В. П. МИХАЙЛОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для механико-математических и физических специальностей высших учебных заведений

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва 1976

517.2
М 69
УДК 517.9

Дифференциальные уравнения в частных производных, В. П. Михайлов, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976.

В книге рассматриваются основные краевые задачи для эллиптических и задача Коши и смешанные задачи для гиперболических и параболических уравнений второго порядка. Широко используется понятие обобщенного решения.

Для чтения книги достаточно владеть основами математики в размере программы первых двух курсов механико-математических или физических факультетов университетов или втузов с повышенной математической подготовкой; все необходимые сведения из функционального анализа и теории функциональных пространств, в частности, теоремы вложения Соболева, в книге излагаются.

Книга является расширенным изложением курса лекций, читавшихся автором студентам третьего курса Московского физико-технического института.

$М \frac{20203-032}{053(02)\text{-}76}$ 13-76

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга является расширенным изложением курса лекций, читавшихся автором в течение ряда лет студентам Московского физико-технического института. Она рассчитана на студентов, владеющих основами математического анализа, алгебры и теории обыкновенных дифференциальных уравнений в объеме университетской программы. Все необходимые сведения содержатся, например, в учебниках: С. М. Никольский, Курс математического анализа, т. 1, 2; А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры; Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения.

За исключением главы I, в которой рассматриваются некоторые общие вопросы дифференциальных уравнений в частных производных, расположение материала соответствует основным типам уравнений. Центральную роль в книге играет занимающая наибольший объем глава IV, в которой изучаются эллиптические уравнения. V и VI главы посвящены гиперболическим и параболическим уравнениям.

Используемый в книге метод изучения краевых задач и, частично, задачи Коши опирается на понятие обобщенного решения, что позволяет рассматривать уравнения с переменными коэффициентами столь же просто, как и простейшие уравнения: уравнение Пуассона, волновое уравнение и уравнение теплопроводности. Наряду с вопросами существования и единственности решений основных краевых задач в книге значительное внимание уделено приближенным методам их решения: методу Ритца в эллиптическом и методу Галёркина в гиперболическом и параболическом случаях.

Необходимые для такого построения сведения о функциональных пространствах, в частности, теоремы вложения С. Л. Соболева, содержатся в главе III. При этом знакомства читателя с нужными разделами теории функций и фукционального анализа не предполагается; им посвящена имеющая вспомогательный характер глава II.

Ко всем главам, кроме второй, приводятся задачи. Большая их часть предназначена для углубления и расширения содержания соответствующей главы; с этой же целью приведены и списки дополнительной литературы. Для упражнений можно рекомендовать «Сборник задач по уравнениям математической физики» В. С. Владимирова и др., «Сборник задач по математической физике» Б. М. Будака, А. А. Самарского и А. Н. Тихонова и задачник М. М. Смирнова «Задачи по уравнениям математической физики».

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. С. Владимирову за постоянный интерес к настоящей книге, а также Т. И. Зеленяку, И. А. Киприянову и С. Л. Соболеву, ознакомившимся с рукописью и сделавшим ряд весьма ценных замечаний. Особую признательность автор выражает своим товарищам А. К. Гущину и Л. А. Муравью, плодотворные дискуссии с которыми во многом способствовали улучшению книги.

Июль 1975 года. *В. Михайлов*

Глава I

ВВЕДЕНИЕ. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ. ПОСТАНОВКА НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ

Введение

Дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, в которых неизвестными являются функции одного или нескольких переменных, причем в уравнения входят не только сами функции, но и их производные. Если неизвестными являются функции многих (не менее двух) переменных, то уравнения называются *уравнениями в частных производных*. С такими уравнениями мы и будем иметь дело в дальнейшем; при этом мы будем рассматривать только одно уравнение в частных производных с одной неизвестной функцией.

Уравнение в частных производных от неизвестной функции u переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется уравнением *N-го порядка*, если оно содержит хотя бы одну производную порядка N и не содержит производных более высокого порядка, т. е. уравнение

$$\Phi\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^N u}{\partial x_n^N}\right)=0. \quad (1)$$

Уравнение (1) называется *линейным*, если Φ, как функция переменных $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^N u}{\partial x_n^N}$, является линейной. В дальнейшем мы будем рассматривать линейное уравнение второго порядка, т. е. уравнение вида

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x) u = f(x); \quad (2)$$

здесь $x=(x_1, \ldots, x_n)$. Функции $a_{ij}(x)$, $i, j=1, \ldots, n$, $a_i(x)$, $i=1, \ldots, n$, $a(x)$ называются *коэффициентами* уравнения (2), а функция $f(x)$ — *свободным членом*.

Обозначим через R_n n-мерное евклидово пространство, и пусть $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — точка R_n, $|x|=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$. Как обычно, под областью в R_n или n-мерной областью мы понимаем открытое связное (непустое) множество точек из R_n. В дальнейшем, если противоположное не оговорено особо, рассматриваемые области будем считать ограниченными.

Пусть Q — некоторая n-мерная область. Множество $E \subset Q$ называется *строго внутренним* по отношению к Q, $E \Subset Q$, если $\bar{E} \subset Q$, где $\bar{E}$ — замыкание (в смысле расстояния в R_n) множества E.

Множество всех функций, имеющих в Q непрерывные частные производные до порядка k включительно, где k — некоторое целое неотрицательное число, обозначим через $C^k(Q)$, а подмножество этого множества, состоящее из всех функций, все частные производные до k-го порядка которых непрерывны в $\bar{Q}$, обозначим через $C^k(\bar{Q})$. Для множеств $C^0(Q)$ и $C^0(\bar{Q})$, непрерывных в Q и соответственно непрерывных в $\bar{Q}$ функций, будем пользоваться также обозначениями $C(Q)$ и $C(\bar{Q})$. Множество всех функций, принадлежащих всем $C^k(Q)$, $k=0,1,\ldots$, обозначим через $C^\infty(Q)$, т. е. $C^\infty(Q) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C^k(Q)$. Множество всех функций, принадлежащих всем

$C^k(\bar{Q})$, $k=0, 1, \ldots$, обозначим через $C^\infty(\bar{Q})$, $C^\infty(\bar{Q}) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C^k(\bar{Q})$.

Функция $f(x)$ называется *финитной* в Q, если существует такая подобласть $Q' \Subset Q$, что $f(x)=0$ в $Q \setminus Q'$. Множество всех финитных функций из $C^k(\bar{Q})$ обозначим через $\dot{C}^k(\bar{Q})$, а пересечение

всех этих множеств $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \dot{C}^k(\bar{Q})$ — через $\dot{C}^\infty(\bar{Q})$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — вектор с целыми неотрицательными координатами, через $|\alpha|$ будем обозначать $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$: $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Если функция $f(x) \in C^k(Q)$, то частную производную $\dfrac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ часто для краткости будем обозначать через $D^\alpha f$. Для производных первого и второго порядков будем использовать также обозначения f_{x_i}, $f_{x_i x_j}$. Градиент $(f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})$ функции $f \in C^1(Q)$ будем обозначать через $\nabla f(x)$.

Под $(n-1)$-мерной замкнутой поверхностью S мы будем понимать ограниченную замкнутую $(n-1)$-мерную поверхность без края класса C^k при некотором $k \geqslant 1$, т. е. лежащую в R_n связную ограниченную замкнутую $(S=\bar{S})$ поверхность, обладающую следующим свойством: для любой точки $x^0 \in S$ существуют ее (n-мерная) окрестность U_{x^0} и принадлежащая $C^k(U_{x^0})$ функция $F_{x^0}(x)$, для которой $\nabla F_{x^0}(x^0) \neq 0$, такие, что множество $S \cap U_{x^0}$ описывается уравнением $F_{x^0}(x)=0$ (т. е. все точки множества $S \cap U_{x^0}$ удовлетворяют уравнению $F_{x^0}(x)=0$ и любая удовлетворяющая уравнению $F_{x^0}(x)=0$ точка из U_{x^0} принадлежит S).

Границу области Q будем обозначать через ∂Q. В дальнейшем, если противоположное не оговорено особо, границы рассматриваемых областей будем предполагать состоящими из конечного числа непересекающихся замкнутых $(n-1)$-мерных поверхностей (класса C^1), объем Q будем обозначать через $|Q|$.

Заметим, что если замкнутая $(n-1)$-мерная поверхность S принадлежит классу C^k, то для любой ее точки x^0 существует столь малая ее окрестность U'_{x^0}, что пересечение $S \cap U'_{x^0}$ однозначно проектируется на некоторую $(n-1)$-мерную область D_{x^0} с границей класса C^k, лежащую в одной из координатных плоскостей, т. е. описывается при некотором i, $i=1, \ldots, n$, уравнением $x_i = \varphi_{x^0}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in D_{x^0}$, и $\varphi_{x^0} \in C^k(\overline{D}_{x^0})$. Пересечение $S \cap U'_{x^0}$ будем называть *простым куском* (или *куском*) поверхности S.

Так как S ограничена и замкнута, то из покрытия $\{U'_x, x \in S\}$ поверхности S можно выбрать конечное подпокрытие. Совокупность соответствующих такому конечному покрытию простых кусков $S_1, \ldots, S_N$ будем называть *покрытием поверхности S простыми кусками*.

Под $(n-1)$-мерной поверхностью S класса C^k, $k \geqslant 1$, будем понимать связную поверхность, которую можно так покрыть конечным числом (n-мерных) областей U_i, $i=1, \ldots, N$, что каждое из множеств $S_i = S \cap U_i$, $i=1, \ldots, N$, однозначно проектируется на некоторую $(n-1)$-мерную область D_i с границей класса C^k, лежащую в одной из координатных плоскостей, т. е. при некотором $p=p(i)$, $p=1, \ldots, n$, описывается уравнением $x_p = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots) \in D_i$, и что $\varphi_i \in C^k(\overline{D}_i)$. Совокупность поверхностей S_i—простых кусков поверхности S, соответствующих такому покрытию $U_1, \ldots, U_N$ поверхности S, будем называть *покрытием поверхности S простыми кусками*. В дальнейшем под $(n-1)$-мерной поверхностью мы будем понимать $(n-1)$-мерную поверхность класса C^k при некотором $k \geqslant 1$.

Обозначим через Q^δ, $\delta > 0$, являющееся областью объединение по всем $x^0 \in Q$ шаров $\{|x-x^0| < \delta\}$: $Q^\delta = \bigcup\limits_{x^0 \in Q} \{|x-x^0| < \delta\}$; $Q \Subset Q^\delta$.

Через Q_δ, $\delta > 0$, будем обозначать множество, состоящее из всех точек области Q, расстояние от которых до границы ∂Q больше δ; $Q_\delta \Subset Q$; при достаточно малом $\delta > 0$ Q_δ является областью. Покажем, что для любого достаточно малого $\delta > 0$ существует бесконечно дифференцируемая в R_n функция $\zeta_\delta(x)$, равная 1 в Q_δ и равная 0 вне $Q_{\delta/2}$. Функцию $\zeta_\delta(x)$ в дальнейшем будем называть *δ-срезающей функцией* (или, просто, *срезающей функцией*) *для области Q*. Прежде чем построить функцию $\zeta_\delta(x)$, введем важное понятие ядра усреднения.

Пусть $\omega_1(t)$ — бесконечно дифференцируемая, четная, неотрицательная функция одного переменного t $(-\infty < t < +\infty)$, равная нулю для $|t| \geqslant 1$ и такая, что

$$\int\limits_{R_n} \omega_1(|x|)\,dx = \int\limits_{|x|<1} \omega_1(|x|)\,dx = 1. \tag{3}$$

В качестве $\omega_1(t)$ можно взять, например, функцию

$$\omega_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{C_n} e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & 0 \leqslant |t| < 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1, \end{cases}$$

где постоянная C_n подобрана так, чтобы выполнялось условие (3). Пусть h — произвольное положительное число. Функция

$$\omega_h(|x|) = \frac{1}{h^n}\omega_1(|x|/h)$$

называется *ядром усреднения* (радиуса h). Ядро усреднения $\omega_h(|x|)$, очевидно, обладает следующими свойствами:

а) $\omega_h(|x|) \in C^\infty(R_n)$, $\omega_h(x) \geqslant 0$ в R_n,

б) $\omega_h(|x|) \equiv 0$ для $|x| \geqslant h$,

в) $\int\limits_{R_n} \omega_h(|x|)\,dx = 1$,

г) для любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \geqslant 0$, и при всех $x \in R_n$

$$|D^\alpha \omega_h(|x|)| \leqslant C_\alpha / h^{n+|\alpha|},$$

где C_α — некоторая не зависящая от h положительная постоянная.

Пусть $\omega_h(|x|)$ — произвольное ядро усреднения. Непосредственно проверяется, что при достаточно малом $\delta > 0$ функция

$$\zeta_\delta(x) = \int\limits_{Q_{3\delta/4}} \omega_{\delta/4}(|x-y|)\,dy$$

является срезающей функцией для области Q, при этом функция $\zeta_\delta(x)$ удовлетворяет в R_n неравенствам $0 \leqslant \zeta_\delta(x) \leqslant 1$.

§ 1. Задача Коши. Теорема Ковалевской

1. Постановка задачи Коши. Рассмотрим в некоторой области Q n-мерного пространства R_n (область Q не обязательно ограничена, в частности, она может совпадать со всем R_n) линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,u_{x_i} + a(x)\,u = f(x), \tag{1}$$

при этом коэффициенты и свободный член будем считать достаточно гладкими комплекснозначными функциями. Матрицу $\|a_{ij}(x)\|$,

$i, j=1, \dots n$, составленную из коэффициентов при старших производных, будем обозначать через $A(x)$; матрица $A(x)$ отлична от нулевой матрицы всюду в Q.

В случае одного пространственного переменного, $n=1$, уравнение (1) есть обыкновенное дифференциальное уравнение и его можно записать ($a_{11} \neq 0$) в виде

$$u''+b(x)u'+c(x)u=g(x). \tag{2}$$

Простейшей задачей в этом случае является задача Коши — задача нахождения решения этого уравнения, удовлетворяющего при некотором $x=x^0$ начальным условиям $u(x^0)=u_0$, $u'(x^0)=u_1$.

Посмотрим, как можно ставить аналогичную задачу для уравнения в частных производных (1). Возьмем некоторую принадлежащую Q достаточно гладкую (класса C^2) $(n-1)$-мерную поверхность S, заданную уравнением

$$F(x)=0, \tag{3}$$

где $F(x)$ — вещественнозначная функция, и пусть $|\nabla F| \neq 0$ при всех $x \in S$.

Пусть в Q задано векторное поле $l(x)=(l_1(x), \dots, l_n(x))$, где $l_i(x)$, $i=1, \dots, n$, — вещественнозначные функции, принадлежащие $C^1(Q)$, $|l|^2=l_1^2+\dots+l_n^2>0$, такое что при всех $x \in S$ вектор $l(x)$ не касается поверхности S, т. е.

$$\left.\frac{\partial F}{\partial l}\right|_S = \left.\frac{(l, \nabla F)}{|l|}\right|_S \neq 0.$$

(В дальнейшем нас будут интересовать значения поля $l(x)$ только на S.)

Возьмем произвольную точку $x^0 \in S$ и рассмотрим уравнение (1) в достаточно малой окрестности U этой точки (пусть U — шар с центром в точке x^0 достаточно малого радиуса). Пересечение $S \cap U$ обозначим через S_0.

Предположим, что в U задано решение u, $u \in C^2(U)$, уравнения (1), и пусть $u_0(x)$ — значение функции u на S_0, а $u_1(x)$ — значение производной $\frac{\partial u}{\partial l}$ на S_0:

$$u|_{S_0}=u_0(x), \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{S_0}=u_1(x). \tag{5}$$

Покажем, что для уравнения в частных производных, в отличие от обыкновенного уравнения, u_0 и u_1, вообще говоря, не могут быть произвольными (гладкими) функциями.

Поскольку $\nabla F(x^0) \neq 0$, то одна из координат вектора $\nabla F(x^0)$ отлична от нуля; пусть, например, $F_{x_n}(x^0) \neq 0$. Считаем, что окрестность U настолько мала, что в U $F_{x_n}(x) \neq 0$ и уравнение (3) можно представить в виде

$$x_n = \varphi(x'), \quad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$$

с гладкой функцией $\varphi(x')$. Обозначим через $F_n(x)$ функцию $F(x)$, а через $F_i(x)$ — функции $x_i - x_i^0$, $i = 1, \ldots, n-1$, и рассмотрим взаимно однозначное отображение

$$y_i = F_i(x), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

области U в некоторую окрестность V начала координат — образа точки x^0. Обозначим через Σ лежащий в плоскости $y_n = 0$ образ поверхности S_0: $\Sigma = V \cap \{y' = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in R_{n-1}, \ y_n = 0\}$. Функцию $u(x(y))$ будем обозначать через $v(y)$. Так как $u_{x_i} = \sum\limits_{p=1}^{n} v_{y_p} F_{px_i}$, а $u_{x_i x_j} = \sum\limits_{p,\,q=1}^{n} v_{y_p y_q} F_{px_i} \cdot F_{qx_j} + \sum\limits_{p=1}^{n} v_{y_p} F_{px_i x_j}$, то уравнение (1) в новых переменных имеет вид

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} \beta_{ij}(y)\, v_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(y)\, v_{y_i} + \beta(y)\, v = f_1(y), \tag{1'}$$

где $\beta_{ij}(y)$ — элементы квадратной матрицы $\|(A(x(y)) \cdot \nabla F_i(x(y)), \nabla F_j(x(y)))\|$, в частности,

$$\beta_{nn}(y(x)) = (A(x)\, \nabla F(x), \ \nabla F(x)). \tag{7}$$

Условия (4) и (5) принимают соответственно вид

$$v|_{\Sigma} = v_0(y') \tag{8}$$

и

$$(\nabla_y v, \ \lambda(y))|_{\Sigma} = v_1'(y'), \tag{5'}$$

где $v_0(y') = u_0(y', \varphi(y'))$, $v_1'(y') = u_1(y', \varphi(y'))$, а вектор $\lambda(y(x)) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial l}, \ldots, \frac{\partial F_n}{\partial l}\right)$, $x \in S_0$, причем

$$\frac{\partial F_n}{\partial l} = \frac{\partial F}{\partial l} \neq 0 \text{ на } S_0.$$

Прежде всего покажем, что через функции v_0 и v_1' однозначно определяется значение вектора ∇v на поверхности Σ. Действительно, производные $v_{y_i}|_{\Sigma}$, $i = 1, \ldots, n-1$, вычисляются из (8): $v_{y_i}|_{\Sigma} = v_{0y_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$, а в силу (5')

$$v_{y_n}|_{\Sigma} = v_1(y'), \tag{9}$$

где $v_1(y') = \dfrac{1}{\frac{\partial F}{\partial l}} \left(v_1'(y') - \sum\limits_{i=1}^{n-1} v_{0y_i} \dfrac{\partial F_i}{\partial l}\right)$.

Очевидно, условия (8), (5′) и условия (8), (9) эквивалентны.

Рассмотрим теперь значения на Σ вторых производных функции $v(y)$. Прежде всего заметим, что в силу равенств (8) и (9) значения на Σ всех вторых производных функции $v(y)$, кроме производной $v_{y_n y_n}$, однозначно определяются через функции v_0 и v_1. Для определения значения на Σ производной $v_{y_n y_n}$ воспользуемся уравнением (1′). Из (1′), учитывая (7), имеем

$$\left(A(x(y))\nabla_x F(x(y)), \nabla_x F(x(y))\right) v_{y_n y_n} =$$
$$= f_1(y) - \sum_{i,\, j=1}^{n-1} \beta_{ij} v_{y_i y_j} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{in} v_{y_i y_n} - \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_{y_i} - \beta v. \qquad (1'')$$

Если на поверхности S_0 функция $(A(x)\nabla F, \nabla F) \neq 0$, то функция $(A(x(y))\nabla_x F(x(y)), \nabla_x F(x(y)))$ отлична от нуля на Σ, а следовательно (считаем, что окрестность U достаточно мала) и в V. В этом случае уравнение (1″) в V можно переписать в виде

$$v_{y_n y_n} = \sum_{i,\, j=1}^{n-1} \gamma_{ij} v_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{in} v_{y_i y_n} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i v_{y_i} + \gamma v + h. \qquad (10)$$

Полагая в (10) $y_n = 0$, получим значение на Σ производной $v_{y_n y_n}$.

Таким образом, если $(A(x)\nabla F, \nabla F) \neq 0$ на S_0, то на S_0 однозначно определяются все производные функции $u(x)$ до второго порядка включительно.

Если же в некоторой точке $\tilde{x} \in S_0$ $(A(\tilde{x})\nabla F(\tilde{x}), \nabla F(\tilde{x})) = 0$, то в соответствующей точке $\tilde{y}$ $(A(x(\tilde{y}))\nabla_x F(x(\tilde{y})), \nabla_x F(x(\tilde{y}))) = 0$. Тогда равенство (1″) в точке $\tilde{y}$ является равенством, связывающим уже определенные величины $v(\tilde{y})$, $v_{y_i}(\tilde{y})$, $v_{y_i y_j}(\tilde{y})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-1$. Таким образом, значение в точке $\tilde{y}$ функции v_0 и ее производных до второго порядка и функции v_1 и ее производных первого порядка, а следовательно, и значения в точке $\tilde{x}$ функции u_0 и u_1 и их соответствующих производных связаны некоторым соотношением, т. е., вообще говоря, не могут быть произвольными.

Точка x поверхности S класса C^1, заданной уравнением $F = 0$ (F — вещественнозначная функция, $\nabla F \neq 0$ на S), называется *характеристической точкой* для уравнения (1), если в этой точке

$$(A(x)\nabla F(x), \nabla F(x)) = 0.$$

Поверхность S называется *характеристической* для уравнения (1) или *характеристикой* (для) уравнения (1), если все ее точки характеристические.

В этом параграфе мы будем изучать задачу Коши для уравнения (1), т. е. задачу отыскания решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (4) и (5) с некоторыми заданными функциями u_0 и u_1, в случае, когда поверхность S не имеет характеристических точек.

Значительно более сложным является случай, когда поверхность S содержит характеристические точки. Как было показано, если точка $x^0 \in S$ характеристическая, то существуют такие (гладкие) функции u_0 и u_1, что ни в какой окрестности этой точки не существует гладкого (из $C^2(U)$) решения уравнения (1), удовлетворяющего на $S_0 = S \cap U$ условиям (4) и (5). Легко убедиться, что если U^+ — одна из частей, на которые S_0 разбивает U (считаем, что окрестность U является шаром с центром в x^0 достаточно малого радиуса), то не существует и решения из $C^2(U^+ \cup S_0)$, удовлетворяющего на S_0 условиям (4) и (5). Если, тем не менее, гладкое решение существует, то оно может быть неединственным.

Пусть, например, $n=2$. Рассмотрим в некотором круге U с центром в начале координат уравнение

$$u_{x_1x_2} = f(x),$$

для которого прямая $x_2 = 0$ является характеристикой (к такому виду можно привести с помощью замены независимых переменных уравнение $u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} = f_1$ — волновое уравнение). Легко проверить, что для существования гладкого в U (из $C^2(U)$) решения этого уравнения, удовлетворяющего условиям $u|_{x_2=0} = u_0(x_1)$, $u_{x_2}|_{x_2=0} = u_1(x_1)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\frac{du_1(x_1)}{dx_1} \equiv f(x_1, 0)$. Причем, если это условие выполнено, то решение предоставляется в виде

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} d\xi_1 \int_0^{x_2} f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 + u_0(x_1) + g(x_2),$$

где g — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $g(0) = 0$, $\frac{dg(0)}{dx_2} = u_1(0)$.

Если поверхность S характеристическая, то возможны и такие случаи, когда задачу для уравнения (1) нужно ставить по аналогии с задачей Коши для обыкновенного уравнения не второго, а первого порядка. Так, например, для уравнения (пусть снова $n=2$)

$$u_{x_1x_1} - u_{x_2} = f(x)$$

(уравнение теплопроводности), для которого прямая $x_2 = 0$ является характеристикой, в главе VI будет изучена задача (задача Коши), которая состоит в отыскании решения этого уравнения в полуплоскости $x_2 > 0$, удовлетворяющего только одному условию (4): $u|_{x_2=0} = u_0(x_1)$.

Перейдем теперь к изучению задачи (1), (4), (5) в случае, когда поверхность S не содержит характеристических точек. Пусть Q — n-мерная область, а S — лежащая в Q и заданная уравнением (3) $(n-1)$-мерная поверхность, рассекающая Q на две непересекающиеся области Q^+ и Q^-, т. е. $Q \setminus S = Q^+ \cup Q^-$, $Q^+ \cap \cap Q^- = \emptyset$. Предположим, что в области Q задано уравнение (1) (т. е. в Q заданы коэффициенты и свободный член уравнения (1)), а на поверхности S задано нигде не касающееся поверхности S векторное поле $l(x) = (l_1(x), \ldots, l_n(x))$, $|l(x)| > 0$ на S, и две функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$. Пусть поверхность S не имеет характеристических точек уравнения (1), т. е.

$$(A(x) \nabla F, \nabla F) \neq 0 \quad \text{на} \quad S. \tag{11}$$

Требуется найти функцию $u(x)$, принадлежащую $C^2(Q)$, удовлетворяющую в Q уравнению (1) и удовлетворяющую на S начальным условиям (4) и (5). Будем называть эту задачу нехарактеристической задачей Коши. Заданные функции — коэффициенты и свободный член уравнения (1), функцию F из (3), вектор-функцию l и функции u_0 и u_1 — будем называть данными задачи.

Предположим, что данные задачи (1), (4), (5) бесконечно дифференцируемы: коэффициенты и свободный член уравнения (1) и функция $F(x)$ из (3) принадлежит $C^\infty(Q)$, а функции $l_1(x), \ldots, l_n(x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ принадлежат $C^\infty(S)$ (т. е. функции $l_1(x(y)), \ldots, u_1(x(y))$, где $x = x(y)$ — заданное формулой (6) отображение некоторой окрестности U произвольной точки $x^0 \in S$ в окрестность V начала координат, бесконечно дифференцируемы в $(n-1)$-мерной области $\Sigma = V \cap \{y' \in R_{n-1}, \ y_n = 0\}$). Предположим также, что существует бесконечно дифференцируемое в Q решение $u(x)$ задачи (1), (4), (5).

Как было показано выше, на поверхности S через данные задачи однозначно определяются все производные решения $u(x)$ до второго порядка включительно. Докажем, что на поверхности S через данные задачи однозначно определяются все производные любого порядка функции $u(x)$. Так как в рассматриваемом случае отображение (6) окрестности U произвольной точки $x^0 \in S$ в окрестность V начала координат задается с помощью бесконечно дифференцируемых в U функций $F_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, то в результате отображения (6) задача (1), (4), (5) в области U (под этим мы понимаем задачу нахождения в области U решения уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям $u|_{S_0} = u_0(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{S_0} = u_1(x)$, где $S_0 = U \cap S$) заменяется эквивалентной задачей (8) — (10) для функции $v(y)$ в области V с бесконечно дифференцируемыми данными. При этом поскольку существует бесконечно дифференцируемое в U решение $u(x)$ задачи (1), (4), (5), то и задача (8) — (10) в V имеет бесконечно дифференцируемое в V решение $v(y) = u(x(y))$. Для доказательства утверждения достаточно установить, что все производные $D_y^\alpha v(y)$ на Σ однозначно определяются через данные задачи ((8) — (10)).

Значения на поверхности Σ производных $D^{(\alpha',0)}v(y)$ и $D^{(\alpha',1)}v(y)$ при любых $\alpha'=(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$, $|\alpha'|\geqslant 0$, определяются непосредственно из условий (8) и (9):

$$D^{(\alpha',0)}v|_\Sigma = D^{\alpha'}v_0, \quad D^{(\alpha',1)}v|_\Sigma = D^{\alpha'}v_1.$$

Обозначим через v_α значение в начале координат функции $\frac{1}{\alpha!}D^\alpha v$ $(\alpha! = \alpha_1!\ldots\alpha_n!)$:

$$v_\alpha = \frac{1}{\alpha!}D^\alpha v(0), \qquad |\alpha|\geqslant 0. \tag{12}$$

Тогда через функции v_0 и v_1 однозначно определены $v_{\alpha',0}$ и $v_{\alpha',1}$, $|\alpha'|\geqslant 0$:

$$v_{\alpha',0} = \frac{1}{(\alpha')!}D^{\alpha'}v_0|_{y'=0}, \tag{13}$$

$$v_{\alpha',1} = \frac{1}{(\alpha')!}D^{\alpha'}v_1|_{y'=0} \tag{14}$$

$((\alpha')! = \alpha_1! \ldots \alpha_{n-1}!)$.

Для определения на Σ производной $D^{(\alpha',2)}v(y)$, $|\alpha'|\geqslant 0$, воспользуемся уравнением (10). Дифференцируя (10) по $y_1, \ldots, y_{n-1}$ и полагая $y_n=0$, получим

$$D^{(\alpha',2)}v|_\Sigma = D^{(\alpha',0)}H_1|_\Sigma, \qquad |\alpha'|\geqslant 0,$$

где функция $H_1(y)$ определяется в V формулой

$$H_1(y) = \sum_{i,j=1}^{n-1}\gamma_{ij}(y)\,v_{y_iy_j} + \sum_{i=1}^{n-1}\gamma_{in}(y)\,v_{y_iy_n} + \\ + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i(y)\,v_{y_i} + \gamma(y)\,v + h(y)$$

(в которой в качестве $v(y)$ подставлено решение задачи (8) — (10)). Функция $D^{(\alpha',0)}H_1|_\Sigma$ есть функция (линейная с известными коэффициентами) уже определенных величин $D^{(\beta',0)}v|_\Sigma$ и $D^{(\gamma',1)}v|_\Sigma$ при $0\leqslant|\beta'|\leqslant|\alpha'|+2$, $0\leqslant|\gamma'|\leqslant|\alpha'|+1$. Поэтому на Σ однозначно через данные задачи определяются все производные $D^{(\alpha',2)}v(y)$, $|\alpha'|\geqslant 0$, и, в частности,

$$v_{\alpha',2} = (2!\,(\alpha')!)^{-1}D^{(\alpha',0)}H_1(y)|_{y=0}, \qquad |\alpha'|\geqslant 0.$$

Предположим, что при некотором $k\geqslant 2$ на Σ однозначно через данные задачи уже определены все производные $D^{(\alpha',k-1)}v(y)$, $|\alpha'|\geqslant 0$. Найдем производную $D^{(\alpha',k)}v(y)|_\Sigma$, $|\alpha'|\geqslant 0$. Для этого продифференцируем в V уравнение (10) α_1 раз по $y_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ раз по y_{n-1} и $k-2$ раза по y_n, а затем положим $y_n=0$.

В результате получим

$$D^{(\alpha', k)}v(y)|_\Sigma = D^{(\alpha', k-2)}H_1(y)|_\Sigma.$$

Функция $D^{(\alpha', k-2)}H_1|_\Sigma$ есть функция (линейная с известными коэффициентами) относительно уже определенных величин $D^{(\beta', i)}v|_\Sigma$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$ $(0 \leqslant |\beta'| \leqslant |\alpha'|+2$ при $0 \leqslant i \leqslant k-2$ и $0 \leqslant |\beta'| \leqslant |\alpha'|+1$ при $i=k-1)$. Поэтому на Σ однозначно определяются через данные задачи все производные $D^{(\alpha', k)}v$, $|\alpha'| \geqslant 0$, в частности,

$$v_{\alpha', k} = ((\alpha')!\, k!)^{-1} D^{(\alpha', k-2)}H_1(y)|_{y=0}. \qquad (15)$$

Утверждение доказано.

Замечание. Пусть $v(y)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая в области V функция. Рассмотрим бесконечно дифференцируемую в V функцию

$$H(y) \equiv v_{y_n y_n} - \sum_{i,j=1}^{n-1} \gamma_{ij} v_{y_i y_j} - \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{in} v_{y_i y_n} - \\ - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i v_{y_i} - \gamma v - h. \qquad (16)$$

Из проведенных рассуждений вытекает, что если значения функции $v(y)$ и всех ее производных удовлетворяют условиям (12), где числа v_α, $|\alpha| \geqslant 0$, определены равенствами (13) — (15), то

$$D^\alpha H(y)|_{y=0} = 0 \text{ при всех } \alpha,\ |\alpha| \geqslant 0. \qquad (17)$$

Итак, мы показали, что если на поверхности S нет характеристических точек, то данные задачи однозначно определяют на S все производные бесконечно дифференцируемого решения задачи (1), (4), (5). Следовательно, в классе функций, однозначно определяемых своими значениями и значениями всех своих производных на S, решение задачи (1), (4), (5) единственно. Одним из таких классов является класс аналитических функций. Далее в этом параграфе мы покажем, что в классе аналитических функций задача (1), (4), (5) с аналитическими данными разрешима.

Отметим, что, в отличие от случая обыкновенного уравнения, условие аналитичности данных в столь общей ситуации (если не налагать на коэффициенты уравнения (1) дополнительных ограничений) является, в определенном смысле, необходимым для разрешимости задачи. Следующий пример, принадлежащий Г. Леви, показывает, что уравнение в частных производных с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и свободным членом вообще может не иметь решений.

Пример 1. Дифференциальное уравнение

$$u_{x_1 x_3} + i u_{x_2 x_3} + 2i(x_1 + i x_2) u_{x_3 x_3} = f(x_3) \qquad (18)$$

ни в какой окрестности начала координат (пространства R_3) не имеет дважды непрерывно дифференцируемых решений, если вещественнозначная функция $f(x_3)$ не является аналитической функцией.

Для доказательства этого утверждения, очевидно, достаточно проверить, что уравнение

$$u_{x_1}+iu_{x_2}+2i(x_1+ix_2)u_{x_3}=f(x_3) \tag{19}$$

ни в какой окрестности начала координат не имеет непрерывно дифференцируемых решений.

Предположим, напротив, что в цилиндре $Q=\{x_1^2+x_2^2<R^2, |x_3|<H\}$ при некоторых $R>0$ и $H>0$ существует принадлежащее $C^1(\bar{Q})$ решение $u(x)$ уравнения (19) с неаналитической на интервале $|x_3|<H$ вещественнозначной функцией $f(x_3)$. Тогда функция $u_1(\rho, \varphi, x_3)=u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, x_3)$ в параллелепипеде $\Pi=\{0<\rho<R, 0<\varphi<2\pi, |x_3|<H\}$ является решением уравнения

$$u_{1\rho}e^{i\varphi}+i\frac{u_{1\varphi}}{\rho}e^{i\varphi}+2i\rho e^{i\varphi}u_{1x_3}=f(x_3),$$

причем $u_1\in C^1(\overline{\Pi})$ и $u_1(\rho, 0, x_3)\equiv u_1(\rho, 2\pi, x_3)$. Проинтегрируем это равенство (при фиксированных ρ и x_3) по $\varphi\in(0, 2\pi)$. В результате получим, что в прямоугольнике $K_1=\{0<\rho<R, |x_3|<H\}$ функция

$$u_2(\rho, x_3)=\int_0^{2\pi}u_1(\rho, \varphi, x_3)e^{i\varphi}\,d\varphi,$$

$u_2(\rho, x_3)\in C^1(\bar{K}_1)$, удовлетворяют уравнению

$$u_{2\rho}+\frac{u_2}{\rho}+2i\rho u_{2x_3}=2\pi f(x_3).$$

Поэтому принадлежащая $C^1(K_2)\cap C(\bar{K}_2)$, где K_2 — прямоугольник $\{0<r<R^2, |x_3|<H\}$, функция

$$v(r, x_3)=\sqrt{r}\,u_2(\sqrt{r}, x_3)$$

является в K_2 решением уравнения

$$v_r+iv_{x_3}=\pi f(x_3)$$

или, что то же самое, уравнения

$$\left(v(r, x_3)+i\pi\int_0^{x_3}f(\xi)\,d\xi\right)_r+i\left(v(r, x_3)+i\pi\int_0^{x_3}f(\xi)\,d\xi\right)_{x_3}=0.$$

Но последнее уравнение есть условие Коши — Римана для функции

$$w(r, x_3) = v(r, x_3) + i\pi \int_0^{x_3} f(\xi)\, d\xi.$$

Следовательно, функция $w(r, x_3)$ является аналитической в K_2 и непрерывной в $\bar{K}_2$ функцией комплексного переменного $r + ix_3$, $w(r, x_3) = g(r + ix_3)$. Так как $\operatorname{Re} g|_{r=0} = 0$, то согласно принципу симметрии функция $g(r + ix_3)$ допускает аналитическое продолжение в прямоугольник $K_3 = \{|r| < R^2, |x_3| < H\}$ и, в частности, является аналитической по x_3 функцией на отрезке $\{r = 0, |x_3| < H\}$. Но $g|_{r=0} = i\pi \int_0^{x_3} f(\xi)\, d\xi$, поэтому аналитической при $|x_3| < H$ является и функция $f(x_3)$, что противоречит предположению.

Заметим, что, например, плоскость $x_1 = 0$ не содержит характеристических точек для уравнения (18). Таким образом, задача Коши для уравнения (18) (с начальными условиями, заданными на плоскости $x_1 = 0$) не имеет решений ни в какой содержащей начало координат окрестности ни при каких начальных функциях.

2. Аналитические функции нескольких переменных. Пусть Q — некоторая область n-мерного пространства R_n, а $g(x)$ — комплекснозначная функция, определенная в Q.

Функция $g(x)$ называется *аналитической в точке* $x^0 \in Q$, если в некоторой окрестности U этой точки она представляется абсолютно сходящимся степенным рядом

$$g(x) = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} g_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n} = \sum_{\alpha} g_\alpha (x - x^0)^\alpha, \tag{20}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(x - x^0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$.

Функция $g(x)$ называется *аналитической в области*, если она аналитична в каждой точке этой области.

Пусть функция $g(x)$ аналитична в точке $x^0 \in Q$. Тогда в кубе $K_R(x^0) = \{|x_i - x_i^0| < R, i = 1, \ldots, n\}$ при некотором $R > 0$ она представляется абсолютно сходящимся (в $K_R(x^0)$) рядом (20). Так как абсолютно сходящийся в $K_R(x^0)$ степенной ряд в любой строго внутренней подобласти K куба $K_R(x^0)$, $K \Subset K_R(x^0)$, сходится равномерно вместе со всеми производными, то функция $g(x) \in C^\infty(\bar{K})$ и, следовательно, $g(x) \in C^\infty(K_R(x^0))$. При этом, очевидно, $g_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha g(x^0)$, где $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, т. е. ряд (20) является рядом Тейлора функции $g(x)$ в точке x^0. Отсюда вытекает, что аналитическая в области Q функция однозначно определяется во всей области Q своим значением и значениями всех своих производных в произвольной точке из Q, в частности, если в какой-либо точке из Q она равна нулю вместе со всеми производными, то $g(x) \equiv 0$ в Q.

Покажем, что *если функция $g(x)$ аналитична в точке $x^0 \in Q$, то она аналитична и в некоторой окрестности этой точки.* Для этого достаточно доказать, что если $K_R(x^0)$ — куб, в котором функция $g(x)$ представляется (абсолютно сходящимся) рядом (20), то $g(x)$ аналитична в кубе $K_{R/4}(x^0)$.

Из абсолютной сходимости ряда (20) в $K_R(x^0)$ вытекает, что при любом $\rho \in (0, R)$

$$\sum_\alpha |g_\alpha| \rho^{|\alpha|} < \infty. \tag{21}$$

Возьмем произвольную точку $x^1 \in K_{R/4}(x^0)$. Тогда для всех $x \in \in K_{R/8}(x^1)$ имеем

$$g(x) = \sum_\alpha g_\alpha \left(\sum_{p_1=0}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^{p_1} (x_1 - x_1^1)^{p_1} (x_1^1 - x_1^0)^{\alpha_1 - p_1} \right) \times \ldots$$
$$\ldots \times \left(\sum_{p_n=0}^{\alpha_n} C_{\alpha_n}^{p_n} (x_n - x_n^1)^{p_n} (x_n^1 - x_n^0)^{\alpha_n - p_n} \right) =$$
$$= \sum_\alpha \sum_{p_1=0}^{\alpha_1} \ldots \sum_{p_n=0}^{\alpha_n} g_\alpha C_{\alpha_1}^{p_1} \ldots C_{\alpha_n}^{p_n} \times$$
$$\times (x_1 - x_1^1)^{p_1} \ldots (x_n - x_n^1)^{p_n} (x_1^1 - x_1^0)^{\alpha_1 - p_1} \ldots (x_n^1 - x_n^0)^{\alpha_n - p_n}.$$

Так как для всех $x \in K_{R/8}(x^1)$ при любых $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_i \leqslant \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\left| g_\alpha C_{\alpha_1}^{p_1} \ldots C_{\alpha_n}^{p_n} (x_1 - x_1^1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (x_n^1 - x_n^0)^{\alpha_n - p_n} \right| \leqslant$$
$$\leqslant |g_\alpha| \, 2^{|\alpha|} \left(\frac{R}{8}\right)^{|p|} \left(\frac{R}{4}\right)^{|\alpha| - |p|} = |g_\alpha| \left(\frac{R}{2}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{2^{|p|}}$$

и поскольку в силу (21) ряд

$$\sum_\alpha \sum_p |g_\alpha| \left(\frac{R}{2}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{2^{|p|}} = 2^n \sum_\alpha |g_\alpha| \left(\frac{R}{2}\right)^{|\alpha|} < \infty,$$

то функция $g(x)$ представляется в $K_{R/8}(x^1)$ абсолютно сходящимся рядом

$$g(x) = \sum_p g'_p (x - x^1)^p,$$

где $g'_p = \sum\limits_{\alpha_1 = p_1}^{\infty} \ldots \sum\limits_{\alpha_n = p_n}^{\infty} g_\alpha C_{\alpha_1}^{p_1} (x_1^1 - x_1^0)^{\alpha_1 - p_1} \ldots C_{\alpha_n}^{p_n} (x_n^1 - x_n^0)^{\alpha_n - p_n}$. Следовательно, функция $g(x)$ аналитична в точке x^1 и тем самым в силу произвольности $x^1 \in K_{R/4}(x^0)$ в $K_{R/4}(x^0)$. Утверждение доказано.

Аналитическая в точке x^0 вещественнозначная функция $\tilde{g}(x)=\sum\limits_{\alpha}\tilde{g}_\alpha(x-x^0)^\alpha$ называется *мажорантой* в точке x^0 функции $g(x)$ (из (18)), если для всех α, $|\alpha|\geqslant 0$, $|g_\alpha|\leqslant\tilde{g}_\alpha$.

Пусть $\{g_\alpha, |\alpha|\geqslant 0\}$ — некоторая комплексная числовая последовательность, для которой существует вещественная числовая последовательность $\{\tilde{g}_\alpha, |\alpha|\geqslant 0\}$ такая, что для всех α, $|\alpha|\geqslant 0$, $|g_\alpha|\leqslant\tilde{g}_\alpha$ и ряд $\sum\limits_{\alpha}\tilde{g}_\alpha(x-x^0)^\alpha$ абсолютно сходится в некоторой окрестности точки x^0. Тогда, очевидно, функция $g(x)=\sum\limits_{\alpha}g_\alpha(x-x^0)^\alpha$ аналитична в точке x^0 и функция $\tilde{g}(x)=\sum\limits_{\alpha}\tilde{g}_\alpha(x-x^0)^\alpha$ является ее мажорантой в точке x^0.

Очевидно также, что у любой аналитической в точке x^0 функции существует мажоранта (в x^0). В качестве мажоранты для функции $g(x)$ из (20) можно взять, например, функцию $\sum\limits_{\alpha}|g_\alpha|(x-x^0)^\alpha$. Мажоранту функции $g(x)$ из (20) можно построить также следующим образом. Пусть ряд в (20) абсолютно сходится в кубе $K_R(x^0)$ при некотором $R>0$. Возьмем некоторое ρ из интервала $(0, R)$. В силу (21) существует такое положительное M, что $|g_\alpha|\rho^{|\alpha|}\leqslant M$, т. е. $|g_\alpha|\leqslant M/\rho^{|\alpha|}$, для всех $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Это означает, что мажорантой функции $g(x)$ в точке x^0 является функция

$$\tilde{g}(x)=\sum_{\alpha}\frac{M(x-x^0)^\alpha}{\rho^{|\alpha|}}=\frac{M}{\left(1-\frac{x_1-x_1^0}{\rho}\right)\cdots\left(1-\frac{x_n-x_n^0}{\rho}\right)}.$$

Мажорантой функции $g(x)$ в точке x^0 является при любом $N\geqslant 1$ также функция

$$\tilde{g}(x)=\frac{M}{1-\frac{(x_1-x_1^0)+\ldots+(x_{n-1}-x_{n-1}^0)+N(x_n-x_n^0)}{\rho}},$$

поскольку для всех $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $\quad\dfrac{MN^{\alpha_n}(|\alpha|)!}{\rho^{|\alpha|}\alpha!}\geqslant|g_\alpha|$.

3. Теорема Ковалевской. В этом пункте мы будем изучать задачу Коши в классе аналитических функций, т. е. будем рассматривать аналитические в области Q или в некоторой ее подобласти Q', содержащей поверхность S, решения задачи (1), (4), (5). При этом будем предполагать, что данные задачи (1), (4),

(5) аналитичны, т. е. будем считать, что коэффициенты и свободный член уравнения (1) и функция F из (3) (задающая уравнение поверхности S) — аналитические в Q, а функции $l_1(x), \ldots, l_n(x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ — аналитические на S (т. е. функции $l_1(x(y)), \ldots, l_n(x(y))$, $u_0(x(y))$, $u_1(x(y))$, где $x(y)$ — заданное формулой (6) отображение некоторой окрестности U произвольной точки $x^0 \in S$ в окрестность V начала координат, аналитичны в $(n-1)$-мерной области $\Sigma = V \cap \{y' \in R_{n-1},\ y_n = 0\}$). Напомним, что решение задачи, коэффициенты и свободный член уравнения (1) и начальные функции комплекснозначны, а координаты $l_1(x), \ldots, l_n(x)$ вектора $l(x)$ и функция $F(x)$ вещественнозначны. Будем предполагать, что поверхность S не имеет характеристических точек для уравнения (1).

Прежде всего докажем локальную теорему существования и единственности решения этой задачи.

Теорема 1 (теорема Ковалевской). *Пусть данные задачи* (1), (4), (5) *аналитичны и поверхность S не имеет характеристических точек для уравнения* (1). *Тогда для любой точки $x^0 \in S$ существует такая окрестность U_{x^0} этой точки, в которой эта задача имеет аналитическое решение, и ни в какой окрестности точки x^0 не может быть более одного аналитического решения этой задачи.*

Напомним (см. п. 1), что под задачей (1), (4), (5) в области U_{x^0} мы понимаем задачу нахождения решения $u(x)$ уравнения (1) в U_{x^0}, удовлетворяющего начальным условиям $u|_{S_0} = u_0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{S_0} = u_1$, где $S_0 = S \cap U_{x^0}$; при этом окрестность U_{x^0} предполагается столь малой, что поверхность S_0 разбивает ее на две непересекающиеся области.

Пусть x^0 — произвольная точка поверхности S. Рассмотрим взаимно однозначное отображение (6) некоторой достаточно малой окрестности U этой точки в окрестность V начала координат — образа точки x^0. Поскольку данные задачи (1), (4), (5) и функции $F_i(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$, аналитичны, то задача Коши (1), (4), (5) в области U при этом отображении переходит в эквивалентную ей задачу (8) — (10) (в области V) с аналитическими данными. Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что найдется такая окрестность V начала координат, в которой существует аналитическое решение $v(y)$ задачи (8) — (10), и что решение этой задачи единственно.

Прежде всего докажем единственность. Пусть в некоторой окрестности V_1 начала координат существует аналитическое решение $v(y)$ задачи (8) — (10). Так как $v(y) \in C^\infty(V_1)$, то из рассмотрений п. 1 вытекает, что на поверхности Σ данными задачи однозначно определяются значения всех производных $D^\alpha v$, $|\alpha| \geq 0$. В частности, однозначно определяются все значения $D^\alpha v(0)$,

$|\alpha|\geqslant 0$. Следовательно (см. п. 2), решение $v(y)$ однозначно определяется через данные задачи в области V_1. Единственность доказана.

Перейдем к доказательству существования. Прежде всего отметим, что достаточно доказать существование такой аналитической в начале координат функции $v(y)$ — в силу свойств аналитических функций (см. п. 2) она аналитична и в некоторой окрестности V начала координат, — которая является решением в V задачи (8) — (10).

Равенствами (12) — (15) (см. п. 1) по данным задачи (8) — (10) (однозначно) определяются числа v_α, $|\alpha|\geqslant 0$. Покажем, что формально написанный степенной ряд

$$\sum_{\alpha} v_\alpha y^\alpha \tag{22}$$

представляет собой аналитическую в начале координат функцию. Тогда сумма этого абсолютно сходящегося в некоторой окрестности V начала координат ряда, обозначим ее через $v(y)$, будет искомым решением.

Действительно, из (13) вытекает, что значение аналитической по y' функции $v(y', 0)$ и значения всех ее производных по $y_1, \ldots, y_{n-1}$ при $y'=0$ совпадают с соответствующими значениями для аналитической по y' функции $v_0(y')$. Следовательно, $v(y', 0)\equiv$ $\equiv v_0(y')$ на $\Sigma = V\cap\{y'\in R_{n-1},\ y_n=0\}$. Аналогично из (14) получаем, что $v_{y_n}(y', 0)\equiv v_1(y')$ на Σ. То, что функция $v(y)$ удовлетворяет в V уравнению (10), проверяется следующим образом. Рассмотрим аналитическую в V функцию $H(y)$, определенную равенством (16), где в качестве $v(y)$ подставлена исследуемая аналитическая функция (22). В силу выбора чисел v_α, $|\alpha|\geqslant 0$, согласно сделанному в п. 1 замечанию имеют место равенства (17), т. е. функция $H(y)$ и все ее производные в начале координат равны нулю. Следовательно, аналитическая в V функция $H(y)\equiv 0$. А это и означает, что функция $v(y)$ удовлетворяет в V уравнению (10).

Итак, нам нужно доказать, что ряд (22) абсолютно сходится в некоторой окрестности начала координат. Для этого (см. п. 2) достаточно показать существование мажоранты для этого ряда в начале координат.

Задачу Коши (в V) с аналитическими данными

$$\tilde v_{y_n y_n} = \sum_{i,j=1}^{n-1} \tilde\gamma_{ij}\tilde v_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde\gamma_{in}\tilde v_{y_i y_n} + \sum_{i=1}^{n} \tilde\gamma_i \tilde v_{y_i} + \tilde\gamma\tilde v + \tilde h, \tag{$\tilde{10}$}$$

$$\tilde v|_{y_n=0} = \tilde u_0(y'), \tag{$\tilde 8$}$$

$$\tilde v_{y_n}|_{y_n=0} = \tilde u_1(y') \tag{$\tilde 9$}$$

будем называть задачей, мажорирующей задачу (8) — (10), если данные этой задачи являются мажорантами в начале координат соответствующих данных задачи (8) — (10).

Если задача $(\tilde{8})-(\tilde{10})$ имеет аналитическое в начале координат решение

$$\tilde{v}(y)=\sum_{\alpha}\tilde{v}_{\alpha}y^{\alpha}, \tag{$\tilde{22}$}$$

то это решение является мажорантой в начале координат для ряда (22) и, следовательно, ряд (22) представляет собой аналитическую в начале координат функцию.

Доказательство этого утверждения заключается в проверке справедливости при всех α, $|\alpha|\geqslant 0$, неравенств $|v_{\alpha}|\leqslant\tilde{v}_{\alpha}$. По определению мажорирующей задачи функции $\tilde{u}_0$ и $\tilde{u}_1$ являются мажорантами в начале координат функций u_0 и u_1 соответственно. Следовательно (см. (13) и (14)), для всех α', $|\alpha'|\geqslant 0$, $|v_{\alpha',0}|\leqslant\tilde{v}_{\alpha',0}$ и $|v_{\alpha',1}|\leqslant\tilde{v}_{\alpha',1}$.

Предположим, что при некотором $k\geqslant 1$ уже доказаны при всех s, $0\leqslant s\leqslant k-1$, и всех α', $|\alpha'|\geqslant 0$, неравенства $|v_{\alpha',s}|\leqslant\tilde{v}_{\alpha',s}$. Покажем, что тогда и $|v_{\alpha',k}|\leqslant\tilde{v}_{\alpha',k}$, $|\alpha'|\geqslant 0$. В силу (15)

$$v_{\alpha',k}=\sum_{|\beta'|\leqslant|\alpha'|+1}c_{\beta',k-1}v_{\beta',k-1}+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{|\beta'|\leqslant|\alpha'|+2}c_{\beta',s}v_{\beta',s}+h_{\alpha',k},$$

а

$$\tilde{v}_{\alpha',k}=\sum_{|\beta'|\leqslant|\alpha'|+1}\tilde{c}_{\beta',k-1}\tilde{v}_{\beta',k-1}+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{|\beta'|\leqslant|\alpha'|+2}\tilde{c}_{\beta',s}\tilde{v}_{\beta',s}+\tilde{h}_{\alpha',k},$$

где

$$h_{\alpha',k}=\frac{1}{(\alpha')!\,k!}D^{(\alpha',k)}h(0),$$

$$\tilde{h}_{\alpha',k}=\frac{1}{(\alpha')!\,k!}D^{(\alpha',k)}\tilde{h}(0),$$

постоянные $c_{\beta',s}$ — линейные комбинации с неотрицательными коэффициентами значений в начале координат производных коэффициентов уравнения (10), а $\tilde{c}_{\beta',s}$ есть те же самые линейные комбинации соответствующих (неотрицательных!) производных коэффициентов уравнения $(\tilde{10})$. Так как задача $(\tilde{8})-(\tilde{10})$ — мажорирующая задачу (8) — (10), то $|h_{\alpha',k}|\leqslant\tilde{h}_{\alpha',k}$ и $|c_{\beta',s}|\leqslant\leqslant\tilde{c}_{\beta',s}$. Следовательно, $|v_{\alpha',k}|\leqslant\tilde{v}_{\alpha',k}$.

Таким образом, для доказательства абсолютной сходимости в некоторой окрестности начала координат ряда (22) нам достаточно построить мажорирующую задачу $(\tilde{8})-(\tilde{10})$, имеющую аналитическое в начале координат решение. При построении мажорирующей задачи удобнее иметь дело с однородными начальными условиями (8) и (9):

$$v|_{y_n=0}=0, \tag{8_0}$$

$$v_{y_n}|_{y_n=0}=0. \tag{9_0}$$

Заметим, что для доказательства существования аналитического решения задачи (8) — (10) достаточно доказать существование аналитического решения $w(y)$ следующей задачи с однородными начальными условиями:

$$w_{y_ny_n}-\sum_{i,\,j=1}^{n-1}\gamma_{ij}w_{y_iy_j}-\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_{in}w_{y_iy_n}-\sum_{i=1}^{n}\gamma_iw_{y_i}-\gamma w-h'=0,$$
$$w|_{y_n=0}=0,$$
$$w_{y_n}|_{y_n=0}=0,$$

где

$$h'=h-w'_{y_ny_n}+\sum_{i,\,j=1}^{n-1}\gamma_{ij}w'_{y_iy_j}+\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_{in}w'_{y_iy_n}+\sum_{i=1}^{n}\gamma_iw'_{y_i}+\gamma w',$$
$$w'(y)=v_0(y')+y_nv_1(y').$$

Действительно, легко видеть, что если w — аналитическое решение этой задачи, то функция $v=w+w'$ является аналитическим решением задачи (8) — (10).

Следовательно, мы можем считать начальные условия (8) и (9) однородными, т. е. нам достаточно построить мажорирующую задачу для задачи (8_0), (9_0), (10). Поскольку коэффициенты и свободный член уравнения (10) аналитичны в начале координат, то (см. п. 2) в качестве уравнения $(\tilde{10})$ мажорирующей задачи можно взять уравнение

$$\tilde{v}_{y_ny_n}=\frac{M}{1-\frac{y_1+\ldots+y_{n-1}+Ny_n}{\rho}}\times$$
$$\times\left(\sum_{i,\,j=1}^{n-1}\tilde{v}_{y_iy_j}+\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{v}_{y_iy_n}+\sum_{i=1}^{n}\tilde{v}_{y_i}+\tilde{v}+1\right) \tag{$\tilde{\tilde{10}}$}$$

при некоторых $\rho>0$, $M>0$ и произвольном $N\geqslant 1$. Рассмотрим зависящие только от $\frac{y_1+\ldots+y_{n-1}+Ny_n}{\rho}=\eta$ решения $\tilde{v}=Y(\eta)$ уравнения $(\tilde{\tilde{10}})$. Все такие решения являются решениями обыкновенного уравнения

$$Y'' = \frac{AY' + B(Y+1)}{a-\eta}, \tag{23}$$

где $A = \frac{M\rho(n-1+N)}{N^2}$, $B = \frac{M\rho^2}{N^2}$, $a = 1 - \frac{M(n-1)^2}{N^2} - \frac{(n-1)M}{N}$. Выберем N настолько большим, чтобы число a было положительным, $0<a<1$.

Возьмем решение $Y_0(\eta)$ уравнения (23), удовлетворяющее однородным начальным условиям $Y_0(0) = Y_0'(0) = 0$. Так как коэффициенты уравнения (23) аналитичны при $\eta = 0$ (даже при $|\eta| < a$), то нетрудно убедиться, что и функция $Y_0(\eta)$ аналитична в нуле *). Поскольку все производные в точке $\eta = 0$ функции $\frac{1}{a-\eta}$ положительны, то в силу (23)

$$\frac{d^k Y_0(0)}{d\eta^k} \geqslant 0 \quad \text{для всех } k = 0, 1, \ldots .$$

Таким образом, аналитическая в начале координат функция $\tilde{v}(y) = Y_0\left(\frac{y_1 + \ldots + y_{n-1} + Ny_n}{\rho}\right)$ является решением уравнения $(\tilde{10})$ и все ее производные в начале координат неотрицательны. Следовательно, мы построили аналитическое решение задачи Коши, мажорирующей задачу (8_0), (9_0), (10) в начале координат. Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть данные задачи* (1), (4), (5) *аналитичны и поверхность S не имеет характеристических точек. Тогда существует такая содержащая поверхность S область Q' $(Q' \subset Q)$, в которой эта задача имеет аналитическое решение, и ни в какой области, содержащей поверхность S, не может быть более одного аналитического решения этой задачи.*

Прежде всего заметим, что утверждение о единственности решения немедленно вытекает из теоремы 1 и свойств аналитических функций.

*) Проще всего в этом можно убедиться следующим образом. Рассмотрим уравнение

$$\tilde{Y}'' = \frac{1}{a-\eta}\left(A\tilde{Y}' + \frac{B(\tilde{Y}+1)}{a-\eta}\right), \tag{$\tilde{23}$}$$

коэффициенты которого (поскольку $0<a<1$) мажорируют соответствующие коэффициенты уравнения (23). Уравнение $(\tilde{23})$ является уравнением Эйлера для функции $\tilde{Y}+1$. Удовлетворяющее начальным условиям $\tilde{Y}(0) = \tilde{Y}'(0) = 0$ решение уравнения $(\tilde{23})$ $\tilde{Y}_0(\eta) = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2}[\sigma_1(1-\eta/a)^{\sigma_2} - \sigma_2(1-\eta/a)^{\sigma_1}] - 1$, где $\sigma_1 = [1 - A + \sqrt{(1-A)^2 + 4B}]/2$, а $\sigma_2 = [1 - A - \sqrt{(1-A)^2 + 4B}]/2$, аналитично в нуле и мажорирует в точке $\eta = 0$ функцию $Y_0(\eta)$.

Докажем существование решения. В силу теоремы 1 для каждой точки x^0 поверхности S существует такая ее окрестность, в которой задача (1), (4), (5) однозначно разрешима. Нетрудно видеть, что уменьшая каждую из окрестностей U_{x^0}, $x^0 \in S$, можно получить покрытие $\{U'_{x^0}, x^0 \in S\}$ поверхности S, обладающее следующим свойством: если пересечение любых двух окрестностей непусто, то оно является открытым множеством, каждая связная компонента которого содержит точки S (т. е. это пересечение представляется в виде объединения не более чем счетного числа непересекающихся областей, каждая из которых содержит точки S).

Действительно, рассмотрим в U_{x^0} шар $\{|x-x^0|<r_0\}$ такого достаточно малого радиуса $r_0=r_0(x^0)>0$, что угол между нормалями к S в любых двух точках из пересечения этого шара с S меньше $\pi/4$. В качестве U'_{x^0} возьмем область $\{x\colon x=x^1+ tn(x^1),\ x^1 \in S \cap \{|x-x^0|<r_0/4\},\ t \in (-\delta_0, \delta_0)\}$, где $n(x^1)$ — нормаль к S в точке x^1; при этом будем считать $\delta_0=\delta_0(x^0)< r_0/4$ столь малым, что через каждую точку этой области проходит только одна нормаль к поверхности $S \cap \{|x-x^0|<r_0\}$ (т. е. для каждой точки $x \in U'_{x^0}$ существует только одна точка $x^1(x)$, принадлежащая $S \cap \{|x-x^0|<r_0\}$, такая, что x принадлежит прямой $\{x\colon x=x^1+n(x^1)t,\ t \in R_1\}$). Очевидно, что покрытие $\{U'_{x^0}, x^0 \in S\}$ поверхности S является искомым.

Так как при каждом $x_0 \in S$ $U'_{x^0} \subset U_{x^0}$, то в U'_{x^0} существует единственное аналитическое решение задачи (1), (4), (5); обозначим его через $u_{x^0}(x)$. Заметим, что если x^0 и x^1 — две произвольные точки поверхности S и $U'_{x^0} \cap U'_{x^1} \neq \varnothing$, то $u_{x^0}(x) \equiv u_{x^1}(x)$ в $U'_{x^0} \cap U'_{x^1}$. Следовательно, в области $Q' = \bigcup\limits_{x^0 \in S} U'_{x^0}$, $Q' \subset Q$, можно определить аналитическую функцию $u(x)$ равенством $u(x) = u_{x^0}(x)$ при $x \in U'_{x^0}$. Функция $u(x)$ является искомым аналитическим решением в Q' задачи (1), (4), (5). Теорема доказана.

В случае, когда поверхность S не содержит характеристических точек, как показывает теорема Ковалевской, задача Коши для уравнения в частных производных второго порядка, которая в п. 1 была поставлена по аналогии с задачей Коши для обыкновенного уравнения второго порядка, и на самом деле в определенном смысле ей аналогична. Известная в теории обыкновенных уравнений теорема Коши утверждает, что обыкновенное уравнение (2) с аналитическими на интервале $a<x<b$ коэффициентами и свободным членом в некоторой окрестности точки x^0, в которой задаются начальные условия, $a<x^0<b$, имеет единственное аналитическое решение, удовлетворяющее этим начальным условиям. Теорема Ковалевской является обобщением теоремы Коши на случай уравнения в частных производных: если поверхность S, на которой задаются начальные условия, не имеет характеристи-

ческих точек и данные задачи (1), (4), (5) аналитичны, то в некоторой «окрестности» поверхности S задача (1), (4), (5) имеет единственное аналитическое решение.

Однако полной аналогии между задачей Коши для обыкновенного уравнения и задачей Коши для уравнения в частных производных и, тем более, между теорией обыкновенных уравнений и теорией уравнений в частных производных не существует — в случае уравнений в частных производных ситуация значительно сложнее.

В п. 1 было показано, что в случае, когда на поверхности S имеются характеристические точки, существования аналитического (и даже дважды непрерывно дифференцируемого) решения задачи Коши гарантировать нельзя: если точка $x^0 \in S$ характеристическая для уравнения (1), то существуют такие гладкие и даже аналитические начальные функции u_0 и u_1, что ни в какой окрестности U этой точки не существует решения (из $C^2(\bar{U})$) задачи (1), (4), (5). При этом отмечалось, что если поверхность S является характеристикой, то возможны такие случаи, когда задачу Коши нужно ставить по аналогии с обыкновенным уравнением первого порядка (например, для уравнения $u_{x_1x_1} - u_{x_2} = f(x)$, для которого прямая $x_2 = 0$ является характеристикой, в главе VI будет изучена задача Коши, которая состоит в отыскании решения этого уравнения в полуплоскости $x_2 > 0$, удовлетворяющего одному начальному условию $u|_{x_2=0} = u_0(x_1)$). Как показывает следующий пример Ковалевской, и в этом случае аналитичность данных задачи не гарантирует существование аналитического решения.

Пример 2. Не существует аналитического в начале координат решения уравнения

$$u_{x_1x_1} - u_{x_2} = 0,$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u|_{x_2=0} = \frac{1}{1+x_1^2}.$$

Непосредственно проверяется, что если аналитическое в начале координат решение этой задачи существует:

$$u(x_1, x_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2} u_{\alpha_1, \alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2},$$

то коэффициенты u_{α_1, α_2} имеют вид $u_{2s, k} = \frac{(2s+2k)!}{(2s)!\,k!}(-1)^{k+s}$ и $u_{2s+1, k} = 0$ при $s \geqslant 0$, $k \geqslant 0$. Но тогда написанный ряд не может быть сходящимся ни в какой окрестности начала координат, поскольку он расходится, например, в любой точке $(0, x_2)$ при $x_2 \neq 0$.

Как известно, решение задачи Коши для обыкновенного уравнения (2) непрерывно зависит от начальных данных. Приводимый ниже пример Адамара показывает, что уравнения в частных производных этим свойством, вообще говоря, не обладают.

Пример 3. Рассмотрим в круге $Q=\{x_1^2+x_2^2<1\}$ задачу Коши

$$u_{x_2x_2}=-u_{x_1x_1},$$
$$u|_{x_2=0}=u_{n,0}\equiv e^{-\sqrt{n}}e^{inx_1},$$
$$u_{x_2}|_{x_2=0}=u_{n,1}\equiv 0,$$

где n — натуральное число (прямая $x_2=0$, очевидно, не имеет характеристических точек для уравнения $u_{x_2x_2}=-u_{x_1x_1}$). Решение этой задачи (единственное в классе аналитических функций), как легко проверить, имеет вид $u=u_n(x)=e^{-\sqrt{n}}\operatorname{ch} nx_2e^{inx_1}$. Следовательно, для любой точки $x=(x_1, x_2)$ из круга Q, не лежащей на начальной прямой $x_2=0$, $|u_n(x)|\to\infty$ при $n\to\infty$ несмотря на то, что $u_{n,0}(x_1)\to 0$ $\left(|u_{n,0}|=e^{-\sqrt{n}}\right)$ и даже при любом $k\geqslant 1$ $\frac{d^ku_{n,0}}{dx_1^k}\to 0$ при $n\to\infty$ равномерно на $[-1, 1]$.

Более того, хорошо известно, что у любого обыкновенного уравнения (2) с непрерывными на некотором интервале коэффициентами и свободным членом всегда существуют решения (на всем этом интервале). В случае же уравнения в частных производных в столь общей ситуации, которую мы рассматривали до сих пор, аналогичное утверждение не имеет места: как показывает (приведенный в п. 1) пример Леви, существуют такие линейные уравнения второго порядка в частных производных, которые не имеют ни одного решения ни в какой окрестности некоторой точки; при этом никакие условия на гладкость коэффициентов (и даже аналитичность коэффициентов) не гарантируют существование решения ни при каком сколь угодно гладком (и даже бесконечно дифференцируемом), свободном члене. Следовательно, при изучении неаналитических решений линейного уравнения второго порядка в частных производных нужны дополнительные условия на структуру уравнения. В следующем параграфе мы выделим некоторые классы уравнений, которые и будем в дальнейшем рассматривать.

§ 2. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим в некоторой n-мерной области Q линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$\mathcal{L}u=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,u_{x_i}+a(x)\,u=f(x). \qquad (1)$$

Коэффициенты $a_{ij}(x)$, $i, j=1, \ldots, n$, будем считать вещественнозначными; решения уравнения (1) будем предполагать принадлежащими $C^2(Q)$. Матрицу $A(x)=\|a_{ij}(x)\|$, состоящую из коэффициентов при старших производных оператора $\mathscr{L}$, можно считать симметрической. Действительно, $\sum a_{ij}u_{x_ix_j}=\sum a'_{ij}u_{x_ix_j}+\sum a''_{ij}u_{x_ix_j}$, где $a'_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})$, $a''_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji})$. Так как $u_{x_ix_j}=u_{x_jx_i}$, то $\sum a''_{ij}u_{x_ix_j}\equiv 0$, поэтому $\sum a_{ij}u_{x_ix_j}\equiv\sum a'_{ij}u_{x_ix_j}$, причем матрица $\|a'_{ij}(x)\|$ — симметрическая.

Пусть x^0 — произвольная точка из Q, $\lambda_1(x^0), \ldots, \lambda_n(x^0)$ — собственные значения (очевидно, вещественные) матрицы $A(x^0)$. Число положительных собственных значений обозначим через $n_+=n_+(x^0)$, число отрицательных — через $n_-=n_-(x^0)$, число нулевых — через $n_0=n_0(x^0)$, $n=n_++n_-+n_0$.

Уравнение (1) называется *уравнением эллиптического типа в точке* x^0 (или просто *эллиптическим в точке* x^0), если $n_+=n$ или $n_-=n$. Уравнение называется *эллиптическим на множестве* E, $E\subset Q$, если оно эллиптично в каждой точке этого множества. Примером уравнения эллиптического в R_n является уравнение Пуассона

$$\Delta u=f,$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа.

Уравнение (1) называется *гиперболическим в точке* $x^0\in Q$ (*уравнением гиперболического типа в* x^0), если $n_+=n-1$, а $n_-=1$ или если $n_+=1$, а $n_-=n-1$. Если уравнение гиперболично в каждой точке множества E, $E\subset Q$, то оно называется *гиперболическим на* E. Примером гиперболического во всем пространстве R_n переменных $x_1, \ldots, x_n$ является волновое уравнение

$$u_{x_1x_1}+\ldots+u_{x_{n-1}x_{n-1}}-u_{x_nx_n}=f.$$

Уравнение (1) называется *ультрагиперболическим в точке* x^0, если $n_0=0$ и $1<n_+<n-1$. Уравнение (1) — *ультрагиперболическое на* E, $E\subset Q$, если оно является ультрагиперболическим в каждой точке E. Уравнение

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}-u_{x_3x_3}-u_{x_4x_4}=f(x)$$

является ультрагиперболическим во всем пространстве R_4.

Уравнение (1) называется *параболическим* (или *уравнением параболического типа*) *в точке* $x^0\in Q$, если $n_0>0$. Уравнение (1) называется *параболическим на множестве* $E\subset Q$, если оно параболическое в каждой точке E. Примером параболического уравнения во всем пространстве R_n переменных $x_1, \ldots, x_n$ является уравнение теплопроводности

$$u_{x_1x_1}+\ldots+u_{x_{n-1}x_{n-1}}-u_{x_n}=f(x).$$

Конечно, тип уравнения не обязан быть одним и тем же для всех точек области. Например, уравнение Чаплыгина ($n=2$)

$$u_{x_1x_1}+T(x_1)\,u_{x_2x_2}=f(x),$$

где функция $T(x_1)$ положительная для $x_1>0$, отрицательная для $x_1<0$ и равная нулю для $x_1=0$, эллиптично для $x_1>0$, гиперболично для $x_1<0$ и параболично для $x_1=0$.

Напомним (см. п. 1 § 1), что лежащая в Q поверхность S, заданная уравнением $F(x)=0$ (вещественнозначная функция $F\in C^1(Q)$ и $|\nabla F|\neq 0$ на S), называется характеристической поверхностью (характеристикой) для уравнения (1), если для всех точек $x\in S$

$$(A(x)\nabla F,\ \nabla F)=0. \tag{2}$$

Если уравнение (1) эллиптично в Q, то матрица $A(x)$ является положительно или отрицательно определенной в каждой точке $x\in Q$. Это означает, что равенство (2) может иметь место только при $|\nabla F|=0$. Следовательно, эллиптические уравнения не имеют характеристических поверхностей (более того, никакая поверхность S не содержит ни одной характеристической точки эллиптического уравнения).

Если уравнение (1) гиперболическое в Q, то можно показать, что через любую точку области Q можно провести характеристическую поверхность. Например, в случае волнового уравнения $u_{x_1x_1}+\ldots+u_{x_{n-1}x_{n-1}}=u_{x_nx_n}$ уравнение (2) имеет вид

$$F_{x_1}^2+\ldots+F_{x_{n-1}}^2-F_{x_n}^2=0. \tag{2'}$$

Этому уравнению, в частности, удовлетворяет функция $(x-x^0,\ m)=(x_1-x_1^0)\,m_1+\ldots+(x_n-x_n^0)\,m_n$, где x^0 — произвольная точка из R_n, а вектор $m=(m_1,\ \ldots,\ m_n)$, $|m|=1$, подчинен условию $m_1^2+\ldots+m_{n-1}^2=m_n^2$. Уравнению (2') удовлетворяет также функция $(x_1-x_1^0)^2+\ldots+(x_{n-1}-x_{n-1}^0)^2-(x_n-x_n^0)^2$, где x^0 — произвольная точка из R_n. Следовательно, плоскость $(x-x^0,\ m)=0$ и коническая поверхность $(x_1-x_1^0)^2+\ldots+(x_{n-1}-x_{n-1}^0)^2=(x_n-x_n^0)^2$ являются характеристиками волнового уравнения.

Для уравнения теплопроводности $u_{x_1x_1}+\ldots+u_{x_{n-1}x_{n-1}}=u_{x_n}$ уравнение (2) имеет вид

$$F_{x_1}^2+\ldots+F_{x_{n-1}}^2=0.$$

Очевидно, что любое решение этого уравнения имеет вид $F=\Phi(x_n)$, где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция ($\Phi'\neq 0$). Поэтому характеристики уравнения теплопроводности суть плоскости $x_n=\text{const}$.

Пусть x^0 — некоторая точка области Q. Обозначим через $y=y(x)$ ($y_i=y_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i=1, \ldots, n$) преобразование, взаимно однозначно отображающее некоторую окрестность U точки x^0 на окрестность V соответствующей точки y^0, $y^0=y(x^0)$, а через $x=x(y)$ — обратное ему преобразование. Будем предполагать, что функции $y_i(x) \in C^2(\overline{U})$, $i=1, \ldots, n$, и что матрица Якоби $J(x)=\left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\|$ преобразования $y=y(x)$ не вырождена, т. е. что якобиан преобразования $\det J(x) \neq 0$ в $\overline{U}$. Функцию $u(x(y))$ обозначим через $v(y)$. Так как $u_{x_i}=\sum\limits_{k=1}^{n} v_{y_k} y_{kx_i}$, $u_{x_i x_j}=\sum\limits_{k,\,s=1}^{n} v_{y_k y_s} y_{kx_i} y_{sx_j}+\sum\limits_{k=1}^{n} v_{y_k} y_{kx_i x_j}$, то уравнение (1) в результате замены переменных будет иметь вид

$$\sum_{k,\,s=1}^{n} \tilde{a}_{ks}(x(y))\, v_{y_k y_s}=F(y,\ v,\ \nabla v), \tag{3}$$

где $\tilde{a}_{ks}(x)=\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y_{kx_i} y_{sx_j}$, а F — некоторая функция, не зависящая от вторых производных функции v. Так как матрицы $\tilde{A}(x)=\|\tilde{a}_{ks}(x)\|$ и $A(x)=\|a_{ij}(x)\|$ связаны равенством $\tilde{A}(x)=JAJ^*$, то согласно известной теореме Алгебры число положительных, число отрицательных и число нулевых собственных значений матрицы $\tilde{A}(x)$ совпадает с соответствующими числами для матрицы $A(x)$. Это означает, что в любой точке $y \in V$ уравнение (3) имеет тот же тип, что и уравнение (1) в соответствующей точке $x \in U$. Таким образом, приведенная выше классификация уравнений второго порядка инварианта относительно гладких взаимно однозначных невырожденных преобразований независимых переменных. Этим обстоятельством можно воспользоваться для упрощения уравнения (1).

Возьмем произвольную точку $x^0 \in Q$. Известно, что для матрицы $A(x^0)$ существует такая невырожденная матрица $T=T(x^0)= =\|t_{ij}\|$, что

$$TA(x^0)T^*=\Lambda(x^0)=\left\| \begin{matrix} \overbrace{+1 \cdots +1}^{n_+} & & 0 \\ & \overbrace{-1 \cdots -1}^{n_-} & \\ 0 & & \overbrace{0 \cdots 0}^{n_0} \end{matrix} \right\|$$

Сделаем линейную замену независимых переменных $y=T(x^0)\,x$. Так как матрица Якоби этой замены равна T, то в результате преобразования уравнение (1) перейдет в уравнение (2), матрица коэффициентов при старших производных в котором равна $TA(x)T^*$.

Это означает, что при $x=x^0$ уравнение (3) имеет вид

$$v_{y_1y_1}+\ldots+v_{y_{n_+}y_{n_+}}-v_{y_{n_++1}y_{n_++1}}-\ldots-v_{y_{n_++n_-}y_{n_++n_-}}=F_1,$$

в которой функция F_1 не зависит от вторых производных функции v. Этот вид называется *каноническим видом* уравнения (1) в точке x^0.

Таким образом, для любой точки $x=x^0\in Q$ можно указать неособое линейное преобразование независимых переменных, приводящее уравнение (1) при $x=x^0$ к каноническому виду. Поскольку преобразование зависит лишь от значений коэффициентов при старших производных в (1) при $x=x^0$, то в случае, когда эти коэффициенты постоянные в Q, найденное линейное преобразование приводит уравнение (1) к каноническому виду в каждой точке области Q (в области Q).

§ 3. Постановка некоторых задач

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые физические задачи, приводящие к задачам для дифференциальных уравнений в частных производных.

1. Задачи о равновесии и движении мембраны. Рассмотрим задачу о нахождении положения равновесия мембраны (тонкой упругой пленки), находящейся под действием некоторой системы сил.

Будем считать, что в любом допустимом положении мембрана представляет собой поверхность, лежащую в пространстве $(x, u)=(x_1, x_2, u)$, однозначно проектирующуюся на некоторую область Q плоскости x_1Ox_2 и задаваемую уравнением $u=u(x)$, $x\in Q$, при некоторой функции $u(x)$ класса $C^1(\overline{Q})$. Если $u=\varphi(x)$, $x\in Q$, — какое-нибудь допустимое положение мембраны, то будем считать, что любое другое допустимое положение $u=u(x)$ получается из положения $u=\varphi(x)$ так, что каждая точка мембраны перемещается параллельно оси Ou.

Предположим, что действующая на мембрану внешняя сила направлена параллельно оси Ou и имеет непрерывную плотность $f_1(x, u)$, равную $f(x)-a(x)u$ (на мембрану действует сила с плотностью $f(x)$, $x\in Q$, и сила сопротивления упругой среды, плотность которой $-a(x)u$ пропорциональна смещению и обратна ему по знаку, $a(x)\geqslant 0$ — коэффициент упругости среды). Работа этой силы по перемещению мембраны из положения $\varphi(x)$ в положение $u(x)$ равна

$$\int\limits_Q\int\limits_{\varphi(x)}^{u(x)} f_1(x, u)\,du\,dx=\int\limits_Q\left[f(x)(u(x)-\varphi(x))-\frac{a(x)}{2}(u^2(x)-\varphi^2(x))\right]dx.$$

На мембрану, кроме того, действует внутренняя упругая сила.

Будем считать, что ее работа по перемещению мембраны из положения $\varphi(x)$ в положение $u(x)$ равна

$$-\int_Q k(x)\left[\sqrt{1+|\nabla u|^2}-\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}\right]dx$$

(работа этой силы, отнесенная к элементу $(x_1, x_1+\triangle x_1)\times(x_2, x_2+\triangle x_2)$ из Q, пропорциональна изменению площади поверхности части мембраны, проектирующейся на этот элемент; коэффициент $k(x)>0$ называется натяжением мембраны).

Если в точках границы мембраны приложена сила с линейной плотностью $g_1(x, u)=g_1(x)-\sigma_1(x)u$ ($\sigma_1(x)\geqslant 0$ — коэффициент упругого закрепления границы), то работа этой силы по перемещению мембраны из положения $\varphi(x)$ в положение $u(x)$ равна

$$\int_{\partial Q}\left[g_1(x)(u(x)-\varphi(x))-\frac{\sigma_1(x)}{2}(u^2(x)-\varphi^2(x))\right]dS.$$

Таким образом, в положении $u(x)$ потенциальная энергия мембраны равна

$$U(u)=U(\varphi)+\int_Q\left[k(x)\left(\sqrt{1+|\nabla u|^2}-\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{a}{2}(u^2-\varphi^2)-f(u-\varphi)\right]dx+\int_{\partial Q}\left[\frac{\sigma_1}{2}(u^2-\varphi^2)-g_1(u-\varphi)\right]dS,$$

где $U(\varphi)$ — потенциальная энергия мембраны в положении φ.

Для упрощения задачи предположим, что градиент функции $u(x)$ мал для всех допустимых положений $u(x)$, которые может принимать мембрана, и будем пренебрегать членами порядка $|\nabla u|^4$. Тогда потенциальная энергия мембраны в положении u примет вид

$$U(u)=U(\varphi)+\int_Q\left[\frac{k}{2}(|\nabla u|^2-|\nabla\varphi|^2)+\frac{a}{2}(u^2-\varphi^2)-\right.$$
$$\left.-f(u-\varphi)\right]dx+\int_{\partial Q}\left[\frac{\sigma_1}{2}(u^2-\varphi^2)-g_1(u-\varphi)\right]dS.$$

Если u — положение равновесия мембраны, то согласно принципу возможных перемещений при любом допустимом v многочлен (по t)

$$P(t)=U(u+tv)=$$
$$=U(u)+t\left[\int_Q(k\nabla u\,\nabla v+auv-fv)\,dx+\int_{\partial Q}(\sigma_1 uv-g_1 v)\,dS\right]+$$
$$+\frac{t^2}{2}\left[\int_Q(k|\nabla v|^2+av^2)\,dx+\int_{\partial Q}\sigma_1 v^2\,dS\right]$$

имеет при $t=0$ стационарную точку. Следовательно, $\frac{dP(0)}{dt}=0$, т. е. при всех $v \in C^1(\bar{Q})$ функция $u(x)$, описывающая положение равновесия мембраны, удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_Q (k\nabla u \nabla v + auv)\,dx + \int\limits_{\partial Q} \sigma_1 uv\,dS = \int\limits_Q fv\,dx + \int\limits_{\partial Q} g_1 v\,dS. \tag{1}$$

Если граница мембраны неподвижна (жесткое закрепление), то все допустимые положения u мембраны удовлетворяют условию

$$u|_{\partial Q} = \varphi|_{\partial Q}. \tag{2}$$

В этом случае потенциальная энергия мембраны в произвольном положении u равна (если пренебречь членами порядка $|\nabla u|^4$)

$$U(u) = U(\varphi) + \int\limits_Q \left[\frac{k}{2}(|\nabla u|^2 - |\nabla\varphi|^2) + \frac{a}{2}(u^2-\varphi^2) - f(u-\varphi)\right] dx.$$

Пусть u — положение равновесия жестко закрепленной мембраны. Тогда для любой $v \in C^1(\bar{Q})$, удовлетворяющей условию

$$v|_{\partial Q} = 0, \tag{3}$$

функция $u+tv$ при всех t удовлетворяет условию (2). Следовательно, для всех таких v многочлен

$$P(t) = U(u+tv) = U(u) + t\int\limits_Q (k\nabla u \nabla v + auv - fv)\,dx + \frac{t^2}{2}\int\limits_Q (k|\nabla v|^2 + av^2)\,dx$$

имеет минимум при $t=0$. Значит, для всех $v \in C^1(\bar{Q})$, удовлетворяющих условию (3), функция $u(x)$, описывающая положение жестко закрепленной мембраны, удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_Q (k\nabla u \nabla v + auv)\,dx = \int\limits_Q fv\,dx. \tag{4}$$

В пятой главе будет показано, что при определенных ограничениях на заданные функции k, a, σ_1, f, g_1, а в случае жесткого закрепления мембраны и на $\varphi_{\partial Q}$ интегральное тождество (1) и интегральное тождество (4) при условии (2) определяют единственные функции $u(x)$. Более того, будет доказано, что при достаточной гладкости границы ∂Q функции $u(x)$ принадлежат пространству $C^2(\bar{Q})$.

Сейчас же, предполагая, что $u(x) \in C^2(\bar{Q})$, $k(x) \in C^1(\bar{Q})$, $k(x) \geqslant k_0 > 0$, $a(x) \in C(\bar{Q})$, $\sigma_1(x) \in C(\partial Q)$, $g_1 \in C(\partial Q)$, $\varphi \in C(\partial Q)$, найдем вместо интегральных условий (1) и (4) локальные условия, которым искомая функция $u(x)$ должна удовлетворять.

Так как при любой $v \in C^1(\bar{Q})$ согласно формуле Остроградского

$$\int_Q k\nabla u \nabla v\, dx = -\int_Q v \operatorname{div}(k\nabla u)\, dx + \int_{\partial Q} k\frac{\partial u}{\partial n} v\, dS,$$

то тождества (1) и (4) можно переписать соответственно в виде

$$\int_Q (\operatorname{div}(k\nabla u) - au + f)\, v\, dx - \int_{\partial Q} \left(k\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_1 u - g_1\right) v\, dS = 0 \qquad (1')$$

и

$$\int_Q (\operatorname{div}(k\nabla u) - au + f)\, v\, dx = 0. \qquad (4')$$

Поскольку функция $\operatorname{div}(k\nabla u) - au + f$ непрерывна, то из тождества (4′) вытекает равенство

$$\operatorname{div}(k\nabla u) - au + f = 0, \qquad x \in Q, \qquad (5)$$

которое вместе с граничным условием (2) дает искомые локальные условия, которым должна удовлетворять функция $u(x)$ в случае жесткого закрепления мембраны. Задача нахождения решения уравнения (5), удовлетворяющего граничному условию (2), называется *первой краевой задачей* (*задачей Дирихле*) для уравнения (5).

Поскольку в (1′) функция $v(x)$ — произвольная функция из $C^1(\bar{Q})$, то, в частности, при v, удовлетворяющих условию (3), получаем, что $u(x)$ и в этом случае удовлетворяет уравнению (5). Поэтому тождество (1′) может быть переписано следующим образом:

$$\int_{\partial Q} \left(k\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_1 u - g_1\right) v\, dS = 0.$$

Так как для любой функции из $C^1(\partial Q)$ существует принадлежащее $C^1(\bar{Q})$ продолжение в Q (см. п. 2 § 4 гл. III), то из последнего тождества вытекает граничное условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right|_{\partial Q} = g, \qquad (6)$$

где $\sigma = \sigma_1/k \geqslant 0$, $g = g_1/k$.

Задача нахождения решения уравнения (5), удовлетворяющего граничному условию (6), называется *третьей краевой задачей* для уравнения (5). В случае, когда $\sigma \equiv 0$, третья краевая задача называется *второй краевой задачей* (*задачей Неймана*). В этом случае граничное условие имеет вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q} = g. \qquad (7)$$

Таким образом, положение равновесия мембраны описывается решением уравнения (5), удовлетворяющим некоторому граничному условию. Уравнение (5) является эллиптическим уравнением и называется *уравнением равновесия мембраны*.

Рассмотрим теперь задачу о движении мембраны.

Пусть функция $u(x, t)$ определяет положение мембраны в момент времени t. Тогда функции $u_t(x, t)$ и $u_{tt}(x, t)$ (предполагаем, что эти производные существуют) определяют скорость и ускорение мембраны в точке $x \in Q$. Пусть в некоторый (начальный) момент времени $t = t_0$ заданы положение мембраны и ее скорость, т. е.

$$u|_{t=t_0} = \psi_0(x), \qquad x \in \bar{Q}, \tag{8}$$

$$u_t|_{t=t_0} = \psi_1(x), \qquad x \in \bar{Q}. \tag{9}$$

Условия (8) и (9) называются начальными условиями.

Согласно принципу Даламбера уравнение движения мембраны есть уравнение равновесия (5), в котором функция $f(x)$ заменена функцией $-\rho(x)u_{tt} + f(x, t)$ ($-\rho(x)u_{tt}$ — плотность силы инерции в точке x, $\rho(x) > 0$ — плотность мембраны в точке x, $f(x, t)$ — плотность внешней силы, вообще говоря, зависящей от t):

$$\operatorname{div}(k\nabla_x u) - au + f(x, t) - \rho(x)u_{tt} = 0, \qquad x \in Q, \quad t > t_0. \tag{10}$$

Граничные условия, как и в статическом случае, имеют вид (2), (6) или (7) в зависимости от заданного на границе ∂Q режима и выполняются при всех рассматриваемых значениях времени $t \geqslant t_0$. Задачи нахождения решения уравнения (10) при условиях (2), (8), (9); (7), (8), (9); (6), (8), (9) называются соответственно *первой*, *второй* и *третьей смешанными задачами* для уравнения (10).

Таким образом, движение мембраны описывается решением уравнения (10), удовлетворяющим начальным и некоторым граничным условиям. Уравнение (10) является гиперболическим (в трехмерном пространстве) и называется *уравнением движения мембраны*.

В случае бесконечно протяженной мембраны ($Q = R_2$) описывающая движение мембраны функция $u(x, t)$ при всех $x \in R_2$ и $t > t_0$ является решением уравнения (10) и удовлетворяет начальным условиям (8) и (9). В этом случае говорят, что $u(x, t)$ есть решение *начальной задачи* (*задачи Коши*) для уравнения (10).

Если коэффициенты в уравнениях (10) и (5) постоянны: $k(x) \equiv k$, $\rho(x) \equiv \rho$, и $a(x) \equiv 0$, то эти уравнения называются соответственно *волновым уравнением*:

$$\frac{1}{a^2}u_{tt} - \Delta u = \frac{f(x, t)}{k}, \qquad x \in Q, \quad t > t_0, \tag{10'}$$

$a = \sqrt{\dfrac{k}{\rho}}$, и *уравнением Пуассона*:

$$\Delta u = -\frac{f(x)}{k}, \qquad x \in Q. \tag{5'}$$

В случае одной пространственной переменной уравнение (10′) имеет вид

$$\frac{1}{a^2}u_{tt}-u_{xx}=\frac{f(x,\ t)}{k},\qquad x\in(\alpha,\ \beta),\quad t>t_0. \tag{10″}$$

Оно описывает движение струны, расположенной над интервалом $(\alpha,\ \beta)$. В случае, когда $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$, уравнение

$$\frac{1}{a^2}u_{tt}-\Delta u=\frac{f(x,\ t)}{k},\qquad x\in Q,\quad t>t_0, \tag{10‴}$$

описывает движение газа в области Q (функция $u(x,\ t)$ характеризует, например, малые отклонения в точке $x\in Q$, в момент времени t давления газа от постоянного давления). Число a в этом случае есть скорость распространения звука в газе.

2. Задача о распространении тепла. Пусть вещество, находящееся в трехмерной области Q, имеет плотность $\rho(x)>0$, теплоемкость $c(x)>0$ и коэффициент теплопроводности $k(x)>0$. Обозначим через $u(x,\ t)$ температуру в точке $x\in Q$ в момент времени t. Предположим, что температура в начальный момент времени $t=t_0$ известна:

$$u(x,\ t)|_{t=t_0}=\psi_0(x),\qquad x\in Q; \tag{11}$$

требуется определить ее при $t>t_0$.

