.41). Кроме того, здесь можно исключить и тензор Риччи, исходя из уравнений Эйнштейна, и заменить его на симметричный тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

С другой стороны, уравнения (4.1.50) могут служить для вывода выражения симметричного тензора энергии-импульса, что обсуждается в начале § 5.4. Этот тензор, который мы введем другим путем в следующем параграфе, имеет след, равный тождественно нулю. Поэтому, если воспользоваться уравнениями Эйнштейна и предположить отсутствие всех полей, кроме гравитационного и электромагнитного, можно просто заменить два члена в уравнении (4.1.56):

$$F_{\alpha\mu}R_{\nu}{}^{\alpha} - F_{\alpha\nu}R_{\mu}{}^{\alpha} = -2\varkappa F_{\alpha\mu}F_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{4.1.57}$$

Разная форма уравнений, описывающих распространение напряженности (4.1.56) и 4-потенциала (4.1.42), не приводит, однако, к противоречиям в отношении распространения световых волн, как можно показать непосредственным расчетом (см., например, Эддингтон, 1934).

В заключение запишем уравнения Максвелла в 3-мерной хронометрически инвариантной форме, наиболее близкой к эксперименту:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{E} &= 4\pi\rho + \boldsymbol{\omega}\mathbf{B}; \\ \operatorname{rot}\mathbf{B} &= 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\tau} + D\mathbf{E} - [\mathbf{BG}] \end{aligned}\right\} \tag{4.1.58}$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{B} &= -\boldsymbol{\omega}\mathbf{E}; \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\tau} - \mathbf{DB} - [\mathbf{EG}]. \end{aligned} \tag{4.1.59}$$

Здесь появляются эффективные электрический и магнитный (!) заряды, если перейти к неинерциальным системам. В приближенной форме такие уравнения были получены в плоском мире Барабаненковым (1959) и Терлецким (1960).

4.2. Сохраняющиеся величины и решения для системы электромагнитного и гравитационного полей

Так как сохраняющиеся величины сами по себе играют фундаментальную роль, а одна из них, а именно симметричный тензор энергии-импульса, служит источником гравитационного поля, так что ее учет необходим при анализе последнего, мы начинаем этот параграф с перечисления сохраняющихся величин электромагнитного поля (или, точнее говоря, его динамических переменных). Эти величины различны для разных лагранжианов, которые могут отличаться друг от друга не просто на дивергенцию, но и на дополнительный член, пропорциональный левой части калибровочного условия Лоренца (4.1.31).

Для лагранжиана (4.1.32) можно записать тогда, пользуясь общими определениями § 2.4:

$$\mathbf{M}_\sigma^{\alpha\tau} = \sqrt{-g}\, A_\sigma F^{\alpha\tau}, \tag{4.2.1}$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - F^{\alpha\mu} F_{\alpha\lambda} g^{\lambda\nu}, \tag{4.2.2}$$

$$\mathbf{U}_\sigma{}^\alpha = \mathbf{F}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} A_\sigma + \mathbf{F}^{\alpha\mu} A_{\sigma,\mu}, \tag{4.2.3}$$

$$\mathbf{t}_\sigma{}^\alpha = \mathbf{T}_\sigma{}^\alpha - \mathbf{U}_\sigma{}^\alpha = \mathbf{F}^{\mu\alpha} A_{\mu,\sigma} - \mathbf{L}\delta_\sigma{}^\alpha - \mathbf{F}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} A_\sigma. \tag{4.2.4}$$

Величины, следующие из лагранжиана (4.1.34), отличаются от только что выписанных на члены, пропорциональные дивергенции 4-потенциала и градиенту этой дивергенции; мы приведем здесь эти добавки к выписанным выше величинам, ограничившись (4.2.1) и (4.2.2.), так как остальные могут быть легко получены с их помощью:

$$\Delta\mathbf{M}_\sigma{}^{\alpha\tau} = \sqrt{-g} A^\nu{}_{;\nu} (A^\alpha \delta_\sigma{}^\tau - A^\tau \delta_\sigma{}^\alpha), \tag{4.2.5}$$

$$\Delta T^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (A^\alpha{}_{;\alpha})^2 g^{\mu\nu} + A^\alpha{}_{;\alpha;\lambda} (g^{\mu\lambda} A^\nu + g^{\nu\lambda} A^\mu - g^{\mu\nu} A^\lambda). \tag{4.2.6}$$

Ясно, что при калибровке Лоренца все величины, следующие из этого лагранжиана, совпадают с величинами, полученными из стандартного лагранжиана (4.1.32).

Третий лагранжиан, (4.1.35), дает

$$\mathbf{M}_\sigma^{\alpha\tau} = \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, \{A_\sigma F^{\tau\alpha} + A^\tau A_\sigma{}^{;\alpha} - A^\alpha A_\sigma{}^{;\tau} + A^\tau A^\alpha{}_{;\sigma} - A^\alpha A^\tau{}_{;\sigma}\} \tag{4.2.7}$$

и

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} A^{\omega;\varepsilon} A_{\omega;\varepsilon} g^{\mu\nu} + A^{\mu;\alpha} A^\nu{}_{;\alpha} + A^{\alpha;\mu} A_\alpha{}^{;\nu} +$$
$$+ \frac{1}{2} [A^{\mu;\alpha} A^\nu + A^{\nu;\alpha} A^\mu + A^{\alpha;\mu} A^\nu + A^{\alpha;\nu} A^\mu - A^{\mu;\nu} A^\alpha - A^{\nu;\mu} A^\alpha]_{;\alpha}. \tag{4.2.8}$$

Такое различие между величинами, следующими из лагранжианов (4.1.34) и (4.1.35), неудивительно, так как эти лагранжианы, в отличие от случая плоского мира, в общей теории относительности различаются не просто на дивергенцию. Именно, лагранжиан (4.1.34) можно привести к виду

$$\mathbf{L} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} [A_{\mu;\nu} A^{\mu;\nu} - A_\mu A_\nu R^{\mu\nu}] - \frac{1}{2} [\sqrt{-g}\, (A^\mu{}_{;\mu} A^\nu - A^\nu{}_{;\mu} A^\mu)]_{,\nu}, \tag{4.2.9}$$

где, кроме дивергенции, присутствует, в отличие от формы (4.1.35), член с тензором Риччи. Важно, что такого рода член взаимодействия с гравитационным полем приводит к появлению в выражении для спина (4.2.7) новых [по сравнению с (4.2.1) и (4.2.5)] членов, не исчезающих *и в плоском мире* (!). Эта ситуация, как мы увидим, характерна для общей теории относительности; а именно, эффекты метрики играют фундаментальную роль в определении динамических переменных, и имеют место случаи, когда, например, спин поля целиком обусловлен взаимодействием этого поля с метрическим полем (гравитацией), даже когда гравитация (но, разумеется, не метрика) отсутствует (см. § 4.6).

Замечая, что симметричный тензор энергии-импульса (4.2.2), полученный из теоремы Нётер, в точности совпадает с выведенным примитивным образом из уравнений Максвелла (5.4.10), мы должны сделать вывод о глубокой внутренней согласованности различных частей теории. Этот тензор играет роль источника гравитационного поля, так что система уравнений, описывающих самосогласованные гравитационное и электромагнитное поля (в отсутствие источников последнего), имеет вид

$$R_\nu{}^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu{}^\mu R = \varkappa\left[F^{\alpha\mu}F_{\alpha\nu} - \frac{1}{4}\delta_\nu{}^\mu F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right], \tag{4.2.10}$$

$$\mathbf{F}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{4.2.11}$$

(уравнения Эйнштейна — Максвелла).

Найдем теперь решение этих уравнений в статическом сферически симметричном случае [решение Райснера (1916), Нордстрёма (1918) и Вейля (1918), обычно называемое решением Райснера — Нордстрёма]. Это решение в высшей степени аналогично решению Шварцшильда, так что мы будем исходить из уже отлично зарекомендовавших себя уравнений (3.3.18) для случая диагональной метрики.

Соображения сферической симметрии и статического характера задачи позволяют предположить, что в этом случае

$$(A_\mu) = (\varphi, 0, 0, 0), \tag{4.2.12}$$

так что

$$\left.\begin{aligned} F_{0i} &= -\varphi_{,i}, \\ F_{ij} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.2.13}$$

и

$$F_{0i} = -\frac{x^i}{r}\varphi'. \tag{4.2.14}$$

Вспоминая вид метрического тензора, выбранный в § 3.3, получаем

$$T_0{}^0 = -\frac{1}{2}\sum_i g^{ii}g^{00}(F_{i0})^2 = \frac{1}{2}e^{2(R+T)}(\varphi')^2 \tag{4.2.15}$$

и

$$T_i{}^i = \frac{1}{2}\sum_k F^{0k}F_{0k} - F^{0i}F_{0i} = e^{2(R+T)}(\varphi')^2\left[\frac{x^ix^i}{r^2} - \frac{1}{2}\right]. \tag{4.2.16}$$

Поэтому при $\tau = 0$ уравнения (3.3.18) дают

$$\Delta R - \frac{1}{2}(R')^2 = \frac{\varkappa}{4}e^{2T}(\varphi')^2, \tag{4.2.17}$$

а при $\tau = k$

$$\begin{aligned} &-\Delta T - \Delta R + T_{,k,k} + R_{,k,k} + 2R_{,k}T_{,k} + R_{,k}R_{,k} + \\ &+ (T')^2 - T_{,k}T_{,k} = -\varkappa e^{2T}(\varphi')^2\left[\frac{x^kx^k}{r^2} - \frac{1}{2}\right]. \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

Последнее уравнение, так же как (3.3.32), разбивается на два:

$$\Delta T + \Delta R - (T')^2 - \frac{1}{r}(T+R)' = -\frac{\varkappa}{2}e^{2T}(\varphi')^2 \tag{4.2.19}$$

и

$$\Delta T + \quad R - (T')^2 + (R')^2 - \frac{3}{r}(T+R)' + 2T'R' = -\varkappa e^{2T}(\varphi')^2, \tag{4.2.20}$$

сравнивая которые, получаем

$$R'' + \frac{1}{r}(R - T)' + T'R' = 0. \tag{4.2.21}$$

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла (4.2.11), принимающим при используемой форме потенциала (4.2.12) вид

$$\sum_i \mathbf{F}^{0i}{}_{,i} = 0. \tag{4.2.22}$$

Подставляя сюда выражение напряженности через потенциал (4.2.14), получаем уравнение

$$\Delta\varphi + (T' - R')\varphi' = 0, \tag{4.2.23}$$

которое можно переписать в виде

$$(\ln\varphi')' + \frac{2}{r} + (T - R)' = 0. \tag{4.2.24}$$

Первый интеграл этого уравнения получить просто; он равен

$$\varphi' = \frac{K}{r^2} e^{R-T}, \tag{4.2.25}$$

где K — постоянная интегрирования. Тем самым мы выразили напряженность электромагнитного поля через функции R и T, определяющие гравитационное поле:

$$F_{0i} = -\frac{x^i}{r^3} K e^{R-T}. \tag{4.2.26}$$

Подставим выражение (4.2.25) для φ' в уравнение (4.2.17). Мы получим уравнение исключительно для функции R:

$$\Delta R - \frac{1}{2}(R')^2 = \frac{\varkappa K^2}{4r^4} e^{2R}; \tag{4.2.27}$$

при этом полезно помнить, что

$$\Delta R \equiv R'' + \frac{2}{r} R'. \tag{4.2.28}$$

Тогда подстановка

$$R = -\ln\alpha \tag{4.2.29}$$

приводит к уравнению

$$\alpha'' + \frac{2}{r}\alpha' - \frac{1}{2}\frac{\alpha'^2}{\alpha} = -\frac{\varkappa K^2}{4r^4\alpha}, \tag{4.2.30}$$

а вторая подстановка

$$\alpha = y^2 - \frac{C}{r^2} \tag{4.2.31}$$

к уравнению

$$y'' + \frac{2}{r} y' = \frac{1}{r^4\alpha y}\left[C(y'^2 r^2 + 2y'yr + y^2) - \frac{\varkappa K^2}{8}\right], \tag{4.2.32}$$

обе части которого, очевидно, обращаются в нуль при

$$y = 1 + \frac{m}{2r}, \quad C = \frac{\varkappa K^2}{8}. \tag{4.2.33}$$

В дальнейшем мы введем величину q:

$$q^2 = 4C. \tag{4.2.34}$$

Возвращаясь к уравнению (4.2.21), мы можем воспользоваться в нем подстановками (4.2.29) и

$$T = \ln \alpha - \ln \beta, \tag{4.2.35}$$

в результате чего получим

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\alpha'' + \frac{2}{r}\alpha'}{\alpha' + \frac{\alpha}{r}} = \frac{1}{2r^3} \frac{m^2 - q^2}{1 - \frac{m^2 - q^2}{4r^2}}. \tag{4.2.36}$$

Это уравнение интегрируется без труда:

$$\beta = 1 - \frac{m^2 - q^2}{4r^2}. \tag{4.2.37}$$

Вернемся опять к электромагнитному полю (строго говоря, здесь мы имеем дело с одним лишь электрическим). Его потенциал теперь может быть записан в виде

$$\varphi' = \frac{K}{r^2} \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{K}{r^2} \frac{\left(1 - \frac{m^2 - q^2}{4r^2}\right)}{\left(1 + \frac{m}{r} + \frac{m^2 - q^2}{4r^2}\right)^2}. \tag{4.2.38}$$

Эта функция легко интегрируется и дает

$$\varphi = -\frac{K}{r + m + \frac{m^2 - q^2}{4r^2}} = A_0. \tag{4.2.39}$$

Подведем итоги проделанных вычислений. Квадрат интервала для поля Райснера — Нордстрёма имеет вид

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{m^2 - q^2}{4r^2}}{1 + \frac{m}{r} + \frac{m^2 - q^2}{4r^2}}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{m}{r} + \frac{m^2 - q^2}{4r^2}\right)^2 dl^2, \tag{4.2.40}$$

а компоненты контравариантного метрического тензора равны

$$g^{00} = e^{2T} = \left(\frac{1 + \frac{m}{r} + \frac{m^2 - q^2}{4r^2}}{1 - \frac{m^2 - q^2}{4r^2}}\right)^2 \tag{4.2.41}$$

и

$$-g^{ii} = e^{2R} = \left(1 + \frac{m}{r} + \frac{m^2 - q^2}{4r^2}\right)^{-2}. \tag{4.2.42}$$

Переходя к 3-мерному вектору электрической напряженности **E** (4.1.6), можно записать:

$$E^i = \frac{F^i_{\cdot 0}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{-\dfrac{x^i}{r^3}K}{\left(1 + \dfrac{m}{r} + \dfrac{m^2 - q^2}{4r^2}\right)^3}. \qquad (4.2.43)$$

По той причине, что корень из детерминанта 3-мерного метрического тензора равен

$$\sqrt{b} = \left(1 + \frac{m}{r} + \frac{m^2 - q^2}{4r^2}\right)^3, \qquad (4.2.44)$$

плотность вектора напряженности E^i равна просто

$$\sqrt{b}\, E^i = -\sqrt{-g}\, F^{0i} = -\frac{x^i}{r} K, \qquad (4.2.45)$$

что сразу же подтверждает справедливость уравнения (4.2.22) вне начала координат (обсуждение особенности в начале см. ниже). Конечно, можно было бы непосредственно исходить из формы (4.2.45) и подставлять в 3-мерные уравнения (4.1.58), когда локальное вращение системы отсчета отсутствует (поле Райснера — Нордстрёма).

Обратимся к топологическим аспектам полученного решения. Здесь, как и в случае решения Шварцшильда (3.3.40) [в которое решение (4.2.40) переходит при $K = 0$], «точка» $r = 0$ не является в обычном смысле точкой, так как описанная вокруг нее окружность при $r \to 0$ не стягивается в нуль (длина окружности не стремится к 0, а, напротив, становится бесконечно большой). В самом деле, на основании формулы (3.3.51) мы получим

$$d\lambda = r \left| 1 + \frac{m}{r} + \frac{m^2 - q^2}{4r^2} \right| d\varphi, \qquad (4.2.46)$$

так что длина замкнутой окружности равна

$$\lambda = 2\pi r \left| 1 + \frac{m}{r} + \frac{m^2 - q^2}{4r^2} \right|, \qquad (4.2.47)$$

принимая свое минимальное значение

$$\lambda_{\min} = 2\pi\left(m + \sqrt{m^2 - q^2}\right) \qquad (4.2.48)$$

при значении радиальной координаты

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{m^2 - q^2}}{2} \qquad (4.2.49)$$

и обращаясь в ∞ при $r = 0$ и $r = \infty$.

Здесь снова применимо преобразование «выворачивания» координат; примем для этого

$$\xi^i = \frac{2x^i}{\sqrt{m^2 - q^2}}; \quad \rho = \frac{2r}{\sqrt{m^2 - q^2}}, \qquad (4.2.50)$$

так что экстремальное значение (4.2.49) соответствует $\rho = 1$. Тогда преобразование «выворачивания» записывается в виде

$$\xi'^i = \xi^i/\rho^2, \quad \rho' = 1/\rho \qquad (4.2.51)$$

или

$$\xi^i = \xi'^i/\rho'^2, \quad \rho = 1/\rho', \qquad (4.2.52)$$

причем

$$\xi'^i/\rho' = \xi^i/\rho, \tag{4.2.53}$$

а

$$\frac{\partial \xi'^k}{\partial \xi^i} = \frac{1}{\rho^2}\left(\delta_i{}^k - 2\frac{\xi^i\xi^k}{\rho^2}\right) \equiv \rho'^2\left[\delta_i{}^k - 2\frac{\xi'^i\xi'^k}{\rho'^2}\right] \tag{4.2.54}$$

и

$$J = -\rho'^6 = -\rho^{-6}. \tag{4.2.55}$$

При $K = 0$ это преобразование совпадает с преобразованием «выворачивания» в мире Шварцшильда. Относительно записанного преобразования форм-инвариантны все функции вида

$$r + A + \frac{m^2 - q^2}{4r} \equiv \frac{\sqrt{m^2 - q^2}}{2}\rho + A + \frac{\sqrt{m^2 - q^2}}{2}\frac{1}{\rho} \tag{4.2.56}$$

и подобные им. Поэтому относительно этого преобразования форм-инвариантен квадрат интервала (4.2.40), если учесть, что свойством форм-инвариантности обладает также величина $\frac{1}{r^2}\,dl^2$. Кроме того, очевидно, форм-инвариантен относительно преобразования «выворачивания» электрический потенциал (4.2.39), так что мы опять столкнулись в решении уравнений Эйнштейна с миром, распадающимся на два идентичных асимптотически плоских мира, соединенных перемычкой, середина которой находится в «точке» (4.2.49).

К глобальным вопросам, как мы сейчас увидим, относится и вопрос об *источниках* поля Райснера — Нордстрёма. С одной стороны, «электрическое» уравнение (4.2.22), имея в виду решение (4.2.45), следует более корректно переписать как

$$\sum_i F^{0i}{}_{,i} = -K\Delta\frac{1}{r} = 4\pi K\delta(\mathbf{r}), \tag{4.2.57}$$

откуда видно, что «заряд» источника равен K, так что

$$K = \sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\,q. \tag{4.2.58}$$

Однако этот заряд, согласно уравнению (4.2.57), локализован в «точке» $r = 0$, т. е. на бесконечности «внутреннего» мира. Можно, однако, переформулировать правую часть (4.2.57) так, чтобы источники поровну разделились между «наружным» и «внутренним» миром.

Вид источников гравитационного поля можно выяснить, исходя из уравнений (3.3.18). Если сохранить все коэффициенты, мы получим на промежуточном этапе уравнение ($\tau = 0$).

$$4e^{2R}\left(\Delta R - \frac{1}{2}(R')^2\right) = 2\varkappa T_{f0}^{\,0} = \varkappa e^{2(R+T)}(\varphi')^2 + 2\varkappa T_{?0}^{\,0} \tag{4.2.59}$$

вместо (4.2.30). Для того чтобы корректно подставить сюда метрику Райснера — Нордстрёма (4.2.40), можно учесть соотношение

$$\Delta(f^2) = 2f\Delta f + 2(f')^2 \tag{4.2.60}$$

и следующее из него формальное равенство

$$\Delta\frac{1}{r^2} = -\frac{8\pi}{r}\delta(\mathbf{r}) + \frac{2}{r^4}, \tag{4.2.61}$$

либо пользоваться до конца выкладок дифференцированием по декартовым координатам. Прежде всего можно переписать (4.2.59) в виде

$$T_{g0}^{0}=\frac{q^2}{r^4}e^{4R}+\frac{2}{\varkappa}e^{2R}\left(\Delta R-\frac{1}{2}(R')^2\right). \tag{4.2.62}$$

Функция R нам известна:

$$R=-\ln\left(1+\frac{m}{r}+\frac{m^2-q^2}{4r^2}\right). \tag{4.2.63}$$

Подстановка ее в правую часть равенства (4.2.62) при учете сделанных замечаний дает после несложных вычислений

$$T_{g0}^{0}=\frac{8\pi m}{\varkappa}\,\frac{1+\dfrac{m^2-q^2}{2mr}}{\left(1+\dfrac{m}{r}+\dfrac{m^2-q^2}{4r^2}\right)^3}\,\delta(\mathbf{r}). \tag{4.2.64}$$

Полученная форма неэлектромагнитных источников гравитационного поля Райснера — Нордстрёма напоминает аналогичную величину для поля Шварцшильда (3.3.61) и переходит в нее, если положить

$$q=0,\quad m=\frac{C}{2}. \tag{4.2.65}$$

Теперь полезно выяснить вид источника электрического поля Райснера — Нордстрёма. Для этого мы воспользуемся уравнением для электрической напряженности в хронометрически инвариантной записи. Действительно,

$$\mathbf{F}^{0i}{}_{,i}=-\sqrt{-g}\,j^0, \tag{4.2.66}$$

откуда

$$(\sqrt{b}\,E^i)_{,i}=-\mathbf{F}^{0i}{}_{,i}=K\left(\frac{1}{r}\right)_{,i,i}=-4\pi K\delta(\mathbf{r}). \tag{4.2.67}$$

Так как плотность *наблюдаемого* заряда (хронометрически инвариантное выражение) равна

$$\rho_e=\sqrt{\frac{b}{g_{00}}}\,j_0=\mathbf{j}^0, \tag{4.2.68}$$

то из сравнения соотношений (4.2.66) и (4.2.67) следует

$$\rho_e=-4\pi K\delta(\mathbf{r}). \tag{4.2.69}$$

Мы видим, таким образом, что в данной задаче заряд действительно сосредоточен в начале координат и его плотность имеет δ-образный вид. Таким образом, решение Райснера — Нордстрёма весьма аналогично известному потенциалу Кулона в обычной электростатике.

Для того чтобы проанализировать проблему энергии на примере системы электромагнитного и гравитационного полей в простейшем случае метрики Райснера — Нордстрёма, можно использовать общие выражения для случая диагональной статической метрики, приведенные в § 3.8, (3.8.13) — (3.8.15), в средних частях этих формул.

Мы находим тогда

$$\mathbf{M}_{g0}{}^{i0}=\frac{1}{\varkappa}\left[-m+\frac{q^2/r}{1+\dfrac{m}{r}+\dfrac{m^2-q^2}{4r^2}}\right]\left(\frac{1}{r}\right)_{,i} \tag{4.2.70}$$

и

$$\mathbf{N}_{g0}{}^{ik0} = \frac{1}{4\varkappa}\left(1 - \frac{m^2 - q^2}{4r^2}\right)\delta_k{}^i \tag{4.2.71}$$

для лагранжиана (3.1.1); для γ-матричного и тетрадного лагранжианов достаточно одной величины

$$\mathbf{M}_{\gamma 0}{}^{i0} = -\frac{2m}{\varkappa}\left(1 - \frac{m^2 - q^2}{4r^2}\right)\left(1 + \frac{m^2 - q^2}{2mr}\right) \times \\ \times \left(1 + \frac{m}{r} + \frac{m^2 - q^2}{4r^2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{r}\right)_{,i}. \tag{4.2.72}$$

Отсюда следуют суперпотенциалы хронометрически инвариантной теории; из (4.2.70) и (4.2.71):

$$\theta_g^{i0} = -\frac{m}{2\varkappa}\,\frac{1 + \dfrac{m^2 - q^2}{rm} + \dfrac{m^2 - q^2}{4r^2}}{1 - \dfrac{m^2 - q^2}{4r^2}}\left(\frac{1}{r}\right)_{,i} \tag{4.2.73}$$

и из (4.2.72):

$$\theta_\gamma^{i0} = -\frac{2m}{\varkappa}\left(1 + \frac{m^2 - q^2}{2mr}\right)\left(\frac{1}{r}\right)_{,i}. \tag{4.2.74}$$

Перейдем к выражениям для плотности энергии. В хронометрически неинвариантном случае они имеют вид

$$\mathbf{w}_g = \frac{q^2}{\varkappa r^4}\,\frac{1 - \dfrac{m^2 - q^2}{4r^2}}{\left(1 + \dfrac{m}{r} + \dfrac{m^2 - q^2}{4r^2}\right)^2} + \\ + \frac{4\pi m}{\varkappa}\left[1 - \frac{q^2/mr}{1 + \dfrac{m}{r} + \dfrac{m^2 - q^2}{4r^2}}\right]\delta(\mathbf{r}) \tag{4.2.75}$$

и

$$\mathbf{w}_\gamma = \frac{8\pi m}{\varkappa}\,\frac{\left(1 - \dfrac{m^2 - q^2}{4r^2}\right)\left(1 + \dfrac{m^2 - q^2}{2mr}\right)}{1 + \dfrac{m}{r} + \dfrac{m^2 - q^2}{4r^2}}\,\delta(\mathbf{r}) + \\ + \frac{m^2 - q^2}{\varkappa r^4} + \frac{2q^2}{\varkappa r^4}\,\frac{1 + \dfrac{q^2 - m^2}{4r^2}}{\left(1 + \dfrac{m}{r} + \dfrac{m^2 - q^2}{4r^2}\right)^2}. \tag{4.2.76}$$

В хронометрически инвариантной формулировке плотность энергии системы гравитационного и электромагнитного полей (вместе с «механическими» источниками) равна для лагранжиана (3.1.1):

$$\mathbf{w}_g{}^0 = \frac{2\pi m}{\varkappa}\,\frac{1 + \dfrac{m^2 - q^2}{mr} + \dfrac{m^2 - q^2}{4r^2}}{1 - \dfrac{m^2 - q^2}{4r^2}}\,\delta(\mathbf{r}) +$$

$$+\frac{q^2-m^2}{2\varkappa r^4}\frac{1+\dfrac{m}{r}+\dfrac{m^2-q^2}{4r^2}}{\left(1-\dfrac{m^2-q^2}{4r^2}\right)^2}, \tag{4.2.77}$$

а для γ-матричного и тетрадного лагранжианов:

$$\mathrm{w}_\gamma{}^0=\frac{8\pi m}{\varkappa}\left(1+\frac{m^2-q^2}{2mr}\right)\delta(\mathbf{r})+\frac{q^2-m^2}{\varkappa r^4}. \tag{4.2.78}$$

Прежде всего отождествим член с δ-функцией и плотность энергии неэлектромагнитных источников гравитационного поля. Из выражения (4.2.64) в приложении к хронометрически инвариантной теории следует:

$$\sqrt{\frac{-g}{g_{00}}}T_{?0}^{0}=\frac{8\pi m}{\varkappa}\left(1+\frac{m^2-q^2}{2mr}\right)\delta(\mathbf{r}), \tag{4.2.79}$$

т. е. выражение, в точности совпадающее с первым членом в (4.2.78), но в корне отличное от δ-члена в (4.2.77). При этом просто плотность величины (4.2.64) совпадает с δ-членом в (4.2.76) [опять-таки не в (4.2.75)!]. Распределение электромагнитной энергии, в свою очередь, имеет вид:

$$\sqrt{\frac{-g}{g_{00}}}T_{\mathrm{em}\,0}^{\;\;\,0}=\frac{q^2}{\varkappa r^4}\left(1+\frac{m}{r}+\frac{m^2-q^2}{4r^2}\right)^{-1}, \tag{4.2.80}$$

где

$$K^2=\frac{2q^2}{\varkappa} \tag{4.2.81}$$

(в системе единиц Хевисайда). При этом гравитационная энергия содержит, кроме старого ньютоновского, новый член:

$$\mathrm{w}_\gamma^0-\sqrt{b}\left(T_{\mathrm{em}\,0}^{\;\;\,0}+T_{?0}^{0}\right)=-\frac{m^2}{\varkappa r^4}+\frac{q^2}{\varkappa r^5}\frac{m+\dfrac{m^2-q^2}{4r}}{1+\dfrac{m}{r}+\dfrac{m^2-q^2}{4r^2}}, \tag{4.2.82}$$

и в принципе можно себе представить случай, когда $m=0$; в этом случае плотность гравитационной энергии оказывается положительной. Очевидно, что при слабых гравитационном и электромагнитном полях автоматически выполняется принцип соответствия с теориями Ньютона и Максвелла — результат, который не мог быть получен ранее в полном объеме (см. исследование Флоридеса в рамках мёллеровского подхода к квазитензору 1958 года). Что же касается интегральной энергии, то мы приходим к выводам § 3.8.

4.3. Естественная единая нелинейная теория гравитации и электромагнетизма Райнича — Уилера

В присутствии только двух полей — гравитационного и электромагнитного — геометрия пространства-времени становится весьма специфической; а именно, для полного определения системы тензор кривизны — тензор напряженности электромагнитного поля оказывается достаточным (локально) знать только компоненты тензора кривизны и некоторую скалярную величину α, именуемую «комплексией» поля Максвелла (Райнич, 1925; Мизнер и Уилер, 1957). Иными словами, электромагнитное поле может быть выражено через гравитационные переменные, если отсутствуют все другие поля и вещество.

Мы не будем входить в детали этой теории и охарактеризуем лишь главные пункты, необходимые для понимания естественной единой нелинейной теории электромагнетизма и фермионного поля, которая будет предложена в § 4.9 по аналогии с теорией Райнича — Уилера.

В силу равенства нулю следа симметричного тензора энергии-импульса электромагнитного поля (4.2.2), ввиду уравнений Эйнштейна должна обратиться в нуль и скалярная кривизна, так что уравнения поля можно записать в виде

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mathrm{em}\,\mu\nu}, \tag{4.3.1}$$

$$\mathbf{F}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \tag{4.3.2}$$

$$*\mathbf{F}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \tag{4.3.3}$$

Кроме того, операция дуального сопряжения (4.1.10) позволяет весьма симметрично записать $T_{\mu\nu}$ для электромагнитного поля:

$$T_{\mathrm{em}\,\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(F_{\mu\alpha}F_{\nu\cdot}^{\ \alpha} + *F_{\mu\alpha}*F_{\nu\cdot}^{\ \alpha}\right), \tag{4.3.4}$$

ввиду справедливости тождества

$$F_{\mu\alpha}F^{\nu\alpha} - *F_{\mu\alpha}*F^{\nu\alpha} = \frac{1}{2}\,\delta_\mu{}^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \tag{4.3.5}$$

для любого антисимметричного тензора 2-го ранга. Отсюда можно получить важное соотношение

$$R_{\alpha\mu}R^{\alpha\nu} = \frac{1}{4}\,\delta_\mu{}^\nu R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}, \tag{4.3.6}$$

которое также нетрудно вывести с помощью процедуры, аналогичной той, которую мы применим при раскрытии выражения (5.4.48).

Выражение (4.3.4) можно назвать «максвелловским квадратом» тензора напряженности электромагнитного поля; этот квадрат допускает «извлечение корня», иначе говоря обратное определение тензора напряженности $F_{\mu\nu}$, если речь идет, по крайней мере, не о «нулевом» электромагнитном поле, т. е. не о поле с равными нулю инвариантами (4.1.27) и (4.1.29). В этом случае лоренцово преобразование координат позволяет сделать 3-векторы напряженностей электрического и магнитного полей (локально) параллельными друг другу.

С другой стороны, преобразование дуального сопряжения, меняя значения инвариантов (4.1.27) и (4.1.29), оставляет неизменным «максвелловский квадрат». Это обстоятельство показывает, что извлечение «максвелловского корня» должно быть не вполне однозначной операцией; а именно, эта операция определена с точностью до произвольного *поворота дуальности* (4.1.12), который также не меняет максвелловского квадрата. Поэтому Уилер предложил взять за основу некоторый крайний вариант поля, а именно тот, для которого инвариант (4.1.29) равен нулю. Тогда максвелловский квадратный корень извлекается однозначно, но в дальнейшем, вообще говоря, результат должен быть подвергнут повороту дуальности (детали см. Уилер, 1962, стр. 242—248).

Выраженное, таким образом, через «геометрические» характеристики максвелловское поле подставляется затем в уравнения Максвелла (4.3.2) и (4.3.3), что дает сильно нелинейные уравнения третьего порядка для метрического тензора, описывающего теперь одновременно как гравитацию, так и электромагнетизм.

Замысел Уилера состоит в дальнейшем в отказе от эвклидовой топологии пространства-времени (вслед за отказом от эвклидово-плоского мира), так чтобы пространство стало многосвязным, причем сквозь топологические ручки могут проникать отличные от нуля интегральные потоки электрических силовых линий, что соответствует эффективно появлению устойчивых электрических зарядов.

Мы не склонны, однако, придерживаться уилеровского лозунга «физика есть геометрия» и предпочитаем, напротив, считать геометрию реального мира разделом физической науки. Обсуждение некоторых аспектов этого вопроса читатель может найти в § 6.2.

4.4. Скалярное поле

Мы рассмотрим здесь обычное скалярное поле мезонного типа, которое понадобится нам для элементарного анализа квантовых закономерностей, и не будем касаться новых попыток ввести специфическое «скалярное» поле, отражающее изменяющуюся гравитационную «константу» в духе теории Йордана — Дирака и, особенно, Дикке (1965).

Лагранжиан интересующего нас скалярного поля имеет вид

$$\mathbf{L}_{sc} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}(\mu^2\varphi^2 - \varphi_{,\mu}\varphi^{,\mu}) \qquad (4.4.1)$$

(нейтральное скалярное поле) или

$$\mathbf{L}_{\overline{sc}} = \sqrt{-g}\,(\overset{*}{\varphi}_{,\mu}\,\varphi^{,\mu} - \mu^2\varphi^*\varphi) \qquad (4.4.2)$$

(заряженное скалярное поле, запись без члена взаимодействия с электромагнетизмом). Потенциал φ в первом случае является вещественной скалярной (псевдоскалярной) функцией координат, а во втором случае он должен быть комплексным, так что число независимых переменных при варьировании оказывается равным *двум*. Если во втором случае явно учесть взаимодействие скалярного поля с электромагнитным, то лагранжиан следует записать в виде

$$\mathbf{L}_{\overline{sc+int}} = -\sqrt{-g}\,\{\mu^2\varphi^*\varphi + (\overset{*}{\varphi}_{,\mu} + ieA_\mu\varphi^*)(\varphi^{,\mu} - ieA^\mu\varphi)\}. \qquad (4.4.3)$$

Запишем динамические переменные нейтрального скалярного поля. Обобщенный спин, естественно, равен нулю:

$$\mathbf{M}_\sigma{}^{\alpha\tau} \equiv 0, \qquad (4.4.4)$$

а симметричный тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + {}^1/_2(\mu^2\varphi^2 - \varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda})\,g_{\mu\nu} \qquad (4.4.5)$$

тождественно совпадает с каноническим; конечно, спиновая доля энергии тождественно равна нулю.

Уравнение нейтрального скалярного поля имеет вид

$$-\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta\varphi} = -\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial\varphi} + \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial\varphi_{,\mu}}\right)_{,\mu} = \sqrt{-g}\,\mu^2\varphi + (\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\varphi_{,\nu})_{,\mu} = 0 \qquad (4.4.6)$$

и носит название уравнения Клейна — Гордона, хотя оно было введено еще Шрёлингером.

Уравнение заряженного скалярного поля распадается на два: на уравнение для φ,

$$(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\varphi_{,\nu})_{,\mu} + \sqrt{-g}\varphi\,[\mu^2 - ieA^\mu{}_{;\mu} + e^2A_\mu A^\mu] = 0, \qquad (4.4.7)$$

и уравнение для φ^*,

$$(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\varphi_{,\nu})_{,\mu} + \sqrt{-g}\varphi^*\,[\mu^2 + ieA^\mu{}_{;\mu} + e^2A_\mu A^\mu] = 0. \qquad (4.4.8)$$

Тензор энергии-импульса заряженного скалярного поля имеет вид

$$T_{\mu\nu}=(\varphi^*_{,\mu}+ieA_\mu\varphi^*)(\varphi_{,\nu}-ieA_\nu\varphi)+$$
$$+(\varphi^*_{,\nu}+ieA_\nu\varphi^*)(\varphi_{,\mu}-ieA_\mu\varphi)-g_{\mu\nu}\frac{\mathbf{L}_{\mathrm{sc+int}}}{\sqrt{-g}}. \tag{4.4.9}$$

Мы остановимся здесь на вопросе о статическом сферически симметричном скалярном поле, аналогичном полю Шварцшильда. В этом случае

$$\varphi=\varphi(r), \tag{4.4.10}$$

а гравитационное поле представляется с помощью уже знакомых по предыдущим параграфам функций $R(r)$ и $T(r)$. Уравнение поля, следующее из лагранжиана (4.4.1), в этом случае принимает вид

$$\sum_i(\sqrt{-g}\,g^{ii}\,\varphi_{,i})_{,i}=-\mu^2\sqrt{-g}\,\varphi, \tag{4.4.11}$$

или

$$\Delta\varphi-(T+R)'\varphi'-\mu^2e^{-2R}\varphi=0. \tag{4.4.12}$$

Интересующие нас компоненты тензора энергии-импульса (4.4.5) имеют вид

$$T_0^0=\frac{1}{2}[\mu^2\varphi^2+e^{2R}(\varphi')^2] \tag{4.4.13}$$

и

$$T_k{}^k=-e^{2R}\frac{x^kx^k}{r^2}(\varphi')^2+\frac{1}{2}[\mu^2\varphi^2+e^{2R}(\varphi')^2], \tag{4.4.14}$$

так что уравнения Эйнштейна при $\tau=0$ записываются как

$$4\Delta R-2(R')^2=\varkappa[e^{-2R}\mu^2\varphi^2+(\varphi')^2] \tag{4.4.15}$$

и при $\tau=k$ как

$$-\Delta T-\Delta R+T_{,k,k}+R_{,k,k}+2R_{,k}T_{,k}+R_{,k}R_{,k}+(T')^2-T_{,k}T_{,k}=$$
$$=\varkappa\left[\frac{x^kx^k}{r^2}(\varphi')^2-\frac{1}{2}(e^{-2R}\mu^2\varphi^2+(\varphi')^2)\right]. \tag{4.4.16}$$

Последние уравнения, как обычно, распадаются на два:

$$\Delta T+\Delta R-(T')^2-\frac{1}{r}(T+R)'=\frac{\varkappa}{2}[e^{-2R}\mu^2\varphi^2+(\varphi')^2] \tag{4.4.17}$$

и

$$\Delta T+\Delta R-(T')^2+(R')^2-\frac{3}{2}(T+R)'+2T'R'=\varkappa(\varphi')^2. \tag{4.4.18}$$

Комбинирование уравнений (4.4.15) и (4.4.17) дает

$$\Delta T-\Delta R-(T')^2+(R')^2-\frac{1}{r}(T+R)'=0. \tag{4.4.19}$$

Любопытно, что правая часть уравнения (4.4.15), или (4.4.17), может быть выражена тождественно и иным образом, если исходить из уравнения скалярного поля (4.4.12), а именно

$$\frac{1}{2}[\Delta(\varphi^2)-(T+R)'(\varphi^2)']=\mu^2e^{-2R}\varphi^2+(\varphi')^2. \tag{4.4.20}$$

Ввиду вычислительных трудностей мы ограничимся сейчас отысканием решения для безмассового скалярного поля ($\mu=0$), когда прежде всего легко находится первый интеграл уравнения (4.4.12), а именно

$$\varphi' = \frac{K}{r^2} e^{(T+R)}. \qquad (4.4.21)$$

Теперь полезно перейти к новым переменным, а именно

$$R + T = V \text{ и } R. \qquad (4.4.22)$$

Тогда уравнения (4.4.17) и (4.4.18) принимают вид (следует помнить, что поле безмассовое!)

$$\Delta V - (V')^2 - \frac{1}{r} V' + (2V - R)'R' = \frac{\varkappa K^2}{2r^4} e^{2V} \qquad (4.4.23)$$

и

$$\Delta V - (V')^2 - \frac{3}{r} V' + 2(2V - R)'R' = \frac{\varkappa K^2}{r^4} e^{2V}, \qquad (4.4.24)$$

комбинирование которых дает

$$\Delta V - (V')^2 + \frac{1}{r} V' = 0. \qquad (4.4.25)$$

Это уравнение легко интегрируется, если использовать замену

$$V = -\ln \beta, \qquad (4.4.26)$$

которая приводит уравнение (4.4.25) к виду

$$\beta'' + \frac{3}{r} \beta' \equiv \frac{1}{r^3} (r^3\beta') = 0, \qquad (4.4.27)$$

так что

$$\beta = 1 - \frac{A}{r^2}. \qquad (4.4.28)$$

Тогда производную потенциала (4.4.21) можно записать как

$$\varphi' = \frac{K}{r^2} \frac{1}{1 - A/r^2}, \qquad (4.4.29)$$

а сам потенциал имеет вид

$$\varphi = \frac{K}{2A} \ln \left| \frac{\sqrt{A} - r}{\sqrt{A} + r} \right|. \qquad (4.4.30)$$

Вернемся к уравнению (4.4.23); его нетрудно привести к виду

$$V'' + \frac{1}{r} V' - (V' - R')^2 = \frac{\varkappa K^2}{2r^4} \frac{1}{(1 - A/r^2)^2}. \qquad (4.4.31)$$

Подставляя сюда V, мы получаем

$$(V' - R')^2 = (4A - \varkappa K^2)(r^2 - A)^{-2}. \qquad (4.4.32)$$

Вводя обозначение

$$4A - \varkappa K^2 = Q^2 > 0 \qquad (4.4.33)$$

(откуда, в частности, следует принятое ранее предположение, что $A > 0$) и извлекая корень, получаем

$$R' = V' + \frac{Q}{r^2 - A}. \qquad (4.4.34)$$

Интегрирование тогда дает

$$R = V - \frac{Q}{2A}\ln\left|\frac{\sqrt{A}+r}{\sqrt{A}-r}\right| \qquad (4.4.35)$$

(выбор знака при извлечении корня определяется согласием с решением Шварцшильда в пределе $K = 0$). Подставляя в (4.4.35) функцию V, находим

$$R = -\ln\left|\frac{\left(1+\frac{\sqrt{A}}{r}\right)^{Q/2\sqrt{A}}}{\left(1-\frac{A}{r^2}\right)\left(1-\frac{\sqrt{A}}{r}\right)^{Q/2\sqrt{A}}}\right|, \qquad (4.4.36)$$

а затем и

$$T = V - R = -\ln\frac{\left(1-\frac{\sqrt{A}}{r}\right)^{Q/2\sqrt{A}}}{\left(1+\frac{\sqrt{A}}{r}\right)^{Q/2\sqrt{A}}}. \qquad (4.4.37)$$

Сравнение с решением Шварцшильда показывает, что следует положить

$$A = m^2/4; \qquad (4.4.38)$$

тогда

$$g^{00} = \left(\frac{1+\frac{m}{2r}}{1-\frac{m}{2r}}\right)^{2Q/m} \qquad (4.4.39)$$

и

$$-g^{ii} = \frac{\left(1-\frac{m}{2r}\right)^{2\left(\frac{Q}{m}-1\right)}}{\left(1+\frac{m}{2r}\right)^{2\left(\frac{Q}{m}+1\right)}}. \qquad (4.4.40)$$

Подведем итоги. Получена метрика

$$ds^2 = \left(\frac{1-\frac{m}{2r}}{1+\frac{m}{2r}}\right)^{2Q/m} dt^2 - \frac{\left(1+\frac{m}{2r}\right)^{2\left(\frac{Q}{m}+1\right)}}{\left(1-\frac{m}{2r}\right)^{2\left(\frac{Q}{m}-1\right)}}\, dl^2, \qquad (4.4.41)$$

где

$$m^2 - \varkappa K^2 = Q^2, \qquad (4.4.42)$$

образующая вместе с потенциалом

$$\varphi = \frac{K}{m}\ln\left|\frac{1-\frac{m}{2r}}{1+\frac{m}{2r}}\right| \qquad (4.4.43)$$

самосогласованное поле. Топология полученного мира совпадает с топологией мира Шварцшильда — здесь также имеется перемычка между двумя совершенно симметричными мирами, и все записанные сейчас выражения форм-инвариантны по отношению к преобразованию «выворачивания» координат.

Таким образом, мы видим, что подобная форм-инвариантность является в высшей степени характерной чертой теории Эйнштейна, сопутствующей ей, по крайней мере, когда речь идет о сферически симметричных полях или системах полей без *неполевых* источников, расположенных в конечных областях пространства.

Что касается скалярного поля с массовым членом, то в этом случае задача сильно усложняется, и мы приведем здесь систему уравнений для самосогласованных скалярного и метрического полей. Вводя более удобные переменные

$$T+R=V,\ T-R=W, \tag{4.4.44}$$

можно записать:

$$W''+\frac{2}{r}W'-W'V'-\frac{1}{r}V'=0, \tag{4.4.45}$$

$$V''-\frac{3}{r}V'-(V')^2=\varkappa\mu^2e^{W-V}\varphi^2, \tag{4.4.46}$$

$$V''-\frac{1}{r}V'+\frac{1}{2}(V')^2-V'W'-\frac{1}{2}(W')^2=\varkappa\varphi'^2, \tag{4.4.47}$$

$$\varphi''+\frac{2}{r}\varphi'-V'\varphi'-\mu^2e^{W-V}\varphi=0. \tag{4.4.48}$$

Конечно, из этих уравнений независимыми (в силу тождеств Бианки) являются лишь три. Из уравнений (4.4.46) и (4.4.47) можно исключить потенциал φ и его производную, повысив на единицу порядок уравнения и усилив нелинейность:

$$\begin{aligned}(\varphi\varphi')^2&=\frac{1}{4\varkappa^2\mu^4}\left[\left\{e^{V-W}\left(V''+\frac{3}{r}V'-V'^2\right)\right\}'\right]^2=\\&=\frac{1}{\varkappa^2\mu^2}e^{V-W}\left(V''+\frac{3}{r}V'-V'^2\right)\times\\&\times\left(V''-\frac{1}{r}V'+\frac{1}{2}V'^2-V'W'-\frac{1}{2}W'^2\right).\end{aligned} \tag{4.4.49}$$

Исследование в близком направлении было проведено Дуань И-ши (1954).

4.5. Фермионные поля: лагранжиан и уравнения

В общей теории относительности — иначе говоря, в римановом пространстве — введение фермионных полей всегда вызывало определенные затруднения. Дело в том, что описание фермионных полей с помощью спинорных волновых функций (потенциалов) предполагает работу с группой ортогональных преобразований, причем такой, что эти преобразования остаются ортогональными, в какой бы системе координат они ни рассматривались. В этой связи можно упомянуть анализ, проведенный Картаном (1947), который доказал, что без введения новых величин, кроме метрического тензора и его производных, спиноры не могут быть описаны в римановом пространстве. Эти новые величины могут вводиться разными способами. Прежде всего — это тетрады (см. § 8.7), на которых мы сейчас коротко остановимся.

Если исходить из тетрадных преобразований (8.7.26), когда выполняются свойства антисимметрии (8.7.21), то, считая γ-матрицы Дирака нонвариантными[1] векторными компонентами, мы придем к выводу, что эти матрицы, вместе с тем, преобразуются при тетрадных преобразованиях просто по закону подобия. Действительно, для этих компонент матриц Дирака

$$\gamma(\alpha)\gamma(\beta)+\gamma(\beta)\gamma(\alpha)=2\delta_\beta{}^\alpha\cdot I, \tag{4.5.1}$$

и в силу ортогональности преобразований правая часть этого антикоммутатора с гарантией не изменяется. Таким образом, мы всегда можем найти систему тетрад, для которой сразу во всем пространстве матрицы Дирака постоянны (благодаря *неголономности* тетрадных «координат»).

Если ковариантное дифференцирование тетрад по отношению к обычным тензорным (ко- и контравариантным) индексам записывается стандартно,

$$g_\mu(\alpha)_{;\,\nu}=g_\mu(\alpha)_{,\,\nu}-g_\lambda(\alpha)\Gamma^\lambda_{\mu\nu}, \tag{4.5.2}$$

то обобщенная ковариантная производная тетрады тождественно равна нулю:

$$\nabla_\nu g_\mu(\alpha)\overset{\mathrm{Def}}{=}g_\mu(\alpha)_{;\,\nu}+g_\mu(\varepsilon)g_\lambda(\varepsilon)_{;\,\nu}g^\lambda(\alpha)=g_\mu(\alpha)_{;\,\nu}-\Phi_{\nu\mu\lambda}g^\lambda(\alpha)=0. \tag{4.5.3}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (8.7.42) и (8.7.44), а также перешли при дифференцировании от нонвариантного к ковариантному индексу. Так как нонвариантно-нонвариантные компоненты метрического тензора совпадают с компонентами символа Кронекера, с помощью преобразования подобия

$$\gamma^\mu\to S^{-1}\gamma^\mu S \tag{4.5.4}$$

можно перейти от матриц

$$\underset{0}{\gamma}(\alpha)=\delta_\mu(\alpha)\cdot\underset{0}{\gamma^\mu} \tag{4.5.5}$$

к переменным матрицам $\gamma(\alpha)$. Итак, «постоянные» матрицы Дирака в действительности преобразуются при тетрадных поворотах, но с этими последними всегда связывают соответствующее преобразование подобия так, чтобы оба преобразования в точности компенсировали друг друга. В этом и состоит обычное доказательство ковариантности уравнения Дирака в частной теории относительности. Это утверждение можно записать общековариантным образом так. Постулируется связь (одновременность) преобразований:

$$g_\mu(\alpha)\to\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'(\alpha)}{\partial x(\beta)}g_\nu(\beta) \tag{4.5.6}$$

и

$$\gamma^\mu\to\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}S^{-1}\gamma^\nu S, \tag{4.5.7}$$

где обобщенные по Зоммерфельду γ-матрицы суть

$$\gamma^\mu=g^\mu(\alpha)\gamma(\alpha). \tag{4.5.8}$$

Определяя обычным способом ковариантную производную γ-матриц,

$$\gamma_{\mu;\,\nu}\overset{\mathrm{Def}}{=}\gamma_{\mu,\,\nu}-\gamma_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu}, \tag{4.5.9}$$

[1] «Нонвариантные» компоненты — то же, что «тетрадные» (см. § 8.7); их ввел, в частности, Румер (1956), неудачно (на наш взгляд) назвав «инвариантными» компонентами.

мы потребуем обобщенного ковариантного постоянства γ-матриц:

$$\nabla_\nu \gamma_\mu \overset{\text{Def}}{=} \gamma_{\mu;\,\nu} + g_\mu(\varepsilon)\, g_\lambda(\varepsilon)_{;\nu}\gamma^\lambda = \gamma_{\mu;\,\nu} - \Phi_{\nu\mu\lambda}\gamma^\lambda = 0. \tag{4.5.10}$$

Конечно, в смысле обычной ковариантной производной γ-матрицы могут быть постоянны лишь в плоском мире. Наложение требования (4.5.10) при всех калибровках γ-матриц (одновременном выборе как этих матриц, так и ориентации тетрад) определяет связь между преобразованием подобия и тетрадным поворотом, которые отныне должны реализоваться согласованным между собой образом. Тем самым мы подразумеваем тесную связь между γ-матрицами и метрическим тензором, что позволяет интерпретировать поле матриц Дирака как разновидность метрического поля. Соотношение (4.5.10) удобно переписать в виде

$$\gamma_{\mu;\,\nu} = \Phi_{\nu\mu\lambda}\gamma^\lambda \tag{4.5.11}$$

или, вводя вместо символов Риччи полностью эквивалентный им матричный вектор

$$C_\nu = \frac{i}{4}\Phi_{\nu\lambda\rho}\,\gamma^\lambda\gamma^\rho \equiv \frac{i}{4}\Phi_{\nu\lambda\rho}\sigma^{\lambda\rho}, \tag{4.5.12}$$

в виде

$$\gamma_{\mu;\,\nu} = i[C_\nu, \gamma_\mu]_-. \tag{4.5.13}$$

Многие авторы употребляют вместо C_μ другой матричный вектор:

$$\Gamma_\mu = iC_\mu \tag{4.5.14}$$

(например, Уилер и Брилл). При выводе равенства (4.5.13), часто используемого в теории, полезно учесть соотношение

$$\sigma^{\omega\varepsilon}\gamma^\tau - \gamma^\tau\sigma^{\omega\varepsilon} = 2(g^{\tau\varepsilon}\gamma^\omega - g^{\tau\omega}\gamma^\varepsilon). \tag{4.5.15}$$

Итак, мы требуем выполнения равенства (4.5.10). Преобразование подобия (4.5.4) дает

$$\gamma_{\mu;\,\nu} \to S^{-1}[\gamma_{\mu;\,\nu} - S_{,\nu}S^{-1}\gamma_\mu + \gamma_\mu S_{,\nu}S^{-1}]\,S, \tag{4.5.16}$$

тогда как матрицы C_ν преобразуются по закону

$$C_\nu \to S^{-1}C_\nu S - iS^{-1}\cdot S_{;\nu}. \tag{4.5.17}$$

Здесь мы учли, что

$$(S^{-1})_{,\alpha} = -S^{-1}\cdot S_{,\alpha}\cdot S^{-1}. \tag{4.5.18}$$

С другой стороны, непосредственный подсчет на основании (4.5.12) дает

$$C_\nu \to S^{-1}C_\nu S + \frac{i}{4}g_\rho(\omega)\,g_\lambda(\varkappa)\,\frac{\partial x'(\varepsilon)}{\partial x(\omega)}\left(\frac{\partial x'(\varepsilon)}{\partial x(\varkappa)}\right)_{,\nu} S^{-1}\sigma^{\lambda\rho}S. \tag{4.5.19}$$

Сравнивая это равенство и (4.5.17), получаем

$$S_{,\nu} = -\frac{1}{4}\sigma(\varkappa\omega)\,\frac{\partial x'(\varepsilon)}{\partial x(\omega)}\left(\frac{\partial x'(\varepsilon)}{\partial x(\varkappa)}\right)_{,\nu} S. \tag{4.5.20}$$

Это уравнение для матрицы S как функции коэффициентов тетрадного преобразования легко интегрируется в случае инфинитезимальных преобразований, и результат дает хорошо известную форму матриц преобразований спиноров

$$S = I - \frac{1}{4}\frac{\delta\partial x(\varepsilon)}{\partial x(\varkappa)}\sigma(\varkappa\varepsilon). \tag{4.5.21}$$

Действительно, если ввести теперь величины, преобразующиеся по законам

$$\psi \to S^{-1}\psi \tag{4.5.22}$$

и

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi} S, \tag{4.5.23}$$

то мы получим соответственно обычный спинор и дираковски сопряженный спинор. Обычно их связывают между собой по правилу

$$\bar{\psi} = \psi^{+}\beta, \tag{4.5.24}$$

где β — эрмитизирующая матрица (обычно совпадающая с постоянной матрицей $\underset{0}{\gamma^0}$), а крестиком обозначено эрмитово сопряжение. Тогда обобщенные ковариантные производные для спиноров записываются как

$$\nabla_\nu \psi \equiv \vec{\nabla}_\nu \psi = \psi_{,\nu} - iC_\nu \psi \tag{4.5.25}$$

$$\nabla_\nu \bar{\psi} \equiv \bar{\psi}\overleftarrow{\nabla}_\nu = \bar{\psi}_\nu + i\bar{\psi}C_\nu, \tag{4.5.26}$$

причем обычное (внутреннее или скалярное) произведение ψ и $\bar{\psi}$ дифференцируется как обычный скаляр:

$$\nabla_\nu (\bar{\psi}\psi) = (\bar{\psi}\psi)_{,\nu} \tag{4.5.27}$$

а внешнее произведение, представляющее собой 4×4-матрицу, дифференцируется по правилу

$$\nabla_\nu (\psi\bar{\psi}) = (\psi\bar{\psi})_{,\nu} + i[\psi\bar{\psi}, C_\nu]_{-}. \tag{4.5.28}$$

Ввиду изложенного, для того чтобы лагранжиан спинорного поля был инвариантным как по отношению к обычным, так и по отношению к тетрадным преобразованиям, его следует взять в виде

$$\mathbf{L}_F = \sqrt{-g}\left[\frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu \vec{\nabla}_\mu \psi - \bar{\psi}\overleftarrow{\nabla}_\mu \gamma^\mu \psi) - m\bar{\psi}\psi\right], \tag{4.5.29}$$

тривиально обобщающем лагранжиан Дирака частной теории относительности. Это основывается на том факте, что обобщенная ковариантная производная обладает свойством ковариантности в отношении тетрадных преобразований и соответствующих им преобразований подобия, т. е. при преобразованиях соответствующие коэффициенты дифференцируемых величин беспрепятственно переносятся через знак этой производной (ср. с обычным ковариантным дифференцированием).

При анализе лагранжиана (4.5.29) существенно заметить, что спин фермионов оказывается не следствием поворотов в обычном пространстве, а вытекает из инвариантности лагранжиана при повороте тетрадных векторов (иначе говоря, при повороте неголономных тетрадных координат). Такое резкое отличие, скажем, от спина электромагнитного поля (фотонов) вызывает недоумение; однако если в теореме Нётер все выкладки проводить лишь в обычном пространстве, то и в этом случае мы получим «правильное» значение спина фермионов (1/2), но тогда оно целиком должно быть истолковано как результат взаимодействия спинорного поля с метрикой. Первый подход реализован в частной теории относительности Усачевым, второй же возможен лишь в искривленном с самого начала мире, хотя его результат полностью сохраняется при стремлении кривизны к нулю (см. обсуждение в § 4.7). Заметим также, что если электромагнитно-фермионное взаимодействие осуществляет непосредственно потенциал A_μ, то гравитационно-фермионное взаимодействие существенно включает *производные* тетрад или γ-матриц (символы Риччи), как это было отмечено еще Фоком и Иваненко (1929, 1930). Напомним также, что матричный вектор (4.5.12) представляет собой известные *коэффициенты Фока — Иваненко.*

Все сказанное можно было бы исследовать далее в терминах тетрадного формализма, однако проще и удобнее делать это в γ-матричном представлении Зоммерфельда (1956) [1]. Зоммерфельд предложил рассматривать в частной теории относительности γ-матрицы не как обычные постоянные (одинаковые во всех системах отсчета) матрицы Дирака, а как *матричный 4-вектор* (в смысле преобразований Лоренца). Отсюда напрашивается очевидное обобщение на случай общей теории относительности (риманова пространства), рассмотренное нами в § 8.6.

Если учесть также взаимодействие с электромагнитным полем, то фермионный лагранжиан удобно записать в виде

$$\mathbf{L}_{\mathrm{F}} = \mathbf{L}_{\mathrm{D}} + \Delta_g \mathbf{L} + \Delta_{\mathrm{em}} \mathbf{L}, \tag{4.5.30}$$

где первое слагаемое в точности повторяет частнорелятивистский лагранжиан Дирака:

$$\mathbf{L}_{\mathrm{D}} = \sqrt{-g}\left[\frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi_{,\mu} - \bar{\psi}_{,\mu}\gamma^{\mu}\psi) - m\bar{\psi}\psi\right], \tag{4.5.31}$$

инвариантный с точки зрения чисто пространственно-временных преобразований (без поворотов тетрад и преобразований подобия), а добавочные члены представляют собой лагранжиан взаимодействия с гравитационным полем, который удобно записать в одном из следующих видов:

$$\Delta_g \mathbf{L} = -\frac{i\sqrt{-g}}{4} g_{\rho}(\varepsilon) g_{\lambda}(\varepsilon)_{;\nu} \bar{\psi}\tau^{\nu\lambda\rho}\psi, \tag{4.5.32}$$

$$\Delta_g \mathbf{L} = \frac{\sqrt{-g}}{2} \bar{\psi}\,[C_{\mu}, \gamma^{\mu}]_{+}\psi, \tag{4.5.33}$$

$$\Delta_g \mathbf{L} = \frac{i\sqrt{-g}}{4} \Phi_{\mu\nu\lambda}\bar{\psi}\tau^{\mu\nu\lambda}\psi \tag{4.5.34}$$

или

$$\Delta_g \mathbf{L} = -\frac{i\sqrt{-g}}{8} \bar{\psi}(\gamma^{\nu}\gamma_{\mu;\nu}\gamma^{\mu} - \gamma^{\mu}\gamma_{\mu;\nu}\gamma^{\nu})\psi, \tag{4.5.35}$$

и лагранжиан взаимодействия с электромагнитным полем:

$$\Delta_{\mathrm{em}} \mathbf{L} = \sqrt{-g}\,\bar{\psi} A_{\mu}\gamma^{\mu}\psi. \tag{4.5.36}$$

При варьировании действия для фермионного поля следует учитывать соотношения

$$[C_{\rho}, \gamma^{\lambda}]_{-} = -i\Phi^{\lambda}_{\rho\cdot\mu}\gamma^{\mu} = -i\gamma^{\lambda}_{;\rho} \tag{4.5.37}$$

и

$$[C_{\mu}, \gamma^{\mu}]_{+} = 2\gamma^{\mu}C_{\mu} - i\gamma^{\mu}_{;\mu} = 2C_{\mu}\gamma^{\mu} + i\gamma^{\mu}_{;\mu}. \tag{4.5.38}$$

Тогда принцип экстремума действия приводит к уравнениям фермионного поля, взаимодействующего с гравитацией и электромагнетизмом, в виде

$$i\gamma^{\mu}\psi_{,\mu} - m\psi + \gamma^{\mu}(C_{\mu} + eA_{\mu})\psi = 0 \tag{4.5.39}$$

---

[1] В тетрадном формализме проблема описания фермионов рассматривалась Родичевым и также Левашевым и Иваницкой; вместе с тем существует ряд подходов к описанию фермионных полей, близких как тетрадному, так и зоммерфельдовскому формализмам (Шрёдингер, 1932; Тетрод, 1929; Дирак, 1958; Брилл и Уилер, 1961; Инфельд и ван дер Варден, 1933; Шмутцер — серия работ в 1960 — 1964 гг.; Крамер, 1966; Огиевецкий и Полубаринов, 1964, 1965; Оливейра и Тиомно, 1962). В некоторых из этих работ спиноры рассматриваются с точки зрения формализма компенсирующих полей.

и

$$i\bar{\psi}_{,\mu}\gamma^{\mu}+m\bar{\psi}-\bar{\psi}(C_{\mu}+eA_{\mu})\gamma^{\mu}=0. \qquad (4.5.40)$$

Эти уравнения можно записать и через обобщенную ковариантную производную, например, в форме

$$i\gamma^{\mu}\nabla'_{\mu}\psi-m\psi=0, \qquad (4.5.41)$$

где

$$\nabla'_{\mu}=\nabla_{\mu}-ieA_{\mu}=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-i(C_{\mu}+eA_{\mu}). \qquad (4.5.42)$$

Пользуясь явно γ-матричной записью, можно также получить

$$i\gamma^{\mu}\psi_{,\mu}+\frac{i}{2}\gamma^{\mu}_{;\mu}\psi-m\psi-\frac{i}{8}(\gamma^{\mu}\gamma_{\nu;\mu}\gamma^{\nu}-\gamma^{\nu}\gamma_{\nu;\mu}\gamma^{\mu})\psi=0. \qquad (4.5.43)$$

Дальнейший анализ мы будем проводить, «забывая» о тетрадном подходе и пользуясь лишь γ-матричным представлением гравитации, когда γ-матрицы образуют общековариантный 4-вектор, а ψ-функция фермионного поля является столбцом, состоящим из 4 скаляров. Речь идет, таким образом, о системе 4 скалярных полей, взаимодействующих друг с другом и с гравитацией, представленной посредством γ-матриц. При таком подходе естественно возникает вопрос: не будет ли достаточно для описания такой системы полей тривиального «обобщения» лагранжиана Дирака, т. е. формы (4.5.31) без привлечения добавочных членов? Тогда, как легко видеть, спин этого «сверхполя» (системы 4 полей) окажется равным нулю, в противоположность тому, что наблюдается на опыте. Вместе с тем, как покажут расчеты следующего параграфа, следующий из лагранжиана (4.5.31) метрический тензор энергии-импульса (точнее, его наиболее естественное обобщение) оказывается несимметричным и не консервативным. Первое обстоятельство не играет решающей роли, если исходить при формулировке теории гравитации не из определения (1.31):

$$g_{\mu\nu}=\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}), \qquad (4.5.44)$$

а из антикоммутатора

$$g_{\mu\nu}\,\mathrm{I}=\frac{1}{2}[\gamma_{\mu},\gamma_{\nu}]_{+}. \qquad (4.5.45)$$

Дело в том, что при варьировании матриц Дирака слева в равенстве (4.5.45) должна сохраняться *единичная матрица*, и это накладывает ограничение на вид вариаций; именно, можно положить, что

$$\delta_{v}\gamma^{\mu}=\frac{1}{2}\gamma_{\nu}\delta_{v}g^{\mu\nu}, \qquad (4.5.46)$$

и это гарантирует симметрию тензора $T_{\mu\nu}$, стоящего в правой части уравнений Эйнштейна. Однако в соотношениях Нётер в любом случае будет стоять совсем другая величина, не обязательно симметричная [и не симметричная в действительности, если берется один лагранжиан (4.5.31)], поскольку в теореме Нётер используются *не вариации* γ-матриц, а их преобразование, не связанное с условием (4.5.46). Таким образом, даже не считая специфического положения, сложившегося со спином, при анализе законов сохранения возникает ряд нюансов.

4.6. Симметрия фермионного тензора энергии и его ковариантное сохранение

Если через $T_{\sigma\tau}$,

$$\frac{\delta L}{\delta\gamma^{\tau}_{ab}}\gamma_{ab\sigma}=T_{\sigma\tau}, \qquad (4.6.1)$$

обозначить величину, фигурирующую в соотношениях Нётер (2.4.25) или (2.4.47), то последнее из них примет вид

$$T_{\cdot\alpha;\,\beta}^{\beta}+\frac{\delta L}{\delta\gamma^{\beta}_{ab}}\gamma^{\beta}_{ab;\,\alpha}=0. \qquad (4.6.2)$$

Мы будем избегать теперь термина «спинорное поле», так как не будем пользоваться понятием спинора. Величина, стоящая в правой части уравнений Эйнштейна, будет при общих вариациях γ-матриц, допустимых с точки зрения определения (4.5.44), совпадать с (4.6.1); если же, как мы говорили в конце предыдущего параграфа, принять более жесткое условие (4.5.45), то мы получили бы в уравнениях Эйнштейна

$$^{1}/_{2}(T_{\sigma\tau}+T_{\tau\sigma}). \qquad (4.6.3)$$

Так как левая часть уравнений Эйнштейна одинакова при любых условиях варьирования, мы склонны придерживаться первого подхода.

Перед тем, как вычислять выражение $\delta L/\delta\gamma^{\tau}$, сделаем несколько замечаний о лагранжиане (4.5.30), точнее (4.5.35). В нем можно явно не использовать ковариантных производных γ-матриц, так как

$$\gamma^{\mu}\gamma_{\nu;\,\mu}\gamma^{\nu}-\gamma^{\nu}\gamma_{\nu;\,\mu}\gamma^{\mu}\equiv\gamma^{\mu}\gamma_{\nu,\,\mu}\gamma^{\nu}-\gamma^{\nu}\gamma_{\nu,\,\mu}\gamma^{\mu}. \qquad (4.6.4)$$

Но все же удобнее пользоваться явно ковариантными на каждом этапе соотношениями, так что уравнения поля следует записать в общем виде (2.2.23):

$$\frac{\partial L}{\partial\gamma^{\alpha}_{ab}}-\left(\frac{qL}{\partial\gamma^{\alpha}_{ab;\,\beta}}\right)_{;\,\beta}+\frac{1}{8}\,(\delta_{\alpha}{}^{\varepsilon}\delta_{\omega}{}^{\nu}g_{\lambda\mu}+\delta_{\alpha}{}^{\varepsilon}\delta_{\lambda}{}^{\nu}g_{\omega\mu}+\delta_{\mu}{}^{\varepsilon}\delta_{\omega}{}^{\nu}g_{\lambda\alpha}+$$

$$+\delta_{\mu}{}^{\varepsilon}\delta_{\lambda}{}^{\nu}g_{\omega\alpha}-g_{\lambda\mu}g_{\omega\alpha}g^{\varepsilon\nu}-g_{\omega\mu}g_{\lambda\alpha}g^{\varepsilon\nu})\times$$

$$\times\gamma^{\mu}_{ba}\left[\,\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial L}{\partial\gamma^{\varepsilon}{}_{;\,\omega}}\gamma^{\lambda}\right)\right]_{;\,\nu}=0. \qquad (4.6.5)$$

Однако последнее громоздкое слагаемое здесь, к счастью, тождественно обращается в нуль, если заметить, что первый множитель в нем симметричен по ω и λ, тогда как стоящий под знаком градиента шпур равен

$$\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial L_F}{\partial\gamma^{\varepsilon}{}_{;\,\omega}}\gamma^{\lambda}\right)=-\frac{i\sqrt{-g}}{8}\bar{\psi}(\gamma^{\omega}\gamma^{\lambda}\gamma_{\varepsilon}-\gamma_{\varepsilon}\gamma^{\lambda}\gamma^{\omega})\psi \qquad (4.6.6)$$

и явно антисимметричен по тем же индексам. Поэтому

$$\frac{\delta L_M}{\delta\gamma^{\sigma}_{ab}}=\sqrt{-g}\left\{\frac{i}{2}\,(\bar{\psi}_a\psi_{b,\,\sigma}-\bar{\psi}_{a,\,\sigma}\psi_b)-\right.$$

$$-\frac{i}{8}\Big[\bar{\psi}_a(\gamma^{\nu}{}_{;\,\sigma}\gamma_{\nu}\psi)_b-(\overline{\psi\gamma^{\nu}\gamma_{\nu;\,\sigma}})_a\psi_b+(\overline{\psi\gamma^{\nu}\gamma_{\sigma;\,\nu}})_a\psi_b-$$

$$-\psi_a(\gamma_{\sigma;\nu}\gamma^\nu\psi)_b-\frac{1}{4}\psi(\gamma^\mu\gamma^\nu{}_{;\mu}\gamma_\varepsilon-\gamma_\varepsilon\gamma^\nu{}_{;\mu}\gamma^\mu)\psi\cdot(\gamma_{ba\nu}\delta_\sigma{}^\varepsilon+$$

$$+\gamma^\varepsilon{}_{ba}g_{\nu\sigma})\Big]+\frac{i}{8}[(\bar\psi\gamma^\beta)_a(\gamma_\sigma\psi)_b-(\bar\psi\gamma_\sigma)_a(\gamma^\beta\psi)_b]_{;\beta}\Big\}. \qquad (4.6.7)$$

Здесь мы учли то обстоятельство, что в силу уравнений фермионного поля (4.5.27) и (4.5.28) лагранжиан равен нулю:

$$\mathrm{L_F}=0 \qquad (4.6.8)$$

(слабое равенство!). Кстати, из этих уравнений следует также закон сохранения заряда без всяких его модификаций:

$$(\bar\psi\gamma^\mu\psi)_{;\mu}=0. \qquad (4.6.9)$$

Приводя подобные, тензору $T_{\sigma\tau}$ нетрудно придать вид:

$$\frac{2}{i}T_{\tau\sigma}=\frac{2}{i\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathrm{L_F}}{\delta\gamma^\sigma_{ab}}\gamma_{ab\tau}=\bar\psi\gamma_\tau\psi_{,\sigma}-\bar\psi_{,\sigma}\gamma_\tau\psi+$$

$$+\frac{1}{4}\bar\psi_{,\beta}(\gamma^\beta\gamma_\tau\gamma_\sigma-\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma^\beta)\psi+\frac{1}{4}\bar\psi(\gamma^\beta\gamma_\tau\gamma_\sigma-\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma^\beta)\psi_{,\beta}+$$

$$+\frac{1}{4}\bar\psi(\gamma_\nu\gamma^\nu{}_{;\sigma}\gamma_\tau-\gamma_\tau\gamma^\nu{}_{;\sigma}\gamma_\nu+\gamma^\beta{}_{;\beta}\gamma_\tau\gamma_\sigma-\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma^\beta{}_{;\beta}+$$

$$+\gamma^\beta\gamma_{\tau;\beta}\gamma_\sigma-\gamma_\sigma\gamma_{\tau;\beta}\gamma^\beta+\gamma^\beta\gamma_\tau\gamma_{\sigma;\beta}-\gamma_{\sigma;\beta}\gamma_\tau\gamma^\beta)\psi. \qquad (4.6.10)$$

Из этого выражения явствует, что один только дираковский лагранжиан (4.5.29) не может в принципе дать симметричного тензора $T_{\mu\nu}$. Чтобы показать симметрию полного выражения (4.6.10) для $T_{\mu\nu}$, воспользуемся сначала соотношением

$$\gamma^\beta\gamma_\tau\gamma_\sigma-\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma^\beta=2\gamma^\beta\gamma_\tau\gamma_\sigma-2g_\tau{}^\beta\gamma_\sigma+2g_\sigma{}^\beta\gamma_\tau-2g_{\sigma\tau}\gamma^\beta \qquad (4.6.11)$$

и аналогичным ему, а также уравнениями (4.5.27) и (4.5.28); отсюда следует

$$\frac{4}{i}T_{\tau\sigma}=\bar\psi\gamma_\tau\psi_{,\sigma}+\bar\psi\gamma_\sigma\psi_{,\tau}-\bar\psi_{,\sigma}\gamma_\tau\psi-\bar\psi_{,\tau}\gamma_\sigma\psi+$$

$$+\frac{1}{2}\bar\psi\Big[-\gamma^\mu{}_{;\mu}\sigma_{\tau\sigma}-\frac{1}{4}(\gamma^\alpha\gamma_{\beta;\alpha}\gamma^\beta-\gamma^\beta\gamma_{\beta;\alpha}\gamma^\alpha)\sigma_{\tau\sigma}-$$

$$-\sigma_{\tau\sigma}\gamma^\mu{}_{;\mu}+\frac{1}{4}\sigma_{\tau\sigma}(\gamma^\alpha\gamma_{\beta;\alpha}\gamma^\beta-\gamma^\beta\gamma_{\beta;\alpha}\gamma^\alpha)+$$

$$+\gamma_\nu\gamma^\nu{}_{;\sigma}\gamma_\tau-\gamma_\tau\gamma^\nu{}_{;\sigma}\gamma_\nu+\gamma^\beta{}_{;\beta}\gamma_\tau\gamma_\sigma-\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma^\beta{}_{;\beta}-$$

$$-\gamma_\sigma\gamma_{\tau;\beta}\gamma^\beta+\gamma^\beta\gamma_\tau\gamma_{\sigma;\beta}-\gamma_{\sigma;\beta}\gamma_\tau\gamma^\beta+\gamma^\beta\gamma_{\tau;\beta}\gamma_\sigma\Big]. \qquad (4.6.12)$$

Первые три члена явно симметричны по σ и τ, что же касается остальных, то их симметрию можно наиболее простым способом доказать, привлекая соотношения (4.5.7) или (4.5.25), которые лучше взять в форме

$$\gamma_{\mu;\nu}=\Phi_{\nu\mu\lambda}\gamma^\lambda, \qquad (4.6.13)$$

где

$$\Phi_{\mu\nu\lambda}=-\Phi_{\mu\lambda\nu}, \qquad (4.6.14)$$

причем коэффициент $\Phi_{\mu\nu\lambda}$ уже не является матрицей. Тогда инвариант (4.6.4) равен

$$\gamma^\alpha\gamma_{\beta;\,\alpha}\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma_{\beta;\,\alpha}\gamma^\alpha = -2\Phi_{[\alpha\beta\varepsilon]}\tau^{\alpha\beta\varepsilon}, \tag{4.6.15}$$

где

$$\Phi_{[\alpha\beta\varepsilon]} = \frac{1}{3}(\Phi_{\alpha\beta\varepsilon} + \Phi_{\varepsilon\alpha\beta} + \Phi_{\beta\varepsilon\alpha}) \tag{4.6.16}$$

— полностью антисимметризованный тензор $\Phi_{\mu\nu\lambda}$, нормально антисимметричный лишь по двум последним индексам. Стоящие в скобках в (4.6.12) первый и третий члены дают

$$-(\gamma^\mu{}_{;\,\mu}\sigma^{\tau\sigma} + \sigma^{\tau\sigma}\gamma^\mu{}_{;\,\mu}) = -2\Phi^{\mu}_{\cdot\,\mu\lambda}\tau^{\lambda\tau\sigma}, \tag{4.6.17}$$

причем имеет место равенство

$$\begin{gathered}-(\gamma^\alpha\gamma_{\beta;\,\alpha}\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma_{\beta;\,\alpha}\gamma^\alpha)\sigma^{\tau\sigma} + \sigma^{\tau\sigma}(\gamma^\alpha\gamma_{\beta;\,\alpha}\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma_{\beta;\,\alpha}\gamma^\alpha) = \\ = 12\Phi_{[\alpha\beta\varepsilon]}(g^{\tau\varepsilon}\tau^{\alpha\beta\sigma} + g^{\sigma\varepsilon}\tau^{\beta\alpha\tau})\end{gathered} \tag{4.6.18}$$

на основании (4.6.15) и благодаря коммутационному равенству

$$\begin{gathered}\tau^{\alpha\beta\varepsilon}\sigma^{\mu\nu} - \sigma^{\mu\nu}\tau^{\alpha\beta\varepsilon} = 2(g^{\mu\varepsilon}\tau^{\alpha\beta\nu} + g^{\mu\beta}\tau^{\nu\varepsilon\alpha} + \\ + g^{\mu\alpha}\tau^{\beta\varepsilon\nu} + g^{\nu\varepsilon}\tau^{\beta\alpha\mu} + g^{\nu\beta}\tau^{\mu\alpha\varepsilon} + g^{\nu\alpha}\tau^{\varepsilon\beta\mu}).\end{gathered} \tag{4.6.19}$$

Приведение подобных, с учетом соотношения (4.6.16), тогда дает

$$\begin{gathered}\frac{4}{i}T_{\tau\sigma} = \bar\psi\gamma_\tau\psi_{,\,\sigma} + \bar\psi\gamma_\sigma\psi_{,\,\tau} - \bar\psi_{,\,\sigma}\gamma_\tau\psi - \bar\psi_{,\,\tau}\gamma_\sigma\psi + \\ + \frac{1}{2}\bar\psi(\Phi_{\tau\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta}{}_{\dot{\sigma}} + \Phi_{\sigma\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta}{}_{\dot{\tau}})\psi,\end{gathered} \tag{4.6.20}$$

где симметрия уже очевидна. Это выражение приобретает более стройный и единообразный вид, если в нем тензор $\Phi_{\mu\nu\lambda}$ не фигурирует явно:

$$\begin{gathered}\mathbf{T}_{\tau\sigma} = \frac{\delta \mathbf{L}_F}{\delta\gamma^\sigma_{ab}}\cdot\gamma_{ab\tau} = \frac{i\sqrt{-g}}{4}\Big\{\bar\psi\gamma_\tau\psi_{,\,\sigma} + \bar\psi\gamma_\sigma\psi_{,\,\tau} - \\ - \bar\psi_{,\,\sigma}\gamma_\tau\psi - \bar\psi_{,\,\tau}\gamma_\sigma\psi + \frac{1}{4}\bar\psi[(\gamma^\alpha\gamma_{\alpha;\,\tau}\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\gamma_{\alpha;\,\tau}\gamma^\alpha) + \\ + (\gamma^\alpha\gamma_{\alpha;\,\sigma}\gamma_\tau - \gamma_\tau\gamma_{\alpha;\,\sigma}\gamma^\alpha)]\psi\Big\} = \mathbf{T}_{\sigma\tau}.\end{gathered} \tag{4.6.21}$$

Итак, первая роль добавочного члена в полном лагранжиане (4.5.26) выяснена: он гарантирует симметрию $T_{\mu\nu}$.

Вторая его роль — обеспечение ковариантного сохранения этого же тензора. Конечно, можно было бы взять непосредственно дивергенцию $T^{\mu\nu}$ в какой-либо его конкретной форме и провести соответствующие выкладки, однако такой путь совершенно необозрим и требует применения нежелательных искусственных приемов. Гораздо удобнее исходить из соотношения (4.6.2), заменяя во втором слагаемом ковариантную производную γ-матрицы согласно равенству (4.6.13). Мы получим тогда

$$\mathbf{T}^{\beta}_{\cdot\,\alpha;\,\beta} = -\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta\gamma^\beta_{ba}}\gamma^{\beta}_{ab;\,\alpha} = -\mathbf{T}_{\lambda\beta}\Phi_{\alpha}{}^{\beta\lambda}_{\cdot\cdot}. \tag{4.6.22}$$

Однако тензор $\Phi_{\mu\nu\lambda}$ (символы Риччи) антисимметричен по последним двум индексам, а метрический тензор энергии-импульса $T_{\lambda\beta}$, как только что доказано, при новом выборе лагранжиана симметричен. Поэтому умножение с суммированием по индексам в правой части (4.6.22) дает тождественный нуль, и тем самым доказан факт ковариантного сохраненья метрического тензора энергии-импульса при этом выборе лагранжиана:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\,\nu} = 0. \tag{4.6.23}$$

Мы уже видели в предыдущем параграфе, что использованный здесь добавок к дираковскому лагранжиану должен быть истолкован как лагранжиан взаимодействия фермионного и гравитационного полей. Проделанный только что анализ еще раз подтверждает это. Действительно, мы показали, что этот добавочный лагранжиан обеспечивает *совместность* уравнений Эйнштейна, если последние выводятся из вариационного принципа в рамках более широкого определения γ-матриц (4.5.44). Вообще говоря, взаимодействие с гравитационным полем отражается и в других частях полного лагранжиана (4.5.30), так как γ-матрицы содержат, кроме постоянной составляющей, характерной для плоского пространства, и собственно гравитационную часть, что особенно отчетливо видно в квантовых разделах этой книги. Однако, как мы увидим при анализе квадрированного уравнения Дирака в общей теории относительности и соответствующей формулировки уравнения Паули, лагранжиан (4.5.33) (или другие его формы) отвечает наиболее типичному взаимодействию фермионного поля с гравитацией и приводит к эффектам, весьма аналогичным эффектам фермионно-электромагнитного взаимодействия (эффект Зеемана и пр.). Тот факт, что этот же лагранжиан (4.5.33) дает при реализации теоремы Нётер и наблюдаемое значение спина электрона (не часть его, а все значение в целом!) становится ввиду этого еще более знаменательным. К рассмотрению этого вопроса мы теперь переходим.

4.7. Сохраняющиеся величины и спин фермионов

Прежде всего мы вычислим здесь динамические характеристики фермионного поля, фигурирующие в теореме Нётер.

Тензор обобщенного спина фермионов отличен от нуля, несмотря на то обстоятельство, что фермионные потенциалы инвариантны относительно преобразований координат — их коэффициенты преобразования равны нулю. Дело в том, что в выражении (2.4.22) для $\mathbf{M}_\sigma^{\alpha\tau}$ суммирование по B охватывает *все* поля, включенные в данный лагранжиан; а так как лагранжиан (4.5.35) зависит от производных γ-матриц и коэффициенты преобразования последних отличны от нуля, то мы должны записать:

$$\mathbf{M}_\sigma^{\alpha\tau} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \gamma^\sigma_{ab,\,\alpha}} \gamma^\tau_{ab} = -\frac{i\sqrt{-g}}{4}\bar{\psi}\tau^{\alpha\tau}\cdot\psi. \tag{4.7.1}$$

Мы повторим здесь выражение для симметричного тензора энергии-импульса (4.6.21):

$$T_{\sigma\tau} = \frac{i}{4}\Big\{\bar{\psi}\gamma_\tau\psi_{,\,\sigma} + \bar{\psi}\gamma_\sigma\psi_{,\,\tau} - \bar{\psi}_{,\,\sigma}\gamma_\tau\psi - \bar{\psi}_{,\,\tau}\gamma_\sigma\psi +$$

$$+\frac{1}{4}\bar{\psi}[(\gamma^\alpha\gamma_{\alpha;\,\tau}\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\gamma_{\alpha;\,\tau}\gamma^\alpha) + (\gamma^\alpha\gamma_{\alpha;\,\sigma}\gamma_\tau - \gamma_\tau\gamma_{\alpha;\,\sigma}\gamma^\alpha)]\Big\}\psi. \tag{4.7.2}$$

Простой подсчет показывает, что след $T_{\sigma\tau}$ равен

$$T_\nu{}^\nu = m\bar{\psi}\psi. \tag{4.7.3}$$

Канонический квазитензор равен

$$\mathbf{t}_\sigma{}^\alpha = \frac{i\sqrt{-g}}{2}\Big[\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi_{,\,\sigma} - \bar{\psi}_{,\,\sigma}\gamma^\alpha\psi - \frac{1}{4}\bar{\psi}\,(\gamma^\alpha\gamma^\mu{}_{,\,\sigma}\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma^\mu{}_{\,\sigma}\gamma^\alpha)\,\psi\Big], \tag{4.7.4}$$

а его след совпадает со следом $\mathbf{T}_{\sigma\tau}$:

$$\mathbf{t}_\alpha{}^\alpha = \sqrt{-g}\, m\bar{\psi}\psi. \tag{4.7.5}$$

Так как

$$\mathbf{U}_\sigma^\alpha = \mathbf{T}_\sigma^\alpha - \mathbf{t}_\sigma^\alpha, \tag{4.7.6}$$

то след спиновой доли энергии-импульса равен нулю,

$$\mathbf{U}_\alpha^\alpha = 0, \tag{4.7.7}$$

а сама величина $\mathbf{U}_\sigma^\alpha$ равна

$$\mathbf{U}_\sigma^\alpha = \frac{i\sqrt{-g}}{4}\Big\{\bar{\psi}\gamma_\sigma\psi^{,\alpha} - \bar{\psi}\gamma^\alpha\psi_{,\sigma} + \bar{\psi}_{,\sigma}\gamma^\alpha\psi -$$

$$- \bar{\psi}^{,\alpha}\gamma_\sigma\psi + \frac{1}{4}\bar{\psi}[(\gamma_\mu\gamma^{\mu;\alpha}\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\gamma^{\mu;\alpha}\gamma_\mu) -$$

$$-(\gamma^\mu\gamma_{\mu;\sigma}\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\gamma_{\mu;\sigma}\gamma^\mu) - (\gamma^\mu\gamma_\lambda\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\gamma_\lambda\gamma^\mu)\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}]\psi\Big\}. \tag{4.7.8}$$

Как следует связывать обобщенный спин с обычным спином, рассматриваемым в частной теории относительности? Чтобы ответить на этот вопрос, следует вспомнить соотношение (2.4.83):

$$\mathbf{t}_\sigma^\alpha g^{\sigma\mu}x^\nu - \mathbf{t}_\sigma^\alpha g^{\sigma\nu}x^\mu + \mathbf{M}_\sigma^{\alpha\tau}(g^{\sigma\nu}x^\mu - g^{\sigma\mu}x^\nu)_{,\tau} = \mathbf{m}^{\alpha\mu\nu}. \tag{4.7.9}$$

Отделяя орбитальную часть момента, пропорциональную 4-мерному радиус-«вектору», мы получаем в качестве спина, антисимметричного по двум последним индексам, величину

$$\mathbf{S}^{\alpha\mu\nu} = -\mathbf{S}^{\alpha\nu\mu} = \mathbf{M}_\sigma^{\alpha\mu}g^{\sigma\nu} - \mathbf{M}_\sigma^{\alpha\nu}g^{\sigma\mu}. \tag{4.7.10}$$

Это выражение, включая знак, вполне соответствует используемому в частнорелятивистской теории поля [см., например, (Боголюбов и Ширков, 1957)]. Подставляя в (4.7.10) обобщенный спин в форме (4.7.1), находим

$$\mathbf{S}^{\alpha\mu\nu} = -\frac{i}{2}\sqrt{-g}\,\bar{\psi}\tau^{\alpha\mu\nu}\psi \equiv -\frac{i}{2}\sqrt{-g}\,\bar{\psi}(\gamma^\alpha\sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}\gamma^\alpha)\psi. \tag{4.7.11}$$

Этот результат в точности совпадает с общепринятым (см., например, только что процитированную монографию).

Итак, в качестве «бесплатного приложения» к симметризации метрического тензора энергии-импульса (4.7.2) и обращению в нуль его ковариантной дивергенции мы получили еще и правильное выражение для спина фермионов (квантование его рассмотрено в § 6.5). Такое тройное совпадение, конечно, могло бы удивить, если бы нам не был известен уже развитый формализм спинорных полей в тетрадной форме; однако в любом случае нельзя не признать исключительной стройности этой теории.

Можно рассматривать добавочный член в лагранжиане (4.5.30), обеспечивающий это тройное совпадение, как следствие уравнений Эйнштейна и поэтому связывать его в первую очередь с гравитационным полем. Действительно, этот член тождественно обращается в нуль, если пространство-время плоское. Таким образом, *спин фермионного поля целиком обязан взаимодействию этого поля с метрикой.* Знаменательно, что этот спин не обращается в нуль в плоском мире в противоположность тому члену в лагранжиане, которому он обязан своим существованием [в выражениях (4.7.1) и (4.7.11) не содержится уже производных γ-матриц]! Такой «парадокс» в действительности не парадоксален: так как член в лагранжиане содержал лишь *первую степень* производной γ-матрицы, то дифференцирование его по производной γ-матрицы же сделало его не зависящим от таких производных, и член, который должен быть *малым* в том случае, если кривизна мала, дает вполне конечную, существенным образом *не зависящую от кривизны* величину плотности спина. Электромагнитное поле в известных нам случаях не дает такого эффекта просто потому, что в лагранжианы взаимодействия не входят производные его потенциалов, а коэффициент преобразования электромагнитного поля пропорционален 4-потенциалу и, следовательно, обращается в нуль в отсутствие поля. Таким образом, гравитация занимает в этом отношении исключительное место. Например, если взять обычное (1-компонентное, в отличие от 4-компонентного фермионного поля, также скалярного в зоммерфельдовском представлении) скалярное поле и добавить в его лагранжиан член взаимодействия с гравитацией в форме

$$\mathrm{Sp}\,(\gamma^{\mu};{}_{\nu}\gamma^{\nu})\varphi_{,\,\mu}, \tag{4.7.12}$$

то мы и здесь сталкиваемся с возможностью введения спина, хотя и трудно что-либо сказать об общем рецепте полного анализа этого вопроса. Мы не будем больше возвращаться к этой последней иллюстрации.

Заметим, что было бы весьма интересно рассмотреть и другие фермионные поля, но уже с более высокими спинами [1]. Данный в предыдущем параграфе подход, конечно, также применим к ним; в то же время, возможно, удастся каким-то образом включить в рассмотрение и поля с целым *спектром* различных значений спина.

4.8. Квадрирование уравнения Дирака; уравнение Паули и фермионно-гравитационно-электромагнитные эффекты

Обобщенное уравнение Дирака в общей теории относительности, описывающее заряженные частицы в присутствии электромагнитного поля, содержит характерный член $C_\mu + eA_\mu$, наводящий на мысль об аналогии между гравитацией и электромагнетизмом [особенно см. (4.5.42)]. Чтобы проследить следствия, вытекающие из этого заключения, построим ротор матричного вектора C_μ по аналогии с (4.1.3):

$$\begin{aligned} C_{\mu;\alpha} - C_{\alpha;\mu} &\equiv C_{\mu,\alpha} - C_{\alpha,\mu} = \\ &= \frac{i}{4}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}[\Phi_{\mu\nu\lambda;\alpha} - \Phi_{\alpha\nu\lambda;\mu} + 2\Phi_{\mu\lambda\beta}\Phi_{\alpha\nu}{}^{\beta}{}_{\cdot} - 2\Phi_{\mu\nu\beta}\Phi_{\alpha\lambda}{}^{\beta}{}_{\cdot}]. \end{aligned} \tag{4.8.1}$$

Если вторично ковариантно продифференцировать равенство (4.5.11) и провести альтернирование производных, нетрудно по правилу (8.6.31) записать тензор Римана — Кристоффеля в виде

$$R_{\nu\lambda\alpha\mu} = \Phi_{\mu\nu\lambda;\alpha} - \Phi_{\alpha\nu\lambda;\mu} + \Phi_{\mu\lambda\beta}\Phi_{\alpha\nu}{}^{\beta}{}_{\cdot} - \Phi_{\mu\nu\beta}\Phi_{\alpha\lambda}{}^{\beta}{}_{\cdot}, \tag{4.8.2}$$

согласующемся с (8.7.50). Сравнивая полученные выражения, найдем

$$C_{\beta;\alpha} - C_{\alpha;\beta} + i[C_\beta, C_\alpha]_- = H_{\alpha\beta}. \tag{4.8.3}$$

Здесь использовано сокращение

$$H_{\alpha\beta} \overset{\mathrm{Def}}{=} \frac{i}{4} R_{\alpha\beta\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}, \tag{4.8.4}$$

[1] Анализ в частной теории относительности см в статьях Фирца и Паули (1939), Рарита и Швингера (1941).