Пусть Q' — некоторая подобласть Q. В соответствии с законом Ньютона количество тепла, проходящее через границу $\partial Q'$ в область Q' за промежуток времени $(t_1,\ t_2)$, $t_0\leqslant t_1<t_2$, равно

$$-\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{\partial Q'}k(x)\frac{\partial u}{\partial n}\,dS,$$

где n — внешняя по отношению к Q' нормаль к $\partial Q'$.

Если в области Q имеются источники тепла с известной плотностью $f(x,\ t)$, то приращение количества тепла в Q' за промежуток времени $(t_1,\ t_2)$ равно

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{Q'}f(x,\ t)\,dx-\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{\partial Q'}k(x)\frac{\partial u}{\partial n}\,dS$$

и, следовательно, уравнение теплового баланса в Q' имеет вид

$$-\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{\partial Q'}k(x)\frac{\partial u}{\partial n}\,dS+\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{Q'}f(x,\ t)\,dx=$$
$$=\int_{Q'}c(x)\,\rho(x)\,(u(x,\ t_2)-u(x,\ t_1))\,dx.$$

Учитывая, что $u(x,\ t_2)-u(x,\ t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt$, и пользуясь формулой

Остроградского, получим

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{Q'} \left[c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) - f(x, t)\right] dx = 0.$$

Если подынтегральная функция непрерывна в Q, то в силу произвольности области Q' и интервала (t_1, t_2) последнее равенство эквивалентно дифференциальному уравнению

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) = f(x, t), \qquad x \in Q, \quad t > t_0. \tag{12}$$

Это уравнение является уравнением параболического типа (в четырехмерном пространстве x_1, x_2, x_3, t). В случае, когда функции $c(x)$, $\rho(x)$ и $k(x)$ постоянны, уравнение (12) называется *уравнением теплопроводности*:

$$\frac{1}{a^2} u_t - \Delta u = \frac{f(x, t)}{c\rho}, \tag{12'}$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$.

Подчеркнем, что уравнение (12) имеет место лишь для $t > t_0$ и лишь для внутренних точек области Q. Поведение функции $u(x, t)$ при $t = t_0$ задается начальным условием (11), а для $x \in \partial Q$ должно быть задано дополнительно. Оно диктуется конкретной физической задачей, устанавливающей тепловую связь Q с внешней средой.

В простейшем случае задается температура $u(x, t)$ на границе ∂Q:

$$u|_{\partial Q} = f_0(x, t) \tag{13}$$

для всех рассматриваемых значений t. В этом случае температура будет описываться решением $u(x, t)$ уравнения (12), удовлетворяющим условиям (11) и (13).

Если известна плотность $q_0(x, t)$ теплового потока через границу ∂Q, то согласно закону Ньютона граничное условие имеет вид

$$k(x)\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial Q} = q_0(x, t). \tag{14}$$

Если известна температура $u_0(x, t)$ среды вне области Q и плотность теплового потока $q_0(x, t)$ через границу ∂Q пропорциональна разности температур $u|_{\partial Q}$ и $u_0|_{\partial Q}$, то граничное условие принимает вид

$$k\frac{\partial u}{\partial n} + k_1 u\bigg|_{\partial Q} = k_1 u_0\bigg|_{\partial Q}, \tag{15}$$

где $k_1(x) > 0$ — коэффициент теплообмена тела с окружающей средой.

Задачи нахождения решений уравнения (12) при условиях (11), (13); (11), (14); (11), (15) называются соответственно *первой*, *второй* и *третьей смешанными задачами* для уравнения (12).

В случае, когда вещество заполняет все пространство R_3, $Q=R_3$, температура $u(x, t)$ удовлетворяет при $t>t_0$ уравнению (12) и при $t=t_0$ начальному условию (11). В этом случае говорят, что $u(x, t)$ есть решение *начальной задачи* (*задачи Коши*) для уравнения (12).

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ I

1. Пусть поверхность S класса C^2 разбивает область Q на две непересекающиеся области Q^+ и Q^-, и пусть функция $u(x)$ принадлежит $C^1(Q)\cap C^2(Q^+\cup S)\cap C^2(Q^-\cup S)$ и удовлетворяет в Q^+ и в Q^- линейному уравнению второго порядка

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,u_{x_i}+a(x)\,u=f(x) \qquad (1)$$

с непрерывными в Q коэффициентами и свободным членом. Доказать, что если для любой окрестности U_{x^0} некоторой точки $x^0\in S$ функция $u(x)$ не принадлежит $C^2(U_{x^0})$, то точка x^0 — характеристическая для уравнения (1).

2. Пусть в двумерной области Q задано линейное уравнение второго порядка (1) с аналитическими коэффициентами и свободным членом, и пусть две пересекающиеся в некоторой точке $x^0\in Q$ прямые L_1 и L_2 являются характеристиками для этого уравнения. Доказать, что задача (задача Гурса) отыскания решения $u(x)$ уравнения (1), удовлетворяющего условиям $u|_{L_1}=u_1$, $u|_{L_2}=u_2$ с аналитическими функциями u_1 и u_2, имеет в некоторой окрестности точки x^0 единственное решение в классе аналитических функций ($u_1(x^0)=u_2(x^0)$).

3. Пусть в области Q задано линейное уравнение второго порядка с непрерывными коэффициентами. Доказать следующие утверждения.

Если в некоторой точке области Q уравнение эллиптично (или гиперболично), то оно эллиптично (или соответственно гиперболично) и в некоторой окрестности этой точки.

Если в Q существуют две точки, в одной из которых уравнение эллиптично, а в другой — гиперболично, то в Q найдется точка, в которой это уравнение параболично.

Дополнительная литература к главе I

И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, 1959.

В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, «Наука», 1971.

В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, «Наука», 1964.

И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961.

С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, Физматгиз, 1954.

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», 1972.

Глава II

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

§ 1. Интеграл Лебега

Понятие интеграла и связанное с ним понятие интегрируемой функции являются основными понятиями математического анализа. В связи с потребностями прикладных наук, да и самой математики эти понятия в процессе своего развития претерпевали значительные изменения. Для решения одних задач достаточно было уметь интегрировать непрерывные или даже аналитические функции, для решения других — приходилось эти множества расширять, а иногда рассматривать и множество всех функций, интегрируемых по Риману. Более того, для математического описания ряда явлений оказывается недостаточно богатым даже множество функций, интегрируемых по Риману. Естественно, что это множество оказалось недостаточным и для потребностей самой математики.

В частности, некоторые процессы удается приближенно описывать с помощью последовательности «хороших» функций $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, о которой можно утверждать лишь сходимость в некотором интегральном смысле. Так, например, последовательность $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, может обладать одним из следующих свойств: $\int |f_k - f_m|\, dx \to 0$ при m, $k \to \infty$ (фундаментальность последовательности в среднем), $\int (f_k - f_m)^2\, dx \to 0$ (фундаментальность в среднем квадратичном) или в более сложных случаях — стремятся к нулю интегралы, содержащие производные от функций (фундаментальность по энергии). Эти свойства, в частности, фундаментальность в среднем квадратичном, сами по себе могут не гарантировать сходимости в обычном смысле: последовательность может не сходиться ни в одной точке. И, тем не менее, можно показать (ниже это будет сделано), что существует в определенном смысле единственная функция, к которой эта последовательность сходится (в среднем квадратичном). Эта функция, вообще говоря, по Риману не интегрируема, поэтому интеграл в определении сходимости приходится понимать в более широком смысле — смысле Лебега.

1. Множество меры нуль. Множество $E \subset R_n$ называется *множеством* (n-мерной) *меры нуль*, если его можно покрыть счетной системой (n-мерных) открытых кубов со сколь угодно малой суммой объемов (суммарным объемом), т. е. по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такую счетную систему кубов $K_1, K_2, \ldots$, что $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, а суммарный объем этих кубов $\sum_{i=1}^{\infty} |K_i| < \varepsilon$, где $|K_i|$ — объем куба K_i, $i = 1, 2, \ldots$

Непосредственно из определения вытекает, что множество, состоящее из счетного числа точек, есть множество меры нуль. Пересечение и объединение счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль. Гладкие поверхности размерности $k < n$ тоже представляют собой множества меры нуль.

В дальнейшем нам будет полезен следующий критерий.

Лемма 1. *Множество E является множеством меры нуль в том и только в том случае, когда существует такое его покрытие счетной системой кубов с конечным суммарным объемом, при котором каждая точка оказывается покрытой бесконечным множеством этих кубов.*

Предположим сначала, что покрытие, о котором говорится в лемме 1, существует. Выбрасывая из него конечное число кубов с максимальными объемами, можно добиться, чтобы суммарный объем оставшегося покрытия был сколь угодно мал. Значит, E есть множество меры нуль. Обратно, если E — множество меры нуль, то его можно покрыть счетным числом кубов с суммарным объемом, меньшим 2^{-k}, при любом целом $k \geq 1$. Нужное нам покрытие получится после объединения по $k = 1, 2, \ldots$ этих покрытий.

Если какое-либо свойство выполняется для всех точек x из некоторого множества G, за исключением, быть может, множества меры нуль, то говорят, что это свойство выполнено *для почти всех точек $x \in G$, почти везде в G, почти всюду в G, п. в. (в G)*. Так, функция Дирихле $\chi(x)$, равная 1 для точек, у которых все координаты рациональны, и нулю во всех остальных точках, равна нулю п. в. в R_n.

Пусть Q — некоторая область пространства R_n. Наряду с функциями, определенными всюду в Q (т. е. имеющими в каждой точке Q конечное значение), мы будем рассматривать и функции, определенные почти всюду в Q, т. е. функции значения которых не определены на множествах меры нуль. При этом функции $f+g$, $f \cdot g$ (f и g определены п. в.) определены в тех точках, в которых определены обе функции f и g.

2. Измеримые функции. Пусть Q — некоторая область пространства R_n. Последовательность (определенных п. в. в Q) функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, называется *сходящейся п. в. в Q*, если для п. в. $x^0 \in Q$ числовая последовательность значений этих функций в точке x^0 имеет (конечный) предел. Функция $f(x)$ называется *пределом п. в. сходящейся последовательности* $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$,

$f_k(x) \to f(x)$ п. в. в Q при $k \to \infty$, если для п. в. $x^0 \in Q$ $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x^0) = f(x^0)$. Очевидно, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются пределами некоторой сходящейся п. в. последовательности функций, то они совпадают п. в.

Функция $f(x)$ называется *измеримой* в Q, если она является пределом п. в. сходящейся последовательности функций из $C(\bar{Q})$.

Отметим некоторые очевидные свойства измеримых функций. Произвольная линейная комбинация измеримых функций — измеримая функция; функция $f_1 \cdot f_2$ измерима, если f_1 и f_2 измеримы. Вместе с f измеримой является и функция $|f|$. Функции $\max\limits_{i\leqslant k}(f_i(x))$, $\min\limits_{i\leqslant k}(f_i(x))$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ (предел понимается в смысле п. в.) измеримы, если $f_1, f_2, \ldots$ измеримы. Так как $\sup\limits_k (f_k(x)) = \lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{i\leqslant k}(f_i(x))$ и $\inf\limits_k (f_k(x)) = \lim\limits_{k\to\infty}\min\limits_{i\leqslant k}(f_i(x))$, то эти функции тоже измеримы при измеримых f_k, $k=1, 2, \ldots$ Производная измеримой функции, если она существует п. в., измерима.

Из определения вытекает, что функция $f(x)$, принадлежащая $C(\bar{Q})$, измерима. Произвольная функция $f(x)$ из $C(Q)$ тоже измерима, так как ее можно представить в виде предела сходящейся в Q последовательности функций из $C(\bar{Q})$: $f(x) = \lim\limits_{\delta\to 0} f(x)\zeta_\delta(x)$, где $\zeta_\delta(x)$ — срезающая функция для области Q (см. гл. I).

3. Интеграл Лебега от неотрицательных функций. Мы будем часто рассматривать монотонно неубывающие (невозрастающие) п. в. в Q последовательности $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, измеримых функций, т. е. такие последовательности, для которых при всех $k \geqslant 1$ п. в. в Q имеют место неравенства $f_{k+1}(x) \geqslant f_k(x)$ $(f_{k+1}(x) \leqslant f_k(x))$. Если такая последовательность функций п. в. ограничена (т. е. для п. в. $x^0 \in Q$ числовая последовательность $f_k(x^0)$, $k=1, 2, \ldots$, ограничена), то она сходится п. в. к некоторой функции. Будем при этом пользоваться обозначениями: $f_k \uparrow f$ п. в. при $k \to \infty$, если последовательность монотонно не убывает, и $f_k \downarrow f$ п. в. при $k \to \infty$, если последовательность монотонно не возрастает.

Неотрицательная п. в. в Q функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Лебегу в Q (по Q)*, если существует п. в. в Q сходящаяся к ней монотонно неубывающая последовательность $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, функций из $C(\bar{Q})$ с ограниченной сверху последовательностью интегралов (Римана): $\int\limits_Q f_k(x)\,dx \leqslant C$, $k=1, 2, \ldots$ При этом точная верхняя грань множества $\left\{\int\limits_Q f_k(x)dx,\ k=1, 2, \ldots\right\}$, называется *интегралом Лебега* функции $f(x)$:

$$(L)\int\limits_Q f\,dx = \sup_k \int\limits_Q f_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int\limits_Q f_k(x)\,dx. \qquad (1)$$

Докажем, что если неотрицательная п. в. в Q функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу, то для каждой монотонно неубывающей последовательности $f'_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, функций из $C(\bar{Q})$, сходящейся п. в. к f, последовательность интегралов $\int\limits_Q f'_k(x)\,dx$, $k=1, 2, \ldots$, ограничена сверху и $\sup\limits_k \int\limits_Q f'_k(x)\,dx = (L)\int\limits_Q f\,dx$, т. е. *интеграл Лебега не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности.*

Прежде чем доказать это утверждение, покажем, что если $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots,$ — произвольная последовательность функций из $C(\bar{Q})$ такая, что $f_k \uparrow f$ п. в. при $k\to\infty$ ($f(x)\geqslant 0$ п. в.), то $\sup\limits_k \int\limits_Q f_k(x)\,dx \geqslant 0$, и тем самым, что для любой п. в. неотрицательной интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$

$$(L)\int\limits_Q f\,dx \geqslant 0. \tag{2}$$

Пусть $f_k(x)\uparrow f(x)$ п. в. при $k\to\infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Множество E точек, в которых или последовательность f_k, $k=1, 2, \ldots$, не сходится к функции f, или $f<0$, есть множество меры нуль, поэтому его можно покрыть счетным множеством открытых кубов $\{K_i,\ i=1, 2, \ldots\}$ с суммарным объемом, меньшим ε. Обозначим через K объединение всех кубов этого покрытия. Для любой точки $x^0\in\bar{Q}\setminus K$ $f_k(x^0)\uparrow f(x^0)\geqslant 0$ при $k\to\infty$, поэтому существует такое $N=N(x^0)$, что $f_N(x^0)>-\varepsilon$. Так как функция $f_N(x)\in C(\bar{Q})$, то последнее неравенство будет выполняться и в пересечении $U_{x^0}\cap\bar{Q}$ множества $\bar{Q}$ с некоторым открытым кубом U_{x^0} с центром в точке x^0. В силу монотонности последовательности в $U_{x^0}\cap\bar{Q}$ имеют место также и неравенства $f_k(x)>-\varepsilon$ для всех $k\geqslant N$. Совокупность открытых множеств $\{U_x,\ x\in\bar{Q}\setminus K\}\cup\cup\{K_i,\ i=1, 2, \ldots\}$ покрывает множество $\bar{Q}$, а так как множество $\bar{Q}$ замкнуто, то из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $U_{x^1}, \ldots, U_{x^l}, K_{i_1}, \ldots, K_{i_s}$. Обозначим через K' объединение $\bigcup\limits_{j=1}^{s} K_{i_j}$. Так как $|K'|<\varepsilon$ и существует такое N_0, что для всех $x\in\bar{Q}\setminus K'\subset\left(\bigcup\limits_{j=1}^{l} U_{x^j}\right)\cap\bar{Q}$ $f_k(x)>-\varepsilon$ при всех $k\geqslant N_0$, то для таких k

$$\int\limits_Q f_k(x)\,dx = \int\limits_{Q\setminus K'} f_k(x)\,dx + \int\limits_{K'} f_k(x)\,dx \geqslant -\varepsilon|Q| + A_1\varepsilon = \varepsilon(A_1-|Q|),$$

где $|Q|$ — объем Q, $A_1=\min\limits_{x\in\bar{Q}} f_1(x)$. Из этого неравенства в силу произвольности $\varepsilon>0$ получаем неравенство (2).

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная п. в. неотрицательная интегрируемая по Лебегу функция, а $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, f_k \uparrow f$ п. в. при $k \to \infty$ — последовательность функций из $C(\bar{Q})$, для которой последовательность интегралов ограничена. Возьмем произвольную последовательность $f'_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, функций из $C(\bar{Q})$ такую, что $f'_k(x) \uparrow f(x)$ п. в. при $k \to \infty$. Покажем, что

$$\lim_{k \to \infty} \int_Q f'_k\, dx = \lim_{k \to \infty} \int_Q f_k\, dx,$$

При произвольном m рассмотрим последовательность $f_k - f'_m$, $k=1, 2, \ldots$ Так как при $k \to \infty$ $f_k - f'_m \uparrow f - f'_m \geqslant 0$ п. в. в Q, то $\lim\limits_{k \to \infty} \int\limits_Q (f_k - f'_m)\, dx = \lim\limits_{k \to \infty} \int\limits_Q f_k\, dx - \int\limits_Q f'_m\, dx \geqslant 0$. Следовательно, последовательность $\int\limits_Q f'_m\, dx$, $m=1, 2, \ldots$, ограничена и $\lim\limits_{m \to \infty} \int\limits_Q f'_m\, dx \leqslant \lim\limits_{k \to \infty} \int\limits_Q f_k\, dx$. Поскольку, очевидно, справедливо и обратное неравенство, то утверждение доказано.

Возьмем содержащий область Q куб с гранями, параллельными координатным плоскостям, и разобьем его на конечное число параллелепипедов плоскостями, параллельными граням. Непустое пересечение открытого параллелепипеда полученного разбиения с областью Q будем называть ячейкой (разбиения области Q), а совокупность всех ячеек — разбиением Π области Q. Измеримую функцию $f(x)$ назовем *ступенчатой в* Q, если она принимает постоянное значение внутри каждой ячейки некоторого разбиения Π области Q.

Под интегралом от ступенчатой функции будем, естественно, понимать сумму объемов всех ячеек, умноженных на значение функции в соответствующей ячейке.

Лемма 2. *Для любой монотонно неубывающей последовательности $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, функций из $C(\bar{Q})$ существует такая монотонно неубывающая п. в. последовательность $f'_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, ступенчатых функций, что п. в. $f'_k(x) \leqslant f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, и $f_k(x) - f'_k(x) \to 0$ п. в. при $k \to \infty$.*

В силу равномерной непрерывности функции $f_k(x)$ найдется такое число $\delta_k > 0$, что $|f_k(x') - f_k(x'')| < 2^{-k}$ для любых точек x', $x'' \in \bar{Q}$, для которых $|x' - x''| < \delta_k$, $k=1, 2, \ldots$ Обозначим через Π_1 разбиение области Q с максимальным диаметром ячейки $\leqslant \delta_1$. Ступенчатая функция $f'_1(x)$, равная в каждой ячейке K разбиения Π_1 числу $\min\limits_{x \in \bar{K}} f_1(x)$, обладает свойством: $0 \leqslant f_1(x) - f'_1(x) \leqslant 2^{-1}$ для п. в. $x \in Q$. За счет измельчения разбиения Π_1 построим новое разбиение Π_2 с максимальным диаметром ячейки $\leqslant \delta_2$. Ступенчатая функция $f'_2(x)$, равная в каждой ячейке K разбиения Π_2 числу $\min\limits_{k\in\bar{K}} f_2(x)$, удовлетворяет при п. в. $x\in Q$ неравенствам $0\leqslant f_2(x)-f_2'(x)\leqslant 2^{-2}$. Кроме того, п. в. в Q $f_2'(x)\geqslant f_1'(x)$. Продолжая этот процесс, получим для любого $k\geqslant 1$ разбиение Π_k области Q и вместе с ним ступенчатую функцию $f_k'(x)$, обладающую свойствами: $0\leqslant f_k(x)-f_k'(x)<2^{-k}$, $f_k'(x)\leqslant f_{k-1}'(x)$ для п. в. $x\in Q$. Следовательно, $f_k'(x)\leqslant f_k(x)$ п. в. в Q и п. в. в Q существует и равен нулю предел последовательности $f_k(x)-f_k'(x)$, $k=1, 2, \ldots$ Лемма доказана.

Лемма 2′. *Для любой монотонно неубывающей п. в. в Q последовательности $f_k'(x)$, $k=1, 2, \ldots$, ступенчатых функций существует такая монотонно неубывающая последовательность $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, функций из $C(\bar{Q})$, что п. в. $f_k(x)\leqslant f_k'(x)$ и $f_k'(x)-f_k(x)\to 0$ п. в. в Q при $k\to\infty$.*

Очевидно, это утверждение достаточно доказать в случае, когда функция $f_1'(x)\geqslant 0$ п. в.

Рассмотрим функцию $f_k'(x)$ (из $f_1'(x)\geqslant 0$ п. в. вытекает, что $f_k'(x)\geqslant 0$ п. в.), и пусть соответствующее ей разбиение Π_k' некоторого содержащего область Q куба (обозначим через a_0 длину ребра этого куба) состоит из m_k ячеек (когда соответствующее f_k' разбиение Π_k области Q состоит не более чем из m_k ячеек). Возьмем $\delta_k=\min\left\{\frac{a_k}{2}, \frac{1}{2na_0^{n-1}m_k2^k}\right\}$, где a_k — длина наименьшего из всех ребер всех параллелепипедов — ячеек разбиения Π_k', и пусть $\zeta_{\delta_k}^p(x)$, $0\leqslant\zeta_{\delta_k}^p(x)\leqslant 1$,—$\delta_k$-срезающая функция (см. гл. I, введение) p-й ячейки разбиения Π_k' (δ_k выбрано так, чтобы суммарный объем пересечения параллелепипедов, в которых $\sum\limits_{p=1}^{m_k}\zeta_{\delta_k}^p(x)<1$, с областью Q не превосходил 2^{-k}).

Обозначим через $\psi_k(x)$ функцию $f_k'(x)\cdot\sum\limits_{p=1}^{m_k}\zeta_{\delta_k}^p(x)$. Легко видеть, что функции $\psi_k(x)\in C(\bar{Q})$, $\psi_k(x)\leqslant f_k'(x)$ п. в. и $f_k'(x)-\psi_k(x)\to 0$ п. в. при $k\to\infty$. Тогда непрерывные в $\bar{Q}$ функции $f_k(x)=\max\limits_{m\leqslant k}\psi_m(x)$ удовлетворяют п. в. неравенствам $f_k(x)\leqslant f_k'(x)$, $k=1, 2, \ldots$, и $f_k'(x)-f_k(x)\to 0$ п. в. при $k\to\infty$. Лемма доказана.

Из лемм 2 и 2′ немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы неотрицательная п. в. в Q функция $f(x)$ была интегрируемой по Лебегу в области Q, необходимо и достаточно, чтобы существовала п. в. сходящаяся к ней монотонно неубывающая п. в. последовательность $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, ступенчатых функций с ограниченной последовательностью интегралов. При этом $(L)\int\limits_Q f\,dx=\sup\limits_k\int\limits_Q f_k\,dx$.*

Лемма 3. *Монотонно неубывающая последовательность функций из $C(\bar{Q})$ с ограниченной последовательностью интегралов сходится п. в. в Q.*

Из леммы 2 вытекает, что для доказательства леммы 3 достаточно установить справедливость следующего утверждения: если последовательность f_k, $k=1, 2, \ldots$, ступенчатых функций п. в. монотонно не убывает и последовательность их интегралов ограничена, то последовательность f_k, $k=1, 2, \ldots$, сходится п. в. в Q.

Покроем границу ∂Q ($\partial Q \in C^1$, см. гл. I, введение) конечным числом замкнутых кубов $K_1, \ldots, K_l$ с достаточно малым суммарным объемом так, чтобы множество $Q' = Q \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{l} K_i$ было областью. Очевидно, что нам достаточно показать, что п. в. монотонно неубывающая последовательность ступенчатах функций f_k, $k=1, 2, \ldots$, сходится п. в. в многограннике Q'.

Рассмотрим произвольную функцию $f_k(x)$ из этой последовательности, и пусть Π_k — соответствующее ей разбиение многогранника Q'.

Обозначим через S объединение граней всех многогранников, входящих хотя бы в одно из разбиений Π_k, $k=1, 2, \ldots$, а через $\mathscr{E}$ — совокупность всех тех точек x множества $Q' \setminus S$, в которых числовая последовательность $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, не ограничена. Так как S есть множество меры нуль, то нам достаточно показать, что $\mathscr{E}$ — множество меры нуль.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть $\mathscr{E}_{k,\varepsilon}$ — множество, состоящее из (конечного числа) ячеек разбиения Π_k, на которых $f_k(x) \geqslant 1/\varepsilon$. Так как $C \geqslant \int\limits_{Q'} f_k(x)\,dx \geqslant -|A_1||Q'| + \frac{1}{\varepsilon}|\mathscr{E}_{k,\varepsilon}|$, где A_1 — наименьшее из значений, которые функция $f_1(x)$ принимает на ячейках разбиения Π_1 ($f_k(x) \geqslant A_1$ п. в. в Q'), то $|\mathscr{E}_{k,\varepsilon}| \leqslant \varepsilon(C + |A_1||Q|)$. Так как $\mathscr{E} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathscr{E}_{k,\varepsilon} = \mathscr{E}_{1,\varepsilon} \cup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (\mathscr{E}_{k+1,\varepsilon} \setminus \mathscr{E}_{k,\varepsilon})$, то множество $\mathscr{E}$ покрыто счетной системой многогранников, причем суммарный объем этих многогранников не превосходит $\varepsilon(C + |A_1||Q|)$, поскольку в силу монотонности п. в. последовательности ступенчатых функций $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, при любом $N \geqslant 1$ $\mathscr{E}_{1,\varepsilon} \cup \bigcup\limits_{k=1}^{N-1} (\mathscr{E}_{k+1,\varepsilon} \setminus \mathscr{E}_{k,\varepsilon}) \subset \bar{\mathscr{E}}_{N,\varepsilon}$, и, следовательно,

$$|\mathscr{E}_{1,\varepsilon}| + \sum_{k=1}^{N-1} |\mathscr{E}_{k+1,\varepsilon} \setminus \mathscr{E}_{k,\varepsilon}| \leqslant |\mathscr{E}_{N,\varepsilon}| \leqslant \varepsilon(C + |A_1||Q|).$$

Но тогда множество $\mathscr{E}$ можно покрыть и счетной системой открытых кубов с суммарным объемом, меньшим $2\varepsilon(C+|A_1||Q|)$. Лемма доказана.

4. Функции, интегрируемые по Лебегу. Любую вещественнозначную функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x), \tag{3}$$

где функции $f^+(x)=\max(f(x), 0)$ и $f^-(x)=\max(-f(x), 0)$ неотрицательны.

Функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Лебегу по области* Q, если функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$ из (3) интегрируемы по Лебегу по области Q. Интеграл от $f(x)$ определяется равенством

$$(L)\int_Q f\,dx=(L)\int_Q f^+\,dx-(L)\int_Q f^-\,dx. \tag{4}$$

Обозначим через $\Lambda(Q)$ множество всех интегрируемых по Лебегу в Q функций. Из определения $\Lambda(Q)$ вытекает, что функция $C_1f_1(x)+C_2f_2(x)\in\Lambda(Q)$, если функции $f_i(x)\in\Lambda(Q)$, а C_i — произвольные постоянные, $i=1, 2$. При этом

$$(L)\int_Q (C_1f_1+C_2f_2)\,dx=C_1(L)\int_Q f_1\,dx+C_2(L)\int_Q f_2\,dx.$$

Поэтому, в частности, $|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)\in\Lambda(Q)$, если $f(x)\in\in\Lambda(Q)$, т. е. интегрируемая по Лебегу функция абсолютно интегрируема. Так как $|f|+f=2f^+\geqslant 0$ и $|f|-f=2f^-\geqslant 0$, то для $f\in\Lambda(Q)$ из неравенства (2) вытекает неравенство

$$\left|(L)\int_Q f\,dx\right|\leqslant(L)\int_Q |f|\,dx. \tag{5}$$

В силу того же неравенства (2) для функций f_1 и f_2 из $\Lambda(Q)$, удовлетворяющих для п. в. $x\in Q$ неравенству $f_1\leqslant f_2$, имеет место неравенство

$$(L)\int_Q f_1\,dx\leqslant(L)\int_Q f_2\,dx. \tag{6}$$

Функции $\max(f_1(x), f_2(x))=\frac{1}{2}(f_1+f_2+|f_1-f_2|)$ и $\min(f_1(x), f_2(x))=\frac{1}{2}(f_1+f_2-|f_1-f_2|)$ принадлежат $\Lambda(Q)$, если f_1 и f_2 принадлежат $\Lambda(Q)$, а следовательно, и $\max(f_1(x), \ldots, f_m(x))\in\Lambda(Q)$, $\min(f_1(x), \ldots, f_m(x))\in\Lambda(Q)$, если $f_i(x)\in\Lambda(Q)$, $i=1, \ldots, m$.

Теорема 2. *Для того чтобы п. в. неотрицательная интегрируемая по Лебегу в Q функция $f(x)$ была равна нулю п. в., необходимо и достаточно, чтобы $(L)\int_Q f\,dx=0$.*

Если $f(x)=0$ п. в. в Q, то последовательность $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, функций, тождественно в Q равных нулю, обладает свойством

$f_k(x) \uparrow f(x)$ п. в. в Q при $k \to \infty$. Значит, по определению $(L)\int\limits_Q f\,dx = 0$.

Обратно, пусть $(L)\int\limits_Q f\,dx = 0$. Тогда существует последовательность $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, функций из $C(\bar{Q})$ такая, что $f_k(x) \uparrow f(x)$ п. в. при $k \to \infty$. Рассмотрим последовательность $f_k^+(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ Очевидно, $f_k^+(x) \in C(\bar{Q})$, $k = 1, 2, \ldots$, и п. в. $f_k^+(x) \uparrow f(x)$ при $k \to \infty$. Значит, $0 \leqslant \int\limits_Q f_k^+(x)\,dx \leqslant (L)\int\limits_Q f\,dx = 0$, т. е. $f_k^+(x) \equiv 0$ для всех $k \geqslant 1$ и, тем самым, $f = 0$ п. в. Теорема доказана.

5. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману (напомним, что интеграл Римана определяется только для ограниченных функций), то, как известно, существуют две сходящиеся п. в. к $f(x)$ последовательности f_k', f_k'', $k = 1, 2, \ldots$, ступенчатых функций, f_k', $k = 1, 2, \ldots$, монотонно п. в. неубывающая, f_k'', $k = 1, 2, \ldots$, монотонно п. в. невозрастающая, такие, что последовательности их интегралов имеют общий предел, равный интегралу Римана от функции $f(x)$. В более «экономном» процессе построения интеграла Лебега обходятся (воспользуемся теоремой 1) лишь одной первой последовательностью (ограниченную функцию $f(x)$ можно считать, за счет добавления к ней соответствующей постоянной, неотрицательной).

Значит, *если функция $f(x)$ интегрируема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу, и ее интегралы по Риману и по Лебегу совпадают.* Поэтому в дальнейшем значок L перед знаком интеграла будем опускать, понимая всегда под интегралом — интеграл Лебега, а под интегрируемой функцией — функцию из $\Lambda(Q)$.

Множество ограниченных функций, входящих в $\Lambda(Q)$, шире множества функций, интегрируемых по Риману, поскольку, например, функция Дирихле $\chi(x) \in \Lambda(Q)$ ограничена и не интегрируема по Риману.

Далее, при построении интеграла Лебега от функции $f(x)$ не предполагалась ее ограниченность, например, неограниченная функция $|x|^{-\alpha}$ при $0 < \alpha < n$ принадлежит $\Lambda(|x| < 1)$. В курсе Анализа рассматривается обобщение интеграла Римана на неограниченные функции (несобственный интеграл). Нетрудно показать, что абсолютно интегрируемая по Риману (в несобственном смысле) функция $f(x)$ принадлежит $\Lambda(Q)$ и ее интеграл Лебега совпадает с несобственным интегралом Римана.

Заметим, что в областях размерности, не меньшей чем 2, все несобственно интегрируемые по Риману функции — абсолютно несобственно интегрируемы. Поэтому только в одномерном случае из существования несобственного интеграла Римана от некоторой функции может не следовать интегрируемость этой функции по

Лебегу. Примером такой функции является заданная на $(0,1)$ функция $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

6. Достаточные условия интегрируемости по Лебегу. Теорема Леви. Перейдем теперь к установлению связи между измеримостью и интегрируемостью функции. По определению интегрируемая функция измерима. Однако не всякая измеримая функция, как показывает пример заданной в шаре $\{|x|<1\}$ функции $|x|^{-\alpha}$, $\alpha>n$, интегрируема. Установим некоторые достаточные условия интегрируемости. Для этого нам понадобятся важные и сами по себе теоремы о возможности перехода к пределу под знаком интеграла.

Прежде всего рассмотрим монотонные последовательности функций и докажем теорему о «замкнутости» множества интегрируемых функций относительно монотонных предельных переходов.

Теорема 3 (Б. Леви). *Монотонная п. в. последовательность $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, интегрируемых в Q функций с ограниченной последовательностью интегралов п. в. в Q сходится к некоторой интегрируемой функции $f(x)$ и при этом*

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_Q f_k\,dx=\int\limits_Q f\,dx. \tag{7}$$

Доказательство теоремы достаточно провести для случая монотонно неубывающей последовательности. Случай монотонно невозрастающей последовательности сводится к предыдущему: достаточно изменить знак у всех функций.

Итак, пусть $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots,$ — монотонно неубывающая п. в. последовательность интегрируемых функций. Не умаляя общности, можно считать, что функции $f_k(x)\geqslant 0$ п. в., $k=1, 2, \ldots$ (в противном случае вместо последовательности $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, следует рассмотреть состоящую из неотрицательных п. в. функций последовательность $F_k(x)=f_k(x)-f_1(x)$, $k=1, 2, \ldots$).

Возьмем для каждого $k\geqslant 1$ последовательность $f_{km}(x)$, $m=1, 2, \ldots$, функций из $C(\bar{Q})$, $f_{km}(x)\uparrow f_k(x)$ п. в. в Q при $m\to\infty$. Функции $\varphi_m(x)=\max\limits_{i\leqslant m}(f_{im}(x))$, $m=1, 2, \ldots$, принадлежат $C(\bar{Q})$ и обладают следующими свойствами:

а) $\varphi_m(x)\leqslant\varphi_{m+1}(x)$,

б) $f_{km}(x)\leqslant\varphi_m(x)\leqslant f_m(x)$ для $k\leqslant m$ (второе неравенство в б), конечно, выполнено п. в.),

в) $\int\limits_Q\varphi_m(x)\,dx\leqslant\int\limits_Q f_m(x)\,dx\leqslant C$,

г) $\int\limits_Q f_{km}(x)\,dx\leqslant\int\limits_Q\varphi_m(x)\,dx$ при $k\leqslant m$.

Из а), в) и леммы 3 следует, что при $m\to\infty$ п. в. в Q $\varphi_m\uparrow f$, где f — некоторая измеримая функция. Переходя к пределу при

$m \to \infty$ в левом неравенстве из б) и используя правое неравенство из б), получим, что для всех k $\varphi_k(x) \leqslant f_k(x) \leqslant f(x)$ п. в. в Q. Тогда $f_k(x) \to f(x)$ п. в. в Q при $k \to \infty$ и $f(x) \geqslant 0$ п. в. в Q. Следовательно, $f(x) \in \Lambda(Q)$ и $\int\limits_Q f\,dx = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_Q \varphi_k(x)\,dx$. Переходя в в) и г) к пределу при $m \to \infty$, получим, что при любом k $\int\limits_Q f_k\,dx \leqslant \int\limits_Q f\,dx \leqslant \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_Q f_m\,dx$, т. е. $\int\limits_Q f\,dx = \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_Q f_m\,dx$. Теорема доказана.

С помощью теоремы Леви установим следующее достаточное условие интегрируемости функции.

Теорема 4 (лемма Фату). *Если последовательность $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, интегрируемых п. в. неотрицательных функций сходится п. в. к функции $f(x)$ и $\int\limits_Q f_k\,dx \leqslant A$, $k = 1, 2, \ldots$, то $f(x)$ интегрируема и $\int\limits_Q f\,dx \leqslant A$.*

Рассмотрим при $m \leqslant k$ интегрируемые функции $\psi_{mk}(x) = \min\limits_{m\leqslant i\leqslant k} (f_i(x))$. Так как п. в. $\psi_{mk}(x) \downarrow \psi_m(x) = \inf\limits_{i\geqslant m} (f_i(x))$ при $k \to \infty$ и п. в. $0 \leqslant \psi_{mk}(x) \leqslant f_m(x)$, то из неравенства (6) и теоремы Леви следует, что $\psi_m(x) \in \Lambda(Q)$ и $0 \leqslant \int\limits_Q \psi_m(x)\,dx \leqslant \int\limits_Q f_m(x)\,dx \leqslant A$. Утверждение теоремы теперь вытекает из теоремы Леви, поскольку п. в. $\psi_m(x) \uparrow f(x)$ при $m \to \infty$.

Еще одно достаточное условие принадлежности функции множеству $\Lambda(Q)$ содержится в следующем утверждении.

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ измерима и п. в. $|f(x)| \leqslant g(x)$, где $g(x)$ — интегрируемая функция, то $f(x)$ тоже интегрируема.*

Таким образом, измеримая функция с интегрируемым модулем интегрируема и, в частности (область Q ограничена!), интегрируема любая ограниченная (т. е. $|f(x)| \leqslant \mathrm{const}$ п. в. в Q) измеримая функция.

Доказательство теоремы 5. Так как функция $f(x)$ измерима, то существует последовательность интегрируемых (на самом деле, даже непрерывных в Q) функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к $f(x)$ п. в. в Q. Последовательность интегрируемых функций $f'_k(x) = \max(-g(x), \min(f_k(x), g(x)))$, $k = 1, 2, \ldots$, тоже сходится к $f(x)$ п. в. и дополнительно обладает свойством: $|f'_k(x)| \leqslant g(x)$ п. в., $k = 1, 2, \ldots$ Тогда последовательность $f'_k(x) + g(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, состоит из п. в. неотрицательных функций, п. в. сходится к $f + g$ и при всех k $\int\limits_Q (f'_k + g)\,dx \leqslant 2\int\limits_Q g\,dx$. По лемме Фату $f + g \in \Lambda(Q)$, а следовательно, и $f \in \Lambda(Q)$. Теорема доказана.

Из теоремы Леви и теоремы 5 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Если* $f_k(x) \in \Lambda(Q)$, $k=1, 2, \ldots$, *и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \int_Q |f_k|\, dx < \infty$, *то п. в. в* Q *абсолютно сходится ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ $\left(\text{т. е. п. в. сходится последовательность } \sum_{k=1}^{m} |f_k(x)|, m=1, 2, \ldots\right)$ *и функция* $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \in \Lambda(Q)$.

7. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Одним из центральных результатов теории лебеговского интегрирования является следующая теорема Лебега о возможности перехода к пределу под знаком интеграла.

Теорема 6 (теорема Лебега). *Если последовательность измеримых функций* $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, *сходится п. в. в* Q *к некоторой функции* $f(x)$ *и* $|f_k(x)| \leqslant g(x)$ *п. в.*, $k=1, 2, \ldots$, *где* $g(x)$ *интегрируема, то* $f(x)$ *тоже интегрируема и*

$$\lim_{k\to\infty} \int_Q f_k\, dx = \int_Q f\, dx. \tag{7}$$

В силу теоремы 5 функции $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, интегрируемы. Рассмотрим измеримые функции $\varphi_s(x) = \sup_{k \geqslant s}(f_k(x))$ и $\psi_s(x) = \inf_{k \geqslant s}(f_k(x))$, $s=1, 2, \ldots$ Поскольку п. в. $|\varphi_s(x)| \leqslant g(x)$ и $|\psi_s(x)| \leqslant g(x)$, $s=1, 2, \ldots$, то функции $\varphi_s(x)$ и $\psi_s(x)$, $s=1, 2, \ldots$, тоже интегрируемы. Но $\varphi_s(x) \downarrow f(x)$, $\psi_s(x) \uparrow f(x)$ п. в. при $s \to \infty$; значит, по теореме Леви $f(x) \in \Lambda(Q)$ и $\int_Q f\, dx = \lim_{s\to\infty} \int_Q \varphi_s\, dx = \lim_{s\to\infty} \int_Q \psi_s\, dx$. Равенство (7) теперь следует из очевидных неравенств $\psi_s(x) \leqslant f_s(x) \leqslant \varphi_s(x)$ п. в., $s=1, 2, \ldots$ Теорема доказана.

Равенство (7) может не иметь места, если последовательность не мажорируется интегрируемой функцией. Например, последовательность $f_k(x) = \frac{k^2 |x|^k}{\sigma_n}(1-|x|)$, $k=1, 2, \ldots$, где σ_n — площадь поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве, заданная в шаре $Q=\{|x|<1\}$, всюду в $\bar{Q}$ стремится к нулю, но $\int_Q f_k\, dx = \frac{k^2}{(k+n)(k+n+1)} \to 1$ при $k \to \infty$.

Из теоремы Лебега вытекает

Теорема 7. *Пусть при некотором* $s \geqslant 0$ *функция* $f(x, y)$, $x=(x_1, \ldots, x_n) \in Q \subset R_n$, $y=(y_1, \ldots, y_m) \in \overline{\Omega} \subset R_m$, *принадлежит для п. в.* $x \in Q$ *пространству* $C^s(\overline{\Omega})$ *и для всех* $y \in \overline{\Omega}$ *и*

$|\alpha| \leqslant s$ $\left|D_y^\alpha f(x, y)\right| \leqslant g(x)$ *при п. в.* $x \in Q$, *где* $g(x)$ — *интегрируемая по* Q *функция. Тогда* $\int\limits_Q f(x, y)\,dx \in C^s(\bar{\Omega})$.

8. Замена переменных под знаком интеграла. По отношению к замене независимых переменных интеграл Лебега ведет себя аналогично интегралу Римана.

Пусть непрерывно дифференцируемое в области Q преобразование

$$y = y(x) \qquad (y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

взаимно однозначно отображает область Q на область Q'. Прежде всего покажем, что *это преобразование переводит множество меры нуль в множество меры нуль*.

Действительно, пусть E, $E \subset Q$, — множество меры нуль. Так как объединение счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль, то нам достаточно показать, что образ множества $E_\delta = E \cap Q_\delta$ при любом достаточно малом $\delta > 0$ при преобразовании (8) есть множество меры нуль.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Множество E_δ можно покрыть счетной системой кубов с суммарным объемом, меньшим ε. Можно считать, что все кубы этого покрытия имеют диаметры, меньшие $\delta/2$, и следовательно, все они принадлежат $Q_{\delta/2}$. Так как каждый куб этой системы, диаметра d, при отображении (8) переходит в область с диаметром $d' \leqslant d\sqrt{n} \max\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ x \in \bar{Q}_{\delta/2}}} |\nabla y_i| = Cd$, то образ множества E_δ можно покрыть счетной системой кубов с суммарным объемом, меньшим $C^n (\sqrt{n})^n \varepsilon$. Утверждение доказано.

Теорема 8. *Пусть непрерывно дифференцируемое в* Q *преобразование* (8) *взаимно однозначно с отличным от нуля в* Q *якобианом* $J(x)$ *отображает область* Q *на область* Q'. *Для того чтобы функция* $f(y)$ *принадлежала* $\Lambda(Q')$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $f(y(x))\,|J(x)|$ *принадлежала* $\Lambda(Q)$. *При этом*

$$\int\limits_{Q'} f(y)\,dy = \int\limits_Q f(y(x))\,|J(x)|\,dx. \tag{9}$$

Обратное к (8) преобразование взаимно однозначно переводит Q' в Q, непрерывно дифференцируемо в Q' и имеет отличный от нуля в Q' якобиан. Поэтому доказательство теоремы 8 достаточно провести в одну сторону. При этом можно ограничиться случаем неотрицательной п. в. в Q' функции $f(y)$.

Пусть $f(y)$ — п. в. неотрицательная интегрируемая по Q' функция и $f_k(y)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — последовательность функций из $C(\bar{Q}')$, $f_k(y) \uparrow f(y)$ п. в. в Q' при $k \to \infty$. Рассмотрим последовательность непрерывных в $\bar{Q}'$ функций $f'_k(y) = f_k(y)\,\zeta(k\rho(y))$, $k = 1, 2, \ldots,$

где определенная на $[0, \infty)$ функция $\zeta(t)$ равна 0 при $0 \leqslant t \leqslant 1/2$, равна $2t-1$ при $1/2 < t < 1$ и равна 1 при $t \geqslant 1$, а $\rho(y)$ — расстояние от точки $y \in Q'$ до границы $\partial Q'$ ($\rho(y) \in C(\bar{Q}')$).

Очевидно, что для любого k $f'_k(y) \leqslant f_k(y) \leqslant f(y)$ п. в. в Q' (откуда вытекает ограниченность последовательности $\int\limits_Q f'_k\,dy$, $k = 1, 2, \ldots$) и $f'_k(y) \uparrow f(y)$ п. в. в Q' при $k \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{Q'} f'_k(y)\,dy = \int\limits_Q f(y)\,dy.$$

В силу непрерывности в $\bar{Q}'$ функций $f'_k(y)$ $\int\limits_{Q'} f'_k(y)\,dy = \int\limits_Q f'_k(y(x))\,|J(x)|\,dx$, $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому функция $f(y(x))\,|J(x)|$, являющаяся пределом п. в. в Q сходящейся монотонно неубывающей последовательности $f_k(y(x))\,|J(x)|$, $k = 1, 2, \ldots$, функций из $C(\bar{Q})$, интегрируема по Q и имеет место равенство (9). Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы 8 немедленно вытекает, что если в области Q имеют место неравенства $C_0 \leqslant |J(x)| \leqslant C_1$, где C_0 и C_1 — некоторые положительные постоянные, то необходимым и достаточным условием интегрируемости по Q' функции $f(y)$ является интегрируемость по Q функции $f(y(x))$. При этом справедливы неравенства

$$C_0 \int\limits_Q |f(y(x))|\,dx \leqslant \int\limits_Q |f(y)|\,dy \leqslant C_1 \int\limits_Q |f(y(x))|\,dx. \tag{10}$$

9. Измеримые множества. Интегралы по измеримым множествам. Рассмотрим некоторое подмножество E области Q. Функция $\chi_E(x)$, равная 1 для $x \in E$ и 0 для $x \in Q \setminus E$, называется *характеристической функцией* множества E.

Множество E называется *измеримым*, если измерима его характеристическая функция. *Мера* измеримого множества E ($\operatorname{mes} E$) определяется равенством

$$\operatorname{mes} E = \int\limits_Q \chi_E(x)\,dx \tag{11}$$

(интеграл в правой части имеет смысл в силу теоремы 5).

Если Q' — подобласть области Q, то она измерима, поскольку $\chi_{Q'}(x) = \lim\limits_{\delta\to 0} \zeta_\delta(x)$, где $\zeta_\delta(x)$ — срезающая функция для области Q'. При этом $\operatorname{mes} Q' = |Q'|$.

Определенные в п. 1 множества меры нуль измеримы, и они и только они имеют равную нулю меру (по данному только что определению). Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться теоремой 2 из п. 4.

Если E — измеримое подмножество области Q, а $f(x)$ — функция, интегрируемая по Q, то по определению будем считать эту функцию интегрируемой и по E, причем интеграл по E определим формулой

$$\int_E f\,dx = \int_Q f\chi_E\,dx \tag{12}$$

(интеграл в правой части имеет смысл снова в силу теоремы 5).

Если множество E есть подобласть Q' области Q, то эти новые определения интегрируемости и интеграла по Q', конечно, как нетрудно проверить, не находятся в противоречии с принятыми прежде (п. 4) соответствующими определениями, данными непосредственно для Q'.

10. Абсолютная непрерывность интеграла. Следующее свойство называется *абсолютной непрерывностью интеграла Лебега.*

Теорема 9. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Q. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для произвольного измеримого множества $E \subset Q$, $\operatorname{mes} E < \delta$, имеет место неравенство*

$$\left|\int_E f\,dx\right| < \varepsilon. \tag{13}$$

В силу неравенства (5) теорему достаточно доказать для функции $|f(x)|$, т. е. можно считать, что $f(x) \geqslant 0$ п. в. в Q.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем такую функцию $f_\varepsilon(x) \in C(\bar{Q})$, что $f(x) \geqslant f_\varepsilon(x) \geqslant 0$ п. в. в Q и $0 \leqslant \int_Q f\,dx - \int_Q f_\varepsilon\,dx \leqslant \varepsilon/2$. Тогда $\int_E f\,dx = \int_Q f\chi_E\,dx = \int_Q (f - f_\varepsilon)\chi_E\,dx + \int_Q f_\varepsilon\chi_E\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + M_\varepsilon \operatorname{mes} E$, где $M_\varepsilon = \max_{x \in \bar{Q}} f_\varepsilon(x)$. Поэтому для того, чтобы выполнялось неравенство (13), достаточно в качестве δ взять число $\varepsilon/(2M_\varepsilon)$. Теорема доказана.

11. Связь между кратными и повторными интегралами. Обратимся теперь к вопросу о сведении кратного интеграла Лебега к повторным и одновременно к вопросу о возможности перестановки интегралов.

Пусть Q_n — ограниченная n-мерная область переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а Q_m — ограниченная m-мерная область переменных $y = (y_1, \ldots, y_m)$. В ограниченной области $Q_{m+n} = Q_m \times Q_n$ $(m+n)$-мерного пространства переменных (x, y) рассмотрим функцию $f(x, y)$.

Теорема 10 (теорема Фубини). *Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема по Q_{m+n}. Тогда для п. в. $x \in Q_n$ $f(x, y)$ интегрируема по $y \in Q_m$, для п. в. $y \in Q_m$ $f(x, y)$ интегрируема по $x \in Q_n$,* *функции* $\int\limits_{Q_m} f(x, y)\,dy$ *и* $\int\limits_{Q_n} f(x, y)\,dx$ *интегрируемы по* $x \in Q_n$ *и по* $y \in Q_m$ *соответственно, и*

$$\int\limits_{Q_{m+n}} f\,dx\,dy = \int\limits_{Q_n} dx \int\limits_{Q_m} f\,dy = \int\limits_{Q_m} dy \int\limits_{Q_n} f\,dx. \tag{14}$$

Доказательство теоремы Фубини, конечно (см. п. 9), достаточно провести для случая, когда Q_n есть куб $K_n = \{|x_i| < a,\ i = 1, \ldots, n\}$, Q_m есть куб $K_m = \{|y_i| < a,\ i = 1, \ldots, m\}$, а Q_{m+n} есть куб $K_{m+n} = \{|x_i| < a,\ |y_j| < a,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$ при некотором $a > 0$. Прежде чем перейти к этому доказательству, докажем следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть* E — *множество* $(m+n)$*-мерной меры нуль, расположенное в* K_{m+n}, *а* $E_2(\bar{x})$ *и* $E_1(\bar{y})$ — *его* m*-мерное и* n*-мерное сечения плоскостями* $x = \bar{x}$ *и* $y = \bar{y}$ *соответственно. Для п. в.* $x \in K_n$ *множество* $E_2(x)$ *имеет* m*-мерную меру нуль, и для п. в.* $y \in K_m$ *множество* $E_1(y)$ *имеет* n*-мерную меру нуль.*

В силу леммы 1 (п. 1) множество E можно покрыть счетной системой кубов с конечным суммарным объемом так, что каждая его точка принадлежит бесконечному числу кубов. При этом можно считать, что грани этих кубов параллельны координатным плоскостям. Ряд из интегралов от характеристических функций $\chi_k(x, y)$ этих кубов сходится. Так как $\int\limits_{K_{m+n}} \chi_k(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{K_n} dx \int\limits_{K_m} \chi_k\,dy$, то согласно следствию из теорем 3 и 5 (п. 6) ряд из интегралов $\int\limits_{K_m} \chi_k(x, y)\,dy$ сходится при п. в. x. А это и означает, что для п. в. x множество $E_2(x)$ оказывается покрытым счетным числом m-мерных кубов с конечным суммарным объемом, причем так, что каждая его точка принадлежит бесконечному числу таких кубов. Лемма доказана.

Переходя к доказательству теоремы Фубини, прежде всего заметим, что можно ограничиться случаем $f(x, y) \geqslant 0$ п. в. в K_{m+n}. Возьмем последовательность $f_k(x, y)$, $k = 1, 2, \ldots$, функций из $C(\bar{K}_{m+n})$ такую, что $f_k(x, y) \uparrow f(x, y)$ п. в. в K_{m+n}. Обозначим через E такое множество $(m+n)$-мерной меры нуль, что для всех $(x, y) \in K_{m+n} \setminus E$ последовательность $f_k(x, y)$ монотонно сходится к $f(x, y)$.

По определению интеграла при $k \to \infty$

$$\int\limits_{K_n} dx \int\limits_{K_m} f_k(x, y)\,dy = \int\limits_{K_{m+n}} f_k(x, y)\,dx\,dy \to \int\limits_{K_{m+n}} f\,dx\,dy.$$

Согласно теореме Леви монотонная последовательность $F_k(x) = \int\limits_{K_m} f_k(x, y)\,dy$, $k=1, 2, \ldots$, функций из $C(\bar{K}_n)$ сходится п. в. в K_n к некоторой интегрируемой по K_n функции $F(x)$ и

$$\int\limits_{K_n} F\,dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{K_n} F_k(x)\,dx = \int\limits_{K_{m+n}} f\,dx\,dy. \tag{15}$$

Возьмем произвольную точку $\bar{x} \in K_n$, в которой числовая последовательность $F_k(\bar{x})$, $k=1, 2, \ldots$, сходится к $F(\bar{x})$ и множество $E_2(\bar{x})$ (пересечение множества E с плоскостью $x=\bar{x}$) имеет m-мерную меру нуль. В силу леммы 4 множество точек из K_n, не обладающих этими свойствами, имеет n-мерную меру нуль. Последовательность $f_k(\bar{x}, y)$, $k=1, \ldots$, монотонно сходится для всех $y \in K_m \setminus E_2(\bar{x})$ (следовательно, п. в. в K_m) к $f(\bar{x}, y)$. Теорема Леви утверждает, что $f(\bar{x}, y) \in \Lambda(K_m)$ и при $k \to \infty$

$$\int\limits_{K_m} f_k(\bar{x}, y)\,dy \uparrow \int\limits_{K_m} f(\bar{x}, y)\,dy. \tag{16}$$

Следовательно, функции $\int\limits_{K_m} f(x, y)\,dy$ и $F(x)$ совпадают в K_n п. в. Теорема доказана.

В дальнейшем мы часто будем использовать следующее предложение, вытекающее из теоремы Фубини.

Следствие. *Если $f(x, y)$ измерима в Q_{m+n}, неотрицательна п. в. и существует один из повторных интегралов в* (14) (*т. е., например, для п. в. x функция $f(x, y)$ интегрируема по y и функция $\int\limits_{Q_m} f\,dy$ интегрируема по x*), *то функция $f(x, y)$ интегрируема по Q_{m+n} и, тем самым, существует второй повторный интеграл и имеет место равенство* (14).

Для доказательства достаточно проверить, что $f(x, y) \in \Lambda(Q_{m+n})$. Последовательность $f_k(x, y) = \min(f(x, y), k)$, $k=1, 2, \ldots$, обладает свойствами: $f_k(x, y) \uparrow f(x, y)$ п. в. в Q_{m+n},

$$\int\limits_{Q_{m+n}} f_k(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{Q_n} dx \int\limits_{Q_m} f_k(x, y)\,dy \leqslant \int\limits_{Q_n} dx \int\limits_{Q_m} f\,dy$$

(здесь равенство написано на основании теоремы Фубини, примененной к измеримой и ограниченной, а значит, и интегрируемой по Q_{m+n} функции $f_k(x, y)$). Принадлежность функции $f(x, y)$ $\Lambda(Q_{m+n})$ после этого вытекает из теоремы Леви.

12. Интегралы типа потенциала. Пусть $\rho(x)$ — измеримая ограниченная п. в. в Q функция, $|\rho(x)| \leqslant M$ п. в. Тогда для каждого $x \in R_n$ определена функция $u(x) = \int\limits_{Q} \frac{\rho(y)\,dy}{|x-y|^{\alpha}}$, $\alpha < n$, называемая *интегралом типа потенциала*.

Покажем, что $u(x) \in C(R_n)$. При $\alpha \leqslant 0$ это очевидно. Пусть $\alpha > 0$. Прежде всего заметим, что для любых точек x^0 и x и любого $\delta > 0$ имеет место неравенство

$$|u(x^0) - u(x)| \leqslant \int\limits_Q |\rho(y)| \left| \frac{1}{|x^0-y|^\alpha} - \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right| dy \leqslant$$
$$\leqslant M \int\limits_{|x^0-y|<\delta} \left(\frac{1}{|x^0-y|^\alpha} + \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right) dy +$$
$$+ M \int\limits_{Q \cap \{|x^0-y| \geqslant \delta\}} \left| \frac{1}{|x^0-y|^\alpha} - \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right| dy. \quad (17)$$

Фиксируем x^0 и возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как при $\alpha \geqslant 0$ и $x \neq x^0$

$$\inf_{y \in \{|x-y|<\delta\} \cap \{|x^0-y|>\delta\}} \frac{1}{|x-y|^\alpha} = \frac{1}{\delta^\alpha} \geqslant \sup_{y \in \{|x-y|>\delta\} \cap \{|x^0-y|<\delta\}} \frac{1}{|x-y|^\alpha},$$

а $\operatorname{mes}\{(|x-y|<\delta) \cap (|x^0-y|>\delta\} = \operatorname{mes}\{(|x-y|>\delta) \cap (|x^0-y|< <\delta)\}$, то

$$\int\limits_{|x^0-y|<\delta} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \leqslant \int\limits_{|x^0-y|<\delta} \frac{dy}{|x^0-y|^\alpha}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{|x^0-y|<\delta} \left(\frac{1}{|x^0-y|^\alpha} + \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right) dy \leqslant 2 \int\limits_{|x^0-y|<\delta} \frac{dy}{|x^0-y|^\alpha} = \mathrm{const} \cdot \delta^{n-\alpha}.$$

Следовательно, можно найти (и зафиксировать) такое $\delta > 0$, что первое слагаемое правой части (17) будет $< \varepsilon/2$.

Функция $F(x, y) = \left| \frac{1}{|x^0-y|^\alpha} - \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right|$ непрерывна на замкнутом множестве $\Omega = \{|x-x^0| \leqslant \delta/2,\ y \in \bar{Q} \cap (|y-x^0| \geqslant \delta)\}$ и $F(x, y)|_{x=x^0} = 0$. Поэтому можно найти такое η, $0 < \eta < \delta/2$, что

$$F(x, y) < \frac{\varepsilon}{2M|Q|} \text{ при } |x-x^0| < \eta \text{ для всех } y \in \bar{Q} \cap (|y-x^0| \geqslant \delta).$$

Следовательно, для $|x-x^0| < \eta$ и второе слагаемое правой части (17) не превосходит $\varepsilon/2$. Таким образом, для $|x-x^0| < \eta$ $|u(x^0) - u(x)| < \varepsilon$, т. е. функция $u(x)$ непрерывна.

Пусть $n - \alpha > 1$. Покажем, что в этом случае $u(x)$ непрерывно дифференцируема в R_n и что

$$u_{x_i}(x) = \int\limits_Q \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|x-y|^\alpha} \right) dy = \alpha \int\limits_Q \rho(y) \frac{y_i - x_i}{|x-y|^{\alpha+2}} dy.$$

Так как $\left| \frac{y_i - x_i}{|x-y|^{\alpha+2}} \right| \leqslant \frac{1}{|x-y|^{\alpha+1}}$, $i = 1, \ldots, n$, то с помощью рассуждений, аналогичных проведенным выше для функции $u(x)$, устанавливается, что функции

$$u_i(x)=\alpha\int_Q \rho(y)\frac{y_i-x_i}{|x-y|^{\alpha+2}}\,dy,\qquad i=1,\ \ldots,\ n,$$

непрерывны в R_n. Далее, согласно теореме Фубини для любого i, $i=1,\ \ldots,\ n$,

$$\int_{x_i^0}^{x_i} u_i(x)\,dx_i=\alpha\int_{x_i^0}^{x_i} dx_i\int_Q \rho(y)\frac{y_i-x_i}{|x-y|^{\alpha+2}}\,dy=$$

$$=\alpha\int_Q \rho(y)\,dy\int_{x_i^0}^{x_i}\frac{y_i-x_i}{|x-y|^{\alpha+2}}\,dx_i=\int_Q \rho(y)\,dy\int_{x_i^0}^{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|x-y|^{\alpha}}\right)dx_i=$$

$$=u(x)-u(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i^0,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n).$$

Поэтому

$$u_i(x)=u_{x_i}(x),\qquad i=1,\ \ldots,\ n.$$

Утверждение доказано.

Точно так же устанавливается, что если $n-\alpha>s$, где s — целое число, то $u(x)$ имеет непрерывные производные до порядка s включительно и для всех $\alpha=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$, $|\alpha|\leqslant s$,

$$D^{\alpha}u(x)=\int_Q \rho(y)\,D_x^{\alpha}\frac{1}{|x-y|^{\alpha}}\,dy.$$

Заметим, что функция

$$u_1(x)=\int_Q \rho(y)\ln|x-y|\,dy,$$

называемая *логарифмическим потенциалом*, $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируема в R_n и для всех α, $|\alpha|\leqslant n-1$,

$$D^{\alpha}u_1(x)=\int_Q \rho(y)\,D_x^{\alpha}\ln|x-y|\,dy.$$

13. Интеграл Лебега от комплекснозначных функций. Пусть функция $f(x)$, заданная в области Q, является комплекснозначной

$$f(x)=\operatorname{Re}f(x)+i\operatorname{Im}f(x).$$

Функция $f(x)$ называется измеримой в Q, если измеримы в Q функции $\operatorname{Re}f$ и $\operatorname{Im}f$. Функция $f(x)$ называется интегрируемой в Q, если интегрируемы в Q функции $\operatorname{Re}f$ и $\operatorname{Im}f$. Интеграл от функции $f(x)$ в этом случае определяется равенством

$$\int_Q f\,dx=\int_Q \operatorname{Re}f\,dx+i\int_Q \operatorname{Im}f\,dx.$$

Так как $\frac{1}{2}(|\mathrm{Re} f|+|\mathrm{Im} f|)\leqslant|f|\leqslant|\mathrm{Re} f|+|\mathrm{Im} f|$, то для того чтобы измеримая функция $f(x)$ была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы функция $|f(x)|$ была интегрируемой.

14. Интеграл Лебега на $(n-1)$-мерной поверхности. Пусть S — $(n-1)$-мерная поверхность (класса C^1), и пусть S_m, $m=1, \ldots, N$, — покрытие поверхности S простыми кусками, $S=\bigcup\limits_{m=1}^{N} S_m$ (см. гл. I, введение). Каждый простой кусок S_m описывается уравнением

$$x_p=\varphi_m(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n),$$
$$(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n)\in D_m, \quad \varphi_m\in C^1(\bar{D}_m) \tag{18}$$

(D_m — проекция S_m на координатную плоскость $x_p=0$, $1\leqslant p=p(m)\leqslant n$, — $(n-1)$-мерная область с границей класса C^1).

С помощью формулы (18) устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками $(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ множества $\bar{D}_m$ и точками $(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p, \ldots, x_n)$ из $\bar{S}_m$: каждой точке $(x_1, \ldots, x_{p-1}, \varphi_m(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n), x_{p+1}, \ldots, x_n)\in\bar{S}_m$ ставится в соответствие точка $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n)\in\bar{D}_m$ (ее проекция на плоскость $x_p=0$).

Пусть множество E содержится в $\bar{S}_m$ при некотором m, $m=1, \ldots, N$. Обозначим через $\mathscr{E}$ принадлежащий $\bar{D}_m$ его прообраз при этом отображении. Будем говорить, что множество E есть множество поверхностной меры нуль, если множество $\mathscr{E}$ есть множество $(n-1)$-мерной меры нуль.

Принадлежащее S множество E называется множеством *поверхностной меры нуль*, если каждое из множеств $E\cap S_m$, $m=1, \ldots, N$, является множеством поверхностной меры нуль.

Легко показать, что свойство множества $E\subset S$ быть множеством поверхностей меры нуль не зависит от выбора покрытия $S_1, \ldots, S_N$ поверхности S.

Понятие множества меры нуль позволяет в полной аналогии со случаем n-мерной области (см. пп. 1—4) ввести понятие сходимости п. в. на S и связанные с ним понятия измеримой на S и интегрируемой по Лебегу на S функции.

Заданная на S функция называется *измеримой* (на S), если она является пределом п. в. на S сходящейся последовательности функций из $C(\bar{S})$.

Неотрицательная функция $f(x)$, заданная на S, называется *интегрируемой* (по Лебегу) на S, если она является пределом п. в. на S сходящейся монотонно неубывающей последовательности $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, непрерывных на $\bar{S}$ функций с ограниченной сверху последовательностью поверхностных интегралов

(Римана): $\int\limits_S f_k(x)\,dS \leq C$, $k=1, 2, \ldots$. При этом поверхностный интеграл (Лебега) от функции $f(x)$ определяется формулой

$$\int\limits_S f\,dS = \sup_k \int\limits_S f_k(x)\,dS = \lim_{k\to\infty} \int\limits_S f_k(x)\,dS.$$

Заданная на S вещественнозначная функция $f(x)$ называется *интегрируемой* по Лебегу по S, если неотрицательные функции $f^+(x)=\max(f(x), 0)$ и $f^-(x)=\max(-f(x), 0)$ интегрируемы по Лебегу. При этом

$$\int\limits_S f\,dS = \int\limits_S f^+\,dS - \int\limits_S f^-\,dS.$$

Пусть функция f задана на поверхности S и $S_1, \ldots, S_N$ — некоторое покрытие поверхности S простыми кусками. Обозначим через $f^m(x_1, \ldots, x_{p(m)-1}, x_{p(m)+1}, \ldots, x_n)$ заданную на D_m функцию $f(x_1, \ldots, x_{p(m)-1}, \varphi_m(x_1, \ldots, x_{p(m)-1}, x_{p(m)+1}, \ldots, x_n), x_{p(m)+1}, \ldots, x_n)$.

Покажем, что *функция f измерима тогда и только тогда, когда измеримы все функции f^m, $m=1, \ldots, N$; функция f интегрируема по S тогда и только тогда, когда каждая из функций f^m интегрируема по D_m, $m=1, \ldots, N$, при этом*

$$\int\limits_S f\,dS = \sum_{m=1}^{N} \int\limits_{D'_m} f^m \cdot \sqrt{1+|\nabla\varphi_m|^2}\,dx_1 \ldots dx_{p(m)-1}\,dx_{p(m)+1}\,dx_n, \tag{19}$$

где $D'_1=D_1$, а D'_m при $m>1$ — проекция $S_m \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m-1} \bar{S}_i$ на плоскость $x_{p(m)}=0$.

Если f измерима (интегрируема), то, очевидно, измерима (интегрируема) каждая из функций f^m, $m=1, \ldots, N$.

Покажем, что если все функции f^m, $m=1, \ldots, N$, интегрируемы, то интегрируема и функция f (утверждение об измеримости устанавливается аналогично); при этом будем считать (это не умаляет общности), что функция f, а следовательно, и все f^m, $m=1, \ldots, N$, неотрицательны п. в. (на S и соответственно на D_m).

При каждом m, $m=1, \ldots, N$, возьмем монотонно неубывающую последовательность f_k^m, $k=1, 2, \ldots$, неотрицательных функций из $C(\bar{D}_m)$, сходящуюся п. в. (в D_m) к функции f^m. Рассмотрим последовательность Π_k, $k=1, 2, \ldots$, разбиений $(n-1)$-мерного куба K, содержащего область D_m: Π_1 — разбиение куба K

на 2^{n-1} равных подкубов с ребром, равным половине ребра куба K, разбиение Π_2 — измельчение разбиения Π_1, при котором каждая ячейка (куб) разбиения Π_1 делится на 2^{n-1} равных подкубов, и т. д. Обозначим при любых $m=1, \ldots, N$ и $k=1, 2, \ldots$ через $D'_{m,k}$ замкнутое множество, состоящее из (конечного числа) замыканий всех ячеек разбиения Π_k, содержащихся в D'_m, а через $\tilde{f}^m_k$ — непрерывную в $\bar{D}_m$ функцию, равную в $D_m \setminus D'_{m,k}$ нулю и равную в $D'_{m,k}$ функции $f^m_k \cdot \zeta(k \cdot r_{m,k})$, где $\zeta(t)=0$ при $0<t<\frac{1}{2}$, $\zeta(t)=2t-1$ при $\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1$, $\zeta(t)=1$ при $t>1$, а $r_{m,k}$ — расстояние от точки $(x_1, \ldots, x_{p(m)-1}, x_{p(m)+1}, \ldots, x_n)\in D'_{m,k}$ до границы $D'_{m,k}$. Ясно, что при любом m, $m=1, \ldots, N$, последовательность $\tilde{f}^m_k$, $k=1, 2, \ldots$, монотонно не убывая п. в. в D'_m, сходится к функции f^m.

Определим непрерывную на $\bar{S}$ функцию $\tilde{\tilde{f}}{}^m_k$, $m=1, \ldots, N$, $k=1, 2, \ldots$, следующим образом:

$$\text{при } x\in S_m \qquad \tilde{\tilde{f}}{}^m_k=\tilde{f}^m_k(x_1, \ldots, x_{p(m)-1}, x_{p(m)+1}, \ldots, x_n),$$

$$\text{при } x\in S\setminus S_m \qquad \tilde{\tilde{f}}{}^m_k=0;$$

и пусть $f_k=\sum\limits_{m=1}^{N}\tilde{\tilde{f}}{}^m_k$, $k=1,2,\ldots$ Очевидно, что каждая из функций f_k, $k=1, 2, \ldots$, непрерывна на $\bar{S}$ и

$$\int\limits_S f_k\,dS=\sum_{m=1}^{N}\int\limits_S \tilde{\tilde{f}}{}^m_k\,dS=\sum_{m=1}^{N}\int\limits_{S_m}\tilde{\tilde{f}}{}^m_k\,dS=$$

$$=\sum_{m=1}^{N}\int\limits_{D_m}\tilde{f}^m_k\sqrt{1+|\nabla\varphi_m|^2}\,dx_1\ldots dx_{p(m)-1}\,dx_{p(m)+1}\ldots dx_n=$$

$$=\sum_{m=1}^{N}\int\limits_{D'_m}\tilde{f}^m_k\sqrt{1+|\nabla\varphi_m|^2}\,dx_1\ldots dx_{p(m)-1}\,dx_{p(m)+1}\ldots dx_n. \tag{20}$$

Кроме того, $f_k\uparrow f$ п. в. на S при $k\to\infty$. В силу интегрируемости на D'_m функции $f^m\sqrt{1+|\nabla\varphi_m|^2}$, $m=1, \ldots, N$, из (20) вытекает, что последовательность $\int\limits_S f_k\,dS$, $k=1, 2, \ldots$, ограничена. Следовательно, функция f интегрируема по S. Переходя в равенстве (20) к пределу при $k\to\infty$, получим (19).

Из доказанного немедленно вытекает, что для измеримых и интегрируемых по S функций справедливы все свойства, установленные выше для случая n-мерной области.

§ 2. Линейные нормированные пространства. Гильбертово пространство

1. Линейные пространства. *Линейным пространством* называется множество $\mathscr{F}$, для элементов которого определены операции сложения и умножения на вещественные (комплексные) числа, не выводящие из $\mathscr{F}$ и обладающие свойствами:

а) $f_1+f_2=f_2+f_1$,

б) $(f_1+f_2)+f_3=f_1+(f_2+f_3)$,

в) в $\mathscr{F}$ существует элемент o такой, что для любого $f\in\mathscr{F}$ $0\cdot f=o$,

г) $(c_1+c_2)f=c_1f+c_2f$,

д) $c(f_1+f_2)=cf_1+cf_2$,

е) $(c_1c_2)f=c_1(c_2f)$,

ж) $1\cdot f=f$

для любых $f, f_1, \ldots\in\mathscr{F}$ и любых вещественных (комплексных) чисел $c, c_1, \ldots$

В зависимости от того, на какие числа, вещественные или комплексные, допускается умножение элементов из $\mathscr{F}$, пространство $\mathscr{F}$ называется *вещественным* или *комплексным линейным пространством*. Для определенности мы в этой главе будем рассматривать лишь случай комплексных линейных пространств. На случай вещественных линейных пространств соответствующие определения и результаты переносятся без затруднений.

Подмножество линейного пространства $\mathscr{F}$, само являющееся линейным пространством, называется *линейным многообразием* в пространстве $\mathscr{F}$.

Пусть f_m, $m=1, 2, \ldots,$ — счетная (или конечная) система элементов линейного пространства $\mathscr{F}$. Множество элементов вида $c_1f_1+\ldots+c_kf_k$ при всевозможных k и произвольных комплексных $c_1, \ldots, c_k$ является линейным многообразием в пространстве $\mathscr{F}$ и называется *линейным многообразием, натянутым на элементы* f_k, $k=1, 2, \ldots$ Элементы $f_1, \ldots, f_m$ из $\mathscr{F}$ называется *линейно независимыми*, если равенство $c_1f_1+\ldots+c_mf_m=o$ возможно лишь при $c_1=\ldots=c_m=0$; в противном случае $f_1, \ldots, f_m$ — *линейно зависимы*. Бесконечное множество элементов из $\mathscr{F}$ называется линейно независимым, если любое его конечное подмножество линейно независимо.

Линейное многообразие *конечномерно* (*n-мерно*), если в нем существует n линейно независимых элементов, а совокупность любых его $n+1$ элементов линейно зависима.

Линейное многообразие, натянутое на линейно независимые элементы f_k, $k=1, \ldots, n$, из $\mathscr{F}$, n-мерно.

Линейное многообразие называется *бесконечномерным*, если в нем можно найти линейно независимое подмножество, состоящее из бесконечного числа элементов.

2. Линейные нормированные пространства. Линейное пространство $\mathcal{F}$ называется *нормированным*, если каждому его элементу f можно поставить в соответствие вещественное число $\|f\|=\|f\|_{\mathcal{F}}$ (*норма* f), и это соответствие обладает следующими свойствами:

а) $\|cf\|=|c|\,\|f\|$ при произвольных комплексном c и $f\in\mathcal{F}$,

б) $\|f_1+f_2\|\leqslant\|f_1\|+\|f_2\|$ для любых $f_i\in\mathcal{F}$, $i=1, 2$ (неравенство треугольника),

в) $\|f\|\geqslant 0$, причем $\|f\|=0$ только для $f=o$.

В линейном нормированном пространстве можно определить понятие *расстояния* $\|f_1-f_2\|$ между двумя элементами f_1 и f_2, а вместе с ним и понятие сходимости.

Последовательность f_m, $m=1, 2, \ldots$, элементов из $\mathcal{F}$ называется *фундаментальной*, если $\|f_k-f_m\|\to 0$ при $k, m\to\infty$.

Последовательность f_m, $m=1, 2, \ldots$, элементов из $\mathcal{F}$ называется *сходящейся к* $f\in\mathcal{F}$ $\left(f_m\to f \text{ при } m\to\infty, \text{ или } \lim\limits_{m\to\infty} f_m=f\right)$, если $\|f_m-f\|\to 0$ при $m\to\infty$.

Последовательность не может сходиться к двум различным элементам, так как если $\|f_m-f\|\to 0$ и $\|f_m-g\|\to 0$ при $m\to\infty$, то $\|f-g\|=\|f-f_m+f_m-g\|\leqslant\|f_m-f\|+\|f_m-g\|\to 0$ при $m\to\infty$, т. е. $\|f-g\|=0$, откуда $f=g$.

Если $f_m\to f$, то $\|f_m\|\to\|f\|$ (*непрерывность нормы*). Действительно, в силу неравенства треугольника $\|f_m\|\leqslant\|f_m-f\|+\|f\|$ и $\|f\|\leqslant\|f_m-f\|+\|f_m\|$. Поэтому $|\|f_m\|-\|f\||\leqslant\|f_m-f\|\to 0$ при $m\to\infty$.

Если последовательность сходящаяся ($f_m\to f$), то она фундаментальна, так как

$$\|f_k-f_m\|=\|f_k-f+f-f_m\|\leqslant\|f_k-f\|+\|f-f_m\|\to 0 \quad \text{при } k, m\to\infty.$$

Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места.

Линейное нормированное пространство называется *полным*, если для любой фундаментальной последовательности его элементов найдется элемент этого пространства, к которому она сходится.

Полное линейное нормированное пространство B называется *банаховым пространством*.

Линейное многообразие в банаховом пространстве B, полное в норме B (и, тем самым, само являющееся банаховым пространством с той же нормой), называется *подпространством* пространства B. Линейное многообразие, натянутое на конечное число элементов из B, является подпространством пространства B.

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое линейное многообразие в B. Множество $\overline{\mathcal{M}}$, полученное в результате присоединения к $\mathcal{M}$ предельных элементов всех фундаментальных последовательностей элементов из $\mathcal{M}$ (в пространстве B любая фундаментальная последовательность имеет предельный элемент), называется *замыканием* (в B) многообразия $\mathcal{M}$.

Замыкание $\overline{\mathcal{M}}$ линейного многообразия $\mathcal{M}$, очевидно, является линейным многообразием. Покажем его полноту. Пусть f_k, $k = 1, 2, \ldots$, — произвольная фундаментальная последовательность элементов из $\overline{\mathcal{M}}$, а $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$. Убедимся, что $f \in \overline{\mathcal{M}}$. Из определения $\overline{\mathcal{M}}$ следует, что для любого $k = 1, 2, \ldots$ существует такой элемент $f'_k \in \mathcal{M}$, что $\|f'_k - f_k\| < 1/k$. Поэтому

$$\|f - f'_k\| = \|f - f_k + f_k - f'_k\| \leqslant \|f - f_k\| + 1/k \to 0$$

при $k \to \infty$, т. е. $f = \lim\limits_{k\to\infty} f'_k$. Это и означает, что $f \in \overline{\mathcal{M}}$.

Итак, *замыкание линейного многообразия в B является подпространством.*

Замыкание линейного многообразия, натянутого на элементы f_k, $k = 1, 2, \ldots$, называется *подпространством, натянутым на эти элементы.*

Множество $\mathcal{M}' \subset B$ называется *ограниченным*, если существует такая постоянная C, что $\|f\| \leqslant C$ для всех $f \in \mathcal{M}'$.

Множество $\mathcal{M}' \subset B$ называется *всюду плотным в B*, если для любого элемента $f \in B$ существует последовательность f'_k, $k = 1, 2, \ldots$, элементов из $\mathcal{M}'$, сходящаяся к f.

Банахово пространство B называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

3. Скалярное произведение. Гильбертово пространство. Будем говорить, что в линейном пространстве H введено *скалярное произведение*, если любой паре элементов $h_1, h_2 \in H$ поставлено в соответствие комплексное число (h_1, h_2) (скалярное произведение этих элементов), и это соответствие обладает следующими свойствами:

а) $(h_1, h_2) = \overline{(h_2, h_1)}$ (в частности, (h, h) — вещественное число),

б) $(h_1 + h_2, h) = (h_1, h) + (h_2, h)$,

в) для любого комплексного c $(ch_1, h_2) = c(h_1, h_2)$,

г) $(h, h) \geqslant 0$, причем $(h, h) = 0$ только для $h = o$.

Установим следующее важное *неравенство Буняковского:*

$$|(h_1, h_2)|^2 \leqslant (h_1, h_1) \cdot (h_2, h_2), \tag{1}$$

имеющее место для любых h_1 и h_2 из H. Если $h_2 = o$, то неравенство (1) очевидно. Пусть $h_2 \neq o$. При произвольном комплексном t $0 \leqslant (h_1 + th_2, h_1 + th_2) = (h_1, h_1) + t\overline{(h_1, h_2)} + \bar{t}(h_1, h_2) + |t|^2 \times (h_2, h_2)$. Если $t = -\frac{(h_1, h_2)}{(h_2, h_2)}$, то это неравенство принимает вид $(h_1, h_1) - \frac{|(h_1, h_2)|^2}{(h_2, h_2)} \geqslant 0$, эквивалентный (1).

Скалярное произведение порождает в пространстве H норму $\|h\| = \sqrt{(h, h)}$. Свойства а) и в) для так введенной нормы очевидны. Для доказательства свойства б) (неравенства треугольника) воспользуемся неравенством Буняковского

$$\|h_1+h_2\|^2=\|h_1\|^2+(h_1,\ h_2)+(h_2,\ h_1)+\|h_2\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\|h_1\|^2+2\|h_1\|\|h_2\|+\|h_2\|^2=(\|h_1\|+\|h_2\|)^2.$$

Линейное пространство со скалярным произведением, полное в норме, порождаемой этим скалярным произведением (т. е. являющееся банаховым в этой норме), называется *гильбертовым пространством.*

В гильбертовом пространстве наряду со сходимостью (по норме) удобно ввести еще один вид сходимости. Последовательность h_m, $m=1,\ 2,\ \ldots,$ из H называется *слабо сходящейся* к элементу $h\in H$, если $\lim\limits_{m\to\infty}(h_m,\ f)=(h,\ f)$ для любого элемента $f\in H$.

Покажем, что последовательность не может слабо сходиться к различным элементам H. Пусть существуют два элемента h и $h'\in H$, для которых $\lim\limits_{m\to\infty}(h_m,\ f)=(h,\ f)$ и $\lim\limits_{m\to\infty}(h_m,\ f)=(h',\ f)$ при любом $f\in H$. Тогда для всех $f\in H$ $(h-h',\ f)=0$, в частности, при $f=h-h'$ имеем $(h-h',\ h-h')=0$, т. е. $h=h'$.

Если последовательность $h_m\in H$, $m=1,\ 2,\ \ldots,$ сходится к $h\in H$, то она и слабо сходится к h. В самом деле,

$$|(h_m,\ f)-(h,\ f)|=|(h_m-h,\ f)|\leqslant\|h_m-h\|\|f\|\to 0 \text{ при } m\to\infty.$$

4. Эрмитовы билинейные формы и эквивалентные скалярные произведения. Будем говорить, что на гильбертовом пространстве H задана *эрмитова билинейная форма* W, если любой паре элементов h_1 и h_2 из H поставлено в соответствие комплексное число $W(h_1,\ h_2)$, и это соответствие обладает следующими свойствами:

а) $W(h_1+h_2,\ h)=W(h_1,\ h)+W(h_2,\ h)$,

б) $W(ch_1,\ h_2)=cW(h_1,\ h_2)$,

в) $W(h_1,\ h_2)=\overline{W(h_2,\ h_1)}$

при произвольных $h,\ h_1,\ h_2\in H$ и произвольном комплексном c.

Квадратичной формой эрмитовой билинейной формы $W(h_1,\ h_2)$ называется заданная на H функция $W(h,\ h)$. Из свойства в) вытекает, что квадратичная форма эрмитовой билинейной формы вещественнозначна.

Примером эрмитовой билинейной формы, заданной на H, является скалярное произведение. Соответствующая этой билинейной форме квадратичная форма есть квадрат нормы, порождаемой скалярным произведением.

Если квадратичная форма некоторой эрмитовой билинейной формы обладает свойством $W(h,\ h)\geqslant 0$ для всех $h\in H$ и $W(h,\ h)=0$ только для $h=o$, то билинейную форму $W(h_1,\ h_2)$ можно принять за (новое) скалярное произведение в H: $W(h_1,\ h_2)=(h_1,h_2)'$.

Соответствующая (новая) норма тогда определяется равенством $\|h\|' = \sqrt{W(h, h)}$.

Норма $\| \|'$ называется *эквивалентной* норме $\| \|$, если существуют такие постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что $\|h\|' \leqslant C_1 \|h\|$, $\|h\| \leqslant C_2 \|h\|'$ для любого элемента $h \in H$. Скалярные произведения $(\, , \,)$ и $(\, , \,)'$ называются эквивалентными, если эквивалентны порождаемые ими нормы.

Если норма $\| \|'$ эквивалентна норме $\| \|$, то множество H является гильбертовым (т. е. полным) пространством и в скалярном произведении $(\, , \,)'$.

Действительно, пусть последовательность элементов h_k, $k = 1, 2, \ldots$, из H фундаментальна по норме $\| \|'$: $\|h_k - h_s\|' \to 0$ при $k, s \to \infty$. Так как $\|h_k - h_s\| \leqslant C_2 \|h_k - h_s\|'$, то эта последовательность фундаментальна и в норме $\| \|$. Поскольку H — полное пространство в норме $\| \|$, то существует элемент $h \in H$, к которому взятая последовательность в этой норме сходится: $\|h_k - h\| \to 0$ при $k \to \infty$. Так как $\|h_k - h\|' \leqslant C_1 \|h_k - h\|$, то последовательность сходится к h и в норме $\| \|'$. Утверждение доказано.

5. Ортогональность. Ортонормированные системы. Элементы h_1 и $h_2 \in H$ называются *ортогональными* ($h_1 \perp h_2$), если $(h_1, h_2) = 0$. Элемент h называется *ортогональным множеству* $H' \subset H$, если $(h, h') = 0$ для всех $h' \in H'$. Два множества H' и H'' из H называются ортогональными ($H' \perp H''$), если $(h', h'') = 0$ для всех $h' \in H'$, $h'' \in H''$.

Если $h \in H$ ортогонален всюду плотному в H множеству H', то $h = o$. Действительно, пусть последовательность h'_k, $k = 1, 2, \ldots$, элементов из H' и $h'_k \to h$ при $k \to \infty$. Так как $(h'_k, h) = 0$ для всех $k \geqslant 1$ и в силу слабой сходимости $(h'_k, h) \to \|h\|^2$, то $\|h\| = 0$, т. е. $h = o$.

Элемент $h \in H$ называется *нормированным*, если $\|h\| = 1$. Множество $H' \subset H$ называется *ортонормированным* (*ортонормированной системой*), если его элементы нормированы и попарно ортогональны. Ортонормированное множество, очевидно, линейно независимо.

Счетное (или конечное) линейно независимое множество элементов h_k, $k = 1, 2, \ldots$, можно преобразовать в счетное (или конечное) ортонормированное множество следующим образом (метод Грамма — Шмидта):

$$e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|}, \quad e_2 = \frac{h_2 - (h_2, e_1) e_1}{\|h_2 - (h_2, e_1) e_1\|}, \ \ldots,$$
$$e_n = \frac{h_n - (h_n, e_1) e_1 - \ldots - (h_n, e_{n-1}) e_{n-1}}{\|h_n - (h_n, e_1) e_1 - \ldots - (h_n, e_{n-1}) e_{n-1}\|}, \ \ldots$$

(в силу предположения о линейной независимости множества h_k, $k = 1, 2, \ldots$, при любом $n \geqslant 2$ $h_n - (h_n, e_1) e_1 - \ldots - (h_n, e_{n-1}) e_{n-1} \neq o$).

6. Ряды Фурье по произвольной ортонормированной системе. Пусть f — произвольный элемент из H, а $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ — некоторая счетная ортонормированная система в H (если пространство H конечномерно, то нужно взять ортонормированную систему, состоящую из конечного числа элементов). Обозначим через H_p подпространство, натянутое на элементы $e_1, \ldots, e_p$ при некотором $p \geqslant 1$, и найдем в H_p элемент наиболее близкий (в норме пространства H) к элементу f. Так как произвольный элемент H_p имеет вид $\sum_{r=1}^{p} c_r e_r$ при некоторых постоянных $c_1, \ldots, c_p$, то эта задача сводится к нахождению таких чисел $c_1, \ldots, c_p$, при которых достигает своего минимума величина $\delta_{H_p}^2(f; c_1, \ldots, c_p) = \left\| f - \sum_{r=1}^{p} c_r e_r \right\|^2$.

Введем числа $f_k = (f, e_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, называемые *коэффициентами Фурье* элемента f по системе $e_1, e_2, \ldots$ Так как

$$\delta_{H_p}^2(f; c_1, \ldots, c_p) = \left(f - \sum_{r=1}^{p} c_r e_r, f - \sum_{r=1}^{p} c_r e_r\right) =$$
$$= \|f\|^2 - \sum_{r=1}^{p} c_r \bar{f}_r - \sum_{r=1}^{p} \bar{c}_r f_r + \sum_{r=1}^{p} |c_r|^2 =$$
$$= \sum_{r=1}^{p} |c_r - f_r|^2 - \sum_{r=1}^{p} |f_r|^2 + \|f\|^2,$$

то величина $\delta_{H_p}^2(f; c_1, \ldots, c_p)$ достигает минимума только при $c_r = f_r$, $r = 1, \ldots, p$, и этот минимум — обозначим его через $\delta_{H_p}^2(f)$ — равен $\|f\|^2 - \sum_{r=1}^{p} |f_r|^2$:

$$\delta_{H_p}^2(f) = \|f\|^2 - \sum_{r=1}^{p} |f_r|^2. \tag{2}$$

Таким образом, при заданном f для всех $c_1, \ldots, c_p$ имеет место неравенство

$$\left\| f - \sum_{r=1}^{p} c_r e_r \right\| \geqslant \left\| f - \sum_{r=1}^{p} f_r e_r \right\|,$$

выражающее *минимальное свойство* коэффициентов Фурье, причем равенство достигается только при $c_r = f_r$, $r = 1, \ldots, p$.

Обозначим через f^p единственный ближайший к f элемент в подпространстве H_p:

$$f^p = \sum_{r=1}^{p} f_r e_r.$$

Тогда

$$\|f-f^p\|^2=\delta^2_{H_p}(f). \tag{3}$$

Элемент f^p называется проекцией элемента f на подпространство H_p.

Из равенства (2) следует, что для любого элемента $f\in H$ и любого $p\geqslant 1$ $\sum\limits_{r=1}^{p}|f_r|^2\leqslant\|f\|^2$. Это означает, что числовой ряд $\sum\limits_{r=1}^{\infty}|f_r|^2$ сходится и имеет место *неравенство Бесселя*

$$\sum_{r=1}^{\infty}|f_r|^2\leqslant\|f\|^2.$$

Лемма 1. *Пусть f_k, $k=1, 2, \ldots,$ — некоторая последовательность комплексных чисел, а e_k, $k=1, 2, \ldots,$ — ортонормированная система в H. Для того чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_ke_k$ сходился в норме H, необходимо и достаточно, чтобы сходился числовой ряд $\sum\limits_{r=1}^{\infty}|f_r|^2$.*

Пусть $S_p=\sum\limits_{r=1}^{p}f_re_r$ — частичная сумма ряда $\sum\limits_{r=1}^{\infty}f_re_r$. Для $p>q$ имеем равенство $\|S_p-S_q\|^2=\left\|\sum\limits_{q+1}^{p}f_re_r\right\|^2=\sum\limits_{q+1}^{p}|f_r|^2$, из которого вытекает, что сходимость ряда $\Sigma|f_r|^2$ необходима и достаточна для фундаментальности последовательности частичных сумм ряда и, тем самым, в силу полноты пространства H для сходимости этого ряда. Лемма доказана.

Пусть f — произвольный элемент из H и f_k, $k=1, 2, \ldots,$ — его коэффициенты Фурье по ортонормированной системе e_k, $k=1, 2, \ldots$ Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}f_ke_k$$

называется рядом Фурье элемента f по системе e_k, $k=1, 2, \ldots$

Из неравенства Бесселя и леммы 1 вытекает

Лемма 2. *Ряд Фурье произвольного элемента $f\in H$ по произвольной ортонормированной системе сходится в норме пространства H.*

Лемма 2 устанавливает существование элемента $\tilde{f}\in H$, к которому сходится ряд Фурье элемента f. Возникает естественный вопрос: не справедливо ли для всех $f\in H$ равенство $\tilde{f}=f$?

В общем случае, если не делать никаких дополнительных предположений относительно системы $e_1, e_2, \ldots$, кроме ее ортонормированности, ответ на этот вопрос будет отрицательным.

7. Ортонормированный базис. Из (2) вытекает, что при любом $f \in H$ величина $\delta^2_{H_p}(f)$ с ростом p может только уменьшаться. Поэтому a priori могут представиться два случая:

а) для всех $f \in H$ $\delta^2_{H_p}(f) \to 0$ при $p \to \infty$,

б) существует такой элемент $f \in H$, для которого при $p \to \infty$ $\delta^2_{H_p}(f) \to c > 0$.

В случае а) в силу равенства (3) для любого $f \in H$ имеет место соотношение

$$f = \lim_{p \to \infty} \sum_{k=1}^{p} f_k e_k$$

или, что то же самое, равенство

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k, \tag{4}$$

т. е. в случае а) ряд Фурье любого элемента f сходится (в метрике H) к f. При этом для любого $f \in H$ имеет место равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2, \tag{5}$$

называемое *равенством Парсеваля — Стеклова*, и обобщающее его равенство

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \bar{g}_k, \tag{5'}$$

справедливое для любых элементов f и g из H.

Равенство (5) вытекает из (2). Докажем равенство (5′). Прежде всего заметим, что ряд, стоящий в правой части, абсолютно сходится, так как его общий член мажорируется общим членом сходящегося ряда: $|f_k \bar{g}_k| \leq \frac{1}{2}(|f_k|^2 + |g_k|^2)$. Далее, в силу (4)

$$(f, g) = \lim_{p \to \infty} (f^p, g) = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{p} f_k e_k, g \right) =$$
$$= \lim_{p \to \infty} \sum_{k=1}^{p} f_k (e_k, g) = \lim_{p \to \infty} \sum_{k=1}^{p} f_k \bar{g}_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \bar{g}_k.$$

Что и требовалось установить.

В случае б) существует такой элемент $f \in H$, ряд Фурье которого сходится (согласно лемме 2 предыдущего пункта) к элементу $\tilde{f} \neq f$, т. е. элемент $h = f - \tilde{f} \neq o$. Таким образом,

$$f = h + \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k,$$

где $h \neq o$ и h ортогонален подпространству, натянутому на систему $e_1, e_2, \ldots$

Вернемся теперь снова к случаю а), который, естественно, нас в основном и будет интересовать.

Счетная ортонормированная система $e_1, e_2, \ldots$ называется *полной* или *ортонормированным базисом* пространства H, если любой элемент $f \in H$ может быть разложен в ряд Фурье (4) по этой системе.

Из доказанного выше вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *Для того чтобы ортонормированная система e_1, $e_2, \ldots$ была ортонормированным базисом H, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $f \in H$ имело место равенство Парсеваля — Стеклова* (5) *или для любых двух элементов f и g из H имело место равенство* (5').

Лемма 4. *Для того чтобы ортонормированная система e_1, $e_2, \ldots$ была ортонормированным базисом пространства H, необходимо и достаточно, чтобы линейное многообразие, натянутое на эту систему, было всюду плотным в H множеством.*

Если система $e_1, e_2, \ldots$ является ортонормированным базисом в H, то любой элемент $f \in H$ сколь угодно точно аппроксимируется в норме H частичными суммами своего ряда Фурье, являющимися линейными комбинациями этой системы. Необходимость установлена.

Докажем достаточность. Пусть f — произвольный элемент из H. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем число $p = p(\varepsilon)$ и числа $c_1(\varepsilon), \ldots$ $\ldots, c_p(\varepsilon)$ такие, что $\left\| f - \sum_{k=1}^{p} c_k(\varepsilon) e_k \right\| < \varepsilon$. В силу минимального свойства коэффициентов Фурье

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{p} f_k e_k \right\|^2 \leqslant \left\| f - \sum_{k=1}^{p} c_k(\varepsilon) e_k \right\|^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

откуда и следует разложимость f в ряд Фурье (4).

Теорема 1. *В сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Пусть $h_1', h_2', \ldots$ — счетное всюду плотное в H множество. Обозначим через h_1 первый отличный от нуля элемент h_{k_1}' ($h_1' = \ldots = h_{k_1-1}' = o$) этого множества, через h_2 первый элемент множества $h'_{k_1+1}, h'_{k_1+2}, \ldots$, образующий с h_1 пару линейно независимых элементов и т. д. Счетная (или конечная) система $h_1, h_2, \ldots$ линейно независима, и линейные комбинации элементов этой системы всюду плотны в H. Преобразуем систему $h_1, h_2, \ldots$ (п. 5) в счетную ортонормированную систему элементов $e_1, e_2, \ldots$, линейные комбинации которых тоже плотны в H. В силу леммы 4 эта система является ортонормированным базисом пространства H. Теорема 1 доказана.

§ 3. Линейные операторы. Компактные множества. Вполне непрерывные операторы

1. Операторы. Функционалы. Пусть B_1 и B_2 — банаховы пространства, а B'_1 — некоторое множество, лежащее в B_1. Будем говорить, что на B'_1 задан *оператор* A (*оператор* A *из* B_1 *в* B_2), если любому элементу $f \in B'_1$ поставлен в соответствие некоторый элемент $g \in B_2$: $g = Af$. Множество B'_1 называется *областью определения* D_A, $D_A = B'_1$, оператора A, а множество элементов вида Af при $f \in D_A$ — *областью* его *значений* $R_A \subset B_2$.

Оператор A называется функционалом, если пространство B_2 есть множество комплексных чисел (за норму на этом множестве принимается модуль комплексного числа). Функционалы обычно будут обозначаться буквой l.

Простейшими операторами являются операторы O — нулевой и (при $B_1 = B_2$) I — единичный, определяемые следующим образом: $Of = o$ для всех $f \in D_O$, $If = f$ для всех $f \in D_I$.

Оператор A называется *непрерывным на элементе* $f \in D_A$, если он любую сходящуюся к f в норме B_1 последовательность f_k, $k = 1, 2, \ldots$, элементов из D_A переводит в сходящуюся к элементу Af в норме B_2 последовательность Af_k, $k = 1, 2 \ldots$ Оператор A называется *непрерывным на множестве* $E \subset D_A$ (в частности, на D_A), если он непрерывен на любом элементе $f \in E$. Оператор A, непрерывный на D_A, будем называть *непрерывным*.

Оператор A называется *линейным*, если D_A — линейное многообразие и $A(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 A f_1 + c_2 A f_2$ для любых элементов $f_i \in D_A$ и чисел c_i, $i = 1, 2$.

Линейный оператор A нулевому элементу пространства B_1 ставит в соответствие нулевой элемент пространства B_2, поскольку

$$Ao = A(0 \cdot f) = 0 \cdot Af = o$$

(f — произвольный элемент из D_A).

Для непрерывности линейного оператора A необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен на нулевом элементе (или, вообще, на каком-либо элементе из D_A).

Необходимость утверждения очевидна. Докажем достаточность. Пусть f_k, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательность элементов из D_A, сходящаяся к $f \in D_A$. Поскольку $g_k = f_k - f$, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательность элементов из D_A, сходящаяся к нулю, то $Ag_k \to o$ при $k \to \infty$. А это и означает, что $Af_k \to Af$ при $k \to \infty$. Утверждение доказано.

Пусть A_i, $i = 1, 2$, — линейные операторы из B_1 в B_2, $D_{A_1} = D_{A_2}$, а c_i, $i = 1, 2$, — некоторые числа. Определим оператор $A = c_1A_1 + c_2A_2$ следующим образом: для любого $f \in D_A = D_{A_1} = D_{A_2}$ $Af = c_1A_1f + c_2A_2f$. Оператор A также является линейным.

Таким образом, на множестве линейных операторов с общей областью определения введены операции сложения и умножения на комплексные числа. Нетрудно убедиться, что это множество образует линейное пространство.

Линейный оператор A называется *ограниченным*, если существует такая постоянная $C > 0$, что $\|Af\|_{B_2} \leqslant C\|f\|_{B_1}$ для всех $f \in D_A$, или, что то же самое, $\|Af\|_{B_2} \leqslant C$ для тех $f \in D_A$, для которых $\|f\|_{B_1} = 1$.

Точная ~~нижняя~~ грань значений постоянной C называется *нормой* оператора A и обозначается через $\|A\|$.

Покажем, что

$$\|A\| = \sup_{f \in D_A} \frac{\|Af\|_{B_2}}{\|f\|_{B_1}} = \sup_{\substack{f \in D_A \\ \|f\|_{B_1} = 1}} \|Af\|_{B_2}. \tag{1}$$

Обозначим $\sup\limits_{f \in D_A} \|Af\|_{B_2}/\|f\|_{B_1}$ через α. Поскольку для всех $f \in D_A$ $\|Af\|_{B_2}/\|f\|_{B_1} \leqslant \alpha$, то $\|A\| \leqslant \alpha$. Установим обратное неравенство. По определению точной верхней грани для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $f_\varepsilon \in D_A$, для которого $\|Af_\varepsilon\|_{B_2}/\|f_\varepsilon\|_{B_1} \geqslant \alpha - \varepsilon$. Это означает, что $\|A\| \geqslant \alpha - \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, т. е. $\|A\| \geqslant \alpha$. Итак, $\|A\| = \alpha$.

В частности, если оператор A является линейным ограниченным функционалом, $A = l$, то его норма

$$\|l\| = \sup_{f \in D_l} \frac{|lf|}{\|f\|_{B_1}} = \sup_{\substack{f \in D_l \\ \|f\|_{B_1} = 1}} |lf|.$$

Отметим, что множество линейных ограниченных операторов с общей областью определения есть линейное многообразие в пространстве всех линейных операторов с этой областью определения. Введенная норма линейного ограниченного оператора удовлетворяет всем аксиомам нормы. Легко показать, что это нормированное пространство является полным (т. е. банаховым).

Следующее предложение устанавливает связь между понятиями непрерывности и ограниченности для линейных операторов.

Для того чтобы линейный оператор A был непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен.

Достаточность. Пусть последовательность f_k, $k=1, 2, \ldots$, из D_A сходится (в B_1) к $f \in D_A$. Так как $\|Af_k - Af\|_{B_2} = \|A(f_k - f)\|_{B_2} \leqslant \|A\| \|f_k - f\|_{B_1} \to 0$ при $k \to \infty$, то $Af_k \to Af$ в B_2 при $k \to \infty$.

Необходимость. Предположим, что оператор A неограничен; тогда существует последовательность f'_k, $k=1, 2, \ldots$, элементов D_A, для которой $\|Af'_k\|_{B_2} > k\|f'_k\|_{B_1}$. Но это противоречит непрерывности оператора A, поскольку последовательность $f_k = f'_k/(k\|f'_k\|_{B_1})$, $k=1, 2, \ldots$, принадлежащая D_A, стремится в B_1 к нулю, а последовательность Af_k, $k=1, 2, \ldots$, не может стремиться к $Ao=o$, так как $\|Af_k\|_{B_2} \geqslant 1$.

Линейный ограниченный оператор A с всюду плотной в B_1 областью определения D_A всегда можно считать заданным на всем B_1, доопределяя его на $B_1 \setminus D_A$ следующим образом. Пусть f — любой элемент из $B_1 \setminus D_A$, а f_k, $k=1, 2, \ldots$, — некоторая последовательность элементов из D_A, сходящаяся в норме B_1 к f (D_A всюду плотно в B_1). Так как оператор A ограничен, то последовательность Af_k, $k=1, 2, \ldots$, элементов из B_2 фундаментальна в B_2. В силу полноты B_2 последовательность Af_k, $k=1, 2, \ldots$, имеет в B_2 предел. Покажем, что этот предел не зависит от выбора последовательности f_k, $k=1, 2, \ldots$ Действительно, пусть f'_k, $k = 1, 2, \ldots$, — другая последовательность из D_A, сходящаяся к f. Тогда $\|Af'_k - Af_k\|_{B_2} = \|A(f'_k - f_k)\|_{B_2} = \|A\| \|f'_k - f_k\|_{B_1} \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, предел зависит только от элемента f. Примем его за значение Af оператора A на элементе f. Полученное *расширение* оператора A, называемое *расширением по непрерывности*, является линейным ограниченным оператором, заданным на всем B_1.

Если A_1 и A_2 — линейные операторы, для которых $R_{A_2} \subset D_{A_1}$, то линейный оператор A_1A_2 на D_{A_2} с областью значений из R_{A_1} определяется так: $A_1A_2f = A_1(A_2f)$. Если A_1 и A_2 — ограниченные операторы, то A_1A_2 тоже ограничен и $\|A_1A_2\| \leqslant \|A_1\| \|A_2\|$.

Пусть для любого $g \in R_A$ уравнение $Af = g$ имеет единственное решение $f \in D_A$. Это означает, что на R_A задан оператор, будем обозначать его через A^{-1}, ставящий в соответствие элементу $g \in R_A$ тот единственный элемент $f \in D_A$, для которого $Af = g$. Оператор A^{-1} называется *обратным* к оператору A. Ясно, что $D_{A^{-1}} = R_A$, $R_{A^{-1}} = D_A$, $A^{-1}A = I$, $AA^{-1} = I$. Если оператор A линейный, то обратный оператор A^{-1} тоже линейный.

2. Теорема Рисса. Примером линейного ограниченного функционала, заданного на гильбертовом пространстве H, является скалярное произведение: фиксируем произвольно элемент $h \in H$, тогда (f, h) является (по f) линейным ограниченным функционалом (ограниченность его следует из неравенства Буняковского). Весьма замечательно, что в виде скалярного произведения при надлежащем выборе $h \in H$ может быть представлен любой линейный ограниченный функционал, заданный на H (или в силу п. 1

на всюду плотном в H множестве). А именно, справедливо следующее важное утверждение.

Теорема 1 (теорема Ф. Рисса). *Для любого линейного ограниченного функционала l, заданного на гильбертовом пространстве H, существует единственный элемент $h \in H$ такой, что для всех $f \in H$*

$$l(f)=(f,\ h). \tag{2}$$

При доказательстве этой теоремы ограничимся случаем сепарабельного гильбертова пространства H (только для таких пространств мы этой теоремой и будем пользоваться).

Пусть $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ — ортонормированный базис в H (он существует в силу теоремы 1 § 2), а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k e_k$ — разложение в ряд Фурье некоторого элемента $f \in H$. Так как при $p \to \infty$ $\sum\limits_{k=1}^{p} f_k e_k \to f$, то в силу непрерывности функционала l

$$l(f)=\lim_{p\to\infty} l\left(\sum_{k=1}^{p} f_k e_k\right)=\lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{p} f_k l(e_k)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k \bar{h}_k, \tag{3}$$

где $h_k=\overline{l(e_k)}$, $k=1,\ 2, \ldots$

Рассмотрим элемент $h^p=\sum\limits_{k=1}^{p} h_k e_k$. Так как $|l(h^p)| \leqslant \|l\|\|h^p\|$ (ограниченность функционала l), а $l(h^p)=\sum\limits_{k=1}^{p} h_k l(e_k)=\sum\limits_{k=1}^{p} |h_k|^2= =\|h^p\|^2$, то для всех $p \geqslant 1$ $\sum\limits_{k=1}^{p} |h_k|^2 \leqslant \|l\|^2$. Это означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |h_k|^2$ сходится и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |h_k|^2 \leqslant \|l\|^2$. В силу леммы 1 (п. 6 § 2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k e_k$ сходится в норме пространства H к некоторому элементу $h \in H$ (h_k — коэффициенты Фурье элемента h).

Подставляя в (3) $f_k=(f,\ e_k)$ и снова пользуясь непрерывностью функционала l, получим равенство (2): $l(f)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f,\ h_k e_k)= =\left(f, \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k e_k\right)=(f,\ h)$.

Если наряду с представлением (2) есть другое представление функционала l: $l(f)=(f,\ h')$, то для всех $f \in H$ $(f,\ h-h')=0$. А это означает, что $h=h'$. Теорема доказана.

Отметим, что в процессе доказательства теоремы 1 установлено неравенство $\|h\| \leqslant \|l\|$. Из (2) и неравенства Буняковского вытекает обратное неравенство $\|l\| \leqslant \|h\|$. Следовательно, $\|l\| = \|h\|$.

3. Сопряженный оператор. Пусть H — гильбертово пространство, а A — линейный оператор из H в H, заданный на всюду плотном в H множестве D_A (оператор A, вообще говоря, не предполагается ограниченным).

Пусть D_{A^*} — множество всех элементов из H, обладающих следующим свойством: для любого $g \in D_{A^*}$ существует такой элемент $h \in H$, что при всех $f \in D_A$ имеет место равенство

$$(Af,\ g) = (f,\ h).$$

Множество D_{A^*} — непустое, поскольку нулевой элемент пространства H ему принадлежит: при $g = o$ элемент $h = o$.

Покажем, что любому элементу $g \in D_{A^*}$ соответствует лишь один элемент $h \in H$. Пусть, напротив, некоторому $g \in D_{A^*}$ отвечают два элемента h и h' из H. Тогда для всех $f \in D_A$ имеет место равенство $(f,\ h - h') = 0$, из которого вытекает, что $h = h'$ (напомним, что D_A всюду плотно в H).

Таким образом, на D_{A^*} задан оператор, будем обозначать его через A^*: каждому элементу $g \in D_{A^*}$ ставится в соответствие единственный элемент $h = A^*g \in H$ такой, что

$$(Af,\ g) = (f,\ A^*g) \tag{4}$$

для любого $f \in D_A$. Оператор A^* называется *сопряженным* к оператору A. Множество D_{A^*} всех элементов из H, для которых выполнено равенство (4) при всех $f \in D_A$, является его областью определения.

Пусть g_1, g_2 — произвольные элементы из D_{A^*}, а c_1, c_2 — любые комплексные числа. Тогда в силу (4) для любого $f \in D_A$

$$(f,\ c_1A^*g_1 + c_2A^*g_2) = \bar{c}_1(f,\ A^*g_1) + \bar{c}_2(f,\ A^*g_2) =$$
$$= \bar{c}_1(Af,\ g_1) + \bar{c}_2(Af,\ g_2) = (Af,\ c_1g_1 + c_2g_2).$$

Это означает, что $c_1g_1 + c_2g_2 \in D_{A^*}$ (т. е. D_{A^*} — линейное многообразие) и $A^*(c_1g_1 + c_2g_2) = c_1A^*g_1 + c_2A^*g_2$. Таким образом, оператор A^* — линейный.

Пусть теперь оператор A ограничен. В силу п. 1 его можно считать заданным на всем пространстве H. Возьмем *произвольный* элемент $g \in H$. Линейный функционал $l(f) = (Af,\ g)$ ограничен, поскольку $|l(f)| \leqslant \|Af\|\|g\| \leqslant (\|A\|\|g\|)\|f\|$. Согласно теореме Рисса (п. 2) существует (единственный) элемент $h \in H$ такой, что $l(f) = (Af,\ g) = (f,\ h) = (f,\ A^*g)$. Следовательно, равенство (4) имеет место *для всех* $g \in H$, т. е. $D_{A^*} = H$.

Докажем, что оператор A^* ограничен и что $\|A^*\|=\|A\|$. Подставляя в (4) $f=A^*g$ при произвольном $g \in H$, получим

$$\|A^*g\|^2=(AA^*g,\ g)\leqslant\|A(A^*g)\|\|g\|\leqslant(\|A\|\|g\|)\|A^*g\|.$$

Поэтому $\|A^*g\|\leqslant\|A\|\|g\|$, т. е. оператор A^* ограничен и $\|A^*\|\leqslant\leqslant\|A\|$. Подставляя в (4) $g=Af$ при любом $f \in H$, аналогично получим $\|A^*\|\geqslant\|A\|$. Значит, $\|A^*\|=\|A\|$.

Итак, оператор A^*, сопряженный к линейному ограниченному оператору A, определен на всем пространстве, линеен, ограничен, и его норма равна норме оператора A.

Легко проверить, что $(A^*)^*=A$, $(cA)^*=\bar{c}A^*$ (c — комплексное число), $(A+B)^*=A^*+B^*$, $(AB)^*=B^*A^*$.

4. Матричное представление линейного ограниченного оператора. При доказательстве теоремы Рисса было установлено, что линейный ограниченный функционал, заданный на сепарабельном гильбертовом пространстве, полностью определяется его значениями на ортонормированном базисе этого пространства. Аналогично обстоит дело и с линейными ограниченными операторами.

Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий из сепарабельного гильбертова пространства H в H. Пусть $D_A=H$, а $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ — некоторый ортонормированный базис H.

Бесконечную матрицу $a_{ij}=(Ae_i,\ e_j)=(e_i,\ A^*e_j)$, $i\geqslant 1$, $j\geqslant 1$, будем называть *матричным представлением* оператора A в базисе $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ Так как $(A^*e_j,\ e_i)=\bar{a}_{ij}$, $i=1, 2, \ldots$, — коэффициенты Фурье элемента A^*e_j, то согласно равенству Парсеваля — Стеклова (равенство (5) п. 7 § 2) ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^2$ сходится и для всех $j=1, 2, \ldots$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^2=\|A^*e_j\|^2\leqslant\|A^*\|^2=\|A\|^2. \tag{5}$$

Возьмем произвольный элемент $f \in H$, и пусть $f=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k e_k$ — его разложение в ряд Фурье. Так как элемент $Af \in H$, то его коэффициенты Фурье

$$(Af)_j=(Af,\ e_j)=\left(A\sum_{i=1}^{\infty}f_i e_i,\ e_j\right)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(Ae_i,\ e_j)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i a_{ij}, \tag{6}$$

$j=1, 2, \ldots$ Ряд в правой части (6) сходится абсолютно, поскольку общий его член $f_i a_{ij}$ мажорируется общим членом сходящегося ряда $\frac{1}{2}(|f_i|^2+|a_{ij}|^2)$. Подставляя значения коэффициентов Фурье в ряд Фурье $Af=\sum_{j=1}^{\infty}(Af)_j e_j$, получим

$$Af=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}f_i\right)e_j. \tag{7}$$

Таким образом, для любого $f\in H$ элемент $Af\in H$ может быть найден по f с помощью лишь матрицы (a_{ij}). Это означает, что матрица (a_{ij}) полностью определяет оператор A.

Если (a_{ij}) — матричное представление оператора A в базисе $e_1, e_2, \ldots$, а (a_{ij}^*) — соответствующее представление сопряженного оператора A^*, то

$$a_{ij}^*=(A^*e_i, e_j)=(e_i, Ae_j)=\bar{a}_{ji} \quad \text{для всех} \quad i\geqslant 1,\ j\geqslant 1.$$

Оператор A называется *конечномерным* (*n-мерным*), если он отображает гильбертово пространство H в некоторое его n-мерное подпространство.

Пусть H_n — подпространство пространства H, натянутое на элементы $e_1, \ldots, e_n$. Для того чтобы линейный ограниченный оператор A переводил пространство H в H_n, необходимо и достаточно, чтобы $a_{ij}=0$ для $j>n$, $i\geqslant 1$. Это утверждение немедленно вытекает из равенств (6) и (7).

5. Самосопряженные операторы. Операторы ортогонального проектирования. Заданный на гильбертовом пространстве H линейный ограниченный оператор A из H в H называется самосопряженным, если $A=A^*$.

Самосопряженному оператору A можно поставить в соответствие эрмитову билинейную форму $W(f, g)=(Af, g)$ и соответствующую ей квадратичную форму (Af, f). Эти формы называются соответственно *билинейной* и *квадратичной формами оператора* A. Квадратичная форма самосопряженного оператора вещественнозначная. Если $(Af, f)\geqslant 0$ для всех f из H, то самосопряженный оператор A называется *неотрицательным*. Неотрицательный оператор A называется *положительным*, если $(Af, f)=0$ только при $f=o$.

Матричное представление (a_{ij}) самосопряженного оператора (в случае сепарабельности пространства H) обладает следующим свойством: $a_{ij}=\bar{a}_{ji}$, $i, j=1, 2, \ldots$

Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — некоторый ортонормированный базис сепарабельного гильбертова пространства H, $e_{i_1}, \ldots e_{i_k}, \ldots$ — некоторое его счетное (или конечное) подмножество, а $e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}, \ldots$ — подмножество базиса, дополнительное к выбранному. Обозначим через $\mathfrak{N}'$ подпространство, натянутое на элементы e_{i_k}, $k=1, 2, \ldots$, а через $\mathfrak{N}''$ — подпространство, натянутое на элементы e_{j_k}, $k=1, 2, \ldots$ Подпространство $\mathfrak{N}'$ ($\mathfrak{N}''$) есть совокупность элементов пространства H, ортогональных всем элементам e_{j_k}, $k=1, 2, \ldots$ (e_{i_k}, $k=1, 2, \ldots$). Или, что то же самое, подпространство $\mathfrak{N}'$ ($\mathfrak{N}''$) есть множество всех тех элементов из H, у которых в разложениях в ряды Фурье по базису e_k, $k=1, 2, \ldots$, коэффициенты Фурье при элементах e_{j_k}, $k=1, 2, \ldots$ $(e_{i_k}, k=1, 2, \ldots)$, равны нулю (т. е. соответствующие члены в разложениях отсутствуют). Подпространства $\mathfrak{N}'$ и $\mathfrak{N}''$ ортогональны, $\mathfrak{N}' \perp \mathfrak{N}''$.

Сопоставим произвольному элементу $f \in H$, разложение которого в ряд Фурье имеет вид $\sum f_k e_k$, элементы

$$f' = P'f = \sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k} e_{i_k}, \quad f'' = P''f = \sum_{k=1}^{\infty} f_{j_k} e_{j_k}. \tag{8}$$

Ряды в (8) сходятся в норме пространства H в силу неравенства Бесселя и леммы 1 (п. 6 § 2), поэтому соотношениями (8) на H задаются два оператора P' и P''. Они линейны. Области их значений: $R_{P'} = \mathfrak{N}'$, $R_{P''} = \mathfrak{N}''$.

Операторы P' и P'' называются операторами *ортогонального проектирования* пространства H на подпространства $\mathfrak{N}'$ и $\mathfrak{N}''$ соответственно (для краткости, эти операторы будем называть *проекционными* операторами).

Проекционный оператор ограничен и его норма равна 1. Действительно, так как для всех $f \in H$ $\|P'f\|^2 = \|f'\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{i_k}|^2 \leqslant \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 = \|f\|^2$, то $\|P'\| \leqslant 1$. Но $P'e_{i_1} = e_{i_1}$, значит, $\|P'\| = 1$.

Проекционный оператор является самосопряженным, поскольку для любых f и h из H $(P'f, h) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k} e_{i_k}, h\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k} (e_{i_k}, h) = = \sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k} \bar{h}_{i_k} = (f, P'h)$.

Из равенства (8) вытекает, что для любого $f \in H$

$$f = If = P'f + P''f, \quad I = P' + P'', \tag{9}$$

где $P'f \in \mathfrak{N}'$, $P''f \in \mathfrak{N}''$. При этом

$$\|f\|^2 = \|P'f + P''f\|^2 = \|P'f\|^2 + \|P''f\|^2 + (P'f, P''f) + \\ + (P''f, P'f) = \|P'f\|^2 + \|P''f\|^2, \tag{10}$$

поскольку $\mathfrak{N}' \perp \mathfrak{N}''$.

6. Компактные множества. Пусть H — гильбертово пространство. Множество $\mathcal{M} \subset H$ называется *компактным* в H, если любая (бесконечная) последовательность его элементов содержит фундаментальную в H подпоследовательность.

Лемма 1. *Компактное множество ограничено.*

Пусть $\mathcal{M}$ — неограниченное множество. Покажем, что оно не может быть компактным. Возьмем какой-нибудь его элемент f^1 и обозначим через S_{f^1} шар радиуса 1 с центром в f^1, т. е. множество тех элементов $f \in H$, для которых $\|f-f^1\|<1$. Так как $\mathcal{M}$ неограничено, то множество $\mathcal{M}_1=\mathcal{M}\setminus S_{f^1}$ непусто. Возьмем произвольно $f^2 \in \mathcal{M}_1$ ($\|f^2-f^1\| \geqslant 1$). Так как и множество $\mathcal{M}_2=\mathcal{M}_1 \setminus S_{f^2}$ непусто, то существует такой элемент $f^3 \in \mathcal{M}$, что $\|f^3-f^1\| \geqslant 1$, $\|f^3-f^2\| \geqslant 1$. Продолжая этот процесс, получим последовательность f^k, $k=1, 2, \ldots$, элементов из $\mathcal{M}$, удовлетворяющих при любых i, j, $i \neq j$, неравенству $\|f^i-f^j\| \geqslant 1$. Эта последовательность не содержит ни одной фундаментальной подпоследовательности. Следовательно, множество $\mathcal{M}$ не может быть компактным.

Лемма 2. *Для того чтобы множество $\mathcal{M}$ из конечномерного (n-мерного) гильбертова пространства H было компактно, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено.*

Необходимость ограниченности вытекает из леммы 1. Докажем ее достаточность.

В силу ограниченности множества $\mathcal{M}$ $\|f\| \leqslant C$ для всех $f \in \mathcal{M}$. Поэтому коэффициенты Фурье $f_i=(f, e_i)$, $i=1, \ldots, n$, разложения $f=f_1e_1+\ldots+f_ne_n$ произвольного элемента $f \in \mathcal{M}$ *) удовлетворяют неравенствам $|f_i|=|(f, e_i)| \leqslant \|f\|\|e_i\|=\|f\| \leqslant C$. Следовательно, для любой последовательности f^k, $k=1, 2, \ldots$, элементов из $\mathcal{M}$ последовательность n-мерных векторов $(f_1^k, \ldots, f_n^k)$, $k=1, 2, \ldots$, где $f_i^k=(f^k, e_i)$, ограничена. По теореме Больцано — Вейерштрасса из нее можно выбрать фундаментальную подпоследовательность $\left(f_1^{k_s}, \ldots, f_n^{k_s}\right)$, $s=1, 2, \ldots$:

$$\left|f_1^{k_s}-f_1^{k_p}\right|^2+\ldots+\left|f_n^{k_s}-f_n^{k_p}\right|^2 \to 0 \text{ при } s, p \to \infty.$$

Соответствующая подпоследовательность $f^{k_s}=f_1^{k_s}e_1+\ldots+f_n^{k_s}e_n$, $s=1, 2, \ldots$, фундаментальна в H, поскольку

$$\left\|f^{k_s}-f^{k_p}\right\|^2=\left|f_1^{k_s}-f_1^{k_p}\right|^2+\ldots+\left|f_n^{k_s}-f_n^{k_p}\right|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad s, p \to \infty.$$

Утверждение доказано.

7. Теорема о компактности множеств в сепарабельном гильбертовом пространстве. Пусть H — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, а $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ — его ортонормированный базис.

Прежде всего заметим, что не всякое ограниченное множество из H компактно. Например, любое ограниченное множество, содер-

*) По некоторому ортонормированному базису $e_1, \ldots, e_n$.

жащее ортонормированный базис, некомпактно, так как из последовательности e_k, $k=1, 2, \ldots$, в силу равенства $\|e_i-e_j\|=\sqrt{2}$, $i\neq j$, нельзя выделить фундаментальной подпоследовательности. В частности, множество $\{\|f\|\leqslant 1\}$ (замкнутый единичный шар) в бесконечномерном пространстве некомпактно.

Обозначим через P'_n проекционный оператор, отображающий H на n-мерное подпространство H_n, натянутое на элементы $e_1, \ldots, e_n$, и пусть $P''_n=I-P'_n$. Для любого $f\in H$ и произвольного $n\geqslant 1$ имеем (см. (9))

$$f=P'_nf+P''_nf, \tag{11}$$

где $P'_nf=\sum\limits_{k=1}^{n} f_ke_k$, $P''_nf=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_ke_k$. Из (11) вытекает, что

$$\|f\|^2=\|P'_nf\|^2+\|P''_nf\|^2, \tag{12}$$

где $\|P'_nf\|^2=\sum\limits_{k=1}^{n}|f_k|^2$, $\|P''_nf\|^2=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|f_k|^2$. Значит, для любого $f\in H$ числовая последовательность $\|P''_nf\|^2$, $n=1, 2, \ldots$, монотонно не возрастая, стремится к нулю при $n\to\infty$.

Теорема 2. *Для того чтобы множество $\mathcal{M}\subset H$ (H — сепарабельное гильбертово пространство) было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и для всякого $\varepsilon>0$ существовал такой номер $n=n(\varepsilon)$, что $\|P''_nf\|\leqslant\varepsilon$ для всех $f\in\mathcal{M}$.*

Другими словами, для компактности множества $\mathcal{M}$ необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено и «почти конечномерно».

Достаточность. Пусть $\|f\|\leqslant C$ для всех $f\in\mathcal{M}$. Возьмем произвольную последовательность f^k, $k=1, 2, \ldots$, элементов из $\mathcal{M}$. Положим $\varepsilon=1$, тогда $\|P''_{n_1}f^k\|\leqslant 1$ для всех k, где $n_1=n(1)$. Так как $\|P'_{n_1}f^k\|\leqslant\|f^k\|\leqslant C$ для всех k (P'_n из (11)), то множество $P'_{n_1}f^k$, $k=1, 2, \ldots$, есть ограниченное множество n_1-мерного пространства H_{n_1}. По лемме 2 (п. 6) из него можно выделить фундаментальную подпоследовательность, а из последней — подпоследовательность $P'_{n_1}f^{1,s}$, $s=1, 2, \ldots$, обладающую свойством: $\|P'_{n_1}f^{1,s}-P'_{n_1}f^{1,p}\|\leqslant 1$ для всех s и $p\geqslant 1$. Тогда для подпоследовательности $f^{1,1}, \ldots, f^{1,s}, \ldots$ в силу (12) имеем неравенства

$$\|f^{1,s}-f^{1,p}\|^2=\|P'_{n_1}f^{1,s}-P'_{n_1}f^{1,p}\|^2+\|P''_{n_1}f^{1,s}-P''_{n_1}f^{1,p}\|^2\leqslant$$
$$\leqslant 1+(\|P''_{n_1}f^{1,s}\|+\|P''_{n_1}f^{1,p}\|)^2\leqslant 5,$$

справедливые для всех p и s.

По $\varepsilon=1/2$ возьмем число $n_2=n(1/2)$. Последовательность $P'_{n_2}f^{1,1}, \ldots, P'_{n_2}f^{1,s}, \ldots$ принадлежит H_{n_2} и ограничена; следовательно, из нее можно выделить подпоследовательность $P'_{n_2}f^{2,s}$, $s=1, 2, \ldots$, для которой $\|P'_{n_2}f^{2,s}-P'_{n_2}f^{2,p}\|\leqslant 1/2$ для всех p, s.

В силу (12) имеем $\|f^{2,s}-f^{2,p}\|^2=\|P'_{n_2}f^{2,s}-P'_{n_2}f^{2,p}\|^2+\|P''_{n_2}f^{2,s}-P''_{n_2}f^{2,p}\|^2\leqslant 1/4+4/4=5/4$ при всех s, p; и т. д. Для $\varepsilon=1/i$ найдем $n_i=n(1/i)$ и из подпоследовательности $P'_{n_i}f^{i-1,s}$, $s=1, 2, \ldots$, выделим подпоследовательность $P'_{n_i}f^{i,s}$, $s=1, 2, \ldots$, такую, что $\|P'_{n_i}f^{i,s}-P'_{n_i}f^{i,p}\|\leqslant 1/i$ при всех s, p. Для подпоследовательности $f^{i,s}$, $s=1, 2, \ldots$, имеем в силу (12) $\|f^{i,s}-f^{i,p}\|^2\leqslant 1/i^2+4/i^2=5/i^2$ при всех s, p.

Диагональная последовательность $f^{s,s}$, $s=1, 2, \ldots$, является подпоследовательностью исходной последовательности, и для нее $\|f^{p,p}-f^{s,s}\|\leqslant 5/i^2$ для всех p, $s\geqslant i$, т. е. она фундаментальна.

Необходимость. Необходимость ограниченности множества $\mathcal{M}$ доказана в лемме 1 (п. 6). Докажем необходимость второго условия теоремы.

Пусть $\mathcal{M}$ компактно, но, тем не менее, существует такое $\varepsilon_0>0$, что для всякого n $\|P''_nf^n\|\geqslant\varepsilon_0$ при некотором $f^n\in\mathcal{M}$.

Возьмем произвольно n_1, по нему найдем $f^{n_1}\in\mathcal{M}$ такой, что $\|P''_{n_1}f^{n_1}\|\geqslant\varepsilon_0$. По элементу f^{n_1} выберем такое число $n_2>n_1$, что $\|P''_{n_2}f^{n_1}\|<\varepsilon_0/2$ (это можно сделать, ибо для любого фиксированного $f\in H$ $\|P''_kf\|\to 0$ при $k\to\infty$). По n_2 выберем $f^{n_2}\in\mathcal{M}$ так, чтобы $\|P''_{n_2}f^{n_2}\|\geqslant\varepsilon_0$. По f^{n_2} находим n_3 так, чтобы $\|P''_{n_3}f^{n_2}\|<\varepsilon_0/2$, и т. д. Таким образом, мы получили последовательность f^{n_k}, $k=1, 2, \ldots$, элементов из $\mathcal{M}$, для которой выполняются неравенства

$$\left\|P''_{n_k}f^{n_k}\right\|\geqslant\varepsilon_0,\qquad \left\|P''_{n_{k+1}}f^{n_k}\right\|<\varepsilon_0/2.$$

Покажем, что эта последовательность не может содержать фундаментальной подпоследовательности. Действительно, для любых $k>s$ в силу (12) и монотонности по n функции $\|P''_nf\|$ имеем

$$\begin{aligned}\|f^{n_k}-f^{n_s}\|^2&=\|P'_{n_k}(f^{n_k}-f^{n_s})\|^2+\|P''_{n_k}(f^{n_k}-f^{n_s})\|^2\geqslant\\&\geqslant\|P''_{n_k}(f^{n_k}-f^{n_s})\|^2\geqslant\left(\|P''_{n_k}f^{n_k}\|-\|P''_{n_k}f^{n_s}\|\right)^2\geqslant\\&\geqslant\left(\|P''_{n_k}f^{n_k}\|-\|P''_{n_{s+1}}f^{n_s}\|\right)^2>(\varepsilon_0-\varepsilon_0/2)^2=\varepsilon_0^2/4.\end{aligned}$$

Следствие. Пусть $\mathcal{M}$ — множество из сепарабельного гильбертова пространства H. Рассмотрим некоторое семейство множеств $\mathcal{M}_\varepsilon\subset H$, $\varepsilon>0$, обладающих следующим свойством: для любого $f\in\mathcal{M}$ в каждом $\mathcal{M}_\varepsilon$, $\varepsilon>0$, найдется такой элемент $f'=f'(\varepsilon)$, что $\|f'-f\|\leqslant\varepsilon$. *Если для некоторой последовательности* $\varepsilon_k\to 0$ *при* $k\to\infty$, $\varepsilon_k>0$, *все множества* $\mathcal{M}_{\varepsilon_k}$ *компактны, то* $\mathcal{M}$ *компактно.*

Возьмем произвольное ε_k из этой последовательности. В силу компактности множества $\mathcal{M}_{\varepsilon_k}$ найдется такое $n=n(\varepsilon_k)$, что

$\|P''_n f\| \leqslant \varepsilon_k$ для всех $f \in \mathcal{M}_{\varepsilon_k}$. Но тогда для любого $f \in \mathcal{M}$ $\|P''_n f\| = \|P''_n(f-f') + P''_n f'\| \leqslant \|P''_n(f-f')\| + \|P''_n f'\| \leqslant \|f-f'\| + \varepsilon_k \leqslant 2\varepsilon_k$, если f' — такой элемент из $\mathcal{M}_{\varepsilon_k}$, что $\|f-f'\| \leqslant \varepsilon_k$. Так как $\varepsilon_k \to 0$, то в силу теоремы 2 множество $\mathcal{M}$ компактно.

8. **Слабая компактность.** Множество $\mathcal{M}$ из гильбертова пространства H называется *слабо компактным*, если из любой (бесконечной) последовательности его элементов можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу из H (не обязательно принадлежащему множеству $\mathcal{M}$).

Теорема 3. *Любое ограниченное подмножество гильбертова пространства слабо компактно.*

На самом деле, ограниченность множества не только достаточна, но и необходима для его слабой компактности. Мы не будем, однако, останавливаться на доказательстве необходимости, а докажем лишь достаточность ограниченности в случае сепарабельного гильбертова пространства.

Пусть e_k, $k=1, 2, \ldots$, — некоторый ортонормированный базис H, а $\mathcal{M}$ — ограниченное множество в H: $\|f\| \leqslant C$ для всех $f \in \mathcal{M}$. Возьмем произвольную последовательность f^k, $k=1, 2, \ldots$, из $\mathcal{M}$. Так как для всех k $\|f^k\| \leqslant C$, то числовая последовательность (f^k, e_1), $k=1, 2, \ldots$, ограничена: $|(f^k, e_1)| \leqslant \|f^k\| \|e_1\| \leqslant C$. Поэтому из последовательности f^k, $k=1, 2, \ldots$, можно выделить подпоследовательность $f^{1,k}$, $k=1, 2, \ldots$, для которой числовая последовательность $(f^{1,k}, e_1)$ сходится к некоторому σ_1: $(f^{1,k}, e_1) \to \sigma_1$ при $k \to \infty$. Числовая последовательность $(f^{1,k}, e_2)$ также ограничена. Значит, из последовательности $f^{1,k}$, $k=1, 2, \ldots$, можно выделить подпоследовательность $f^{2,k}$, $k=1, 2, \ldots$, для которой числовая последовательность $(f^{2,k}, e_2)$ стремится к некоторому σ_2 при $k \to \infty$, и т. д.

Покажем, что диагональная последовательность $f^{k,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, является слабо сходящейся. Прежде всего отметим, что для любого $s \geqslant 1$ $(f^{k,k}, e_s) \to \sigma_s$ при $k \to \infty$. Поэтому при любом $m \geqslant 1$

$$\left(f^{k,k}, \sum_{i=1}^{m} \sigma_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \bar{\sigma}_i (f^{k,k}, e_i) \to \sum_{i=1}^{m} |\sigma_i|^2 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Так как $\left|\left(f^{k,k}, \sum_{i=1}^{m} \sigma_i e_i\right)\right|^2 \leqslant \|f^{k,k}\|^2 \sum_{i=1}^{m} |\sigma_i|^2 \leqslant C^2 \sum_{i=1}^{m} |\sigma_i|^2$, то $\sum_{i=1}^{m} |\sigma_i|^2 \leqslant C^2$ для любого $m \geqslant 1$. Следовательно, $\sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|^2 \leqslant C^2$.

В силу леммы 1 из п. 6 § 2 ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i e_i$ сходится к некоторому элементу $f \in H$, причем $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|^2$. Покажем, что последовательность $f^{k,k}$, $k=1, 2, \ldots$, слабо сходится к f.

Пусть g — произвольный элемент из H. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем так число $s = s(\varepsilon)$, чтобы $\sum_{i=s+1}^{\infty} |g_i|^2 \leqslant \varepsilon^2$. Согласно обобщенному равенству Парсеваля — Стеклова (равенство (5′) п. 7 § 2) имеем

$$|(f^{k,k} - f,\ g)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} ((f^{k,k},\ e_i) - \sigma_i)\, \bar{g}_i \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{s} |(f^{k,k},\ e_i) - \sigma_i| \cdot |g_i| +$$
$$+ \sum_{i=s+1}^{\infty} |(f^{k,k},\ e_i)| \cdot |g_i| + \sum_{i=s+1}^{\infty} |\sigma_i| \cdot |g_i|. \tag{13}$$

При этом

$$\left(\sum_{i=s+1}^{\infty} |\sigma_i| \cdot |g_i| \right)^2 \leqslant \sum_{i=s+1}^{\infty} |\sigma_i|^2 \cdot \sum_{i=s+1}^{\infty} |g_i|^2 \leqslant \|f\|^2 \cdot \varepsilon^2,$$
$$\left(\sum_{i=s+1}^{\infty} |(f^{k,k},\ e_i)|\, |g_i| \right)^2 \leqslant \sum_{i=s+1}^{\infty} |(f^{k,k},\ e_i)|^2 \sum_{i=s+1}^{\infty} |g_i|^2 \leqslant C^2 \varepsilon^2.$$

В силу определения чисел σ_i и первое слагаемое правой части (13) может быть сделано $< \varepsilon$, если $k \geqslant k_0(\varepsilon)$ при некотором $k_0(\varepsilon)$. Поэтому $|(f^{k,k} - f,\ g)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon(C + \|f\|)$ для $k \geqslant k_0(\varepsilon)$. Теорема доказана.

9. Вполне непрерывные операторы. Пусть H — гильбертово пространство. Линейный оператор A из H в H, заданный на H, называется *вполне непрерывным*, если он переводит любое ограниченное множество в компактное множество.

Если операторы A_1 и A_2 вполне непрерывны, то при любых постоянных c_1 и c_2 оператор $c_1A_1 + c_2A_2$ вполне непрерывен. Если оператор A вполне непрерывен, а заданный на H оператор B ограничен, то операторы AB и BA вполне непрерывны.

Из леммы 1 (п. 6) вытекает, что вполне непрерывный оператор ограничен. Однако не всякий ограниченный оператор вполне непрерывен. Так, например, единичный оператор I, действующий в бесконечномерном гильбертовом пространстве, вполне непрерывным быть не может, так как он переводит некомпактное ограниченное множество — ортонормированный базис — в себя.

Конечномерный ограниченный оператор вполне непрерывен. Это следует из леммы 2 (п. 6). Следующий критерий является непосредственным обобщением этого утверждения.

Теорема 4. *Для того чтобы заданный на сепарабельном гильбертовом пространстве H линейный ограниченный оператор A из H в H был вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ можно было найти такое целое число $n=n(\varepsilon)$ и такие линейные операторы A_1 и A_2, A_1 — n-мерный, $\|A_2\|\leqslant\varepsilon$, что*

$$A=A_1+A_2. \tag{14}$$

Таким образом, вполне непрерывные операторы — это операторы «почти конечномерные».

Необходимость. В силу (11) (см. п. 7) для любого $f\in H$ и любого $n>0$ имеем разложение

$$Af=P'_nAf+P''_nAf \qquad (A=P'_nA+P''_nA). \tag{15}$$

Так как A вполне непрерывен, то по любому $\varepsilon>0$ можно найти такое $n=n(\varepsilon)$, что $\|P''_nA\|\leqslant\varepsilon$. Действительно, в силу теоремы 2 $\|P''_nAf\|=\|f\|\,\|P''_nA\,(f/\|f\|)\|\leqslant\varepsilon\|f\|$, поскольку из ограниченности множества $\{f/\|f\|\}$ следует компактность множества $\{A\,(f/\|f\|)\}$. Так как оператор P'_nA — n-мерный, то необходимость доказана.

Достаточность. Пусть f^k, $k=1, 2, \ldots,$ — произвольная ограниченная последовательность из H, $\|f^k\|\leqslant C$, $k=1, 2, \ldots$. Покажем, что из последовательности Af^k, $k=1, 2, \ldots,$ можно извлечь фундаментальную подпоследовательность. Числа $\varepsilon>0$ будем брать из множества $\{1, 1/2, \ldots, 1/i, \ldots\}$ и для $\varepsilon=1/i$ найдем $n_i=n(1/i)$ и операторы A_1^i и A_2^i такие, что $A=A_1^i+A_2^i$, A_1^i — n_i-мерный и $\|A_2^i\|\leqslant 1/i$. Тогда $\|A_1^i\|=\|A-A_2^i\|\leqslant\|A\|+\|A_2^i\|\leqslant\|A\|+1$. Множество $A_1^1f^k$, $k=1, 2, \ldots,$ — ограниченное множество n_1-мерного пространства, поэтому (лемма 2 из п. 6) из него можно выбрать фундаментальную подпоследовательность $A_1^1f^{1,k}$, $k=1, 2, \ldots$ Последовательность $f^{1,k}$, $k=1, 2, \ldots,$ при этом обладает свойством: $\|A_2^1f^{1,k}\|\leqslant\|A_2^1\|\|f^{1,k}\|\leqslant 1\cdot C$. Последовательность $A_1^2f^{1,k}$, $k=1, 2, \ldots,$ — ограниченная последовательность n_2-мерного пространства. Следовательно, существует ее фундаментальная подпоследовательность $A_1^2f^{2,k}$, $k=1, 2, \ldots$. При этом выполняется неравенство $\|A_2^2f^{2,k}\|\leqslant\|A_2^2\|\|f^{2,k}\|\leqslant\frac{1}{2}\cdot C$, и т. д.

Диагональная последовательность $f^{1,1}, f^{2,2}, \ldots,$ очевидно, обладает следующими свойствами: последовательность $A_1^if^{k,k}$, $k=1, 2, \ldots,$ — фундаментальная для любого i, так как для $k\geqslant i$ $f^{k,k}$ являются элементами последовательности $f^{i,k}$, $k=1, 2, \ldots$ Кроме того, $\|A_2^if^{k,k}\|\leqslant C/i$ для всех i. Покажем, что последовательность $Af^{k,k}$, $k=1, 2, \ldots,$ фундаментальна. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и фиксируем $i>1/\varepsilon$. Тогда в силу фундаментальности последовательности $A_1^if^{k,k}$, $k=1, 2, \ldots,$ при достаточно больших k, s имеем

$$\|Af^{k,k}-Af^{s,s}\|\leqslant\|A_1^i(f^{k,k}-f^{s,s})\|+\|A_2^i(f^{k,k}-f^{s,s})\|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon+\|A_2^if^{k,k}\|+\|A_2^if^{s,s}\|\leqslant\varepsilon+2C/i\leqslant(1+2C)\,\varepsilon.$$

Что и требовалось установить.

Из теоремы 4 вытекает, в частности, следующее предложение. *Пусть A — заданный на всем сепарабельном гильбертовом пространстве H вполне непрерывный, линейный оператор из H в H. Тогда и сопряженный к нему оператор A^* вполне непрерывен.*

Действительно, представление (14) порождает представление $A^*=A_1^*+A_2^*$, где $\|A_2^*\|=\|A_2\|\leqslant\varepsilon$. Следовательно, сформулированное утверждение будет доказано, если показать, что оператор A_1^* — конечномерный.

Пусть R_{A_1} — n-мерное подпространство пространства H, а $e_1,\ldots$ $\ldots, e_n$ — его ортонормированный базис. Тогда для любого $f\in H$ $A_1f=\sum_{i=1}^{n}(A_1f,\ e_i)\,e_i=\sum_{i=1}^{n}(f,\ A_1^*e_i)\,e_i$. Поэтому при любых f и g из H имеем

$$(A_1f,\ g)=\sum_{i=1}^{n}(f,\ A_1^*e_i)\bar{g}_i=\left(f,\ \sum_{i=1}^{n}g_iA_1^*e_i\right),$$

т. е.

$$(f,\ A_1^*g)=(A_1f,\ g)=\left(f,\ \sum_{i=1}^{n}g_iA_1^*e_i\right).$$

Следовательно, для всех $g\in H$ $A_1^*g=\sum_{i=1}^{n}g_iA_1^*e_i$. Это и означает, что $R_{A_1^*}$ есть подпространство, натянутое на элементы $A_1^*e_1,\ldots$ $\ldots, A_1^*e_n$, т. е. является конечномерным.

§ 4. Линейные уравнения в гильбертовом пространстве

Результаты этого параграфа справедливы в случае любого банахова пространства. Однако мы ограничимся рассмотрением случая лишь сепарабельного гильбертова пространства H.

1. Сжимающий линейный оператор. Заданный на H линейный оператор A из H в H называется *сжимающим*, если $\|A\|<1$.

Лемма 1. *Если A — сжимающий оператор из H в H, то существует заданный на H оператор $(I-A)^{-1}$ из H в H, причем* $\|(I-A)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|A\|}$.

Для доказательства рассмотрим уравнение

$$(I-A)\,f=g \tag{1}$$

и покажем, что при любом $g \in H$ единственным его решением является решение, представляемое сходящимся в H рядом $f = \sum_{k=0}^{\infty} A^k g$ $(A^0 = I)$.

Этот ряд сходится, поскольку пространство H полное и частичные суммы ряда $g_m = \sum_{k=0}^{m} A^k g$ образуют фундаментальную последовательность: при $p > m$

$$\|g_p - g_m\| = \|A^p g + \ldots + A^{m+1} g\| \leqslant \|A^p g\| + \ldots + \|A^{m+1} g\| \leqslant$$
$$\leqslant \|g\| (\|A\|^{m+1} + \ldots) = \|g\| \frac{\|A\|^{m+1}}{1 - \|A\|} \to 0 \text{ при } m,\ p \to \infty.$$

Элемент $f \in H$ есть решение уравнения (1), так как $(I - A) f = (g + Ag + \ldots) - (Ag + A^2 g + \ldots) = g$.

Это решение единственно. Действительно, пусть существуют два решения f_1 и f_2 уравнения (1). Тогда элемент $f = f_1 - f_2$ является решением однородного уравнения $f = Af$. Поэтому для него выполняется соотношение $\|f\| = \|Af\| \leqslant \|A\| \|f\|$. Следовательно, $f = o$, т. е. $f_1 = f_2$.

Таким образом, оператор $(I - A)^{-1}$ существует, определен на всем H, и так как $\|(I - A)^{-1} g\| = \|g + Ag + \ldots + A^m g + \ldots\| \leqslant \leqslant \|g\| (1 + \|A\| + \ldots) = \frac{\|g\|}{1 - \|A\|}$ для всех $g \in H$, то он ограничен и $\|(I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|}$. Лемма доказана.

Замечание. В предположениях леммы 1 существует также ограниченный оператор $(I - A^*)^{-1}$, поскольку $\|A^*\| = \|A\| < 1$. При этом $(I - A^*)^{-1} = [(I - A)^{-1}]^*$.

Для доказательства последнего равенства возьмем произвольные f' и $g' \in H$ и построим по ним (лемма 1) такие f и $g \in H$, что $(I - A) f = f'$, $(I - A^*) g = g'$.

Так как $f = (I - A)^{-1} f'$ и $g = (I - A^*)^{-1} g'$, то равенству $((I - A) f, g) = (f, (I - A^*) g)$ можно придать вид $(f', (I - A^*)^{-1} g') = ((I - A)^{-1} f', g')$, откуда и следует нужное нам равенство.

2. Уравнение с вполне непрерывным оператором. Рассмотрим уравнение (1) без предположения о малости нормы оператора A. Вместо этого будем считать, что оператор A вполне непрерывен.

С помощью теоремы 4 из п. 9 предыдущего параграфа уравнение (1) можно переписать в виде $(I - A_2) f - A_1 f = g$, где оператор A_1 — n-мерный, а $\|A_2\| \leqslant \varepsilon < 1$. Обозначим $(I - A_2) f$ через h. В силу леммы 1 оператор $I - A_2$ имеет заданный на H ограниченный обратный оператор $(I - A_2)^{-1}$;

$$(I - A_2) f = h, \quad f = (I - A_2)^{-1} h. \tag{2}$$

Уравнение (1) для h перепишется в виде

$$h - A_1(I - A_2)^{-1} h = g. \tag{3}$$

Пусть A^* — сопряженный к A оператор. Уравнение

$$(I - A^*) f^* = g^* \tag{1*}$$

называется *сопряженным* к уравнению (1). Из равенства $A = A_1 + A_2$ имеем $A^* = A_1^* + A_2^*$. В силу замечания к лемме 1 оператор $(I - A_2^*)$ имеет заданный на H ограниченный обратный $(I - A_2^*)^{-1} = [(I - A_2)^{-1}]^*$,

$$(I - A_2^*)^{-1} g^* = z^*, \quad g^* = (I - A_2^*) z^*. \tag{2*}$$

Уравнение (1*) можно переписать в виде

$$(I - A_2^*) f^* - A_1^* f^* = g^*.$$

Применяя к нему оператор $(I - A_2^*)^{-1}$, получим эквивалентное уравнение

$$f^* - [(I - A_2)^{-1}]^* A_1^* f^* = z^*, \tag{3*}$$

в котором оператор $[(I - A_2)^{-1}]^* A_1^*$ является сопряженным к оператору $A_1(I - A_2)^{-1}$ (в уравнении (3)).

Оператор $A_1(I - A_2)^{-1}$, очевидно, n-мерный, поэтому его матричное представление (a_{ij}) в соответствующем ортонормированном базисе e_k, $k = 1, 2, \ldots$ (подпространство, натянутое на элементы $e_1, \ldots, e_n$, совпадает с $R_{A_1(I-A_2)^{-1}}$), обладает свойством: $a_{ij} = 0$ для $i \geqslant 1$, $j \geqslant n+1$ (см. п.4 § 3), причем из формулы (5) п.4 § 3 следует, что для любого j

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \leqslant \| A_1(I - A_2)^{-1} \|^2.$$

Уравнение (3) согласно формуле (7) из п.4 § 3 можно представить в виде $\sum\limits_j h_j e_j - \sum\limits_j \sum\limits_i h_i a_{ij} e_j = \sum\limits_j g_j e_j$, эквивалентном в силу линейной независимости системы $e_1, e_2, \ldots$ алгебраической системе уравнений для коэффициентов Фурье $h_1, \ldots, h_m, \ldots$ искомого элемента h:

$$h_j - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} h_i = g_j, \quad j \leqslant n; \qquad h_j = g_j, \quad j > n.$$

Так как коэффициенты h_j для $j > n$ известны:

$$h_j = g_j, \quad j > n, \tag{4}$$

то последняя система сводится к системе алгебраических уравнений

$$h_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} h_i = g_j + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{ij} g_i, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

для определения h_j, $j \leqslant n$.

Аналогичным образом, уравнение (3*) можно эквивалентно заменить алгебраической системой для определения коэффициентов Фурье f_j^*, $j = 1, 2, \ldots$, элемента f^* через коэффициенты Фурье z_j^*, $j = 1, 2, \ldots$, элемента $z^* = (I - A_2^*)^{-1} g^*$. При этом для f_j^*, $j \leqslant n$, получим линейную алгебраическую систему

$$f_j^* - \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ji} f_i^* = z_j^*, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{5*}$$

а f_j^*, $j > n$, определяются однозначно через f_j^*, $j \leqslant n$, формулами

$$f_j^* = z_j^* + \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ji} f_i^*, \qquad j > n. \tag{4*}$$

3. Первая теорема Фредгольма. Матрицы систем (5) и (5*) являются эрмитово сопряженными. Следовательно, модули определителей этих матриц равны. Поэтому если одна из этих систем разрешима при любом свободном члене, т. е. соответствующий определитель отличен от нуля, то и другая обладает этим свойством, и решения этих систем определяются однозначно. В частности, решения соответствующих однородных систем — только нулевые. Или: если одна из однородных систем (5) или (5*) имеет лишь нулевое решение (следовательно, соответствующий определитель отличен от нуля), то тем же свойством обладает и другая; при этом системы (5) и (5*) разрешимы (однозначно) при любых свободных членах.

Тем же свойством обладают и уравнения (1) и (1*).

Действительно, пусть уравнение (1) (или (1*)) разрешимо при любом g (или g^*) из H. Или, что в силу (2) (или (2*)) то же самое уравнение (3) (или (3*)) разрешимо при любом g (или z^*) из H. В частности, оно разрешимо и для любого g (или z^*) из подпространства, натянутого на элементы $e_1, \ldots, e_n$. Следовательно, система уравнений (5) (или (5*)) разрешима при любой правой части. То есть определитель системы отличен от нуля, и однородные системы (5) и (5*) имеют только нулевые решения. Тогда в силу (4) и (4*) однородные уравнения (1) и (1*) имеют только нулевые решения.

Обратно, пусть одно из однородных уравнений (1) или (1*) имеет только нулевое решение. Тогда соответствующая однородная система (5) или (5*) имеет только нулевое решение. Следовательно, определители обеих систем отличны от нуля. То есть неоднородные системы (5) и (5*) (однозначно) разрешимы при любых свободных членах. А тогда в силу (4) и (4*) (однозначно) разрешимы при любых свободных членах из H и уравнения (1) и (1*). Значит, существуют обратные операторы $(I-A)^{-1}$ и $(I-A^*)^{-1}$, заданные на H.

Покажем, что эти операторы ограничены.

Пусть система (5) однозначно разрешима (определитель матрицы в (5) отличен от нуля) и $(h_1, \ldots, h_n)$ — ее решение. Из правила Крамера следует, что существует такая постоянная $C>0$, не зависящая от свободного члена в (5), что имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} |h_j|^2 \leqslant C^2 \sum_{j=1}^{n} \Big| g_j + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{ij} g_i \Big|^2. \tag{6}$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{n} \Big| g_j + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{ij} g_i \Big|^2 \leqslant 2 \sum_{j=1}^{n} \left(|g_j|^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} |g_i|^2 \right) \leqslant$$
$$\leqslant \|g\|^2 \left(2 + 2n \|A_1 (I-A_2)^{-1}\|^2\right) = C_1^2 \|g\|^2,$$

то

$$\sum_{j=1}^{n} |h_j|^2 \leqslant (CC_1)^2 \|g\|^2$$

и

$$\|h\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |h_j|^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty} |g_j|^2 \leqslant (1 + C^2 C_1^2) \|g\|^2 = C_2^2 \|g\|^2.$$

Поэтому согласно (2)

$$\|f\| \leqslant C_3 \|g\| \tag{7}$$

с постоянной $C_3 > 0$, не зависящей от g. Это и означает, что оператор $(I-A)^{-1}$, а значит, и оператор $(I-A^*)^{-1}$ ограничены: $\|(I-A)^{-1}\| = \|(I-A^*)^{-1}\| \leqslant C_3$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1 (первая теорема Фредгольма). *Пусть A — заданный на H вполне непрерывный линейный оператор из H в H. Если одно из уравнений (1) или (1*) имеет решение при любом свободном члене, то и второе уравнение имеет решение при любом свободном члене, причем эти решения единственны, т. е. однородные уравнения (1) ($g=o$) и (1*) ($g^*=o$) имеют только нулевые решения.*

Если одно из однородных уравнений (1) ($g=o$) или (1) ($g^*=o$) имеет только нулевое решение, то и другое имеет только нулевое решение. При этом уравнения (1) и (1*) однозначно разрешимы при любых свободных членах, т. е. существуют заданные на H*

операторы $(I-A)^{-1}$ *и* $(I-A^*)^{-1}$, *причем эти операторы ограничены.*

4. Вторая теорема Фредгольма. Заметим, что ранги матриц $B=\|b_{ij}\|$, где $b_{ij}=\delta_{ij}-a_{ij}$, $i, j=1, \ldots, n$ ($\delta_{ij}=0$ при $i\neq j$, $\delta_{ii}=1$), и $B^*=\|\bar{b}_{ji}\|$ в системах (5) и (5*) одинаковы. Поэтому однородные системы (5) и (5*) всегда имеют одинаковое число $k\leqslant n$ линейно независимых решений. Тогда в силу (2), (4) и (4*) и во множествах всех решений однородных уравнений (1) и (1*) имеется ровно по k линейно независимых.

Таким образом, доказана

Теорема 2 (вторая теорема Фредгольма). *Если однородное уравнение* (1) (*A — заданный на H вполне непрерывный оператор из H в H*) *имеет ненулевые решения, то линейно независимых среди них лишь конечное число. При этом однородное уравнение* (1*) *имеет такое же число линейно независимых решений.*

5. Третья теорема Фредгольма. Перейдем теперь к вопросу о разрешимости уравнения (1) в случае, когда однородное уравнение (1) может иметь ненулевые решения. Согласно второй теореме Фредгольма линейно независимых решений однородное уравнение (1) имеет лишь конечное число: $f^1, \ldots, f^k$. Такое же число линейно независимых решений имеет и однородное уравнение (1*): $f^{1*}, \ldots, f^{k*}$. Систему $f^1, \ldots, f^k$ (так же как и систему $f^{1*}, \ldots, f^{k*}$) можно считать ортонормированной.

Теорема 3 (третья теорема Фредгольма). *Для того чтобы уравнение* (1) *с заданным на H вполне непрерывным оператором A из H в H имело решение, необходимо и достаточно, чтобы элемент g был ортогонален всем решениям однородного уравнения* (1*).

Среди всех решений уравнения (1) *есть единственное решение f, ортогональное всем решениям однородного уравнения* (1). *Любое другое решение уравнения* (1) *представляется в виде суммы этого решения и некоторого решения однородного уравнения* (1). *Для решения f имеет место неравенство* (7) *с не зависящей от g постоянной.*

Пусть решение уравнения (1) существует, тогда в силу (2) существует решение уравнения (3), а вместе с ним и системы (5).

Пусть ранг матрицы $B=\|b_{ij}\|$, где $b_{ij}=\delta_{ij}-a_{ij}$, $i, j=1, \ldots, n$, равен $n-k$. Тогда подпространство R_{n-k} n-мерного векторного пространства, натянутое на векторы $B_i=(b_{i1}, \ldots, b_{in})$, $i=1, \ldots, n$, — столбцы матрицы B, имеет размерность $n-k$. Так как однородную систему (5*): $\sum_{i=1}^{n}\bar{b}_{ji}f_i^*=0$, $j=1, \ldots, n$, можно записать в виде $(\tilde{f}^*, B_i)=0$, $i=1, \ldots, n$, то решения однородной системы (5*) образуют k-мерное подпространство, ортогональное подпространству R_{n-k}; обозначим его через $R_{n-k}^{\perp}$.

По теореме Кронекера — Капелли для того, чтобы система (5) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы совпадали ранги матрицы B и расширенной матрицы, получающейся присоединением к B столбца свободных членов в (5), т. е. чтобы вектор свободных членов принадлежал пространству R_{n-k} или, что то же самое, был ортогонален $R_{n-k}^{\perp}$.

Учитывая, что любое решение f^* однородного уравнения (1*) имеет вид

$$f^* = f_1^* e_1 + \ldots + f_n^* e_n + f_{n+1}^* e_{n+1} + \ldots,$$

где вектор $\tilde{f}^* = (f_1^*, \ldots, f_n^*)$ — решение однородной системы (5*), а $f_j^* = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ji} f_i^*$ для $j > n$, и записывая условие ортогональности векторов $\tilde{f}^*$ и правой части в (5) следующим образом

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \left(g_j + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{ij} g_i \right) \bar{f}_j^* = \sum_{j=1}^{n} g_j \bar{f}_j^* + \sum_{i=n+1}^{\infty} g_i \bar{f}_i^* = (g, f^*),$$

получаем, что если решение неоднородного уравнения (1) существует, то элемент g должен быть ортогонален всем решениям однородного уравнения (1*).

Обратно, если элемент g ортогонален всем решениям f^* однородного уравнения (1*), то вектор с координатами $g_j + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{ij} g_i$, $j = 1, \ldots, n$, ортогонален всем решениям $\tilde{f}^*$ однородной системы (5*). Следовательно, система (5), а вместе с ней и уравнение (1) имеют решение.

Пусть f_0 — какое-либо решение неоднородного уравнения (1), а $f^1, \ldots, f^k$ — ортонормированная система решений однородного уравнения (1). Тогда элемент $f = f_0 - (f_0, f^1) f^1 - \ldots - (f_0, f^k) f^k$ — тоже решение уравнения (1), причем оно ортогонально всем решениям однородного уравнения (1). Такое решение единственно: если бы существовало еще одно такое решение $\tilde{f}$, то их разность $f - \tilde{f}$, будучи решением однородного уравнения (1), была бы ортогональна всем решениям однородного уравнения (1), в том числе и себе, т. е. $f - \tilde{f} = o$.

Пусть f' — любое решение неоднородного уравнения (1). Тогда $f' - f = f''$ есть решение однородного уравнения (1), т. е. $f' = f + f''$.

Докажем теперь неравенство (7). Пусть h — элемент из H, соответствующий согласно (2) элементу f. Это означает, что h есть решение уравнения (3), удовлетворяющее k условиям:

$$0 = (f, f^i) = ((I - A_2)^{-1} h, f^i) = (h, (I - A_2^*)^{-1} f^i), \qquad i = 1, \ldots, k. \quad (8)$$

Так как расширенная матрица системы (5) имеет тот же ранг $n-k$, что и матрица B, то некоторые k уравнений в системе (5) являются линейными комбинациями остальных $n-k$ уравнений. Следовательно, если эти k уравнений выбросить, то полученная система будет эквивалентна системе (5).

Таким образом, n-мерный вектор $(h_1, \ldots, h_n)$ является решением линейной системы n уравнений ($n-k$ уравнений из (5) и k уравнений (8)), коэффициенты которых не зависят от правой части в (5). Причем из единственности элемента f следует, что $(h_1, \ldots \ldots, h_n)$ — единственное решение этой системы, т. е. определитель полученной системы отличен от нуля. А тогда вектор $(h_1, \ldots, h_n)$ можно получить по правилу Крамера. Следовательно, для него справедливо неравенство (6), откуда немедленно следует нужное неравенство (7). Теорема доказана.

6. Собственные значения и собственные элементы вполне непрерывного оператора. Число λ называется *собственным значением* линейного оператора A, действующего из H в H, если существует такой элемент $f \in H$, что $f \neq o$ и $Af = \lambda f$. Элемент f называется в этом случае *собственным элементом* оператора A. Число $\mu = 1/\lambda$ при $\lambda \neq 0$ называется *характеристическим числом*. Так как наряду с f элемент cf при любой постоянной $c \neq 0$ тоже является собственным элементом, отвечающим собственному значению λ, то собственные элементы можно считать нормированными, например, условием $\|f\| = 1$.

Максимальное число линейно независимых собственных элементов, отвечающих данному характеристическому числу (собственному значению), называется *кратностью* этого характеристического числа собственного значения. Если характеристическому числу (собственному значению) соответствует бесконечное число линейно независимых собственных элементов, то кратность характеристического числа (собственного значения) бесконечна.

Пусть определенный на всем H оператор A вполне непрерывен. Тогда вполне непрерывен и оператор μA, где μ — произвольное комплексное число. Из теорем 1, 2 и 3 вытекают следующие утверждения.

Для того чтобы уравнение

$$f - \mu A f = g \tag{1'}$$

было разрешимо для всех $g \in H$, необходимо и достаточно, чтобы μ не было характеристическим числом оператора A (т. е. $1/\mu$ не было собственным значением). Если μ является характеристическим числом, то его кратность конечна и $\bar{\mu}$ является характеристическим числом оператора A^* той же кратности. Для разрешимости уравнения (1') в этом случае необходимо и достаточно, чтобы элемент g был ортогонален всем собственным элементам *оператора* A^*, *соответствующим собственному значению* $1/\bar{\mu}$. *При этом у уравнения* (1') *существует единственное решение, ортогональное всем собственным элементам оператора* A, *отвечающим собственному значению* $1/\mu$.

Обычно именно эти утверждения понимают под теоремами Фредгольма.

7. Четвертая теорема Фредгольма. Установим некоторые свойства характеристических чисел вполне непрерывного оператора.

Теорема 4 (четвертая теорема Фредгольма). *Для любого* $M>0$ *в круге* $\{|\mu|<M\}$ *комплексной плоскости может содержаться лишь конечное число характеристических чисел вполне непрерывного оператора, действующего из* H *в* H, *с областью определения* H *или, что то же самое, вне круга* $\{|\lambda|<1/M\}$ *может быть лишь конечное число собственных значений.*

Предположим, напротив, что в круге $\{|\mu|<M\}$ есть бесконечное число характеристических чисел $\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots, \mu_i \neq \mu_j$, $i \neq j$. Пусть e_i — какой-нибудь собственный элемент, отвечающий характеристическому числу μ_i, $i=1, 2, \ldots$

Покажем, что при любом $n \geqslant 1$ система $e_1, \ldots, e_n$ линейно независима. Для $n=1$ это утверждение очевидно. Пусть оно справедливо для $n-1$. Предположим, что $e_1, \ldots, e_n$ линейно зависимы. Тогда $e_n = c_1e_1+\ldots+c_{n-1}e_{n-1}$ при некоторых постоянных $c_1, \ldots, c_{n-1}$, не всех равных нулю. Но $Ae_n = \frac{e_n}{\mu_n} = c_1\frac{e_1}{\mu_1}+\ldots$ $\ldots+c_{n-1}\frac{e_{n-1}}{\mu_{n-1}}$, откуда $c_1\left(1-\frac{\mu_n}{\mu_1}\right)e_1+\ldots+c_{n-1}\left(1-\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}\right)e_{n-1}=o$, чего не может быть, поскольку $1-\frac{\mu_n}{\mu_k} \neq 0$, $k=1, \ldots, n-1$.

Обозначим через $\mathfrak{R}_n$ подпространство, натянутое на элементы $e_1, \ldots, e_n$. Из доказанного следует, что $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{R}_n \subset \ldots$ и $\mathfrak{R}_n \neq \mathfrak{R}_{n-1}$ ни при каком n. Поэтому для любого n найдется элемент $f_n \in \mathfrak{R}_n$, $f_n \perp \mathfrak{R}_{n-1}$, $\|f_n\|=1$. Поскольку множество $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_n, \ldots$ ограничено, а оператор A вполне непрерывен, то из множества $Af_1, \ldots, Af_n, \ldots$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Покажем, что на самом деле этого сделать нельзя, это и будет противоречием, доказывающим теорему.

Для произвольных целых чисел m и n, $m<n$, $Af_n - Af_m =$ $= \frac{1}{\mu_n}f_n + \frac{1}{\mu_n}(\mu_nAf_n - f_n) - Af_m = \frac{1}{\mu_n}f_n + \sigma_n$, где $\sigma_n \in \mathfrak{R}_{n-1}$, поскольку $Af_m \in \mathfrak{R}_m \subset \mathfrak{R}_{n-1}$ и $\mu_nAf_n - f_n = \mu_nA(c_1e_1+\ldots+c_ne_n) -$ $-(c_1e_1+\ldots+c_ne_n) = c_1\left(\frac{\mu_n}{\mu_1}-1\right)e_1+\ldots+c_{n-1}\left(\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}-1\right)e_{n-1} \in \mathfrak{R}_{n-1}$.

Поэтому $\|Af_n - Af_m\| = \left\|\frac{1}{\mu_n}f_n + \sigma_n\right\| \geqslant \frac{1}{|\mu_n|}\|f_n\| = \frac{1}{|\mu_n|} \geqslant \frac{1}{M}$, т. е. последовательность $Af_1, \ldots, Af_n, \ldots$ не может содержать фундаментальной подпоследовательности. Теорема доказана.

Из теоремы 4 вытекает, что *множество характеристических чисел вполне непрерывного оператора не более чем счетно (оно может быть и пустым!). Характеристические числа, если они существуют, можно перенумеровать в порядке неубывания модулей*

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \tag{9}$$

$|\mu_i| \leqslant |\mu_{i+1}|$, $i=1, 2, \ldots$, *причем каждое характеристическое число в последовательности* (9) *встречается столько раз, какова его кратность. Множество* (9) *может состоять из конечного числа элементов (в частности, может быть пустым) или из бесконечного числа элементов. В последнем случае*

$$|\mu_k| \to \infty \text{ при } k \to \infty. \tag{10}$$

Последовательности (9). *отвечает последовательность соответствующих собственных элементов*

$$e_1, e_2, \ldots, \tag{11}$$

являющаяся линейно независимой.

В следующем параграфе будет доказано, что для вполне непрерывного самосопряженного оператора $A \neq O$ множества (9) и (11) не пустые.

§ 5. Самосопряженные вполне непрерывные операторы

1. Собственные значения и собственные элементы самосопряженного вполне непрерывного оператора. Пусть A — линейный ограниченный самосопряженный оператор из H в H. Так как для всех f, $\|f\|=1$, $|(Af, f)| \leqslant \|A\|$, то на единичной сфере $\|f\|=1$ существуют точные верхняя и нижняя грани квадратичной формы (Af, f) оператора A: $m = \inf\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$, $M = \sup\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$, при этом $|m| \leqslant \|A\|$, $M \leqslant \|A\|$, $m \leqslant (Af, f) \leqslant M$.

Если f — произвольный отличный от нулевого элемент из H, то элемент $f/\|f\|$ принадлежит единичной сфере. Поэтому $m = \inf\limits_{f \in H} \frac{(Af, f)}{\|f\|^2}$, $M = \sup\limits_{f \in H} \frac{(Af, f)}{\|f\|^2}$, и тем самым, для всех f из H имеют место неравенства $m\|f\|^2 \leqslant (Af, f) \leqslant M\|f\|^2$.

Поскольку квадратичная форма оператора A вещественнозначная, то все его *собственные значения* (*характеристические числа*) *вещественны*: если λ — собственное значение, а f — соответствующий собственный элемент, т. е. $Af = \lambda f$, то $\lambda = (Af, f)/\|f\|^2$. Следовательно, $m \leqslant \lambda \leqslant M$.

Собственные элементы f_1 и f_2 оператора A, *отвечающие различным собственным значениям* λ_1 и λ_2, *ортогональны*. Действительно, умножая скалярно равенства $Af_1 = \lambda_1 f_1$, $Af_2 = \lambda_2 f_2$ на f_2 и f_1 соответственно, а затем вычитая их друг из друга, получим

$(Af_1, f_2) - (f_1, Af_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(f_1, f_2)$. Поскольку $(Af_1, f_2) = (f_1, Af_2)$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(f_1, f_2) = 0$.

Лемма 1. *Для того чтобы число $M = \sup\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$ было собственным значением самосопряженного ограниченного оператора A из H в H, а f_0 (считаем, что $\|f_0\| = 1$) — соответствующим собственным элементом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $(Af_0, f_0) = M$.*

Аналогично, для того чтобы число $m = \inf\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$ было собственным значением оператора A, а f_0 (считаем, что $\|f_0\| = 1$) — соответствующим собственным элементом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $(Af_0, f_0) = m$.

Если M — собственное значение, а f_0 — произвольный соответствующий ему собственный элемент оператора A, то $Af_0 = Mf_0$. Следовательно, $(Af_0, f_0) = M(f_0, f_0) = M$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть $(Af_0, f_0) = M$ для некоторого f_0, $\|f_0\| = 1$, или, что то же самое, $(Mf_0 - Af_0, f_0) = 0$. Поскольку для всех f из H $0 \leqslant M\|f\|^2 - (Af, f) = (Mf - Af, f)$, то при произвольном φ из H и любом комплексном t $(M(f_0 + t\varphi) - A(f_0 + t\varphi), f_0 + t\varphi) \geqslant 0$, т. е. $\bar{t}(Mf_0 - Af_0, \varphi) + t\overline{(Mf_0 - Af_0, \varphi)} + |t|^2(M\varphi - A\varphi, \varphi) \geqslant 0$. Полагая в этом неравенстве $t = -\sigma e^{i\alpha}$, где $\alpha = \arg(Mf_0 - Af_0, \varphi)$, а σ вещественно, получим справедливое при всех вещественных σ неравенство $-2\sigma|(Mf_0 - Af_0, \varphi)| + \sigma^2(M\varphi - A\varphi, \varphi) \geqslant 0$, из которого следует равенство $(Mf_0 - Af_0, \varphi) = 0$. Поэтому в силу произвольности φ $Mf_0 - Af_0 = 0$.

Второе утверждение леммы следует из первого, если вместо оператора A рассмотреть оператор $-A$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если оператор A из H в H является самосопряженным и вполне непрерывным, то число $M = \sup\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$ (аналогично, число $m = \inf\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$), если оно отлично от нуля, является собственным значением этого оператора.*

Пусть $M \neq 0$. Рассмотрим эрмитову билинейную форму $(Mf - Af, g)$, $f, g \in H$, и соответствующую ей квадратичную форму $(Mf - Af, f)$. Для всех f из H имеет место неравенство $(Mf - Af, f) \geqslant 0$.

Покажем, что существует такой отличный от нулевого элемент f_0, что $(Mf_0 - Af_0, f_0) = 0$. Тогда утверждение леммы 2 будет следовать из леммы 1.

Предположим, что такого элемента f_0 не существует. Тогда $(Mf - Af, f)$, $f \in H$, может обратиться в нуль лишь при $f = o$. Поэтому билинейная форма $(Mf - Af, g)$ может быть взята в качестве нового скалярного произведения в H. Значит, для любых f и g из H имеет место неравенство Буняковского

$$|(Mf - Af, g)|^2 \leqslant (Mf - Af, f)(Mg - Ag, g). \qquad (1)$$

Из определения M, как точной верхней грани квадратичной формы (Af, f) на единичной сфере $\|f\|=1$, вытекает, что существует последовательность $f_1, f_2, \ldots, \|f_i\|=1, i=1, 2, \ldots$, для которой $(Af_n, f_n) \to M$, или

$$(Mf_n - Af_n, f_n) \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{2}$$

Полагая в неравенстве (1) $f=f_n$, $g=Mf_n-Af_n$, получим $\|Mf_n - Af_n\|^4 \leqslant (Mf_n - Af_n, f_n)(M^2f_n - 2MAf_n + A^2f_n, Mf_n - Af_n) \leqslant (Mf_n - Af_n, f_n)(|M|+\|A\|)^3$. Из соотношения (2) поэтому следует, что последовательность $Mf_n - Af_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку оператор A вполне непрерывен, а последовательность $f_1, f_2, \ldots$ ограничена ($\|f_i\|=1$), то последовательность $Af_1, Af_2, \ldots$ компактна. Значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность; будем считать, что она совпадает с $Af_1, Af_2, \ldots$ Тогда последовательность $Mf_1, Mf_2, \ldots$, а вместе с нею ($M \neq 0$) и последовательность $f_1, f_2, \ldots$ тоже сходится. Если обозначить через f_0 предел последовательности $f_1, f_2, \ldots$, то очевидно, что $\|f_0\|=1$, и в силу (2) $(Mf_0 - Af_0, f_0)=0$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Для всякого отличного от нулевого вполне непрерывного самосопряженного оператора A из H в H (H — гильбертово пространство) одно из чисел $\pm 1/\|A\| = \pm 1/\sup\limits_{\|f\|=1}|(Af, f)|$ является первым (наименьшим по абсолютной величине) характеристическим числом μ_1, причем $\mu_1 = 1/M$, если $M > |m|$, где $M = \sup\limits_{\|f\|=1}(Af, f)$, $m = \inf\limits_{\|f\|=1}(Af, f)$, $\mu_1 = 1/m$, если $M < |m|$. Если $M=|m|$, то оба числа $1/M$ и $1/m$ являются наименьшими по модулю характеристическими числами оператора A.*

Все элементы f_0, для которых имеет место равенство $(Af_0, f_0)/\|f_0\|^2 = M$ в случае $M > |m|$, или равенство $(Af_0, f_0)/\|f_0\|^2 = m$ в случае $M < |m|$, и только они являются собственными элементами, соответствующими μ_1. Если $M=|m|$, то собственными элементами, соответствующими характеристическому числу $1/M$, являются те и только те элементы f_0, для которых $(Af_0, f_0)/\|f_0\|^2 = M$, а собственными элементами, соответствующими характеристическому числу $1/m$, те и только те элементы f_0, для которых $(Af_0, f_0)/\|f_0\|^2 = m$.

В частности, если оператор A неотрицательный, то

$$\mu_1 = \frac{1}{\|A\|} = \frac{1}{\sup\limits_{\|f\|=1}(Af, f)} = \inf_{\|f\|=1}\frac{1}{(Af, f)} = \inf_{f \in H}\frac{\|f\|^2}{(Af, f)},$$

и соответствующими μ_1 собственными элементами, нормированными условием $\|f\|=1$, являются те и только те элементы f_0, $\|f_0\|=1$, на которых квадратичная форма (Af, f) на единичной сфере достигает своей верхней грани.

Для доказательства теоремы 1 в силу лемм 1 и 2 достаточно показать, что $\|A\|=N$, где $N=\sup\limits_{\|f\|=1}|(Af,\ f)|=\max(|m|,\ M)$. Как показано выше, $N\leqslant\|A\|$, поэтому нам остается установить справедливость обратного неравенства $\|A\|\leqslant N$.

Поскольку для любого $g\in H$ $|(Ag,\ g)|\leqslant N\|g\|^2$ и поскольку

$$(A(f_1\pm f_2),\ f_1\pm f_2)=(Af_1,\ f_1)+(Af_2,\ f_2)\pm 2\operatorname{Re}(Af_1,\ f_2),$$

то для любых f_1 и f_2 из H

$$|\operatorname{Re}(Af_1,\ f_2)|=\frac{1}{4}|(A(f_1+f_2),\ f_1+f_2)-(A(f_1-f_2),\ f_1-f_2)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{4}(|(A(f_1+f_2),\ f_1+f_2)|+|(A(f_1-f_2),\ f_1-f_2)|)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{N}{4}(\|f_1+f_2\|^2+\|f_1-f_2\|^2)=\frac{N}{2}(\|f_1\|^2+\|f_2\|^2).$$

Полагая в этом неравенстве $f_1=\sqrt{N}f,\ f_2=\frac{1}{\sqrt{N}}Af$, где f — произвольный элемент из H, получим $\|Af\|^2\leqslant\frac{N}{2}\left(N\|f\|^2+\frac{1}{N}\|Af\|^2\right)$, откуда вытекает, что $\|Af\|\leqslant N\|f\|$. Поэтому $\|A\|\leqslant N$. Теорема доказана.

Таким образом, множества

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\tag{3}$$
$$e_1,\ e_2,\ \ldots\tag{4}$$

характеристических чисел и соответствующих им собственных элементов для самосопряженного вполне непрерывного оператора $A\neq O$ непустые. При этом все характеристические числа вещественны, а систему собственных элементов можно считать ортонормированной, поскольку собственные элементы, отвечающие различным характеристическим числам, ортогональны, а конечное число линейно независимых собственных элементов, отвечающих одному характеристическому числу, можно ортонормировать.

Пусть A — вполне непрерывный самосопряженный оператор из H в H. Обозначим через H_n подпространство пространства H, состоящее из элементов f, ортогональных первым n собственным элементам оператора A: $(f,\ e_i)=0,\ i=1,\ \ldots,\ n$.

Для любого f из H_n элемент Af тоже принадлежит H_n, так как $(Af,\ e_i)=(f,\ Ae_i)=\frac{1}{\mu_i}(f,\ e_i)=0$ при всех $i=1,\ \ldots,\ n$. Это означает, что оператор A можно рассматривать как оператор из гильбертова пространства H_n в H_n. При этом он, конечно, является самосопряженным и вполне непрерывным. Его характеристические числа и соответствующие собственные элементы совпадают с характеристическими числами $\mu_{n+1},\ \mu_{n+2},\ \ldots$ и соответствующими собственными элементами $e_{n+1},\ e_{n+2},\ \ldots$ оператора A

из H в H. Поэтому на основании теоремы 1, примененной к оператору A из H_n в H_n, имеем

$$|\mu_{n+1}| = \frac{1}{\sup\limits_{\substack{\|f\|=1 \\ f\in H_n}} |(Af, f)|} = \frac{1}{\sup\limits_{\substack{\|f\|=1 \\ (f, e_i)=0 \\ i=1,\ldots,n}} |(Af, f)|}.$$

Если оператор A неотрицателен, то

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{\sup\limits_{\substack{\|f\|=1 \\ (f, e_i)=0, \\ i=1,\ldots,n}} (Af, f)} = \inf_{\substack{(f, e_i)=0 \\ i=1,\ldots,n}} \frac{\|f\|^2}{(Af, f)}. \tag{5}$$

2. Разложение в ряд Фурье по собственным элементам вполне непрерывного самосопряженного оператора. Рассмотрим ортонормированную систему (4), состоящую из собственных элементов вполне непрерывного самосопряженного оператора A из H в H, $A \neq 0$. Пусть P_n — оператор ортогонального проектирования на подпространство, натянутое на элементы $e_1, \ldots, e_n$, и оператор $A_n = A - AP_n = A(I - P_n)$.

Оператор A_n — линейный и ограниченный: $\|A_n\| \leqslant \|A\|$.

Оператор P_n перестановочен с оператором A, поскольку для любого $f \in H$

$$\begin{aligned} AP_nf &= A(f_1e_1 + \ldots + f_ne_n) = f_1Ae_1 + \ldots + f_nAe_n = \\ &= \frac{f_1}{\mu_1}e_1 + \ldots + \frac{f_n}{\mu_n}e_n = \left(f, \frac{e_1}{\mu_1}\right)e_1 + \ldots + \left(f, \frac{e_n}{\mu_n}\right)e_n = \\ &= (f, Ae_1)e_1 + \ldots + (f, Ae_n)e_n = (Af, e_1)e_1 + \ldots + (Af, e_n)e_n = P_nAf. \end{aligned}$$

Так как операторы A и P_n — перестановочные и самосопряженные, то AP_n — самосопряженный: $(AP_n)^* = P_n^*A^* = P_nA = AP_n$. Поэтому оператор A_n — тоже самосопряженный.

Кроме того, он вполне непрерывный как сумма двух вполне непрерывных операторов: оператора A и конечномерного оператора $AP_n = P_nA$.

Для любого $f \in H$

$$A_nf = Af - \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{\mu_k} e_k. \tag{6}$$

Числа $\mu_{n+1}, \ldots$ и элементы $e_{n+1}, \ldots$ являются характеристическими числами и соответствующими собственными элементами оператора A_n. Действительно, так как $(e_p, e_k) = 0$ при $k \neq p$, то в силу (6) для $p \geqslant n+1$ $A_ne_p = Ae_p - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(e_p, e_k)}{\mu_k} e_k = \frac{e_p}{\mu_p}$.

Других характеристических чисел оператор A_n не имеет. Пусть, напротив, μ и e — характеристическое число и собственный элемент, $\mu A_n e = e$, $\mu \neq \mu_p$, $p \geqslant n+1$. Умножая скалярно это равенство на e_k, $k \leqslant n$, получим $(e, e_k) = \mu (A_n e, e_k) = \mu (e, A_n e_k) = 0$, поскольку $A_n e_k = o$ для $k \leqslant n$. Поэтому в силу (6) $A_n e = Ae$, т. е. $\mu Ae = e$. Таким образом, μ есть характеристическое число, а e — собственный элемент оператора A. Так как все характеристические числа оператора A находятся в последовательности (3) и так как $e \perp e_k$, $k = 1, \ldots, n$, то μ совпадает с одним из μ_k, $k \geqslant n+1$.

Так как μ_{n+1} — наименьшее по абсолютной величине характеристическое число оператора A_n, то на основании теоремы 1

$$|\mu_{n+1}| = \frac{1}{\|A_n\|}. \tag{7}$$

Если последовательности (3) и (4) конечны и состоят из m элементов, то оператор $A_m = O$ в силу теоремы 1, поскольку он не имеет характеристических чисел. В этом случае $A = AP_m$ — конечномерный оператор, т. е. для любого $f \in H$

$$Af = \sum_{k=1}^{m} \frac{f_k}{\mu_k} e_k = \sum_{k=1}^{m} (Af)_k e_k. \tag{8}$$

Пусть теперь последовательности (3) и (4) бесконечные. Из (7) и соотношения (10) предыдущего параграфа вытекает, что $\|A_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, для любого $f \in H$ $\|A_n f\| \leqslant \leqslant \|A_n\| \|f\| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. для любого $f \in H$

$$Af = \lim_{n \to \infty} AP_n f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\mu_k} e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (Af)_k e_k. \tag{9}$$

Таким образом, доказана следующая важная

Теорема 2 (теорема Гильберта — Шмидта). *Если A — самосопряженный вполне непрерывный оператор из H в H, а f — произвольный элемент из H, то элемент Af разлагается в ряд Фурье* (9) (*или* (8)) *по системе* (4).