причем матричный тензор $H_{\alpha\beta}$ эквивалентен тензору Римана — Кристоффеля:

$$\mathrm{Sp}(H_{\mu\nu}\gamma_\omega\gamma_\varepsilon) = -2iR_{\mu\nu\omega\varepsilon} \tag{4.8.5}$$

так же, как матричный вектор C_μ эквивалентен символам Риччи:

$$\mathrm{Sp}(C_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda) = -2i\Phi_{\mu\nu\lambda} \tag{4.8.6}$$

(конечно, при определенности γ-матриц в точке). Можно было бы брать обобщенный ротор типа (4.8.3) в применении к суммарному вектору $C_\mu + eA_\mu$ и выделить гравитационную и электромагнитную части путем шпурования (в случае гравитации по типу (4.8.5)). Так напрашивается формулировка «единой теории поля».

Операция квадрирования уравнения первого порядка сводится к повторному дифференцированию этого уравнения с учетом его в приведении членов. Часто дифференцирование осуществляется с помощью исходного дифференциального оператора или ему сопряженного. В случае уравнения Дирака (4.5.39)

$$i\gamma^\mu\psi_{,\mu} - m\psi + \gamma^\mu(C_\mu + eA_\mu)\psi = 0 \tag{4.8.7}$$

мы воспользуемся при дифференцировании просто оператором $i\gamma^\mu\partial/\partial x^\mu$, дающим, конечно, тот же результат, что и собственно «диракиан», если впоследствии учитывать исходное уравнение (4.8.7). В ходе вычислений потребуется перебрасывать γ-матрицу через C_μ, что дает

$$\gamma^\nu\gamma^\mu C_\mu = \frac{i}{4}\Phi_{\mu\sigma\tau}\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\tau = -\gamma^\mu C_\mu\gamma^\nu + 2C^\nu + i\Phi_{\mu\sigma}{}^{\nu}\gamma^\mu\gamma^\sigma, \tag{4.8.8}$$

а также учитывать соотношения вида

$$\gamma^\nu\gamma^\mu(C_\mu + eA_\mu)_{;\nu} = (C^\nu + eA^\nu)_{;\nu} + \\ + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}(H_{\mu\nu} + eF_{\mu\nu}) + i\sigma^{\mu\nu}C_\mu C_\nu \tag{4.8.9}$$

и

$$-\gamma^\nu(C_\nu + eA_\nu)\gamma^\mu(C_\mu + eA_\mu) - i\gamma^\nu\gamma^\mu{}_{;\nu}(C_\mu + eA_\mu) = \\ = -(C_\nu + eA_\nu)(C^\nu + eA^\nu) - \sigma^{\mu\nu}C_\mu C_\nu. \tag{4.8.10}$$

В результате мы получим квадрированное уравнение в двух удобных формах:

$$\Box\psi - m^2\psi = -2i(C^\nu + eA^\nu)\psi_{,\nu} - i(C^\nu + eA^\nu)_{;\nu}\psi - \\ - \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}(H_{\mu\nu} + eF_{\mu\nu})\psi - (C_\nu + eA_\nu)(C^\nu + eA^\nu)\psi \tag{4.8.11}$$

и

$$(D^\nu - i(C^\nu + eA^\nu))(D_\nu - i(C_\nu + eA_\nu))\psi + m^2\psi = \\ = \frac{i}{2}(H_{\mu\nu} + eF_{\mu\nu})\sigma^{\mu\nu}\psi, \tag{4.8.12}$$

где оператор D_μ обозначает ковариантную производную обычного вида. Заметив, что

$$H_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \equiv \sigma^{\mu\nu}H_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}R, \tag{4.8.13}$$

можно сказать, что спин-гравитационное взаимодействие в правой части (4.8.12) отсутствует (в отличие от спин-электромагнитного). Переходя в

(4.8.11) к символам Риччи и учитывая равенства

$$C^{\mu}C_{\mu}=-\frac{1}{16}\Phi_{\mu\nu\lambda}\Phi^{\mu}_{\cdot\,\omega\varepsilon}\theta^{\nu\lambda\omega\varepsilon}+\frac{1}{8}\Phi_{\mu\nu\lambda}\Phi^{\mu\nu\lambda} \qquad (4.8.14)$$

и

$$C^{\mu}{}_{;\,\mu}=\frac{i}{4}\Phi^{\mu}_{\cdot\,\nu\lambda;\,\mu}\sigma^{\nu\lambda}, \qquad (4.8.15)$$

получаем третью форму квадрированного уравнения Дирака

$$\Box\psi-\left(m^2-\frac{1}{4}R-\frac{1}{8}\Phi_{\mu\nu\lambda}\Phi^{\mu\nu\lambda}-ieA^{\nu}{}_{;\,\nu}-e^2A_{\nu}A^{\nu}\right)\psi=$$

$$=\frac{1}{16}\Phi_{\mu\nu\lambda}\Phi^{\mu}_{\cdot\,\omega\varepsilon}\theta^{\nu\lambda\omega\varepsilon}\psi+\left(\frac{1}{4}\Phi^{\mu}_{\cdot\,\nu\lambda;\,\mu}-\frac{ie}{2}F_{\nu\lambda}-\frac{ie}{2}A^{\mu}\Phi_{\mu\nu\lambda}\right)\sigma^{\nu\lambda}\psi-$$

$$-2ieA^{\nu}\psi_{,\,\nu}+\frac{1}{2}\Phi^{\mu}_{\cdot\,\nu\lambda}\sigma^{\nu\lambda}\psi_{,\,\mu}. \qquad (4.8.16)$$

Здесь бросается в глаза наличие эффективной массы покоя фермионов в присутствии гравитации и электромагнетизма,

$$m^2_{\text{eff}}=m^2-\frac{1}{4}R-\frac{1}{8}\Phi_{\mu\nu\lambda}\Phi^{\mu\nu\lambda}-ieA^{\nu}_{;\,\nu}-e^2A_{\nu}A^{\nu}, \qquad (4.8.17)$$

из которой, однако, в дальнейшем выпадают отдельные члены, если рассматривать конкретные виды гравитационных полей. Отметим, что в поле Шварцшильда эффективная масса оказывается *больше* обычной массы покоя фермиона.

Для того чтобы получить уравнение Паули в общей теории относительности и анализировать конкретные эффекты, необходимо задаться видом гравитационного поля и калибровкой γ-матриц. Мы проведем соответствующие вычисления для сочетания поля Шварцшильда и поля вращающегося тела (см., например, «Теорию поля» Ландау и Лифшица), пренебрегая величинами, квадратичными по гравитационной постоянной. Тогда

$$(g_{\mu\nu})=\left\|\begin{matrix}a_0^2 & b_i\\ b_i & -a_i^2\delta_j{}^i\end{matrix}\right\|, \qquad (4.8.18)$$

где

$$1-a_0=a_i-1=\frac{2\gamma M}{r} \qquad (4.8.19)$$

и

$$b_i=-\frac{2\gamma}{r^2}\frac{x^j}{r}M_{ij}. \qquad (4.8.20)$$

В том же приближении

$$(g^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}\overset{-2}{a_0} & b_i\\ b & -\overset{-2}{a_i}\,\delta^i_j\end{pmatrix}. \qquad (4.8.21)$$

Здесь M_{ij} — момент импульса источника гравитационного поля. Обобщенные матрицы Дирака мы выберем в виде

$$\gamma_0=a_0\underset{0}{\gamma^0}+b_i\underset{0}{\gamma^i};\qquad \gamma_i=-a_i\underset{0}{\gamma^i};$$
$$\gamma^0=\overset{-1}{a_0}\underset{0}{\gamma^0};\qquad \gamma^i=b_i\underset{0}{\gamma^0}+\overset{-1}{a_i}\underset{0}{\gamma^i}. \qquad (4.8.22)$$

Тогда, как просто убедиться,

$$\Phi_{0ij}=\frac{\gamma}{r^3}\left[2M_{ij}-3\frac{x^k}{r}\left(M_{ik}\frac{x^j}{r}-M_{jk}\frac{x^i}{r}\right)\right]=-\Omega_{ij}, \qquad (4.8.23)$$

$$\Omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{ij}, \tag{4.8.24}$$

$$\Phi_{00i} = \frac{\gamma M}{r^2}\frac{x^i}{r} = -g^i \tag{4.8.25}$$

и

$$\Phi_{ijk} = \delta_k{}^i g^j - \delta_j{}^i g^k. \tag{4.8.26}$$

Наряду с угловой скоростью прецессии Лензе — Тирринга $\boldsymbol{\Omega}$ мы ввели здесь ньютоновский вектор ускорения свободного падения:

$$\mathbf{g} = \operatorname{grad}\frac{\gamma M}{r}. \tag{4.8.27}$$

Обобщенное уравнение Дирака (4.8.7) распадается теперь на два матричных (столбцы из двух строк) уравнения

$$\begin{aligned} D_- u_+ + G_i\sigma_i u_- &= 0,\\ D_+ u_- + G_i\sigma_i u_+ &= 0, \end{aligned} \tag{4.8.28}$$

где

$$D_\pm = \frac{i}{a_0}\frac{\partial}{\partial x^0} + ib_i\frac{\partial}{\partial x^i} \pm m \pm \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\sigma}) + e\varphi + eA_i b_i \tag{4.8.29}$$

и

$$G_i = \frac{i}{a_i}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{i}{2}g^i + e\frac{A_i}{a_i}, \tag{4.8.30}$$

а фермионная ψ-функция представлена в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix} \tag{4.8.31}$$

(u_+ и u_- — столбцы, состоящие из двух строк). Символически решая уравнения (4.8.28),

$$u_\pm = -D_\mp^{-1}G_i\sigma_i u_\mp, \tag{4.8.32}$$

подставим результат в эти исходные уравнения и получим незацепляющиеся (в отличие от (4.8.28)) уравнения для u_+ и u_-:

$$D_\mp u_\pm = G_i\sigma_i D_\pm^{-1}G_j\sigma_j u_\pm. \tag{4.8.33}$$

Перейдем к нерелятивистскому (по скорости фермиона) приближению, чтобы получить «общерелятивистское» уравнение Паули. Тогда

$$D_\mp^{-1} \approx \pm\frac{1}{2m}\left[1 \mp \frac{1}{2m}D_\mp - \frac{1}{2m}(\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\sigma})\right]. \tag{4.8.34}$$

Как известно из релятивистской теории электрона Дирака в обычном изложении, для электронов и для позитронов, которые рассматриваются как частицы противоположных частотностей в общем решении уравнения Дирака (4.8.7), квантовомеханический оператор «энергии» эффективно записывается с разными знаками. В общей теории относительности это утверждение может быть записано в хронометрически инвариантной форме:

$$\hat{E}_\pm = \pm i\frac{\partial}{\partial\tau} \cong \pm\frac{i}{a_0}\frac{\partial}{\partial x^0}, \tag{4.8.35}$$

где верхний знак берется для электронов, а нижний — для позитронов. Аналогичным образом формулируется и оператор 3-импульса:

$$\hat{p}^i = \pm i g^{i\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{4.8.36}$$

Здесь, однако, частное дифференцирование по λ^i, записанное в форме (4.8.36), в общем случае следует заменить на такого же типа *ковариантное* дифференцирование. Так как в расчетах будут встречаться лишь выражения типа дивергенции и ротора, то явно вводить 3-мерные символы Кристоффеля излишне. Так, можно записать в приложении к произвольному хронометрическому вектору (в состав которого включена в этом случае ψ-функция)

$$b_{ij}\hat{p}^i V^j = \pm \frac{i}{\sqrt{b}} b_{ij} g^{i\mu} (\sqrt{b}\, V^j)_{,\mu}. \tag{4.8.37}$$

Поэтому левая часть уравнения (4.8.33) принимает вид

$$D_\mp u_\mp = \pm \left[\hat{E}_\pm - m - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega\sigma}) \pm e\varphi - b_i\hat{p}^i \pm eA_i b_i \right] u_\pm. \tag{4.8.38}$$

В правой же части следует учесть приближенное равенство (4.8.34) и перебросить оператор $D_\mp$ вправо так, чтобы он действовал непосредственно на волновую функцию $u_\pm$. Тот член, в котором он действует на эту функцию, будет малым, что ясно из итерационных соображений; появляющийся же при этом коммутационный член дает вклад в известные эффекты типа спин-орбитальной связи, и мы его сохраним. В результате, оставляя в левой части уравнения лишь оператор энергии, получаем

$$E_\pm u_\pm = \Big\{ m + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega\sigma}) + b_i\hat{p}^i \mp e(\varphi + A_i b_i) +$$
$$+ \frac{1}{2m} G_i G_j \sigma_i \sigma_j - \frac{1}{4m^2} G_i \Omega_j G_k \sigma_i \sigma_j \sigma_k \mp G_i \sigma_i [D_\mp, G_j\sigma_j]_- \Big\} u_\pm. \tag{4.8.39}$$

Предпоследнее слагаемое здесь также является величиной более высокого порядка малости, и мы его будем игнорировать.

Полученное уравнение необходимо преобразовать, с тем чтобы конкретные члены взаимодействия приобрели явный вид. Это достигается довольно громоздкими вычислениями, в результате которых мы окончательно приходим к общерелятивистскому обобщению уравнения Паули. Запишем его в операторном виде:

$$\hat{E}_\pm = \hat{H}_\pm = m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \mp e\varphi + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega\Sigma}) \mp$$
$$\mp \frac{e}{m}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}) - \frac{ie}{2m}\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{e}{2m}(\mathbf{B\Sigma}) \pm \frac{i}{m}(\mathbf{g}\hat{\mathbf{p}}) \mp$$
$$\mp \frac{3}{2m}(\boldsymbol{\Sigma}[\mathbf{gp}]) - \frac{e}{2m}(\boldsymbol{\Sigma}[\mathbf{Ag}]) + \frac{3ie}{m}(\mathbf{gA}) +$$
$$+ \frac{ie}{4m}(\mathbf{bE}) \mp \frac{e}{4m}(\boldsymbol{\Sigma}[\mathbf{bE}]) - \frac{ie}{4m^2}(\mathbf{Ep}) +$$
$$+ \frac{e}{4m^2}\operatorname{div}\mathbf{E} \mp \frac{ie}{4m^2}(\operatorname{rot}\mathbf{E\Sigma}) - \frac{e}{4m^2}(\boldsymbol{\Sigma}[\mathbf{Ep}]). \tag{4.8.40}$$

Верхний знак перед знакопеременными членами относится к электронам, нижний знак — к позитронам. Мы ввели здесь для удобства записи и из соображений хронометрической инвариантности 2×2-матричный хронометрический вектор, в два раза превышающий величину оператора спина электрона в единицах $\hbar$:

$$\Sigma_i = a_i \sigma_i. \tag{4.8.41}$$

Кроме того, по стандартным правилам был введен аксиальный тензор Леви-Чивиты

$$\varepsilon_{jkl} = a_j{}^3 E^{jkl} \tag{4.8.42}$$

и использованы 3-мерные хронометрически ковариантные дифференциальные операции дивергенции и ротора и алгебраические операции скалярного и векторного умножения.

Записанные в (4.8.40) члены энергии взаимодействия приводят к различным фермионно-гравитационно-электромагнитным эффектам и, в частности, к хорошо известному эффекту Зеемана (7-й член в правой части равенства) и эффекту спин-орбитальной связи (17-й член). Гравитационный аналог эффекта Зеемана, предсказанный Я. Б. Зельдовичем, описывается 4-м членом; гравитационный спин-орбитальный эффект содержится в 9-м члене. Наряду с членами «чисто» фермионно-электромагнитного или фермионно-гравитационного взаимодействия (в первых, конечно, должен содержаться гравитационный эффект красного смещения, замаскированный хронометрически инвариантной записью) в оператор энергии (4.8.40) входят и смешанные, интерференционные члены. При этом гравитационные эффекты, соответствующие электромагнитным, появляются в более раннем порядке по m, так как эффективно происходит замена $e / m \to 1$ (вместо электромагнитного заряда подставляется гравитационный заряд — масса). Таким образом прослеживается, например, аналогия между уже упомянутыми эффектами.

Различия в поведении частиц и античастиц характеризуются разными знаками перед энергетическими добавками. Часть членов, сохраняющих знак неизменным, можно объединить с массой, составив новую эффективную массу покоя фермиона. Там же, где в игру вступает спин, роль его ориентации оказывается в знакопостоянных членах разной для разных ориентаций спина частиц.

Мы приведем здесь оценку двух членов взаимодействия — 4-го и 9-го. Для них получим ($\mathbf{L}$ — момент импульса электрона)

$$\Delta E_4 = \frac{\hbar}{2} (\mathbf{\Omega \Sigma}) \tag{4.8.43}$$

и

$$\Delta E_9 = \mp \frac{3\gamma M\hbar}{2mc^2r^3} (\mathbf{L\Sigma}). \tag{4.8.44}$$

Последний эффект можно охарактеризовать как появление эффективного квазимагнитного (вращательного) гравитационного поля из первоначально заданного поля Шварцшильда за счет движения в нем фермиона. Вклад этого эффекта в «вес» электрона ничтожно мал даже при больших скоростях:

$$\frac{\Delta E_9}{mc^2} \approx 10^{-26}. \tag{4.8.45}$$

Конечно, применение уравнения Паули при этих скоростях незаконно, так как мы опустили при выкладках ряд членов, которые будут тогда гораздо более заметными, чем малые гравитационные эффекты; однако такой анализ может быть полезен в иллюстративных целях.

При анализе аналогии между гравитацией и электромагнетизмом следует помнить, что существует несколько ее аспектов. Так, из уравнений (4.8.7), (4.8.11) и (4.8.12) следует заключение об аналогии между величинами C_μ и A_μ, $H_{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$, так что в эту схему не входят γ-матрицы или метрический тензор. Последние тогда можно назвать «субпотенциалами» гравитационного поля, так же, как это следует сделать при анализе грави-электромагнитной аналогии в следующем разделе. Однако в уравнениях (4.8.16) и (4.8.40) аналогия предстает в ином свете: магнитной индукции $\mathbf{B}$ уподобляется вектор $\mathbf{\Omega}$ (ротор b_i), а электрической напряженности — вектор $\mathbf{g}$ (градиент ньютоновского потенциала, ускорение свободного падения). Такой подход отвечает представлениям об указанной аналогии в случае слабого поля.

Следует указать также на разную природу членов, в которых фигурирует спин электрона и его собственный магнитный момент. В первом случае (4-й член) эффект обязан наличию в лагранжиане фермионного поля матричного вектора C_μ; этот же вектор приводит к появлению спина и согласно теореме Нётер. Такое согласие подтверждает сделанный нами вывод о гравитационном происхождении собственного механического момента электрона с точки зрения общей теории относительности (безразлично, берем ли мы тетрадную или γ-матричную ее формулировку). Во втором случае, когда мы рассматриваем собственный магнитный момент электрона, эффект обязан собственно присутствию γ-матриц в лагранжиане, что имеет место и в традиционной частнорелятивистской записи теории. Собственный механический момент электрона в частнорелятивистской теории Дирака выводят обычно из несохранения в ней обычного орбитального момента; весьма близкие соображения используются и при анализе известного парадокса собственных значений скорости электрона (см., например, «Принципы квантовой механики» Дирака). Можно думать, что в общей теории относительности оба аспекта этой проблемы получают новое освещение.

Возвращаясь к выражению для квадрата эффективной массы (4.8.17), заметим, что присутствие в нем скалярной кривизны отражает факт нелинейности всякого фермионного поля ненулевой массы покоя (нелинейность вторичного происхождения), так как при отсутствии других полей уравнения Эйнштейна дают

$$R = \varkappa T_{\mathrm{F}} = \varkappa m\bar{\psi}\psi. \tag{4.8.46}$$

Вопросы нелинейности фермионных полей, априорно вводившейся рядом авторов, были подробно исследованы в общей теории относительности Родичевым и Шмутцером.

4.9. Естественная единая теория электромагнитного и фермионного полей

Распространим теперь программу перехода от самосогласованной системы двух полей к автоматически возникающему единому нелинейному полю со случая гравитации и электромагнетизма на случай электромагнетизма и заряженного фермионного поля (скорее всего, электронно-позитронного). В этом случае, конечно, наряду с двумя указанными полями может присутствовать и гравитационное поле; однако это существенно не изменит картины, и мы сейчас не будем вводить его явно, тем более, что соответствующее обобщение не составляет труда.

Как и в теорию Райнича — Уилера, мы не будем в естественную единую теорию электромагнитного и фермионного полей вводить какие-либо гипотезы, но ограничимся традиционной формулировкой теорий электромагнетизма Максвелла и спинорного поля Дирака.

Задача сводится в основном к разрешению уравнения Дирака:

$$i\gamma^{\mu}\psi_{,\mu} + eA_{\mu}\gamma^{\mu}\psi - m\psi = 0 \tag{4.9.1}$$

относительно электромагнитного потенциала A_{μ}. Попытки такого рода производились и ранее (Элизер, 1958; Растоджи и Вачаспати, 1959), причем авторы ограничивались рассмотрением одного лишь (4-компонентного) уравнения (4.9.1), игнорируя комплексно сопряженное уравнение, линейно независимое по отношению к (4.9.1):

$$-i\bar{\psi}_{,\mu}\gamma^{\mu} + eA_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu} - m\bar{\psi} = 0. \tag{4.9.2}$$

В этих попытках результат, естественно, содержал элемент произвола, так как среди 4 компонент уравнения (4.9.1) независимыми являются лишь 3, а определению подлежат 4 компоненты электромагнитного потенциала A_{μ}. Заметим, кроме того, что мы, вообще говоря, не вправе накладывать на 4-потенциал A_{μ} каких-либо калибровочных условий, не ограничивая при этом автоматически общности задания фермионного потенциала ψ. К тому же выражения для A_{μ}, полученные указанными авторами, отличаются неестественностью и громоздкостью, а путь их рассуждений — чрезмерной сложностью.

Прежде всего мы укажем самый простой способ разрешения уравнений (4.9.1) и (4.9.2) относительно A_{μ}. Действительно, умножая первое уравнение слева на $\bar{\psi}\gamma^{\nu}$, а второе — справа на $\gamma^{\nu}\psi$ и складывая полученные векторные равенства, получаем:

$$i\bar{\psi}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\psi_{,\mu} - i\bar{\psi}_{,\mu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\psi + eA_{\mu}\bar{\psi}(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}\gamma^{\nu})\psi - 2m\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi = 0. \tag{4.9.3}$$

Учитывая теперь обычное соотношение для γ-матриц

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}\cdot\mathrm{I}, \tag{4.9.4}$$

окончательно находим

$$A_{\mu} = \frac{g_{\mu\nu}}{e\bar{\psi}\psi}\left[\frac{i}{2}(\bar{\psi}_{,\lambda}\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu}\psi - \bar{\psi}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\psi_{,\lambda}) + m\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi\right]. \tag{4.9.5}$$

Таким образом, задача решена.

Полученное выражение для 4-потенциала, хотя и обладает необходимыми свойствами ковариантности и простоты, все же не вполне удобно для дальнейшего исследования ввиду знакопеременности стоящего в знаменателе скаляра $\bar{\psi}\psi$, что потребовало бы дополнительного рассмотрения вопроса о том, как ведет себя числитель при обращении знаменателя в нуль. Этого можно избежать, несколько модифицировав процедуру решения системы (4.9.1), (4.9.2) так, чтобы делить приходилось на заведомо положительно определенное выражение (а именно, на 4-мерный квадрат плотности тока), обращающееся в нуль лишь тогда, когда равняется нулю и делимое.

Предлагается умножить первое уравнение, (4.9.1), слева на $\bar{\psi}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}$, а уравнение (4.9.2) — справа на $\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu}\psi$. Тогда несложные преобразования дают

$$2eA_{\mu}(g^{\lambda\nu}j^{\mu} - g^{\mu\nu}j^{\lambda} + g^{\mu\lambda}j^{\nu}) = C^{\lambda\nu}, \tag{4.9.6}$$

где 4-мерный ток обозначен, как обычно, через

$$j^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi, \tag{4.9.7}$$

а тензор $C^{\lambda\mu}$ равен, по определению,

$$C^{\lambda\nu} = 2mg^{\lambda\nu}\bar{\psi}\psi + i(\bar{\psi}_{,\mu}\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu}\psi - \bar{\psi}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\psi_{,\mu}). \tag{4.9.8}$$

Умножая равенство (4.9.6) на j_ν и производя суммирование, находим:

$$2eA^{\lambda}\cdot j^{\nu}j_{\nu} = C^{\lambda\nu}\cdot j_{\nu}. \tag{4.9.9}$$

Иначе говоря,

$$A_{\mu} = C_{\mu\nu}j^{\nu}/2ej^{\alpha}j_{\alpha}. \tag{4.9.10}$$

На этом можно закончить первый этап построения естественной единой теории поля Максвелла — Дирака, аналогичный отысканию корня «максвелловского квадрата тензора напряженности» в теории Райнича — Уилера.

Мы сформулируем второй этап теории более декларативно, так как для практического решения проблем, по-видимому, проще рассматривать совершенно эквивалентную систему уравнений Максвелла и Дирака в их традиционной записи.

Потенциал электромагнитного поля A_μ, выраженный, согласно формулам (4.9.5) или (4.9.10), через фермионный потенциал ψ и его первые производные, следует подставить в уравнения Максвелла в форме

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}{}_{,\nu} &= -j^{\mu}, \\ F_{\mu\nu} &= A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \end{aligned} \tag{4.9.11}$$

Мы не имеем права пользоваться уравнениями электромагнетизма в форме Даламбера, где отброшена дивергенция 4-потенциала, поскольку, как мы уже говорили, в нашей теории с самого начала утрачена возможность калибровки электромагнитного потенциала — он *однозначно* определяется распределением фермионного поля ψ в пространстве и времени. Следующие отсюда уравнения довольно громоздки, и мы не будем их здесь приводить, хотя вывод их весьма прост. Это — уравнения третьего порядка, обладающие сильной нелинейностью (нелинейность как в числителе, так и в знаменателе, включающая в числителе и производные).

Исследование этих уравнений прежде всего показывает, что не могут существовать сферически симметричные статические поля Максвелла — Дирака, что, конечно, неудивительно, так как в этой теории электрон рассматривается настолько точно, насколько это допускает классическая физика (без вторичного квантования и учета радиационных и поляризационно-вакуумных эффектов), так что наличие у электрона спинового механического и магнитного моментов неизбежно запрещает существование сферически симметричных статических решений.

В такой теории, как и в естественной единой теории Райнича — Уилера, существует трудность при формулировке принципа экстремума действия. Можно указать условный выход из этого положения, сопряженный, однако, с отходом от традиционной теории. Именно, можно провести замену электромагнитного потенциала A_μ на ψ и производные $\psi_{,\mu}$, согласно (4.9.5) или (4.9.10), не в уравнениях Максвелла (4.9.11), а в лагранжиане взаимодействующих электромагнитного и фермионного полей:

$$\begin{aligned} L = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi_{,\mu} - \bar{\psi}_{,\mu}\gamma^{\mu}\psi) - \\ - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho}. \end{aligned} \tag{4.9.12}$$

Мы получим тогда *новую теорию*, уравнения которой будут уже не третьего (как в естественной единой теории) порядка, а четвертого, но зато к ней может быть последовательно применена теорема Нётер и предприняты попытки квантования в основном в тех же направлениях, в каких это делается в нелинейной с самого начала теории гравитации.

Если же ограничиваться традиционной естественной единой формой теории, то она полностью эквивалентна обычной «линейной» теории взаимодействующих полей, но ее нелинейность, возможно, позволит получить некоторые качественные данные о структуре электрона, которые, несомненно, содержатся в обычном взаимодействии электромагнитного и фермионного полей и теряются, когда мы пользуемся методом последовательных приближений.

Первые сообщения об этих результатах см. в наших работах (1964г, 1965е).

5. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ КАК АНАЛОГ ПОЛЯ МАКСВЕЛЛА

5.1. Аналогии в случае слабого поля

Мы уже имели возможность коснуться случая слабого гравитационного поля в § 3.2, сопоставляя теории тяготения Эйнштейна и Ньютона. Как там было показано, если положить

$$\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu} \equiv \mathfrak{g}^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} - y^{\mu\nu} \tag{5.1.1}$$

и потребовать выполнения ни к чему нас не обязывающего (когда поле действительно слабое) условия

$$y^{\mu\nu}{}_{,\,\nu} = 0, \tag{5.1.2}$$

то уравнения Эйнштейна приведутся к виду

$$\Box\, y_{\mu\nu} = 2\varkappa T_{\mu\nu}, \tag{5.1.3}$$

весьма сходному с видом уравнений Максвелла для потенциалов

$$\Box\, A_\mu = -j_\mu, \tag{5.1.4}$$

причем условие Лоренца

$$\mathbf{A}^{\mu}{}_{,\,\mu} = 0 \tag{5.1.5}$$

подобно условию Гильберта (5.1.2). Уравнения Максвелла мы взяли здесь в плоском мире и декартовых координатах (частная теория относительности).

Говоря о слабом гравитационном поле, всегда следует иметь в виду, что это соответствует не просто малой величине кривизны во всей рассматриваемой области, а возможности покрыть эту область единой системой координат, такой, чтобы метрический тензор всюду мало отличался от своих «галилеевых» значений (метрики плоского мира в декартовых координатах). Это соответствует, грубо говоря, тому, что кривизна мира в среднем должна быть равна нулю; иначе, если бы, например, она была сколь угодно малой, но повсюду одинаковой (например, положительной), то мир замыкался бы, и очевидно, что в одной и той же системе координат метрический тензор был бы весьма различен по своей величине, если только взять его в достаточно удаленных друг от друга точках.

С точностью до вторых степеней малой безразмерной величины $y_{\mu\nu}$ плотность скалярной кривизны (которой пропорционален гравитационный лагранжиан в теории Эйнштейна) равна

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\,R \equiv \mathbf{R} \cong &- y^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} - \frac{1}{2}\, y_{,\mu\nu}\delta^{\mu\nu} + \\ &+ \frac{1}{2}\, y^{\mu\nu} y_{,\mu\nu} - \frac{1}{2}\, y^{\alpha\beta} y_{\alpha\beta,\,\mu\nu}\delta^{\mu\nu} - \frac{1}{8}\, y_{,\mu} y_{,\nu}\delta^{\mu\nu} + \\ &+ \frac{1}{2}\, y_{,\mu} y^{\mu\nu}{}_{,\nu} - \frac{1}{4}\, y^{\alpha\beta}{}_{,\mu} y_{\alpha\beta,\nu}\delta^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, y^{\beta\nu}{}_{,\alpha} y_{\nu,\,\beta}^{\alpha} + O(y^3),\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

тогда как электромагнитный лагранжиан имеет соответствующий член вида

$$-\mathrm{L}_{em} = \frac{1}{4}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} \cong$$

$$\cong \frac{1}{2}\left\{A^{\alpha}{}_{,\nu} A_{\alpha,\mu}\delta^{\mu\nu} - \frac{1}{2} A^{\alpha}{}_{,\mu} A^{\mu}{}_{,\alpha}\right\} + \ldots . \tag{5.1.7}$$

Здесь, однако, можно усмотреть определенное сходство между выражениями (5.1.6) и (5.1.7), если не сопоставлять в электромагнитном случае никаких величин гравитационному «скаляру» $y \equiv y^{\alpha}{}_{\alpha}$, а в правой части (5.1.6) сделать замену

$$-\frac{1}{2} y^{\alpha\beta} y_{\alpha\beta,\,\mu\nu}\delta^{\mu\nu} = \left[-\frac{1}{2} y^{\alpha\beta} y_{\alpha\beta,\,\mu}\delta^{\mu\nu}\right]_{,\nu} + \frac{1}{2} y^{\alpha\beta}{}_{,\mu} y_{\alpha\beta,\,\nu}\delta^{\mu\nu}, \tag{5.1.8}$$

произведя соответствующее приведение подобных.

К аналогии между электромагнетизмом и гравитацией можно подойти и с другой точки зрения. Именно, можно сопоставлять друг другу 3-мерные формы уравнений полей. Тогда, если взять

$$A_i = -h_{0i}, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{3} h_{ii} \tag{5.1.9}$$

(мы приняли для гравитационных величин электромагнитные обозначения, не требующие пояснений) и определить далее

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \tag{5.1.10}$$

и

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{5.1.11}$$

так что, как и в электродинамике,

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \tag{5.1.12}$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \tag{5.1.13}$$

мы получим в качестве приближений для уравнений Эйнштейна

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -\varkappa\rho, \tag{5.1.14}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\varkappa\mathbf{S}, \tag{5.1.15}$$

$$G_{ik} = -\varkappa\cdot t_{ik}, \tag{5.1.16}$$

где латинские индексы пробегают пространственные значения (1, 2, 3). Первые два уравнения — (5.1.14) и (5.1.15) — можно назвать квазиэлектромагнитными. В них ρ — плотность массы, а $\mathbf{S}$ — плотность потока энергии источников гравитационного поля. Уравнения (5.1.16) представляют собой тензорную часть, в этой интерпретации не имеющую аналогии в электродинамике. Нужно сказать, что такие уравнения получаются лишь в том случае, если потребовать выполнения координатных условий и дополнительных условий

$$h_{i,\nu} = 0 \tag{5.1.17}$$

и

$$\sum_{i=1} h_{ii} = \frac{1}{2} h_{00}. \tag{5.1.18}$$

Эти условия являются, конечно, весьма сильными, так как наряду с тремя дифференциальными условиями (5.1.17) здесь налагаются условия алгебраические (5.1.18). Достоинством полученных уравнений является, однако, то их свойство, что из них следуют волновые уравнения, подобные электродинамическим. Здесь, впрочем, нужно сказать, что волновые уравнения получаются как раз для той части гравитационного поля, которая не имеет ничего общего с поперечной, так что аналогия носит достаточно формальный характер.

Приведенный вариант аналогии поможет нам перейти к новому критерию оценки аналогичных друг другу физических величин для полей. Возьмем уравнение геодезической:

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{ds^2} = -\Gamma^\mu_{00}(v^0)^2 - 2\Gamma^\mu_{0i}v^0v^i - \Gamma^\mu_{ij}v^iv^j. \tag{5.1.19}$$

Если, в соответствии со сказанным, учесть, что

$$\Gamma_{00,\,i} = 2E_i \tag{5.1.20}$$

и

$$\Gamma_{0i,\,j} = \varepsilon_{ijk}H_k + \frac{1}{2}h_{ij,\,0}, \tag{5.1.21}$$

то мы придем к следующему уравнению движения пробной частицы:

$$\frac{\partial^2 x^i}{ds^2} \cong 2\{E_iv^0 + [\mathbf{Hv}]_i\}\, v^0 + h_{ij,0}v^0v^j - \Gamma^i_{jk}v^jv^k. \tag{5.1.22}$$

Первые слагаемые в правой части — явный аналог силы Лоренца, последние же два члена можно интерпретировать как тензорные силы, не имеющие аналога в электродинамике.

Очевидно, понятие напряженности поля всегда должно связываться с движением частиц, на которые это поле может воздействовать. Если сила Лоренца записывается в виде правой части уравнений движения пробного заряда

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} \cong \frac{e}{m}E_{\mu\nu}v^\nu\delta^{\mu\alpha}, \tag{5.1.23}$$

то мы на этом основании говорим, что тензор $F_{\mu\nu}$ является напряженностью электромагнитного поля. Уравнения электромагнетизма имеют тогда вид равенства дивергенции этой напряженности плотности тока источников поля:

$$\mathrm{F}^{\nu\mu}{}_{,\,\nu} = \mathrm{j}^\mu. \tag{5.1.24}$$

Напрашивается вопрос: нельзя ли, хотя бы в приближении слабого гравитационного поля, привести уравнения Эйнштейна к виду

$$S^{\mu\nu\lambda}{}_{\lambda} = -\varkappa T^{\mu\nu}, \tag{5.1.25}$$

где $S^{\mu\nu\lambda}$ — напряженность гравитационного поля, определяющая движение пробных масс; иначе говоря, требуется, чтобы уравнение

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = -S_{\mu\nu\lambda}v^\nu v^\lambda g^{\mu\alpha} \tag{5.1.26}$$

совпадало с уравнением геодезической. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{1}{2}(S_{\mu\nu\lambda} + S_{\mu\lambda\nu})g^{\mu\alpha} = \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \tag{5.1.27}$$

и

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\cong S_{\mu\nu}{}^{\lambda}{}_{,\lambda}. \qquad (5.1.28)$$

Нетрудно показать, что именно такими свойствами обладает выражение

$$S_{\mu\nu\lambda}=\frac{1}{2}\left[h_{,\nu}\delta_{\mu\lambda}-h_{,\lambda}\delta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu,\lambda}+(a-1)h_{\mu\lambda,\nu}-\frac{a}{2}h_{\nu\lambda,\mu}\right], \qquad (5.1.29)$$

где a — произвольная постоянная, а малые величины $h_{\mu\nu}$,

$$h_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}-\delta_{\mu\nu}, \qquad (5.1.30)$$

удовлетворяют всегда допустимым координатным условиям

$$h^{\nu}_{\mu,\nu}=0, \qquad (5.1.31)$$

к которым, как и к условиям Гильберта, можно прийти простым бесконечно малым преобразованием. В этих координатах, однако, мы не сможем получить волновых уравнений для гравитационного поля.

Проведенное рассмотрение должно служить лишь иллюстрацией положения в общей теории относительности; мы покажем дальше, что аналогия между гравитацией и электромагнетизмом существует в такой полноте и на таком принципиальном уровне, что, конечно, приближение слабого поля играет здесь главным образом эвристическую роль. Нужно подчеркнуть, что вопрос о динамическом определении напряженности поля является центральным в этом подходе.

5.2. Интерпретация нелинейности гравитационного поля согласно Гупте и Папапетру

Как мы видели в начале предыдущего параграфа, уравнения гравитационного поля Эйнштейна в нулевом приближении совпадают с неоднородными уравнениями Даламбера для некоторого «потенциала» $y_{\mu\nu}$, причем источником служит тензор энергии-импульса других полей. Как показал Папапетру (1948), в точном, а не приближенном, случае имеет место совершенно аналогичное положение, с тем лишь отличием, что теперь в качестве источника выступает конструкция, включающая и гравитационную энергию [в интерпретации Папапетру (1948) и Гупты (1954, 1957)]. Мы выведем здесь соотношение Папапетру, чтобы увидеть, какое место в нашей классификации может занимать предложенное им выражение для энергии.

Работа Папапетру примыкает к тем исследованиям, в которых авторы брали комбинации симметричного тензора энергии-импульса негравитационных полей и канонического квазитензора гравитации, истолковывая величину, сводящуюся к спиновой доле гравитационной энергии, как энергию полной системы полей. Итак, задача состоит сейчас в переходе от несимметричной спиновой доли энергии к некоторой симметричной величине. Процедура такой симметризации была разработана Розенфельдом (1940) и Белинфанте (1939) и состоит в следующем.

В качестве строительного материала достаточно взять плотность обобщенного спина $\mathbf{M}_{\sigma}{}^{\alpha\tau}$, к дивергенции которой сводится и спиновая доля энергии. Исследование проводится с точки зрения необщековариантной теории, когда лагранжиан инвариантен лишь относительно аффинных преобразований (именно таков гравитационный лагранжиан Λ). В противном случае аппарат симметризации не работает. Так как мы исходим из частной теории относительности, то должны ввести соответствующую ей метрику — метрику плоского мира, причем достаточно взять ее в декартовых координатах (галилеевы значения), т. е. как $\delta_{\mu\nu}$. Очевидно, в равной мере можно было бы пользоваться двуметрическим формализмом, чтобы получить соотношения, ковариантные в смысле общих преобразований координат. При этом, задавая привилегированную систему (в которой вторая метрика имеет всюду галилеевы значения), мы либо должны ограничиться приближением слабого поля (см. предыдущий параграф), либо ввести глобальный закон, определяющий из чисто физических соображений (распределение полей и вещества во всем мире и во все времена) эту метрику, т. е. галилееву систему (одно сводится к другому).

Самую величину спиновой доли энергии $U_\mu{}^\nu$, которую мы симметризуем, писать вовсе не обязательно, так как она сводится к дивергенции от $M_\sigma{}^{\alpha\tau}$. Тогда, пользуясь неопределенными коэффициентами, запишем выражение для симметризованной величины, которую обозначим через $\theta^{\alpha\beta}$:

$$\theta^{\alpha\beta} = aM_{\sigma,}{}^{\alpha\beta}{}_{\tau}\delta^{\sigma\tau} + bM_{\sigma,}{}^{\beta\alpha}{}_{\tau}\delta^{\sigma\tau} + cM_{\tau,}{}^{\alpha\sigma}{}_{\sigma}\delta^{\beta\tau} +$$

$$+ dM_{\tau,}{}^{\sigma\alpha}{}_{\sigma}\delta^{\beta\tau} + eM_{\tau,}{}^{\beta\sigma}{}_{\sigma}\delta^{\beta\tau} + fM_{\tau,}{}^{\sigma\beta}{}_{\sigma}\delta^{\alpha\tau}, \tag{5.2.1}$$

или, так как

$$M_{\sigma,}{}^{\alpha\beta}{}_{\alpha} = -U_\sigma{}^\beta, \tag{5.2.2}$$

$$\theta^{\alpha\beta} = aM_{\sigma,}{}^{\alpha\beta}{}_{\tau}\delta^{\sigma\tau} + bM_{\sigma,}{}^{\beta\alpha}{}_{\tau}\delta^{\sigma\tau} + cM_{\tau,}{}^{\alpha\sigma}{}_{\sigma}\delta^{\beta\tau} -$$

$$- dU_\tau{}^\alpha\delta^{\beta\tau} + eM_{\tau,\ \sigma}\delta^{\alpha\tau} - fU_\tau{}^\beta\delta^{\alpha\tau}. \tag{5.2.3}$$

Из требования симметрии

$$\theta^{\alpha\beta} = \theta^{\beta\alpha} \tag{5.2.4}$$

вытекает

$$d = f, \quad a = b, \quad c = e, \tag{5.2.5}$$

а из закона сохранения

$$\theta^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0, \tag{5.2.6}$$

при учете сохранения спиновой доли энергии

$$U^\beta_{\sigma,\beta} = 0, \tag{5.2.7}$$

постоянства галилеевой метрики и переставимости частных производных друг с другом,—

$$a + f = 0, \quad b + e = 0. \tag{5.2.8}$$

Сравнивая значения коэффициентов (5.2.5) и (5.2.8), находим с точностью до произвольного (формально) выбора a:

$$a = b = -f = -e = -c = -d. \tag{5.2.9}$$

Величину a нетрудно окончательно установить, исходя из тех соображений, что доминирующую роль в «симметризованном» выражении (5.2.3) играет *полусумма* (обычная симметризация) спиновой доли энергии, взятой с обратным знаком; отсюда следует

$$a = -\frac{1}{2}, \tag{5.2.10}$$

и окончательно

$$\theta^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[U_\tau{}^\alpha\delta^{\beta\tau} + U_\tau{}^\beta\delta^{\alpha\tau} + M_{\sigma,\ \tau}^{\ \alpha\beta}\delta^{\sigma\tau} +$$

$$+ M_{\sigma,\ \tau}^{\ \beta\alpha}\delta^{\sigma\tau} - M_{\tau,\ \ \sigma}^{\ \alpha\sigma}\delta^{\beta\tau} - M_{\tau,\ \ \sigma}^{\ \beta\sigma}\delta^{\alpha\tau}], \tag{5.2.11}$$

или

$$\theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[(M_\tau^{\ \sigma\alpha} + M_\tau^{\ \alpha\sigma})\delta^{\beta\tau} + (M_\tau^{\ \sigma\beta} + M_\tau^{\ \beta\sigma})\delta^{\alpha\tau} - (M_\tau^{\ \alpha\beta} + M_\tau^{\ \beta\alpha})\delta^{\sigma\tau}]_{,\sigma}. \tag{5.2.12}$$

Из последнего выражения видно, что в случае инвариантного лагранжиана (в смысле общих преобразований!) и отсутствия в нем вторых производных потенциалов величина $\theta^{\alpha\beta}$ должна тождественно обратиться в нуль ввиду антисимметрии плотности обобщенного спина: $M_\tau{}^{\sigma\alpha} + M_\tau{}^{\alpha\sigma} = 0$. Однако именно в случае нековариантного гравитационного лагранжиана

$$\Lambda = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}g^{\alpha\beta}(\Gamma^\mu_{\alpha\nu}\Gamma^\nu_{\beta\mu} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\mu\nu}) \tag{5.2.13}$$

методика Розенфельда — Белинфанте срабатывает. Нам достаточно взять уже известное выражение для плотности обобщенного спина (3.7.12):

$$M_{\Lambda\sigma}^{\ \ \alpha\tau} = \frac{1}{2\varkappa}(-\delta_\sigma{}^\tau g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \delta_\sigma{}^\tau g^{\alpha\mu}\Gamma^\nu_{\mu\nu} + 2g^{\tau\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu} - \delta_\sigma{}^\alpha g^{\tau\nu}\Gamma^\lambda_{\nu\lambda} - g^{\tau\alpha}\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}) \tag{5.2.14}$$

и подставить в (5.2.12). Заметим сначала, что

$$M_{\Lambda\sigma}^{\ \ \alpha\tau} + M_{\Lambda\sigma}^{\ \ \tau\alpha} = \frac{1}{2\varkappa}(-\delta_\sigma{}^\tau g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \delta_\sigma{}^\alpha g^{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\mu\nu} +$$

$$+ 2g^{\tau\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu} + 2g^{\alpha\nu}\Gamma^\tau_{\sigma\nu} - 2g^{\alpha\tau}\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}). \tag{5.2.15}$$

Тогда

$$\theta_\Lambda{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\varkappa}(-2\delta^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + 4\delta^{\beta\tau}g^{\alpha\nu}\Gamma^\sigma_{\tau\nu} - 2\delta^{\beta\tau}g^{\alpha\sigma}\Gamma^\lambda_{\tau\lambda} -$$

$$- 2\delta^{\alpha\tau}g^{\beta\sigma}\Gamma^\lambda_{\tau\lambda} + 2\delta^{\sigma\tau}g^{\alpha\beta}\Gamma^\lambda_{\tau\lambda})_{,\sigma}, \tag{5.2.16}$$

и, ввиду тождеств

$$\delta^{\sigma\tau}g^{\alpha\beta}{}_{,\tau} - \delta^{\alpha\tau}g^{\beta\sigma}{}_{,\tau} - \delta^{\beta\tau}g^{\alpha\sigma}{}_{,\tau} = 2\delta^{\beta\tau}g^{\alpha\omega}\Gamma^\sigma_{\omega\tau} \tag{5.2.17}$$

и

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = -g^{\sigma\nu}{}_{,\nu}, \tag{5.2.18}$$

мы получим окончательно

$$g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma\tau}\delta^{\sigma\tau} + g^{\sigma\tau}{}_{,\sigma\tau}\delta^{\alpha\beta} - g^{\alpha\sigma}{}_{,\sigma\tau}\delta^{\beta\tau} - g^{\beta\tau}{}_{,\sigma\tau}\delta^{\alpha\sigma} = 2\varkappa\theta_\Lambda^{\ \alpha\beta}, \tag{5.2.19}$$

— известное соотношение Папапетру.

При этом обычно говорят, что так как

$$T_{f\sigma}^{\ \alpha} + t_{\Lambda\sigma}^{\ \alpha} = -U_{\Lambda\sigma}^{\ \alpha}, \tag{5.2.20}$$

то выражение $\theta_\Lambda^{\alpha\beta}$, стоящее справа, имеет смысл «симметризованного псевдотензора энергии полной системы полей», в соответствии с эйнштейновской терминологией, которую мы уже критиковали ранее. Так или иначе, но соотношение (5.2.19) замечательно своей простотой, тем более, что оно является *строгим*, а не приближенным.

Трудно, однако, утверждать, что смысл его состоит в том, что оно представляет собой уравнение гравитационного поля. Скорее,— это просто определение величины, стоящей в правой части, через написанную в левой части (5.2.19) сумму вторых производных плотности контравариантного метрического тензора. В гармонических координатах

$$\mathfrak{g}^{\sigma\tau}_{,\tau} = 0, \tag{5.2.21}$$

и «уравнение» сводится к уравнению Даламбера:

$$\Box \mathfrak{g}^{\alpha\beta} \equiv - \mathfrak{g}^{\alpha\beta}_{,\sigma\tau}\,\delta^{\sigma\tau} = - 2\varkappa \theta_{\Lambda}{}^{\alpha\beta}. \tag{5.2.22}$$

Интерпретация, которую предложил Гупта (1954, 1957) для этого уравнения, состоит в том, что гравитационное поле подобно всем другим физическим полям, обладающим источниками (например, электромагнитному), и различие исчерпывается, во-первых, тензорным рангом 2 его потенциалов и, во-вторых, а это — главное, тем обстоятельством, что источником гравитационного поля является энергия не только других полей и вещества, но и его самого. В этом, по мнению Гупты, физическая причина нелинейности гравитации, порождающей самое себя, взаимодействующей сама с собой и, очевидно, не допускающей простой суперпозиции решений.

В связи с этим Гупта предложил новый метод вывода уравнений Эйнштейна с помощью итераций, когда гравитационный лагранжиан, начиная с нулевого приближения, характерного для всех полей спина 2 [см. (Фирц и Паули, 1939)], последовательно дополняется такими членами, которые обеспечивают появление в уравнениях (обычно записываемых в правой части в качестве источников) компонент гравитационного симметризованного «псевдотензора». Ясно, что член приближения n в лагранжиане гравитации, содержащий произведения $n+1$ потенциалов или их производных (имеются в виду обычно потенциалы $y_{\mu\nu}$), дает при варьировании члены, являющиеся произведениями n величин, тогда как следующее из этого же приближения выражение для энергии будет иметь «степень» $n+1$. Таким образом, требуя, чтобы члены, соответствующие такой энергии, оказались в правой части уравнений, мы должны для удовлетворения уравнений предположить присутствие в них и слева членов степени $n+1$, а значит, и включения в лагранжиан произведений $n+2$ величин. Это дает нам уже $n+1$ приближение, и так далее. Такая процедура требует определенной осторожности, так как сильно зависит от выбора нулевого приближения лагранжиана, и заслуживает глубокого анализа. Исследования в этом направлении проводили Гупта (1957) и Гальперн (1963).

В трактовке Гупты аналогия между гравитацией и электромагнетизмом исчерпывается уравнениями этих полей и не касается динамики пробных частиц, несущих соответствующие заряды. Таким образом, эта аналогия остается довольно-таки формальной, и мы направим свои поиски по другому пути, начав с динамического определения понятий потенциала и напряженности гравитационного поля.

5.3. Тензор относительной напряженности гравитационного поля

Обратимся к некоторым выводам, полученным в § 3.5. Мы использовали там параметр v, изменяющийся вдоль геодезических мировых линий пробных частиц (канонический параметр), и параметр u, нумерующий самые геодезические в их семействе. Тогда 4-скорость записывается как (3.5.19)

$$v^{\mu} = \frac{d_v x^{\mu}}{dv}. \tag{5.3.1}$$

Вместо бесконечно малой величины $d_u x^{\mu}$, использовавшейся в § 3.5, мы предпочтем здесь опираться на конечный вектор

$$l^{\mu} = \frac{d_u x^{\mu}}{du}, \tag{5.3.2}$$

который можно было бы называть вектором удельного координатного расстояния между геодезическими (подчеркнем, что это — именно координатное расстояние, а не расстояние метрическое!). Такое описание движения более всего соответствует методу теории сплошных сред, но, конечно, может без всяких оговорок применяться и в случае двух отдельных пробных частиц. Вектор удельной относительной скорости двух частиц, удаленных друг от друга на du, получается при делении выражения (3.5.20) на du; результат мы также обозначим здесь через V^{μ}, что не должно вызвать недоразумений:

$$V^{\mu} \overset{\mathrm{Def}}{=} \frac{D_v l^{\mu}}{dv}. \tag{5.3.3}$$

Этот вектор обладает важным свойством

$$V^{\mu} = \frac{D_v}{dv}\frac{d_u x^{\mu}}{du} = \frac{D_u}{du}\frac{d_v x^{\mu}}{dv} = \frac{D_u v^{\mu}}{du}. \tag{5.3.4}$$

Мы учитываем здесь то обстоятельство, что дифференциалы независимых переменных постоянны в смысле зависимости от самих этих переменных (будучи, конечно, бесконечно малыми в обычном для анализа смысле). Мы можем тогда написать уравнение девиации геодезических в хорошо известном виде:

$$\frac{D_v V^{\mu}}{dv} = R^{\ \mu}_{.\rho\nu\lambda} v^{\rho} v^{\nu} V^{\lambda}. \tag{5.3.5}$$

Конечно, при этом предполагается, что действует и уравнение геодезической для v^{μ}, как это показано в § 3.5:

$$\frac{D_v v^{\mu}}{dv} = 0. \tag{5.3.6}$$

Там же мы видели, что вдоль направления изменения v имеет место закон

$$v_{\mu} V^{\mu} = \mathrm{const}, \tag{5.3.7}$$

который согласуется и с (5.3.5) в силу свойства симметрии тензора кривизны Римана — Кристоффеля. Кроме того, имеет место цепочка равенств:

$$v_{\mu} V^{\mu} = v_{\mu} \frac{D_v l^{\mu}}{dv} = \frac{d_v}{dv}(v_{\mu} l^{\mu}) = v_{\mu} \frac{D_u v^{\mu}}{du} = \frac{1}{2}\frac{D_u}{du}(v_{\mu} v^{\mu}), \tag{5.3.8}$$

из которой следует, что

$$v_{\mu} V^{\mu} = 0. \tag{5.3.9}$$

В самом деле, если рассматриваются (все) не изотропные геодезические (временноподобные), то параметр v можно положить равным собственному времени (интервалу) s, и

$$v_{\mu} v^{\mu} = 1; \tag{5.3.10}$$

если же (опять-таки все!) геодезические, которые мы рассматриваем, изотропны, то для канонического параметра v:

$$v_{\mu} v^{\mu} = 0. \tag{5.3.11}$$

В обоих случаях мы приходим к (5.3.9).

Пусть теперь одновременно присутствуют как гравитационное, так и электромагнитное поле. Если взять две пробные частицы, одна из которых нейтральна, а другая заряжена, мы получим для их относительного движения уравнение девиации с силой Лоренца:

$$m_0 \frac{D_v V^\mu}{dv} = m_0 R^{\mu}_{.\rho\nu\lambda} v^\rho v^\nu l^\lambda + eF^{\mu}_{.\nu} v^\nu. \tag{5.3.12}$$

Пусть даны какие-то уравнения движения, где в правой части записаны силы, а в левой — произведение массы на ускорение. В структуру сил входят величины трех типов: обобщенные заряды (свой для каждого поля), которые имманентно присущи рассматриваемым частицам (поскольку частица сохраняет свою индивидуальность); характеристики движения частиц («абсолютные» скорости v^μ, а также относительные V^μ); наконец, величины, вообще говоря, меняющиеся от одной точки пространства к другой, но независимые от характеристик частиц. Последние величины образуют с математической точки зрения *поле*; физически же мы называем их *напряженностями* соответствующих полей. Это и есть динамическое определение понятия напряженности. В этом смысле наблюдаемыми величинами для полей являются их напряженности, и часто уравнения полей формулируются как дифференциальные уравнения (*первого порядка*) для напряженностей.

Возвращаясь к уравнению (5.3.12), можно поэтому сказать, что в нем фигурируют два типа напряженностей — $F_{\mu\nu}$ и $R^{\mu}_{.\alpha\beta\gamma}$. Первая умножается на электрический заряд e и называется напряженностью электромагнитного поля; вторая умножается на массу покоя частицы m_0 (предполагалось, что эта масса одинакова для обеих пробных частиц, чтобы не усложнять вопроса) и может быть названа напряженностью гравитационного поля. Если напряженность где-то обращается в нуль, то мы говорим, что там нет и соответствующего поля. Это обстоятельство как раз характерно для гравитации, которая существует лишь при наличии кривизны, а существование или отсутствие кривизны — факт инвариантный, так что и существование гравитационного поля не зависит от выбора систем координат. Мы должны сказать, что такое утверждение не имеет никакого отношения к эйнштейновскому принципу эквивалентности (лифт Эйнштейна), так как этот принцип говорит о ненаблюдаемости гравитационного поля локально в свободно падающей системе, а не о его действительном там исчезновении. В самом деле, кривизна не исчезает и в падающем лифте; однако те опыты, которые связаны лишь с измерением величин, включающих только метрический тензор и символы Кристоффеля, дадут точно те же результаты, которые они дали бы в плоском мире в инерциальной системе отсчета. Если же мы пожелаем включить в число измеряемых величин вторые производные метрического тензора — иначе говоря, компоненты тензора кривизны или напряженности гравитационного поля, то наш эксперимент неизбежно станет *нелокальным*. Здесь автор хотел бы присоединиться к позициям В. А. Фока и Дж. Л. Синга в отношении оценки указанного принципа эквивалентности. Совсем другое дело — иной принцип эквивалентности, принцип Галилея — Этвёша — Эйнштейна, утверждающий равенство (пропорциональность) инертной и тяготеющей масс. Заметим, кроме того, что необходимость использования в общей теории относительности для определения понятия напряженности поля не просто уравнения геодезической, а девиации диктуется тем важным обстоятельством, что в этой теории гораздо более содержательно не движение относительно системы координат (уравнение геодезической), а относительное движение самих тел (девиация). Это соответствует духу общей теории относительности, хотя автор и не испытывает большой потребности подходить к этим вопросам с предельной радикальностью, а именно брать «относительное гравитационное поле» в духе Рылова. Подход Рылова представляет большой интерес, но ни круг проблем, на котором мы сосредоточили здесь внимание, ни объем этой книги не позволяют нам подробно остановиться на нем.

Для анализа понятия напряженности гравитационного поля полезно вспомнить результаты квадрирования уравнения Дирака (§ 4.9), где совершенно недвусмысленно комбинировались друг с другом тензор $F_{\mu\nu}$ и матричный тензор $H_{\mu\nu}$, полностью эквивалентный тензору кривизны Римана — Кристоффеля, как там было показано. Аналогичным образом комбинировались и величины A_μ и C_μ, которые было бы странно не отнести к потенциалам полей.

Мы увидим в дальнейшем, что интерпретация тензора кривизны $R_{\mu\alpha\beta}$ как напряженности гравитационного поля подтверждается как формой уравнений гравитации, получаемых из уравнений Эйнштейна и эквивалентных им, так и вариационным принципом, из которого могут быть выведены эти новые уравнения. При этом оказывается возможным интерпретировать в рамках механики и теории гравитации (без спиноров) символы Кристоффеля как компоненты гравитационного потенциала, хотя более стройным подходом несомненно является отождествление с гравитационным потенциалом матричного вектора C_μ.

Проводя аналогию между гравитацией и электромагнетизмом, нельзя обойти и вопрос о материальном единстве обоих полей. Материальность какого-либо поля можно, с одной стороны, охарактеризовать через способность этого поля взаимодействовать с другими полями, в частности, переносить энергию; с другой стороны, объективный характер существования гравитационного поля не вызывает сомнений хотя бы в смысле инвариантности существования кривизны. Но ведь через гравитационное поле осуществляется перенос энергии в астрономических масштабах [1] — например, в явлении приливов энергия движения Луны передается земным объектам через гравитацию; аналогичные опыты могут без труда выполняться в земных лабораториях по методам Этвёша. Ясно, что с точки зрения близкодействия для того, чтобы переносить энергию, поле само должно ею обладать; объект же, обладающий энергией, а значит, и массой, несомненно материален. Этот факт подкрепляет надежды на установление тесных связей между структурами гравитационного и других физических полей, поскольку их фундаментальная природа едина. А этим в дальнейшем могут поддерживаться надежды на успехи распространения теории тяготения и на микромир, в область квантовых [2] полей. Определенным шагом в этом направлении является выяснение важной роли гравитации в теории фермионных полей, по-видимому, более тесно связанных с квантовой физикой, чем даже электромагнитное.

5.4. Квазимаксвелловские уравнения гравитационного поля

Основой для формулировки теории поля мы будем здесь считать понятие напряженности; с его помощью конструируются лагранжианы полей, пишутся уравнения поля и уравнения движения пробных частиц, несущих соответствующий полю заряд. Понятие напряженности лежит в основе физического эксперимента, обнаруживающего эффекты, обязанные этому полю. В качестве иллюстрации и образца для дальнейших построений мы

[1] Мы обсуждали этот вопрос подробнее в начале § 3.8.

[2] Нам кажется, что употребляемый чаще термин «квантованные поля» менее удачен, чем «квантовые поля». «Квантованность» подразумевает операцию квантования, т. е. переход от классической теории к квантовой. В природе материя подчинена прямо противоположной иерархии: в основе известных нам процессов и объектов лежит квантовый мир, определенное наслоение которого дает в порядке качественного перехода при накоплении количества классический мир — «макромир». Таким образом, «квантование» — не более чем вынужденная процедура, приводящая к успешным результатам лишь потому, что при обратном (естественном) процессе не утрачивается полностью информация о закономерностях микромира.

вновь укажем здесь соответствующие соотношения для случая электромагнетизма: лагранжиан

$$\mathrm{L}_{\mathrm{em}} = -\frac{\sqrt{-g}}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}; \tag{5.4.1}$$

уравнения с циклической перестановкой индексов у градиента напряженности (не следующие из принципа действия для этого лагранжиана)

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\nu\lambda;\mu} + F_{\lambda\mu;\nu} = 0; \tag{5.4.2}$$

уравнения в форме дивергенции напряженности, вытекающие из вариационного принципа,

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -j^{\mu}; \tag{5.4.3}$$

уравнения движения для пробного заряда e с массой m_0

$$m_0 \frac{D_v v^{\mu}}{dv} = eF^{\mu}_{\cdot\nu} v^{\nu}; \tag{5.4.4}$$

те же уравнения, но для распределения зарядов с плотностью массы ρ_m и плотностью заряда ρ_e

$$\rho_m \frac{D_v v^{\mu}}{dv} = \rho_e F^{\mu}_{\cdot\nu} v^{\nu} \equiv F^{\mu}_{\cdot\nu} j^{\nu}, \tag{5.4.5}$$

причем плотность заряда-тока, фигурирующая в уравнениях (5.4.3) и (5.4.5), равна

$$j^{\mu} = \rho_e v^{\mu} \tag{5.4.6}$$

и вследствие уравнений (5.4.3) удовлетворяет закону сохранения

$$j^{\mu}{}_{;\mu} = 0. \tag{5.4.7}$$

Умножая уравнения (5.4.2) на $F^{\mu\nu}$, получаем

$$F_{\mu\nu;\lambda} F^{\mu\nu} = 2F^{\mu\nu} F_{\mu\lambda;\nu}, \tag{5.4.8}$$

что после тождественного преобразования дает

$$\left(\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \delta_{\lambda}{}^{\nu} - F^{\mu\nu} F_{\mu\lambda}\right)_{;\nu} = -F_{\mu\lambda} F^{\mu\nu}{}_{;\nu}; \tag{5.4.9}$$

если же вспомнить выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля (4.2.2)

$$T_{\mathrm{em}}{}^{\nu}{}_{\lambda} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \delta_{\lambda}{}^{\nu} - F^{\mu\nu} F_{\mu\lambda} \tag{5.4.10}$$

и воспользоваться уравнениями (5.4.3), то мы придем к уравнению

$$T_{\mathrm{em}\,\lambda;\nu} = F_{\mu\lambda} j^{\mu}, \tag{5.4.11}$$

или, подставляя произведение $F_{\mu\lambda} j^{\mu}$ из уравнений движения (5.4.5),

$$T_{\mathrm{em}}{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\rho_m \frac{D_v v^{\mu}}{dv}. \tag{5.4.12}$$

Так как абсолютная производная может быть записана в виде

$$\frac{D_v v^{\mu}}{dv} = v^{\mu}{}_{;\nu} v^{\nu}, \tag{5.4.13}$$

то, если принять закон сохранения массы в очевидной форме

$$(\rho_m v^{\nu})_{;\nu} = 0, \tag{5.4.14}$$

мы получим, наконец, закон сохранения энергии для системы электромагнитного поля и зарядов:

$$(T_{\mathrm{em}}{}^{\mu\nu} + T_p{}^{\mu\nu})_{;\nu} = 0, \tag{5.4.15}$$

где введено обозначение

$$T_p{}^{\mu\nu} = \rho_m v^\mu v^\nu \tag{5.4.16}$$

для тензора энергии-импульса некогерентной «пылевой» материи.

К сожалению, этой простой схеме невозможно следовать, не нарушая последовательности изложения. Поэтому приходится начать с уравнений движения, принимающих в случае гравитации форму

$$m_0 \frac{D_v V^\mu}{dv} = m_0 R_{\cdot\,\nu\lambda\rho} v^\nu v^\lambda l^\rho, \tag{5.4.17}$$

в уже обсуждавшемся смысле аналогичную форме уравнений (5.4.4); их можно привести и к виду, подобному виду уравнений (5.4.5):

$$\rho_m \frac{D_v V^\mu}{dv} = \rho_m R^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\rho} v^\nu v^\lambda l^\rho. \tag{5.4.18}$$

Так как на этом основании мы можем интерпретировать тензор кривизны Римана — Кристоффеля в качестве напряженности гравитационного поля (по крайней мере, как его относительную напряженность), то очевидно, что аналогом уравнений (5.4.2) являются тождества Бианки

$$R^{\sigma}_{\cdot\tau\mu\nu;\lambda} + R^{\sigma}_{\cdot\tau\nu\lambda;\mu} + R^{\sigma}_{\cdot\tau\lambda\mu;\nu} = 0. \tag{5.4.19}$$

Заметим, что и уравнения (5.4.2) оказываются тождествами, если предполагать, что электромагнитная напряженность имеет вид ротора потенциала

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} \tag{5.4.20}$$

точно так же, как и тождественное выполнение уравнений (5.4.19) имеет место, лишь когда мы интерпретируем тензор $R^{\sigma}_{\cdot\tau\mu\nu}$ как обобщенный ротор для символов Кристоффеля

$$R^{\mu}_{\cdot\,\nu\lambda\rho} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}, \tag{5.4.21}$$

или, еще лучше, определим его с помощью ротора матричного вектора (4.8.3) по формуле (4.8.5) [1].

Итак, аналогом уравнений (5.4.3) должны быть уравнения с дивергенцией тензора кривизны в виде

$$R^{\sigma}_{\cdot\tau\mu\nu;\sigma} = Q_{\tau\mu\nu}, \tag{5.4.22}$$

где остается определить величину тензора «гравитационного тока» $Q_{\tau\mu\nu}$. Для этого мы прежде всего заметим, что, свертывая один раз тождества Бианки (5.4.19), нетрудно получить тождества

$$R^{\sigma}_{\cdot\tau\mu\nu;\sigma} = R_{\tau\mu;\nu} - R_{\tau\nu;\mu}. \tag{5.4.23}$$

Если же теперь, опираясь на теорию гравитации Эйнштейна, подставить сюда ее уравнения в форме

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right), \tag{5.4.24}$$

[1] Иначе говоря, для вывода этих уравнений недостаточно учитывать лишь алгебраические свойства симметрии тензора кривизны, но уже излишне учитывать выражение символов Кристоффеля через метрический тензор и его производные.

то мы придем как раз к квазимаксвелловским уравнениям (5.4.22), где

$$Q_{\tau\mu\nu} = \varkappa\left[T_{\tau\nu;\mu} - T_{\tau\mu;\nu} - \frac{1}{2}\left(g_{\tau\nu}T_{,\mu} - g_{\tau\mu}T_{,\nu}\right)\right]. \tag{5.4.25}$$

Замечательно, что этот гравитационный ток, равно как и электромагнитный ток j^{μ}, удовлетворяет уравнениям сохранения

$$Q^{\tau\mu\nu}{}_{;\tau} = 0 \tag{5.4.26}$$

в силу тождеств

$$R^{\sigma\tau}_{\cdot\cdot\,\mu\nu;\sigma;\tau} \equiv 0, \tag{5.4.27}$$

которые легко доказать следующим образом. Учтем в левой части (5.4.27) антисимметрию тензора кривизны по первым двум индексам. Мы получим тогда

$$R^{\sigma\tau}_{\cdot\cdot\,\mu\nu;\sigma;\tau} = \frac{1}{2}\left(R^{\sigma\tau}_{\cdot\cdot\,\mu\nu;\sigma;\tau} - R^{\sigma\tau}_{\cdot\cdot\,\mu\nu;\tau;\sigma}\right), \tag{5.4.28}$$

выражение, где взято альтернирование по индексам, обозначающим ковариантное дифференцирование. Поэтому правило (1.76) дает

$$2R^{\sigma\tau}_{\cdot\cdot\,\mu\nu;\sigma;\tau} = R^{\alpha\tau}_{\cdot\cdot\,\mu\nu}R_{\alpha\cdot\sigma\tau}^{\;\;\sigma} + R^{\sigma\alpha}_{\cdot\cdot\,\mu\nu}R_{\alpha\cdot\sigma\tau}^{\cdot\,\tau} + R^{\sigma\tau}_{\cdot\cdot\,\alpha\nu}R^{\alpha}_{\cdot\mu\sigma\tau} + R^{\sigma\tau}_{\cdot\cdot\,\mu\alpha}R^{\alpha}_{\cdot\nu\sigma\tau}, \tag{5.4.29}$$

и после приведения подобных с учетом алгебраических свойств тензора Римана — Кристоффеля правая часть тождественно обращается в нуль, подтверждая тем самым справедливость утверждения (5.4.27). Итак, мы нашли полное подобие между всеми записанными в начале этого параграфа уравнениями электродинамики и уравнениями гравитации[1], исключая только самую правую часть уравнения (5.4.5), так как распространение на нее этой аналогии потребовало бы выполнения равенства

$$\rho_m \frac{D_v V^{\mu}}{dv} = R^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\rho}Q^{\nu\lambda\rho}, \tag{5.4.30}$$

не вытекающего из формы тензора энергии-импульса для некогерентной материи (пыли), обычно используемого в качестве $T_{\mu\nu}$ в уравнениях Эйнштейна как выражения, наиболее простого и более всего подобного конструкции плотности электромагнитного тока (5.4.6). Таким образом, имеет место альтернатива: либо следовать во всех деталях теории Эйнштейна, пользуясь выражением (5.4.25) для $Q_{\tau\mu\nu}$, либо взять, согласно (5.4.18) и гипотезе (5.4.30), для $Q_{\tau\mu\nu}$ выражение

$$Q^{\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2}\rho_m v^{\nu}\left(v^{\lambda}l^{\rho} - v^{\rho}l^{\lambda}\right) \tag{5.4.31}$$

[или подобное ему с точностью до члена, обращающегося в нуль в результате умножения на тензор кривизны в (5.4.17); последнее, однако, противоречило бы уравнениям (5.4.22)].

Уравнения (5.4.19) и (5.4.22) замечательны своим сходством с уравнениями Максвелла. Они квазилинейны относительно тензора Римана — Кристоффеля — напряженности гравитационного поля, так как содержат, вследствие применения ковариантного дифференцирования, переменные

[1] Близкие идеи, не выраженные, однако, систематическим образом в виде приведенных здесь систем уравнений (5.4.22), (5.4.25) и (5.4.27), высказывались ранее Маттом (1953) и Румером (1962). Следует подчеркнуть блестящий математический анализ гравитационно-электромагнитной аналогии в статье Матта, которой недостает лишь перевода на язык формализма хронометрических инвариантов Зельманова для наиболее полного сопоставления электрической и магнитной напряженностей и соответствующих величин гравитационного поля. См. также очень интересный подход Петрова (1967).

коэффициенты. При этом потенциал гравитационного поля представляет собой собрание компонент символов Кристоффеля 2-го рода, а связь его с метрическим тензором здесь просто игнорируется[1]. Если перейти от этого определения потенциала к тому, которое мы получили в § 4.8 в процессе квадрирования уравнения Дирака (4.8.7), эти соображения представляются заслуживающими внимания.

Аналогия между уравнениями (5.4.2), (5.4.3), с одной стороны, и (5.4.19), (5.4.22) — с другой, показывает, что в случае гравитации возможны и построения, подобные проведенным в электродинамике, типа (5.4.8) и следующих за ним. В самом деле, умножая уравнения (5.4.19) на $R_{\sigma}^{\cdot\tau\mu\nu}$ и проводя соответствующее суммирование, получаем

$$R^{\sigma}_{\cdot\tau\mu\nu;\lambda}\cdot R_{\sigma}^{\cdot\tau\mu\nu}=2R_{\sigma}^{\cdot\tau\mu\nu}R^{\sigma}_{\cdot\tau\mu\lambda;\nu} \tag{5.4.3)}$$

[ср. с (5.4.8)] и, далее,

$$\left(\frac{1}{4}R_{\sigma}^{\cdot\tau\omega\varepsilon}\ R^{\sigma}_{\cdot\tau\omega\varepsilon}\delta_{\lambda}^{\nu}-R_{\sigma}^{\cdot\tau\mu\nu}\ R^{\sigma}_{\cdot\tau\mu\lambda}\right)_{;\nu}=-R^{\sigma}_{\cdot\tau u\lambda}R_{\sigma}^{\cdot\tau\mu\nu}\ {}_{;\nu}, \tag{5.4.33}$$

где в скобках стоит симметричный тензор

$$T^{\nu}_{R\lambda}=\frac{1}{4}R_{\sigma}^{\cdot\tau\omega\varepsilon}R^{\sigma}_{\cdot\tau\omega\varepsilon}\delta^{\nu}_{\lambda}-R_{\sigma}^{\cdot\tau\mu\nu}R^{\sigma}_{\cdot\tau\mu\lambda}, \tag{5.4.34}$$

не следующий, в отличие от (5.4.10), из общепринятого лагранжиана рассматриваемого поля (теперь уже гравитационного). Подобно (5.4.11), мы можем переписать (5.4.33), пользуясь обозначением (5.4.34) и уравнениями (5.4.22), как

$$T^{\nu}_{R\lambda;\nu}=-R^{\lambda}_{\cdot\mu\tau\sigma}\cdot Q^{\mu\tau\sigma}. \tag{5.4.35}$$

С этого момента мы сталкиваемся с возможностью различного развития этой теории. На предыдущей странице мы уже говорили об альтернативе, которая оказывает решающее влияние и на эти последующие рассмотрения. В самом деле, если «забыть» об эйнштейновской теории и воспользоваться, в полной аналогии с электродинамикой, уравнениями движения в форме (5.4.30), то получим, в соответствии с (5.4.12):

$$T^{\nu}_{R\lambda;\nu}=-\rho_m\frac{D_vV^{\mu}}{dv}. \tag{5.4.36}$$

Уравнения (5.4.13) и (5.4.14) остаются без изменения, и тогда мы приходим к следующему закону сохранения:

$$(T_R^{\mu\nu}+T_D^{\mu\nu})_{;\nu}=0. \tag{5.4.37}$$

Аналог тензора энергии частиц, следующий из уравнений девиации, оказывается при этом несимметричным:

$$T_D^{\mu\nu}=\rho_mV^{\mu}v^{\nu}. \tag{5.4.38}$$

Мы вернемся к обсуждению этой ситуации на стр. 174, заметив здесь лишь, что понятия скорости «течения» зарядов (электрических) и скорости «течения» масс (гравитационных зарядов) несколько различны, как показал Синг (1963), так что в теорию следует внести уточнения.

Другой подход состоит в использовании выражений ортодоксальной теории Эйнштейна, прежде всего (5.4.25). При этом можно с тем же правом взять и соотношение (5.4.23) вместо уравнения (5.4.22). Тогда

[1] Иначе говоря, с этой точки зрения известная связь между символами Кристоффеля и производными метрического тензора есть дополнительное предположение или результат теории (в духе модифицированного подхода Палатини), а сам метрический тензор тогда можно назвать «субпотенциалом».

правая часть (5.4.33) примет вид

$$-R^{\sigma}_{\cdot\tau\mu\lambda}R_{\sigma}^{\cdot\tau\mu\nu}{}_{;\nu}=R^{\nu}_{\cdot\mu\sigma\tau;\nu}R^{\sigma\tau\mu\cdot}{}_{\lambda}=2R_{\mu\sigma;\tau}R^{\sigma\tau\mu\cdot}{}_{\lambda}. \tag{5.4.39}$$

После дальнейших преобразований правая часть (5.4.33) будет равна

$$2R_{\sigma\mu}R^{\sigma\tau\mu\cdot}{}_{\lambda})_{;\tau}+2R^{\tau}_{\cdot\sigma\mu\lambda;\tau}R^{\mu\sigma}=(2R_{\mu\sigma}R^{\sigma\tau\mu\cdot}{}_{\lambda})_{;\tau}+(R^{\mu\sigma}R_{\mu\sigma})_{;\lambda}-2R^{\tau\sigma}R_{\sigma\lambda;\tau}. \tag{5.4.40}$$

Если же теперь учесть свойство

$$R^{\mu}_{\sigma;\mu}\equiv\frac{1}{2}R_{,\sigma}, \tag{5.4.41}$$

вытекающее из консервативности тензора Эйнштейна (1.86), то мы получим

$$-R^{\sigma}_{\cdot\tau\mu\lambda}R_{\sigma}^{\cdot\tau\mu\nu}{}_{;\nu}=(2R_{\mu\sigma}R^{\sigma\tau\mu\cdot}{}_{\lambda}+R^{\mu\sigma}R_{\mu\sigma}\delta^{\tau}_{\lambda}-2R^{\tau\sigma}R_{\sigma\lambda})_{;\tau}+R^{\tau}_{\lambda}R_{,\tau}; \tag{5.4.42}$$

после несложных преобразований окончательно находим

$$-R^{\sigma}_{\cdot\tau\mu\lambda}R_{\sigma}^{\cdot\tau\mu\nu}{}_{;\nu}=\left(2R^{\sigma\tau\mu\cdot}{}_{\lambda}R_{\mu\sigma}+R^{\mu\sigma}R_{\mu\sigma}\delta^{\tau}_{\lambda}-2R^{\sigma\tau}R_{\sigma\lambda}+RR^{\tau}_{\lambda}-\frac{1}{4}R^{2}\delta^{\tau}_{\lambda}\right)_{;\tau}. \tag{5.4.43}$$

Итак, мы убедились в том, что не только левая часть уравнений (5.4.33), но и правая их часть, а именно (5.4.43), имеет вид дивергенции. То обстоятельство, что мы воспользовались при выводе этих соотношений лишь геометрическими выражениями, никак не изменяет положения, потому что в правой части (5.4.43) всегда можно заменить тензор кривизны Риччи и скалярную кривизну выражениями для негравитационных полей согласно уравнениям Эйнштейна (5.4.24). Это можно было бы делать и на промежуточных этапах вычислений, и результаты от этого никак не изменились бы. Обозначим теперь симметричный тензор, стоящий под знаком дивергенции в (5.4.43), как

$$T_K^{\lambda\tau}=2R^{\lambda\mu\nu\tau}R_{\mu\nu}+2R^{\lambda\nu}R_{\nu}{}^{\tau}-RR^{\lambda\tau}-R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}g^{\lambda\tau}+\frac{1}{4}R^{2}g^{\lambda\tau} \tag{5.4.44}$$

(мы взяли его с обратным знаком, чтобы, перенесенный налево, он просто складывался с $T_R{}^{\lambda\tau}$). Заметим, что след как $T_R{}^{\mu\nu}$, так и $T_K{}^{\mu\nu}$ равен нулю, подобно следу электромагнитного тензора энергии-импульса:

$$T_{\mathrm{em}\,\nu}^{\nu}=T_{R\nu}^{\nu}=T_{K\nu}^{\nu}=0. \tag{5.4.45}$$

Кроме того, как это видно из соотношений (5.4.33) и (5.4.43), сумма тензоров ковариантно сохраняется:

$$(T_R^{\mu\nu}+T_K^{\mu\nu})_{;\nu}=0. \tag{5.4.46}$$

Однако не следует делать излишне поспешных заключений о том, что сумма этих тензоров может быть истолкована как полный тензор энергии-импульса, подобно сумме, стоящей под знаком дивергенции в электромагнитном варианте (5.4.15). Во-первых, здесь мы сталкиваемся с «отдельным» сохранением величин, имеющих связь с гравитацией, от величин, более тесно связанных с другими полями, так что такого рода энергии не были бы способны переходить одна в другую, а существовали бы совершенно изолированно. Более того, оказывается, мы просто получили разными способами в точности *одно и то же* даже под знаками дивергенции в левой части (5.4.33) и в правой части (5.4.43); иными словами, суммарный тензор тождественно равен нулю:

$$T_R^{\mu\nu}+T_K^{\mu\nu}=0, \tag{5.4.47}$$

так что «сохранение» (5.4.46) становится тривиальным утверждением. Доказательство этого утверждения проще всего провести, пользуясь свойством (1.40) символов Леви-Чивиты. Рассмотрим произведение [вместо $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ используем для удобства $E_{\mu\nu\lambda\rho}$ (1.35)]

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}R_{\sigma\tau\alpha\beta}E^{\mu\nu\varkappa\cdot}{}_{\cdot\omega}E^{\sigma\tau}{}_{\cdot\cdot\varkappa\varepsilon}E^{\lambda\rho\omega\eta}E^{\alpha\beta\varepsilon\xi}. \tag{5.4.48}$$

Имея в виду, что свойство символов Леви-Чивиты (1.40) относится к их парным произведениям, попробуем попарно комбинировать эти символы в выражении (5.4.48). Сначала скомбинируем первый символ с третьим, что дает

$$E^{\mu\nu\varkappa\cdot}{}_{\omega}E^{\lambda\rho\omega\eta}=2(g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}g^{\varkappa\eta}+g^{\mu\eta}g^{\nu\lambda}g^{\varkappa\rho}+g^{\mu\rho}g^{\nu\eta}g^{\nu\lambda}) \tag{5.4.49}$$

(здесь уже учтены для краткости записи свойства симметрии множителя $R_{\mu\nu\lambda\rho}R_{\sigma\tau\alpha\beta}$); аналогичную же конструкцию получаем, комбинируя второй символ с четвертым. Объединяя все, приходим к выражению

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}R_{\sigma\tau\alpha\beta}E^{\mu\nu\varkappa\cdot}{}_{\omega}E^{\lambda\rho\omega\eta}E^{\sigma\tau}{}_{\cdot\cdot\varkappa\varepsilon}E^{\alpha\beta\varepsilon\xi}=16\left(R^{\eta\varkappa}R_{\varkappa}^{\xi}-R\cdot R^{\eta\xi}+\frac{1}{4}R^{2}g^{\eta\xi}\right). \tag{5.4.50}$$

Комбинирование первого символа со вторым и третьего с четвертым дает гораздо более громоздкие выражения, которых мы здесь не будем приводить, но которые, тем не менее, нетрудно получить, исходя из равенства (1.40). Окончательно этот второй путь приводит к выражению

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}R_{\sigma\tau\alpha\beta}E^{\mu\nu\varkappa\cdot}{}_{\omega}E^{\sigma\tau\cdot\cdot}{}_{\varkappa\varepsilon}E^{\lambda\rho\omega\eta}E^{\alpha\beta\varepsilon\xi}=16\Big(R_{\mu\nu\lambda}{}^{\xi}R^{\mu\nu\lambda\eta}-\frac{1}{4}R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}g^{\eta\xi}-$$

$$-2R^{\eta\mu\lambda\xi}R_{\mu\lambda}+R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}g^{\eta\xi}-R_{\mu}{}^{\xi}R^{\mu\eta}\Big). \tag{5.4.51}$$

Сравнивая (5.4.50) и (5.4.51), которые должны совпадать друг с другом, находим алгебраическое тождество второй степени по кривизне:

$$R_{\mu\nu\lambda\cdot}{}^{\xi}R^{\mu\nu\lambda\eta}-\frac{1}{4}R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}g^{\eta\xi}-2R^{\eta\mu\lambda\xi}R_{\mu\lambda}+$$

$$+R_{\mu\lambda}R^{\mu\lambda}g^{\eta\xi}-2R_{\mu}{}^{\xi}R^{\mu\eta}+R\cdot R^{\eta\xi}-\frac{1}{4}R^{2}g^{\eta\xi}=0, \tag{5.4.52}$$

как раз и выражающее наше утверждение (5.4.47).

5.5. Вариационный принцип для квазимаксвелловских уравнений

По аналогии с электромагнитным выражением (5.4.1) запишем предполагаемый новый гравитационный лагранжиан:

$$\mathrm{L}_{R}=-\frac{\sqrt{-g}}{4}R^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\rho}R^{\alpha}_{\cdot\beta\omega\varepsilon}g_{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\lambda\omega}g^{\rho\varepsilon}. \tag{5.5.1}$$

Мы специально, как и прежде, оставляем вверху лишь один первый индекс тензора Римана — Кристоффеля, имея в виду определение напряженности гравитационного поля с помощью уравнения девиации геодезических. Именно эта величина считается теперь не зависящей от метрического тензора.

Что касается зависимости варьируемых величин от метрического тензора и от гравитационного потенциала $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ (в используемой здесь трактовке), то необходимо сказать следующее. Мы не будем теперь заранее предполагать, что методический тензор $g_{\mu\nu}$ и гравитационный потенциал

$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ связаны друг с другом согласно обычному определению символов Кристоффеля или вообще каким бы то ни было образом. Мы предполагаем, что вариации этих величин *никак* не связаны друг с другом, и любая возможная связь должна явиться следствием уравнений поля.

Тогда лагранжиан L_R зависит от $g_{\mu\nu}$ только алгебраически, и соответствующую вариационную производную удобнее всего записать в виде

$$\frac{\delta \mathbf{L}_R}{\delta g^{\sigma\tau}} = -\frac{1}{2}\mathbf{L}_R g_{\sigma\tau} + \sqrt{-g}\frac{\partial}{\partial g^{\sigma\tau}}\left(\frac{\mathbf{L}_R}{\sqrt{-g}}\right). \tag{5.5.2}$$

Ввиду отказа от каких бы то ни было предположений о связи гравитации с геометрией и принятия чисто физического подхода к гравитационному полю мы должны отказаться от использования свойства антисимметрии тензора $R^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\rho}$ по первым двум индексам, когда для поднятия и опускания индексов используется метрический тензор $g_{\mu\nu}$ (в ряде случаев симметрия может быть достигнута подбором такого рода нового метрического тензора, что видно на примере двуметрического формализма). Поэтому мы не можем произвести приведения подобных членов, заключенных в скобки справа в выражении

$$\frac{\partial}{\partial g^{\sigma\tau}}(R^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\rho}R^{\alpha}_{\cdot\beta\omega\varepsilon}g_{\alpha\mu}g^{\beta\nu}g^{\omega\lambda}g^{\varepsilon\rho}) = 2R^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\sigma}R^{\alpha}_{\cdot\beta\omega\tau}g_{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\lambda\varepsilon} +$$

$$+ (R^{\mu}_{\cdot\sigma\lambda\rho}R^{\alpha}_{\cdot\tau\omega\varepsilon}g_{\mu\alpha} - R^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\rho}R^{\alpha}_{\cdot\beta\omega\varepsilon}g_{\mu\sigma}g_{\alpha\tau}g^{\nu\beta})g^{\lambda\omega}g^{\rho\varepsilon}, \tag{5.5.3}$$

и симметричный тензор энергии-импульса, следующий из лагранжиана (5.5.1), принимает вид

$$\mathbf{T}_{R\sigma\tau} = 2\frac{\delta \mathbf{L}_R}{\delta g^{\sigma\tau}} = \sqrt{-g}\left\{\frac{1}{4}R^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\rho}R_{\mu}^{\cdot\nu\lambda\rho}g_{\sigma\tau} - R^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\rho}R^{\alpha}_{\cdot\beta\omega\tau}g_{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\lambda\varepsilon} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}g^{\lambda\omega}g^{\rho\varepsilon}[R_{\cdot\nu\lambda\rho}R^{\alpha}_{\cdot\beta\omega\varepsilon}g_{\mu\sigma}g_{\alpha\tau}g^{\nu\beta} - R^{\mu}_{\cdot\sigma\rho\lambda}R^{\alpha}_{\cdot\tau\omega\varepsilon}g_{\mu\alpha}]\right\}. \tag{5.5.4}$$

Однако если же мы используем свойства симметрии тензора Римана — Кристоффеля полностью, то обнаружим, что члены, стоящие в квадратных скобках, взаимно уничтожаются, и все выражение совпадает с уже известным тензором (5.4.34), аналогичным соответствующему электромагнитному тензору энергии-импульса (4.2.2).