Ниже нам потребуются некоторые следствия из теоремы Гильберта — Шмидта.

Согласно лемме 2 п. 6 § 2, ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$ произвольного элемента $f \in H$ по ортонормированной системе (4) сходится в H. Следовательно, $A \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k A e_k$. Но $f_k A e_k = f_k \frac{e_k}{\mu_k} = (f, Ae_k) e_k = (Af, e_k) e_k = (Af)_k e_k$. Поэтому в силу (9) имеем

$$A\left(f - \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k\right) = o. \tag{10}$$

Если оператор A имеет обратный A^{-1}, то из равенства (10) вытекает, что

$$f=\sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$$

для любого элемента $f \in H$. Это означает, что в этом случае система (4) есть ортонормированный базис пространства H. Таким образом, установлено

Следствие 1. *Если вполне непрерывный самосопряженный оператор A из H в H имеет обратный, то система* (4) *является ортонормированным базисом пространства H.*

В общем случае из равенства (10) вытекает лишь, что для любого элемента $f \in H$ существует такой элемент $e_0 \in H$, $Ae_0=0$, что

$$f=e_0+\sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k. \tag{11}$$

Множество $\mathfrak{N}$ элементов $g \in H$, для которых $Ag=0$ есть подпространство пространства H; любой отличный от нулевого элемент из $\mathfrak{N}$ является собственным элементом оператора A, отвечающим нулевому собственному значению. Если предположить, что пространство H сепарабельно, то в $\mathfrak{N}$ можно построить счетный ортонормированный базис e'_1, e'_2, ... (состоящий из собственных элементов оператора A, отвечающих нулевому собственному значению). Тогда из (11) следует, что для любого $f \in H$ имеет место разложение

$$f=\sum f'_k e'_k+\sum f_k e_k,$$

где $f'_k=(f, e'_k)$.

Таким образом, установлено

Следствие 2. *Для всякого вполне непрерывного самосопряженного оператора A из сепарабельного (гильбертова) пространства H в H существует ортонормированный базис пространства H, элементами которого являются собственные элементы оператора A.*

Глава III

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В предыдущей главе были введены понятия банахова и гильбертова пространств. Сами эти понятия опираются только на соотношения между элементами: достаточно ввести удовлетворяющие определенным аксиомам операции сложения элементов и умножения их на числа, норму или соответственно скалярное произведение. При этом совершенно не существенна природа элементов этих пространств, и общие утверждения, полученные в предыдущей главе, применимы ко всем пространствам, из каких бы элементов они не состояли. Однако для теории дифференциальных уравнений этих общих свойств не достаточно. При изучении дифференциальных уравнений в частных производных естественно рассматривать функциональные пространства, т. е. пространства, элементами которых являются функции n, в нашем случае вещественных, переменных. В настоящей главе будут введены некоторые функциональные пространства и получены такие утверждения о взаимоотношениях между ними, которые позволят из одних свойств элементов устанавливать другие их свойства.

§ 1. Пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций

1. Нормированные пространства $C(\bar{Q})$ и $C^k(\bar{Q})$. Рассмотрим множество $C(\bar{Q})$ всех непрерывных в $\bar{Q}$ (Q — ограниченная область пространства R_n) функций. Прежде всего отметим, что это множество является линейным пространством. Непосредственно проверяется, что заданный на $C(\bar{Q})$ функционал $\max\limits_{x \in \bar{Q}} |f(x)|$ удовлетворяет всем аксиомам нормы (п. 2 § 2 гл. II): $\max\limits_{x \in \bar{Q}} |cf| = |c| \max\limits_{x \in \bar{Q}} |f|$; $|f_1(x)+f_2(x)| \leqslant |f_1(x)|+|f_2(x)|$ для всех $x \in \bar{Q}$, поэтому $\max\limits_{x \in \bar{Q}} |f_1(x)+f_2(x)| \leqslant \max\limits_{x \in \bar{Q}} |f_1(x)| + \max\limits_{x \in \bar{Q}} |f_2(x)|$; $\max\limits_{x \in \bar{Q}} |f(x)| \geqslant 0$ и $\max\limits_{x \in \bar{Q}} |f(x)| = 0$ только при $f(x) \equiv 0$. Следовательно, в $C(\bar{Q})$ можно ввести норму

$$\|f\|_{C(\bar{Q})} = \max_{x \in \bar{Q}} |f(x)|. \tag{1}$$

Сходимость по норме (1) есть равномерная сходимость в $\bar{Q}$.

Пространство $C(\bar{Q})$ с нормой (1) банахово, поскольку произвольная фундаментальная в норме (1) последовательность функций из $C(\bar{Q})$ в силу критерия Коши равномерно сходится к некоторой функции из $C(\bar{Q})$.

Так как любая непрерывная в $\bar{Q}$ функция по теореме Вейерштрасса является пределом некоторой равномерно сходящейся в $\bar{Q}$ (т. е. в норме (1)) последовательности многочленов, то множество всех многочленов всюду плотно в $C(\bar{Q})$. Но произвольный многочлен в свою очередь может быть представлен как предел равномерно сходящейся в $\bar{Q}$ последовательности многочленов с рациональными коэффициентами. Поэтому в $C(\bar{Q})$ всюду плотно и счетное множество всех многочленов с рациональными коэффициентами. Значит, пространство $C(\bar{Q})$ сепарабельно.

Рассмотрим в $C(\bar{Q})$ множество $\mathring{C}(\bar{Q})$, состоящее из всех функций, обращающихся в нуль на границе ∂Q области Q. Очевидно, $\mathring{C}(\bar{Q})$ — линейное многообразие в $C(\bar{Q})$. Это многообразие замкнуто (в норме (1)), поскольку предел последовательности функций из $\mathring{C}(\bar{Q})$, равномерно сходящейся в $\bar{Q}$, есть функция из $\mathring{C}(\bar{Q})$. Следовательно, $\mathring{C}(\bar{Q})$ — подпространство пространства $C(\bar{Q})$.

Рассмотрим теперь в $C(\bar{Q})$ подмножества $C^k(\bar{Q})$, $k = 1, 2, \ldots$, состоящие из всех функций, имеющих в области Q все производные до порядка k включительно, непрерывные в $\bar{Q}$. Множество $C^k(\bar{Q})$ есть линейное пространство. Кроме того, в $C_k(\bar{Q})$ можно ввести норму

$$\|f\|_{C^k(\bar{Q})} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \max_{x \in \bar{Q}} |D^\alpha f(x)|. \tag{2}$$

Сходимость по этой норме есть равномерная в $\bar{Q}$ сходимость функций и всех их производных до k-го порядка включительно. Очевидно, пространство $C^k(\bar{Q})$ (с нормой (2)) банахово.

Пусть $\omega_h(|x-y|)$ — некоторое ядро усреднения (см. гл. I, введение), а $f \in C(\bar{Q})$. Рассмотрим при $h > 0$ функцию

$$f_h(x) = \int_Q f(y)\, \omega_h(|x-y|)\, dy, \qquad x \in R_n. \tag{3}$$

Функции $f_h(x)$, $h > 0$, называются *средними функциями* для функции $f(x)$ (*усредненными функциями* для $f(x)$). Из свойства a) ядра усреднения и теоремы 7 п. 7 § 1 гл. II следует, что при любом $h > 0$ $f_h(x) \in C^\infty(R_n)$. Кроме того, $f_h(x) \equiv 0$ вне Q^h (Q^h — объединение по всем $x^0 \in Q$ шаров $\{|x - x^0| < h\}$).

Покажем, что *если* $f \in C(\bar{Q})$, *то* $f_h(x)$ *стремится к* $f(x)$ *при* $h \to 0$ *равномерно на любой строго внутренней подобласти* Q' *области* Q, $Q' \Subset Q$.

Действительно, при достаточно малых h (меньших расстояния между $\partial Q'$ и ∂Q) из свойств б), в) и а) ядра усреднения имеем при $x \in Q'$

$$|f_h(x) - f(x)| =$$
$$= \left| \int_{|x-y|<h} f(y)\,\omega_h(|x-y|)\,dy - f(x) \int_{|x-y|<h} \omega_h(|x-y|)\,dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{|x-y|\leqslant h} |f(y) - f(x)| \int_{|x-y|<h} \omega_h(|x-y|)\,dy = \max_{|x-y|\leqslant h} |f(y) - f(x)|.$$

Следовательно, из равномерной непрерывности $f(x)$ в Q получаем, что

$$\|f_h - f\|_{C(\bar{Q}')} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Так как для $f \in C^k(\bar{Q})$ при $x \in Q'$ и достаточно малых h

$$D_x^\alpha f_h(x) = \int_Q f(y)\, D_x^\alpha \omega_h(|x-y|)\,dy =$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \int_Q f(y)\, D_y^\alpha \omega_h(|x-y|)\,dy =$$
$$= \int_Q D_y^\alpha f(y) \cdot \omega_h(|x-y|)\,dy, \qquad |\alpha| \leqslant k,$$

то из доказанного утверждения имеем:

если $f \in C^k(\bar{Q})$, *то для любой* $Q' \Subset Q$

$$\|f_h - f\|_{C^k(\bar{Q}')} \to 0 \quad \textit{при} \quad h \to 0.$$

2. Формулы интегрирования по частям. Пусть в области Q (граница $\partial Q \in C^1$) задан вектор $A(x) = (A_1(x), \ldots, A_n(x))$, координаты которого $A_i(x) \in C(\bar{Q}) \cap C^1(Q)$, $i = 1, \ldots, n$. Из курса Анализа известно, что если функция $\operatorname{div} A(x) \equiv \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$ непрерывна в $\bar{Q}$ или даже интегрируема по Q, то имеет место следующая *формула Остроградского:*

$$\int_Q \operatorname{div} A(x)\,dx = \int_{\partial Q} A(x)\, n(x)\,dS, \tag{4}$$

где n — единичный вектор внешней по отношению к области Q нормали к границе ∂Q.

Пусть $u(x) \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$, $v \in C^1(\bar{Q})$, а функция $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ интегрируема по Q. Так как $v\Delta u = v \cdot \operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}(v\nabla u) - \nabla u \nabla v$

($\nabla u \nabla v = u_{x_1}v_{x_1} + \ldots + u_{x_n}v_{x_n}$), то согласно формуле Остроградского (4) имеем

$$\int\limits_Q v\Delta u\,dx = \int\limits_{\partial Q} v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS - \int\limits_Q \nabla u \nabla v\,dx, \tag{5}$$

поскольку $\nabla u\cdot n\Big|_{\partial Q} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q}$.

Если обе функции u и v принадлежат $C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$, а функции Δu и Δv интегрируемы по Q, то наряду с формулой (5) имеет место и формула

$$\int\limits_Q u\Delta v\,dx = \int\limits_{\partial Q} u\frac{\partial v}{\partial n}\,dS - \int\limits_Q \nabla v \nabla u\,dx. \tag{5'}$$

Вычитая почленно из (5), (5′), получим равенство

$$\int\limits_Q (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx = \int\limits_{\partial Q}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) называются *формулами Грина.*

§ 2. Пространства интегрируемых функций

Как было показано, множество непрерывных в $\bar{Q}$ функций является банаховым пространством с нормой $\max\limits_{x\in\bar{Q}}|f(x)|$. Однако часто бывает удобно рассматривать на этом множестве интегральные нормы, например, $\int\limits_Q|f(x)|\,dx$ или $\left(\int\limits_Q|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$ (нетрудно проверить, что при этом выполнены все аксиомы нормы). Рассмотрим пространство с нормой $\int\limits_Q|f(x)|\,dx$, элементами которого являются непрерывные в $\bar{Q}$ функции. Это нормированное пространство не является полным. Действительно, из определения интеграла Лебега следует, что для любой интегрируемой по области Q функции $f(x)$ существует сходящаяся к ней в этой норме последовательность непрерывных в $\bar{Q}$ функций $f_m(x)$: $\int\limits_Q|f_m(x) - f(x)|\,dx \to 0$ при $m\to\infty$. Это означает, что если мы хотим получить полное нормированное (банахово) пространство с нормой $\int\limits_Q|f(x)|\,dx$, в котором содержались бы все непрерывные (или даже бесконечно дифференцируемые) в $\bar{Q}$ функции, то мы должны включить в него все интегрируемые по Q функции. Но тогда функционал $\int\limits_Q|f(x)|\,dx$ перестает быть нормой — он не удовлетворяет последней аксиоме (см. п. 2 § 2 гл. II) нормы, так как $\int\limits_Q |f(x)|\,dx=0$ для всех $f(x)=0$ п. в. в Q. Однако в силу теоремы 2 п. 4, § 1, гл. II $\int\limits_Q |f(x)|\,dx=0$ только для функций $f(x)$, равных нулю п. в. в Q. Следовательно, для того чтобы последняя аксиома нормы выполнялась, мы должны *отождествить* все функции, равные п. в. в Q. Для этого можно либо считать элементами пространства классы функций, в каждый из которых входят все функции, равные п. в., либо, что на самом деле то же самое, ввести новое определение равенства функций: *функции равны, если их значения совпадают почти всюду.* Поскольку удобнее иметь дело с функциями, а не с классами функций, то мы будем далее считать равными функции, значения которых совпадают для почти всех (а не обязательно для всех) x из Q. Так как при таком определении равенства функций функции не меняются при произвольном изменении их значений на любом фиксированном множестве меры нуль, то в этом случае естественно считать, что функции заданы почти всюду. При этом если функция f почти всюду равна нулю, то мы ее считаем нулевой функцией. Аналогично, если функция почти всюду совпадает с всюду определенной непрерывной функцией, то мы будем ее считать непрерывной. Если она почти всюду совпадает с всюду определенной непрерывно дифференцируемой до порядка k функцией, то мы будем считать ее непрерывно дифференцируемой до порядка k. В соответствии с введенным понятием равенства будем считать, что и элементами пространства $C^k(\bar{Q})$, $k\geqslant 0$, являются непрерывно дифференцируемые до порядка k функции, определенные почти всюду в Q. То есть функция $f(x)$ принадлежит $C^k(\bar{Q})$, если она почти всюду совпадает с функцией, определенной во всех точках $\bar{Q}$ и непрерывной вместе со всеми производными до порядка k включительно в $\bar{Q}$. При этом под значением в некоторой точке элемента пространства $C(\bar{Q})$ (и, тем более, функции из $C^k(\bar{Q})$) будем понимать значение в этой точке всюду определенной непрерывной функции, совпадающей п. в. в Q с этим элементом.

1. Пространства $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$. Рассмотрим множество комплекснозначных интегрируемых по Q функций. Очевидно, что оно является (и в новом понимании равенства функций) линейным пространством, и функционал $\int\limits_Q |f(x)|\,dx$ удовлетворяет всем аксиомам нормы. Будем обозначать это линейное нормированное пространство через $L_1(Q)$;

$$\|f\|_{L_1(Q)}=\int\limits_Q |f(x)|\,dx. \qquad (1)$$

Множество измеримых комплекснозначных функций (напомним, что функции, совпадающие п. в., отождествляются), квадрат модуля которых интегрируем по области Q, обозначим через $L_2(Q)$. Покажем, что $L_2(Q)$ — линейное пространство. Пусть c_1 и c_2 — произвольные числа, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — произвольные функции из $L_2(Q)$. Так как измеримая функция $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$ удовлетворяет неравенству $|c_1f_1(x)+c_2f_2(x)|^2 \leqslant 2|c_1|^2|f_1(x)|^2+2|c_2|^2|f_2(x)|^2$, то по теореме 5 п. 6 § 1 гл. II функция $|c_1f_1(x)+c_2f_2(x)|^2$ интегрируема. Значит, $c_1f_1(x)+c_2f_2(x) \in L_2(Q)$.

Функция $f_1(x)f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ принадлежат $L_2(Q)$, интегрируема, поскольку она измерима и $|f_1(x)f_2(x)| \leqslant \leqslant \frac{1}{2}(|f_1(x)|^2+|f_2(x)|^2)$. Поэтому паре функций f_1 и f_2 можно поставить в соответствие число

$$(f_1, f_2)_{L_2(Q)} = \int_Q f_1(x)\overline{f_2(x)}\,dx. \tag{2}$$

Легко проверить, что формулой (2) определяется скалярное произведение в $L_2(Q)$. Порожденная этим скалярным произведением норма имеет вид

$$\|f\|_{L_2(Q)} = \left(\int_Q |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Так как $|f| = |f|\cdot 1 \leqslant \frac{1}{2}(|f|^2+1)$, то в случае ограниченной области Q функция $f(x)$, принадлежащая $L_2(Q)$, принадлежит и $L_1(Q)$. Значит, для ограниченной области $L_2(Q) \subset L_1(Q)$. Очевидно также, что в случае ограниченной области Q $C(\overline{Q}) \subset \subset L_2(Q) \subset L_1(Q)$.

Теорема 1. *$L_1(Q)$ есть банахово пространство с нормой* (1), *$L_2(Q)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением* (2).

Для доказательства теоремы достаточно установить полноту пространств $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$ в соответствующих нормах.

1. Пусть последовательность f_k, $k=1, 2, \ldots$, функций из $L_1(Q)$ является фундаментальной в $L_1(Q)$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что $\|f_k - f_m\|_{L_1(Q)} < \varepsilon$ для всех k, $m \geqslant N(\varepsilon)$. Возьмем $\varepsilon = 2^{-k}$ при некотором целом k и обозначим через N_k число $N(2^{-k})$, и пусть при этом $N_k \leqslant N_{k+1}$. Тогда при $m \geqslant N_k$

$$\|f_{N_k} - f_m\|_{L_1(Q)} < 2^{-k}, \tag{4}$$

и, в частности, $\|f_{N_k} - f_{N_{k+1}}\|_{L_1(Q)} < 2^{-k}$. Поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|f_{N_k} - f_{N_{k+1}}\|_{L_1(Q)}$ сходится. Значит, на основании следствия из п. 6 § 1 гл. II п. в. в Q к некоторой функции из $L_1(Q)$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f_{N_{k+1}} - f_{N_k})$ и, тем самым, п. в. в Q при $k \to \infty$ сходится к некоторой функции $f \in L_1(Q)$ последовательность f_{N_k}, $k=1, 2, \ldots$:

$$f_{N_k}(x) \to f(x), \qquad k \to \infty.$$

Покажем, что $\|f_m - f\|_{L_1(Q)} \to 0$ при $m \to \infty$. Действительно, из (4) вытекает, что для $m \geq N_r$ и $k \geq r$

$$\|f_m - f_{N_k}\|_{L_1(Q)} \leq \|f_m - f_{N_r}\|_{L_1(Q)} + \|f_{N_r} - f_{N_k}\|_{L_1(Q)} \leq 2 \cdot 2^{-r} = 2^{1-r}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$ на основании леммы Фату (теорема 4 п. 6 § 1 гл. II), получим неравенство $\|f_m - f\|_{L_1(Q)} \leq 2^{1-r}$, справедливое для всех $m \geq N_r$. При достаточно больших m число r может быть взято достаточно большим, поэтому $\|f_m - f\|_{L_1(Q)} \to 0$ при $m \to \infty$. Итак, $L_1(Q)$ — полное пространство.

2. Пусть теперь функции последовательности $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, принадлежат $L_2(Q)$, и последовательность является фундаментальной в норме $L_2(Q)$. Так же как и при доказательстве первой части теоремы, найдем такую числовую последовательность $N_1 \leq N_2 \leq \ldots \leq N_k \leq \ldots$, что

$$\|f_{N_k} - f_m\|_{L_2(Q)} < 2^{-k} \tag{4'}$$

для всех $m \geq N_k$, и в частности, $\|f_{N_{k+1}} - f_{N_k}\|_{L_2(Q)} < 2^{-k}$. Из неравенства Буняковского следует, что $\|f_{N_{k+1}} - f_{N_k}\|_{L_1(Q)} \leq \sqrt{|Q|}\,\|f_{N_{k+1}} - f_{N_k}\|_{L_2(Q)} < \sqrt{|Q|}\,2^{-k}$, поэтому существует функция $f(x) \in L_1(Q)$ такая, что $f_{N_k}(x) \to f(x)$ при $k \to \infty$ п. в. в Q. А значит, и $|f_{N_k}|^2 \to |f|^2$ при $k \to \infty$ п. в. в Q. Кроме того,

$$\|f_{N_k}\|_{L_2(Q)} \leq \|f_{N_k} - f_{N_1}\|_{L_2(Q)} + \|f_{N_1}\|_{L_2(Q)} \leq \frac{1}{2} + \|f_{N_1}\|_{L_2(Q)}.$$

Поэтому на основании леммы Фату $f(x) \in L_2(Q)$.

Покажем, что $\|f_m - f\|_{L_2(Q)} \to 0$ при $m \to \infty$. Для $m \geq N_r$ и $k \geq r$ имеет место вытекающее из (4') неравенство

$$\|f_m - f_{N_k}\|_{L_2(Q)} \leq \|f_m - f_{N_r}\|_{L_2(Q)} + \|f_{N_r} - f_{N_k}\|_{L_2(Q)} \leq 2^{1-r}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, снова на основании леммы Фату получим неравенство $\|f_m - f\|_{L_2(Q)} \leq 2^{1-r}$, справедливое для всех $m \geq N_r$. А так как число r можно взять достаточно большим, если m достаточно большое, то получаем, что $\|f_m - f\|_{L_2(Q)} \to 0$ при $m \to \infty$. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что при доказательстве теоремы 1 одновременно установлена справедливость следующего утверждения. *Из всякой последовательности функций, сходящейся к некоторой функции f в $L_1(Q)$ или в $L_2(Q)$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к f почти всюду.*

2. Плотность множества $C(\bar{Q})$ в $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$. Сепарабельность пространств $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$. Непрерывность в среднем элементов $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$.

Теорема 2. *Множество непрерывных в $\bar{Q}$ функций всюду плотно в $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$.*

1. Пусть функция $f(x) \in L_1(Q)$. Не умаляя общности, можно считать ее вещественнозначной и неотрицательной. Тогда по определению интегрируемости функции $f(x)$ существует последовательность непрерывных в $\bar{Q}$ функций $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, обладающая свойствами $f_k(x) \uparrow f(x)$ п. в. в Q и $\int\limits_Q f_k\,dx \to \int\limits_Q f\,dx$ при $k \to \infty$. Так как $\int\limits_Q |f-f_k|\,dx = \int\limits_Q (f-f_k)\,dx$, то $\|f-f_k\|_{L_1(Q)} \to 0$ при $k \to \infty$, что и требовалось установить.

2. Пусть функция $f(x) \in L_2(Q)$. Снова можно считать ее вещественнозначной и неотрицательной. Поскольку $f(x) \in L_1(Q)$, то найдется монотонно неубывающая последовательность f_k, $k = 1, 2, \ldots$, функций из $C(\bar{Q})$, сходящаяся к f п. в. в Q. Функции $f_k(x)$ можно считать дополнительно неотрицательными, заменив в случае необходимости взятую последовательность последовательностью $f_k^+(x)$, $k=1, 2, \ldots$. Но тогда $f_k^2(x) \uparrow f^2(x)$ п. в. в Q при $k \to \infty$. По определению интеграла от $f^2(x)$ $\int\limits_Q f_k^2\,dx \to \int\limits_Q f^2\,dx$, т. е. $\|f_k\|^2_{L_2(Q)} \to \|f\|^2_{L_2(Q)}$. Так как $f_k f \leqslant f^2$, то по теореме Лебега (теорема 6 п. 7 § 1 гл. II) $\lim\limits_{k\to\infty} (f_k, f)_{L_2(Q)} = \|f\|^2_{L_2(Q)}$. Значит, $\|f_k - f\|^2_{L_2(Q)} = \|f_k\|^2_{L_2(Q)} - 2(f_k, f)_{L_2(Q)} + \|f\|^2_{L_2(Q)} \to 0$ при $k \to \infty$. Теорема доказана.

Отметим, что если последовательность функций из $C(\bar{Q})$ сходится к некоторой функции в норме пространства $C(\bar{Q})$, то она сходится к ней и в нормах пространств $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$. Следовательно, любую непрерывную в $\bar{Q}$ функцию можно приблизить последовательностью многочленов с рациональными коэффициентами в нормах $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$. Тогда из теоремы 2 следует, что счетное множество многочленов с рациональными коэффициентами всюду плотно в $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$. То есть имеет место

Теорема 3. *Пространства $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$ сепарабельны.*

Принадлежащая пространству $L_2(Q)$ (и продолженная нулем вне Q) функция $f(x)$ называется *непрерывной в среднем* (*квадратичном*) *или в норме пространства* $L_2(Q)$, если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\|f(x+z) - f(x)\|_{L_2(Q)} < \varepsilon$ для всех z, $|z| < \delta$.

Принадлежащая пространству $L_1(Q)$ (и продолженная нулем вне Q) функция $f(x)$ называется *непрерывной в среднем или в норме пространства* $L_1(Q)$, если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\|f(x+z) - f(x)\|_{L_1(Q)} < \varepsilon$ для всех z, $|z| < \delta$.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Любая функция из $L_2(Q)$ непрерывна в среднем (квадратичном). Любая функция из $L_1(Q)$ непрерывна в среднем.*

Пусть функция $f \in L_2(Q)$ (в случае, когда $f \in L_1(Q)$, доказательство утверждения совершенно аналогично). Возьмем число $a > 0$ столь большим, чтобы $Q \Subset S_a$, где S_a — шар $\{|x| < a\}$. Функция $F(x)$, равная $f(x)$ для $x \in Q$ и нулю для $x \in S_{2a} \setminus Q$, принадлежит $L_2(S_{2a})$, так как $f(x) \in L_2(Q)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. На основании теоремы 2 существует непрерывная в $\bar{S}_{2a}$ функция $\tilde{F}(x)$, удовлетворяющая неравенству $\|F(x) - \tilde{F}(x)\|_{L_2(S_{2a})} < \varepsilon/3$. За счет умножения функции $\tilde{F}(x)$ на подходящую срезающую функцию области S_a можно считать, что функция $\tilde{F}(x) \equiv 0$ для $x \in S_{2a} \setminus S_a$. Поэтому для $|z| \leqslant a$ $\|F(x+z) - \tilde{F}(x+z)\|_{L_2(S_{2a})} = \|F(x) - \tilde{F}(x)\|_{L_2(S_a)} \leqslant \varepsilon/3$. Так как функция $\tilde{F}(x)$ равномерно непрерывна в $\bar{S}_{2a}$, то существует $\delta > 0$ $(\delta < a)$ такое, что $\|\tilde{F}(x+z) - \tilde{F}(x)\|_{L_2(S_{2a})} \leqslant \varepsilon/3$, как только $|z| < \delta$. Значит, при $|z| < \delta$

$$\|f(x+z) - f(x)\|_{L_2(Q)} = \|F(x+z) - F(x)\|_{L_2(S_{2a})} \leqslant$$
$$\leqslant \|F(x+z) - \tilde{F}(x+z)\|_{L_2(S_{2a})} + \|\tilde{F}(x+z) - \tilde{F}(x)\|_{L_2(S_{2a})} +$$
$$+ \|\tilde{F}(x) - F(x)\|_{L_2(S_{2a})} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

3. Усреднение функций из $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$. Для функций из $L_1(Q)$ и $L_2(Q)$, так же как и для функций из $C(\bar{Q})$, можно определить усредненные функции.

Пусть $\omega_h(|x-y|)$ — некоторое ядро усреднения (гл. I, введение), а $f(x) \in L_1(Q)$. Функция

$$f_h(x) = \int_Q f(y)\, \omega_h(|x-y|)\, dy, \qquad h > 0, \tag{5}$$

называется *средней функцией для функции f (усредненной функцией для f).*

Из свойства а) ядра усреднения и теоремы 7 п. 7 § 1 гл. II следует, что $f_h(x) \in C^\infty(R_n)$ при $h > 0$. Кроме того, $f_h(x) \equiv 0$ вне Q^h.

Теорема 5. *Если $f(x) \in L_1(Q)$ $(L_2(Q))$, то $\|f_h - f\|_{L_1(Q)} \to 0$ $(\|f_h - f\|_{L_2(Q)} \to 0)$ при $h \to 0$.*

Доказательство обоих утверждений одинаково, поэтому остановимся, например, на случае $f \in L_2(Q)$. Будем считать функцию f продолженной нулем вне Q. Свойства б) и в) ядра усреднения, неравенство Буняковского, свойство г) ядра усреднения, последовательно примененные, дают

$$|f_h(x)-f(x)|^2 =$$
$$= \left| \int\limits_{|x-y|<h} f(y)\,\omega_h(|x-y|)\,dy - f(x) \int\limits_{|x-y|<h} \omega_h(|x-y|)\,dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{|x-y|<h} \omega_h^2(|x-y|)\,dy \int\limits_{|x-y|<h} |f(y)-f(x)|^2\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\text{const}}{h^n} \int\limits_{|z|<h} |f(x+z)-f(x)|^2\,dz.$$

Согласно следствию из теоремы Фубини (п. 11 § 1 гл. II)

$$\|f_h - f\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{\text{const}}{h^n} \int\limits_Q dx \int\limits_{|z|<h} |f(x+z)-f(x)|^2\,dx =$$
$$= \frac{\text{const}}{h^n} \int\limits_{|z|<h} dz \int\limits_Q |f(x+z)-f(x)|^2\,dx. \qquad (6)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно теореме о непрерывности в среднем (теорема 4) найдется такое $\delta > 0$, что $\|f(x+z) - f(x)\|_{L_2(Q)} < \varepsilon$, если только $|z| \leqslant h < \delta$. Поэтому для таких h из (6) вытекает неравенство $\|f_h - f\|_{L_2(Q)} \leqslant \text{const}\cdot\varepsilon$. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что при доказательстве теоремы 5 не использовалась неотрицательность ядра усреднения. Следовательно, если среднюю функцию $f_h(x)$ для функции $f(x)$ определить формулой (5), где $\omega_h(|x-y|) = \frac{1}{h^n}\omega_1\left(\frac{|x-y|}{h}\right)$, а $\omega_1(t)$, $-\infty < t < \infty$, — бесконечно дифференцируемая четная функция, равная нулю для $|t| \geqslant 1$ и такая, что $\int\limits_{R_n} \omega_1(|x|)\,dx = 1$ (ср. с определением ядра усреднения во введении, глава I), то теорема 5 остается справедливой и в этом случае.

Теорема 6. *Множество $\dot{C}^\infty(\bar{Q})$ является всюду плотным в $L_1(Q)$ и в $L_2(Q)$.*

Пусть $f(x) \in L_2(Q)$ (случай $f \in L_1(Q)$ рассматривается аналогично). Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно теореме об абсолютной непрерывности интеграла Лебега (теорема 9 п. 10 § 1 гл. II) найдется такое $\delta > 0$, что $\int\limits_{Q \setminus Q_\delta} |f|^2\,dx < \varepsilon^2/4$. Это означает, что финитная в Q функция $F(x)$, принадлежащая $L_2(Q)$ и равная $f(x)$ для $x \in Q_\delta$ и нулю для $x \in Q \setminus Q_\delta$, удовлетворяет неравенству $\|F - f\|_{L_2(Q)} \leqslant \varepsilon/2$. В силу теоремы 5 можно найти такое $h_0 > 0$, что $\|F_h - F\|_{L_2(Q)} \leqslant \varepsilon/2$ для всех $0 < h \leqslant h_0$. Средняя функция F_h для финитной функции F принадлежит при достаточно малых h множеству $\dot{C}^\infty(\bar{Q})$ и

$$\|f-F_h\|_{L_2(Q)} \leqslant \|f-F\|_{L_2(Q)} + \|F-F_h\|_{L_2(Q)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Так как при любом $k \geqslant 0$ $\dot{C}^\infty(\bar{Q}) \subset \dot{C}^k(\bar{Q}) \subset L_2(Q)$, то $\dot{C}^k(\bar{Q})$ при всех $k \geqslant 0$ всюду плотны в $L_2(Q)$.

4. **Линейные пространства $L_{1,\,\mathrm{loc}}$, $L_{2,\,\mathrm{loc}}$.** Множество интегрируемых в каждой строго внутренней подобласти Q' области Q, $Q' \Subset Q$, функций обозначим через $L_{1,\,\mathrm{loc}}(Q)$.

Множество измеримых в Q функций, модуль квадрата которых интегрируем по любой строго внутренней подобласти Q' области Q, $Q' \Subset Q$, обозначим через $L_{2,\,\mathrm{loc}}(Q)$.

Ясно, что $L_{1,\,\mathrm{loc}}(Q)$ и $L_{2,\,\mathrm{loc}}(Q)$ есть линейные пространства. Кроме того, $L_1(Q) \subset L_{1,\,\mathrm{loc}}(Q)$, $L_2(Q) \subset L_{2,\,\mathrm{loc}}(Q)$. Функция $\frac{1}{(1-|x|)^m}$, например, принадлежит $L_{1,\,\mathrm{loc}}(|x|<1)$ и $L_{2,\,\mathrm{loc}}(|x|<1)$ при любых m, и в то же время она принадлежит $L_1(|x|<1)$ только при $m<1$, а $L_2(|x|<1)$ только при $m<1/2$.

§ 3. Обобщенные производные

1. **Простейшие свойства обобщенных производных.** Пусть непрерывная в Q функция $f(x)$ имеет непрерывную в Q производную $f_{x_i}(x)$. Тогда при любой функции $g(x) \in \dot{C}^1(\bar{Q})$ имеет место равенство

$$\int_Q f\bar{g}_{x_i}\,dx = -\int_Q f_{x_i}\bar{g}\,dx.$$

Оказывается, этим равенством производная f_{x_i} функции f полностью определяется: нетрудно показать, что если для непрерывной функции $f(x)$ существует такая непрерывная функция $h_i(x)$, что при любой $g(x) \in \dot{C}^1(\bar{Q})$ выполняется равенство

$$\int_Q f\bar{g}_{x_i}\,dx = -\int_Q h_i\bar{g}\,dx, \tag{1}$$

то функция $f(x)$ имеет в Q производную f_{x_i} и для всех $x \in Q$ $f_{x_i} = h_i$. Таким образом, с помощью тождества (1) можно дать другое, эквивалентное (в классе непрерывных функций) обычному, определение производной функции $f(x)$. Если в равенстве (1) отказаться от непрерывности функций $f(x)$ и $h_i(x)$, а вместо этого потребовать их интегрируемость или интегрируемость их квадратов (последнее нам удобнее) и интегралы в (1) понимать в смысле Лебега, то мы расширим класс функций, для которых можно ввести понятие производной; функция h_i называется обобщенной производной по x_i функции f в области Q.

Пусть $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — вектор с целыми неотрицательными компонентами. Функция $f^\alpha(x) \in L_{2, \text{loc}}(Q)$ называется *α-й обобщенной производной (о. п.) в области* Q функции $f(x) \in L_{2, \text{loc}}(Q)$, если для любой функции $g(x) \in \dot{C}^{|\alpha|}(\bar{Q})$ имеет место равенство

$$\int_Q f(x)\overline{D^\alpha g(x)}\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int_Q f^\alpha(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{2}$$

Прежде всего покажем, что функция $f(x)$ может иметь лишь одну о. п. $f^\alpha(x)$ (напомним, что функции считаем равными, если они совпадают п. в.).

Действительно, пусть $f_1^\alpha(x)$ и $f_2^\alpha(x)$ — две о. п. функции $f(x)$. В силу (2) для произвольно фиксированной подобласти Q', $Q' \Subset Q$, и произвольной функции $g(x) \in \dot{C}^{|\alpha|}(\bar{Q}')$ имеем равенство $\int_{Q'}(f_1^\alpha-f_2^\alpha)\bar{g}\,dx=0$. Но $f_1^\alpha-f_2^\alpha \in L_2(Q')$, поэтому в силу теоремы 6 п. 3 предыдущего параграфа $f_1^\alpha-f_2^\alpha=0$ п. в. в Q', а значит, и п. в. в Q.

Пусть функция $f(x) \in \dot{C}^{|\alpha|}(\bar{Q})$. Тогда из формулы Остроградского имеем равенство

$$\int_Q f(x)\overline{D^\alpha g(x)}\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int_Q D^\alpha f(x)\overline{g(x)}\,dx \tag{3}$$

для любой функции $g(x) \in \dot{C}^{|\alpha|}(\bar{Q})$. То есть функция $f(x)$ имеет о. п. $f^\alpha(x)$, равную $D^\alpha f(x)$. В частности, функция $f(x)$, (п. в.) в Q равная постоянной, имеет любую о. п. $f^\alpha(x)=0$, $|\alpha|>0$.

В дальнейшем обобщенную производную f^α функции f будем обозначать через $D^\alpha f$. Для обобщенных производных, в основном первых и вторых порядков, будем пользоваться также обозначениями f_{x_i}, $f_{x_ix_j}$, ... и $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$, ...

Поскольку для гладких функций $g(x)$ производная $\frac{\partial^{|\alpha|}g}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ не зависит от порядка дифференцирования, то из единственности обобщенной производной и формулы (2) следует, что *обобщенная производная* тоже *не зависит от порядка дифференцирования.*

Также из определения сразу следует, что если функции $f_i(x)$, $i=1, 2$, имеют о. п. $D^\alpha f_i$, то функция $c_1f_1+c_2f_2$ при произвольных постоянных c_i имеет о. п. $D^\alpha(c_1f_1+c_2f_2)=c_1D^\alpha f_1+c_2D^\alpha f_2$.

Пример 1. Функция $f(x)=|x_1|$ в шаре $Q=\{|x|<1\}$ имеет первые обобщенные производные $f_{x_1}=\operatorname{sign} x_1$, $f_{x_i}=0$, $i=2, \ldots, n$.

Действительно, для любой функции $g(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$

$$\int\limits_Q |x_1| \bar{g}_{x_1}\, dx = \int\limits_{Q^+} x_1 \bar{g}_{x_1}\, dx - \int\limits_{Q^-} x_1 \bar{g}_{x_1}\, dx,$$

где $Q^+ = Q \cap (x_1 > 0)$, $Q^- = Q \cap (x_1 < 0)$. Из формулы Остроградского имеем ($x_1\bar{g} = 0$ на ∂Q и при $x_1 = 0$)

$$\int\limits_Q |x_1| \bar{g}_{x_1}\, dx = -\int\limits_{Q^+} \bar{g}\, dx + \int\limits_{Q^-} \bar{g}\, dx = -\int\limits_Q \operatorname{sign} x_1 \cdot \bar{g}\, dx.$$

Поэтому о. п. по x_1 функции $|x_1|$ существует и равна функции $\operatorname{sign} x_1$. Так как для $i \geqslant 2$

$$\int\limits_Q |x_1| \bar{g}_{x_i}\, dx = \int\limits_Q (|x_1| \bar{g})_{x_i}\, dx = 0 = -\int\limits_Q 0 \cdot \bar{g}\, dx,$$

то функция $|x_1|$ имеет о. п. по x_i, $i = 2, \ldots, n$, равные нулю.

Заметим, что классической производной по x_1 функция $|x_1|$ в области Q не имеет (не существует производной при $x_1 = 0$).

Пример 2. Функция $f(x) = \operatorname{sign} x_1$ в шаре $Q = \{|x| < 1\}$ имеет обобщенные первые производные $f_{x_i} = 0$, $i = 2, \ldots, n$, но не имеет обобщенной производной f_{x_1}. Существование о. п. f_{x_i}, $i = 2, \ldots, n$, устанавливается так же, как и в примере 1. Докажем, что функция f не имеет о. п. по x_1. Предположим, напротив, что существует функция $\omega \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(Q)$, являющаяся обобщенной производной по x_1 функции f. Тогда для произвольной функции $g(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$ имеет место равенство

$$\int\limits_Q \omega \bar{g}\, dx = -\int\limits_Q (\operatorname{sign} x_1)\, \bar{g}_{x_1}\, dx = -\int\limits_{Q^+} \bar{g}_{x_1}\, dx + \int\limits_{Q^-} \bar{g}_{x_1}\, dx =$$
$$= 2 \int\limits_{Q \cap \{x_1 = 0\}} \bar{g}\, dx_2 \ldots dx_n. \qquad (4)$$

Из этого равенства прежде всего следует, что $\omega = 0$ (п. в.) в Q. Действительно, подставляя в (4) произвольную функцию $g(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$, равную нулю в Q^-, получим равенство $\int\limits_{Q^+} \omega \bar{g}\, dx = 0$, из которого вытекает, что $\omega = 0$ (п. в.) в Q^+. Аналогично доказывается, что $\omega = 0$ (п. в.) в Q^-. Следовательно, для любой $g(x) \in \dot{C}^1(Q)$ $\int\limits_Q \omega \bar{g}\, dx = 0$, т. е. $\int\limits_{Q \cap \{x_1 = 0\}} \bar{g}(x)\, dx_2 \ldots dx_n = 0$. Последнее равенство, однако, не может иметь места при любой функции $g(x) \in \dot{C}^1(Q)$.

Обобщенная производная $D^\alpha f$, в отличие от соответствующей классической производной, определяется тождеством (2) *глобально*, сразу в Q. Однако и *в любой подобласти* $Q' \subset Q$ *функция* $D^\alpha f$ *будет о. п. функции* f, поскольку функция $g(x)$, принадлежащая

$\dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q}')$ и продолженная нулем вне Q', принадлежит $\dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q})$ (этим свойством мы фактически уже воспользовались при доказательстве единственности обобщенной производной). Поэтому если функция $f(x)$ имеет в Q о. п. $D^\alpha f$ и $f(x)=c$ (п. в.) в $Q'\subset Q$, то $D^\alpha f=0$ (п. в.) в Q'. В частности, о. п. (если она существует) финитной в Q функции $f(x)$ (т. е. для некоторой Q'', $Q''\Subset Q$, $f(x)=0$ п. в. в $Q\backslash Q''$) финитна в Q и, следовательно, принадлежит $L_2(Q)$.

Пусть функция $f(x)$, принадлежащая $L_{2,\,\mathrm{loc}}(Q)$, имеет о. п. $D^\alpha f=F$, а функция $F(x)$ имеет о. п. $D^\beta F=G$. Тогда *существует о. п. $D^{\alpha+\beta}f$ и $D^{\alpha+\beta}f=G$.*

Действительно, пусть $g(x)\in\dot{C}^{|\alpha+\beta|}(\overline{Q})$. Так как $D^\beta g\in\in\dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q})$, то

$$\int_Q f\overline{D^{\alpha+\beta}g}\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int_Q D^\alpha f\overline{D^\beta g}\,dx=$$
$$=(-1)^{|\alpha|}\int_Q F\overline{D^\beta g}\,dx=(-1)^{|\alpha|+|\beta|}\int_Q D^\beta F\overline{g}\,dx=(-1)^{|\alpha+\beta|}\int_Q G\overline{g}\,dx,$$

что и требовалось установить.

В отличие от классической производной обобщенная производная $D^\alpha f$ определяется сразу для порядка $|\alpha|$ без предположения о существовании соответствующих младших производных. Покажем, что младшие производные и на самом деле могут не существовать.

Пример 3. Рассмотрим в шаре $Q=\{|x|<1\}$ функцию $f(x)==\varphi(x_1)+\varphi(x_2)$, где $\varphi(x_1)=\operatorname{sign}x_1$. Из результатов примера 2 вытекает, что $f(x)$ не имеет обобщенных производных f_{x_1} и f_{x_2}.

Покажем, что тем не менее существует обобщенная производная $f_{x_1x_2}$. Возьмем произвольную функцию $g(x)\in\dot{C}^2(\overline{Q})$. Имеем

$$\int_Q \overline{g}_{x_1x_2}f\,dx=\int_Q\varphi(x_1)\,\overline{g}_{x_1x_2}dx+\int_Q\varphi(x_2)\,\overline{g}_{x_1x_2}\,dx.$$

Поскольку

$$\int_Q\varphi(x_1)\overline{g}_{x_1x_2}\,dx=-\int_{Q\cap\{x_1<0\}}\overline{g}_{x_1x_2}\,dx+\int_{Q\cap(x_1>0)}\overline{g}_{x_1x_2}\,dx=0,$$

и, аналогично, $\int_Q\varphi(x_2)\,\overline{g}_{x_1x_2}\,dx=0$, то

$$\int_Q f\overline{g}_{x_1x_2}\,dx=0=\int_Q 0\cdot\overline{g}\,dx.$$

Таким образом, обобщенная производная $f_{x_1x_2}$ существует и равна 0.

2. Обобщенные производные и средние функции. Критерий существования обобщенной производной. Пусть функция $f(x)\in\in L_2(Q)$, ω_h — некоторое ядро усреднения, а

$$f_h(x)=\int_Q\omega_h(|x-y|)f(y)\,dy,\qquad h>0,$$

— усредненная функция для функции $f(x)$, $f_h(x)\in\dot{C}^\infty(R_n)$.

Лемма 1. *Если функция $f(x)$ из $L_2(Q)$ имеет обобщенную производную $D^\alpha f \in L_2(Q)$, то для любой точки $y \in Q$ при достаточно малом $h > 0$*

$$(D^\alpha f)_h(y) = D^\alpha f_h(y) \tag{5}$$

и для произвольной подобласти $Q' \Subset Q$ при $h \to 0$

$$\|D^\alpha f_h - D^\alpha f\|_{L_2(Q')} \to 0. \tag{6}$$

Если функция $f(x)$ дополнительно финитна в Q (и продолжена нулем вне Q), то формула (5) *имеет место для всех $y \in \overline{Q}$ при достаточно малых $h > 0$ и*

$$\|D^\alpha f_h - D^\alpha f\|_{L_2(Q)} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{7}$$

Подставляя в формулу (2) в качестве функции $g(x)$ ядро усреднения $\omega_h(|x-y|)$, $y \in Q$, при достаточно малом $h > 0$ (h меньше расстояния точки y до границы ∂Q), получим на основании теоремы 7 п. 7 § 1 гл. II формулу (5)

$$(D^\alpha f)_h(y) = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f(x) D_x^\alpha \omega_h(|x-y|)\, dx =$$
$$= \int_Q f(x) D_y^\alpha \omega_h(|x-y|)\, dx = D_y^\alpha f_h(y).$$

Если $Q' \Subset Q$, то существует такое $h_0 > 0$, что при $h \leq h_0$ формула (5) имеет место для всех $y \in \overline{Q}'$. В случае финитной $f(x)$ ($D^\alpha f$ тогда тоже финитна и принадлежит $L_2(Q)$) также существует такое $h_0 > 0$, что при $h \leq h_0$ формула (5) имеет место для всех $y \in \overline{Q}$. Поэтому соотношения (6) и (7) вытекают из теоремы 5 п. 3 § 2.

Следствие. *Если все о. п. первого порядка функции f равны нулю, то $f = \text{const}$.*

Действительно, в любой подобласти $Q' \Subset Q$ при достаточно малых h $(f_{x_i})_h = 0$, $i = 1, \ldots, n$. В силу (5) $(f_h)_{x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. $f_h = \text{const} = c(h)$ в Q' для таких h. Так как $\|f_h - f\|_{L_2(Q')} = \|c(h) - f\|_{L_2(Q')} \to 0$ при $h \to 0$ (теорема 5 п. 3 § 2), то $\|c(h_1) - c(h_2)\|_{L_2(Q')} = |c(h_1) - c(h_2)| \sqrt{|Q'|} \to 0$ при $h_1, h_2 \to 0$. Следовательно, $c(h) = f_h$ сходится равномерно в $\overline{Q}'$ (и тем более в $L_2(Q')$) к некоторой постоянной, т. е. $f = \text{const}$ в Q', и тем самым, в Q.

С помощью леммы 1 докажем следующий критерий существования обобщенной производной функции $f \in L_2(Q)$.

Теорема 1. *Для существования о. п. $D^\alpha f$ функции $f \in L_2(Q)$ необходимо и достаточно, чтобы для любой подобласти $Q' \Subset Q$ существовали такие постоянные $C(Q')$ и $h_0(Q')$, что $\|D^\alpha f_h\|_{L_2(Q')} \leq C(Q')$ для всех $h < h_0(Q')$.*

Необходимость доказана в лемме 1.

Докажем достаточность. Возьмем такую систему областей $Q_1 \Subset \Subset Q_2 \Subset \ldots \Subset Q_m \Subset \ldots \Subset Q$, что любая точка $x \in Q$ принадлежит некоторой области Q_i (а следовательно, и всем Q_j при $j > i$). Так как при $h < h_0(Q_1)$ $\|D^\alpha f_h\|_{L_2(Q_1)} \leqslant C(Q_1)$, то множество $\{D^\alpha f_h\}$ для таких h слабо компактно (теорема 3 п. 8 § 3 гл. II). Поэтому можно найти такую последовательность значений h, $h_{1,1}, \ldots, h_{1,k}, \ldots$ $\ldots, h_{1,k} \downarrow 0$ при $k \to \infty$, что последовательность функций $D^\alpha f_{h_{1,k}}$, $k = 1, 2, \ldots$, слабо сходится в $L_2(Q_1)$. Аналогично, из последовательности $h_{1,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, можно выбрать подпоследовательность $h_{2,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, такую, что слабо сходится в $L_2(Q_2)$ последовательность функций $D^\alpha f_{h_{2,k}}$, $k = 1, 2, \ldots$ При этом слабый предел этой последовательности в Q_1, конечно, совпадает со слабым пределом последовательности $D^\alpha f_{h_{1,k}}$, $k = 1, 2, \ldots$, и т. д. Диагональная последовательность $D^\alpha f_{h_{k,k}}$, $k = 1, 2, \ldots$, слабо сходится к некоторой функции $\omega(x) \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(Q)$ в пространстве $L_2(Q_i)$ при любом $i = 1, 2, \ldots$. Тогда для любой $Q' \Subset Q$ $D^\alpha f_{h_{k,k}}$ слабо сходится к ω в $L_2(Q')$.

Возьмем произвольную функцию $g \in \dot{C}^{|\alpha|}(\bar{Q})$, и пусть Q' — область, вне которой $g(x) = 0$, $Q' \Subset Q$. Для всех $k = 1, 2, \ldots$ имеет место равенство

$$\int_Q D^\alpha f_{h_{k,k}} \bar{g}\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f_{h_{k,k}} D^\alpha \bar{g}\, dx,$$

в котором интегрирование на самом деле проводится не по всей области Q, а по Q'. Поскольку последовательность $D^\alpha f_{h_{k,k}}$, $k = 1, 2, \ldots$ слабо сходится в $L_2(Q')$ к функции ω, а последовательность $f_{h_{k,k}}$, $k = 1, 2, \ldots$, сильно (а значит, и слабо) сходится к функции f, то в этом равенстве можно перейти к пределу при $k \to \infty$:

$$\int_Q \omega \bar{g}\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f D^\alpha \bar{g}\, dx.$$

Это означает, что функция f имеет обобщенную производную $D^\alpha f$, равную функции ω. Теорема доказана.

3. Существование обобщенной производной в объединении областей. В п. 1 уже отмечалось, что если $D^\alpha f$ является о. п. функции f в Q, то и в любой подобласти $Q' \subset Q$ она является о. п. этой функции. Настоящий пункт посвящен доказательству следующего предложения.

Теорема 2. *Если функция f имеет о. п. $D^\alpha f$ в областях Q_1 и Q_2 и $Q_1 \cup Q_2 = Q$ тоже является областью (т. е. является связным множеством), то о. п. производная $D^\alpha f$ существует в Q.*

Возьмем произвольную точку $x \in Q$. Пусть $S_\rho(x)$ — шар радиуса $\rho > 0$ с центром в точке x, а $\rho_1 = \min\limits_{y \in \partial Q_1} |x-y|$, $\rho_2 = \min\limits_{y \in \partial Q_2} |x-y|$. Если $x \in Q_1 \setminus Q_2$, то $S_{\rho_1/2}(x) \Subset Q_1$. Если $x \in Q_2 \setminus Q_1$, то $S_{\rho_2/2}(x) \Subset Q_2$. Если же $x \in Q_1 \cap Q_2$ и $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$, то $S_{\rho/2}(x) \Subset Q_1$ и $S_{\rho/2}(x) \Subset Q_2$.

Все точки области Q разобьем на два класса: в первый класс отнесем все точки из $Q_1 \setminus Q_2$ и те точки из $Q_1 \cap Q_2$, для которых $\rho_1 < \rho_2$, $\rho = \rho_1$; во второй — все остальные, т. е. все точки из $Q_2 \setminus Q_1$ и те точки из $Q_1 \cap Q_2$, для которых $\rho_2 \leqslant \rho_1$, $\rho = \rho_2$.

Таким образом, мы получили покрытие области Q шарами $S_{\rho/2}(x)$: если x — из первого класса, то $\rho = \rho_1$, если x — из второго класса, то $\rho = \rho_2$.

Пусть Q' — произвольная строго внутренняя подобласть области Q, $Q' \Subset Q$. Из покрытия $\overline{Q'}$ шарами $S_{\rho/2}(x)$ выделим конечное подпокрытие. Часть шаров этого подпокрытия, имеющих центры в точках первого класса, образуют открытое множество $Q_1' \Subset Q_1$, остальные — открытое множество $Q_2' \Subset Q_2$. Таким образом, для области Q' найдены два открытых множества Q_1' и Q_2', обладающих следующими свойствами: а) Q_i', $i = 1, 2$, есть сумма конечного числа шаров, б) Q' принадлежит области $Q_1' \cup Q_2'$ и $Q_1' \Subset Q_1$, $Q_2' \Subset Q_2$. Так как в Q_1 и Q_2 существует о. п. $D^\alpha f$, то по теореме 1 существуют такие постоянные $C(Q_1')$, $C(Q_2')$, $h_0(Q_1')$ и $h_0(Q_2')$, что для $h < h_0 = \min(h_0(Q_1'), h_0(Q_2'))$ $\|D^\alpha f_h\|_{L_2(Q_1')} \leqslant C(Q_1')$, $\|D^\alpha f_h\|_{L_2(Q_2')} \leqslant C(Q_2')$, где f_h — средняя функция для функции f в области Q. Поэтому

$$\|D^\alpha f_h\|^2_{L_2(Q')} \leqslant \|D^\alpha f_h\|^2_{L_2(Q_1')} + \|D^\alpha f_h\|^2_{L_2(Q_2')} \leqslant C_1^2(Q_1') + C_2^2(Q_2') = C_2(Q') \quad \text{для всех } h < h_0$$

Следовательно, по теореме 1 функция f имеет о. п. α-го порядка в Q, конечно, в Q_1 и Q_2 совпадающую $D^\alpha f$. Теорема доказана.

4. Связь обобщенных производных с конечно-разностными отношениями. Пусть функция $f(x)$ финитна в Q и принадлежит $L_2(Q)$. Продолжим ее нулем вне Q и рассмотрим при $h \neq 0$ разностное отношение

$$\delta_h^k f(x) = \frac{f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x)}{h}, \tag{8}$$

$k = 1, \ldots, n$. Ясно, что при всех $h \neq 0$ $\delta_h^k f(x) \in L_2(Q)$. Если функция $g(x) \in L_2(Q)$ (и продолжена нулем вне Q), то для достаточно малых по модулю h (меньших расстояния между границей области Q и границей области Q', вне которой $f = 0$) имеет место формула «интегрирования по частям»

$$(\delta_h^k f, g)_{L_2(Q)} =$$
$$= \frac{1}{h}\int\limits_Q (f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k+h, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x))\,\bar{g}(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{h}\int\limits_Q f(x)\,(\bar{g}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k-h, x_{k+1}, \ldots, x_n) - \bar{g}(x))\,dx =$$
$$= -(f, \delta_{-h}^k g)_{L_2(Q)}. \tag{9}$$

Теорема 3. *Пусть финитная в Q функция $f(x)$ принадлежит $L_2(Q)$.*

а) *Если существует о. п. f_{x_k} при некотором $k=1, \ldots, n$, то при всех достаточно малых по модулю $h \neq 0$ $\|\delta_h^k f\|_{L_2(Q)} \leqslant \|f_{x_k}\|_{L_2(Q)}$ и*

$$\|\delta_h^k f - f_{x_k}\|_{L_2(Q)} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{10}$$

б) *Если существует такая постоянная $C>0$, что при всех достаточно малых по модулю $h \neq 0$ $\|\delta_h^k f\|_{L_2(Q)} \leqslant C$, то в Q существует о. п. f_{x_k} функции f, имеет место неравенство $\|f_{x_k}\|_{L_2(Q)} \leqslant C$ и соотношение* (10).

Доказательство предложения а). Пусть сначала функция $f \in \dot{C}^1(\bar{Q})$. Не умаляя общности, можно считать, что $k=n$. Тогда $\delta_h^n f = \frac{1}{h}\int\limits_{x_n}^{x_n+h} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\,d\xi_n$, где, как обычно, $x'=(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Следовательно (пусть для определенности $h>0$),

$$|\delta_h^n f(x)|^2 \leqslant \frac{1}{h^2}\left(\int\limits_{x_n}^{x_n+h} \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right| d\xi_n\right)^2 \leqslant \frac{1}{h}\int\limits_{x_n}^{x_n+h} \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n,$$

откуда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\delta_h^n f(x)|^2\,dx_n \leqslant \frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_n \int\limits_{x_n}^{x_n+h} \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n}\right|^2 dx_n.$$

Интегрируя последнее неравенство по $x' \in R_{n-1}$, получим

$$\|\delta_h^n f\|_{L_2(Q)} \leqslant \|f_{x_n}\|_{L_2(Q)}. \tag{11}$$

Далее,

$$\delta_h^n f(x) - f_{x_n}(x) = \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_n+h} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\, d\xi_n - \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} =$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_n+h} \left(\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} - \frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n}\right) d\xi_n.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\delta_h^n f(x) - f_{x_n}(x))^2\, dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \int_{x_n}^{x_n+h} \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} - \frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n}\right|^2 d\xi_n =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial f(x', x_n+\eta)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n}\right)^2 dx_n.$$

Интегрируя это неравенство по $x' \in R_{n-1}$, получим

$$\| \delta_h^n f - f_{x_n} \|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{1}{h}\int_0^h d\eta \int_Q \left(\frac{\partial f(x', x_n+\eta)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n}\right)^2 dx. \qquad (12)$$

Неравенства (11) и (12), установленные пока для функций $f \in \dot{C}^1(\bar{Q})$, справедливы и для финитных функций из $L_2(Q)$, имеющих о. п. f_{x_n} в Q. Чтобы в этом убедиться, достаточно аппроксимировать функцию $f(x)$ ее усредненной функцией с достаточно малым радиусом усреднения ρ, воспользоваться для последней неравенствами (11) и (12) (усредненная функция будет финитной в Q) и перейти в них к пределу при $\rho \to 0$.

Таким образом, первое неравенство п. а), совпадающее с (11), доказано.

Для доказательства соотношения (10) воспользуемся теоремой о непрерывности в среднем (квадратичном) функции из $L_2(Q)$ (теорема 4 п. 2 § 2), из которой вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что если $|\eta| \leqslant |h| \leqslant \delta$, то

$$\int_Q \left(\frac{\partial f(x', x_n+\eta)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n}\right)^2 dx \leqslant \varepsilon^2.$$

Поэтому из (12) следует неравенство $\| \delta_h^n f - f_{x_n} \|^2_{L_2(Q)} \leqslant \varepsilon^2$, если только $|h| \leqslant \delta$. Предложение а) доказано.

Доказательство предложения б). В силу теоремы 3 п. 8 § 3 гл. II множество $\{\delta_h^k f\}$ при малых $|h|$ слабо компактно в $L_2(Q)$. Поэтому из него можно выбрать слабо сходящуюся к некоторой функции $\omega \in L_2(Q)$ последовательность $\delta_{h_p}^k f$, $p=1, 2, \ldots$; $h_p \to 0$ при $p \to \infty$. При этом $\|\omega\|_{L_2(Q)} \leqslant C$. Далее, в силу (9) $\left(\delta_{h_p}^k f,\ g\right)_{L_2(Q)} = -\left(f, \delta_{-h_p}^k g\right)_{L_2(Q)}$ при любой функции $g(x) \in \dot{C}^1(\bar{Q})$. При $p \to \infty$ левая часть равенства стремится к (ω, g), а правая на основании теоремы Лебега — к $-(f,\ g_{x_k})$. Поэтому существует о. п. f_{x_k} и $f_{x_k} = \omega$. Теорема доказана.

В дальнейшем нам понадобится также следующее предложение.

Пусть Q — односвязная область пространства R_n, содержащая начало координат и симметричная относительно плоскости $x_n = 0$ (т. е. для любой точки $x = (x', x_n)$, принадлежащей Q, точка $(x', -x_n)$ тоже принадлежит Q), и пусть $\delta > 0$ — столь малое число, что множество Q_δ есть область. Введем обозначения:

$$Q^+ = Q \cap \{x_n > 0\},\quad Q^- = Q \cap \{x_n < 0\},\quad (Q_\delta)^+ = Q_\delta \cap \{x_n > 0\}.$$

Теорема 4. *Пусть функция* $f(x) \in L_2(Q^+)$ *и* $f(x) = 0$ *в* $Q^+ \setminus (Q_\delta)^+$.

а) *Если в* Q^+ *существует о. п.* f_{x_k} *при некотором* $k < n$, *то при всех достаточно малых по модулю* $h \neq 0$

$$\|\delta_h^k f\|_{L_2(Q^+)} \leqslant \|f_{x_k}\|_{L_2(Q^+)}$$

и

$$\left\|\delta_h^k f - f_{x_k}\right\|_{L_2(Q^+)} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{10'}$$

б) *Если существует такая постоянная* $C > 0$, *что при всех достаточно малых по модулю* $h \neq 0$ $\|\delta_h^k f\|_{L_2(Q^+)} \leqslant C$, $k < n$, *то в* Q^+ *существует о. п.* f_{x_k}, *причем* $\|f_{x_k}\|_{L_2(Q^+)} \leqslant C$ *и имеет место соотношение* (10').

Определим в области Q функцию $F(x)$ следующим образом: $F(x) = f(x)$ в Q^+ и $F(x) = f(x', -x_n)$ в Q^-. Очевидно, что $F \in L_2(Q)$ и $F(x) = 0$ вне Q_δ. При этом $\|\delta_h^k F\|^2_{L_2(Q)} = 2\|\delta_h^k f\|^2_{L_2(Q^+)}$, $k < n$, $0 < |h| < \delta$.

Доказательство утверждения а). Пусть функция f имеет о. п. f_{x_k} в Q^+. Прежде всего покажем, что тогда функция F имеет о. п. F_{x_k} в Q. Действительно. Возьмем произвольную функцию $g(x) \in \dot{C}^1(\bar{Q})$ и при произвольном $\delta > 0$ функцию $\zeta_\delta(x_n) \in C^1(-\infty, +\infty)$, четную, $\zeta_\delta(-x_n) = \zeta_\delta(x_n)$, удовлетворяющую при всех x_n неравенству $|\zeta_\delta(x_n)| \leqslant 1$, равную 1 при $x_n \geqslant \delta$ и 0 при $0 \leqslant x_n \leqslant \delta/2$.

Из равенства

$$\int\limits_Q F(x)\, g_{x_k}(x)\, \zeta_\delta(x_n)\, dx =$$

$$= \int\limits_{Q^+} f(x)\, g_{x_k}(x)\, \zeta_\delta(x_n)\, dx + \int\limits_{Q^-} f(x', -x_n)\, g_{x_k}(x)\, \zeta_\delta(x_n)\, dx =$$

$$= \int\limits_{Q^+} f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} (\zeta_\delta(x_n)\,[g(x', x_n) + g(x', -x_n)])\, dx$$

и определения о. п. функции f в области Q^+ имеем (функция $\zeta_\delta(x_n)\,(g(x', x_n) + g(x', -x_n)) \in \dot{C}^1(\bar{Q}^+)$)

$$\int\limits_Q F(x)\, g_{x_k}(x)\, \zeta_\delta(x_n)\, dx =$$

$$= - \int\limits_{Q^+} f_{x_k}(x)\, \zeta_\delta(x_n)\,(g(x', x_n) + g(x', -x_n))\, dx =$$

$$= - \int\limits_{Q^+} f_{x_k}(x', x_n)\, \zeta_\delta(x_n)\, g(x)\, dx - \int\limits_{Q^-} f_{x_k}(x', -x_n)\, \zeta_\delta(x_n)\, g(x)\, dx.$$

Переходя в этом равенстве на основании теоремы Лебега к пределу при $\delta \to 0$, получим, что функция, равная $f_{x_k}(x)$ в Q^+ и $f_{x_k}(x', -x_n)$ в Q^-, является о. п. F_{x_k} в Q функции F, при этом имеет место равенство $\| F_{x_k} \|^2_{L_2(Q)} = 2 \| f_{x_k} \|^2_{L_2(Q^+)}$.

В силу теоремы 3 $\| \delta^k_h F \|_{L_2(Q)} \leqslant \| F_{x_k} \|_{L_2(Q)}$. Поэтому $\| \delta^k_h f \|^2_{L_2(Q^+)} = \frac{1}{2} \| \delta^k_h F \|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{1}{2} \| F_{x_k} \|^2_{L_2(Q)} = \| f_{x_k} \|_{L_2(Q^+)}$. Так как $\| \delta^k_h F - F_{x_k} \|^2_{L_2(Q)} = \frac{1}{2} \| \delta^k_h f - f_{x_k} \|^2_{L_2(Q^+)}$ и поскольку $\| \delta^k_h F - F_{x_k} \|_{L_2(Q)} \to 0$ при $h \to 0$, то $\| \delta^k_h f - f_{x_k} \|_{L_2(Q^+)} \to 0$ при $h \to 0$. Утверждение а) доказано.

Доказательство утверждения б). Пусть при всех достаточно малых по модулю $h \neq 0$ $\| \delta^k_h f \|_{L_2(Q^+)} \leqslant C$, $k < n$. Тогда для всех таких h $\| \delta^k_h F \|^2_{L_2(Q)} \leqslant 2 \cdot C^2$. Согласно теореме 3 в Q существует о. п. F_{x_k} и $\| F_{x_k} \|^2_{L_2(Q)} \leqslant 2 \cdot C^2$. Значит, в Q^+ существует о. п. f_{x_k}, $\| f_{x_k} \|^2_{L_2(Q^+)} \leqslant C^2$ и имеет место соотношение (10′). Теорема доказана.

§ 4. Пространства $H^k(Q)$

1. Линейное пространство $H^k_{\mathrm{loc}}(Q)$. Гильбертово пространство $H^k(Q)$. Множество функций из $L_{2,\,\mathrm{loc}}(Q)$, имеющих все обобщенные производные до порядка k, $k \geqslant 1$, включительно (из $L_{2,\,\mathrm{loc}}(Q)$), будем обозначать через $H^k_{\mathrm{loc}}(Q)$. Обозначим через $H^k(Q)$ подмножество $H^k_{\text{loc}}(Q)$, элементы которого вместе со всеми обобщенными производными до порядка k включительно принадлежат $L_2(Q)$. Под $H^k_{\text{loc}}(Q)$ и $H^k(Q)$ при $k=0$ будем понимать $L_{2,\text{loc}}(Q)$ и $L_2(Q)$ соответственно: $H^0_{\text{loc}}(Q)=L_{2,\text{loc}}(Q)$, $H^0(Q)=L_2(Q)$.

Ясно, что $H^k_{\text{loc}}(Q)$ и $H^k(Q)$ — линейные пространства. Покажем, что $H^k(Q)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f,\, g)_{H^k(Q)}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_Q D^\alpha f D^\alpha \bar{g}\,dx. \tag{1}$$

Для проверки этого утверждения достаточно установить полноту $H^k(Q)$ в порожденной этим скалярным произведением норме

$$\|f\|_{H^k(Q)}=\sqrt{\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_Q |D^\alpha f|^2\,dx}. \tag{2}$$

Пусть f_m, $m=1, 2, \ldots$, — произвольная фундаментальная по норме (2) последовательность элементов из $H^k(Q)$:

$$\|f_s-f_m\|^2_{H^k(Q)}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_Q |D^\alpha f_s-D^\alpha f_m|^2\,dx\to 0 \text{ при } m,\ s\to\infty.$$

Тогда для любого α, $|\alpha|\leqslant k$, при $m, s\to\infty$

$$\int_Q |D^\alpha f_s-D^\alpha f_m|^2\,dx\to 0, \tag{3}$$

и в частности (при $\alpha=0$),

$$\int_Q |f_s-f_m|^2\,dx\to 0. \tag{4}$$

В силу полноты $L_2(Q)$ из (4) вытекает существование функции $f\in L_2(Q)$, к которой (в $L_2(Q)$) сходится последовательность f_m, $m=1, 2, \ldots$, а из (3) существование при любом α, $|\alpha|\leqslant k$, функции $f^\alpha\in L_2(Q)$, к которой (в $L_2(Q)$) сходится последовательность $D^\alpha f_m$, $m=1, 2, \ldots$

Так как каждая функция $f_m(x)$ имеет все принадлежащие $L_2(Q)$ обобщенные производные до k-го порядка включительно, то при любом α, $|\alpha|\leqslant k$,

$$(f_m,\, D^\alpha g)_{L_2(Q)}=(-1)^{|\alpha|}(D^\alpha f_m,\, g)_{L_2(Q)}$$

для любой функции $g\in \dot{C}^k(\bar{Q})$. Переходя в этом равенстве к пределу при $m\to\infty$ (из сильной сходимости следует слабая сходимость), получим, что функция f^α есть α-я о. п. функции f. Таким образом, $f\in H^k(Q)$ и $\|f_m-f\|_{H^k(Q)}\to 0$ при $m\to\infty$. Утверждение доказано.

Замечание. Иногда удобно рассматривать множество всех вещественнозначных функций из $H^k(Q)$, $k=0, 1, \ldots$ ($H^0(Q) = L_2(Q)$). Это множество, конечно, является (вещественным) гильбертовым пространством со скалярным произведением (1). Будем называть его вещественным пространством $H^k(Q)$ и сохраним за ним то же обозначение.

Отметим некоторые свойства пространств $H^k(Q)$.

1. Если область $Q' \subset Q$ и $f \in H^k(Q)$, то $f \in H^k(Q')$.

2. Если $f \in H^k(Q)$ и $a(x) \in C^k(\bar{Q})$, то функция $af \in H^k(Q)$. При этом любая обобщенная производная $D^\alpha(af)$, $|\alpha| \leqslant k$, вычисляется по обычным правилам дифференцирования произведения. В частности, $(af)_{x_i} = a_{x_i}f + af_{x_i}$, $i=1, \ldots, n$.

3. Если $f \in H^k(Q)$, а $f_h(x)$ — средняя функция для функции f, то для любой подобласти Q', $Q' \Subset Q$, $\|f_h - f\|_{H^k(Q')} \to 0$ при $h \to 0$. Если функция f дополнительно финитна в Q, то при $h \to 0$ $\|f_h - f\|_{H^k(Q)} \to 0$.

4. Если финитная в Q функция $f \in H^k(Q)$, то функция, равная f в Q и нулю вне Q, принадлежит $H^k(Q')$ при любой области Q', $Q' \supset Q$.

Свойства 1—4 прямо следуют из определения пространств $H^k(Q)$ и свойств обобщенных производных.

5. Пусть преобразование $y=y(x)$ ($y_i=y_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i=1, \ldots, n$) взаимно однозначно отображает область Q на область Ω, и пусть $x=x(y)$ ($x_i=x_i(y_1, \ldots, y_n)$, $i=1, \ldots, n$) — соответствующее обратное преобразование. Предположим, что при некотором $k \geqslant 1$ $y_i(x) \in C^k(\bar{Q})$, $x_i(y) \in C^k(\bar{\Omega})$, $i=1, \ldots, n$. Тогда для того чтобы функция $F(x)=f(y(x))$, где $f(y)$ — функция, заданная в Ω, принадлежала пространству $H^k(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(y)$ принадлежала пространству $H^k(\Omega)$. Производные функции $F(x)$ вычисляются по обычным правилам дифференцирования сложной функции. Например, для первых производных имеют место формулы

$$F_{x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} f_{y_j}(y(x)) \frac{\partial y_j(x)}{\partial x_i}, \quad i=1, \ldots, n. \tag{5}$$

Кроме того, существуют такие постоянные C_1 и C_2, зависящие от функций $y_i(x)$, $i=1, \ldots, n$, что а) $\|F\|_{H^k(Q)} \leqslant C_1 \|f\|_{H^k(\Omega)}$, б) $\|f\|_{H^k(\Omega)} \leqslant C_2 \|F\|_{H^k(Q)}$.

Обратное преобразование $x=x(y)$ удовлетворяет тем же условиям, что и преобразование $y=y(x)$, поэтому можно ограничиться доказательством достаточности и неравенства а).

Пусть $k=1$ и $f(y) \in H^1(\Omega)$. Из замечания к теореме 8 п. 8 § 1 гл. II вытекает, что функция $F(x)$ и функции $F_i(x) =$

$= \sum\limits_{j=1}^{n} f_{y_j}(y(x)) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, $i=1, \ldots, n$ принадлежат $L_2(Q)$. Если $f_h(y)$ — усредненная функция для $f(y)$, то функция $F(h, x)=f_h(y(x))$ принадлежит $C^1(\bar{Q})$, причем $\frac{\partial F(h, x)}{\partial x_i} = \sum\limits_{j=1}^{n} f_{hy_j}(y(x)) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть подобласть $Q' \Subset Q$, а Ω' — ее образ, тогда $\Omega' \Subset \Omega$. Поскольку $\|f_h - f\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ и $\|f_{hy_i} - f_{y_i}\|_{L_2(\Omega')} \to 0$, $i=1, \ldots, n$, при $h \to 0$, то в силу замечания к теореме 8 п. 8 § 1 гл. II $\|F(h, x) - F(x)\|_{L_2(Q)} \to 0$ и $\|F_{x_i}(h, x) - F_i(x)\|_{L_2(Q')} \to 0$, $i=1, \ldots, n$, при $h \to 0$ для любой $Q' \Subset Q$. Это означает, что в равенствах $(F(h, x), g_{x_i}(x))_{L_2(Q)} = -(F_{x_i}(h, x), g(x))_{L_2(Q)}$, $i=1, \ldots, n$, где g — произвольная функция из $\dot{C}^1(\bar{Q})$ (Q' выберем так, чтобы $g=0$ в $Q \setminus Q'$), можно перейти к пределу при $h \to 0$: $(F, g_{x_i})_{L_2(Q)} = -(F_i, g)_{L_2(Q)}$. Поэтому функция F имеет все первые обобщенные производные из $L_2(Q)$, т. е. принадлежит $H^1(Q)$; при этом имеют место равенства (5), а следовательно, и неравенство а) при $k=1$.

Пусть теперь $k=2$. Мы уже доказали, что $F(x) \in H^1(Q)$ и имеют место формулы (5). Правые части в равенствах (5), как функции y, в силу свойства 2 принадлежат $H^1(\Omega)$. Тогда и функции $F_{x_i}(x)$ принадлежат $H^1(Q)$. Следовательно, $F \in H^2(Q)$ и справедливо неравенство а) при $k=2$. Рассматривая третьи производные как производные от вторых и т. д., получаем справедливость утверждения для любого k.

Следующее свойство будет использовано в п. 2.

6. Если область Q есть прямоугольный параллелепипед, то в пространстве $H^k(Q)$ множество $C^\infty(\bar{Q})$ (и, тем самым, $C^k(\bar{Q})$) является всюду плотным множеством.

Это предложение достаточно установить для параллелепипеда $\Pi_a = \{|x_i| < a_i, i=1, \ldots, n\}$, где $a=(a_1, \ldots, a_n)$, $a_i > 0$, $i=1, \ldots, n$.

Возьмем произвольную функцию $f \in H^k(\Pi_a)$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Каково бы ни было α, $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$, функция $D^\alpha f \in L_2(\Pi_a)$, поэтому согласно теореме 2 п. 2 § 2 существует такая функция $\varphi_\alpha(x) \in C(\bar{\Pi}_a)$, что $\|D^\alpha f - \varphi_\alpha\|_{L_2(\Pi_a)} < \varepsilon$.

Рассмотрим в параллелепипеде $\Pi_{a\sigma} = \{|x_i| < a_i\sigma, i=1, \ldots, n\}$, где $\sigma > 1$, $\Pi_a \Subset \Pi_{a\sigma}$, функцию $F_\sigma(x) = f(x/\sigma)$. В силу свойства 4 $F_\sigma \in H^k(\Pi_{a\sigma})$ и, тем самым, $F_\sigma \in H^k(\Pi_a)$. Так как

$$\|D^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_\alpha(x)\|_{L_2(\Pi_a)} \leqslant$$
$$\leqslant \|D^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_\alpha(x/\sigma)\|_{L_2(\Pi_{a\sigma})} + \|\varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x/\sigma)\|_{L_2(\Pi_a)}$$

и согласно теореме 8 п. 8 § 1 гл. II

$$\|D^\alpha F_\sigma(x)-\varphi_\alpha(x/\sigma)\|_{L_2(\Pi_{a\sigma})}=$$

$$=\left\|\frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}D^\alpha f(x/\sigma)-\varphi_\alpha(x/\sigma)\right\|_{L_2(\Pi_{a\sigma})}\leqslant\left\|\left(1-\frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right)D^\alpha f(x/\sigma)\right\|_{L_2(\Pi_{a\sigma})}+$$

$$+\|D^\alpha f(x/\sigma)-\varphi_\alpha(x/\sigma)\|_{L_2(\Pi_{a\sigma})}\leqslant\sigma^{n/2}\left(1-\frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right)\|D^\alpha f\|_{L_2(\Pi_a)}+\sigma^{n/2}\varepsilon,$$

то

$$\|D^\alpha F_\sigma(x)-\varphi_\alpha(x)\|_{L_2(\Pi_a)}\leqslant$$

$$\leqslant\sigma^{n/2}\left(1-\frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right)\|D^\alpha f\|_{L_2(\Pi_a)}+\sigma^{n/2}\varepsilon+\|\varphi_\alpha(x)-\varphi_\alpha(x/\sigma)\|_{L_2(\Pi_a)}.$$

Поэтому для любого α, $0\leqslant|\alpha|\leqslant k$,

$$\|D^\alpha f(x)-D^\alpha F_\sigma(x)\|_{L_2(\Pi_a)}\leqslant\|D^\alpha f-\varphi_\alpha\|_{L_2(\Pi_a)}+\|D^\alpha F_\sigma-\varphi_\alpha\|_{L_2(\Pi_a)}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon(1+\sigma^{n/2})+\sigma^{n/2}\left(1-\frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right)\|D^\alpha f\|_{L_2(\Pi_a)}+\|\varphi_\alpha(x)-\varphi_\alpha(x/\sigma)\|_{L_2(\Pi_a)}.$$

Функция $\varphi_\alpha(x)\in C(\bar{\Pi}_a)$, значит, $\|\varphi_\alpha(x)-\varphi_\alpha(x/\sigma)\|_{L_2(\Pi_a)}\to 0$ при $\sigma\to 1$. Поэтому найдется такое $\sigma=\sigma_0>1$, что для всех α, $0\leqslant|\alpha|\leqslant k$, $\|D^\alpha f(x)-D^\alpha F_{\sigma_0}(x)\|_{L_2(\Pi_a)}\leqslant 3\varepsilon$. Следовательно,

$$\|f-F_{\sigma_0}\|_{H^k(\Pi_a)}\leqslant C\varepsilon.$$

Возьмем теперь среднюю функцию $(F_{\sigma_0})_h(x)$ для функции $F_{\sigma_0}(x)\in H^k(\Pi_{a\sigma_0})$. Из свойства 3 вытекает, что $\|(F_{\sigma_0})_h-F_{\sigma_0}\|_{H^k(\Pi_a)}\to 0$ при $h\to 0$. Значит, можно найти такое $h=h_0$, что $\|(F_{\sigma_0})_{h_0}-F_{\sigma_0}\|_{H^k(\Pi_a)}\leqslant\varepsilon$. Функция $(F_{\sigma_0})_{h_0}(x)\in C^\infty(\bar{\Pi}_a)$ и

$$\|(F_{\sigma_0})_{h_0}-f\|_{H^k(\Pi_a)}\leqslant\|(F_{\sigma_0})_{h_0}-F_{\sigma_0}\|_{H^k(\Pi_a)}+\|F_{\sigma_0}-f\|_{H^k(\Pi_a)}\leqslant(C+1)\varepsilon.$$

Утверждение доказано.

2. О продолжении функций. Пусть функция $f(x)$ задана в области Q и область Q' содержит Q. Функцию $F(x)$, заданную в Q' и совпадающую с $f(x)$ в Q, будем называть *продолжением в* Q' функции $f(x)$. Прежде всего заметим, что для любой функции $f(x)$ существует продолжение. Например, $F(x)$ можно положить равной нулю в $Q'\setminus Q$. В случае, когда $f(x)\in L_2(Q)$, таким продолжением мы уже пользовались. Однако если $f(x)$ является гладкой функцией в Q, например, $f\in H^k(Q)$ (или $f\in C^k(\bar{Q})$) при некотором $k\geqslant 1$, то и продолжение ее $F(x)$ естественно разыскивать в классах функций, столь же гладких в Q': из $H^k(Q')$ (или из $C^k(\bar{Q}')$). Покажем, что при определенных условиях на границу области Q такие продолжения существуют.

Пусть сначала область Q' есть куб K_a с ребром $2a>0$, $K_a = \{|y_i|<a, i=1, \ldots, n\}$ (независимые переменные мы будем здесь обозначать через $y_1, \ldots, y_n$), а область Q есть параллелепипед $K_a^+=K_a \cap \{y_n>0\}$. Продолжение $Z(y)$ некоторой функции $z(y) \in C^k(\bar{K}_a^+)$ определим в $K_a^-=K_a \cap \{y_n<0\}$ следующим образом:

$$Z(y)=\sum_{i=1}^{k+1} A_i z(y', -y_n/i), \tag{6}$$

где $y'=(y_1, \ldots, y_{n-1})$, а $A_1, \ldots, A_{k+1}$ — решение линейной алгебраической системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{k+1} (-1/i)^s A_i=1, \qquad s=0, \ldots, k. \tag{7}$$

Заметим, что если $y \in K_a^-$, то точки $(y', -y_n/i)$ в (6) при всех $i=1, \ldots, k+1$ лежат в K_a^+. Определитель системы (7) (определитель Вандермонда) отличен от нуля, поэтому система (7) имеет единственное решение $A_1, \ldots, A_{k+1}$.

Для любого $y^0=(y^{0\prime}, 0) \in K_a \cap \{y_n=0\}$ функцию $Z(y)$ положим равной $\lim\limits_{\substack{y\to y^0\\ y\in K_a^+}} z(y)$. Таким образом, функция $Z(y)$ определена на всем K_a. Так как $z(y) \in C^k(\bar{K}_a^+)$, то в силу (6) $Z(y) \in C^k(\bar{K}_a^-)$. Покажем сначала, что $Z(y) \in C(\bar{K}_a)$.

Переходя в (6) к пределу при $y \to y^0$, $y \in K_a^-$, в силу (7) получим

$$\lim_{\substack{y\to y^0\\ y\in K_a^-}} Z(y)=\sum_{i=1}^{k+1} A_i \lim_{\substack{y\to y^0\\ y\in K_a^+}} z(y)=\sum_{i=1}^{k+1} A_i Z(y^0)=Z(y^0).$$

Это означает, что $Z(y) \in C(\bar{K}_a)$.

Для любого целочисленного вектора $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leqslant k$, согласно (6) при $y \in K_a^-$ имеем

$$D^\alpha Z(y)=\sum_{i=1}^{k+1} A_i (-1/i)^{\alpha_n} D^\alpha z(y', -y_n/i). \tag{8}$$

Переходя к пределу при $y \to y^0$, $y \in K_a^-$, в равенствах (8) при всевозможных α, для которых $|\alpha|=1$, получим, что

$$\lim_{\substack{y\to y^0\\ y\in K_a^-}} D^\alpha Z(y)=\lim_{\substack{y\to y^0\\ y\in K_a^+}} D^\alpha Z(y).$$

Тогда в точках плоскости $K_a \cap \{y_n=0\}$ существуют все первые производные функции $Z(y)$, и они совпадают с соответствующими предельными значениями. Следовательно, $Z(y) \in C^1(\bar{K}_a)$. Повторяя эти рассуждения, в силу (7) получим, что $Z(y) \in C^l(\bar{K}_a)$ при всех $l \leqslant k$.

Из равенства (8) следует, что при любом α, $|\alpha| \leqslant k$, для всех $y \in K_a^-$

$$|D^\alpha Z(y)|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} A_i^2 \frac{1}{i^{2\alpha_n}} \cdot \sum_{i=1}^{k+1} |D^\alpha z(y', -y_n/i)|^2 = \\ = C_0 \sum_{i=1}^{k+1} |D^\alpha z(y', -y_n/i)|^2.$$

Интегрируя это неравенство по $y \in K_a^-$, получим

$$\int_{K_a^-} |D^\alpha Z|^2 \, dy \leqslant C_0 \sum_{i=1}^{k+1} \int_{K_a^-} |D^\alpha z(y', -y_n/i)|^2 \, dy = \\ = C_0 \sum_{i=1}^{k+1} i \int_{K_a^+ \cap \{y_n < a/i\}} |D^\alpha z(y)|^2 \, dy \leqslant C' \int_{K_a^+} |D^\alpha z(y)|^2 \, dy.$$

Поскольку $Z(y) = z(y)$ при $y \in K_a^+$, то

$$\int_{K_a} |D^\alpha Z(y)|^2 \, dy = \int_{K_a^+} |D^\alpha Z(y)|^2 \, dy + \int_{K_a^-} |D^\alpha Z(y)|^2 \, dy \leqslant \\ \leqslant C'' \int_{K_a^+} |D^\alpha z(y)|^2 \, dy.$$

Суммируя эти неравенства по всем α, $|\alpha| \leqslant k$, получим неравенство

$$\|Z\|_{H^k(K_a)} \leqslant C_1 \|z\|_{H^k(K_a^+)}, \tag{9}$$

в котором постоянная $C_1 > 0$ не зависит от функции $z(y)$.

Таким образом, построено продолжение $Z(y) \in C^k(\bar{K}_a)$ функции $z(y)$ из $C^k(\bar{K}_a^+)$ и для него имеет место неравенство (9).

Пусть теперь функция $z(y) \in H^k(K_a^+)$. В силу свойства 6 из предыдущего пункта существует последовательность $z_s(y)$, $s = 1, 2, \ldots$, функций из $C^k(\bar{K}_a^+)$, сходящаяся к функции $z(y)$ в норме $H^k(K_a^+)$: $\|z_s - z\|_{H^k(K_a^+)} \to 0$ при $s \to \infty$. Обозначим через $Z_s(y)$ продолжение функции $z_s(y)$ в K_a, полученное описанным только что способом, $Z_s(y) \in C^k(\bar{K}_a)$. В силу (9) имеем неравенство $\|Z_s - Z_p\|_{H^k(K_a)} \leqslant C_1 \|z_s - z_p\|_{H^k(K_a^+)}$, показывающее, что последовательность функций Z_s, $s = 1, 2, \ldots$, фундаментальна в норме $H^k(K_a)$. Это означает, что существует функция $Z(y) \in H^k(K_a)$, к которой в норме $H^k(K_a)$ эта последовательность сходится. Поскольку $Z(y) = z(y)$ для $y \in K_a^+$, то функция $Z(y)$

является продолжением в K_a функции $z(y)$. Функция $Z(y)$, очевидно, удовлетворяет неравенству (9).

Итак, доказана следующая

Лемма 1. *Для любой функции $z(y) \in H^k(K_a^+)$ $(C^k(\bar{K}_a^+))$ существует продолжение $Z(y) \in H^k(K_a)$ $(C^k(K_a))$. При этом имеет место неравенство* (9).

Отметим, что так как для функций $Z_s(y)$, $s=1, 2, \ldots$, имеют место равенства (6) и $z_s \to z$ в $H^k(K_a^+)$, а $Z_s \to Z$ в $H^k(K_a^-)$, то это равенство справедливо и для функций $Z(y)$.

Лемма 2. *Пусть функция $f(x) \in H^k(Q)$ (или $C^k(\bar{Q})$) и для любой точки $\xi \in \partial Q$ существует функция $F_\xi(x)$, определенная в шаре $S_r(\xi) = \{|x-\xi| < r\}$ некоторого радиуса $r = r(\xi) > 0$, такая, что $F_\xi(x) = f(x)$ для $x \in Q \cap S_r(\xi)$ и $F_\xi(x) \in H^k(S_r(\xi))$ $(C^k(S_r(\xi)))$ (функцию $F_\xi(x)$ будем называть продолжением функции $f(x)$ в шар $S_r(\xi)$). Пусть, кроме того, имеет место неравенство*

$$\|F_\xi\|_{H^k(S_r(\xi))} \leqslant C_2 \|f\|_{H^k(Q)} \tag{10}$$

с постоянной C_2, не зависящей от функции $f(x)$.

*Тогда при любом $\rho > 0$ существует продолжение $F(x)$ в область Q^ρ *) функции $f(x)$, обладающее свойствами: $F(x) \in H^k(Q^\rho)$ $(C^k(\bar{Q}^\rho))$, $F(x) = 0$ вне $Q^{\rho/2}$, существует такая постоянная $C_3 > 0$, зависящая лишь от области Q и числа ρ, что*

$$\|F\|_{H^k(Q^\rho)} \leqslant C_3 \|f\|_{H^k(Q)}. \tag{11}$$

По условию леммы для любой точки $\xi \in \bar{Q}$ существует шар $S_r(\xi)$, $r = r(\xi)$, в котором определена или сама функция $f(x) \in H^k(S_r(\xi))$ $(C^k(\bar{S}_r(\xi)))$, если $\xi \in Q$, или ее продолжение из того же класса. Считаем, что $r(\xi) < \rho$. Совокупность шаров $S_{r/3}(\xi)$ при всевозможных $\xi \in \bar{Q}$ покрывает множество $\bar{Q}$. Следовательно (напомним, что область Q ограничена), из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $S_{r_1/3}(x^1), \ldots, S_{r_N/3}(x^N)$, где $r_i = r(x^i)$.

Пусть функция $\theta_i(x) \in C^\infty(R_n)$, $\theta_i(x) = 1$ в $S_{r_i/3}(x^i)$ и $\theta_i(x) = 0$ вне шара $S_{r_i/2}(x^i)$, $i = 1, \ldots, N$. Обозначим через $\sigma_i(x)$ функцию $1 - \theta_i(x)$, $i = 1, \ldots, N$, и построим функции

$$\gamma_1(x) = \theta_1(x),\ \gamma_2(x) = \sigma_1(x)\,\theta_2(x), \ldots,$$
$$\gamma_i(x) = \sigma_1(x) \ldots \sigma_{i-1}(x)\,\theta_i(x), \qquad i \leqslant N.$$

Ясно, что $\gamma_i(x) \in C^\infty(R_n)$,

$$\gamma_i(x) = 0 \text{ в } \bigcup_{j<i} S_{r_j/3}(x^j) \tag{12}$$

*) Q^ρ — объединение по всем $x^0 \in Q$ шаров $\{|x - x^0| < \rho\}$.

и

$$\gamma_i(x)=0 \text{ вне } S_{r_i/2}(x^i). \tag{13}$$

Кроме того,

$$\gamma_1(x)+\ldots+\gamma_i(x)=(1-\sigma_1(x))+\sigma_1(x)(1-\sigma_2(x))+\ldots+ \\ +\sigma_1(x)\ldots\sigma_{i-1}(x)(1-\sigma_i(x))=1-\sigma_1(x)\ldots\sigma_i(x),$$

поэтому

$$\gamma_1(x)+\ldots+\gamma_i(x)=1 \tag{14}$$

для $x\in\bigcup\limits_{j\leqslant i} S_{r_j/3}(x^j)$ и, в частности, для $x\in S_{r_i/3}(x^i)$.

Определим функции $f_i(x)$, $i=1,\ldots,N$, для всех $x\in R_n$ следующим образом: в $S_{r_i}(x^i)$ функция $f_i(x)$ совпадает или с $f(x)$ или с ее продолжением $F_{x^i}(x)$ в $S_{r_i}(x^i)$, вне $S_{r_i}(x^i)$ функция $f_i(x)$ равна $f(x)$, если $x\in Q$, и нулю, если $x\notin Q$.

В силу (13) и свойств 2 и 4 из предыдущего пункта функция $\gamma_i(x)f_i(x)\in H^k(Q^\rho)$ $(C^k(\bar{Q}^\rho))$. Поэтому функция

$$F(x)=\sum_{i=1}^{N} f_i(x)\gamma_i(x) \tag{15}$$

принадлежит $H^k(Q^\rho)$ $(C^k(\bar{Q}^\rho))$.

Пусть x — произвольная точка из Q, и пусть $S_{r_l/3}(x^l)$ — первый шар выбранного конечного покрытия, содержащий эту точку. Так как для всех $i=1,\ldots,N$ $f_i(x)=f(x)$ и из (12) $\gamma_i(x)f(x)=0$ при $i>l$, то $F(x)=\sum\limits_{i=1}^{l}\gamma_i(x)f(x)=f(x)$ в силу (14). Это означает, что функция $F(x)$ из (15) является продолжением функции $f(x)$. Равенство $F(x)\equiv 0$ вне $Q^{\rho/2}$ вытекает из (13) и (15), поскольку $r_i<\rho$, $i=1,\ldots,N$. Неравенство (11) немедленно следует из (10) и (15). Лемма доказана.

Теорема 1 (о продолжении). *Пусть Q и Q' — ограниченные области, $Q\Subset Q'$ и $\partial Q\in C^k$. Тогда для любой функции $f(x)\in H^k(Q)$ $(C^k(\bar{Q}))$ существует финитное в Q' продолжение $F(x)\in H^k(Q')$ $(C^k(\bar{Q}'))$. При этом*

$$\|F\|_{H^k(Q')}\leqslant C\|f\|_{H^k(Q)}, \tag{16}$$

где постоянная $C>0$ зависит лишь от Q и Q'.

Возьмем произвольную точку $\xi\in\partial Q$. В некоторой ее окрестности U_ξ уравнение ∂Q можно представить (перенумеровав, если нужно, переменные) в виде $x_n=\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})$ с функцией $\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})\in C^k(\bar{D})$, где $(n-1)$-мерная область D — проекция $\partial Q\cap U_\xi$ на плоскость $x_n=0$. Считаем, что в области $Q\cap U_\xi$ $x_n>\varphi$. Замена переменных

$$y_i=x_i-\xi_i,\quad i=1,\ldots,n-1,\qquad y_n=x_n-\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}) \tag{17}$$

взаимно однозначно отображает U_ξ на некоторую окрестность Ω начала координат в переменных $y_1, \ldots, y_n$. Пусть K_a — куб $\{|y_i|<a,\ i=1, \ldots, n\}$, принадлежащий области Ω, а область U'_ξ — его прообраз при преобразовании (17). Образом области $Q \cap U'_\xi$ тогда будет параллелепипед $K_a^+ = K_a \cap \{y_n > 0\}$, а заданная в $Q \cap U'_\xi$ функция $f(x)$ перейдет в функцию $z(y) = f(y_1+\xi_1, \ldots$ $\ldots, y_{n-1}+\xi_{n-1}, y_n+\varphi(y_1+\xi_1, \ldots, y_{n-1}+\xi_{n-1}))$, принадлежащую в силу свойства 5 предыдущего пункта $H^k(K_a^+)$ $(C^k(\bar{K}_a^+))$.

Согласно лемме 1 существует продолжение $Z(y)$ функции $z(y)$ в куб K_a. Это продолжение порождает в силу обратного к (17) преобразования

$$x_i = y_i + \xi_i, \quad i=1, \ldots, n-1, \quad x_n = y_n + \varphi(y_1+\xi_1, \ldots, y_{n-1}+\xi_{n-1})$$

продолжение $F_\xi(x)$ функции $f(x)$ из $Q \cap U'_\xi$ в U'_ξ и, тем более, в шар $S_r(\xi)$ некоторого радиуса $r = r(\xi) > 0$ с центром в точке ξ, содержащийся в U'_ξ. При этом (см. свойство 5 п. 1) имеют место неравенства

$$\|F_\xi\|_{H^k(S_r(\xi))} \leqslant \|F_\xi\|_{H^k(U'_\xi)} \leqslant C_3 \|Z\|_{H^k(K_a)},$$
$$\|z\|_{H^k(K_a^+)} \leqslant C_4 \|f\|_{H^k(U'_\xi \cap Q)} \leqslant C_4 \|f\|_{H^k(Q)},$$

в которых постоянные C_3 и C_4 зависят лишь от функции $\varphi(x_1, \ldots$ $\ldots, x_{n-1})$ из (17) и ее производных до порядка k включительно. Из этих неравенств и неравенства (9) вытекает неравенство (10). Утверждение теоремы следует теперь из леммы 2, если взять ρ меньшим расстояния между границами ∂Q и $\partial Q'$ областей Q и Q'.

Замечание. Построенное при доказательстве теоремы 1 продолжение $F(x)$ в область Q' принадлежащей $H^k(Q)$ функции $f(x)$ удовлетворяет не только неравенству (16), но и неравенствам

$$\|F\|_{H^s(Q')} \leqslant C \|f\|_{H^s(Q)}$$

при всех $s \leqslant k$.

До сих пор мы продолжали функцию из области в более широкую область. В дальнейшем нам потребуется гладкое продолжение функции с границы.

Пусть на границе ∂Q области Q задана непрерывная функция $f(x)$. Непрерывную в $\bar{Q}$ функцию $F(x)$ будем называть *продолжением в* Q функции $f(x)$, если для $x \in \partial Q$ $F(x) = f(x)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если граница $\partial Q \in C^k$ при некотором $k \geqslant 1$, то для любой функции $f(x) \in C^k(\partial Q)$ существует функция $F(x)$ из $C^k(\bar{Q})$, являющаяся продолжением в Q функции $f(x)$. При этом имеет место неравенство*

$$\|F\|_{C^k(\bar{Q})} \leqslant C \|f\|_{C^k(\partial Q)},$$

в котором постоянная $C > 0$ не зависит от f.

Так как $\partial Q \in C^k$, то для любой точки $\xi \in \partial Q$ существует такое число $\rho = \rho(\xi) > 0$, что кусок границы $\partial Q \cap S_\rho(\xi)$ ($S_\rho(\xi)$ — шар радиуса ρ с центром в точке ξ) однозначно проектируется в некоторую область D_ξ какой-нибудь координатной плоскости — пусть плоскости $x_n = 0$ (за счет изменения нумерации переменных этого всегда можно добиться) и уравнение поверхности $\partial Q \cap S_\rho(\xi)$ имеет вид $x_n = \varphi(x')$, $x' \in D_\xi$, где $\varphi(x') \in C^k(\overline{D}_\xi)$.

Выберем такое достаточно малое число $r = r(\xi) > 0$, что $(n-1)$-мерный шар $\{|x' - \xi'| < r\} \Subset D_\xi$. Тогда функция n переменных $F_\xi(x) = f(x', \varphi(x'))$ (не зависящая от x_n) определена на замкнутом шаре $\overline{S_r(\xi)}$, принадлежит $C^k(\overline{S_r(\xi)})$ и на $\partial Q \cap S_r(\xi)$ совпадает с f. При этом $\|F_\xi\|_{C^k(\overline{S_r(\xi)})} \leqslant C(\xi) \|f\|_{C^k(\partial Q)}$, где постоянная $C(\xi)$ не зависит от f.

Множество шаров $S_{r/3}(\xi)$ при всех $\xi \in \partial Q$ покрывает границу ∂Q. Выберем из этого множества конечное покрытие границы $S_{r_1/3}(x^1), \ldots, S_{r_N/3}(x^N)$, где $r_i = r(x^i)$.

Определим для любого $i = 1, \ldots, N$ функцию $f_i(x)$ следующим образом: в шаре $S_{r_i}(x^i)$ положим ее равной $F_{x^i}(x)$, а вне $S_{r_i}(x^i)$ равной нулю, если $x \notin \partial Q$, и равной $f(x)$, если $x \in \partial Q$. Тогда при всех $i = 1, \ldots, N$ функции $f_i(x)\gamma_i(x)$, где $\gamma_i(x)$ — функция, построенная в процессе доказательства леммы 2, принадлежит $C^k(R_n)$ и, тем самым, $C^k(\overline{Q})$. Значит, и функция

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i(x) f_i(x)$$

тоже принадлежит $C^k(\overline{Q})$.

Возьмем произвольную точку $x \in \partial Q$ и предположим, что первым шаром из выбранного конечного покрытия границы, содержащим эту точку, является шар $S_{r_l/3}(x^l)$. Поскольку для всех $i = 1, \ldots, N$ $f_i(x) = f(x)$, то из соотношений (12) и (14) вытекает, что $F(x) = \sum_{i=1}^{l} \gamma_i(x) f(x) = f(x)$. Таким образом, функция $F(x)$ является продолжением из $C^k(\overline{Q})$ функции $f(x)$. Требуемая оценка является следствием соответствующих неравенств для функций $F_{x^i}(x)$. Теорема доказана.

3. Плотность $C^\infty(\overline{Q})$ в $H^k(Q)$. Пространства $\mathring{H}^k(Q)$. Пусть граница ∂Q области Q принадлежит классу C^k.

Теорема 3. *Множество функций $C^\infty(\overline{Q})$ (и, тем более, $C^k(\overline{Q})$) является всюду плотным в пространстве $H^k(Q)$.*

Возьмем какую-нибудь область Q', для которой область Q является строго внутренней, $Q \Subset Q'$. Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $H^k(Q)$. В силу теоремы 1 предыдущего пункта существует продолжение $F(x)$ функции $f(x)$ из Q в Q', принадлежащее $H^k(Q')$. Согласно свойству 3 (из п. 1) имеет место соотношение

$$\|F_h - f\|_{H^k(Q)} = \|F_h - F\|_{H^k(Q)} \to 0 \text{ при } h \to 0,$$

где $F_h(x)$ — средняя функция для $F(x)$. Так как $F_h(x) \in C^\infty(\bar{Q})$, то теорема доказана.

Множество $C^k(\bar{Q})$ есть линейное многообразие в $H^k(Q)$. Из теоремы 3 вытекает, что если граница области $\partial Q \in C^k$, то замыкание множества $C^k(\bar{Q})$ в норме пространства $H^k(Q)$ совпадает с $H^k(Q)$.

Пусть S — некоторая $(n-1)$-мерная поверхность, содержащаяся в $\bar{Q}$. Подмножество $\dot{C}_S^k(\bar{Q})$ функций из $C^k(\bar{Q})$, обращающихся в нуль в пересечении с Q некоторой (своей для каждой функции) окрестности поверхности S, тоже является линейным многообразием в $H^k(Q)$. Замыкание $\dot{C}_S^k(\bar{Q})$ в норме $H^k(Q)$ является подпространством пространства $H^k(Q)$. Обозначим его через $\mathring{H}_S^k(Q)$.

В случае, когда $S = \partial Q$, подпространство $\mathring{H}_{\partial Q}^k(Q)$ будем обозначать через $\mathring{H}^k(Q)$ (нормой в $\mathring{H}^k(Q)$ является норма пространства $H^k(Q)$). Из теоремы 6 п. 3 § 2 следует, что при $k=0$ подпространство $\mathring{H}^k(Q) = \mathring{H}^0(Q)$ совпадает с пространством $H^0(Q) = L_2(Q)$. В п. 1 следующего параграфа будет показано, что при $k \geqslant 1$ $\mathring{H}^k(Q)$ не совпадает с $H^k(Q)$.

Если Q' — некоторая область, содержащая область Q, $Q \subset Q'$, то любая функция $f(x)$ из $\dot{C}^k(\bar{Q})$, продолженная нулем в $Q' \setminus Q$, принадлежит $\dot{C}^k(\bar{Q}')$. Поэтому из определения пространства $\mathring{H}^k$ следует, что продолженная нулем в $Q' \setminus Q$ функция $f(x)$ из $\mathring{H}^k(Q)$ принадлежит $\mathring{H}^k(Q')$.

4. **Сепарабельность пространства $H^k(Q)$.** Будем считать, что граница ∂Q области Q принадлежит классу C^k.

Теорема 4. *Пространство $H^k(Q)$ сепарабельно.*

Рассмотрим сначала куб $K = \{|x_i| < \pi, \ i = 1, \ldots, n\}$. Счетная система функций $(2\pi)^{-n/2} e^{i(m,x)}$, где $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, i = 1, \ldots, n$, $(m, x) = m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n$, является ортонормированной системой в $L_2(K)$. Любой функции $f(x) \in L_2(K)$ можно сопоставить ряд Фурье

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_m f_m e^{i(m,x)} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{s \leqslant |m| < s+1} f_m e^{i(m,x)}, \tag{18}$$

где $f_m = \dfrac{(f(x), e^{i(m,x)})_{L_2(K)}}{(2\pi)^{n/2}}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а $|m|^2 = m_1^2 + \ldots + m_n^2$.

Пусть функция $f(x) \in \dot{C}^\infty(\bar{K})$. Прежде всего заметим, что для всех m имеет место неравенство

$$|f_m| \leqslant (2\pi)^{n/2} \|f\|_{C(\bar{K})} = C_0. \tag{19}$$

Положим $m' = (m_1, \ldots, m_{n-1})$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $K' = \{|x_i| < \pi, i = 1, \ldots, n-1\} \subset R_{n-1}$. Если $m_n \neq 0$, то

$$f_m = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K f(x) e^{i(m,x)}\, dx =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{K'} e^{i(m',x')}\, dx' \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x', x_n) e^{ix_n m_n}\, dx_n \right) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(-\frac{1}{im_n} \right)^p \int_K \frac{\partial^p f(x)}{\partial x_n^p} e^{i(m,x)}\, dx$$

при любом натуральном p, откуда $|f_m| \leqslant \dfrac{(2\pi)^{n/2} \|f\|_{C^p(\bar{K})}}{|m_n|^p}$ и, следовательно, в силу (19)

$$|f_m| \leqslant \frac{\|f\|_{C^p(\bar{K})} 2^p (2\pi)^{n/2}}{(1+|m_n|)^p} = \frac{C'_p}{(1+|m_n|)^p}$$

при любом натуральном p.

Наряду с этим неравенством, конечно, имеют место и неравенства

$$|f_m| \leqslant \frac{C'_p}{(1+|m_i|)^p}, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

а значит, и неравенства

$$|f_m| \leqslant C'_p \min_i \left\{ \frac{1}{(1+|m_i|)^p} \right\} = \frac{C'_p}{\left(1 + \max\limits_i |m_i|\right)^p}. \tag{20}$$

Так как $\max\limits_i |m_i| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} |m|$, то из (20) вытекают справедливые при всех m и любого натурального p неравенства

$$|f_m| \leqslant \frac{C'_p}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} |m|\right)^p} \leqslant \frac{C_p}{(1+|m|)^p}. \tag{21}$$

Возьмем $p = n+2$. Число слагаемых в сумме $\sum\limits_{s \leqslant |m| < s+1} f_m e^{i(m,x)}$, равное числу точек m с целыми координатами в шаровом слое $s \leqslant |m| < s+1$, не превосходит числа таких точек в кубе с ребром $2(s+1)$, т. е. не превосходит $(2(s+1))^n$. Поэтому

$$\left|\sum_{s\leqslant|m|<s+1} f_m e^{i(m,x)}\right| \leqslant \sum_{s\leqslant|m|<s+1} |f_m| \leqslant \frac{C_{n+2}2^n(1+s)^n}{(1+s)^{n+2}} = \frac{C_{n+2}2^n}{(1+s)^2}.$$

Это означает, что ряд (18) равномерно в $\bar{K}$ сходится.

Полагая $p=n+3$, получим, что при любом r, $1\leqslant r\leqslant n$,

$$\left|\sum_{s\leqslant|m|<s+1} im_r f_m e^{i(m,x)}\right| \leqslant \frac{C_{n+3}2^n(1+s)^{n+1}}{(1+s)^{n+3}} = \frac{C_{n+3}2^n}{(1+s)^2}.$$

Следовательно, равномерно в $\bar{K}$ сходится ряд, полученный из ряда (18) почленным дифференцированием по x_r, $r=1, \ldots, n$. Аналогично доказывается, что ряды, полученные из ряда (18) почленным его l-кратным, $l=2, 3, \ldots$, дифференцированием, сходятся равномерно в $\bar{K}$.

Обозначим сумму ряда (18) через $g(x)$:

$$g(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\sum_m f_m e^{i(m,x)}.$$

Мы доказали, что $g(x)\in C^\infty(\bar{K})$. Значит, и функция $\varphi(x)=g(x)-f(x)\in C^\infty(\bar{K})$. Покажем, что $\varphi(x)\equiv 0$ в $\bar{K}$.

Так как $\left(g(x), \frac{e^{i(m,x)}}{(2\pi)^{n/2}}\right)_{L_2(K)}=f_m$, то при всех m

$$\int_K \varphi(x)\, e^{i(m,x)}\, dx=0.$$

Фиксируем произвольно $m'=(m_1, \ldots, m_{n-1})$ и перепишем это равенство в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{im_n x_n}\left[\int_{K'} \varphi(x', x_n)\, e^{i(m',x')}\, dx'\right] dx_n=0.$$

Поскольку бесконечно дифференцируемая по x_n, $|x_n|\leqslant\pi$, функция $\varphi_{m'}(x_n)=\int_{K'}\varphi(x', x_n)\, e^{i(m',x')}\, dx'$ ортогональна в скалярном произведении $L_2(-\pi, \pi)$ функциям $e^{im_n x_n}$ при всех $m_n=0, \pm1, \pm2, \ldots$, то при любом m' $\varphi_{m'}(x_n)=0$ для всех x_n, $|x_n|\leqslant\pi$. Введем обозначения: $m''=(m_1, \ldots, m_{n-2})$, $x''=(x_1, \ldots, x_{n-2})$, $K''=K'\cap\{x_{n-1}=0\}$. Для любого фиксированного m'', любого x_n, $|x_n|\leqslant\pi$, и всех $m_{n-1}=0, \pm1, \ldots$, имеем

$$0=\int_{K'}\varphi(x', x_n)\, e^{i(m',x')}\, dx'=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix_{n-1}m_{n-1}}\, dx_{n-1}\int_{K''}\varphi(x'', x_{n-1}, x_n)\, e^{i(x'',m'')}\, dx''.$$

Значит,

$$\int_{K''} \varphi(x'', x_{n-1}, x_n)\, e^{i(m'', x'')}\, dx'' = 0$$

при любых x_{n-1}, x_n, $|x_{n-1}| \leqslant \pi$, $|x_n| \leqslant \pi$ и всех m''. Продолжая этот процесс, получим равенство $\varphi(x) = 0$ в $\bar{K}$.

Таким образом, доказано, что любая функция $f(x) \in \dot{C}^\infty(\bar{K})$ разлагается в ряд (18), сходящийся вместе с производными любого порядка равномерно в $\bar{K}$. Очевидно, что это утверждение справедливо и для любого куба $K_a = \{|x_i| < a,\ i = 1, \ldots, n\}$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Возьмем число $a > 0$ столь большим, чтобы область $Q \Subset K_a$. Согласно теореме 1 п. 2 любую функцию $f(x) \in H^k(Q)$ можно продолжить финитной в K_a функцией $F(x) \in H^k(K_a)$. Из свойства 3 п. 1 вытекает, что любую такую функцию $F(x)$ можно аппроксимировать в норме $H^k(K_a)$ средними функциями $F_h(x)$, являющимися бесконечно дифференцируемыми и при достаточно малых h финитными в K_a.

Как мы доказали, каждая функция $F_h(x)$ (при достаточно малых h) может быть равномерно в $\bar{K}_a$ вместе со всеми производными (а тем самым, и в норме $H^k(K_a)$) приближена частичными суммами ее ряда Фурье. Следовательно, любая функция $F_h(x)$ может быть аппроксимирована в норме $H^k(Q)$ линейными комбинациями системы $e^{i\frac{\pi}{a}(m, x)}$ с коэффициентами, действительные и мнимые части которых — рациональные числа. Таким образом, построено счетное множество, всюду плотное в $H^k(Q)$.

§ 5. Свойства функций из $H^1(Q)$ и $\mathring{H}^1(Q)$

1. След функций. Пусть Q — область в R_n, а S — некоторая гладкая $(n-1)$-мерная поверхность, лежащая в $\bar{Q}$. Если в Q задана определенная в каждой точке функция $f(x)$ (т. е. если равенство функций понимается как равенство их значений в каждой точке), то мы можем рассматривать значение этой функции на S — определенную в каждой точке S функцию $f|_{x \in S}$, значения которой для всех $x \in S$ совпадают со значениями $f(x)$. Если мы рассматриваем в Q функцию, заданную п. в. (т. е. функции равны, если они совпадают почти всюду), то значение f на фиксированной поверхности S определяется неоднозначно: поскольку $\operatorname{mes} S = 0$, то функция может иметь на S произвольное значение. Однако, в определенном смысле, можно говорить о значениях на $(n-1)$-мерных поверхностях и почти всюду определенной функции.

Пусть для простоты поверхность $S = S(x_n)$ является пересечением области Q с плоскостью $x_n = \text{const}$. Тогда в силу теоремы

Фубини*) для почти всех x_n существует определенное почти всюду на S значение $f|_{x\in S(x_n)}$ функции f на $S(x_n)$ (равенство функций $n-1$ переменного, естественно, понимается как равенство их значений почти всюду в смысле $(n-1)$-мерной меры). При этом, очевидно, значение на $S(x_n)$ непрерывной в $\bar{Q}$ функции при почти всех x_n является непрерывной функцией на $S(x_n)$, а значение на $S(x_n)$ функции из $L_2(Q)$ при почти всех x_n принадлежит $L_2(S(x_n))$.

При изучении решений дифференциальных уравнений часто задаются условия, которым решение должно удовлетворять на некоторой фиксированной $(n-1)$-мерной поверхности, например на ∂Q (граничные условия). Поэтому нам понадобится обобщение понятия значения на $(n-1)$-мерной поверхности S почти всюду определенной функции — понятие следа функции на S. Для определенной п. в. функции, удовлетворяющей некоторым условиям гладкости, это понятие можно ввести однозначно. В частности, оно легко вводится для непрерывной в $\bar{Q}$ функции.

Следом $f|_S$ функции f из $C(\bar{Q})$ на $(n-1)$-мерной поверхности S будем называть значение на этой поверхности определенной в каждой точке, непрерывной в $\bar{Q}$ функции, почти всюду совпадающей с f (т. е. под следом на S непрерывной функции мы понимаем ее значение, однозначно распространенное по непрерывности на S). При этом, как обычно, равенство заданных на S функций понимается как равенство почти всюду в смысле $(n-1)$-мерной меры.

Понятие следа функции на S можно вести и для функций из некоторых пространств с интегральными нормами, в частности, для функций из пространств $H^k(Q)$ при $k \geqslant 1$. Так как все $H^k(Q)$ при $k \geqslant 1$ включены в $H^1(Q)$, то это понятие достаточно ввести для функций из $H^1(Q)$.

Пусть S — поверхность класса C^1 (см. гл. I, введение), лежащая в $\bar{Q}$, а S_1 — ее простой кусок, однозначно проектирующийся на некоторую область D плоскости $\{x_n = 0\}$ и имеющий уравнение

$$x_n = \varphi(x'), \text{ где } x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}), \ \varphi(x') \in C^1(\bar{D}).$$

Область Q ограничена, поэтому можно считать, что она расположена в кубе $\{0 < x_i < a, \ i = 1, \ldots, n\}$ при некотором $a > 0$. Предположим сначала, что функция $f(x)$ принадлежит $\dot{C}^1(\bar{Q})$, и положим ее равной нулю вне $\bar{Q}$. Согласно формуле Ньютона — Лейбница

$$f(x)|_{S_1} = f(x', \varphi(x')) = \int_0^{\varphi(x')} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n.$$

*) А точнее, в силу леммы 4 п. 11 § 1 гл. II.

Поэтому на основании неравенства Буняковского

$$\left|f\Big|_{S_1}\right|^2 \leqslant \varphi(x') \int_0^{\varphi(x')} \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n \leqslant a \int_0^a \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n.$$

Умножая это неравенство на $\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2+\ldots+\varphi_{x_{n-1}}^2}$ и интегрируя по D, получим неравенство

$$\|f\|^2_{L_2(S_1)} = \int_{S_1} \left|f\Big|_{S_1}\right|^2 dS_1 \leqslant C^2 \|f\|^2_{H^1(Q)} \tag{1}$$

с постоянной $C>0$, не зависящей от функции f.

Поскольку поверхность S можно покрыть конечным числом простых кусков — кусков типа S_1 (может быть, проектирующихся на другие координатные плоскости), то, суммируя соответствующие неравенства (1), получим неравенство

$$\|f\|_{L_2(S)} \leqslant C\|f\|_{H^1(Q)}, \tag{2}$$

где постоянная $C>0$ не зависит от функции f.

Неравенство (2) имеет место и для любой функции $f(x) \in C^1(\bar{Q})$. Для того чтобы это доказать, достаточно воспользоваться теоремой 1, п. 2, § 4 о продолжении (предполагая, конечно, что $\partial Q \in C^1$) и неравенством (2) для финитной функции из C^1.

Пусть теперь $f \in H^1(Q)$. Из теоремы 3 п. 3 § 4 следует, что существует последовательность $f_p(x)$ $p=1, 2, \ldots$, функций из $C^1(\bar{Q})$, сходящаяся в норме $H^1(Q)$ к f. Для функции $f_p - f_q$ неравенство (2) имеет вид

$$\|f_p - f_q\|_{L_2(S)} \leqslant C\|f_p - f_q\|_{H^1(Q)}. \tag{3}$$

Так как $\|f_p - f_q\|_{H^1(Q)} \to 0$ при p, $q \to \infty$, то и $\|f_p - f_q\|_{L_2(S)} \to 0$ при p, $q \to \infty$. Это означает, что последовательность следов $f_p|_S$ функций f_p на S является фундаментальной в $L_2(S)$. В силу полноты $L_2(S)$ существует функция $f_S(x) \in L_2(S)$, к которой сходится последовательность следов $f_p|_S$ при $p \to \infty$. Переходя в (3) к пределу при $p \to \infty$, получим

$$\|f_q - f_S\|_{L_2(S)} \leqslant C\|f_q - f\|_{H^1(Q)}. \tag{4}$$

Покажем, что функция $f_S(x)$ не зависит от выбора последовательности $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, аппроксимирующей в норме $H^1(Q)$ функцию $f(x)$. Действительно, пусть $\tilde{f}_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, — другая последовательность функций из $C^1(\bar{Q})$, для которой $\|f - \tilde{f}_k\|_{H_1(Q)} \to 0$ при $k \to \infty$, а $\tilde{f}_S(x)$ — предел в норме $L_2(S)$ последовательности $\tilde{f}_k|_S$, $k=1, 2, \ldots$ Тогда

$$\|f_S - \tilde{f}_S\|_{L_2(S)} \leqslant \|f_S - f_q\|_{L_2(S)} + \|f_q - \tilde{f}_q\|_{L_2(S)} + \|\tilde{f}_q - \tilde{f}_S\|_{L_2(S)} \leqslant$$
$$\leqslant C(\|f - f_q\|_{H^1(Q)} + \|f_q - \tilde{f}_q\|_{H^1(Q)} + \|\tilde{f}_q - \tilde{f}_S\|_{H^1(Q)})$$

в силу неравенств (3) и (4). Так как при $q\to\infty$ правая часть последнего неравенства стремится к нулю, то $f_S=\tilde{f}_S$.

Функцию $f_S(x)$ (как элемент $L_2(S)$) будем называть *следом функции* $f(x)\in H^1(Q)$ *на поверхности* S и обозначать символом $f|_S$ ($\|f|_S\|_{L_2(S)}$ будем обозначать через $\|f\|_{L_2(S)}$).

Таким образом, понятие следа функции определено для любого элемента f из $H^1(Q)$.

Покажем, что это понятие действительно является обобщением понятия значения функции на $(n-1)$-мерной поверхности. Пусть, для простоты, $S=S(x_n)$ — пересечение области Q с плоскостью $x_n=\mathrm{const}$, а функция $f\in H^1(Q)$. Возьмем последовательность $f_m(x)$, $m=1, 2, \ldots$, функций из $C^1(\bar{Q})$, сходящуюся к f в норме пространства $H^1(Q)$. По определению, следом $f|_{S(x_n)}$ при каждом x_n является предел в $L_2(S(x_n))$ последовательности функций $f_m|_{S(x_n)}$. Так как последовательность f_m, $m=1, 2, \ldots$, сходится в $L_2(Q)$ к f, то по замечанию к теореме 1 п. 1 § 2 из нее можно выбрать подпоследовательность f_{m_k}, $k=1, \ldots$, сходящуюся к f почти всюду в Q. То есть для почти всех x_n последовательность $f_{m_k}|_{S(x_n)}$, $k=$ $=1, 2, \ldots$, сходится к значению функции f на $S(x_n)$ почти всюду в смысле $(n-1)$-мерной меры. Следовательно, для почти всех x_n след и значение функции f на $S(x_n)$ совпадают.

Таким образом, мы располагаем понятиями следа на S функций, непрерывных в $\bar{Q}$, и функций, принадлежащих $H^1(Q)$. Проверим, что если функция f принадлежит и $C(\bar{Q})$ и $H^1(Q)$, то ее след, как след функции из $C(\bar{Q})$ (обозначим его через $f|_S'$), и ее след, как след функции из $H^1(Q)$ (обозначим его через $f|_S''$), совпадают. Действительно, в силу теоремы 1 п. 2 предыдущего параграфа функцию f можно продолжить в область Q', $Q\Subset Q'$, так, что ее продолжение F будет принадлежать и $C(\bar{Q}')$ и $H^1(Q')$. Рассмотрим средние функции $F_h(x)$ для функции F. Поскольку $F_h\to F$ при $h\to 0$ и в норме пространства $C(\bar{Q})$ (см. п. 1 § 1) и в норме пространства $H^1(Q)$ (см. п. 1 § 4, свойство 3), то при $h\to 0$ $F_h(x)|_S\to f|_S'$ в норме пространства $C(\bar{S})$ и $F_h(x)|_S\to f|_S''$ в норме пространства $L_2(S)$. Следовательно, $f|_S'=f|_S''$.

След $f|_S$ функции $f(x)\in \overset{\circ}{H}{}^1_S(Q)$ (определение этого пространства см. в п. 3 § 4) равен нулю, поскольку функция $f|_S$ есть предел в норме $L_2(S)$ функций, равных нулю на S (следов на S функций из $\dot{C}^1_S(\bar{Q})$). В частности, след $f|_{\partial Q}$ функции $f(x)\in\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ равен нулю. Отсюда, между прочим, вытекает утверждение п. 3 предыдущего параграфа о том, что $\overset{\circ}{H}{}^k(Q)\neq H^k(Q)$ при $k\geqslant 1$: принадлежащая любому $H^k(Q)$, $k\geqslant 1$, функция, равная 1, непрерывна в $\bar{Q}$, поэтому ее след на ∂Q равен 1; следовательно, эта функция не принадлежит $\overset{\circ}{H}{}^k(Q)$ ни при каком $k\geqslant 1$.

След $f|_S$ функции $f \in H^1(Q)$ удовлетворяет неравенству (2). Для доказательства этого достаточно в неравенстве (2), написанном для функций $f_p(x)$ ($f_p(x) \in C^1(\bar{Q})$, $\|f_p - f\|_{H^1(Q)} \to 0$ при $p \to \infty$), перейти к пределу при $p \to \infty$.

До сих пор мы предполагали, что граница $\partial Q \in C^1$. Однако если $S \Subset Q$, то для определения следа функции на S и доказательства неравенства (2) это требование излишне. Действительно, в этом случае найдется такая область $Q' \Subset Q$, что $\partial Q' \in C^1$ и $S \in Q'$.

Таким образом, нами доказана

Теорема 1. *Пусть $(n-1)$-мерная поверхность S класса C^1 или принадлежит Q', $Q' \Subset Q$, или вместо этого $S \subset \bar{Q}$ и дополнительно $\partial Q \in C^1$. Тогда любая функция $f(x) \in H^1(Q)$ имеет след $f|_S$ на этой поверхности, принадлежащий $L_2(S)$, и имеет место неравенство* (2).

Пусть функция $f(x) \in H^k(Q)$, $k > 1$. Поскольку любая обобщенная производная $D^\alpha f$, порядка $|\alpha| < k$, принадлежит $H^1(Q)$, то согласно теореме 1 на любой $(n-1)$-мерной поверхности S класса C^1 существует след этой производной $D^\alpha f|_S$, принадлежащий $L_2(S)$. При этом имеют место неравенства

$$\|D^\alpha f\|_{L_2(S)} \leqslant C \|f\|_{H^{|\alpha|+1}(Q)} \leqslant C \|f\|_{H^k(Q)} \tag{5}$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от функции f.

2. Формула интегрирования по частям. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат $H^1(Q)$ и $\partial Q \in C^1$. Тогда для любого $i = 1, \ldots, n$ справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_Q f_{x_i} g\, dx = \int_{\partial Q} f g n_i\, dS - \int_Q f g_{x_i}\, dx, \tag{6}$$

где $n_i = \cos(n, x_i)$ — косинус угла между внешней нормалью n к поверхности ∂Q и осью x_i, а функции f и g, стоящие под знаком интеграла по ∂Q, — следы функций f и g на ∂Q. Таким образом, с точки зрения применимости формулы (6) функции из $H^1(Q)$ ведут себя так же, как функции из $C^1(\bar{Q})$.

Для доказательства равенства (6) возьмем (теорема 3 п. 3 § 4) последовательности $f_p(x)$ и $g_p(x)$, $p = 1, 2, \ldots$, функций из $C^1(\bar{Q})$, сходящиеся в норме $H^1(Q)$ к функциям $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Для функций f_p и g_p равенство (6) справедливо:

$$\int_Q f_{p x_i} g_q\, dx = \int_{\partial Q} f_p g_q n_i\, dS - \int_Q f_p g_{q x_i}\, dx.$$

Переходя в нем к пределу при $p \to \infty$ и $q \to \infty$ (напомним, что $\|f_p - f\|_{L_2(\partial Q)} \to 0$, $\|g_q - g\|_{L_2(\partial Q)} \to 0$), получим равенство (6).

Из (6) немедленно следует, что если $g \in H^1(Q)$ и компоненты $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, вектора $f(x)$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, принадлежат $H^1(Q)$, то имеет место равенство

$$\int_Q g \operatorname{div} f\, dx = \int_{\partial Q} g\,(f\cdot n)\, dS - \int_Q f\cdot \nabla g\, dx. \tag{7}$$

3. Свойства следов функций из $H^1(Q)$. Критерий принадлежности подпространству $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$. Пусть Γ_0 — достаточно малый (т. е. содержащийся в шаре достаточно малого радиуса r_0) простой кусок некоторой лежащей в $\bar{Q}$ поверхности класса C^1, и пусть Γ_0 однозначно проектируется в некоторую область D координатной плоскости $\{x_n=0\}$, причем $x_n=\varphi(x')$, $x'\in D$, — уравнение Γ_0, $\varphi(x')\in C^1(\bar{D})$.

Обозначим через Γ_δ поверхность $\{x'\in D,\ x_n=\varphi(x')+\delta\}$, а через Ω_δ — область $\{x'\in D,\ \varphi(x')<x_n<\varphi(x')+\delta\}$ при $\delta>0$ или область $\{x'\in D,\ \varphi(x')+\delta<x_n<\varphi(x')\}$ при $\delta<0$. Отметим, что при достаточно малом $|\delta|$ (и достаточно малом r_0) по крайней мере одна из областей $\Omega_{+|\delta|}$ или $\Omega_{-|\delta|}$ содержится в Q.

Пусть $x\in\Omega_\delta\subset Q$, тогда для любой функции $f\in C^1(\bar{Q})$ имеем

$$f(x',\ \varphi(x')+\delta)-f(x',\ \varphi(x'))=\int_{\varphi(x')}^{\varphi(x')+\delta}\frac{\partial f(x',\ x_n)}{\partial x_n}\,dx_n,$$

откуда

$$|f(x',\ \varphi(x')+\delta)-f(x',\ \varphi(x'))|^2\leqslant\left|\delta\int_{\varphi(x')}^{\varphi(x')+\delta}\left|\frac{\partial f(x',\ x_n)}{\partial x_n}\right|^2 dx_n\right|.$$

Умножая это неравенство на $\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2+\ldots+\varphi_{x_{n-1}}^2}$ и интегрируя по области D, получаем

$$\|f(x^\delta)-f(x^0)\|_{L_2(\Gamma_0)}\leqslant C\sqrt{|\delta|}\,\|f\|_{H^1(\Omega_\delta)}, \tag{8}$$

где $x^0=(x',\ \varphi(x'))\in\Gamma_0$, $x^\delta=x^\delta(x^0)=(x',\ \varphi(x')+\delta)\in\Gamma_\delta$, а $C^2=$ $=\max\limits_{x'\in\bar{D}}\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2+\ldots+\varphi_{x_{n-1}}^2}$.

Очевидно, что наряду с неравенством (8) имеет место и неравенство

$$\|f(x^\delta)-f(x^0)\|_{L_2(\Gamma_\delta)}\leqslant C\sqrt{|\delta|}\,\|f\|_{H^1(\Omega_\delta)}. \tag{9}$$

Приближая функцию $f\in H^1(Q)$ функциями класса $C^1(\bar{Q})$, в силу определения следа функции из $H^1(Q)$ получаем, что неравенства (8) и (9) справедливы для всех функций из $H^1(Q)$.

Эти неравенства выражают определенную непрерывность следов на поверхностях Γ_δ функций из $H^1(Q)$ в зависимости от сдвигов этих поверхностей.

Если след на Γ_0 функции f равен нулю, $f|_{\Gamma_0}=0$, то из (9) вытекает, что при любых ρ и δ, $0<\delta\leqslant\rho\leqslant\rho_0$, где ρ_0 таково, что $\Omega_{\rho_0}\subset Q$ (для определенности считаем, что $\rho_0>0$), имеет место неравенство

$$\|f\|^2_{L_2(\Gamma_\delta)}\leqslant C^2\delta\|f\|^2_{H^1(\Omega_\delta)}\leqslant C^2\rho\|f\|^2_{H^1(\Omega_\rho)}.$$

Интегрируя это неравенство по $\delta\in(0,\rho)$, в силу абсолютной непрерывности интеграла получаем

$$\|f\|_{L_2(\Omega_\rho)}=o(\rho)\quad\text{при}\quad\rho\to 0. \tag{10}$$

Таким образом, мы доказали, что если $f\in H^1(Q)$, $f|_{\Gamma_0}=0$ и $\Omega_\rho\subset Q$ (в частности, Γ_0 может быть куском границы ∂Q), то справедливо соотношение (10).

Лемма 1. *Пусть $f\in H^1(Q)$ и ее след на границе $f|_{\partial Q}=0$. Тогда*

$$\|f\|_{L_2(Q\setminus Q_\delta)}=o(\delta)\quad\textit{при}\quad\delta\to 0. \tag{11}$$

Так как граница $\partial Q\in C^1$, то для любой точки $y\in\partial Q$ найдется такой шар $S_{2r}(y)$ радиуса $2r$, $r=r(y)>0$, с центром в этой точке, что кусок границы $\partial Q\cap S_{2r}(y)$ однозначно проектируется на некоторую $(n-1)$-мерную область $D_{2r}(y)$, лежащую в одной из координатных плоскостей, скажем, в плоскости $\{x_n=0\}$. При этом уравнение куска $\partial Q\cap S_{2r}(y)$ имеет вид $x_n=\varphi(x')$, $x'\in D_{2r}(y)$, $\varphi(x')\in C^1(\bar D_{2r}(y))$. Обозначим через $\Gamma_0=\Gamma_0(y)$ поверхность $\partial Q\cap S_r(y)$, а через $\Gamma_\delta=\Gamma_\delta(y)$ и $\Omega_\delta=\Omega_\delta(y)$ — построенные по Γ_0 описанным выше способом «параллельную» поверхность и соответствующую область. Выберем $\delta_0=\delta_0(y)$ столь малым по абсолютной величине, что область $\Omega_{\delta_0}=\Omega_{\delta_0}(y)\subset Q\cap S_{2r}(y)$.

Поскольку расстояние между $\partial Q\setminus S_{2r}(y)$ и $\bar\Omega_{\delta_0}(y)$ положительно и расстояние между $\partial Q\cap\bar S_{2r}(y)$ и $\Gamma_\delta(y)$, где $\delta\in(0,\delta_0)$ при $\delta_0>0$ и $\delta\in(\delta_0,0)$ при $\delta_0<0$, очевидно, больше $\gamma|\delta|$ с некоторой постоянной $\gamma=\gamma(y)$, $0<\gamma<1$, то можно выбрать такое $\gamma_0=\gamma_0(y)$, $0<\gamma_0<1$, что при всех таких δ имеет место неравенство

$$\inf_{\substack{x\in\partial Q\\ \xi\in\Gamma_\delta}}|x-\xi|>\gamma_0|\delta|. \tag{12}$$

Выберем из покрытия ∂Q шарами $S_r(y)$, $y\in\partial Q$, конечное покрытие $S_{r_1}(x^1),\ \ldots,\ S_{r_N}(x^N)$. Тогда существует такое число $\delta_1>0$, $\delta_1<\min\limits_{1\leqslant m\leqslant N}|\delta_0(x^m)|$, что

$$Q\setminus Q_{\delta_1}\subset\bigcup_{m=1}^{N}\Omega_{\delta_0(x^m)}(x^m). \tag{13}$$

Кроме того, в силу (12) для всех δ, $0<\delta<\delta_1$, и $m=1, \ldots, N$,

$$(Q\setminus Q_{\gamma_1\delta})\cap\Omega_{\delta_0(x^m)}(x^m)\subset\Omega_{\delta\cdot\operatorname{sign}\delta_0(x^m)}(x^m), \tag{14}$$

где $\gamma_1=\min\limits_{1\leqslant m\leqslant N}\gamma_0(x^m)$.

Из включений (13) и (14) вытекает, что для любой $f\in H^1(Q)$ имеют место при $0<\delta<\delta_1$ неравенства

$$\|f\|^2_{L_2(Q\setminus Q_{\gamma_1\delta})}\leqslant\sum_{m=1}^{N}\|f\|^2_{L_2((Q\setminus Q_{\gamma_1\delta})\cap\Omega_{\delta_0(x^m)}(x^m))}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=1}^{N}\|f\|^2_{L_2(\Omega_{\delta\cdot\operatorname{sign}\delta_0(x^m)}(x^m))}.$$

Так как $f|_{\partial Q}=0$, то из последнего неравенства и соотношения (10) вытекает (11). Лемма доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы функция из пространства $H^1(Q)$ принадлежала подпространству $\mathring{H}^1(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы ее след на границе области был равен нулю.*

Поскольку необходимость очевидна, то остановимся только на доказательстве достаточности. Пусть функция $f\in H^1(Q)$, и пусть $f|_{\partial Q}=0$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. В силу леммы 1 и теоремы 9 п. 10 § 1 гл. II об абсолютной непрерывности интеграла существует столь малое $\delta=\delta(\varepsilon)$, что

$$\|f\|_{L_2(Q\setminus Q_\delta)}<\varepsilon\delta,\quad \|f\|_{H^1(Q\setminus Q_\delta)}<\varepsilon.$$

Так как для функции $f\in H^1(Q)$ (теорема 3 п. 3 предыдущего параграфа; напомним, что $\partial Q\in C^1$) существует последовательность $f_p(x)$, $p=1, 2, \ldots$, функций из $C^1(\bar{Q})$, сходящаяся к f в норме $H^1(Q)$ (и, тем более, в норме $H^1(Q\setminus Q_\delta)$), то можно найти такое число $N=N(\delta)=N(\delta(\varepsilon))$, что

$$\begin{gathered}\|f-f_N\|_{H^1(Q)}<\varepsilon,\\ \|f_N\|_{L_2(Q\setminus Q_\delta)}<2\varepsilon\delta,\\ \|f_N\|_{H^1(Q\setminus Q_\delta)}<2\varepsilon.\end{gathered}\tag{15}$$

Возьмем функцию

$$\zeta_\delta(x)=\int\limits_{Q_{\delta/2}}\omega_{\delta/3}(|x-y|)\,dy,$$

где $\omega_\rho(|x-y|)$ — некоторое ядро усреднения. Из свойств ядра усреднения вытекает, что $\zeta_\delta(x)\in C^\infty(R_n)$, $\zeta_\delta(x)=1$ для $x\in Q_{5\delta/6}$ и, тем более, для $x\in Q_\delta$, $\zeta_\delta(x)=0$ вне $Q_{\delta/6}$, т. е. $\zeta_\delta(x)\in\dot{C}^\infty(\bar{Q})$. Кроме того, для всех $x\in R_n$ $0\leqslant\zeta_\delta(x)\leqslant 1$, $|\nabla\zeta_\delta|\leqslant C/\delta$ с постоянной $C>0$, не зависящей от δ.

В силу (15) имеем

$$\begin{aligned} \|f_N - f_N\zeta_\delta\|_{H^1(Q)} &= \|f_N - f_N\zeta_\delta\|_{H^1(Q\setminus Q_\delta)} \leqslant \\ &\leqslant (\|f_N(1-\zeta_\delta)\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)} + \||\nabla f_N|(1-\zeta_\delta) + |f_N||\nabla\zeta_\delta|\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)})^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant (\|f_N\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)} + 2\||\nabla f_N|\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)} + 2\|f_N|\nabla\zeta_\delta|\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)})^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant \left(8\varepsilon^2 + \frac{2C^2}{\delta^2}\|f_N\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)}\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon(8+8C^2)^{1/2} = C_1\varepsilon. \end{aligned}$$

Функции $f_{N(\delta(\varepsilon))}(x)\zeta_{\delta(\varepsilon)}(x)$ принадлежат $\dot{C}^1(\bar{Q})$ и

$$\begin{aligned} \|f_{N(\delta(\varepsilon))}(x)\zeta_{\delta(\varepsilon)}(x) - f(x)\|_{H^1(Q)} &\leqslant \|f - f_{N(\delta(\varepsilon))}\|_{H^1(Q)} + \\ &+ \|f_{N(\delta(\varepsilon))} - f_{N(\delta(\varepsilon))}\zeta_{\delta(\varepsilon)}\|_{H^1(Q)} < (1+C_1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $f(x) \in \mathring{H}^1(Q)$. Теорема доказана.

4. О компактности множеств в $L_2(Q)$.

Теорема 3. *Ограниченное в $H^1(Q)$ множество компактно в $L_2(Q)$.*

Пусть множество $\mathcal{M}$ ограничено в $H^1(Q)$, т. е. для всех $f \in \mathcal{M}$

$$\|f\|_{H^1(Q)} \leqslant C. \tag{16}$$

Предположим сначала, что $\mathcal{M} \subset \mathring{H}^1(Q)$. Продолжим все функции из $\mathcal{M}$ нулем вне Q. В рассматриваемом случае полученные продолжения принадлежат $\mathring{H}^1(Q')$ при любой области $Q' \supset Q$.

Если $f_h(x)$ — средняя функция для функции $f(x) \in \mathcal{M}$, то справедливо неравенство (6) п. 3 § 2:

$$\|f_h - f\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{C_0}{h^n} \int\limits_{|z|<h} dz \int\limits_Q |f(x+z) - f(x)|^2\,dx. \tag{17}$$

Для функции $f(x) \in \dot{C}^1(\bar{Q})$, тоже продолженной нулем вне Q, при любом векторе z имеет место равенство $f(x+z) - f(x) = $
$= \int\limits_0^1 \frac{df(x+tz)}{dt}\,dt = \int\limits_0^1 (\nabla f(x+tz)\cdot z)\,dt$. Значит,

$$|f(x+z) - f(x)|^2 \leqslant |z|^2 \int\limits_0^1 |\nabla f(x+tz)|^2\,dt$$

и, тем самым,

$$\int\limits_Q |f(x+z) - f(x)|^2\,dx \leqslant |z|^2 \|f\|^2_{H^1(Q)}. \tag{18}$$

Неравенство (18) справедливо и для любой функции $f \in \mathcal{M}$, в чем можно убедиться с помощью обычного предельного перехода.

Из (17) и (18) следует, что

$$\|f_h-f\|^2_{L_2(Q)}\leqslant C_0\|f\|^2_{H^1(Q)}\frac{h^2}{h^n}\int\limits_{|z|<h}dz\leqslant C_1^2h^2,$$

где постоянная C_1 ни от h, ни от f в силу (16) не зависит.

Если теперь показать, что при любом фиксированном $h>0$ множество $\mathcal{M}_h$, состоящее из средних функций $f_h(x)$ всех функций $f(x)\in\mathcal{M}$, компактно в $C(\bar{Q})$ (и, тем более, в $L_2(Q)$), то утверждение теоремы будет вытекать из следствия из теоремы 2 п. 7 § 3 гл. II.

Согласно свойству г) ядра усреднения (см. гл. I, введение)

$$|f_h(x)|\leqslant\frac{C_0}{h^n}\int\limits_Q|f(x)|\,dx\leqslant C_0'\|f\|_{L_2(Q)}\leqslant C_0'\|f\|_{H^1(Q)}\leqslant\text{const}$$

и

$$\left|\frac{\partial f_h}{\partial x_i}\right|\leqslant\frac{C_1}{h^{n+1}}\int\limits_Q|f(x)|\,dx\leqslant\text{const},\qquad i=1,\;\ldots,\;n,$$

с не зависящей от f в силу (16) постоянной. Применение теоремы Арцела доказывает компактность в $C(\bar{Q})$ множества $\{f_h(x)\}=\mathcal{M}_h$ *).

Пусть теперь $\mathcal{M}\subset H^1(Q)$. Обозначим через $\mathcal{M}'$ множество функций $F(x)$ из $\mathring{H}^1(Q')$, полученных в результате продолжения согласно теореме 1 п. 2 § 4 функций $f(x)$ из $\mathcal{M}$ в некоторую область Q', $Q\Subset Q'$. Поскольку $\|F\|_{H^1(Q')}\leqslant\text{const}\,\|f\|_{H^1(Q)}$ с постоянной, не зависящей от f, то множество $\mathcal{M}'$ ограничено в $\mathring{H}^1(Q')$. По только что доказанному, оно компактно в $L_2(Q')$. Значит, множество $\mathcal{M}$ компактно в $L_2(Q)$. Теорема доказана.

---

*) Пусть множество $\mathfrak{M}$ непрерывных в $\bar{Q}$ функций равномерно ограничено и равностепенно непрерывно: $\|g\|_{C(\bar{Q})}\leqslant\text{const}$ для всех $g\in\mathfrak{M}$ и для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что при произвольных x', x'' из $\bar{Q}$ таких, что $|x'-x''|<\delta$, $|g(x')-g(x'')|<\varepsilon$ для всех $g\in\mathfrak{M}$ (в нашем случае $\mathfrak{M}=\mathcal{M}_h$, а равностепенная непрерывность $\mathcal{M}_h$ вытекает из равномерной ограниченности производных). Покажем, что множество $\mathfrak{M}$ компактно в $C(\bar{Q})$.

Пусть $\{g_k\}$ — произвольная бесконечная последовательность функций из $\mathfrak{M}$. Для каждого натурального m возьмем в $\bar{Q}$ такое конечное множество точек $\{x_q^m\}$, $q=1,\;\ldots,\;p(m)$, что для любой $x\in\bar{Q}$ существует точка этого множества, отстоящая от точки x на расстоянии, меньшем чем $\delta(2^{-m})$. Выделим из последовательности $\{g_k\}$ подпоследовательность $\{g_{k_1}\}$, сходящуюся в каждой точке множества $\{x_q^1\}$; тогда $\|g_{k_1}-g_{l_1}\|_{C(\bar{Q})}<3\cdot2^{-1}$ при k_1, $l_1\geqslant N_1$. Из $\{g_{k_1}\}$ выделим подпоследовательность $\{g_{k_2}\}$, сходящуюся в каждой точке множества $\{x_q^2\}$ и т. д.. Таким образом, при любом m имеем последовательность $\{g_{k_m}\}$, обладающую свойством: $\|g_{k_m}-g_{l_m}\|_{C(\bar{Q})}<3\cdot2^{-m}$ при k_m, $l_m\geqslant N_m$. Очевидно, что диагональная последовательность $\{g_{m_m}\}$ фундаментальна в $C(\bar{Q})$.

5. О компактности множества следов функций из $H^1(Q)$.

Теорема 4. *Если множество функций ограничено в $H^1(Q)$, то множество их следов на $(n-1)$-мерной поверхности $\Gamma \subset \bar{Q}$ класса C^1 компактно в $L_2(\Gamma)$.*

Пусть $\mathcal{M}$ — ограниченное множество в $H^1(Q)$, а $\mathcal{M}_\Gamma$ — множество следов на Γ функций из $\mathcal{M}$. Обозначим через $\mathcal{M}'$ ограниченное в $H^1(Q')$ множество, состоящее из продолжений в $Q' \supset\supset Q$ функций из $\mathcal{M}$ (теорема 1 п. 2 § 4, $\partial Q \in C^1$).

Пусть Γ_0 — кусок поверхности Γ, однозначно проектирующийся в область D плоскости $\{x_n=0\}$, и $x_n=\varphi(x')$, $x' \in D$, — уравнение Γ_0, $\varphi(x') \in C^1(\bar{D})$. Существует такое $\delta > 0$, что область $\Omega_{2\delta} = \{x' \in D,\ \varphi(x') < x_n < \varphi(x') + 2\delta\}$ принадлежит Q'.

Для любой функции $f(x) \in C^1(\bar{Q}')$ и любых точек $x = (x', x_n) \in \Gamma_0$ и $(x', y_n) \in \Omega_{2\delta}$ имеем

$$f(x', y_n) - f(x) = \int_{x_n}^{y_n} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\, d\xi_n.$$

Из этого равенства вытекает

$$|f(x)|^2 \leqslant 2\,|f(x', y_n)|^2 + 4\delta \int_{x_n}^{x_n+2\delta} \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по $y_n \in (\delta, 2\delta)$:

$$\delta\,|f(x)|^2 \leqslant 2\int_{\delta}^{2\delta} |f(x', y_n)|^2 dy_n + 4\delta^2 \int_{x_n}^{x_n+2\delta} \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n,$$

а затем полученное неравенство по x по поверхности Γ_0 (т. е. умножим его на $\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2+\ldots+\varphi_{x_{n-1}}^2}$ и проинтегрируем по D):

$$\delta \int_{\Gamma_0} |f|^2 dS \leqslant \mathrm{const}\left(2\int_{Q'} |f|^2 dx + 4\delta^2 \int_{Q'} |\nabla f|^2 dx\right).$$

Так как поверхность Γ может быть разбита на конечное число кусков типа Γ_0 и для каждого такого куска справедливо только что установленное неравенство, то, суммируя эти неравенства, получим

$$\|f\|^2_{L_2(\Gamma)} \leqslant \frac{C_1'}{\delta}\|f\|^2_{L_2(Q')} + C_2'\delta\,\|f\|^2_{H^1(Q')},$$

где постоянные C_1' и C_2' не зависят ни от f, ни от δ. Обычным способом убеждаемся, что это неравенство справедливо не только для любой функции $f \in C^1(\bar{Q}')$, но и для любой функции из $H^1(Q')$.

В силу замечания к теореме о продолжении функции (см. п. 2 § 4) из последнего неравенства имеем справедливое для любой $f \in H^1(Q)$

неравенство

$$\|f\|^2_{L_2(\Gamma)} \leqslant \frac{C_1}{\delta}\|f\|^2_{L_2(Q)} + C_2\delta\|f\|^2_{H_1(Q)}. \qquad (19)$$

По теореме 3 (предыдущего пункта) множество $\mathcal{M}$ компактно в $L_2(Q)$. Поэтому из любой бесконечной последовательности элементов множества $\mathcal{M}$ можно выделить фундаментальную в $L_2(Q)$ подпоследовательность f_p, $p=1, 2, \ldots$: по любому $\varepsilon>0$ найдется такое N, что для всех $p \geqslant N$ и $q \geqslant N$ $\|f_p - f_q\|_{L_2(Q)} < \varepsilon$. Но тогда последовательность следов $f_p|_S$, $p=1, 2, \ldots$, фундаментальна в $L_2(S)$, поскольку для p, $q \geqslant N$ из неравенства (19), написанного для $f_p - f_q$, и неравенства (16) имеем

$$\|f_p - f_q\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{C_1\varepsilon^2}{\delta} + C_2\delta\|f_p - f_q\|^2_{H^1(Q)} \leqslant \varepsilon(C_1 + 4C_2C^2) = C_3\varepsilon,$$

если взять $\delta=\varepsilon$. Теорема доказана.

6. Эквивалентные нормировки пространств $H^1(Q)$ и $\mathring{H}^1(Q)$. Пусть в области Q, $\partial Q \in C^1$, задана вещественная непрерывная в $\bar{Q}$ симметрическая матрица $P(x) = (p_{ij}(x))$, $i, j = 1, \ldots, n$. Это означает, что вещественнозначные функции $p_{ij}(x) \in C(\bar{Q})$ и $p_{ij} = p_{ji}$, $i, j=1, \ldots, n$. Пусть, кроме того, в $\bar{Q}$ задана вещественная функция $q(x) \in C(\bar{Q})$, а на ∂Q вещественная функция $r(x) \in C(\partial Q)$.

Определим на $H^1(Q)$ эрмитову билинейную форму (п. 4 § 2 гл. II)

$$W(f, g) = \int_Q \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} f_{x_i} \bar{g}_{x_j}\,dx + \int_Q q f \bar{g}\,dx + \int_{\partial Q} r f \bar{g}\,dS \qquad (20)$$

(в последнем интеграле, конечно, $f = f|_{\partial Q}$, $g = g|_{\partial Q}$).

Теорема 5. *Если матрица $P(x)$ — положительно определенная, т. е. для любого комплексного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и для всех $x \in \bar{Q}$*

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(x)\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant \gamma \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \qquad (21)$$

с постоянной $\gamma > 0$, функции $q(x) \geqslant 0$ на $\bar{Q}$, $r(x) \geqslant 0$ на ∂Q и-или $q(x) \not\equiv 0$, или $r(x) \not\equiv 0$, то билинейная форма (20) определяет на $H^1(Q)$ скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению

$$(f, g)_{H^1(Q)} = \int_Q (\nabla f \nabla \bar{g} + f\bar{g})\,dx. \qquad (22)$$

Согласно определению (см. п. 4 § 2 гл. II) для доказательства теоремы нам следует установить существование двух таких постоянных $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что неравенства

$$W(f, f) \leqslant C_1^2\|f\|^2_{H^1(Q)}, \quad \|f\|^2_{H^1(Q)} \leqslant C_2^2 W(f, f) \qquad (23)$$

имеют место для всех $f \in H^1(Q)$.

Прежде всего заметим, что по условиям теоремы каждое из трех слагаемых в выражении для $W(f, f)$ (в (20) $g=f$) неотрицательно.

Так как

$$\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n p_{ij} f_{x_i} \bar{f}_{x_j}\,dx \leqslant A \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n |f_{x_i}|\,|f_{x_j}|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant An \int\limits_Q |\nabla f|^2\,dx \leqslant An\,\|f\|^2_{H^1(Q)},$$

где $A=\max\limits_{1\leqslant i,\,j\leqslant n}\|p_{ij}\|_{C(\bar{Q})}$,

$$\int\limits_Q q\,|f|^2\,dx \leqslant A_1\,\|f\|^2_{L_2(Q)} \leqslant A_1\,\|f\|^2_{H^1(Q)},$$

где $A_1=\|q\|_{C(\bar{Q})}$, и согласно неравенству (2) из п. 1

$$\int\limits_{\partial Q} r\,|f|^2\,dS \leqslant A_2\,\|f\|^2_{L_2(\partial Q)} \leqslant C^2 A_2\,\|f\|^2_{H^1(Q)},$$

где $A_2=\|r\|_{C(\partial Q)}$, то первое из неравенств (23) имеет место с постоянной $C_1^2=An+A_1+A_2C^2$.

Докажем справедливость второго неравенства в (23). Предположим, напротив, что нужной постоянной C_2^2 не существует. Тогда для любого целого $m\geqslant 1$ найдется такая функция $f_m(x)\in H^1(Q)$, что $\|f_m\|^2_{H^1(Q)}>mW(f_m, f_m)$, или, что то же самое, найдется функция $g_m(x)\in H^1(Q)$ $(g_m=f_m/\|f_m\|_{H^1(Q)})$, для которой

$$\|g_m\|_{H^1(Q)}=1 \tag{24}$$

и

$$W(g_m, g_m)=$$
$$=\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n p_{ij} g_{mx_i} \bar{g}_{mx_j}\,dx+\int\limits_Q q\,|g_m|^2\,dx+\int\limits_{\partial Q} r\,|g_m|^2\,dS<1/m.$$

Из этого неравенства вытекает, что каждое из трех слагаемых в $W(g_m, g_m)$ меньше $1/m$, и поэтому (воспользуемся неравенством (21)) имеют место неравенства

$$\int\limits_Q |\nabla g_m|^2\,dx<\frac{1}{m\gamma},\quad \int\limits_Q q\,|g_m|^2\,dx<\frac{1}{m},\quad \int\limits_{\partial Q} r\,|g_m|^2\,dS<\frac{1}{m}. \tag{25}$$

В силу (24) последовательность g_m, $m=1, 2, \ldots$, ограничена в $H^1(Q)$, поэтому (теорема 3 п. 4) из нее можно выбрать подпоследовательность, фундаментальную в $L_2(Q)$. Не умаляя общности, будем считать, что сама последовательность g_m, $m=1, 2, \ldots$, фундаментальна в $L_2(Q)$, т. е. $\|g_m-g_p\|_{L_2(Q)}\to 0$ при $m, p\to\infty$.

Так как в силу первого из неравенств (25)

$$\|g_m-g_p\|^2_{H^1(Q)}=\|g_m-g_p\|^2_{L_2(Q)}+\||\nabla(g_m-g_p)|\|^2_{L_2(Q)}\leqslant$$
$$\leqslant\|g_m-g_p\|^2_{L_2(Q)}+2\||\nabla g_m|\|^2_{L_2(Q)}+2\||\nabla g_p|\|^2_{L_2(Q)}\leqslant$$
$$\leqslant\|g_m-g_p\|^2_{L_2(Q)}+\frac{2}{m\gamma}+\frac{2}{p\gamma},$$

то $\|g_m-g_p\|_{H^1(Q)}\to 0$ при $m,\ p\to\infty$, т. е. последовательность g_m, $m=1,\ 2,\ \ldots$, фундаментальна и в $H^1(Q)$. Поэтому эта последовательность сходится в норме $H^1(Q)$ к некоторому элементу $g\in H^1(Q)$. Переходя к пределу при $m\to\infty$ в равенстве (24) и неравенствах (25), получим соотношения:

а) $\|g\|_{H^1(Q)}=1$,

б) $\int\limits_Q|\nabla g|^2\,dx=0$,

в) $\int\limits_Q q|g|^2\,dx=0$,

г) $\int\limits_{\partial Q} r|g|^2\,dS=0$.

Из равенств б) и а) вытекает, что $g=\text{const}=1/\sqrt{|Q|}$ в Q и $g|_{\partial Q}=1/\sqrt{|Q|}$ на ∂Q. Но это противоречит, если $q(x)\not\equiv 0$, равенству в) или, если $r(x)\not\equiv 0$, равенству г). Теорема доказана.

Пусть $P(x)=p(x)E$, где E — единичная матрица. Из теоремы 5 вытекает

Следствие. *Билинейная форма*

$$W(f,\ g)=\int\limits_Q(p\nabla f\nabla\bar{g}+qf\bar{g})\,dx+\int\limits_{\partial Q}r(x)f\bar{g}\,dS,$$

где $p(x)\in C(\bar{Q})$, $q(x)\in C(\bar{Q})$, $r(x)\in C(\partial Q)$, $p(x)\geqslant\text{const}>0$, $q(x)\geqslant 0$ *в* $\bar{Q}$, $r(x)\geqslant 0$ *на* ∂Q *и или* $q(x)\not\equiv 0$ *в* Q, *или* $r(x)\not\equiv 0$ *на* ∂Q, *определяет в* $H^1(Q)$ *скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению* (22).

Теорема 6. *Если матрица* $P(x)$ — *положительно определенная и функция* $q(x)\geqslant 0$ *в* $\bar{Q}$, *то эрмитова билинейная форма*

$$W_1(f,\ g)=\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^n p_{ij}f_{x_i}\bar{g}_{x_j}\,dx+\int\limits_Q qf\bar{g}\,dx$$

задает скалярное произведение в $\mathring{H}^1(Q)$, *эквивалентное скалярному произведению* (22).

Так как $\mathring{H}^1(Q)\subset H^1(Q)$, то из теоремы 5 вытекает, что в $\mathring{H}^1(Q)$ можно ввести скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению (22), с помощью билинейной формы (20) при $r(x)\equiv 1$ на ∂Q и $q(x)\geqslant 0$ в $\bar{Q}$. Но для $f(x)$ и $g(x)$, принадлежащих

$\mathring{H}^1(Q)$, значения билинейных форм W и W_1 совпадают. Теорема доказана.

Пусть $P(x)=p(x)E$. Из теоремы 6 вытекает

Следствие. *Билинейная форма*

$$W(f, g)=\int_Q (p\nabla f\nabla\bar{g}+qf\bar{g})\,dx,$$

где $p(x)\in C(\bar{Q})$, $q(x)\in C(\bar{Q})$, $p(x)\geqslant \mathrm{const}>0$, $q(x)\geqslant 0$ *в* $\bar{Q}$, *определяет в* $\mathring{H}^1(Q)$ *скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению* (22).

В частности, эквивалентным (22) *скалярным произведением является скалярное произведение*

$$(f, g)'_{\mathring{H}^1(Q)}=\int_Q \nabla f\nabla\bar{g}\,dx.$$

Из последнего утверждения немедленно вытекает справедливое для любой функции $f\in\mathring{H}^1(Q)$ *неравенство Стеклова*

$$\|f\|^2_{L_2(Q)}\leqslant \mathrm{const}\int_Q |\nabla f|^2\,dx.$$

§ 6. Свойства функций из $H^k(Q)$

В этом параграфе будет изучаться взаимоотношение пространств $H^k(Q)$ и $C^l(\bar{Q})$. Будет показано, что если функция принадлежит пространству $H^k(Q)$ при достаточно большом k, то она принадлежит и пространству $C^l(\bar{Q})$ (т. е. ее можно так изменить на множестве меры нуль, что она будет непрерывна вместе со всеми производными до порядка l в $\bar{Q}$).

Для получения этого результата нам потребуется представление достаточно гладкой в области Q функции через интеграл по Q от некоторой комбинации ее производных.

1. Представление функций с помощью интегралов.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x)\in C^2(\bar{Q})$ *и размерность пространства* $n\geqslant 2$. *Тогда для любой точки* $x\in Q$ *имеет место равенство*

$$f(x)=\int_Q U(x-\xi)\,\Delta f(\xi)\,d\xi+\int_{\partial Q}\left(f(\xi)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}-\frac{\partial f(\xi)}{\partial n_\xi}U(x-\xi)\right)dS_\xi, \quad (1)$$

где

$$U(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\,\sigma_n\,|x|^{n-2}} & \text{для } n>2,\\ -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x|} & \text{для } n=2,\end{cases} \quad (2)$$

а $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — *площадь поверхности* $(n-1)$*-мерной единичной сферы* *).

Функция $U(x-\xi)$ (она называется фундаментальным решением для оператора Лапласа) как функция от ξ при $\xi \neq x$ удовлетворяет равенству $\Delta_\xi U(\xi-x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2}\right) U(\xi - x) = 0$, в чем нетрудно убедиться непосредственным дифференцированием.

Зафиксируем произвольную точку $x \in Q$ и возьмем столь малое $\varepsilon > 0$, что шар $\{|\xi - x| \leqslant \varepsilon\} \subset Q$. В области $Q_\varepsilon = Q \setminus \{|x-\xi| \leqslant \varepsilon\}$ для функции $U(\xi - x)$ (рассматриваемой как функция переменного ξ) и произвольной функции $f(\xi) \in C^2(\bar{Q})$ имеет место формула Грина (см. п. 2 § 1)

$$\int_{Q_\varepsilon} \Delta f(\xi)\, U(x-\xi)\, d\xi = \int_{\partial Q} \left(U(\xi - x) \frac{\partial f(\xi)}{\partial n} - f(\xi) \frac{\partial U(\xi - x)}{\partial n_\xi}\right) dS_\xi + \\ + \int_{|\xi - x| = \varepsilon} \left(U(\xi - x) \frac{\partial f(\xi)}{\partial n} - f(\xi) \frac{\partial U(\xi - x)}{\partial n_\xi}\right) dS_\xi. \tag{3}$$

Так как на сфере $|\xi - x| = \varepsilon$ $\frac{\partial}{\partial n_\xi} = -\frac{\partial}{\partial |\xi - x|}$, то второе слагаемое правой части в (3) имеет (при $n > 2$) вид

$$-\frac{1}{(n-2)\sigma_n \varepsilon^{n-2}} \int_{|\xi - x| = \varepsilon} \frac{\partial f(\xi)}{\partial n}\, dS_\xi + \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} \int_{|\xi - x| = \varepsilon} f(\xi)\, dS_\xi = \\ = f(x) + \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} \int_{|\xi - x| = \varepsilon} (f(\xi) - f(x))\, dS_\xi - \\ - \frac{1}{(n-2)\sigma_n \varepsilon^{n-2}} \int_{|\xi - x| = \varepsilon} \frac{\partial f(\xi)}{\partial n}\, dS_\xi = f(x) + O(\varepsilon), \tag{4}$$

поскольку площадь сферы $|\xi - x| = \varepsilon$ равна $\sigma_n \varepsilon^{n-1}$, а для $|\xi - x| = \varepsilon$ $f(\xi) - f(x) = O(\varepsilon)$ и $\left|\frac{\partial f(\xi)}{\partial n}\right| \leqslant \mathrm{const}$.

Функция $U(\xi - x)$ интегрируема по Q, поэтому предел при $\varepsilon \to 0$ левой части равенства (3) равен интегралу по Q от функции $U(\xi - x)\Delta f(\xi)$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в равенстве (3), с помощью (4) получим равенство (1) при $n > 2$. Для $n = 2$

---

*) Представление (1) имеет место и в одномерном случае ($Q = (a, b)$) Легко проверяемому тождеству $f(x) = \frac{1}{2} \int_a^b |x - \xi|\, f''(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{1}{2}((a-x) f'(a) + (b-x) f'(b))$ можно придать вид (1), если ввести функцию $U(x-\xi) = \frac{1}{2}|x - \xi|$. Однако равенством (1) при $n = 1$ мы пользоваться не будем.

доказательство остается прежним, только второе слагаемое правой части (3), в отличие от (4), равно $f(x)+O(\varepsilon \ln \varepsilon)$. Теорема доказана.

2. Непрерывность и непрерывная дифференцируемость функций из $H^k(Q)$. Для произвольной функции $f \in \dot{C}^2(\bar{Q})$ в теореме 1 предыдущего пункта получено представление этой функции через интеграл по Q от ее вторых производных. Если функция более гладкая, $f \in \dot{C}^k(\bar{Q})$, $k>2$, то наряду с (1) для нее имеют место и представления через производные k-го порядка. Для получения этих представлений нам потребуется следующее простое утверждение.

Лемма 1. *Пусть $n \geqslant 3$. Тогда при любом (вещественном) μ функция*

$$u_\mu(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|^{\mu+2}}{(\mu+2)(\mu+n)} & \text{при } \mu \neq -2,\ \mu \neq -n, \\ (\ln|x|)/(n-2) & \text{при } \mu=-2, \\ -\dfrac{\ln|x|}{|x|^{n-2}(n-2)} & \text{при } \mu=-n \end{cases}$$

для всех $x \in R_n$, $x \neq 0$, удовлетворяет уравнению $\Delta u_\mu=|x|^\mu$.

В справедливости леммы легко убедиться непосредственным подсчетом.

Пусть функция $f \in \dot{C}^2(\bar{Q})$. В силу формулы (1) для $x \in Q$ имеем

$$f(x)=\int_Q U(x-\xi)\,\Delta f(\xi)\,d\xi.$$

В частности, при $n=2$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_Q \Delta f(\xi)\ln|x-\xi|\,d\xi, \tag{5}$$

при $n=3$

$$f(x)=-\frac{1}{4\pi}\int_Q \frac{\Delta f(\xi)}{|x-\xi|}\,d\xi, \tag{6}$$

при $n>3$

$$f(x)=-\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_Q \frac{\Delta f(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\,d\xi. \tag{7}$$

Пусть $n=4$, а функция $f(x) \in \dot{C}^3(\bar{Q})$. С помощью равенства $\dfrac{1}{|x-\xi|^2}=\dfrac{1}{2}\Delta_\xi \ln|x-\xi|$ (лемма 1) интегрированием по частям получим из (7)

$$f(x)=\frac{1}{4\sigma_4}\int_Q \Delta f\cdot\Delta_\xi \ln|x-\xi|\,d\xi=\frac{1}{4\sigma_4}\int_Q \nabla(\Delta f(\xi))\,\nabla_\xi \ln|x-\xi|\,d\xi. \tag{8}$$

Если $n=5$, то из (7) и равенства $|x-\xi|^{-3}=-\frac{1}{2}\Delta_\xi\frac{1}{|x-\xi|}$ (лемма 1) для функции $f(x)\in\dot{C}^3(\bar{Q})$ получим представление

$$f(x)=\frac{1}{2\cdot 3\sigma_5}\int\limits_Q \Delta f(\xi)\,\Delta_\xi\frac{1}{|x-\xi|}\,d\xi=-\frac{1}{2\cdot 3\sigma_5}\int\limits_Q \nabla(\Delta f(\xi))\,\nabla_\xi\frac{1}{|x-\xi|}\,d\xi \tag{9}$$

и т. д. Пусть $f(x)\in\dot{C}^{2p}(\bar{Q})$, $p\geqslant 2$. Тогда из справедливых при $n>4p-3$ равенств

$$\frac{1}{|x-\xi|^{4p-4}}=C'_{4p-2}\Delta_\xi^{p-1}\frac{1}{|x-\xi|^{2p-2}},\quad \frac{1}{|x-\xi|^{4p-3}}=C'_{4p-1}\Delta_\xi^{p-1}\frac{1}{|x-\xi|^{2p-1}},$$

вытекающих из леммы 1, в силу (7) имеем

$$f(x)=C''_{4p-2}\int\limits_Q\frac{\Delta^p f(\xi)}{|x-\xi|^{2p-2}}\,d\xi \quad \text{при} \quad n=4p-2 \tag{10_{4p-2}}$$

и

$$f(x)=C''_{4p-1}\int\limits_Q\frac{\Delta^p f(\xi)}{|x-\xi|^{2p-1}}\,d\xi \quad \text{при} \quad n=4p-1, \tag{10_{4p-1}}$$

где C'_i и C''_i — некоторые абсолютные постоянные. Так как при $n>4p-1$, $p\geqslant 2$,

$$\frac{1}{|x-\xi|^{4p-2}}=C'_{4p}\Delta_\xi^p\left(\frac{1}{|x-\xi|^{2p-2}}\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{|x-\xi|^{4p-1}}=C'_{4p+1}\Delta_\xi^p\left(\frac{1}{|x-\xi|^{2p-1}}\right),$$

то для $f\in\dot{C}^{2p+1}(\bar{Q})$, $p\geqslant 2$, из (7) имеем

$$f(x)=C''_{4p}\int\limits_Q\nabla(\Delta^p f(\xi))\,\nabla_\xi\left(\frac{1}{|x-\xi|^{2p-2}}\right)d\xi \quad \text{при} \quad n=4p \tag{10_{4p}}$$

и

$$f(x)=C''_{4p+1}\int\limits_Q\nabla(\Delta^p f(\xi))\,\nabla_\xi\left(\frac{1}{|x-\xi|^{2p-1}}\right)d\xi \quad \text{при} \quad n=4p+1, \tag{10_{4p+1}}$$

где C'_i, C''_i — абсолютные постоянные.

Поскольку $\left|\nabla_\xi\frac{1}{|x-\xi|^s}\right|=\frac{s}{|x-\xi|^{s+1}}$ при $s\geqslant 1$, то из (6), (8), (9), (10_{4p-2})—(10_{4p+1}) получаем неравенства

$$|f(x)|\leqslant C_{4p-2}\int\limits_Q\frac{|\Delta^p f(\xi)|}{|x-\xi|^{2p-2}}\,d\xi \quad \text{для} \quad n=4p-2,\ p>1, \tag{11_{4p-2}}$$

$$|f(x)|\leqslant C_{4p-1}\int\limits_Q\frac{|\Delta^p f(\xi)|}{|x-\xi|^{2p-1}}\,d\xi \quad \text{для} \quad n=4p-1,\ p\geqslant 1, \tag{11_{4p-1}}$$

для всех $f \in \dot{C}^{2p}(\bar{Q})$ и неравенства

$$|f(x)| \leqslant C_{4p} \int\limits_Q \frac{|\nabla \Delta^p f(\xi)|}{|x-\xi|^{2p-1}}\, d\xi \quad \text{для} \quad n=4p,\ p \geqslant 1, \tag{11_{4p}}$$

$$|f(x)| \leqslant C_{4p+1} \int\limits_Q \frac{|\nabla \Delta^p f(\xi)|}{|x-\xi|^{2p}}\, d\xi \quad \text{для} \quad n=4p+1,\ p \geqslant 1, \tag{11_{4p+1}}$$

для всех $f \in \dot{C}^{2p+1}(\bar{Q})$, C_i — абсолютные постоянные.

С помощью неравенства Буняковского из (5) получим

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_Q |\Delta f|^2\, d\xi\right)^{1/2}\left(\int\limits_Q |\ln|x-\xi||^2\, d\xi\right)^{1/2} \leqslant C\|f\|_{H^2(Q)}, \quad n=2,$$

из (11_{4p-2})

$$|f(x)| \leqslant C_{4p-2}\left(\int\limits_Q |\Delta^p f|^2\, d\xi\right)^{1/2}\left(\int\limits_Q \frac{d\xi}{|x-\xi|^{4p-4}}\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant C\|f\|_{H^{2p}(Q)}, \qquad n=4p-2>2,$$

и, аналогично, из $(11_{4p-1})-(11_{4p+1})$

$$|f(x)| \leqslant C\|f\|_{H^{2p}(Q)}, \qquad n=4p-1 \geqslant 3,$$
$$|f(x)| \leqslant C\|f\|_{H^{2p+1}(Q)}, \qquad n=4p \geqslant 4,$$
$$|f(x)| \leqslant C\|f\|_{H^{2p+1}(Q)}, \qquad n=4p+1 \geqslant 5,$$

где постоянная C зависит от n и области Q.

Таким образом, неравенство

$$\|f\|_{C(\bar{Q})} \leqslant C\|f\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)} \tag{12}$$

имеет место для всех $f \in \dot{C}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\bar{Q})$, $n \geqslant 1$, с не зависящей от f постоянной. Справедливость этого неравенства при $n=1$ немедленно следует из представления

$$f(x) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \operatorname{sign}(x-\xi)\cdot f'(\xi)\, d\xi$$

любой функции $f(x) \in \dot{C}^1([a, b])$.

Если функция $f \in \dot{C}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(\bar{Q})$ при некотором $l>0$, то наряду с неравенством (12) она удовлетворяет и неравенству

$$\|f\|_{C^l(\bar{Q})} \leqslant C_l\|f\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)}, \tag{13}$$

в котором постоянная $C_l>0$ не зависит от f.

Действительно, для любого вектора $\alpha=(\alpha_1 \ldots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными координатами, $|\alpha| \leqslant l$, в силу (12) имеем

$$\|D^\alpha f\|_{C(\bar{Q})} \leqslant C \|D^\alpha f\|_{H^{1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant C\|f\|_{H^{1+|\alpha|+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)} \leqslant C\|f\|_{H^{1+l+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)}.$$

Суммируя эти неравенства по всем α, $|\alpha| \leqslant l$, получим неравенство (13).

Пусть теперь $f \in \mathring{H}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$, а $f_m(x), m=1, 2, \ldots,$ — последовательность функций из $\dot{C}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(\bar{Q})$, сходящаяся в норме $H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$ к f. В силу (13)

$$\|f_m - f_s\|_{C^l(\bar{Q})} \leqslant C\|f_m - f_s\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)} \to 0$$

при m, $s \to \infty$, т. е. последовательность f_m, $m=1, 2, \ldots$, оказывается фундаментальной в норме $C^l(\bar{Q})$. Это означает, что предельная функция f принадлежит $C^l(\bar{Q})$. Переходя в неравенстве $\|f_m\|_{C^l(\bar{Q})} \leqslant C\|f_m\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)}$ к пределу при $m \to \infty$, получим справедливость неравенства (13) для любой $f \in \mathring{H}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$.

Пусть функция $f \in H_{\text{loc}}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$. Возьмем любую подобласть $Q' \Subset Q$ и построим функцию $\zeta(x) \in \dot{C}^\infty(\bar{Q})$, равную 1 в Q'. Функция $f \cdot \zeta \in \mathring{H}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$, поэтому она принадлежит $\dot{C}^l(\bar{Q})$ и, значит, функция f принадлежит $C^l(\bar{Q}')$. В силу произвольности Q' функция f принадлежит $C^l(Q)$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Любая функция из пространства $H_{\text{loc}}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$ принадлежит пространству $C^l(Q)$, т. е. $H_{\text{loc}}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q) \subset C^l(Q)$.*

Пусть теперь $f \in H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$. Предположим, что $\partial Q \subset \subset C^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}$. Тогда в силу теоремы о продолжении для (любой) области Q', $Q' \Supset Q$, существует принадлежащая $\mathring{H}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q')$ функция F, совпадающая с f в Q, причем $\|F\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q')} \leqslant \leqslant C'\|f\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)}$, где постоянная C' не зависит от f.

Функция $F \in C^l(\bar{Q}')$ и для нее имеет место неравенство $\|F\|_{C^l(\bar{Q}')} \leqslant \leqslant C''\|F\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q')}$ (неравенство (13) для функции F в области Q'). Следовательно, $f \in C^l(\bar{Q})$ и справедливо неравенство

$$\|f\|_{C^l(\bar{Q}')} \leqslant C'C''\|f\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Если* $\partial Q \in C^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}$, *то* $H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q) \subset C^l(\bar{Q})$. *При этом для любой функции* $f \in H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$ *имеет место неравенство* (13), *в котором постоянная* $C > 0$ *не зависит от* f.

§ 7. Пространства $C^{r,0}$ и $C^{2s,s}$. Пространства $H^{r,0}$ и $H^{2s,s}$

До сих пор мы рассматривали функциональные пространства (C^k, H^k, $k = 0, 1, \ldots$), состоящие из функций, дифференциальные свойства которых одинаковы по отношению ко всем независимым переменным: пространство H^k, например, состоит из всех функций, принадлежащих L_2, все обобщенные производные которых до k-го порядка включительно принадлежат L_2. В теории дифференциальных уравнений используются также множества функций, дифференциальные свойства которых по разным переменным различны. В частности, в посвященной параболическим уравнениям шестой главе будут использованы вводимые ниже пространства функций.

Пусть D — ограниченная область пространства R_n ($x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка R_n), а $Q_T = \{x \in D, 0 < t < T\}$ — цилиндр высоты $T > 0$ в пространстве $R_{n+1} = R_n \times \{-\infty < t < \infty\}$.

1. Банаховы пространства $C^{r,0}(\bar{Q}_T)$ и $C^{2s,s}(\bar{Q}_T)$. Обозначим через $C^{r,0}(\bar{Q}_T)$, где целое число $r \geqslant 1$, множество всех непрерывных в $\bar{Q}_T$ функций $f(x, t)$, у которых существуют непрерывные в $\bar{Q}_T$ производные $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ при всех (целых и неотрицательных) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant r$.

Через $C^{2s,s}(\bar{Q}_T)$, где целое число $s \geqslant 1$, обозначим множество всех непрерывных в $\bar{Q}_T$ функций $f(x, t)$, у которых существуют непрерывные в $\bar{Q}_T$ производные $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^{\beta}}$ при всех (целых и неотрицательных) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, β, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + 2\beta \leqslant 2s$.

Под $C^{r,0}(\bar{Q}_T)$ при $r = 0$ и под $C^{2s,s}(\bar{Q}_T)$ при $s = 0$ будем понимать пространство $C^{0,0}(\bar{Q}_T) = C(\bar{Q}_T)$.

Ясно, что множество $C^{r,0}(\bar{Q}_T)$, $r \geq 0$, является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{C^{r,0}(\bar{Q}_T)} = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n \leq r} \max_{\bar{Q}_T} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|,$$

а множество $C^{2s,s}(\bar{Q}_T)$, $s \geq 0$, — банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{C^{2s,s}(\bar{Q}_T)} = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+2\beta \leq 2s} \max_{\bar{Q}_T} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^{\beta}} \right|.$$

2. Гильбертовы пространства $H^{r,0}(Q_T)$ и $H^{2s,s}(Q_T)$. Обозначим через $H^{r,0}(Q_T)$, где целое число $r \geq 1$, множество всех принадлежащих $L_2(Q_T)$ функций $f(x, t)$, у которых существуют и принадлежат $L_2(Q_T)$ обобщенные производные $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ при всех (целых и неотрицательных) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq r$. Через $H^{2s,s}(Q_T)$, где целое число $s \geq 1$, обозначим множество всех принадлежащих $L_2(Q_T)$ функций $f(x, t)$, у которых существуют и принадлежат $L_2(Q_T)$ обобщенные производные $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^{\beta}}$ при всех (целых и неотрицательных) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, β таких, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + 2\beta \leq 2s$.

Под $H^{r,0}(Q_T)$ при $r = 0$ и под $H^{2s,s}(Q_T)$ при $s = 0$ будем понимать пространство $H^{0,0}(Q_T) = L_2(Q_T)$.

Отметим сначала следующие, немедленно вытекающие из определений свойства множеств $H^{r,0}(Q_T)$ и $H^{2s,s}(Q_T)$.

1. Множество $H^{r,0}(Q_T)$, $r \geq 0$, является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g)_{H^{r,0}(Q_T)} = \int_{Q_T} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n \leq r} \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \cdot \overline{\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} g}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}} \, dx \, dt,$$

а множество $H^{2s,s}(Q_T)$, $s \geq 0$, является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g)_{H^{2s,s}(Q_T)} = \int_{Q_T} \sum_{2\beta+\alpha_1+\ldots+\alpha_n \leq 2s} \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^{\beta}} \cdot \overline{\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta} g}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^{\beta}}} \, dx \, dt.$$

2. При любых r и s, $0 \leq r \leq 2s$, $H^{2s,s}(Q_T) \subset H^{2s,0}(Q_T) \subset H^{r,0}(Q_T)$.

3. Если $f(x, t) \in H^{r, 0}(Q_T)$, то при $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = r' \leqslant r$ $\dfrac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \in H^{r-r', 0}(Q_T)$.

4. Если $f(x, t) \in H^{2s, s}(Q_T)$, то при $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + 2\beta \leqslant 2s'$, где $s' \leqslant s$, функция $\dfrac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^{\beta}} \in H^{2(s-s'), s-s'}(Q_T)$.

Покажем теперь, что функции из пространств $H^{r, 0}(Q_T)$ и $H^{2s, s}(Q_T)$ при достаточной гладкости границы ∂D области D можно с сохранением гладкости продолжать в более широкие (чем Q_T) области. А именно, установим справедливость следующего утверждения.

5. Пусть D' — произвольная область из R_n такая, что $D \Subset D'$, а t^0 и t^1 — произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам $t^0 < 0$, $t^1 > T$. Обозначим через Q'_{t^0, t^1} цилиндр $\{x \in D',\ t^0 < t < t^1\}$. Если $\partial D \in C^r$, $r \geqslant 1$, то для любой функции $f \in H^{r, 0}(Q_T)$ существует финитное в Q'_{t^0, t^1} продолжение $F \in H^{r, 0}(Q'_{t^0, t^1})$, при этом имеет место неравенство

$$\| F \|_{H^{r, 0}(Q'_{t^0, t^1})} \leqslant C \| f \|_{H^{r, 0}(Q_T)}, \tag{1}$$

в котором положительная постоянная C не зависит от функции f. Если $\partial D \in C^{2s}$, $s \geqslant 1$, то для любой функции $f \in H^{2s, s}(Q_T)$ существует финитное в Q'_{t^0, t^1} продолжение $F \in H^{2s, s}(Q'_{t^0, t^1})$, при этом имеет место неравенство

$$\| F \|_{H^{2s, s}(Q'_{t^0, t^1})} \leqslant C \| f \|_{H^{2s, s}(Q_T)}, \tag{2}$$

в котором положительная постоянная C не зависит от f.

Искомое продолжение F функции f из $H^{r, 0}(Q_T)$ или из $H^{2s, s}(Q_T)$ строится в два этапа: сначала находится продолжение F_1 функции f через боковую поверхность цилиндра Q_T в более широкий цилиндр $Q'_T = \{x \in D',\ 0 < t < T\}$ той же высоты T, а затем функция F_1 продолжается через верхнее $\{x \in D',\ t = T\}$ и через нижнее $\{x \in D',\ t = 0\}$ основания цилиндра Q'_T.

Для построения функции F_1 воспользуемся той же схемой, что и при продолжении в D' функции из $H^k(D)$ (см. п. 2 § 4). При этом воспользуемся построенным в п. 2 § 4 продолжением функций из прямоугольного параллелепипеда.

Обозначим через $\Pi_{a, T}$, $a > 0$, прямоугольный параллелепипед $\{|x_i| < a,\ i = 1, \ldots, n,\ 0 < t < T\}$, а через $\Pi^+_{a, T}$ и $\Pi^-_{a, T}$ — прямоугольные параллелепипеды $\{|x_i| < a,\ i = 1, \ldots, n-1,\ 0 < x_n < a,\ 0 < t < T\}$ и $\{|x_i| < a,\ i = 1, \ldots, n-1,\ -a < x_n < 0,\ 0 < t < T\}$ соответственно. Пусть функция $z(x, t) \in C^k(\overline{\Pi}^+_{a, T})$ при некотором $k \geqslant 1$. **Продолжение $Z(x, t)$ функции $z(x, t)$** в параллелепипед $\Pi_{a, T}$

определяется в параллелепипеде $\Pi^-_{a,T}$ следующим образом:

$$Z(x, t) = \sum_{i=1}^{k+1} A_i z\left(x', -\frac{x_n}{i}, t\right), \tag{3}$$

где $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, а $A_1, \ldots, A_{k+1}$ — решение линейной алгебраической системы

$$\sum_{i=1}^{k+1} A_i \left(-\frac{1}{i}\right)^s = 1, \qquad s = 0, 1, \ldots, k.$$

При доказательстве леммы 1 п. 2 § 4 было установлено, что $Z(x, t) \in C^k(\overline{\Pi}_{a,T})$, и при любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$, $\alpha_1 \geq 0, \ldots, \beta \geq 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta \leq k$,

$$\left\| \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta} Z}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^{\beta}} \right\|_{L_2(\Pi_{a,T})} \leq C \left\| \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \beta} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial t^{\beta}} \right\|_{L_2(\Pi^+_{a,T})},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от z. Поэтому для любого $r \leq k$

$$\|Z\|_{H^{r,0}(\Pi_{a,T})} \leq C \|z\|_{H^{r,0}(\Pi^+_{a,T})}, \tag{4}$$

и для любого s, $2s \leq k$,

$$\|Z\|_{H^{2s,s}(\Pi_{a,T})} \leq C \|z\|_{H^{2s,s}(\Pi^+_{a,T})}, \tag{5}$$

где положительная постоянная C не зависит от z.