Возникает вопрос: какой лагранжиан $\mathbf{L}_K$ следует взять для того, чтобы получить тензор (5.4.44.)? Попытаемся построить лагранжиан, удовлетворяющий условию

$$\frac{\delta \mathbf{L}_K}{\delta g^{\sigma\tau}} = \frac{1}{2}\mathbf{T}_{K\sigma\tau}, \tag{5.5.5}$$

по методу неопределенных коэффициентов, т. е. возьмем

$$\mathbf{L}_K = \frac{\sqrt{-g}}{4}R^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\rho}R^{\alpha}_{\cdot\beta\omega\varepsilon}[a g_{\mu\alpha}g^{\nu\lambda}g^{\beta\omega}g^{\rho\varepsilon} +$$

$$+ b g_{\mu}{}^{\varepsilon}g_{\alpha}{}^{\rho}g^{\nu\lambda}g^{\beta\omega} + c g_{\mu}{}^{\rho}g_{\alpha}{}^{\varepsilon}g^{\nu\beta}g^{\lambda\omega} + d g_{\mu}{}^{\rho}g_{\alpha}{}^{\varepsilon}g^{\nu\lambda}g^{\beta\omega}]. \tag{5.5.6}$$

Если бы мы имели сейчас право учесть все свойства $R^{\mu}_{\cdot\cdot\cdot\rho}$ (а в конце концов мы придем на основании уравнений поля именно к этому), то получили бы для $\mathbf{L}_K$ выражение

$$\mathbf{L}_K = \frac{\sqrt{-g}}{4}[(a+b+c)R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + d\cdot R^2]; \tag{5.5.7}$$

однако варьировать все выражения мы должны без каких-либо скидок на симметрию, которая должна послужить для нас критерием при сравнении полученного результата и выражения (5.4.44), которое, как известно, было построено, исходя из традиционной формы теории Эйнштейна, а значит, требует учета всех свойств тензора Римана — Кристоффеля. Дифференцируя, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial g^{\sigma\tau}}\left(\frac{\mathbf{L}_K}{\sqrt{-g}}\right) = R^{\mu}_{\cdot\,\nu\lambda\rho} R^{\alpha}_{\cdot\,\beta\omega\varepsilon} \cdot [a g_{\mu\alpha} g^{\beta\omega} g^{\rho\varepsilon} \times (g_\sigma{}^\nu g_\tau{}^\lambda + g_\tau{}^\nu g_\sigma{}^\lambda) +$$
$$+ a g_{\mu\alpha} g^{\nu\lambda} g^{\beta\omega} g_\sigma{}^\rho g_\tau{}^\varepsilon - a g_{\mu\sigma} g_{\alpha\tau} g^{\nu\lambda} g^{\beta\omega} g^{\rho\varepsilon} + b g_\mu{}^\varepsilon g_\alpha{}^\rho g^{\beta\omega} (g_\sigma{}^\nu g_\tau{}^\lambda + g_\tau{}^\nu g_\sigma{}^\lambda) +$$
$$+ c g_\mu{}^\rho g_\alpha{}^\varepsilon (g^{\lambda\omega} g_\sigma{}^\nu g_\tau{}^\beta + g^{\nu\beta} g_\sigma{}^\lambda g_\tau{}^\omega) + d g_\mu{}^\rho g_\alpha{}^\varepsilon g^{\beta\omega} (g_\sigma{}^\nu g_\tau{}^\lambda + g_\tau{}^\nu g_\sigma{}^\lambda)] \qquad (5.5.8)$$

или, при учете свойств симметрии,

$$4\frac{\partial}{\partial g^{\sigma\tau}}\left(\frac{\mathbf{L}_K}{\sqrt{-g}}\right) = 2[(a+b) R^{\mu}_{\cdot\,\sigma\tau\rho} R_\mu{}^\rho + c R_\sigma{}^\omega R_{\omega\tau} + d \cdot R \cdot R_{\sigma\tau}]. \qquad (5.5.9)$$

Тогда сравнению с тензором (5.4.44) подлежит тензор [ср. с (5.5.2)]

$$\mathbf{T}_{K\sigma\tau} = 2\frac{\delta \mathbf{L}_K}{\delta g^{\sigma\tau}} = \sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{4}(a+b+c) R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} g_{\sigma\tau} -\right.$$
$$\left. -\frac{d}{4} R^2 \cdot g_{\sigma\tau} + (a+b) R^{\mu}_{\cdot\,\sigma\tau\rho} \cdot R_\mu{}^\rho + c R_\sigma{}^\omega R_{\omega\tau} + d \cdot R \cdot R_{\sigma\tau}\right\}, \qquad (5.5.10)$$

так что мы получим для искомых значений коэффициентов величины

$$a + b = c = +2, \quad d = -1. \qquad (5.5.11)$$

Так как, с точностью до выполнения равенства (5.5.11), коэффициенты a и b остаются произвольными, мы примем их для определенности и из соображений равноправия соответствующих членов в $\mathbf{L}_K$ равными $a = b = +1$. Итак,

$$\mathbf{L}_K = \frac{\sqrt{-g}}{4} R^{\mu}_{\cdot\,\nu\lambda\rho} R^{\alpha}_{\cdot\,\beta\omega\varepsilon} \cdot [g_{\mu\alpha} g^{\nu\lambda} g^{\beta\omega} g^{\rho\varepsilon} +$$
$$+ g_\mu{}^\varepsilon g_\alpha{}^\rho g^{\nu\lambda} g^{\beta\omega} + 2 g_\mu{}^\rho g_\alpha{}^\varepsilon g^{\nu\beta} g^{\lambda\omega} - g_\mu{}^\rho g_\alpha{}^\varepsilon g^{\nu\lambda} g^{\beta\omega}]. \qquad (5.5.12)$$

Прежде чем продолжать процесс варьирования лагранжианов (5.5.1) и (5.5.12), мы проанализируем сущность стоящей перед нами в дальнейшем задачи на примере обычного гравитационного лагранжиана

$$\mathbf{L}_g = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa} R. \qquad (5.5.13)$$

Подойдем к нему с тех же самых позиций, с каких подходили только что к лагранжианам $\mathbf{L}_R$ и $\mathbf{L}_K$. Тогда мы должны принять

$$R = R^{\mu}_{\cdot\,\nu\lambda\rho} \cdot \delta_\mu{}^\rho g^{\nu\lambda}, \qquad (5.5.14)$$

так что

$$\frac{\partial R}{\partial g^{\sigma\tau}} = \frac{1}{2}(R^{\mu}_{\cdot\,\sigma\tau\mu} + R^{\mu}_{\cdot\,\tau\sigma\mu}). \qquad (5.5.15)$$

[Если бы мы учитывали сейчас все свойства $R^{\mu}_{\cdot\,\nu\lambda\rho}$, то должны были бы записать

$$\frac{\partial R}{\partial g^{\sigma\tau}} = R_{\sigma\tau} \tag{5.5.16}$$

и

$$\frac{\delta \mathbf{L}_g}{\delta g^{\sigma\tau}} = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}\left(R_{\sigma\tau} - \frac{1}{2} R g_{\sigma\tau}\right) \tag{5.5.17}$$

а так как

$$\frac{\delta \mathbf{L}_f}{\delta g^{\sigma\tau}} = \frac{1}{2} \mathbf{T}_{f\sigma\tau} \tag{5.5.18}$$

представляет собой обычное определение симметричного тензора энергии-импульса и $\delta \mathbf{L}_t / \delta g^{\sigma\tau} = 0$, то мы получим отсюда прямо

$$R_{\sigma\tau} - \frac{1}{2} g_{\sigma\tau} \cdot R = -\varkappa T_{f\sigma\tau}, \tag{5.5.19}$$

— уравнения Эйнштейна в обычной форме.]

Эти рассуждения показывают, что для получения уравнений Эйнштейна при таком подходе прежде всего необходимо, чтобы из новых «уравнений»

$$\frac{\delta \mathbf{L}_g}{\delta \Gamma_{\sigma\tau}{}^{\omega}} = 0 \tag{5.5.20}$$

вытекала связь между гравитацией и геометрией, т. е. выражение для $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ через метрический тензор и его производные, тогда как форма

$$R^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\rho} = \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\,\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\,\rho} - \Gamma_{\lambda\alpha}{}^{\mu}\Gamma_{\nu\rho}{}^{\alpha} - \Gamma_{\rho\alpha}{}^{\mu}\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\alpha} \tag{5.5.21}$$

считается здесь, конечно, заданной, как выражение напряженности гравитационного поля через соответствующие потенциалы. Замечая, что

$$\frac{\partial R^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\rho}}{\partial \Gamma_{\sigma\tau}{}^{\omega}} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\nu\rho}{}^{\tau}\delta_{\lambda}{}^{\sigma}\delta_{\omega}{}^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}{}^{\sigma}\delta_{\lambda}{}^{\tau}\delta_{\omega}{}^{\mu} + \Gamma_{\lambda\omega}{}^{\mu}\delta_{\nu}{}^{\sigma}\delta_{\rho}{}^{\tau} + \Gamma_{\lambda\omega}{}^{\mu}\delta_{\nu}{}^{\tau}\delta_{\rho}{}^{\sigma} - \right.$$
$$\left. - \Gamma_{\nu\lambda}{}^{\tau}\delta_{\rho}{}^{\sigma}\delta_{\omega}{}^{\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}{}^{\sigma}\delta_{\rho}{}^{\tau}\delta_{\omega}{}^{\mu} - \Gamma_{\rho\omega}{}^{\mu}\delta_{\nu}{}^{\sigma}\delta_{\lambda}{}^{\tau} - \Gamma_{\rho\omega}{}^{\mu}\delta_{\nu}{}^{\tau}\delta_{\lambda}{}^{\sigma}\right), \tag{5.5.22}$$

мы получаем

$$\frac{\partial R}{\partial \Gamma_{\sigma\tau}{}^{\omega}} = \delta_{\mu}{}^{\rho} g^{\nu\lambda} \frac{\partial R^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\rho}}{\partial \Gamma_{\sigma\tau}{}^{\omega}} = \Gamma_{\nu\omega}{}^{\tau} g^{\nu\sigma} + \Gamma_{\nu\omega}{}^{\sigma} g^{\nu\tau} - \Gamma_{\rho\omega}{}^{\rho} g^{\sigma\tau} -$$
$$- \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\tau}\delta_{\omega}{}^{\sigma} + \Gamma_{\nu\lambda}{}^{\sigma}\delta_{\omega}{}^{\tau}\right) g^{\nu\lambda}, \tag{5.5.23}$$

а из выражения

$$\frac{\partial R^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\rho}}{\partial \Gamma^{\omega}_{\sigma\tau,\,\varepsilon}} = \frac{1}{2} \delta_{\omega}{}^{\mu}\left[\delta_{\lambda}{}^{\varepsilon}(\delta_{\nu}{}^{\sigma}\delta_{\rho}{}^{\tau} + \delta_{\nu}{}^{\tau}\delta_{\rho}{}^{\sigma}) - \delta_{\rho}{}^{\varepsilon}(\delta_{\nu}{}^{\sigma}\delta_{\lambda}{}^{\tau} + \delta_{\nu}{}^{\tau}\delta_{\lambda}{}^{\sigma})\right] \tag{5.5.24}$$

находим

$$\frac{\partial R}{\partial \Gamma^{\omega}_{\sigma\tau,\,\varepsilon}} = \delta_{\mu}{}^{\rho} g^{\nu\lambda} \frac{\partial R_{\cdot\nu\lambda\rho}}{\partial \Gamma^{\omega}_{\sigma\tau,\,\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(g^{\varepsilon\sigma} g_{\omega}{}^{\tau} + g^{\varepsilon\tau} g_{\omega}{}^{\sigma} - 2 g^{\sigma\tau} g_{\omega}{}^{\varepsilon}\right). \tag{5.5.25}$$

Тогда уравнение (5.5.20) может быть записано в виде

$$\frac{\delta L_g}{\delta \Gamma_{\sigma\tau}{}^{\omega}} \equiv \frac{\partial L_g}{\partial \Gamma_{\sigma\tau}{}^{\omega}} - \left(\frac{\partial L_g}{\partial \Gamma^{\omega}_{\sigma\tau,\,\varepsilon}}\right)_{\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{2\varkappa}\Big\{\sqrt{-g}\left[\Gamma_{\nu\omega}{}^{\tau} g^{\nu\sigma} + \Gamma_{\nu\omega}{}^{\sigma} g^{\nu\tau} - \Gamma_{\rho\omega}{}^{\rho} g^{\sigma\tau} - \frac{1}{2}(\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\varepsilon} g_{\omega}{}^{\sigma} + \Gamma_{\nu\lambda}{}^{\sigma} g_{\omega}{}^{\varepsilon}) g^{\nu\lambda}\right] +$$

$$+ \left[\sqrt{-g}\, g_{\omega}{}^{\tau} g^{\sigma\tau} - \frac{\sqrt{-g}}{2}(g^{\varepsilon\sigma} g_{\omega}{}^{\tau} + g^{\varepsilon\tau} g_{\omega}{}^{\sigma})\right]_{,\,\varepsilon}\Big\}. \qquad (5.5.26)$$

Гравитационный потенциал должен подчиняться закону преобразования коэффициентов связности, если мы взяли его как $\Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}$, а построенная из него и его производных величина гравитационной напряженности $R^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\rho}$ (5.5.21) — истинный тензор. Поэтому мы можем определить операцию ковариантного дифференцирования с помощью гравитационных потенциалов, не предполагая, что введенные таким образом коэффициенты связности конструируются из производных метрического тензора, иными словами, не предполагая априори, что ковариантная производная метрического тензора равна нулю. Чтобы связать гравитационное поле с геометрическими характеристиками мира, достаточно (и необходимо, вероятно) приравнять нулю ковариантную производную метрического тензора. Тогда представляющая сейчас особый интерес ковариантная производная плотности контравариантного метрического тензора равна

$$(\sqrt{-g}\, g^{\sigma\tau})_{;\,\varepsilon} = (\sqrt{-g}\, g^{\sigma\tau})_{,\,\varepsilon} +$$

$$+ \sqrt{-g}\,[g^{\sigma\rho}\Gamma_{\varepsilon\rho}{}^{\tau} + g^{\rho\tau}\Gamma_{\varepsilon\rho}{}^{\sigma} - g^{\sigma\tau}\Gamma_{\varepsilon\rho}{}^{\rho}] \qquad (5.5.27)$$

и представляет тензорную плотность 3-го ранга. Отсюда найдем, что

$$g^{\sigma\tau}{}_{;\,\omega} - \frac{1}{2}(g^{\sigma\varepsilon}{}_{;\,\varepsilon}\delta_{\omega}{}^{\tau} + g^{\varepsilon\tau}{}_{;\,\varepsilon}\delta_{\omega}{}^{\sigma}) = \left[g^{\sigma\tau} - \frac{1}{2}(g^{\sigma\varepsilon}\delta_{\omega}{}^{\tau} + g^{\varepsilon\tau}\delta_{\omega}{}^{\sigma})\right]_{\varepsilon} +$$

$$+ \sqrt{-g}\left[-g^{\sigma\tau}\Gamma_{\omega\rho}{}^{\rho} + g^{\sigma\rho}\Gamma_{\omega\rho}{}^{\tau} + g^{\rho\tau}\Gamma_{\omega\rho}{}^{\sigma} - \frac{1}{2}(\Gamma_{\varepsilon\rho}{}^{\sigma}\delta_{\omega}{}^{\tau} + \Gamma_{\varepsilon\rho}{}^{\tau}\delta_{\omega}{}^{\sigma}) g^{\varepsilon\rho}\right]. \qquad (5.5.28)$$

Сравнивая полученное выражение с правой частью равенства (5.5.26), заключаем:

$$\frac{\delta L_g}{\delta \Gamma_{\sigma\tau}{}^{\omega}} = \frac{1}{2\varkappa}\left[g^{\sigma\tau}{}_{;\,\omega} - \frac{1}{2}(g^{\sigma\varepsilon}{}_{;\,\varepsilon}\delta_{\omega}{}^{\tau} + g^{\varepsilon\tau}{}_{;\varepsilon}\delta_{\omega}{}^{\sigma})\right]. \qquad (5.5.29)$$

Требуя, чтобы выполнялось уравнение (5.5.20), и считая, что L_f не зависит от $\Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}$, находим, свернув правую часть (5.5.29):

$$g^{\sigma\omega}{}_{;\,\omega} - \frac{1}{2}(4g^{\sigma\varepsilon}{}_{;\,\varepsilon} + g^{\varepsilon\sigma}{}_{;\varepsilon}) = 0, \qquad (5.5.30)$$

т. е.

$$g^{\sigma\omega}{}_{;\,\omega} = 0. \qquad (5.5.31)$$

Подставляя этот результат в (5.5.29) и приравнивая все нулю, находим окончательно:

$$g^{\sigma\tau}{}_{;\,\omega} = 0, \qquad (5.5.32)$$

что и представляет собой искомую связь гравитации с геометрией и гарантирует выполнение вспомогательного соотношения (5.5.31).

Таким образом, исходя из обычного гравитационного лагранжиана (5.5.13) и рассматривая гравитацию как одно из обычных физических полей, мы с помощью вариационного принципа автоматически пришли к геометрическим аспектам теории; этот подход хорошо известен, и иногда его называют методом Палатини, хотя в действительности метод Палатини отличается от него (см. § 3.2).

Итак, мы уже получили выражения для $\delta \mathbf{L}_R / \delta g^{\sigma\tau}$ и $\delta \mathbf{L}_K / \delta g^{\sigma\tau}$; остается рассмотреть $\delta \mathbf{L}_R / \delta \Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}$ и $\delta \mathbf{L}_K / \delta \Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}$. Для упрощения вычислений полезно вспомнить, что использование гравитационного потенциала в форме $\Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}$ приводит к негеометрическому в своей основе определению ковариантного дифференцирования, а значит, и к возможности применения соответствующих локально геодезических систем координат. Имея в виду, что (см. § 3.2) вариация $\delta\Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}$ является истинным тензором, мы приходим к заключению, что произведение $\delta\Gamma^{\omega}_{\sigma\tau} \cdot \delta \mathbf{L} / \delta\Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}$ является, как и $\mathbf{L}$, скалярной плотностью, а значит, вариационная производная $\delta \mathbf{L} / \delta\Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}$ представляет собой тензорную плотность 3-го ранга. В начале локально геодезической системы

$$\left(\frac{\partial \mathbf{L}_R}{\partial \Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}}\right)_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{L}_K}{\partial \Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}}\right)_0 = 0, \tag{5.5.33}$$

так что

$$\frac{\delta \mathbf{L}_{R,K}}{\delta \Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{R,K}}{\partial \Gamma^{\omega}_{\sigma\tau,\varepsilon}}\right)_{;\varepsilon} \tag{5.5.34}$$

(под знаком ковариантной производной стоит заведомо тензорная плотность 4-го ранга). Непосредственный подсчет с помощью выражения (5.5.24) дает

$$\frac{\delta \mathbf{L}_R}{\delta \Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{R}_{\omega}^{\cdot\,\tau\varepsilon\sigma}{}_{;\varepsilon} + \mathbf{R}_{\omega}^{\cdot\,\sigma\varepsilon\tau}{}_{;\varepsilon}\right), \tag{5.5.35}$$

где следует отметить наличие точно той же симметризации по индексам σ и τ, которая фактически входит и в уравнение девиации геодезических (5.4.17). Гораздо более громоздкие, чем при выводе (5.5.35), вычисления дают

$$\begin{gathered}\frac{\delta \mathbf{L}_K}{\delta \Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}} = -\frac{1}{4} \{(\mathbf{R}_{\omega\beta}{}^{\beta\,\rho}_{\cdot\,\cdot} + \mathbf{R}^{\rho\,\beta}_{\cdot\,\cdot\,\beta\omega})_{;\varepsilon}(g^{\varepsilon\sigma}g_{\rho}{}^{\tau} + g^{\varepsilon\tau}g_{\rho}{}^{\sigma}) + \\ + (\mathbf{R}_{\omega\beta}{}^{\beta\,\rho}_{\cdot\,\cdot} + \mathbf{R}^{\rho\,\beta}_{\cdot\,\cdot\,\beta\omega}) \cdot (g^{\varepsilon\sigma}{}_{;\varepsilon}g_{\rho}{}^{\tau} + g^{\varepsilon\tau}{}_{;\varepsilon}g_{\rho}{}^{\sigma}) - 2(\mathbf{R}_{\omega\beta}{}^{\beta\,\varepsilon}_{\cdot\,\cdot} + \mathbf{R}^{\varepsilon\,\beta}_{\cdot\,\cdot\,\beta\omega})_{;\varepsilon}g^{\sigma\tau} - \\ - 2(\mathbf{R}_{\omega\beta}{}^{\beta\,\varepsilon}_{\cdot\,\cdot} + \mathbf{R}^{\varepsilon\,\beta}_{\cdot\,\cdot\,\beta\omega})g^{\sigma\tau}{}_{;\varepsilon} + 2\mathbf{R}^{\alpha\nu\varepsilon\,\cdot}{}_{\alpha;\varepsilon}(\delta_{\nu}{}^{\sigma}\delta_{\omega}{}^{\tau} + \delta_{\nu}{}^{\tau}\delta_{\omega}{}^{\sigma}) - \\ - 2\mathbf{R}^{\alpha\nu\lambda\,\cdot}{}_{\alpha;\omega} \cdot (\delta_{\nu}{}^{\sigma}\delta_{\lambda}{}^{\tau} + \delta_{\nu}{}^{\tau}\delta_{\lambda}{}^{\sigma}) - \mathbf{R}^{\alpha\,\beta}_{\cdot\,\cdot\,\beta\alpha;\varepsilon} \cdot (g^{\varepsilon\sigma}g_{\omega}{}^{\tau} + g^{\varepsilon\tau}g_{\omega}{}^{\sigma} - 2g^{\sigma\tau}g_{\omega}{}^{\varepsilon}) - \\ - \mathbf{R}^{\alpha\,\beta}_{\cdot\,\cdot\,\beta\alpha} \cdot (g^{\varepsilon\sigma}{}_{;\varepsilon}\delta_{\omega}{}^{\tau} + g^{\varepsilon\tau}{}_{;\varepsilon}g_{\omega}{}^{\sigma} - 2g^{\sigma\tau}{}_{;\omega})\}.\end{gathered} \tag{5.5.36}$$

Нужно отметить, что варьированные нами величины квадратичны по вторым производным метрического тензора, если подходить к ним, постулируя заранее связь $\Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}$ и $g_{\mu\nu}$; тогда при варьировании по $g_{\mu\nu}$ мы получили бы уравнения четвертого порядка; в действительности же полученные нами сейчас выражения содержат лишь производные не выше третьего порядка по $g_{\mu\nu}$ (если подставить сюда «настоящий» тензор Римана — Кристоффеля).

Покажем теперь, что уравнение вида

$$\frac{\delta}{\delta\Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}}(\mathbf{L}_R+\mathbf{L}_K)=0 \tag{5.5.37}$$

выполняется, как и (5.5.20), при условии обычной связи гравитационного потенциала $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ с метрическим тензором. К сожалению, вычисления здесь намного сложнее, чем в случае уравнения (5.5.29), и мы ограничимся проверкой сделанного утверждения путем учета в (5.5.37) обычных свойств симметрии тензора Римана — Кристоффеля.

Тогда

$$\frac{\delta\mathbf{L}_K}{\delta\Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}}=-\frac{\sqrt{-g}}{2}\left(R_{\omega}^{\;\tau;\sigma}+R_{\omega}^{\;\sigma;\tau}-2R^{\sigma\tau}{}_{;\omega}\right), \tag{5.5.38}$$

а с другой стороны, на основании тождеств Бианки, следующих из тех-же свойств симметрии и структуры (5.5.21):

$$\frac{\delta\mathbf{L}_K}{\delta\Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}}=-\frac{\sqrt{-g}}{2}\left(R^{\varepsilon\sigma\tau\cdot}{}_{\omega;\varepsilon}+R^{\varepsilon\tau\sigma\cdot}{}_{\omega;\varepsilon}\right)\to-\frac{\sqrt{-g}}{2}\left(2R^{\sigma\tau}{}_{;\omega}-R_{\omega}^{\;\tau;\sigma}-R_{\omega}^{\;\sigma;\tau}\right), \tag{5.5.39}$$

так что уравнение (5.5.37) автоматически удовлетворяется.

Чтобы окончательно вывести вариационным путем уравнения (5.4.22) и (5.4.24), достаточно взять полный лагранжиан системы полей в виде

$$\mathbf{L}_t=\mathbf{L}_g+\mathbf{L}_K+\mathbf{L}_R+\mathbf{L}_f \tag{5.5.40}$$

и считать $\mathbf{L}_f$ не зависящим от $\Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}$. Тогда уравнение

$$\frac{\delta\mathbf{L}_t}{\delta\Gamma^{\omega}_{\sigma\tau}}=0 \tag{5.5.41}$$

дает связь между гравитацией и геометрией, исходя из чисто физического подхода к гравитационному полю, как это было сейчас проиллюстрировано, а уравнения

$$\frac{\delta\mathbf{L}_t}{\delta g^{\sigma\tau}}=0 \tag{5.5.42}$$

дают, на основании полученных здесь соотношений (5.5.4), (5.5.7) и (5.5.9),

$$R_{\sigma\tau}-\frac{1}{2}g_{\sigma\tau}R=-\varkappa\left[T_{f\sigma\tau}+T_{R\sigma\tau}+T_{K\sigma\tau}\right]; \tag{5.5.43}$$

в силу же того, что

$$T_{R\sigma\tau}+T_{K\sigma\tau}\equiv 0, \tag{5.5.44}$$

мы снова получаем обычные уравнения Эйнштейна

$$R_{\sigma\tau}-\frac{1}{2}g_{\sigma\tau}R=-\varkappa T_{f\sigma\tau}, \tag{5.5.45}$$

подстановка которых в уравнения (5.5.41), принимающие теперь вид тождеств

$$R^{\varepsilon\sigma\tau\cdot}{}_{\omega;\varepsilon}+R^{\varepsilon\tau\sigma\cdot}{}_{\omega;\varepsilon}=2R^{\sigma\tau}{}_{;\omega}-R_{\omega}^{\;\tau;\sigma}-R_{\omega}^{\;\sigma;\tau}, \tag{5.5.46}$$

дает искомые квазимаксвелловские уравнения гравитационного поля в форме (5.4.22) с источником (5.4.25). Дело в том, что симметризация, которой подвергнуты члены из уравнений (5.4.22), которые могут быть усмотрены в (5.5.35), не обедняет полученных в этом случае уравнений, ибо, антисимметризуя по другой паре индексов, мы вновь получаем уравнения (5.4.22). Действительно, на основании тождеств Риччи:

$$R^{\varepsilon\sigma\tau\cdot}{}_{\omega;\varepsilon} - R^{\varepsilon\sigma\cdot\tau}{}_{\omega;\varepsilon} + R^{\varepsilon\tau\sigma\cdot}{}_{\omega;\varepsilon} + R^{\varepsilon\cdot\sigma\tau}_{\omega}{}_{;\varepsilon} = 3R^{\varepsilon\sigma\tau\cdot}{}_{\omega;\varepsilon} \tag{5.5.47}$$

и, кроме того,

$$2R^{\sigma\tau}{}_{;\omega} - 2R^{\sigma;\tau}_{\omega} - R^{\sigma;\tau}_{\omega} + R^{\sigma\tau}{}_{;\omega} = 3(R^{\sigma\tau}{}_{;\omega} - R^{\sigma;\tau}_{\omega}), \tag{5.5.48}$$

откуда непосредственно следуют, ввиду (5.5.41), соотношения (5.4.23):

$$R^{\varepsilon\sigma\tau\cdot}{}_{\omega;\varepsilon} = R^{\sigma\tau}{}_{;\omega} - R^{\sigma;\tau}_{\omega} \tag{5.5.49}$$

(доказательство эквивалентности двух записей уравнений).

Если бы тождество (5.5.44) не выполнялось, мы столкнулись бы здесь с необходимостью введения в теорию некоторой новой фундаментальной постоянной; в самом деле, если перейти к системе CGS, величины L_R и L_K имеют размерность *см*$^{-4}$; если бы мы при этих величинах поставили тот же коэффициент, что и при обычном гравитационном лагранжиане (5.5.13), то для достижения одной и той же размерности понадобилось бы использовать сверх этого множитель размерности квадрата длины (фундаментальная длина?!).

Мы рассмотрели пока лишь один аспект теории гравитации, приводящий к традиционной теории Эйнштейна. Другой аспект был уже затронут в предыдущем параграфе, где предлагалось выражение (5.4.31) для плотности «гравитационного тока», $Q_{\mu\nu\lambda}$. Ясно, что этот вопрос непосредственно связан с представлением о девиации геодезических, так что полезно вспомнить о вариационном выводе уравнения девиации в § 3.5. Включим в лагранжиан (3.5.20) массу частиц:

$$L = mv_\alpha V^\alpha, \tag{5.5.50}$$

причем рассматривается вариационный принцип

$$\delta J = 0, \tag{5.5.51}$$

где

$$J = \int L\, dv. \tag{5.5.52}$$

Переходя к сплошному распределению масс и вводя плотность массы ρ_m, можно в первом приближении записать

$$J = m\int v_\alpha V^\alpha\, dv \to \int \rho_m v_\alpha V^\alpha (dx), \tag{5.5.53}$$

причем

$$m = \int \rho^\mu\, dS_\mu. \tag{5.5.54}$$

Для этого мы введем инвариантную плотность массы

$$\rho^\mu n_\mu \cdot \frac{dv}{dn} = \rho_m \tag{5.5.55}$$

(скалярную плотность), где

$$n_\beta\, dx^\beta = dn. \tag{5.5.56}$$

Итак,

$$\mathbf{L}_p = \rho_m v_\alpha V^\alpha. \tag{5.5.57}$$

Однако вектор относительной скорости не является сам по себе независимой переменной, но включает зависимость от гравитационных потенциалов, будучи абсолютной производной от l^μ. Поэтому мы должны вычислить величину $\delta \mathbf{L}_p / \delta \Gamma^\omega_{\sigma\tau}$. С другой стороны, естественно принять лагранжиан (5.5.1), отказавшись, однако, в этом варианте теории от (5.5.12). Тогда должно быть

$$-\frac{\delta \mathbf{L}_R}{\delta \Gamma^\omega_{\sigma\tau}} = +\frac{\delta \mathbf{L}_p}{\delta \Gamma^\omega_{\sigma\tau}} = \frac{1}{2}[\mathbf{Q}^{\sigma\tau\cdot}{}_{\omega} + \mathbf{Q}^{\tau\sigma\cdot}{}_{\omega}]. \tag{5.5.58}$$

Определение конкретной зависимости V_μ от $\Gamma^\omega_{\sigma\cdot}$ оказывается не совсем тривиальной задачей, так как наиболее простая и естественная запись

$$V^\beta = \frac{D_v l^\beta}{dv} = \frac{d_v l^\beta}{dv} + \Gamma^\beta_{\sigma\tau} l^\sigma v^\tau \tag{5.5.59}$$

дает внутренне противоречивый результат, как легко видеть при непосредственном вычислении. Приходится условиться, например, что в качестве не зависящих от $g_{\mu\nu}$ величин берутся контравариантный вектор v^α и ковариантный вектор l_α, причем лагранжиан (5.5.57) делится на две части, что приводит к равноправному участию обоих векторов в построении этого лагранжиана. Тогда

$$\mathbf{L}_p = \frac{1}{2}\rho_m v^\alpha \left[\frac{D_v l_\alpha}{dv} + g_{\alpha\beta}\frac{D_u v^\beta}{du}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\rho_m v^\alpha \left[\frac{d_v l_\alpha}{dv} + g_{\alpha\beta}\frac{d_u v^\beta}{du} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} l_\nu v^\beta + g_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\nu\lambda} v^\nu l^\lambda\right], \tag{5.5.60}$$

откуда следует выражение для вариационной производной:

$$\frac{\delta L_p}{\delta \Gamma^\omega_{\sigma\tau}} = \frac{1}{4}\rho_m (v_\omega v^\sigma l^\tau + v_\omega v^\tau l^\sigma - 2 v^\sigma v^\tau l_\omega). \tag{5.5.61}$$

Ввиду наличия равенства

$$Q^{\sigma\tau\cdot}{}_{\omega} - Q^{\sigma\cdot\tau}{}_{\omega} + Q^{\sigma\tau\cdot}{}_{\omega} - Q_{\omega}^{\cdot\sigma\tau} = 3Q^{\sigma\tau\cdot}{}_{\omega} \tag{5.5.62}$$

и уравнений (5.5.58), получим

$$Q^{\sigma\tau\omega} = \frac{2}{3}\left[\frac{\delta \mathbf{L}_p}{\delta \Gamma^\varepsilon_{\sigma\tau}} \cdot g^{\varepsilon\omega} - \frac{\delta \mathbf{L}_p}{\delta \Gamma^\varepsilon_{\sigma\omega}} g^{\varepsilon\tau}\right] = \frac{1}{2}\rho_m (v^\sigma v^\omega l^\tau - v^\sigma v^\tau l^\omega). \tag{5.5.63}$$

Этот результат в точности согласуется с (5.4.31), как и следовало ожидать.

С другой стороны, варьируя по метрическому тензору, получаем выражение для тензора энергии-импульса такой «девиационной среды»:

$$T_{p\sigma\tau} = 2\frac{\delta \mathbf{L}_p}{\delta g^{\sigma\tau}} = \frac{1}{2}\rho_m (v_\sigma V_\tau + v_\tau V_\sigma) = \frac{1}{2}\rho_m \frac{D_u}{du}(v_\sigma v_\tau). \tag{5.5.64}$$

Этот тензор, обладая должной симметрией, однако, заметно отличается от обычного тензора энергии некогерентной материи (пыли), являясь, как и следовало ожидать, исходя из идей вариационного вывода уравнения девиации геодезической, некоторым подобием производной от последнего тензора по параметру u.

5.6. Гравитационные сохраняющиеся величины

Мы рассмотрим здесь те возможные изменения, которые вносит новый подход к гравитации в выражения для сохраняющихся величин и в соответствующие выводы теории. Конечно, главное с точки зрения вариационного принципа, а также и теоремы Нётер, состоит в изменении нашего подхода к элементарным характеристикам гравитационного поля: если прежде все сводилось к метрическому тензору, то теперь мы имеем две системы величин — компоненты метрического тензора (геометрия) и символов Кристоффеля (коэффициенты связности, интерпретируемые как потенциалы физического поля). Поэтому в теорему Нётер нужно внести коррективы, и прежде всего ввиду специфических трансформационных свойств символов Кристоффеля:

$$\eta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = a^{\lambda}_{\mu\nu}|_{\sigma}{}^{\tau}\xi^{\sigma}{}_{,\tau} + \xi^{\lambda}{}_{,\mu,\nu}, \tag{5.6.1}$$

где множитель a имеет структуру, обычную для тензоров:

$$a^{\lambda}_{\mu\nu}|_{\sigma}{}^{\tau} = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\delta_{\sigma}{}^{\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\delta_{\mu}{}^{\tau} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\delta_{\nu}{}^{\tau}. \tag{5.6.2}$$

Наличие в законе (5.6.1) вторых производных от инфинитезимального вектора ξ^{μ} не изменяет соотношений Нётер (2.4.25) — (2.4.28) и (2.4.31), но предполагает использование новых определений динамических переменных. Мы приведем здесь эти определения в применении к гравитационным лагранжианам предыдущего параграфа:

$$\mathbf{U}_{\beta}{}^{\alpha} = \mathbf{L}\delta_{\beta}{}^{\alpha} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\alpha}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\beta} - \left(\frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}}\right)_{,\mu} +$$

$$+ \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}\, a^{\lambda}_{\mu\nu}|^{\alpha}_{\beta} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial g_{\mu\nu}}\, a_{\mu\nu}|^{\alpha}_{\beta}, \tag{5.6.3}$$

$$\mathbf{M}^{\alpha\tau}_{\beta} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\alpha}}\, a^{\lambda}_{\mu\nu}|_{\beta}{}^{\tau} + \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \Gamma^{\beta}_{\tau\alpha}}, \tag{5.6.4}$$

$$\mathbf{N}^{\alpha\sigma\tau}_{\beta} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \Gamma^{\beta}_{\sigma\tau,\alpha}}. \tag{5.6.5}$$

Отметим прежде всего, что в структуру канонического квазитензора

$$\mathbf{t}_{\beta}{}^{\alpha} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\alpha}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\beta} - \mathbf{L}\delta_{\beta}{}^{\alpha}, \tag{5.6.6}$$

гораздо более удовлетворительную, чем при явном учете в лагранжиане вторых производных, входят лишь канонический импульс и каноническая скорость, кроме лагранжиана, т. е. мы имеем дело с типичным преобразованием типа Лежандра; поэтому интегральный 4-вектор энергии-импульса является теперь функционалом лишь от канонических координат и канонических импульсов (см. § 2.6).

Так как $\mathbf{M}^{\alpha\tau}_{\beta}$ играет роль ключевой величины при определении энергии (массы) частиц на основании теоремы Гаусса, специально выпишем эту величину еще раз:

$$\mathbf{M}^{\alpha\tau}_{\beta} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \Gamma^{\beta}_{\mu\nu,\alpha}}\Gamma^{\tau}_{\mu\nu} - 2\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\tau,\alpha}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} + \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \Gamma^{\beta}_{\tau\alpha}}. \tag{5.6.7}$$

Перейдем к анализу конкретных лагранжианов, начав с

$$\mathbf{L}_a = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa} R. \tag{5.6.8}$$

Нам известно, во-первых, что

$$\frac{\delta \mathbf{L}_a}{\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}} = 0. \tag{5.6.9}$$

Затем

$$\mathbf{N}_{a\lambda}{}^{\alpha\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{4\varkappa}(g^{\mu\alpha}\delta_\lambda{}^\nu + g^{\nu\alpha}\delta_\lambda{}^\mu - 2g^{\mu\nu}\delta_\lambda{}^\alpha), \tag{5.6.10}$$

$$\mathbf{U}_{a\beta}^{\alpha} = \mathbf{T}_{a\beta}^{\alpha} - \mathbf{t}_{a\beta}^{\alpha}, \tag{5.6.11}$$

причем величина

$$\mathbf{T}_{a\beta}^{\alpha} = \frac{\sqrt{-g}}{\varkappa}\left(R_\beta{}^\alpha - \frac{1}{2}\delta_\beta{}^\alpha R\right) \tag{5.6.12}$$

хорошо известна из уравнений Эйнштейна;

$$\mathbf{t}_{a\beta}^{\alpha} = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}(\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu,\beta} g^{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\beta} g^{\mu\nu} - R\delta_\beta{}^\alpha). \tag{5.6.13}$$

Для сравнения этой теории с уже известными удобнее всего воспользоваться выражением для плотности обобщенного спина, следующим в данной модификации теоремы Нётер из лагранжиана $\mathbf{L}_a$:

$$\mathbf{M}_{a\beta}^{\alpha\tau} = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}[2\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} g^{\mu\tau} - \Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta} g^{\alpha\tau} - \Gamma^{\tau}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\delta_\beta{}^\alpha]. \tag{5.6.14}$$

Эта величина в точности совпадает с той, которая следует из этого же лагранжиана, если в качестве элементарных переменных принять компоненты метрического тензора. Следовательно, все выводы теории относительно динамических переменных также совпадут. Этот знаменательный факт, наряду с известными «хорошими» свойствами квазитензора энергии-импульса (5.6.13) и соответствием его в общей форме требованиям канонического формализма позволяет надеяться на удобство применения такого формализма при квантовании гравитационного поля.

При вычислении динамических переменных для $\mathbf{L}_R$ и $\mathbf{L}_K$ (см. § 5.5) мы ограничимся лишь плотностью обобщенного спина. Она соответственно равна

$$\mathbf{M}_{R\beta}{}^{\alpha\tau} = \frac{\delta \mathbf{L}_R}{\delta \Gamma^{\beta}_{\tau\alpha}} + \sqrt{-g}\,[(R_\mu{}^{\cdot\rho\alpha\tau} + R_\mu{}^{\cdot\tau\alpha\rho})\Gamma^{\mu}_{\rho\beta} - R_\beta{}^{\cdot\nu\alpha\rho}\Gamma^{\tau}_{\nu\rho}] \tag{5.6.15}$$

и

$$\mathbf{M}_{K\beta}{}^{\alpha\tau} = \frac{\delta \mathbf{L}_K}{\delta \Gamma^{\beta}_{\tau\alpha}} + \sqrt{-g}\Big[R_\beta{}^\rho\Gamma^{\tau}_{\nu\rho} g^{\nu\alpha} - R_\beta{}^\alpha\Gamma^{\tau}_{\nu\lambda} g^{\nu\lambda} - R_\mu{}^\tau\Gamma^{\mu}_{\nu\beta} g^{\nu\alpha} -$$
$$- R_\mu{}^\rho\Gamma^{\mu}_{\rho\beta} g^{\alpha\tau} + 2R_\mu{}^\alpha\Gamma^{\mu}_{\nu\beta} g^{\nu\tau} - R^{\nu\lambda}\Gamma^{\tau}_{\nu\lambda}\delta_\beta{}^\alpha - R^{\tau\alpha}\Gamma^{\rho}_{\rho\beta} +$$
$$+ 2R^{\tau\nu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - R\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} g^{\nu\tau} + \frac{1}{2}R(\Gamma^{\tau}_{\nu\lambda} g^{\nu\lambda}\delta_\beta{}^\alpha + \Gamma^{\rho}_{\rho\beta} g^{\alpha\tau})\Big]. \tag{5.6.16}$$

Легко показать, что вклад в массу шварцшильдовского центра способны дать лишь величины, происходящие от L_a, так как асимптотика символов Кристоффеля и тензора Римана — Кристоффеля при больших r соответственно имеет вид

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \sim r^{-2} \tag{5.6.17}$$

и

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} \sim r^{-3}, \tag{5.6.18}$$

так что величины M_R и M_K слишком быстро убывают на бесконечности. Вклад же от величины M_a уже обсуждался в § 3.8, так что мы больше не будем к нему возвращаться.

5.7. Усреднение уравнений полей. Полуфеноменологическая теория физических полей в материальных средах

Усреднение микроскопических уравнений электродинамики (уравнений Лоренца) — хорошо известная процедура, приводящая к установлению вида уравнений Максвелла в материальных средах, к введению понятий напряженности и индукции поля как самостоятельных физических величин, к определению векторов поляризации среды. Мы рассмотрим здесь сначала общую постановку задачи об усреднении уравнений физических полей, а затем, проиллюстрировав применение этой процедуры на примере электродинамики, обсудим ее в приложении к гравитационному полю.

В целях усреднения уравнений электродинамики Лоренц ввел понятие физически бесконечно малой области пространства — такой области, которая намного больше размеров микроскопических (атомных и молекулярных) неоднородностей вещества, но намного меньше размеров макроскопических неоднородностей, соответствующих границам тел или включений. Тогда, проводя усреднение по таким физически бесконечно малым областям, мы получаем вместо микроскопических характеристик поля (и среды) некоторые сглаженные характеристики, тем не менее остающиеся функциями координат и времени. Для этих новых характеристик и записываются уравнения макроскопической теории, причем часто попутно строятся модели данной среды и делаются предположения о связи близких по природе характеристик между собой (например, связи электрических напряженности и индукции через диэлектрическую постоянную).

При последовательном релятивистском подходе усреднение следует проводить по физически бесконечно малым *4-мерным* объемам, также соответствующим определению Лоренца. Для того чтобы отдельные элементы среды (внутри физически бесконечно малых областей) могли двигаться с релятивистскими скоростями, целесообразно разбить процедуру усреднения на две ступени (де Гроот и Флигер, 1964; ср. со старым подходом: Делленбах, 1919).

В первую очередь усреднение проводится по отдельным самостоятельно движущимся элементам среды — молекулам или группам совместно движущихся молекул, которые рассматриваются в сопутствующей им системе отсчета, так что процедура усреднения дает их собственные электрический и магнитный моменты (если они в целом нейтральны). Переходя затем к лабораторной системе отсчета, мы задаем скорости движения этих элементарных образований и применяем преобразования координат. Тем самым «релятивизация» теории достигается практически более легким путем. Затем проводится вторая стадия усреднения, о которой мы фактически уже говорили.

Если в системе учитывается и гравитационное поле, то все предварительные расчеты целесообразно проводить в свободно падающей системе отсчета (когда физическая система настолько велика, что ощущается неоднородность поля, следует ввести ступень, соответствующую усреднению отдельных частей в их системах свободного падения); при этом все соотношения, не включающие тензора кривизны, принимают вид, характерный для частной теории относительности (кроме случая фермионных полей!), и вычисления упрощаются.

В общем случае при усреднении главную роль играют две теоремы: теорема о переставимости операции усреднения и операции частного дифференцирования и теорема об учете поляризационных эффектов при усреднении. Первая из этих теорем широко известна, и мы укажем здесь лишь формулу, выражающую ее содержание:

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} A} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \bar{A}, \tag{5.7.1}$$

где A — усредняемая физическая величина, причем операция усреднения определяется как

$$\bar{A} = \frac{1}{\int\limits_{\Omega} (dx)} \int\limits_{\Omega} A\,(dx). \tag{5.7.2}$$

Область интегрирования Ω и есть та бесконечно малая область, по которой проводится усреднение на второй стадии процесса (о первой стадии мы больше заботиться не будем).

Вторая теорема также хорошо известна, однако мы повторим здесь ее доказательство в тензорной форме (в случае общей теории относительности лучше сказать: в четырехмерной форме).

Теорема. Если в отсутствие поля некоторая характеристика среды τ_B обладает свойством

$$\int \tau_B (dx) = 0 \tag{5.7.3}$$

(обобщенное определение «нейтральности» среды), то в присутствии поля имеет место соотношение

$$\bar{\tau}_B = - M_{B;\nu}^{\nu}, \tag{5.7.4}$$

где

$$M_B{}^{\nu} = \overline{\tau_B \xi^{\nu}}, \tag{5.7.5}$$

причем ξ^{ν} является вектором деформации среды под воздействием наложенного поля. Здесь важно помнить, что до и после наложения поля не меняется *геометрическая* область интегрирования, так что какие-то части среды, вследствие деформации, выйдут за границу области интегрирования, а другие части среды могут проникнуть снаружи этой области внутрь нее.

Доказательство теоремы несложно. В самом деле, деформация среды около границы области интегрирования приводит к сдвигу частиц этой среды ξ^{ν}, так что объем этой среды, *уходящий* из области интегрирования Ω, оказывается равен $\xi^{\nu} dS_{\nu}$, где dS_{ν} — элемент гиперповерхности, окружающей эту область, ориентированный, как обычно, в направлении внешней нормали. Соответственно из рассматриваемой геометрической области выносится количество характеристики τ_B, равное $\tau_B \xi^{\nu} dS_{\nu}$, которое следует *вычесть* из полного значения $(\bar{\tau})_0$, проинтегрировав его предварительно по 3-мерной области (гиперповерхности Σ) и разделив на

$\int\limits_{\Omega}(dx)$. Однако, вследствие (5.7.3), среднее значение $(\bar{\tau}_B)_0$ в отсутствие поля равно нулю, так что мы окончательно получим

$$\bar{\tau}_B = -\frac{1}{\int\limits_{\Omega}(dx)}\oint\limits_{\Sigma}\tau_B\xi^\nu dS_\nu \tag{5.7.6}$$

или, применив теорему Гаусса, придем к (5.7.4) и (5.7.5). Теорема доказана.

В случае электродинамики, усредняя ток поляризации, получаем

$$M^{\nu\mu} = \overline{\rho_P v^\mu\xi^\nu} = \frac{1}{2}\overline{\rho_P(v^\mu\xi^\nu - v^\nu\xi^\mu)} + \frac{1}{2}\overline{\rho_P\frac{d}{ds}(\xi^\mu\xi^\nu)}. \tag{5.7.7}$$

Если считать плотность связанных зарядов медленно меняющейся во времени, можно в последнем выражении отбросить последний член, который тогда исчезает при усреднении по достаточно большому промежутку времени. Тогда $M^{\nu\mu} = -M^{\mu\nu}$.

Вообще же плотность тока распадается на ток проводимости (в который мы для простоты включим и конвекционные токи) и ток поляризации:

$$j^\mu = j_C{}^\mu + j_P{}^\mu. \tag{5.7.8}$$

Среднее значение тока проводимости дает макроскопическую величину плотности тока:

$$\overline{j_C{}^\mu} = J^\mu. \tag{5.7.9}$$

Уравнения Максвелла — Лоренца микроскопической теории имеют вид

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\nu\lambda;\mu} + F_{\lambda\mu;\nu} = 0 \tag{5.7.10}$$

и

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = j^\nu. \tag{5.7.11}$$

Усредняя тензор микроскопической напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, получаем тензор макроскопической напряженности $E_{\mu\nu}$:

$$\overline{F_{\mu\nu}} = E_{\mu\nu}. \tag{5.7.12}$$

С точки зрения 3-мерной записи электродинамики компонентами этого последнего тензора являются 3-вектор электрической напряженности $\mathbf{E}$ и 3-вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$, исторически лишь случайно получившие разные названия.

Учет всех полученных соотношений при усреднении уравнений (5.7.11) дает теперь

$$E^{\mu\nu}{}_{;\mu} = J^\nu - M^{\mu\nu}{}_{;\mu}, \tag{5.7.13}$$

и при введении тензора электромагнитной индукции

$$D^{\mu\nu} = E^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}, \tag{5.7.14}$$

также антисимметричного, дает уравнения с дивергенцией индукции. С 3-мерной точки зрения компонентами тензора электромагнитной индукции $D^{\mu\nu}$ являются 3-вектор электрической индукции $\mathbf{D}$ и 3-вектор магнитной напряженности $\mathbf{H}$. Итак, уравнения Максвелла в материальных средах приобретают вид

$$E_{\mu\nu;\lambda} + E_{\nu\lambda;\mu} + E_{\lambda\mu;\nu} = 0 \tag{5.7.15}$$

и

$$D^{\mu\nu}{}_{;\mu} = J^{\nu}. \tag{5.7.16}$$

Приведем здесь без вывода важные соотношения, феноменологически связывающие тензоры напряженности и индукции для случая изотропных сред[1]:

$$D_{\alpha\beta}v^{\alpha} = \varepsilon \cdot E_{\alpha\beta}v^{\alpha}, \tag{5.7.17}$$

$$* D_{\alpha\beta}v^{\alpha} = \frac{1}{\mu} * E_{\alpha\beta}v^{\alpha}. \tag{5.7.18}$$

Разрешая эти уравнения относительно соответствующих тензоров, нетрудно получить

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} E_{\alpha\beta} + \frac{1-\varepsilon\mu}{\mu} (E_{\gamma\alpha}v_{\beta} + E_{\beta\gamma}v_{\alpha}) v^{\gamma}, \tag{5.7.19}$$

$$E_{\alpha\beta} = \mu D_{\alpha\beta} - \frac{1-\varepsilon\mu}{\varepsilon} (D_{\gamma\alpha}v_{\beta} + D_{\beta\gamma}v_{\alpha}) v^{\gamma}. \tag{5.7.20}$$

Как отметил Мёллер, в этой теории возникают некоторые затруднения в отношении закона преобразования вектора плотности тока J^{ν}.

Подход к усреднению электродинамики, исходя из уравнений поля, безусловно является наиболее простым, так как эти уравнения линейны, и потому не вызывают затруднений, которые существовали бы при усреднении квадратичной функции полевых переменных — лагранжиана. Однако идея усреднения лагранжиана, а не уравнений, привлекательна по двум причинам. Во-первых, интеграл действия

$$J = \int \mathrm{L}(dx), \tag{5.7.21}$$

очевидно, может быть сразу же записан (без каких-либо приближений!) для усредненного лагранжиана,

$$J = \int \overline{\mathrm{L}}(dx), \tag{5.7.22}$$

путем простого разбиения операции интегрирования на два этапа — по малым областям и по всему 4-пространству.

Предположим, что флуктуации в рассматриваемых областях малы, т. е. можно пренебречь корреляциями электромагнитного поля и характеристик среды. Тогда средние значения произведений величин можно считать приближенно равными произведениям соответствующих средних. Взяв лагранжиан электродинамики в физически малой области в виде

$$\mathrm{L}_{\mathrm{em}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_{\nu}j^{\nu}, \tag{5.7.23}$$

получим при усреднении

$$\overline{\mathrm{L}}_{\mathrm{em}} = -\frac{1}{4} E_{\mu\nu}E^{\mu\nu} + \Phi_{\nu}M^{\mu\nu}{}_{,\mu} - \Phi_{\nu}J^{\nu}, \tag{5.7.24}$$

где макроскопический потенциал обозначен через Φ_{ν}:

$$\overline{A}_{\nu} = \Phi_{\nu}, \tag{5.7.25}$$

причем, конечно,

$$E_{\mu\nu} = \Phi_{\nu,\mu} - \Phi_{\mu,\nu}. \tag{5.7.26}$$

[1] См. Ландау и Лифшиц (1959), а также Шёпф (1959, 1962).

Выделяя в (5.7.24) дивергенциальный член, отбрасывая его и пользуясь на основании антисимметрии $M^{\mu\nu}$ соотношением (5.7.26), получаем «рабочее» выражение для макроскопического лагранжиана:

$$\overline{\mathrm{L}}_{\mathrm{em}} = -\frac{1}{4} E_{\mu\nu}E^{\mu\nu} - \frac{1}{2} E_{\mu\nu}M^{\mu\nu} - \Phi_\nu J^\nu. \tag{5.7.27}$$

Варьируя действие, построенное из усредненного лагранжиана, по Φ_α, получаем уравнения

$$D^{\beta\alpha}_{\ \ ,\beta} = J^\alpha, \tag{5.7.28}$$

образующие вместе с (5.7.26) систему, совершенно эквивалентную полученной ранее системе уравнений (5.7.15), (5.7.16). Тем самым подтвердилась целесообразность сделанных здесь предположений, на основании которых мы провели усреднение лагранжиана.

Второй привлекательной стороной усреднения лагранжиана поля, а не уравнений является автоматическое получение из него выражений и для пондеромоторных сил, и для тензора энергии-импульса электромагнитного поля в материальных средах, вопрос о котором все еще остается в современной электродинамике не вполне ясным (вспомним тензоры Лоренца и Абрагама).

Перейдем к вопросу о гравитационном поле[1]. Для проведения его усреднения особенно удобны именно квазимаксвелловские уравнения, полученные в предыдущих параграфах и адекватно выражающие теорию гравитации Эйнштейна. Эти уравнения *линейны* относительно тензора гравитационной напряженности $R^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\rho}$, который мы рассматриваем теперь по аналогии с электродинамикой как микроскопическую характеристику поля. Ее среднее значение — макроскопический тензор гравитационной напряженности — мы будем обозначать тем же символом, тем более, что результаты, к которым мы сейчас придем, справедливы и в точной, неусредненной теории. Заметим, что тензор обобщенного гравитационного тока $Q_{\mu\nu\lambda}$ может быть представлен в виде дивергенции:

$$Q_{\mu\nu\lambda} = \varkappa\left[T_{\mu\lambda}\delta_\nu{}^\rho - T_{\mu\nu}\delta_\lambda{}^\rho + \frac{T}{2}\left(g_{\mu\nu}\delta_\lambda{}^\rho - g_{\mu\lambda}\delta_\nu{}^\rho\right)\right]_{;\,\rho}. \tag{5.7.29}$$

Используя консервативность тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, можно дополнить выражение в скобках таким образом, что

$$Q_{\mu\nu\lambda} = -M^{\rho}_{\cdot\,\mu\nu\lambda;\rho}, \tag{5.7.30}$$

где величина «гравитационной поляризации»

$$M^{\rho}_{\cdot\,\mu\nu\lambda} = \varkappa\left[T_{\mu\nu}\delta_\lambda{}^\rho + T_\lambda{}^\rho g_{\mu\nu} - T_{\mu\lambda}\delta_\nu{}^\rho - T_\nu{}^\rho g_{\mu\lambda} - \frac{T}{2}\left(g_{\mu\nu}\delta_\lambda{}^\rho - g_{\mu\lambda}\delta_\nu{}^\rho\right)\right] \tag{5.7.31}$$

обладает теми же алгебраическими свойствами, что и тензор кривизны Римана — Кристоффеля. В квазимаксвелловских уравнениях гравитационного поля естественно перенести этот член налево и объединить с тензором напряженности гравитационного поля — тензором Римана — Кристоффеля, обозначив сумму как

$$D^{\rho}_{\cdot\,\mu\nu\lambda} = R^{\rho}_{\cdot\,\mu\nu\lambda} + M^{\rho}_{\cdot\,\mu\nu\lambda}. \tag{5.7.31$'$}$$

Этот тензор можно интерпретировать как *тензор гравитационной индукции* (в макроскопической теории его следует предварительно усреднить).

[1] В работе Широкова и Фишера (1962) усреднение уравнений Эйнштейна проводилось совершенно с другой точки зрения.

Эта индукция, однако, имеет не поляризационную природу, в противоположность случаю электродинамики, а «конвективную», и обязана специфике гравитационного взаимодействия.

Подводя итоги, можно сказать, что уравнения гравитационного поля выражаются в форме уравнений для напряженности гравитационного поля и гравитационной индукции в форме

$$R^{\rho}_{\cdot\,\mu\nu\lambda;\sigma} + R^{\rho}_{\cdot\,\mu\lambda\sigma;\nu} + R^{\rho}_{\cdot\,\mu\sigma\nu;\lambda} = 0 \tag{5.7.32}$$

и

$$D^{\rho}_{\cdot\,\mu\nu\lambda;\rho} = 0. \tag{5.7.33}$$

Сходство со случаем электродинамики очевидно, причем тензор $R^{\rho}_{\cdot\mu\nu\lambda}$ соответствует $E_{\mu\nu}$, а тензор $D^{\rho}_{\cdot\mu\nu\lambda}$ — $D_{\mu\nu}$. Отсутствие источников в уравнениях гравитационного поля соответствует специфике этого поля: в пустоте эти уравнения сохраняют свой прежний вид, и лишь напряженность совпадает тогда с индукцией. Заметим попутно, что свертка тензора индукции (с учетом уравнений Эйнштейна) равна

$$D^{\rho}_{\cdot\,\mu\nu\rho} = \varkappa T_{\mu\nu}. \tag{5.7.34}$$

Полученные результаты верны не только при усреднении, но и в обычной теории гравитации Эйнштейна. Если же на самом деле проводить усреднение, то естественно по аналогии с электродинамикой в случае однородных сред предположить, что действуют соотношения с квазиэлектрической и квазимагнитной константами:

$$D_{\cdot\,\mu\nu\lambda}v^{\nu} = \varepsilon R_{\cdot\,\mu\nu\lambda}v^{\nu} \tag{5.7.35}$$

и

$$*D^{\rho}_{\cdot\mu\nu\lambda}v^{\nu} = \frac{1}{\mu} *R^{\rho}_{\cdot\mu\nu\lambda}v^{\nu}, \tag{5.7.36}$$

где

$$*R^{\rho}_{\cdot\,\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} R^{\rho}_{\cdot\,\mu\alpha\beta}E^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\,\nu\lambda} \tag{5.7.37}$$

и

$$*D^{\rho}_{\cdot\,\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} D^{\rho}_{\cdot\,\mu\alpha\beta}E^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\,\nu\lambda}. \tag{5.7.38}$$

В заключение отметим, что скорость распространения гравитационных волн в материальных средах должна отличаться от их скорости в вакууме. Она может как превышать единицу (скорость света в пустоте), так и быть меньше ее (речь идет, разумеется, о фазовой скорости волн!). Это зависит от частот гравитационных колебаний, распространяющихся в средах, характеризуемых определенными собственными частотами (возможны, по аналогии с электродинамикой, как нормальная, так и аномальная дисперсия). Поэтому мы приходим к заключению, что должен существовать эффект черенковского излучения гравитационных волн частицами, движущимися в материальных средах со скоростями, превышающими скорость распространения гравитационных волн в этих средах (излучение происходит, как обычно, на тех частотах, для которых выполняется указанное соотношение скоростей).

6. ПРИНЦИПЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

6.1. Канонический формализм и квантование

Наиболее прямым путем перехода от классической теории к теории квантовой является метод канонического квантования. Если применить его к механике материальных точек, то мы получим квантовую (волновую) механику — такое квантование можно назвать «первичным». Материальным частицам при таком переходе сопоставляются волны вероятности, образующие *поле* (в обобщенном смысле — сплошную среду). Применяя же канонический метод к физическим полям или механическим сплошным средам, мы, напротив, приходим к понятию частиц — квантов возбуждения этих систем (в том числе и таких «частиц», как фононы, существующие лишь на фоне реальной механической сплошной среды, тогда как фотоны, фермионы и прочие «истинные» частицы существуют на фоне вакуума соответствующих полей). Это квантование называют вторичным.

Обычно канонический метод сводится просто к применению квантовых скобок Пуассона — замене классических скобок в соотношениях, записанных в рамках гамильтонова (канонического) формализма, на коммутаторы с соответствующим коэффициентом. Этот переход от классических скобок Пуассона к квантовомеханическим коммутаторам представляется неизбежным, если мы постулируем, что фигурирующие в теории величины являются не c-числами, а операторами, и, следовательно, вообще говоря, не коммутируют друг с другом. Схема такого перехода весьма проста [см. (Дирак, 1960; Лич, 1961)] и состоит в следующем.

Из свойств классических скобок Пуассона как в механике, так и в теории поля (2.6.48) и (2.6.49) следуют две возможные записи скобок Пуассона для произведений функций канонических координат и импульсов $F(A_B; \Pi^{B\alpha})$. В самом деле, с одной стороны,

$$\{\Phi\Theta, \Psi\mathrm{T}\} = \Phi\{\Theta, \Psi\mathrm{T}\} + \{\Phi, \Psi\mathrm{T}\}\Theta = \Phi\{\Theta, \Psi\}\mathrm{T} + \Phi\Psi\{\Theta, \mathrm{T}\} + \\ + \Psi\{\Phi, \mathrm{T}\}\Theta + \{\Phi, \Psi\}\mathrm{T}\Theta, \tag{6.1.1}$$

а с другой —

$$\{\Phi\Theta, \Psi\mathrm{T}\} = \{\Phi\Theta, \Psi\}\mathrm{T} + \Psi\{\Phi\Theta, \mathrm{T}\} = \Phi\{\Theta, \Psi\}\mathrm{T} + \{\Phi, \Psi\}\Theta\mathrm{T} + \\ + \Psi\Phi\{\Theta, \mathrm{T}\} + \Psi\{\Phi, \mathrm{T}\}\Theta. \tag{6.1.2}$$

Приравнивая друг другу эти два выражения и производя простые тождественные преобразования, получаем:

$$[\Phi, \Psi]_- \cdot \{\Theta, \mathrm{T}\} = \{\Phi, \Psi\} \cdot [\Theta, \mathrm{T}]_-, \tag{6.1.3}$$

где введен коммутатор

$$[\Phi, \Theta]_- \overset{\mathrm{Def}}{=} \Phi\Theta - \Theta\Phi. \tag{6.1.4}$$

Если мы остаемся на почве классической теории, то коммутаторы должны обращаться в нуль, и соотношение (6.1.3) тождественно выполняется; в квантовой же теории, когда величины, стоящие в коммутаторе, представляют собой операторы, необходимым и достаточным условием выполнения соотношения (6.1.3) является связь

$$\{\Phi, \Psi\} = \alpha[\Phi, \Psi]_-, \tag{6.1.5}$$

причем такое равенство справедливо для *всех* операторов, для которых определены классические скобки Пуассона, а коэффициент пропорциональности, очевидно, должен быть *универсальной константой,* одинаковой для всех пар операторов.

Легко определить размерность этой константы; она равна

$$[\alpha] = [\mathrm{L}]^{-1}\cdot[l]^4, \tag{6.1.6}$$

где L — лагранжиан, а l — длина. Так как мы пользовались здесь естественной системой единиц, в которой $c = 1$, то при переходе к обычной CGS-системе следует пересмотреть размерность универсальной постоянной α (введя, например, *время*).

Мы получим при этом

$$[\alpha] = (\textit{эрг}\cdot\textit{сек})^{-1} \tag{6.1.7}$$

— размерность обратного *действия*, что естественно для квантовой теории.

Обращаясь к вопросу о комплексности константы α, мы сначала предположим, что для классических скобок Пуассона выполняется соотношение

$$\{\Phi, \Psi\}^+ = \{\Phi^+, \Psi^+\}, \tag{6.1.8}$$

где крест обозначает эрмитово сопряжение (для классических величин совпадающее с обычным комплексным сопряжением, если речь идет не о матрицах). Тогда

$$\{\Phi, \Psi\}^+ = \alpha^*[\Phi\Psi]_-^+ = -\alpha^*[\Phi^+, \Psi^+]_- = -\frac{\alpha^*}{\alpha}\{\Phi^+, \Psi^+\}, \tag{6.1.9}$$

откуда при сравнении с (6.1.8) следует

$$\alpha^* = -\alpha, \tag{6.1.10}$$

т. е.

$$\alpha = -\frac{i}{\hbar}, \tag{6.1.11}$$

где знак выбран из соображений удобства в дальнейших приложениях, а новая универсальная константа $\hbar$ имеет размерность действия (*эрг·сек*) и интерпретируется как постоянная Планка.

Ввиду размерного характера новой универсальной постоянной, вошедшей теперь в теорию, целесообразно так «прокалибровать» систему единиц, чтобы в ней была равна единице не только скорость света c, но и постоянная Планка $\hbar$. Мы будем продолжать называть эту систему естественной. Тогда *квантовые скобки Пуассона* примут простой вид

$$\{\Phi, \Psi\} = -i[\Phi, \Psi]_-. \tag{6.1.12}$$

Как видно, этот путь перехода приводит только к коммутационным, но не к антикоммутационным соотношениям, что могло бы показаться желательным в приложении к фермионным полям [1].

Ввиду этого Пайерлс (1952) предложил при необходимости пользоваться оператором поворота на полный угол 2π, предполагая, что такой поворот меняет знак соответствующих переменных. Пейерлс предложил считать, что скобки Пуассона определены тогда только для соответствующих величин, умноженных на этот оператор Θ (вообще говоря, такого рода

---

[1] Нужно сказать, что такое пожелание относится далеко не ко всем конструкциям этих полей; например, если в соотношениях участвуют динамические переменные — энергия-импульс, спин и пр., то необходимо использовать именно *коммутаторы!*

ограничение применимости скобок Пуассона соответствует духу теории). Итак, рассмотрим скобки Пуассона для $\Theta\Phi$ и Ψ:

$$\{\Theta\Phi, \Psi\} = -i[\Theta\Phi, \Psi]_- = -i(\Theta\Phi\Psi - \Psi\Theta\Phi) =$$
$$= -i(\Theta\Phi\Psi - \Psi\Theta\Phi + \Phi\Theta\Psi - \Phi\Theta\Psi + \Phi\Psi\Theta -$$
$$- \Phi\Psi\Theta + \Psi\Phi\Theta - \Psi\Phi\Theta) = -i\{[\Theta, \Phi]_+\Psi +$$
$$+ [\Phi, \Psi]_+\Theta - \Psi[\Theta, \Phi]_+ - \Phi[\Theta, \Psi]_+\}. \tag{6.1.13}$$

Если теперь оператор Θ антикоммутирует как с Φ, так и с Ψ, а антикоммутатор $[\Phi, \Psi]_+$ является c-числом, причем в левой части соотношения (6.1.13) Θ фигурирует просто как множитель слева, то, «сокращая» на Θ, получаем

$$\{\Phi, \Psi\} = -i[\Phi, \Psi]_+. \tag{6.1.14}$$

Нужно, однако, заметить, что стоящие в левой части (6.1.14) скобки Пуассона уже не могут иметь классического смысла хотя бы потому, что они не обладают обычными алгебраическими свойствами. Последнее обстоятельство заставляет нас предположить, что возможна такая модификация классической механики (которая уже не сможет носить названия классической), в которую включены и фермиевские частицы в соответствии с их статистикой; если такая механика может быть создана, то ее следовало бы назвать корпускулярной в отличие от волновой механики.

Проделанного анализа вполне достаточно для того, чтобы перейти к получению конкретных выводов из квантовой теории поля, однако сначала полезно подойти ко вторичному квантованию и, с другой стороны, привлекая конкретные представления о физических системах и преобразованиях координат. Таким образом можно перекинуть мост к теореме Нетер и одновременно к классическому каноническому формализму в теории поля, минуя соображения типа использованных при выводе соотношения (6.1.5). Этот альтернативный путь обрисован в монографии Боголюбова и Ширкова (1957), обозначений которых мы будем в основном придерживаться в нашем изложении[1]. Вместе с тем мы попытаемся разработать этот путь с несколько иных позиций [ср. также наши исследования (Мицкевич, 1958в, 1959г, 1960)].

С самого начала необходимо постулировать, что физические системы описываются с помощью амплитуды состояния $\Phi[\Sigma]$, определенной, как и следовало ожидать, на гиперповерхности, фиксирующей (относительную) одновременность лежащих на ней мировых точек. Предположим, что канонические координаты и импульсы являются операторами, действующими на амплитуду состояния.

Простой переход к новой системе координат без изменения пространственно-подобной гиперповерхности одновременности не может вызвать изменения амплитуды состояния, так как физическая ситуация не зависит от способа ее описания, в частности, от способа нумерации пространственно-временных точек. Однако переход к новой системы отсчета соответствует, кроме преобразования координат, еще и соответствующей калибровке нашей гиперповерхности. Вообще говоря, амплитуда состояния при таком преобразовании изменится, и можно записать соотношение

$$\Phi'[\Sigma'] = U(\Sigma)\Phi[\Sigma]. \tag{6.1.15}$$

Такое преобразование соответствует переходу к новой системе координат и одновременно к другим точкам, от которых зависят рассматриваемые функции, причем координаты этих новых точек в новой системе координат численно совпадают с координатами старых точек в старой системе. Иными

[1] См. также Швебер (1963), Вентцель (1947).

словами, берется уже знакомое преобразование η^*:

$$A_B \to A_B + \eta^* A_B. \tag{6.1.16}$$

Считая используемое преобразование инфинитезимальным, можно записать:

$$U(\Sigma) = I + \delta U(\Sigma); \tag{6.1.17}$$

тогда

$$\Phi^+ A_B \Phi \to \Phi^+ A_B \Phi + \Phi^+ [\delta U^+ A_B + A_B \delta U + \eta^* A_B] \Phi. \tag{6.1.18}$$

Если считать матричный элемент $\Phi^+ A_B \Phi$ не зависящим от выбора гиперповерхности, фиксирующей одновременность событий, то следует положить [1]:

$$-\eta^* A_B = \delta U^+ A_B + A_B \delta U. \tag{6.1.19}$$

Взяв вместо A_B просто единичную матрицу I, мы не нарушим соотношения (6.1.19), но обнаружим, что матрица δU антиэрмитова,

$$\delta U^+ = -\delta U, \tag{6.1.20}$$

что соответствует унитарности матрицы преобразования U:

$$U^+ U = I. \tag{6.1.21}$$

Вводя для удобства эрмитову матрицу

$$\delta U = i \delta V, \tag{6.1.22}$$

$$\delta V^+ = \delta V, \tag{6.1.23}$$

мы получаем из (6.1.19)

$$-\eta^* A_B = i [A_B, \delta V]_-. \tag{6.1.24}$$

Так как оператор δV определен на гиперповерхности, то естественно взять

$$\delta V = \int\limits_{\Sigma} \delta \mathbf{V}^\alpha dS_\alpha. \tag{6.1.25}$$

Некоторые его свойства можно выяснить, исходя из состояния физического *вакуума*, описываемого амплитудой состояния $\Phi_{\text{вак}}$, которая не должна изменяться от гиперповерхности к гиперповерхности ввиду законов сохранения:

$$\Phi_{\text{вак}}(\Sigma_1) = \Phi_{\text{вак}}(\Sigma_2). \tag{6.1.26}$$

В другой системе

$$\Phi'_{\text{вак}}(\Sigma_1) = \Phi_{\text{вак}}(\Sigma_2). \tag{6.1.27}$$

Поэтому

$$\delta V(\Sigma_1) \Phi_{\text{вак}}[\Sigma_1] = \delta V(\Sigma_2) \cdot \Phi_{\text{вак}}[\Sigma_2], \tag{6.1.28}$$

и можно заключить, что

$$\int\limits_{\Sigma_1} \delta \mathbf{V}^\alpha dS_\alpha = \int\limits_{\Sigma_2} \delta \mathbf{V}^\alpha dS_\alpha. \tag{6.1.29}$$

Меняя направление одной из нормалей, переходя к гиперцилиндру с бесконечно удаленными в пространственном направлении боковыми стенками и применяя теорему Гаусса, получаем:

$$\oint \delta \mathbf{V}^\alpha dS_\alpha = \int (\delta \mathbf{V}^\alpha)_{,\alpha} (dx) = 0. \tag{6.1.30}$$

[1] В предположении, что это имеет место при произвольных $\Phi[\Sigma]$.

Естественным обобщением этого равенства служит дифференциальный закон сохранения

$$(\delta \mathbf{V}^{\alpha})_{,\alpha} = 0. \tag{6.1.31}$$

Наши рассуждения здесь не претендуют на строгость, а являются наводящими. Поэтому удобно воспользоваться квазиклассическим приближением, в котором можно положить

$$\Phi_1 = e^{iJ}\Phi_0, \tag{6.1.32}$$

где интеграл действия берется в «слое» между двумя пространственно-подобными гиперповерхностями:

$$J = \int_{\Sigma_0}^{\Sigma_1} \mathbf{L}(dx). \tag{6.1.33}$$

Тогда

$$\Phi_1' = e^{iJ'}\Phi_0'. \tag{6.1.34}$$

Имея в виду закон преобразования

$$\Phi_1' = U(\Sigma_1)\Phi_1, \qquad \Phi_0' = U(\Sigma_0)\Phi_0, \tag{6.1.35}$$

можно проследить цепочку равенств

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= e^{iJ}\Phi_0 = e^{iJ}U(\Sigma_0)^{-1}\Phi_0' = e^{iJ}U(\Sigma_0)^{-1}e^{-iJ'}\Phi_1' = \\ &= e^{iJ}U(\Sigma_0)^{-1}e^{-iJ'}U(\Sigma_1)\Phi_1,\end{aligned} \tag{6.1.36}$$

откуда в силу произвольности выбора состояния Φ_1 найдем

$$e^{iJ}U(\Sigma_0)^{-1}e^{-iJ'}U(\Sigma_1) = I. \tag{6.1.37}$$

Это выражение удобно привести к виду

$$e^{-iJ_1'}U_1e^{iJ_1} = -e^{-iJ_0'}U_0e^{iJ_0} = \text{const}, \tag{6.1.38}$$

если представить интеграл действия (6.1.33) в виде разности

$$J = J_1 - J_0, \tag{6.1.39}$$

где

$$J_i = \int_{-\infty}^{\Sigma_i} \mathbf{L}(dx). \tag{6.1.40}$$

Переходя к бесконечно малым преобразованиям, запишем

$$J' = J + \delta J \tag{6.1.41}$$

и воспользуемся равенством (6.1.17). Выражение (6.1.41) удобно представить в виде

$$e^{-iJ'} \cong e^{-iJ}\cdot(1 - i\delta J). \tag{6.1.42}$$

Тогда постоянная величина, представленная в формуле (6.1.38), примет вид

$$I + e^{-iJ}(\delta U - i\delta J)e^{iJ} = \text{const}. \tag{6.1.43}$$

Ее следует приравнять единичной матрице; поэтому

$$\delta U = i\delta J. \tag{6.1.44}$$

Итак, с одной стороны, должен выполняться закон сохранения для инфинитезимального вектора (6.1.31), а с другой — должно иметь место соотношение типа

$$\int \delta \mathbf{V}^{\alpha} dS_{\alpha} = \delta \int \mathbf{L}(dx). \tag{6.1.45}$$

Ограничиваясь чисто эвристическим уровнем анализа, отметим, что конструкция, подчиняющаяся слабому (и потому физически полноценному!)

закону сохранения и построенная из L путем соответствующих дифференцирований, хорошо известна (см. § 2.4); это —

$$\delta \mathrm{V}^{\alpha} = - \mathbf{t}_{\beta}{}^{\alpha} \xi^{\beta} + \mathbf{M}_{\beta}^{\alpha\tau} \xi^{\beta}{}_{,\tau}. \qquad (6.1.46)$$

Тогда

$$\eta^* A_B = i \left[A_B, \int dS_\alpha (\mathbf{t}_{\beta}{}^{\alpha} \xi^{\beta} - \mathbf{M}_{\beta}^{\alpha\tau} \xi_{,\tau}) \right]_- . \qquad (6.1.47)$$

В свою очередь, левую часть этого выражения можно представить в форме

$$\eta^* A_B = a_B |_{\beta}{}^{\tau} \cdot \xi^{\beta}{}_{,\tau} - A_{B,\beta} \cdot \xi^{\beta}, \qquad (6.1.48)$$

так что (6.1.47) примет вид

$$\int \{ (a_B |_{\beta}{}^{\tau} \cdot \xi^{\beta}{}_{,\tau} - A_{B,\beta} \cdot \xi^{\beta}) \delta^{\alpha}(x, x') -$$

$$- i [A_B(x), (\mathbf{t}_{\beta}{}^{\alpha}(x') \xi^{\beta}(x') - \mathbf{M}_{\beta}^{\alpha\tau}(x') \xi^{\beta}(x')_{,\tau})]_- \} dS_\alpha^{(x')} = 0. \qquad (6.1.49)$$

Так как изменения координат ξ^{β} являются произвольными дифференцируемыми функциями, то соотношение (6.1.49) распадается на два:

$$- i A_{B,\beta} \cdot \delta^{\alpha}(x, x') = i [A_B(x), \mathbf{t}_{\beta}{}^{\alpha}(x')]_- \qquad (6.1.50)$$

и

$$a_B |_{\beta}{}^{\tau} \cdot \delta^{\alpha}(x, x') n_\alpha = - i [A_B(x), n_\alpha \mathbf{M}_{\beta}^{\alpha\tau}(x')]_-, \qquad (6.1.51)$$

причем в обоих случаях все величины берутся на одной гиперповерхности. Интегрируя по гиперповерхности, получаем отсюда в соответствии с (2.6.27) и (2.6.37):

$$i A_{B,\beta} = [A_B, P_\beta]_- \qquad (6.1.52)$$

и

$$i a_B |_{\beta}{}^{\tau} = [A_B, S_{\beta}{}^{\tau}]_-. \qquad (6.1.53)$$

Таким образом, мы вновь пришли к квантовым скобкам Пуассона, но с совершенно другой стороны: эти скобки записываются теперь ни в коем случае не для произвольных величин, в них обязательно должны входить 1) динамические переменные и 2) функции канонических переменных.

Итак, операторами, действующими на амплитуду состояния, являются потенциалы полей (и их производные); все поля, в том числе и метрическое, здесь взяты на равной основе. Однако метрическое поле служит одновременно для геометрических построений; в частности, оно определяет пространственно- или временно-подобный характер того или иного вектора. Поэтому квантование гравитации приводит непосредственно к модификации понятия пространственно-подобной гиперповерхности, столь важной для описания интегральных физических величин и для самого обоснования процедуры вторичного квантования с помощью скобок Пуассона. Можно указать разные пути преодоления этой трудности, например, введение второй (не подвергаемой квантованию) метрики в двуметрическом формализме.

6.2. Мотивировка и обсуждение квантования гравитации

На первый взгляд, пространственные и временна̀я координаты в равной мере используются как в классической физике (механика, гидродинамика, теория поля), так и в квантовой физике. Однако это совсем не так, ибо координаты, от которых зависят волновые функции квантовой механики, не имеют ничего общего с наблюдаемыми координатами частиц. Эти последние представляют собой собственные значения оператора коордипаты либо их средние значения (так как реальный эксперимент обычно имеет дело с усреднением разного рода). Таким образом, в квантовой физике мы имеем формально математический «фон» геометрического пространства-времени, на котором реализуются лишь отдельные точки как местоположения частиц. Соотношения неопределенности в принципе не допускают классических, непрерывных движений частиц в микромире, они отрицают возможность существования траекторий. Поэтому оказывается невозможной сама «реализуемость» пространства движениями частиц. Что же касается времени, то положение здесь оказывается сложнее, хотя тоже можно заключить, что и понятие времени должно подвергнуться ревизии в квантовой теории. Хорошо известно также, что даже представления о структуре частиц, обнаруженные в новейших исследованиях при рассеянии электронов на протонах и нейтронах, являются условными. Фактически это — перевод на макроскопический язык тех выводов, которые дает изучение рассеяния, сравнение предсказаний, основанных на классической теории взаимодействий протяженных заряженных объектов, с опытными фактами.

Можно утверждать, что корни затруднений при первоначальной интерпретации выводов квантовой механики проистекали из неадекватности макроскопического, классического языка, которым мы пока вынуждены пользоваться при описании и обсуждении квантовых процессов. Априори вообще неправомерно думать, будто понятия классической физики, как бы элементарны они нам ни казались, могут быть автоматически пригодны в сколь угодно широкой области физических масштабов. Это в первую очередь относится к представлениям геометрии. Многократно подтвержденный тезис о неисчерпаемости мира в малом следует понимать не просто как факт бесконечного наслоения структурных деталей, но (прежде всего) как переход к качественно новым закономерностям при углублении в микромир. Первой ласточкой перехода к этим новым законам является квантовая механика. Между последовательными этапами таких переходов связующим звеном является принцип соответствия, когда «более» макроскопические законы и даже понятия следуют из «более» микроскопических при соответствующем наслоении, огрублении, усреднении последних.

В этом отношении не может быть исключением и геометрия в ее макроскопическом понимании. Это значит, что классические пространство и время (включая общую теорию относительности) можно понимать как следствие микроскопических закономерностей. Предельный переход (принцип соответствия) должен дать на основании микроскопических законов все свойства макроскопических пространства и времени, не исключая и числа измерений. Такой вывод может быть назван микрообусловленностью макроскопического пространства-времени. Так как речь идет о микроскопических закономерностях поведения материи (ее конкретных видов), то высказанное утверждение можно понимать как принцип Маха в квантовой трактовке, ибо наш мир представляет собой самосогласованную систему, в которой малое по-своему не менее бесконечно (неисчерпаемо), чем большое. Поэтому положение здесь качественно намного сложнее, чем в обычных задачах типа Коши или в задачах замкнутого мира, так как в любой конкретный момент развития науки мы в принципе не можем знать, какие сюрпризы преподнесет нам следующий «этаж» микромира, на котором должно стоять все здание современных представлений.

Ввиду такого несоответствия макроскопического геометрического языка квантовой реальности, особенно в области физики высоких энергий, широко распространилась тенденция вообще рассматривать квантовую физику вне пространства и времени, отказ анализировать сам процесс взаимодействия, а не только исходное и конечное состояние систем в этом процессе (например, рассеянии). Это нашло отражение в феноменологизации квантовой физики, вполне оправданной на данном этапе ее развития, но, конечно, неприемлемой в качестве ее последней ступени, так как, вполне справедливо отойдя от классических пространственно-временных концепций, мы должны по крайней мере найти путь вывода из новых квантовых представлений этих классических концепций как предельного и поддающегося математическому анализу случая. Тем самым выяснятся и источники классических концепций, которые в каком-то смысле заменят (но не будут просто дублировать на новом языке) эти концепции.

Говоря о таком фундаментальном (и поэтому кажущемся нам очевидным!) свойстве классического пространства-времени как его *4-мерность*, можно уже несколько развить приведенные соображения. Так, при чисто классическом подходе размерность мира формально определяется путем построения последовательности симплексов все более высоких порядков, и тождественное обращение объема (в обобщенном смысле) симплекса в нуль сигнализирует об исчерпании числа реальных измерений мира. В искривленном мире при этом необходимо брать симплексы с достаточно малыми (физически бесконечно малыми) сторонами в предположении, что в малом кривизна пропадает. Это предположение еще оправдывает себя в классической физике, если не рассматривать чрезмерных концентраций масс в малых областях (или считать, что размерность мира везде одинакова, и существуют «пустые» области, где наша процедура выполнима). В реальном мире этот подход, однако, совершенно неправомерен. Прежде всего понятие малости в нем явно относительно ввиду упомянутой качественной неисчерпаемости. В малом начинают действовать квантовые законы, тем более, что при экспериментальном определении числа измерений мира мы должны пользоваться не абстрактными симплексами, а набором положений реальных тел. Сами же тела должны быть, конечно, много меньше сторон симплексов, если они соответствуют вершинам в какие-то моменты времени (мировые «точки»). Наконец, квантовая специфика не позволяет подходить некритично даже к самому понятию определенного значения координаты. Таким образом, проблема числа измерений мира с точки зрения малого оказывается открытой и даже некорректно формулируемой. Однако, если говорить, что макроскопическая размерность мира обусловлена соответствующими его микроскопическими глобальными (а возможно и локальными, но более или менее однородными) свойствами, то встает вопрос: насколько можно ошибиться в «реальной» размерности мира, исследуя достаточно сильно искривленную, но в среднем лишенную кривизны область *в большом*? Этот вопрос еще не исследовался. Однако ясно, что, формально строя симплекс большего числа измерений, чем тот (классический) мир, в котором это делается, мы можем при достаточном искривлении мира в масштабах самого симплекса получить отличный от нуля его «объем», т. е. прийти к завышенному числу измерений мира. Возможно, что введение таких феноменологических добавочных измерений будет полезно в космологических масштабах; однако этот же пример показывает, что в принципе наши макроскопические исследования также могут приводить к искаженным представлениям о размерности мира, если в малом существует достаточно сильное и в каких-то отношениях регулярное его искривление.

Следует ли ожидать такого искривления мира в малом? Чтобы поставить этот вопрос, придется сначала вернуться к связи квантовых закономерностей с геометрией. Как хорошо известно, эти закономерности следует считать *первичными*, т. е. не основанными на как-то искаженных классических закономерностях. А так как последние являются лишь их следствиями, то можно утверждать об *универсальности* квантовых закономерностей в современной физике (на более глубоком микроуровне они сами станут следствиями качественно новых, более универсальных законов). Таким образом, можно признать, что никакие взаимодействия, используемые для измерений координат и импульсов, не могут нарушить соотношений неопределенности, т. е. они сами должны подчиняться этим соотношениям. В частности, соотношения неопределенности должны быть верны и для гравитационного поля — для метрического тензора, символов Кристоффеля и других величин. Конкретные исследования теоретиков показали, что здесь появляется парадокс, который по имени первых его исследователей можно назвать парадоксом Андерсона — Редже. Как известно, в силу нелинейности гравитационного поля, его величину (как бы мы ее ни понимали) можно измерить тем точнее, чем меньше величины пробных масс, взятых для этих измерений. Это — вывод классической теории. Квантовая механика, напротив, показывает, что в силу соотношений неопределенности измерение величины гравитационного поля будет тем точнее, чем *больше* величины «пробных» масс. Противоречивость этих двух выводов отражает несостоятельность классических геометрических представлений в микромире, где нужно подвергнуть ревизии сам подход к гравитационному полю.

В малом гравитация должа подвергаться квантовым флуктуациям. Если даже предположить, что кривизна не подвержена самостоятельным флуктуациям (что сомнительно, так как естественно рассматривать ее как физическое поле со всеми вытекающими отсюда последствиями), то следует заключить, что за счет флуктуаций других полей, являющихся источниками гравитационного поля, в последнем должны иметь место *индуцированные* флуктуации. Иными словами, флуктуации правой части уравнений Эйнштейна должны вызывать соответствующие флуктуации их левой части. Представление о выполнении уравнений Эйнштейна лишь в среднем [1], так, чтобы левая их часть была чисто классической, едва ли выдерживает критики и напоминает ранние попытки представить в квантовой механике закон сохранения энергии как выполняющийся лишь в среднем. Однако в теории гравитации нет однозначного пути перехода к квантовым представлениям, аналогичного пути квантования других (линейных) физических полей. Здесь можно как говорить о квантовой природе всех классических характеристик гравитационного поля, начиная с метрического тензора, так и считать метрический тензор классической переменной, символы Кристоффеля — квантовыми переменными, а связь между ними постулировать в виде равенства для средних значений. Этот подход был бы естествен с точки зрения сформулированной в § 5.4 аналогии между гравитацией и электромагнетизмом (см. вариационный принцип для гравитационного поля в § 5.5). Каждый конкретный путь квантования гравитационного поля приводит к своей особой специфике, о чем мы будем говорить в § 6.8. В любом случае (даже при чисто индуцированых флуктуациях гравитационного поля) в малом будут иметь место сильные флуктуации кривизны вплоть до флуктуаций топологии пространства (Уилер). Это обстоятельство может (и должно) сильно сказаться на наблюдаемой нами макроскопически размерности мира, а возможно, и целиком обусловить ее. Единственное, что можно утверждать сейчас вполне определенно: мы не имеем права априори делать жестких предположений о характере микрогеометрии мира, включая и число измерений. В противном случае мы поступили бы подобно Канту, провозглашавшему априорность геометрии Эвклида, хотя, как выяснилось уже вскоре после того, как он высказал эту идею, даже чисто абстрактно может быть построен ряд неэвклидовых геометрий.

Мы употребили здесь термин «квантование» [2]. Хотя он и отражает обычный подход к формулировке квантовой теории физических полей, но указывает одновременно и на логический порок этого подхода, неизбежный

[1] В таком направлении проводил исследования, в частности, А. Перес (см. его доклад на Лондонской конференции).
[2] См. также примечание на стр. 161.

на данном этапе развития физики. Проводя квантование, мы идем против «течения» реальных закономерностей, так как на деле не квантовая теория выводится из классической (лучше сказать: основывается на ней), а классическая физика является предельным случаем квантовой, усреднением последней. Переход от классической физики к квантовой («квантование») неизбежно не вполне однозначен, и этот факт отражается в ряде трудностей современной теории. Тем не менее в настоящее время существует более или менее устоявшийся подход ко вторичному квантованию полей, основанный на каноническом формализме, а также родственные ему подходы, дающие одни и те же результаты в применении к обычным физическим полям. Гравитационное поле квантовали многие авторы, исходя из различных предпосылок; но значительная часть их работ чрезвычайно далека от анализа конкретных эффектов и носит формальный характер, тогда как явное обобщение представлений о пространстве и времени, которое знаменует собой такое квантование, несомненно нуждается в последовательных физических тестах[1]. Недостаточно просто разрабатывать мощные варианты существующих методов, применяемые затем к полю метрического тензора или полю тензора кривизны, нужно, чтобы эти методы приводили к обнаружению конкретных физических эффектов. В этой книге мы рассматриваем канонический формализм в общековариантной теории поля и гравитационные эффекты, поддающиеся расчету на основании этого формализма.

Один из выводов такой теории в применении к слабому гравитационному полю — существование реальных гравитонов. Эта гипотеза весьма правдоподобна, однако она является лишь гипотезой, и ее подтверждение сыграло бы решающую роль в дальнейшем развитии теории. Иногда против гипотезы существования реальных гравитонов выдвигают следующую аргументацию: при превращении гравитона в пару частиц (например, в электрон и позитрон) волна гравитационного поля (как можно представить себе гравитон на классическом языке) исчезает и превращается в эти частицы. При этом говорят, что кривое пространство выпрямилось, и вместо кривизны появилась пара. Нелепость такого заключения не в этом выводе, а в том, как он получен. В процессе такой трансмутации кривизна не исчезает, но один ее вариант (волна) превращается в другой — искривление мира, сопутствующее получившимся частицам. Подобным же образом при появлении электрон-позитронной пары из фотона электромагнитное поле, ассоциируемое с фотоном, не исчезает, но превращается в поле, «привязанное» к электрону и позитрону,— в поле разлетающегося диполя. Это обсуждение, конечно, проведено на макроскопическом языке.

Конечной целью исследований в области квантовой теории гравитации являются поиски *микрогеометрии*, т. е. языка, адекватного микроявлениям. Такая квантовая теория гравитации и должна быть тем зародышем классической геометрии Римана — Эйнштейна, которого, как гениально догадывался Риман, следует искать в микромире. Обычная 4-геометрия, макрогеометрия, представляет собой именно *язык*, описывая макроскопическое вместилище физических систем, то многообразие, на котором протекают

[1] Мы оставляем в стороне многочисленные работы по квантованию геометрии и гравитации, далекие от методов, используемых в этой книге, но безусловно интересные и поучительные. К ним относятся попытки квантования пространства-времени (Амбарцумян и Иваненко, 1930; Снайдер, 1947); новые аспекты этой проблемы развиты в работе Кадышевского (1960); применение соотношения неопределенностей к проблеме гравитационных измерений и анализу свойств пространства-времени в малом (Андерсон, 1954; Редже, 1958; Перес, 1960); ряд работ по квантованию гравитационного поля в рамках нековариантного (несимметричного) канонического формализма (Арновит, Дрезер, Мизнер); общий и весьма глубокий анализ Вигнера (1958) и новые попытки квантования гравитационного поля Швингера (сб. «Гравитация и топология»). Литература по квантованию гравитационного поля настолько обширна, что на ее основе можно было бы составить большой самостоятельный труд.

физические процессы в классической физике. Для квантовой теории характерно органическое, сильное переплетение взаимодействующих факторов (например, объекта и наблюдателя). Поэтому следует ожидать, что «квантовая геометрия» будет органически переплетаться с физикой микромира и еще резче обусловливаться ею (квантовый вариант принципа Маха), чем это имеет место в макромире [1].

Мы еще не очень близки к достижению этой цели, так как квантование гравитационного поля находится лишь на стадии систематизации и накопления первоначальных фактов, когда еще нет уверенности в правильности избранной методики. Однако эта проблема сама по себе является настолько принципиальной и ключевой для развития теории микромира, теории элементарных частиц и квантовых полей, что сама систематизация представляет уже большую ценность.

Первые попытки квантования гравитационного поля относятся к 30-м годам и принадлежат Розенфельду (1930) и Бронштейну (1936). Так же, как и при квантовании электромагнитного поля, позднейшие исследователи внесли в основы этого процесса не много нового,— главные вклады относятся к методике рассмотрения взаимодействия, особенно существенной при анализе гравитации в силу ее нелинейности. Работы Бронштейна продолжили Иваненко и Соколов (1947а, б), а стройную теорию, включающую и применение S-матрицы к нелинейному гравитационному полю, дал Гупта́ (1952). Дальнейшие исследования касались главным образом общих проблем квантования гравитации. В ряде работ строился канонический формализм (Дирак, П. Бергман с сотрудниками) и применялся метод Пайерлса для вывода скобок Пуассона (ДеВитт); однако в большинстве случаев речь шла о теории с выделенной временной координатой. Группа Уилера начала анализ фейнмановского подхода к квантованию гравитации (суммы по траекториям); новых успехов в этом направлении добились ДеВитт и Фаддеев. Немногочисленные работы посвящены подсчету конкретных квантово-гравитационных эффектов (Пийр, 1957; Мицкевич, 1958б, 1959б, в; Фейнман, 1963; Владимиров, 1962, 1963а, б, в, 1964). Кимура (1956) получил из квантовых соображений, следуя Гупте и улучшая его метод, уравнения движения для двух тел в общей теории относительности [см. также работы Клейна (1958), Гаррисона (1963), Комара (1964)].

Успех расчета конкретных квантово-гравитационных эффектов неудивителен; когда не рассматриваются реальные гравитоны, то мы, по существу, имеем дело с особым методом применения функции Грина, и успех теории заранее обеспечен, так как классические аспекты ее вполне надежны. Поэтому критическими являются именно расчеты с участием *реальных* гравитонов; но, к сожалению, соответствующие эффекты оказываются исключительно слабыми, за исключением, может быть, превращения фотона в гравитон в сильном классическом электромагнитном поле. Обзор таких расчетов будет дан в следующей главе.

Подчеркнем, что в этой книге мы отводим квантованию сугубо утилитарную роль (расчет простейших эффектов) и оставляем вне поля зрения привлекательный с общетеоретических позиций феймановский подход.

---

[1] Напомним о принципе Маха, одном из наиболее диалектических предположений о свойствах пространства-времени. Выразим идею этого принципа в крайней форме: пространство-время полностью обусловлены распределением и движением материи; без материи не было бы пространства и времени. Исторически Эйнштейн начинал построение общей теории относительности с анализа этого принципа, который с полной решительностью ставит геометрию в разряд физических дисциплин. Будучи определена распределением и движением материи, геометрия становится характеристикой материи, подобно такой ее характеристике, как напряженность электромагнитного поля. Поэтому естественно, признавая «право» каждого поля на свою специфику, рассматривать связность и кривизну как полевые характеристики материи.