Так как в пространстве $H^{r,0}(\Pi^+_{a,T})$ и в пространстве $H^{2s,s}(\Pi^+_{a,T})$ множество $C^\infty(\overline{\Pi}^+_{a,T})$, а тем самым, и множество $C^k(\overline{\Pi}^+_{a,T})$ при любом $k \geq r$ или $k \geq 2s$ соответственно является всюду плотным (это утверждение доказывается так же, как аналогичное утверждение для пространства $H^k(D)$, см. свойство 6 п. 1 § 4), то в силу полноты этих пространств из сказанного вытекает, что и для любой принадлежащей $H^{r,0}(\Pi^+_{a,T})$ или $H^{2s,s}(\Pi^+_{a,T})$ функции z существует продолжение Z в $\Pi_{a,T}$, принадлежащее $H^{r,0}(\Pi_{a,T})$ или соответственно $H^{2s,s}(\Pi_{a,T})$, причем функция Z в $\Pi^-_{a,T}$ задается формулой (3) и имеет место неравенство (4) или неравенство (5) соответственно. Дословно повторяя далее рассуждения, примененные при доказательстве теоремы 1 (п. 2 § 4), получим функцию $F_1(x, t)$, являющуюся продолжением функции $f(x, t)$ в цилиндр Q'_T, причем если $f \in H^{r,0}(Q_T)$, то $F_1 \in H^{r,0}(Q'_T)$ и имеет место неравенство

$$\|F_1\|_{H^{r,0}(Q'_T)} \leq C_1 \|f\|_{H^{r,0}(Q_T)},$$

а если $f \in H^{2s,s}(Q_T)$, то $F_1 \in H^{2s,s}(Q'_T)$ и имеет место неравенство

$$\|F_1\|_{H^{2s,s}(Q'_T)} \leq C_2 \|f\|_{H^{2s,s}(Q_T)}$$

(положительные постоянные C_1 и C_2 в этих неравенствах не зависят от f). Кроме того, функция $F_1=0$ в $Q'_T\setminus Q''_T$, где $Q''_T=\{x\in D'', 0<t<T\}$, а D'' — некоторая область пространства R_n такая, что $D\Subset D''\Subset D'$.

Теперь построим нужное нам продолжение F функции f в цилиндр Q'_{t^0,t^1}.

В случае, когда $f\in H^{r,0}(Q_T)$, в качестве функции F возьмем функцию, равную F_1 в Q'_T и нулю в $Q'_{t^0,t^1}\setminus Q'_T$. Очевидно, функция F принадлежит $H^{r,0}(Q'_{t^0,t^1})$ и является финитной в Q'_{t^0,t^1}; при этом имеет место неравенство (1).

Если функция $f\in H^{2s,s}(Q_T)$, то ее продолжение F в цилиндр Q'_{t^0,t^1} определим равенством $F=\zeta(t)F_2(x, t)$, где $\zeta(t)\in C^\infty(-\infty, +\infty)$, $\zeta(t)=1$ для $t\in(0, T)$, $\zeta(t)=0$ для $t>\frac{T+t^1}{2}$ и для $t<\frac{t^0}{2}$, а функция $F_2(x, t)$ равна $F_1(x, t)$ в Q'_T, равна $\sum\limits_{i=1}^{s+1}A'_iF_1\left(x, \frac{tT}{it^0}\right)$ в $\{x\in D', t^0<t<0\}$ и равна $\sum\limits_{i=1}^{s+1}A''_iF_1\left(x, T-\frac{t-T}{i}\cdot\frac{T}{t^1-T}\right)$ в $\{x\in D', T<t<t^1\}$, где $A'_1, \ldots, A'_{s+1}$ — решение линейной алгебраической системы уравнений $\sum\limits_{i=1}^{s+1}A'_i\left(\frac{T}{it^0}\right)^p=1$, $p=0, \ldots, s$, а $A''_1, \ldots, A''_{s+1}$ — решение системы $\sum\limits_{i=1}^{s+1}A''_i\left(-\frac{T}{i(t^1-T)}\right)^p$, $p=0, \ldots, s$. Очевидно, что функция $F\in H^{2s,s}(Q'_{t^0,t^1})$ финитна в Q'_{t^0,t^1} и имеет место неравенство (2).

Из свойства 5 на основании леммы 1 п. 2 § 3 немедленно получаем справедливость следующего утверждения (соответствующее утверждение для пространства H^k см. п. 3 § 4).

6. Если граница $\partial D\in C^r$, $r\geqslant 1$, то множество $C^\infty(\bar{Q}_T)$ всюду плотно в $H^{r,0}(Q_T)$. Если $\partial D\in C^{2s}$, $s\geqslant 1$, то множество $C^\infty(\bar{Q}_T)$ всюду плотно в $H^{2s,s}(Q_T)$.

7. Пусть $f(x, t)\in H^{1,0}(Q_T)$, а S — принадлежащая $\bar{D}$ $(n-1)$-мерная поверхность класса C^1; в частности, S может совпадать с границей ∂D области D.

Обозначим через $\Gamma_{S,T}$ цилиндрическую поверхность $\{x\in S, 0<t<T\}$; боковую поверхность $\Gamma_{\partial D,T}=\{x\in\partial D, 0<t<T\}$ цилиндра Q_T будем также обозначать через Γ_T.

Согласно свойству 6 ($\partial D\in C^1$) существует такая последовательность f_k, $k=1, 2, \ldots$, функций из $C^1(\bar{Q}_T)$, что $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{H^{1,0}(Q_T)}=0$. Поскольку функции $f_k(x, t)$, $k=1, \ldots$, как функции от x, при любом $t\in[0, T]$ принадлежат $C^1(\bar{D})$, то при любом $t \in [0, T]$ имеют место неравенства

$$\|f_k - f_s\|^2_{L_2(S)} \leqslant C^2 \|f_k - f_s\|^2_{H^1(D)}, \qquad k, s = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

в которых положительная постоянная C зависит только от области D и поверхности S (см. неравенство (3) п. 1 § 5). Интегрируя (6) по $t \in (0, T)$, получим неравенства

$$\|f_k - f_s\|_{L_2(\Gamma_{S,T})} \leqslant C \|f_k - f_s\|_{H^{1,0}(Q_T)}, \qquad k, s = 1, 2, \ldots$$

Так как последовательность f_k, $k = 1, 2, \ldots$, фундаментальна в $H^{1,0}(Q_T)$, то из последних неравенств вытекает, что последовательность значений $f_k|_{(x,t) \in \Gamma_{S,T}}$, $k = 1, 2, \ldots$, этих функций на $\Gamma_{S,T}$ является фундаментальной в $L_2(\Gamma_{S,T})$. Следовательно, существует функция $f_{\Gamma_{S,T}} \in L_2(\Gamma_{S,T})$, к которой в $L_2(\Gamma_{S,T})$ сходится последовательность $f_k|_{(x,t) \in \Gamma_{S,T}}$, $k = 1, \ldots$, причем, как легко проверить, повторяя соответствующие рассуждения п. 1 § 5, функция $f_{\Gamma_{S,T}}$ не зависит от выбора аппроксимирующей функцию f последовательности f_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Функцию $f_{\Gamma_{S,T}}$ естественно назвать *следом функции* f (из $H^{1,0}(Q_T)$) на цилиндрической поверхности $\Gamma_{S,T}$ и обозначать через $f|_{\Gamma_{S,T}}$.

Как и в п. 1 § 5, без труда убеждаемся, что

$$\|f\|_{L_2(\Gamma_{S,T})} \leqslant C \|f\|_{H^{1,0}(Q_T)}$$

(здесь $\|f\|_{L_2(\Gamma_{S,T})} = \|f|_{\Gamma_{S,T}}\|_{L_2(\Gamma_{S,T})}$), где постоянная $C > 0$ не зависит от f.

Заметим, что если $\mathcal{M}$ — произвольное ограниченное множество функций из $H^{1,0}(Q_T)$, то множество $\mathcal{M}'$ следов этих функций на $\Gamma_{S,T}$ в силу последнего неравенства является ограниченным в $L_2(\Gamma_{S,T})$, но, в отличие от случая пространства $H^1(Q_T)$, не является компактным.

Введенное понятие следа позволяет распространить на функции из $H^{1,0}(Q_T)$ формулу интегрирования по частям. А именно, для любых двух функций f и g из $H^{1,0}(Q_T)$ имеет место формула интегрирования по частям (формула Остроградского)

$$\int\limits_{Q_T} f_{x_i} g \, dx \, dt = \int\limits_{\Gamma_T} f g n_i \, dS \, dt - \int\limits_{Q_T} f g_{x_i} \, dx \, dt,$$

где n_i — i-я координата n-мерного (единичного) вектора внешней нормали к поверхности ∂D, $i = 1, 2, \ldots, n$, а функции f и g, стоящие под знаком интеграла по боковой поверхности Γ_T цилиндра Q_T, — следы на Γ_T функций f и g. Доказательство этой формулы легко получить (ср. с п. 2 § 5) с помощью аппроксимации в $H^{1,0}(Q_T)$ функций f и g функциями из $C^1(\bar{Q}_T)$.

Если $f \in H^{r,0}(Q_T)$, $r \geqslant 1$, то любая производная этой функции по $x_1, \ldots, x_n$ порядка, меньшего чем r, имеет след на боковой поверхности Γ_T цилиндра Q_T. Если $f \in H^{2s,s}(Q_T)$, $s \geqslant 1$, то следом на боковой поверхности Γ_T цилиндра Q_T обладает любая производная $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial t^{\beta}}$ при $\alpha_1+\ldots+\alpha_n+2\beta<2s$.

§ 8. Примеры операторов в функциональных пространствах

1. Интегральные операторы. Интегральное уравнение Фредгольма. Пусть Q — некоторая ограниченная область n-мерного пространства R_n. Рассмотрим на $Q \times Q$ измеримую функцию $K(x, y)$. Пусть функция $f(y)$ такова, что для п. в. $x \in Q$ $K(x, y) \times f(y) \in L_1(Q)$ (например, $f=0$). Каждой такой $f(y)$ поставим в соответствие функцию

$$g(x)=\int_Q K(x, y) f(y)\, dy. \tag{1}$$

Это отображение можно рассматривать как оператор (очевидно, линейный) из $L_1(Q)$ в $L_1(Q)$, из $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$, из $C(\bar{Q})$ в $C(\bar{Q})$ и т. д. Функция $K(x, y)$ называется *ядром* этого оператора. Конечно, этот оператор может быть определен не на всем пространстве, например, для оператора из $C(\bar{Q})$ в $C(\bar{Q})$ областью определения является множество всех таких функций из $C(\bar{Q})$, для которых $g(x) \in C(\bar{Q})$. Однако легко видеть, что если ядро $K(x, y) \in C(\overline{Q \times Q})$, то этот оператор определен всюду (в $L_1(Q)$, в $L_2(Q)$, в $C(\bar{Q})$) и ограничен.

Мы будем рассматривать определенный формулой (1) оператор с ядром $K(x, y)=K_0(x, y)|x-y|^{-\alpha}$, где $K_0(x, y) \in C(\overline{Q \times Q})$, а $0 \leqslant \alpha < n$, как оператор из $C(\bar{Q})$ в $C(\bar{Q})$ и как оператор из $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$; при этом в обоих случаях будем его обозначать через K:

$$g=Kf. \tag{2}$$

Оператор K называется *интегральным оператором Фредгольма*. Согласно результатам п. 12 § 1 гл. II для любой функции $f \in C(\bar{Q})$ функция $g \in C(\bar{Q})$. Это означает, что оператор K из $C(\bar{Q})$ в $C(\bar{Q})$ задан на всем $C(\bar{Q})$.

Так как функции $\int_Q |K(x, y)|\, dy$ и $\int_Q |K(x, y)|\, dx$ непрерывны в $\bar{Q}$, то они ограничены, т. е.

$$A=\max\left\{\max_{y \in \bar{Q}} \int_Q |K(x, y)|\, dx,\ \max_{x \in \bar{Q}} \int_Q |K(x, y)|\, dy\right\}<\infty. \tag{3}$$

Поскольку для любой точки $x \in Q$

$$|g(x)| \leqslant \|f\|_{C(\bar{Q})} \int_Q |K(x, y)|\, dy \leqslant A \|f\|_{C(\bar{Q})},$$

то $\|g\|_{C(\bar{Q})} \leqslant A \|f\|_{C(\bar{Q})}$. Значит, оператор K из $C(\bar{Q})$ в $C(\bar{Q})$ ограничен и $\|K\| \leqslant A$.

Пусть $f(x) \in L_2(Q)$. Так как функции $|f(y)|^2 \int_Q |K(x, y)|\, dx$ и $\int_Q |K(x, y)|\, dx$ принадлежат $L_1(Q)$ (последняя — даже $C(\bar{Q})$), то по следствию из теоремы Фубини функции $K(x, y)|f(y)|^2$ и $K(x, y)$ принадлежат $L_1(Q \times Q)$. Значит, пространству $L_1(Q \times Q)$ принадлежит и функция $K(x, y) f(y)$, поскольку $|K(x, y) f(y)| \leqslant$ $\leqslant \frac{|K(x, y)|}{2} + \frac{|K(x, y)|\,|f(y)|^2}{2}$. Тогда согласно теореме Фубини функции $g(x) = \int_Q K(x, y) f(y)\, dy$, $\int_Q |K(x, y)|\, dy$ и $\int_Q |K(x, y)| \times$ $\times |f(y)|^2\, dy$ принадлежат $L_1(Q)$. Для п. в. $x \in Q$ имеем неравенство

$$|g(x)|^2 \leqslant \int_Q |K(x, y)|\, dy \cdot \int_Q |K(x, y)|\,|f(y)|^2\, dy \leqslant$$
$$\leqslant A \int_Q |K(x, y)|\,|f(y)|^2\, dy,$$

из которого следует, что $g(x) \in L_2(Q)$. Интегрируя это неравенство по Q и пользуясь теоремой Фубини, получим

$$\|g\|^2_{L_2(Q)} \leqslant A \int_Q dx \int_Q |K(x, y)|\,|f(y)|^2\, dy =$$
$$= A \int_Q |f(y)|^2 \left(\int_Q |K(x, y)|\, dx \right) dy \leqslant A^2 \|f\|^2_{L_2(Q)}.$$

Таким образом, оператор K из $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$ задан на всем $L_2(Q)$, ограничен и $\|K\| \leqslant A$.

Лемма 1. *Оператор K, действующий из $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$, вполне непрерывен. Оператор K, действующий из $C(\bar{Q})$ в $C(\bar{Q})$, вполне непрерывен.*

1. Рассмотрим сначала оператор K, действующий из $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$. Определенная при любом $N > 0$ равенством

$$K_N(x, y) = \begin{cases} K(x, y) & \text{при } |x - y| \geqslant N^{-1}, \\ K_0(x, y) N^{\alpha} & \text{при } |x - y| < N^{-1} \end{cases}$$

функция $K_N(x, y)$ принадлежит $C(\overline{Q \times Q})$. Поскольку для произвольной точки $x \in \bar{Q}$ имеет место неравенство

$$\int\limits_Q |K(x, y) - K_N(x, y)|\, dy =$$

$$= \int\limits_{Q \cap \{|x-y| < N^{-1}\}} |K_0(x, y)| \left(\frac{1}{|x-y|^\alpha} - N^\alpha\right) dy \leqslant$$

$$\leqslant B \int\limits_{|x-y| < N^{-1}} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} = B \int\limits_{|\xi| < N^{-1}} \frac{d\xi}{|\xi|^\alpha} =$$

$$= B\sigma_n \int\limits_0^{N^{-1}} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1-n}} = \frac{B\sigma_n}{(n-\alpha) N^{n-\alpha}},$$

где $B = \|K_0\|_{C(\overline{Q \times Q})}$, σ_n — площадь поверхности $(n-1)$-мерной единичной сферы, то по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что

$$\max_{x \in \bar{Q}} \int\limits_Q |K(x, y) - K_N(x, y)|\, dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку $K_N(x, y) \in C(\overline{Q \times Q})$, то существует такой многочлен $P(x, y)$, что $|P(x, y) - K_N(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2|Q|}$ для всех $(x, y) \in \overline{Q \times Q}$. Это означает, что

$$\max_{x \in \bar{Q}} \int\limits_Q |K(x, y) - P(x, y)|\, dy \leqslant \max_{x \in \bar{Q}} \int\limits_Q |K(x, y) - K_N(x, y)|\, dy +$$
$$+ \max_{x \in \bar{Q}} \int\limits_Q |K_N(x, y) - P(x, y)|\, dy < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad (4)$$

Аналогично устанавливается неравенство

$$\max_{y \in \bar{Q}} \int\limits_Q |K(x, y) - P(x, y)|\, dx < \varepsilon. \qquad (4')$$

Многочлен $P(x, y)$ и функцию $G(x, y) = K(x, y) - P(x, y) = \frac{K_0(x, y) - P(x, y)|x-y|^\alpha}{|x-y|^\alpha}$ можно рассматривать как ядра интегральных операторов типа (2), обозначим эти операторы через P и G соответственно. При этом имеет место равенство

$$K = P + G,$$

и в силу (4) и (4′) оценка

$$\|G\| < \varepsilon.$$

Итак, оператор K представлен в виде суммы оператора G со сколь угодно малой нормой и конечномерного оператора P (этот оператор переводит $L_2(Q)$ во множество многочленов степени, не превосходящей степени многочлена $P(x, y)$). Поэтому на основании теоремы 4 п. 9 § 3 гл. II K вполне непрерывен.

2. Рассмотрим теперь оператор K, действующий из $C(\bar{Q})$ в $C(\bar{Q})$. Поскольку K ограничен, то любое ограниченное в $C(\bar{Q})$ множество $\mathcal{M}$ он переводит в некоторое ограниченное множество $\mathcal{M}'$. В силу результатов п. 12 § 1 гл. II для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\int\limits_Q |K(x', y) - K(x'', y)|\,dy < \varepsilon$, как только $|x' - x''| < \delta$. Поэтому для $|x' - x''| < \delta$

$$|g(x') - g(x'')| \leqslant \int\limits_Q |K(x', y) - K(x'', y)|\,|f(y)|\,dy \leqslant \varepsilon \|f\|_{C(\bar{Q})}.$$

Таким образом, множество $\mathcal{M}'$ непрерывных в $\bar{Q}$ функций равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Следовательно, по теореме Арцела оно компактно. Лемма доказана.

Уравнение $\varphi = \mu K\varphi + f$, где μ — комплексный параметр, а K — интегральный оператор Фредгольма, т. е. уравнение

$$\varphi(x) = \mu \int\limits_Q K(x, y)\,\varphi(y)\,dy + f(x), \tag{5}$$

называется *интегральным уравнением Фредгольма* (второго рода).

Будем рассматривать уравнение (5) в $L_2(Q)$ ($f \in L_2(Q)$ и решение φ будем искать в $L_2(Q)$).

В силу леммы 1 для уравнения (5) справедливы теоремы Фредгольма (пп. 3—7 § 4 гл. II). В частности, если μ не является характеристическим числом оператора K (а таких чисел не более чем счетное множество), то существует ограниченный оператор $(I - \mu K)^{-1}$, т. е. уравнение (5) имеет единственное решение $\varphi \in L_2(Q)$ при любом свободном члене $f \in L_2(Q)$.

Если ядро $K(x, y)$ обладает свойством $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, то оператор K из $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$ является *самосопряженным*.

Действительно, на основании теоремы Фубини для любых φ и ψ из $L_2(Q)$

$$(K\varphi, \psi)_{L_2(Q)} = \\ = \int\limits_Q \int\limits_Q K(x, y)\,\varphi(y)\,dy\,\overline{\psi(x)}\,dx = \int\limits_Q \varphi(y) \left(\int\limits_Q K(x, y)\,\overline{\psi(x)}\,dx \right) dy = \\ = \int\limits_Q \varphi(y) \left(\overline{\int\limits_Q K(y, x)\,\psi(x)\,dx} \right) dy = (\varphi, K\psi)_{L_2(Q)}.$$

Поэтому для оператора K справедливы результаты, доказанные в § 5 гл. II для случая общего вполне непрерывного самосопряженного оператора. В частности, все собственные значения и характеристические числа оператора K вещественны, и в пространстве $L_2(Q)$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных функций этого оператора (следствие 2 из теоремы 2 п. 2 § 5 гл. II).

2. Дифференциальные операторы. Пусть в n-мерной области Q для каждого целочисленного вектора $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i=1, \ldots, n$, $|\alpha| \leqslant k$, где $k \geqslant 1$, задана измеримая ограниченная функция $a_\alpha(x)$. Линейный оператор из $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$, ставящий в соответствие функции f функцию

$$(\mathscr{L}f)(x)=\sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(x) D^\alpha f(x), \tag{6}$$

называется *линейным дифференциальным оператором* (из $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$). Будем считать, что оператор $\mathscr{L}$ имеет порядок k, т. е. хотя бы один из коэффициентов $a_\alpha(x)$ при $|\alpha|=k$ отличен от нуля (множество, на котором $a_\alpha(x) \neq 0$, не является множеством меры нуль).

Оператор $\mathscr{L}$, конечно, не определен на всем $L_2(Q)$. Однако множество функций f, для которых выражение (6) имеет смысл ($D^\alpha f$ — обобщенная производная), содержит $H^k(Q)$. Поэтому $H^k(Q)$ можно взять в качестве области определения этого оператора.

Если все функции $a_\alpha(x)$, $|\alpha| \leqslant k$, непрерывны в $\bar{Q}$, то формулой (6) задается и линейный оператор из $C(\bar{Q})$ в $C(\bar{Q})$ (линейный дифференциальный оператор из $C(\bar{Q})$ в $C(\bar{Q})$). В качестве области определения оператора $\mathscr{L}$ в этом случае можно взять $C^k(\bar{Q})$.

Частным случаем оператора $\mathscr{L}$ из $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$ (из $C(\bar{Q})$ в $C(\bar{Q})$) является оператор D^α, $|\alpha|=k$, ставящий в соответствие функции f из $H^k(Q)$ (из $C^k(\bar{Q})$) ее обобщенную (классическую) производную. Оператор D^α из $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$ не ограничен, поскольку последовательность $f_m(x)=e^{im(x_1+\ldots+x_n)}$, $m=1, 2, \ldots$, функций из $H^k(Q)$, ограниченную в $L_2(Q)$ ($\|f_m\|_{L_2(Q)}=\sqrt{|Q|}$, $m=1, 2, \ldots$), он переводит в последовательность $g_m(x)=(im)^{|\alpha|} \times e^{im(x_1+\ldots+x_n)}$, $m=1, 2, \ldots$, неограниченную в $L_2(Q)$ ($\|g_m\|_{L_2(Q)}=m^{|\alpha|}\sqrt{|Q|} \to \infty$ при $m \to \infty$).

Аналогично можно доказать, что и оператор $\mathscr{L}$, $k \geqslant 1$, из $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$ не ограничен и что операторы D^α и $\mathscr{L}$ из $C(\bar{Q})$ в $C(\bar{Q})$ также не ограничены.

Если оператор $\mathscr{L}$ рассматривать как оператор из $H^k(Q)$ в $L_2(Q)$ или из $C^k(\bar{Q})$ в $C(\bar{Q})$, то он является ограниченным, поскольку для любого $f \in H^k(Q)$ ($C^k(\bar{Q})$)

$$\|\mathscr{L}f\|_{L_2(Q)} \leqslant \text{const}\, \|f\|_{H^k(Q)} \quad (\|\mathscr{L}f\|_{C(\bar{Q})} \leqslant \text{const}\, \|f\|_{C^k(\bar{Q})}).$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ III

1. Шар $S=\{\|x\|<1\}$ банахова пространства будем называть *строго выпуклым*, если для любых точек x и y, $x \neq y$, единичной сферы, $\|x\|=\|y\|=1$, и любого $\alpha \in (0, 1)$ точка $\alpha x+(1-\alpha) y \in S$, т. е. $\|\alpha x+(1-\alpha) y\|<1$.

Является ли единичный шар в пространствах $C(\bar{Q})$, $L_1(Q)$, $L_2(Q)$ строго выпуклым?

2. Пусть x — точка единичной сферы в $C(\bar{Q})$ ($L_1(Q)$). Найти множество всех точек y единичной сферы, для которых все точки отрезка $\alpha x+(1-\alpha)y$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, принадлежат этой сфере.

3. Множество $\dot{C}^k(\bar{Q})$ есть линейное многообразие в $C^k(\bar{Q})$. Обозначим через $\mathring{C}^k(\bar{Q})$ замыкание этого множества по норме $\max\limits_{x\in\bar{Q}}\sum\limits_{|\alpha|\leqslant k}|D^\alpha f(x)|$: $\mathring{C}^k(\bar{Q})=\overline{\dot{C}^k(\bar{Q})}$. Из каких функций состоит $\mathring{C}^k(\bar{Q})$?

4. Показать, что если $\partial Q\in C^k$, то $C^\infty(\bar{Q})$ всюду плотно в $C^k(\bar{Q})$.

Пусть B — банахово пространство, а $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — его подпространства. Говорят, что B есть прямая сумма $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$: $B=\mathcal{M}\oplus\mathcal{N}$, если любой элемент f из B однозначно представляется в виде суммы f_1+f_2, где $f_1\in\mathcal{M}$, а $f_2\in\mathcal{N}$. Если гильбертово пространство $H=\mathcal{M}\oplus\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}\perp\mathcal{N}$, то $\mathcal{M}$ (и $\mathcal{N}$) называется ортогональным дополнением к $\mathcal{N}$ (соответственно к $\mathcal{M}$) в H.

5. Представить пространство $C^k([a, b])$ в виде прямой суммы подпространства $\mathring{C}^k([a, b])$ и некоторого подпространства $\mathcal{N}$. Найти размерность $\mathcal{N}$.

6. Множество функций из $L_2(Q)$, равных нулю (п. в.) в области Q', $Q'\subset Q$, есть подпространство пространства $L_2(Q)$. Найти его ортогональное дополнение.

7. Рассмотрим на плоскости $x=(x_1, x_2)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, функцию $f(x)=r^\alpha\varphi$. При каких α функция $f\in H^1(Q)$, где область Q есть а) круг $\{r<1\}$, б) $\{r<1, \varphi\neq 0\}$?

8. Пусть последовательность $f_m(x)$, $m=1, 2, \ldots$, функций из $C^k(\bar{Q})$ слабо в $L_2(Q)$ сходится к некоторой функции f, а последовательность $D^\alpha f_m$, $m=1, 2, \ldots$, при некотором $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha|=k$, ограничена в $L_2(Q)$. Показать, что функция f имеет обобщенную производную $D^\alpha f$.

9. Пусть последовательность $f_m(x)$, $m=1, 2, \ldots$, функций из $C^1(\bar{Q})$ слабо сходится в $L_2(Q)$, а последовательности $\frac{\partial f_m}{\partial x_i}$, $i=1, \ldots, n$, $m=1, 2, \ldots$, ограничены в $L_2(Q)$. Показать, что последовательность f_m, $m=1, 2, \ldots$, сходится в $L_2(Q)$ сильно. Привести пример последовательности, удовлетворяющей сформулированным условиям и некомпактной в $H^1(Q)$.

10. Показать, что если последовательность $f_m(x)$, $m=1, 2, \ldots$, функций из $\dot{C}^k(\bar{Q})$, $k\geqslant 1$, слабо сходится в $L_2(Q)$ к функции f и при всех $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha|=k$, $\|D^\alpha f_m\|_{L_2(Q)}\leqslant\text{const}$, $m=1, 2, \ldots$, то а) $f\in\mathring{H}^k(Q)$, б) последовательность f_m, $m=1, 2, \ldots$, сходится к f сильно в $H^{k-1}(Q)$.

11. Доказать, что для любой функции $f(x)$ из $H^k(K)$ (из $C^k(\bar{K})$), где K — n-мерный куб, существует финитное продолжение $F(x)$ в более широкую область Q, $Q\supseteq K$, принадлежащее $H^k(Q)$ ($C^k(\bar{Q})$). При этом имеет место неравенство $\|F\|_{H^k(Q)}\leqslant C\|f\|_{H^k(K)}$, постоянная $C>0$ в котором не зависит от f.

12. Пусть x^0 — точка области Q n-мерного пространства R_n, $n>1$. Показать, что замыкание линейного многообразия непрерывно дифференцируемых в $\bar{Q}$ функций, обращающихся в нуль в некоторой окрестности (своей для каждой функции) точки x^0, совпадает с $H^1(Q)$.

13. Доказать, что множество $\tilde{H}^1(a, b)$ всех функций f из $H^1(a, b)$, для которых $f(a)=f(b)$, есть подпространство пространства $H^1(a, b)$. Показать, что имеют место включения $\mathring{H}^1(a, b)\subset\tilde{H}^1(a, b)\subset H^1(a, b)$. Найти ортогональные дополнения $\mathring{H}^1(a, b)$ в $\tilde{H}^1(a, b)$ и $\tilde{H}^1(a, b)$ в $H^1(a, b)$ и построить ортонормированные базисы пространств $\mathring{H}^1(a, b)$, $\tilde{H}^1(a, b)$ и $H^1(a, b)$.

Пусть функция $f\in L_2(K)$, где K — куб $\{|x_i|<a, i=1, \ldots, n\}$. Согласно теореме Фубини для почти всех $x_n=\xi\in(-a, a)$ определена функция $f(x', \xi)$, принадлежащая $L_2(K')$, где K' — $(n-1)$-мерный куб $\{|x_i|<a, i=1, \ldots, n-1\}$. Эту функцию назовем значением функции f на сечении $K\cap\{x_n=\xi\}$. Анало-

гично, для почти всех $x'=\xi'\in K'$ определена функция $f(\xi', x_n)$, принадлежащая $L_2(-a, a)$. Эту функцию будем называть значением функции f на сечении $K\cap\{x'=\xi'\}$.

Для функции $f\in H^1(K)$ при всех $x_n=\xi\in[-a, a]$ существует след $f|_{x_n=\xi}$ из $L_2(K')$.

14. Доказать, что если функция $f\in H^1(K)$, то для п. в. $\xi'\in K'$ ее значение $f(\xi', x_n)$ на сечении $K\cap\{x'=\xi'\}$ принадлежит пространству $H^1(-a, a)$, для п.в. $\xi\in(-a, a)$ ее след $f|_{x_n=\xi}$ и ее значение $f(x', \xi)$ на сечении $K\cap\{x_n=\xi\}$ принадлежат $H^1(K')$.

15. Доказать, что множество следов всех функций из $H^1(Q)$ на $(n-1)$-мерной поверхности $S\subset\bar{Q}$ не совпадает с $L_2(S)$.

16. Доказать следующие утверждения:

а) если функция $f\in H^1(Q)$, то функция $|f|$ тоже принадлежит $H^1(Q)$,

б) если функции $f_1, \ldots, f_N$ принадлежат $H^1(Q)$, то функции $\max(f_1, \ldots, f_N)$ и $\min(f_1, \ldots, f_N)$ тоже принадлежат $H^1(Q)$.

17. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу $C^\alpha(Q)$ при некотором α, $0<\alpha<1$, если для любой строго внутренней подобласти Q', $Q'\Subset Q$, существует такая постоянная $C=C(Q')$, что для всех точек x' и x'' из $\bar{Q}'$ имеет место неравенство $|f(x')-f(x'')|\leqslant C|x'-x''|^\alpha$. Если при некоторой постоянной C это неравенство имеет место для всех x' и x'' из $\bar{Q}$, то будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу $C^\alpha(\bar{Q})$.

Доказать, что если $f\in H_{\text{loc}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$ (Q — n-мерная область), то $f\in C^\alpha(Q)$ при любом $\alpha<[n/2]+1-n/2$, а если функция $f\in \mathring{H}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$ или $f\in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$ и $\partial Q\in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, то $f\in C^\alpha(\bar{Q})$ при любом $\alpha<[n/2]+1-n/2$.

18. Доказать, что любое ограниченное множество в $H^{k+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$ (Q — n-мерная область, $\partial Q\in C^{k+1+\left[\frac{n}{2}\right]}$) компактно в $C^k(\bar{Q})$.

19. Пусть функции $k(x)$, $a(x)$, $\rho(x)$ принадлежат $C(\bar{Q})$, $\sigma(x)\in C(\partial Q)$ $k(x)>0$, $a(x)\geqslant 0$, $\rho(x)\geqslant 0$ в $\bar{Q}$, $\sigma(x)\geqslant 0$ на ∂Q. Показать, что заданные на $H^1(Q)$ билинейная форма

$$W_1(f, g)=\int_Q (k\nabla f\nabla\bar{g}+af\bar{g})\,dx+\left(\int_Q \rho f\,dx\right)\left(\int_Q \rho\bar{g}\,dx\right)$$

при $a+\rho\not\equiv 0$ и билинейная форма

$$W_2(f, g)=\int_Q (k\nabla f\nabla\bar{g}+af\bar{g})\,dx+\left(\int_{\partial Q}\sigma f\,dS\right)\left(\int_{\partial Q}\sigma\bar{g}\,dS\right),$$

если или $a\not\equiv 0$ или $\sigma\not\equiv 0$, задают в $H^1(Q)$ скалярные произведения, эквивалентные скалярному произведению

$$(f, g)_{H^1(Q)}=\int_Q (\nabla f\nabla\bar{g}+f\bar{g})\,dx.$$

20. Пусть функция $k(x)\in C^2([0, 1])$ и $k(x)>0$ при $x>0$. Обозначим через $H_k(0, 1)$ пополнение множества всех функций из $C^1([0, 1])$, обращающихся в нуль при $x=1$ по норме, порожденной скалярным произведением $\int_0^1 k(x)f'(x)\bar{g}'(x)\,dx$. Доказать, что $H_k(0, 1)\subset L_2(0, 1)$ тогда и только тогда, когда $\varliminf\limits_{x\to+0} k(x)\cdot x^{-2}>0$.

21. Показать, что в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^k(Q)$ скалярные произведения $(f, g)' = \int\limits_Q \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} D^\alpha f D^\alpha \bar{g}\, dx$ и $(f, g)'' = \int\limits_Q \sum\limits_{|\alpha| = k} D^\alpha f D^\alpha \bar{g}\, dx$ эквивалентны.

22. Пусть $f \in L_2(0, 1)$. Линейный функционал $l_f(u) = (f, u)_{L_2(Q)}$ ограничен в $\overset{\circ}{H}{}^k(0, 1)$ при любом $k \geqslant 0$. Согласно теореме Рисса существует такой (единственный) элемент $F \in \overset{\circ}{H}{}^k(0, 1)$, что при всех $u \in \overset{\circ}{H}{}^k(0, 1)$ $l_f(u) = (F, u)_{\overset{\circ}{H}{}^k(0, 1)}$. Найти F и показать, что $F \in \overset{\circ}{H}{}^k(0, 1) \cap H^{2k}(0, 1)$. (В качестве скалярного произведения взять а) скалярное произведение $(f, g) = \int\limits_0^1 f^{(k)} \bar{g}^{(k)}\, dx$, б) скалярное произведение $(f, g) = \int\limits_0^1 (f^{(k)} \bar{g}^{(k)} + f\bar{g})\, dx$, где $f^{(k)} = \dfrac{d^k f}{dx^k}$).

Дополнительная литература к главе III

О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, «Наука», 1975.

С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», 1969.

С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.

Глава IV

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Обобщенные решения краевых задач. Задачи на собственные значения

1. Классические и обобщенные решения краевых задач. Пусть в n-мерной области Q задано эллиптическое уравнение

$$\mathscr{L}u \equiv \operatorname{div}(k(x)\nabla u) - a(x)u = f(x), \tag{1}$$

коэффициенты которого вещественнозначны и удовлетворяют условиям

$$a(x) \in C(\bar{Q}), \quad k(x) \in C^1(\bar{Q}), \quad k(x) \geqslant k_0 > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in Q.$$

Функция $u(x)$ и свободный член $f(x)$ уравнения, вообще говоря, могут быть комплекснозначными.

Функция $u(x)$ из $C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$ называется *решением* (*классическим решением*) *первой краевой задачи* или *задачи Дирихле* для уравнения (1), если в Q она удовлетворяет уравнению (1), а на границе ∂Q — условию

$$u|_{\partial Q} = \varphi(x) \tag{2}$$

с заданной функцией $\varphi(x)$.

Функция $u(x) \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$ называется *решением* (*классическим решением*) *третьей краевой задачи* для уравнения (1), если в Q она удовлетворяет уравнению (1), а на границе ∂Q условию

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u\right)\Big|_{\partial Q} = \varphi(x) \tag{3}$$

при заданной функции $\sigma(x)$ из $C(\partial Q)$ и заданной $\varphi(x)$. Мы будем считать, что $\sigma(x) \geqslant 0$.

Если функция $\sigma(x)$ в (3) тождественно равна нулю, то третья краевая задача называется *второй краевой задачей* или *задачей Неймана*.

В случае $n = 1$ уравнение (1) есть обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\mathscr{L}u \equiv (k(x)u')' - a(x)u = f(x). \tag{1$_1$}$$

Область Q в этом случае представляет собой некоторый интервал (α, β), а граничные условия первой и третьей краевых задач имеют соответственно вид

$$u|_{x=\alpha} = \varphi_0, \quad u|_{x=\beta} = \varphi_1 \tag{2$_1$}$$

и

$$(-u'+\sigma_0 u)|_{x=\alpha}=\varphi_0, \quad (u'+\sigma_1 u)|_{x=\beta}=\varphi_1, \tag{3_1}$$

где φ_0, φ_1, $\sigma_0 \geq 0$, $\sigma_1 \geq 0$ — некоторые заданные постоянные.

Пусть функция $u(x)$ является классическим решением в области Q первой краевой задачи (1), (2). Умножим тождество (1) на произвольную функцию $\overline{v(x)} \in \dot{C}^1(Q)$ и проинтегрируем по области Q полученное равенство. С помощью формулы Остроградского получим

$$\int_Q (k\,\nabla u\,\nabla \bar{v} + au\bar{v})\,dx = -\int_Q f\bar{v}\,dx \tag{4}$$

(возникающий при этом интеграл по границе ∂Q равен нулю в силу финитности функции v).

Если дополнительно предположить, что частные производные решения $u_{x_i} \in L_2(Q)$, $i=1,\ldots,n$, т. е. что $u(x) \in H^1(Q)$, а $f(x) \in L_2(Q)$, то интегральное тождество (4) будет иметь место не только для всех функций $v(x) \in \dot{C}^1(\bar{Q})$, но и для всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Для того чтобы в этом убедиться, возьмем произвольную функцию v из $\mathring{H}^1(Q)$ и некоторую последовательность $v_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, функций из $\dot{C}^1(\bar{Q})$, сходящуюся в норме $H^1(Q)$ к функции v. Для каждой функции $v_k(x)$ имеет место равенство (4). Переходя в этом равенстве к пределу при $k \to \infty$, установим справедливость равенства (4) и для функции v.

Таким образом, если $f \in L_2(Q)$, то классическое решение u задачи (1), (2), принадлежащее пространству $H^1(Q)$, удовлетворяет интегральному тождеству (4) при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$.

Введем следующее определение.

Функция $u \in H^1(Q)$ называется *обобщенным решением задачи* (1), (2) при $f \in L_2(Q)$, если она удовлетворяет тождеству (4) для всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$ и граничному условию (2). В граничном условии (2) равенство понимается как равенство элементов из $L_2(\partial Q)$, $u|_{\partial Q}$ — след функции u.

Заметим, что так определенное понятие обобщенного решения не является в полной мере обобщением соответствующего классического понятия, так как для того чтобы классическое решение $u(x)$ было обобщенным, на него следует наложить дополнительные условия «интегрального» характера, а именно, предположить, что $u \in H^1(Q)$ и $\mathscr{L}u \in L_2(Q)$, где $\mathscr{L}$ — оператор в (1).

Аналогично можно ввести понятие обобщенного решения третьей (второй) краевой задачи для уравнения (1). Пусть функция $u(x)$ является классическим решением третьей краевой задачи (1), (3). Предположим, что правая часть $f(x)$ в уравнении (1) принадлежит $L_2(Q)$ и функция $\varphi(x)$ в граничном условии (3) принадлежит $L_2(\partial Q)$. Умножим тождество (1) на произвольную функцию $\overline{v(x)}$

из $H^1(Q)$ и проинтегрируем полученное равенство по области Q. С помощью формулы Остроградского получим интегральное тождество

$$\int_Q (k\nabla u \nabla \bar{v} + au\bar{v})\,dx + \int_{\partial Q} k\sigma u\bar{v}\,dS = \\ = -\int_Q f\bar{v}\,dx + \int_{\partial Q} k\varphi\bar{v}\,dS, \tag{5}$$

которому классическое решение $u(x)$ удовлетворяет при всех $v(x) \in H^1(Q)$.

Введем определение.

Функция $u \in H^1(Q)$ называется *обобщенным решением третьей* (*второй*, если $\sigma(x) \equiv 0$) *краевой задачи для уравнения* (1) при $f \in L_2(Q)$, $\varphi \in L_2(\partial Q)$, если для нее выполняется тождество (5) при всех $v \in H^1(Q)$.

При определении обобщенных решений функции v в тождествах (4) и (5) мы предполагали комплекснозначными. Однако их равным образом можно считать и вещественнозначными. Действительно, если функция u из $H^1(Q)$ удовлетворяет, например, при всех комплекснозначных v из $\mathring{H}^1(Q)$ тождеству (4), то она, очевидно, удовлетворяет этому тождеству и при всех вещественнозначных v из $\mathring{H}^1(Q)$. Обратно, пусть функция u из $H^1(Q)$ удовлетворяет тождеству (4) при всех вещественнозначных v из $\mathring{H}^1(Q)$. Тогда это тождество справедливо и для любой комплекснозначной $v = \operatorname{Re} v + i \operatorname{Im} v$ из $\mathring{H}^1(Q)$, поскольку оно справедливо для принадлежащих $\mathring{H}^1(Q)$ функций $\operatorname{Re} v$ и $\operatorname{Im} v$.

Отметим, что с обобщенными решениями краевых задач для уравнения (1) мы фактически уже встречались (в двумерном случае), когда занимались в п. 1 § 3 гл. I выводом условий равновесия мембраны: интегральные тождества (4) и (5), участвующие в определении обобщенных решений, совпадают с тождествами (4) и (1) п. 1 § 3 гл. I.

Определения обобщенных решений краевых задач для уравнения (1) относятся, конечно, и к одномерному случаю. Функция u из пространства $H^1(\alpha, \beta)$, удовлетворяющая граничным условиям (2_1) (из теоремы 3 п. 2 § 6 гл. III вытекает, что $u \in C([\alpha, \beta])$), является обобщенным решением первой краевой задачи для уравнения (1_1), если при любой $v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$ имеет место равенство

$$\int_\alpha^\beta (ku'\bar{v}' + au\bar{v})\,dx = -\int_\alpha^\beta f\bar{v}\,dx. \tag{4_1}$$

Функция u из $H^1(\alpha, \beta)$ есть обобщенное решение третьей (второй) краевой задачи для уравнения (1_1), если при любой

$v \in H^1(\alpha, \beta)$ выполняется равенство

$$\int_\alpha^\beta (ku'\bar{v}' + au\bar{v})\,dx + k(\beta)\,\sigma_1 u(\beta)\,\bar{v}(\beta) + k(\alpha)\,\sigma_0 u(\alpha)\,\bar{v}(\alpha) =$$

$$= -\int_\alpha^\beta f\bar{v}\,dx + k(\beta)\,\varphi_1\bar{v}(\beta) + k(\alpha)\,\varphi_0\bar{v}(\alpha). \qquad (5_1)$$

Настоящий параграф посвящен изучению обобщенных решений краевых задач. Поскольку обобщённые решения являются элементами гильбертова пространства $H^1(Q)$, то мы при этом будем широко пользоваться соответствующими общими результатами второй главы.

Исследование классических решений краевых задач — задача значительно более сложная, и ее естественно разбить на две более простые задачи: сначала построить обобщенное решение, а затем, установив (при определенных предположениях) его гладкость, показать, что оно является классическим решением. Доказательство гладкости обобщенных решений будет проведено в следующем параграфе.

2. Существование и единственность обобщенного решения в простейшем случае. Изучение вопросов существования и единственности обобщенных решений краевых задач удобно начать со случая, когда граничные условия однородны (т. е. функция φ равна нулю). Согласно определению обобщенное решение краевой задачи (1), (2) при $\varphi = 0$ есть функция u из $\mathring{H}^1(Q)$, удовлетворяющая при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$ интегральному тождеству (4):

$$\int_Q (k\nabla u\nabla\bar{v} + au\bar{v})\,dx = -\int_Q f\bar{v}\,dx.$$

Обобщенное решение третьей (второй) краевой задачи (1), (3) при $\varphi = 0$ есть функция $u \in H^1(Q)$, удовлетворяющая при всех $v \in \in H^1(Q)$ интегральному тождеству

$$\int_Q (k\nabla u\nabla\bar{v} + au\bar{v})\,dx + \int_{\partial Q} k\sigma u\bar{v}\,dS = -\int_Q f\bar{v}\,dx. \qquad (6)$$

Пусть $a(x) \geqslant 0$ в Q. Тогда согласно следствию из теоремы 6 п. 6 § 5 гл. III в пространстве $\mathring{H}^1(Q)$ можно ввести эквивалентное обычному $\left((u, v) = \int_Q (\nabla u\nabla\bar{v} + u\bar{v})\,dx\right)$ скалярное произведение

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u\nabla\bar{v} + au\bar{v})\,dx. \qquad (7)$$

В связи с этим тождеству (4) можно придать вид

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = -(f, v)_{L_2(Q)}. \qquad (8)$$

При фиксированном f из $L_2(Q)$ $(f, v)_{L_2(Q)}$ является линейным функционалом, заданным на $\mathring{H}^1(Q)$, $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Так как

$$|(f, v)_{L_2(Q)}| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{\mathring{H}^1(Q)},$$

где положительная постоянная C не зависит от f и v, то этот функционал ограничен и его норма не превосходит $C\|f\|_{L_2(Q)}$.

Согласно теореме Рисса (теорема 1 п. 2 § 3 гл. II) в $\mathring{H}^1(Q)$ найдется функция F_1, для которой $(f, v)_{L_2(Q)} = (F_1, v)_{\mathring{H}^1(Q)}$ при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Такая функция единственна и удовлетворяет неравенству $\|F_1\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}$. Следовательно, в $\mathring{H}^1(Q)$ существует единственная функция $u = F_1$, удовлетворяющая тождеству (8).

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если $a(x) \geqslant 0$ в Q, то для любой $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение и задачи* (1), (2) (*при* $\varphi = 0$). *При этом*

$$\|u\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}, \tag{9}$$

где положительная постоянная C не зависит от f.

Если $a(x) \geqslant 0$ в Q и хотя бы одна из функций $a(x)$ или $\sigma(x)$ не равна нулю тождественно, то согласно следствию из теоремы 5 п. 6 § 5 гл. III в $H^1(Q)$ можно ввести эквивалентное обычному скалярное произведение

$$(u, v)_{H^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u \nabla \bar{v} + au\bar{v})\,dx + \int_{\partial Q} k\sigma u\bar{v}\,dS. \tag{10}$$

В связи с этим тождество (6) можно переписать в виде

$$(u, v)_{H^1(Q)} = -(f, v)_{L_2(Q)}. \tag{11}$$

Так как при фиксированном $f \in L_2(Q)$ линейный по $v \in H^1(Q)$ функционал $(f, v)_{L_2(Q)}$ ограничен: $|(f, v)_{L_2(Q)}| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{H^1(Q)}$, где постоянная $C > 0$ не зависит от f и v, то по теореме Рисса в $H^1(Q)$ существует функция F_2, для которой $(f, v)_{L_2(Q)} = -(F_2, v)_{H^1(Q)}$ при любой $v \in H^1(Q)$, причем эта функция единственна и $\|F_2\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}$. Следовательно, в $H^1(Q)$ существует единственная функция $u = F_2$, удовлетворяющая тождеству (11).

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Если $a(x) \geqslant 0$ в Q и хотя бы одна из функций $a(x)$ или $\sigma(x)$ не равна нулю тождественно, то для любой $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение и задачи* (1), (3) (*при* $\varphi = 0$). *При этом*

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}, \tag{12}$$

где положительная постоянная C не зависит от f.

Замечание. Если функция f вещественнозначна, то решения рассмотренных в теоремах 1 и 2 граничных задач тоже вещественнозначны. Действительно, пусть $u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u$ — обобщенное решение какой-либо из этих краевых задач. В силу вещественности коэффициентов уравнения и функции f функция $\operatorname{Re} u$, как это следует из (4) (или (6)), тоже есть обобщенное решение этой же задачи (функции v в (4) и (6) можно считать вещественнозначными). Поэтому из единственности решения следует, что $u = \operatorname{Re} u$.

3. Собственные функции и собственные значения. Не равная тождественно нулю функция $u(x)$ называется *собственной функцией первой краевой задачи для оператора* $\mathcal{L} = \operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)$, если существует такое число λ, что функция $u(x)$ является классическим решением следующей задачи:

$$\mathcal{L}u = \lambda u, \quad x \in Q, \tag{13}$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{14}$$

Число λ называется *собственным значением* (соответствующим собственной функции $u(x)$).

Очевидно, каждой собственной функции отвечает единственное собственное значение. Обратное соответствие неоднозначно. В частности, если $u(x)$ — собственная функция, то и функция $cu(x)$ при любой постоянной $c \neq 0$ также является собственной функцией, отвечающей тому же собственному значению. В связи с этим можно рассматривать собственные функции, нормированные, например, условием $\|u\|_{L_2(Q)} = 1$.

Пусть λ — собственное значение, а $u(x)$ — собственная функция первой краевой задачи, и пусть $u(x) \in \mathring{H}^1(Q)$. Умножая (13) на произвольную $\bar{v} \in \mathring{H}^1(Q)$ и интегрируя полученное равенство по области Q, получим интегральное тождество

$$\int_Q (k\nabla u \nabla \bar{v} + au\bar{v})\,dx = -\lambda \int_Q u\bar{v}\,dx, \tag{15}$$

которому функция u удовлетворяет при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$.

Не равная нулю функция $u \in \mathring{H}^1(Q)$ называется *обобщенной собственной функцией первой краевой задачи для оператора* $\mathcal{L}$, если существует такое число λ, что функция u при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$ удовлетворяет интегральному тождеству (15); число λ называется *собственным значением* (соответствующим обобщенной собственной функции u).

Будем считать, что $\|u\|_{L_2(Q)} = 1$.

Не равная тождественно нулю функция $u(x)$ называется *собственной функцией третьей (второй) краевой задачи для оператора* $\mathcal{L} = \operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)$, если существует такое число λ (*собственное значение*, отвечающее $u(x)$), что функция $u(x)$ является классическим решением следующей задачи:

$$\mathcal{L}u=\lambda u, \qquad x\in Q,$$
$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x)\,u\right)\right|_{\partial Q}=0.$$

Легко видеть, что собственная функция третьей (второй) краевой задачи при всех $v\in H^1(Q)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_Q(k\nabla u\nabla\bar{v}+au\bar{v})\,dx+\int\limits_{\partial Q}k\sigma u\bar{v}\,dS=-\lambda\int\limits_Q u\bar{v}\,dx. \tag{16}$$

Не равная нулю функция $u\in H^1(Q)$ называется *обобщенной собственной функцией третьей (второй) краевой задачи для оператора* $\mathcal{L}$, если существует такое число λ (*собственное значение*, отвечающее u), что функция u при всех $v\in H^1(Q)$ удовлетворяет интегральному тождеству (16).

Будем считать, что $\|u\|_{L_2(Q)}=1$.

В дальнейшем в этом параграфе мы будем рассматривать только обобщенные собственные функции и соответствующие им собственные значения. Нам будет удобно рассматривать тождества (15) и (16), определяющие обобщенные собственные функции, как равенства скалярных произведений в пространстве $L_2(Q)$ и в пространствах $\mathring{H}^1(Q)$ или $H^1(Q)$ соответственно.

Пусть $m=\min\limits_{x\in\bar{Q}}a(x)$ (здесь мы не предполагаем, что $a(x)\geqslant 0$). Тогда функция

$$\tilde{a}(x)=a(x)-m+1\geqslant 1 \quad \text{в} \quad Q.$$

Поэтому скалярное произведение (эквивалентное обычному) в $\mathring{H}^1(Q)$ можно задать равенством

$$(u,\ v)_{\mathring{H}^1(Q)}=\int\limits_Q(k\nabla u\nabla\bar{v}+\tilde{a}u\bar{v})\,dx, \tag{17}$$

а в $H^1(Q)$ — равенством

$$(u,\ v)_{H^1(Q)}=\int\limits_Q(k\nabla u\nabla\bar{v}+\tilde{a}u\bar{v})\,dx+\int\limits_{\partial Q}k\sigma u\bar{v}\,dS. \tag{18}$$

Тождества (15) и (16) после этого можно переписать в виде

$$(u,\ v)_{\mathring{H}^1(Q)}=(-\lambda-m+1)\,(u,\ v)_{L_2(Q)} \tag{19}$$

и

$$(u,\ v)_{H^1(Q)}=(-\lambda-m+1)\,(u,\ v)_{L_2(Q)}. \tag{20}$$

Прежде всего установим справедливость следующих утверждений.

Лемма 1. *Существует линейный ограниченный оператор A из $L_2(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$ с областью определения $L_2(Q)$, для которого* *при всех* $v \in \mathring{H}^1(Q)$ *имеет место равенство*

$$(u, v)_{L_2(Q)} = (Au, v)_{\mathring{H}^1(Q)}. \tag{21}$$

Оператор A *имеет обратный оператор* A^{-1}. *Оператор* A, *если его рассматривать как оператор из* $\mathring{H}^1(Q)$ *в* $\mathring{H}^1(Q)$, *является самосопряженным, положительным и вполне непрерывным.*

Лемма 1'. *Существует линейный ограниченный оператор* A' *из* $L_2(Q)$ *в* $H^1(Q)$ *с областью определения* $L_2(Q)$, *для которого при всех* $v \in H^1(Q)$ *имеет место равенство*

$$(u, v)_{L_2(Q)} = (A'u, v)_{H^1(Q)}. \tag{21'}$$

Оператор A' *имеет обратный оператор* A'^{-1}. *Оператор* A', *если его рассматривать как оператор из* $H^1(Q)$ *в* $H^1(Q)$, *является самосопряженным, положительным и вполне непрерывным* *).

Докажем лемму 1. Доказательство леммы 1' проводится аналогично.

Для любой (фиксированной) функции $u \in L_2(Q)$ линейный по v, $v \in \mathring{H}^1(Q)$, функционал $l(v) = (u, v)_{L_2(Q)}$ ограничен, так как

$$|l(v)| = |(u, v)_{L_2(Q)}| \leqslant \|u\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} \leqslant C \|u\|_{L_2(Q)} \|v\|_{\mathring{H}^1(Q)}.$$

Поэтому согласно теореме Рисса существует единственная функция $U \in \mathring{H}^1(Q)$, $\|U\|_{\mathring{H}^1(Q)} = \|l\| \leqslant C\|u\|_{L_2(Q)}$ такая, что $l(v) = (U, v)_{\mathring{H}^1(Q)}$ для всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Это означает, что на $L_2(Q)$ задан оператор A (очевидно, линейный): $Au = U$, для которого выполняется (21). Так как $\|Au\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant C\|u\|_{L_2(Q)}$, то оператор A из $L_2(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$ ограничен. Если при некотором u из $L_2(Q)$ $Au = 0$, то в силу (21) $(u, v)_{L_2(Q)} = 0$ для всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$, т. е. $u = 0$. Это означает, что существует оператор A^{-1}.

Из (21) вытекает, что оператор A из $\mathring{H}^1(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$ является самосопряженным: $(Au, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = (u, v)_{L_2(Q)} = \overline{(v, u)_{L_2(Q)}} = \overline{(Av, u)_{\mathring{H}^1(Q)}} = (u, Av)_{\mathring{H}^1(Q)}$. Из (21) вытекает также, что оператор A положителен.

Покажем, что оператор A из $\mathring{H}^1(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$ является вполне непрерывным. Возьмем произвольное ограниченное в $\mathring{H}^1(Q)$ множество функций. В силу теоремы 3 п. 4 § 5 гл. III это множество компактно в $L_2(Q)$. Значит, из любого его бесконечного подмножества можно выбрать фундаментальную в $L_2(Q)$ последовательность u_s, $s = 1, 2, \ldots$ Так как оператор A из $L_2(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$

*) Вид операторов A и A', конечно, зависит от способов задания в $\mathring{H}^1(Q)$, соответственно в $H^1(Q)$, скалярных произведений. Мы пользуемся скалярными произведениями (17) и (18).

ограничен и, следовательно, непрерывен, то последовательность Au_s, $s=1, 2, \ldots$, фундаментальна в $\mathring{H}^1(Q)$. Лемма доказана.

Согласно лемме 1 тождество (19) можно записать в виде операторного уравнения в пространстве $\mathring{H}^1(Q)$:

$$-(\lambda+m-1)\,Au=u, \quad u\in\mathring{H}^1(Q). \tag{22}$$

Согласно лемме 1′ тождество (20) можно записать в виде операторного уравнения в пространстве $H^1(Q)$:

$$-(\lambda+m-1)\,A'u=u, \quad u\in H^1(Q). \tag{22'}$$

Таким образом, число λ является собственным значением первой (соответственно третьей) краевой задачи для оператора $\mathscr{L}$, а u — соответствующей ему обобщенной собственной функцией тогда и только тогда, когда $-(\lambda+m-1)$ есть характеристическое число самосопряженного вполне непрерывного оператора A из $\mathring{H}^1(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$ (A' из $H^1(Q)$ в $H^1(Q)$), а u — соответствующий ему собственный элемент.

Поэтому из результатов § 5 гл. II следует, что существует не более чем счетное множество собственных значений первой (третьей) краевой задачи; это множество не имеет конечных предельных точек; все собственные значения вещественны; каждому собственному значению отвечает конечное число (кратность собственного значения) взаимно ортогональных в $\mathring{H}^1(Q)$ (в $H^1(Q)$) собственных функций; собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в $\mathring{H}^1(Q)$ (в $H^1(Q)$).

Отметим, что для каждого собственного значения λ первой (третьей) краевой задачи можно выбрать ровно k, где k — кратность λ, действительных попарно ортогональных в $\mathring{H}^1(Q)$ (в $H^1(Q)$) собственных функций. Пусть $u=\operatorname{Re}u+i\operatorname{Im}u$ — собственная функция, отвечающая собственному значению λ. В силу вещественности λ и коэффициентов $k(x)$ и $a(x)$ функции $\operatorname{Re}u$ и $\operatorname{Im}u$, как это видно из (15) или (16) (функции v в (15) или (16) можно считать вещественными), тоже являются собственными функциями, отвечающими тому же λ. При этом нетрудно видеть, что максимальное число попарно ортогональных вещественных собственных функций равно k.

Пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \ldots \tag{23}$$

— последовательность, содержащая все собственные значения первой (третьей) краевой задачи для оператора $\mathscr{L}$, причем каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Пусть

$$u_1, u_2, \ldots, u_s, \ldots \tag{24}$$

— система взаимно ортогональных в $\mathring{H}^1(Q)$ (в $H^1(Q)$) обобщенных собственных функций ($\|u_s\|_{L_2(Q)}=1$); каждая u_s соответствует собственному значению λ_s:

$$-(\lambda_s+m-1)Au_s=u_s, \qquad s=1, \ldots, \tag{25}$$

для первой краевой задачи и

$$-(\lambda_s+m-1)A'u_s=u_s, \qquad s=1, \ldots, \tag{25'}$$

для третьей краевой задачи.

Умножая (25) ((25′)) скалярно в $\mathring{H}^1(Q)$ (в $H^1(Q)$) на u_s, получим в силу (21) ((21′)) равенства

$$\|u_s\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}=-(\lambda_s+m-1)\|u_s\|^2_{L_2(Q)}=-(\lambda_s+m-1), \tag{26}$$

$$\|u_s\|^2_{H^1(Q)}=-(\lambda_s+m-1)\|u_s\|^2_{L_2(Q)}=-(\lambda_s+m-1), \tag{26'}$$

которые (скалярные произведения в $\mathring{H}^1(Q)$ и в $H^1(Q)$ определены формулами (17) и (18)) можно переписать в виде

$$\int_Q k|\nabla u_s|^2\,dx+\int_Q(a+\lambda_s)|u_s|^2\,dx=0 \tag{27}$$

для первой краевой задачи и

$$\int_Q k|\nabla u_s|^2\,dx+\int_Q(a+\lambda_s)|u_s|^2\,dx+\int_{\partial Q}k\sigma|u_s|^2\,dS=0. \tag{27'}$$

для третьей краевой задачи.

Из равенства (27) вытекает, что для всех $s=1, 2, \ldots$

$$\lambda_s<-m=-\min_{x\in\overline{Q}}a(x). \tag{28}$$

Из равенства (27′) вытекает, что для всех $s=1, 2, \ldots$

$$\lambda_s\leqslant -m=-\min_{x\in\overline{Q}}a(x), \tag{28'}$$

причем для всех $s=1, \ldots$ имеет место строгое неравенство, если или $a(x)\not\equiv\text{const}$, или $\sigma(x)\not\equiv 0$. Если же $\sigma(x)\equiv 0$ (вторая краевая задача) и $a(x)\equiv\text{const}$, $a(x)\equiv m$, то среди собственных значений второй краевой задачи есть значение, равное $-m$, с собственной функцией, равной $\text{const}=1/\sqrt{|Q|}$. Это собственное значение имеет кратность 1, так как в силу (27′) все собственные функции, ему отвечающие, удовлетворяют равенству $\int_Q k|\nabla u|^2\,dx=0$, т. е. являются постоянными.

Из (26) ((26′)) вытекает, что система

$$\frac{u_1}{\sqrt{1-m-\lambda_1}}, \ldots, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}, \ldots \tag{$\widetilde{24}$}$$

ортонормирована в $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ (в $H^1(Q)$). В силу следствия 1 из теоремы 2 п. 2 § 5 гл. II она является ортонормированным базисом в $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ (в $H^1(Q)$). И так как пространство $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ ($H^1(Q)$) бесконечномерно, то множество $(\widetilde{24})$, а значит, и (23) бесконечно. Поэтому $\lambda_s \to -\infty$ при $s \to \infty$.

Умножим (25) ((25′)) скалярно в $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ (в $H^1(Q)$) на u_j, $j \neq s$. С помощью (21) ((21′)) получим равенство $-(\lambda_s + m - 1) \times \times (u_s, u_j)_{L_2(Q)} = 0$, т. е. система (24) ортонормирована в $L_2(Q)$. Поскольку линейное многообразие, натянутое на систему $(\widetilde{24})$ (и, тем самым, на систему (24)), всюду плотно в $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ (в $H^1(Q)$), то оно всюду плотно и в $L_2(Q)$. Следовательно, система (24) является ортонормированным базисом в $L_2(Q)$, т. е. любой элемент $f \in L_2(Q)$ разлагается в сходящийся в $L_2(Q)$ ряд Фурье

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} f_s u_s, \quad f_s = (f, u_s)_{L_2(Q)}, \tag{29}$$

и имеет место равенство Парсеваля — Стеклова

$$\|f\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} |f_s|^2.$$

Пусть функция $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ ($H^1(Q)$). Она разлагается в сходящийся в $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ (в $H^1(Q)$) ряд Фурье по ортонормированному базису $(\widetilde{24})$

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}} \tag{30}$$

для случая первой краевой задачи $\left(f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)\right)$ и

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{H^1(Q)} \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}} \tag{30′}$$

для случая третьей краевой задачи ($f \in H^1(Q)$). При этом имеют место равенства Парсеваля — Стеклова

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left| \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} \right|^2 = \|f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}$$

и соответственно

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left| \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{H^1(Q)} \right|^2 = \|f\|^2_{H^1(Q)}.$$

Ряд (30) ((30′)), конечно, сходится к f и в норме $L_2(Q)$. Сравнивая его с рядом (29), получим $f_s = (f, u_s)_{L_2(Q)} = \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{\mathring{H}^1(Q)} \frac{1}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}$ $\left(f_s = \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{H^1(Q)} \times \frac{1}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)$. Поэтому

$$\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} \left|\left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{\mathring{H}^1(Q)}\right|^2 = \sum_{s=1}^{\infty} (1-m-\lambda_s)\,|f_s|^2 =$$

$$= (1-m)\,\|f\|^2_{L_2(Q)} - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s\,|f_s|^2$$

$$\left(\|f\|^2_{H^1(Q)} = (1-m)\,\|f\|^2_{L_2(Q)} - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s\,|f_s|^2\right),$$

откуда в силу (28)

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s|\,|f_s|^2 \leqslant -\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s\,|f_s|^2 + 2\,|m| \sum_{s=1}^{\infty} |f_s|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} + (2\,|m| + |m-1|)\,\|f\|^2_{L_2(Q)}$$

и соответственно (в силу (28′))

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s|\,|f_s|^2 \leqslant \|f\|^2_{H^1(Q)} + (2\,|m| + |m-1|)\,\|f\|^2_{L_2(Q)}.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s|\,|f_s|^2 \leqslant C\,\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}, \tag{31}$$

где λ_s, $s=1, 2, \ldots,$ — собственные значения первой краевой задачи, а $f \in \mathring{H}^1(Q)$, и неравенство

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s|\,|f_s|^2 \leqslant C\,\|f\|^2_{H^1(Q)}, \tag{32}$$

где λ_s, $s=1, 2, \ldots,$ — собственные значения третьей краевой задачи, а $f \in H^1(Q)$. Постоянная C в (31) и (32) не зависит от f. Таким образом, доказана

Теорема 3. *Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ первой или третьей (второй) краевой задачи для оператора $\mathcal{L} = \operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)$ вещественны и $\lambda_s \to -\infty$ при $s \to \infty$. Собственные значения первой и третьей при $\sigma \not\equiv 0$ краевых задач, а также второй $(\sigma \equiv 0)$ краевой задачи при $a(x) \not\equiv \text{const}$ для всех $s=1, 2, \ldots$ удовлетворяют неравенству $\lambda_s < -\min\limits_{x \in \bar{Q}} a(x)$. Собственные значения* *второй краевой задачи при постоянной функции $a(x) \equiv m$ удовлетворяют неравенству $\lambda_s \leqslant -m$, $s = 1, 2, \ldots$, причем существует однократное собственное значение, равное $-m$, с обобщенной собственной функцией $1/\sqrt{|Q|}$. Обобщенные собственные функции рассматриваемых краевых задач $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... образуют ортонормированный базис в $L_2(Q)$, т. е. любая функция $f \in L_2(Q)$ разлагается в ряд Фурье (29), сходящийся в $L_2(Q)$. Для функции $f \in \mathring{H}^1(Q)$ ряд (29) по обобщенным собственным функциям первой краевой задачи сходится в $\mathring{H}^1(Q)$ и имеет место неравенство (31). Для функции $f \in H^1(Q)$ ряд (29) по обобщенным собственным функциям третьей (второй) краевой задачи сходится в $H^1(Q)$ и имеет место неравенство (32).*

4. Вариационные свойства собственных значений и собственных функций. Поскольку определенный равенством (21) оператор A из $\mathring{H}^1(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$ вполне непрерывный самосопряженный и положительный (лемма 1), то на основании теоремы 1 п. 1 § 5 гл. II его первое, очевидно, положительное, характеристическое число

$$\mu_1 = \inf_{f \in \mathring{H}^1(Q)} \frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{(Af, f)_{\mathring{H}^1(Q)}} = \inf_{f \in \mathring{H}^1(Q)} \frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}}$$

(норма элемента f в $\mathring{H}^1(Q)$ согласована со скалярным произведением (17)). При этом функционал $\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} / \|f\|^2_{L_2(Q)}$ принимает значение μ_1 при $f = u_1$, где u_1 — первый собственный элемент оператора A. Поэтому первое собственное значение первой краевой задачи для оператора $\mathscr{L}$

$$\lambda_1 = -m + 1 - \inf_{f \in \mathring{H}^1(Q)} \frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} = -\inf_{f \in \mathring{H}^1(Q)} \frac{\int_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx}{\int_Q |f|^2\,dx} \tag{33}$$

и точная нижняя грань функционала

$$\int_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx \Big/ \int_Q |f|^2\,dx$$

на пространстве $\mathring{H}^1(Q)$ достигается на первой собственной функции u_1.

Из результатов п. 1 § 5 гл. II вытекает, что $(k+1)$-е характеристическое число μ_{k+1} оператора A равно $\inf\limits_{\substack{f \in \mathring{H}^1(Q) \\ (f, u_i)_{\mathring{H}^1(Q)} = 0 \\ i = 1, \ldots, k}} \dfrac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}}$.

Так как согласно (21) $(f, u_i)_{\mathring{H}^1(Q)} = \mu_i (f, Au_i)_{\mathring{H}^1(Q)} = \mu_i (f, u_i)_{L_2(Q)}$,

$i = 1, 2, \ldots,$ то

$$\mu_{k+1} = \inf_{\substack{f \in \mathring{H}^1(Q) \\ (f, u_i)_{L_2(Q)} = 0 \\ i = 1, \ldots, k}} \frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}}.$$

Поэтому $(k+1)$-е собственное значение первой краевой задачи для оператора $\mathscr{L}$

$$\lambda_{k+1} = -m + 1 - \inf_{\substack{f \in \mathring{H}^1(Q) \\ (f, u_i)_{L_2(Q)} = 0 \\ i = 1, \ldots, k}} \frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} =$$

$$= - \inf_{\substack{f \in \mathring{H}^1(Q) \\ (f, u_i)_{L_2(Q)} = 0 \\ i = 1, \ldots, k}} \frac{\int_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx}{\int_Q |f|^2\,dx}. \tag{34}$$

Точная нижняя грань функционала

$$\int_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx \Big/ \int_Q |f|^2\,dx$$

на подпространстве пространства $\mathring{H}^1(Q)$, состоящем из всех функций, ортогональных в скалярном произведении $L_2(Q)$ собственным функциям $u_1, \ldots, u_k$ этой краевой задачи, достигается на собственной функции u_{k+1}.

Совершенно аналогично, для третьей (второй) краевой задачи для оператора $\mathscr{L}$

$$\lambda_1 = -m + 1 - \inf_{f \in H^1(Q)} \frac{\|f\|^2_{H^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} =$$

$$= - \inf_{f \in H^1(Q)} \frac{\int_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx + \int_{\partial Q} k\sigma|f|^2\,dS}{\int_Q |f|^2\,dx}, \tag{33'}$$

$$\lambda_{k+1} = -m + 1 - \inf_{\substack{f \in H^1(Q) \\ (f, u_i)_{L_2(Q)} = 0 \\ i = 1, \ldots, k}} \frac{\|f\|^2_{H^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} =$$

$$= - \inf_{\substack{f \in H^1(Q) \\ (f, u_i)_{L_2(Q)} = 0 \\ i = 1, \ldots, k}} \frac{\int_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx + \int_{\partial Q} k\sigma|f|^2\,dS}{\int_Q |f|^2\,dx}. \tag{34'}$$

Точная нижняя грань функционала

$$\frac{\int\limits_Q (k\,|\nabla f|^2 + a\,|f|^2)\,dx + \int\limits_{\partial Q} k\sigma\,|f|^2\,dS}{\int\limits_Q |f|^2\,dx}$$

на $H^1(Q)$ достигается на первой собственной функции u_1. Точная нижняя грань этого функционала на подпространстве пространства $H^1(Q)$, состоящем из всех элементов, ортогональных в скалярном произведении $L_2(Q)$ собственным функциям $u_1, \ldots, u_k$ соответствующей краевой задачи, достигается на $(k+1)$-й собственной функции u_{k+1}.

Формулы (33) и (33′) можно объединить в одну:

$$\lambda_1 = -\inf_{f \in G} \frac{\int\limits_Q (k\,|\nabla f|^2 + a\,|f|^2)\,dx + \int\limits_{\partial Q} k\sigma\,|f|^2\,dS}{\int\limits_Q |f|^2\,dx}, \tag{33″}$$

причем λ_1 есть первое собственное значение третьей (второй при $\sigma \equiv 0$) краевой задачи для оператора $\mathscr{L}$, если $G = H^1(Q)$, и λ_1 есть первое собственное значение первой краевой задачи, если $G = \mathring{H}^1(Q)$ (в случае, когда $f \in \mathring{H}^1(Q)$, интеграл $\int\limits_{\partial Q} k\sigma\,|f|^2\,dS = 0$).

Аналогично можно объединить и формулы (34) и (34′):

$$\lambda_{k+1} = -\inf_{\substack{f \in G \\ (f,\, u_i)_{L_2(Q)} = 0 \\ i = 1, \ldots, k}} \frac{\int\limits_Q (k\,|\nabla f|^2 + a\,|f|^2)\,dx + \int\limits_{\partial Q} k\sigma\,|f|^2\,dS}{\int\limits_Q |f|^2\,dx}. \tag{34″}$$

Использование формул (34), (34′) и (34″) иногда бывает затруднено тем, что $(k+1)$-е собственное значение λ_{k+1} с их помощью вычисляется на основе знания предыдущих собственных функций $u_1, \ldots, u_k$. Ниже будет получена формула для λ_{k+1}, свободная от этого недостатка.

Возьмем произвольно k функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ из $L_2(Q)$ и обозначим через $R(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ подпространство пространства $\mathring{H}^1(Q)$, состоящее из функций f, ортогональных в скалярном произведении $L_2(Q)$ функциям $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$: $(f, \varphi_s)_{L_2(Q)} = 0$, $s = 1, \ldots, k$. Пусть

$$d(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) = -m + 1 - \inf_{f \in R(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)} \frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}},$$

а d_{k+1} — точная нижняя грань числового множества $\{d(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\}$, взятая по всевозможным системам $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ функций из $L_2(Q)$:

$$d_{k+1} = \inf_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \\ \varphi_s \in L_2(Q) \\ s=1, \ldots, k}} d(\varphi_1, \ldots, \varphi_k).$$

Покажем, что $d_{k+1} = \lambda_{k+1}$, где λ_{k+1} — $(k+1)$-собственное значение первой краевой задачи для оператора $\mathscr{L}$.

Так как $d(u_1, \ldots, u_k) = \lambda_{k+1}$ (формула (34)), то $d_{k+1} \leqslant \lambda_{k+1}$. Установим обратное неравенство. Для этого достаточно при произвольном фиксированном выборе системы $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ построить такую функцию f из $R(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, для которой $\|f\|_{L_2(Q)} = 1$ и

$$\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant -\lambda_{k+1} - m + 1.$$

Функцию f будем разыскивать в виде

$$f = \sum_{s=1}^{k+1} f_s u_s, \quad f_s = (f, u_s)_{L_2(Q)}.$$

Тогда условия $f \in R(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ и $\|f\|_{L_2(Q)} = 1$ примут вид

$$(f, \varphi_p)_{L_2(Q)} = \sum_{s=1}^{k+1} f_s (u_s, \varphi_p)_{L_2(Q)} = 0, \qquad p = 1, \ldots, k, \tag{35}$$

$$\|f\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{s=1}^{k+1} |f_s|^2 = 1. \tag{36}$$

Поскольку линейная система (35) относительно вектора $(f_1, \ldots$ $\ldots, f_{k+1})$ есть однородная система k уравнений с $k+1$ неизвестными, то она всегда имеет нетривиальное решение. Нормировочное условие (36) при этом всегда можно удовлетворить. Так как в силу (26) и (36)

$$\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} = \sum_{s=1}^{k+1} |f_s|^2 \|u_s\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} = \sum_{s=1}^{k+1} |f_s|^2 (-\lambda_s - m + 1) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{k+1} |f_s|^2 (-\lambda_{k+1} - m + 1) = -\lambda_{k+1} - m + 1$$

(напомним, что $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{k+1}$), то функция f искомая.

Итак, $(k+1)$-собственное значение первой краевой задачи для оператора $\mathscr{L}$ задается формулой

$$\lambda_{k+1}=\inf_{\substack{(\varphi_1,\,\ldots,\,\varphi_k)\\ \varphi_s\in L_2(Q)\\ s=1,\,\ldots,\,k}}\left(-m+1-\inf_{\substack{f\in \mathring{H}^1(Q)\\ (f,\,\varphi_i)_{L_2(Q)}=0\\ i=1,\,\ldots,\,k}}\frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}}\right)=$$

$$=-m+1-\sup_{\substack{(\varphi_1,\,\ldots,\,\varphi_k)\\ \varphi_s\in L_2(Q)\\ s=1,\,\ldots,\,k}}\inf_{\substack{f\in \mathring{H}^1(Q)\\ (f,\,\varphi_i)_{L_2(Q)}=0\\ i=1,\,\ldots,\,k}}\frac{\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}}=$$

$$=-\sup_{\substack{(\varphi_1,\,\ldots,\,\varphi_k)\\ \varphi_s\in L_2(Q)\\ s=1,\,\ldots,\,k}}\inf_{\substack{f\in \mathring{H}^1(Q)\\ (f,\,\varphi_i)_{L_2(Q)}=0\\ i=1,\,\ldots,\,k}}\frac{\int\limits_Q (k\,|\nabla f|^2+a\,|f|^2)\,dx}{\int\limits_Q |f|^2\,dx}, \qquad (37)$$

выражающей так называемое *минимаксное свойство* собственных значений.

Точно так же устанавливается формула для $(k+1)$-го собственного значения третьей (и второй) краевой задачи для оператора $\mathscr{L}$

$$\lambda_{k+1}=-m+1-\sup_{\substack{(\varphi_1,\,\ldots,\,\varphi_k)\\ \varphi_s\in L_2(Q)\\ s=1,\,\ldots,\,k}}\inf_{\substack{f\in H^1(Q)\\ (f,\,\varphi_i)_{L_2(Q)}=0\\ i=1,\,\ldots,\,k}}\frac{\|f\|^2_{H^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}}=$$

$$=-\sup_{\substack{(\varphi_1,\,\ldots,\,\varphi_k)\\ \varphi_i\in L_2(Q)\\ i=1,\,\ldots,\,k}}\inf_{\substack{f\in H^1(Q)\\ (f,\,\varphi_i)_{L_2(Q)}=0\\ i=1,\,\ldots,\,k}}\frac{\int\limits_Q (k\,|\nabla f|^2+a\,|f|^2)\,dx+\int\limits_{\partial Q} k\sigma\,|f|^2\,dS}{\int\limits_Q |f|^2\,dx}. \qquad (37')$$

Формулы (37) и (37′) можно объединить в одну:

$$\lambda_{k+1}=-\sup_{\substack{(\varphi_1,\,\ldots,\,\varphi_k)\\ \varphi_i\in L_2(Q)\\ i=1,\,\ldots,\,k}}\inf_{\substack{f\in G\\ (f,\,\varphi_i)_{L_2(Q)}=0\\ i=1,\,\ldots,\,k}}\frac{\int\limits_Q (k\,|\nabla f|^2+a\,|f|^2)\,dx+\int\limits_{\partial Q} k\sigma\,|f|^2\,dS}{\int\limits_Q |f|^2\,dx}, \qquad (37'')$$

причем λ_{k+1} — есть $(k+1)$-е собственное значение первой краевой задачи для оператора $\operatorname{div}(k(x)\nabla)-a(x)$, если $G=\mathring{H}^1(Q)$, и λ_{k+1} — $(k+1)$-е собственное значение третьей (второй при $\sigma\equiv 0$) краевой задачи, если $G=H^1(Q)$.

Минимаксное свойство собственных значений дает возможность сравнивать собственные значения различных краевых задач.

Теорема 4. 1. *Пусть λ_k^{I}, λ_k^{II} и λ_k^{III} — k-е собственные значения первой, второй и третьей (при некотором $\sigma\geqslant 0$) краевых* *задач для оператора* $\mathscr{L}=\operatorname{div}(k(x)\nabla)-a(x)$. *Тогда* $\lambda_k^{\mathrm{I}}\leqslant\lambda_k^{\mathrm{III}}\leqslant\lambda_k^{\mathrm{II}}$ *при всех* $k=1, 2, \ldots$

2. *Пусть* λ_k' — k-*е собственное значение первой, второй или третьей (при некотором* $\sigma=\sigma'\geqslant 0$) *краевых задач для оператора* $\mathscr{L}'=\operatorname{div}(k'(x)\nabla)-a'(x)$, *а* λ_k'' — k-*е собственное значение соответственно первой, второй или третьей (при некотором* $\sigma=\sigma''\geqslant 0$) *краевых задач для оператора* $\mathscr{L}''=\operatorname{div}(k''(x)\nabla)-a''(x)$. *Если* $k'\leqslant k''$, $a'\leqslant a''$ *в* Q *и в случае третьей краевой задачи* $\sigma'\leqslant\sigma''$ *на* ∂Q, *то* $\lambda_k'\geqslant\lambda_k''$ *для всех* $k=1, 2, \ldots$

3. *Пусть* Q' — *некоторая подобласть области* Q, $Q'\subset Q$, *а* $\lambda_k(Q)$ *и* $\lambda_k(Q')$ — k-*е собственные значения первой краевой задачи для оператора* $\mathscr{L}=\operatorname{div}(k(x)\nabla)-a(x)$ *в* Q *и соответственно в* Q'. *Тогда* $\lambda_k(Q)\geqslant\lambda_k(Q')$ *при всех* $k=1, 2, \ldots$

Доказательство. 1. Пусть $k>1$. Так как значение функционала, стоящего под знаком inf в (37″) для случая третьей краевой задачи ($\sigma\geqslant 0$), не меньше, чем его значение для второй краевой задачи ($\sigma=0$), а множество G в обоих случаях одно и то же — $H^1(Q)$, то справедливо неравенство $\lambda_k^{\mathrm{III}}\leqslant\lambda_k^{\mathrm{II}}$. Неравенство $\lambda_k^{\mathrm{I}}\leqslant\lambda_k^{\mathrm{III}}$ также вытекает из (37″), поскольку множество G, по которому берется inf, для случая третьей краевой задачи шире множества G для первой краевой задачи: $H^1(Q)\supset\mathring{H}^1(Q)$.

Утверждение 1 при $k=1$ следует из (34″).

2. Утверждение 2 вытекает из (37″) (при $k>1$) и (34″) (при $k=1$), поскольку значение функционала, стоящего под знаком inf, в случае оператора $\mathscr{L}''$ не меньше соответствующего значения в случае оператора $\mathscr{L}'$.

3. Поскольку множество $\mathring{H}^1(Q)$ содержит в себе множество $\mathring{\mathring{H}}^1(Q)$ функций из $\mathring{H}^1(Q)$, обращающихся в нуль на $Q\setminus Q'$, то при $k>1$

$$\lambda_k(Q)=-\sup_{\substack{(\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1})\\ \varphi_s\in L_2(Q)\\ s=1,\ldots,k-1}}\ \inf_{\substack{f\in\mathring{H}^1(Q)\\ (f,\varphi_s)_{L_2(Q)}=0\\ s=1,\ldots,k-1}} T(f)\geqslant$$
$$\geqslant-\sup_{\substack{(\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1})\\ \varphi_s\in L_2(Q)\\ s=1,\ldots,k-1}}\ \inf_{\substack{f\in\mathring{\mathring{H}}^1(Q)\\ (f,\varphi_s)_{L_2(Q)}=0\\ s=1,\ldots,k-1}} T(f)=$$
$$=-\sup_{\substack{(\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1})\\ \varphi_s\in L_2(Q')\\ s=1,\ldots,k-1}}\ \inf_{\substack{f\in\mathring{H}^1(Q')\\ (f,\varphi_s)_{L_2(Q')}=0\\ s=1,\ldots,k-1}} T(f)=\lambda_k(Q'),$$

где

$$T(f)=\frac{\int\limits_Q (k|\nabla f|^2+a|f|^2)\,dx}{\int\limits_Q |f|^2\,dx}.$$

Если $k=1$, то

$$\lambda_1(Q) = -\inf_{f\in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)} T(f) \geqslant -\inf_{f\in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)} T(f) = \lambda_1(Q').$$

Теорема доказана.

5. Асимптотическое поведение собственных значений первой краевой задачи. Рассмотрим сначала собственные значения первой краевой задачи для оператора Лапласа Δ (оператора $\mathscr{L} = \operatorname{div}(k\nabla) - a$ при $k\equiv 1$, $a\equiv 0$) в кубе $K_l = \{0<x_i<l,\ i=1, \ldots, n\}$ с ребром $l>0$. Обобщенная собственная функция $u(x)$ первой краевой задачи для оператора Δ в K_l, отвечающая собственному значению λ, определяется как функция из $\overset{\circ}{H}{}^1(K_l)$, удовлетворяющая при всех v из $\overset{\circ}{H}{}^1(K_l)$ тождеству

$$\int_{K_l} \nabla u \nabla \bar{v}\, dx = -\lambda \int_{K_l} u\bar{v}\, dx.$$

Легко проверить, что функция $u_{m_1, \ldots, m_n}(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{n/2} \times \prod_{i=1}^{n} \sin\frac{\pi m_i x_i}{l}$ при любых целых $m_1>0, \ldots, m_n>0$ является собственной функцией рассматриваемой краевой задачи; соответствующее собственное значение равно $-\frac{\pi^2}{l^2}(m_1^2+\ldots+m_n^2)$. Система функций $u_{m_1, \ldots, m_n}(x)$ при всех целых $m_i>0$, $i=1, \ldots, n$, ортонормирована в $L_2(K_l)$. Поскольку любая функция из $L_2(K_l)$, ортогональная всем $u_{m_1, \ldots, m_n}$, равна нулю (это утверждение доказывается так же, как в п. 4 § 4 гл. III доказывалось соответствующее утверждение для системы функций $u_{m_1, \ldots, m_n} = \exp\{i(m_1x_1+\ldots+m_nx_n)\}$ в кубе $\{|x_i|<\pi,\ i=1, \ldots, n\}$), то эта система является ортонормированным базисом в $L_2(K_l)$ и, следовательно, содержит все собственные функции первой краевой задачи для оператора Δ в K_l.

Таким образом, между множеством всех собственных функций рассматриваемой задачи и множеством всех точек $(m_1, \ldots, m_n)$ с целочисленными положительными координатами и, тем самым, множеством всех кубов $K_{m_1, \ldots, m_n} = \{m_i - 1 \leqslant x_i \leqslant m_i,\ i=1, \ldots, n\}$ имеется взаимно однозначное соответствие. При этом соответствующее функции $u_{m_1, \ldots, m_n}(x)$ собственное значение равно квадрату расстояния от точки $(m_1, \ldots, m_n)$ до начала координат, умноженному на $-\pi^2/l^2$. Таким образом, кратность собственного значения λ равна числу точек с целочисленными координатами, лежащих на сфере радиуса $\sqrt{-\lambda}\, l/\pi$. В частности, число $-\frac{\pi^2}{l^2} n -$

первое собственное значение; оно однократно. Ему отвечает собственная функция $u_{1,\ldots,1}(x)=\left(\frac{2}{l}\right)^{n/2}\sin\frac{\pi x_1}{l}\ldots\sin\frac{\pi x_n}{l}$. Следующее собственное значение равно $-\frac{\pi^2}{l^2}(n+3)$; оно n-кратное. Ему соответствуют собственные функции $u_{\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},2,1,\ldots,1}(x)=\left(\frac{2}{l}\right)^{n/2}\times$ $\times\sin\frac{\pi x_1}{l}\ldots\sin\frac{\pi x_{i-1}}{l}\sin\frac{2\pi x_i}{l}\sin\frac{\pi x_{i+1}}{l}\ldots\sin\frac{\pi x_n}{l}$, $i=1,\ldots,n$.

Обозначим через $N(\rho)$ число собственных значений (с учетом кратности), не превосходящих по абсолютной величине некоторого $\rho>0$. $N(\rho)$ равно числу точек $(m_1,\ldots,m_n)$ с целыми положительными координатами, для которых $m_1^2+\ldots+m_n^2\leqslant\frac{l^2}{\pi^2}\rho$ или, что то же самое, равно объему тела $M_{\sqrt{\rho}\,l/\pi}$, составленного из всех кубов $K_{m_1,\ldots,m_n}$, для которых $m_1^2+\ldots+m_n^2<\frac{l^2}{\pi^2}\rho$. Так как $M_{\sqrt{\rho}\,l/\pi}\subset S_{\sqrt{\rho}\,l/\pi}=\left\{|x|<\frac{l}{\pi}\sqrt{\rho},\ x_i\geqslant 0,\ i=1,\ldots,n\right\}$, то $N(\rho)\leqslant$ $\leqslant|S_{\sqrt{\rho}\,l/\pi}|=\frac{\sigma_n}{2^n n}\frac{l^n}{\pi^n}\rho^{n/2}$. Поскольку, с другой стороны, при $\rho>n\frac{\pi^2}{l^2}$ $M_{\sqrt{\rho}\,l/\pi}\supset S_{\sqrt{\rho}\,l/\pi-\sqrt{n}}$, то для $\rho>\frac{n\pi^2}{l^2}$ $N(\rho)\geqslant\frac{\sigma_n}{2^n n}\left(\frac{l\sqrt{\rho}}{\pi}-\sqrt{n}\right)^n$.

Перенумеруем собственные значения, как обычно, в порядке невозрастания: $0>\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots$ (каждое собственное значение в этой последовательности встречается столько раз, какова его кратность). Возьмем произвольное собственное значение λ_s; предположим, что его кратность равна p_s, $p_s\geqslant 1$, и пусть $\lambda_{s-p_s'},\ldots$ $\ldots,\lambda_s,\ldots,\lambda_{s+p_s''}$ при некоторых целых $p_s'\geqslant 0$, $p_s''\geqslant 0$, $p_s'+$ $+p_s''+1=p_s$, — все собственные значения, равные λ_s.

Число p_s равно объему тела, составленного из кубов $K_{m_1,\ldots,m_n}$, вершины $(m_1,\ldots,m_n)$ которых лежат на сфере радиуса $\frac{l}{\pi}|\lambda_s|^{1/2}$ с центром в начале координат. Поскольку это тело содержится в $S_{|\lambda_s|^{1/2}l/\pi}\setminus S_{|\lambda_s|^{1/2}l/\pi-\sqrt{n}}$, то $p_s\leqslant\frac{\sigma_n}{2^n n}\left[\left(\frac{l}{\pi}|\lambda_s|\right)^{n/2}-\left(\frac{l}{\pi}|\lambda_s|-\sqrt{n}\right)^{n/2}\right]$.

В частности, учитывая, что $\lambda_s\to-\infty$ при $s\to\infty$, отсюда получаем $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{p_s}{|\lambda_s|^{n/2}}=0$.