6.3. Скалярное поле: демонстрация стандартного метода квантования

Этот параграф посвящен не только простейшему случаю квантования физической системы — квантованию скалярного поля; в нем также устанавливаются основные соотношения, важные для всего дальнейшего изложения и справедливые в применении ко всем физическим полям. Мы предполагаем, что читателю известны основы квантовой теории, однако ощущаем необходимость изложить здесь многие ее аспекты для того, чтобы установить взаимосвязь их и тех специфических черт классической теории, которая была развита в предыдущих главах, а также (и это весьма существенно) для того, чтобы ввести используемые далее обозначения. В основном мы будем пользоваться обозначениями и методами, изложенными в монографии Боголюбова и Ширкова (1957), так что читателю рекомендуется заглядывать также в эту книгу.

Нашей ближайшей целью в дальнейших параграфах является уже не вывод общих квантово-гравитационных соотношений, которые нельзя отделить от проблем общей последовательной квантовой теории взаимодействующих (в частности, нелинейных, т. е. взаимодействующих с самими собой) полей. Мы ограничимся здесь расчетом конкретных эффектов, в которых участвует гравитация, а также эффектов, существенных для понимания гравитационных процессов. Такой расчет по необходимости предполагает использование приближенных методов, в частности представления взаимодействия. В применении к гравитации это означает, что все эффекты, связанные с кривизной, переносятся во взаимодействие и рассматриваются как возмущение; вычисления же ведутся на фоне плоского мира. Такой подход был использован Гуптой (1952, 1961), Кимурой (1956), а также другими авторами (см. Пийр, 1957; Мицкевич, 1958, 1959).

Ввиду сказанного удобно пользоваться декартовыми системами координат во вспомогательном плоском мире (ср. двуметрический формализм), а также применять разложения Фурье для потенциалов полей.

Имея в виду обозначения и результаты, приведенные в § 4.4, напишем для нейтрального (вещественного) скалярного поля:

$$\mathbf{L}_{\text{sc.}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}\left(\mu^2\varphi^2 - \varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}\right), \tag{6.3.1}$$

$$\mathbf{t}_\mu{}^\nu = \mathbf{T}_\mu{}^\nu = \sqrt{-g}\left[\varphi_{,\mu}\varphi^{,\nu} + \frac{1}{2}\delta_\mu{}^\nu\left(\mu^2\varphi^2 - \varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}\right)\right] \tag{6.3.2}$$

$$\mathbf{M}_\mu^{\alpha\nu} = 0. \tag{6.3.3}$$

Ввиду последнего равенства (отсутствия спина у скалярного поля) для квантования придется здесь воспользоваться скобками Пуассона (6.1.52)

$$iA_{B,\,\beta} = [A_B, P_\beta]. \tag{6.3.4}$$

Уравнение свободного скалярного поля имеет вид

$$\Box\,\varphi - \mu^2\varphi = 0, \tag{6.3.5}$$

поэтому его решение можно записать в форме суперпозиции плоских волн

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int (dq)\,\delta(q^2-\mu^2)\,e^{iq_\alpha x^\alpha}\varphi(q), \tag{6.3.6}$$

где δ-функция приводит к тождественному удовлетворению уравнения (6.3.5). Интеграл в импульсном пространстве берется в бесконечных пределах; производя соответствующие замены, можно разбить решение

(6.3.6) на положительно- и отрицательно-частотные части, имеющие важный физический смысл в квантовой теории:

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x). \tag{6.3.7}$$

Здесь

$$\varphi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (dq)\, \delta(q^2 - \mu^2)\, e^{\pm i q_\alpha x^\alpha} \varphi^{(\pm)}(q). \tag{6.3.8}$$

Как обычно, последнее выражение удобно рассматривать после интегрирования по временной компоненте импульса и введения обозначения

$$\varphi^{(\pm)}(\mathbf{q}) = \left[\frac{\varphi^{(\pm)}(q)}{\sqrt{2q_0}} \right]_{q_0 = +\sqrt{\mathbf{q}^2 + \mu^2}}, \tag{6.3.9}$$

т. е. в форме

$$\varphi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3q}{\sqrt{2q_0}}\, e^{\pm i q_\alpha x^\alpha} \varphi^{(\pm)}(\mathbf{q}). \tag{6.3.10}$$

Следует помнить, что обычные 3-мерные векторы сопоставляются контравариантным компонентам 4-мерных векторов; тогда

$$(\mathbf{q}) = (q^i) = (-q_i) \tag{6.3.11}$$

и

$$q_\alpha x^\alpha = q_0 x^0 - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}). \tag{6.3.12}$$

Чтобы воспользоваться скобками Пуассона (6.3.4), мы предварительно вычислим конкретную форму 4-вектора P_β. Вследствие закона сохранения

$$\mathbf{t}_{\beta,\ \alpha}^{\ \alpha} = 0 \tag{6.3.13}$$

(в представлении взаимодействия при этом достаточно учитывать лишь рассматриваемое в данном случае поле, отвлекаясь от других физических полей) интегральный вектор энергии-импульса должен быть независимым от времени (в качестве гиперповерхности интегрирования выбрана гиперплоскость, перпендикулярная оси времени). Это соответствует наличию в структуре P_β лишь произведений скалярного потенциала взаимно противоположной частотности, в чем также нетрудно убедиться при непосредственном вычислении (соответствующие члены исчезают вследствие релятивистской связи между энергией, импульсом и массой покоя и ввиду появления δ-функции после интегрирования по обычным координатам). Итак, можно с самого начала упростить вычисления, отбросив члены вида $\varphi^{(+)}\varphi^{(+)}$ и $\varphi^{(-)}\varphi^{(-)}$. При этом условии мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\mu^{\ \nu} = {} & \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p\, d^3q}{2\sqrt{p_0 q_0}}\, e^{i(p_\alpha - q_\alpha) x^\alpha} \times \\ & \times \Big[\varphi^{(+)}(\mathbf{p}) \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) p_\mu q^\nu + \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) \varphi^{(+)}(\mathbf{p}) p^\nu q_\mu + \\ & + \frac{1}{2} \delta_\mu^{\nu} \left(\varphi^{(+)}(\mathbf{p}) \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) + \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) \varphi^{(+)}(\mathbf{p}) \right) \cdot (\mu^2 - p_\lambda q^\lambda) \Big], \end{aligned} \tag{6.3.14}$$

Интегрирование по 3-мерному объему дает

$$\begin{aligned} \int \mathbf{t}_\mu^{\nu}\, dv = {} & \int \frac{d^3q}{2q_0} \left(\varphi^{(+)}(\mathbf{q}) \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) + \varphi^{(-)}(\mathbf{q}) \varphi^{(+)}(\mathbf{q}) \right) \times \\ & \times \left[q_\mu q^\nu + \frac{1}{2} \delta_\mu^{\ \nu} (\mu^2 - q_\lambda q^\lambda) \right]. \end{aligned} \tag{6.3.15}$$

Здесь использовано то обстоятельство, что при

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} \tag{6.3.16}$$

вследствие

$$p_\alpha p^\alpha = \mu^2 = q_\alpha q^\alpha \tag{6.3.17}$$

должно быть

$$p_0 = q_0; \tag{6.3.18}$$

ввиду этого в интеграле исчезает экспонента, содержащая время, а также обращается в нуль второй член в квадратных скобках в (6.3.14). Поэтому окончательно интегральный вектор энергии-импульса может быть записан в виде

$$P_\mu = \int \mathbf{t}_\mu{}^0\, dv = \frac{1}{2} \int d^3q\, [\varphi^{(+)}(\mathbf{q}),\, \varphi^{(-)}(\mathbf{q})]_+ q_\mu, \tag{6.3.19}$$

где использовано обозначение для антикоммутатора

$$[A, B]_+ \overset{\mathrm{Def}}{=} AB + BA. \tag{6.3.20}$$

Вернемся к скобкам (6.3.4). Пользуясь разбиением потенциалов на положительно- и отрицательно-частотные части типа (6.3.10), эти скобки можно записать как

$$\pm \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} k_\beta e^{\pm ik_\alpha x^\alpha} A_B^{(\pm)}(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} e^{\pm ik_\alpha x^\alpha} [A_B^{(\pm)}(\mathbf{k}),\, P_\beta]_-. \tag{6.3.21}$$

Отсюда по свойству фурье-разложений (ортогональность гармонических функций) получим

$$[A_B^{(\pm)}(\mathbf{k}), P_\beta]_- = \mp k_\beta A_B^{(\pm)}(\mathbf{k}). \tag{6.3.22}$$

Это соотношение справедливо для любого поля и поэтому весьма существенно.

В приложении к случаю скалярного поля последний результат дает

$$\mp k_\mu \varphi^{(\pm)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \int d^3q \cdot q_\mu \cdot [\varphi^{(\pm)}(\mathbf{k}),\, [\varphi^{(+)}(\mathbf{q}),\, \varphi^{(-)}(\mathbf{q})]_+]_-. \tag{6.3.23}$$

Фигурирующая здесь комбинация коммутатора с антикоммутатором может быть преобразована по следующей простой схеме:

$$\begin{aligned} &[A, [B, C]_+]_- = [A, B]_- \cdot C + [A, C]_- B + B \cdot [A, C]_- + \\ &+ C[A, B]_- = [A, B]_+ C + [A, C]_+ B - B[A, C]_+ - C[A, B]_+ \end{aligned} \tag{6.3.24}$$

(может быть, конечно, получена и смесь коммутаторов и антикоммутаторов). Вспоминая обычную квантовую механику, мы предположим, что в случае скалярного поля коммутаторы являются c-числами [доказательство этого факта см. в монографии: (Боголюбов и Ширков, 1957)]. Тогда

$$\begin{aligned} &[\varphi^{(\pm)}(\mathbf{k}), P_\mu]_- = \int d^3q \cdot q_\mu \cdot \{\varphi^{(-)}(\mathbf{q}) \cdot [\varphi^{(+)}(\mathbf{k}), \varphi^{(\pm)}(\mathbf{q})]_- + \\ &+ \varphi^{(+)}(\mathbf{q})\, [\varphi^{(\pm)}(\mathbf{k}),\, \varphi^{(-)}(\mathbf{q})]_-\}. \end{aligned} \tag{6.3.25}$$

Можно показать, что канонические координаты одинаковой частотности коммутируют друг с другом; поэтому выражение (6.3.25) в комбинации с (6.3.23) дает

$$\pm k_\mu \varphi^{(\pm)}(\mathbf{k}) = \int d^3q \cdot q_\mu \cdot \varphi^{(\pm)}(\mathbf{q}) \cdot [\varphi^{(\pm)}(\mathbf{k}),\, \varphi^{(\mp)}(\mathbf{q})]_-, \tag{6.3.26}$$

а так как это равенство должно быть справедливо при любых $\mathbf{k}$, то мы должны положить

$$[\varphi^{(+)}(\mathbf{k}), \varphi^{(-)}(\mathbf{q})]_- = -\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}). \tag{6.3.27}$$

Вспомним, что δ-функция является аналогом символа Кронекера (ср. соответствующие заключения в квантовомеханическом случае, когда рассматриваются свойства момента импульса) и выполняется равенство

$$P_\mu = \int d^3q\, q_\mu \varphi^{(+)}(\mathbf{q})\varphi^{(-)}(\mathbf{q}), \tag{6.3.28}$$

которым следует теперь заменить (6.3.19), постулируя специальную расстановку операторов в динамических величинах [так называемое нормальное произведение: операторы отрицательной частотности (уничтожения) справа, операторы положительной частотности (рождения) слева], чтобы избавиться от расходимости энергии. Поэтому мы должны интерпретировать $\varphi^{(+)}(\mathbf{q})$ как оператор рождения кванта скалярного поля с 4-импульсом q_α, а $\varphi^{(-)}(\mathbf{q})$ — как оператор уничтожения кванта скалярного поля с таким же 4-импульсом.

Переходя теперь от фурье-разложения к функциям координат, записываем:

$$[\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(y)]_- = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p\,d^3q}{2\sqrt{p_0 q_0}}\, e^{i(p_\alpha x^\alpha - q_\alpha y^\alpha)} \times$$
$$\times [\varphi^{(+)}(\mathbf{p}), \varphi^{(-)}(\mathbf{q})]_- = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3q}{2q_0}\, e^{iq_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} = -iD^{(+)}(x-y), \tag{6.3.29}$$

где введена перестановочная функция

$$D^{(+)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int (dq)\, e^{iq_\alpha x^\alpha}\delta(\mu^2 - q^2)\,\theta(+q_0), \tag{6.3.30}$$

причем ступенчатая функция θ определяется соотношением

$$\theta(q_0) = \begin{cases} 0, & q_0 < 0, \\ +1, & q_0 > 0. \end{cases} \tag{6.3.31}$$

Аналогично

$$[\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(y)]_- = -iD^{(-)}(x-y). \tag{6.3.32}$$

При этом новая перестановочная функция определяется как

$$D^{(-)}(x-y) = -D^{(+)}(y-x) \tag{6.3.33}$$

или

$$D^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int (dq)\, e^{iq_\alpha x^\alpha}\delta(\mu^2 - q^2)\cdot\theta(-q_0). \tag{6.3.34}$$

Поэтому коммутатор для полных скалярных потенциалов равен

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_- = -iD(x-y), \tag{6.3.35}$$

где

$$D(x) = D^{(+)}(x) + D^{(-)}(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int (dq)\, e^{iq_\alpha x^\alpha}\delta(\mu^2 - q^2)\,\varepsilon(q_0) \tag{6.3.36}$$

и

$$\varepsilon(q_0) = \theta(q_0) - \theta(-q_0) = \begin{cases} -1, & q_0 < 0, \\ +1, & q_0 > 0. \end{cases} \tag{6.3.37}$$

Подобным же образом для заряженного (комплексного) скалярного поля можно найти коммутаторы

$$[\varphi^{(+)*}(\mathbf{k}), \varphi^{(-)}(\mathbf{q})]_- = -\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \tag{6.3.38}$$

и

$$[\varphi^{(+)}(\mathbf{k}), \varphi^{(-)*}(\mathbf{q})]_- = -\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \tag{6.3.39}$$

(остальные коммутаторы для него обращаются в нуль). При этом

$$[\varphi(x), \varphi^*(y)]_- = [\varphi^*(x), \varphi(y)]_- = -iD(x-y). \tag{6.3.40}$$

В случае заряженного скалярного поля вектор энергии-импульса равен

$$P_\mu = \int d^3q \cdot q_\mu [\varphi^{(+)*}(\mathbf{q})\varphi^{(-)}(\mathbf{q}) + \varphi^{(+)}(\mathbf{q})\varphi^{(-)*}(\mathbf{q})], \tag{6.3.41}$$

в то время как заряд, определяемый выражением для тока

$$\frac{\delta \mathbf{L}_{sc}}{\delta A_\mu} = -j^\mu, \tag{6.3.42}$$

если взять лагранжиан (4.4.3), учитывающий взаимодействие скалярного и электромагнитного полей, имеет вид

$$Q = \int j^\mu dS_\mu = \int d^3q\, [\varphi^{(+)*}(\mathbf{q})\varphi^{(-)}(\mathbf{q}) - \varphi^{(+)}(\mathbf{q})\varphi^{(-)*}(\mathbf{q})]. \tag{6.3.43}$$

Все эти соотношения позволяют просто интерпретировать физический смысл операторов $\varphi^{(+)}$, $\varphi^{(+)*}$, $\varphi^{(-)}$ и $\varphi^{(-)*}$ заряженного скалярного поля: $\varphi^{(+)*}$ есть оператор рождения положительно заряженной скалярной частицы, $\varphi^{(-)}$ — оператор уничтожения этой частицы, $\varphi^{(+)}$ — оператор порождения отрицательно заряженной частицы и $\varphi^{(-)*}$ — оператор уничтожения такой частицы.

Заметим, что в выражениях (6.3.41) и (6.3.43) уже использовано нормальное произведение операторов. В дальнейшем мы всегда будем непосредственно пользоваться таким произведением, в частности, предполагая, что, оно уже использовано в выражении для P_β в соотношении (6.3.22). Тогда в выражениях типа (6.3.23) не будет фигурировать антикоммутатор, и поэтому комбинации величин (6.3.24) несколько упростятся. Это обстоятельство весьма существенно в случае фермионных полей, когда комбинации с антикоммутаторами в (6.3.24) обратились бы тождественно в нуль (если, как обычно, предполагать, что антикоммутаторы для фермионных полей суть c-числа).

Что касается самого скалярного поля, то его существование в природе представляется сомнительным (речь идет, конечно, об однокомпонентном скалярном поле, а не о четверке скалярных полей, составляющих фермионную волновую функцию); в частности, представление о мезонах как о квантах псевдоскалярного поля (теория которого в рассмотренных аспектах ничем не отличается от теории скалярного) оспаривается, и π-мезоны предлагается интерпретировать как проявление других полей, например, янг-миллсовского векторного поля (см. сборник «Компенсирующие поля. . .», 1964). Поэтому интересно обратить особое внимание на возможности проверки реальности такого поля путем анализа соответствующих ему характерных эффектов.

6.4. Квантование электромагнитного поля

Электромагнитное поле, в отличие от скалярного, обладает несколькими (вообще говоря, четырьмя) компонентами потенциала, ввиду чего при его квантовании появляются некоторые новые аспекты. Напомним, что в наши намерения не входит детальный разбор квантовой теории как таковой. Здесь мы, во-первых, говорим об аппарате квантования, чтобы в дальнейшем применить его к гравитационному полю; во-вторых, квантовые соотношения для электромагнитного поля потребуются нам при вычислении квантовых эффектов, включающих взаимодействие гравитационного и электромагнитного полей. Поэтому мы настойчиво рекомендуем читателю, интересующемуся деталями квантовых расчетов для электромагнетизма и прочих полей (кроме гравитационного), обратиться к монографии Боголюбова и Ширкова (1957), обозначениям и плану которой мы здесь следуем, подчеркивая, однако, некоторые новые аспекты.

В духе метода представления взаимодействия мы рассматриваем здесь все поля как свободные при установлении квантовых перестановочных соотношений. Поэтому

$$\mathbf{F}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0, \tag{6.4.1}$$

так что из выражения (4.2.4) следует

$$\mathbf{t}_\sigma{}^\alpha = \mathbf{F}^{\mu\alpha} \cdot A_{\mu,\,\sigma} + \frac{1}{4}\mathbf{F}_{\omega\varepsilon}F^{\omega\varepsilon}\delta_\sigma{}^\alpha. \tag{6.4.2}$$

Кроме того, полезно воспользоваться обобщенным спином

$$\mathbf{M}_\sigma^{\alpha\tau} = A_\sigma \mathbf{F}^{\alpha\tau}. \tag{6.4.3}$$

В случае электромагнитного поля, потенциал которого преобразуется при переходах между системами координат, мы можем пользоваться не только соотношениями (6.1.52), но и (6.1.53) для установления формы коммутаторов. Но прежде следует взять разложение потенциала на положительно- и отрицательно-частотные составляющие (ср. случай скалярного поля):

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x). \tag{6.4.4}$$

Переходя к фурье-представлению и имея в виду, что из уравнений Максвелла для потенциалов (член с кривизной следует отбросить!) следует релятивистская формула связи между энергией и импульсом при нулевой массе покоя фотона,

$$q_\alpha q^\alpha = 0, \tag{6.4.5}$$

мы, как обычно, получаем

$$A_\mu^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3q}{\sqrt{2q_0}} e^{\pm i q_\alpha x^\alpha} A_\mu^{(\pm)}(\mathbf{q}), \tag{6.4.6}$$

причем для вещественности потенциалов $A_\mu(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$(A_\mu^{(\pm)}(\mathbf{q}))^* = A_\mu^{(\mp)}(\mathbf{q}). \tag{6.4.7}$$

Условие Лоренца в импульсном представлении имеет вид

$$p_\alpha A^{(\pm)\alpha}(\mathbf{p}) = 0. \tag{6.4.8}$$

Хотя в квантовой теории оно берется в более слабой форме (при действии на соответствующую амплитуду состояния, причем используется лишь одна для каждого случая частотность потенциала), можно без опасения применять сейчас это условие в классической форме (6.4.8), так как это не приведет к ошибкам. Из условия Лоренца следует поперечность электромагнитного поля, которая на квантовом языке выражается как невозможность порождения или уничтожения продольных и временных фотонов,— вывод, который дает метод индефинитной метрики Гупты — Блейлера. Изложение этого метода для электромагнитного поля можно найти в стандартных учебниках по квантовой электродинамике; мы же рассмотрим этот метод в приложении к гравитации (впервые это сделал сам Гупта, 1952), когда будем квантовать это поле (§ 6.7).

Ввиду сохранения 4-«вектора» энергии-импульса в его выражении встречаются лишь произведения компонент противоположных частотностей, так что, имея в виду дальнейшее интегрирование соответствующей плотности, *и только в этом смысле*, можно записать:

$$\mathrm{t}_\sigma^\alpha = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q d^3p}{2\sqrt{q_0 p_0}} e^{i(p_\beta - q_\beta)x^\beta}\Big\{(p^\alpha q_\sigma + p_\sigma q^\alpha)A^{(+)\gamma}(\mathbf{p})A_\gamma^{(-)}(\mathbf{q}) -$$
$$- p_\gamma q_\sigma A^{(+)\alpha}(\mathbf{p})A^{(-)\gamma}(\mathbf{q}) - p_\sigma q_\gamma A^{(+)\gamma}(\mathbf{p})A^{(-)\alpha}(\mathbf{q}) +$$
$$+\frac{1}{2}\delta_\sigma^\alpha[2p^\gamma q_\gamma A^{(+)\varepsilon}(\mathbf{p})A_\varepsilon^{(-)}(\mathbf{q}) - p_\varepsilon q_\gamma(A^{(+)\varepsilon}(\mathbf{p})A^{(-)\gamma}(\mathbf{q}) +$$
$$+ A^{(+)\gamma}(\mathbf{p})A^{(-)\varepsilon}(\mathbf{q}))]\Big\}. \qquad (6.4.9)$$

Тогда интегрирование по 3-мерному объему дает

$$\int \mathrm{t}_\sigma{}^\alpha dv = \int d^3q\frac{q^\alpha}{q_0}q_\sigma A^{(+)\gamma}(\mathbf{q})A_\gamma^{(-)}(\mathbf{q}) \qquad (6.4.10)$$

и окончательно для 4-вектора энергии-импульса —

$$P_\sigma = \int \mathrm{t}_\sigma{}^0 dv = \int d^3q q_\sigma A^{(+)\gamma}(\mathbf{q})A_\gamma^{(-)}(\mathbf{q}). \qquad (6.4.11)$$

Конструкция из потенциалов, стоящая под знаком интеграла, интерпретируется как число частиц (фотонов), обладающих импульсом q_α.

В противоположность энергии-импульсу, интегральный спин (здесь мы имеем в виду обобщенный спин общей теории относительности) отдельно не сохраняется; однако, как легко показать, в данном приближении сохраняется его антисимметризованное значение, плотность которого равна (4.7.10)

$$\mathrm{S}^{\alpha\mu\nu} = -\mathrm{S}^{\alpha\nu\mu} = \mathrm{M}_\sigma^{\alpha\mu}g^{\sigma\nu} - \mathrm{M}_\sigma^{\alpha\nu}g^{\sigma\mu}. \qquad (6.4.12)$$

Это и есть тот спин, который фигурирует в частной теории относительности; таким образом, именно для него следует брать перестановочное соотношение (6.1.53), которое поэтому нуждается в антисимметризации по соответствующим индексам. Имея в виду эти процедуры, которые нам предстоит проделать позднее, мы ограничимся при вычислении обобщенного спина лишь произведениями компонент противоположной частотности:

$$\int \mathrm{M}_\sigma^{0\tau}dv = i\int\frac{d^3q}{2}\Big[A^{(+)\tau}(\mathbf{q})A_\sigma^{(-)}(\mathbf{q}) - A_\sigma^{(+)}(\mathbf{q})A^{(-)\tau}(\mathbf{q}) +$$
$$+\frac{q^\tau}{q_0}(A_\sigma^{(+)}(\mathbf{q})A^{(-)0}(\mathbf{q}) - A^{(+)0}(\mathbf{q})A_\sigma^{(-)}(\mathbf{q})\Big]. \qquad (6.4.13)$$

Так как вычисляемые здесь выражения — операторы, то они имеют символический смысл, и подразумевается, что они должны действовать на амплитуду состояния какой-либо реальной системы. Так как в этой системе отсутствуют (метод Гупты — Блейлера!) временные фотоны, то из

(6.4.13) можно выбросить соответствующие им члены; тогда получим

$$\int \mathbf{M}_\sigma^{0\tau}\,dv = \frac{i}{2}\int d^3q\,(A^{(+)\tau}(\mathbf{q})A_\sigma^{(-)}(\mathbf{q}) - A_\sigma^{(+)}(\mathbf{q})A^{(-)\tau}(\mathbf{q})). \tag{6.4.14}$$

Переходя к спину, плотность которого определяется соотношением (6.4.12), получаем:

$$\int \mathbf{S}^{0\mu\nu}dv = S^{[\mu\nu]} = i\int d^3q\,(A^{(+)\mu}A^{(-)\nu} - A^{(+)\nu}A^{(-)\mu}). \tag{6.4.15}$$

Заметим, что выражение для энергии-импульса (6.4.11) диагонально — в нем перемножаются компоненты потенциала противоположной частотности, но с *одинаковыми индексами*, т. е. соответствующие одним и тем же поляризациям фотонов; в то же время этого нельзя сразу заключить из конкретного вида спина (6.4.15). Как известно, одновременно нельзя диагонализировать более одной компоненты момента (в том числе и спина), так как эти компоненты не коммутативны между собой. Поэтому мы приступили к диагонализации лишь третьей компоненты спина (согласно традициям). Для этого следует выбрать в качестве новых компонент потенциала некоторые линейные комбинации старых компонент. Коэффициенты этих комбинаций однозначно определяются требованиями диагонализации спина (причем коэффициенты при произведениях новых компонент потенциала противоположной частотности в этом диагонализированном спине должны быть равны либо $+1$, либо -1) и сохранения диагонального вида энергии-импульса (6.4.11) в неизменной форме. Легко показать, что связи между новыми и старыми компонентами потенциала имеют тогда вид

$$\begin{aligned} A^{(\pm)1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a^{(\pm)1} + a^{(\pm)2}), \quad A^{(\pm)3} = a^{(\pm)3}, \\ A^{(\pm)2} &= \pm\frac{i}{\sqrt{2}}(a^{(\pm)1} - a^{(\pm)2}), \end{aligned} \tag{6.4.16}$$

или

$$\begin{aligned} a^{(\pm)1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A^{(\pm)1} \pm iA^{(\pm)2}), \quad a^{(\pm)3} = A^{(\pm)3}, \\ a^{(\pm)2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A^{(\pm)1} \mp iA^{(\pm)2}). \end{aligned} \tag{6.4.17}$$

Тогда

$$S_z = \int d^3q\,(a^{(+)1}a^{(-)1} - a^{(+)2}a^{(-)2}) \tag{6.4.18}$$

и

$$P_\sigma = \int d^3q\,q_\sigma a^{(+)\gamma}(\mathbf{q})\,a_\gamma^{(-)}(\mathbf{q}), \tag{6.4.18$'$}$$

так что все требования выполнены. Можно сказать, что мы перешли к круговым поляризациям фотонов относительно оси z и выразили все величины через собственные операторы (функции) состояний такой поляризации. Возможность одновременной диагонализации, реализованной здесь, соответствует сохранению z-компоненты спина и одновременной определенности (наблюдаемости) этих динамических переменных.

Как мы уже сказали, соотношение (6.1.53),

$$iA^\tau\delta_\beta{}^\mu = [A^\mu, S_\beta{}^\tau]_-, \tag{6.4.19}$$

где

$$S_\beta{}^\tau = \int \mathrm{M}_\beta^{\alpha\tau}\, dS_\alpha, \tag{6.4.20}$$

недействительно в приложении к нашим разложениям на положительно- и отрицательно-частотные составляющие (причину этого можно усмотреть в том, что такое разложение инвариантно лишь относительно ортогональных преобразований четырех координат), так что приходится пользоваться антисимметризованным соотношением со спином (6.4.12)

$$i(A^\tau g^{\mu\sigma} - A^\sigma g^{\mu\tau}) = [A^\mu, S^{[\tau\sigma]}]_-, \tag{6.4.21}$$

где

$$S^{[\tau\sigma]} = \int \mathrm{S}^{\alpha\tau\sigma}\, dS_\alpha. \tag{6.4.22}$$

Эта антисимметризация, как уже указывалась, автоматически уничтожает зависимость спина от времени, так как члены, содержащие такую зависимость, симметричны по индексам τ и σ и, например, имеют вид

$$\frac{i}{4}\int d^3q\, e^{\pm iq_0x^0}(A^{(\pm)\tau}(\mathbf{q})A_\sigma^{(\pm)}(-\mathbf{q}) + A_\sigma^{(\pm)}(\mathbf{q})A^{(\pm)\tau}(-\mathbf{q})). \tag{6.4.23}$$

Если исходить при выводе перестановочных соотношений для потенциалов из выражения (6.4.21), а не (6.1.52), то вычисления оказываются даже проще, чем они были в случае скалярного поля. Именно, сразу же можно взять в (6.4.21) переменные в их фурье-представлении, например, при положительной частотности:

$$A^{(+)\tau}g^{\mu\sigma} - A^{(+)\sigma}g^{\mu\tau} = \left[A^{(+)\mu}, \int d^3q\,(A^{(+)\tau}A^{(-)\sigma} - A^{(+)\sigma}A^{(-)\tau})\right]_- . \tag{6.4.24}$$

Считая, что величины одинаковой частотности коммутируют друг с другом, получаем отсюда

$$A^{(+)\tau}(\mathbf{p})\,g^{\mu\sigma} - A^{(+)\sigma}(\mathbf{p})\,g^{\mu\tau} =$$
$$= \int d^3q\,\{A^{(+)\tau}(\mathbf{q})[A^{(+)\mu}(\mathbf{p}),\ A^{(-)\sigma}(\mathbf{q})]_- - A^{(+)\sigma}(\mathbf{q})[A^{(+)\mu}(\mathbf{p}),\ A^{(-)\tau}(\mathbf{q})]_-\}. \tag{6.4.25}$$

Решением этого уравнения для коммутаторов является

$$[A^{(+)\mu}(\mathbf{p}),\ A^{(-)\sigma}(\mathbf{q})]_- = g^{\mu\sigma}\delta(\mathbf{q}-\mathbf{p}), \tag{6.4.26}$$

что подтверждается и подстановкой в выражение (6.4.21) компонент отрицательной частотности. Сравнительная простота такого вывода обусловлена тем, что, в отличие от (6.1.52), здесь не фигурируют производные потенциала.

Полагая в соответствующих функциях для скалярного поля массу покоя квантов равной нулю,

$$D_0^{(\pm)}(x) = D^{(\pm)}(x)\,|_{\mu=0}, \tag{6.4.27}$$

можно записать перестановочные соотношения для положительно- и отрицательно-частотных частей потенциалов в конфигурационном пространстве и, наконец, получить коммутатор

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(y)]_- = ig_{\mu\nu}D_0(x,y), \tag{6.4.28}$$

где перестановочная функция равна

$$D_0(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int (dq)\, e^{iq_\alpha x^\alpha}\delta(q^2)\,\varepsilon(q_0). \tag{6.4.29}$$

Ввиду того, что лишь поперечные составляющие электромагнитного поля имеют физическое содержание, целесообразно с самого начала разлагать компоненты потенциалов в фурье-представлении по формуле[1]

$$A_\mu^{(\pm)}(\mathbf{q}) = e_\mu{}^\alpha(\mathbf{q})\, a_\alpha^{(\pm)}(\mathbf{q}). \tag{6.4.30}$$

Величины $e_\mu{}^\alpha$ обычно интерпретируются как четверка векторов поляризации (векторный индекс — нижний, верхний индекс обозначает номер взятого вектора). При этом

$$(e_\mu{}^0) = (1, 0, 0, 0), \quad \text{т. е.} \ e_\mu{}^0 = \delta_\mu{}^0, \tag{6.4.31}$$

$$(e_\mu{}^3) = \left(0, \frac{-\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}\right) \tag{6.4.32}$$

— векторы, описывающие временные и продольные фотоны, так что соответствующие им операторы рождения и уничтожения можно отбросить. Поперечные фотоны соответствуют векторам поляризации

$$(e_\mu{}^a) = (0, -\mathbf{e}^a), \tag{6.4.33}$$

где $a = 1,2$. Векторы поляризации выбираются ортогональными:

$$e_\mu{}^\alpha e_\nu{}^\beta g^{\mu\nu} = \varepsilon_\alpha \delta_\beta{}^\alpha = \delta^{\alpha\beta}. \tag{6.4.34}$$

Здесь ε_α — значок Эйзенхарта, $(\varepsilon_\alpha) = (1, -1, -1, -1)$. В свою очередь,

$$\sum_\alpha \varepsilon_\alpha e_\mu{}^\alpha e_\nu{}^\alpha \equiv \delta_{\alpha\beta} e_\mu{}^\alpha e_\nu{}^\beta = g_{\mu\nu}, \tag{6.4.35}$$

что следует из (6.4.34); в самом деле, умножая условие ортонормированности на $\delta_{\beta\gamma} e_\lambda{}^\gamma$, получаем

$$e_\mu{}^\alpha (\delta_{\beta\gamma} e_\nu{}^\gamma e_\lambda{}^\beta g^{\mu\nu} - \delta_\lambda{}^\mu) = 0, \tag{6.4.36}$$

а из неравенства детерминанта $e_\nu{}^\mu$ нулю получаем отсюда (6.4.35). Выбирая правую тройку векторов, можно принять также равенство

$$e_k{}^i e_l{}^j \varepsilon_{hlm} = e_m{}^h \varepsilon_{hij}, \tag{6.4.37}$$

хотя это и несущественно (например, может быть использована и круговая поляризация, приводящая к диагональности спина).

Так как эффективно $a_3^{(\pm)} = 0$ и $a_0^{(\pm)} = 0$ (метод Гупты — Блейлера), то для реальных фотонов достаточно ограничиться разложением

$$A_\mu^{(\pm)}(\mathbf{q}) = \sum_{a=1,2} e_\mu{}^a(\mathbf{q})\, a_a^{(\pm)}(\mathbf{q}) \tag{6.4.38}$$

и, ввиду (6.4.28), для реальных частиц можно записать

$$[a_a^{(+)}(\mathbf{p}), a_b^{(-)}(\mathbf{q})]_- = -\delta_b{}^a \delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{6.4.39}$$

Однако практически полезнее помнить соотношения

$$[A_\mu^{(-)}(\mathbf{q}), a_b^{(+)}(\mathbf{p})]_- = e_\mu{}^b(\mathbf{p})\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \tag{6.4.40}$$

и

$$[a_b^{(-)}(\mathbf{q}), A_\mu^{(+)}(\mathbf{p})]_- = -e_\mu{}^b(\mathbf{p})\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{6.4.41}$$

[1] Разложение по направлению четырех фиксированных векторов; нет необходимости в том, чтобы эти новые a_α совпадали с введенными здесь ранее, так как расчеты, в которых предпринимается усреднение по поляризациям, можно проводить и без конкретизации направлений спина, ограничиваясь выделением поперечной части потенциала.

Кроме того, суммирование по поляризациям реальных фотонов, часто встречающееся в расчетах, может быть на основании (6.4.35) выражено как

$$\sum_{b=1,2} e_\mu{}^b e_\nu{}^b = \delta_\mu{}^i \delta_\nu{}^j \sum_{b=1,2} e_i{}^b e_j{}^b =$$

$$= \delta_\mu{}^i \delta_\nu{}^j \left\{ -\sum_{\alpha=1}^{4} \varepsilon_\alpha e_i{}^\alpha e_j{}^\alpha + e_i{}^0 e_j{}^0 - e_i{}^3 e_j{}^3 \right\} = \delta_\mu{}^i \delta_\nu{}^j \left(\delta_j{}^i - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right). \tag{6.4.42}$$

Величины $e_\mu{}^\alpha$ можно рассматривать не только как векторы поляризации (частный случай тетрад), но и как коэффициенты преобразования от произвольной декартовой системы координат к декартовой же системе, связанной с направлением импульса частицы. Тогда, обозначая

$$e_k{}^1(\mathbf{p}) = e_k{}^1(\mathbf{q}) = -(\mathbf{i})^k \tag{6.4.43}$$

(вектор, общий для двух разных направлений импульса фотона) и вводя второй вектор поляризации как

$$e_i{}^2(\mathbf{p}) = -\varepsilon_{ijk} i_j \frac{p_k}{|\mathbf{p}|} \tag{6.4.44}$$

и

$$e_i{}^2(\mathbf{q}) = -\varepsilon_{ijk} i_j \frac{q_k}{|\mathbf{q}|} \tag{6.4.45}$$

или, в векторных обозначениях,

$$\mathbf{e}^2(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^{-1} [\mathbf{i}\mathbf{p}] \tag{6.4.46}$$

и

$$\mathbf{e}^2(\mathbf{q}) = |\mathbf{q}|^{-1} [\mathbf{i}\mathbf{q}], \tag{6.4.47}$$

можно получить еще весьма полезную для практических расчетов информацию. Так, нетрудно заключить, что

$$(\mathbf{e}^1(\mathbf{p}) \mathbf{e}^1(\mathbf{q})) = 1, \tag{6.4.48}$$

$$(\mathbf{e}^2(\mathbf{p}) \mathbf{e}^2(\mathbf{q})) = \cos\theta \tag{6.4.49}$$

и

$$(\mathbf{e}^1(\mathbf{p}) \mathbf{e}^2(\mathbf{q})) = 0. \tag{6.4.50}$$

Кроме того, вектор $\mathbf{i}$ может быть выражен через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{i} = |[\mathbf{p}\mathbf{q}]|^{-1} [\mathbf{p}\mathbf{q}], \tag{6.4.51}$$

или

$$i_i = (|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{q}| \sin\theta)^{-1} \varepsilon_{ijk} p_j q_k. \tag{6.4.52}$$

Приведенные здесь соотношения дают возможность без особого труда получить равенство

$$\sum_{a=1,2} e_i{}^a(\mathbf{p}) e_j{}^a(\mathbf{q}) = \delta_j{}^i + \frac{1}{2\cos^2\theta/2} \left[\frac{\cos\theta}{|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{q}|} p_i q_j - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{q}|} p_j q_i - \frac{1}{\mathbf{q}^2} q_i q_j - \frac{1}{\mathbf{p}^2} p_i p_j \right], \tag{6.4.53}$$

которое при $\mathbf{p} \to \mathbf{q}$ переходит в (6.4.42). Кроме того,

$$(\mathbf{q}\mathbf{e}^1(\mathbf{p})) = 0, \tag{6.4.54}$$

$$(\mathbf{q}\mathbf{e}^2(\mathbf{p})) = |\mathbf{q}|\sin\theta, \tag{6.4.55}$$

$$(\mathbf{p}\mathbf{e}^2(\mathbf{q})) = -|\mathbf{p}|\sin\theta. \tag{6.4.56}$$

6.5. Квантование фермионного поля

Как мы видели при квадрировании уравнений фермионного поля в § 4.8, в приближении $A_\mu = 0$, $C_\mu = 0$ потенциал ψ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона

$$\Box\psi - m^2\psi = 0, \tag{6.5.1}$$

так что и в этом случае при использовании фурье-представлений мы получим обычную релятивистскую связь между энергией, импульсом и массой покоя для реальных частиц; поэтому следует записать

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (dq) e^{iq_\alpha x^\alpha} \delta(q^2 - m^2)\psi(q). \tag{6.5.2}$$

При подстановке такого разложения в уравнение Дирака, взятое в том же приближении,

$$i\gamma^\mu\psi_{,\,\mu} - m\psi = 0, \tag{6.5.3}$$

мы получим

$$\int (dq) e^{iq_\alpha x^\alpha} \delta(q^2 - m^2)(\gamma^\mu q_\mu + m)\psi(q) = 0, \tag{6.5.4}$$

т. е.

$$(\gamma^\mu q_\mu + m)\psi(q)\,|_{q^2 = m^2} = 0. \tag{6.5.5}$$

Ввиду того, что в лагранжиан и плотность энергии-импульса фермионного поля включается лишь первая степень от производных потенциала, целесообразно определить его 3-мерный фурье-образ особым способом, а именно как

$$\psi^{(\pm)}(\mathbf{q}) = \left.\frac{\theta(q_0)\psi(\pm q)}{2q_0}\right|_{q^2 = m^2}. \tag{6.5.6}$$

Тот или иной выбор этого фурье-образа диктуется желанием получить должные значения коэффициентов в представлении динамических переменных через фурье-компоненты потенциалов полей. Итак, теперь

$$(\gamma^\mu q_\mu \pm m)\psi^{(\pm)}(\mathbf{q}) = 0 \tag{6.5.7}$$

и

$$\psi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3q\, e^{\pm iq_\alpha x^\alpha} \psi^{(\pm)}(\mathbf{q}), \tag{6.5.8}$$

а также

$$\bar\psi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3q\, e^{\pm iq_\alpha x^\alpha}\, \bar\psi^{(\pm)}(\mathbf{q}). \tag{6.5.9}$$

Нет необходимости изобретать какой-либо новый способ рассмотрения фермионных полей в квантовой теории, так как все соотношения для спинорных полей (кроме закона преобразования) сохраняют свою силу и для скалярного (зоммерфельдовского) представления фермионных полей. Ввиду этого мы воспользуемся известными разложениями фурье-образов потенциалов по базисным «спинорам» (теперь это — столбцы или строки, состоящие из скаляров). Так как ψ-функция содержит 4 компоненты, то существует 4 линейно независимых функции v^σ, по которым и производится разложение:

$$\psi_a^{(\pm)}(\mathbf{q}) = \sum_{\sigma=1,\,2} a_\sigma^{(\pm)}(\mathbf{q}) \cdot v_a^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q}), \tag{6.5.10}$$

$$\bar{\psi}_a^{(\pm)}(\mathbf{q}) = \sum_{\sigma=1,\,2} a_\sigma^{(\pm)*}(\mathbf{q}) \cdot \bar{v}_a^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q}). \tag{6.5.11}$$

Первое из этих выражений имеет форму столбца, а второе — строки. Так как они связаны друг с другом сопряжением и умножением на эрмитизирующую матрицу, то

$$a^{(\pm)*}(\mathbf{q}) = (a^{(\mp)}(\mathrm{q}))^+ \tag{6.5.12}$$

и

$$\bar{v}_a^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q}) = (v_b^{(\mp)\sigma}(\mathbf{q}))^+ \gamma^0_{ba}. \tag{6.5.13}$$

В качестве эрмитизирующей матрицы мы взяли здесь матрицу Дирака γ^0, совпадающую с использовавшейся нами прежде 0-компонентой вектор-матрицы γ^μ в случае плоского мира и декартовой системы (в этом случае может быть произведено простое преобразование подобия, одинаковое во всем мире, которое дает такое совпадение). Базисные 1×4 и 4×1-матрицы берутся ортонормированными, т. е. предполагается, что

$$\bar{v}^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q})\gamma^0 v^{(\mp)\tau}(\mathbf{q}) = \delta_\tau{}^\sigma. \tag{6.5.14}$$

Заметим, что при подстановке базисных «спиноров» в уравнения Дирака мы получим

$$(\gamma^\mu q_\mu \mp m) v^{(\mp)\tau}(\mathbf{q}) = 0 \tag{6.5.15}$$

и

$$\bar{v}^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q})(\gamma^\mu q_\mu \mp m) = 0. \tag{6.5.16}$$

Отсюда следует ряд важных свойств этих 1×4- и 4×1-матриц.

Умножая (6.5.15) слева на $\bar{v}^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q})\gamma^0$, получаем

$$\bar{v}^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q})\gamma^0(\gamma^\mu q_\mu \mp m) v^{(\mp)\tau}(\mathbf{q}) = 0, \tag{6.5.17}$$

откуда

$$m\delta_\tau{}^\sigma = \pm\bar{v}^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q})\gamma^0\gamma^\mu q_\mu v^{(\mp)\tau}(\mathbf{q}). \tag{6.5.18}$$

Так как, однако,

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu}\mathrm{I} + \sigma^{\mu\nu} \tag{6.5.19}$$

(выделение симметричной и антисимметричной частей произведения двух γ-матриц), то

$$m\delta_\tau{}^\sigma = \pm\bar{v}^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q})[q^0\mathbf{I} + \sigma^{0\mu}q_\mu] v^{(\mp)\tau}(\mathbf{q}). \tag{6.5.20}$$

Точно так же, умножая (6.5.16) справа на $\gamma^0 v^{(\mp)\tau}(\mathbf{q})$, получаем после аналогичной процедуры

$$m\delta_\tau{}^\sigma = \pm\bar{v}^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q})[q^0\mathbf{I} + \sigma^{0\mu}q_\mu] v^{(\mp)\tau}(\mathbf{q}). \tag{6.5.21}$$

Складывая и вычитая равенства (6.5.20) и (6.5.21), находим

$$\bar{v}^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q}) v^{(\mp)\tau}(\mathbf{q}) = \pm\frac{m}{q_0}\delta_\tau{}^\sigma \tag{6.5.22}$$

и

$$q_\mu\bar{v}^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q})\sigma^{0\mu}v^{(\mp)\tau}(\mathbf{q}) = 0. \tag{6.5.23}$$

На основании уравнения (6.5.15) можно также написать

$$\bar{v}^{(\mp)\sigma}(\mathbf{p})\,(\gamma^\mu q_\mu \mp m)\,v^{(\mp)\tau}(\mathbf{q}) = 0, \tag{6.5.24}$$

а на основании уравнения (6.5.16) —

$$\bar{v}^{(\mp)\sigma}(\mathbf{p})\,(\gamma^\mu p_\mu \pm m)\,v^{(\mp)\tau}(\mathbf{q}) = 0. \tag{6.5.25}$$

Здесь мы положим $p_0 = q_0$, $p_i = -q_i$. Поэтому, складывая (6.5.24) и (6.5.25), получаем

$$\bar{v}^{(\pm)\sigma}(\mathbf{p})\,\gamma^0 v^{(\pm)\tau}(\mathbf{q}) = 0, \qquad p_\mu = q^\mu. \tag{6.5.26}$$

Другой пример. Запишем в очевидной символической форме

$$\bar{v}^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q})\,\gamma^\nu\cdot(6.5.15) - (6.5.16)\cdot\gamma^\nu v^{(\mp)\tau}(\mathbf{q}) = 0, \tag{6.5.27}$$

откуда непосредственно следует

$$q_\mu \bar{v}^{(\pm)\tau}(\mathbf{q})\,[\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu]\,v^{(\mp)\sigma}(\mathbf{q}) = 0. \tag{6.5.28}$$

Однако имеет место отдельно равенство (6.5.23), так что равенство (6.5.28) оказывается его продолжением. Нетрудно показать, что

$$q_i \bar{v}^{(\pm)\tau}(\mathbf{q})\,[\gamma^\nu\gamma^i - \gamma^i\gamma^\nu]\,v^{(\mp)\sigma}(\mathbf{q}) = 0 \tag{6.5.29}$$

(суммирование лишь по пространственным значениям индекса i). Важное равенство следует и из комбинации

$$\bar{v}^{(\pm)\sigma}(\mathbf{p})\,\gamma^0\gamma^i\gamma^j\cdot(6.5.15) - \underset{q\to p}{(6.5.16)}\cdot\gamma^0\gamma^i\gamma^j v^{(\pm)\tau}(\mathbf{q}) = 0, \tag{6.5.30}$$

где снова $p_0 = q_0$, $p_i = -q_i$, т. е. $p_\mu = q^\mu$. Простые вычисления дают

$$\bar{v}^{(\pm)\tau}(\mathbf{p})\,\gamma^0(\gamma^i q^j - \gamma^j q^i \pm m\gamma^i\gamma^j)\,v^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q}) = 0. \tag{6.5.31}$$

Наконец, очень важны свойства базисных «спиноров» при суммировании их произведений по спиновым индексам. Исходя из соотношения (6.5.22), записываем

$$\sum_{\sigma=1,2} v_a^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q})\,\bar{v}_b^{(\mp)\sigma}(\mathbf{q})\,\bar{v}_a^{(\mp)\rho}(\mathbf{q}) = \mp\frac{m}{q_0}\,\bar{v}_b^{(\mp)\rho}. \tag{6.5.32}$$

Преобразуем правую часть, пользуясь уравнением Дирака в форме (6.5.16):

$$m\bar{v}_b^{(\mp)\rho}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\,\bar{v}_a^{(\mp)\rho}(\mathbf{q})\,[m\delta_b{}^a \mp q_\mu\gamma_{ab}]. \tag{6.5.33}$$

Отсюда и из (6.5.32) следует равенство

$$\bar{v}_a^{(\mp)\rho}(\mathbf{q})\cdot\left\{\sum_\sigma v_a^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q})\,\bar{v}_b^{(\mp)\sigma}(\mathbf{q}) \pm \frac{(m \mp \gamma^\mu q_\mu)_{ab}}{2q_0}\right\} = 0. \tag{6.5.34}$$

Ввиду этого становится правдоподобным соотношение

$$\sum_{\sigma=1,2} v_a{}^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q})\,\bar{v}_b{}^{(\mp)\sigma}(\mathbf{q}) = \frac{(\gamma^\mu q_\mu \mp m)_{ab}}{2q_0}, \tag{6.5.35}$$

которое действительно выполняется и которое мы здесь строго не будем выводить.

Приведенные выражения важны при расчете динамических переменных фермионного поля. Те формулы, которые включают противоположно направленные пространственные составляющие импульсов, служат для исключения зависящих от времени членов в динамических переменных.

Мы не будем здесь углубляться в детали этих хорошо известных расчетов, ограничившись приведенным выше выводом вспомогательных формул, а также отдельными полезными деталями.

Плотность энергии-импульса мы запишем, пользуясь символикой нормального произведения:

$$\mathfrak{t}_\alpha{}^\beta = \frac{i}{2} : (\bar{\psi}\gamma^\beta\psi_{,\alpha} - \bar{\psi}_{,\alpha}\gamma^\beta\psi) : . \tag{6.5.36}$$

Проводя интегрирование, получаем

$$P_\alpha = \int d^3q q_\alpha \sum_{\sigma=1,2} : [a_\sigma{}^{(+)*}(\mathbf{q}) a_\sigma{}^{(-)}(\mathbf{q}) - a_\sigma{}^{(-)*}(\mathbf{q}) a_\sigma{}^{(+)}(\mathbf{q})] : . \tag{6.5.37}$$

Ввиду соотношения (6.5.12) в классической теории (когда величины $a^{(\pm)*}$ и $a^{(\mp)}$ просто коммутируют друг с другом) выражение для энергии фермионного поля, получаемое из (6.5.37) при $\alpha = 0$, оказывается индефинитным по знаку. По этой причине Дираку пришлось (до введения вторичного квантования) предположить, что все отрицательные энергетические уровни заполнены ненаблюдаемыми электронами, при вырывании которых из этих состояний в «дираковском море» отрицательных состояний образуются дырки, интерпретируемые как позитроны. Однако эта искусственная картина становится излишней при переходе ко вторичному квантованию, когда для фермионных ψ-функций записываются антикоммутационные соотношения, а в нормальном произведении при правильной расстановке положительно- и отрицательно-частотных сомножителей меняется знак, когда переставляются местами сомножители противоположной частотности. Действительно, тогда выражение для энергии-импульса принимает положительно определенный вид

$$P_\alpha = \int d^3q \cdot q_\alpha \cdot \sum_\sigma [a_\sigma^{(+)*}(\mathbf{q}) a_\sigma^{(-)}(\mathbf{q}) + a_\sigma^{(+)}(\mathbf{q}) a_\sigma^{(-)*}(\mathbf{q})]. \tag{6.5.38}$$

Из выражения для плотности тока

$$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{6.5.39}$$

следует обычным путем заряд фермионного поля

$$Q = e\int d^3q \sum_\sigma : [a_\sigma^{(+)*}(\mathbf{q}) a_\sigma^{(-)}(\mathbf{q}) + a_\sigma^{(-)*}(\mathbf{q}) a_\sigma^{(+)}(\mathbf{q})] : , \tag{6.5.40}$$

имеющий при явном учете нормального произведения вид

$$Q = e\int d^3q \sum_\sigma [a_\sigma^{(+)*}(\mathbf{q}) a_\sigma^{(-)}(\mathbf{q}) - a_\sigma^{(+)}(\mathbf{q}) a_\sigma^{(-)*}(\mathbf{q})]. \tag{6.5.41}$$

Ясно, что первая группа сомножителей, ответственная за отрицательный заряд, должна интерпретироваться как число электронов с данным значением импульса, а вторая — как число таких позитронов, тогда как входящие в эти выражения сомножители представляют собой операторы рождения и уничтожения этих частиц. Таким образом, выражение (6.5.41) важно для интерпретации операторов.

Что касается спина, то его z-компонента, вычисляемая на основании определения

$$S^{[\mu\nu]} = -\frac{i}{4}\int dv\bar{\psi}(\gamma^0\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^0)\psi, \tag{6.5.42}$$

оказывается не зависящей от времени, как и у других полей, но эта независимость доказывается сложнее [требуется использовать выведенные ранее соотношения для $v^{(\pm)}(\mathbf{p})$ и $\bar{v}^{(\pm)}(\mathbf{q})$]. В результате получим интегральное выражение

$$S_{\gamma} = -\frac{i}{4}\int d^3q : [\overline{\psi}^{(+)}(\mathbf{q})\gamma^0\sigma^{12}\psi^{(-)}(\mathbf{q}) + \overline{\psi}^{(-)}(\mathbf{q})\gamma^0\sigma^{12}\psi^{(+)}(\mathbf{q})] : =$$

$$= -\frac{i}{4}\int d^3q \sum_{\sigma,\tau} : [a_{\sigma}^{(+)*}(\mathbf{q})\, a_{\tau}^{(-)}(\mathbf{q})\, \bar{v}^{(+)\sigma}(\mathbf{q})\gamma^0\sigma^{12}v^{(-)\tau}(\mathbf{q}) -$$

$$- a_{\tau}^{(+)}(\mathbf{q})\, a_{\sigma}^{(-)*}(\mathbf{q})\, \bar{v}^{(-)\sigma}(\mathbf{q})\gamma^0\sigma^{12}v^{(+)\tau}(\mathbf{q})]: . \tag{6.5.43}$$

Диагонализировать его можно путем такого выбора базисных «спиноров», чтобы

$$\bar{v}^{(\pm)\sigma}(\mathbf{q})\gamma^0\sigma^{12}v^{(\mp)\tau}(\mathbf{q}) = 2i(-1)^{\sigma-1}\delta_{\tau}{}^{\sigma}, \tag{6.5.44}$$

где $\delta_{\tau}{}^{\sigma}$ — 2-мерный символ Кронекера. Специфический выбор знаков при диагонализации в (6.5.44) обусловлен, с одной стороны, требованием выполнения известных соотношений для базисных «спиноров», а с другой — физическими соображениями возможности разных проекций спина у частиц одного и того же сорта. При обычном выбора матриц Дирака

$$\overset{0}{\gamma}_{ab} = \delta_b{}^a \operatorname{sgn}\cos\left[\frac{\pi}{2}(a-1) - \varepsilon\right], \tag{6.5.45}$$

$$\overset{1}{\gamma}_{ab} = \delta_a^{5-b} \operatorname{sgn}\cos\left[\frac{\pi}{2}(a-1) - \varepsilon\right], \tag{6.5.46}$$

$$\overset{2}{\gamma}_{ab} = -i\delta_a^{5-b} \operatorname{sgn}\cos\left(\frac{\pi}{2}a - \varepsilon\right), \tag{6.5.47}$$

$$\overset{3}{\gamma}_{ab} = \delta_a^{b-2} \operatorname{sgn}\cos\left(\frac{\pi}{2}a - \varepsilon\right), \tag{6.5.48}$$

$$\overset{5}{\gamma}_{ab} = -i\delta_a^{b-2}, \tag{6.5.49}$$

можно принять (см. Боголюбов и Ширков, 1957)

$$v^{(+)1} = N^{-1}\cdot\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(+)2} = N^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$v^{(-)1} = N^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(-)2} = N^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \tag{6.5.50}$$

где

$$N = \sqrt{1 + \left(\frac{q_3}{q_0 + m}\right)^2} = \sqrt{\frac{2q_0}{q_0 + m}}, \tag{6.5.51}$$

$$a = \frac{q^3}{q_0 + m}.$$

Коммутационные соотношения для фермионных потенциалов (точнее: «антикоммутационные») легко установить, исходя из коммутатора

$$i\psi_{,\beta}=[\psi, P_\beta]_-, \tag{6.5.52}$$

что в применении к фурье-образам дает

$$[\psi^{(\pm)}(\mathbf{q}), P_\beta]_- = \mp q_\beta \psi^{(\pm)}(\mathbf{q}) \tag{6.5.53}$$

и

$$[\bar\psi^{(\pm)}(\mathbf{q}), P_\beta]_- = \mp q_\beta \bar\psi^{(\pm)}(\mathbf{q}), \tag{6.5.54}$$

откуда нетрудно перейти к соотношениям для операторов a. Пользуясь теперь интегралом (6.5.38), записываем

$$\Big[a_\sigma^{(\pm)}(\mathbf{q}), \int d^3p\cdot p_\beta \sum_\tau (a_\tau^{(+)*}(\mathbf{p})a_\tau^{(-)}(\mathbf{p})+$$

$$+a_\tau^{(+)}(\mathbf{p})a_\tau^{(-)*}(\mathbf{p}))\Big]_- = \mp q_\beta a_\sigma^{(\pm)}(\mathbf{q}). \tag{6.5.55}$$

Предполагая, что *антикоммутатор* отличен от нуля лишь для операторов, отличающихся друг от друга одновременно и частотностью, и сопряжением, и что во всех остальных случаях антикоммутатор (не коммутатор!) равен нулю, получаем

$$[a_\sigma^{(+)}(\mathbf{q}), a_\tau^{(-)*}(\mathbf{p})]_+ = -\delta_\sigma{}^\tau\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \tag{6.5.56}$$

и

$$[a_\sigma^{(-)}(\mathbf{q}), a_\tau^{(+)*}(\mathbf{p})]_+ = \delta_\sigma{}^\tau\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{6.5.57}$$

Первые соотношения касаются электронов, вторые — позитронов.

Запишем, наконец, диагонализированное выражение для интегрального спина фермионного поля (z-компоненты):

$$S_z=\frac{1}{2}\int d^3q\,(a_1^{(+)*}(\mathbf{q})a_1^{(-)}(\mathbf{q})-a_2^{(+)*}(\mathbf{q})a_2^{(-)}(\mathbf{q})-$$

$$-a_1^{(+)}(\mathbf{q})a_1^{(-)*}(\mathbf{q})+a_2^{(+)}(\mathbf{q})a_2^{(-)*}(\mathbf{q})). \tag{6.5.58}$$

Отсюда видно, что операторы $a_1{}^{(+)}$ и $a_1{}^{(-)*}$ описывают рождение и уничтожение электрона со спином, ориентированным в отрицательном направлении оси z, операторы $a_2{}^{(+)}$ и $a_2{}^{(-)*}$ — рождение и уничтожение электрона с противоположно направленным спином и т. д.

В заключение приведем одно релятивистское, но относящееся к «классической квантовой механике» (без вторичного квантования) соотношение. Если исходить из уравнения Дирака в форме (4.8.2), то согласно квантовой механике, гамильтониан в случае электрона Дирака должен иметь вид

$$H=-i\gamma^0\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i}-\frac{i}{2}\gamma^0\gamma^\mu{}_{;\mu}+m\gamma^0+$$

$$+\frac{i}{8}\gamma^0(\gamma^\mu\gamma^\nu{}_{,\mu}\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\nu{}_{,\mu}\gamma^\mu)-e\gamma^0\gamma^\mu A_\mu, \tag{6.5.59}$$

так как уравнение (4.8.2) может быть переписано как

$$i\psi_{,0}=H\psi. \tag{6.5.60}$$

Отсюда определяется скорость электрона в виде матричного оператора

$$iv^i=[x^i, H]_-=i\gamma^0\gamma^i, \tag{6.5.61}$$

собственными значениями которого могут быть лишь $+1$ или -1, т. е. скорость должна быть равна скорости света. Такой парадоксальный результат довольно редко и противоречиво обсуждается, и мы указываем здесь на него лишь коротко, ссылаясь на книгу Дирака (1960), где помещен также, правда, чисто негативный, комментарий В. А. Фока. На наш взгляд, полное устранение противоречий в этом случае требует обобщения некоторых понятий классической механики, которой, как известно, совершенно чужд принцип Паули.

О желательности такого обобщения мы уже говорили в § 6.1. Можно, конечно, вместе с Дираком, предполагать, что реально наблюдаемая скорость электрона является некоторым средним по быстро меняющейся мгновенной скорости, т. е. что имеет место некоторое подобие броуновского движения для электрона (это перекликается с идеями Френкеля о трансмутационной природе самого движения частиц).

6.6. Разложение физических величин по степеням гравитационной постоянной в представлении взаимодействия

Рассматривая гравитационное поле как типично нелинейное, что соответствует обычно принятым представлениям (обсуждение этого вопроса см. в § 6.2), следует считать его лагранжиан уже не квадратичным по потенциалам или их производным, а функцией более высокой степени, даже бесконечным степенны́м рядом, построенным из этих переменных. Такой подход в полной мере был впервые развит Гуптой (1952), а затем Лиас (1957), Пийром (1957), Кимурой (1956), Фейнманом (1962) и нами (1958). Члены в лагранжиане гравитационного поля, имеющие степень выше второй по полевым переменным, рассматриваются как взаимодействие поля самого с собой и относятся к лагранжиану взаимодействия. Если при этом перейти к представлению взаимодействия (например, по Боголюбову и Ширкову), то все свойства полевых переменных, в том числе и перестановочные соотношения, определяются из линейной теории, а нелинейные эффекты переносятся в выводы теории возмущений (S-матрица). Такая процедура квантования гравитации практически очень удобна и непосредственно приводит к количественным заключениям о конкретных эффектах.

Следуя Гупте (1952), мы полагаем

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} - ky^{\mu\nu}. \tag{6.6.1}$$

Эту конечную сумму будем считать точной, и тогда все прочие величины будут выражаться, вообще говоря, в виде бесконечных рядов по степеням k. Входящий в (6.6.1) множитель k принимается равным

$$k = \sqrt{2\varkappa} \tag{6.6.2}$$

и является малым, если его брать в системе единиц CGS. В других системах приходится считать малым произведение $ky^{\mu\nu}$, являющееся величиной безразмерной. Выбор разложения (6.6.1) обусловлен особыми свойствами величины $y^{\mu\nu}$, которая была введена и исследована в § 3.2 (3.2.27). Мы показали там, что координатные условия Гильберта

$$y^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{6.6.3}$$

эквивалентны условиям гармоничности де Дондера — Фока,

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \tag{6.6.4}$$

и в этом случае первое неисчезающее приближение для уравнений гравитации имеет простой вид (3.2.32)

$$\Box\, y^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}. \tag{6.6.5}$$

Чтобы провести в рамках такого подхода процедуру вторичного квантования гравитационного поля и рассчитать соответствующие квантовые эффекты, нужно разложить лагранжианы полей и динамические переменные в такого рода ряды. Это удобнее сделать, начиная с детерминанта метрического тензора, так как

$$g = \mathrm{Det}\, g_{\mu\nu} = \mathrm{Det}\, \mathbf{g}^{\mu\nu}. \tag{6.6.6}$$

Тогда детерминант выражается в виде конечной суммы,

$$g = -1 + ky + \frac{1}{2} k^2 (y^{\mu\nu} y_{\mu\nu} - yy) + \frac{1}{6} k^3 (yyy - 3yy^{\mu\nu} y_{\mu\nu} + 2y^{\mu\nu} y_{\nu\lambda} y_\mu{}^\lambda) + \frac{1}{24} k^4 \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} y^{\mu\alpha} y^{\nu\beta} y^{\lambda\gamma} y^{\rho\delta}, \tag{6.6.7}$$

откуда

$$\sqrt{-g} = 1 - \frac{1}{2} ky + k^2 \left(\frac{1}{8} yy - \frac{1}{4} y^{\mu\nu} y_{\mu\nu} \right) + k^3 \left(-\frac{1}{48} yyy + \frac{1}{8} yy^{\mu\nu} y_{\mu\nu} - \frac{1}{6} y^{\mu\nu} y_{\nu\lambda} y_\mu{}^\lambda \right) + k^4 \left(-\frac{1}{48} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} y^{\mu\alpha} y^{\nu\beta} y^{\lambda\sigma} y^{\rho\tau} - \frac{7}{384} yyyy + \frac{3}{32} yyy^{\mu\nu} y_{\mu\nu} - \frac{1}{32} y^{\alpha\beta} y_{\alpha\beta} y^{\mu\nu} y_{\mu\nu} - \frac{1}{12} yy^{\mu\nu} y_{\nu\lambda} y_\mu{}^\lambda \right) + O(k^5) \tag{6.6.8}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} = 1 + \frac{1}{2} ky + k^2 \left(\frac{1}{8} yy + \frac{1}{4} y^{\mu\nu} y_{\mu\nu} \right) + k^3 \left(\frac{1}{48} yyy + \frac{1}{8} yy^{\mu\nu} y_{\mu\nu} + \frac{1}{6} y^{\mu\nu} y_{\nu\lambda} y_\mu{}^\lambda \right) + k^4 \left(\frac{1}{48} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} y^{\mu\alpha} y^{\nu\beta} y^{\lambda\gamma} y^{\rho\delta} + \frac{3}{128} yyyy - \frac{3}{32} yyy^{\mu\nu} y_{\mu\nu} + \frac{3}{32} y^{\alpha\beta} y_{\alpha\beta} y^{\mu\nu} y_{\mu\nu} + \frac{1}{4} yy^{\mu\nu} y_{\nu\lambda} y_\mu{}^\lambda \right) + O(k^5). \tag{6.6.9}$$

Из соотношений (6.6.1) и (6.6.9) получим

$$g^{\lambda\rho} = \delta^{\lambda\rho} + k \left(\frac{1}{2} y\delta^{\lambda\rho} - y^{\lambda\rho} \right) + k^2 \left(\frac{1}{8} yy\delta^{\lambda\rho} + \frac{1}{4} y^{\alpha\beta} y_{\alpha\beta} \delta^{\lambda\rho} - \frac{1}{2} yy^{\lambda\rho} \right) + k^3 \left(\frac{1}{48} yyy\delta^{\lambda\rho} + \frac{1}{8} yy^{\alpha\beta} y_{\alpha\beta} \delta^{\lambda\rho} + \frac{1}{6} y^{\alpha\beta} y_{\beta\sigma} y_\alpha{}^\sigma \delta^{\lambda\rho} - \frac{1}{8} yyy^{\lambda\rho} - \frac{1}{4} y^{\alpha\beta} y_{\alpha\beta} y^{\lambda\rho} \right) + k^4 \left(\frac{1}{48} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} y^{\alpha\mu} y^{\beta\nu} y^{\gamma\sigma} y^{\delta\tau} \delta^{\lambda\rho} + \frac{1}{128} yyyy\delta^{\lambda\rho} - \frac{3}{32} yyy^{\alpha\beta} y_{\alpha\beta} \delta^{\lambda\rho} + \frac{3}{32} y^{\alpha\beta} y_{\alpha\beta} y^{\sigma\tau} y_{\sigma\tau} \delta^{\lambda\rho} + \frac{1}{4} yy^{\alpha\beta} y_{\beta\sigma} y_\alpha{}^\sigma \delta^{\lambda\rho} - \frac{1}{48} yyyy^{\lambda\rho} - \frac{1}{8} yy^{\alpha\beta} y_{\alpha\beta} y^{\lambda\rho} - \left(-\frac{1}{6} y^{\alpha\beta} y_{\beta\sigma} y_\alpha{}^\sigma y^{\lambda\rho} \right) + O(k^5), \tag{6.6.10}$$

откуда символы Леви-Чивиты можно исключить с помощью соотношения (1.40). Поэтому

$$g^{\lambda\rho}=\delta^{\lambda\rho}+k\left(\frac{1}{2}y\delta^{\lambda\rho}-y^{\lambda\rho}\right)+k^2\left(\frac{1}{8}yy\delta^{\lambda\rho}+\right.$$

$$+\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}\delta^{\lambda\rho}-\left.\frac{1}{2}yy^{\lambda\rho}\right)+k^3\left(\frac{1}{48}yyy\delta^{\lambda\rho}+\frac{1}{8}yy^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}\delta^{\lambda\rho}+\right.$$

$$+\frac{1}{6}y^{\alpha\beta}y_{\beta\sigma}y_{\alpha}{}^{\sigma}\delta^{\lambda\rho}-\frac{1}{8}yyy^{\lambda\rho}-\left.\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}y^{\lambda\rho}\right)+k^4\left(\frac{1}{384}yyyy\delta^{\lambda\rho}+\right.$$

$$+\frac{1}{32}yyy^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}\delta^{\lambda\rho}+\frac{1}{32}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}y^{\sigma\tau}y_{\sigma\tau}\delta^{\lambda\rho}+\frac{1}{12}yy^{\alpha\beta}y_{\beta\sigma}y_{\alpha}{}^{\sigma}\delta^{\lambda\rho}+$$

$$+\frac{1}{8}y^{\alpha\beta}y_{\beta\sigma}y^{\sigma\tau}y_{\tau\alpha}\delta^{\lambda\rho}-\frac{1}{48}yyyy^{\lambda\rho}-\frac{1}{8}yy^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}y^{\lambda\rho}-$$

$$\left.-\frac{1}{6}y^{\alpha\beta}y_{\beta\sigma}y_{\alpha}{}^{\sigma}y^{\lambda\rho}\right)+O(k^5). \qquad (6.6.11)$$

Из определения обратного тензора

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda}=\delta_{\mu}{}^{\lambda} \qquad (6.6.12)$$

нетрудно теперь получить выражение для ковариантного метрического тензора:

$$g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+k\left(-\frac{1}{2}y\delta_{\mu\nu}+y_{\mu\nu}\right)+k^2\left(\frac{1}{8}yy\delta_{\mu\nu}-\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}yy_{\mu\nu}+y_{\mu}{}^{\sigma}y_{\sigma\nu}\right)+k^3\left(-\frac{1}{48}yyy\delta_{\mu\nu}+\frac{1}{8}yy^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}-\right.$$

$$-\frac{1}{6}y^{\alpha\beta}y_{\beta\sigma}y_{\alpha}{}^{\sigma}\delta_{\mu\nu}+\frac{1}{8}yyy_{\mu\nu}-\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}y_{\mu\nu}-$$

$$\left.-\frac{1}{2}yy_{\mu}{}^{\sigma}y_{\sigma\nu}+y_{\tau}{}^{\sigma}y_{\sigma\mu}y_{\nu}{}^{\tau}\right)+k^4\left(\frac{1}{384}yyyy\delta_{\mu\nu}-\frac{1}{32}yyy^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}+\right.$$

$$+\frac{1}{32}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}y^{\sigma\tau}y_{\sigma\tau}\delta_{\mu\nu}+\frac{1}{12}yy^{\alpha\beta}y_{\beta\sigma}y_{\alpha}{}^{\sigma}\delta_{\mu\nu}-\frac{1}{8}y^{\alpha\beta}y_{\beta\sigma}y^{\sigma\tau}y_{\tau\alpha}\delta_{\mu\nu}-$$

$$-\frac{1}{4}yyyy_{\mu\nu}+\frac{1}{8}yy^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}y_{\mu\nu}-\frac{1}{6}y^{\alpha\beta}y_{\beta\sigma}y_{\alpha}{}^{\sigma}y_{\mu\nu}+$$

$$+\frac{1}{8}yyy_{\mu}{}^{\sigma}y_{\sigma\nu}-\frac{1}{2}yy_{\mu}{}^{\sigma}y_{\sigma}{}^{\tau}y_{\tau\nu}-\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}y_{\mu}{}^{\sigma}y_{\sigma\nu}+$$

$$\left.+y^{\alpha\beta}y_{\beta\sigma}y_{\mu}{}^{\sigma}y_{\alpha\nu}\right)+O(k^5). \qquad (6.6.13)$$

Мы использовали здесь верхние и нижние («контравариантные» и «ковариантные») индексы у $y_{\mu\nu}$. Однако, для их опускания или поднятия использовались не тензоры $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$, а символ $\delta_{\mu\nu}=\delta^{\mu\nu}$ (галилеева метрика), как это делается обычно. Ясно, что здесь можно было бы применить и двуметрический формализм. Тогда все разложения стали бы общековариантными. Вычисление этих разложений, чрезвычайно громоздкое и утомительное, само по себе не представляет ничего сложного. Поэтому мы приведем некоторые ряды более подробно, чем они нам понадобятся в дальнейшем, чтобы читатель был освобожден от лишних выкладок, если он пожелает исследовать эффекты высших порядков самостоятельно.

Что касается разложения γ-матриц, то в нем мы будем основываться на обычных (постоянных) дираковских матрицах, для которых

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,\underset{0}{\gamma^{\mu}}\underset{0}{\gamma^{\nu}}=\delta^{\mu\nu}. \tag{6.6.14}$$

Исходя из соотношения (4.5.8), принимаем

$$\gamma^{\mu}=\gamma(\alpha)g^{\mu}(\alpha), \tag{6.6.15}$$

причем

$$\gamma(\alpha)=\underset{0}{\gamma^{\mu}}\delta_{\mu}(\alpha)=\mathrm{const}. \tag{6.6.16}$$

Для того, чтобы ограничиться рассмотрением величин $y_{\mu\nu}$, примем $(g^{\mu}(\alpha))_0=\delta^{\mu}(\alpha)$. Тогда

$$g^{\mu}(\alpha)=\delta^{\mu}(\alpha)+\frac{k}{4}\left(\delta_{\omega\varepsilon}\delta^{\mu}(\alpha)-2\delta_{\varepsilon}{}^{\mu}\delta_{\omega}(\alpha)\right)y^{\omega\varepsilon}+$$
$$+k^2\left(\frac{1}{32}\delta_{\omega\varepsilon}\delta_{\sigma\tau}\delta^{\mu}(\alpha)+\frac{1}{8}\delta_{\omega\sigma}\delta_{\varepsilon\tau}\delta^{\mu}(\alpha)-\frac{1}{8}\delta_{\omega\varepsilon}\delta_{\sigma}{}^{\mu}\delta_{\tau}(\alpha)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{8}\delta_{\omega\sigma}\delta_{\varepsilon}{}^{\mu}\delta_{\tau}(\alpha)\right)y^{\omega\varepsilon}y^{\sigma\tau}+O(k^3);$$

$$\gamma^{\mu}=\underset{0}{\gamma^{\mu}}+k\left(\frac{1}{4}\delta_{\omega\varepsilon}\underset{0}{\gamma^{\mu}}-\frac{1}{2}\delta_{\varepsilon}{}^{\mu}\underset{0}{\gamma_{\omega}}\right)y^{\omega\varepsilon}+k^2\left(\frac{1}{32}\delta_{\omega\varepsilon}\delta_{\sigma\tau}\underset{0}{\gamma^{\mu}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8}\delta_{\omega\sigma}\delta_{\varepsilon\tau}\underset{0}{\gamma^{\mu}}-\frac{1}{8}\delta_{\omega\varepsilon}\delta_{\sigma}{}^{\mu}\underset{0}{\gamma_{\tau}}-\frac{1}{8}\delta_{\omega\sigma}\delta_{\varepsilon}{}^{\mu}\underset{0}{\gamma_{\tau}}\right)y^{\omega\varepsilon}y^{\sigma\tau}. \tag{6.6.17}$$

Символы Кристоффеля выражаются в виде рядов

$$\Gamma_{\mu\nu,\rho}\equiv\frac{1}{2}\left(g_{\mu\rho,\nu}+g_{\rho\nu,\mu}-g_{\mu\nu,\rho}\right)=k\left(-\frac{1}{4}y_{,\nu}\delta_{\mu\rho}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}y_{,\mu}\delta_{\nu\rho}+\frac{1}{4}y_{,\rho}\delta_{\mu\nu}+\frac{1}{2}y_{\mu\rho,\nu}+\frac{1}{2}y_{\rho\nu,\mu}-\frac{1}{2}y_{\mu\nu,\rho}\right)+$$
$$+k^2\left(\frac{1}{8}yy_{,\nu}\delta_{\mu\rho}-\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\nu}\delta_{\mu\rho}-\frac{1}{4}yy_{\mu\rho,\nu}-\frac{1}{4}y_{\mu\rho}y_{,\nu}+\frac{1}{2}y_{\mu}{}^{\sigma}y_{\sigma\rho,\nu}+\right.$$
$$+\frac{1}{2}y_{\sigma\rho}y_{\mu,\nu}^{\sigma}+\frac{1}{8}yy_{,\mu}\delta_{\nu\rho}-\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\mu}\delta_{\nu\rho}-\frac{1}{4}yy_{\nu\rho,\mu}-\frac{1}{4}y_{\nu\rho}y_{,\mu}+$$
$$+\frac{1}{2}y_{\nu}{}^{\sigma}y_{\sigma\rho,\mu}+\frac{1}{2}y_{\sigma\rho}y_{\nu,\mu}^{\sigma}-\frac{1}{8}yy_{,\rho}\delta_{\mu\nu}+\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\rho}\delta_{\mu\nu}+\frac{1}{4}yy_{\mu\nu,\rho}+$$
$$\left.+\frac{1}{4}y_{\mu\nu}y_{,\rho}-\frac{1}{2}y_{\mu}{}^{\sigma}y_{\sigma\nu,\rho}-\frac{1}{2}y_{\sigma\nu}y_{\mu,\rho}^{\sigma}\right)+k^3\left(-\frac{1}{32}yyy_{,\nu}\delta_{\mu\rho}+\right.$$
$$+\frac{1}{8}yy^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\nu}\delta_{\mu\rho}+\frac{1}{16}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}y_{,\nu}\delta_{\mu\rho}-\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\beta\sigma}y_{\alpha,\nu}^{\sigma}\delta_{\mu\rho}+\frac{1}{8}yy_{\mu\rho}y_{,\nu}+$$
$$+\frac{1}{16}yyy_{\mu\rho,\nu}-\frac{1}{4}y_{\mu\rho}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\nu}-\frac{1}{8}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}y_{\mu\rho,\nu}-\frac{1}{4}yy_{\mu}{}^{\sigma}y_{\sigma\rho,\nu}-$$
$$-\frac{1}{4}yy_{\sigma\rho}y_{\mu,\nu}^{\sigma}-\frac{1}{4}y_{\mu}{}^{\sigma}y_{\sigma\rho}y_{,\nu}+\frac{1}{2}y_{\tau}{}^{\sigma}y_{\sigma\mu}y_{\rho,\nu}^{\tau}+\frac{1}{2}y_{\rho}{}^{\tau}y_{\tau}{}^{\sigma}y_{\sigma\mu,\nu}+$$

$$+\frac{1}{2}y_{\sigma\mu}y_{\rho}{}^{\tau}y^{\sigma}_{\tau,\nu}-\frac{1}{32}yyy_{,\mu}\delta_{\nu\rho}+\frac{1}{8}yy^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\mu}\delta_{\nu\rho}+\frac{1}{16}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}y_{,\mu}\delta_{\nu\rho}-$$

$$-\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\beta\sigma}y^{\sigma}_{\alpha,\mu}\delta_{\nu\rho}+\frac{1}{8}yy_{\nu\rho}y_{,\mu}+\frac{1}{16}yyy_{\nu\rho,\mu}-\frac{1}{4}y_{\nu\rho}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\mu}-$$

$$-\frac{1}{8}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}y_{\nu\rho,\mu}-\frac{1}{4}yy_{\nu}{}^{\sigma}y_{\sigma\rho,\mu}-\frac{1}{4}yy_{\sigma\rho}y^{\sigma}_{\nu,\mu}-\frac{1}{4}y_{\nu}{}^{\sigma}y_{\sigma\rho}y_{,\mu}+$$

$$+\frac{1}{2}y_{\tau}{}^{\sigma}y_{\sigma\nu}y^{\tau}_{\rho,\mu}+\frac{1}{2}y_{\rho}{}^{\tau}y_{\tau}{}^{\sigma}y_{\sigma\nu,\mu}+\frac{1}{2}y_{\sigma\nu}y_{\rho}{}^{\tau}y^{\sigma}_{\tau,\mu}+\frac{1}{32}yyy_{,\rho}\delta_{\mu\nu}-$$

$$-\frac{1}{8}yy^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\rho}\delta_{\mu\nu}-\frac{1}{16}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}y_{,\rho}\delta_{\mu\nu}+\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\beta\sigma}y^{\sigma}_{\alpha,\rho}\delta_{\mu\nu}-\frac{1}{8}yy_{\mu\nu}y_{,\rho}-$$

$$-\frac{1}{16}yyy_{\mu\nu,\rho}+\frac{1}{4}y_{\mu\nu}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\rho}+\frac{1}{8}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}y_{\mu\nu,\rho}+\frac{1}{4}yy_{\mu}{}^{\sigma}y_{\sigma\nu,\rho}+$$

$$+\frac{1}{4}yy_{\sigma\nu}y^{\sigma}_{\mu,\rho}+\frac{1}{4}y_{\sigma\nu}y_{\mu}{}^{\sigma}y_{,\rho}-\frac{1}{2}y_{\tau}{}^{\sigma}y_{\sigma\mu}y^{\tau}_{\nu,\rho}-\frac{1}{2}y_{\tau}{}^{\sigma}y_{\nu}{}^{\tau}y_{\sigma\mu,\rho}-$$

$$-\frac{1}{2}y_{\sigma\mu}y_{\nu}{}^{\tau}y^{\sigma}_{\tau,\rho}\Big)+O(k^{4}), \qquad (6.6.18)$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=k\Big(-\frac{1}{4}y_{,\nu}\delta_{\mu}{}^{\lambda}-\frac{1}{4}y_{,\mu}\delta_{\nu}{}^{\lambda}+\frac{1}{4}y_{,\rho}\delta^{\lambda\rho}\delta_{\mu\nu}+\frac{1}{2}y^{\lambda}_{\mu,\nu}+$$

$$+\frac{1}{2}y^{\lambda}_{\nu,\mu}-\frac{1}{2}y_{\nu\mu,\rho}\delta^{\lambda\rho}\Big)+k^{2}\Big(-\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\nu}\delta_{\mu}{}^{\lambda}+\frac{1}{2}y_{\mu}{}^{\sigma}y^{\lambda}_{\sigma,\nu}-$$

$$-\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\mu}\delta_{\nu}{}^{\lambda}+\frac{1}{2}y_{\nu}{}^{\sigma}y^{\lambda}_{\sigma,\mu}+\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\rho}\delta^{\lambda\rho}\delta_{\mu\nu}+\frac{1}{4}y_{\mu\nu}y_{,\rho}\delta^{\lambda\rho}-$$

$$-\frac{1}{2}y_{\mu}{}^{\sigma}y_{\sigma\nu,\rho}-\frac{1}{2}y_{\sigma\nu}y^{\sigma}_{\mu,\rho}-\frac{1}{4}y^{\lambda\rho}y_{,\rho}\delta_{\mu\nu}+\frac{1}{2}y^{\lambda\rho}y_{\mu\nu,\rho}\Big)+$$

$$+k^{3}\Big(-\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\beta\sigma}y^{\sigma}_{\alpha,\nu}\delta_{\mu}{}^{\lambda}+\frac{1}{2}y_{\tau}{}^{\sigma}y_{\sigma\mu}y^{\lambda\tau}{}_{,\nu}-\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\beta\sigma}y^{\sigma}_{\alpha,\mu}\delta_{\nu}{}^{\lambda}+$$

$$+\frac{1}{2}y_{\tau}{}^{\sigma}y_{\sigma\nu}y^{\tau\lambda}{}_{,\mu}+\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\beta\sigma}y^{\sigma}_{\alpha,\rho}\delta^{\lambda\rho}\delta_{\mu\nu}+\frac{1}{4}y_{\mu\nu}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\rho}\delta^{\lambda\rho}+$$

$$+\frac{1}{4}y_{\mu}{}^{\sigma}y_{\sigma\nu}y_{,\rho}\delta^{\lambda\rho}-\frac{1}{2}y_{\tau}{}^{\sigma}y_{\sigma\mu}y^{\tau}_{\nu,\rho}\delta^{\lambda\rho}-\frac{1}{2}y_{\nu}{}^{\tau}y_{\tau}{}^{\sigma}y_{\sigma\mu,\rho}\delta^{\lambda\rho}-$$

$$-\frac{1}{2}y_{\sigma\mu}y_{\nu}{}^{\tau}y^{\sigma}_{\tau,\rho}\delta^{\lambda\rho}-\frac{1}{4}y^{\lambda\rho}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\rho}\delta_{\mu\nu}-\frac{1}{4}y^{\lambda\rho}y_{\mu\nu}y_{,\rho}+$$

$$+\frac{1}{2}y^{\lambda\rho}y_{\mu}{}^{\sigma}y_{\sigma\nu,\rho}+\frac{1}{2}y^{\lambda\rho}y_{\sigma\nu}y^{\sigma}_{\mu,\rho}\Big)+O(k^{4}), \qquad (6.6.19)$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}=-\frac{1}{2}\left(ky_{,\mu}+k^{2}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\mu}+k^{3}y_{\tau}{}^{\sigma}y_{\sigma\lambda}y^{\lambda\tau}{}_{,\mu}+\right.$$

$$\left.+k^{4}y^{\alpha\beta}y_{\beta\sigma}y^{\sigma\tau}y_{\tau\alpha,\mu}+O(k^{5})\right). \qquad (6.6.20)$$

В отличие от других динамических переменных, биспин представляется в виде конечной суммы:

$$N^{\alpha\tau\beta}_{g\sigma}=\frac{1}{2k^{2}}\left(2\delta^{\tau\beta}\delta_{\sigma}{}^{\alpha}-\delta^{\alpha\beta}\delta_{\sigma}{}^{\tau}-\delta^{\alpha\tau}\delta_{\sigma}{}^{\beta}\right)+$$

$$+\frac{1}{2k}\left(\delta_\sigma{}^\tau y^{\alpha\beta}+\delta_\sigma{}^\beta y^{\alpha\tau}-2\delta_\sigma{}^\alpha y^{\tau\beta}\right). \tag{6.6.21}$$

Точное выражение для обобщенного спина можно записать в виде (5.6.14):

$$\mathrm{M}_{g\sigma}^{\alpha\tau}=\frac{1}{k^2}\left(2\mathrm{g}^{\tau\omega}\Gamma_{\sigma\omega}^{\alpha}+\delta_\sigma{}^\alpha \mathrm{g}^{\tau\nu}{}_{,\nu}-\mathrm{g}^{\alpha\tau}\Gamma_{\sigma\omega}^{\omega}\right), \tag{6.6.22}$$

откуда

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_{g\sigma}^{\alpha\tau}=&\frac{1}{k}\Big(-\delta_\sigma{}^\alpha y^{\tau\nu}{}_{,\nu}-\delta^{\alpha\beta}y_{\sigma,\beta}^{\tau}+\frac{1}{2}y_{,\omega}\delta^{\alpha\omega}\delta_\sigma{}^\tau+y_{\sigma,\beta}^{\alpha}\delta^{\tau\beta}-\\&-\frac{1}{2}y_{,\omega}\delta^{\tau\omega}\delta_\sigma{}^\alpha+y^{\alpha\tau}{}_{,\sigma}\Big)+k^0\Big(y^{\alpha\beta}y_{\sigma,\beta}^{\tau}-y^{\tau\beta}y_{\sigma,\beta}^{\alpha}+\delta^{\tau\beta}y_{\nu\sigma}y^{\nu\alpha}{}_{,\beta}-\\&-\delta^{\alpha\beta}y_{\nu\sigma}y^{\nu\tau}{}_{,\beta}+\frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}\delta_\sigma{}^\tau y_{\mu\nu}y^{\mu\nu}{}_{,\beta}-\frac{1}{2}\delta^{\beta\tau}\delta_\sigma{}^\alpha y_{\mu\nu}y^{\mu\nu}{}_{,\beta}-\\&-\frac{1}{2}y^{\alpha\omega}y_{,\omega}\delta_\sigma{}^\tau+\frac{1}{2}y^{\tau\omega}y_{,\omega}\delta_\sigma{}^\alpha\Big)+k\Big(y^{\alpha\beta}y_{\nu\sigma}y^{\nu\tau}{}_{,\beta}-y^{\tau\beta}y_{\sigma\nu}y^{\alpha\nu}{}_{,\beta}+\\&+\delta^{\tau\beta}y_\sigma{}^\omega y_{\omega\nu}y^{\nu\alpha}{}_{,\beta}-\delta^{\alpha\beta}y_\sigma{}^\omega y_{\nu\omega}y^{\nu\tau}{}_{,\beta}+\frac{1}{2}\delta_\sigma{}^\alpha y^{\mu\tau}y^{\omega\varepsilon}y_{\omega\varepsilon,\mu}-\\&-\frac{1}{2}\delta_\sigma{}^\tau y^{\mu\alpha}y^{\omega\varepsilon}y_{\omega\varepsilon,\mu}+\frac{1}{2}\delta^{\alpha\rho}\delta_\sigma{}^\tau y^{\omega\varepsilon}y_\omega{}^\lambda y_{\varepsilon\lambda,\rho}-\\&-\frac{1}{2}\delta^{\tau\rho}\delta_\sigma{}^\alpha y^{\omega\varepsilon}y_\omega{}^\lambda y_{\varepsilon\lambda,\rho}\Big)+\mathrm{O}(k^2).\end{aligned} \tag{6.6.23}$$

Каноническому квазитензору гравитационного поля удобно придать вид (5.6.13):

$$\mathrm{t}_{g\sigma}^{\alpha}=-\mathrm{R}\delta_\sigma{}^\alpha\cdot\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}\left(\mathrm{g}^{\alpha\lambda}\frac{\partial\Gamma_{\sigma\nu}^{\nu}}{\partial x^\lambda}-\mathrm{g}^{\omega\varepsilon}\frac{\partial\Gamma_{\omega\varepsilon}^{\alpha}}{\partial x^\sigma}\right); \tag{6.6.24}$$

поэтому

$$\begin{aligned}\mathrm{t}_{g\sigma}^{\alpha}=&-\frac{1}{k^2}\mathrm{R}\delta_\sigma{}^\alpha+\frac{1}{k}\Big(-y^{\alpha\varepsilon}{}_{,\sigma\varepsilon}-\frac{1}{2}y_{,\sigma\lambda}\delta^{\alpha\lambda}\Big)+\\&+k^0\Big(\frac{1}{2}y^{\alpha\lambda}y_{,\lambda\sigma}-\frac{1}{2}\delta^{\alpha\lambda}y^{\mu\nu}y_{\mu\nu,\sigma\lambda}+\frac{1}{2}y^{\alpha\lambda}{}_{,\sigma}y_{,\lambda}-\\&-y_{\lambda,\sigma}^{\varepsilon}y^{\alpha\lambda}{}_{,\varepsilon}-\frac{1}{4}\delta^{\alpha\lambda}y_{,\sigma}y_{,\lambda}\Big)+\mathrm{O}(k).\end{aligned} \tag{6.6.25}$$

Плотность скалярной кривизны можно представить как

$$\mathrm{R}=\mathrm{g}^{\mu\nu}{}_{,\mu,\nu}+\mathrm{g}^{\mu\nu}\left(\frac{\partial\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^\nu}-\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda}\right); \tag{6.6.26}$$

эту форму особенно удобно разлагать в ряд

$$\begin{aligned}\mathrm{R}=&-k\Big(y^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu}+\frac{1}{2}y_{\mu\nu}\delta^{\mu\nu}\Big)+k^2\Big(\frac{1}{2}y^{\mu\nu}y_{,\mu\nu}-\\&-\frac{1}{2}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\mu\nu}\delta^{\mu\nu}-\frac{1}{8}y_{,\mu}y_{,\nu}\delta^{\mu\nu}+\frac{1}{2}y_{,\lambda}y^{\lambda\nu}{}_{\nu}-\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}{}_{,\mu}y_{\alpha\beta,\nu}\delta^{\mu\nu}-\frac{1}{2}y^{\rho\nu}{}_{,\lambda}y^{\lambda}_{\nu,\rho}\Big)+$$

$$+k^3\Big(\frac{1}{2}y^{\alpha\beta}y^{\mu\nu}y_{\alpha\beta,\mu\nu}-\frac{1}{2}y^{\alpha\beta}y_{\beta\varepsilon}y^{\varepsilon}_{\alpha,\mu\nu}\delta^{\mu\nu}+$$

$$+\frac{1}{8}y^{\mu\nu}y_{,\mu}y_{,\nu}+\frac{1}{4}y^{\mu\nu}y^{\rho\tau}{}_{,\mu}y_{\rho\tau,\nu}-\frac{1}{2}y^{\mu\nu}y^{\rho}_{\mu,\lambda}y^{\lambda}_{\nu,\rho}-$$

$$-\frac{1}{2}y^{\alpha\beta}y^{\lambda}_{\alpha,\mu}y_{\lambda\beta,\nu}\delta^{\mu\nu}-\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\mu}y_{,\nu}\delta^{\mu\nu}+$$

$$+\frac{1}{2}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta,\lambda}y^{\lambda\nu}{}_{,\nu}\Big)+O(k^4). \tag{6.6.27}$$

Деля это разложение на k^2, получаем представление гравитационного лагранжиана в виде ряда по степеням k; тогда член с коэффициентом k^{-1} можно просто отбросить, так как он не приводит ни к каким членам в уравнениях поля. Здесь мы не учитывали координатных условий, поскольку при построении различных динамических переменных с помощью лагранжиана необходимо пользоваться его полным выражением.

Лагранжианы других полей также записываются в виде аналогичных рядов, где члены, пропорциональные k^n, следует толковать как взаимодействие этих полей с гравитацией.

Для скалярного поля получим:

$$\mathrm{L_{sc}}=\frac{1}{2}:(\delta^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}-\mu^2\varphi^2):+k:\Big(\frac{1}{4}y\mu^2\varphi^2-\frac{1}{2}y^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}\Big):+$$

$$+k^2\mu^2:\varphi^2\Big(\frac{1}{8}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}-\frac{1}{16}yy\Big):+O(k^3); \tag{6.6.28}$$

для электромагнитного:

$$\mathrm{L_{em}}=-\frac{1}{4}:F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\Big[\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta}+k\big(\frac{1}{2}y\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta}-2y^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta}\big)+$$

$$+k^2\Big(\frac{1}{8}yy\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta}+y^{\mu\alpha}y^{\nu\beta}+\frac{1}{4}y^{\omega\varepsilon}y_{\omega\varepsilon}\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta}-yy^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta}\Big)\Big]:+O(k^3); \tag{6.6.29}$$

для фермионного [1]:

$$\mathrm{L_F}=:\Big\{\frac{i}{2}(\bar\psi\underset{0}{\gamma^{\mu}}\psi_{,\mu}-\bar\psi_{,\mu}\underset{0}{\gamma^{\mu}}\psi)-m\bar\psi\psi+ky^{\omega\varepsilon}\Big[\frac{m}{4}\bar\psi\psi\delta_{\omega\varepsilon}+$$

$$+\frac{i}{4}(\bar\psi_{,\varepsilon}\underset{0}{\gamma_{\omega}}\psi-\bar\psi\underset{0}{\gamma_{\omega}}\psi_{,\varepsilon})\Big]+k^2y^{\omega\varepsilon}y^{\sigma\tau}\Big[m\bar\psi\psi\Big(\frac{1}{8}\delta_{\omega\sigma}\delta_{\varepsilon\tau}-\frac{3}{32}\delta_{\omega\varepsilon}\delta_{\beta\tau}\Big)+$$

$$+\frac{i}{16}\bar\psi(\delta_{\omega\varepsilon}\delta_{\beta\tau}-\delta_{\omega\tau}\delta_{\beta\varepsilon})\underset{0}{\gamma^{\beta}}\psi_{,\sigma}-\frac{i}{16}\bar\psi_{,\sigma}(\delta_{\omega\varepsilon}\delta_{\beta\tau}-\delta_{\omega\tau}\delta_{\beta\varepsilon})\underset{0}{\gamma^{\beta}}\psi\Big]-$$

$$-k^2\frac{i}{16}\bar\psi\underset{0}{\tau^{\mu\nu\lambda}}\psi y_{\alpha\mu}y^{\alpha}_{\nu,\lambda}. \tag{6.6.30}$$

---

[1] В членах взаимодействия с гравитацией мы учли уравнения фермионного поля нулевого приближения.

В случае заряженного скалярного поля, взаимодействующего с гравитацией и электромагнетизмом, лагранжиан имеет вид:

$$\mathbf{L}_{\overline{sc}} = :\{\overset{*}{\varphi}_{,\alpha}\varphi_{,\beta}\delta^{\alpha\beta} + ieA_\alpha(\varphi^*\varphi_{,\beta} - \overset{*}{\varphi}_{,\beta}\varphi)\,\delta^{\alpha\beta} +$$

$$+ e^2 A_\alpha A_\beta \delta^{\alpha\beta}\varphi^*\varphi - \mu^2\varphi^*\varphi + k\left[\frac{1}{2}\mu^2 y\varphi^*\varphi -\right.$$

$$\left.- y^{\alpha\beta}(\overset{*}{\varphi}_{,\alpha} + ieA_\alpha\varphi^*)(\varphi_{,\beta} - ieA_\beta\varphi)\right] +$$

$$+ k^2\mu^2\varphi^*\varphi\left(\frac{1}{4}y^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta} - \frac{1}{8}yy\right)\Big\} : + O(k^3). \qquad (6.6.31)$$

Мы предполагали до сих пор, что в качестве лагранжиана гравитационного поля берется (с точностью до коэффициента) плотность скалярной кривизны. Однако нам понадобится для сравнения разных методов квантования также выражение гравитационного лагранжиана, как и динамических переменных гравитационного поля, в γ-матричном представлении. Запишем их здесь:

$$\mathbf{L}_g = \frac{1}{4}y^{\sigma\tau}{}_{,\rho}y^{\alpha\beta}{}_{,\eta}\left(\delta_{\sigma\alpha}\delta_{\tau\beta}\delta^{\rho\eta} - \delta_{\sigma\alpha}\delta_\tau{}^\eta\delta_\beta{}^\rho - \frac{1}{2}\delta_{\sigma\tau}\delta_{\alpha\beta}\delta^{\rho\eta} - \delta_{\sigma\alpha}\delta_\beta{}^\eta\delta_\tau{}^\rho\right) +$$

$$+ ky^{\omega\varepsilon}y^{\sigma\tau}{}_{,\rho}y^{\alpha\beta}{}_{\eta}\cdot\left(\frac{1}{2}\delta_{\omega\sigma}\delta_{\varepsilon\alpha}\delta_{\tau\beta}\delta^{\rho\eta} - \frac{1}{8}\delta_{\sigma\tau}\delta_{\beta\omega}\delta_\alpha{}^\eta\delta_\varepsilon{}^\rho -\right.$$

$$- \frac{3}{8}\delta_{\alpha\varepsilon}\delta_{\sigma\omega}\delta_\beta{}^\rho\delta_\tau{}^\eta + \frac{1}{8}\delta_{\beta\tau}\delta_{\sigma\omega}\delta_\alpha{}^\rho\delta_\varepsilon{}^\eta - \frac{1}{4}\delta_{\alpha\tau}\delta_{\beta\sigma}\delta_\varepsilon{}^\rho\delta_\omega{}^\eta +$$

$$+ \frac{1}{4}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\sigma\tau}\delta_\omega{}^\rho\delta_\varepsilon{}^\eta - \frac{1}{8}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\omega\sigma}\delta_{\varepsilon\tau}\delta^{\rho\eta} - \frac{1}{8}\delta_{\omega\sigma}\delta_{\tau\alpha}\delta_\beta{}^\eta\delta_\varepsilon{}^\rho -$$

$$\left.- \frac{1}{8}\delta_{\omega\sigma}\delta_{\varepsilon\alpha}\delta_\beta{}^\eta\delta_\tau{}^\rho\right) + O(k^2); \qquad (6.6.32)$$

$$\mathbf{t}_{g\sigma}{}^\tau = \frac{1}{4}(-\delta^{\nu\tau}y_{,\nu}y_{,\sigma} - 2y^{\nu\lambda}{}_{,\sigma}\overset{\tau}{y}_{\lambda,\nu} + 2\delta^{\tau\rho}y^{\lambda\nu}{}_{,\sigma}y_{\lambda\nu,\rho}) +$$

$$+ \frac{1}{8}(\delta^{\mu\nu}y_{,\mu}y_{,\nu} + 2y^{\nu\lambda}{}_{,\mu}y_{\lambda,\nu} - 2\delta^{\mu\rho}y^{\lambda\nu}{}_{,\mu}y_{\lambda\nu,\rho})\,\delta_\sigma{}^\tau + O(k); \qquad (6.6.33)$$

$$\mathbf{M}_{g\sigma}{}^{\alpha\tau} = k^{-1}(\delta^{\nu\tau}\overset{\alpha}{y}_{\sigma,\nu} - \delta^{\alpha\nu}\overset{\tau}{y}_{\sigma,\nu}) + y^{\alpha\nu}\overset{\tau}{y}_{\sigma,\nu} - y^{\nu\tau}\overset{\alpha}{y}_{\sigma,\nu} - \delta^{\alpha\nu}\overset{\tau}{y}_{\rho,\nu}y_\sigma{}^\rho +$$

$$+ \delta^{\nu\tau}\overset{\alpha}{y}_{\rho,\nu}y_\sigma{}^\rho - \frac{1}{4}y_\rho{}^\lambda y^{\alpha\rho}{}_{,\lambda}\delta_\sigma{}^\tau + \frac{1}{4}y_\rho{}^\lambda y^{\rho\tau}{}_{,\lambda}\delta_\sigma{}^\alpha. \qquad (6.6.34)$$

С точки зрения выводов, полученных при анализе проблемы энергии, от выбора конкретного подхода к описанию гравитационного поля критически зависят получаемые физические результаты. Однако в процедуре квантования, когда перестановочные соотношения записываются в приближении свободных полей (представление взаимодействия), выбор в качестве субпотенциалов гравитационного поля метрического тензора или γ-матриц дает один и тот же результат, так как интегрирование всегда проводится по бесконечной области, а поле лишено сингулярностей. Некоторые соображения относительно указанной альтернативы при квантовании гравитационного поля, а также других возможностей см. в § 6.8, а также в начале § 6.7.

6.7. Квантование гравитационного поля. Спин гравитона

Если исходить из метрического тензора как наиболее элементарной величины, представляющей гравитацию, то квантованию должны подвергаться десять независимых компонент этого тензора. Такое квантование, как известно, наиболее подробно провел Гупта (1952), который, однако, исходил из нековариантного лагранжиана (3.1.3). Другая попытка квантования гравитации была предпринята нами (1958), когда за основу брался ковариантный лагранжиан (3.1.1), пропорциональный плотности скалярной кривизны. Именно для этого лагранжиана мы в первую очередь вычислили выражения для динамических переменных в § 3.7 (их разложения по степеням гравитационной постоянной см. в § 6.6).

Исследования фермионных полей, а также некоторые соображения простоты показывают, что более адекватным было бы взять в качестве наиболее элементарного представителя гравитационного поля не метрический тензор, а тетрады или, лучше, матрицы Дирака в зоммерфельдовском представлении (см. § 8.6; обсуждение свойств динамических переменных матричного происхождения в § 3.8, а также анализ свойств фермионных полей в § 4.5—4.8). Здесь мы начнем, однако, изложение с подхода, исходящего из метрического тензора в качестве наиболее элементарной величины, отложив до § 6.8 обсуждение других подходов к квантованию гравитационного поля.

Исходя, как обычно, из представления взаимодействия, мы относим нелинейность гравитационного поля к части взаимодействия, оставляя поэтому в качестве главных уравнений поля уравнения вида (3.2.32), причем однородные:

$$\square\, y_{\mu\nu} = 0. \tag{6.7.1}$$

Поэтому в фурье-представлении 4-импульс, по которому мы разлагаем гравитационный потенциал, должен удовлетворять соотношению

$$q_\alpha q^\alpha = 0. \tag{6.7.2}$$

Как обычно, мы представляем потенциал $y_{\mu\nu}$ в виде суммы положительно- и отрицательно-частотных компонент:

$$y_{\mu\nu}(x) = y_{\mu\nu}^{(+)}(x) + y_{\mu\nu}^{(-)}(x), \tag{6.7.3}$$

и, в силу (6.7.2), можем, как и в случае скалярного и электромагнитного полей, записать:

$$y^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3q}{\sqrt{2q_0}}\, e^{\pm i q_\alpha x^\alpha} y_{\mu\nu}^{(\pm)}(\mathbf{q}) \tag{6.7.4}$$

Для вещественности потенциалов $y_{\mu\nu}$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\left(y_{\mu\nu}^{(\pm)}(\mathbf{q})\right)^* = y_{\mu\nu}^{(\mp)}(\mathbf{q}). \tag{6.7.5}$$

Как и в случае электродинамики, использование метода индефинитной метрики видоизменяет последние условия, и мы пересмотрим их несколько позднее.

Условие гармоничности координат де Дондера — Фока в случае слабого поля переходит в условие Гильберта

$$y^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \tag{6.7.6}$$

отличающееся тем достоинством, что оно не ограничивает общность рассмотрения, так как всегда и сразу во всем пространстве-времени можно с помощью бесконечно малых преобразований координат (не нарушающих условия малости величин $y_{\mu\nu}$) удовлетворить условию (6.7.6). В импульсном представлении это условие принимает вид

$$q^{\alpha}y^{(\pm)}_{\mu\alpha}(\mathbf{q})=0. \tag{6.7.7}$$

Позднее мы увидим, что в квантовой теории ему можно придать более слабую форму.

С учетом уравнений поля (6.7.1) и условия (6.7.6) низшие приближения для квазитензора энергии-импульса гравитационного поля (3.7.11) имеют вид

$$\begin{aligned}\mathrm{t}_{\beta}{}^{\alpha}=&\frac{-1}{2\sqrt{2\varkappa}}y_{,\beta}^{,\alpha}+\frac{1}{2}y^{\nu\alpha}y_{,\nu,\beta}-\frac{1}{2}y^{\omega\varepsilon}y_{\omega\varepsilon,\beta}^{\ \ \ \ ,\alpha}-y^{\sigma\tau}{}_{,\beta}y^{\ \ \alpha}_{\sigma,\tau}-\\&-\frac{1}{4}y^{,\alpha}y_{,\beta}+\frac{1}{2}y^{\lambda\alpha}{}_{,\beta}y_{,\lambda}-\delta_{\beta}{}^{\alpha}\left(\frac{1}{2}y^{\omega\varepsilon}y_{,\omega\varepsilon}-\frac{1}{8}y^{,\omega}y_{,\omega}-\right.\\&\left.-\frac{1}{4}y^{\omega\varepsilon,\sigma}y_{\omega\varepsilon,\sigma}-\frac{1}{2}y^{\omega\varepsilon,\sigma}y_{\omega\sigma,\varepsilon}\right).\end{aligned} \tag{6.7.8}$$

Для того чтобы при квантовании гравитационного поля можно было воспользоваться удобными соотношениями

$$[A_{B}^{(\pm)}(\mathbf{k}),\ P_{\beta}]_{-}=\mp k_{\beta}A_{B}^{(\pm)}(\mathbf{k}), \tag{6.7.9}$$

мы должны проинтегрировать по 3-объему выражение (6.7.8). При таком интегрировании полезно учесть следующие обстоятельства. Прежде всего

$$\int dv y^{(\pm)}_{\mu\nu,\alpha}=\pm i(2\pi)^{3/2}\int\frac{d^{3}q}{\sqrt{2q_{0}}}\delta(\mathbf{q})q_{\alpha}e^{\pm iq_{0}x^{0}}y^{(\pm)}_{\mu\nu}(\mathbf{q})=0, \tag{6.7.10}$$

так как при $\mathbf{q}=0$, в силу (6.7.2), также $q_0=0$. Аналогично,

$$\int dv y^{(\pm)}_{\mu\nu,\alpha,\beta}=0. \tag{6.7.11}$$

Поэтому член, линейный по $y_{\mu\nu}$ в (6.7.8), можно отбросить. Кроме того, условие Гильберта (6.7.7) дает

$$\begin{aligned}\int dv y^{(+)\omega\varepsilon}y^{(-)}_{\sigma\tau,\varepsilon}&=-\frac{i}{(2\pi)^{3}}\int\frac{dv d^{3}p\, d^{3}q}{2\sqrt{p_{0}q_{0}}}e^{i(p_{\alpha}-q_{\alpha})x^{\alpha}}q_{\varepsilon}y^{(+)\omega\varepsilon}(\mathbf{p})y^{(-)}_{\sigma\tau}(\mathbf{q})=\\&=-i\int\frac{d^{3}q}{2q_{0}}q_{\varepsilon}y^{(+)\omega\varepsilon}(\mathbf{q})y^{(-)}_{\sigma\tau}(\mathbf{q})=0.\end{aligned} \tag{6.7.12}$$

Аналогично, в силу (6.7.2),

$$\int dv y^{(+)\omega\varepsilon,\sigma}y^{(-)}_{\alpha\beta,\sigma}=0. \tag{6.7.13}$$

Благодаря этим соотношениям интеграл от квазитензора (6.7.8) значительно упрощается; а именно, нам оказывается достаточным рассматривать в подынтегральном выражении конструкцию

$$\mathrm{t}_{\beta}{}^{\alpha}\to-\frac{1}{2}\left(y^{\omega\varepsilon}y_{\omega\varepsilon,\beta}^{\ \ \ \ ,\alpha}+\frac{1}{2}y^{,\alpha}y_{,\beta}\right). \tag{6.7.14}$$

Так как верхний индекс следует положить при этом равным нулю, мы получим для 4-вектора энергии-импульса гравитационного поля просто

$$\mathbf{P}_{\beta}=\frac{1}{2}\int d^{3}q\,q_{\beta}\left[y^{(+)\omega\varepsilon}(\mathbf{q})y^{(-)}_{\omega\varepsilon}(\mathbf{q})-\frac{1}{2}y^{(+)}(\mathbf{q})y^{(-)}(\mathbf{q})\right]. \tag{6.7.15}$$

Переходя от энергии-импульса гравитационного поля к спину, замечаем, что в интеграле $\int \mathrm{M}_{\beta}^{0\tau}\,dv$ априори не обязаны исчезать члены вида $y^{(+)}y^{(+)}$ или $y^{(-)}y^{(-)}$ хотя линейная часть плотности спина, как всегда, выпадает. Поэтому целесообразно сначала проанализировать поведение произведений потенциалов одинаковой частотности; в интеграле плотности обобщенного спина (3.7.5), которую удобно представить с учетом условия гармоничности в виде

$$\mathrm{M}_{\beta}^{\alpha\tau}=\frac{1}{2\varkappa}(\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}g^{\mu\tau}-\Gamma^{\tau}_{\mu\beta}g^{\mu\alpha}-g^{\alpha\tau}{}_{,\beta}) \tag{6.7.16}$$

или в форме разложения

$$\mathrm{M}_{\beta}^{\alpha\tau}=\frac{1}{\sqrt{2\varkappa}}\left(\frac{1}{2}y^{,\alpha}\delta_{\beta}{}^{\tau}-\frac{1}{2}y^{,\tau}\delta_{\beta}{}^{\alpha}+y_{\beta}^{\alpha,\tau}-y_{\beta}^{\tau,\alpha}+y^{\alpha\tau}{}_{,\beta}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}y^{\omega\varepsilon,\alpha}y_{\omega\varepsilon}\delta_{\beta}{}^{\tau}-\frac{1}{2}y^{\omega\varepsilon,\tau}y_{\omega\varepsilon}\delta_{\beta}{}^{\alpha}+y_{\sigma\beta}y^{\sigma\alpha,\tau}-y_{\sigma\beta}y^{\sigma\tau,\alpha}+\frac{1}{2}y^{\sigma\tau}y_{,\sigma}\delta_{\beta}{}^{\alpha}-$$
$$-\frac{1}{2}y^{\sigma\alpha}y_{,\sigma}\delta_{\beta}{}^{\tau}+y^{\sigma\alpha}y^{\tau}_{\beta,\sigma}-y^{\sigma\tau}y^{\alpha}_{\beta,\sigma}, \tag{6.7.17}$$

эти члены можно записать как

$$\int \mathrm{M}_{\beta}^{(\pm\pm)\alpha\tau}dv=\pm i\int\frac{d^3q}{2q_0}e^{\pm 2iq_0x^0}\Big[\frac{1}{2}q^{\alpha}y^{(\pm)\omega\varepsilon}(\mathbf{q})\,y^{(\pm)}_{\omega\varepsilon}(-\mathbf{q})\,\delta_{\beta}{}^{\tau}-$$
$$-\frac{1}{2}q^{\tau}y^{(\pm)\omega\varepsilon}(\mathbf{q})\,y^{(\pm)}_{\omega\varepsilon}(-\mathbf{q})\,\delta_{\beta}{}^{\alpha}+q^{\tau}y^{(\pm)\sigma\alpha}(\mathbf{q})\,y^{(\pm)}_{\sigma\beta}(-\mathbf{q})-$$
$$-q^{\alpha}y^{(\pm)\sigma\tau}(\mathbf{q})\,y^{(\pm)}_{\sigma\beta}(-\mathbf{q})+\frac{1}{2}q_{\sigma}y^{(\pm)}(\mathbf{q})\,y^{(\pm)\sigma\tau}(-q)\,\delta_{\beta}{}^{\alpha}-$$
$$-\frac{1}{2}q_{\sigma}y^{(\pm)}(\mathbf{q})\,y^{(\pm)\sigma\alpha}(-\mathbf{q})\,\delta_{\beta}{}^{\tau}+q_{\sigma}y_{\beta}^{(\pm)\tau}(\mathbf{q})\,y^{(\pm)\sigma\alpha}(-\mathbf{q})-$$
$$-q_{\sigma}y_{\beta}^{(\pm)\alpha}(\mathbf{q})\,y^{(\pm)\sigma\tau}(-\mathbf{q})\Big]. \tag{6.7.18}$$

Заметив, что

$$\int\!\!\!\int\!\!\!\int_{-\infty}^{-\infty}\frac{d^3q}{2q_0}e^{\pm 2iq_0x^0}q^{\alpha}y^{(\pm)\omega\varepsilon}(\mathbf{q})\,y^{(\pm)}_{\omega\varepsilon}(-\mathbf{q})\ \overset{\mathbf{q}\to-\mathbf{q}}{\rightleftarrows}$$
$$\rightleftarrows\int\!\!\!\int\!\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^3q}{2q_0}e^{\pm 2iq_0x^0}\cdot q_{\alpha}y^{(\pm)\omega\varepsilon}(\mathbf{q})\,y^{(\pm)}_{\omega\varepsilon}(-\mathbf{q}), \tag{6.7.19}$$

получим соотношение

$$\int\frac{d^3q}{2q_0}e^{\pm 2iq_0x^0}q^{\alpha}y^{(\pm)\omega\varepsilon}(\mathbf{q})\,y^{(\pm)}_{\omega\varepsilon}(-\mathbf{q})=A\delta_0{}^{\alpha}, \tag{6.7.20}$$

где A — некоторая функция времени x^0. Аналогичное вычисление показывает, что имеет место равенство

$$\int d^3q e^{\pm 2iq_0x^0}y^{(\pm)\sigma\alpha}(\mathbf{q})\,y_{\sigma}^{(\pm)\beta}(-\mathbf{q})=\int d^3q e^{\pm 2iq_0x^0}y^{(\pm)\sigma\beta}(\mathbf{q})\,y_{\sigma}^{(\pm)\alpha}(-\mathbf{q}), \tag{6.7.21}$$

означающее симметрию этого выражения по α и β.

Этот анализ непосредственно приводит к заключению, что в антисимметризованном выражении

$$S^{[ik]} = \int [\mathbf{M}^{0i}_{\ j}\delta^{jk} - \mathbf{M}^{0k}_{j}\delta^{ji}]\, dv \tag{6.7.22}$$

произведения величин одинаковой частотности типа (6.7.18) исчезают, т. е. величина (6.7.22) не зависит от времени и может рассматриваться как интеграл движения гравитационного поля наравне с 4-вектором энергии-импульса (6.7.15). Простой подсчет дает тогда выражение

$$S^{[ij]} = i \int d^3q\, [y^{(+)j}_{\sigma}(\mathbf{q})\, y^{(-)\sigma i}(\mathbf{q}) - y^{(+)i}_{\sigma}(\mathbf{q})\, y^{(-)\sigma j}(\mathbf{q})], \tag{6.7.23}$$

где мы опустили слагаемое

$$\frac{1}{2q_0}[q^i (y^{(+)\sigma 0} y^{(-)j}_{\sigma} - y^{(+)j}_{\sigma} y^{(-)\sigma 0}) - q^j (y^{(+)\sigma 0} y^{(-)i}_{\sigma} - y^{(+)i}_{\sigma} y^{(-)\sigma 0})], \tag{6.7.24}$$

— члены, содержащие нефизические временны́е компоненты гравитационных потенциалов, исключаемые по методу индефинитной метрики Гупты — Блейлера, как мы увидим в дальнейшем.

Пока ни одна из рассматриваемых величин не является диагональной в том смысле, который обсуждался в § 6.4, посвященном квантованию электромагнитного поля. Мы попытаемся достигнуть здесь такой диагональности. Для этого введем новые переменные:

$$\left.\begin{aligned} y^{(\pm)\mu\nu} &= a^{(\pm)\mu\nu} - \frac{1+i}{4} a^{(\pm)}\delta^{\mu\nu}, \\ y^{(\pm)} &= -ia^{(\pm)}, \end{aligned}\right\} \tag{6.7.25}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} a^{(\pm)\mu\nu} &= y^{(\pm)\mu\nu} - \frac{1-i}{4} y^{(\pm)}\delta^{\mu\nu}, \\ a^{(\pm)} &= iy^{(\pm)}. \end{aligned}\right\} \tag{6.7.26}$$

Тогда 4-вектор энергии-импульса принимает вид

$$P_{\beta} = \frac{1}{2}\int d^3q\, q_{\beta}\, a^{(+)\mu\nu} a^{(-)}_{\mu\nu}, \tag{6.7.27}$$

а интегральный спин — вид

$$S^{[ij]} = i \int d^3q\, [a^{(+)j}_{\sigma} a^{(-)\sigma i} - a^{(+)i}_{\sigma} a^{(-)\sigma j}]. \tag{6.7.28}$$

Как видно, преобразование (6.7.25) диагонализирует энергию и импульс. В ходе дальнейшего анализа полезно, предвосхищая выводы, к которым мы придем впоследствии, отметить, что при ориентации вектора $\mathbf{q}$ вдоль оси z физический смысл имеют лишь компоненты гравитационного потенциала

$$a^{12}(\mathbf{q}) = b_2(\mathbf{q}) \tag{6.7.29}$$

и

$$a^{11}(\mathbf{q}) = -a^{22}(\mathbf{q}) = b_1(\mathbf{q}). \tag{6.7.30}$$

Это следует из метода индефинитной метрики. Оставляя в выражениях для динамических переменных лишь физические компоненты b, получаем

$$P_{\beta} = \int d^3q\, q_{\beta} (b^{(+)}_1 b^{(-)}_1 + b^{(+)}_2 b^{(-)}_2) \tag{6.7.31}$$

и

$$S_z = i \int d^3q\, [(a^{(+)11} - a^{(+)22}) a^{(-)12} - a^{(+)12}(a^{(-)11} - a^{(-)22})], \tag{6.7.32}$$

т. е.

$$S_z = 2i \int d^3q \,(b_1^{(+)} b_2^{(-)} - b_2^{(+)} b_1^{(-)}). \tag{6.7.33}$$

Мы приняли здесь, как обычно,

$$S^{[12]} = S_z. \tag{6.7.34}$$

Сравним полученные выражения с соответствующими выражениями для динамических переменных электромагнитного поля — (6.4.15) и (6.4.11). Мы видим, что различие состоит лишь в том, что интегральный спин гравитационного поля содержит дополнительный множитель 2, отражающий равенство проекции спина гравитона на направление движения 2 (в единицах $\hbar$), в отличие от величины проекции 1 (в тех же единицах) в случае электромагнитного поля. Ввиду такого близкого сходства обеих теорий мы можем просто скопировать методику дальнейшей диагонализации спина, применяемую в электродинамике, взяв

$$\left.\begin{aligned} b_1^{(\pm)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{(\pm)} + a_2^{(\pm)}), \\ b_2^{(\pm)} &= \pm \frac{i}{\sqrt{2}}(a_1^{(\pm)} - a_2^{(\pm)}). \end{aligned}\right\} \tag{6.7.35}$$

Тогда

$$P_\beta = \int d^3q q_\beta (a_1^{(+)} a_1^{(-)} + a_2^{(+)} a_2^{(-)}) \tag{6.7.36}$$

и

$$S_z = 2 \int d^3q \,(a_1^{(+)} a_1^{(-)} - a_2^{(+)} a_2^{(-)}). \tag{6.7.37}$$

Мы видим отсюда, что комбинации $a_1{}^{(+)}a_1{}^{(-)}$ и $a_2{}^{(+)}a_2{}^{(-)}$ следует интерпретировать как числа частиц гравитонов, обладающих импульсом q_β и, соответственно, величинами проекции спина на ось z, равными $+2$ и -2.

Перейдем теперь к отысканию перестановочных соотношений для гравитационных потенциалов. Для этого перепишем коммутатор (6.7.9) в виде

$$[y_{\mu\nu}^{(+)}(\mathbf{p}), P_\beta]_- = -p_\beta y_{\mu\nu}^{(+)}(\mathbf{p}). \tag{6.7.38}$$

Подставляя сюда выражение 4-вектора энергии-импульса гравитационного поля (6.7.15) (мы рассматриваем сейчас общий случай, когда учитываются не только физические гравитоны, но и нефизические, играющие важную роль в виртуальных процессах) и учитывая выполнение равенства (6.7.38) при любых значениях импульса, получаем

$$\begin{aligned} &y_{\omega\varepsilon}^{(+)}(\mathbf{q})[y_{\mu\nu}^{(+)}(\mathbf{p}), y^{(-)\omega\varepsilon}(\mathbf{q})]_- - \frac{1}{2} y^{(+)}(\mathbf{q})[y_{\mu\nu}^{(+)}(\mathbf{p}), y^{(-)}(\mathbf{q})]_- = \\ &= -2y_{\mu\nu}^{(+)}(\mathbf{p})\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \end{aligned} \tag{6.7.39}$$

Полагая

$$[y_{\mu\nu}^{(+)}(\mathbf{p}), y^{(-)\omega\varepsilon}(\mathbf{q})]_- = A_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\omega\varepsilon}\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \tag{6.7.40}$$

находим

$$y_{\omega\varepsilon}^{(+)} A_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\omega\varepsilon} - \frac{1}{2} y^{(+)} A_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\omega\varepsilon}\,\delta_{\omega\varepsilon} = -2y_{\mu\nu}^{(+)}. \tag{6.7.41}$$

Если предположить, естественным образом, что величина $A_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\omega\varepsilon}$ является c-числом и построена только из символов $\delta_{\mu\nu}$, в общем случае можно написать

$$A_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\omega\varepsilon} = \alpha(\delta_\mu{}^\omega\delta_\nu{}^\varepsilon + \delta_\mu{}^\varepsilon\delta_\nu{}^\omega) + \beta\delta_{\mu\nu}\delta^{\omega\varepsilon}. \tag{6.7.42}$$

Подстановка этой конструкции в (6.7.41) непосредственно дает

$$\alpha = -\beta = -1, \tag{6.7.43}$$

так что окончательно

$$[y_{\mu\nu}^{(+)}(\mathbf{p}), y^{(-)\omega\varepsilon}(\mathbf{q})]_- = (\delta_{\mu\nu}\delta^{\omega\varepsilon} - \delta_\mu{}^\omega\delta_\nu{}^\varepsilon - \delta_\mu{}^\varepsilon\delta_\nu{}^\omega)\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \tag{6.7.44}$$

В частности,

$$[y_{\mu\nu}^{(+)}(\mathbf{p}), y^{(-)}(\mathbf{q})]_- = 2\delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \tag{6.7.45}$$

$$[y^{(+)}(\mathbf{p}), y^{(-)\omega\varepsilon}(\mathbf{q})]_- = 2\delta^{\omega\varepsilon}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \tag{6.7.46}$$

и

$$[y^{(+)}(\mathbf{p}), y^{(-)}(\mathbf{q})]_- = 8\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{6.7.47}$$

Учитывая эти соотношения, нетрудно на основании (6.7.26) найти перестановочные соотношения для операторов $a_{\mu\nu}$:

$$[a_{\mu\nu}^{(+)}(\mathbf{p}), a^{(-)\omega\varepsilon}(\mathbf{q})]_- = -(\delta_\mu{}^\omega\delta_\nu{}^\varepsilon + \delta_\mu{}^\varepsilon\delta_\nu{}^\omega)\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{6.7.48}$$

Полезно сравнить различные варианты перестановочных соотношений, полученных разными авторами. Гупта (1952) получил соотношения (6.7.48), исходя из дополнительного предположения о независимости y от $y_{\mu\nu}$ (связь между этими величинами накладывалась лишь в смысле квантового среднего). Нужно сказать, что это последнее предположение Гупты на основании исследований Лиас (1957) приводит к затруднениям в определении окончательного лагранжиана гравитационного поля при учете высших приближений. Пийр (1957) получил, отказавшись от этого требования Гупты, перестановочные соотношения (6.7.44), исходя, однако, из нековариантного лагранжиана (3.1.3), которым пользовался и Гупта. Интересно отметить, что в случае реальных (физических) гравитонов величины $y_{\mu\nu}$ и $a_{\mu\nu}$ совпадают; совпадают также и соответствующие перестановочные соотношения, так что противоречия между выводами разных авторов не возникает.

Введем обозначение

$$\delta_{\mu\nu}\delta_{\omega\varepsilon} - \delta_{\mu\omega}\delta_{\nu\varepsilon} - \delta_{\mu\varepsilon}\delta_{\nu\omega} = \delta_{\mu\nu,\,\omega\varepsilon}. \tag{6.7.49}$$

Тогда, суммируя полученные результаты и распространяя их, в соответствии с выводами, сделанными для скалярного и электромагнитного полей в предыдущих параграфах, на исходные потенциалы $y_{\mu\nu}(x)$, запишем

$$[y_{\mu\nu}^{(+)}(\mathbf{p}), y_{\omega\varepsilon}^{(-)}(\mathbf{q})] = \delta_{\mu\nu,\,\omega\varepsilon}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \tag{6.7.50}$$

$$[y_{\mu\nu}^{(+)}(x),\ y_{\omega\varepsilon}^{(-)}(y)]_- = i\delta_{\mu\nu,\,\omega\varepsilon}D_0^{(+)}(x-y), \tag{6.7.51}$$

$$[y_{\mu\nu}^{(-)}(x),\ y_{\omega\varepsilon}^{(+)}(y)]_- = i\delta_{\mu\nu,\,\omega\varepsilon}D_0^{(-)}(x-y), \tag{6.7.52}$$

$$[y_{\mu\nu}(x),\ y_{\omega\varepsilon}(y)]_- = i\delta_{\mu\nu,\,\omega\varepsilon}D_0(x-y), \tag{6.7.53}$$

причем

$$D_0^{(-)}(x) = -D_0^{(+)}(-x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int (dq)\,e^{iq_\alpha x^\alpha}\delta(q^2)\theta(-q_0) =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^3}\int (dq)\,e^{-iq_\alpha x^\alpha}\delta(q^2)\theta(q_0). \tag{6.7.54}$$

Переходя к введению индефинитной метрики, мы покажем сначала необходимость этой процедуры, распространяя пример, приведенный в монографии Боголюбова и Ширкова (1957), на случай гравитации. Именно, замечая, что

$$\delta_{01,01} = +1, \tag{6.7.55}$$

мы можем записать

$$[y_{01}^{(-)}(x),\ y_{01}^{(+)}(y)]_- = iD_0^{(-)}(x-y) =$$
$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int (dq)\, e^{-iq_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)}\delta(q^2)\theta(q_0). \tag{6.7.56}$$

С точки зрения среднего по состоянию вакуума тот же коммутатор равен

$$\Phi_0^+[y_{01}^{(-)}(x),\ y_{01}^{(+)}(y)]_-\Phi_0 = \Phi_0^+ y_{01}^{(-)}(x)\, y_{01}^{(+)}(y)\Phi_0. \tag{6.7.57}$$

Умножая последнее равенство на произведение $h(x)h(y)$ вещественных функций соответствующих координат и интегрируя в бесконечных пределах по этим координатам, получим заведомо положительную величину:

$$\Phi_0^+\int y_{01}^{(-)}(x)h(x)\,(dx)\int y_{01}^{(+)}(y)h(y)\,(dy)\,\Phi_0 > 0 \tag{6.7.58}$$

[вспомним условие вещественности (6.7.5)]. С другой стороны, из выражения (6.7.56) следует явно отрицательная величина того же самого среднего значения (мы считаем, что амплитуда состояния вакуума нормирована на 1):

$$\int [y_{01}^{(-)}(x),\ y_{01}^{(+)}(y)]_- h(x)h(y)\,(dx)\,(dy) =$$
$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int (dq)\,\delta(q^2)\theta(q_0)\int (dx)\, e^{-iq_\alpha x^\alpha}h(x)\int (dy)\, e^{iq_\alpha y^\alpha}h(y) =$$
$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int (dq)\,\delta(q^2)\theta(q_0)\left|\int (dx)\, e^{-iq_\alpha x^\alpha}h(x)\right|^2 < 0. \tag{6.7.59}$$

Такое противоречие может быть выражено и следующим образом: ввиду (6.7.55) имеет место коммутационное соотношение

$$[y_{01}^{(-)}(\mathbf{q}),\ y_{01}^{(+)}(\mathbf{p})]_- = -\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{6.7.60}$$

Если сравнить его с коммутационными соотношениями, например, для компоненты «22» того же потенциала или для потенциала скалярного поля (6.3.27) и далее, то видно, что в (6.7.60) роль оператора рождения частиц играют отрицательно-частотные компоненты, а роль оператора уничтожения — положительно-частотные, в противоположность только что упомянутым случаям.

Оба полученных противоречия объясняются, как и в точно таком же случае для электромагнитного поля, учетом нефизических гравитонов, которые должны быть соответствующим образом отброшены. Если в электродинамике нефизическими оказывались лишь два типа фотонов — временны́е и продольные, то в случае гравитации нефизическими будут временно-временны́е, продольно-продольные, продольно-временны́е, продольно-поперечные, поперечно-временны́е гравитоны. И в той, и в другой теории единственными частицами, имеющими непосредственный физический смысл (т. е. существующими в виде реальных частиц), могут быть лишь чисто поперечные кванты. Это заключение следует из условия типа Лоренца (в гравитации таким условием является условие Гильберта). Перейдем к устранению этих нефизических состояний по методу индефинитной метрики Гупты — Блейлера.

Мы покажем, что обнаруженные здесь трудности исчезают, если мы откажемся от требования вещественности для некоторых компонент $y_{\mu\nu}$, т. е. от требования (6.7.5). При этом мы перейдем к величинам $a_{\mu\nu}$ и постулируем новое соотношение

$$a_{\mu\nu}^{*}=a^{\mu\nu}. \tag{6.7.61}$$

Тогда вместо (6.7.48) следует записать

$$[a^{(+)*\mu\nu}(\mathbf{p}),\ a^{(-)\omega\varepsilon}(\mathbf{q})]_{-}=-(\delta_{\mu}{}^{\omega}\delta_{\nu}{}^{\varepsilon}+\delta_{\nu}{}^{\omega}\delta_{\mu}{}^{\varepsilon})\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \tag{6.7.62}$$

а также

$$[a^{(+)*\mu\nu}(\mathbf{p}),\ a^{(-)}(\mathbf{q})]_{-}=-2\delta^{\mu\nu}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \tag{6.7.63}$$

$$[a^{(+)*}(\mathbf{p}),\ a^{(-)\omega\varepsilon}(\mathbf{q})]_{-}=-2\delta_{\omega\varepsilon}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \tag{6.7.64}$$

$$[a^{(+)*}(\mathbf{p},\ a^{(-)}(\mathbf{q})]_{-}=-8\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{6.7.65}$$

Величины $a_{\mu\nu}$ выбраны здесь в качестве основных, потому что именно для них имеют место перестановочные соотношения (6.7.48), а также диагонален 4-вектор энергии-импульса; эти обстоятельства указывают, что истинными операторами рождения и уничтожения, аналогичными соответствующим величинам в электродинамике, являются компоненты $a_{\mu\nu}$, а не $y_{\mu\nu}$. Используя связь (6.7.61), мы приходим вместе с тем к полноценным в физическом отношении (в смысле интерпретации как операторов рождения и уничтожения частиц) и операторам $y_{\mu\nu}$. Именно, преобразование (6.7.25), (6.7.26) принимает вид

$$a^{(+)*\mu\nu}(\mathbf{p})=y^{(+)*\mu\nu}(\mathbf{p})-\frac{1+i}{4}y^{(+)*}\delta^{\mu\nu}, \tag{6.7.66}$$

$$y^{(+)*\mu\nu}(\mathbf{p})=a^{(+)*\mu\nu}(\mathbf{p})-\frac{1-i}{4}a^{(+)*}\delta^{\mu\nu}, \tag{6.7.67}$$

и перестановочные соотношения для y, y^{*} записываются точно так же, как и для a, a^{*}:

$$[y^{(+)*\mu\nu}(\mathbf{p}),y^{(-)\omega\varepsilon}(\mathbf{q})]_{-}=-(\delta_{\mu}{}^{\omega}\delta_{\nu}{}^{\varepsilon}+\delta_{\mu}{}^{\varepsilon}\delta_{\nu}{}^{\omega})\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{6.7.68}$$

Чтобы принятое нами предположение (6.7.61) не нарушило соответствия с классической теорией, где величины $y_{\mu\nu}$ вещественны, приходится ввести в квантовой теории гравитации индефинитную метрику в пространстве амплитуд состояния точно таким же образом, как это обычно делается в квантовой электродинамике (Гупта, 1950; Блейлер, 1950). Вводится эрмитов оператор η,

$$\eta^{+}=\eta, \tag{6.7.69}$$

обладающий свойствами

$$\eta^{2}=1 \tag{6.7.70}$$

(отсюда следуют значения $+1$ и -1 для его собственных значений),

$$\eta\Phi_{\text{вак}}=\Phi_{\text{вак}}, \tag{6.7.71}$$

$$\eta y_{\mu\nu}=h^{\mu\nu}\eta. \tag{6.7.72}$$

При определении средних значений (основных при переходе к классическому пределу!) будем пользоваться не обычными эрмитово сопряженными амплитудами состояния Φ^{+}, а «η-сопряженными»:

$$\overline{\Phi}=\Phi^{+}\eta, \tag{6.7.73}$$

так что

$$\langle F\rangle\overset{\text{Def}}{=}\overline{\Phi}F\Phi=\Phi^{+}\eta F\Phi. \tag{6.7.74}$$

Мы приняли условие (6.7.72) по той причине, что ввиду (6.7.61)

$$y_{\mu\nu}^{*}=y^{\mu\nu}-\frac{1}{2}y\delta^{\mu\nu}=h^{\mu\nu}, \tag{6.7.75}$$

что обеспечивает в совокупности вещественность средних значений $y_{\mu\nu}$ при новом определении среднего:

$$(\overline{\Phi} y_{\mu\nu}\Phi^+) = \Phi^+ \overset{*}{y}_{\mu\nu}\eta\Phi = \Phi^+ h^{\mu\nu}\eta\Phi = \Phi^+\eta y_{\mu\nu}\Phi = \overline{\Phi} y_{\mu\nu}\Phi. \qquad (6.7.76)$$

Ослабленные условия Гильберта записываются так же, как соответствующие условия в электродинамике:

$$y^{(-)\mu\nu}{}_{,\nu}\Phi = 0, \qquad (6.7.77)$$

$$\overline{\Phi} y^{(+)\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \qquad (6.7.78)$$

так что в среднем (а этого достаточно для выполнения соответствия с классической теорией) выполняются условия Гильберта в обычной форме:

$$\langle y^{\mu\nu}{}_{,\nu}\rangle = 0. \qquad (6.7.79)$$

Тогда в фурье-представлении получим

$$q_\nu y^{(-)\mu\nu}(\mathbf{q})\Phi = 0 \qquad (6.7.80)$$

и, если перейти к системе координат, в которой ось z направлена по вектору $\mathbf{q}$:

$$q_\nu = (q_0, 0, 0, -q), \; q = q_0, \qquad (6.7.81)$$

условия (6.7.77) и (6.7.78) примут вид

$$(y^{(-)\mu 0} - y^{(-)\mu 3})\,\Phi = 0, \qquad (6.7.82)$$

$$\overline{\Phi}\,(y^{(+)\mu 0} - y^{(+)\mu 3} = 0 \qquad (6.7.83)$$

(одно условие вытекает из другого при эрмитовом сопряжении и использовании оператора η).

Простой расчет с применением (6.7.82) и (6.7.83) дает

$$\left\langle y^{(+)\omega\varepsilon} y^{(-)}_{\omega\varepsilon} - \frac{1}{2} y^{(+)} y^{(-)} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} (y^{(+)11} - y^{(+)22})(y^{(-)11} - y^{(-)22}) + \right.$$

$$\left. + 2y^{(+)12} y^{(-)12} \right\rangle, \qquad (6.7.84)$$

так что среднее значение 4-вектора энергии-импульса гравитационного поля принимает вид

$$\langle P_\beta\rangle = \int d^3q \cdot q_\beta \left\langle \frac{y^{(+)11}(\mathbf{q}) - y^{(+)22}(\mathbf{q})}{2} \, \frac{y^{(-)11}(\mathbf{q}) - y^{(-)22}(\mathbf{q})}{2} + \right.$$

$$\left. + y^{(+)12}(\mathbf{q})\, y^{(-)12}(\mathbf{q}) \right\rangle. \qquad (6.7.85)$$

Итак, вклад в энергию свободного гравитационного поля дают лишь следующие компоненты потенциала:

$$b_1^{(\pm)} = \frac{y^{(\pm)11} - y^{(\pm)22}}{2}, \qquad b_2^{(\pm)} = y^{(\pm)12} \qquad (6.7.86)$$

[ср. (6.7.29), (6.7.30)]. Напротив, величина $y^{11} + y^{22}$, среднее значение которой совпадает со средним значением следа y,

$$\langle y\rangle = -\langle y^{11} + y^{22}\rangle, \qquad (6.7.87)$$

не дает вклада в энергию-импульс. Выскажем по этой причине гипотезу:

$$y^{(-)}\Phi = 0, \qquad \overline{\Phi} y^{(+)} = 0 \qquad (6.7.88)$$

(для свободного гравитационного поля), так что

$$\langle y \rangle = 0, \qquad (6.7.89)$$

и поэтому

$$\langle y^{11} \rangle = -\langle y^{22} \rangle. \qquad (6.7.90)$$

Но тогда для реальных гравитонов выполняется соотношение

$$a^{\mu\nu} = y^{\mu\nu} \qquad (6.7.91)$$

(в том же смысле, как подобные соотношения имеют место в электродинамике при введении индефинитной метрики). На основании доказанной нефизичности состояний гравитационного (свободного) поля, соответствующего временно-временны́м, поперечно-поперечным, поперечно-временны́м, поперечно-продольным и продольно-временны́м гравитонам (вклад в энергию-импульс дают только поперечно-поперечные кванты), мы не будем включать эти нефизические состояния в число реальных частиц[1], вводя соответствующим образом тензор поляризации гравитонов. Перейдем к вопросу об этом тензоре поляризации (спина), отсылая читателя в связи с деталями метода индефинитной метрики к стандартным курсам квантовой электродинамики и квантовой теории поля.

Ввиду физичности лишь двух видов гравитонов (6.7.86) мы представим гравитационный потенциал свободного поля в системе координат, где ось z направлена вдоль вектора $\mathbf{q}$, как

$$(y_{\mu\nu}(\mathbf{q})) = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_2 & -b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \qquad (6.7.92)$$

Здесь учтено соотношение (6.7.90); а так как рассматривались свободные частицы, то это соотношение взято в точной форме, а не для средних значений. Переход к произвольной декартовой системе координат осуществляется так же, как и в случае электродинамики, с тем лишь отличием, что ранг тензора поляризации теперь равен 2:

$$y_{\mu\nu} = (e_\mu{}^1 e_\nu{}^1 - e_\mu{}^2 e_\nu{}^2)\, b_1 + (e_\mu{}^1 e_\nu{}^2 + e_\mu{}^2 e_\nu{}^1)\, b_2. \qquad (6.7.93)$$

Рассматривая коэффициенты при операторах b_1 и b_2 как тензоры поляризации для двух видов гравитонов, записываем:

$$(\overset{a}{e}_{\mu\nu}) = \{e_\mu{}^1 e_\nu{}^1 - e_\mu{}^2 e_\nu{}^2,\ e_\mu{}^1 e_\nu{}^2 + e_\mu{}^2 e_\nu{}^1\}, \qquad (6.7.94)$$

где индекс a может принимать лишь два значения (1, 2) соответственно направлению спина гравитона по или против движения. Для более компактного выражения этих результатов полезно ввести 2-мерный символ Леви-Чивиты ε_{ab}, позволяющий записать выражение $e_{\mu\nu}{}^a$ в виде

$$\overset{a}{e}_{\mu\nu} = e_\mu{}^1 e_\nu{}^a + e_\mu{}^2 e_\nu{}^b \varepsilon_{ba}. \qquad (6.7.95)$$

При этом, конечно,

$$y_{\mu\nu} = \overset{a}{e}_{\mu\nu} b_a. \qquad (6.7.96)$$

Полезно также учитывать ортонормированность тетрад, образованных коэффициентами преобразования $e_\mu{}^\alpha$ и составляющих правый винт:

$$e_l{}^a(\mathbf{q})\, e_m{}^b(\mathbf{q})\, \varepsilon_{ab} = e_k{}^3(\mathbf{q})\, \varepsilon_{lmk}. \qquad (6.7.97)$$

[1] Как виртуальные частицы они, конечно, выступают.

Запишем полезные соотношения для конструкций из тензора поляризации гравитонов:

$$\sum_{a=1,2} e_{ij}{}^{a}(\mathbf{q})\, e_{kl}{}^{a}(\mathbf{q}) = e_i{}^a\, e_k{}^a\, e_j{}^b\, e_l{}^b - e_m{}^3\, e_n{}^3\, \varepsilon_{ikm}\, \varepsilon_{jln} =$$

$$= \delta_k{}^i\delta_l{}^j + \delta_l{}^i\delta_k{}^j - \delta_j{}^i\delta_l{}^k + \delta_j{}^i e_l{}^3 e_k{}^3 + \delta_l{}^k e_i{}^3 e_j{}^3 -$$

$$- \delta_k{}^j e_i{}^3 e_l{}^3 - \delta_l{}^i e_j{}^3 e_k{}^3 - \delta_k{}^i e_j{}^3 e_l{}^3 - \delta_l{}^j e_i{}^3 e_k{}^3 + e_i{}^3 e_j{}^3 e_k{}^3 e_l{}^3, \qquad (6.7.98)$$

$$\sum_{a=1,2} \overset{a}{e}_{ij}(\mathbf{p})\, \overset{a}{e}_{kl}(\mathbf{q}) = e_i{}^1(\mathbf{p})\, e_k{}^1(\mathbf{q})\, e_j{}^a(\mathbf{p})\, e_l{}^a(\mathbf{q}) +$$

$$+ e_i{}^1(\mathbf{p})\, e_k{}^2(\mathbf{q})\, e_j{}^a(\mathbf{p})\, e_l{}^c(\mathbf{q})\, \varepsilon_{ca} + e_i{}^2(\mathbf{p})\, e_k{}^1(\mathbf{q})\, e_j{}^b(\mathbf{p}) \times$$

$$\times e_l{}^a(\mathbf{q})\, \varepsilon_{ba} + e_i{}^2(\mathbf{p})\, e_k{}^2(\mathbf{q})\, e_j{}^b(\mathbf{p})\, e_l{}^c(\mathbf{q})\, \varepsilon_{ba}\varepsilon_{ca} =$$

$$= e_i{}^b(\mathbf{p})\, e_k{}^b(\mathbf{q}) \cdot e_j{}^a(\mathbf{p})\, e_l{}^a(\mathbf{q}) - e_i{}^a(\mathbf{p})\, e_k{}^b(\mathbf{q})\, \varepsilon_{ab} \cdot e_j{}^c(\mathbf{p})\, e_l{}^d(\mathbf{q})\, \varepsilon_{cd}, \qquad (6.7.99)$$

а также смешанные выражения, включающие поляризацию фотонов:

$$\overset{a}{e}_{ij}(\mathbf{q})\, e_k{}^a(\mathbf{q}) = e_i{}^1 e_j{}^a e_k{}^a + e_i{}^2 e_l{}^3 \varepsilon_{jkl}, \qquad (6.7.100)$$

$$e_i{}^a(\mathbf{p})\, e_k{}^b(\mathbf{q})\, \varepsilon_{ab} = \frac{i_i i_l q_m}{|\mathbf{q}|}\varepsilon_{klm} - \frac{i_k i_l p_m}{|\mathbf{p}|}\varepsilon_{ilm}, \qquad (6.7.101)$$

причем удобно принять в соответствии с (6.7.97)

$$e_i{}^2(\mathbf{q}) = q_i \frac{\cos\theta}{|\mathbf{q}|\sin\theta} - p_i \frac{1}{|\mathbf{p}|\sin\theta} \qquad (6.7.102)$$

и

$$e_i{}^2(\mathbf{p}) = -p_i \frac{\cos\theta}{|\mathbf{p}|\sin\theta} + q_i \frac{1}{|\mathbf{q}|\sin\theta}. \qquad (6.7.103)$$

Поэтому

$$e_i{}^a(\mathbf{p})\, e_k{}^b(\mathbf{q})\, \varepsilon_{ab} = \frac{p_j q_l}{\mathbf{p}^2\mathbf{q}^2\sin^2\theta}\{\varepsilon_{ijl}(q_k|\mathbf{p}|\cos\theta - p_k|\mathbf{q}|) -$$

$$- \varepsilon_{kjl}(q_i|\mathbf{p}| - p_i|\mathbf{q}|\cos\theta)\}. \qquad (6.7.104)$$

Кроме того,

$$q_i \overset{a}{e}_{ij}(\mathbf{q}) = q_i(e_i{}^1 e_j{}^a + e_i{}^2 e_j{}^b \varepsilon_{ba}) = 0, \qquad (6.7.105)$$

$$q_i \overset{a}{e}_{ij}(\mathbf{p}) = |\mathbf{q}|\sin\theta\, e_j{}^b(\mathbf{p})\, \varepsilon_{ba}, \qquad (6.7.106)$$

$$p_i \overset{a}{e}_{ij}(\mathbf{q}) = (\mathbf{p}\overset{2}{e}(\mathbf{q}))\, e_j{}^b \varepsilon_{ba} = -|\mathbf{p}|\sin\theta\, e_j{}^b(\mathbf{q})\, \varepsilon_{ba}, \qquad (6.7.107)$$

$$q_i q_j \overset{a}{e}_{ij}(\mathbf{p}) = |\mathbf{q}|\sin\theta\, e_j{}^2(\mathbf{p})\, q_j \varepsilon_{2a} = -\mathbf{q}^2\sin^2\theta\,\delta_1{}^a, \qquad (6.7.108)$$

$$p_i p_j \overset{a}{e}_{ij}(\mathbf{q}) = -\mathbf{p}^2\sin^2\theta\cdot\delta_1{}^a. \qquad (6.7.109)$$

6.8. Альтернативные пути квантования гравитации

В приведенной сейчас процедуре квантования гравитационного поля мы существенно опирались на метрический тензор как на наиболее элементарную величину, характеризующую гравитацию. В действительности ситуация может быть и другой, как это видно из анализа аналогии между гравитацией и электромагнетизмом и квадрирования уравнения Дирака в присутствии гравитационного и электромагнитного полей.

В качестве наиболее элементарных характеристик гравитационного поля можно взять и γ-матрицы. Но, как показали детальные расчеты (мы их здесь не приводим), если в предположении слабого поля разложить γ-матрицы по степеням гравитационной постоянной, мы вновь приходим в точности к тем же самым перестановочным соотношениям, что и полученные в предыдущем параграфе, несмотря на другие выражения для динамических переменных, к которым приводит новый лагранжиан.

Можно, однако, подойти к вопросу с совершенно иных позиций. Именно, исходя из анализа, проведенного в разделе 5, можно считать поля метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и символов Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ независимыми; связь между ними устанавливается лишь в среднем (по обычным для квантовой теории методам). Мы имеем тогда не одно, а два поля, связанных с гравитацией, и оба их можно квантовать. Если мы, например, откажемся от квантования поля метрического тензора $g_{\mu\nu}$, считая его классическим (что не абсурдно с точки зрения такого подхода), то из этого предположения с неизбежностью будет вытекать принципиальное отсутствие реальных гравитонов с любыми поляризациями ввиду характерной формы квазитензора энергии-импульса; это выразится в отсутствии коммутационных соотношений. Если же мы проводим квантование обоих полей, мы получаем два типа гравитонов, причем оператором уничтожения одного из них будет $g_{\mu\nu}^{(+)}$, а оператором рождения (для того же типа гравитонов) — $\Gamma_{\mu\nu}^{(-)\lambda}$, и наоборот, т. е. оба поля «переплетаются» (отчего предположение о классической природе одного из них и лишает другое квантовых свойств). Однако между ними все же не будет полной симметрии. Так, например, в лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с гравитационным входит лишь метрический тензор, но не символы Кристоффеля, так что фотоны могут в такой теории излучать лишь один тип гравитонов, а поглощать — лишь другой! Такая асимметрия может оказаться, в конце концов, ответственной за выделенность направления «течения» времени. Аналогичные выводы следуют и из квантования двух гравитационных полей, γ^{μ} и C_{μ} (см § 4.8), связанных друг с другом опять-таки через квантовые средние. Далее мы рассматриваем лишь традиционный подход к квантованию гравитации — с помощью $g_{\mu\nu}$ или γ^{μ} (дающих одинаковые результаты).

6.9. Элементы теории матрицы рассеяния

Как для конкретных расчетов, так и вообще в используемом здесь формализме квантования полей, за основу берется *представление взаимодействия*. Поэтому все рассмотрение проводится на фоне плоского пространства (оно могло бы производиться и на фоне классического искривленного мира вообще), причем квантовое гравитационное поле (в более общем случае — часть полного гравитационного поля) предполагается слабым. Этим обусловлено использование разложений конструкций, включающих метрический тензор и его производные, по степеням гравитационной постоянной (точнее — по параметру $k = \sqrt{2\varkappa}$), причем все члены ненулевого порядка рассматриваются как возмущение (взаимодействие с гравитацией и с полем сил инерции). Как обычно, это взаимодействие можно формально включать и выключать, если ввести показатель включения взаимодействия $g(x)$: при $g(x) = 1$ взаимодействие полностью включено, при $g(x) = 0$ оно полностью выключено, $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$. Тогда упомянутые разложения имеют вид

$$A(x) = A_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (kg(x))^n A_n(x). \tag{6.9.1}$$

Это позволяет провести в точности тот же анализ, что и представленный в монографии Боголюбова и Ширкова (гл. 3). Этот анализ ни в коей мере не специфичен для гравитационного взаимодействия, но, напротив, характерен вообще для квантовой теории взаимодействующих полей, которая не располагает прямыми методами исследования взаимодействия. Поэтому мы не проводим здесь этого анализа в деталях, отсылая читателя к только что упомянутой монографии Боголюбова и Ширкова либо к обширному труду Швебера (1963). Цель же настоящего параграфа состоит в том, чтобы дать сводку необходимых понятий теории матрицы рассеяния и ее основных выводов, на чем основываются все расчеты конкретных эффектов, выполненные в следующем разделе.

Рассматривая процессы, в которых начальные и конечные состояния включают лишь свободные частицы (этот случай, соответствующий теории S-матрицы, разработан наиболее детально), мы можем свести задачу об определении эволюции амплитуды состояния во времени к задаче о нахождении конечной амплитуды состояния по заданной начальной, точнее, о нахождении вероятности такого перехода. Этот переход определяется равенством

$$\Phi(+\infty) = S\Phi(-\infty), \tag{6.9.2}$$

где оператор S называется *матрицей рассеяния*, или S-матрицей.

Можно показать, что с точностью до так называемых контрчленов (см. Боголюбов и Ширков, 1957) матрица рассеяния может быть представлена в виде

$$S = T\left[\exp i \int \mathbf{L}(x)\cdot(dx)\right], \tag{6.9.3}$$

где $\mathbf{L}$ — лагранжиан взаимодействия полей (в том числе самодействия, если поля нелинейны), а символом T обозначена операция хронологического T-произведения: все множители в T-произведении стоят в порядке возрастания времен справа налево. Такое произведение оказывается релятивистски инвариантным, а экспонента в (6.9.3) — символическим представлением обычного разложения экспоненты по степеням ее аргумента (вокруг нулевого значения последнего), что и оправдывает применение T-произведения. Соответствующее доказательство опирается на четыре постулата. Это — предположения о релятивистской ковариантности матрицы рассеяния и ее унитарности, принцип причинности и принцип соответствия (сравнение с простым квазиклассическим случаем).

Итак, для конкретного расчета необходимо взять разложение

$$S = 1 + S_1 + S_2 + \ldots, \tag{6.9.4}$$

где нам понадобятся лишь два первых члена:

$$S_1 = i\int \mathbf{L}(x)\,(dx) \tag{6.9.5}$$

и

$$S_2 = -\frac{1}{2}T\int (dx)\,(dy)\,\mathbf{L}(x)\,\mathbf{L}(y). \tag{6.9.6}$$

Как известно, выражение для лагранжиана (как и для динамических переменных полей) предполагает использование нормального произведения — все операторы рождения слева, все операторы уничтожения справа (при наличии фермионных функций нечетное число перестановок их в ходе реализации нормального произведения влечет изменение знака). Это требуется для устранения нефизических расходимостей (типа бесконечной «нулевой» энергии). Дальнейшее применение хронологического произведения к умноженным друг на друга величинам с нормальным перемножением в них операторов [в (6.9.6)] требует применения *теоремы Вика*, вследствие чего возникают *хронологические спаривания* операторов.

Для практических целей следует перейти от хронологических произведений к нормальным для удобства вычисления матричных элементов между конкретными начальным и конечным состояниями. Хронологическое спаривание определяется как добавок к нормальному произведению двух операторов полей, необходимый для получения их хронологического произведения:

$$T(A_B(x)A_C(y)) = :A_B(x)A_C(y): + \overline{A_B(x)A}_C(y). \tag{6.9.7}$$

Иначе говоря, это есть вакуумное среднее хронологического произведения:

$$\langle T(A_B(x)A_C(y))\rangle_0 = \overline{A_B(x)A}_C(y), \tag{6.9.8}$$

так как вакуумное среднее нормального произведения операторов тождественно равно нулю. Заметим, что как хронологическое, так и нормальное произведение меняет знак при нечетном числе перестановок фермионных операторов.

Можно привести следующие значения спариваний для различных полей: для скалярного поля —

$$\overline{\varphi(x)\varphi(y)} = -\frac{i}{(2\pi)^4}\int(dq)\frac{e^{iq_\alpha(x^\alpha-y^\alpha)}}{m^2-q^2-i\varepsilon} = -iD^C(x-y), \tag{6.9.9}$$

где $D^C(x)$ — причинная (каузальная) функция Грина:

$$D^C(x) = \theta(x^0)D^{(-)}(x) - \theta(-x^0)D^{(+)}(x); \tag{6.9.10}$$

для электромагнитного поля —

$$\overline{A_\mu(x)A}_\nu(y) = i\delta_{\mu\nu}D_0^C(x-y) \tag{6.9.11}$$

(здесь причинная функция Грина берется при $m=0$); для фермионного поля —

$$\overline{\psi_a(x)\bar\psi}_b(y) = -iS_{ab}^C(x-y), \tag{6.9.12}$$

$$S_{ab}^C(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int(dq)\frac{(m-q_\mu\gamma^\mu)_{ab}}{m^2-q^2-i\varepsilon}e^{iq_\alpha x^\alpha}, \tag{6.9.13}$$

или

$$S_{ab}^C(x) = \left(m + i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_{ab}D^C(x); \tag{6.9.14}$$

наконец, для гравитационного поля в формализме, близком к формализму Гупты —

$$\overline{y_{\mu\nu}(x)y}_{\alpha\beta}(y) = i\delta_{\mu\nu,\,\alpha\beta}D_0^C(x-y). \tag{6.9.15}$$

Теорему Вика можно в общем виде сформулировать как равенство

$$T(:A_1A_2\dots A_a:\times:B_1B_2\dots B_b:) =$$

$$= :A_1\dots A_aB_1\dots B_b: + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant a\\1\leqslant j\leqslant b}} :A_1\dots\overline{A_i\dots A_aB_1\dots B}_j\dots B_b: +$$

$$+ \sum_{\substack{i\neq k\\j\neq l\\1\leqslant i,\,k\leqslant a\\1\leqslant j,\,l\leqslant b}} :A_1\dots\overline{A_i\dots\overline{A_k\dots A_aB_1\dots B}_j\dots B}_l\dots B_b: +$$

$$+ \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_a \neq \\ 1 \leqslant i_1, i_2 \ldots, i_a \leqslant b}} :A_1 A_2 \ldots A_a B_1 \ldots B_{i_1} \ldots B_{i_2} \ldots \ldots B_{i_a} \ldots B_b:, \tag{6.9.16}$$

если $b > a$; в случае $b < a$ это равенство изменится очевидным образом. При этом следует учитывать, что спаривания величин, обычно точно коммутирующих (или — в случае фермионных полей — точно антикоммутирующих) друг с другом, равны нулю.

При вычислениях эффективных сечений и вероятностей процессов нас интересуют матричные элементы матрицы рассеяния между заданными исходным и конечным состояниями. Амплитуды этих состояний конструируются из амплитуды состояния вакуума $\Phi_{\text{вак}}$ путем действия на нее операторов рождения тех частиц и в тех состояниях, которые задаются для начального состояния системы. Подобным же образом конструируются сопряженные амплитуды состояния, где берутся операторы уничтожения соответствующих частиц. Конечно, эти амплитуды состояния нуждаются в нормировке, для чего мы будем делить матричные элементы на квадраты амплитуд состояния. Тогда, перебрасывая операторы уничтожения, входящие в состав рассматриваемой S-матрицы, последовательно через операторы рождения в конструкции начальной амплитуды состояния (с помощью известных перестановочных соотношений) до тех пор, пока они не подействуют на амплитуду состояния вакуума и не дадут, таким образом, нуль, и поступая подобным же образом с операторами рождения в S-матрице, но перебрасывая их влево вплоть до сопряженной амплитуды конечного состояния, мы получаем в результате c-число, которое и называется матричным элементом матрицы рассеяния. Ясно, что в разложении членов S-матрицы по теореме Вика нас могут интересовать лишь те из них, которые содержат в точности одинаковое число операторов уничтожения (*соответствующих полей*) и операторов рождения *этих же* полей в начальной амплитуде состояния; аналогичное утверждение справедливо для соответствия между числом (и родом) операторов рождения в S-матрице и операторов уничтожения в сопряженной амплитуде конечного состояния. В противном случае мы получим матричные элементы, равные нулю. Это правило удобнее выразить еще другими словами. Если мы вычисляем матричный элемент для процесса, в котором начальное состояние содержит некоторые конкретные свободные кванты полей, то среди членов S-матрицы, заслуживающих рассмотрения, следует сохранить *лишь* члены, содержащие операторы уничтожения всех этих частиц (и не более!), т. е. следует «стереть» начальное состояние. Затем из числа этих членов нужно оставить *лишь* члены, содержащие операторы рождения всех частиц, входящих в интересующее нас конечное состояние, т. е. следует «создать» это конечное состояние. Наконец, хронологические спаривания однозначно соответствуют внутренним, виртуальным линиям тех диаграмм, которые мы исследуем. Порядок матрицы рассеяния (равный числу перемножаемых под знаком интеграла лагранжианов) дает число *узлов*, в которых сходятся (как реальные, так и виртуальные) линии частиц на диаграмме, так что каждый лагранжиан соответствует своему узлу. В свою очередь, число потенциалов полей (волновых функций) в каждом данном лагранжиане определяет число линий (как реальных, так и виртуальных частиц), а также характер входящих в данный узел частиц, которым эти линии соответствуют.

При таких сложных лагранжианах взаимодействия, которые характерны для гравитационного случая, формулировка правил, аналогичных общеизвестным правилам Фейнмана квантовой электродинамики, оказывается бесполезной, и читателю предлагается пользоваться непосредственно формой лагранжианов взаимодействия рассматриваемых полей и теоремой Вика. Тем самым он освобождается от необходимости специально анализировать чередование во времени отдельных узлов диаграмм, хотя рассмотрение самих диаграмм несомненно благоприятствует наглядному анализу исследуемых процессов. Некоторые практические детали вычисления матричных элементов будут приведены в следующем разделе в связи с расчетом эффектов.

Нетрудно убедиться, что в общем случае при наличии в начальном и конечном состояниях лишь свободных частиц (но не классических полей) матричный элемент S-матрицы имеет вид

$$\Phi_f^+ S\Phi_i = F(\{p\}_i, \{p\}_f)\,\delta^{(4)}\Big(\sum_i p - \sum_f p\Big), \tag{6.9.17}$$

где индекс i обозначает начальное, а индекс f — конечное состояние (и соответствующие импульсы). Если же процесс (например, рассеяние) происходит на внешнем (классическом) поле, то матричный элемент становится равным

$$\Phi_f^+ S\Phi_i = F(\{p\}_i, \{p\}_f)\,\delta\Big(\sum_i p_0 - \sum_f p_0\Big), \tag{6.9.18}$$

когда это внешнее поле является статическим (оно может тогда брать на себя долю импульса частиц, оставляя без изменения их энергию).

Однако, чтобы получить вероятность какого-либо процесса, необходимо взять *квадрат модуля* матричного элемента. Это приводит к необходимости возводить в квадрат δ-функцию, что в прямом смысле, конечно, недопустимо. Поэтому считается, что в ходе предварительных вычислений везде фигурирует некоторая «сглаженная» функция, дающая лишь в пределе несобственную функцию Дирака (см. предельные переходы в § 8.4). Поэтому (без предельного перехода) возводя в квадрат «сглаженную» функцию $\frac{1}{\pi}\frac{\sin qx}{q}$ [см. (8.4.26), где следует иметь в виду, что рассматривается δ-функция, зависящая не от координаты пространства, а от компоненты импульса], получаем

$$[\delta(q)]^2 \leftarrow \left(\frac{1}{\pi}\frac{\sin xq}{q}\right)^2 = \frac{x}{\pi}\frac{1}{\pi}\frac{\sin^2 xq}{xq^2} \rightarrow \frac{x}{\pi}\delta(q); \tag{6.9.19}$$

а так как в соответствующем фурье-представлении область пространственного интегрирования следует брать от $-x$ до $+x$, целесообразно перейти к обозначению $l = 2x$, причем из (6.9.19) тогда следует

$$[\delta(q)]^2 \rightarrow \frac{l}{2\pi}\delta(q). \tag{6.9.20}$$

В 4-мерном случае это выражение принимает вид

$$[\delta^{(4)}(q)]^2 \rightarrow \frac{VT}{(2\pi)^4}\delta^{(4)}(q), \tag{6.9.21}$$

где под произведением VT следует понимать пространственно-временну́ю область, в которой проводится рассмотрение; ее размеры нужно в конце концов устремить к ∞, но до этого такое же произведение появляется и в знаменателе, так что лишней расходимости не возникает (ср. несколько иные рассуждения в монографии Боголюбова и Ширкова (1957), стр. 185—186). Итак, квадраты модулей соответственно для (6.9.17) и (6.9.18) равны

$$|\Phi_f^+ S\Phi_i|^2 = \frac{VT}{(2\pi^4)}|F|^2\delta^{(4)}\Big(\sum_i p - \sum_f p\Big) \tag{6.9.22}$$

и

$$|\Phi_f^{+}S\Phi_i|^2=\frac{T}{2\pi}|F|^2\delta\left(\sum_{i}p_0-\sum_{f}p_0\right). \tag{6.9.23}$$

Дальнейший анализ достаточно отчетливо и компактно изложен в монографии Боголюбова и Ширкова (§ 22), так что нет нужды его повторять; мы приведем здесь лишь основные выводы с соответствующими комментариями.

Прежде всего укажем явно нормировку амплитуды состояния для случая s частиц (разной природы):

$$\Phi_{(s)}=(2\pi)^{3s/2}a_{\sigma_1}^{(+)}(\mathbf{p}_1)\ldots a_{\sigma_s}^{(+)}(\mathbf{p}_s)\Phi_{\text{вак}}; \tag{6.9.24}$$

если же в этом состоянии содержатся группы тождественных частиц (частиц одного рода), то

$$\Phi_{(s)}=\frac{(2\pi)^{3s/2}}{\sqrt{\Pi(\nu!)}}a_{\sigma_1}^{(+)}(\mathbf{p}_1)\ldots a_{\sigma_s}^{(+)}(\mathbf{p}_s)\Phi_{\text{вак}}. \tag{6.9.25}$$

Здесь произведение факториалов

$$\Pi(\nu!)=\nu_1!\nu_2!\ldots\nu_a! \tag{6.9.26}$$

зависит от чисел частиц в каждой из этих групп (группы нумеруются как $1, 2, \ldots, a$).

Обозначим для удобства выражения (6.9.24) и (6.9.25) без первых множителей через

$$\Phi_{p_1\sigma_1\ldots p_s\sigma_s}=a_{\sigma_1}^{(+)}(\mathbf{p}_1)\ldots a_{\sigma_s}^{(+)}(\mathbf{p}_s)\Phi_{\text{вак}}. \tag{6.9.27}$$

Тогда среднее число частиц, соответствующих конечному состоянию, получившемуся при эволюции состояния $\Phi_{(s)}$ и обозначаемому через Φ_f, равно

$$(dN)_0=\frac{(2\pi)^{3s}}{\Pi(\nu!)}\frac{|\Phi_f^{+}S\Phi_{p_1\sigma_1\ldots p_s\sigma_s}|^2}{\Phi_f^{+}\Phi_f} \tag{6.9.28}$$

(произведение $\Phi_f^{+}\Phi_f$ в знаменателе взято в целях нормировки). В начальном состоянии, согласно нормировке (6.9.25), на единицу объема приходится одна частица в каждом заданном начальном состоянии; в противном случае выражение (6.9.28) следует еще умножить на числа соответствующих частиц в единице объема. Вообще говоря, должен наблюдаться некоторый разброс частиц конечного состояния как по абсолютной величине, так и по направлению импульсов [с соблюдением законов сохранения, зафиксированных в δ-функциях (6.9.22) и (6.9.23)]. Поэтому при определении дифференциальных сечений или вероятностей перехода следует ставить вопрос о числе частиц, появившихся в конечном состоянии с импульсами в некоторых интервалах $\Delta^3q_1, \Delta^3q_2, \ldots, \Delta^3q_r$ около значений $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_r$. Поэтому полагая амплитуду конечного состояния равной

$$\Phi_f=(2\pi)^{3r/2}\int\limits_{\Delta Q}\Phi_{q_1\tau_1\ldots q_r\tau_r}d^3q_1\ldots d^3q_r \tag{6.9.29}$$

(область интегрирования ΔQ — совокупность интервалов, в которых лежат импульсы частиц конечного состояния), получаем

$$\Phi^{+}\Phi=(2\pi)^{3r}\Delta^3q_1\ldots\Delta^3q_r, \tag{6.9.30}$$

так что (6.9.28) при учете произвольного числа частиц в единице объема в начальном состоянии принимает вид

$$dN = n_1 \ldots n_s \frac{(2\pi)^{3s}}{\Pi(\nu!)} \left| \Phi^{+}_{q_1\tau_1 \ldots q_r\tau_r} S \Phi_{p_1\sigma_1 \ldots p_s\sigma_s} \right|^2 \Delta^3 q_1 \ldots \Delta^3 q_r. \qquad (6.9.31)$$

Учитывая соотношения (6.9.22) и (6.9.23), мы получаем окончательно число частиц, оказавшихся в конечном состоянии в указанных интервалах импульсов:

$$dN = n_1 \ldots n_s \frac{(2\pi)^{3s-4}}{\Pi(\nu!)} |F(q_f, p_i)|^2 \delta^{(4)}\left(\sum_i p - \sum_f q \right) d^3q_1 \ldots d^3q_r, \qquad (6.9.32)$$

когда взаимодействие осуществляется лишь через виртуальные кванты полей, и

$$dN = n_1 \ldots n_s \frac{(2\pi)^{3s-1}}{\Pi(\nu!)} |F(q_f, p_i)|^2 \delta\left(\sum_i p_0 - \sum_f q_0 \right) d^3q_1 \ldots d^3q_r, \qquad (6.9.33)$$

когда переход вызывается действием внешнего (классического) статического поля.

Эти выражения принимают следующий вид в конкретных случаях. Случаю $s = 1$, $r = 1$ соответствует рассеяние или превращение на внешнем поле (§ 7.1, 7.2):

$$dN = n(2\pi)^2 |F(q, p)|^2 \delta(p_0 - q_0) d^3q. \qquad (6.9.34)$$

При $s = 2$, $r = 2$ мы имеем рассеяние частицы на частице, аннигиляцию пары в два кванта излучения, комптон-эффект (§ 7.3, 7.4):

$$dN = n_1 n_2 \frac{(2\pi)^2}{\Pi(\nu!)} |F(q_f, p_i)|^2 \delta^{(4)}\left(\sum_i p - \sum_f q \right) d^3q_1 d^3q_2. \qquad (6.9.35)$$

Дифференциальным сечением рассеяния (перехода) в данном интервале углов, определяемых импульсами рассеянных частиц, мы назовем теперь такую эффективную площадку, отнесенную к единице площади поперечного сечения исходного пучка, что число частиц, рассеянных с этой единичной площади в заданном выше интервале импульсов, равно числу всех частиц из пучка, попадающих за то же время на эту эффективную площадку [1]. Так как в единицу времени на эту площадку $d\sigma$ попадает в случае (6.9.34)

$$dN = nv\,d\sigma \qquad (6.9.36)$$

частиц, а в случае (6.9.35) —

$$dN = n_1 n_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| d\sigma \qquad (6.9.37)$$

частиц (в лабораторной системе, когда одна из частиц покоится, получим $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = v_1 = |\mathbf{p}_1| / p_{10}$), то сечения окажутся соответственно равны

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^2}{|\mathbf{p}|} |F(q, p)|^2 p_0 \delta(p_0 - q_0) d^3q \qquad (6.9.38)$$

---

[1] Приведенная форма определения дифференциального сечения рассеяния полностью эквивалентна обычной его форме, но более непосредственно отражает физический смысл понятия сечения рассеяния. Для удобства дадим здесь также обычную форму определения дифференциального сечения: дифференциальное сечение рассеяния в некоторый телесный угол $d\Omega$ равно отношению числа частиц, рассеянных в этот угол за единицу времени, к числу частиц, проходящих за единицу времени через единицу площади поперечного сечения исходного пучка. Определение, приведенное в этой сноске, менее удобно, чем приведенное в тексте, так как в последнем его проще распространить на случай превращений частиц в процессе столкновения (общий случай квантовых переходов).

и

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^2}{\Pi(\nu!)\,|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}\,|F(q_\mathrm{f}, p_i)|^2\delta^{(4)}\Big(\sum_\mathrm{i} p - \sum_\mathrm{f} q\Big)d^3q_1d^3q_2. \qquad (6.9.39)$$

Так как

$$d^3q = q^2\sin\theta\,dq\,d\theta\,d\varphi = q^2dqd\Omega \qquad (6.9.40)$$

и, вследствие релятивистского соотношения между энергией и импульсом,

$$q_0^2 = \mathbf{q}^2 + m^2, \qquad (6.9.41)$$

справедливо равенство

$$qdq = q_0dq_0, \qquad (6.9.42)$$

нетрудно провести интегрирование в (6.9.38) по модулю импульса частиц конечного состояния. Мы получим тогда окончательное выражение для дифференциального сечения рассеяния (перехода) на внешнем (классическом) поле в зависимости от угла рассеяния [1]:

$$d\sigma = (2\pi)^2|F(q, p)|^2p_0^2d\Omega_{(q)}. \qquad (6.9.43)$$

В свою очередь, интегрирование по 3-импульсу одной из частиц конечного состояния и по модулю импульса другой дает в случае (6.9.39), когда в начальном и конечном состояниях присутствует по две реальных частицы и в процессе не участвуют внешние поля, следующее выражение для дифференциального сечения:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^2q_1q_{10}|F(q_\mathrm{f}, p_\mathrm{i}|^2}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\,|1 + \partial q_{20}/\partial q_{10}|}\,d\Omega_{(q_1)}. \qquad (6.9.44)$$

Следует помнить, что в каждом из этих выражений должны быть учтены соответствующие законы сохранения, выраженные в (6.9.38) и (6.9.39) в форме δ-функций. Производная энергии одной конечной частицы по энергии другой, стоящая в знаменателе (6.9.44), следует из правила интегрирования δ-функции, аргументом которой служит, в свою очередь, функция переменной интегрирования [см. (8.4.8)]. При этом ясно, что энергии начальных частиц не зависят от энергий конечных, но не наоборот.

Отдельные вычислительные детали и пояснения читатель найдет в параграфах следующего раздела [2].

---

[1] Зависимость от угла (углов) отражена с помощью 4-мерных импульсов q и p, от которых зависит функция F.

[2] Мы не будем касаться при этом многих работ, в которых вычислялись некоторые эффекты с участием гравитонов как в теории Эйнштейна, так и в других теориях тяготения.

7. КВАНТОВО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ

7.1. Отклонение луча света в гравитационном поле и другие эффекты этого типа

Рассмотрим теперь процессы рассеяния различных частиц (и среди них — самих гравитонов) на статическом сферически симметричном классическом гравитационном поле (поле Шварцшильда) (рис. 5). Один из этих процессов хорошо известен: это — знаменитый эффект отклонения лучей света гравитационным полем Солнца (см. § 3.6), который мы выведем здесь из квантовых соображений. Несмотря на (формально) квантовый метод расчета, все эти эффекты по своей природе — классические, тем более, что в формулы, описывающие их, не входит в конечном итоге постоянная

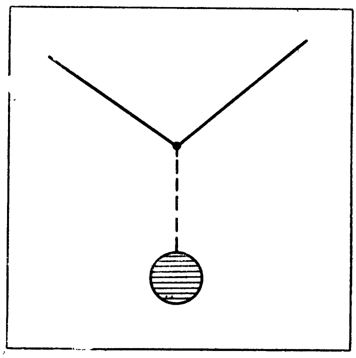


Рис. 5. Рассеяние кванта на классическом поле Шварцшильда

Планка. Удобство применения квантовой теории здесь имеет своей причиной наиболее простое использование метода функции Грина в сочетании с методом последовательных приближений (теория возмущений) при расчете рассеяния в квантовой теории. Вместе с тем, различный спин разных частиц дает, как показывают эти расчеты, явно разные выражения для сечений рассеяния уже в классической области, что подтверждает ценность классической (не квантовой) формулировки понятия спина в теории поля (теорема Нётер); здесь спин характеризуется, в частности, тензорным рангом потенциалов рассматриваемых полей. Напомним, что в классической теории гравитации эффект типа отклонения частиц (например, фотонов) гравитационным полем больших масс (Солнце) рассчитывается с помощью уравнения геодезической, совершенно игнорирующей спин и вообще внутреннюю структуру частицы; таким образом, полевой подход, несущий более богатую информацию, предпочтительнее.

За исключением случая рассеяния гравитонов на поле Шварцшильда здесь нет необходимости обращаться и к квантованию гравитации, так что использование классического гравитационного поля позволяет в принципе производить точный расчет классической части эффекта (первый порядок квантовой теории возмущений). Однако ввиду того, что в дальнейшем мы будем сравнивать наши выводы с известными расчетами в рамках классической теории Эйнштейна, и ввиду громоздкости точного подхода мы ограничимся здесь низшими членами (по гравитационной постоянной).

Поэтому целесообразно представить метрику поля Шварцшильда в приближенном виде. Именно, вспоминая, что метрику (3.3.39) можно приближенно представить в виде

$$k=\sqrt{2\varkappa}, \tag{7.1.1}$$

$$g_{\mu\nu}\simeq\delta_{\mu\nu}-\frac{Mk^2}{8\pi r}\delta_\nu{}^\mu, \tag{7.1.2}$$

откуда

$$y^{\mu\nu}=-\frac{Mk}{4\pi r}\delta_0{}^\mu\delta_0{}^\nu \tag{7.1.3}$$

и

$$y=-\frac{Mk}{4\pi r}. \tag{7.1.4}$$

Здесь M — масса рассеивающего центра (последовательно квантовый вывод рассматриваемого классического эффекта как предельного случая будет дан в § 7.3).

В случае скалярного поля лагранжиан (6.6.28) дает следующую часть, описывающую взаимодействие скалярных частиц с гравитацией:

$$\mathbf{L}_{\text{int}}=\frac{k^2M}{8\pi r}:\left(\varphi_{,0}{}^2-\frac{\mu^2}{2}\varphi^2\right):. \tag{7.1.5}$$

Пользуясь выражениями для коммутаторов

$$[\varphi^{(-)}(x),\varphi^{(+)}(\mathbf{q})]_-=\frac{e^{-ip_\alpha x^\alpha}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q_0}} \tag{7.1.6}$$

и

$$[\varphi^{(-)}(\mathbf{p}),\varphi^{(+)}(x)]_-=\frac{e^{ip_\alpha x^\alpha}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_0}}, \tag{7.1.7}$$

легко вычислить матричный элемент лагранжиана взаимодействия (7.1.5) между двумя одномезонными состояниями, характеризуемыми импульсами p_μ и q_μ. Амплитуды состояния в этих случаях строятся из амплитуды состояния вакуума:

$$\Phi_q=\varphi^{(+)}(\mathbf{q})\Phi_{\text{vac}},\ \Phi_p{}^+=\Phi_{\text{vac}}^+\varphi^{(-)}(\mathbf{p}). \tag{7.1.8}$$

Таким образом,

$$\Phi_p{}^+\mathbf{L}_{\text{int}}\Phi_q=\frac{k^2M}{4(2\pi)^4}\cdot\frac{e^{i(p_\alpha-q_\alpha)x^\alpha}}{r}\cdot\frac{q_0p_0-\dfrac{\mu^2}{2}}{\sqrt{q_0p_0}}. \tag{7.1.9}$$

Согласно методу S-матрицы, это выражение должно быть проинтегрировано по всему пространству-времени. Заметим сначала, что

$$\int\frac{e^{k_\alpha x^\alpha}}{r}(dx)=2\cdot(2\pi)^2\frac{\delta(k_0)}{\mathbf{k}^2}, \tag{7.1.10}$$

так что

$$\int\Phi_p{}^+\mathbf{L}_{\text{int}}\Phi_q(dx)=F(p,q)\,\delta(p_0-p_0)=$$

$$=-\frac{k^2M}{32\pi^2}\frac{\dfrac{\mu^2}{2}-q_0{}^2}{q_0(q_0{}^2-\mu^2)}\frac{1}{\sin^2\theta/2}\delta(p_0-q_0). \tag{7.1.11}$$

Вспоминая (§ 6.9) общее выражение для сечения в подобном случае

$$d\sigma = (2\pi)^2 \frac{q_0}{|\mathbf{q}|} |F(p, q)|^2 |\mathbf{p}| p_0 d\Omega, \tag{7.1.12}$$

где

$$d\Omega = \sin\theta d\varphi d\theta \tag{7.1.13}$$

— элемент телесного угла, в который происходит рассеяние, мы получаем сечение рассеяния скалярных частиц в поле Шварцшильда:

$$d\sigma_{\text{sc}} = \frac{k^4 M^2}{(16\pi)^2} \left(\frac{q_0^2 - \frac{\mu^2}{2}}{\mathbf{q}^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta/2}. \tag{7.1.14}$$

В случае электромагнитного поля лагранжиан его взаимодействия с полем Шварцшильда можно записать, исходя из (6.6.29), в виде:

$$\mathbf{L}_{\text{int}} = \frac{k^2 M}{16\pi r} :\left(F_{0i}F_{0i} + \frac{1}{2} F_{ik}F_{ik} \right):. \tag{7.1.15}$$

Исходя из перестановочных соотношений

$$[A_\mu^{(-)}(x), a_\sigma^{(+)}(\mathbf{q})]_- = \frac{e^{-iq_\alpha x^\alpha}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q_0}} e_\mu{}^\sigma(\mathbf{q}) \tag{7.1.16}$$

и

$$[a_\tau^{(-)}(\mathbf{p}), A_\mu^{(+)}(x)]_- = \frac{e^{-ip_\alpha x^\alpha}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_0}} e_\mu{}^\tau(\mathbf{p}) \tag{1.1.17}$$

и соотношения (7.1.10), получаем матричный элемент:

$$\int \Phi_p{}^+ \mathbf{L}_{\text{int}} \Phi_q (dx) = \frac{k^2 M}{16\pi^2} \frac{\delta(p_0 - q_0)}{4q_0 \sin^2 \theta/2} \times$$

$$\times \left(2q_0^2 e_\mu{}^\tau(\mathbf{p}) e_\mu{}^\sigma(\mathbf{q}) \cos\frac{\theta}{2} - p_i q_k e_k{}^\tau(\mathbf{p}) e_i{}^\sigma(\mathbf{q}) \right) \tag{7.1.18}$$

и — далее — сечение рассеяния фотонов на поле Шварцшильда:

$$d\sigma_{\text{em}} = \int\limits_{p0} (2\pi)^2 |F(p, q)|^2 \delta(p_0 - q_0) p_0 dp_0 d\Omega_p, \tag{7.1.19}$$

или окончательно

$$d\sigma_{\text{em}} = \frac{k^4 M^2}{(16\pi)^2} \operatorname{ctg}^4 \frac{\theta}{2} d\Omega \tag{7.1.20}$$

[это сечение впервые получено Пийром (1957)].

При рассеянии фермионов на поле Шварцшильда член в лагранжиане (6.6.30), содержащий производные γ-матриц, обращается в нуль, если взять эти матрицы в форме (3.3.6), (3.3.37), (3.3.38), что существенно упрощает расчеты. Тогда лагранжиан взаимодействия фермионных частиц с полем Шварцшильда в интересующем нас приближении приводится к виду

$$\mathbf{L}_{\text{int}} = \frac{i\varkappa M}{16\pi r} :[(\bar{\psi} \underset{0}{\gamma^0} \psi_{,0} - \bar{\psi}_{,0} \underset{0}{\gamma^0} \psi) - (\bar{\psi} \underset{0}{\gamma^i} \psi_{,i} - \bar{\psi}_{,i} \underset{0}{\gamma^i} \psi)]. \tag{7.1.21}$$

Приводя перестановочные соотношения к виду

$$[a_\tau^{(-)*}(\mathbf{p}), \psi_a^{(+)}(x)]_+ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ip_\alpha x^\alpha} \underset{a}{v}^{(+)\tau}(\mathbf{p}) \tag{7.1.22}$$

и

$$[\bar{\psi}_b^{(-)}(x), a_\sigma^{(+)}(\mathbf{q})]_+ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-iq_\alpha x^\alpha} \bar{v}_b^{(-)\sigma}(\mathbf{q}), \tag{7.1.23}$$

нетрудно получить матричные элементы:

$$\Phi_{p\tau}^+ \mathrm{L}_{\mathrm{int}} \Phi_{q\sigma} = \frac{i\varkappa M}{16\pi r} \frac{e^{i(p_\alpha - q_\alpha)x^\alpha}}{(2\pi)^3} \times$$
$$\times [\bar{v}^{(-)\sigma}(\mathbf{q}) \underset{0}{\gamma}{}^0 v^{(+)\tau}(\mathbf{p}) i(p_0 + q_0) - \bar{v}^{(-)\sigma}(\mathbf{q}) \gamma^k v^{(+)\tau}(\mathbf{p}) i(p_k + q_k)] \tag{7.1.24}$$

и

$$\int \Phi_{p\tau}^+ \mathrm{L}_{\mathrm{int}} \Phi_{q\sigma}(dx) = -\frac{C\delta(p_0 - q_0)}{4\pi p^2 \sin^2\theta/2} \times$$
$$\times [2p_0 \underset{0}{\overset{0}{\gamma}}_{ab} - (p_k + q_k) \underset{0}{\overset{k}{\gamma}}_{ab}] \bar{v}_a^{(-)\sigma}(\mathbf{q}) v_b^{(+)\tau}(\mathbf{p}) = F_{\sigma\tau}(p, q)\delta(p_0 - q_0),$$
$$C = \frac{\varkappa M}{16\pi}. \tag{7.1.25}$$

Квадрат модуля матричного элемента $|F(p, q)|^2$ тогда будет равен

$$|F_{\sigma\tau}(p, q)|^2 = \frac{C^2}{(4\pi)^2 |\mathbf{p}|^4 \sin^4\theta/2} (2p_0 \underset{0}{\overset{0}{\gamma}}_{ab} - (p_k + q_k) \underset{0}{\overset{k}{\gamma}}_{ab}) \times$$
$$\times (2p_0 \underset{0}{\overset{0}{\gamma}}_{dc} + (p_l + q_l) \underset{0}{\overset{l}{\gamma}}_{dc}) \bar{v}_a^{(-)\sigma}(\mathbf{q}) \bar{v}_e^{(-)\tau}(\mathbf{p}) \times$$
$$\times v_f^{(+)\sigma}(\mathbf{q}) v_b^{(+)\tau}(\mathbf{p}) \underset{0}{\overset{0}{\gamma}}_{cf} \underset{0}{\overset{0}{\gamma}}_{ed}. \tag{7.1.26}$$

Если не исследовать фиксированных ориентацией спина и взять в качестве начального состояния смесь (усреднение по спину[1]), а в качестве конечного состояния — сумму по спину, мы получим квадрат модуля матричного элемента в виде шпура:

$$\sum |F|^2 = \frac{C^2}{(4\pi)^2 4p_0^2 |\mathbf{p}|^4 \sin^4\theta/2} \times$$
$$\times \mathrm{Sp}[(2p_0 \underset{0}{\gamma}{}^0 - (p_k + q_k) \underset{0}{\gamma}{}^k)(\underset{0}{\gamma}{}^\nu p_\nu - m) \times$$
$$\times (2p_0 \underset{0}{\gamma}{}^0 - (p_l + q_l) \underset{0}{\gamma}{}^l)(\underset{0}{\gamma}{}^\mu q_\mu - m)]. \tag{7.1.27}$$

Раскрытие этого шпура не представляет затруднений и дает

$$\mathrm{Sp}[\ldots] = 32\left[m^2 q_0^2 + (4q^2 + 3m^2) q^2 \cos^2\frac{\theta}{2}\right]; \tag{7.1.28}$$

отсюда сечение рассеяния фермионов на поле Шварцшильда будет равно

$$d\sigma = \frac{k^4 M^2}{(16\pi)^2} \frac{1}{q^4 \sin^4\frac{\theta}{2}} \left[q^4 \cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{m^4}{4} + \frac{m^2 q^2}{4}\left(1 + 3\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right]. \tag{7.1.29}$$

Рассмотренные здесь эффекты были линейными; рассеяние же гравитонов на поле Шварцшильда — явно нелинейный эффект и уже требует квантования самого гравитационного поля. Поэтому входящие в лагран-

[1] Или, как часто говорят, усреднение по поляризациям входящих частиц.