Из определения функции $N(\rho)$ следует, что $s+p_s''=N(|\lambda_s|)$. Поэтому $\frac{\sigma_n}{n2^n}\left(\frac{l|\lambda_s|}{\pi}-\sqrt{n}\right)^{n/2}\leqslant s+p_s''\leqslant\frac{\sigma_n}{n2^n}\left(\frac{l|\lambda_s|}{\pi}\right)^{n/2}$. А так как $0\leqslant p_s''\leqslant p_s$, то существует предел отношения $s/|\lambda_s|^{n/2}$, и он равен $\frac{\sigma_n}{2^n n}l^{n/2}\pi^{-n/2}$. Следовательно (напомним, что $\ldots\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_1<0$), найдутся такие постоянные C_0 и C_1, $0<C_0\leqslant C_1$, что при

всех $s=1, 2, \ldots$

$$-\frac{C_1}{l}s^{2/n}\leqslant\lambda_s\leqslant-\frac{C_0}{l}s^{2/n}. \tag{38}$$

Так как собственные значения не зависят от выбора системы координат, то неравенства (38) для собственных значений первой краевой задачи для оператора Лапласа имеют место и в случае, когда куб K_l заменен любым кубом с ребром l. Легко видеть, что собственные значения первой краевой задачи в кубе с ребром l для оператора $k_0\Delta-a_0$, где $k_0>0$ и a_0 — постоянные, равны $-k_0\frac{\pi^2}{l^2}(m_1^2+\ldots+m_n^2)-a_0$, где $m_1, \ldots, m_n$ — целые положительные числа. Поэтому неравенства (38) с некоторыми постоянными C_0 и C_1 (зависящими от k_0) справедливы и для них при всех s, начиная с некоторого s_0 (зависящего от k_0 и a_0).

Рассмотрим теперь общий случай.

Теорема 5. *Пусть λ_s, $s=1, 2, \ldots,$ — собственные значения первой краевой задачи для оператора $\mathscr{L}=\operatorname{div}(k(x)\nabla)-a(x)$ в области Q. Существуют такие постоянные C_0 и C_1, $0<C_0\leqslant C_1$, и номер s_0, что для всех $s\geqslant s_0$ имеют место неравенства*

$$-C_1s^{2/n}\leqslant\lambda_s\leqslant-C_0s^{2/n}. \tag{39}$$

Пусть $\bar\lambda_s$ и $\underline{\lambda}_s$ — собственные значения первой краевой задачи в Q для операторов $\bar{\mathscr{L}}=\operatorname{div}(\bar k\nabla)-\bar a=\bar k\Delta-\bar a$ и $\underline{\mathscr{L}}=\underline{k}\Delta-\underline{a}$ соответственно, где $\bar k=\max\limits_{x\in\bar Q}k(x)$, $\underline{k}=\min\limits_{x\in\bar Q}k(x)$, $\bar a=\max\limits_{x\in\bar Q}a(x)$, $\underline{a}=\min\limits_{x\in\bar Q}a(x)$. Тогда в силу утверждения 2 теоремы 4 для $s=1, 2, \ldots$ имеют место неравенства $\bar\lambda_s\leqslant\lambda_s\leqslant\underline{\lambda}_s$.

Обозначим через K' и K'' такие кубы, что $K'\subset Q\subset K''$, а через $\bar\lambda_s'$ и $\underline{\lambda}_s''$ — собственные значения первой краевой задачи для оператора $\bar{\mathscr{L}}$ в K' и оператора $\underline{\mathscr{L}}$ в K'' соответственно. Согласно утверждению 3 теоремы 4 для всех s $\bar\lambda_s'\leqslant\bar\lambda_s$ и $\underline{\lambda}_s''\geqslant\underline{\lambda}_s$. Утверждение теоремы теперь вытекает из того, что, начиная с некоторого $s=s_0$, для $\bar\lambda_s'$ и $\underline{\lambda}_s''$ справедливы неравенства (39).

6. Разрешимость краевых задач в случае однородных граничных условий. В п. 2 изучался вопрос о существовании и единственности обобщенных решений первой и третьей (второй) краевых задач для уравнения (1) в предположении, что $a(x)\geqslant0$ в Q. Рассмотрим теперь общий случай.

Пусть $m=\min\limits_{x\in\bar Q}a(x)$. Перепишем тождества (4) и (6) так:

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)}+(m-1)(u, v)_{L_2(Q)}=-(f, v)_{L_2(Q)}, \tag{4'}$$

$$(u, v)_{H^1(Q)}+(m-1)(u, v)_{L_2(Q)}=-(f, v)_{L_2(Q)}, \tag{6'}$$

где скалярные произведения в $\mathring{H}^1(Q)$ и в $H^1(Q)$ определены с помощью равенств (17) и (18). В силу леммы 1 п. 3 тождество (4′) эквивалентно операторному уравнению

$$u+(m-1)Au=-Af \tag{40}$$

в пространстве $\mathring{H}^1(Q)$, а тождество (6′) в силу леммы 1′ — операторному уравнению

$$u+(m-1)A'u=-A'f \tag{40′}$$

в пространстве $H^1(Q)$ (напомним, что $Af\in\mathring{H}^1(Q)$, $A'f\in H^1(Q)$). Оператор A как оператор из $\mathring{H}^1(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$ (A' из $H^1(Q)$ в $H^1(Q)$) вполне непрерывен. Поэтому для исследования уравнения (40) ((40′)) можно воспользоваться теоремами Фредгольма (теоремы 1—4 пп. 3—7 § 4 гл. II).

1) Если число $-m+1$ не является характеристическим числом оператора A (A'), то в силу первой теоремы Фредгольма уравнение (40) ((40′)) однозначно разрешимо при любой $f\in L_2(Q)$. При этом имеет место неравенство $\|u\|_{\mathring{H}^1(Q)}\leqslant C_1\|Af\|_{\mathring{H}^1(Q)}\leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}$ ($\|u\|_{H^1(Q)}\leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}$) с постоянной $C>0$, не зависящей от f. Поскольку $-m+1$ является характеристическим числом оператора A (A') тогда и только тогда, когда нуль является собственным значением первой (третьей) краевой задачи для оператора $\mathcal{L}$, то нами установлено следующее утверждение.

Теорема 6. *При любой f из $L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение $u(x)$ каждой из краевых задач* (1), (2) *и* (1), (3) *при однородных граничных условиях* ($\varphi=0$), *если нуль не является собственным значением соответствующей краевой задачи для оператора $\mathcal{L}$. При этом имеет место неравенство*

$$\|u\|_{H^1(Q)}\leqslant C\|f\|_{L_2(Q)},$$

в котором постоянная $C>0$ не зависит от f.

2) Если $-m+1$ есть характеристическое число оператора A (A') (тогда, конечно, $m\neq 1$), то воспользуемся третьей теоремой Фредгольма. Для разрешимости уравнения (40) ((40′)) в этом случае необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $(Af,u_p)_{\mathring{H}^1(Q)}=0$ ($(A'f,u_p)_{H^1(Q)}=0$) для всех собственных функций u_p оператора A (A'), отвечающих характеристическому числу $-m+1$. При этом существует единственное решение u уравнения (40) ((40′)), ортогональное в $\mathring{H}^1(Q)$ (в $H^1(Q)$) всем функциям u_p, и для него имеет место неравенство $\|u\|_{\mathring{H}^1(Q)}\leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}$ ($\|u\|_{H^1(Q)}\leqslant\leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}$) с постоянной $C>0$, не зависящей от f. Любое другое решение уравнения (40) ((40′)) представляется в виде суммы решения u и некоторой линейной комбинации функций u_p.

Из определения операторов A и A' ((21) и соответственно (21′)) вытекает, что ортогональность функций Af ($A'f$) и u_p в $\mathring{H}^1(Q)$ (в $H^1(Q)$) эквивалентна ортогональности в $L_2(Q)$ функций f и u_p. Кроме того, ортогональность в $\mathring{H}^1(Q)$ (в $H^1(Q)$) решения u уравнения (40) ((40′)) собственной функции u_p эквивалентна их ортогональности в $L_2(Q)$, поскольку в силу (21) ((21′))

$$(u,\ u_p)_{\mathring{H}^1(Q)} = (1-m)(Au,\ u_p)_{\mathring{H}^1(Q)} - (Af,\ u_p)_{\mathring{H}^1(Q)} =$$
$$= (1-m)(Au,\ u_p)_{\mathring{H}^1(Q)} = (1-m)(u,\ u_p)_{L_2(Q)}$$

$$((u,\ u_p)_{H^1(Q)} = (1-m)(u,\ u_p)_{L_2(Q)}).$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 7. *Если нуль является собственным значением первой или третьей (второй) краевой задачи для оператора $\mathcal{L}$, то для существования обобщенного решения задачи* (1), (2) *или* (1), (3) *при однородных граничных условиях* ($\varphi=0$) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:* $(f,\ u_p)_{L_2(Q)}=0$ *для всех обобщенных собственных функций u_p соответствующей задачи, отвечающих собственному значению, равному нулю. Существует единственное решение u задач* (1), (2) *и* (1), (3) (*при* $\varphi=0$), *ортогональное всем этим собственным функциям:* $(u,\ u_p)_{L_2(Q)}=0$. *Это решение удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}$$

с постоянной $C>0$, не зависящей от f. Любое другое решение представляется в виде суммы этого решения u и некоторой линейной комбинации функций u_p.

Из теоремы 3 следует, что нуль является собственным значением второй краевой задачи ($\sigma\equiv 0$) для оператора $\mathcal{L}$ при $a\equiv 0$; соответствующая единственная собственная функция равна $1/\sqrt{|Q|}$. Поэтому из теоремы 7, в частности, вытекает

Теорема 8. *Для того чтобы существовало обобщенное решение задачи*

$$\operatorname{div}(k(x)\nabla u) = f,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q} = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_Q f\,dx = 0.$$

В этом предположении существует единственное обобщенное решение u, удовлетворяющее условию $\int_Q u\,dx=0$, и для него имеет место неравенство

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}$$

с постоянной $C>0$, не зависящей от функции f. Любое другое обобщенное решение $\tilde{u}$ этой задачи представляется в виде $\tilde{u}=u+c_1$, где c_1 — некоторая постоянная.

Замечание. Если функция f вещественнозначна, то и решения, о которых идет речь в теореме 6, вещественнозначны. Это утверждение доказывается так же, как соответствующее утверждение в замечании, сделанном в конце п. 2. Решения, о которых идет речь в теоремах 7 и 8, также можно считать вещественнозначными, если, конечно, все соответствующие собственные функции брать вещественнозначными и ограничиться их линейными комбинациями с вещественными коэффициентами.

7. Первая краевая задача для общего эллиптического уравнения. Результаты предыдущих пунктов без труда распространяются и на более общие эллиптические уравнения. В качестве примера рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i} + a(x)\, u = f(x),\ x \in Q, \tag{41}$$

$$u|_{\partial Q} = 0, \tag{42}$$

где вещественные коэффициенты $a_{ij}(x) \in C^1(\bar{Q})$, $a_i(x) \in C^1(\bar{Q})$, $a(x) \in C(\overline{Q})$, $i, j=1, \ldots, n$; матрицу $\|a_{ij}(x)\|$ считаем симметрической и положительно определенной (эллиптичность уравнения (41)), т. е. удовлетворяющей с некоторой постоянной $\gamma>0$ при любом вещественном векторе $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и любой точке $x \in \bar{Q}$ неравенству

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geqslant \gamma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2. \tag{43}$$

Классическое решение $u(x)$ задачи (41), (42) определяется обычным образом: это функция из $C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$, удовлетворяющая (41) и (42). С помощью формулы Остроградского без труда убеждаемся, что если $f \in L_2(Q)$, то классическое решение задачи (41), (42), принадлежащее $\mathring{H}^1(Q)$ при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i} \bar{v}_{x_j}\, dx + \\ + \int_Q u \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{v}_{x_i} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i x_i} - a\right) \bar{v}\right] dx = -\int_Q f \bar{v}\, dx. \tag{44}$$

Функция u из $\mathring{H}^1(Q)$ называется обобщенным решением задачи (41), (42), если она при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$ удовлетворяет интегральному тождеству (44), при этом считаем, что $f \in L_2(Q)$.

Согласно теореме 6 п. 6 § 5 гл. III в $\mathring{H}^1(Q)$ можно ввести эквивалентное обычному скалярное произведение

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = \int\limits_Q \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \bar{v}_{x_j}\, dx.$$

В связи с этим тождество (44) можно переписать в виде

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} + \left(u, \sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ix_i} - a\right) v\right)_{L_2(Q)} = -(f, v)_{L_2(Q)}. \qquad (45)$$

Лемма 2. 1. *Для любых непрерывных в $\bar{Q}$ функций $a_0(x)$, $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ существует такой линейный ограниченный оператор A из $L_2(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$, определенный на всем $L_2(Q)$, что при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$ имеет место равенство*

$$\left(u, \sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + a_0 v\right)_{L_2(Q)} = (Au, v)_{\mathring{H}^1(Q)}.$$

2. *Оператор A, если его рассматривать как оператор из $\mathring{H}^1(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$, вполне непрерывен.*

Так как при фиксированном $u \in L_2(Q)$ заданный на $\mathring{H}^1(Q)$ $(v \in \mathring{H}^1(Q))$ линейный функционал $l(v) = \left(u, \sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + a_0 v\right)_{L_2(Q)}$ ограничен: $|l(v)| \leqslant \|u\|_{L_2(Q)} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + a_0 v \right\|_{L_2(Q)} \leqslant C \|u\|_{L_2(Q)} \|v\|_{\mathring{H}^1(Q)}$, где постоянная $C > 0$ зависит лишь от $\|a_i\|_{C(\bar{Q})}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, то согласно теореме Рисса существует единственная функция $U \in \mathring{H}^1(Q)$, для которой $l(v) = (U, v)_{\mathring{H}^1(Q)}$ при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$, причем $\|U\|_{\mathring{H}^1(Q)} = \|l\| \leqslant C \|u\|_{L_2(Q)}$. Это означает, что на $L_2(Q)$ задан оператор A (очевидно, линейный), переводящий $L_2(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$: $Au = U$. Этот оператор ограничен, $\|A\| \leqslant C$, и при любых $u \in L_2(Q)$ и $v \in \mathring{H}^1(Q)$ имеет место равенство

$$\left(u, \sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + a_0 v\right)_{L_2(Q)} = (Au, v)_{\mathring{H}^1(Q)}.$$

Покажем, что оператор A, если его рассматривать как оператор из $\mathring{H}^1(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$, вполне непрерывен. Возьмем произвольное ограниченное множество в $\mathring{H}^1(Q)$. Согласно теореме 3 п. 4 § 5 гл. III это множество компактно в $L_2(Q)$. Тогда из любой бесконечной последовательности его элементов можно выделить фундаментальную в $L_2(Q)$ подпоследовательность. Поскольку оператор A

из $L_2(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$ ограничен (и, тем самым, непрерывен), то эту подпоследовательность он переводит в фундаментальную последовательность в $\mathring{H}^1(Q)$. Следовательно, оператор A из $\mathring{H}^1(Q)$ в $\mathring{H}^1(Q)$ вполне непрерывен. Лемма доказана.

Поскольку заданный на $\mathring{H}^1(Q)$ $(v \in \mathring{H}^1(Q))$ линейный функционал $(f, v)_{L_2(Q)}$ ограничен: $|(f, v)_{L_2(Q)}| \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{\mathring{H}^1(Q)}$, то по теореме Рисса существует единственный элемент $F \in \mathring{H}^1(Q)$, для которого при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$ $(f, v)_{L_2(Q)} = (F, v)_{\mathring{H}^1(Q)}$, причем $\|F\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)}$.

Поэтому с помощью леммы 2 $\left(\text{полагаем } a_0 = \sum_{i=1}^{n} a_{ix_i} - a\right)$ интегральное тождество (44), определяющее обобщенное решение, можно переписать в виде операторного равенства в пространстве $\mathring{H}^1(Q)$:

$$u + Au = F, \quad u \in \mathring{H}^1(Q). \tag{46}$$

Лемма 3. *Если* $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{ix_i} - a \geqslant 0$ *в* Q, *то однородное уравнение* (46) *имеет лишь нулевое решение.*

Пусть u — решение уравнения $u + Au = 0$. Умножая скалярно в $\mathring{H}^1(Q)$ это равенство на u, получим $\|u\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} + (Au, u)_{\mathring{H}^1(Q)} = 0$. Откуда следует, что $\|u\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} + \operatorname{Re}(Au, u)_{\mathring{H}^1} = 0$.

Так как $\operatorname{Re} a_i u_{x_i} \bar{u} = \frac{1}{2} (a_i |u|^2)_{x_i} - \frac{a_{x_i}}{2} |u|^2$ и $u|_{\partial Q} = 0$, то

$$\operatorname{Re}(Au, u)_{\mathring{H}^1(Q)} = \operatorname{Re} \int_Q \left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} \bar{u} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ix_i} - a \right) |u|^2 \right) dx =$$
$$= \int_Q \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} (a_i |u|^2)_{x_i} + \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{ix_i} - a \right) |u|^2 \right) dx =$$
$$= \int_Q \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{ix_i} - a \right) |u|^2 \, dx \geqslant 0.$$

Поэтому $\|u\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant 0$, т. е. $u = 0$.

Из леммы 3 и первой теоремы Фредгольма вытекает

Теорема 9. *Если* $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{ix_i} - a \geqslant 0$ *в* Q, *то обобщенное решение задачи* (41), (42) *при любой функции* $f \in L_2(Q)$ *существует и единственно.*

8. Обобщенные решения краевых задач с неоднородными граничными условиями. Рассмотрим сначала задачу (1), (2). Напомним, что обобщенным решением этой задачи называется удовлетворяющая интегральному тождеству (4) функция u из $H^1(Q)$, след которой на границе ∂Q равен граничной функции φ.

Из определения обобщенного решения вытекает естественное условие на граничную функцию φ. Нужно требовать, чтобы ее можно было продолжить в область Q функцией из пространства $H^1(Q)$. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что это условие выполнено. В противном случае обобщенное решение задачи (1), (2) не может существовать. Из теоремы о следах функций из $H^1(Q)$ вытекает, что φ должна принадлежать пространству $L_2(\partial Q)$. Но этого недостаточно для того, чтобы ее можно было продолжить в Q функцией из $H^1(Q)$; более того, для этого недостаточно даже ее непрерывности. В конце пункта мы еще вернемся к этому вопросу и в случае окружности получим необходимое и достаточное условие возможности такого продолжения.

Отметим, что если $\varphi \in C^1(\partial Q)$, то такое продолжение существует. Из теоремы 2 п. 2 § 4 гл. III вытекает существование функции $\Phi(x)$ из $C^1(\bar{Q})$ и, тем более, из $H^1(Q)$, для которой $\Phi|_{\partial Q} = \varphi$, причем имеет место неравенство $\|\Phi\|_{H^1(Q)} \leqslant C_1 \|\varphi\|_{C^1(\partial Q)}$ с постоянной $C_1 > 0$, не зависящей от φ.

Итак, пусть существует функция $\Phi \in H^1(Q)$, для которой $\Phi|_{\partial Q} = \varphi$. С помощью замены $u - \Phi = w$ задача нахождения обобщенного решения u сводится к задаче нахождения функции $w \in \mathring{H}^1(Q)$, удовлетворяющей при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$ интегральному тождеству

$$\int_Q (k \nabla w \nabla \bar{v} + a w \bar{v})\, dx = -\int_Q (k \nabla \Phi \nabla \bar{v} + a \Phi \bar{v} + f \bar{v})\, dx. \tag{4'}$$

Заметим, что если $\Phi \in H^2(Q)$ (для этого при $\partial Q \in C^2$ достаточно, чтобы $\varphi \in C^2(\partial Q)$), то тождество (4') можно переписать в виде

$$\int_Q (k \nabla w \nabla \bar{v} + a w \bar{v})\, dx = -\int_Q \tilde{f} \bar{v}\, dx,$$

где $\tilde{f} = f - \operatorname{div}(k \nabla \Phi) + a\Phi$, т. е. задача сведена к задаче, исследованной в п. 2 и 4.

Ограничимся, как и в п. 2, случаем, когда $a(x) \geqslant 0$ в Q. Вводя в $\mathring{H}^1(Q)$ скалярное произведение по формуле (7), перепишем (4') в виде

$$(w, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = l(v),$$

где $l(v) = -\int_Q (k \nabla \Phi \nabla \bar{v} + a \Phi \bar{v} + f \bar{v})\, dx$ — линейный функционал, заданный на $\mathring{H}^1(Q)$ $(v \in \mathring{H}^1(Q))$. Поскольку

$$|l(v)| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} + \max_{x \in \bar{Q}} k(x) \| |\nabla\Phi| \|_{L_2(Q)} \| |\nabla v| \|_{L_2(Q)} +$$
$$+ \max_{x \in \bar{Q}} a(x) \cdot \|\Phi\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} \leqslant C_2 \left(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\Phi\|_{H^1(Q)}\right) \|v\|_{\mathring{H}^1(Q)},$$

где постоянная $C_2 > 0$ зависит лишь от коэффициентов k и a, то функционал l ограничен и $\|l\| \leqslant C_2 (\|f\|_{L_2(Q)} + \|\Phi\|_{H^1(Q)})$. Поэтому согласно теореме Рисса в $\mathring{H}^1(Q)$ существует единственная функция w, удовлетворяющая тождеству (4'), причем $\|w\|_{\mathring{H}^1(Q)} = \|l\| \leqslant \leqslant C_2 (\|f\|_{L_2(Q)} + \|\Phi\|_{H^1(Q)})$. Тогда функция $u = w + \Phi$ является обобщенным решением задачи (1), (2). При этом имеет место неравенство

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C_3 (\|f\|_{L_2(Q)} + \|\Phi\|_{H^1(Q)})$$

с постоянной $C_3 > 0$, не зависящей от f и Φ, а следовательно, и неравенство

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C \Big(\|f\|_{L_2(Q)} + \inf_{\substack{\Phi \in H^1(Q) \\ \Phi|_{\partial Q} = \varphi}} \|\Phi\|_{H^1(Q)}\Big), \tag{47}$$

в котором постоянная не зависит от f и φ. Если граничная функция $\varphi \in C^1(\partial Q)$, то из этих неравенств вытекает неравенство

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C (\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{C^1(\partial Q)}). \tag{47'}$$

Покажем, что найденное решение единственно. Действительно, если существует другое обобщенное решение u', то разность $\tilde{u} = u - u'$ является функцией из $\mathring{H}^1(Q)$, удовлетворяющей в силу (4) при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$ интегральному тождеству $\int\limits_Q (k\nabla\tilde{u}\nabla\bar{v} + a\tilde{u}\bar{v})\,dx = 0$. Поскольку левая часть этого равенства есть скалярное произведение в $\mathring{H}^1(Q)$ функций $\tilde{u}$ и v, то $\tilde{u} = 0$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 10. *Если $a(x) \geqslant 0$ в Q, а функция φ является граничным значением некоторой функции из $H^1(Q)$, то существует единственное обобщенное решение и задачи* (1), (2). *Это решение удовлетворяет неравенству* (47), *а тем самым при $\varphi \in C^1(\partial Q)$ и неравенству* (47').

Замечание. Как нетрудно проверить, множество $\mathcal{M}$ заданных на ∂Q функций φ, являющихся следами некоторых функций Φ из $H^1(Q)$, есть банахово пространство с нормой $\|\varphi\|_{\mathcal{M}} = \inf\limits_{\substack{\Phi \in H^1(Q) \\ \Phi|_{\partial Q} = \varphi}} \|\Phi\|_{H^1(Q)}$. В связи с этим неравенство (47) можно переписать в виде

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C (\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{\mathcal{M}}).$$

Рассмотрим задачу (1), (3). Напомним, что функция u из $H^1(Q)$ называется обобщенным решением этой задачи, если она удовлетворяет интегральному тождеству (5) при всех $v \in H^1(Q)$. Граничная функция φ в этом случае предполагается принадлежащей $L_2(\partial Q)$.

Теорема 11. *Если $a(x) \geqslant 0$ в Q и или $a(x) \not\equiv 0$ в Q, или $\sigma(x) \not\equiv 0$ на ∂Q, то для любых $f \in L_2(Q)$ и $\varphi \in L_2(\partial Q)$ существует единственное обобщенное решение u задачи* (1), (3). *При этом имеет место неравенство*

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\left(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}\right), \tag{48}$$

в котором постоянная $C > 0$ не зависит от f и φ.

Введем в $H^1(Q)$ эквивалентное обычному скалярное произведение по формуле (10). Тогда интегральное тождество (5) можно переписать в виде

$$(u, v)_{H^1(Q)} = l(v),$$

где

$$l(v) = -\int_Q f\bar{v}\,dx + \int_{\partial Q} k\varphi\bar{v}\,dS$$

— линейный функционал, заданный на $H^1(Q)$ ($v \in H^1(Q)$).

Так как согласно теореме 1 п. 1 § 5 гл. III

$$|l(v)| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)}\|v\|_{L_2(Q)} + \max_{x \in \bar{Q}} k(x) \cdot \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}\|v\|_{L_2(\partial Q)} \leqslant$$
$$\leqslant C\left(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}\right)\|v\|_{H^1(Q)}$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от f, φ и v, то функционал $l(v)$ ограничен и $\|l\| \leqslant C\left(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}\right)$. По теореме Рисса существует единственная функция u из $H^1(Q)$, удовлетворяющая тождеству (5), причем $\|u\|_{H^1(Q)} = \|l\| \leqslant C\left(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}\right)$. Теорема доказана.

Пусть теперь в задаче (1), (3) $a(x) \equiv 0$ в Q и $\sigma(x) \equiv 0$ на ∂Q. Введем в $H^1(Q)$ эквивалентное обычному скалярное произведение

$$(u, v)_{H^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u\nabla\bar{v} + u\bar{v})\,dx. \tag{49}$$

Тогда интегральное тождество (5), определяющее обобщенное решение второй краевой задачи для оператора $\operatorname{div}(k\nabla)$, можно переписать в виде

$$(u, v)_{H^1(Q)} - (u, v)_{L_2(Q)} = l(v), \tag{50}$$

где

$$l(v) = -\int_Q f\bar{v}\,dx + \int_{\partial Q} k\varphi\bar{v}\,dS \tag{51}$$

— линейный функционал, заданный на $H^1(Q)$ $(v \in H^1(Q))$. Так как согласно теореме 1 п. 1 § 5 гл. III

$$|l(v)| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} + \max_{x \in \overline{Q}} k(x) \cdot \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)} \|v\|_{L_2(\partial Q)} \leqslant$$
$$\leqslant C' (\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}) \|v\|_{H^1(Q)}$$

с постоянной $C' > 0$, не зависящей от f, φ и v, то функционал $l(v)$ ограничен и $\|l\| \leqslant C' (\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)})$. По теореме Рисса в $H^1(Q)$ существует единственная функция F', для которой при всех $v \in H^1(Q)$ имеет место равенство

$$l(v) = (F', v)_{H^1(Q)}, \tag{52}$$

причем

$$\|F'\|_{H^1(Q)} \leqslant C' (\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}). \tag{53}$$

В силу леммы 1′ п. 3 (скалярное произведение в $H^1(Q)$ считаем заданным по формуле (49)) существует такой ограниченный оператор A' из $L_2(Q)$ в $H^1(Q)$ с областью определения $L_2(Q)$, что при всех $v \in H^1(Q)$

$$(u, v)_{L_2(Q)} = (A'u, v)_{H^1(Q)}. \tag{54}$$

При этом оператор A', если его рассматривать как оператор из $H^1(Q)$ в $H^1(Q)$, является самосопряженным и вполне непрерывным.

С помощью (52) и (54) тождество (50) можно заменить эквивалентным ему операторным уравнением в пространстве $H^1(Q)$:

$$u - A'u = F'. \tag{55}$$

Так как для функции $u_1(x) \equiv \text{const} = \frac{1}{\sqrt{|Q|}}$ при любой $v \in H^1(Q)$ имеет место равенство $(u_1, v)_{L_2(Q)} = (u_1, v)_{H^1(Q)}$ (скалярное произведение в $H^1(Q)$ определено формулой (49)), то в силу (54) $(A'u_1, v)_{H^1(Q)} = (u_1, v)_{L_2(Q)} = (u_1, v)_{H^1(Q)}$. Это означает, что число 1 есть характеристическое число оператора A', а $u_1 = \frac{1}{\sqrt{|Q|}}$ — соответствующая собственная функция. Поскольку любая собственная функция u_1' оператора A', отвечающая характеристическому числу 1, удовлетворяет равенству $(u_1', u_1')_{H^1(Q)} = (A'u_1', u_1')_{H^1(Q)} = (u_1', u_1')_{L_2(Q)}$, то для нее имеем

$$\int_Q k |\nabla u_1'|^2 \, dx = 0.$$

Следовательно, $u_1' = \text{const}$, т. е. число 1 есть однократное характеристическое число оператора A'.

Согласно третьей теореме Фредгольма для разрешимости уравнения (55) необходимо и достаточно, чтобы функция F' была ортогональной в $H^1(Q)$ функции $u_1 = \frac{1}{\sqrt{|Q|}}$: $\left(F', \frac{1}{\sqrt{|Q|}}\right)_{H^1(Q)} = 0$.

Из (52) и (51) вытекает, что это условие эквивалентно условию

$$-\int\limits_Q f\,dx+\int\limits_{\partial Q} k\varphi\,dS=0. \tag{56}$$

При выполнении этого условия уравнение (55) имеет единственное решение u, ортогональное в $H^1(Q)$ постоянным. Оно является обобщенным решением исследуемой краевой задачи. При этом в силу (53) имеет место неравенство (48) с постоянной C, не зависящей от f и φ. Все остальные решения отличаются от функции u постоянными слагаемыми. Поскольку для функции из $H^1(Q)$ условие ортогональности постоянным в скалярном произведении (49) эквивалентно условию ортогональности постоянным в скалярном произведении $L_2(Q)$, то нами установлено следующее утверждение

Теорема 12. *Для существования обобщенного решения задачи* $\operatorname{div}(k(x)\nabla u)=f$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q}=\varphi$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* (56). *При этом обобщенное решение u, ортогональное в скалярном произведении $L_2(Q)$ постоянным, единственно и для него имеет место неравенство* (48). *Все остальные обобщенные решения задачи отличаются от функции u на постоянные.*

Замечание. Если функции f и φ вещественнозначные, то и решения, о которых идет речь в теоремах 10—12, тоже вещественнозначные.

При исследовании первой краевой задачи для уравнения (1) с неоднородным граничным условием возникла следующая задача: найти условия на функцию φ из $L_2(\partial Q)$, при которых существует ее продолжение в область Q, принадлежащее $H^1(Q)$. Как было показано, достаточным для этого условием является принадлежность пространству $C^1(\partial Q)$. Сейчас в случае, когда Q есть круг, мы установим необходимое и достаточное условие.

Пусть область Q $(n=2)$ есть круг $\{|x|=\rho<1\}$, $x=(x_1, x_2)=$ $=(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)$. Рассмотрим на окружности $\partial Q=\{\rho=1\}$ вещественную функцию φ из (вещественного) пространства $L_2(\partial Q)$, $\varphi(\theta)\in L_2(0, 2\pi)$. Разложение функции $\varphi(\theta)$ в сходящийся в норме $L_2(0, 2\pi)$ ряд Фурье имеет вид

$$\varphi(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta),$$

где

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\theta)\cos k\theta\,d\theta,\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\theta)\sin k\theta\,d\theta,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

— ее коэффициенты Фурье.

Согласно равенству Парсеваля — Стеклова

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\|\varphi\|^2_{L_2(0,\,2\pi)}<\infty. \qquad (57)$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 13. *Для того чтобы функция* $\varphi(\theta)$ *из* $L_2(0, 2\pi)$ *была следом на окружности* $\{|x|=1\}$ *некоторой функции из* $H^1(|x|<1)$, *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}k(a_k^2+b_k^2). \qquad (58)$$

В силу (57) последовательности a_k и b_k, $k=1, 2, \ldots$, ограничены. Поэтому функция $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k-ib_k)z^k$, где $z=x_1+ix_2$, аналитична в круге $\{|z|<1\}$. Значит, функция

$$w(x)=w(\rho,\,\theta)=\frac{a_0}{2}+\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-ib_k)(x_1+ix_2)^k=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta) \qquad (59)$$

принадлежит $C^\infty(|x|<1)$, причем ряд в (59) и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием, сходятся абсолютно и равномерно в круге $\{|x|<r\}$ при любом $r<1$.

При доказательстве теоремы 13 нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 4. *Для того чтобы определенная рядом* (59) *функция* $w(x)$ *принадлежала пространству* $H^1(|x|<1)$, *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд* (58).

Обозначим через $w_m(x)$ частичную сумму ряда (59):

$$w_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}\rho^k(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta).$$

Так как все функции системы $\rho^k\cos k\theta$, $\rho^k\sin k\theta$, $k=0, 1, \ldots$, попарно ортогональны в $L_2(|x|<1)$ и $\|\rho^k\cos k\theta\|^2_{L_2(|x|<1)}=$ $=\|\rho^k\sin k\theta\|^2_{L_2(|x|<1)}=\frac{\pi}{2(k+1)}$, $k=1, 2, \ldots$, то для любых p и q, $q>p$,

$$\|w_q-w_p\|^2_{L_2(|x|<1)}=\frac{\pi}{2}\sum_{k=p+1}^{q}\frac{a_k^2+b_k^2}{k+1}.$$

Поэтому из сходимости ряда (57) вытекает сходимость в $L_2(|x|<1)$ последовательности $w_m(x)$, $m=1, 2, \ldots$. Следовательно, функция $w \in L_2(|x|<1)$, и ряд (59) сходится к ней в $L_2(|x|<1)$.

Пусть сходится ряд (58). Тогда (при $q>p$)

$$\|w_q - w_p\|^2_{H^1(|x|<1)} = \int\limits_{|x|<1} [(w_q-w_p)^2 + |\nabla(w_q-w_p)|^2]\,dx =$$

$$= \int_0^1 \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} \left[(w_q-w_p)^2 + (w_{q\rho}-w_{p\rho})^2 + \frac{1}{\rho^2}(w_{q\theta}-w_{p\theta})^2\right] d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{k=p+1}^{q} \frac{a_k^2+b_k^2}{k+1} + \pi \sum_{k=p+1}^{q} k(a_k^2+b_k^2) \to 0$$

при p, $q\to\infty$. То есть последовательность w_m, $m=1, 2, \ldots$, сходится в $H^1(|x|<1)$. Следовательно, $w\in H^1(|x|<1)$.

Пусть теперь $w\in H^1(|x|<1)$. Так как для любого $r<1$ последовательность норм

$$\|w_m\|^2_{H^1(|x|<r)} =$$

$$= \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{m} r^{2k}\frac{a_k^2+b_k^2}{k+1} + 2\sum_{k=1}^{m} r^{2k-2}k(a_k^2+b_k^2)\right), \quad m=1, 2, \ldots,$$

монотонно не убывая, стремится при $m\to\infty$ к $\|w\|^2_{H^1(|x|<r)}$, то при всех $r<1$ и всех m имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} k(a_k^2+b_k^2)r^{2k} \leqslant \frac{1}{\pi}\|w_m\|^2_{H^1(|x|<r)} \leqslant \frac{1}{\pi}\|w\|^2_{H^1(|x|<r)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\|w\|^2_{H^1(|x|<1)}.$$

Следовательно, частичные суммы ряда (58) ограничены:

$$\sum_{k=1}^{m} k(a_k^2+b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\|w\|^2_{H^1(|x|<1)}, \qquad m=1, 2, \ldots,$$

т. е. ряд (58) сходится. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 13. Достаточность немедленно вытекает из леммы 4, поскольку в случае сходимости ряда (58) функция w из (59) принадлежит $H^1(|x|<1)$ и ее след на окружности $\{|x|=1\}$ равен φ.

Докажем необходимость. Пусть существует функция $\Phi\in H^1(|x|<1)$, для которой $\Phi|_{\{|x|=1\}}=\varphi$. Тогда в силу теоремы 10 существует обобщенное решение из $H^1(|x|<1)$ первой краевой задачи для уравнения (1) с граничной функцией φ. Пусть u — обобщенное решение первой краевой задачи для уравнения (1) при $k\equiv 1$, $a\equiv f\equiv 0$, удовлетворяющее условию $u|_{\{|x|=1\}}=\varphi$. В п. 2 следующего параграфа будет показано, что функция u принадлежит $C^\infty(|x|<1)$ и удовлетворяет в круге $\{|x|<1\}$ уравнению $\Delta u=0$. Воспользуемся этим результатом и разложим функцию $u(x)=u(\rho,\ \theta)$ при фиксированном $\rho\in(0,\ 1)$ в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье по θ:

$$u(\rho,\ \theta)=\frac{U_0(\rho)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(U_k(\rho)\cos k\theta+V_k(\rho)\sin k\theta),$$

где

$$U_k(\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\ \theta)\cos k\theta\,d\theta,\qquad k=0,\ 1,\ \dots,$$

$$V_k(\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\ \theta)\sin k\theta\,d\theta,\qquad k=1,\ 2,\ \dots$$

Функции $U_k(\rho)$ (и $V_k(\rho)$), $k=0,\ 1,\ \dots$, бесконечно дифференцируемы при $0<\rho<1$ и ограничены при $\rho\to+0$. Поскольку $u\in H^1(|x|<1)$, то в силу теоремы о следах функций из $H^1(|x|<1)$ для всех $k=0,\ 1,\ \dots$ имеем

$$\int_0^{2\pi}(u(\rho,\ \theta)-\varphi(\theta))\cos k\theta\,d\theta\to 0\quad\left(\int_0^{2\pi}(u(\rho,\theta)-\varphi(\theta))\sin k\theta\,d\theta\to 0\right)$$

$$\text{при } \rho\to 1-0.$$

Это означает, что все функции $U_k(\rho)$ ($V_k(\rho)$) непрерывны слева в точке $\rho=1$ и $U_k(1)=a_k$ ($V_k(1)=b_k$), $k=0,\ 1,\ \dots$

Так как для $\rho\in(0,\ 1)$ $\Delta u=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=0$, то для таких ρ

$$U_k''(\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u_{\rho\rho}(\rho,\ \theta)\cos k\theta\,d\theta=-\frac{1}{\pi\rho}\int_0^{2\pi}u_\rho\cos k\theta\,d\theta-$$

$$-\frac{1}{\pi\rho^2}\int_0^{2\pi}u_{\theta\theta}\cos k\theta\,d\theta=-\frac{1}{\rho}U_k'+\frac{k^2}{\rho^2}U_k,\qquad k=0,\ 1,\ \dots$$

Это означает, что для любых $k=0,\ 1,\ \dots$ функция $U_k(\rho)$ удовлетворяет при $0<\rho<1$ обыкновенному дифференциальному уравнению (Эйлера) $y''+\frac{1}{\rho}y'-\frac{k^2}{\rho^2}y=0$. Поскольку общее решение этого уравнения имеет вид $B\rho^k + C\rho^{-k}$ при $k \neq 0$ и $B + C \ln \rho$ при $k = 0$, где B и C — произвольные постоянные, то $U_k(\rho) = a_k \rho^k$, $k = 0, 1, \ldots$ Аналогично показывается, что $V_k(\rho) = b_k \rho^k$, $k = 1, 2, \ldots$

Таким образом, функция u, принадлежащая $H^1(|x| < 1)$, совпадает с функцией w из (59). А тогда в силу леммы 4 сходится ряд (58). Теорема доказана.

Используем эту теорему для построения непрерывной на окружности $\{\rho = 1\}$ функции $\varphi(\theta)$, которую нельзя продолжить в круг $\{|x| < 1\}$ функцией из $H^1(|x| < 1)$. Пусть

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k^3\theta}{k^2}.$$

Так как этот ряд сходится равномерно, то функция $\varphi \in C(|x| = 1)$. Согласно теореме 13 она вместе с этим не может быть следом функции из $H^1(|x| < 1)$, поскольку ряд (58) для нее $\left(\text{он имеет вид } \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^3 \frac{1}{(k^2)^2}\right)$ расходится.

9. Вариационный метод решения краевых задач. Пусть H' — произвольное подпространство вещественного пространства $H^1(Q)$, в частности, H' может совпадать со всем $H^1(Q)$. Будем считать, что в H' задано скалярное произведение, эквивалентное обычному скалярному произведению в $H^1(Q)$.

Возьмем некоторую вещественную функцию $f \in L_2(Q)$ и рассмотрим на H' функционал

$$E(v) = \|v\|_{H'}^2 + 2(f, v)_{L_2(Q)}, \qquad v \in H'. \tag{60}$$

Так как $|(f, v)_{L_2(Q)}| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{H'}$, то для всех $v \in H'$

$$E(v) \geqslant \|v\|_{H'}^2 - 2|(f, v)_{L_2(Q)}| \geqslant \|v\|_{H'}^2 - 2C\|v\|_{H'} \|f\|_{L_2(Q)} =$$
$$= (\|v\|_{H'} - C\|f\|_{L_2(Q)})^2 - C^2\|f\|_{L_2(Q)}^2 \geqslant -C^2 \|f\|_{L_2(Q)}^2.$$

Это означает, что множество значений функционала E на H' ограничено снизу. Обозначим через $d = d(H')$ точную нижнюю грань функционала E на H':

$$d = \inf_{v \in H'} E(v).$$

Функция u из H' называется функцией, *реализующей минимум* функционала E на H', если

$$E(u) = d. \tag{61}$$

Как и число d, функция u, конечно, зависит от выбора подпространства H'.

По определению точной нижней грани, существует последовательность v_m, $m=1, 2, \ldots$, функций из H', для которой

$$\lim_{m\to\infty} E(v_m)=d. \tag{62}$$

Любая такая последовательность называется последовательностью, *минимизирующей* функционал E на H'.

Лемма 5. *Для любого подпространства H' пространства $H^1(Q)$ (в частности, H' может совпадать с $H^1(Q)$) существует единственная функция u из H', реализующая минимум функционала E на H'. Любая последовательность, минимизирующая функционал E на H', сходится к этой функции в норме $H^1(Q)$.*

Пусть v_m, $m=1, 2, \ldots$, — произвольная минимизирующая функционал E на H' последовательность элементов из H'. Тогда по любому $\varepsilon>0$ можно указать такое число $N=N(\varepsilon)$, что для всех $m\geqslant N$

$$d\leqslant E(v_m)\leqslant d+\varepsilon. \tag{63}$$

Так как $\left\|\frac{v_m\pm v_s}{2}\right\|^2_{H'}=\frac{1}{4}\|v_m\|^2_{H'}+\frac{1}{4}\|v_s\|^2_{H'}\pm\frac{1}{2}(v_m, v_s)_{H'}$, то

$$\left\|\frac{v_m+v_s}{2}\right\|^2_{H'}+\left\|\frac{v_m-v_s}{2}\right\|^2_{H'}=\frac{1}{2}(\|v_m\|^2_{H'}+\|v_s\|^2_{H'}).$$

Из последнего равенства с помощью (60) получаем

$$\left\|\frac{v_m-v_s}{2}\right\|^2_{H'}=\frac{1}{2}(\|v_m\|^2_{H'}+\|v_s\|^2_{H'})-\left\|\frac{v_m+v_s}{2}\right\|^2_{H'}=$$
$$=\frac{1}{2}(E(v_m)+E(v_s))-E\left(\frac{v_m+v_s}{2}\right).$$

Но $E\left(\frac{v_m+v_s}{2}\right)\geqslant d$, а функции v_m и v_s при $m, s\geqslant N$ удовлетворяют неравенствам (63); значит, при всех $m, s\geqslant N$ имеет место неравенство

$$0\leqslant\left\|\frac{v_m-v_s}{2}\right\|^2_{H'}\leqslant\frac{1}{2}(d+\varepsilon+d+\varepsilon)-d=\varepsilon,$$

из которого в силу произвольности $\varepsilon>0$ следует фундаментальность в $H^1(Q)$ взятой последовательности. Следовательно, существует функция u из H', к которой эта последовательность сходится в норме $H^1(Q)$. Но тогда $\|v_s\|_{H'}\to\|u\|_{H'}$ и $(f, v_s)_{L_2(Q)}\to (f, u)_{L_2(Q)}$ при $s\to\infty$, и значит, $E(v_s)\to E(u)$. Равенство (61) следует теперь из соотношения (62).

Покажем единственность функции u, реализующей минимум на H' функционала E. Пусть существуют две такие функции u_1 и u_2. Тогда последовательность $u_1, u_2, u_1, u_2, \ldots$ является последовательностью, минимизирующей функционал E на H', и не является сходящейся в H', что противоречит только что доказанному утверждению. Лемма доказана.

Изложим теперь *метод Ритца* построения минимизирующей функционал E последовательности. Возьмем в H' произвольную линейно независимую систему функций φ_k, $k=1, 2, \ldots$, линейная оболочка которой всюду плотна в H'. В случае, если $H' = H^1(Q)$, в качестве такой системы можно взять, например, множество всех одночленов $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, где α — произвольный n-мерный вектор с целочисленными неотрицательными координатами.

Обозначим через R_k натянутое на $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ k-мерное подпространство пространства $H' \subset H^1(Q)$ и найдем элемент, реализующий минимум функционала E на R_k (согласно лемме 5 такой элемент существует). Так как любой элемент из R_k представляется в виде $c_1\varphi_1 + \ldots + c_k\varphi_k$ при некоторых вещественных постоянных c_i, то эта задача эквивалентна нахождению минимума по $c_1, \ldots, c_k$ функции

$$F(c_1, \ldots, c_k) = E(c_1\varphi_1 + \ldots + c_k\varphi_k) = \sum_{i,\,j=1}^{k} c_i c_j (\varphi_i, \varphi_j)_{H'} + 2\sum_{i=1}^{k} c_i (f, \varphi_i)_{L_2(Q)}.$$

Вектор $(c_1, \ldots, c_k)$, на котором функция F достигает минимума, является решением системы линейных уравнений $\frac{\partial F}{\partial c_i} = 0$, $i=1, \ldots, k$, т. е. системы

$$\sum_{j=1}^{k} (\varphi_i, \varphi_j)_{H'} c_j + (f, \varphi_i)_{L_2(Q)} = 0, \qquad i=1, \ldots, k. \tag{64}$$

Определитель системы (64), называемый определителем Грамма системы $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, отличен от нуля. Действительно, если бы он был равен нулю, то из линейной зависимости его строк следовало бы существование таких постоянных $\xi_1, \ldots, \xi_k$ $|\xi_1| + \ldots + |\xi_k| \neq 0$, что $\xi_1(\varphi_1, \varphi_j)_{H'} + \ldots + \xi_k(\varphi_k, \varphi_j)_{H'} = 0$ при всех $j=1, \ldots, k$. А это означало бы, что функция $\xi_1\varphi_1 + \ldots + \xi_k\varphi_k$ ортогональна всем функциям $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, т. е. $\xi_1\varphi_1 + \ldots + \xi_k\varphi_k = 0$, что противоречит линейной независимости системы $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$.

Итак, линейная система (64) всегда имеет единственное решение $c_1^k, \ldots, c_k^k$. Тогда функция

$$v_k = c_1^k \varphi_1 + \ldots + c_k^k \varphi_k \tag{65}$$

из R_k реализует минимум функционала E на R_k. Последовательность функций v_k, $k=1, 2, \ldots$, называется *последовательностью Ритца* для функционала E по системе $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$

Лемма 6. *Последовательность Ритца v_k, $k=1, 2, \ldots$, функционала E по произвольной линейно независимой системе функций φ_k, $k=1, 2, \ldots$, с всюду плотной в H' линейной оболочкой является* *последовательностью, минимизирующей функционал E на H'. Последовательность v_k, $k=1, 2, \ldots$, сходится в норме $H^1(Q)$ к функции u, реализующей минимум E на H'.*

Поскольку $R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_k \subset \ldots \subset H'$, то

$$E(v_1) \geqslant E(v_2) \geqslant \ldots \geqslant E(v_k) \geqslant \ldots \geqslant d. \tag{66}$$

Так как линейная оболочка системы φ_k, $k=1, 2, \ldots$, всюду плотна в H', то по любому $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $k=k(\varepsilon)$ и $c_1'(\varepsilon), \ldots, c_k'(\varepsilon)$, что $\|u_\varepsilon - u\|_{H'} \leqslant \varepsilon$, где $u_\varepsilon = c_1'(\varepsilon)\varphi_1 + \ldots + c_k'(\varepsilon)\varphi_k$ принадлежит R_k. Из (60) тогда вытекает, что

$$\begin{aligned} E(u_\varepsilon) = \|u_\varepsilon\|_{H'}^2 + 2(f, u_\varepsilon)_{L_2(Q)} = \|u_\varepsilon - u + u\|_{H'}^2 + \\ + 2(f, u_\varepsilon - u + u)_{L_2(Q)} = E(u) + E(u_\varepsilon - u) + 2(u_\varepsilon - u, u)_{H'} \leqslant \\ \leqslant d + |E(u_\varepsilon - u)| + 2\|u_\varepsilon - u\|_{H'}\|u\|_{H'} \leqslant d + \|u_\varepsilon - u\|_{H'}^2 + \\ + 2C\|f\|_{L_2(Q)}\|u_\varepsilon - u\|_{H'} + 2\|u_\varepsilon - u\|_{H'}\|u\|_{H'} \leqslant \\ \leqslant d + \varepsilon^2 + 2C\|f\|_{L_2(Q)}\varepsilon + 2\|u\|_{H'}\varepsilon \leqslant d + C_1\varepsilon \end{aligned}$$

при некоторой постоянной $C_1 > 0$. Так как минимум E на R_k достигается на функции v_k, то для всех $s \geqslant k$ в силу (66) $d \leqslant E(v_s) \leqslant E(v_k) \leqslant d + C_1\varepsilon$. Это и означает, что $E(v_s) \to d$ при $s \to \infty$. Сходимость последовательности v_s, $s=1, 2, \ldots$, к функции u следует из леммы 5. Лемма доказана.

Установим теперь важное свойство функции u, реализующей минимум функционала E на H'. Возьмем любую функцию $v \in H'$ и произвольное вещественное число t. Функция $w_t = u + tv$ принадлежит H', поэтому многочлен (по t) $P(t) = E(w_t) = E(u) + 2t((u, v)_{H'} + (f, v)_{L_2(Q)}) + t^2\|v\|_{H'}^2 \geqslant d$ для всех $t \in (-\infty, +\infty)$. Кроме того, $P(0) = E(u) = d$. Значит,

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=0} = 2((u, v)_{H'} + (f, v)_{L_2(Q)}) = 0.$$

Итак, любая реализующая минимум функционала E на H' функция u из H' при всех $v \in H'$ удовлетворяет тождеству

$$(u, v)_{H'} + (f, v)_{L_2(Q)} = 0. \tag{67}$$

До сих пор нам было безразлично, каким образом в подпространстве H' определено скалярное произведение, эквивалентное обычному скалярному произведению в $H^1(Q)$.

Пусть $H' = H^1(Q)$. Возьмем функцию $k(x) \in C(\bar{Q})$, $k(x) \geqslant k_0 = \text{const} > 0$, функцию $a(x) \in C(\bar{Q})$, $a(x) \geqslant 0$ в Q, и функцию $\sigma(x) \in C(\partial Q)$, $\sigma(x) \geqslant 0$ на ∂Q, и предположим, что или $a(x) \not\equiv 0$ в Q, или $\sigma(x) \not\equiv 0$ на ∂Q. Скалярное произведение в $H^1(Q)$ определим равенством (10):

$$(u, v)_{H^1(Q)} = \int\limits_Q (k\nabla u \nabla v + auv)\,dx + \int\limits_{\partial Q} k\sigma uv\,dS.$$

Тождество (67) тогда совпадает с тождеством (6):

$$\int\limits_Q (k\nabla u \nabla v + auv)\,dx + \int\limits_{\partial Q} k\sigma uv\,dS = -\int\limits_Q fv\,dx,$$

определяющим обобщенное решение третьей или второй (если $\sigma \equiv \equiv 0$) краевой задачи для уравнения (1) (при однородном граничном условии).

Если $H' = \mathring{H}^1(Q)$, а скалярное произведение в $\mathring{H}^1(Q)$ определено формулой (7):

$$(u,\ v)_{\mathring{H}^1(Q)} = \int\limits_Q (k\nabla u \nabla v + auv)\,dx$$

($k(x)$, $a(x)$ принадлежат $C(\bar{Q})$, $k(x) \geqslant k_0 > 0$, $a(x) \geqslant 0$), то тождество (67) совпадает с тождеством (4), определяющим обобщенное решение первой краевой задачи для уравнения (1) (при однородном граничном условии).

Таким образом, доказана следующая

Теорема 14. *Существует единственная функция u из $H^1(Q)$, реализующая минимум функционала E на $H^1(Q)$. Если скалярное произведение в $H^1(Q)$ определено равенством* (10), *то эта функция является обобщенным решением третьей или второй* (*при* $\sigma \equiv 0$) *краевой задачи для уравнения* (1) (*при однородном граничном условии*).

Существует единственная функция u из $\mathring{H}^1(Q)$, реализующая минимум функционала E на $\mathring{H}^1(Q)$. Если скалярное произведение в $\mathring{H}^1(Q)$ задается формулой (7), *то эта функция является обобщенным решением первой краевой задачи для уравнения* (1).

Теорема 14 дает другой, независимый от метода, применявшегося в теоремах 1 и 2, вариационный способ доказательства теорем существования и единственности обобщенных решений рассмотренных в п. 2 краевых задач, и указывает на вариационный смысл обобщенных решений.

Если подпространство H' совпадает с $H^1(Q)$ (с $\mathring{H}^1(Q)$) и в $H^1(Q)$ ($\mathring{H}^1(Q)$) введено эквивалентное обычному скалярное произведение по формуле (10) ((7)), то последовательность Ритца v_k, $k = 1, 2, \ldots$, функционала E на $H^1(Q)$ ($\mathring{H}^1(Q)$) в силу леммы 6 и теоремы 14 сходится в $H^1(Q)$ к обобщенному решению третьей (первой) краевой задачи для уравнения (1). То есть последовательность Ритца можно рассматривать как последовательность, приближающую обобщенное решение краевой задачи для уравнения (1).

Таким образом, доказана

Теорема 15. *Последовательность Ритца функционала E, заданного на $H^1(Q)$ или на $\mathring{H}^1(Q)$ (скалярное произведение задается формулами* (10) *или* (7)), *построенная по произвольной линейно независимой системе функций, линейная оболочка которой всюду плотна в $H^1(Q)$ или $\mathring{H}^1(Q)$ соответственно, сходится в $H^1(Q)$ к обобщенному решению соответствующей краевой задачи (третьей или первой) для уравнения* (1).

§ 2. Гладкость обобщенных решений. Классические решения

В предыдущем параграфе мы занимались изучением разрешимости основных краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Перейдем теперь к исследованию гладкости решений этих задач.

Будем предполагать, что данные рассматриваемых задач вещественнозначны. Тогда, как отмечалось в § 1, обобщенные решения этих задач тоже вещественнозначны. Поэтому всюду далее мы, не оговаривая этого особо, будем понимать под решениями вещественнозначные функции — элементы вещественных пространств $C^k(\bar{Q})$ или $H^k(Q)$, $k=0, 1, 2, \ldots$

При исследовании гладкости обобщенных решений целесообразно выделить одномерный случай, поскольку результаты, которые в этом случае будут получены, вообще говоря, несправедливы для $n>1$. Исследование в одномерном случае, кроме того, значительно проще. В частности, при $n=1$ обобщенные решения краевых задач (они принадлежат пространству $H^1(\alpha, \beta)$) являются на основании теоремы 3 п. 2 § 6 гл. III непрерывными функциями на $[\alpha, \beta]$. В одномерном случае просто решается и вопрос о продолжении функции, заданной на границе, в область функцией из $H^1(\alpha, \beta)$: если $\Phi|_{x=\alpha}=\varphi_0$, $\Phi|_{x=\beta}=\varphi_1$, то в качестве такого продолжения можно взять линейную функцию $\Phi = \frac{x(\varphi_1-\varphi_0)}{\beta-\alpha} - \frac{\alpha\varphi_1-\beta\varphi_0}{\beta-\alpha}$.

1. Гладкость обобщенных решений в одномерном случае. Напомним, что краевые задачи для уравнения

$$\mathscr{L}u \equiv (ku')' - au = f, \qquad x \in (\alpha, \beta), \tag{1}$$

в классической постановке состоят в нахождении решения $u(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего следующим условиям: в случае первой краевой задачи $u(x) \in C^2(\alpha, \beta) \cap C([\alpha, \beta])$ и

$$u|_{x=\alpha} = \varphi_0, \quad u|_{x=\beta} = \varphi_1, \tag{2}$$

в случае третьей (второй) краевой задачи $u(x) \in C^2(\alpha, \beta) \cap \cap C^1([\alpha, \beta])$ и

$$(-u_x + \sigma_0 u)|_{x=\alpha} = \varphi_0, \quad (u_x + \sigma_1 u)|_{x=\beta} = \varphi_1. \tag{3}$$

Здесь $k(x) \in C^1([\alpha, \beta])$, $a(x) \in C([\alpha, \beta])$, $f(x)$ — заданные функции, $k(x) \geqslant k_0 > 0$; σ_0, σ_1, φ_0, φ_1 — заданные постоянные.

Обобщенное решение задачи (1), (2) ($f \in L_2(\alpha, \beta)$) есть функция $u(x)$ из $H^1(\alpha, \beta)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_\alpha^\beta (ku'v' + auv)\,dx = -\int_\alpha^\beta fv\,dx \tag{4}$$

при всех $v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$ и граничным условиям (2).

Обобщенное решение задачи (1), (3) ($f \in L_2(\alpha, \beta)$) есть функция $u(x)$ из $H^1(\alpha, \beta)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_\alpha^\beta (ku'v' + auv)\,dx + k(\beta)\sigma_1 u(\beta)v(\beta) + k(\alpha)\sigma_0 u(\alpha)v(\alpha) =$$

$$= -\int_\alpha^\beta fv\,dx + k(\beta)\varphi_1 v(\beta) + k(\alpha)\varphi_0 v(\alpha) \tag{5}$$

при всех $v \in H^1(\alpha, \beta)$.

Справедливо следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Если $f \in C([\alpha, \beta])$, то функция $u(x)$ из $H^1(\alpha, \beta)$, удовлетворяющая интегральному тождеству* (4) *при всех $v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$, принадлежит пространству $C^2([\alpha, \beta])$ и является в интервале (α, β) решением уравнения* (1).

Так как функция $u(x) \in C([\alpha, \beta])$ ($H^1(\alpha, \beta) \subset C([\alpha, \beta])$), то $f + au \in C([\alpha, \beta])$ и $\int_0^x (f(\xi) + a(\xi)u(\xi))\,d\xi \in C^1([\alpha, \beta])$. Рассмотрим функцию $u_0(x) = \int_0^x \frac{d\eta}{k(\eta)} \int_0^\eta (f(\xi) + a(\xi)u(\xi))\,d\xi$. В силу условий на $k(x)$ функция $u_0(x) \in C^2([\alpha, \beta])$ и, кроме того, она является на (α, β) решением дифференциального уравнения $(ku_0')' = f(x) + a(x)u(x)$. Следовательно, при любой $v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$ функция $u_0(x)$ удовлетворяет равенству

$$\int_\alpha^\beta (ku_0'v' + auv)\,dx = -\int_\alpha^\beta fv\,dx;$$

значит, принадлежащая $H^1(\alpha, \beta)$ функция $u_1 = u - u_0$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\alpha^\beta ku_1'v'\,dx = 0, \qquad v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta),$$

из которого вытекает, что функция ku_1' имеет на (α, β) обобщенную производную, равную нулю. Следовательно, $ku_1' = \text{const}$, т. е. $u_1 \in C^2([\alpha, \beta])$. Поэтому и функция $u(x) \in C^2([\alpha, \beta])$.

Так как для всех $v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$ $\int\limits_\alpha^\beta ku'v'\,dx = -\int\limits_\alpha^\beta (ku')'v\,dx$, то из (4) вытекает, что непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция $(ku')' - a(x)u(x) - f(x)$ ортогональна (в скалярном произведении $L_2(\alpha, \beta)$) любой функции из $\mathring{H}^1(\alpha, \beta)$. Поэтому функция $u(x)$ является в (α, β) решением уравнения (1). Лемма доказана.

Обобщенное решение $u(x)$ любой из краевых задач, первой, второй или третьей, принадлежит $H^1(\alpha, \beta)$ и для него имеет место тождество (4) при всех $v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$. Поэтому в силу леммы 1 $u(x) \in C^2([\alpha, \beta])$ и $u(x)$ является в (α, β) решением уравнения (1).

Таким образом, мы показали, что при $f \in C([\alpha, \beta])$ обобщенные решения рассматриваемых краевых задач имеют на отрезке $[\alpha, \beta]$ непрерывные производные до второго порядка включительно и удовлетворяют уравнению (1). При этом очевидно, что в случае первой краевой задачи функция $u(x)$ удовлетворяет граничным условиям (2). В случае третьей (второй) краевой задачи для любой функции $v(x) \in H^1(\alpha, \beta)$

$$\int\limits_\alpha^\beta ku'v'\,dx = -\int\limits_\alpha^\beta (ku')'v\,dx + k(\beta)u'(\beta)v(\beta) - k(\alpha)u'(\alpha)v(\alpha).$$

Значит, в силу тождества (5)

$$k(\beta)(u'(\beta) + \sigma_1 u(\beta) - \varphi_1)v(\beta) + k(\alpha)(-u'(\alpha) + \sigma_0 u(\alpha) - \varphi_0)v(\alpha) = 0$$

при любых $v(\beta)$ и $v(\alpha)$ (напомним, что при любых $v(\alpha)$ и $v(\beta)$ существует функция $v(x)$ из $H^1(\alpha, \beta)$, принимающая при $x = \alpha$ и $x = \beta$ значения $v(\alpha)$ и $v(\beta)$). Поэтому функция $u(x)$ удовлетворяет граничным условиям (3).

Итак, доказана

Теорема 1. *Если функция $f(x) \in C([\alpha, \beta])$, то обобщенные решения первой, второй и третьей краевых задач для уравнения* (1) *принадлежат $C^2([\alpha, \beta])$ и являются классическими решениями соответствующих задач.*

Пусть $u_s(x)$ — обобщенная собственная функция, например, третьей (второй) краевой задачи для оператора $\mathcal{L}$. Это означает, что $u_s(x) \in H^1(\alpha, \beta)$ и, тем самым, $u_s(x) \in C([\alpha, \beta])$, и для нее при любой $v \in H^1(\alpha, \beta)$ выполняется равенство

$$\int\limits_\alpha^\beta (ku_s'v' + au_sv)\,dx + k(\beta)\sigma_1 u_s(\beta)v(\beta) + k(\alpha)\sigma_0 u_s(\alpha)v(\alpha) = -\lambda_s \int\limits_\alpha^\beta u_sv\,dx,$$

где λ_s — собственное значение. Согласно теореме 1 функция $u_s(x)$ принадлежит $C^2([\alpha, \beta])$ и является классическим решением уравнения

$$\mathcal{L}u = (ku')' - au = \lambda_s u, \qquad x \in (\alpha, \beta), \tag{6}$$

удовлетворяющим однородным граничным условиям (3), т. е. $u_s(x)$ есть классическая собственная функция третьей (второй) краевой задачи для оператора $\mathcal{L}$.

Аналогично показывается, что обобщенная собственная функция $u_s(x)$ первой краевой задачи принадлежит $C^2([\alpha, \beta])$ и является классической собственной функцией этой задачи.

Докажем, что собственные значения любой из рассматриваемых краевых задач однократны. Пусть существует собственное значение λ_s, например, третьей краевой задачи, которому отвечают две линейно независимые собственные функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$.

Как известно, общее решение уравнения (6) имеет вид $C_1u^{(1)} + C_2u^{(2)}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Это означает, что любое решение уравнения (6) должно удовлетворять граничному условию $u'(\alpha) - \sigma_0 u(\alpha) = 0$, поскольку обе функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ удовлетворяют этому граничному условию. А вместе с тем существует решение уравнения (6), не удовлетворяющее этому условию, например, решение с начальными условиями $u(\alpha) = 0$, $u'(\alpha) = 1$.

Таким образом, установлена

Теорема 2. *Обобщенные собственные функции первой, второй и третьей краевых задач для оператора $\mathcal{L}$ принадлежат $C^2([\alpha, \beta])$ и являются классическими собственными функциями соответствующих краевых задач. Все собственные значения однократны.*

2. Внутренняя гладкость обобщенных решений. Перейдем теперь к исследованию гладкости обобщенных решений краевых задач в случае $n > 1$. Для того чтобы технические детали не мешали выяснению существа дела, ограничимся рассмотрением частного случая уравнения (1) предыдущего параграфа — изучим гладкость обобщенных решений краевых задач для уравнения Пуассона ($k \equiv 1$, $a \equiv 0$)

$$\Delta u = f. \tag{7}$$

Напомним, что обобщенным решением первой краевой задачи для уравнения (7) является функция $u(x)$ из $H^1(Q)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_Q \nabla u \cdot \nabla v \, dx = -\int_Q fv \, dx \tag{8}$$

при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$ и граничному условию $u|_{\partial Q} = \varphi$ (функция $f \in L_2(Q)$, а функция φ является следом некоторой функции Φ из $H^1(Q)$, т. е. существует такая функция $\Phi \in H^1(Q)$, что $\Phi|_{\partial Q} = \varphi$).

Обобщенным решением третьей (второй) краевой задачи для уравнения (7) является функция $u(x)$ из $H^1(Q)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int_Q \nabla u \nabla v\, dx + \int_{\partial Q} \sigma uv\, dS = -\int_Q fv\, dx + \int_{\partial Q} \varphi v\, dS \tag{9}$$

при всех $v \in H^1(Q)$ (функция $f \in L_2(Q)$, а $\varphi \in L_2(\partial Q)$).

Из результатов предыдущего параграфа вытекает, что обобщенное решение $u(x)$ первой краевой задачи существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\left(\|f\|_{L_2(Q)} + \inf_{\substack{\Phi \in H^1(Q)\\ \Phi|_{\partial Q} = \varphi}} \|\Phi\|_{H^1(Q)}\right) \tag{10}$$

с постоянной C, не зависящей от f и φ.

Обобщенное решение $u(x)$ третьей краевой задачи при $\sigma \geqslant 0$, $\sigma \not\equiv 0$, тоже существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}) \tag{11}$$

с постоянной C, не зависящей от f и φ.

В случае второй краевой задачи ($\sigma \equiv 0$) будем предполагать выполненным условие ее разрешимости: $-\int_Q f\, dx + \int_{\partial Q} \varphi\, dS = 0$. Тогда в классе функций, ортогональных в скалярном произведении $L_2(Q)$ постоянным, существует единственное обобщенное решение $u(x)$ второй краевой задачи и для него имеет место неравенство (11). Так как все другие обобщенные решения отличаются от функции $u(x)$ постоянными слагаемыми, то при изучении гладкости обобщенных решений второй краевой задачи можно ограничиться исследованием функции $u(x)$.

Лемма 2. *Пусть $f \in L_2(Q) \cap H^k_{\mathrm{loc}}(Q)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, а функция $u \in H^1(Q)$ и удовлетворяет интегральному тождеству* (8) *при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Тогда $u \in H^{k+2}_{\mathrm{loc}}(Q)$ и для любой пары подобластей Q' и Q'' области Q таких, что $Q' \Subset Q'' \Subset Q$, имеет место неравенство*

$$\|u\|_{H^{k+2}(Q')} \leqslant C(\|f\|_{H^k(Q'')} + \|u\|_{H^1(Q'')}) \tag{12}$$

с положительной постоянной $C = C(k, Q', Q'')$.

Доказательство. Пусть Q' и Q'' — произвольные подобласти области Q такие, что $Q' \Subset Q'' \Subset Q$. Обозначим через $\delta > 0$ расстояние между границами $\partial Q'$ и $\partial Q''$ и рассмотрим функцию $\zeta(x)$, обладающую следующими свойствами: $\zeta(x) \in C^\infty(R_n)$, $\zeta(x) \equiv 1$ в Q''_δ (и, тем самым, в Q'), $\zeta(x) \equiv 0$ вне $Q''_{2\delta/3}$.

Подставим в тождество (8) в качестве функции $v(x)$ функцию $\zeta(x) v_0(x)$, где $v_0(x)$ — произвольная функция из $H^1(Q'')$, продолженная нулем вне Q'' (очевидно, $\zeta(x) v_0(x) \in \mathring{H}^1(Q)$). Так как

$\nabla u\,\nabla v = \nabla u\,\nabla(\zeta v_0) = \nabla u\,(\nabla\zeta\cdot v_0 + \zeta\,\nabla v_0) = \nabla u\cdot\nabla\zeta\cdot v_0 + \nabla(\zeta u)\,\nabla v_0 - u\,\nabla\zeta\,\nabla v_0$, то тождество (8) принимает вид

$$\int\limits_{Q''} \nabla U\,\nabla v_0\,dx = \int\limits_{Q''} F v_0\,dx + \int\limits_{Q''} u\,\nabla\zeta\,\nabla v_0\,dx, \tag{13_0}$$

где функция

$$U(x) = \zeta(x)\,u(x) \tag{14}$$

принадлежит $H^1(Q'')$, обращается в нуль вне $Q''_{2\delta/3}$ и совпадает с $u(x)$ в Q''_{δ}, а функция

$$F(x) = -f\zeta - \nabla u\cdot\nabla\zeta \tag{15}$$

принадлежит $L_2(Q'')$ и обращается в нуль вне $Q''_{2\delta/3}$.

Отметим, что на самом деле интегрирование в (13_0) производится по области $Q''_{2\delta/3}$. Поэтому это равенство имеет место не только для любой $v_0 \in H^1(Q'')$, но и для любой $v_0 \in H^1(Q''_{\delta/2})$ (произвольно продолженной вне $Q''_{\delta/2}$, как элемент $L_2(Q'')$).

Возьмем произвольную функцию $v_1(x)$, принадлежащую $H^1(Q'')$ и продолженную нулем вне Q''. Для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ и произвольного h, $0 < |h| < \delta/2$, конечно-разностное отношение $\delta^i_{-h} v_1(x) = \dfrac{v_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i - h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - v_1(x)}{-h}$ является функцией из $H^1(Q''_{\delta/2}) \cap L_2(Q'')$. Положим в (13_0) $v_0 = \delta^i_{-h} v_1(x)$ при некотором $i = 1, 2, \ldots, n$ и некотором h, $0 < |h| < \delta/2$. С помощью формулы «интегрирования по частям» (формула (9) п. 4 § 3 гл. III) получим равенство

$$\int\limits_{Q''} \nabla\delta^i_h U \nabla v_1\,dx = -\int\limits_{Q''_{2\delta/3}} F\delta^i_{-h} v_1\,dx + \int\limits_{Q''} \delta^i_h(u\nabla\zeta)\,\nabla v_1\,dx. \tag{16_0}$$

Докажем сначала утверждение леммы при $k = 0$. Из (15) немедленно вытекает оценка

$$\|F\|_{L_2(Q'')} \leqslant C'(Q', Q'')\,(\|f\|_{L_2(Q'')} + \|u\|_{H^1(Q'')}).$$

Поэтому из (16_0) с помощью теоремы 3 п. 4 § 3 гл. III получаем неравенства

$$\left|\int\limits_{Q''} \nabla\delta^i_h U \nabla v_1\,dx\right| \leqslant (\|F\|_{L_2(Q'')} + C\,\|u\|_{H^1(Q'')})\,\|\,|\nabla v_1|\,\|_{L_2(Q'')} \leqslant$$
$$\leqslant C(Q', Q'')\,(\|f\|_{L_2(Q'')} + \|u\|_{H^1(Q'')})\,\|\,|\nabla v_1|\,\|_{L_2(Q'')}.$$

Полагая $v_1 = \delta^i_h U$ (считаем функцию U продолженной нулем вне Q), получим, что

$$\|\,|\nabla\delta^i_h U|\,\|_{L_2(Q'')} \leqslant C(Q', Q'')\,(\|f\|_{L_2(Q'')} + \|u\|_{H^1(Q'')})$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, $0 < |h| < \delta/2$.

Согласно теореме 3 п. 4 § 3 гл. III из этого неравенства вытекает, что $U \in H^2(Q'')$ и $\|U\|_{H^2(Q'')} \leqslant C(Q', Q'')(\|f\|_{L_2(Q'')} + \|u\|_{H^1(Q'')})$. Так как в области Q' $U = u$, то $u \in H^2(Q')$, и имеет место неравенство (12) при $k = 0$. Поскольку Q' — произвольная строго внутренняя подобласть области Q, то $u \in H^2_{\text{loc}}(Q)$.

Пусть теперь $f \in H^{m+1}_{\text{loc}}(Q)$. Предположим, что функция $u(x)$ обладает следующими свойствами: $u \in H^{m+2}_{\text{loc}}(Q)$, для любой пары подобластей Q_1 и Q_2 области Q таких, что $Q_1 \Subset Q_2 \Subset Q$, имеет место неравенство (12) при $k = m$:

$$\|u\|_{H^{m+2}(Q_1)} \leqslant C(m, Q_1, Q_2)(\|f\|_{H^m(Q_2)} + \|u\|_{H^1(Q_2)}) \qquad (12_m)$$

и для любых α, $|\alpha| \leqslant m$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $0 < |h| < \delta/2$ справедливо равенство

$$\int_{Q''} \nabla\delta_h^i (D^\alpha U) \nabla v_{m+1}\, dx =$$

$$= -\int_{Q''_{2\delta/3}} D^\alpha F \delta_{-h}^i v_{m+1}\, dx + \int_{Q''} \delta_h^i (D^\alpha (u\nabla\zeta)) \nabla v_{m+1}\, dx, \qquad (16_m)$$

где v_{m+1} — произвольная функция из $H^1(Q'')$. Отметим, что при $m = 0$ указанные свойства уже установлены.

Так как в силу сделанных предположений из (14) и (15) следует, что $D^\alpha U \in H^2(Q'')$, а $D^\alpha F \in H^1(Q'')$, то на основании теоремы 3 п. 4 § 3 гл. III в (16_m) можно перейти к пределу при $h \to 0$. В результате для любых α, $|\alpha| = m$, $i = 1, 2, \ldots, n$ получим равенство

$$\int_{Q''} \nabla D^\alpha U_{x_i} \nabla v_{m+1}\, dx = -\int_{Q''_{2\delta/3}} D^\alpha F (v_{m+1})_{x_i}\, dx + \int_{Q''} D^\alpha (u\nabla\zeta)_{x_i} \nabla v_{m+1}\, dx,$$

из которого следует (функция $D^\alpha F$ равна нулю вне $Q''_{2\delta/3}$), что при всех $v_{m+1} \in H^1(Q'')$

$$\int_{Q''} \nabla D^\alpha U_{x_i} \nabla v_{m+1}\, dx = \int_{Q''} D^\alpha F_{x_i} v_{m+1}\, dx + \int_{Q''} D^\alpha (u\nabla\zeta)_{x_i} \nabla v_{m+1}\, dx. \qquad (13_{m+1})$$

Это равенство совпадает с (13_0), если в нем заменить $D^\alpha U_{x_i}$ на U, $D^\alpha F_{x_i}$ на F, $D^\alpha (u\nabla\zeta)_{x_i}$ на $u\nabla\zeta$ и v_{m+1} на v_0. При этом $D^\alpha U_{x_i} \in H^1(Q'')$, обращается в нуль вне $Q''_{2\delta/3}$ и совпадает с $D^\alpha u_{x_i}$ в Q''_δ, а $D^\alpha F_{x_i} \in L_2(Q'')$ и обращается в нуль вне $Q''_{2\delta/3}$. Так как интегрирование в (13_{m+1}) на самом деле производится по области $Q''_{2\delta/3}$, то в это равенство можно подставить $v_{m+1}(x) = \delta_{-h}^j v_{m+2}(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $0 < |h| < \delta/2$, где v_{m+2} — произвольная функция из

$H^1(Q'')$. В результате получим

$$\int\limits_{Q''} \nabla\delta_h^i\left(D^\alpha U_{x_i}\right)\nabla v_{m+2}\,dx =$$
$$= -\int\limits_{Q''} D^\alpha F_{x_i}\delta_{-h}^i v_{m+2}\,dx + \int\limits_{Q''} \delta_h^i\left(D^\alpha\,(u\nabla\zeta)_{x_i}\right)\nabla v_{m+2}\,dx. \qquad (16_{m+1})$$

Используя неравенство (12_m) (в нем положим $Q_1 = Q''_{2\delta/3}$, а $Q_2 = Q''$), из (15) имеем

$$\|F\|_{H^{m+1}(Q'')} \leqslant C_1\left(\|f\|_{H^{m+1}(Q'')} + \|u\|_{H^{m+2}(Q''_{2\delta/3})}\right) \leqslant$$
$$\leqslant C_2\left(\|f\|_{H^{m+1}(Q'')} + \|u\|_{H^1(Q'')}\right).$$

Подставляя теперь в (16_{m+1}) $v_{m+2} = \delta_h^i\left(D^\alpha U_{x_i}\right)$, снова в силу теоремы 3 п. 4 § 3 гл. III получим, что $u \in H^{m+3}_{\text{loc}}(Q)$ и для $u(x)$ справедливо неравенство (12) при $k = m+1$. Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Пусть $f \in L_2(Q)$, а функция $u \in H^1(Q)$ и удовлетворяет интегральному тождеству* (8) *при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Тогда функция $u(x)$ (п. в.) в Q удовлетворяет уравнению* (7).

Нам нужно доказать, что сумма обобщенных вторых производных $u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n}$ (мы только что показали, что эти производные существуют) почти всюду в Q равна функции f. Подставим в качестве функции $v(x)$ в (8) произвольную функцию из $\mathring{H}^1(Q')$, $Q' \Subset Q$, продолженную нулем вне Q'. Так как $u \in H^2(Q')$, то на основании формулы Остроградского $\int\limits_{Q'} (\Delta u - f)\,v\,dx = 0$, откуда $\Delta u - f = 0$ (п. в) в Q', а значит, и (п. в.) в Q.

Так как обобщенные решения $u(x)$ первой, второй и третьей краевых задач для уравнения (7) удовлетворяют условиям леммы 2 и неравенствам (10) или (11) (решение $u(x)$ второй краевой задачи предполагается ортогональным в $L_2(Q)$ постоянным), то из леммы 2 и теоремы 2 п. 2 § 6 гл. III вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Если $f \in L_2(Q) \cap H^k_{\text{loc}}(Q)$, где $k \geqslant 0$, то обобщенные решения $u(x)$ первой, второй и третьей краевых задач для уравнения* (7) *принадлежат $H^{k+2}_{\text{loc}}(Q)$ и (п. в.) в Q удовлетворяют уравнению* (7). *Для любых подобластей Q' и Q'' области Q, $Q' \Subset Q'' \Subset Q$, существует такая положительная постоянная C, зависящая от Q', Q'' и k, что*

$$\|u\|_{H^{k+2}(Q')} \leqslant C\left(\|f\|_{H^k(Q'')} + \|f\|_{L_2(Q)} + \inf_{\substack{\Phi \in H^1(Q)\\ \Phi|_{\partial Q} = \varphi}} \|\Phi\|_{H^1(Q)}\right)$$

в случае первой краевой задачи и

$$\|u\|_{H^{k+2}(Q')} \leqslant C\left(\|f\|_{H^k(Q'')} + \|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}\right)$$

в случае второй и третьей краевых задач (в случае второй краевой задачи считаем, что $\int\limits_Q u\,dx = 0$).

Если $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] - 1$, *то* $u(x) \in C^{k+1-\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$. *В частности, если* $f \in L_2(Q) \cap C^\infty(Q)$, *то* $u(x) \in C^\infty(Q)$.

Из теоремы 3 следует, что гладкость обобщенных решений краевых задач для уравнения (7) внутри области Q не зависит ни от типа граничных условий, ни от гладкости границы, ни от гладкости граничной функции. Внутренняя гладкость зависит лишь от гладкости правой части $f(x)$ уравнения. Полученный результат является предельно точным: гладкость решения выше гладкости правой части на величину порядка уравнения.

Замечание. В одномерном случае было, в частности, доказано, что если правая часть уравнения (7) непрерывна, то обобщенные решения имеют непрерывные производные до второго порядка включительно. Аналогичное утверждение в многомерном случае не справедливо. Далее (в п. 3 следующего параграфа) будет приведен пример такой непрерывной в $\bar{Q}$ функции $f(x)$, что обобщенное решение первой краевой задачи для уравнения Пуассона (7) не принадлежит $C^2(Q)$ (конечно, оно принадлежит $H^2_{\text{loc}}(Q)$).

3. Гладкость обобщенных решений краевых задач. В предыдущем пункте была установлена внутренняя гладкость обобщенных решений, т. е. принадлежность решений пространствам $H^k_{\text{loc}}(Q)$ или $C^l(Q)$ при некоторых k и l. Здесь мы будем изучать гладкость обобщенных решений краевых задач во всей области Q, т. е. принадлежность решений пространствам $H^k(Q)$ или $C^l(\bar{Q})$. Естественно, что гладкость решения «вплоть до границы» зависит от гладкости границы и гладкости граничных функций.

Будем предполагать, что граница $\partial Q \in C^{k+2}$ при некотором $k \geqslant 0$.

Рассмотрим сначала случай однородных граничных условий. Обобщенные решения первой или второй краевых задач *) с однородными граничными условиями (функция φ — правая часть в граничных условиях — равна нулю) для уравнения (7) — это функции из пространств $\mathring{H}^1(Q)$ или $H^1(Q)$, удовлетворяющие интегральному тождеству (8) при всех v из $\mathring{H}^1(Q)$ или $H^1(Q)$ соответственно (в случае второй краевой задачи функции f и u предполагаем ортогональными в скалярном произведении $L_2(Q)$ постоянным).

---

*) Для простоты мы ограничиваемся рассмотрением решений первой и второй краевых задач. Исследование гладкости обобщенных решений третьей краевой задачи при некоторых требованиях на функцию $\sigma(x)$ (из (9)) может быть проведено тем же методом.

Теорема 4. *Если $f \in H^k(Q)$, а $\partial Q \in C^{k+2}$ при некотором $k \geq 0$, то обобщенные решения $u(x)$ первой и второй краевых задач с однородными граничными условиями для уравнения Пуассона* (7) *принадлежат $H^{k+2}(Q)$ и удовлетворяют (в случае второй краевой задачи считаем, что $\int\limits_Q u\,dx = 0$) неравенству*

$$\|u\|_{H^{k+2}(Q)} \leq C\|f\|_{H^k(Q)} \tag{17}$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от f *).

Пусть x^0 — произвольная точка границы ∂Q. Выберем систему координат так, чтобы точка x^0 была началом координат, а нормаль к границе в этой точке имела направление оси Ox_n. Возьмем столь малое число $r = r(x^0)$, что кусок границы $\partial Q \cap (|x| < 4r)$ является связным множеством, однозначно проектирующимся вдоль оси Ox_n на некоторую область D плоскости $x_n = 0$; уравнение поверхности $\partial Q \cap (|x| < 4r)$ имеет вид

$$x_n = \psi(x'), \qquad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D,$$

где $\psi(x')$ — функция из $C^{k+2}(\overline{D})$, $\psi(0) = 0$, $\psi_{x_1}(0) = \ldots = \psi_{x_{n-1}}(0) = 0$, причем выполнены неравенства

$$|\psi_{x_i}| \leq \frac{1}{2n}, \qquad i = 1, \ldots, n-1, \; x' \in \overline{D}. \tag{18}$$

Тогда область $\Omega = Q \cap (|x| < 3r)$ и, тем самым, ее подобласть $\Omega' = Q \cap (|x| < r)$ проектируются вдоль оси Ox_n в D.

Обозначим через Γ общую часть границ областей Q и Ω, $\Gamma = \partial Q \cap (|x| < 3r)$, а через Γ_0 — остальную часть границы области Ω. Множество функций из $H^1(\Omega)$, след которых на Γ равен нулю, обозначим через $\mathring{H}^1_\Gamma(\Omega)$.

Пусть функция $\zeta(x) \in C^\infty(R_n)$, $\zeta(x) \equiv 1$ для $|x| < r$, $\zeta(x) \equiv 0$ для $|x| > 2r$. Тогда при произвольной функции $v_0(x)$ из $\mathring{H}^1_\Gamma(\Omega)$ (из $H^1(\Omega)$) функция $v(x)$, равная в Ω функции $\zeta(x) v_0(x)$ и нулю в остальных точках области Q, принадлежит $\mathring{H}^1(Q)$ ($H^1(Q)$). Подставляя эту функцию $v(x)$ в (8), как и в предыдущем пункте, получим равенство

$$\int\limits_\Omega \nabla U \nabla v_0\,dx = \int\limits_\Omega F v_0\,dx + \int\limits_\Omega u \nabla\zeta\nabla v_0\,dx, \tag{19}$$

где в случае первой краевой задачи v_0 — произвольная функция из $\mathring{H}^1_\Gamma(\Omega)$, в случае второй краевой задачи v_0 — произвольная

*) Для функции $u(x)$, являющейся обобщенным решением третьей краевой задачи для уравнения (7) с однородным граничным условием, имеет место следующее утверждение: *если $f \in H^k(Q)$, $\partial Q \in C^{k+2}$ и $\sigma(x) \in C^{k+1}(\partial Q)$ ($\sigma \geq 0$) при некотором $k \geq 0$, то $u(x) \in H^{k+2}(Q)$ и выполняется неравенство* (17).

функция из $H^1(\Omega)$, а функции $F(x)$ и $U(x)$ определяются равенствами (14) и (15) с только что введенной функцией $\zeta(x)$. Очевидно, что $U(x) \in H^1(\Omega)$, $F(x) \in L_2(\Omega)$.

Преобразование

$$y_i = x_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \qquad y_n = x_n - \psi(x') \tag{20}$$

взаимно однозначно с единичным якобианом отображает области Ω и Ω' на некоторые области ω и ω'.

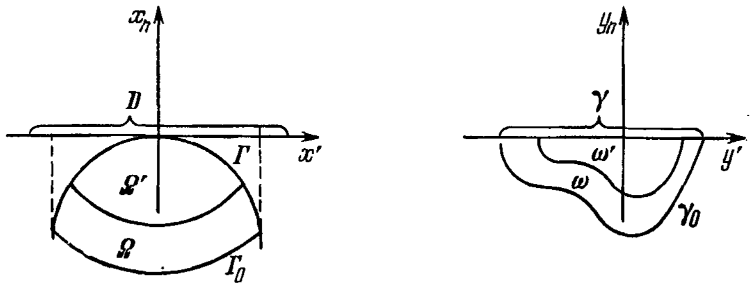

Рис. 1.

Образы поверхностей Γ и Γ_0 обозначим через γ и γ_0 соответственно. Заданные в области Ω функции $U(x)$, $u(x)$, ... в результате преобразования (20) перейдут в функции $U(y)$, $u(y)$, ... (сохраним за ними прежние обозначения), заданные в области ω. При этом $U(y) = u(y)$ в ω' и при некотором $\delta > 0$ функции $U(y)$ и $F(y)$ равны нулю в точках множества $\omega \setminus \tilde{\omega}_\delta$, где $\tilde{\omega}_\delta$ — подобласть области ω, состоящая из всех точек, которые отстоят от γ_0 на расстоянии, большем δ.

Поскольку при $x \in \Omega$ $(y \in \omega)$ $U_{x_i} = U_{y_i} - U_{y_n}\psi_{x_i}$ для $i = 1, \ldots$ $\ldots, n-1$ и $U_{x_n} = U_{y_n}$, то

$$\nabla_x U \nabla_x v_0 = \nabla_y U \nabla_y v_0 - \sum_{i=1}^{n-1} (U_{y_i} v_{0y_n} + U_{y_n} v_{0y_i}) \psi_{x_i} + U_{y_n} v_{0y_n} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{x_i}^2,$$

и поэтому равенство (19) в новых переменных имеет вид

$$\int_\omega \nabla_y U \nabla_y v_0 \, dy = \int_\omega F v_0 \, dy + \int_\omega \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} U_{y_i} v_{0y_j} \, dy + {}$$
$$+ \int_\omega \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} \zeta_{y_j} u v_{0y_i} \, dy, \tag{21_0}$$

где $A_{in} = A_{ni} = \psi_{x_i}$ при $i = 1, \ldots, n-1$, $A_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} \psi_{x_i}^2$, $A_{ij} = 0$ для всех остальных i и j; $B_{ij} = \delta_{ij} - A_{ij}$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Очевидно, что $A_{ij} \in C^{k+1}(\bar{\omega})$, $B_{ij} \in C^{k+1}(\bar{\omega})$

при всех i и j; кроме того, в силу (18)

$$|A_{ij}(y)| \leqslant \frac{1}{2n}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \ y \in \bar{\omega}. \tag{22}$$

Так как функции $U(y)$ и $F(y)$ равны нулю в $\omega \setminus \tilde{\omega}_{\delta/2}$, то равенство (21_0) имеет место не только для любой $v_0(y)$ из $\overset{\circ}{H}{}^1_\gamma(\omega)$ или из $H^1(\omega)$, но и для любой $v_0(y)$ из $\overset{\circ}{H}{}^1_\gamma(\tilde{\omega}_{\delta/2})$ (произвольно продолженной вне $\tilde{\omega}_{\delta/2}$ как функция из $L_2(\omega)$) или соответственно из $H^1(\tilde{\omega}_{\delta/2})$ (произвольно продолженной вне $\tilde{\omega}_{\delta/2}$ как функция из $L_2(\omega)$).

Возьмем любую функцию $v_1(y)$, принадлежащую $\overset{\circ}{H}{}^1_\gamma(\omega)$ $(H^1(\omega))$ и продолженную нулем вне ω, и положим в (21_0) $v_0 = \delta^l_{-h} v_1$ при некоторых $l < n$ и $0 < |h| < \delta/2$ (функция $v_0(y)$, очевидно, принадлежит $\overset{\circ}{H}{}^1_\gamma(\tilde{\omega}_{\delta/2}) \cap L_2(\omega)$, и соответственно $H^1(\tilde{\omega}_{\delta/2}) \cap L_2(\omega)$). Равенство (21_0) примет вид

$$\int_\omega \nabla_y(\delta^l_h U)\nabla_y v_1\,dy = -\int_\omega F\delta^l_{-h} v_1\,dy + \\ + \int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta^l_h (A_{ij}U_{y_i})\, v_{1y_j}\,dy + \int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta^l_h (B_{ij}\zeta_{y_j} u)\, v_{1y_i}\,dy \tag{23_0}$$

(заметим, что интегрирование в этом равенстве производится не по всей области ω, а по ее подобласти $\tilde{\omega}_{\delta/2}$; поэтому все подынтегральные выражения в (23_0) определены).

Из теоремы 4 п. 4 § 3 гл. III вытекает, что

$$\left|\int_\omega F\delta^l_{-h} v_1\,dy\right| \leqslant \|F\|_{L_2(\omega)} \left\| v_{1y_l} \right\|_{L_2(\omega)} \leqslant \|F\|_{L_2(\omega)} \|\,|\nabla v_1|\,\|_{L_2(\omega)}. \tag{24_0}$$

Прежде чем оценить второй интеграл в правой части (23_0), разобьем его на два слагаемых

$$\int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta^l_h\left(A_{ij}U_{y_i}\right) v_{1y_j}\,dy = \int_\omega \sum_{i,j=1}^n (A_{ij})^l_h \delta^l_h U_{y_i} v_{1y_j}\,dy + \\ + \int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta^l_h (A_{ij})\, U_{y_i} v_{1y_j}\,dy. \tag{25_0}$$

При этом мы воспользовались справедливым для произвольных функций f и g равенством

$$\delta^l_h(fg) = g^l_h \delta^l_h f + f\delta^l_h g,$$

где $g^l_h(y) = g(y_1, \ldots, y_{l-1}, y_l + h, y_{l+1}, \ldots, y_n)$.