жиан гравитационного поля члены следует перегруппировать так, чтобы отделить сомножители, представляющие реальные гравитоны (квантованное поле), от классического поля Шварцшильда, на котором они рассеиваются. Такое выделение классического поля не вполне однозначно. Если считать, что классическое поле является лишь удобным способом для описания (в среднем) процессов поглощения и излучения виртуальных квантов, то в нормальном произведении, представляющем лагранжиан с кубическими по $y_{\mu\nu}$ членами, следует с самого начала отбросить все слагаемые типа $y^{(+)}y^{(+)}y^{(+)}$ и $y^{(-)}y^{(-)}y^{(-)}$ (произведения операторов одинаковых частотностей). Затем следует лишь вновь скомбинировать оставшиеся слагаемые так, чтобы симметричным образом разделить свободные гравитоны и классическое поле. Комбинирование членов без отбрасывания слагаемых одной частотности дает матричный элемент, отличающийся от получаемого указанным выше способом лишь на постоянный множитель (2/3), который с физической точки зрения не имеет смысла. Поэтому мы будем придерживаться первого подхода. Так как теперь в интересующую нас часть лагранжиана взаимодействия

$$\mathbf{L}_{\text{int}} = \frac{k^2M}{16\pi} : \Big[-\frac{1}{r}\big(y^{(+)\alpha\beta}\overset{(-)}{y}_{\alpha\beta,\,00} + \overset{(+)}{y}_{\alpha\beta,\,00}y^{(-)\alpha\beta} + \frac{1}{2}\overset{(+)}{y}_{,0}\overset{(-)}{y}_{,0} + y^{(+)\alpha\beta}{}_{,0}\overset{(-)}{y}_{\alpha\beta,\,0}\big) + \frac{x^i}{2r^3}\big(y^{(+)\alpha\beta}\overset{(-)}{y}_{\alpha\beta,\,i} + \overset{(+)}{y}_{\alpha\beta,\,i}y^{(-)\alpha\beta} - y_i^{(+)\alpha}\overset{(-)}{y}_{,\alpha} - \overset{(+)}{y}_{,\alpha}y_i^{(-)\alpha}\big)\Big] : \tag{7.1.30}$$

вошли производные поля Шварцшильда, то требуется, кроме интеграла (7.1.10), учитывать также интеграл вида $\int (dx)\,\frac{r^l}{r^3}\,e^{ik_\alpha x^\alpha}$, который нетрудно взять, исходя из того, что

$$\frac{x^l}{r^3} = \delta^{\mu l}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{2i}{(2\pi)^2}\int q^l\,\frac{e^{i\mathbf{qr}}}{\mathbf{q}^2}d^3q. \tag{7.1.31}$$

Тогда элемент S-матрицы можно записать в виде

$$\int \Phi_p{}^+\mathbf{L}_{\text{int}}\Phi_q(dx) = \frac{k^2M}{128\pi^2}\frac{\delta(p_0-q_0)}{q_0\sin^2\dfrac{\theta}{2}} \times \left[\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2q_0{}^2}(p_\alpha p_\beta\delta_{\mu\nu} + q_\alpha q_\beta\delta_{\mu\nu})\right]\overset{a}{e}_{\alpha\beta}\overset{b}{e}_{\mu\nu}, \tag{7.1.32}$$

откуда следует дифференциальное сечение рассеяния гравитонов на поле Шварцшильда

$$d\sigma_g = \frac{k^4M^2}{(16\pi)^2}\frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta/2}d\Omega, \tag{7.1.33}$$

где произведено усреднение по поляризации входящих гравитонов и суммирование по поляризации рассеянных.

Указанные процессы были рассчитаны нами в 1958 г. Рассмотрим теперь рассчитанный Владимировым (1963а, б, в) эффект рассеяния векторных частиц с ненулевой массой покоя на малые углы. Здесь существенно, что векторное поле, как хорошо известно, не переходит просто в электромагнитное при стремлении к нулю массы покоя. В указанных предположениях Ю. С. Владимиров получил дифференциальное сечение

$$d\sigma_v = \frac{k^4M^2}{(16\pi)^2} \cdot \left(\frac{q_0{}^2 - \frac{\mu^2}{2}}{\mathbf{q}^2} \right) \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta/2}. \tag{7.1.34}$$

Полученные сечения показывают естественное совпадение картин рассеяния всех частиц независимо от спина в пределе малых углов (если взяты одинаковые массы покоя сравниваемых частиц). В этом пределе мы получаем величину дифференциального сечения для безмассовых частиц

$$d\sigma \cong \frac{k^4M^2}{8\pi} \cdot \left| \frac{d\theta}{\theta^3} \right|. \tag{7.1.35}$$

Сравнивая это сечение с обычным сечением рассеяния на сфере некоторого радиуса R,

$$d\sigma = 2\pi R dR, \tag{7.1.36}$$

находим связь между радиусом указанной сферы и углом рассеяния в (7.1.35):

$$k^4M^2 d\left(\frac{1}{\theta^2}\right) = (4\pi)^2 d(R^2). \tag{7.1.37}$$

Интегрируя, находим

$$\theta = \frac{k^2M}{4\pi R}. \tag{7.1.38}$$

Вспоминая соотношения (3.5.15) и (3.6.63), запишем здесь результат чисто классической теории Эйнштейна:

$$\delta = \frac{4\gamma M}{pc^2} = \frac{\varkappa M}{2\pi p} = \frac{k^2M}{4\pi p}. \tag{7.1.39}$$

Если радиус взятой нами сферы интерпретировать теперь как прицельный параметр данного фотона относительно рассеивающего центра, то совпадение углов θ и δ означает, что квантовая теория непосредственно дает закон отклонения света в поле Солнца. Этого, собственно, и следовало ожидать. Такое сравнение, правда, в несколько иной форме, было проведено впервые Пийром (1957).

7.2. Превращение фотонов в гравитоны и обратно

Можно указать ряд эффектов, при которых фотоны и другие частицы превращаются в гравитоны (например, процесс обменного комптон-эффекта, см. § 7.4), однако наиболее заметный вклад в образование гравитонов при обычных условиях дают, конечно, эффекты первого порядка теории возмущений. Законы сохранения допускают протекание лишь одного из этих эффектов — превращения фотонов в гравитоны (и обратно) в классическом электромагнитном поле. Тот факт, что берется *классическое* поле, позволяет сделать (теоретически) указанный эффект сколь угодно сильным; достаточно лишь взять соответствующую большую напряженность электромагнитного поля, либо увеличить до космических масштабов занимаемый им объем. В классической теории аналогичный эффект рассматривался Герценштейном.

Мы берем хорошо известный лагранжиан взаимодействия электромагнитного и гравитационного полей

$$\mathbf{L} = \frac{k}{4} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \left(2y^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} - \frac{1}{2} y\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} \right) \tag{7.2.1}$$

и рассматриваем диаграмму на рис. 6. Разделение классического и квантового электромагнитного поля в (7.2.1) не вызывает затруднений ввиду симметричного включения в этот лагранжиан тензора электромагнитного поля. Поэтому (имея в виду переход фотона в реальный гравитон, а не

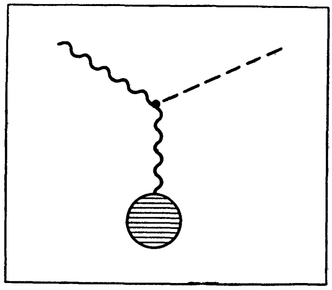


Рис. 6. Диаграмма превращения фотона в гравитон (и обратно) в классических электромагнитных полях

наоборот) следует записать, учитывая равенство $y = 0$ для реальных гравитонов:

$$\mathbf{L}(x) = \frac{k}{2} F_{\alpha\beta}^{\text{класс}} y^{(+)\mu\alpha} F_{\mu\nu}^{(-)} \delta^{\nu\beta}. \tag{7.2.2}$$

Нас интересует матричный элемент между начальным состоянием

$$\Phi_{q\sigma} = \mathrm{a}_\sigma^{(+)}(\mathbf{q}) \Phi_{\text{vac}} \tag{7.2.3}$$

и конечным состоянием

$$\overline{\Phi}_{pa} = \Phi_{\text{vac}}^{+} \eta b_a^{(-)}(\mathbf{p}). \tag{7.2.4}$$

Для его вычисления следует учесть, наряду с (7.1.16),

$$[b_a^{(-)}(\mathbf{p}), y_{\mu\alpha}^{(+)}(x)]_- = \frac{e^{ip_\alpha x^\alpha}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_0}} \overset{a}{e}_{\mu\alpha}(\mathbf{p}). \tag{7.2.5}$$

Мы получим тогда

$$\overline{\Phi}\mathbf{L}(x)\Phi = \overset{a}{e}_{\mu\alpha} e_\lambda{}^\sigma F_{\text{класс}}^{\alpha\beta} (q_\beta \delta^{\mu\lambda} - q^\mu \delta_\beta{}^\lambda) \frac{ik}{4(2\pi)^3 \sqrt{p_0 q_0}} e^{i(p_\nu - q_\nu)x^\nu}, \tag{7.2.6}$$

или, на основании

$$\overline{\Phi} S \Phi = F \delta(p_0 - q_0), \tag{7.2.7}$$

основную для наших вычислений величину

$$F = -\frac{k}{4(2\pi)^2 q_0} (q_\beta \delta^{\mu\lambda} - q^\mu \delta_\beta{}^\lambda) \overset{a}{e}_{\mu\alpha}(\mathbf{p}) e_\lambda{}^\sigma(\mathbf{q}) \int F_{\text{класс}}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\mathbf{r}} dv. \tag{7.2.8}$$

Чтобы взять квадрат модуля матричного элемента и подставить в выражение для дифференциального сечения, следует прежде упростить матричный элемент, конкретизируя характер рассматриваемого поля и направление движения первоначального пучка фотонов. Мы остановимся здесь на трех случаях: на классическом кулоновском поле, однородном статическом электрическом поле плоского конденсатора и однородном статическом магнитном поле.

В первом случае матричный элемент принимает вид

$$F = \frac{k}{4(2\pi)^2} \int F_{\text{класс}}^{i0}(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\mathbf{r}} dv \overset{a}{e}_{ij}(\mathbf{p}) e_j{}^\sigma(\mathbf{q}), \tag{7.2.9}$$

где классическое поле равно

$$F^{i0}_{\text{класс}}(\mathbf{r}) = E^i(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r^2}\frac{x^i}{r}. \tag{7.2.10}$$

При возведении в квадрат гравитонная и фотонная поляризации дают множитель

$$e_{ij}(\mathbf{p})e_j{}^\sigma(\mathbf{q})e_{kl}(\mathbf{p})e_l{}^\sigma(\mathbf{q}) = \left(\delta_k{}^i - \frac{p_ip_k}{p^2}\right)(1+\cos^2\theta), \tag{7.2.11}$$

а интеграл по 3-мерному объему может быть просто вычислен на основании свойств функций $1/r$ и $\delta(\mathbf{r})$:

$$J^i = \int dv \frac{x^i}{r} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{p})\mathbf{r}} = \frac{\pi i(q_i - p_i)}{q^2 \sin^2\theta/2}. \tag{7.2.12}$$

Здесь θ — угол между направлениями распространения фотона и гравитона. Подстановка этих выражений в квадрат матричного элемента приводит к выражению

$$|F|^2 = \frac{k^2Q^2\pi}{4(2\pi)^4}\frac{(1+\cos^2\theta)^2\operatorname{ctg}^2\theta/2}{q^2}. \tag{7.2.13}$$

На основании общей формулы для дифференциального сечения процесса, в котором участвуют лишь по одной реальной частице в начальном и конечном состояниях,

$$d\sigma = (2\pi)^2|F|^2q^2d\Omega, \tag{7.2.14}$$

легко получить окончательное выражение для сечения

$$d\sigma = \frac{\pi k^2Q^2}{8(2\pi)^2}(1+\cos^2\theta)^2\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}d\Omega, \tag{7.2.15}$$

где учтено усреднение по поляризациям падающих фотонов. Переходя к системе CGSE и пользуясь гравитационной постоянной Ньютона, записываем это сечение в эквивалентной форме:

$$d\sigma = \frac{\gamma Q^2}{2c^4}(1+\cos^2\theta)^2\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}d\Omega. \tag{7.2.16}$$

Это сечение оказывается очень большим, если брать макроскопические значения заряда. Однако такой подход является некорректным, так как при вычислениях источник классического поля предполагался *точечным*, и главный вклад дает очень сильное электрическое поле вблизи начала координат. Реальный эффект, конечно, оказывается много меньше.

Рассмотрим вопрос о реальных возможностях превращения фотонов в гравитоны, для простоты, на примере поля плоского конденсатора. В этом случае матричный элемент равен

$$F = -\frac{kE(\mathbf{q}-\mathbf{p})}{4(2\pi)^2}\overset{a}{e_{i1}}(\mathbf{p})e_i{}^\sigma(\mathbf{q}) \tag{7.2.17}$$

(направление поля выбрано по оси x). Квадрат модуля такого матричного элемента

$$|F|^2 = \frac{k^2|E(\mathbf{q}-\mathbf{p})|^2}{16(2\pi)^4}\left(1 - \frac{q_x{}^2}{q^2}\right)(1+\cos^2\theta) \tag{7.2.18}$$

показывает, что наиболее благоприятным условиям эксперимента соответствует $q_x = 0$; здесь θ — как и прежде, угол между направлениями распространения фотона и гравитона. Предполагая, что поле однородно, а пучок фотонов направлен перпендикулярно ему, можно проинтегрировать выражение $E(\mathbf{q}-\mathbf{p})$ по области, занимаемой этим полем (прямоугольный параллелепипед с гранями a, b и c). Мы получим тогда

$$|F|^2 = \frac{4k^2E^2}{(2\pi)^4q^6}\Big[\sin\frac{aq\sin\theta\cos\varphi}{2}\sin\frac{bq\sin\theta\sin\varphi}{2}\times$$
$$\times\sin\frac{cq(1-\cos\theta)}{2}(1-\cos\theta)^{-1}\sin^{-2}\theta\sin^{-1}\varphi\cos^{-1}\varphi\Big]^2. \qquad (7.2.19)$$

Подставляя это выражение в формулу (7.2.14), находим окончательное выражение для сечения (здесь оно приведено к системе CGSE):

$$d\sigma = \frac{4\varkappa E^2\hbar^4}{(2\pi)^2c^2q^4}\left\{\frac{\sin\dfrac{aq\sin\theta\cos\varphi}{2\hbar}\sin\dfrac{bq\sin\theta\sin\varphi}{2\hbar}\sin\dfrac{cq(1-\cos\theta)}{2\hbar}}{(1-\cos\theta)\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi}\right\}\times$$
$$\times(1+\cos^2\theta)\,d\Omega. \qquad (7.2.20)$$

Взяв теперь значения углов $\theta = \pi/2$ и $\varphi = \pi/2$, получим

$$d\sigma = \frac{2\varkappa E^2\hbar^2a^2}{(2\pi)^2c^2q^2}\sin^2\frac{bq}{2\hbar}\sin^2\frac{cq}{2\hbar}\,d\Omega, \qquad (7.2.21)$$

откуда видно, что для получения сечения порядка 10^{-30} *см*^{2} нужно взять напряженность поля, равную (a и λ в сантиметрах)

$$E = 10^{10}/a\lambda, \qquad (7.2.22)$$

где a — длина пути пучка фотонов в электростатическом поле, а λ — их длина волны (равная длине волны получаемых гравитонов, так как предполагается, что поле статическое и, следовательно, энергия сохраняется).

Последний случай — превращение фотонов в гравитоны в магнитном поле — имеет прямое отношение к астрофизике, так как в космическом пространстве в весьма обширных областях существуют магнитные поля. Несмотря на то, что их напряженность невелика, фотоны могут превращаться, проходя через них, в гравитоны с относительно большими вероятностями именно благодаря большой протяженности этих полей. Ориентировав магнитное поле по оси z, мы рассмотрим пучок фотонов, распространяющихся в направлении оси x; гравитоны же будем рассматривать (для простоты) лишь движущимися в направлении оси y. Иначе говоря,

$$q^\mu = (q, q, 0, 0) \qquad p^\mu = (q, 0, q, 0), \qquad (7.2.23)$$
$$F^{12} = -F^{21} = B \neq 0.$$

Тогда матричный элемент будет равен

$$F = \frac{kB(\mathbf{q}-\mathbf{p})}{4(2\pi)^2}\overset{a}{e_{11}}(\mathbf{p})\,e_2{}^\sigma(\mathbf{q}), \qquad (7.2.24)$$

а его квадрат имеет особенно простой вид

$$|F|^2 = \frac{k^2|B(\mathbf{q}-\mathbf{p})|^2}{16(2\pi)^4}. \qquad (7.2.25)$$

Фурье-образ B, фигурирующий в (7.2.25), легко вычислить; он равен

$$B(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -Bz\frac{4\sin\dfrac{qa}{2}\sin\dfrac{qb}{2}}{a^2}. \qquad (7.2.26)$$

Отсюда следует выражение для квадрата матричного элемента

$$|F|^2 = \frac{k^2B^2z^2}{(2\pi)^4q^4}\sin^2\frac{aq}{2}\sin^2\frac{bq}{2} \qquad (7.2.27)$$

и для дифференциального сечения

$$d\sigma = \frac{\varkappa B^2 \hbar^2 z^2}{(2\pi)^2 c^2 q^2} \sin^2 \frac{aq}{2} \cdot \sin^2 \frac{bq}{2} \cdot d\Omega \tag{7.2.28}$$

(в системе CGSM). Чтобы получить сечение процесса превращения фотона в гравитон в таком поле, равное 10^{-30} *см*^{2}, необходима напряженность магнитного поля порядка

$$B = 10^{10} / z\lambda. \tag{7.2.29}$$

Поскольку здесь за основу взято дифференциальное сечение лишь в направлении, перпендикулярном полю, и при поперечном «выходе» гравитонов, мы получили лишь ориентировочную оценку порядка величины эффекта. Взяв длинноволновые фотоны ($\lambda = 10^5$ *см*) и значительные протяженности однородного магнитного поля ($z = 10^{10}$ *см*), мы видим, что для получения указанной величины сечения достаточна напряженность поля в 10^{-5} *эрстед*.

Можно предполагать, что, если в космосе существуют потоки гравитационных волн, они должны подобным же образом превращаться в потоки электромагнитных волн, попадая в области с магнитным полем. Так как ветви галактик «изображают» магнитные силовые линии, то должно наблюдаться их «свечение», главным образом в длинноволновой области, за счет облучения свободными гравитационными волнами. В ядрах галактик, где магнитные поля могут быть значительно сильнее, а протяженность их достаточно велика, этот эффект может оказаться весьма сильным, так как его сечение возрастает пропорционально квадрату напряженности поля. Возможно также, что подобный эффект реализуется как побочный канал при действии «природного мазера» — явления, известного как «излучение мистериума» [1] в новейшей астрофизике. В этом случае речь идет о сравнительно сильных космических магнитных полях, устойчиво сосуществующих с пучками электромагнитного излучения большой интенсивности и взаимно обусловленных с ними. Можно ожидать, что космическому мазерному излучению линий гидроксильной группы должно сопутствовать гравитационное излучение, вызванное рассмотренным в этом параграфе механизмом.

7.3. О равенстве инертной и тяготеющей масс (квантовый вывод принципа эквивалентности Галилея — Этвёша — Эйнштейна)

В настоящее время принцип эквивалентности в общей теории относительности понимается по-разному [2]. Мы будем говорить здесь о той форме принципа эквивалентности, которая имеет, по мнению автора, наиболее глубокий смысл — о принципе эквивалентности Галилея — Этвёша — Эйнштейна, о равенстве (пропорциональности с универсальным коэффициентом) инертной и тяготеющей масс. Как известно, впервые факт такой пропорциональности был фактически установлен Галилеем, обнаружившим равенство ускорений для всех свободно падающих тел (в поле тяжести Земли). Дальнейшие опыты Этвёша и Дикке подтвердили наблюдения Галилея с чрезвычайно высокой степенью точности (точнее, чем до 10^{-11}). Таким образом, этот факт можно считать твердо установленным и требо-

---

[1] См. обзор Шкловского «Проблема мистериума» (1966, 1967).

[2] Обзор различных формулировок принципа эквивалентности можно найти в сб. «Гравитация и относительность» (1965), а также в монографиях Фока (1961) и Синга (1963), где дан детальный критический разбор аспекта принципа эквивалентности, относящегося к «лифту Эйнштейна».

вать, чтобы всякая теория, претендующая на свое признание и описывающая гравитацию, автоматически приводила к нему.

Говоря о квантовом выводе этого принципа эквивалентности, мы имеем в виду повторить квантово-полевыми методами тот вывод, который хорошо известен в «классической» общей теории относительности для пробных масс (уравнение геодезической), а также для тел конечной массы [проблема двух тел, рассмотренная в работах Эйнштейна — Инфельда — Гоффмана; см. также Гутман (1959); квантовый подход см. в статье Кимуры (1956)]. Принцип эквивалентности Галилея — Этвёша — Эйнштейна еще не был теоретически проанализирован с полевой точки зрения, и мы попытаемся восполнить этот пробел.

Так как в получаемых ниже результатах не фигурирует постоянная Планка $\hbar$, следует с необходимостью заключить, что полученный в этом параграфе вывод имеет универсальный классический смысл. Этот «вывод» нельзя считать чем-то неожиданным, так как квантовая теория при расчетах такого рода оперирует с функциями Грина, гарантирующими использование «правильных» решений уравнений поля. Эффект, который при этом изучается, в классическом пределе представляет собой отклонение от прямолинейного пути частицы, движущейся по инерции в поле тяжести большой массы. Следовательно, нужно считать совершенно естественным тот факт, что, исходя из лагранжиана взаимодействия гравитационного и других полей и пользуясь представлением частиц как плоских волн (в том числе описывая таким образом до предельного перехода и рассеивающую частицу, которая после перехода превращается в шварцшильдовский центр), мы получаем в пределе информацию о решении Шварцшильда.

Эффекты рассеяния на классических полях в определенных случаях могут быть получены как предельные случаи рассеяния частицы на частице, причем предельный переход состоит в стремлении массы одной из частиц к некоторому большому значению по сравнению с массой другой частицы; эта первая частица и «превращается» при этом в классический рассеивающий центр. В литературе такой предельный переход освещен крайне скупо; несколько слов об этом можно найти в монографии Боголюбова и Ширкова (1957, стр. 183), где, однако, по недоразумению указано, что классический предел получается при неограниченном увеличении интенсивности обычного квантованного поля — на самом деле, конечно, необходимо увеличивать не интенсивность, например, электрического поля (заряда частицы), а ее *инертность* (массу-энергию) по сравнению с инертностью ее остающегося квантовым партнера, чтобы получить (в данном примере) рассеяние на классическом кулоновском поле. Проверить это обстоятельство чрезвычайно просто.

Рассмотрим здесь подробно простой пример рассеяния двух скалярных частиц разных масс и затем приведем результаты расчетов также для других случаев. Итак, вводятся два скалярных поля, ψ и φ, кванты которых соответственно обладают массами покоя M и m. Лагранжианы взаимодействия этих полей с гравитацией имеют вид

$$\mathbf{L}_{\varphi} = \frac{k}{2}\left(\frac{m^2}{2}\varphi^2\delta_{\mu\nu} - \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}\right)y^{\mu\nu} \tag{7.3.1}$$

и

$$\mathbf{L}_{\psi} = \frac{k}{2}\left(\frac{M^2}{2}\psi^2\delta_{\mu\nu} - \psi_{,\mu}\psi_{,\nu}\right)y^{\mu\nu}. \tag{7.3.2}$$

Рассеяние квантов этих двух скалярных полей друг на друге через гравитационное поле является процессом по крайней мере второго порядка и описывается тогда диаграммой на рис. 7. Перемножая лагранжианы (7.3.1) и (7.3.2), производя спаривание по гравитационным переменным, а также выполняя интегрирование по 4-пространству (дважды, так как каждому лагранжиану соответствует отдельная точка), получаем

$$F\delta^{(4)}(p+q-r-s)=\frac{ik^2\delta^{\mu\nu,\lambda\rho}}{4(2\pi)^2}\frac{\delta^{(4)}(p+q-r-s)}{\sqrt{p_0q_0r_0s_0}\,(p-r)^2}\times$$

$$\times\left(\frac{m^2}{2}\delta_{\mu\nu}-p_\mu r_\nu\right)\left(\frac{M^2}{2}\delta_{\lambda\rho}-q_\lambda s_\rho\right). \tag{7.3.3}$$

Расчет можно проводить как в лабораторной системе (масса M покоится до столкновения), так и в системе центра масс.

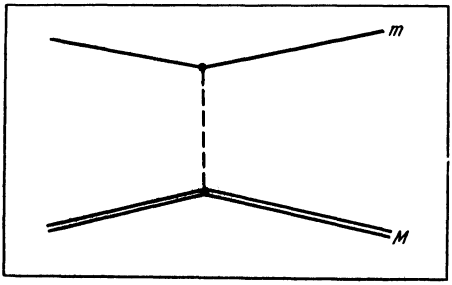


Рис. 7. Рассеяние частиц разных масс через виртуальный гравитон

Общая формула, по которой определяется сечение, имеет вид

$$d\sigma=\frac{(2\pi)^2pp_0|F|^2}{\left|\frac{\mathbf{r}}{r_0}-\frac{\mathbf{s}}{s_0}\right|\left|1+\frac{\partial q_0}{\partial p_0}\right|}d\Omega. \tag{7.3.4}$$

В лабораторной системе эта формула принимает вид

$$d\sigma_L=\frac{(2\pi)^2r_0p_0q_0p|F|^2}{r\left(r_0+M-\frac{p_0r}{p}\cos\theta\right)}d\Omega, \tag{7.3.5}$$

а в системе центра масс

$$d\sigma_C=\frac{(2\pi)^2p_0q_0r_0s_0p}{|s_0\mathbf{r}-r_0\mathbf{s}|\,(r_0+s_0)}|F|^2d\Omega, \tag{7.3.6}$$

так как в лабораторной системе

$$1+\frac{\partial q_0}{\partial p_0}=\frac{r_0+M}{q_0}-\frac{p_0r}{q_0p}\cos\theta, \tag{7.3.7}$$

а в системе центра масс

$$1+\frac{\partial q_0}{\partial p_0}=1+\frac{p_0}{q_0}=\frac{1}{q_0}(r_0+M). \tag{7.3.8}$$

Матричный элемент матрицы рассеяния в этих системах отсчета соответственно принимает вид

$$F_L=\frac{ik^2}{8(2\pi)^2}\frac{M^2(m^2-2p_0r_0)}{\sqrt{p_0r_0Mq_0}\,(pr\cos\theta+m^2-p_0r_0)} \tag{7.3.9}$$

и

$$F_C=\frac{ik^2}{16(2\pi)^2}\frac{m^2M^2+2p^2\left[m^2+M^2+2(p^2+p_0q_0)\cos^2\frac{\theta}{2}\right]}{p_0q_0p^2\sin^2\frac{\theta}{2}}, \tag{7.3.10}$$

так что дифференциальное сечение рассеяния друг на друге скалярных частиц с массами m и M через виртуальный квант гравитационного поля равно в лабораторной системе

$$d\sigma_L = \frac{M^2 k^4 p (m^2 - 2p_0 r_0)^2 d\Omega}{(16\pi)^2 r (m^2 - p_0 r_0 + pr\cos\theta)^2 \left(1 + \frac{r_0}{M} - \frac{p_0 r}{pM}\cos\theta\right)} \tag{7.3.11}$$

и в системе центра масс

$$d\sigma_C = \frac{M^4 k^4 \left\{m^2 + 2p^2 \left[1 + \frac{m^2}{M^2} + \frac{2}{M^2}(p^2 + p_0 q_0)\cos^2\frac{\theta}{2}\right]\right\}^2 d\Omega}{(32\pi)^2 \left|\frac{\mathbf{r}}{r_0} - \frac{\mathbf{s}}{s_0}\right| (r_0 + s_0) p_0 q_0 p^3 \sin^4\frac{\theta}{2}}. \tag{7.3.12}$$

Предельный переход, о котором мы говорили, соответствует принятию

$$M \gg r_0, m, \tag{7.3.13}$$

и в конечном итоге дает сечение рассеяния [ср. (7.1.14)]

$$d\sigma_L \to d\sigma_C \to \frac{k^4 M^2}{(16\pi)^2} \frac{\left(p_0^2 - \frac{m^2}{2}\right)^2}{p^4 \sin^4\frac{\theta}{2}} d\Omega, \tag{7.3.14}$$

одно и то же для принятых вначале разных систем отсчета, так как при сильном доминировании одной массы над другой бо́льшая масса как до, так и после столкновения оказывается (практически) покоящейся. При проведении такого предельного перехода удобно заранее учесть, что производная

$$\frac{\partial}{\partial p_0}(p_0 + q_0) = 1 + \frac{\partial q_0}{\partial p_0},$$

стоящая в выражении для сечения (7.3.4), стремится к единице.

Другой процесс такого же рода представляет собой рассеяние фотона на скалярной частице через виртуальный гравитон. В этом случае лагранжиан (7.3.1) следует комбинировать с лагранжианом взаимодействия электромагнитного и гравитационного полей:

$$\mathbf{L}_{\mathrm{em}} = -\frac{k}{4} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} y^{\omega\varepsilon} \delta^{\beta\nu} \left(\frac{1}{2}\delta_{\omega\varepsilon}\delta^{\alpha\mu} - 2\delta_\omega{}^\alpha \delta_\varepsilon{}^\mu\right). \tag{7.3.15}$$

Расчеты вполне аналогичны проведенным выше, следует лишь произвести усреднение по поляризации входящих фотонов и суммирование по поляризации рассеянных. Квадрат модуля матричного элемента матрицы рассеяния оказывается в этом случае равным

$$|F|^2 = \frac{2k^4}{16(2\pi)^4} \frac{m^2 [p_0(rs) - s_0(pr) - r_0(ps)]^2}{p_0 r_0 s_0 m (p-q)^4}, \tag{7.3.16}$$

или, иначе,

$$|F|^2 = \frac{8k^4 m^3 \operatorname{ctg}^4\frac{\theta}{2}}{16^2 (2\pi)^4 p_0 rs} \tag{7.3.17}$$

(использована лабораторная система, в которой скалярная частица до столкновения покоилась). Дифференциальное сечение этого процесса рассеяния равно

$$d\sigma = \frac{k^4 mr \operatorname{ctg}^4 \frac{\theta}{2} d\Omega}{(16\pi)^2 p_0 s\left(1 + \frac{r - s\cos\theta}{p_0}\right)}, \tag{7.3.18}$$

а предельный переход дает знакомое из § 7.1 сечение рассеяния фотона на поле Шварцшильда:

$$d\sigma \to \frac{k^4 m^2}{(16\pi)^2} \operatorname{ctg}^4 \frac{\theta}{2} d\Omega. \tag{7.3.19}$$

При этом, так как масса покоя фотона равна нулю, предел берется в смысле неравенства

$$m \gg s, r. \tag{7.3.20}$$

7.4. Фотон-гравитонные аннигиляции пар и обменный комптон-эффект

В этом параграфе мы рассмотрим эффекты, связанные с появлением свободных гравитонов при участии фермионных частиц. Расчеты этих эффектов были выполнены Ю. С. Владимировым (1963б). Прежде всего отметим три возможности аннигиляции пары частица — античастица: возможны двухфотонная, фотон-гравитонная и двухгравитонная аннигиляции (первый и третий случаи соответствуют суммарному спину системы, равному нулю; второй случай аналогичен трехфотонной аннигиляции и требует суммарного спина системы двух фермионов, равного единице).

Двухгравитонная аннигиляция (а также чисто гравитационный комптон-эффект) описывается графиками на рис. 9—11 (рис. 8 соответствует, очевидно, процессу двухфотонной аннигиляции пары). Соответствующая часть матрицы рассеяния записывается тогда в виде

$$S = i\int (dx)\mathbf{L}(x) - \frac{1}{2} T \int (dx)(dy)\mathbf{L}(x)\mathbf{L}(y), \tag{7.4.1}$$

где первое слагаемое соответствует рис. 10, а второе — двум другим графикам. Конкретизируя (7.4.1), матрицу рассеяния можно записать как

$$S = i\int (dx)\mathbf{L}_4(x) - \frac{1}{2} T\int (dx)(dy)[\mathbf{L}_{2a} + \mathbf{L}_{2b}]^2, \tag{7.4.2}$$

где взяты части лагранжиана взаимодействия фермионного и гравитационного полей $\mathbf{L}_{2a}$ и $\mathbf{L}_4$, соответственно линейные и квадратичные по гравитационным операторам, и лагранжиан взаимодействия гравитационного поля самого с собой (6.6.27) $\mathbf{L}_{2b}$, кубичный по этим операторам. В дальнейшем проводится хронологическое свертывание части входящих в (7.4.2)

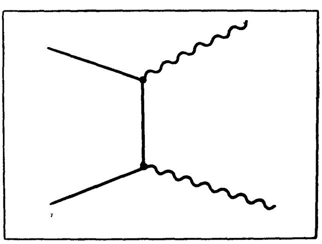


Рис. 8. Обычная двухфотонная диаграмма

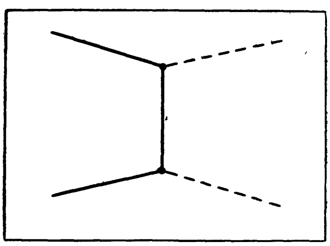


Рис. 9. Двухгравитонный аналог предыдущей диаграммы

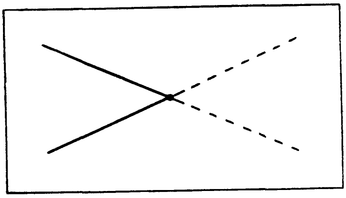


Рис. 10. Нелинейная двухгравитонная диаграмма для S-матрицы 1-го порядка

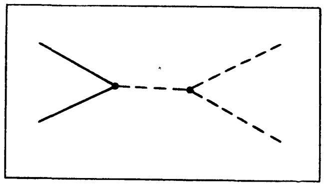


Рис. 11. Нелинейная двухгравитонная диаграмма для S-матрицы 2-го порядка

операторов, приводящее к тому, что свободными остаются лишь два фермионных и два гравитонных оператора. Все остальные члены, возникающие в полном выражении такого спаривания, автоматически обращаются в нуль при взятии матричного элемента и поэтому нас не интересуют.

Рассматривая двухгравитонную аннигиляцию пары (например, электрон-позитронной), мы должны выбрать начальную и конечную амплитуды состояния на основании (6.5.10), (6.5.11), (6.5.56) и (6.5.57), а также (6.7.4), (6.7.44), (6.7.86) и (6.7.96) в форме

$$\Phi_i = a_\sigma^{(+)}(\mathbf{p})\, a_\tau^{(+)*}(\mathbf{q})\, \Phi_{\mathrm{vac}}, \tag{7.4.3}$$

$$\overline{\Phi}_{\mathrm{f}} = \Phi_{\mathrm{vac}}^{+} \eta\, b_\omega^{(-)}(\mathbf{r})\, b_\varepsilon^{(-)}(\mathbf{s}). \tag{7.4.4}$$

Вычисления проводятся в системе центра масс частиц, т. е. когда

$$\begin{gathered} p_0 = q_0 = r_0 = s_0, \\ \mathbf{p} = -\mathbf{q};\ \ \mathbf{r} = -\mathbf{s}; \end{gathered} \tag{7.4.5}$$

Эти вычисления довольно громоздки и не содержат ничего нового [1], так что мы их здесь опускаем. Укажем лишь, что матричный элемент S-матрицы для указанных начального и конечного состояний оказывается равным (Владимиров, 1963б)

$$\overline{\Phi}_{\mathrm{f}} S \Phi_i = F_{\omega\varepsilon\sigma\tau}(rspq)\, \delta(p + q - r - s), \tag{7.4.6}$$

где

$$\begin{aligned} F_{\omega\varepsilon\sigma\tau}(rspq) = {} & \frac{ik^2}{32(2\pi)^2 (rp)(sp) p_0^3}\, \bar{v}_\sigma^{(-)}(\mathbf{p}) \times \\ & \times \{ - r_\alpha \gamma^\alpha \overset{\omega}{e}_{\mu\nu} \overset{\varepsilon}{e}_{\mu\nu} (pr)^2 (ps) - 2 r_\alpha \gamma^\alpha p_0^2 \overset{\omega}{e}_{\mu\alpha} \overset{\varepsilon}{e}_{\mu\beta} p^\alpha p^\beta (ps) + 2 p_0^2 (pr)(ps) \times \\ & \times \overset{\varepsilon}{e}_{\mu\alpha} \overset{\omega}{e}_{\mu\beta} \gamma^\alpha p^\beta + 4 p_0^2 (pr)(ps) \overset{\omega}{e}_{\mu\alpha} \overset{\varepsilon}{e}_{\mu\beta} \gamma^\alpha p^\beta - 4 p_0^4 \overset{\varepsilon}{e}_{\alpha\beta} r^\alpha \gamma^\beta \overset{\omega}{e}_{\mu\nu} p^\mu \gamma^\nu + \\ & + p_0^4 \overset{\varepsilon}{e}_{\mu\alpha} \overset{\omega}{e}_{\mu\beta} \gamma^\alpha p^\beta r_\nu \gamma^\nu (pr)(ps) + 2 p_0^4 e_{\mu\nu} p^\mu \gamma^\nu e_{\alpha\beta} p^\alpha \gamma^\beta r_\lambda \gamma^\lambda + \\ & + 4 p_0^2 m (pr)(ps) \overset{\omega}{e}_{\mu\nu} \overset{\varepsilon}{e}_{\mu\nu} \} v_\tau^{(-)}(\mathbf{q}). \end{aligned} \tag{7.4.7}$$

Взяв квадрат модуля этого матричного элемента, можно определить дифференциальное сечение рассеяния по формуле (см. § 6.Э):

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^2 k_0^3}{4p} \sum |F|^2 d\Omega. \tag{7.4.8}$$

[1] Аналогичные выкладки в применении к обычной двухфотонной аннигиляции можно найти, например, в монографии Боголюбова и Ширкова (1957), как и в любом курсе квантовой электродинамики.

Дальнейшие вычисления дают

$$d\sigma = \frac{k^4}{128(4\pi)^2 pp_0}\Big[p^2m^2\cos^2\theta + p^4\sin^2\theta +$$
$$+ 2p^4\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{1}{2}(m^2 - p^2\sin^2\theta)^2 - \frac{p^8\sin^8\theta}{(m^2+p^2\sin^2\theta)^2} +$$
$$+ \frac{3p^2m^4\cos^2\theta + m^2p^2(m^2-p^2\sin^2\theta)}{m^2+p^2\sin^2\theta}\Big]d\Omega. \qquad (7.4.9)$$

В нерелятивистском пределе, когда $k_0^2 \sim m^2 \gg p^2$, эта формула принимает вид

$$d\sigma_0 = \frac{m^2k^4}{(64\pi)^2}\frac{c}{v}d\Omega, \qquad (7.4.10)$$

так что получающиеся при аннигиляции гравитоны разлетаются в произвольных взаимно противоположных направлениях. Сечение в этом случае не зависит от энергии частиц.

В ультрарелятивистском пределе, когда $p^2 \sim k_0^2 \gg m^2$, получим, в свою очередь:

$$d\sigma_\infty = \frac{p_0^2k^4}{2(64\pi)^2}(3\sin^2 2\theta + 2\sin^4\theta)d\Omega, \qquad (7.4.11)$$

и при $\theta = 0$ дифференциальное сечение обращается в нуль, т. е. в направлениях движения исходных частиц гравитоны не вылетают; само сечение в ультрарелятивистском пределе квадратично по энергиям аннигилирующих частиц. Напомним, что при двухфотонной аннигиляции сечение обратно пропорционально квадрату энергии (включая ультрарелятивистский случай). Тогда отношение этих сечений будет равно

$$\frac{\sigma_{2g}}{\sigma_{2\gamma}} \approx \left(\frac{r_g}{r_{em}}\right)^2\left(\frac{p_0}{mc^2}\right)^4\left[\ln\frac{p_0}{mc^2}\right]^{-1}, \qquad (7.4.12)$$

где r_g и r_{em} — соответственно гравитационный и электромагнитный радиусы аннигилирующих частиц. Это отношение при энергиях

$$p_{0\,\text{кр}} \sim \sqrt{\frac{r_{em}}{r_g}}\,mc^2 \qquad (7.4.13)$$

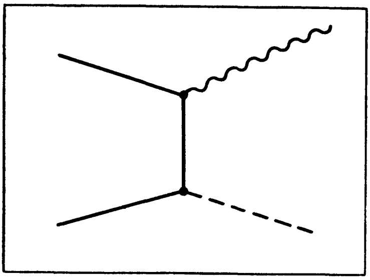
оказывается равным единице, а при больших энергиях двухгравитонная аннигиляция доминирует над двухфотонной. Однако это происходит при фантастических энергиях,

$$p_{0\,\text{кр}} \sim 10^{21}mc^2, \qquad (7.4.14)$$

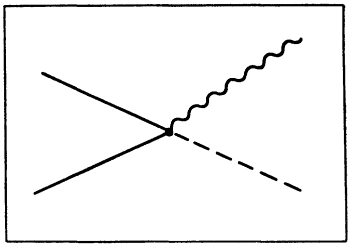
если рассматривать аннигиляцию электрон-позитронной пары; следует заметить, что в этих условиях нельзя говорить о применимости теории возмущений.

Очевидно, бо́льшие возможности для эксперимента должна представлять фотон-гравитонная аннигиляция пары (рис. 12—14), когда система обладает спином 1. При этом расчеты несколько проще, чем в предыдущем случае, и дают для дифференциального сечения выражение

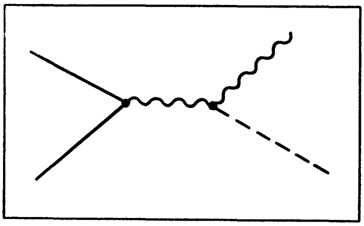
$$d\sigma = \frac{e^2k^2}{(16\pi)^2}\frac{p^3\sin^2\theta}{p_0(p_0^2-p^2\cos^2\theta)}\Big[1 + \sin^2\theta +$$
$$+ \frac{\sin^2\theta\,(p_0^2 - 2p^2\sin^2\theta)}{p_0^2-p^2\cos^2\theta}\Big]d\Omega. \qquad (7.4.15)$$



12



13



14

Рис. 12. Фотон-гравитонная диаграмма, аналог рис. 8 и 9

Рис. 13. Нелинейная фотон-гравитонная диаграмма для S-матрицы 1-го порядка

Рис. 14. Нелинейная фотон-гравитонная диаграмма для S-матрицы 2-го порядка

В нерелятивистском приближении ($p^2 \ll k_0^2 \sim m^2$) это сечение принимает вид

$$d\sigma_0 = \frac{e^2 k^2}{16(4\pi)^2} \sin^2\theta \, \frac{p^3}{p_0^3} \, (1 + 2\sin^2\theta) \, d\Omega, \tag{7.4.16}$$

откуда видно, что продукты аннигиляции летят поперек направления движения исходных компонент пары. В ультрарелятивистском же случае ($m^2 \ll p^2 \sim k^2$) получим

$$d\sigma_\infty = \frac{e^2 k^2}{(16\pi)^2} (1 + \cos^2\theta) \, d\Omega; \tag{8.4.17}$$

здесь отсутствует зависимость от энергии исходных частиц, а излучение преобладает в направлении их движения.

Интегральное сечение в этом последнем случае оказывается равным

$$\sigma_{\gamma g} = \frac{r_{\mathrm{em}} r_{\mathrm{g}}}{48\pi} \approx 0{,}3 \cdot 10^{-68} \ \textit{см}^2, \tag{7.4.18}$$

т. е. такое насыщение сечения происходит в области, крайне далекой от доступной наблюдениям.

Интересен тот факт, что все три сечения σ_{2g}, $\sigma_{g\gamma}$ и $\sigma_{2\gamma}$ становятся примерно равными при критической энергии (7.4.13), а при меньших энергиях сечение фотон-гравитонной аннигиляции оказывается больше сечения двухгравитонной аннигиляции.

Представляет интерес рассмотреть *обменный комптон-эффект*, при котором фотон, сталкиваясь с заряженной частицей, поглощается ею, а взамен испускается свободный гравитон. По константе гравитационного взаимодействия такой процесс относится к эффектам низшего возможного порядка наравне с эффектами, рассмотренными в начале этой главы. Он описывается теми же графиками, что и процесс фотон-гравитационной аннигиляции. Матричный элемент S-матрицы при этом равен

$$F = \frac{iek}{8(2\pi)^2\sqrt{r_0 s_0}} \bar{v}_\sigma^{(+)}(\mathbf{p}) \left\{ \frac{1}{(qr)(qs)} \cdot [-2(qr) \overset{\omega}{e}_{\mu\nu} q^\mu q^\nu e_\alpha{}^\varepsilon \gamma^\alpha + \right.$$

$$+ (qr) e_\alpha{}^\varepsilon \gamma^\alpha s_\beta \gamma^\beta \overset{\omega}{e}_{\mu\nu} q^\mu \gamma^\nu + 2(qs)(q^\nu + r^\nu) \overset{\omega}{e}_{\mu\nu} \gamma^\mu e_\alpha{}^\varepsilon q^\alpha +$$

$$+(qs)(q^\nu + r^\nu)e_{\mu\nu}\gamma^\mu e_\alpha{}^\varepsilon \gamma^\alpha r_\beta \gamma^\beta] - \frac{2}{(rs)}[r_\alpha \gamma^\alpha r^\beta \overset{\omega}{e}_{\beta\nu} e_\nu{}^\varepsilon -$$

$$- e_\alpha{}^\varepsilon \gamma^\alpha \overset{\omega}{e}_{\mu\nu} r^\mu r^\nu - \overset{\omega}{e}_{\alpha\beta} e_\mu{}^\varepsilon s^\mu r^\alpha \gamma^\beta] - 4\overset{\omega}{e}_{\alpha\beta} e_\beta{}^\varepsilon \gamma^\alpha \Big\} v_\tau^{(-)}(\mathbf{q}). \tag{7.4.19}$$

Можно показать (Владимиров, 1963а, б), что в обменном комптон-эффекте главную роль играют лишь первый и третий члены в первых квадратных скобках формулы (7.4.19), так что остальными членами можно пренебречь. Тогда сечение может быть приближенно представлено в виде

$$d\sigma \simeq \frac{e^2 k^2 p^6 \sin^4\theta \sin^2\varphi}{32(2\pi)^2 (E_2 - p\cos\theta) E_1} \frac{s_0}{r_0} \frac{(p(s-r))^2}{(pr)^2 (ps)^2} d\Omega. \tag{7.4.20}$$

В ультрарелятивистском пределе, когда $E \sim E_1 \sim E_2 \sim p_1 \sim p_2$ и $k_1 \approx k_2$ полное сечение оценивается как

$$\sigma \sim e^2 k^2 (E/k_1)^2. \tag{7.4.21}$$

Как отмечает Ю. С. Владимиров, этот эффект может привести к дополнительному излучению фотонов космическими объектами, движущимися поперек луча зрения для наблюдателя с Земли, так как в выражении для сечения (7.4.20) содержится множитель $\sin^4\theta$. Такое излучение вместе с радиальным допплеровским смещением спектральных линий более полно характеризовало бы скорость и направление движения космических объектов. Конечно, при этом предполагается, что в космосе существует некоторый поток гравитационного излучения, дающий такой «обратный» обменный комптон-эффект, в результате которого гравитоны превращаются в фотоны.

7.5. Дробление частиц нулевой массы покоя

Под дроблением частиц понимается самопроизвольное превращение одной частицы в несколько частиц того же «сорта». Рассмотрим случай, когда в результате получается три частицы (как исходная, так и конечные частицы являются свободными, т. е. на них не действуют никакие посторонние частицы или поля). Закон сохранения энергии и импульса требует тогда, чтобы

$$p^\mu = q^\mu + s^\mu + r^\mu. \tag{7.5.1}$$

Эти четыре уравнения могут иметь решение лишь в том случае, если наши частицы не обладают массами покоя, так как иначе релятивистская зависимость между энергией и импульсом

$$k^\mu k_\mu = m^2, \quad k = p, q, r, s, \tag{7.5.2}$$

сделает уравнения (7.5.1) несовместными. Если же $m_0 = 0$, то временны́е компоненты 4-импульсов равны модулям соответствующих 3-импульсов, и поэтому

$$\begin{aligned} p &= q + r + s, \\ \mathbf{p} &= \mathbf{q} + \mathbf{r} + \mathbf{s}. \end{aligned} \tag{7.5.3}$$

Эти уравнения, в свою очередь, имеют решение лишь при условии, что все пространственные импульсы *коллинеарны*, т. е. при дроблении продукты распада должны двигаться точно в том же направлении, в каком двигалась исходная частица.

Очевидно, что в обычной линейной электродинамике дробление фотонов должно быть только эффектом высшего порядка теории возмущений, и оно

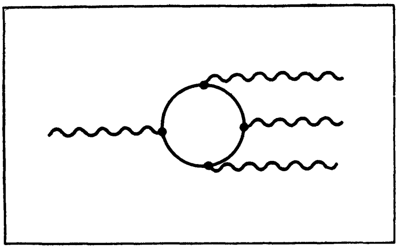


Рис. 15. Диаграмма процесса дробления фотонов, которая дает, однако, тождественно равный нулю эффект

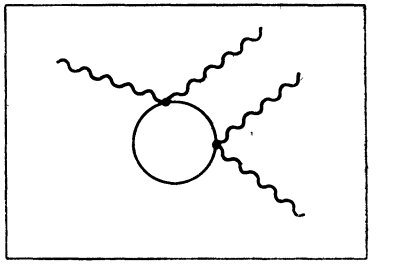


Рис. 16. Диаграмма, аналогичная предыдущей, но способная дать ненулевой эффект

должно тогда происходить за счет взаимодействия фотона с вакуумом других (заряженных) полей. Если рассматривать вакуум электронно-позитронного поля, то превращение одного фотона в три описывается такой же диаграммой, какой описывается и рассеяние света на свете (четвертый порядок теории возмущений). Подобный же эффект можно рассматривать и во втором порядке, если говорить о взаимодействии фотона с вакуумом гравитационного поля, и, наконец, в первом порядке, если воспользоваться нелинейной электродинамикой Эйлера — Гейзенберга — Швингера. Однако во всех этих подходах матричный элемент матрицы рассеяния может быть построен лишь двумя способами: либо в него входят 4-мерные скалярные произведения импульсов свободных частиц, либо — произведения этих импульсов на векторы поляризаций фотонов. В обоих случаях получается вклад, равный нулю, так как масса покоя фотона равна нулю, а вектор поляризации ортогонален импульсу. При этом важную роль играет факт коллинеарности импульсов всех реальных частиц, участвующих в процессе. Типичный график процесса четвертого порядка изображен на рис. 15.

Однако существует одна возможность получить отличное от нуля 4-мерное произведение: для этого нужно перемножить друг на друга векторы поляризации фотонов. В упомянутых выше процессах такая возможность не реализуется, так как для этого нужен лагранжиан взаимодействия, не содержащий производных от потенциалов полей. Но такой лагранжиан существует в случае, если рассматривается заряженное скалярное поле. Заменяя в его лагранжиане (§ 4.4) операцию дифференцирования обобщенным оператором

$$\partial / \partial x^{\mu} \to \partial / \partial x^{\mu} - ieA_{\mu}, \tag{7.5.4}$$

мы легко можем выделить лагранжиан, квадратичный по потенциалу электромагнитного поля:

$$\mathbf{L} = e^2 A_{\mu} A^{\mu} \varphi^* \varphi. \tag{7.5.5}$$

В квантовой теории ему соответствует вершина, в которой сходятся две фотонные и две мезонные линии. Комбинируя две такие вершины, как это показано на рис. 16, мы получаем интересующую нас диаграмму.

Взяв хронологическое произведение двух таких лагранжианов, зависящих от разных точек 4-пространства, и выполнив хронологическое спаривание скалярных функций, мы получим выражение для матрицы рассеяния второго порядка в виде

$$S_2 = + \frac{e^4}{2(2\pi)^8} \int A_{\mu}(x) A^{\mu}(x) A_{\nu}(y) A^{\nu}(y) \times$$
$$\times e^{i(k-l)(x-y)} (dx) \frac{(dy)\,(dk)\,(dl)}{(m^2 - k^2 - i\varepsilon)\,(m^2 - l^2 - i\varepsilon)}. \tag{7.5.6}$$

Амплитуды начального и конечного состояний берутся теперь в виде

$$\Phi_{p\sigma} = a_\sigma^{(+)}(\mathbf{p})\Phi_{\text{вак}} \tag{7.5.7}$$

и

$$\Phi^+_{q\tau r\omega s\varepsilon} = \Phi^+_{\text{вак}} a_\tau^{(-)}(\mathbf{q}) a_\omega^{(-)}(\mathbf{r}) a_\varepsilon^{(-)}(\mathbf{s}). \tag{7.5.8}$$

Дальнейшие выкладки достаточно просты, хотя и громоздки, и дают после вычисления матричного элемента и трехкратного интегрирования

$$\Phi^+ S_2 \Phi = \frac{e^4}{(2\pi)^6} \frac{\delta^{(4)}(p-q-r-s)}{\sqrt{pqrs}} \times$$
$$\times \int \frac{(dk)}{(m^2-k^2-i\varepsilon)} \left\{ \frac{\delta^{\sigma\tau}\delta^{\omega\varepsilon}}{m^2-(r+s+k)^2-i\varepsilon} + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta^{\tau\varepsilon}\delta^{\sigma\omega}}{m^2-(q+s+k)^2-i\varepsilon} + \frac{\delta^{\tau\omega}\delta^{\sigma\varepsilon}}{m^2-(q+r+k)^2-i\varepsilon} \right\}. \tag{7.5.9}$$

Рассмотрим первый интеграл,

$$J_a = \int (dk)\cdot(m^2-k^2-i\varepsilon)^{-1}\cdot(m^2-(r+s+k)^2-i\varepsilon)^{-1}, \tag{7.5.10}$$

и введем обозначение

$$a_\mu = r_\mu + s_\mu. \tag{7.5.11}$$

Интегрирование по временно́й компоненте k_0 легко проводится с помощью теоремы о вычетах и дает

$$J_a = J_1 + J_2, \tag{7.5.12}$$

где

$$J_1 = \frac{\pi^2 i}{a} \int \frac{k^2 dk \sin\theta\, d\theta}{k^2+m^2+k\sqrt{k^2+m^2}\cos\theta} \tag{7.5.13}$$

и

$$J_2 = \frac{\pi^2 i}{a} \int d\theta dk \sin\theta k^2 (k^2+a^2+2ka\cos\theta+m^2)^{-1/2} \times$$
$$\times (a + k\cos\theta + \sqrt{k^2+a^2+2ka\cos\theta+m^2})^{-1}. \tag{7.5.14}$$

Сначала рассмотрим здесь первый интеграл. После интегрирования по θ он приводится к простому виду

$$J_1 = \frac{\pi^2 i}{a} \int_0^\infty \frac{k\,dk}{\sqrt{k^2+m^2}} \ln \frac{\sqrt{k^2+m^2}+k}{\sqrt{k^2+m^2}-k}, \tag{7.5.15}$$

а при замене $x^2 = k^2+m^2$ переписывается как

$$J_1 = \frac{\pi^2 i}{a} \int dx \ln[(x+\sqrt{x^2-m^2})/(x-\sqrt{x^2-m^2})], \tag{7.5.16}$$

после чего легко берется по частям. Здесь, однако, возникает расходимость, хотя и довольно «слабая», так что приходится обрывать интегрирование на «максимальном импульсе» виртуальных мезонов $k = L$. Оставляя лишь главный член, получаем

$$J_1 = \frac{2\pi^2 i}{a} L \ln\frac{L}{m}. \tag{7.5.17}$$

Второй интеграл вызывает некоторые затруднения, так как после интегрирования по углу θ под знаком логарифма оказывается довольно сложное выражение. Однако, ограничиваясь главным членом в подынтегральном выражении, легко находим:

$$J_2 = \frac{\pi^2 i}{a} L \ln \frac{L}{m}. \tag{7.5.18}$$

Итак, матричный элемент процесса дробления фотона можно представить в виде

$$F = \frac{3ie^4 L \ln \frac{L}{m}}{4(2\pi)^4 \sqrt{pqrs}} \left(\frac{\delta^{\sigma\tau}\delta^{\omega\varepsilon}}{r+s} + \frac{\delta^{\sigma\omega}\delta^{\tau\varepsilon}}{q+s} + \frac{\delta^{\sigma\varepsilon}\delta^{\tau\omega}}{q+r} \right), \tag{7.5.19}$$

а его квадрат — в виде

$$|F|^2 = \frac{9e^8 L^2 \ln^2 \frac{L}{m}}{4(2\pi)^8 pqrs} \left(\frac{1}{(r+s)^2} + \frac{1}{(q+s)^2} + \frac{1}{(q+r)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(r+s)(q+s)} + \frac{1}{(r+s)(q+r)} + \frac{1}{(q+s)(q+r)} \right). \tag{7.5.20}$$

Число частиц, получающихся при дроблении фотонов в единице объема 4-пространства, записывается стандартным образом:

$$dN = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} |F|^2 \delta^{(4)}(p - q - r - s)\, d^3q\, d^3r\, d^3s, \tag{7.5.21}$$

или, после интегрирования по 3-импульсу $\mathbf{s}$:

$$dN = \frac{1}{4\pi} |F|^2 \delta(p_0 - q_0 - r_0 - s_0)\, d^3q\, d^3r. \tag{7.5.22}$$

Можно, однако, имея в виду формальное равенство

$$\int \delta(p_0 - q_0 - r_0 - s_0)\, dr = 1, \tag{7.5.23}$$

провести еще одно «интегрирование», получив

$$dN = \frac{1}{4\pi} |F|^2 d^3q\, r^2 d\Omega_r. \tag{7.5.24}$$

Все проделанные только что операции должны вызывать серьезные сомнения, так как они чисто формальны и фактически игнорируют факт коллинеарности импульсов всех частиц (7.5.3). Такая коллинеарность имеет несколько следствий: уже в (7.5.22) выражение, стоящее под знаком δ-функции, должно быть тождественно равно нулю за счет остальных компонент δ-функции при предыдущем интегрировании; импульсные объемы d^3q и d^3r должны равняться нулю (отсутствие фазового пространства!), так как рассеяние происходит строго в одном направлении. Ввиду этих обстоятельств требуется дальнейший анализ процесса дробления частиц, тем более, что с подобными ситуациями, иногда приходится сталкиваться в теории твердого тела (фононы), и там противоречия не возникают.

Процесс дробления квантов может иметь космологическое значение, как отметил Пийр (1957). Именно поэтому мы рассмотрели последний процесс, не включавший гравитационного поля. Дело в том, что дробление фотонов, если оно может происходить, должно приводить к уменьшению энергии отдельных квантов без какого-либо «размазывания» пучков, т. е. должно наблюдаться красное смещение, пропорциональное расстоянию до источника фотонов. Автор не склонен отказываться от существующих космологических объяснений наблюдаемого эффекта Хаббла (расширяющаяся Вселенная), но считает необходимым указать на возможные конкурирующие процессы, дающие вклад в этот эффект.

Здесь следует, однако, учесть то обстоятельство, что фотон, распространяющийся с фундаментальной скоростью 1, не должен «ощущать» течения времени, так как его «собственное» время постоянно. Этот аргумент несколько формален, так как можно построить релятивистски инвариантную теорию, в которой скорость самопроизвольного распада фотона будет зависеть от выбора системы отсчета соответственно тому, чему будет равен его импульс (частота) в этой системе. Такая самосогласованная теория, по-видимому, может показать, что этот «парадокс», в сущности, не ведет к противоречиям.

Заметим теперь, что дальнейшее интегрирование в (7.5.24) по q можно проводить лишь до максимального значения q, равного p; этот процесс обладает, однако, максимальной (даже расходящейся, если говорить формально) вероятностью, так что наиболее вероятным оказывается дробление с «выходом» чрезвычайно длинноволновых фотонов, т. е. при таком дроблении длина волны исходного кванта почти целиком передается одному из вторичных. Таким образом, происходит постепенное «таяние» фотона, как это и наблюдается в «космологическом» красном смещении.

7.6. Вакуумная нелинейность гравитационного поля

Работами Эйлера и Гейзенберга (1936) было положено начало рассмотрению квантовых эффектов высоких порядков в низших приближениях теории возмущений путем соответствующей модификации лагранжианов рассматриваемых полей — введению в них по соответствующим рецептам нелинейных членов. Позднее Швингер (1951) предложил более совершенный метод для определения вакуумных поправок к лагранжиану. Таким путем могут быть получены как перенормировочные добавки к старым лагранжианам, так и принципиально новые нелинейные члены.

Мы рассмотрим здесь как вывод вакуумного добавка к лагранжиану гравитации по методу Швингера, так и получение сечений рассеяния через виртуальные кванты других полей согласно теории матрицы рассеяния. Результаты обоих подходов в общем согласуются друг с другом. Заметим, что подобный вопрос, но для случая слабого гравитационного поля, без предположений о его медленном изменении от точки к точке, был рассмотрен Бродским и Иваненко (1952); мы не будем делать предположений при выводе нелинейных добавок к лагранжиану по методу Швингера относительно слабости поля (в смысле близости метрического тензора к галилеевым значениям), но предположим, что этот тензор весьма медленно меняется в пространстве и во времени.

Если взять скалярное поле (Мицкевич, 1959б) с лагранжианом

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \sqrt{-g}\, m^2\varphi^2\right), \tag{7.6.1}$$

то вариация его действия по гравитационному потенциалу может быть приведена к виду

$$\delta J = \frac{i}{2}\int (dx)\left\{\left[\delta g^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + m^2\delta\sqrt{-g}\right] D^c(x-y)\right\}_{x\to y}. \tag{7.6.2}$$

Вводя оператор

$$\vartheta = \sqrt{-g}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + m^2\right), \qquad (7.6.3)$$

где для удобства можно одно из дифференцирований брать по новым 4-координатам (y^μ), и тогда следует пользоваться двухточечной метрикой типа введенной ДеВиттом и Бримом (1959), мы можем переписать выражение (7.6.2) в символическом виде:

$$\delta J = \frac{i}{2}\int (dx)\left[\delta\vartheta\frac{\delta(x-y)}{\vartheta}\right]_{x\to y} = \frac{1}{2i}\delta\int\limits_0^\infty ds\, s^{-1}\operatorname{tr} e^{-is\vartheta}. \qquad (7.6.4)$$

Здесь учтено свойство гриниана

$$\vartheta_x D^c(x-y) = \delta(x-y). \qquad (7.6.5)$$

Напомним, что, в соответствии с выводами § 8.4, входящая в это определение δ-функция должна обладать свойствами скалярной плотности. Таким образом, необходимо ввести представление о свойствах скалярной плотности у матричных элементов типа

$$(x'|\exp(-is\vartheta)|x'') = (x(s)'|x(0)''), \qquad (7.6.6)$$

входящих на основании выражения для полного дифференциала (7.6.4) в вакуумный лагранжиан гравитационного поля

$$\mathbf{L}_{\text{vac}}(x) = -\frac{i}{2}\int\limits_0^\infty ds\, s^{-1}(x|\exp(-is\vartheta)|x). \qquad (7.6.7)$$

Для вычисления этого интеграла, следуя Швинегеру, можно использовать уравнения «механики»:

$$i\partial_s(x(s)'|x(0)'') = (x(s)'|\vartheta|x(0)''), \qquad (7.6.8)$$

$$-ig^{\mu\alpha}\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}(x(s)'|x(0)'') = (x(s)'|p^\mu(s)|x(0)''), \qquad (7.6.9)$$

$$ig^{\alpha\mu}\frac{\partial}{\partial x''^\alpha}(x(s)'|x(0)'') = (x(s)'|p^\mu(0)|x(0)''), \qquad (7.6.10)$$

где

$$p^\mu = -ig^{\alpha\mu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \qquad (7.6.11)$$

— оператор импульса. Здесь введена, таким образом, в рассмотрение фиктивная механическая задача о движении «материальной точки» с функцией Гамильтона ϑ; переменная s играет роль «собственного времени». Такое «время» должно обладать размерностью скалярного объема, в то время как «гамильтониан» ϑ является величиной типа скалярной плотности. Для решения уравнений (7.6.8)—(7.6.10) следует воспользоваться соотношениями

$$\frac{dx^\mu}{ds} = -2p^\mu\sqrt{-g} \qquad (7.6.12)$$

и

$$\frac{d}{ds}\left(g^{\alpha\mu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = i\left(2g^{\sigma\tau}g^{\alpha\mu}{}_{,\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\tau} + g^{\sigma\tau}g^{\alpha\mu}{}_{,\sigma\tau}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \right.$$

$$\left. - g^{\alpha\mu}g^{\sigma\tau}{}_{,}\frac{\partial^2}{\partial x^\sigma\partial x^\tau} - m^2 g^{\alpha\mu}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}\right). \qquad (7.6.13)$$

Ограничиваясь случаем медленно меняющегося гравитационного поля (в некотором смысле даже постоянного), мы замечаем сначала, что такое приближение не сможет привести к вакуумным добавкам, содержащим производные метрического тензора; а так как метод автоматически гарантирует общековариантный результат, то единственный отличный от нуля добавок может иметь смысл лишь космологического члена (с тем или иным знаком). Так как в выбранном приближении первая часть равенства (7.6.13) обращается в нуль, уравнение (7.6.12) легко интегрируется и дает

$$x^\mu(s) - x^\mu(0) = -2sp^\mu\sqrt{-g}. \tag{7.6.14}$$

Записывая «гамильтониан» в виде

$$\vartheta = -\frac{1}{4s^2\sqrt{-g}}[x(s)x(s) - 2x(s)x(0) + x(0)x(0) + 8is\sqrt{-g}] + m^2\sqrt{-g}, \tag{7.6.15}$$

где при раскрытии перестановочного соотношения $[x^\alpha(s), x^\beta(0)]$ вновь учтено равенство (7.6.14), можно привести основное уравнение (7.6.8) к виду

$$i\partial_s(x(s)'|x(0)'') = \left\{-\frac{s^{-2}}{4\sqrt{-g}}[(x'-x'')^2 + 8is\sqrt{-g}] + \right.$$

$$\left. + m^2\sqrt{-g}\right\}\cdot(x(s)'|x(0)''). \tag{7.6.16}$$

Его решение можно записать в виде

$$(x(s)'|x(0)'') = Cs^{-2}\exp\left[-\frac{i(x'-x'')^2}{4s\sqrt{-g}} - ims\sqrt{-g}\right]. \tag{7.6.17}$$

На основании уравнений (7.6.9) и (7.6.10), переписанных в приближении постоянного поля, заключаем, что величина C постоянна. Значение этой константы просто определить из очевидного предельного значения функции преобразования:

$$(x(s)'|x(0)'')|_{s\to 0} = \delta(x'-x''). \tag{7.6.18}$$

Окончательный вид функции преобразования таков:

$$(x(s)'|x(0)'') = -\frac{is^{-2}}{4\pi^2\sqrt{-g}}\exp\left[-\frac{i(x'-x'')^2}{4s\sqrt{-g}} - ims\sqrt{-g}\right]; \tag{7.6.19}$$

поэтому вакуумный лагранжиан гравитационного поля окончательно оказывается равным

$$\mathbf{L}_{\text{vac}} = -\frac{\sqrt{-g}}{32\pi^2}\int_{\tau_0}^{\infty} d\tau\tau^{-3}e^{-m^2\tau} = -\frac{\sqrt{-g}}{64\pi^2}[e^{-m^2\tau_0}\times$$

$$\times(\tau_0^{-2} - m^2\tau_0^{-1} - m^4\ln\tau_0) - m^2(0{,}58 + \ln m^2)], \tag{7.6.20}$$

где вследствие расходимости пришлось оборвать интегрирование на некотором минимальном собственном времени $\tau_0 = s_0\sqrt{-g}$. Так как знак полученной величины совпадает с обычно выбираемым знаком космологической постоянной Эйнштейна, то из результата (7.6.20) следует значение космологической постоянной вакуумного происхождения

$$\Lambda_{\text{vac}} = \frac{1}{128\pi^2\tau_0^2}, \tag{7.6.21}$$

которое здесь для простоты приведено для случая $m = 0$.

Подобный же расчет был проведен в случае учета вакуума электромагнитного поля (Мицкевич, 1959в). Электромагнитный лагранжиан для простоты брался в виде

$$\mathrm{L} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} A_{\alpha;\mu} A^{\alpha}{}_{;\nu}, \tag{7.6.22}$$

и вычисления, вполне аналогичные только что проведенным, дали для вакуумного лагранжиана гравитационного поля выражение

$$\mathrm{L}_{\mathrm{vac}} = \frac{\sqrt{-g}}{8\pi^2} \int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \cdot \tau^{-3} = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi^2} \tau_0^{-2}, \tag{7.6.23}$$

откуда следует величина космологической постоянной вакуумного электромагнитного происхождения

$$\Lambda_{\mathrm{vac}} = \frac{1}{32\pi^2 \tau_0^2}. \tag{7.6.24}$$

Полученные вакуумные добавки к лагранжиану гравитационного поля приводят в уравнениях гравитации лишь к линейным относительно метрического тензора поправкам; однако линейность является кажущейся, ибо как $g_{\mu\nu}$, так и входящий в лагранжиан множитель $\sqrt{-g}$ разлагаются в бесконечные ряды по степеням константы k, и соответствующие члены разложения содержат произведения все возрастающего числа гравитационных переменных.

Как мы видели в § 7.1, массовый член должен сказываться на рассеянии частиц полем Шварцшильда. Ввиду того обстоятельства, что космологический член до некоторой степени аналогичен массовому члену в уравнении Клейна — Гордона [критику такой его интерпретации можно найти у Гекманна (1942) и Мицкевича (1962а)], можно заключить, что из добавков (7.6.20) и (7.6.23) следует дополнительный вакуумный нелинейный эффект при рассеянии гравитонов. Здесь, однако, возникают существенные трудности, в основном сводящиеся к тому, что представление взаимодействия, обычно предполагая выключение нелинейности в уравнениях гравитации (как и всякого взаимодействия вообще), опирается на теорию слабого поля, которое несовместимо с точной классической картиной при наличии космологического добавка (слабое поле должно быть слабым *сразу повсюду*). Мы не будем поэтому настаивать на полной последовательности этих рассуждений, считая их лишь эвристической догадкой, которая поможет при вычислении последующих эффектов. Именно, мы будем добавлять при этих расчетах в гриниан гравитационного поля эффективную массу гравитона μ. Такой шаг не может, конечно, разрешить указанных противоречий, но будет полезен с практической точки зрения.

Простейшие процессы рассеяния гравитона на статическом поле Шварцшильда через посредство виртуальных квантов скалярного поля описываются матрицей рассеяния третьего порядка

$$S_3 = -T\left(AB + \frac{i}{6} A^3 + \frac{i}{2} A^2 C\right). \tag{7.6.25}$$

Через A и B здесь обозначены интегралы по 4-мерному объему соответственно от членов, пропорциональных k и k^2 в лагранжиане скалярного поля, а C — такой же интеграл от члена, пропорционального k в лагранжиане взаимодействия гравитонов с гравитонами.

Для простоты вычислим сначала полный матричный элемент в случае нулевой массы покоя скалярных квантов ($B = 0$). Тогда

$$(S_3)_0 = -\frac{i}{2} T\left(\frac{1}{3} A^3 + A^2 C\right). \tag{7.6.26}$$

Второе хронологическое произведение записывается как

$$T\left(\mathbf{L}_{\mathrm{sc}}^{\mathrm{int}}(x)\,\mathbf{L}_{\mathrm{sc}}^{\mathrm{int}}(y)\,\mathbf{L}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{int}}(z)\right)=$$

$$=-k^2\frac{\partial^2 D_0^c(x-y)}{\partial x^\mu \partial x^\alpha}\,\frac{\partial^2 D_0^c(x-y)}{\partial x^\nu \partial x^\beta}:y^{\mu\nu}(x)\,\overline{y^{\alpha\beta}(y)\,\mathbf{L}}{}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{int}}(z):, \tag{7.6.27}$$

где оставлены лишь члены, дающие ненулевые вклады в матричный элемент и не указана операция интегрирования. При учете уравнений нулевого порядка для гравитации, спаривание в (7.6.27) можно привести к простому виду:

$$\begin{aligned}
\overline{y^{\alpha\beta}(y)\,\mathbf{L}}{}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{int}}(z) &= -ik\Bigg\{\frac{\partial^2 D^c(y-z)}{\partial z^\eta \partial z^\zeta}\Big[y^{\alpha\beta}y^{\eta\zeta}-\frac{1}{2}yy^{\eta\zeta}\delta^{\alpha\beta}-\\
&-y^{\alpha\tau}y_\tau{}^\beta\delta^{\eta\zeta}+\frac{1}{2}y^{\sigma\tau}y_{\sigma\tau}\delta^{\alpha\beta}\delta^{\eta\zeta}\Big]+\frac{\partial D^c(y-z)}{\partial z^\eta}\Big[y^{\eta\sigma}y^{\alpha\beta}{}_{,\sigma}-y^{\eta\sigma}y_{,\sigma}\delta^{\alpha\beta}-\\
&-y_\sigma{}^\alpha y^{\sigma\eta}{}_{,\varkappa}\delta^\beta-y_\sigma{}^\beta y^{\sigma\eta}{}_{,\zeta}\delta^{\alpha\zeta}+y_\sigma{}^\tau y^{\sigma\eta}{}_{,\tau}\delta^{\alpha\beta}-y_\sigma{}^\alpha y^{\beta\sigma}{}_{,\zeta}\delta^{\eta\zeta}-y_\sigma{}^\beta y^{\sigma\alpha}{}_{,\zeta}\delta^{\eta\zeta}-\\
&-\frac{1}{2}y^{\alpha\beta}y_{,\zeta}\delta^{\eta\zeta}+\frac{1}{4}yy_{,\zeta}\delta^{\alpha\beta}\delta^{\eta\zeta}+\frac{3}{2}y^{\sigma\tau}y_{\sigma\tau,\zeta}\delta^{\alpha\beta}\delta^{\eta\zeta}\Big]+\\
&+D^c(y-z)\Big[y^{\eta\zeta}y^{\alpha\beta}{}_{,\eta\zeta}-\frac{1}{2}y^{\eta\zeta}y_{,\eta\zeta}\delta^{\alpha\beta}+y^{\sigma\tau}y_{\sigma\tau,\eta\zeta}\delta^{\eta\zeta}\delta^{\alpha\beta}+\\
&+\frac{1}{4}y_{,\sigma}y_{,\tau}\delta^{\alpha\sigma}\delta^{\beta\tau}+\frac{1}{8}y_{,\sigma}y_{,\tau}\delta^{\sigma\tau}\delta^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}y^{\sigma\tau}{}_{,\eta}y_{\sigma\tau,\zeta}\delta^{\alpha\eta}\delta^{\beta\zeta}+\\
&+\frac{1}{4}y^{\sigma\tau}{}_{,\eta}y_{\sigma\tau,\zeta}\delta^{\eta\zeta}\delta^{\alpha\beta}-y^{\alpha\sigma}{}_{,\tau}y^{\beta\tau}{}_{,\sigma}+\frac{1}{2}y^{\sigma\tau}{}_{,\eta}y^{\eta}_{\sigma,\tau}\delta^{\alpha\beta}-\\
&-y^{\sigma\alpha}{}_{,\eta}y^{\beta}_{\sigma,\zeta}\delta^{\eta\zeta}-\frac{1}{2}y^{\alpha\beta}{}_{,\eta}y_{,\zeta}\delta^{\eta\zeta}\Big]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{7.6.28}$$

(величины в квадратных скобках зависят только от z). Теперь берется матричный элемент от величины (7.6.27) между состояниями, в каждом из которых находится по одному свободному гравитону, и трижды интегрируется по всему 4-пространству. После довольно громоздких вычислений получаем:

$$\begin{aligned}
&\int (dx)(dy)(dz)\,\Phi_f^+\mathbf{L}_{\mathrm{sc}}^{\mathrm{int}}(x)\,\mathbf{L}_{\mathrm{sc}}^{\mathrm{int}}(y)\,\mathbf{L}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{int}}(z)\,\Phi_i=\\
&=\frac{k^4M}{4(2\pi)^6}\,\frac{\delta(k_0-k_0')}{k_0(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2}\int\frac{(dl)(dm)\,l_0^2l_\alpha l_\beta}{(l^2+i\varepsilon)(m^2+i\varepsilon)((l+m)^2-\mu^2+i\varepsilon)}\times\\
&\times\Big\{\Big[\Big(k'^\alpha k'^\beta+k^\alpha k^\beta-k^\alpha k'^\beta+\frac{1}{2}k_\sigma k'^\sigma\delta^{\alpha\beta}\Big)\overset{a}{e}_{\mu\nu}\overset{\prime b}{e}_{\lambda\rho}\delta^{\mu\lambda}\delta^{\nu\rho}+\\
&+2k_\sigma k'^\sigma\overset{a}{e}_{\mu\nu}\overset{\prime b}{e}_{\lambda\rho}\delta^{\mu\lambda}\delta^{\nu\alpha}\delta^{\rho\beta}\Big]\,\delta^{(4)}(l+m-k+k')-\\
&-k_0^2l^\mu l^\nu l^\alpha l^\beta\,\overset{a}{e}_{\mu\nu}\overset{\prime t}{e}_{\alpha\beta}\big[\delta^{(4)}(l+m+k)+\delta^{(4)}(l+m-k')\big]\Big\}.
\end{aligned} \tag{7.6.29}$$

В этом матричном элементе бросается в глаза необычный тип расходимости двух последних членов, возникающей ввиду присутствия в них функций типа $\delta^{(4)}(l+m\pm k)$: происходит тождественное обращение в нуль знаменателя. Отметим, вместе с тем, что именно эти члены [как и член A^3 в (7.6.25)] дают несохранение спина в виртуальных состояниях.

Первое хронологическое произведение в матрице (7.6.26) легко приводится к виду

$$T(A^3) = -\frac{3ik^4M}{2(2\pi)^9}\frac{\delta(k_0-k_0')}{k_0(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2}\times$$

$$\times\int\frac{(dl)\,l_0^2 l^\alpha l^\beta l^\sigma l^\tau\, \overset{a}{e}_{\alpha\beta}\, \overset{\prime b}{e}_{\sigma\tau}}{(l^2+i\varepsilon)\,((l-k)^2+i\varepsilon)\,((l-k+k')^2+i\varepsilon}. \tag{7.6.30}$$

Соответствующий график также дает несохранение спина в виртуальных состояниях; из всех выражений, не дающих такого сохранения, мы приведем в проинтегрированном виде лишь это последнее. Выделим из (7.6.30) интеграл

$$J^{\alpha\beta\sigma\tau} = \int\frac{(dl)\,l_0^2 l^\alpha l^\beta l^\sigma l^\tau}{(l^2+i\varepsilon)^2((l-k)^2+i\varepsilon)} \qquad \alpha,\beta,\sigma,\tau = 1,2 \tag{7.6.31}$$

(берется его предельное значение при $\mathbf{k}\to\mathbf{k}'$). Тогда, полагая

$$J = 2\pi\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{l_0^2\rho^5\,d\rho\,dl_3\,dl_0}{(l_0^2-\rho^2-l_3^2+i\varepsilon)^2(l_0^2+2k_0l_0-\rho^2-l_3^2-2kl_3+i\varepsilon)} \tag{7.6.32}$$

из соображений симметрии в цилиндрических координатах можно записать

$$\begin{gathered} J^{1111} = J^{2222} = \frac{3}{8}J, \\ J^{1122} = J^{2211} = J^{1212} = J^{2121} = \frac{1}{8}J. \end{gathered} \tag{7.6.33}$$

Все остальные компоненты обращаются в нуль. Первоначально интегрирование проводится с помощью теоремы о вычетах. Так как интеграл расходится при больших импульсах, мы будем его обрывать на некотором максимальном импульсе L. Вычисления дают

$$J = \frac{\pi^2 i}{2\mu^3}\left[-\frac{\pi k}{6}L^6 + \frac{\pi k^2}{5}L^5 + \frac{\mu^3}{4}L^4 - \frac{2k_0^2+\mu^2}{12}\mu^3L^2 + \frac{12k_0^2+11\mu^2}{450}\mu^5 + \right.$$
$$\left. + \frac{4k_0^2+\mu^2}{30}\mu^5\ln\,(L^2+\mu^2) - \frac{4k_0^2+\mu^2}{15}\mu^5\ln\mu\right]. \tag{7.6.34}$$

Для оценки эффективного сечения мы ограничимся лишь той частью матрицы рассеяния, которая отвечает процессам, проходящим с сохранением спина в промежуточных состояниях. Тогда, при $\mathbf{k}\approx\mathbf{k}'$ рассматриваемая часть матричного элемента равна

$$-\frac{i}{2}T(A^2C) = \frac{k^4M}{48(2\pi)^4}\frac{\delta(k_0-k_0')}{k_0(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2}\frac{k^2+\frac{3}{4}\mu^2}{(k-k')^2-\mu^2}\times$$

$$\times\, L^4\overset{a}{e}_{\mu\nu}\overset{b}{e}_{\alpha\beta}\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta}. \tag{7.6.35}$$

Рассмотрим случай ненулевой массы покоя скалярных частиц и вычислим типичный для него элемент S-матрицы:

$$T(AB) = k^3m^2\int T\left[:\left(\frac{m^2}{4}y(x)\varphi^2(x) - \frac{1}{2}y^{\mu\nu}(x)\varphi_{,\mu}^{(x)}\ \varphi_{,\nu}(x)\right):\times\right.$$

$$\times :\varphi^2(y)\left(\frac{1}{8}y^{\mu\nu}(y)y_{\mu\nu}(y)-\frac{1}{16}y(y)y(y)\right):\Big]\,(dx)\,(dy)=$$

$$=-\frac{k^4m^2M}{8(2\pi)^6}\frac{\delta(k_0-k_0')}{k_0(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2}\int\frac{(dl)\left(l_0^2+\frac{m^2}{2}\right)}{(m^2-l^2-i\varepsilon)\,(m^2-(l+k-k')^2-i\varepsilon)}\times$$

$$\times\, e^{\alpha}_{\mu\nu}e'^{b}_{\alpha\beta}\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta}. \qquad (7.6.36)$$

При этом, в отличие от предыдущих случаев, автоматически обращаются в нуль члены, соответствующие графикам с несохранением спина в виртуальных состояниях. Вновь, полагая в подынтегральном выражении $\mathbf{k}\approx\mathbf{k}'$ и обрывая интеграл на максимальном импульсе L, получаем

$$T(AB)=\frac{im^2k^4M}{32(2\pi)^4}\frac{\delta(k_0-k_0')}{k_0(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2}L^2\,e^{\alpha}_{\mu\nu}\,e'^{b}_{\alpha\beta}\,\delta^{\mu\alpha}\,\delta^{\nu\beta}. \qquad (7.6.37)$$

Для более наглядного сравнения полученных результатов и выводов, сделанных выше относительно эффекта прямого рассеяния частиц на поле Шварцшильда (§ 7.1), вычислим теперь эффективные сечения рассматриваемых процессов. Обозначая, как обычно, через θ угол между исходным и конечным направлениями распространения гравитона, получаем для матричного элемента (7.6.35):

$$d\sigma=\frac{4k^8M^2L^3}{3(8\pi)^6}\left\{\frac{\mu^2+\frac{4}{3}k^2}{\mu^2+4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right\}^2\frac{d\Omega}{k^4\sin^4\frac{\theta}{2}}, \qquad (7.6.38)$$

а для элемента (7.6.37) —

$$d\sigma=\frac{4k^8M^2m^4L^4}{(8\pi)^6}\frac{d\Omega}{k^4\sin^4{}^{\theta}/_2}. \qquad (7.6.39)$$

Здесь, как всегда, произведено усреднение по поляризациям гравитонов в начальном состоянии и суммирование по поляризациям гравитонов — в конечном. В этих формулах мы сохранили введенную выше эффективную вакуумную «массу» гравитона.

Прежде всего отметим, что угловая зависимость полученных сечений при малых углах θ аналогична зависимости, типичной для сечений прямого рассеяния частиц на поле Шварцшильда. Поэтому в принципе возможно сравнение этих эффектов.

Заметим теперь, что сечения (7.6.38) и (7.6.39) расходятся при малых импульсах гравитонов. Таким образом, в области больших длин волн они доминируют над эффектом, обязанным классической нелинейности. Критическая длина волны, при которой оба эффекта становятся равны, конечно, зависит от максимального импульса и тем меньше, чем больше L:

$$\lambda_{\text{кр}}=2\pi\hbar\sqrt{\frac{\sqrt{3}\,4\pi^2\hbar c}{k^2L^4}-\frac{4}{3\mu^2c^2}} \qquad (7.6.40)$$

для сечения (7.6.38) в пределе $\theta\to 0$; тогда классическая нелинейность будет сказываться вообще слабее, чем квантовая, если

$$\mu^2<\frac{\sqrt{3}}{\pi^2}10^{-31}L^4\,г^2. \qquad (7.6.41)$$

В случае сечения (7.6.39)

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{8\pi^2\hbar}{kmL}\sqrt{\frac{\hbar}{c}}. \tag{7.6.42}$$

Для удобства здесь используется система CGS.

Обратим внимание на то обстоятельство, что расходимость сечений рассеяния на поле Шварцшильда при малых импульсах является характерным свойством всех частиц с ненулевой массой покоя (§ 7.1). Это соображение ввиду аналогичной расходимости сечений (7.6.38) и (7.6.39) согласуется с выводами, касавшимися космологического члена вакуумного происхождения, и, в частности, с введением эффективной «массы» гравитона μ. Эту массу можно непосредственно оценить путем сравнения полученных здесь сечений, скажем, с сечением рассеяния спинорных частиц на поле Шварцшильда. Такое сравнение удобно произвести в пределе малых углов θ. Тогда для рассеяния через виртуальные скалярные частицы без массы покоя получим

$$\mu = \frac{kL^2}{\sqrt[4]{3}\,4\pi c\sqrt{\hbar c}} \approx 3\cdot 10^{-17} L^2\ г \tag{7.6.43}$$

и через виртуальные мезоны ($m \neq 0$) —

$$\mu = \frac{kmL}{4\pi\sqrt{\hbar c}} \approx 10^{-6} mL\ г. \tag{7.6.44}$$

Оценивая импульс мезона по радиусу нуклона, получаем для массы гравитона в обоих случаях величину, меньшую 10^{-40} *г*. В этом случае вакуумная нелинейность в гравитационном поле должна сказываться лишь при весьма значительных длинах волн гравитонов. С другой стороны, определяя «массу» гравитона через посредство космологической постоянной (7.6.21), получаем

$$\mu = \hbar/8\pi c^2\tau_0. \tag{7.6.45}$$

Необходимо подчеркнуть, что проведенное обрывание интегралов, строго говоря, незаконно, и дает лишь грубую оценку того эффекта, который должен существовать в действительности, так как расходимость этих интегралов является весьма сильной, и они чувствительны к выбору предела обрезания. Возможно, что при больших импульсах следует учесть (в духе теории Гейзенберга) переход состояний в нефизическую область (расщепление гильбертова пространства), что влечет за собой своеобразную регуляризацию теории. Однако эти вопросы выходят за рамки данной книги и всецело относятся к области квантовой теории поля.

8. НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

8.1. Сводка основных соотношений тензорного анализа

Для удобства читателей мы приведем здесь определения некоторых основных величин тензорного исчисления и соотношения, которым они подчиняются.

В начале локально геодезической системы координат метрический тензор можно представить в виде таблицы

$$(g_{\mu\nu})_0 = (\delta_{\mu\nu}) \overset{\mathrm{Def}}{=} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}. \tag{8.1.1}$$

Дифференциал его детерминанта равен

$$dg = gg^{\mu\nu}dg_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}dg^{\mu\nu}, \tag{8.1.2}$$

где контравариантный метрический тензор может быть определен как

$$g^{\mu\nu} = \frac{\partial \ln|g|}{\partial g_{\mu\nu}}. \tag{8.1.3}$$

При этом компоненты смешанной вариантности метрического тензора образуют символ Кронекера:

$$(g_{\mu}^{\nu}) \equiv (\delta_{\mu}^{\nu}) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{8.1.4}$$

(в любой системе координат).

Обозначая частную производную с помощью запятой перед соответствующим индексом,

$$A_{B,\mu} = \frac{\partial A_B}{\partial x^\mu}, \tag{8.1.5}$$

определим символы Кристоффеля II рода как

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}(g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}). \tag{8.1.6}$$

Свернув символ Кристоффеля по двум индексам, получим

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ln \sqrt{-g}. \tag{8.1.7}$$

В свою очередь,

$$(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu})_{,\nu} = -\sqrt{-g}\, \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} g^{\alpha\beta}. \tag{8.1.8}$$

Символы Кристоффеля служат для определения ковариантных производных, обозначаемых с помощью точки с запятой перед соответствующим индексом:

$$A_{B;\,\mu} = A_{B,\,\mu} + a_B \Big|_{\sigma}^{\tau} \Gamma_{\tau\mu}^{\sigma}. \tag{8.1.9}$$

Здесь использованы коэффициенты преобразования величин A_B (в их число могут входить любые тензоры и тензорные плотности)

$$\delta A_B = A_B'(x') - A_B(x) = a_B \Big|_{\tau}^{\sigma} \xi^{\sigma}_{,\tau} \tag{8.1.10}$$

при инфинитезимальных преобразованиях координат [1]

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}. \tag{8.1.11}$$

Альтернирование ковариантных производных приводит к тензору кривизны Римана — Кристоффеля:

$$A_{B;\,\mu;\,\nu} - A_{B;\,\nu;\,\mu} = -a_B \Big|_{\sigma}^{\tau} R^{\sigma}_{\cdot\,\tau\mu\nu}, \tag{8.1.12}$$

причем

$$R^{\alpha}_{\cdot\,\mu\nu\lambda} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}. \tag{8.1.13}$$

Свертка этого тензора является тензором кривизны Риччи,

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\cdot\,\mu\nu\alpha} = R_{\nu\mu}, \tag{8.1.14}$$

а последующая свертка приводит к скалярной кривизне

$$R = R_{\nu}^{\nu}. \tag{8.1.15}$$

Тензор Римана — Кристоффеля, благодаря своим алгебраическим свойствам

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = -R_{\nu\mu\lambda\rho} = -R_{\mu\nu\rho\lambda} = +R_{\lambda\rho\mu\nu} \tag{8.1.16}$$

и

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma} = 0, \tag{8.1.17}$$

обладает лишь 20 независимыми и отличными от нуля компонентами (в 4-мерном мире). Кроме того, он подчиняется дифференциальным тождествам Бианки

$$R_{\tau\mu\nu\lambda;\,\rho}\cdot E^{\nu\lambda\rho\sigma} = 0. \tag{8.1.18}$$

Сформулируем также *критерий тензорных свойств* в достаточно общем виде. Пусть имеется равенство

$$M_{BC}N^{C} = P_B, \tag{8.1.19}$$

где величины N и P преобразуются по законам

$$\delta P_B = P_E \cdot p_{B}^{E} \Big|_{\sigma}^{\tau} \cdot \xi^{\sigma}_{,\tau}; \qquad \delta N^{C} = N^{E} \cdot n_{E}^{C} \Big|_{\sigma}^{\tau} \xi^{\sigma}_{,\tau}, \tag{8.1.20}$$

причем известно, что величина N^C — произвольная из класса преобразующихся по этому закону величин. Рассматривая теперь закон преобразования произведения (8.1.19), находим из (8.1.20):

$$\delta M_{BC}N^{C} = N^{C}\left[M_{EC}\, p_{B}^{E}\Big|_{\sigma}^{\tau} - M_{BH}\, n_{C}^{H}\Big|_{\sigma}^{\tau} \right] \xi^{\sigma}{}_{,\tau}, \tag{8.1.21}$$

[1] Бесконечная малость вектора ξ^{μ} часто подчеркивается введением в качестве множителя при нем инфинитезимального параметра.

откуда в силу произвольности N^C следует, что величина M_{BC} преобразуется по закону

$$\delta M_{BC} = M_{DE} m^{DE\,|\,\tau}_{BC\ \ \sigma} \xi^{\sigma}{}_{,\tau}, \tag{8.1.22}$$

где

$$m^{DE}_{BC}\Big|^{\tau}_{\sigma} = p^{D}_{B}\Big|^{\tau}_{\sigma} \delta_C^E - n^{E}_{C}\Big|^{\tau}_{\sigma} \delta_B^D. \tag{8.1.23}$$

Так можно определить свойства не только тензоров, но и многих других величин (теорема поддается широкому обобщению).

Некоторые сведения из римановой геометрии можно найти во введении, а также по ходу вычислений в других разделах; некоторые специфические математические вопросы освещены далее в этом разделе [1].

8.2. Элементы объема многообразий. Интегрирование по многообразиям

Мы приведем здесь основные сведения, относящиеся к интегрированию по многообразиям (4-объемам и гиперповерхностям различного числа измерений), для простоты не обращаясь к теории Зельманова (§ 8.9).

Элемент 4-мерного объема обычно записывают в форме

$$(dx) = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3, \tag{8.2.1}$$

где под dx^0, dx^1, dx^2 и dx^3 понимаются *независимые* дифференциалы, не образующие вместе определенного воктора dx^μ, а относящиеся фактически к разным $d_\alpha x^\mu$. В произвольной системе координат явно тензорным образом (dx) можно записать в виде

$$(dx) = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} d_0 x^\mu d_1 x^\nu d_2 x^\lambda d_3 x^\rho. \tag{8.2.2}$$

Переходя к $d_\alpha x^\mu$, получаем отсюда

$$(dx) = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, d_\alpha x^\mu\, d_\beta x^\nu\, d_\gamma x^\lambda\, d_\delta x^\rho = \operatorname{Det} d_\alpha x^\mu. \tag{8.2.3}$$

Из этой записи (dx) видно, что $(dx) \neq 0$ тогда и только тогда, когда (отличные от нуля) $d_\alpha x^\mu$ линейно независимы. Тот факт, что никакой системе реальных событий не соответствует такой отличный от нуля 5-мерный детерминант, показывает 4-мерный характер нашего мира. Однако это касается лишь бесконечно малых областей; если взять 5-мерный $\operatorname{Det} d_\alpha x^\mu$ для *конечных* приращений, мы можем практически получить *не нуль* в силу искривленности мира, если эти приращения достаточно велики. Так как в микромире действуют квантовые законы с флуктуациями, затрагивающими и кривизну [2] и неограниченно (насколько мы знаем) растущими по мере уменьшения размеров областей, то становится неясным, показывает ли опыт, дающий отличный от нуля 4-мерный $\operatorname{Det} d_\alpha x^\mu$ в макромире, истинную 4-мерность мира, или же это — вторичный эффект, обязанный некоему сложному (квантовому) искривлению более элементарного мира с меньшим числом измерений. Аналогично, в сверхмакроскопических (космологических) масштабах естественно ожидать эффектов, феноменологически поддающихся описанию в пространстве пяти и более измерений. Обсуждае-

---

[1] См. также предисловие, где указана литература общего и учебного характера по теории гравитации.

[2] Если не говорить о гипотетических флуктуациях кривизны, обусловленных квантовой природой гравитации в микромере, то все же нельзя отбросить флуктуаций кривизны, индуцированных квантовыми флуктуациями тензора энергии-импульса других полей, стоящего в правой части уравнений Эйнштейна, См., например, (Уилер, 1962) и § 6.2.

мый детерминат $\operatorname{Det} d_\alpha x^\mu$ можно называть, следуя Уилеру (1965), *симплексом.*

Чтобы уменьшить на единицу число измерений многообразия, для которого строится элемент, возьмем

$$\frac{\partial (dx)}{\partial (d_\alpha x^\mu)} = \operatorname{Adj}(d_\alpha x^\mu) = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, d_\beta x^\nu\, d_\gamma x^\lambda\, d_\delta x^\rho \tag{8.2.4}$$

(индекс α считается фиксированным). Эта величина *ортогональна* всем $d_\varepsilon x^\sigma$, кроме вектора с номером $\varepsilon = \alpha$. Она, очевидно, образует элемент объема 3-мерного многообразия $X_3^{(\alpha)}$, **которое, будучи** дополнено вектором $d_\alpha x^\sigma$, дает 4-мерный мир. Так как $d_\alpha x^\sigma$ *не входит* в полученное 3-мерное многообразие, то $d_\alpha x^\sigma \sim n^\sigma$, где n^σ — 4-вектор нормали к $X_3^{(\alpha)}$ ($n^\sigma \perp d_\varepsilon x^\tau$, $d_\varepsilon x^\tau \in X_3^{(\alpha)}$, $\varepsilon \neq \alpha$).

Мы обозначим

$$\operatorname{Adj}(d_\alpha x^\mu) = dS_\mu^{(\alpha)}. \tag{8.2.5}$$

Значок (α) здесь, как правило, отбрасывается. Обычно в качестве n^σ берется временно-подобный вектор; тогда говорят, что dS_μ — *элемент пространственно-подобной гиперповерхности.* Он записывается как

$$dS_\mu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, d_i x^\nu\, d_j x^\lambda\, d_k x^\rho, \tag{8.2.6}$$

где $d_l x^\sigma$ — 3 независимых пространственно-подобных 4-вектора, а ε_{ijk} — 3-мерный символ Леви-Чивиты, имеющий, строго говоря, отношение не к 3-мерному сечению мира, а к факту использования указанной тройки векторов. Фактически мы взяли здесь $\alpha = 0$ и приравняли $\varepsilon_{0ijk} = \varepsilon_{ijk}$.

Локально всегда можно выбрать такую систему координат, чтобы временные компоненты всех трех векторов $d_l x^\sigma$ обратились в нуль. В такой системе

$$(dS_\mu) = (dV, 0, 0, 0), \tag{8.2.7}$$

так как тогда

$$\varepsilon_{l\nu\lambda\rho}\, d_i x^\nu\, d_j x^\lambda\, d_k x^\rho = 0; \tag{8.2.8}$$

dV называют элементом 3-мерного объема. Очевидно,

$$dV = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\, d_i x^l\, d_j x^n\, d_k x^n \tag{8.2.9}$$

($\varepsilon_{0lmn} = \varepsilon_{lmn}$) в полной аналогии с определением элемента 4-мерного объема.

Уменьшим еще на единицу размерность многообразия — перейдем к $X^{(2\alpha}$:

$$d\sigma_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)} = \frac{\partial^2 (dx)}{\partial (d_\alpha x^\mu)\, \partial (d_\beta x^\nu)} = \frac{\partial (dS_\mu^{(\alpha)})}{\partial (d_\beta x^\nu)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, d_\gamma x^\lambda\, d_\delta x^\rho \tag{8.2.10}$$

Очевидно, что элемент $d\sigma_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}$ ортогонален как $d_\alpha x^\sigma$, так и $d_\beta x^\sigma$ (индексы α и β считаются фиксированными!).

Заметим, что от точки к точке инфинитезимальные векторы $d_\alpha x^\sigma$ и $d_\beta x^\sigma$, конечно, изменяются (хотя бы потому, что ковариантно постоянных векторов в искривленном мире не существует). Поэтому наши поверхности изменяют свою ориентацию от точки к точке.

Перейдем и здесь к 3-мерному случаю. Для этого следует взять один из векторов $d_\alpha x^\sigma$ или $d_\beta x^\sigma$ временно-подобным; пусть это будет $d_\alpha x^\sigma$ ($\alpha = 0$). Кроме того, пусть $\beta = 3$, так что индексам γ и δ остается пробегать значения 1 и 2. В дальнейшем индексы α и β мы просто не пишем:

$$d\sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,d_a x^\lambda\,d_b x^\rho, \tag{8.2.11}$$

где ε_{ab} — 2-мерный символ Леви-Чивиты (a и $b=1,\ 2$). Переходя к системе координат, в которой $d_a x^0=d_b x^0=0$, можно записать

$$d\sigma_{0i}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\varepsilon_{ijk}\,d_a x^j\,d_b x^k=$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(d_1x^j\,d_2x^k-d_1x^k\,d_2x^j)\equiv\varepsilon_{ijk}\,d_1x^j\,d_2x^k. \tag{8.2.12}$$

Итак,

$$d\sigma_{0i}=ds_i, \tag{8.2.13}$$

где $d\mathbf{s}$ — элемент обычной 2-мерной поверхности в 3-мерном мире, построенный на векторах $d_1\mathbf{x}$ и $d_2\mathbf{x}$, и его можно представить в 3-мерных векторных обозначениях как

$$d\mathbf{s}=[d_1\mathbf{x}\,d_2\mathbf{x}], \tag{8.2.14}$$

потому что равенство $\mathbf{C}=[\mathbf{AB}]$ эквивалентно $C_i=\varepsilon_{ijk}A_jB_k$.

Наконец, выполняя еще одно дифференцирование, находим

$$d\tau_{\mu\nu\lambda}^{(\alpha\beta\gamma)}=\frac{\partial\left(d\sigma_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}\right)}{\partial(d_\gamma x^\lambda)}=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,d_\delta x^\rho. \tag{8.2.15}$$

В силу предположения о линейной независимости взятых первоначально четырех векторов $d_\varepsilon x^\sigma$, индекс δ у оставшегося вектора $d_\delta x^\rho$ можно считать фиксированным (например, $\delta=3$) и взять $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=2$. Тогда, отбрасывая индексы α, β, γ и δ, получаем

$$d\tau_{\mu\nu\lambda}=\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,dx^\rho, \tag{8.2.16}$$

или, что то же,

$$dx^\rho=\frac{1}{6}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,d\tau_{\mu\nu\lambda}. \tag{8.2.17}$$

Полученные соотношения поясняют применение интегральных операций в § 2.3. Заметим, что с их помощью легко проанализировать, например, и выражение (2.3.20), имея в виду использование в нем гиперповерхности не со временно-, а с пространственно-подобной нормалью.

Рассмотрим трансформационные свойства полученных элементов. Как известно,

$$(dx')=J(dx). \tag{8.2.18}$$

Этот закон можно получить и непосредственно из (8.2.3), так как

$$d_\alpha x'^\mu=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}d_\alpha x^\sigma,$$

$$(dx')=\mathrm{Det}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}d_\alpha x^\sigma\right)=\mathrm{Det}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\right)\mathrm{Det}\,(d_\alpha x^\sigma)=J(dx). \tag{8.2.19}$$

В свою очередь,

$$dS_\mu'^{(\alpha)}=\frac{\partial(dx')}{\partial(d_\alpha x'^\mu)}=\frac{\partial(d_\varepsilon x^\sigma)}{\partial(d_\alpha x'^\mu)}\frac{\partial}{\partial(d_\varepsilon x^\sigma)}(J(dx)), \tag{8.2.20}$$

а так как $d_\varepsilon x^\sigma = (\partial x^\sigma / \partial x'^\tau) d_\varepsilon x'^\tau$, то

$$dS'^{(\alpha)}_\mu = J \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial (dx)}{\partial (d_\alpha x^\sigma)} = J \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} dS^{(\alpha)}_\sigma . \tag{8.2.21}$$

Аналогично можно вывести закон преобразования

$$d\sigma'^{(\alpha\beta)}_{\mu\nu} = J \frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu} d\sigma^{(\alpha\beta)}_{\omega\varepsilon} . \tag{8.2.22}$$

Наконец, вспоминая, что в силу (1.35)

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{\sqrt{-g}} E_{\mu\nu\lambda\rho}, \tag{8.2.23}$$

на основании трансформационных свойств $E_{\mu\nu\lambda\rho}$ находим

$$d\tau'_{\mu\nu\lambda} = J \frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\lambda} d\tau_{\omega\varepsilon\eta}. \tag{8.2.24}$$

Мы видим, что полученные здесь элементы являются ковариантными *аксиальными* тензорными плотностями веса (—1) и, соответственно, рангов 0, 1, 2 и 3.

Приведем теперь без доказательства интегральные теоремы типа Гаусса — Стокса:

$$\int_\Omega Q^\mu_{,\mu} (dx) = \oint_\Sigma Q^\mu \, dS_\mu, \tag{8.2.25}$$

$$\int_\Sigma Q^{\mu\nu}_{,\nu} \, dS_\mu = \frac{1}{2} \oint_\theta Q^{\mu\nu} \, d\sigma_{\mu\nu}, \tag{8.2.26}$$

$$\int_\theta Q^{\mu\nu\lambda}_{\ ,\lambda} \, d\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{3} \oint_L Q^{\mu\nu\lambda} \, d\tau_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{3} \oint_L \varepsilon_{\mu\lambda\rho} \, Q^{\mu\lambda\nu} \, dx^\rho \tag{8.2.27}$$

(см. также ряд интегральных соотношений у Схоутена (1965), стр. 172, 173, 179, 180).

Величины Q предполагаются антисимметричными по всем указанным здесь индексам (в принципе они могут обладать еще любыми другими индексами). Свойства непрерывности и дифференцируемости величин Q формулируются, как обычно в теореме Гаусса. При этом мы не предполагаем, что Q обладает тензорными свойствами.

Коэффициенты $1/2$ и $1/3$ в соотношениях (8.2.26) и (8.2.27) несколько затемняют ситуацию; они, однако, отсутствуют в формулах для *дуальных* величин, определяемых по правилам:

$$\hat{Q} = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \, Q^{\mu\nu\lambda\rho}, \tag{8.2.28}$$

$$\hat{Q}_\rho = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \, Q^{\mu\nu\lambda},$$

$$\hat{Q}_{\lambda\rho} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \, Q^{\mu\nu}, \tag{8.2.30}$$

$$\hat{Q}_{\nu\lambda\rho} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \, Q^\mu, \tag{8.2.31}$$

$$\hat{Q}_{\mu\nu\lambda\rho} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \, Q. \tag{8.2.32}$$

Обратные соотношения получаются отсюда перестановкой значка „$\wedge$" и изменением знака при нечетном числе индексов у Q.

8.3. Вариационные производные на многообразиях

Мы рассмотрим здесь два случая функционалов: функционалы на 4-мерном многообразии и функционалы на 3-мерной гиперповерхности.

Пусть $\Phi[A;\ \Pi]$ — функционал на 4-многообразии. Тогда вариационные производные $\delta\Phi / \delta A$ и $\delta\Phi / \delta\Pi$ определяются как

$$\delta\Phi \overset{\text{Def}}{=} \int_{\Omega} \left(\frac{\delta\Phi}{\delta A}\,\delta\text{A} + \frac{\delta\Phi}{\delta\Pi}\,\delta\Pi \right) (dx). \tag{8.3.1}$$

Если, кроме того,

$$\Phi = \int_{\Omega} \mathbf{F}(dx), \tag{8.3.2}$$

причем

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(A;\ \Pi), \tag{8.3.3}$$

то эти производные совпадают с обычными частными производными:

$$\frac{\delta\Phi}{\delta A} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial A},\quad \frac{\delta\Phi}{\delta\Pi} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\Pi}. \tag{8.3.4}$$

Если же, например,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(A;\ A_{,\alpha}), \tag{8.3.5}$$

то

$$\frac{\delta\Phi}{\delta A} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial A} - \left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial A_{,\alpha}} \right)_{,\alpha}. \tag{8.3.6}$$

Примером таких производных может служить выражение, возникающее при варьировании интеграла действия $J = \int_{\Omega} \mathbf{L}(dx)$. Мы считаем здесь, что вариации δA и $\delta\Pi$ обращаются в нуль на границах области интегрирования.

Если теперь через Φ обозначить функционал на 3-мерной гиперповерхности Σ, то

$$\delta\Phi[A, \Pi] \overset{\text{Def}}{=} \int_{\Sigma} \left(\frac{\Delta^{\alpha}\Phi}{\Delta A}\,\delta A + \frac{\Delta^{\alpha}\Phi}{\Delta\Pi}\,\delta\Pi \right) dS_{\alpha}, \tag{8.3.7}$$

или же

$$\delta\Phi\,[\text{A}, \Pi] \overset{\text{Def}}{=} \int_{\Sigma} \left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta A}\,\delta A + \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Pi}\,\delta\Pi \right) dS, \tag{8.3.8}$$

причем

$$dS = n^{\alpha} dS_{\alpha} \tag{8.3.9}$$

[это произведение соответствует 3-мерному элементу объема, как и (8.2.9)]. Если теперь взять

$$\Phi = \int_{\Sigma} \mathbf{F}^{\alpha}(A;\ \Pi)\, dS_{\alpha}, \tag{8.3.10}$$

то в случае определения (8.3.7) мы имеем две возможности:

$$\frac{\Delta^{\alpha}\Phi}{\Delta A} = \frac{\partial\mathbf{F}^{\alpha}}{\partial A} \qquad \frac{\Delta^{\alpha}\Phi}{\Delta\Pi} = \frac{\partial\mathbf{F}^{\alpha}}{\partial\Pi} \tag{8.3.11}$$

либо

$$\frac{\Delta^\alpha \Phi}{\Delta A} = \frac{\partial \mathbf{F}^\beta}{\partial A} n_\beta n^\alpha, \qquad \frac{\Delta^\alpha \Phi}{\Delta \Pi} = \frac{\partial \mathbf{F}^\beta}{\partial \Pi} n_\beta n^\alpha. \tag{8.3.12}$$

Существование такого произвола можно использовать в расчетах, и оно придает даже некоторую гибкость теории. Если же опираться на определение (8.3.8), то мы получим однозначно

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta A} = \frac{\partial \mathbf{F}^\alpha}{\partial A} n_\alpha, \qquad \frac{\Delta \Phi}{\Delta \Pi} = \frac{\partial \mathbf{F}^\alpha}{\partial \Pi} n_\alpha. \tag{8.3.13}$$

Переход к 3-мерным обозначениям здесь очевиден.

Рассмотрим функционал на гиперповерхности с подынтегральной функцией $\mathbf{F}^\alpha = \mathbf{F}^\alpha(A; A_{,\beta})$. В этом случае

$$\delta\Phi = \int_\Sigma \left(\frac{\partial \mathbf{F}^\alpha}{\partial A} - \left(\frac{\partial \mathbf{F}^\alpha}{\partial A_{,\beta}} \right)_{,\beta} \right) \delta A \, dS_\alpha + \int_\Sigma \left(\frac{\partial \mathbf{F}^\alpha}{\partial A_{,\beta}} \delta A \right)_{,\beta} dS_\alpha. \tag{8.3.14}$$

Если, кроме того,

$$\frac{\partial \mathbf{F}^\alpha}{\partial A_{,\beta}} = - \frac{\partial \mathbf{F}^\beta}{\partial A_{,\alpha}}, \tag{8.3.15}$$

то в последнем члене в (8.3.14) можно перейти к интегралу по 2-мерной поверхности (теорема Стокса), и тогда

$$\frac{\Delta^\alpha \Phi}{\Delta A} = \frac{\partial \mathbf{F}^\alpha}{\partial A} - \left(\frac{\partial \mathbf{F}^\alpha}{\partial A_{,\beta}} \right)_{,\beta} \tag{8.3.16}$$

[можно также домножить это выражение на $n_\alpha n^\sigma$, аналогично формуле (8.3.12)] и

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta A} = \left[\frac{\partial \mathbf{F}^\alpha}{\partial A} - \left(\frac{\partial \mathbf{F}^\alpha}{\partial A_{,\beta}} \right)_{,\beta} \right] n_\alpha. \tag{8.3.17}$$

Вернемся еще раз к функционалу на 4-многообразии (8.3.2), взяв, однако,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(A; A_{,\alpha}; A_{,\alpha,\beta}). \tag{8.3.18}$$

При этом, как легко видеть,

$$\delta\Phi = \int_\Omega \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A} - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A_{,\alpha}} \right)_{,\alpha} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A_{,\alpha,\beta}} \right)_{,\alpha,\beta} \right] (dx) + \oint_\Sigma \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A_{,\alpha}} - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A_{,\alpha,\beta}} \right)_{,\beta} \right] dS_\alpha \tag{8.3.19}$$

и, таким образом,

$$\frac{\delta \Phi}{\delta A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A} - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A_{,\alpha}} \right)_{,\alpha} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A_{,\alpha,\beta}} \right)_{\alpha,\beta} \tag{8.3.20}$$

и

$$\frac{\Delta^\alpha \Phi}{\Delta A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A_{,\alpha}} - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A_{,\alpha,\beta}} \right)_{,\beta} \tag{8.3.21}$$

или

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta A} = \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A_{,\alpha}} - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A_{,\alpha,\beta}} \right)_{,\beta} \right] n_\alpha. \tag{8.2.22}$$

Вспомним в связи с этим несколько непоследовательные обозначения, принятые в формулировке принципа экстремума действия и при выводе теоремы Нётер, которые теперь легко отождествить с последовательно введенными обозначениями:

$$\frac{\delta \mathrm{L}}{\delta A_B} \equiv \frac{\delta J}{\delta A_B} \tag{8.3.23}$$

и

$$\frac{\delta \mathrm{L}}{\delta A_{B,\,\alpha}} \equiv \frac{\Delta^{\alpha} J}{\Delta A_B}, \tag{8.3.24}$$

причем определения (8.3.21), (8.3.22) и (8.3.24) несколько отличаются от (8.3.11), (8.3.12) и (8.3.13), соответственно, в том отношении, что в последних рассматривалась лишь пространственно-подобная гиперповерхность, в то время как при выводе первых в формуле (8.3.19) фигурирует *замкнутая* гиперповерхность.

8.4. Дельта-функция Дирака и связанные с ней понятия

В связи с применением понятия плотности (заряда, массы и т. п.) к точечным частицам в физике (а в последние десятилетия и в математике) часто пользуются обобщением понятия функции — «распределениями» (этот термин физически очень естествен) или *обобщенными функциями*. Мы коснемся этого вопроса здесь весьма кратко, отсылая читателя к книгам Иваненко и Соколова (1951) и Шварца (1965). Из таких обобщенных функций наиболее широко используется в физике δ-функция Дирака[1].

С самого начала следует подчеркнуть, что δ-функция — не функция в обычном смысле и что без операции интегрирования все соотношения, записанные с ее помощью, имеют чисто символический характер.

Одномерная δ-функция Дирака определяется требованиями

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \tag{8.4.1}$$

и

$$\int_{-\alpha}^{+\beta} \delta(x)\,dx = 1, \tag{8.4.2}$$

где α и β — любые *положительные* числа. Эти требования, однако, еще никак не фиксируют нечетной части δ-функции. Будем считать эту часть по определению равной нулю, т. е.

$$\delta(x) = \delta(-x). \tag{8.4.3}$$

Принятое определение непосредственно приводит к следующим свойствам δ-функции:

$$\int_{a-\alpha}^{a+\beta} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a) \tag{8.4.4}$$

(как и прежде, α и β — любые положительные числа) — может быть доказано из теоремы о среднем; поэтому можно сказать, что

$$f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a); \tag{8.4.5}$$

[1] См. дальнейшее обобщение δ-функции в книге Инфальда и Плебаньского (1962).

путем замены переменной интегрирования получаем, кроме того,

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x). \tag{8.4.6}$$

Из соотношения (8.4.4) следует равенство (символическое)

$$x\delta(x) = 0. \tag{8.4.7}$$

Если δ-функция зависит от x через посредство какой-либо знакопеременной функции $f(x)$, то

$$\delta(f(x)) = \sum_r \frac{\delta(x - x_r)}{\left|\frac{df}{dx}\right|}, \tag{8.4.8}$$

где производную df/dx, естественно, можно взять сразу в точке $x = x_r$; точки x_r определяются равенствами

$$f(x_r) = 0 \tag{8.4.9}$$

(x_r — корни последнего уравнения). Доказательство этого соотношения основывается на замене переменной при интегрировании:

$$\delta(f(x))\,dx = \frac{\delta(f)\,df}{\frac{df}{dx}}. \tag{8.4.10}$$

Ненулевой результат получается лишь при (каждом) $f = 0$, но произведение $\delta(f)df$ дает $+1$ лишь при $df > 0$; в противном же случае будет получаться множитель -1. Поэтому производная (df/dx) приобретает знак модуля.

Из соотношения (8.4.8) вновь следует, что

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x). \tag{8.4.11}$$

Кроме того, отсюда же

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{2a}, \quad a > 0, \tag{8.4.12}$$

что, в свою очередь, приводит к следствию [см. (8.4.5)]

$$|x|\,\delta(x^2) = \delta(x). \tag{8.4.13}$$

Полезно ввести *ступенчатую функцию* $\theta(x)$:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \tag{8.4.14}$$

из которой можно построить симметричную ступеньку:

$$\theta(x) - \theta(-x) = \gamma(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}. \tag{8.4.15}$$

Дифференцирование ступенчатой функции может производиться лишь символически, но все же можно записать

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x), \tag{8.4.16}$$

поскольку такая форма производной обладает всеми требуемыми свойствами δ-функции. Заметим, что производная δ-функции соответствует

$$\frac{d\delta(x-a)}{dx} f(x) = -\delta(x-a)\frac{df(x)}{dx} \tag{8.4.17}$$

(для доказательства следует произвести интегрирование по частям).

Вообще, если мы имеем разрывную функцию

$$f(x) = \begin{cases} F(x) + A, & x = a + \varepsilon \\ F(x), & x = a - \varepsilon, \end{cases} \tag{8.4.18}$$

скачок которой равен

$$\Delta f = f(a+\varepsilon) - f(a-\varepsilon) = A, \tag{8.4.19}$$

то ее можно представить как сумму непрерывной и ступенчатой функций:

$$f(x) = F(x) + A\cdot\theta(x-a). \tag{8.4.20}$$

Дифференцирование такой суммы, очевидно, дает

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} + A\delta(x-a). \tag{8.4.21}$$

Если при этом разрыв имеет и производная исследуемой функции, то в производную войдет и ступенчатая функция, обязанная этому нарушению гладкости.

При вещественной переменной x теория функций комплексного переменного дает соотношение

$$\ln x = \ln|x| + i\pi(1-\theta(x)). \tag{8.4.22}$$

Тогда, так как

$$\frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{1}{x}, \tag{8.4.23}$$

мы получим для производной логарифмической функции

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \tag{8.4.24}$$

Укажем (без доказательства) следующие представления δ-функции в виде пределов соответствующих функциональных последовательностей:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}, \tag{8.4.25}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{q\to\infty}\frac{\sin qx}{x}, \tag{8.4.26}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{q\to\infty}\frac{\sin^2 qx}{qx^2}. \tag{8.4.27}$$

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-Q}^{+Q} e^{iqx}\,dq = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{Q}\cos qx\,dq = +\frac{1}{\pi}\frac{\sin Qx}{x}. \tag{8.4.28}$$

Очевидно, что в пределе $Q\to\infty$ он дает δ-функцию, согласно формуле (8.4.26). Поэтому фурье-представление δ-функции удобно записать как

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqx}\,dq = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos qx\,dq. \tag{8.4.29}$$

Вместе с этим, фурье-представления ступенчатых функций (8.4.14) и (8.4.15) имеет вид

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iqx}\,dq}{q - i\varepsilon} \tag{8.4.30}$$

и

$$\gamma(x) = \frac{1}{\pi i}\,\mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iqx}}{q}\,dq, \tag{8.4.31}$$

где символ P означает взятие главного значения интеграла. Напомним, что в формулах (8.4.25) — (8.4.27) предельный переход следует совершать уже *после интегрирования.*

Обычная *трехмерная* δ-функция определяется в декартовых координатах, как произведение трех одномерных δ-функций, относящихся к соответствующим пространственным координатам:

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z), \tag{8.4.32}$$

так что

$$\int_V f(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})\,dv = f(\mathbf{a}), \tag{8.4.33}$$

если точка, характеризуемая радиус-вектором $\mathbf{a}$, лежит внутри объема интегрирования V; в противном случае интеграл будет равен нулю. Примером применения трехмерной δ-функции может служить выражение для плотности заряда точечной частицы:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\cdot\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}(t)), \tag{8.4.34}$$

где $\mathbf{a}(t)$ — радиус-вектор точки, в которой в момент времени t находится частица.

Совершенно аналогичным образом вводится 4-мерная δ-функция:

$$\delta^4(x) = \delta(x^0)\,\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3). \tag{8.4.35}$$

Она должна обладать свойствами скалярной плотности, так как

$$\int \delta^4(x)\,(dx) = 1 = \mathrm{inv}. \tag{8.4.36}$$

Фурье-представления этих функций имеют вид

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{qr}}\,d^3q \tag{8.4.37}$$

и

$$\delta^{(4)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\iiiint_{-\infty}^{+\infty} (dq)\,e^{iq_\alpha x^\alpha}, \tag{8.4.38}$$

причем

$$(dq) = dq^0\,dq^1\,dq^2\,dq^3 \tag{8.4.39}$$

и

$$\delta^{(4)}(x) = \delta^{(4)}(-x) \tag{8.4.40}$$

(использованы декартовы координаты!).

Трехмерная δ-функция, очевидно, нековарианта хотя бы уже потому, что интегрирование по трехмерному объему является специальным случаем интегрирования по пространственно-подобной гиперповерхности. Поэтому следует ввести 4-компонентную δ-функцию $\delta^\mu(x)$, обладающую свойством

$$\int\limits_{\Sigma} \delta^\mu(x)\, dS_\mu = 1 = \mathrm{inv} \tag{8.4.41}$$

и являющуюся, таким образом, величиной типа контравариантной векторной плотности. Ее «направление», как 4-вектора, очевидно, можно принять совпадающим с направлением нормали к гиперповерхности:

$$\delta^\mu(x) \sim n^\mu. \tag{8.4.42}$$

В том случае, когда берется гиперплоскость, нормаль которой направлена (в плоском мире) по оси времени, мы получаем трехмерную δ-функцию как временную компоненту $\delta^\mu(x)$:

$$((\delta^\mu(x)) = (\delta(\mathbf{r}), 0, 0, 0). \tag{8.4.43}$$

Вообще же можно принять

$$\delta^\mu(x) = n^\mu \delta^{(3)}(x). \tag{8.4.44}$$

Здесь $\delta^{(3)}(x)$ — трехмерная δ-функция, определенная относительно данной гиперповерхности. Вводя обозначение

$$x^\mu n_\mu = t, \tag{8.4.45}$$

где t — параметр, а не физическое время, можно положить

$$\delta^{(4)}(x) = -n_\mu \delta^\mu(x) \cdot \delta(t), \tag{8.4.46}$$

причем анализ для плоского мира и декартовых координат указывает, что $\delta(t)$ обладает свойствами обычной одномерной δ-функции. Тогда, так как $\delta^\mu(x)$ взята *уже* на гиперповерхности $t = 0$, интегрируя последнее соотношение по t, получаем

$$\delta^\mu(x) = n^\mu \int \delta^{(4)}(x)\, dt, \tag{8.4.47}$$

а вводя, кроме нормальной к гиперповерхности координаты t, также касательные координаты x ,

$$x^\alpha = x_{\|}{}^\alpha - n^\alpha t, \tag{8.4.48}$$

получаем окончательно

$$\delta^\mu(x) = \frac{n^\mu}{(2\pi)^3} \int e^{iq_\alpha x^\alpha} \cdot \delta(q_\alpha n^\alpha)\, (dq). \tag{8.4.49}$$

Трехмерные δ-функции применяются при рассмотрении канонического формализма в § 2.6.

Отметим в заключение тесную аналогию между δ-функцией Дирака и символом Кронекера $\delta_\mu{}^\nu$. Множно сказать, что существует соответствие

$$\delta(x - a)\, dx \leftrightarrow \delta_\mu{}^\nu, \tag{8.4.50}$$

где индекс μ играет роль прежнего x, а ν — роль a, и наоборот (выражения симметричны). Выбирая в функциональном пространстве ортогональный базис, можно представить δ-функцию в виде матрицы; ее элементами будут как раз компоненты символов Кронекера. Однако число измерений (координат) для символов Кронекера не имеет ничего общего с числом измерений мира для многомерной δ-функции. Наконец, можно определить аналог и символов Леви-Чивиты как подобный же переход от дискретного по своим измерениям мира к непрерывному (функциональному) миру (И. И. Иванчик). Символ Леви-Чивиты служит, как мы видели, для определения элемента объема мира, так что его обобщение имеет прямое отношение к вопросам функционального интегрирования.

8.5. Двуметрический формализм

Двуметрический формализм был впервые сформулирован Розеном (1940) и развивался впоследствии Пугачевым (1959), Колером (1952, 1953), Гутманом (1959, 1961); близкий вариант концепции «относительного гравитационного поля», обладающий рядом преимуществ, был предложен Рыловым (1962—1964). Обычно в пространстве-времени рассматривается лишь поле метрического тензора $g_{\mu\nu}$, приводящего к (вообще говоря) отличной от нуля кривизне мира. Однако наряду с римановым (гауссовым) метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ можно ввести и другой симметричный тензор второго ранга с отличным от нуля детерминантом — тензор $e_{\mu\nu}$. Его можно называть «вторым метрическим тензором» или «тензором поля сил инерции», хотя ни одна из этих интерпретаций не является обязательной. Наглядно тензор $e_{\mu\nu}$ можно определить следующим образом. Пусть рассматривается заключенная в конечном пространственном объеме физическая система (островная модель). Тогда можно считать (в отсутствие гравитационного излучения, по крайней мере, сильного), что асимптотически, на больших пространственных расстояниях от этой системы пространство становится плоским. Выберем такую систему координат, чтобы асимптотически она была декартовой (в области, где кривизна не равна нулю, конечно, понятие декартовой системы не имеет смысла). Определим тензор $e_{\mu\nu}$ так, чтобы в этой (естественно, привилегированной) системе центра масс *во всех мировых точках* (включая указанные области с наличием кривизны) его компоненты были

$$(e_{\mu\nu}) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \equiv (\delta_{\mu\nu}). \tag{8.5.1}$$

Переход к другим координатным системам совершается, естественно, по обычному закону преобразования тензоров:

$$e'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} e_{\alpha\beta}(x). \tag{8.5.2}$$

Однако это простое определение в высшей степени произвольно: мы можем, не изменяя асимптотических свойств системы координат, в широких пределах изменять ее *внутри* области, в которой кривизна отлична от нуля (физическая система и ее окрестности), и в равной мере корректно вводить в любой из этих равноценных «квазидекартовых» систем тензор $e_{\mu\nu}$ по формуле (8.5.1). Этот элемент неоднозначности, однако, легко устраним в рассматриваемом случае, когда не происходит гравитационного излучения на бесконечность, а физическая система соответствует островной модели. Действительно, при этом уравнения Эйнштейна имеют *единственное* решение для метрического тензора при задании распределения источников гравитационного поля ($T_{\mu\nu}$) и при асимптотически плоской метрике. Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ тогда оказывается функционалом $T_{\mu\nu}$ и функцией параметра $\varkappa$ — эйнштейновской гравитационной постоянной. Если теперь устремить параметр $\varkappa$ к нулю («выключение» гравитационного взаимодействия), то пространство-время «распрямится», однако вполне определенным образом — получающаяся при этом плоская метрика $e_{\mu\nu}$ определяется *однозначно* взятым вначале распределением источников. Это видно из того обстоятельства, что на каждом этапе указанного предельного перехода метрика определяется при сделанных предположениях однозначно. Это предельное значение метрики мы и возьмем в качестве тензора $e_{\mu\nu}$:

$$e_{\mu\nu} = \lim_{\varkappa \to 0} g_{\mu\nu} [\varkappa, T_{\sigma\tau}]. \tag{8.5.3}$$

В остальных случаях мы приходим к космологической проблеме, которая ставится в зависимость от положения вещей, например, в «момент» рождения мира.

Контравариантный тензор $e^{\mu\nu}$ мы определим по принципу построения обратного тензора:

$$e^{\mu\nu} = \frac{\partial \ln e}{\partial e_{\mu\nu}}, \tag{8.5.4}$$

где

$$e = \mathrm{Det}\, e_{\mu\nu} \tag{8.5.5}$$

(не следует смешивать e с основанием натуральных логарифмов). Индексы, поднятые или опущенные с помощью $e^{\mu\nu}$ и $e_{\mu\nu}$, мы обозначаем, ставя над ними точки, например

$$A_{\dot\alpha} = A^{\beta} e_{\alpha\beta}. \tag{8.5.6}$$

Связь между $A^{\dot\alpha}$ и $A_{\dot\alpha}$ имеет характерную форму

$$A^{\dot\alpha} = g^{\dot\alpha\dot\beta} A_{\dot\beta}. \tag{8.5.7}$$

Аналог символа Кристоффеля определяется как

$$\overset{\lambda}{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} e^{\lambda\rho} (e_{\mu\rho,\,\nu} + e_{\rho\nu,\,\mu} - e_{\mu\nu,\,\rho}) \tag{8.5.8}$$

(трансформационные свойства $\gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ совпадают со свойствами $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$), так что e-ковариантное дифференцирование определяется как

$$A_{\mu|\nu} \overset{\mathrm{Def}}{=} A_{\mu,\,\nu} - A_{\lambda} \overset{\lambda}{\gamma}_{\mu\nu}. \tag{8.5.9}$$

Ковариантные производные относительно $g_{\mu\nu}$ удобно называть g-ковариантными производными. Согласно принятому определению, должно тождественно выполняться равенство

$$r^{\mu}_{\cdot\nu\lambda\rho} = \overset{\mu}{\gamma}_{\nu\rho,\,\lambda} - \overset{\mu}{\gamma}_{\nu\lambda,\,\rho} + \overset{\mu}{\gamma}_{\alpha\lambda} \overset{\alpha}{\gamma}_{\nu\rho} - \overset{\mu}{\gamma}_{\alpha\rho} \overset{\alpha}{\gamma}_{\nu\lambda} \equiv 0. \tag{8.5.10}$$

Разность двух связностей, обладающая свойствами тензора, может быть просто записана в виде

$$\overset{\lambda}{\Pi}_{\mu\nu} \overset{\mathrm{Def}}{=} \overset{\lambda}{\Gamma}_{\mu\nu} - \overset{\lambda}{\gamma}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\mu\rho|\nu} + g_{\rho\nu|\mu} - g_{\mu\nu|\rho}) \equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{2} e^{\lambda\rho} (e_{\mu\rho;\,\nu} + e_{\rho\nu;\,\mu} - e_{\mu\nu;\,\rho}). \tag{8.5.11}$$

Заметим, что, вводя произвольный симметричный тензор второго ранга $s_{\mu\nu}$ с отличным от нуля детерминантом и строя из него аналог связности $\Sigma^{\lambda}_{\rho\nu}$, можно определить s-ковариантное дифференцирование, причем имеет место равенство

$$\overset{(s)}{\nabla}_{\alpha} (\overset{\mu}{\Gamma}_{\nu\beta} - \overset{\mu}{\Sigma}_{\nu\beta}) - \overset{(s)}{\nabla}_{\beta} (\overset{\mu}{\Gamma}_{\nu\alpha} - \overset{\mu}{\Sigma}_{\nu\alpha}) + (\overset{\mu}{\Gamma}_{\alpha\lambda} - \Sigma_{\alpha\lambda}) (\Gamma_{\nu\beta} - \Sigma_{\nu\beta}) -$$

$$- (\overset{\mu}{\Gamma}_{\beta\lambda} - \overset{\mu}{\Sigma}_{\beta\lambda}) (\overset{\lambda}{\Gamma}_{\nu\alpha} - \overset{\lambda}{\Sigma}_{\nu\alpha}) = R^{\mu}_{\cdot\nu\alpha\beta} - S^{\mu}_{\cdot\nu\alpha\beta}, \tag{8.5.12}$$

где $S^{\mu}_{\cdot\,\nu\alpha\beta}$ — аналог тензора кривизны, построенный из $\Sigma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и их частных производных. Отсюда и из (8.5.10) ясно, что

$$R_{\mu\nu} = \Pi^{\alpha}_{\mu\alpha|\nu} - \Pi^{\alpha}_{\mu\nu|\alpha} + \Pi^{\alpha}_{\mu\beta}\,\Pi^{\beta}_{\nu\alpha} - \Pi^{\alpha}_{\mu\nu}\,\Pi^{\beta}_{\alpha\beta}. \tag{8.5.13}$$

Очевидно также, что e-ковариантные производные коммутативны между собой.

Мы можем определить, таким образом, метод «тензорного продолжения» — построения тензорных величин путем замены обычных частных производных на e-ковариантные. Тогда, обратно, нетензорные (но ковариантные) равенства[1], взятые в различных системах координат, имеют смысл специальных выражений («огибающих») для бесконечного семейства e-тензорных равенств, таких, что в каждой данной системе координат в соответствующем e-тензорном равенстве из указанного семейства тензор $e_{\mu\nu}$ обращается в $\delta_{\mu\nu}$. Здесь взяты тензоры $e_{\mu\nu}$, не отвечающие никаким конкретным материальным системам — чисто формальный подход! Приведенная выше величина $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ может быть названа тензорным продолжением символа Кристоффеля.

Согласно своим законам преобразования,

$$\delta^{*}\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(\xi^{\lambda}_{;\,\mu;\,\nu} + \xi^{\lambda}_{;\,\nu;\,\mu}\right) + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\,\xi^{\tau}\left(R_{\rho\mu\nu\tau} + R_{\rho\nu\mu\tau}\right) \tag{8.5.14}$$

и

$$\delta^{*}\gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = -\xi^{\lambda}{}_{|\mu|\nu}. \tag{8.5.15}$$

В частной теории относительности используются преобразования, относящиеся к линейной ортогональной группе. Конечно, такие преобразования могут быть использованы и в общей теории относительности; однако они изменяют свой вид в зависимости от того, в каких координатных системах их рассматривают. Естественно предположить, что в общей теории относительности должна быть существенна группа преобразований, имеющих единые свойства (и форму) в любых координатных системах, которая переходит в собственно линейную ортогональную группу лишь в пределе плоского мира. Мы предлагаем взять в качестве такой группы преобразования, удовлетворяющие условию

$$\delta^{*}e_{\mu\nu} = 0. \tag{8.5.16}$$

Это условие может быть на основании (2.4.9), если соотношение (8.5.16) выразить с помощью e-ковариантных производных, записано в виде

$$\xi^{\sigma}{}_{|\tau} = -e^{\sigma\mu}e_{\tau\nu}\xi_{\mu}{}^{\nu}, \tag{8.5.17}$$

тензорная форма которого очевидна. Равенству (8.5.17) можно придать форму

$$\xi_{\nu|\mu} = -\xi_{\mu|\nu}; \tag{8.5.18}$$

отсюда следует также равенство

$$\xi^{\mu}{}_{|\nu|\lambda} = 0, \tag{8.5.19}$$

если учесть то обстоятельство, что тензор, обладающий одновременно свойствами симметрии и антисимметрии,

$$A_{\mu\nu\lambda} = A_{\nu\mu\lambda} = -A_{\mu\lambda\nu}, \tag{8.5.20}$$

---

[1] Всякое тензорное равенство, конечно, автоматически является ковариантным, т. е. выполняется во всех системах координат. Однако имеются и не тензорные, но, тем не менее, ковариантные (в указанном смысле) равенства, например, соотношения Нётер. По-видимому, любая замкнутая система ковариантных равенств может быть истолкована как равенства для геометрических объектов, тогда тензорные равенства с очевидностью оказываются их частным случаем.

тождественно равен нулю. Таким образом, группа преобразований, определяемая условием (8.5.16), обобщает линейную ортогональную группу в случае двухметрического формализма. Заметим, что введение подобного обобщения для обычной метрики

$$\delta^* g_{\mu\nu} = 0, \tag{8.5.21}$$

вообще говоря, незаконно, так как условие (8.5.21) сводится к уравнениям Киллинга, выполнение которых, как известно, зависит от степени *подвижности* рассматриваемого пространства. Кроме того, как легко видеть, лагранжиан гравитационного поля в форме скалярной кривизны не только инвариантен в пространстве, допускающем преобразования, определяемые условием (8.5.21), но и *постоянен* во всем этом пространстве (чего, конечно, следовало ожидать с точки зрения подвижности пространства).

Вспоминая теперь, что при отбрасывании дивергенциального члена в выражении для плотности скалярной кривизны мы приходим к «старому» неинвариантному лагранжиану гравитации

$$\Lambda = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}), \tag{8.5.22}$$

естественно придать этому лагранжиану инвариантные свойства путем тензорного продолжения; мы получим в этом случае

$$\Lambda_{\mathrm{cov}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}(\Pi^{\alpha}_{\mu\nu}\Pi^{\beta}_{\alpha\beta} - \Pi^{\beta}_{\mu\alpha}\Pi^{\alpha}_{\nu\beta}). \tag{8.5.23}$$

Переходя в выводе теоремы Нётер (§ 2.4) от частных производных к e-ковариантным путем замены

$$\xi^{\mu}_{,\nu} = \xi^{\mu}_{|\nu} - \xi^{\lambda}\gamma^{\mu}_{\lambda\nu} \tag{8.5.24}$$

и т. д., нетрудно получить новые сильные соотношения Нётер:

$$-J^B A_{B|\sigma} + (u_{\sigma}{}^{\beta} - T_{\sigma}{}^{\beta} - J^B a_B|_{\sigma}{}^{\beta})_{|\beta} = 0, \tag{8.5.25}$$

$$u_{\sigma}{}^{\alpha} + m^{\beta\alpha}_{\sigma|\beta} = 0, \tag{8.5.26}$$

$$m^{\alpha\tau}_{\sigma} + n^{\beta\tau\alpha}_{\sigma|\beta} = f^{\alpha\tau}_{\sigma}, \quad f^{\alpha\tau}_{\sigma} = -f^{\tau\alpha}_{\sigma}, \tag{8.5.27}$$

$$n^{\{\alpha\tau\beta\}}_{\sigma} = 0; \tag{8.5.28}$$

из них, очевидно, нетривиальны лишь последние три, приводящие к соотношению

$$u^{\alpha}_{\sigma|\alpha} = 0. \tag{8.5.29}$$

Здесь введены следующие очевидные определения:

$$\sqrt{-e}\, u_{\sigma}{}^{\alpha} = \mathrm{U}_{\sigma}{}^{\alpha} - \mathrm{M}^{\alpha\tau}_{\omega}\gamma^{\omega}_{\sigma\tau} - \mathrm{N}^{\alpha\tau\beta}_{\omega}\frac{\partial\gamma^{\omega}_{\tau\beta}}{\partial x^{\sigma}}, \tag{8.5.30}$$

$$\sqrt{-e}\, m^{\alpha\tau}_{\sigma} = \mathrm{M}^{\alpha\tau}_{\sigma} + \mathrm{N}^{\alpha\omega\beta}_{\sigma}\gamma^{\tau}_{\omega\beta} - 2\mathrm{N}^{\alpha\tau\beta}_{\omega}\gamma^{\omega}_{\sigma\beta}, \tag{8.5.31}$$

$$\sqrt{-e}\, n^{\alpha\tau\beta}_{\sigma} = \mathrm{N}^{\alpha\tau\beta}_{\sigma}. \tag{8.5.32}$$

Здесь, фактически, тензор $e_{\mu\nu}$ включен в лагранжиан как некоторый новый потенциал, хотя он и не определяется обычным динамическим путем. Естественнее, однако, заранее предполагать, что тензор $e_{\mu\nu}$ и его производные входят в лагранжианы лишь в определенной комбинации, а именно как $\gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$, в составе e-ковариантных производных. Поэтому целесообразно изменить выбор переменных и считать основными переменными потенциалы A_B (не включающие тензора $e_{\mu\nu}$) и их e-ковариантные производные:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(A_B;\ A_{B|\alpha};\ A_{B|\alpha|\beta}). \tag{8.5.33}$$

При выводе теоремы Нётер на основании такого лагранжиана нужно учесть, что операция δ^* не коммутирует с e-ковариантным дифференцированием, причем

$$\delta^*(A_{B|\alpha}) = (\delta^* A_B)_{|\alpha} - a_B\Big|^{\tau}_{\sigma} \cdot \xi^{\sigma}{}_{|\tau|\alpha} \tag{8.5.34}$$

и

$$\delta^*(A_{B|\alpha|\beta}) = (\delta^* A_B)_{|\alpha|\beta} - a_B\Big|^{\tau}_{\sigma} \cdot \xi^{\sigma}{}_{|\tau|\alpha|\beta} -$$

$$- a_B\Big|^{\tau}_{\sigma|\beta} \cdot \xi^{\sigma}{}_{|\tau|\alpha} - a_B\Big|^{\tau}_{\sigma|\alpha} \cdot \xi^{\sigma}{}_{|\tau|\beta} + A_{B|\sigma}\xi^{\sigma}{}_{|\alpha|\beta}. \tag{8.5.35}$$

Тогда определения плотности новых физических величин $\mathbf{u}_\sigma{}^\alpha$, $\mathbf{m}_\sigma^{\alpha\tau}$ и $\mathbf{n}_\sigma^{\alpha\tau\beta}$ примут вид

$$\mathbf{u}_\sigma{}^\alpha = \mathbf{L}\delta_\sigma{}^\alpha + \mathbf{T}_\sigma{}^\alpha + \mathbf{J}^B a_B\Big|^{\alpha}_{\sigma} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B|\tau}} A_{B|\sigma} -$$

$$- 2\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B|\alpha|\beta}} A_{B|\beta|\sigma} + \left[\frac{2}{3}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B|\tau|\beta}} a_B\right]^{\alpha}_{\sigma|\tau} +$$

$$+ \frac{1}{3}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B|\alpha|\tau}} a_B\Big|^{\beta}_{\sigma|\tau} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B|\alpha|\tau}}\right)_{|\sigma} a_B\Big|^{\beta} -$$

$$- \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B|\tau|\beta}}\right)_{|\tau} a_B\left[{}^{\alpha}_{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B|\alpha}} a_B\Big|^{\beta}_{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B|\beta}} a_B\Big|^{\alpha}_{\sigma}\right]_{\beta} \tag{8.5.36}$$

$$\mathbf{m}_\sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B|\alpha}} a_B\Big|^{\beta}_{\sigma} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B|\beta}} a_B\Big|^{\alpha}_{\sigma}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B|\alpha|\beta}} a_B\Big|^{\tau}_{\sigma}\right)_{|\tau} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B|\tau|\beta}}\right)_{|\tau} a_B\Big|^{\alpha}_{\sigma} +$$

$$+ \frac{4}{3}\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B|\alpha|\tau}}\right)_{|\tau} a_B\Big|^{\beta}_{\sigma} - \frac{2}{3}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A_{B|\tau|\beta}} a_B\Big|^{\alpha}_{\sigma|\tau} + \frac{1}{3}\frac{\partial \mathbf{L}}{A_{B|\alpha|\tau}} a_B\Big|^{\beta}_{\sigma|\tau}, \tag{8.5.37}$$

$$\mathbf{n}_\sigma^{\alpha\beta\tau} = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial L}{\partial A_{B|\sigma|\beta}} a_B\Big|^{\tau}_{\sigma} + \frac{\partial L}{\partial A_{B|\alpha|\tau}} a_B\Big|^{\beta}_{\sigma} - 2\frac{\partial L}{\partial A_{B|\tau|\beta}} a_B\Big|^{\alpha}_{\sigma}\right), \tag{8.5.38}$$

тензорные соотношения Нётер можно записать в виде

$$- \mathbf{J}^B A_{B|\sigma} + \frac{1}{2}\mathbf{T}^{\mu\nu} g_{\mu\nu|\sigma} + (\mathbf{u}_\sigma{}^\alpha - \mathbf{T}_\sigma{}^\alpha - \mathbf{J}^B a_B|_\sigma{}^\alpha)_{|\alpha} +$$

$$+ \left(\frac{\partial L}{\partial A_{B|\alpha|\beta}} A_{B|\sigma} - \frac{\partial L}{\partial A_{B|\tau|\beta}} a_B|^{\alpha}_{\sigma|\tau} - \frac{\delta L}{\delta A_{B|\beta}} a_B|_\sigma{}^\alpha\right)_{|\alpha|\beta} = 0,$$

$$\mathbf{u}_\sigma{}^\alpha + \mathbf{m}^{\beta\alpha}_{\sigma|\beta} = 0, \tag{8.5.40}$$

$$\mathbf{m}_\sigma^{\alpha\beta} + \mathbf{n}_{\sigma|\tau}^{\tau\alpha\beta} = \mathbf{f}_\sigma^{\alpha\beta}, \qquad \mathbf{f}_\sigma^{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_\sigma^{\beta\alpha}, \tag{8.5.41}$$

$$\mathbf{n}_\sigma^{\{\alpha\beta\tau\}} = 0, \tag{8.5.42}$$

из которых первое, как обычно, выполняется тождественно, а следствием остальных является закон

$$\mathbf{u}_{\sigma|\alpha}^{\alpha} = 0. \tag{8.5.43}$$

Конечно, здесь можно снова вернуться к уравнениям с использованием частных производных, в точности совпадающим с обычными соотношениями Нётер. При этом новые выражения для $\mathrm{U}_\sigma{}^\alpha$, $\mathrm{M}\,{}_\sigma^{\alpha\tau}$ и $\mathrm{N}\,{}_\sigma^{\alpha\tau\beta}$ имеют вид

$$\mathrm{U}_\sigma{}^\alpha = \mathbf{u}_\sigma{}^\alpha + \mathbf{m}_\sigma^{\beta\nu}\overset{\alpha}{\gamma}{}_{\nu\beta} - \mathbf{m}_\nu^{\beta\alpha}\overset{\nu}{\gamma}{}_{\sigma\beta} + (\mathbf{n}_\nu^{\beta\alpha\lambda}\overset{\nu}{\gamma}{}_{\sigma\beta} - \mathbf{n}_\sigma^{\beta\nu\lambda}\overset{\alpha}{\gamma}{}_{\nu\beta} - \mathbf{n}_\sigma^{\beta\alpha\nu}\overset{\lambda}{\gamma}{}_{\nu\beta})_{,\lambda}, \tag{8.5.44}$$

$$\mathrm{M}_\sigma^{\alpha\tau} = \mathbf{m}_\sigma^{\alpha\tau} + \mathbf{n}_\sigma^{\beta\nu\alpha}\overset{\tau}{\gamma}{}_{\nu\beta} + \mathbf{n}_\sigma^{\beta\tau\nu}\overset{\alpha}{\gamma}{}_{\nu\beta} - \mathbf{n}_\nu^{\beta\tau\alpha}\overset{\nu}{\gamma}{}_{\sigma\beta}, \tag{8.5.45}$$

$$\mathrm{N}_\sigma^{\alpha\tau\beta} = \mathbf{n}_\sigma^{\alpha\tau\beta}. \tag{8.5.46}$$

Если теперь в качестве лагранжиана взять тензорное продолжение Λ_{cov} (8.5.23), то в качестве канонического тензора гравитационного поля [естественно, в смысле соотношений (8.5.40) — (8.5.43), т. е. e-тензорных!] получим

$$\mathrm{t}_\sigma{}^\alpha = \frac{\partial\Lambda_{\mathrm{cov}}}{\partial g^{\omega\varepsilon}{}_{|\alpha}} g^{\omega\varepsilon}_{|\sigma} - \Lambda_{\mathrm{cov}}\,\delta_\sigma{}^\alpha - \left(\frac{\partial\Lambda_{\mathrm{cov}}}{\partial\Pi^\sigma{}_{\alpha\beta}}\right)_{|\beta} \tag{8.5.47}$$

а не тензорное продолжение эйнштейновского псевдотензора:

$$\vartheta_\sigma{}^\alpha = \frac{\partial\Lambda_{\mathrm{cov}}}{\partial g^{\omega\varepsilon}{}_{|\alpha}} g^{\omega\varepsilon}_{|\sigma} - \Lambda_{\mathrm{cov}}\,\delta_\sigma{}^\alpha. \tag{8.5.48}$$

Дополнительный член в (8.5.47) имеет форму дивергенции, и вторая дивергенция от него, как легко убедиться, тождественно равна нулю. Этот член возникает ввиду использования при выводе соотношений Нётер не равной нулю величины $\delta^* e_{\mu\nu}$. Если при этом выводе исходить из обобщенной линейной ортогональной группы, то нежелательный член автоматически пропадает, выражение для спинового момента принимает вид

$$\mathrm{L}^\alpha_{[\omega\varepsilon]} = \frac{1}{2}(\mathbf{m}^\alpha_{\omega\dot{\varepsilon}} - \mathbf{m}^\alpha_{\varepsilon\dot{\omega}}), \tag{8.5.49}$$

а спиновая доля энергии оказывается связанной со спиновым моментом соотношением

$$\frac{1}{2}(\mathbf{u}_{\omega\dot{\varepsilon}} - \mathbf{u}_{\varepsilon\dot{\omega}}) = -\mathrm{L}^\alpha_{[\omega\varepsilon]|\alpha}. \tag{8.5.50}$$

Можно, однако, получить канонический тензор в форме (8.5.48), исходя и из общих преобразований, но подобрав соответствующий лагранжиан гравитационного поля, на этот раз со вторыми производными. Для этого достаточно определить неопределенные вначале коэффициенты a и b в дивергенциальном добавке, который мы включаем в лагранжиан:

$$\lambda = \frac{1}{2}[\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu|\alpha}(a g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + b g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta})]_{|\beta}. \tag{8.5.51}$$

Соответствующие вычисления в принципе несложны (см. Мицкевич, 1965в) и дают

$$a = -11/8, \qquad b = 7/4, \tag{8.5.52}$$

а новый лагранжиан принимает вид (3.1.9).

Указанный здесь способ сопоставления римановой метрики $g_{\mu\nu}$ и тензора $e_{\mu\nu}$ (соотношение (8.5.3), на основании которого тензор $e_{\mu\nu}$ определяется распределением и движением источников гравитационного поля, допускает интерпретацию в духе принципа Маха, а именно, что инерциальные системы [в которых тензор $e_{\mu\nu}$ имеет вид (8.5.1)] определяются всей совокупностью масс Вселенной. Правда, здесь продолжает оставаться без ответа вопрос о том, *как именно* эти массы обусловливают само существование пространства-времени. Этот вопрос как аспект принципа Маха имеет, по-видимому, наиболее глубокий смысл.

Двуметрический формализм имеет разнообразные приложения в общей теории относительности; сюда можно отнести проблему энергии, проблему движения и проблему квантования гравитационного поля [см., в частности, работы Гутмана (1959—1961)].

8.6. Матричная формулировка римановой геометрии

Зоммерфельд (1956) предложил рассматривать матрицы Дирака как матричные компоненты некоторого лоренц-ковариантного вектора, а вместо спиноров брать столбцы из 4 скалярных (комплексных) функций. Напомним, что постоянные матрицы Дирака обычно определяются в виде

$$\left.\begin{aligned} \underset{0}{\gamma^0} &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \underset{0}{\gamma^1} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \underset{0}{\gamma^2} &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \underset{0}{\gamma^3} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{8.6.1}$$

где в качестве элементов 4×4-матриц взяты нулевая, единичная 2×2-матрицы и матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8.6.2}$$

Все эти матрицы постоянны, и в их определении главную роль играет свойство

$$\underset{0}{\gamma^\mu}\underset{0}{\gamma^\nu} + \underset{0}{\gamma^\nu}\underset{0}{\gamma^\mu} = 2\delta^{\mu\nu}\cdot I, \tag{8.6.3}$$

которое не нарушается при *преобразовании подобия* матриц Дирака:

$$\underset{0}{\bar{\gamma}^\mu} = P^{-1}\underset{0}{\gamma^\mu}P, \tag{8.6.4}$$

где P — некоторая неособенная 4×4-матрица. Итак, в представлении Зоммерфельда матрицы Дирака должны комбинироваться друг с другом при переходах между системами координат. Мы обобщим это представление на случай искривленного пространства, когда обобщенные матрицы Дирака γ^μ являются функциями координат и преобразуются по закону

$$\gamma'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\gamma^\nu(x). \tag{8.6.5}$$

Теперь наши матрицы должны удовлетворять соотношению

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I, \tag{8.6.6}$$

причем, в отличие от метрического тензора, их производные не могут быть уничтожены локально путем преобразования координат, если только тензор кривизны Римана — Кристоффеля не равен нулю.

С помощью матриц γ^μ можно извлечь матричный «корень» из квадрата 4-мерного интервала:

$$«ds» = \gamma^\mu dx^\mu. \tag{8.6.7}$$

Важны следующие свойства шпуров γ-матриц:

$$\frac{1}{4}\operatorname{Sp}(\gamma_\mu\gamma_\nu) = g_{\mu\nu}, \tag{8.6.8}$$

$$\operatorname{Sp}\gamma_\mu = 0, \tag{8.6.9}$$

$$\operatorname{Sp}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda) = 0, \tag{8.6.10}$$

$$\frac{1}{4}\operatorname{Sp}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho) = g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho} + g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} \tag{8.6.11}$$

и т. д.; при выводе этих соотношений полезно учесть равенство

$$\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu = -2\gamma_\mu \tag{8.6.12}$$

и воспользоваться циклической переставимостью матриц-сомножителей под знаком шпура.

По своим свойствам на обычные компоненты γ-матриц похожа матрица γ^5, определяемая как

$$\gamma^5 \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{4!}E_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho. \tag{8.6.13}$$

Шпур ее равен нулю, а все элементы обладают свойствами псевдоскаляров. Кроме того,

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0 \tag{8.6.14}$$

и

$$\gamma^5\gamma^5 = -\mathrm{I}. \tag{8.6.15}$$

В общем случае 4×4-матрица обладает 16 элементами; поэтому может существовать 16 линейно независимых 4×4-матриц. Удобнее всего выбрать в качестве таких матриц единичную матрицу I, 4 матрицы γ^μ, псевдоскалярную матрицу γ^5:

$$\mathrm{I},\ \gamma^\mu,\ \gamma^5, \tag{8.6.16}$$

шестикомпонентную тензорную матрицу

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu), \tag{8.6.17}$$

наконец, 4 матрицы

$$\tilde{\gamma}^\mu = \frac{1}{3!}E_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho, \tag{8.6.18}$$

являющиеся компонентами аксиального 4-вектора.

Эту матрицу можно сопоставить полностью антисимметричному матричному тензору 3-го ранга:

$$\tau^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu}\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\sigma^{\mu\nu}) = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda - \gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu), \tag{8.6.19}$$

а матрицу γ^5 — полностью антисимметричному матричному тензору 4-го ранга:

$$\theta^{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2}(\tau^{\mu\nu\lambda}\gamma^\rho - \gamma^\rho\tau^{\mu\nu\lambda}). \tag{8.6.20}$$

Если бы пространство имело более 4 измерений, то потребовалась бы отличная от нуля полностью антисимметричная пятииндексная матрица

$$\pi^{\mu\nu\lambda\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\theta^{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^{\sigma} + \gamma^{\sigma}\theta^{\mu\nu\lambda\rho}); \tag{8.6.21}$$

однако она тождественно равна нулю. Формально это можно связать со свойствами 4×4-матриц, тем более, что можно построить матрицы с бо́льшим числом строк и столбцов, полностью антисимметричные по сколь угодно большому наперед заданному числу индексов и ненулевые.

Ковариантное дифференцирование применяется к γ-матрицам по обычному правилу:

$$\gamma^{\mu}{}_{;\nu} = \gamma^{\mu}{}_{,\nu} + \gamma^{\lambda}\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\mu}. \tag{8.6.22}$$

Отметим следующие полезные соотношения для производных γ-матриц:

$$\mathrm{Sp}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}{}_{;\lambda}) = -\mathrm{Sp}(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}{}_{;\lambda}), \tag{8.6.23}$$

$$\mathrm{Sp}(\gamma^{\lambda}\gamma_{\mu,\nu}) = -\mathrm{Sp}(\gamma_{\mu}\gamma^{\lambda}{}_{,\nu}), \tag{8.6.24}$$

$$\mathrm{Sp}(\gamma_{\beta}\gamma_{\mu;\nu}) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\gamma_{\beta}f_{\nu\mu} + \gamma_{\mu}f_{\beta\nu} - \gamma_{\nu}f_{\mu\beta}), \tag{8.6.25}$$

где

$$f_{\mu\nu} = \gamma_{\nu;\mu} - \gamma_{\mu;\nu} \equiv \gamma_{\nu,\mu} - \gamma_{\mu,\nu}, \tag{8.6.26}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha} = \frac{1}{8}g^{\alpha\lambda}\mathrm{Sp}(\gamma_{\mu}f_{\nu\lambda} + \gamma_{\nu}f_{\mu\lambda} + \gamma_{\lambda}(\gamma_{\mu,\nu} + \gamma_{\nu,\mu})), \tag{8.6.27}$$

$$\mathrm{Sp}(\gamma_{\beta}\gamma^{\nu}{}_{;\nu}) = \mathrm{Sp}(\gamma^{\nu}f_{\beta\nu}), \tag{8.6.28}$$

$$\Gamma_{\mu\alpha}{}^{\alpha} = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}(\gamma^{\alpha}\gamma_{\alpha,\mu}), \tag{8.6.29}$$

$$g^{\mu\lambda}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma_{\lambda}\gamma_{\mu;\nu;\rho}) = -g^{\mu\lambda}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma_{\mu;\nu}\gamma_{\lambda;\rho}). \tag{8.6.30}$$

Очень просто выглядят в матричном представлении выражения для кривизны:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}[\gamma_{\mu}(\gamma_{\nu;\,\alpha;\,\beta} - \gamma_{\nu;\,\beta;\,\alpha})], \tag{8.6.31}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}[\gamma_{\alpha}(\gamma_{\mu;\nu;\alpha} - \gamma_{\mu;\alpha;\nu})], \tag{8.6.32}$$

$$R = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\gamma^{\alpha}\gamma^{\nu}{}_{;\nu})_{;\alpha} + \frac{1}{4}\mathrm{Sp}(\gamma^{\mu}{}_{;\nu}\gamma^{\nu}{}_{;\mu} - \gamma^{\mu}{}_{;\mu}\gamma^{\nu}{}_{;\nu}). \tag{8.6.33}$$

Здесь мы выделили в скалярной кривизне дивергенциальный член, который после домножения кривизны на $\sqrt{-g}$ приводится к виду аффинной (обычной) дивергенции, так что в качестве лагранжиана гравитационного поля можно взять в матричном представлении величину

$$\mathrm{L}_g = \frac{\sqrt{-g}}{8\varkappa}\mathrm{Sp}(\gamma^{\mu}{}_{;\nu}\gamma^{\nu}{}_{;\mu} - \gamma^{\mu}{}_{;\mu}\gamma^{\nu}{}_{;\nu}). \tag{8.6.34}$$

Интересно отметить, что тождества Бианки непосредственно доказываются в матричном представлении без обычно используемого перехода к локально геодезической системе координат. Заметим для этого сначала, что

$$A_{B;\,\nu;\,\lambda} - A_{B;\,\lambda;\,\nu} = -a_B\Big|{}_{\alpha}^{\beta} R_{\cdot\beta\nu\lambda}^{\alpha}. \tag{8.6.35}$$

Тогда выражение

$$R_{\rho\mu\nu\lambda;\,\sigma}+R_{\rho\mu\lambda\sigma;\,\nu}+R_{\rho\mu\sigma\nu;\,\lambda} \tag{8.6.36}$$

после подстановки (8.6.31) переходит в

$$\begin{gathered}R^{\alpha}_{\cdot\,\mu\nu\lambda}(\gamma_\alpha\gamma_{\rho;\,\sigma}+\gamma_\rho\gamma_{\alpha;\,\sigma})+R^{\alpha}_{\cdot\,\mu\sigma\nu}(\gamma_\alpha\gamma_{\rho;\,\lambda}+\gamma_\rho\gamma_{\alpha;\,\lambda})+\\+R^{\alpha}_{\cdot\,\mu\lambda\sigma}(\gamma_\alpha\gamma_{\rho;\,\nu}+\gamma_\rho\gamma_{\alpha;\,\nu})+\gamma_\rho\gamma_{\mu;\,\alpha}(R^{\alpha}_{\cdot\,\nu\lambda\sigma}+R^{\alpha}_{\cdot\,\lambda\sigma\nu}+R^{\alpha}_{\cdot\,\sigma\nu\lambda}).\end{gathered} \tag{8.6.37}$$

(мы опустили знак шпура, под которым должно в действительности стоять это выражение!). Первые три скобки (с учетом шпура) обращаются в нуль в силу тождества (8.6.23), а последняя скобка — в силу тождеств Риччи

$$R_{\alpha\mu\nu\lambda}+R_{\alpha\nu\lambda\mu}+R_{\alpha\lambda\mu\nu}=0, \tag{8.6.38}$$

так что тем самым тождества Бианки (1.81) доказаны без обычно практикуемого перехода к локально геодезической системе координат.

Мы приведем здесь также вариационный вывод уравнения геодезической с помощью γ-матриц. Речь идет об экстремали между двумя *фиксированными* мировыми точками A и B:

$$\delta\int\limits_A^B ds=0, \tag{8.6.39}$$

так что

$$\delta x^\mu|_{A,\,B}=0. \tag{8.6.40}$$

Заметим теперь, что

$$ds^2=\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma_\mu\,dx^\mu\,\gamma_\nu\,dx^\nu), \tag{8.6.41}$$

и вариация этого выражения равна

$$ds\,\delta\,ds=\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,[\gamma_\mu\,dx^\mu\,\delta\,(\gamma_\nu\,dx^\nu)]. \tag{8.6.42}$$

Имея в виду, что вариации подвергаются точки, через которые проходит мировая линия, мы получаем

$$\delta\gamma_\nu=\gamma_{\nu,\,\lambda}\,\delta x^\lambda, \tag{8.6.43}$$

так что

$$\begin{gathered}\delta ds=\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\left\{\gamma_\mu\gamma_{\nu,\,\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\delta x^\lambda+\frac{d}{ds}\left[\gamma_\mu\gamma_\nu\frac{dx^\mu}{ds}\delta x^\nu\right]-\right.\\\left.-\gamma_{\mu,\,\lambda}\gamma_\nu\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}\delta x^\nu-\gamma_\mu\gamma_{\nu,\,\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}\delta x^\nu-\gamma_\mu\gamma_\nu\frac{d^2x^\mu}{ds^2}\delta x^\nu\right\}ds.\end{gathered} \tag{8.6.44}$$

Комбинируя слагаемые и отбрасывая полный дифференциал ввиду требования (8.6.40), а также учитывая произвольность вариаций координат точек внутри области интегрирования, находим

$$g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma_\mu f_{\lambda\nu}+\gamma_\nu\gamma_{\mu,\,\lambda})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}=0. \tag{8.6.45}$$

Вспоминая выражение для символов Кристоффеля через γ-матрицы (8.6.27) и учитывая в уравнении (8.6.45) симметрию множителя

$(dx^{\mu} / ds) \cdot (dx^{\lambda} / ds)$, получаем

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} = 0 \tag{8.6.46}$$

— уравнение геодезической линии.

Матричное представление может быть полезно также при рассмотрении интегральных величин (в особенности *сохраняющихся*), когда интегрирование становится невыполнимым или теряет ясный смысл ввиду наличия у подынтегрального выражения свободных индексов (например, при интегрировании некоторого тензора). Тогда можно домножить подынтегральное выражение на соответствующее число γ-матриц с суммированием по индексам так, чтобы матричные индексы оставались свободными. Затем, после проведения интегрирования, полученное выражение домножается дополнительно на γ-матрицы со свободными тензорными индексами, причем проводится суммирование по соответствующим матричным индексам, чтобы восстановить тензорную структуру взятого выражения.

Однако, взяв в качестве множителя при интегральном выражении зависящие от координат матрицы, мы сталкиваемся с неудобством, которое можно охарактеризовать как использование неинерционной системы наблюдения. Если интегральную динамическую переменную мыслить как рассматриваемую «извне» (наблюдатель находится вдали от распределения масс в некоторой островной модели Вселенной), то удобно взять в качестве множителя *постоянные* матрицы Дирака, сопрягая с ними асимптотические значения γ-матриц в данном пространстве. Тогда результаты нетрудно выразить на языке частной теории относительности.

Запишем сказанное в математической форме, взяв для простоты случай, когда лагранжиан не зависит от вторых производных потенциалов, и подставив в соотношение (2.4.20) в качестве ξ^{σ} произведение $\gamma^{\sigma} \cdot \xi$ (т. е. взяв, по существу, *сразу* систему преобразований, скомбинировав их в матричной форме). Мы получим

$$(\mathrm{U}_{\sigma}{}^{\alpha}\gamma^{\sigma} + \mathrm{M}_{\sigma}^{\alpha\tau} \overset{\sigma}{\gamma}_{,\tau})_{,\alpha} = 0, \tag{8.6.47}$$

если учтем обращение в нуль первой квадратной скобки в (2.4.20) (полная система полей). Следовательно, имеет место закон сохранения *матричной контравариантной векторной плотности*

$$\mathrm{G}^{\alpha} = \mathrm{U}_{\sigma}{}^{\alpha}\gamma^{\sigma} + \mathrm{M}_{\sigma}^{\alpha\tau} \overset{\sigma}{\gamma}_{,\tau}, \tag{8.6.48}$$

$$\int\limits_{\Sigma} \mathrm{G}^{\alpha}_{ab}\, dS_{\alpha} = \mathrm{const}. \tag{8.6.49}$$

Теперь полученное интегральное выражение остается лишь умножить на γ_{μ} и взять шпур, а результат интерпретировать как частнорелятивистский 4-вектор энергии-импульса, взятый в декартовой системе центра масс с точки зрения «внешнего» наблюдателя. (Ср. конец § 2.4.)

8.7. Представление метрического поля с помощью тетрад

Матричному представлению метрического поля родственно широко распространенное в настоящее время и имеющее более продолжительную историю тетрадное представление. Под тетрадой понимают четверку (в 4-мерном мире) 4-векторов, которые линейно независимы и образуют *поле* над пространством-временем. В искривленном мире не может быть такого поля ортогональных реперов (тетрад), которое допускало бы однозначное распространение на все 4-пространство координатной сетки, построенной как совокупность огибающих этого векторного поля. В этом смысле говорят о *неголономности* реперных «координат». Тетрады (реперы) называют также тетраподами. Наше изложение будет средним между теми, которые можно встретить в книге Румера (1956) и работе Пеллегрини и Плебаньского (1962), хотя в деталях мы не следуем ни одному из этих авторов.

Четырехмерный интервал определяется, как известно, равенством

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{8.7.1}$$

Вводя «нонвариантные» (тетрадные) компоненты дифференциалов координат,

$$dx(\alpha) = g_\mu(\alpha) dx^\mu, \tag{8.7.2}$$

можно переписать определение (8.7.1) в виде

$$ds^2 = dx(\alpha) \cdot dx(\alpha). \tag{8.7.3}$$

Неголономный характер «координат» $x(\alpha)$ состоит в том, что $dx(\alpha)$ не являются полными дифференциалами, т. е. их интегралы зависят от выбора кривой интегрирования, так что «координаты» не распространяются на риманово пространство, хотя их и можно представить как истинные координаты в некотором касательном пространстве. Ковариантные компоненты тетрад определяются как обычно:

$$g^\mu(\alpha) = g^{\mu\nu} g_\nu(\alpha). \tag{8.7.4}$$

По повторяющимся индексам проводится суммирование (также и по нонвариантным, которые можно понимать просто как «номер» вектора в тетраде). Из сравнения формул (8.7.1) и (8.7.3) видно, что

$$g_\mu(\alpha) g_\nu(\alpha) = g_{\mu\nu}. \tag{8.7.5}$$

В то время как в локально геодезической системе

$$(g_{\mu\nu})_0 = \delta_{\mu\nu} \equiv \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1), \tag{8.7.6}$$

для тетрадных векторов можно принять в качестве предела

$$(g_\mu(\alpha))_0 = \delta_\mu(\alpha) \equiv \operatorname{diag}(1, i, i, i), \tag{8.7.7}$$

и «нонвариантные координаты» в плоском мире запишутся как

$$(x(\alpha))_0 = (ct; ix; iy; iz). \tag{8.7.8}$$

Отсюда видно, что детерминант тетрад (детерминант ковариантно-нонвариантных компонент метрического тензора) целесообразно взять в виде

$$i \operatorname{Det}[g_\mu(\alpha)] = G, \tag{8.7.9}$$

причем, очевидно,

$$|G| = +\sqrt{-g}. \tag{8.7.10}$$

Этот детерминант должен быть, естественно, отличным от нуля.

Принятые определения приводят к равенствам

$$\delta_\beta{}^\alpha = g^{\mu\alpha} g_{\mu\beta} = g^\mu(\sigma) g^\alpha(\sigma) g_\mu(\tau) g_\beta(\tau) = g^\alpha(\sigma) g_\beta(\sigma), \tag{8.7.11}$$

откуда

$$g^\alpha(\sigma) g_\beta(\tau) [g^\mu(\sigma) g_\mu(\tau) - \delta_\tau{}^\sigma] = 0. \tag{8.7.12}$$

Таким образом, нонвариантно-нонвариантные компоненты метрического тензора совпадают с соответствующими компонентами символа Кронекера (в силу $G \neq 0$):

$$g(\sigma, \tau) \equiv g^\mu(\sigma) g_\mu(\tau) = \delta_\tau{}^\sigma. \tag{8.7.13}$$

Переходя к дифференциальным операциям, можно определить

$$\frac{\partial}{\partial x(\alpha)} \overset{\mathrm{Def}}{=} g^{\mu}(\alpha)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}. \tag{8.7.14}$$

Вместе с определением (8.7.2) это дает

$$\frac{\partial x'(\alpha)}{\partial x(\beta)} = g_{\mu}'(\alpha) g^{\nu}(\beta)\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = g'^{\lambda}(\alpha) g^{\nu}(\beta) g'_{\lambda\mu}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} =$$

$$= g'^{\lambda}(\alpha) g^{\nu}(\beta) g_{\sigma\nu}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} = g'^{\mu}(\alpha) g_{\nu}(\beta)\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x(\beta)}{\partial x'(\alpha)}. \tag{8.7.15}$$

Как известно, при инфинитезимальных преобразованиях координат имеем

$$dx'^{\mu} = dx^{\mu} + d\delta x^{\mu} \tag{8.7.16}$$

в случае обычных контравариантных координат; нонвариантные дифференциалы координат преобразуются, в отличие от них, по закону

$$dx'(\alpha) = dx(\alpha) + \delta dx(\alpha). \tag{8.7.17}$$

Выбранный порядок символов d и δ определяется теми обстоятельствами, что при умножении левой и правой частей равенства (8.7.16) на $g'_{\mu}(^{\mu})$,

$$g'_{\mu}(\alpha) = g_{\mu}(\alpha) + \delta g_{\mu}(\alpha), \tag{8.7.18}$$

мы получим для $\delta dx(\alpha)$ выражение

$$\delta dx(\alpha) = g_{\mu}(\alpha) d\delta x^{\mu} + \delta g_{\mu}(\alpha) dx^{\mu}, \tag{8.7.19}$$

а не

$$d\delta x(\alpha) = g_{\mu}(\alpha) d\delta x^{\mu}. \tag{8.7.20}$$

Дальнейшие простые вычисления приводят к соотношениям

$$\frac{\delta\partial x(\alpha)}{\partial x(\beta)} = -\frac{\delta\partial x(\beta)}{\partial x(\alpha)}, \tag{8.7.21}$$

так что преобразования нонвариантных «координат» можно называть *ортогональными*, хотя о линейности их нельзя говорить в силу неголономности «координат» и вытекающей отсюда неперестановочности дифференцирований по их компонентам. Эти преобразования обычно называют ***поворотами тетрадных векторов***.

Такие преобразования тетрадных (нонвариантных) индексов можно рассматривать с двух точек зрения.

а) Нонвариантные преобразования независимы от ко- и контравариантных. Тогда сразу во всех точках 4-пространства таблицу для компонент $g_{\mu}(\alpha)$ можно привести к «треугольному» виду

$$(g_{\mu}(\alpha)) = \begin{Vmatrix} g_0(0) & g_0(1) & g_0(2) & g_0(3) \\ 0 & g_1(1) & g_1(2) & g_1(3) \\ 0 & 0 & g_2(2) & g_2(3) \\ 0 & 0 & 0 & g_3(3) \end{Vmatrix}, \tag{8.7.22}$$

так что все тетрадные векторы в совокупности будут обладать 10 независимыми элементами, как и $g_{\mu\nu}$. Этот подход является общепринятым.

б) Можно связать друг с другом *все* преобразования. Тогда напрашивается гипотеза:

$$\frac{\delta\partial x(\alpha)}{\partial x(\beta)} = \Lambda\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right)^{\nu}_{\mu}\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}}, \tag{8.7.23}$$

причем

$$\Lambda\binom{\alpha}{\beta}^{\nu}_{\mu} = -\Lambda\binom{\beta}{\alpha}^{\nu}_{\mu}, \tag{8.7.24}$$

и простейшим вариантом такой связи будет

$$\Lambda\binom{\alpha}{\beta}^{\nu}_{\mu} = \frac{1}{2}[g^{\nu}(\beta)g_{\mu}(\alpha) - g^{\nu}(\alpha)g_{\mu}(\beta)]. \tag{8.7.25}$$

Нонвариантные компоненты тензоров преобразуются по закону типа

$$A'(\alpha) = \frac{\partial x'(\alpha)}{\partial x(\beta)} A(\beta) = \frac{\partial x(\beta)}{\partial x'(\alpha)} A(\beta), \tag{8.7.26}$$

а переход от обычных компонент к этим определяется по аналогии с равенством (8.7.2). Смешанные компоненты тензоров [например, $T_{\mu}(\alpha)$] преобразуются очевидным образом.

Мы введем теперь два типа ковариантных производных: производные, обозначаемые точкой с запятой (;) перед соответствующим индексом и не затрагивающие нонвариантных индексов в согласии с концепцией преобразований «а», и производные, обозначаемые оператором «набла» (∇), касающиеся также нонвариантных индексов и поэтому, возможно, более близкие к концепции «б». Тогда

$$g_{\lambda}(\alpha)_{;\mu;\nu} - g_{\lambda}(\alpha)_{;\nu;\mu} = g_{\varkappa}(\alpha) R^{\varkappa}_{\cdot\lambda\mu\nu}, \tag{8.7.27}$$

откуда следует простое равенство

$$R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = g_{\varkappa}(\alpha)\,[g_{\lambda}(\alpha)_{;\mu;\nu} - g_{\lambda}(\alpha)_{;\nu;\mu}] \tag{8.7.28}$$

для тензора Римана — Кристоффеля; тензор Риччи равен тогда

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda}(\alpha)[g_{\mu}(\alpha)_{;\nu;\lambda} - g_{\mu}(\alpha)_{;\lambda;\nu}], \tag{8.7.29}$$

а скалярная кривизна —

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu}(\alpha)[g^{\nu}(\alpha)_{;\nu;\mu} - g^{\nu}(\alpha)_{;\mu;\nu}] = \\ &= 2[g^{\mu}(\alpha)g^{\nu}(\alpha)_{;\nu}]_{;\mu} + g^{\mu}(\alpha)_{;\nu}g^{\nu}(\alpha)_{;\mu} - g^{\mu}(\alpha)_{;\mu}g^{\nu}(\alpha)_{;\nu}, \end{aligned} \tag{8.7.30}$$

где было использовано свойство антисимметрии

$$g^{\mu}(\alpha)g^{\nu}(\alpha)_{;\lambda} = -g^{\nu}(\alpha)g^{\mu}(\alpha)_{;\lambda}. \tag{8.7.31}$$

Таким образом, в плотности скалярной кривизны вторые производные тетрад «уходят» в обычную дивергенцию:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}R &= [\sqrt{-g}g^{\mu}(\alpha)g^{\nu}(\alpha)_{;\nu}]_{,\mu} + \\ &+ \sqrt{-g}[g^{\mu}(\alpha)_{;\nu}g^{\nu}(\alpha)_{;\mu} - g^{\mu}(\alpha)_{;\mu}g^{\nu}(\alpha)_{;\nu}], \end{aligned} \tag{8.7.32}$$

откуда следует удобное выражение для лагранжиана метрического поля в тетрадном представлении. Следует, однако, отметить тот факт, что такое разбиение неинвариантно относительно «поворотов тетрад», хотя и инвариантно по отношению к преобразованиям координат в общей теории относительности.

Мы выведем теперь закон ковариантного дифференцирования, затрагивающий нонвариантные индексы. Рассмотрим для этого обычную частную производную нонвариантного вектора:

$$\left[\frac{\partial A(\alpha)}{\partial x(\beta)}\right]' = \frac{\partial}{\partial x'(\beta)}\left[\frac{\partial x(\gamma)}{\partial x'(\alpha)} A(\gamma)\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 x(\gamma)}{\partial x'(\beta)\,\partial x'(\alpha)} A(\gamma) + \frac{\partial x(\gamma)}{\partial x'(\alpha)} \frac{\partial x(\delta)}{\partial x'(\beta)} \frac{\partial A(\gamma)}{\partial x(\delta)}. \tag{8.7.33}$$

При этом, вообще говоря,

$$\frac{\partial^2}{\partial x(\beta)\,\partial x(\alpha)} \neq \frac{\partial^2}{\partial x(\alpha)\,\partial x(\beta)}. \tag{8.7.34}$$

Наконец, нетрудно вывести закон преобразования

$$\left[g^{\mu}(\varepsilon) \frac{\partial g_{\mu}(\alpha)}{\partial x(\beta)} - g^{\mu}(\beta) \frac{\partial g_{\mu}(\alpha)}{\partial x(\varepsilon)} \right]' =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 x(\gamma)}{\partial x'(\varepsilon)\,\partial x'(\beta)} - \frac{\partial^2 x(\gamma)}{\partial x'(\beta)\,\partial x'(\varepsilon)} \right] \frac{\partial x(\gamma)}{\partial x'(\alpha)} +$$

$$+ \frac{\partial x(\xi)}{\partial x'(\varepsilon)} \frac{\partial x(\gamma)}{\partial x'(\alpha)} \frac{\partial x(\delta)}{\partial x'(\beta)} \left[g^{\lambda}(\xi) \frac{\partial g_{\lambda}(\gamma)}{\partial x(\delta)} - g^{\lambda}(\delta) \frac{\partial g_{\lambda}(\gamma)}{\partial x(\xi)} \right], \tag{8.7.35}$$

если учесть свойство антисимметрии

$$\frac{\partial^2 x(\gamma)}{\partial x'(\beta)\,\partial x'(\alpha)} \frac{\partial x(\gamma)}{\partial x'(\varepsilon)} = - \frac{\partial^2 x(\gamma)}{\partial x'(\beta)\,\partial x'(\varepsilon)} \frac{\partial x(\gamma)}{\partial x'(\alpha)} \tag{8.7.36}$$

а также

$$g_{\mu}'(\alpha) \frac{\partial g'^{\mu}(\varepsilon)}{\partial x'(\beta)} = - g'^{\mu}(\varepsilon) \frac{\partial g'_{\mu}(\alpha)}{\partial x'(\beta)}. \tag{8.7.37}$$

Введем теперь величину

$$\Delta \begin{pmatrix} & \varepsilon \\ \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix} \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2} \left[g^{\mu}(\varepsilon) \frac{\partial g_{\mu}(\alpha)}{\partial x(\beta)} - g^{\mu}(\beta) \frac{\partial g_{\mu}(\alpha)}{\partial x(\varepsilon)} + g^{\mu}(\varepsilon) \frac{\partial g_{\mu}(\beta)}{\partial x(\alpha)} - \right.$$

$$\left. - g^{\mu}(\alpha) \frac{\partial g_{\mu}(\beta)}{\partial x(\varepsilon)} + g^{\mu}(\alpha) \frac{\partial g_{\mu}(\varepsilon)}{\partial x(\beta)} - g^{\mu}(\beta) \frac{\partial g_{\mu}(\varepsilon)}{\partial x(\alpha)} \right] =$$

$$= \Phi_{\mu\nu\lambda} g^{\mu}(\alpha) g^{\nu}(\beta) g^{\lambda}(\varepsilon), \tag{8.7.38}$$

антисимметричную по вертикально расположенным индексам, которую можно также записать в виде

$$\Delta \begin{pmatrix} & \varepsilon \\ \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ g^{\mu}(\varepsilon) \frac{\partial g^{\mu}(\beta)}{\partial x(\alpha)} - g^{\mu}(\beta) \frac{\partial g_{\mu}(\varepsilon)}{\partial x(\alpha)} + \right.$$

$$\left. + g_{\mu\nu,\,\lambda} [g^{\mu}(\alpha) g^{\nu}(\varepsilon) g^{\lambda}(\beta) - g^{\mu}(\alpha) g^{\nu}(\beta) g^{\lambda}(\varepsilon)] \right\}. \tag{8.7.39}$$

Тогда из закона (8.7.35) следует закон преобразования

$$\left[\Delta \begin{pmatrix} & \varepsilon \\ \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix} \right]' = \frac{\partial^2 x(\gamma)}{\partial x'(\alpha)\,\partial x'(\beta)} \frac{\partial x(\gamma)}{\partial x'(\varepsilon)} + \frac{\partial x(\gamma)}{\partial x'(\alpha)} \frac{\partial x(\delta)}{\partial x'(\beta)} \frac{\partial x(\eta)}{\partial x'(\varepsilon)} \Delta \begin{pmatrix} & \eta \\ \gamma & \\ & \delta \end{pmatrix}, \tag{8.7.40}$$

и поэтому дифференциальный нонвариантный тензор 2-го ранга $\nabla(\beta) A(\alpha)$ может быть определен как

$$\nabla(\beta) A(\alpha) \overset{\text{Def}}{=} \frac{\partial A(\alpha)}{\partial x(\beta)} + A(\varepsilon) \Delta \begin{pmatrix} & \alpha \\ \beta & \\ & \varepsilon \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial A(\alpha)}{\partial x(\beta)} - A(\varepsilon) \Delta \begin{pmatrix} & \varepsilon \\ \beta & \\ & \alpha \end{pmatrix}. \tag{8.7.41}$$

Легко показать, что по отношению к такому «нонвариантному» дифференцированию (которое можно путем умножения на $g_\mu(\beta)$ привести и к виду ∇_μ) метрический тензор всегда постоянен:

$$\nabla_\beta g_\mu(\alpha) \overset{\text{Def}}{=} \frac{\partial g_\mu(\alpha)}{\partial x(\beta)} - g_\lambda(\alpha)\Gamma^\lambda_{\mu\nu} g^\nu(\beta) + g_\mu(\varepsilon)\Delta\left(\beta\,{}^{\alpha}_{\varepsilon}\right) = 0. \tag{8.7.42}$$

Поэтому символы $\Delta\left(\alpha\,{}^{\beta}_{\gamma}\right)$, называемые *символами Риччи*, удобно также определить так

$$g_\lambda(\alpha)_{;\,\nu} = -g_\nu(\beta)\,g_\lambda(\varepsilon)\,\Delta\left(\beta\,{}^{\alpha}_{\varepsilon}\right), \tag{8.7.43}$$

или

$$\Delta(\beta_\alpha{}^\varepsilon) = g_\mu(\alpha)_{;\nu}\cdot g^\mu(\varepsilon)\,g^\nu(\beta). \tag{8.7.44}$$

Переходя к ковариантным индексам, запишем символы Риччи в виде

$$\Delta_{\lambda[\nu\mu]} \overset{\text{Def}}{=} \left(\beta\,{}^{\alpha}_{\varepsilon}\right) g_\lambda(\beta)\,g_\mu(\varepsilon)\,g_\nu(\alpha) = \Phi_{\lambda\mu\nu}, \tag{8.7.45}$$

или

$$\Delta\left(\beta\,{}^{\alpha}_{\varepsilon}\right) = g^\lambda(\beta)\,g^\mu(\varepsilon)\,g^\nu(\alpha)\,\Delta_{\lambda[\mu\nu]}. \tag{8.7.46}$$

Необходимо отметить, что обычная форма определения ковариантной производной (1.50), которую можно было бы связать с соотношением (8.7.23), оказывается неприменимой.

Запишем теперь тензор кривизны с помощью символов Риччи. Это легко сделать, заметив, что

$$g_\lambda(\alpha)_{;\,\mu;\,\nu} = -\left[g_\lambda(\varepsilon)\,g_\mu(\beta)\,\Delta\left(\beta\,{}^{\alpha}_{\varepsilon}\right)\right]_{;\,\lambda}, \tag{8.7.47}$$

так что подстановка в (8.7.28) дает

$$R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = g_\varkappa(\alpha)\,g_\lambda(\varepsilon)\,g_\mu(\beta)\,g_\nu(\gamma)\,R(\alpha\varepsilon\beta\gamma) =$$

$$= g_\varkappa(\alpha)\,g_\lambda(\varepsilon)\,g_\mu(\beta)\,g_\nu(\gamma)\left[\frac{\partial\Delta\left(\gamma\,{}^{\alpha}_{\varepsilon}\right)}{\partial x(\beta)} - \frac{\partial\Delta\left(\beta\,{}^{\alpha}_{\varepsilon}\right)}{\partial x(\gamma)} + \Delta\left(\beta\,{}^{\alpha}_{\eta}\right)\Delta\left(\gamma\,{}^{\eta}_{\varepsilon}\right) + \right.$$

$$\left. + \Delta\left(\eta\,{}^{\alpha}_{\varepsilon}\right)\Delta\left(\gamma\,{}^{\eta}_{\beta}\right) - \Delta\left(\gamma\,{}^{\alpha}_{\eta}\right)\Delta\left(\beta\,{}^{\eta}_{\varepsilon}\right) - \Delta\left(\eta\,{}^{\alpha}_{\varepsilon}\right)\Delta\left(\beta\,{}^{\eta}_{\gamma}\right)\right], \tag{8.7.48}$$

а плотность скалярной кривизны принимает вид

$$\sqrt{-g}R = \left[2\sqrt{-g}\,g^\mu(\alpha)\,\Delta\left(\beta\,{}^{\beta}_{\alpha}\right)\right]_{,\,\mu} +$$

$$+ \sqrt{-g}\left[\Delta\left(\beta\,{}^{\alpha}_{\gamma}\right)\Delta\left(\gamma\,{}^{\alpha}_{\beta}\right) - \Delta\left(\beta\,{}^{\alpha}_{\beta}\right)\Delta\left(\gamma\,{}^{\alpha}_{\gamma}\right)\right]. \tag{8.7.49}$$

Тензор Римана — Кристоффеля удобно представить в форме

$$R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = g_\varkappa(\alpha)\,g_\lambda(\varepsilon)\left[\Delta_\nu\binom{\alpha}{\varepsilon}_{,\,\mu} - \Delta_\mu\binom{\alpha}{\varepsilon}_{,\,\nu} + \right.$$

$$\left. + \Delta_\mu\binom{\alpha}{\eta}\quad{}_\nu\binom{\eta}{\varepsilon} - \Delta_\nu\binom{\alpha}{\eta}\Delta_\mu\binom{\eta}{\varepsilon}\right], \tag{8.7.50}$$

если учесть свойство 4-мерного «ротора»

$$\Delta_\nu\binom{\alpha}{\varepsilon}_{;\,\mu} - \Delta_\mu\binom{\alpha}{\varepsilon}_{;\,\nu} \equiv \quad{}_\nu\binom{\alpha}{\varepsilon}_{,\,\mu} - \Delta_\mu\binom{\alpha}{\varepsilon}_{,\,\nu}. \tag{8.7.51}$$

В заключение отметим, что тетрадные повороты тесно связаны со спинорными преобразованиями (унимодулярными преобразованиями в комплексном двумерном пространстве спина).

8.8. Кватернионы в римановом пространстве

Под кватернионом понимают четверку (вообще говоря, комплексных) функций (в частности, чисел). Для кватернионов определены операции сложения, умножения и другие. Не следует думать, что кватернион — это матрица или другая столь же конкретная конструкция. Вспомним, что, например, понятие *группы* не зависит от ее конкретизации. Точно так же понятие кватерниона предполагает лишь наличие 4 функций вне зависимости от конкретного «каркаса», который бы их связывал. Подобно тому, как группы могут иметь свои *представления* (которые, впрочем, сами являются группами), можно ввести и *представления кватернионов* (например, представление с помощью матриц σ Паули).

Кватернион, как уже говорили, представляет собой четверку функций

$$A = (A_1, A_2, A_3, A_4), \tag{8.8.1}$$

или вообще

$$A = (A_a), \tag{8.8.2}$$

где индексы $a, b, \ldots, h$ пробегают значения 1, 2, 3, 4, тогда как $i, j, \ldots, s$ пробегают значения 1, 2, 3 (греческие индексы, как обычно, принимают значения 0, 1, 2, 3). Говорят, что $A = B$ тогда и только тогда, когда все $A_a = B_a$.

Умножая кватернион на комплексное число, получаем снова кватернион:

$$zA = (zA_a). \tag{8.8.3}$$

Операция сложения кватернионов

$$A + B = (A_a + B_a) \tag{8.8.4}$$

является, очевидно, коммутативной и ассоциативной.

Введем, на основании этих определений, *кватернионный базис*:

$$\sigma^a = (\sigma_1{}^a, \sigma_2{}^a, \sigma_3{}^a, \sigma_4{}^a) = (\sigma_b{}^a). \tag{8.8.5}$$

Здесь верхний индекс представляет собой *номер базисного кватерниона* Таким образом, можно считать, что

$$A = A_a\sigma^a, \tag{8.8.6}$$

где компонентами кватерниона A являются некоторые функции или числа A_a. Определяется правило умножения базисных кватернионов:

$$\sigma^i\sigma^j = -i\delta_j{}^i\sigma^4 + i\varepsilon_{ijk}\sigma^k, \tag{8.8.7}$$

$$\sigma^4\sigma^a = \sigma^a\sigma^4 = i\sigma^a. \tag{8.8.8}$$

Поэтому удобно взять просто $\sigma^4 = i$, так что

$$\sigma^a = \begin{cases} \sigma^j, & a = j \\ i, & a = 4 \end{cases}, \tag{8.8.9}$$

причем правило (8.8.7) сводится к

$$\sigma^i\sigma^j = \delta_j{}^i + i\varepsilon_{ijk}\sigma^k. \tag{8.8.10}$$

Отсюда следует общее правило умножения кватернионов:

$$AB = A_iB_i - A_4A_4 + i(A_4B_j + A_jB_4 + \varepsilon_{ljk}A_kB_l)\sigma^j, \tag{8.8.11}$$

т. е.

$$AB = \{i(A_4B_j + A_jB_4 + \varepsilon_{jkl}A_kB_l);\ -i(A_jB_j - A_4B_4)\}. \tag{8.8.12}$$

В общем случае операция умножения кватернионов ассоциативна, но не коммутативна.

Кроме того, над кватернионами определены операции сопряжения

$$\bar{A} = (-A_i, A_4), \tag{8.8.13}$$

эрмитова сопряжения

$$A^+ = (A_i^*, -A_4^*) \tag{8.8.14}$$

и комплексной инверсии

$$A^\times = (-A_a^*). \tag{8.8.15}$$

(Звездочкой * здесь обозначено комплексное сопряжение). На основании предыдущих определений можно доказать соотношения:

$$\overline{AB} = \bar{B}\bar{A}, \tag{8.8.16}$$

$$A\bar{A} = \bar{A}A = (0, 0, 0, iA_aA_a), \tag{8.8.17}$$

т. е.

$$A\bar{A} = -A_aA_a \text{ (комплексное число)}, \tag{8.8.18}$$

$$AB\overline{AB} = A\bar{A}B\bar{B}. \tag{8.8.19}$$

Когда $A\bar{A} = 0$, кватернион A называется нулевым или особенным; когда $A\bar{A} = 1$, кватернион A называется единичным. Любому неособенному кватерниону можно сопоставить обратный кватернион:

$$A^{-1} = \frac{\bar{A}}{A\bar{A}}, \quad AA^{-1} = A^{-1}A = 1 \tag{8.8.20}$$

(в последних произведениях отлична от нуля лишь 4-я компонента, равная $-i$); кроме того, имеют место соотношения

$$(AB)^+ = B^+A^+, \quad (AB)^\times = A^\times B^\times. \tag{8.8.21}$$

Кватернион, удовлетворяющий условию $A^+ = A$, называется *эрмитовым*, а удовлетворяющий условию $A^+ = -A$ — антиэрмитовым. Для любого кватерниона

$$(A^\times)^+ = (A^+)^\times = \bar{A}. \tag{8.8.22}$$

При умножении кватерниона на комплексное число (функцию) z имеем

$$\overline{zA} = z\bar{A}, \quad (zA)^{-1} = z^{-1}A^{-1}, \quad (zA)^+ = z^*A^+, \quad (zA)^\times = z^*A^\times. \tag{8.8.23}$$

Скалярное произведение двух кватернионов равно

$$A \cdot B \stackrel{\text{Def}}{=} -\frac{1}{2}(A\bar{B} + B\bar{A}) = -\frac{1}{2}(\bar{A}B + \bar{B}A) = A_aB_a, \tag{8.8.24}$$

т. е. является числом; квадрат кватерниона равен

$$A \cdot A = -A\bar{A}. \tag{8.8.25}$$

Скалярное произведение базисных кватернионов дает

$$\sigma_a \cdot \sigma_b = \delta_b{}^a = -\frac{1}{2}(\sigma^a\bar{\sigma}^b + \sigma^b\bar{\sigma}^a) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\bar{\sigma}^a\sigma^b + \bar{\sigma}^b\sigma^a). \tag{8.8.26}$$

Поэтому напрашивается мысль об использовании матриц Паули как представления кватернионов; тогда при

$$\sigma^1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^4 = iI \tag{8.8.27}$$

можно установить соответствие

$$A = A_a\sigma^a \leftrightarrow \begin{pmatrix} A_3 + iA_4, & A_1 - iA_2 \\ A_1 + iA_2, & -A_3 + iA_4 \end{pmatrix} = \mathfrak{A} \tag{8.8.28}$$

(изоморфизм!).

Вспомним теперь, как можно перейти к γ-матричному представлению от тетрадного. Именно, взяв нонвариантные γ-матрицы,

$$\gamma(\alpha) = \underset{0}{\gamma^\mu}\delta_\mu(\alpha), \tag{8.8.29}$$

умножим их на $g^\mu(\alpha)$ и получим

$$\gamma^\mu = \gamma(\alpha) g^\mu(\alpha). \tag{8.8.30}$$

Подобным же образом, вводя тетрады и умножая их на кватернионы, мы получаем

$$g^\mu(a)\sigma^a = \sigma^\mu \tag{8.8.31}$$

— вектор-кватернион вместо базисного кватерниона σ^a. Умножая на него 4-векторы, получаем инвариантное относительно преобразований координат кватернионное представление векторов:

$$B_\mu\sigma^\mu = B \tag{8.8.32}$$

или, через тетрадные (нонвариантные) компоненты вектора и через постоянные базисные кватернионы:

$$B = \sigma^a B(a). \tag{8.8.33}$$

Повороты тетрад индуцируют преобразование

$$B' = B(b)\Lambda_{ab}\sigma^a = \sigma^a\Lambda_{ab}B(b), \tag{8.8.34}$$

где Λ_{ab} — коэффициенты ортогонального преобразования, в том числе «преобразования Лоренца» для тетрад, так что $\delta\Lambda_{ab} = -\delta\Lambda_{ba}$, $\Lambda_{ab}\Lambda_{cb} = \delta_c{}^a$. С другой стороны, можно показать, что возможна запись

$$\sigma^a\Lambda_{ab} = Q\sigma^b Q^+. \tag{8.8.35}$$

При этом кватернион преобразования Q (ср. матрицу преобразования!) является единичным:

$$Q\overline{Q} = 1 \tag{8.8.36}$$

или, что то же,

$$Q^+Q^\times = 1. \tag{8.8.37}$$

Однако можно применить и более слабые условия:

$$g^{\mu\nu} = \sigma^\mu\cdot\sigma^\nu, \quad g_{\mu\nu} = \sigma_\mu\cdot\sigma_\nu, \quad \sigma_\mu = g_{\mu\nu}\sigma^\nu. \tag{8.8.43}$$

и

$$Q^+Q^\times = e^{-2i\beta}, \tag{8.8.39}$$

причем β — вещественное число (функция):

$$\beta^* = \beta. \tag{8.8.40}$$

Кроме того, как можно показать,

$$(\overline{Q}\sigma^a Q^\times)_b = (Q\sigma^b Q^+)_a. \tag{8.8.41}$$

Кватернионные дифференциальные операции вводятся как

$$\partial = \sigma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \partial' = Q\sigma^\mu Q^+\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{8.8.42}$$

и аналогичным же образом — для ковариантного дифференцирования. Вектор-кватернионы при скалярном перемножении дают метрический тензор:

$$g^{\mu\nu} = \sigma^{\mu}\cdot\sigma^{\nu}, \quad g_{\mu\nu} = \sigma_{\mu}\cdot\sigma_{\nu}, \quad \sigma_{\mu} = g_{\mu\nu}\sigma^{\nu}. \tag{8.8.43}$$

Из них легко сконструировать тензор Римана— Кристоффеля:

$$\sigma_{\mu;\,\alpha;\,\beta} - \sigma_{\mu;\,\beta;\,\alpha} = \sigma_{\nu} R^{\nu}_{\cdot\,\mu\alpha\beta}, \tag{8.8.44}$$

$$R_{\nu\mu\alpha\beta} = \sigma_{\nu}\cdot(\sigma_{\mu;\,\alpha;\,\beta} - \sigma_{\mu;\,\beta;\,\alpha}), \tag{8.8.45}$$

тензор Риччи

$$R_{\mu\nu} = \sigma^{\alpha}\cdot(\sigma_{\mu;\,\nu;\,\alpha} - \sigma_{\mu;\,\alpha;\,\nu}) \tag{8.8.46}$$

и скалярную кривизну

$$R = \sigma^{\alpha}\cdot(\sigma^{\beta}{}_{;\,\beta;\,\alpha} - \sigma^{\beta}{}_{;\,\alpha;\,\beta}) = [\sigma^{\alpha}\cdot\sigma^{\beta}{}_{;\,\beta} - \sigma^{\beta}\cdot\sigma^{\alpha}{}_{;\,\beta}]_{;\,\alpha} + \\ + \sigma^{\alpha}{}_{;\,\beta}\cdot\sigma^{\beta}{}_{;\,\alpha} - \sigma^{\alpha}{}_{;\,\alpha}\cdot\sigma^{\beta}{}_{;\,\beta}. \tag{8.8.47}$$

Заметим здесь, что

$$\sigma^{\alpha}\cdot\sigma^{\beta}{}_{;\,\beta} = -\sigma^{\beta}\cdot\sigma^{\alpha}{}_{;\,\beta}. \tag{8.8.48}$$

При этом, хотя произведение двух кватернионов $A\cdot B$ инвариантно относительно поворота тетрад, этого нельзя сказать о произведении (скалярном), в котором участвуют *производные* кватернионов, если только не определить новых производных, относительно которых вектор-кватернион σ^{μ} постоянен. Плотность скалярной кривизны,

$$-\sqrt{-g}\,R = \sqrt{-g}\cdot(\sigma^{\alpha}{}_{;\,\beta}\cdot\sigma^{\beta}{}_{;\,\alpha} - \sigma^{\alpha}{}_{;\,\alpha}\cdot\sigma^{\beta}{}_{;\,\beta}) + \\ + [\sqrt{-g}(\sigma^{\alpha}\cdot\sigma^{\beta}{}_{;\,\beta} - \sigma^{\beta}\cdot\sigma^{\alpha}{}_{;\,\beta})]_{,\,\alpha}, \tag{8.8.49}$$

если отбросить дивергенциальный член и умножить оставшееся выражение на $^1/_2\,\varkappa$, дает лагранжиан гравитационного поля, эквивалентный тетрадному и γ-матричному.

Относительно введения в кватернионном представлении спиноров читатель может узнать из обзорной статьи Рестолла (1964). Заметим лишь, что для определения спиноров здесь требуется ввести понятие идеала (левого и правого) и т. д.

8.9. Метод хронометрических инвариантов Зельманова

В 1907 г. Герман Минковский показал, что частная теория относительности Эйнштейна принимает особенно симметричную и простую форму, если рассматривать мир как 4-мерное многообразие, где все координаты, как пространственные, так и временна́я, собраны воедино, а метрика псевдоэвклидова. Такой подход стал еще более общепринятым после создания Эйнштейном общей теории относительности. Четырехмерная симметрия завоевала всеобщее признание и стала довлеть в психологии исследователей. Однако не следует забывать, что сам факт псевдоэвклидова характера (псевдориманова в искривленном мире) нашего реального мира подчеркивает физическую выделенность одной из координат — времени. С другой стороны, все здание физического эксперимента основывается на четком разграничении пространства и времени. Эти обстоятельства подчеркивались разными авторами, например, Мёллером в его книге. Итак, одной из важных теоретических проблем, решение которой является необходимой предпосылкой для установления связи теоретических предсказаний с конкретными экспериментальными фактами, является последовательное и корректное разделение 4-многообразия на пространство и время.

В связи с этой проблемой развивается математическая теория «расслоенных пространств». В физике уже давно пользуются самым примитивным подходом к выделению пространства и времени, определяя интегральные величины для распределенных систем на пространственно-подобных гиперповерхностях (в частной теории относительности — гиперплоскостях). Напомним попутно, что рассмотрение пространственно-подобных гиперповерхностей не всегда может быть согласовано с релятивистским принципом причинности (случай неограниченных гиперповерхностей); выход из возникающей при этом трудности можно усматривать в использовании светового конуса «одновременной видимости» (Бом, см. обсуждение в конце § 2.3).

Можно, однако, обойти такое отсутствие установившихся непротиворечивых методов анализа распределенных систем, вводя понятие *системы отсчета* в пространстве-времени. В традиционной формулировке частной теории относительности, где пользуются лишь декартовыми 4-мерными системами координат (в книге Фока можно найти принципиально иной подход), системы отсчета часто смешивают с системами координат. В действительности такое смешение незаконно, так как разные системы отсчета *непременно* должны находиться в движении друг относительно друга, тогда как разные системы координат могут быть и неподвижными относительно друг друга. Мы говорим, например, что декартова (3-мерная) и сферическая системы координат, центры которых совпадают, принадлежат к *одной и той же* системе отсчета, тогда как две декартовых (4-мерных) системы координат, движущихся друг относительно друга (преобразование Лоренца) принадлежат к двум *разным* (инерциальным) системам отсчета. В общей теории относительности положение усугубляется тем, что и в традиционной теории мы вынуждены пользоваться криволинейными неортогональными координатами. Тогда эти координаты, если задавать их, игнорируя метрику, ничего не говорят о реальных длинах и промежутках времени. Координата x^0 не имеет тогда отношения к истинному времени, которое должно теперь конструироваться из интервалов всех 4 координат! Поэтому приходится использовать термины координатного и физического времени (первое можно назвать «ко-временем», что соответствует английскому «cotime»). Первые четкие определения понятия систем отсчета были даны Зельмановым и Мёллером; основные физические и космологические выводы из него были получены Зельмановым. В дальнейшем эти исследования продолжали Каттанео и Шмутцер, а также ученик последнего Салье.

Дадим определение: к одной и той же системе отсчета относятся все системы координат, преобразования между которыми удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^0} = 0 \tag{8.9.1}$$

и, обратно,

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^0} = 0. \tag{8.9.2}$$

Эти условия означают просто, что все системы координат, принадлежащие к одной и той же системе отсчета, неподвижны друг относительно друга [транзитивность соотношений (8.9.1) очевидна]. Наоборот, если две системы координат движутся друг относительно друга, то они принадлежат к разным системам отсчета. Тогда преобразования координат, *не выводящие за рамки одной и той же системы отсчета*, могут быть записаны как два типа преобразований, реализующихся совместно: *хронометрического* *преобразования*

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^1\ x^2, x^3) \qquad (8.9.3а)$$

и *3-мерного преобразования*

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3). \qquad (8.9.3б)$$

Якобиан 4-мерного преобразования тогда выражается через якобиан 3-мерного преобразования по правилу

$$J^{(4)} = \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} J^{(3)}. \qquad (8.9.4)$$

Интересен закон преобразования 00-компоненты метрического тензора:

$$g'_{00}(x') = \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0}\right)^2 g_{00}(x), \qquad (8.9.5)$$

тогда как

$$g'^{00} = \frac{\partial x'^0}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^0}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} \neq \left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\right)^2 g^{00}. \qquad (8.9.6)$$

Подобным же образом для вектора можно записать

$$A_0'(x') = \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} A_0(x). \qquad (8.9.7)$$

Поэтому легко построить величину, инвариантную относительно группы преобразований (8.9.3):

$$A_t = \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}. \qquad (8.9.8)$$

Величины такого рода мы будем называть, вслед за Зельмановым, *хронометрически инвариантными* 3-мерными скалярами или, короче, *хронометрическими скалярами*. Величины же, преобразующиеся при преобразованиях (8.9.3) как хронометрически инвариантные 3-мерные тензоры, мы будем называть *хронометрическими тензорами*. Так, пространственные компоненты контравариантного 4-вектора образуют хронометрический вектор (хронометрически инвариантный 3-мерный вектор):

$$A'^i(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha} A^\alpha = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j(x). \qquad (8.9.9)$$

Аналогично, g^{ij} является хронометрическим тензором; мы будем обозначать его как

$$g^{ij} = -b^{ij}. \qquad (8.9.10)$$

Вводя обозначение для детерминанта этого 3-мерного метрического тензора (метрический хронометрический тензор!) b^{-1}, можно записать

$$db = b \cdot b^{ij}\, db_{ij} = -b \cdot b_{ij}\, db^{ij}. \qquad (8.9.11)$$

Трехмерный символ Леви-Чивиты очевидным образом строится через 4-мерный символ:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{0ijk}, \qquad (8.9.12)$$

и с помощью него детерминант

$$b = \mathrm{Det}\, b_{ij} = (\mathrm{Det}\, b^{ij})^{-1} \qquad (8.9.13)$$

можно записать как

$$b^{-1} = \frac{1}{3!} b^{ij} b^{kl} b^{mn} \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jln} =$$

$$= -\frac{1}{3!} g^{ij} g^{kl} g^{mn} \varepsilon_{0ikm} \varepsilon_{0jln} = -g^{-1} \cdot g_{00}, \tag{8.9.14}$$

так что

$$b = -\frac{g}{g_{00}}. \tag{8.9.15}$$

На основании равенства (8.9.11) имеем:

$$b_{ij} = -b \frac{\partial}{\partial g^{ij}} \left(\frac{1}{b} \right) = -\frac{g}{g_{00}} \left[\frac{1}{g} \frac{\partial g_{00}}{\partial g^{ij}} + g_{00} \frac{\partial g^{-1}}{\partial g^{ij}} \right]. \tag{8.9.16}$$

Представляя g_{00} как

$$dg_{00} = -g_{\mu 0} g_{\nu 0} dg^{\mu\nu}, \tag{8.9.17}$$

легко найти

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial g^{ij}} = -g_{i0} g_{j0}, \tag{8.9.18}$$

так что, учитывая

$$\frac{\partial g^{-1}}{\partial g^{ij}} = g^{-1} \cdot g_{ij}, \tag{8.9.19}$$

находим окончательно

$$b_{ij} = \frac{g_{i0} g_{j0}}{g_{00}} - g_{ij}. \tag{8.9.20}$$

Это и есть ковариантный метрический 3-тензор, обратный (8.9.10).

Поскольку, как мы видели,

$$A^{\mu} \leftrightarrow (A_t, A^i), \tag{8.9.21}$$

дифференциал координат распадается на следующие хронометрические величины:

$$dx^{\mu} \leftrightarrow (dt, dl^i). \tag{8.9.22}$$

Здесь

$$dt = \frac{g_{0\alpha} dx^{\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} \tag{8.9.23}$$

хронометрически инвариантный интервал времени и

$$dl^i = dx^i \tag{8.9.24}$$

хронометрический вектор дифференциала координат. Квадрат последнего, очевидно, следует записать с помощью нового метрического тензора:

$$dl^2 = b_{ij} dl^i dl^j; \tag{8.9.25}$$

тогда квадрат 4-мерного интервала принимает вид

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = dt^2 - dl^2. \tag{8.9.26}$$

Хронометрический вектор 3-мерной скорости

$$u^i = \frac{dx^i}{dt}, \tag{8.9.27}$$

квадрат которого равен

$$b_{ij}u^iu^j = \frac{dl^2}{dt^2}, \tag{8.9.28}$$

в случае движения с фундаментальной скоростью (скоростью света), когда

$$ds^2 = 0, \tag{8.9.29}$$

оказывается автоматически равным *единице* по модулю:

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = 1. \tag{8.9.30}$$

Мы видим, таким образом, что скорость движения по изотропной геодезической в любом гравитационном поле автоматически равна скорости света (единице в выбранной нами системе единиц). Однако это верно лишь при *локальном* измерении скорости света. В самом деле, если наблюдатель расположен в ином гравитационном поле, чем то, в котором распространяется в данном конкретном случае свет, время наблюдателя будет течь в ином темпе, чем время на траектории луча света (а последнее будет течь по-разному в разных частях траектории!). Мы эффективно приходим тогда к выводу об изменении скорости света в гравитационных полях. Некоторые аспекты этого эффекта обсуждаются в статье Зельдовича и Новикова в Эйнштейновском сборнике (1966).

Отметим теперь полезные соотношения

$$A^0 = \frac{A_0}{g_{00}} - \frac{g_{0i}}{g_{00}} A^i \tag{8.9.31}$$

и

$$A_i = -b_{ij}A^j + \frac{g_{0i}}{g_{00}} A_0, \tag{8.9.32}$$

вывод которых оказывается особенно прост, если воспользоваться приемами типа

$$A^0 \equiv \frac{A_0 g_{00}}{g_{00}} = \frac{A^\alpha g_{\alpha 0} - A^i g_{i0}}{g_{00}}. \tag{8.9.33}$$

Подобным же образом

$$g^{0i} \equiv \frac{g^{0i} g_{00}}{g_{00}} = -\frac{g_{0j}}{g_{00}} g^{ij} \tag{8.9.34}$$

и

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}}\left(1 + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} g^{ij}\right). \tag{8.9.35}$$

Пользуясь этими соотношениями, а также

$$E_{ijk} = \sqrt{b}\, \varepsilon_{ijk}, \tag{8.9.36}$$

нетрудно получить в *произвольных координатах* равенства

$$A_\mu B^\mu = A_t B_t - (\mathbf{AB}), \tag{8.9.37}$$

где

$$A_t = \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}, \qquad (\mathbf{AB}) = b_{ij}A^iB^j; \tag{8.9.38}$$

$$[\mathbf{AB}]_i = E_{ijk}A^jB^k. \tag{8.9.39}$$

Переходя от метрического тензора к γ-матрицам, заметим, что хронометрически инвариантная матрица

$$\gamma_t = \frac{\gamma_0}{\sqrt{g_{00}}} = \beta \tag{8.9.40}$$

в квадрате дает единицу:

$$\beta^2 = \mathrm{I}. \tag{8.9.41}$$

Поэтому для удобства можно выбрать обычную дираковскую калибровку и положить

$$\beta = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \tag{8.9.42}$$

Хронометрическая векторная матрица γ^i обладает тогда свойствами

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = 2g^{ij}\mathrm{I} = -2b^{ij}\mathrm{I}, \tag{8.9.43}$$

и

$$\gamma^i\beta + \beta\gamma^i = 0. \tag{8.9.44}$$

Для эрмитизации введем новые величины:

$$\alpha^i = \beta\gamma^i. \tag{8.9.45}$$

Очевидно, эти матрицы будут также составлять хронометрический вектор; для них, вместе с тем:

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2b^{ij}\mathrm{I}. \tag{8.9.46}$$

Принятые обозначения оказываются близкими к первоначальным дираковским [см. (Дирак, 1958)]. Все новые матрицы можно считать эрмитовыми.

Перейдем к локально геодезической системе координат, в начале которой

$$\left.\begin{aligned} &g_{00} = 1, \quad g_{i0} = g^{i0} = 0, \\ &b^{ij} = b_{ij} = \delta_j^{\,i}. \end{aligned}\right\} \tag{8.9.47}$$

Рассмотрим сначала следующее предположение. Пусть везде локально можно обратить сразу все γ-матрицы в постоянные матрицы Дирака. Иначе говоря, пусть $\gamma_{\mu,\nu} = 0$ в некоторой точке в какой-то системе координат. Так как ковариантная производная γ-матрицы является однородной комбинацией ее обычных частных производных, то в этой точке мы найдем $\gamma_{\mu;\nu} = 0$; однако это будет верно в любой системе координат ввиду тензорного характера ковариантной производной 4-вектора. Однако, по предположению, мы можем, хотя и локально, но в любой точке найти такую систему координат, чтобы в ней $\gamma_{\mu,\nu} = 0$. Поэтому следствием нашего предположения будет *ковариантное постоянство γ-матриц во всем мире!* Поэтому и вторые ковариантные производные γ-матриц будут повсюду равны нулю. Тогда на основании равенства (8.6.31) должен равняться нулю тензор кривизны Римана — Кристоффеля; иначе говоря, *пространство-время должно быть плоским.* Тем самым мы доказали важное утверждение, что в искривленном мире невозможно с помощью преобразования координат даже локально сделать постоянными сразу все четыре γ-матрицы. Однако из соотношений (8.9.47) и (8.9.40) видно, что в локально геодезической системе при выбранной калибровке матрицы γ_0 эта матрица локально постоянна. Но отсюда не следует, во-первых, что эта компонента γ-матриц ковариантно постоянна в любой системе координат, а во-вторых, что могут оказаться постоянными все остальные (векторные) компоненты γ-матриц. Напротив, мы можем на этом основании утверждать, что при выбранной калибровке в локально геодезической системе координат $\gamma_{i,\,\mu} \neq 0$. Таким образом, хотя в локально геодезической системе

$$\gamma_i\gamma_j - \gamma_j\gamma_i = -2\delta_j{}^i \mathrm{I} \qquad (8.9.48)$$

(в начале координат), в случае искривленного мира здесь невозможно в принципе получить дираковские (локально) постоянные значения γ-матриц. Факт искривления мира должен явно отражаться уже на этой стадии, без перехода к повторному дифференцированию.

При хронометрически инвариантном подходе естественно определить следующие дифференциальные операции:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial}{\partial x^0} \qquad (8.9.49)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial\lambda^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{g_{0i}}{g_{00}}\frac{\partial}{\partial x^0}. \qquad (8.9.50)$$

Последнюю для ясности удобно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial\lambda^i} = -\,b_{ij}g^{j\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \qquad (8.9.51)$$

При этом возникают коммутационные соотношения

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^i\partial\tau} - \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\lambda^i} = G_i\frac{\partial}{\partial\tau} \qquad (8.9.52)$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^i\partial\lambda^j} - \frac{\partial^2}{\partial\lambda^j\partial\lambda^i} = 2A_{ij}\frac{\partial}{\partial\tau}, \qquad (8.9.53)$$

которые одновременно являются определениями величин G_i и A_{ij} (соответствующие вычисления несложны). В свою очередь, соотношения

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_i}{\partial\lambda^j} - \frac{\partial G_j}{\partial\lambda^i}\right) \qquad (8.9.54)$$

выполняются уже тождественно. Интересно, что введенные коммутационные соотношения, будучи продуктом чисто классической теории, напоминают коммутаторы, использованные для «квантования пространства-времени» Снайдером, но теперь уже в пространстве импульсов. Таким образом, можно утверждать, что в присутствии гравитационного поля или сил инерции (в этом аспекте действует «эквивалентность») квантовомеханические компоненты наблюдаемых энергии и импульса не могут быть измерены одновременно.

Пользуясь «координатами» t и l^i как в виде дифференциалов, так и производных, следует помнить, что речь идет о неголономных величинах, т. е. dt не образует в общем случае полного дифференциала, и интегрирование его зависит от выбора пути (см. анализ Арифова, проведенный после Зельманова). Однако Зельманов показал, что требование $G_i = 0$ в некоторой 4-области полностью эквивалентно тому, чтобы в этой области была гарантирована возможность совместного обращения g_{00} повсюду сразу в 1, а всех $\partial g_{0i}/\partial x^0$ — в 0 преобразованием одной только координаты x^0 (что не меняет хронометрических величин!). Вместе с тем Зельманов показал также, что требование $A_{ij} = 0$ является условием того, чтобы равенство $g_{0i} = 0$ достигалось путем преобразования опять-таки одного x^0, что дает голономность пространства отсчета. Указанные условия являются как необходимыми, так и достаточными.

Кроме величин G_i и A_{ij}, следует ввести 3-мерные символы Кристоффеля (мы обозначим их через $\Delta_{ij}^{\cdot}$), которые обычным способом определяются через 3-мерный метрический хронометрический тензор b_{ij}, а также ввести хронометрический тензор D_{ij}:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial b_{ij}}{\partial \tau}, \quad D^{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial b^{ij}}{\partial \tau}, \qquad D = D_i^{\ i} = \frac{\partial}{\partial \tau}\ln\sqrt{b}. \tag{8.9.55}$$

Физический смысл величин G_i, A_{ij} и D_{ij} проясняется после анализа уравнения геодезической, которое мы приведем далее к форме (8.9.66) и (8.9.67). Если сравнивать две системы отсчета — исходную и локально геодезическую в рассматриваемой точке, то легко видеть из такой записи уравнения геодезической, что хронометрический вектор G_i описывает ускорение относительно локально геодезической системы, мгновенно сопутствующей ей; хронометрический тензор A_{ij} описывает угловую скорость этих систем относительно друг друга (для того, чтобы получить вектор угловой скорости, по необходимости аксиальный, тензор A_{ij} следует умножить на аксиальный хронометрический тензор (8.9.36) с суммированием по двум индексам и разделить на два; при этом следует иметь в виду, что получающаяся угловая скорость будет обобщенной в духе Гутмана, т. е. во вращающейся системе отсчета в плоском мире она обратится в бесконечность там, где относительная линейная скорость двух систем равна скорости света); хронометрический тензор D_{ij} описывает деформацию системы отсчета.

Хронометрически инвариантная 3-мерная операция ковариантного дифференцирования вводится тем же способом, что и аналогичная 4-мерная операция. Обозначим хронометрически ковариантное дифференцирование по λ^i через ∇_i (не следует путать это обозначение с таким же из теории фермионных полей!). Тогда альтернирование хронометрически ковариантных производных дает

$$(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i) V_k = 2A_{ij}\frac{\partial V_k}{\partial \tau} + H^{\,l}_{\cdot kij} V_l, \tag{8.9.56}$$

где

$$H^{\,l}_{\cdot ijk} = \frac{\partial \Delta^l_{ik}}{\partial \lambda^j} - \frac{\partial \Delta^l_{ij}}{\partial \lambda^k} + \Delta^l_{mj}\Delta^m_{ik} - \Delta^l_{mk}\Delta^m_{ij}. \tag{8.9.57}$$

Зельманов заметил, однако, что удобнее использовать хронометрический тензор

$$C_{ijlk} = \frac{1}{4}(H_{ijkl} + H_{klij} - H_{jikl} - H_{lkij}), \tag{8.9.58}$$

смысл которого ближе к смыслу тензора Римана — Кристоффеля и который совпадает с H_{ijkl} при $A_{ij} = 0$ или $D_{ij} = 0$. Введем обозначения:

$$C_{ij} = C^{\,k}_{\cdot ijk}, \quad C = C_{ij}b^{ij}. \tag{8.9.59}$$

Обозначая далее 4-импульс частицы через

$$p^\mu = m_0\frac{dx^\mu}{ds}, \tag{8.9.60}$$

ее хронометрически инвариантную энергию можно представить как

$$E = m = \frac{p_0}{\sqrt{g_{00}}}, \tag{8.9.61}$$

а хронометрический вектор импульса — как

$$P^i = p^i = mu^i. \tag{8.9.62}$$

Здесь масса движения частицы связана с ее массой покоя хорошо известной релятивистской формулой

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u_i u_j b^{ij}}}. \tag{8.9.63}$$

4-вектор силы негравитационного происхождения F^μ распадается на хронометрически инвариантную мощность

$$W = \frac{F_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{f_i u^i}{\sqrt{1 - u_j u^j}} \tag{8.9.64}$$

и хронометрический вектор силы

$$f^i = \sqrt{1 - u_j u^j} \cdot F^i. \tag{8.9.65}$$

Тогда уравнения геодезической (с подставленной в правую их часть посторонней силой и с $m_0 = \mathrm{const}$) можно записать в виде

$$\frac{dE}{dt} + mD_{ij}u^i u^j - mG_i u^i = f_i u^i, \tag{8.9.66}$$

$$\frac{dP^k}{dt} + m\Delta^k_{ij}u^i u^j + 2m(D_i^k + A_i^{\cdot k})u^i - mG^k = f^k, \tag{8.9.67}$$

где, конечно, можно усмотреть как гравитационные, так и инерционные составляющие. Следует, однако, помнить, что движение относительно системы координат имеет мало смысла, но что данные уравнения описывают движение относительно более определенной сущности — системы отсчета, и вполне могут конкурировать с уравнениями девиации геодезических (скорее, обе системы дополняют друг друга, так как вторые зависят от первых).

Источником гравитационного поля является симметричный (метрический) тензор энергии-импульса-натяжений $T_{\mu\nu}$. Он распадается на хронометрически инвариантную плотность массы-энергии

$$\mu = \frac{T_{00}}{g_{00}}, \tag{8.9.68}$$

плотность потока массы (плотность импульса,— хронометрический вектор)

$$S^i = \frac{T_0^{\ i}}{\sqrt{g_{00}}} \tag{8.9.69}$$

и хронометрический тензор плотности напряжений (он же — хронометрический тензор потока импульса)

$$U^{ij} = T^{ij}. \tag{8.9.70}$$

Тогда уравнения Эйнштейна принимают вид

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} + D_{ij}D^{ij} + A_{ij}A^{ij} + \nabla_i G^i - G_i G^i = -\frac{\varkappa}{2}(\mu + U), \tag{8.9.71}$$

$$\nabla_j(b^{ij}D - D^{ij} - A^{ij}) + 2G_jA^{ij} = \varkappa S^i, \tag{8.9.72}$$

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial \tau} - (D_{ik} + A_{ik})(D_j{}^k + A_j{}^{\cdot k}) + DD_{ij} - D_{ik}D_j{}^k + 3A_{ik}A_j{}^{\cdot k} +$$
$$+ \frac{1}{2}(\nabla_iG_j + \nabla_jG_i) - G_iG_j - J_{ij} = \frac{\varkappa}{2}(\mu b_{ij} + 2U_{ij} - Ub_{ij}). \tag{8.9.73}$$

Как выяснил Новиков (1960), ни одно из известных старых выражений для квазитензора энергии-импульса в общей теории относительности не удовлетворяет требованию хронометрической инвариантности. Как это показано в конце § 2.4 и обсуждалось также в § 2.3, 3.8 и 4.2, задача построения хронометрически инвариантных выражений для энергии в общей теории относительности вполне разрешима; можно показать, что успешно разрешима и проблема построения хронометрически инвариантного 3-мерного импульса.

Мы видели здесь, что динамические соотношения релятивистской механики в хронометрически инвариантном выражении принимают точную форму соответствующих соотношений частной теории относительности, иногда дополненных необходимыми членами. В этом отношении наиболее характерны выражения (8.9.62) — (8.9.65). Мы покажем теперь, что и кинематические соотношения в общих системах координат приобретают форму легко интерпретируемых частнорелятивистских соотношений, если их записать в хронометрически инвариантном виде. Возьмем случай плоского мира, когда в декартовой 4-мерной системе координат

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{Vmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{Vmatrix}. \tag{8.9.74}$$

Если бы мы применили теперь преобразования Лоренца, то получили бы вновь декартову 4-мерную систему координат, но относящуюся уже к другой системе отсчета. Следствия такого преобразования хорошо известны, это — сокращение длин, замедление хода часов, нарушение одновременности. При обосновании частной теории относительности в элементарных курсах преобразования Лоренца обычно противопоставляются преобразованиям Галилея, а последние связываются исключительно с механикой Ньютона. При этом очень часто забывают сказать, что требуется не просто инвариантность 4-интервала (или уравнений Максвелла), а *форм-инвариантность*, т. е. требуется, чтобы метрика сохраняла декартов («галилеев») характер (8.9.74). Однако она не должна обязательно его сохранять даже в рамках частной теории относительности, что особенно убедительно показано Фоком (1961) в его книге. Действительно, мы безусловно можем переходить, не выходя за рамки частной теории относительности, от декартовых к сферическим (в 3-мерном аспекте) системам, в которых метрический тензор уже не будет единичным и т. д. Почему же тогда запрещать переходы к системам, недекартовым в 4-мерном смысле, например, к тем, в которых ось времени неортогональна пространственным осям?! Именно с этой точки зрения подошел в своей книге Мёллер к преобразованию Галилея

$$x'^i = x^i + v^ix^0, \quad v^i = \mathrm{const}, \quad x'^0 = x^0, \tag{8.9.75}$$

и показал, что это преобразование в действительности равноценно преобразованию Лоренца (с той же скоростью), а последнее может быть просто получено из него при ортогонализации оси времени по отношению к пространственным осям. Мы обсудим этот методический вопрос в духе Арифова. Очевидно, что в результате преобразования (8.9.75) метрический тензор (8.9.74) переходит в

$$\left\| (g'_{\mu\nu}) = \begin{matrix} 1-\mathbf{v}^2 & v^1 & v^2 & v^3 \\ v^1 & -1 & 0 & 0 \\ v^2 & 0 & -1 & 0 \\ v^3 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \right\| \tag{8.9.76}$$

(ось времени неортогональна пространственным осям). Рассмотрим квадрат 3-мерного интервала между одной и той же парой точек в обеих системах [штрих отмечает систему (8.9.76)]. Так как

$$b_{ij} = \delta_j{}^i \tag{8.9.77}$$

и

$$b'_{ij} = \delta_j{}^i + \frac{v^i v^j}{1-\mathbf{v}^2}, \tag{8.9.78}$$

мы получим

$$dl'^2 = dl^2 + \frac{(v^i dx^i)^2}{1-\mathbf{v}^2}, \tag{8.9.79}$$

если предположим, что

$$dx^0 = 0, \tag{8.9.80}$$

т. е. что требуется *одновременность* фиксации этих точек в нештрихованной системе отсчета. Таким образом, наблюдатель (в процессе проводимого им измерения существенна эта одновременность) неподвижен относительно нештрихованной системы, и dl есть результат его измерений движущегося относительно него объекта, который покоится в штрихованной системе и имеет в ней длину dl'. Если взять для простоты эту длину, ориентированную по направлению относительного движения систем отсчета, мы получим из (8.9.79)

$$dl = \sqrt{1-\mathbf{v}^2}\, dl' \tag{8.9.81}$$

— формулу сокращения длин в ее стандартном виде.

Переходя теперь к измерению времени, находим из (8.9.23)

$$dt = dx^0 \tag{8.9.82}$$

и

$$dt' = \sqrt{g'_{00}}\, dx'^0 + \frac{g'_{i0}}{\sqrt{g'_{00}}} dx'^i =$$

$$= \sqrt{1-\mathbf{v}^2}\, dx^0 + \frac{v_i}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} (dx^i + v^i dx^0) \tag{8.9.83}$$

Здесь выбор наблюдателя удобнее произвести обратно тому, как это было сделано при измерении длин, а именно, положив

$$dx'^i = 0. \tag{8.9.84}$$

При этом мы избавляемся от члена со скобкой в (8.9.83), который в других случаях определяет эффект относительности одновременности. Равенство (8.9.84) означает, что часы в штрихованной системе отсчета *покоятся*, т. е. они движутся в нештрихованной системе. Для определения скорости их хода по сравнению с часами в нештрихованной системе в этой последней необходимо иметь систему (не менее двух) синхронизованных между собой часов — *систему наблюдения*. Мы снова имеем наблюдателя в нештрихованной системе, но теперь по иной причине, чем ранее. Формулы (8.9.82) и (8.9.83) при учете (8.9.84) комбинируются теперь в общую формулу замедления хода часов

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}, \tag{8.9.85}$$

хорошо знакомую из частной теории относительности.

Итак, казалось бы, что теория хронометрических инвариантов Зельманова, специально приспособленная к преобразованиям (8.9.3), пригодна каждый раз лишь в рамках данной системы отсчета. В определенном смысле это так, потому что в каждой новой системе отсчета (не путать с системой координат!) мы должны заново составлять хронометрически инвариантные конструкции. Однако эти конструкции неизбежны ввиду обязательного выражения через них наблюдаемых величин, таких, как физическое время, длина и прочие. Поэтому законы преобразования хронометрически инвариантных величин при переходах между разными системами отсчета являются именно законами преобразования физических наблюдаемых величин при переходе от одного наблюдателя к другому. Неудивительно, что в плоском мире такие преобразования приводят автоматически к результатам частной теории относительности, независимо от выбора систем координат в рамках каждой данной системы отсчета. Еще важнее тот факт, что и в общей теории относительности этот формализм полностью сохраняет силу и в ряде случаев дает результаты, совпадающие с выводами частной теории. Следует, однако, отметить, что существует иная концепция определения наблюдаемых величин, опирающаяся на тетрадный формализм и развиваемая, главным образом, Левашевым и Родичевым. Мы не касаемся ее в этой книге и посвятим ей последующие публикации. Здесь мы лишь укажем, что если в формализме Зельманова система отсчета понимается как жестко связанная с системой 3-мерных координат (совпадение мировых линий наблюдателей с координатными линиями времени), то в тетрадном формализме система отсчета полностью независима от системы координат. Тогда переход от одной системы отсчета к другой осуществляется не путем преобразований координат, а с помощью татрадных поворотов (вообще говоря, нелокальных). [См. один из возможных тетрадных подходов в статье: Мицкевич и Рибейро Теодоро (1969).]

ЛИТЕРАТУРА

Амбарцумян В. А., Иваненко Д. Д. (1930), Zs. Physik, 64, 563.
(Первая работа по квантованию пространства-времени).

Андерсон (Anderson J. L.) (1954), Rev. Mex. Phys., 3, 176.
(Соотношения неопределенности и ограничения на измеримость гравитационного поля).
(1958а), Phys. Rev., **110**, 1197;
(1958б), Phys. Rev., **111**, 965;
(1959), Phys. Rev., **114**, 1182;
(1965), в сб. «Гравитация и относительность». Изд-во «Мир».

Андерсон, Бергман (Anderson J. L., Bergmann P. G.) (1951), Phys. Rev., 83, 1018.

Арифов Л. Я. (1965), Изв. АН УзССР, серия физ.-матем., № 2, 60.

Арифов Л. Я., Гутман И. И. (1965а), ДАН, УзССР, № **1**, 15;
(1965б), ДАН Уз.ССР, № 3, 14.
(Двуметрический формализм, компенсационная трактовка гравитации, развитие формализма Зельманова).

Арновитт, Дезер (Arnowitt R., Deser S.). (1959), Phys. Rev., **113**, 745.
(Квантование гравитации, применение метода Палатини).

Арновитт, Дезер, Мизнер (Arnowitt R., Deser S., Misner C. W.)
(1959), Phys. Rev., **116**, **1322**;
(1960а), N. Cim., **15**, 487;
(1960б), Phys. Rev., **117**, **1595**;
(1961а), Phys. Rev., **121**, **1556**;
(1961б), Phys. Rev., **122**, 997.
(Проблема энергии, канонический формализм и квантование гравитации).

Барабаненков Ю. Н. (1959), Доклады высшей школы, серия физ., № 1, 141.
(Электромагнитное поле во вращающейся системе отсчета).

Бауэр (Bauer H.) (1918), Phys. Zs., 19, 163.
(Парадокс гравитационной энергии, определяемой псевдотензором Эйнштейна).

Беленький И. М. (1964), Введение в аналитическую механику. Изд-во «Высшая школа».

Белинфанте (Belinfante F. J.) (1939), Physica, 6, 887.
(Законы сохранения; тетрады; симметризация псевдотензора энергии-импульса).

Бель (Bel L.) (1958а), C. R. (Paris), **246**, 3015;
(1958б), C. R. (Paris), **247**, 1094;
(1959), C. R. (Paris), **248**, 1297.
(Псевдотензор гравитационной энергии; «тензор Беля»).

Бергман (Bergmann P. G.) (1958), Phys. Rev., **112**, 287.
(Законы сохранения).
(1947), Введение в теорию относительности. ИЛ.

Бертотти (Bertotti B.) (1954), N. Cim., **12**, 226;
(1955), N. Cim., **2**, 231;
(1956а), N. Cim., **3**, 655;
(1956б), N. Cim., 4, 898.
(Простой вывод уравнений задачи двух тел в общей теории относительности).
(1959), Phys. Rev., **115**, 742.
(Структура электромагнитного поля и теория Райнича — Уилера — Мизнера).

Бертотти, Плебаньский (Bertotti, B., Plebański J.) (1960), Ann. of Phys., **11**, **169**.
(Ковариантная теория возмущений в общей теории относительности, проблема движения).

Бишоп, Криттенден (Bishop R. L., Crittenden R. J.) (1967), Геометрия многообразия. Изд-во «Мир».

Блейлер (Bleuler K.) (1950), Helv. Phys. Acta, 23, 567.
(Метод индефинитной метрики в квантовой теории поля).
Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., (1957), Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ.
Бонди (Bondi H.) (1957), Nature, 179, 1072.
(Плоские гравитационные волны; см. также изложение в книгах Синг (1963), Ландау и Лифшиц (1967)).
Бонди, Пирани, Робинсон (Bondi H., Pirani F. A. E., Robinson J.) (1959), Proc. Roy. Soc., A251, 519.
Боннор (Bonnor W. B.) (1959), Phil. Trans. Roy. Soc., A251, 233.
(Сферические гравитационные волны).
Брагинский В. Б. (1965), УФН, 86, 433.
(Большой обзор по проблемам гравитационного эксперимента; библиография).
Брежнев В. С. (1964), Изв. вузов, серия физ., № 6, 77.
(Канонический формализм в теории поля без выделения времени).
Брилл (Brill D. R.) (1964), N. Cim. (Suppl), 2, 3.
Брилл, Уилер (Brill D. R., Wheeler J. A.). (1961), в сб. «Новейшие проблемы гравитации». ИЛ, стр. 381.
(Ценная сводка данных о методах описания спиноров в общей теории относительности).
Бронштейн М. П. (1936), ЖЭТФ, 6, 195.
(Одна из первых работ по вторичному квантованию слабого гравитационного поля в теории Эйнштейна).
Вавилов С. И. (1928), Экспериментальные основания теории относительности. ГТТИ.
Вебер (Weber J.) (1962), Общая теория относительности и гравитационные волны. ИЛ.
(Следует иметь в виду, что глава 6 этой книги, посвященная законам сохранения, содержит много ошибок).
(1961), в сб. «Новейшие проблемы гравитации». ИЛ.
(1965), в сб. «Гравитация и относительность». Изд-во «Мир».
Вейль (Weyl H.) (1922), Raum, Zeit, Materie. Springer, Berlin.
Вентцель (Wentzel G.) (1947), Введение в квантовую теорию волновых полей. Гостехиздат.
Вигнер (Wigner E. P.) (1958), УФН, 65, 257.
(Трудности квантования общей теории относительности).
Ву Тхань Кхиет (Vu Thanh Khiêt) (1965), Ann. Inst. Henri Poincaré, 2, 261.
(Знак энергии объемных гравитационных волн Бонди в формализме относительного гравитационного поля Рылова).
Владимиров Ю. С. (1962), ЖЭТФ, 43, 89;
(1963а), «О квантовании геометрических полей». Канд. диссертация, МГУ — МОПИ.
(1963б), ЖЭТФ, 45, 251.
(1963в), Изв. вузов, серия физ., № 2, 133;
(1964), Изв. вузов, серия физ., № 6, 82.
(Двухгравитонная аннигиляция пары, обменный комптон-эффект и другие трансмутации с участием гравитонов).
Галкин С. Л. (1963), Изв. вузов, серия физ., № 3.
(Исследование метрики Шварцшильда).
Гальперн (Halpern L.) (1963), Mém. de l'Acad. Roy. Belgique, 49, 226.
(Анализ нелинейности гравитационного поля в духе Гупты — Папапетру).
Гальперн, Лоран (Halpern L., Laurent B.) (1964), N. Cim. 33, 728.
(Молекулярные и ядерные источники гравитационного излучения).
Гальперн, Жуве (Halpern L., Jouvet B.) (1967), препринт Института Анри Пуанкаре и Коллеж да Франс «On the stimulated photon-graviton conversion by an electromagnetic field».
Гаррисон (Garrison J. G.) (1963), Phys. Rev., 129, 1424.
(Вопросы квантования гравитационного поля).
Гейзенберг Эйлер (Heisenberg W., Euler H.) (1936), Zs. Physik, 98, 714.
(Вакуумный добавок к лагранжиану Максвелла; см. также Швингер (1954)).
Гекманн (Heckmann O. H. L.) (1942), Theorien der Kosmologie, Berlin.
Герценштейн М. Е., Пустовойт В. И. (1962), ЖЭТФ, 43, 605.
Гильберт (Hilbert D.) (1917), Götting. Nachr., 53.
(«Основания физики», в частности, вывод $T_{\mu\nu}$ с помощью метрического тензора.
Гинзбург В. Л. (1967), в «Энштейновском сборнике», стр. 80.
(Обзор по наблюдаемым эффектам общей теории относительности).
Голдстейн Г. (1958), Классическая механика. ГИТТЛ.
Гольдберг (Goldberg J. N.) (1958), Phys. Rev., 111, 315.
(Законы сохранения).
Гофман (Hofmann K. D.) (1962), Zs. Physik, 166, 567.

(Появление электрического и магнитного полей, соответственно, при задании магнитного и электрического полей в присутствии гравитации).
Де Гроот, Флигер (de Groot S. R., Vlieger J.) (1964), N. Cim., 33, 1225.
(Электродинамика в материальных средах, усреднение).
Гупта (Gupta S. N.) (1950), Proc. Roy. Soc., A63, 681.
(Метод индефинитной метрики при квантовании электромагнетизма).
(1961), в сб. «Новейшие проблемы гравитации». ИЛ.
(Квантование гравитационного поля в представлении взаимодействия).
(1954), Phys. Rev., 96, 1683;
(1957), Rev. Modern Phys., 29, 334.
(Аналогия между электромагнетизмом и гравитацией, причины нелинейности гравитационного поля).
Гутман И. И. (1959), ЖЭТФ, 37, 1639.
(Двуметрический формализм и его применение к формулировке уравнений задачи двух тел в общей теории относительности в произвольных координатах).
(1967), ЖЭТФ, 53, 565.
(Проблема энергии).
Гутман И. И., Арифов Л. Я. (1961а), Изв. АН УзССР, № 4, 35;
(1961б), Изв. АН УзССР, № 5, 90;
(1965а), ДАН УзССР, № 2, 28;
(1965б), в сб. «Проблемы гравитации». Тбилиси.
(Двуметрический формализм, проблема квантования гравитации, гравитация и метод компенсирующих полей применения формализма Зельманова).
Дарвин (Darwin G. H.) (1965), Приливы и родственные им явления в Солнечной системе. Изд-во «Наука».
Дебевер (Debever R.) (1959а), C. R. (Paris), 249, 1324;
(1959б), C. R. (Paris), 249, 1744;
(1960), C. R. (Paris), 250, 64.
(Тензор суперэнергии; см. также Бель (1959)).
ДеВитт (DeWitt B. S.) (1957—1967), препринты Publications of the Institute of Field Physics, University of North Carolina, Chapel Hill, N. C.
(1965), Dynamical Theory of Groups and Fields, N. Y.
(1967а), Phys. Rev., 160, 1113;
(1967б), Phys. Rev., 162, 1195;
(1967в), Phys. Rev., 162, 1239.
(Основные результаты ДеВитта по квантованию гравитационного поля).
Де Витт, Брим (De Witt B. S., Brehme R. W.) (1960), Ann. of Phys., 9, 220.
(Излучение заряда в гравитационном поле).
Де Витт, Де Витт (De Witt B. S., De Witt C. M.) (1965) препринт «Falling Charges», Princeton.
(Излучение заряда в гравитационном поле).
Де Дондер (de Donder Th.) (1921), La Gravifique Einsteinienne. Paris.
Дезер (Deser S.) (1963), Physics Letters, 7, 42,
(Проблема калибровки тетрад и комплекс энергии Мёллера).
Денен, Хёнль, Вестфаль (Dehnen., Hönl H., Westpfahl K.) (1961), Zs. Physik., 164, 483,
(Принцип Маха и его следствия).
Денен (Dehnen H.) (1962), Zs. Physik, 166, 559.
Дикке (Dicke R.) (1965), в сб. «Гравитация и относительность», Изд-во «Мир».
Деллeнбах (Dällenbach W.) (1919а), Ann. der Phys., 58, 523;
(1919б), Ann. der Phys., 59, 28.
(Электродинамика в материальных средах, усреднение).
Дирак (Dirac P. A. M.) (1958), Max — Planck — Festschrift, S. 339.
(Спиноры в общей теории относительности).
(1959), Phys. Rev. Letters, 2, 368.
(Энергия гравитационного поля).
(1960), Принципы квантовой механики. Физматгиз.
(В частности, см. в конце этой книги приложение — статью В. А. Фока «О каноническом преобразовании в классической и квантовой механике»).
(1961), в сб. «Новейшие проблемы гравитации». ИЛ.
(Статьи по каноническому формализму в гравитации).
Дуань И-ши (1954), ЖЭТФ, 27, 756.
(Самосогласованная система гравитационного и скалярного полей).
Захаров В. Д. (1964), Сообщения ГАИШ (МГУ), № 131, 42;
(1965), канд. диссертация. ГАИШ — МГУ.
(Критерии гравитационного излучения, применение формализма хронометрических инвариантов А. Л. Зельманова).
Зельдович Я. Б. (1965), Письма ЖЭТФ, 1, 40.
Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.
(1966), в «Эйнштейновском сборнике». Изд-во «Наука».
(1968), Релятивистская астрофизика. Изд-во «Наука».

(Предсказание гравитационного аналога эффекта Зеемана).
Зельманов А. Л. (1948), ДАН СССР, 61, 993;
(1956), ДАН СССР, 107, 815;
(1960), ДАН СССР, 135, 1367;
(1959), в «Трудах VI Совещания по космогонии». Изд-во АН СССР.
(Формализм хронометрических инвариантов, приложения к космологии, теория анизотропной неоднородной вселенной).
Зольднер (Soldner) (1801), Berl. Astronomisches Jahrbuch 1804. Berlin. S. 161.
Зоммерфельд (Sommerfeld A.) (1956), Строение атома и спектры, т. II. ГИТТЛ.
(Зоммерфельдовское представление фермионных ψ-функций и γ-матриц).
Иваненко Д. Д., Соколов А. А. (1947а), Вестник МГУ, № 8;
(1947б), ДАН СССР, 58, 1633.
(Квантование гравитационного поля).
(1952), Классическая теория поля. ГИТТЛ. 2-е изд.
Иваненко Д. Д., Бродский А. М. (1952), ДАН СССР, 84, 683.
(Вакуумный добавок к лагранжиану гравитации).
Иваницкая О. С. (1964), ДАН БССР, 8, 776.
Иваницкая О. С., Левашев А. Е. (1963), Acta Phys. Polonica, 23, 647.
Инфельд, ван дер Варден (Infeld L., van der Waerden B. L.) (1933), Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Klasse, 380.
(Спиноры в пространстве Римана).
Инфельд Л., Плебаньский Е. (1962), Движение и релятивизм. ИЛ.
Йордан (Jordan P.) (1955), Schwerkraft und Weltall. Braunschweig.
Кадышевский В. Г. (1960), ДАН СССР, 161, 1305.
Капелла (Capella A.) (1960), C. R. (Paris), 251, 636;
(1961а), C. R. (Paris), 252, 240;
(1961б), C. R. (Paris), 252, 3940.
(Проблема энергии и квантование в римановом пространстве).
(1961в), препринт «Sur le tenseur d'impulsion-énergie du champ de gravitation».
(Доклад на семинаре А. Лихнеровича в Коллеж де Франс 9/XII 1961 г.).
Карреньо (Carreño A. R.) (1966), Дипломная работа. УДН им. П. Лумумбы, Москва.
(Теория спиноров в римановом пространстве).
Картан (Cartan É.) (1947), Теория спиноров. ИЛ.
Каттанео (Cattaneo C.) (1958), N. Cim., 10, 318;
(1959), Ann. di mat. pura e appl., 48, 361;
(1961), Rendiconti Mat., 20, 18;
(1962), Rendiconti Mat., 21, 373.
(Построение формализма, адекватного зельмановскому; Каттанео узнал о работах Зельманова лишь в 1962 г.).
(1965), в «Трудах Международной конференции по гравитации и теории относительности». Лондон.
(Обзорный доклад по законам сохранения).
Кимура (Kimura T.) (1956а), Progr. Theoret. Phys., 16, 157;
(1956б), Progr. Theoret. Phys., 16, 555.
(Квантование гравитационного поля, усовершенствование подхода Гупта; квантовый вывод уравнений движения в задаче двух тел).
Клейн (Klein O.) (1958), в сб. «Нильс Бор и развитие физики», ИЛ, стр. 129.
(Квантование общей теории относительности).
Кнапец (Knapecz G.) (1959), Ann. der Phys., 3, 340;
(1960), Ann. der Phys., 6, 44.
(Теорема Нётер и мультимоменты).
Колер (Kohler M.) (1952), Zs. Physik, 131, 571;
(1953), Zs. Physik, 134, 286.
(Двуметрический формализм Розена; проблема энергии-импульса гравитационного поля).
Комар (Komar A. B.) (1958), Phys. Rev., 111, 1182;
(1959), Phys. Rev., 113, 934.
(Наблюдаемые величины в общей теории относительности; законы сохранения).
(1964), Phys. Rev., 134B, 1430.
(Коммутаторы на характеристических гиперповерхностях).
Компанеец А. С. (1958), ЖЭТФ, 34, 659.
(Проблема гравитационных волн).
Коркина М. П. (1960), Украинский физ. журнал, 5, 762.
(Квантовые эффекты в теории гравитации Биркгоффа).
Крамер, Штефани (Kramer D., Stephani H.) (1966), Acta Phys. Polonica, 29, 379.
(Биспиноры в римановом пространстве).
Крускал (Kruskal M.) (1960), Phys. Rev., 119, 1743.

(Фундаментальное исследование метрики Шварцшильда).
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. (1960), Механика. Физматгиз.
(1959), Электродинамика сплошных сред. Физматгиз;
(1960), Теория поля. Физматгиз;
(1967), Теория поля. Изд-во «Наука».
Ланцош (Lanczos C.) (1965), Вариационные принципы механики. Изд-во «Мир».
Левашев А. Е. (1965), в сб. «Философские проблемы теории тяготения Эйнштейна и релятивистской космологии». Изд-во «Наукова думка». Киев;
(1966), в сб. «Методологические проблемы теории измерений». Изд-во «Наукова думка». Киев.
(Обобщенный тетрадный подход к общей теории относительности).
Леви-Чивита (Levi-Cività T.) (1927), The absolute differential calculus. London.
Лекат (Lecat M.) (1924), Bibliographie de la rélativité. Bruxelles.
Лиас Р. (Lias R.) (1957), Труды Ин-та физики и астрономии АН ЭССР, № 5, 26.
Лихнерович (Lichnerowicz A.) (1955), Théories rélativistes de la gravitation et de l'éléctromagnétisme. Paris.
(1958), C. R. (Paris), 246, 893.
(1960), Теория связностей в целом и группы голономий. ИЛ.
Лич Дж. (1961), Классическая механика. ИЛ.
(Анализ перехода от классических скобок Пуассона к квантовым коммутаторам; см. также Дирак (1960)).
Лоран (Laurent B. E.) (1956), N. Cim., 4, 1445;
(1964), Arkiv för fysik, 28, 297.
(Общековариантный формализм квантования).
Лоренц (Lorentz H.) (1916), Amsterdam Versl., 25, 468.
(Проблема гравитационной энергии).
Мак-Витти (McVittie G. C.)
(1933), Month. Not. Roy. Astron. Soc., 93, 325.
(Решение для точечного массивного центра в расширяющейся Вселенной).
(1961), Общая теория относительности и космология. ИЛ.
Малдыбаева Э. Я. (1966а), ДАН Тадж. ССР, 9, № 2;
(1966б), ДАН Тадж.ССР. 9, № 3.
(Топологические проблемы общей теории относительности и космологии).
(1966), «О применениях внешних дифференциальных форм и некоторых глобальных теорем в теории гравитации». Канд. диссертация, Физ.-техн. ин-т АН Тадж. ССР.
Матт (Matte A.) (1953), Canad. Journ. of Math., 5, 1.
(Работа содержит много важных данных об аналогии между электромагнетизмом и гравитацией).
Мёллер (Møller Ch.) (1952), The Theory of Relativity. Oxford.
(1958а), Ann. of Phys., 4, 347;
(1958б), Max — Planck — Festschrift 1958. Berlin;
(1961а), Ann. of Phys., 12, 118;
(1961б), Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk., 1, no. 10;
(1961в), в сб. «Новейшие проблемы гравитации». ИЛ;
(1963), Physics Letters, 3, 329;
(1964а), Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 34, no. 3;
(1964б), Nucl. Phys., 57, 330;
(1965), Proc. Internatl. Conf. on Elem. Particles 1965, Kyoto, p. 213;
(1966а), Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 35, no. 3;
(1966б), в сб. «Гравитация и топология». Изд-во «Мир».
(Проблема гравитационной энергии, первоначально на базе использования метрического тензора, а затем — тетрад; приложения к проблеме гравитационного излучения).
Мизнер, Уилер (Misner C. W., Wheeler J. A.) (1957), Ann. of Phys., 2, 525, (см. перевод в книге: Уилер (1962)).
Мицкевич Н. В. (1958а), Ann. der Phys. 1, 319;
(1959а), Вестник МГУ, № 3, 63;
(1959б), Труды VI Совещания по космогонии. Изд-во АН СССР.
(Теорема Нётер и законы сохранения в общей теории относительности).
(1958б), ЖЭТФ, 34, 1656;
(1959в), ДАН Уз.ССР, № 9, 14;
(1959г), ЖЭТФ, 36, 1207.
(Квантовые гравитационные эффекты).
(1958в), Доклады Болг. АН, 11, 367.
(1959д), Wiss. Zs. Fr. Schiller-Univers. Jena, Heft 4/5, 341;
(1960), Тезисы Всесоюзной межвузовской конф. по теории элементарных частиц, Ужгород, стр. 21.
(Проблема квантования гравитационного поля).
(1961а), Доклады Болг. АН, 14, 439.

(Точные трансформационные законы для сохраняющихся величин).
(1962а), Труды Сам. ГУ им. А. Навои, стр. 33.
(Приближение слабого гравитационного поля).
(1962б), Доклады Итоговой научной конф. КГУ, Казань;
(1964а), Труды Международной конференции по гравитации и теории относительности (Варшава — Яблонна, 1962), стр. 365;
(1965а), Изв. вузов, серия физ., № 6, 87.
(Четырехмерный симметричный канонический формализм в общековариантной теории поля).
(1961б), Тезисы I Советской гравитационной конференции. Изд-во МГУ, стр. 37;
(1964б), Труды Международной конференции по гравитации и теории относительности (Варшава — Яблонна, 1962), стр. 319;
(1965б), Труды УДН им. П. Лумумбы, 11, 58.
(Двуметрический формализм и законы сохранения в общей теории относительности).
(1964в), Изв. вузов, серия физ., № 6, 64;
(1965в), Труды Международной конференции по гравитации и теории относительности. Лондон;
(1965г), Труды УДН им. П. Лумумбы, 11, 84.
(Формулировка теории гравитации с помощью зоммерфельдовского обобщения матриц Дирака и проблема энергии).
(1964г), Доклады Болг. АН, 17, 543;
(1965д), Труды Международной конференции по гравитации и теории относительности. Лондон.
(Естественная единая теория электромагнитного и фермионного полей).
(1965е), в сб. «Философские проблемы теории тяготения Эйнштейна и релятивистской космологии». Изд-во «Наукова думка», Киев, стр. 214.
(Проблема материальности гравитационного поля).
(1965ж), Общая теория относительности (конспект лекций), изд. УДН им. П. Лумумбы, Москва, часть I;
(1966), то же, часть II.
(Матричное представление метрического поля; теорема Нётер; сохраняющиеся величины; аналогия между гравитацией и электромагнетизмом).
(1967), в сб. «Гравитация и теория относительности», Казань, вып. 3, стр. 129.
(Фермионные поля в общей теории относительности и гравитационно-электромагнитная аналогия).
Мицкевич Н. В., Мухика Х. Д. (1967), ДАН СССР, 176, 809,
(Хронометрически инвариантная формулировка гравитационной энергии).
Мицкевич Н. В., Рибейро Теодоро М. (1969), ЖЭТФ, 56, 954.
Мицкевич Н. В., Сидоров В. В. (1961), Тезисы I Советской гравитационной конференции. Изд-во МГУ, стр. 12.
(Метод решения задач в теории относительности).
Мицкевич Н. В., Альварес Торрес Х. Х. (1966), Wiss. Zs. Fr. Schiller-Univers., Jena, Heft 1, 169.
(Доклад на Международном семинаре по релятивистской физике и Иене — Георгентале, 1965; четырехмерный симметричный канонический формализм в общерелятивистской теории поля).
Мухика (Mujica Marcano J. D.) (1966), Дипломная работа, УДН им. П. Лумумбы, Москва.
(Хронометрически инвариантная формулировка закона сохранения энергии в общей теории относительности).
Нётер (Noether E.) (1918), Götting, Nachr., 235.
(См. перевод в сб. Вариационные принципы механики». Физматгиз, 1959).
Новиков И. Д. (1960), Вестник МГУ, № 2, 59.
(Сравнение выражений для плотности гравитационной энергии).
(1962), Вестник МГУ, № 6, 66.
(Переход пространственной координаты во временну́ю и, наоборот, на критическом радиусе — решение типа Шварцшильда — и его обобщение на случай присутствия вещества).
(1961а), Астр. Журн., 38, 564;
(1961б), Астр. Журн., 38, 961;
(1963), Астр. Журн., 40, 772.
(Эволюция полузамкнутого мира).
Нордстрём (Nordström L.) (1918), Proc. Amsterdam Acad., 20, 1238.
(Поле точечного электрического заряда в общей теории относительности).
Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В. (1964), «Спиноры в общей теории относительности», препринт ОИЯИ Р—1890. Дубна;
(1965), Труды Международной конференции по гравитации и теории относительности, Лондон.
Окунь Л. Б. (1963), Слабое взаимодействие элементарных частиц. Физматгиз.

Оливейра, Тиомно (Oliveira C. G., Tiomno J.) (1962), N. Cim., **23**, no. 4.
(Спиноры в общей теории относительности).
Пайерлс (Peierls R.) (1952), Proc. Roy. Soc., A **214**, 143.
(Оригинальный вывод скобок Пуассона в теории поля).
Палатини (Palatini A.) (1919). Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **43**, 203.
(Вариационный вывод уравнений гравитационного поля Эйнштейна; «метод Палатини»).
Папапетру (Papapetrou A.) (1948), Proc. Roy. Irish Acad., A **52**, 11.
(Симметричный псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля, включенный в состав источников этого поля).
Паули (Pauli W.) (1947), Теория относительности. Гостехиздат.
Пеллегрини, Плебаньский (Pellegrini C., Plebański J.)
(1963), Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk., **2**, no. 4.
Перес, Розен (Peres A., Rosen N.) (1960), N. Cim., **18**, 644.
(Ковариантные лагранжев и канонический формализмы в динамике частиц).
(1960), Phys. Rev., **118**, 335.
(Квантовые ограничения возможностей гравитационного измерения).
Перес (Peres A.) (1965), Труды Международной конференции по гравитации и теории относительности. Лондон.
(Предложение рассматривать в правой части уравнений Эйнштейна квантовомеханическое среднее значение тензора энергии-импульса, что привело бы к чисто классической теории гравитации).
Петров А. З. (1961), Пространства Эйнштейна. Физматгиз;
(1966), Новые методы в общей теории относительности. Изд-во «Наука»;
(1967), в сб. «Гравитация и теория относительности». Казань. Вып. 3.
(Аналогия между гравитацией и электромагнетизмом как основа формулировки теории поля).
Пийр И. (Piir I.) (1957), Труды Ин-та физики и астрономии АН ЭССР, № 5, 41.
(Расчет ряда квантовых гравитационных эффектов).
Поблете (Poblete Devia H. A.)
(1967), Дипломная работа. УДН им. П. Лумумбы.
(Хронометрически инвариантное исследование проблемы энергии).
Полак Л. С. (1960), Вариационные принципы механики. Физматгиз.
дель Прадо (del Prado Segura J. C.) (1967), Дипломная работа. УДН им. П. Лумумбы.
(Общая теория электромагнетизма в неинерциальных системах отсчета и в гравитационном поле; хронометрически инвариантная формулировка).
Пугачёв Я. И. (1959), Изв. вузов. серия физ., № 6, 192.
(Двуметрический формализм).
Райнич (Rainich G. Y.) (1925), Trans. Am. Math. Soc., **27**, 106;
(1950), The Mathematics of Relativity. N. Y.
Райснер (Reissner H.) (1916), Ann. der Phys., **50**, 106.
(Поле точечного электрического заряда в общей теории относительности).
Рарита, Швингер (Rarita W., Schwinger J.) (1941), Phys. Rev., **59**, 436.
Рэстоджи, Вачаспати (Rastogi N. C., Vachaspati)
(1959), Proc. Indian Acad. Sci., A **50**, 202.
(Решение уравнения Дирака относительно электромагнитного потенциала).
Рашевский П. К. (1967), Риманова геометрия и тензорный анализ. Изд-во «Наука».
Редже (Regge T.) (1958), N. Cim., **7**, 215.
(Соотношения неопределенности Гейзенберга и ограничения на измеримость гравитационного поля).
(1961), N. Cim., **19**, 558.
(Бескоординатное представление гравитации).
Риман (Riemann B.) (1956), в сб. «Об основаниях геометрии». ГИТТЛ.
(Следует особо обратить внимание на высказывания Римана относительно геометрии в малом, стр. 223—234).
Родичев В. И. (1961), ЖЭТФ, **40**, 1469;
(1963), Изв. вузов, серия физ., № 2, 122;
(1965), Изв. вузов, серия физ., № 1, 142.
(1968), в «Эйнштейновском сборнике». Изд-во «Наука», стр. 115.
(Тетрадный формализм и гравитация).
Розен (Rosen N.) (1940а). Phys. Rev., **57**, 147.
(1940б), Phys. Rev., **57**, 150.
(Первые работы по двуметрическому формализму).
Розенфельд (Rosenfeld L.) (1930), Ann. Phys., **5**, 113;
(1932), Ann. Inst. Henri Poincaré, **2**, 25;
(1940), Mém. de l'Acad. Roy. Belgique, **18**, 6.
(Теорема Нётер, применение тетрад, метод симметризации канонического псевдотензора; см. также Белинфанте (1939)).
Румер Ю. Б. (1956), Исследования по 5-оптике. ГИТТЛ.
(Содержит, в частности, основы теории спиноров в римановом пространстве).

(1962), ЖЭТФ, 42, 577.
(Тензор Римана — Кристоффеля как основная характеристика гравитации; применение к волнам; см. также Матт (1953)).
Рылов Ю. А. (1962а), Вестник МГУ, № 5, 70;
(1962б), Вестник МГУ, № 6, 45;
(1962в), Изв. вузов, серия матем., № 3, 131;
(1964), Ann. der Phys., 7, 12.
(Теория относительного гравитационного поля, представляющая большой интерес; проблема энергии; обобщение двуметрического формализма Розена с применением мировой функции Синга).
Рэстол (Rastall P.) (1964), Rev. Modern Phys., 36, 820.
(Кватернионы в общей теории относительности).
Сасао (Sasao Tetsuo) (1966), Дипломная работа. УДН им. П. Лумумбы.
(Квантование гравитационного поля в кватернионной формулировке).
Синг (Synge J. L.) (1963), Общая теория относительности. ИЛ.
(1965), Relativity: The Special Theory. Amsterdam.
Снайдер (Snyder H.) (1947), Phys. Rev., 71, 38.
(Квантование пространства-времени).
Соколов А. А., Иваненко Д. Д. (1953), Квантовая теория поля. ГИТТЛ.
Станюкович К. П. (1965), Гравитационное поле и элементарные частицы. Изд-во «Наука».
(там же библиография работ группы К. П. Станюковича).
Схоутен (Schouten J. A.) (1965), Тензорный анализ для физиков. Изд-во «Наука».
Схоутен, Стройк (Schouten J. A., Struik D. J.) (1939), Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. I. ГОНТИ.
Терлецкий Я. П. (1960), Труды Международной конференции по космическим лучам. Изд-во АН СССР.
(Применение электродинамики в неинерциальных системах отсчета).
Тетрод (Tetrode H.) (1928), Zs. Physik, 50, 336.
(Первое исследование спиноров в римановом пространстве).
Толман (Tolman R. C.) (1934), Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford.
Тоннела (Tonnelat M.-A.) (1962), Основы электромагнетизма и теории относительности. ИЛ.
Торрес (Alvares Torres J. J.) (1965), Дипломная работа. УДН им П. Лумумбы.
(Четырехмерный симметричный канонический формализм в общерелятивистской теории поля).
Траутман (Trautman A.)
(1956а), Бюллетень Польской АН, отд. III, 4, 665;
(1956б), Бюлл. Польской АН, отд. III, 4, 671;
(1957), Бюлл. Польской АН, отр. III, 5, 721.
(Теорема Нётер, законы сохранения и группы движений).
Уилер (Wheeler J. A.) (1962), Гравитация, нейтрино, Вселенная. ИЛ.
(1965), в сб. Гравитация и относительность. Изд-во «Мир».
Унт В. А. (1961а), Труды Ин-та физики и астрономии АН ЭССР, 16, 27;
(1961б), Изв. вузов, серия физ., № 4, 3;
(1962а), Труды Ин-та физики и астрономии АН ЭССР, 19, 54;
(1962б), Труды Ин-та физики и астрономии АН ЭССР, 19, 71.
(Сферически симметричные решения уравнений Эйнштейна, критика теоремы Биркгоффа).
Усачев Ю. Д. (1961), ЖЭТФ, 41, 400.
(Развитие зоммерфельдовского представления теории фермионов в рамках частной теории относительности).
Фаддеев Л. Д. (1968), в сб. «Тезисы Международной конференции по гравитации и теории относительности». Тбилиси.
(Подробный анализ современного состояния канонического формализма в общей теории относительности; проблема квантования гравитационного поля).
Фейнман (Feynman R. P.) (1963), Acta Phys. Polon., 24, 697;
(1964), Труды Международной конференции по гравитации и теории относительности в Варшаве — Яблонне.
(Проблема квантования гравитационного поля).
Ферми (Fermi E.) (1965), Квантовая механика (конспект лекций). Изд-во «Мир».
Финкельштейн (Finkelstein D.) (1958), Phys. Rev., 110, 965.
(Проблема движения в поле Шварцшильда вблизи критического радиуса, асимметрия времени).
Фирц, Паули (Fierz M., Pauli W.) (1939), Proc. Roy. Soc., A 173, 211.
(Уравнения для полей разных спинов, в том числе для спина 2; см. также Рарита и Швингер (1941)).
Флоридес (Florides P. S.) (1961а), Proc. Cambr. Phil. Soc., 58, 102;
(1961б), Proc. Cambr. Phil. Soc., 58, 110.

(Исследование псевдотензора Мёллера 1958 г., применение его для определения энергии в случаях нейтральной и электрически заряженной частиц; трудности).
Фок В. А. (1929), Zs. Physik, 57, 261;
(1930), ЖРФХО, часть физ., 62, 133.
(Одни из первых работ по теории спиноров в римановом пространстве; см. также Фок и Иваненко (1929)).
(1957), Работы по квантовой теории поля. Изд-во ЛГУ.
(1961), Теория пространства, времени и тяготения. Физматгиз.
Фок В. А., Иваненко Д. Д. (1929), С. R. (Paris), 188, 1470.
фон Фрейд (von Freud Ph.) (1939), Am. Math. J., 40, 417.
(Законы сохранения).
Фридман А. А. (1922), Zs. Physik, 10, 377.
(1924), Zs. Physik, 21, 326.
(Космологическое решение уравнений Эйнштейна).
Фронсдэл (Fronsdal C.) (1959), Phys. Rev., 116, 778.
Хёнль, Денен (Hönl H., Dehnen H.) (1962), Zs. Physik. 166, 544.
Хёнль, Зёргель-Фабрициус (Hönl H., Soergel-Fabricius Chr.) (1961), Zs. Physik, 163, 571.
(Принцип Маха).
Хилл (Hill E. L.) (1951), Rev. Modern Phys., 23, 253.
(Хороший обзор по законам сохранения в частной теории относительности).
Шварц (Schwartz L.) (1965), Математические методы для физических наук. Изд-во «Мир».
Шварцшильд (Schwarzschild K.) (1916), Berl. Ber., 189.
(Решение Шварцшильда).
Швебер (Schweber S. S.) (1963), Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. Изд-во «Мир».
Швингер (Schwinger J.) (1954), в сб. Новейшее развитие квантовой электродинамики». ИЛ, стр. 254.
(Вакуумные нелинейные лангранжианы).
(1963), Phys. Rev., 129, 1253.
(Тетрады и общая теория относительности).
(1964), в сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля». Изд-во «Мир».
(1966), в сб. «Гравитация и топология». Изд-во «Мир».
Шёпф (Schöpf H.-G) (1959), Ann. der Phys., 5, 1;
(1962), Ann. der Phys., 9, 301.
(Общерелятивистская теория диэлектриков).
Шилд, Синг (Schild A., Synge J. L.) (1956), Tensor Calculus. Toronto.
Широков М. Ф., Фишер В. З. (1962), Астрон. журн., 39, 899.
(Усреднение уравнений Эйнштейна, при котором нелинейные члены играют роль эффективной «среды»; в настоящей книге проблема усреднения рассматривается в совершенно другом аспекте).
Шкловский И. С. (1966), Земля и Вселенная, № 6;
(1967), Земля и Вселенная, № 1.
(Излучение естественного космического мазера — проблема «мистериума»).
Шмутцер (Schmutzer E. G.) (1955), Zs. Physik, 143, 479.
(Единый вариационный принцип для механики, электромагнетизма и гравитации, с учетом идей квантовой механики и с анализом нетривиальных трудностей).
(1956), Ann. der Phys., 18, 171.
(Релятивистская электродинамика сплошных сред).
(1957), Zs. Physik, 149, 329;
(1959а), Zs. Physik, 154, 312;
(1961а), Zs. Physik, 162, 53.
(Релятивистская механика в канонической форме).
(1964а), Acta. Phys. Hungar., 17, 57;
(1959б), Zs. Naturforschung, 14а, 486;
(1959в), Zs. Naturforschung, 14а, 489;
(1960а), Zs. Naturforschung, 15а, 355;
(1960б), Zs. Naturforschung, 15а, 831;
(1961б), Zs. Naturforschung, 16а, 825;
(1962а), Zs. Naturforschung, 17а, 685;
(1962б), Zs. Naturforschung, 17а, 707;
(1964б), Zs. Naturforschung, 19а, 665;
(1964в), Zs. Naturforschung, 19а, 1027.
(Серия тесно связанных друг с другом исследований: проективная теория относительности; спиноры в римановом пространстве (метод Инфельда — ван дер Вардена); связь инвариантности с законами сохранения; вариант формализма, близкий к формализму Зельманова).
(1968), Relativistische Physik. Leipzig.

(1964г), Ann. der Phys., 14, 319.
(Критика IV требования Мёллера).
Шрёдингер (Schrödinger E.) (1918), Phys. Zs., 19, 4.
(Критика псевдотензора Эйнштейна).
(1932), Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Klasse, 105.
(Спиноры в общей теории относительности).
(1951), Proc. Roy. Irish Acad., 54 A 5, 79.
(Вывод псевдотензора, позднее независимо полученного нами (Мицкевич, 1958а) и (с точностью до множителя 2) Мёллером (1958а, б), а также позднее Станюковичем (1965)).
Шуликовский В. И. (1963), Классическая дифференциальная геометрия. Физматгиз.
Эддингтон (Eddington A. S.) (1934), Теория относительности. ОНТИ.
(Обширная библиография).
Эйзенхарт (Eisenhart L. P.) (1948), Риманова геометрия. ИЛ.
Эйнштейн (Einstein A.) (1965—67), Собрание научных трудов. Тт. 1—4. Изд-во «Наука».
Элизер (Eliezer C. J.) (1958), Proc. Cambr. Phil. Soc., 54, 247.
(Решение уравнения Дирака относительно электромагнитного потенциала).
Эстевес (Esteves Laprea R.) (1965), Дипломная работа. УДН им. П. Лумумбы.
(Усреднение уравнений физических полей, в том числе и гравитационного, в материальных средах).
фон Этвёш (von Eötvös L.) (1890), Math. und naturwiss. Berichte aus Ungarn, 8, 66.
фон Этвёш, Пекар, Фекете (von Eötvös L., Pekár D., Fekete E.) (1922), Ann. der Phys., 68, 11.
(Экспериментальная проверка принципа эквивалентности Галилея — Этвёша — Эйнштейна).

СБОРНИКИ

Новейшее развитие квантовой электродинамики. Под ред. Д. Д. Иваненко. ИЛ, 1954.
Нильс Бор и развитие физики. Под ред. В. Паули, Л. Розенфельда и В. Вайскопфа (перевод под ред. Я. А. Смородинского). ИЛ, 1958.
Вариационные принципы механики. Под ред. Л. С. Полака. Физматгиз, 1959.
Тезисы I Советской гравитационной конференции. Изд. МГУ, 1961.
Новейшие проблемы гравитации. Под ред. Д. Д. Иваненко. ИЛ, 1961.
Гравитация и радиоэлектроника. Уч. записки КГУ, 123, кн. 2. Казань, изд. КГУ, 1963.
Гравитация и теория относительности. Под ред. А. З. Петрова. Вып. 1. Уч. записки КГУ, 123, кн. 12. Казань, изд. КГУ, 1963.
Труды Международной конференции по гравитации и теории относительности (Варшава — Яблонна, 1962). Варшава — Париж, 1964.
Летняя школа по гравитации и топологии в Лез-Уш (Франция). Нью-Йорк, 1964.
Элементарные частицы и компенсирующие поля. Под ред. Д. Д. Иваненко. ИЛ, 1964.
Гравитация и теория относительности. Под ред. А. З. Петрова. Вып. 2. Казань, изд. КГУ, 1965.
Труды Международной конференции по гравитации и теории относительности. Стеклографированное издание. Лондон, 1965.
Гравитация и относительность. Под ред. Цзю и Гоффмана (перевод под ред. А. З. Петрова). Изд-во «Мир», 1965.
Философские проблемы теории тяготения Эйнштейна и релятивистской космологии. Под ред. П. С. Дышлевого и А. З. Петрова. Киев, «Наукова думка», 1965.
Проблемы гравитации. Тезисы II Советской гравитационной конференции. Тбилиси, 1965. (Не включены доклады, прочитанные от Университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы).
Труды Международного семинара по релятивистской физике в Иене — Георгентале, 1965. Изд. Иенского ун-та, 1966.
Гравитация и топология. Под ред. Д. Д. Иваненко. Изд-во «Мир», 1966.
Методологические проблемы теории измерений. Под ред. П. С. Дышлевого. Киев, «Наукова думка», 1966.
Эйнштейновский сборник. Под ред. И. Е. Тамма и Б. Г. Кузнецова. Изд-во «Наука», 1966.
Эйнштейновский сборник. Под ред. И. Е. Тамма и Г. И. Наана. Изд-во «Наука», 1967.
Гравитация и теория относительности. Под ред. А. З. Петрова. Вып. 3. Казань, изд. КГУ, 1967.
Гравитация и теория относительности. Под ред. А. З. Петрова. Вып. 4. Казань, изд. КГУ, 1968.
Эйнштейновский сборник. Под ред. И. Е. Тамма и Г. И. Наана. Изд-во «Наука», 1968.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Мицкевич Николай Всеволодович

Физические поля в общей теории относительности

Утверждено к печати
Московским обществом испытателей природы

Редактор издательства **С. И. Ларин**
Художник **Н. Б. Старцев**
Технический редактор **В. Д. Прилепская**

Сдано в набор 15/V 1968 г.
Подписано к печати 10/III-69 г.
Формат $70 \times 108^1/_{16}$
Печ. л. 20,5 Усл. печ. л. 28,7 Уч.-изд. л. 23,2
Тираж 4400 экз. Т-04138
Бумага № 1
Тип. зак. 1311
Цена 1 р. 65 к.

Издательство «Наука». Москва, К-62, Подсосенский пер., д. 21
2-я типография издательства «Наука», Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
47	Формула (2.5.13)	$\mathbf{t}_\mu$ $\mathbf{t}_\sigma$ $\mathbf{M}_\sigma^{\cdot}$ $\mathbf{N}_\sigma$	$\mathbf{t}_\mu^{\prime\nu}$ $\mathbf{t}_\sigma^\alpha$ $\mathbf{M}_\sigma^{\alpha\tau}$ $\mathbf{N}_\sigma^{\alpha\tau\beta}$
58	Формула (2.6.63)	$\lambda\cdot\{\Phi, \Psi\} = \mathbf{D}_\Phi\Psi\mathfrak{D} - {}_\Phi\Psi$	$\{\Phi, \Psi\} = \mathbf{D}_\Phi\Psi - \mathfrak{D}_\Phi\Psi$
63	1 сн.	$\gamma_{вa}$ $\gamma_{;\,\varepsilon}$	$\gamma^\mu_{вa}$ $\gamma^\mu_{;\,\varepsilon}$
70	Формула (3.3.39)	$\left(\dfrac{1-\dfrac{C}{r}}{1+\dfrac{C}{r}}\right)$	$\left(\dfrac{1-\dfrac{C}{r}}{1+\dfrac{C}{r}}\right)^2$
114	Формула (4.1.32)	$= \dfrac{\sqrt{-g}}{4}$	$= -\dfrac{\sqrt{-g}}{4}$
120	Формула (4.2.40)	$)\,dt^2$	$)^2\,dt^2$
123	Формула (4.2.65)	$m = \dfrac{C}{2}$	$m = 2C$
134	Формула (4.5.29)	$\psi\,\overrightarrow{\nabla}_\mu\gamma^\mu\psi$	$\overline{\psi}\,\overleftarrow{\nabla}_\mu\gamma^\mu\psi$
147	15 сн.	оказывается	сказывается
187	Формула (6.1.27)	$= \Phi_{вак}$	$= \Phi'_{вак}$
201	Формула (6.4.9)	$= \dfrac{1}{(2\pi)^3}$	$= -\dfrac{1}{(2\pi)^3}$
	Формула (6.4.10)		
	Формула (6.4.11)	$= \int d^3q$	$= -\int d^3q$
202	Формула (6.4.18′)		
228	Формула (6.7.76)	$^+)$	$)^+$
241	Формула (7.1.17)	$e^{-ip_\alpha x^\alpha}$	$e^{ip_\alpha x^\alpha}$
246	Формула (7.2.11)	e_{ij} e_{kl}	e^a_{ij} e^a_{kl}
283	Формула (8.5.17)	ξ^ν_μ	$\xi^\nu_{\mid\mu}$
285	10 сн.	$\mid\sigma^a{}_{\dot{B}}\mid^\beta$	$\mid\tau^a{}_B\mid^\beta_\sigma$
299	9 сн.	$g^{\mu\nu} = \sigma^\mu\cdot\sigma^\nu,$ $g_{\mu\nu} = \sigma_\mu\cdot\sigma_\nu,$ $\sigma_\mu = g_{\mu\nu}\sigma^\nu.$ (8.8.43)	$Q\overline{Q} = e^{2i\beta}$ (8.8.38)
309	3 св.	J_{ij}	C_{ij}
310	3 св.	$\Vert(g'_{\mu\nu}) =$	$(g'_{\mu\nu}) = \Vert$