Первое слагаемое оценим, используя (22),

$$\left|\int\limits_{\omega}\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij})_h^l\,\delta_h^l U_{y_i} v_{1y_j}\,dy\right| \leqslant \frac{1}{2n}\int\limits_{\omega}\left(\sum_{i=1}^{n}|\delta_h^l U_{y_i}|\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|v_{1y_j}|\right)dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2n}\int\limits_{\omega}\sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(\delta_h^l U_{y_i})^2\right)^{1/2}\cdot\sqrt{n}\left(\sum_{j=1}^{n}v_{1y_j}^2\right)^{1/2}dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\,\|\,|\nabla\delta_h^l U|\,\|_{L_2(\omega)}\,\|\,|\nabla v_1|\,\|_{L_2(\omega)}. \qquad (26_0)$$

Второе слагаемое в (25_0) оценим вместе с третьим интегралом из правой части равенства (23_0). Поскольку функции A_{ij} и B_{ij} непрерывно дифференцируемы в $\bar{\omega}$, то

$$\left|\int\limits_{\omega}\sum_{i,j=1}^{n}(\delta_h^l A_{ij})\,U_{y_i}v_{1y_j}\,dy + \int\limits_{\omega}\sum_{i,j=1}^{n}\delta_h^l(B_{ij}\zeta_{y_j}u)\,v_{1y_j}\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1\|u\|_{H^1(\Omega)}\,\|\,|\nabla v_1|\,\|_{L_2(\omega)} \leqslant C_1\|u\|_{H^1(Q)}\,\|\,|\nabla v_1|\,\|_{L_2(\omega)}, \qquad (27_0)$$

где постоянная C_1 не зависит от u и v_1.

Из (23_0) в силу $(24_0)-(27_0)$ имеем

$$\left|\int\limits_{\omega}\nabla(\delta_h^l U)\,\nabla v_1\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\|F\|_{L_2(\omega)} + \frac{1}{2}\|\,|\nabla\delta_h^l U|\,\|_{L_2(\omega)} + C_1\|u\|_{H^1(Q)}\right)\|\,|\nabla v_1|\,\|_{L_2(\omega)}. \qquad (28_0)$$

Полагая в этом неравенстве $v_1=\delta_h^l U$, с помощью вытекающего из (15) неравенства

$$\|F(y)\|_{L_2(\omega)} = \|F(x)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_2\left(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{H^1(Q)}\right) \qquad (29_0)$$

(постоянная C_2 зависит лишь от функции ζ, т. е. лишь от области Q) и неравенства (10), или неравенства (11), в которых $\varphi=0$ (тогда в (10) $\inf\|\Phi\|_{H^1(Q)}=0$), получим оценку

$$\|\,|\nabla\delta_h^l U|\,\|_{L_2(\omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}, \qquad l=1,\ \ldots,\ n-1,$$

из которой в свою очередь следует (теорема 4 п. 4 § 3 гл. III), что все обобщенные вторые производные функции U, кроме производной $U_{y_n y_n}$, принадлежат $L_2(\omega)$ и для них имеет место неравенство $\|U_{y_i y_j}\|_{L_2(\omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}$. Значит, для соответствующих производных функции $u(y)$ имеем неравенства

$$\|u_{y_i y_j}\|_{L_2(\omega')} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}.$$

Для оценки $u_{y_n y_n}$ в ω' воспользуемся следствием из леммы 2, согласно которому п. в. в Q, а тем самым, и п. в. в Ω' $\Delta_x u=f$.

В новых переменных это равенство выглядит так:

$$\Delta_y u(y) - 2\sum_{i=1}^{n-1} u_{y_i y_n}\psi_{x_i} + u_{y_n y_n}\sum_{i=1}^{n-1}\psi_{x_i}^2 - u_{y_n}\sum_{i=1}^{n-1}\psi_{x_i x_i} = f(y),$$

откуда для всех $y \in \omega'$

$$\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\psi_{x_i}^2\right)u_{y_n y_n} = \\ = f(y) + 2\sum_{i=1}^{n-1} u_{y_i y_n}\psi_{x_i} - \sum_{i=1}^{n-1} u_{y_i y_i} + u_{y_n}\sum_{i=1}^{n-1}\psi_{x_i x_i}. \qquad (30)$$

Так как $\psi \in C^{k+2}(\bar{D})$ при $k \geqslant 0$, то $u_{y_n y_n} \in L_2(\omega')$ и

$$\|u_{y_n y_n}\|_{L_2(\omega')} \leqslant \text{const}\,\|f\|_{L_2(Q)}.$$

Таким образом, мы установили, что для любой точки $x^0 \in \partial Q$ найдутся такие положительные числа $r = r(x^0)$ и $C = C(x^0)$, что $u(x) \in H^2(Q \cap (|x - x^0| < r(x^0))$ и имеет место неравенство

$$\|u\|_{H^2(Q\cap(|x-x^0|<r(x^0)))} \leqslant C(x^0)\,\|f\|_{L_2(Q)}.$$

Из покрытия границы ∂Q множествами $\partial Q \cap (|x - x^0| < r(x^0))$ при всевозможных $x^0 \in \partial Q$ выберем конечное подпокрытие $\partial Q \cap (|x - x^i| < r(x^i))$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Тогда существует такое число $\delta_0 > 0$, что $Q \setminus Q_{\delta_0} \subset \bigcup_{i=1}^{N} Q \cap (|x - x^i| < r(x^i))$.

Следовательно, $u(x) \in H^2(Q \setminus Q_{\delta_0})$ и $\|u\|_{H^2(Q\setminus Q_{\delta_0})} \leqslant C_1\|f\|_{L_2(Q)}$, где C_1 — некоторая положительная постоянная. Но по теореме 3 $u(x) \in H^2(Q_{\delta_0/2})$ и $\|u\|_{H^2(Q_{\delta_0/2})} \leqslant C_2\|f\|_{L_2(Q)}$. Поэтому $u \in H^2(Q)$ и $\|u\|_{H^2(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}$, где постоянная $C > 0$ не зависит от f. Таким образом, теорема 4 при $k = 0$ доказана.

Пусть k — любое натуральное число. В силу теоремы о внутренней гладкости обобщенных решений (теорема 3) достаточно, как и при $k = 0$, установить, что для любой граничной точки x^0 существуют такие числа $r = r(x^0) > 0$ и $C = C(x^0) > 0$, что $u(x) \in H^{k+2}(Q \cap (|x - x^0| < r))$ и имеет место неравенство

$$\|u\|_{H^{k+2}(Q\cap(|x-x^0|<r))} \leqslant C\|f\|_{H^k(Q)}$$

(точку x^0 можно считать началом координат, а ось Ox_n — направленной по нормали к ∂Q в этой точке). Для этого в силу гладкости преобразования (20) (гладкости границы) достаточно показать, что $u(y) \in H^{k+2}(\omega')$ и $\|u\|_{H^{k+2}(\omega')} \leqslant C\|f\|_{H^k(Q)}$.

Мы уже доказали, что $u(y) \in H^2(\omega')$, $\|u\|_{H^2(\omega')} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}$ и, кроме того, имеет место равенство (23_0). Повторяя схему, использованную при доказательстве леммы 2 предыдущего пункта, покажем, что для любого $m=1, 2, \ldots, k$ $u(y) \in H^{m+2}(\omega')$, $\|u\|_{H^{m+2}(\omega')} \leqslant C\|f\|_{H^m(Q)}$ и имеет место равенство

$$\int\limits_{\omega} \nabla (\delta_h^l D^\alpha U) \nabla v_{m+1}\, dy =$$
$$= -\int\limits_{\omega} D^\alpha F \delta_{-h}^l v_{m+1}\, dy + \int\limits_{\omega} \sum_{i, j=1}^{n} \delta_h^l (D^\alpha A_{ij} U_{y_i}) (v_{m+1})_{y_j}\, dy +$$
$$+ \int\limits_{\omega} \sum_{i, j=1}^{n} \delta_h^l (D^\alpha B_{ij} \zeta_{y_j} u)(v_{m+1})_{y_i}\, dy, \qquad (23_m)$$

справедливое для всех $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$, $|\alpha| \leqslant m$, $l=1, \ldots, n-1$, $0 < |h| < \delta/2$, $v_{m+1} \in \mathring{H}^1_\gamma(\omega)$ в случае первой краевой задачи и $v_{m+1} \in H^1(\omega)$ в случае второй краевой задачи. Докажем это утверждение при $m=1$.

Перейдем в равенстве (23_0) к пределу при $h \to 0$ и проинтегрируем по частям первое слагаемое правой части полученного равенства. В результате получим равенство

$$\int\limits_{\omega} \nabla U_{y_l} \nabla v_1\, dy = \int\limits_{\omega} F_{y_l} v_1\, dy + \int\limits_{\omega} \sum_{i, j=1}^{n} (A_{ij} U_{y_i})_{y_l} v_{1 y_j}\, dy +$$
$$+ \int\limits_{\omega} \sum_{i, j=1}^{n} (B_{ij} \zeta_{y_j} u)_{y_l} v_{1 y_i}\, dy, \qquad (21_1)$$

справедливое при всех v_1 из $\mathring{H}^1_\gamma(\omega)$ в случае первой краевой задачи и из $H^1(\omega)$ в случае второй краевой задачи.

Тождество (21_1) для U_{y_l} отличается от тождества (21_0) для U лишь тем, что функции F, $A_{ij}U_{y_i}$, $B_{ij}\zeta_{y_j}u$ в нем заменены соответственно функциями F_{y_l}, $(A_{ij}U_{y_i})_{y_l}$, $(B_{ij}\zeta_{y_i}u)_{y_l}$, а функция v_0 заменена на функцию v_1 с теми же свойствами.

Полагая в (21_1) $v_1(y) = \delta_{-h}^s v_2(y)$, $s < n$, $0 < |h| < \delta/2$, где $v_2(y)$ — произвольная функция из $\mathring{H}^1_\gamma(\omega)$ (из $H^1(\omega)$), продолженная нулем вне ω, получим аналогичное (23_0) равенство

$$\int\limits_{\omega} \nabla (\delta_h^s U_{y_l}) \nabla v_2\, dy = -\int\limits_{\omega} F_{y_l} \delta_{-h}^s v_2\, dy + \int\limits_{\omega} \sum_{i, j=1}^{n} \delta_h^s ((A_{ij} U_{y_i})_{y_l}) (v_2)_{y_j}\, dy +$$
$$+ \int\limits_{\omega} \sum_{i, j=1}^{n} \delta_h^s ((B_{ij} \zeta_{y_j} u)_{y_l})(v_2)_{y_i}\, dy. \qquad (23_1)$$

Как и в предыдущем случае, оценим интегралы, стоящие в правой части (23_1). Аналогично (24_0), имеем (так как $u \in H^2(Q)$

а $f \in H^k(Q)$, $k \geqslant 1$, то в силу (15) $F \in H^1(Q)$, и поскольку $\psi \in C^{k+2}(\bar{D})$, то $F(y) \in H^1(\omega)$)

$$\left| \int_\omega F_{y_l} \delta^l_{-h} v_2 \, dy \right| \leqslant \| F_{y_l} \|_{L_2(\omega)} \| \, |\nabla v_2| \, \|_{L_2(\omega)}. \tag{24_1}$$

Аналогично (25_0), разобьем второй интеграл в правой части (23_1) на два слагаемых

$$\int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta^s_h \left((A_{ij} U_{y_l})_{y_i} \right) (v_2)_{y_j} \, dy = \int_\omega \sum_{i,j=1}^n (A_{ij})^s_h \, \delta^s_h U_{y_i y_l} (v_2)_{y_j} \, dy +$$
$$+ \int_\omega \sum_{i,j=1}^n \left[\delta^s_h (A_{ij}) \, U_{y_i y_l} + \delta^s_h \left(A_{ij y_l} U_{y_i} \right) \right] (v_2)_{y_j} \, dy. \tag{25_1}$$

Используя (22), оценим первое слагаемое из (25_1)

$$\left| \int_\omega \sum_{i,j=1}^n (A_{ij})^s_h \, \delta^s_h U_{y_i y_l} (v_2)_{y_j} \, dy \right| \leqslant \frac{1}{2} \| \, |\nabla \delta^s_h U_{y_l}| \, \|_{L_2(\omega)} \| \, |\nabla v_2| \, \|_{L_2(\omega)}. \tag{26_1}$$

Так как функции A_{ij} и B_{ij} принадлежат $C^{k+1}(\bar{\omega})$, $k \geqslant 1$, то сумма второго слагаемого в (25_1) и третьего интеграла в правой части (23_1) оценивается следующим образом:

$$\left| \int_\omega \left[\sum_{i,j=1}^n \delta^s_h (A_{ij}) \, U_{y_i y_l} + \delta^s_h \left(A_{ij y_l} U_{y_i} \right) \right] v_{2 y_j} \, dy + \right.$$
$$\left. + \int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta^s_h \left((B_{ij} \zeta_{y_j} u)_{y_l} \right) v_{2 y_j} \, dy \right| \leqslant \text{const} \, \| u \|_{H^2(Q)} \| \, |\nabla v_2| \, \|_{L_2(\omega)}. \tag{27_1}$$

Из (23_1) с помощью (24_1) — (27_1) получаем неравенство

$$\left| \int_\omega \nabla \delta^s_h U_{y_l} \nabla v_2 \, dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\| F_{y_l} \|_{L_2(\omega)} + \frac{1}{2} \| \, |\nabla \delta^s_h U_{y_l}| \, \|_{L_2(\omega)} + \text{const} \, \| u_2 \|_{H^2(Q)} \right) \| \, |\nabla v_2| \, \|_{L_2(\omega)},$$
$$l = 1, \ldots, n-1, \quad s = 1, \ldots, n-1.$$

Полагая в этом неравенстве $v_2(y) = \delta^s_h U_{y_l}(y)$, с помощью вытекающей из (15) оценки

$$\| F \|_{H^1(\omega)} \leqslant C \left(\| f \|_{H^1(Q)} + \| u \|_{H^2(Q)} \right)$$

и уже доказанной при $k = 0$ оценки (17) получим, что

$$\| \, |\nabla \delta^s_h U_{y_l}| \, \|_{L_2(\omega)} \leqslant \text{const} \, \| f \|_{H^1(Q)},$$
$$s, \ l = 1, \ldots, n-1, \quad 0 < |h| < \delta/2.$$

Значит, в ω' существуют обобщенные производные $u_{y_p y_s y_l}$, $p = 1, 2, \ldots, n$, $s, l = 1, \ldots, n-1$, принадлежащие $L_2(\omega')$ и удовлетворяющие неравенству $\|u_{y_p y_s y_l}\| \leqslant \text{const}\,\|f\|_{H^1(Q)}$.

Для оценки остальных третьих производных $u_{y_p y_n y_n}$, $p = 1, 2, \ldots, n$, воспользуемся равенством (30). Дифференцируя его сначала по y_p при $p < n$, получим, что при всех таких p $u_{y_p y_n y_n} \in L_2(\omega')$ и что $\|u_{y_p y_n y_n}\|_{L_2(\omega')} \leqslant C\|f\|_{H^1(Q)}$. Далее, дифференцируя (30) по y_n, получим, что $u_{y_n y_n y_n} \in L_2(\omega')$ и $\|u_{y_n y_n y_n}\|_{L_2(\omega')} \leqslant C\|f\|_{H^1(Q)}$.

Таким образом, мы доказали, что $u(y) \in H^3(\omega')$, $\|u\|_{H^3(\omega')} \leqslant C\|f\|_{H^1(Q)}$ и при всех $l, s = 1, \ldots, n-1$, $0 < |h| < \delta/2$ и $v_2 \in \mathring{H}^1_\gamma(\omega)$ $(v_2 \in H^1(\omega))$ имеет место равенство (23_1). Повторяя этот процесс m раз $(m \leqslant k)$, получим, что $u \in H^{m+2}(\omega')$, $\|u\|_{H^{m+2}(\omega')} \leqslant C\|f\|_{H^m(Q)}$ и имеет место равенство (23_m). Теорема доказана.

Установим теперь, в каком смысле рассматриваемые обобщенные решения удовлетворяют граничным условиям. В случае первой краевой задачи сразу из определения $(u \in \mathring{H}^1(Q))$ вытекает, что решение имеет равный нулю след на ∂Q: $u|_{\partial Q} = 0$.

Покажем, что в случае второй краевой задачи решение удовлетворяет граничному условию в следующем смысле: $\nabla u|_{\partial Q} \cdot n = 0$, где n — вектор внешней нормали к ∂Q, $|n| = 1$, а $\nabla u|_{\partial Q}$ — вектор с компонентами $u_{x_i}|_{\partial Q}$, $i = 1, \ldots, n$, являющимися следами на ∂Q функций u_{x_i} из $H^1(Q)$.

Действительно, так как $u \in H^2(Q)$, то с помощью формулы Остроградского из (8) получаем справедливое при любой $v \in H^1(Q)$ равенство

$$\int_{\partial Q} (\nabla u \cdot n) v\, dS = \int_Q (\Delta u - f)\, v\, dx$$

(здесь $\nabla u \cdot n = \nabla u|_{\partial Q} \cdot n$). Так как $\Delta u = f$ п. в. в Q, то

$$\int_{\partial Q} (\nabla u \cdot n)\, v\, dS = 0,$$

откуда и вытекает нужное равенство, поскольку в силу теоремы 2 п. 2 § 4 гл. III множество следов $v|_{\partial Q}$ функции из $H^1(Q)$ всюду плотно в $L_2(\partial Q)$.

Выражение $\nabla u|_{\partial Q} \cdot n$ далее будем обозначать через $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q}$. Отметим, что если $u \in C^1(\bar{Q}) \cap H^2(Q)$, то функция $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q}$ как элемент $L_2(\partial Q)$ совпадает с нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ функции u на границе ∂Q. Обозначение $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q}$ естественно и в том смысле, что существует такая функция из $H^1(Q)$, след которой на ∂Q совпадает с $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q}$ *).

Таким образом, *если $\partial Q \in C^2$, то обобщенное решение второй* **) *краевой задачи удовлетворяет граничному условию*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q}=0.$$

Из теорем 4 и 3 и теорем 2 и 3 п. 2 § 6 гл. III, в частности, вытекает

Теорема 5. *Пусть $f \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$. Если $\partial Q \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, то обобщенное решение первой краевой задачи для уравнения (7) с однородным граничным условием является классическим решением этой задачи. Если $\partial Q \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}$, то обобщенное решение второй краевой задачи для уравнения (7) с однородным граничным условием является классическим решением этой задачи.*

Рассмотрим теперь вопрос о гладкости обобщенных решений во всей области в случае, когда граничные условия не являются однородными. Остановимся на первой краевой задаче.

Пусть функция $u(x)$ является обобщенным решением первой краевой задачи, т. е. принадлежит $H^1(Q)$, удовлетворяет при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$ интегральному тождеству (8) и граничному условию $v|_{\partial Q}=\varphi$.

Предположим, что при некотором $k \geqslant 0$ $f \in H^k(Q)$, $\partial Q \in C^{k+2}$, а граничная функция φ является следом на ∂Q некоторой функции Φ из $H^{k+2}(Q)$ (для того чтобы функция φ была следом на ∂Q функции из $H^{k+2}(Q)$, в силу теоремы 2 п. 2 § 4 гл. III достаточно, чтобы φ принадлежала $C^{k+2}(\partial Q)$). Покажем, что тогда $u \in H^{k+2}(Q)$.

Рассмотрим функцию $z=u-\Phi$. Ясно, что $z \in \mathring{H}^1(Q)$ и удовлетворяет при всех $v \in \mathring{H}^1(Q)$ интегральному тождеству

$$\int_Q \nabla z \nabla v\,dx=-\int_Q \nabla\Phi\nabla v\,dx-\int_Q fv\,dx$$

---

*) Такую функцию достаточно построить в $Q \setminus Q_\delta$ при некотором $\delta>0$. Так как $\partial Q \in C^2$, то для любой точки $x \in Q\setminus Q_\delta$ при достаточно малом $\delta>0$ существует единственная точка $y=y(x) \in \partial Q$, $|y-x|<\delta$, такая, что вектор $y-x$ направлен по нормали $n(y)$ к границе ∂Q в точке y. Функция $\nabla u(x) \times n(y(x))$ принадлежит $H^1(Q\setminus Q_\delta)$ и ее след на ∂Q $\nabla u(x)\cdot n(y(x))|_{\partial Q}=\nabla u|_{\partial Q} \times n(x)=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q}$.

**) В случае третьей краевой задачи обобщенное решение удовлетворяет граничному условию $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\right|_{\partial Q}=0$.

или, что в силу формулы Остроградского то же самое, интегральному тождеству

$$\int_Q \nabla z \nabla v\, dx = -\int_Q f_1 v\, dx,$$

где $f_1 = f - \Delta\Phi$. Поскольку функции $f_1 \in H^k(Q)$, то в силу теоремы 4 $z \in H^{k+2}(Q)$. Поэтому обобщенное решение $u = z + \Phi \in H^{k+2}(Q)$. Утверждение доказано.

4. Гладкость обобщенных собственных функций. Пусть $u(x)$ — обобщенная собственная функция первой, второй или третьей краевых задач для оператора Лапласа, а λ — соответствующее собственное значение. Тогда для любой $v \in \mathring{H}^1(Q)$ имеет место равенство

$$\int_Q \nabla u \nabla v\, dx = -\lambda \int_Q uv\, dx,$$

совпадающее с равенством (8) при $f = \lambda u$. Так как $\lambda u \in H^1(Q)$ и, тем более, $\lambda u \in L_2(Q)$, то из теоремы 3 следует, что $u \in H^2_{\text{loc}}(Q)$ и п. в. в Q выполняется равенство

$$\Delta u = \lambda u. \tag{31}$$

Таким образом, функция λu, стоящая в правой части (28), принадлежит $H^2_{\text{loc}}(Q) \cap L_2(Q)$. Поэтому, применяя еще раз теорему 3, получим, что $u \in H^4_{\text{loc}}(Q)$ и т. д.

Следовательно, $u \in H^k_{\text{loc}}(Q)$ при любом k. На основании теоремы 2 п. 2 § 6 гл. III $u(x) \in C^\infty(Q)$.

Итак, установлена

Теорема 6. *Обобщенные собственные функции первой, второй и третьей краевых задач для оператора Лапласа бесконечно дифференцируемы в Q и удовлетворяют уравнению* (31).

Гладкость обобщенных собственных функций во всей области определяется гладкостью границы.

Теорема 7. *Если $\partial Q \in C^k$ при некотором $k \geq 2$, то любая обобщенная собственная функция $u(x)$ первой или второй краевой задачи для оператора Лапласа принадлежит $H^k(Q)$ и удовлетворяет соответствующему граничному условию ($u|_{\partial Q} = 0$ в случае первой краевой задачи и $\partial u/\partial n|_{\partial Q} = 0$ в случае второй краевой задачи). Обобщенные собственные функции первой краевой задачи при $k \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ и второй краевой задачи при $k \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 2$ являются классическими собственными функциями* *).

---

*) В случае третьей краевой задачи имеет место следующее утверждение. *Если $\partial Q \in C^k$ и $\sigma(x) \in C^{k-1}(\partial Q)$ при некотором $k \geq 2$, то любая собственная функция $u(x)$ третьей краевой задачи для оператора Лапласа принадлежит $H^k(Q)$. При этом $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\partial Q} = 0$. Кроме того, если $k \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 2$, то обобщенные собственные функции третьей краевой задачи являются классическими собственными функциями.*

Так как $\partial Q \in C^k$ и $u \in H^1(Q) \subset L_2(Q)$, то в силу теоремы 4 $u \in H^2(Q)$. Если $\partial Q \in C^3$, то по теореме 4 $u \in H^3(Q)$. При $\partial Q \in C^4$ из включения $u \in H^2(Q)$ следует, что $u \in H^4(Q)$ и т. д. Таким образом, получим, что если $\partial Q \in C^k$, то $u \in H^k(Q)$.

Кроме того, обобщенные собственные функции в силу теоремы 6 принадлежат $C^\infty(Q)$ и удовлетворяют уравнению (31).

Если $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$, то согласно теореме 3 п. 2 § 6 гл. III $u \in C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\bar{Q}) \subset C(\bar{Q})$, а при $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+2$ $u \in C^1(\bar{Q})$. Следовательно, в силу результатов п. 1 § 5 гл. III собственная функция u первой краевой задачи при $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$ удовлетворяет в классическом смысле граничному условию $u|_{\partial Q}=0$, а собственная функция u второй краевой задачи при $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+2$ удовлетворяет в классическом смысле граничному условию $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q}=0$. Теорема доказана.

5. О разложениях в ряды по собственным функциям. Пусть $u_1, u_2, \ldots$ — система всех обобщенных собственных функций первой (второй) краевой задачи для оператора Лапласа, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — соответствующая система собственных значений. Как было доказано (теорема 3 п. 3 § 1), система u_s, $s=1, 2, \ldots$, является ортонормированным базисом пространства $L_2(Q)$. Это означает, что произвольную функцию $f \in L_2(Q)$ можно представить в виде сходящегося в $L_2(Q)$ ряда Фурье

$$f=\sum_{m=1}^{\infty} f_m u_m, \quad f_m=(f, u_m)_{L_2(Q)}, \tag{32}$$

по любой из этих систем.

Пусть функция $f \in H^k(Q)$ при некотором $k \geqslant 1$. Ее ряды Фурье по собственным функциям первой и второй краевых задач, конечно, сходятся к ней в $L_2(Q)$. Однако в норме $H^k(Q)$ и даже в нормах $H^{k'}(Q)$, $0<k'<k$, эти ряды, вообще говоря, не сходятся. Например, ряд Фурье по системе собственных функций первой краевой задачи функции $f_0(x)$, равной 1 в Q, не может сходиться в норме $H^k(Q)$ ни при каком $k \geqslant 1$. Действительно, если бы этот ряд сходился в норме $H^1(Q)$, то он сходился бы непременно к $f_0(x)$, а этого быть не может, поскольку сумма сходящегося в $H^1(Q)$ ряда с элементами из $\mathring{H}^1(Q)$ должна принадлежать $\mathring{H}^1(Q)$.

Для того чтобы ряд Фурье функции f из $H^k(Q)$ сходился к ней в $H^k(Q)$, нужно потребовать, чтобы функция f удовлетворяла некоторым граничным условиям.

Заметим, что для сходимости в норме пространства $H^1(Q)$ ряда Фурье (32) функции f по системе собственных функций первой краевой задачи для оператора Лапласа достаточно (теорема 3 п. 3 предыдущего параграфа), а как только что показано, и необходимо, чтобы $f \in \mathring{H}^1(Q)$.

Обозначим через $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ при $k \geqslant 1$ подпространство пространства $H^k(Q)$, состоящее из всех функций f, для которых

$$f\Big|_{\partial Q} = 0, \;\ldots,\; \Delta^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} f\Big|_{\partial Q} = 0.$$

Под $H^0_{\mathscr{D}}(Q)$ будем понимать пространство $L_2(Q)$. Заметим, что в силу теоремы 2 п. 3 § 5 гл. III $H^1_{\mathscr{D}}(Q) = \mathring{H}^1(Q)$.

Через $H^k_{\mathscr{N}}(Q)$ при $k \geqslant 2$ обозначим подпространство пространства $H^k(Q)$, состоящее из всех функций f, для которых

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = 0, \;\ldots,\; \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{\left[\frac{k}{2}\right]-1} f\Big|_{\partial Q} = 0.$$

Под $H^0_{\mathscr{N}}(Q)$ будем понимать пространство $L_2(Q)$, а под $H^1_{\mathscr{N}}(Q) - H^1(Q)$.

Лемма 3. *Пусть $\partial Q \in C^k$ при некотором $k \geqslant 1$. Существует такая постоянная $C > 0$, что для любой функции f из $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ или любой функции f из $H^k_{\mathscr{N}}(Q)$, ортогональной постоянным в скалярном произведении $L_2(Q)$, имеет место неравенство*

$$\|f\|_{H^k(Q)} \leqslant C \left\| \Delta^{\frac{k}{2}} f \right\|_{L_2(Q)}, \tag{33}$$

если k — четное, и неравенство

$$\|f\|_{H^k(Q)} \leqslant C \left\| \Delta^{\frac{k-1}{2}} f \right\|_{H^1(Q)}, \tag{33'}$$

если k — нечетное.

Рассмотрим сначала случай четного k, $k = 2p$. Лемму будем доказывать индукцией по p. Установим оценку (33) при $p = 1$. Пусть $f \in H^2_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^2_{\mathscr{N}}(Q))$. Обозначим через F функцию Δf. Тогда $f(x)$ п. в. в Q удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta f = F. \tag{34}$$

Кроме того, в силу определения пространства $H^2_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^2_{\mathscr{N}}(Q))$ $u|_{\partial Q} = 0$ $\left(\text{соответственно } \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = 0\right)$.

Умножая (34) на произвольную $v \in \mathring{H}^1(Q)$ и применяя формулу Остроградского, получим, что u является обобщенным решением первой (второй) краевой задачи для уравнения (34). Поэтому справедливость неравенства (33) при $k = 2$ вытекает из теоремы 4.

Предположим, что неравенство (33) установлено при $k=2p$, и пусть $f \in H^{2p+2}_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^{2p+2}_{\mathscr{N}}(Q))$. Поскольку в этом случае функция $F=\Delta f$ принадлежит $H^{2p}_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^{2p}_{\mathscr{N}}(Q))$, то

$$\|F\|_{H^{2p}(Q)} \leqslant C_1 \|\Delta^p F\|_{L_2(Q)} = C_1 \|\Delta^{p+1} f\|_{L_2(Q)}.$$

Но $f(x)$ является обобщенным решением первой (второй) краевой задачи для уравнения (34), поэтому в силу теоремы 4

$$\|f\|_{H^{2p+2}(Q)} \leqslant C_2 \|F\|_{H^{2p}(Q)} \leqslant C \|\Delta^{p+1} f\|_{L_2(Q)}.$$

Пусть теперь k — нечетное. При $k=1$ неравенство (33′) тривиально. Пусть оно установлено для $k=2p-1$, $p \geqslant 1$. Докажем его для $k=2p+1$. Пусть $f \in H^{2p+1}_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^{2p+1}_{\mathscr{N}}(Q))$. Тогда $F(x) = \Delta f \in H^{2p-1}_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^{2p-1}_{\mathscr{N}}(Q))$. По теореме 4 и по предположению индукции имеем

$$\|f\|_{H^{2p+1}(Q)} \leqslant C_2 \|F\|_{H^{2p-1}(Q)} \leqslant C \|\Delta^{p-1} F\|_{H^1(Q)} = C \|\Delta^p f\|_{H^1(Q)}.$$

Лемма доказана.

Теперь мы в состоянии доказать следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть граница $\partial Q \in C^k$, $k \geqslant 1$. Для того чтобы функция f разлагалась в ряд Фурье* (32) *по системе собственных функций первой (второй) краевой задачи для оператора Лапласа, сходящийся в норме пространства $H^k(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы f принадлежала $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$. Если $f \in H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$, то сходится ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty} f_s^2 |\lambda_s|^k$ и существует такая не зависящая от f положительная постоянная C, что*

$$\sum_{s=1}^{\infty} f_s^2 |\lambda_s|^k \leqslant C \|f\|^2_{H^k(Q)}. \tag{35}$$

Доказательство. Из равенства (31) и теоремы 7 вытекает, что если $\partial Q \in C^k$, то обобщенные собственные функции первой (второй) краевой задачи для оператора Лапласа принадлежат $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$. Поэтому, если ряд Фурье функции $f \in H^k(Q)$ по собственным функциям первой (второй) краевой задачи сходится в норме $H^k(Q)$, то $f \in H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$. Необходимость доказана.

Пусть теперь $f \in H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$. Установим справедливость неравенства (35). Предположим сначала, что k — четное, $k=2p$, $p \geqslant 1$. Обозначим через γ_s коэффициент Фурье функции $\Delta^p f$: $\gamma_s = (\Delta^p f, u_s)_{L_2(Q)}$. С помощью формулы Грина имеем

$$\gamma_s = (\Delta^p f, u_s)_{L_2(Q)} = (\Delta^{p-1} f, \Delta u_s)_{L_2(Q)} = \lambda_s (\Delta^{p-1} f, u_s)_{L_2(Q)} = \ldots$$
$$\ldots = \lambda_s^p (f, u_s)_{L_2(Q)} = \lambda_s^p f_s, \qquad s = 1, 2, \ldots$$

Поскольку функция $\Delta^p f \in L_2(Q)$, то $\sum\limits_{s=1}^{\infty} \gamma_s^2 = \|\Delta^p f\|^2_{L_2(Q)}$, поэтому $\sum\limits_{s=1}^{\infty} f_s^2 |\lambda_s|^k = \left\|\Delta^{\frac{k}{2}} f\right\|^2_{L_2(Q)}$, и тем самым, очевидно, имеет место неравенство (35). Если $k=2p+1$, то функция $\Delta^p f \in \mathring{H}^1(Q)$ $(H^1(Q))$. Поэтому на основании теоремы 3 п. 3 § 1 имеет место неравенство $\sum\limits_{s=1}^{\infty} \gamma_s^2 |\lambda_s| \leqslant C \|\Delta^p f\|^2_{H^1(Q)}$, из которого вытекает неравенство (35).

Обозначим через $S_m(x)$ частичную сумму ряда (32). Очевидно, что при всех $m=1, 2, \ldots$ $S_m \in H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$.

При $k=2p$ в силу (33) и (35) (пусть $m > i \geqslant 1$)

$$\|S_m - S_i\|^2_{H^k(Q)} \leqslant C \|\Delta^p (S_m - S_i)\|^2_{L_2(Q)} =$$
$$= C \left\| \sum_{s=i+1}^{m} \lambda_s^p f_s u_s \right\|^2_{L_2(Q)} = C \sum_{s=i+1}^{m} \lambda_s^{2p} f_s^2 = C \sum_{s=i+1}^{m} \lambda_s^k f_s^2 \to 0$$

при $m, i \to \infty$. Это означает, что ряд (32) сходится к f в $H^k(Q)$.

Если $k=2p+1$, то доказательство проводится аналогично с использованием неравенства (33′). Теорема доказана.

Теорема 9. *Пусть граница ∂Q области Q принадлежит C^k при некотором $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$. Тогда любая функция f из $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$ разлагается в ряд Фурье (32) по собственным функциям первой (второй) краевой задачи для оператора Лапласа, сходящийся в пространстве $C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\bar{Q})$.*

Из теоремы 3 п. 2 § 6 гл. III следует, что пространству $C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\bar{Q})$ принадлежит как функция $f(x)$, так и все собственные функции $u_s(x)$, а вместе с ними и все частичные суммы $S_m(x)$ ряда (32). При этом имеет место неравенство $\|S_m - S_i\|_{C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\bar{Q})} \leqslant C \|S_m - S_i\|_{H^k(Q)}$, в котором постоянная C не зависит от m и i. В силу теоремы 8 $\|S_m - S_i\|_{H^k(Q)} \to 0$ при $m, i \to \infty$, поэтому $\|S_m - S_i\|_{C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\bar{Q})} \to 0$ при $m, i \to \infty$. Значит, ряд (32) сходится в $C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\bar{Q})$. Теорема доказана.

6. Обобщения. Метод, с помощью которого в пп. 2 и 3 была исследована гладкость обобщенных решений краевых задач для уравнения Пуассона, может быть применен и при изучении гладкости обобщенных решений краевых задач для более общих уравнений. Пусть, например, $u(x)$ — обобщенное решение первой краевой задачи

$$\mathscr{L}u = \operatorname{div}(k(x)\nabla u) - a(x)u = f, \qquad x \in Q, \qquad u|_{\partial Q} = 0 \tag{36}$$

$$(f \in L_2(Q),\quad k(x) \in C^1(\bar{Q}),\quad a(x) \in C(\bar{Q}),\quad k(x) \geqslant k_0 > 0).$$

Если $k(x) \in C^{p+1}(\bar{Q})$, $a(x) \in C^p(\bar{Q})$ и $f(x) \in L_2(Q) \cap H^p_{\text{loc}}(Q)$ при некотором $p \geqslant 0$, то $u(x) \in H^{p+2}_{\text{loc}}(Q)$. В частности, любая обобщенная собственная функция первой краевой задачи для оператора $\mathscr{L}$ принадлежит $H^{p+2}_{\text{loc}}(Q)$.

Если дополнительно граница $\partial Q \in C^{p+2}$ и $f \in H^p(Q)$, то $u(x) \in H^{p+2}(Q)$, и, в частности, любая обобщенная собственная функция первой краевой задачи для оператора $\mathscr{L}$ принадлежит $H^{p+2}(Q)$.

Совершенно аналогичные результаты имеют место и для обобщенных решений второй и третьей краевых задач для уравнения (36) и соответствующих собственных функций оператора $\mathscr{L}$.

§ 3. Классические решения уравнений Лапласа и Пуассона

1. Гармонические функции. Потенциалы. Вещественная функция $u(x)$ называется *гармонической* в области Q (или в некотором открытом множестве) пространства R_n, если она дважды непрерывно дифференцируема в Q и в каждой точке $x \in Q$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

Легко дать и другое, эквивалентное, определение гармоничности функции в терминах пространств H^k (как обычно, функции будут считаться равными, если они совпадают почти всюду).

Функция $u(x)$, принадлежащая $H^1_{\text{loc}}(Q)$, где Q — некоторая область пространства R_n, называется гармонической в Q, если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q \nabla u \nabla v\, dx = 0 \tag{2}$$

при всех финитных в Q (т. е. равных нулю п. в. в $Q \setminus Q'$ для некоторой $Q' \Subset Q$) функциях $v \in H^1(Q)$.

Если функция $u(x)$ из $C^2(Q)$ гармонична в области Q, то она, очевидно, принадлежит пространству $H^1_{\text{loc}}(Q)$. Умножим (1) на произвольную финитную в Q функцию $v \in H^1(Q)$ и проинтегрируем полученное равенство по области Q. С помощью формулы Остроградского получим, что функция u удовлетворяет интегральному тождеству (2).

Пусть теперь функция $u \in H^1_{\text{loc}}(Q)$ и удовлетворяет интегральному тождеству (2) при всех финитных в Q функциях v, принадлежащих $H^1(Q)$. Возьмем произвольную строго внутреннюю подобласть Q' области Q. Так как функция $u \in H^1(Q')$ и удовлетворяет тождеству $\int\limits_{Q'} \nabla u \nabla v\, dx = 0$ при всех $v \in \mathring{H}^1(Q')$, то согласно лемме 2 п. 2 предыдущего параграфа и теореме 2 п. 2 § 6 гл. III функция $u \in C^\infty(Q')$. Кроме того, функция u удовлетворяет в Q' уравнению (1) (см. следствие из леммы 2 предыдущего параграфа). В силу произвольности Q' *функция* $u(x)$ *принадлежит* $C^\infty(Q)$ и удовлетворяет уравнению (1) в Q, т. е. является гармонической.

Если гармоническая в Q функция u дважды непрерывно дифференцируема в $\bar{Q}$, то, интегрируя равенство (1) по Q и пользуясь формулой Остроградского, получим равенство

$$0 = \int\limits_Q \Delta u\, dx = \int\limits_Q \operatorname{div}(\nabla u)\, dx = \int\limits_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS, \tag{3}$$

которым будем в дальнейшем неоднократно пользоваться.

Пусть ξ — произвольная точка из R_n, а $r = |x - \xi|$. Так как для функции f, зависящей только от r, $\Delta f = f_{rr} + \frac{n-1}{r} f_r$, то зависящая только от r гармоническая функция u удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r = 0$. Общее решение этого уравнения на полуоси $r > 0$ имеет вид $\frac{c_0}{r^{n-2}} + c_1$ при $n > 2$ и $c_0 \ln r + c_1$ при $n = 2$, где c_0 и c_1 — произвольные постоянные. Поэтому все функции, гармонические во всем пространстве, кроме точки $x = \xi$, и зависящие лишь от $|x - \xi|$, имеют вид $\frac{c_0}{|x-\xi|^{n-2}} + c_1$ при $n > 2$ и $c_0 \ln|x - \xi| + c_1$ при $n = 2$ (c_0 и c_1 — произвольные постоянные).

Гармоническая в $R_n \setminus \{x = \xi\}$ функция

$$U(x - \xi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\sigma_n |x-\xi|^{n-2}}, & n > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln|x - \xi|, & n = 2, \end{cases} \tag{4}$$

где σ_n — площадь поверхности единичной сферы, называется *фундаментальным решением* уравнения Лапласа. Эта функция играет важную роль при изучении решений уравнений Лапласа и Пуассона.

Для любой измеримой ограниченной в области Q функции $\rho_0(\xi)$ при всех x определена функция

$$u_0(x) = \int\limits_Q U(x - \xi)\, \rho_0(\xi)\, d\xi, \tag{5}$$

называемая *объемным потенциалом с плотностью* ρ_0.

Для любых интегрируемых на ∂Q функций $\rho_1(\xi)$ и $\rho_2(\xi)$ при всех $x \in R_n \setminus \partial Q$ определены функции

$$u_1(x) = \int_{\partial Q} U(x-\xi)\,\rho_1(\xi)\,dS_\xi, \tag{6}$$

$$u_2(x) = \int_{\partial Q} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\,\rho_2(\xi)\,dS_\xi, \tag{7}$$

называемые *потенциалами простого и двойного слоев с плотностями* ρ_1 *и* ρ_2 соответственно.

С потенциалами (5), (6) и (7) мы уже встречались. В п. 1 § 6 гл. III (теорема 1) было доказано, что любая функция $u(x)$ из $C^2(\bar{Q})$ может быть представлена в виде суммы трех слагаемых: объемного потенциала с плотностью Δu, потенциала простого слоя с плотностью $-\frac{\partial u}{\partial n}$ и потенциала двойного слоя с плотностью u:

$$u(x) = \int_Q U(x-\xi)\,\Delta u(\xi)\,d\xi - \int_{\partial Q} U(x-\xi)\,\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\,dS_\xi + \\ + \int_{\partial Q} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\,u(\xi)\,dS_\xi. \tag{8}$$

Если функция $u \in C^2(\bar{Q})$ и является гармонической в Q, то из (8) вытекает, что для любого $x \in Q$

$$u(x) = \int_{\partial Q} \left(\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\,u(\xi) - \frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\,U(x-\xi) \right) dS_\xi. \tag{9}$$

Лемма 1. *Потенциалы простого и двойного слоев являются гармоническими функциями в* $R_n \setminus \partial Q$.

Пусть x^0 — произвольная точка из $R_n \setminus \partial Q$, и пусть $\delta > 0$ — расстояние от этой точки до ∂Q. Подынтегральные функции в (6) и (7) для всех x, лежащих в шаре $\{|x-x^0| < \delta/2\}$, как функции переменного ξ, $\xi \in \partial Q$, принадлежат $L_1(\partial Q)$ и при п. в. ξ из ∂Q как функции переменного x принадлежат $C^\infty(|x-x^0| \leqslant \delta/2)$. Кроме того, для всех $\xi \in \partial Q$ и x из шара $\{|x-x^0| < \delta/2\}$ имеют место оценки $|D_x^\alpha U(x-\xi)| \leqslant C$, $\left| D_x^\alpha \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi} \right| \leqslant C$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ произвольно, а постоянная $C > 0$ зависит только от δ и α. Поэтому

$$|D_x^\alpha U(x-\xi)\,\rho_1(\xi)| \leqslant C\,|\rho_1(\xi)|,$$

$$\left| D_x^\alpha \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\,\rho_2(\xi) \right| \leqslant C\,|\rho_2(\xi)|.$$

Тогда по теореме 7 п. 7 § 1 гл. II функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ бесконечно дифференцируемы в шаре $\{|x-x^0| < \delta/2\}$ и

$$D^\alpha u_1(x) = \int_{\partial Q} \rho_1(\xi)\,D_x^\alpha U(x-\xi)\,dS_\xi$$

и

$$D^\alpha u_2(x)=\int\limits_{\partial Q}\rho_2(\xi)\,D_x^\alpha\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\,dS_\xi$$

при любом α. В частности,

$$\Delta u_1=\int\limits_{\partial Q}\rho_1(\xi)\,\Delta_x U(x-\xi)\,dS_\xi=0$$

и

$$\Delta u_2(x)=\int\limits_{\partial Q}\rho_2(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n_\xi}\Delta_x U(x-\xi)\,dS_\xi=0,$$

поскольку $\Delta_x U(x-\xi)=0$ при $x\neq\xi$.

Лемма 2. *Если $\rho_0(\xi)\in C^1(\bar Q)$, то объемный потенциал $u_0(x)$ принадлежит $C^2(Q)\cap C^1(\bar Q)$ и для всех $x\in Q$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta u_0=\rho_0$.*

Из измеримости и ограниченности в Q функции ρ_0 вытекает (см. п. 12 § 1 гл. II), что $u_0\in C^1(\bar Q)$ и

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_i}=\int\limits_Q\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i}\rho_0(\xi)\,d\xi=-\int\limits_Q\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \xi_i}\rho_0(\xi)\,d\xi,\qquad i=1,\ \ldots,\ n.$$

Если $\rho_0(\xi)\in C^1(\bar Q)$, то на основании формулы Остроградского

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_i}=\int\limits_Q U(x-\xi)\frac{\partial\rho_0}{\partial\xi_i}\,d\xi-\int\limits_{\partial Q}U(x-\xi)\,\rho_0(\xi)\,n_i(\xi)\,dS_\xi,$$

где $n_i(\xi)=\cos(\widehat{n,\xi_i})$ — непрерывная на ∂Q функция.

Первое слагаемое правой части этого равенства есть объемный потенциал с непрерывной в $\bar Q$ плотностью $\frac{\partial\rho_0}{\partial\xi_i}$. Значит, это слагаемое принадлежит $C^1(\bar Q)$. Второе слагаемое есть потенциал простого слоя с непрерывной на ∂Q плотностью $\rho_0 n_i$ и согласно лемме 1 принадлежит $C^\infty(Q)$. Поэтому функция $u_0\in C^1(\bar Q)\cap C^2(Q)$. Возьмем произвольную финитную в Q функцию ψ из $C^2(\bar Q)$. Так как $\psi\big|_{\partial Q}=\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\partial Q}=0$, то из (8) для всех $x\in Q$ имеем

$$\psi(x)=\int\limits_Q U(x-\xi)\,\Delta\psi(\xi)\,d\xi.\tag{10}$$

Применяя к функциям ψ и u_0 формулу Грина и используя последовательно теорему Фубини (теорема 10 п. 11 § 1 гл. II) и равенство (10), получим

$$\begin{aligned}\int_Q \psi(x)\,\Delta u_0(x)\,dx &= \int_Q \Delta\psi(x)\cdot u_0(x)\,dx = \\ &= \int_Q \Delta\psi(x)\left(\int_Q U(x-\xi)\,\rho_0(\xi)\,d\xi\right)dx = \\ &= \int_Q \rho_0(\xi)\left(\int_Q U(x-\xi)\,\Delta\psi(x)\,dx\right)d\xi = \int_Q \psi(\xi)\,\rho_0(\xi)\,d\xi.\end{aligned}$$

Таким образом, при любой финитной в Q функции ψ из $C^2(\bar{Q})$ имеет место равенство

$$\int_Q \psi(x)\,(\Delta u_0(x) - \rho_0(x))\,dx = 0,$$

откуда и вытекает, что $\Delta u_0 = \rho_0$ в Q. Лемма 2 доказана.

2. Основные свойства гармонических функций. Установим теперь некоторые важные свойства гармонических функций.

Теорема 1 (первая теорема о среднем). *Пусть $u(x)$ — гармоническая в области Q функция, а x — произвольная точка из Q. Тогда при любом r, $0<r<d$, где d — расстояние точки x до границы ∂Q, имеет место равенство*

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{|x-\xi|=r} u(\xi)\,dS_\xi. \tag{11}$$

Поскольку функция $u(\xi) \in C^2(|\xi - x| \leqslant r)$, то к этой функции в области $\{|\xi - x| < r\}$ можно применить формулу (9). В силу этой формулы для $n>2$ (для $n=2$ рассуждение аналогичное)

$$\begin{aligned}u(x) &= \\ &= \int_{|\xi-x|=r} \frac{1}{(n-2)\,\sigma_n r^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\,dS_\xi - \int_{|\xi-x|=r} \frac{u(\xi)}{(n-2)\,\sigma_n} \frac{\partial \frac{1}{|\xi-x|^{n-2}}}{\partial n_\xi}\,dS_\xi = \\ &= \frac{1}{(n-2)\,\sigma_n r^{n-2}} \int_{|\xi-x|=r} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\,dS_\xi + \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{|\xi-x|=r} u(\xi)\,dS_\xi,\end{aligned}$$

поскольку на сфере $\{|\xi - x| = r\}$

$$\frac{\partial \frac{1}{|\xi-x|^{n-2}}}{\partial n_\xi} = \frac{\partial \frac{1}{|\xi-x|^{n-2}}}{\partial |\xi-x|} = -\frac{(n-2)}{|x-\xi|^{n-1}} = -\frac{n-2}{r^{n-1}}.$$

Формула (11) теперь вытекает из формулы (3).

Теорема 2 (вторая теорема о среднем). *Пусть $u(x)$ — гармоническая в области Q функция, а x — произвольная точка из Q. Тогда при любом r, $0<r<d$, где d — расстояние точки x до*

границы ∂Q, имеет место равенство

$$u(x)=\frac{n}{\sigma_n r^n}\int\limits_{|\xi-x|<r} u(\xi)\,d\xi. \tag{12}$$

Согласно теореме 1 для любого ρ, $0<\rho<d$, имеет место равенство

$$\sigma_n\rho^{n-1}u(x)=\int\limits_{|\xi-x|=\rho} u(\xi)\,dS_\xi.$$

Интегрируя это равенство по ρ от 0 до r, получим равенство (12).

Теоремы 1 и 2 называются теоремами о среднем, поскольку в правых частях равенств (11) и (12) стоят средние значения функции u по сфере $\{|\xi-x|=r\}$ и по шару $\{|\xi-x|<r\}$ соответственно $\left(\sigma_n r^{n-1}\text{ — площадь сферы, } \frac{\sigma_n r^n}{n}\text{ — объем шара}\right)$.

Как было показано, гармоническая в области Q функция бесконечно дифференцируема в Q. При изучении гармонических функций часто бывает полезной следующая

Лемма 3. *Пусть функция $u(x)$ гармонична в Q и ограничена: $|u(x)|\leqslant M$. Тогда любая производная $D^\alpha u(x)$ порядка $|\alpha|=k$, $k=1, 2, \ldots$, в точке $x\in Q$ удовлетворяет неравенству*

$$|D^\alpha u(x)|\leqslant M\left(\frac{n}{\delta}\right)^k k^k, \tag{13}$$

где δ — расстояние от точки x до границы ∂Q.

Доказательство леммы будем проводить индукцией по k.

Пусть сначала $k=1$. Покажем, что $|u_{x_i}|\leqslant Mn/\delta$ для всех $i=1, \ldots, n$. Так как функция u_{x_i} гармоническая в Q, то в силу теоремы 2 для любого $\delta'<\delta$

$$u_{x_i}(x)=\frac{n}{\sigma_n\delta'^n}\int\limits_{|\xi-x|<\delta'} u_{\xi_i}\,d\xi=\frac{n}{\sigma_n\delta'^n}\int\limits_{|\xi-x|=\delta'} u(\xi)\cos\alpha_i\,dS_\xi,$$

где α_i — угол между вектором $\xi-x$ и осью $O\xi_i$. Поэтому

$$|u_{x_i}(x)|\leqslant\frac{n}{\sigma_n\delta'^n}\int\limits_{|\xi-x|=\delta'}|u(\xi)|\,dS_\xi\leqslant M\frac{n}{\sigma_n\delta'^n}\sigma_n\delta'^{n-1}=Mn/\delta'.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta'\to\delta$, получим требуемое неравенство.

Предположим теперь, что лемма доказана для всех производных $D^\alpha u$, где $|\alpha|\leqslant k-1$, $k\geqslant 2$. Докажем неравенство (13).

Возьмем два шара $\{|\xi-x|<\delta'\}$ и $\{|\xi-x|<\delta'/k\}$ с центром в точке x (δ' — любое положительное число, меньшее δ). По предположению индукции для любой точки ξ из шара $\{|\xi-x|<\delta'/k\}$

и любого β, $|\beta| = k-1$, имеет место неравенство

$$|D_\xi^\beta u(\xi)| \leqslant M\left(\frac{n}{\delta' - \delta'/k}\right)^{k-1} (k-1)^{k-1} = M\left(\frac{n}{\delta'}\right)^{k-1} k^{k-1}.$$

Таким образом, для любого β, $|\beta| = k-1$, гармоническая функция $D_\xi^\beta u(\xi)$ ограничена в шаре $\{|\xi - x| < \delta'/k\}$ постоянной $M(n/\delta')^{k-1} k^{k-1}$. Тогда для первых производных этой функции по уже доказанному имеем

$$|(D_\xi^\beta u(\xi))_{\xi_i}| \leqslant M\left(\frac{n}{\delta'}\right)^{k-1} k^{k-1}\left(\frac{n}{\delta'/k}\right) = M\left(\frac{n}{\delta'}\right)^{k} k^{k}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

То есть для любого α, $|\alpha| = k$, имеем $|D^\alpha u| \leqslant M(n/\delta')^k k^k$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta' \to \delta$, получим неравенство (13). Лемма доказана.

Рассмотрим некоторые приложения леммы 3.

Теорема 3. *Из любого бесконечного множества гармонических в Q функций, ограниченных в Q одной постоянной, можно выбрать последовательность, сходящуюся равномерно на любой строго внутренней подобласти области Q.*

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое бесконечное множество гармонических в области Q функций $u(x)$, ограниченных в Q в совокупности: $|u(x)| \leqslant M$. Возьмем произвольную последовательность областей $Q_1, Q_2, \ldots$, обладающую следующими свойствами: $Q_1 \subset Q_2 \subset \subset Q_3 \subset \ldots$; $Q_i \Subset Q$, $i = 1, 2, \ldots$; $\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i = Q$.

Множество $\mathfrak{M}$ состоит из функций, принадлежащих $C(\bar{Q}_1)$ и ограниченных на Q_1 в совокупности. В силу леммы 3 существует такая постоянная $C > 0$, зависящая лишь от области Q_1, что для всех функций u из $\mathfrak{M}$ $|\nabla u| \leqslant C$ при $x \in Q_1$. Поэтому множество $\mathfrak{M}$ равностепенно непрерывно в $\bar{Q}_1$. По теореме Арцела из $\mathfrak{M}$ можно выделить последовательность $u_{11}, u_{12}, \ldots$, равномерно сходящуюся в $\bar{Q}_1$. Так как эта последовательность равномерно ограничена и в силу леммы 3 равностепенно непрерывна в $\bar{Q}_2$, то из нее можно выделить подпоследовательность $u_{21}, u_{22}, \ldots$, равномерно сходящуюся в $\bar{Q}_2$. И так далее. Очевидно, диагональная последовательность $u_{11}, u_{22}, \ldots$ является искомой. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть последовательность гармонических в области Q функций $u_1(x), u_2(x), \ldots$ сходится к функции $u(x)$ равномерно в любой строго внутренней по отношению к Q подобласти. Тогда функция $u(x)$ гармоническая в Q и для любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ последовательность $D^\alpha u_1, D^\alpha u_2, \ldots$ сходится к функции $D^\alpha u$ равномерно в любой строго внутренней подобласти области Q.*

Пусть Q' — произвольная строго внутренняя подобласть области Q. Тогда функция $u(x) \in C(\bar{Q}')$. Возьмем такую область Q'', что $Q' \Subset Q'' \Subset Q$. Ясно, что каждая функция $u_m(x)$ ограничена в Q''.

В силу леммы 3 для любого α существует такая постоянная $C > 0$, зависящая лишь от Q', Q'' и $|\alpha|$, что при всех $m, s = 1, 2, \ldots$ имеют место неравенства

$$\|D^\alpha (u_m - u_s)\|_{C(\bar{Q}')} \leqslant C \|u_m - u_s\|_{C(\bar{Q}'')}.$$

Так как $\|u_m - u_s\|_{C(\bar{Q}'')} \to 0$ при $m, s \to \infty$, то все последовательности $D^\alpha u_m$, $m = 1, 2, \ldots$, являются фундаментальными в норме пространства $C(\bar{Q}')$. Это означает, что функция $u(x) \in C^\infty(\bar{Q}')$ и при любом α $\|D^\alpha u_m - D^\alpha u\|_{C(\bar{Q}')} \to 0$ при $m \to \infty$.

Переходя в равенстве $\Delta u_m = 0$, $x \in Q'$, к пределу при $m \to \infty$, получим, что $\Delta u = 0$ в Q', т. е. функция $u(x)$ гармоническая в Q', а тем самым, и в Q. Теорема доказана.

Теорема 5. *Функция, гармоническая в области Q, является аналитической в Q.*

Пусть функция $u(x)$ гармоническая в области Q. Возьмем произвольную точку x^0 из Q и обозначим через $\delta > 0$ расстояние от этой точки до границы ∂Q, а через $S_{\delta/4}(x^0)$ — шар $\{|x - x^0| < \delta/4\}$. Функция $u(x) \in C(\bar{Q}_{\delta/2})$, поэтому она ограничена в $Q_{\delta/2}$; пусть $M = \max\limits_{x \in \bar{Q}_{\delta/2}} |u(x)|$.

Так как расстояние от любой точки шара $\bar{S}_{\delta/4}(x^0)$ до границы $\partial Q_{\delta/2}$ не меньше чем $\delta/4$, то в силу леммы 3 для любой точки x из $\bar{S}_{\delta/4}(x^0)$ и любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ имеем неравенство

$$|D^\alpha u| \leqslant M (4n/\delta)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}.$$

Поскольку $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{k^{k+1/2}}{k!\, e^k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (формула Стирлинга), то существует такая постоянная $C > 0$, что для всех натуральных k $k^k \leqslant Ce^k k!$ и, тем самым, $|\alpha|^{|\alpha|} \leqslant Ce^{|\alpha|} (|\alpha|)!$.

Полагая в тождестве $(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum\limits_{|\alpha| = k} \frac{(|\alpha|)!}{\alpha!} x^\alpha$, справедливом при любом натуральном k, $x_1 = \ldots = x_n = 1$, получим равенство $n^k = \sum\limits_{|\alpha| = k} (|\alpha|)!/\alpha!$, из которого вытекает неравенство $(|\alpha|)!/\alpha! \leqslant \leqslant n^{|\alpha|}$. Поэтому при всех $x \in S_{\delta/4}(x^0)$ и всех α

$$|D^\alpha u| \leqslant CM (4n^2 e/\delta)^{|\alpha|} \alpha!. \tag{14}$$

Из неравенства (14) прежде всего вытекает, что ряд Тейлора функции $u(x)$

$$\sum_\alpha \frac{D^\alpha u(x^0)}{\alpha!} (x - x^0)^\alpha$$

абсолютно сходится в шаре $S = \left\{|x - x^0| < \frac{\delta}{4n^2 e}\right\}$, поэтому сумма ряда является аналитической функцией в S. Докажем, что этот ряд в шаре $S' = \left\{ |x - x^0| < \frac{\delta}{8n^3 e} \right\}$ сходится к функции $u(x)$. Для этого достаточно показать, что остаточный член формулы Тейлора функции u

$$R_N(x) = u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x^0)}{\alpha!}(x - x^0)^\alpha =$$
$$= \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x^0 + \theta(x - x^0))}{\alpha!}(x - x^0)^\alpha,$$

где $|\theta| < 1$, стремится к нулю при $N \to \infty$ в каждой точке S'. Поскольку при $x \in S'$ точка $x^0 + \theta(x - x^0)$ тоже содержится в S' и, тем самым, в шаре $S_{\delta/4}(x^0)$, то из (14) вытекает, что для всех x из S'

$$|R_N(x)| \leqslant \sum_{|\alpha|=N} CM \left(\frac{4n^2 e}{\delta}\right)^N \left(\frac{\delta}{8n^3 e}\right)^N \leqslant \frac{CM}{(2n)^N} n^N = \frac{CM}{2^N}.$$

Поэтому $R_N(x) \to 0$ при $N \to \infty$.

В силу произвольности точки $x^0 \in Q$ функция $u(x)$ аналитична в Q. Теорема доказана.

В двумерном случае наряду с теоремой 5, устанавливающей аналитичность гармонической функции как функции двух переменных x_1, x_2, имеет место и более глубокий результат, связывающий гармонические функции с аналитическими функциями одного комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$. Для простоты ограничимся случаем односвязной области.

Теорема 6. *Для того чтобы функция $u(x_1, x_2)$ была гармонической в односвязной области Q, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая аналитическая в Q функция $f(z)$, $z = x_1 + ix_2$, что $u(x_1, x_2) = \operatorname{Re} f(z)$.*

Достаточность. Пусть $f(z)$ аналитична в области Q. Тогда функции $u(x_1, x_2) = \operatorname{Re} f(x_1 + ix_2)$ и $v(x_1, x_2) = \operatorname{Im} f(x_1 + ix_2)$ в Q бесконечно дифференцируемы и удовлетворяет условиям Коши—Римана

$$u_{x_1} = v_{x_2}, \quad u_{x_2} = -v_{x_1}. \tag{15}$$

Дифференцируя первое из равенств (15) по x_1, второе — по x_2 и складывая полученные соотношения, получим $\Delta u = 0$, т. е. u — гармоническая функция.

Необходимость. Пусть функция u гармоническая в Q. Рассмотрим функцию

$$v(x) = \int_{L(x^0, x)} -u_{x_2}\,dx_1 + u_{x_1}\,dx_2,$$

где $x^0=(x_1^0, x_2^0)$ — некоторая фиксированная точка из Q, $x=(x_1, x_2)$, а $L(x^0, x)$ — произвольная спрямляемая кривая, соединяющая точки x^0 и x и лежащая в Q (из односвязности области Q в силу формулы Грина следует, что функция v не зависит от контура L). Функция $v(x)\in C^1(Q)$ и удовлетворяет условиям (15). Следовательно, функция $f=u+iv$ аналитична по x_1+ix_2 в Q. Теорема доказана.

Замечание 1. Аналитическая функция $f(z)$ по гармонической функции $u(x_1, x_2)$ определяется с точностью до произвольной чисто мнимой постоянной. Действительно, пусть $f_1(z)=u+iv_1$ и $f_2(z)=u+iv_2$ — две аналитические в Q функции, для которых $\operatorname{Re} f_1 = \operatorname{Re} f_2=u$. Тогда аналитична в Q функция $f_1-f_2=iv$, где (вещественная) функция $v=v_1-v_2$. В силу условий Коши—Римана $v_{x_1}=v_{x_2}=0$, т. е. $v_2=v_1+c$, где c — произвольная вещественная постоянная. Поэтому $f_2(z)=f_1(z)+ic$. Утверждение доказано.

Замечание 2. Утверждение, аналогичное теореме 6, имеет место и в случае произвольной области Q. В этом случае аналитическая по x_1+ix_2 в Q функция f, построенная по гармонической в Q функции u, может быть многозначной. Например, гармонической в кольце $\{1<|x|<2\}$ функции $\ln|x|$ отвечает многозначная аналитическая в этом кольце функция $\operatorname{Ln} z=\ln|x|+i\operatorname{Arg}(x_1+ix_2))$ $(z=x_1+ix_2)$.

Следствие. *Пусть аналитическая в односвязной области Q функция $z'=F(z)=F_1(x_1, x_2)+iF_2(x_1, x_2)$, $z=x_1+ix_2$, взаимно однозначно отображает эту область на некоторую односвязную область Q' комплексной плоскости $z'=x_1'+ix_2'$. Если функция $u'(x')$ гармоническая в Q', то функция $u(x)=u'(F_1(x), F_2(x))$ гармоническая в Q.*

Действительно, пусть $f'(z')$ — аналитическая в Q' функция, для которой $u'(x')=\operatorname{Re} f'(z')$. Так как функция $f(z)=f'(F(z))$ аналитична в Q, то функция $u(x)=u'(F_1(x), F_2(x))=\operatorname{Re} f'(z')= \operatorname{Re} f(z)$ гармонична в Q.

Следующее важное свойство гармонических функций, вытекающее из теоремы о среднем, называется принципом максимума.

Теорема 7 (принцип максимума). *Пусть гармоническая в Q функция $u(x)$ непрерывна в $\bar Q$. Тогда или $u(x)=\text{const}$ в Q, или*

$$\min_{x\in\partial Q} u(x)<u(x)<\max_{x\in\partial Q} u(x) \tag{16}$$

для всех $x\in Q$.

Пусть $M=\max\limits_{x\in\bar Q} u(x)$, Покажем, что если в области Q существует точка, в которой нарушается правое из неравенств (16), то функция $u(x)=\text{const}=M$ в Q. Действительно, пусть такая точка существует. Тогда в Q есть точка x^0, в которой $u=M$. Возьмем произвольную точку y из Q и покажем, что $u(y)=M$. Соединим точку y с точкой x^0 конечнозвенной ломаной L (без самопересечений), целиком лежащей в Q. Пусть $d>0$ — расстояние между L и ∂Q. Покроем кривую L конечным числом шаров $S_i=\{|x-x^i|<d/2\}$, $i=0, 1, \ldots, N$, центры которых $x^i\in L\cap S_{i-1}$, $i=1, \ldots, N$. При этом точка x^0 есть центр шара S_0, а точка $y\in S_N$.

В силу второй теоремы о среднем (теорема 2)

$$u(x^0)=\frac{n}{\sigma_n (d/2)^n}\int\limits_{|x-x^0|<d/2} u(x)\,dx,$$

т. е.

$$\int\limits_{S_0} (u(x)-u(x^0))\,dx=0.$$

Поскольку подынтегральная функция $u(x)-u(x^0)$ неположительна, то $u(x)=u(x^0)=M$ в S_0 и, в частности, $u(x^1)=M$. Повторяя для точки x^1 и шара S_1 те же рассуждения, что и для точки x^0 и шара S_0, покажем что $u(x)=M$ в S_1 и, в частности, $u(x^2)=M$. И так далее. В итоге получим, что $u(x)=M$ в S_N и, в частности, $u(y)=M$.

Таким образом, доказано, что или $u(x)=\text{const}$ в Q или для всех x из Q имеет место правое из неравенств в (16). Применяя это утверждение к функции $-u(x)$, получим, что или $u(x)=\text{const}$ в Q, или для всех x из Q имеет место левое из неравенств (16). Теорема доказана.

Следствие. *Из теоремы 7 немедленно вытекает, что для любой гармонической в Q функции $u(x)$, непрерывной в $\bar{Q}$, имеет место неравенство*

$$\|u\|_{C(\bar{Q})}\leqslant\|u\|_{C(\partial Q)}. \tag{17}$$

Теорема 8. *Пусть функции $u_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, принадлежат $C(\bar{Q})$ и являются гармоническими в Q. Если последовательность $u_k|_{\partial Q}$, $k=1, 2, \ldots$, сходится равномерно на ∂Q, то последовательность u_k, $k=1, 2, \ldots$, сходится равномерно в $\bar{Q}$ к некоторой гармонической в Q функции.*

Действительно, в силу формулы (17) для любых s и m

$$\|u_s-u_m\|_{C(\bar{Q})}\leqslant\|u_s-u_m\|_{C(\partial Q)}.$$

Так как последовательность $u_k|_{\partial Q}$, $k=1, 2, \ldots$, равномерно на ∂Q сходится, то $\|u_s-u_m\|_{C(\partial Q)}\to 0$ при m, $s\to\infty$; поэтому $\|u_s-u_m\|_{C(\bar{Q})}\to 0$ при m, $s\to\infty$. Из полноты пространства $C(\bar{Q})$ вытекает, что существует непрерывная функция $u(x)$, к которой равномерно в $\bar{Q}$ сходится последовательность $u_k(x)$, $k=1, \ldots$ Гармоничность функции $u(x)$ в Q следует из теоремы 4. Теорема доказана.

3. О классических решениях задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Напомним, что функция $u(x)$ называется классическим решением задачи Дирихле (первой краевой задачи) для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f, \qquad x \in Q, \tag{18}$$

$$u|_{\partial Q} = \varphi, \tag{19}$$

если $u(x) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$ и удовлетворяет соотношениям (18) и (19).

Прежде всего докажем единственность решения.

Теорема 9. *Задача Дирихле для уравнения Пуассона не может иметь более одного классического решения.*

Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — два решения задачи (18), (19). Тогда функция $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ является гармонической в Q, непрерывной в $\bar{Q}$ и обращается в нуль на ∂Q. Поэтому из неравенства (17) вытекает, что $u = 0$ в Q, т. е. $u_1 = u_2$. Теорема доказана.

Существование классического решения задачи (18), (19) в предположении, что $\partial Q \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, $f \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$, $\varphi \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\partial Q)$, установлено в п. 3 предыдущего параграфа. На самом деле там доказано более сильное утверждение: при сделанных предположениях относительно ∂Q, f и φ обобщенное решение u задачи (18), (19) принадлежит пространству $H_{\text{loc}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(Q) \cap H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$. Отсюда в силу теорем вложения следует, что $u(x) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$, т. е. является классическим решением. Но принадлежность функции пространствам $H_{\text{loc}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(Q)$ и $H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$ условия значительно более сильные, чем принадлежность пространствам $C^2(Q)$ и $C(\bar{Q})$ соответственно. Поэтому естественно ожидать, что классическое решение существует при более слабых ограничениях на ∂Q, f и φ.

Теорема 10. *Если* $\partial Q \in C^2$, $f \in C^1(\bar{Q})$, $\varphi \in C(\partial Q)$, *то задача* (18), (19) *имеет классическое решение.*

Прежде всего установим справедливость теоремы 10 для случая однородного уравнения (18), т. е. для задачи (1), (19).

Лемма 4. *Если* $\partial Q \in C^2$, *а* $\varphi \in C(\partial Q)$, *то задача* (1), (19) *имеет классическое решение.*

Пусть сначала $\partial Q \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$. Так как $\varphi \in C(\partial Q)$, то существует последовательность φ_k, $k = 1, 2, \ldots$, функций из $C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\partial Q)$, равномерно сходящаяся на ∂Q к функции φ. (Действительно, непрерывное продолжение функции φ в $\bar{Q}$ можно приблизить в $C(\bar{Q})$ функциями из $C^\infty(\bar{Q})$, а их значения на границе принадлежат $C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\partial Q)$.) Но для любой φ_k существует гармоническая в Q функция $u_k(x)$, являющаяся классическим решением задачи (1),

(19) с этой граничной функцией. В силу теоремы 8 последовательность $u_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, равномерно в $\bar{Q}$ сходится. При этом предельная функция $u(x)$ является гармонической в Q, непрерывной в $\bar{Q}$ и удовлетворяет граничному условию (19), т. е. является классическим решением задачи (1), (19).

Пусть теперь $\partial Q \in C^2$. Обозначим через Φ непрерывное продолжение в $\bar{Q}$ граничной функции φ, и пусть $M = \max_{x \in \bar{Q}} |\Phi(x)|$. Возьмем последовательность областей Q_i, $i=1, 2, \ldots$, обладающую следующими свойствами: $Q_i \Subset Q_{i+1}$ для всех $i=1, 2, \ldots$; $\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i = Q$; $\partial Q_i \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, $i=1, 2, \ldots$ Согласно доказанному при любом $i=1, 2, \ldots$ в области Q_i существует классическое решение $v_i(x)$ задачи (1), (19), удовлетворяющее граничному условию $v_i|_{\partial Q_i} = \Phi|_{\partial Q_i}$. При этом при всех $i=1, 2, \ldots$

$$\max_{x \in \bar{Q}_i} |v_i(x)| \leqslant M.$$

Обозначим через $u_i(x)$ заданную в $\bar{Q}$ функцию, равную $v_i(x)$ в $\bar{Q}_i$ и нулю вне $\bar{Q}_i$, $i=1, 2, \ldots$ В силу теоремы 3 последовательность функций $u_2(x)$, $u_3(x)$, ..., гармонических в Q_2, содержит подпоследовательность u_{11}, u_{12}, ..., равномерно сходящуюся в $\bar{Q}_1$. Последовательность u_{11}, u_{12}, ... состоит из функций, гармонических в Q_3 (если из нее выбросить, возможно, содержащуюся в ней функцию $u_2(x)$). Поэтому по теореме 3 из нее можно выбрать подпоследовательность u_{21}, u_{22}, ..., равномерно сходящуюся в $\bar{Q}_2$. И так далее.

Возьмем диагональную последовательность u_{11}, u_{22}, ..., u_{pp}, ... Соответствующую подпоследовательность последовательности областей Q_m, $m=1, 2, \ldots$, будем обозначать через Q_{ii}, $i=1, 2, \ldots$: функция u_{ii} равна v_{ii} в $\bar{Q}_{ii}$ и равна нулю вне $\bar{Q}_{ii}$. Очевидно, последовательность u_{pp}, $p=1, 2, \ldots$, сходится в Q и эта сходимость является равномерной на любом $\bar{Q}_{ii}$. Следовательно, согласно теореме 4 предельная функция $u(x)$ гармоническая в Q. Кроме того, $|u(x)| \leqslant M$ для всех $x \in Q$.

Покажем, что $u(x)$ непрерывна в $\bar{Q}$ и удовлетворяет граничному условию (19), т. е. докажем, что $u(x)$ — классическое решение задачи (1), (19).

Возьмем произвольную точку $x^0 \in \partial Q$. Так как $\partial Q \in C^2$, то существует такая точка $x^1 \notin \bar{Q}$ и такое $r > 0$, что касающийся границы ∂Q в точке x^0 шар $\{|x-x^1| < r\}$ не содержит точек области Q, а сфера $\{|x-x^1| = r\}$ имеет лишь одну точку x^0, общую с ∂Q. Фиксируем любое $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности в точке x^0 функции $\Phi(x)$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|\Phi(x) - \Phi(x^0)| < \varepsilon$ для всех точек из шара $\{|x-x^0| < \delta\}$, лежащих в $\bar{Q}$. Так как гармоническая при $x \neq x^1$ функция

$$w(x) = \frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{|x - x^1|^{n-2}}$$

(для определенности мы рассматриваем случай $n > 2$; в случае $n = 2$ $w(x) = -\ln r + \ln |x - x^1|$) неотрицательна при всех $x \in \bar{Q}$ и обращается в нуль только в единственной точке x^0 из $\bar{Q}$, то можно найти такое $C = C(\delta) > 0$, что для всех $x \in \bar{Q}$ будут справедливы неравенства

$$\Phi(x^0) - \varepsilon - Cw(x) < \Phi(x) < \Phi(x^0) + \varepsilon + Cw(x).$$

Функции $u_{pp}(x) + Cw(x)$ и $u_{pp}(x) - Cw(x)$ гармонические в Q_{pp}, непрерывные в $\bar{Q}_{pp}$ и $(u_{pp} + Cw)|_{\partial Q_{pp}} = (\Phi + Cw)|_{\partial Q_{pp}} > \Phi(x^0) - \varepsilon$ и $(u_{pp} - Cw)|_{\partial Q_{pp}} = (\Phi - Cw)|_{\partial Q_{pp}} < \Phi(x^0) + \varepsilon$. Поэтому согласно принципу максимума в области Q_{pp} $u_{pp}(x) + Cw(x) > \Phi(x^0) - \varepsilon$ и $u_{pp}(x) - Cw(x) < \Phi(x^0) + \varepsilon$, т. е.

$$\Phi(x^0) - \varepsilon - Cw(x) \leqslant u_{pp}(x) \leqslant \Phi(x^0) + \varepsilon + Cw(x)$$

для всех $x \in Q_{pp}$. Следовательно, для любого $x \in Q$

$$\Phi(x^0) - \varepsilon - Cw(x) \leqslant u(x) \leqslant \Phi(x^0) + \varepsilon + Cw(x).$$

Из этих неравенств, поскольку $w(x) \to 0$ при $x \to x^0$, в свою очередь вытекают неравенства

$$\Phi(x^0) - \varepsilon \leqslant \varliminf_{x \to x^0} u(x) \leqslant \varlimsup_{x \to x^0} u(x) \leqslant \Phi(x^0) + \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что $u(x)$ непрерывна в x^0 и $u(x^0) = \Phi(x^0) = \varphi(x^0)$. Лемма доказана.

Докажем теперь теорему 10. Рассмотрим функцию $u_0(x) = \int\limits_Q U(x - y) f(y)\, dy$, являющуюся объемным потенциалом с плотностью f. В силу леммы 2 $u_0(x) \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$ и является решением в Q уравнения (18). Согласно лемме 4 существует классическое решение $v(x)$ задачи $\Delta v = 0$ в Q, $v|_{\partial Q} = \varphi - u_0|_{\partial Q}$. Тогда функция $u = u_0 + v$ является классическим решением задачи (18), (19). Теорема доказана.

С помощью теоремы 10 установим следующее важное свойство гармонических функций.

Теорема 11 (теорема об устранении особенности). *Пусть функция $u(x)$ гармонична в области $Q \setminus \{x^0\}$, где x^0 — некоторая точка области Q. Если при $x \to x^0$ $u(x) = o(U(x - x^0))$, где U — фундаментальное решение уравнения Лапласа, то существует $\lim\limits_{x \to x^0} u(x) = A$, и функция $u(x)$, доопределенная в точке x^0 значением A, гармонична в Q.*

Доказательство. Возьмем шар $S_R(x^0)=\{|x-x^0|<R\}$, лежащий строго внутри Q. Обозначим через $v(x)$ классическое решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре $S_R(x^0)$, удовлетворяющее граничному условию $v|_{\partial S_R(x^0)}=u|_{\partial S_R(x^0)}$. Функция $u(x)-v(x)=w(x)$ гармонична в $S_R(x^0)\diagdown\{x^0\}$ и $w|_{\partial S_R(x^0)}=0$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что в каждой точке множества $S_R(x^0)\diagdown\{x^0\}$ функция $w=0$: в этом случае функция $u(x)$ при всех $x\in S_R(x^0)\diagdown\{x^0\}$ совпадает с функцией $v(x)$ и, следовательно, функция $u(x)$, доопределенная в точке x^0 числом $A=v(x^0)$, совпадает с гармонической функцией $v(x)$ во всем шаре $S_R(x^0)$.

Рассмотрим при произвольном $\varepsilon>0$ две функции

$$z_\pm(x)=\frac{\varepsilon}{|x-x^0|^{n-2}}\pm w(x)$$

(пусть, для определенности, размерность пространства $n>2$; если $n=2$, то функции $z_\pm(x)=\varepsilon\ln\frac{2R}{|x-x^0|}\pm w(x)$). Функции $z_\pm(x)$ гармоничны в $S_R(x^0)\diagdown\{x^0\}$ и $z_\pm(x)|_{\partial S_R(x^0)}=\varepsilon/R^{n-2}>0$. Так как по условию $u(x)=o\left(\frac{1}{|x-x^0|^{n-2}}\right)$ при $x\to x^0$, то $z_\pm(x)|_{|x-x^0|=\rho}=$ $=\frac{\varepsilon}{\rho^{n-2}}\pm w|_{|x-x^0|=\rho}=\frac{\varepsilon}{\rho^{n-2}}+o\left(\frac{1}{\rho^{n-2}}\right)$. Следовательно, при достаточно малых $\rho>0$ $z_\pm(x)|_{|x-x^0|=\rho}>0$. Согласно принципу максимума $z_\pm(x)>0$ для всех x из шарового слоя $\rho\leqslant|x-x^0|\leqslant R$. Пусть x^1 — любая точка из $S_R(x^0)\diagdown\{x^0\}$. При достаточно малом ρ она принадлежит шаровому слою $\rho\leqslant|x-x^0|\leqslant R$. Следовательно, $z_\pm(x^1)>0$, т. е. $|w(x^1)|<\frac{\varepsilon}{|x^1-x^0|^{n-2}}$, откуда в силу произвольности $\varepsilon>0$ $w(x^1)=0$. Теорема доказана.

В теореме 10 доказано существование классического решения задачи Дирихле (18), (19) при любых $f\in C^1(\bar Q)$, $\varphi\in C(\partial Q)$, $\partial Q\in C^2$. Возникает вопрос: не достаточно ли для разрешимости этой задачи предполагать лишь выполнения условия $f\in C(\bar Q)$? Условие $f\in C^1(\bar Q)$, действительно, завышенное: можно доказать, что для разрешимости задачи достаточно предположить, что функция f удовлетворяет в $\bar Q$ условию Гёльдера некоторого положительного порядка *). Однако заменить это условие условием $f\in C(\bar Q)$, как показывает следующий пример, нельзя.

Рассмотрим в шаре $Q=\{|x|<R\}$ радиуса $R<1$ уравнение Пуассона

$$\Delta u=\frac{x_2^2-x_1^2}{2|x|^2}\left(\frac{n+2}{(-\ln|x|)^{1/2}}+\frac{1}{2(-\ln|x|)^{3/2}}\right), \tag{20}$$

*) Функция $f(x)$ называется удовлетворяющей в Q условию Гёльдера порядка $\alpha>0$, если существует такая постоянная M, что для любых точек x' и x'' из Q $|f(x')-f(x'')|\leqslant M|x'-x''|^\alpha$.

функция в правой части которого (доопределим ее нулем в начале координат) непрерывна в $\bar{Q}$. Функция

$$u(x) = (x_1^2 - x_2^2)(-\ln|x|)^{1/2} \tag{21}$$

принадлежит $C(\bar{Q}) \cap C^\infty(\bar{Q} \setminus \{0\})$ (точка $\{0\}$ — начало координат) и, как легко проверить, удовлетворяет в $Q \setminus \{0\}$ уравнению (20) и граничному условию

$$u|_{|x|=R} = \sqrt{-\ln R}\,(x_1^2 - x_2^2)|_{|x|=R}. \tag{22}$$

Однако функция $u(x)$ не может быть классическим решением задачи (20), (22): поскольку

$$\lim_{|x|\to 0} u_{x_1x_1} = \lim_{|x|\to 0}\Big(2(-\ln|x|)^{1/2} + \frac{x_1^2(x_1^2-x_2^2)}{|x|^4(-\ln|x|)^{1/2}} - \\ - \frac{2x_1^2}{|x|^2(-\ln|x|)^{1/2}} - \frac{x_1^2-x_2^2}{2|x|^2(-\ln|x|)^{1/2}} - \frac{x_1^2(x_1^2-x_2^2)}{4|x|^4(-\ln|x|)^{3/2}}\Big) = \infty,$$

то $u(x) \notin C^2(Q)$.

Покажем, что задача (20), (22) вообще не имеет классического решения.

Предположим, напротив, что классическое решение $v(x)$ этой задачи существует. Тогда функция $w(x) = u(x) - v(x)$ гармонична и ограничена в $Q \setminus \{0\}$. По теореме об устранении особенности функцию $w(x)$ можно так доопределить в начале координат, что она станет гармонической в Q и, тем самым, будет принадлежать $C^2(Q)$. Поэтому, в частности, существует (конечный) предел $\lim\limits_{|x|\to 0} w_{x_1x_1}$. Существование конечного предела $\lim\limits_{|x|\to 0} v_{x_1x_1}$ вытекает из принадлежности функции $v(x)$ пространству $C^2(Q)$. Поэтому должен существовать конечный предел $\lim\limits_{|x|\to 0} u_{x_1x_1} = \lim\limits_{|x|\to 0} w_{x_1x_1} + \lim\limits_{|x|\to 0} v_{x_1x_1}$. Это противоречие доказывает утверждение.

Мы уже неоднократно пользовались формулой (8), дающей представление произвольной функции $u(x)$ из $C^2(\bar{Q})$ через значения в Q ее оператора Лапласа и значения u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ на границе ∂Q. Для дальнейшего нам понадобится еще одна формула такого рода.

Прежде всего заметим, что для произвольной функции $u(x)$ из $C^2(\bar{Q})$ и любой точки $y \notin \bar{Q}$ имеет место равенство

$$0 = \int_Q U(y-\xi)\,\Delta u(\xi)\,d\xi + \\ + \int_{\partial Q}\left[u(\xi)\frac{\partial U(y-\xi)}{\partial n_\xi} - \frac{\partial u(\xi)}{\partial n}U(y-\xi)\right]dS_\xi, \tag{23}$$

где $U(y-\xi)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Для доказательства этого равенства достаточно воспользоваться формулой Грина, примененной к функциям $u(\xi)$ и $U(y-\xi)$ в области Q:

$$\int\limits_Q [u(\xi)\Delta_\xi U(y-\xi) - U(y-\xi)\Delta u(\xi)]\,d\xi =$$
$$= \int\limits_{\partial Q}\left[u(\xi)\frac{\partial U(y-\xi)}{\partial n_\xi} - U(y-\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\right]dS_\xi,$$

и гармоничностью по ξ в Q функции $U(y-\xi)$.

Возьмем теперь любые точки $x \in Q$, $y \notin \bar{Q}$ и произвольную непрерывную вне $\bar{Q}$ функцию $d(y)$. Умножая (23) на $d(y)$ и вычитая почленно полученное равенство из равенства (8), получим, что для любой функции u из $C^2(\bar{Q})$ имеет место представление

$$u(x) = \int\limits_Q [U(x-\xi) - d(y)U(y-\xi)]\,\Delta u(\xi)\,d\xi +$$
$$+ \int\limits_{\partial Q}\left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}(d(y)U(y-\xi) - U(x-\xi)) + \right.$$
$$\left. + u(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}(U(x-\xi) - d(y)U(y-\xi))\right]dS_\xi \qquad (24)$$

при всех $x \in Q$, $y \notin \bar{Q}$ и произвольной непрерывной вне $\bar{Q}$ функции $d(y)$.

Можно показать, что при весьма широких предположениях относительно области Q существует такое отображение $y = y(x)$, ставящее в соответствие каждой точке $x \in Q$ точку $y \notin \bar{Q}$, и такая функция $d(y(x))$, что для всех $x \in Q$

$$d(y(x))\,U(y(x)-\xi) - U(x-\xi) \equiv 0, \qquad \xi \in \partial Q. \qquad (25)$$

Формула (24) тогда даст представление в Q произвольной функции $u(x)$ из $C^2(\bar{Q})$ через ее значение на границе и значение оператора Лапласа от этой функции в Q. Мы ограничимся случаем, когда Q есть шар; в этом случае функции $y(x)$ и $d(y(x))$ легко находятся в явном виде.

Итак, пусть $Q = \{|\xi| < R\}$, и пусть, для определенности, размерность пространства $n > 2$. Тогда условие (25) имеет вид

$$\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} - \frac{d(y(x))}{|y(x)-\xi|^{n-2}} \equiv 0, \qquad |\xi| = R,$$

или, если обозначить $d^{1/(n-2)}$ через b, вид

$$\frac{1}{|x-\xi|} = \frac{b(y(x))}{|y(x)-\xi|}, \qquad |\xi| = R. \qquad (26)$$

Отображение $y = y(x)$ будем искать в виде

$$y = a(x)\,x \qquad (27)$$

с неизвестной пока функцией $a(x)$. Тождество (26) будет выполнено, если функции $a(x)$ и $b(y(x))$ связаны соотношением

$$|y(x)-\xi|^2 \equiv b^2(y(x))\,|x-\xi|^2, \qquad |\xi|=R,$$

или соотношением

$$(a^2(x)-b^2(y(x)))\,|x|^2+(1-b^2(y(x)))\,R^2 \equiv$$
$$\equiv 2\,(x,\ \xi)\,(a(x)-b^2(y(x))), \qquad |\xi|=R.$$

Положим $b(y(x))=\frac{R}{|x|}$, $a(x)=b^2(y(x))=\frac{R^2}{|x|^2}$. Тогда выполняется тождество (26) и для любой $x \in Q$ точка

$$y=y(x)=a(x)\,x=\frac{R^2}{|x|^2}\,x \tag{28}$$

находится вне $\bar{Q}$, так как при $|x|<R$ $|y|=R^2/|x|>R$.

Для сферы $\{|\xi|=R\}$ нормаль $n_\xi=\xi/|\xi|=\xi/R$, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\right)=\left(\nabla_\xi \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}},\ n_\xi\right)=\frac{n-2}{|x-\xi|^n}\,(x-\xi,\ n_\xi)=$$
$$=\frac{(n-2)\,(x-\xi,\ \xi)}{R\,|x-\xi|^n}=\frac{(n-2)\,((x,\ \xi)-R^2)}{R\,|x-\xi|^n}. \tag{29}$$

Аналогично вычисляется $\frac{\partial}{\partial n_\xi}\,(1/|y(x)-\xi|^{n-2})$. Поэтому с помощью (26) для $|\xi|=R$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}-\frac{b^{n-2}(y(x))}{|y(x)-\xi|^{n-2}}\right)=$$
$$=\frac{(n-2)}{R\,|x-\xi|^n}\left[(x,\ \xi)-R^2-\frac{(y(x),\ \xi)-R^2}{b^2(y(x))}\right]=\frac{|x|^2-R^2}{R\,|x-\xi|^n}\,(n-2).$$

Таким образом, если $u(x) \in C^2(|x| \leqslant R)$, то для любой точки x, $|x|<R$, имеет место равенство

$$u(x)=\int\limits_{|\xi|=R} P_R(x,\ \xi)\,u(\xi)\,dS_\xi-\int\limits_{|\xi|<R} G_R(x,\ \xi)\,\Delta u(\xi)\,d\xi, \tag{30}$$

где

$$P_R(x,\ \xi)=\frac{R^2-|x|^2}{\sigma_n R\,|x-\xi|^n}, \tag{31}$$

а

$$G_R(x,\ \xi)=\frac{1}{\sigma_n}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}-\frac{(R/|x|)^{n-2}}{|(R/|x|)^2\,x-\xi|^{n-2}}\right). \tag{32}$$

Совершенно аналогично устанавливается представление (30) и в двумерном случае, $n=2$. При этом функция $P_R(x,\ \xi)$ имеет вид (31), а

$$G_R(x,\ \xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x|\left|\xi-\frac{R^2}{|x|^2}\,x\right|}{R\,|x-\xi|}. \tag{32'}$$

Функция $P_R(x, \xi)$, определенная при $|\xi| = R$, $|x| \leqslant R$ формулой (31), называется *ядром Пуассона* первой краевой задачи (задачи Дирихле) для оператора Лапласа в шаре $\{|x| < R\}$.

Функция $G_R(x, \xi)$, определенная при $|\xi| \leqslant R$, $|x| \leqslant R$ формулой (32) в случае $n > 2$ и формулой (32′) в случае $n = 2$, называется *функцией Грина* первой краевой задачи (задачи Дирихле) для оператора Лапласа в шаре $\{|x| < R\}$.

Лемма 5. *Функция $G_R(x, \xi)$, определенная в области $\{x \neq \xi, x \neq \xi R^2/|\xi|^2\}$ пространства R_{2n} формулой* (32) *для $n > 2$ и формулой* (32′) *для $n = 2$, непрерывна в этой области и обладает следующими свойствами:*

а) $G_R(x, \xi) \equiv 0$ *при* $|x| = R$,

б) $G_R(x, \xi) = G_R(\xi, x)$,

в) $G_R(x, \xi)$ *гармонична по x и по ξ,*

г) *при* $|x| \leqslant R$, $|\xi| \leqslant R$ $0 \leqslant G_R(x, \xi) \leqslant 1/(\sigma_n |x - \xi|^{n-2})$ *для* $n > 2$ *и* $0 \leqslant G_R(x, \xi) \leqslant \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2R}{|x - \xi|}$ *для* $n = 2$.

Свойство а) функции $G_R(x, \xi)$ вытекает непосредственно из (32) (или из (32′) при $n = 2$).

Для любых x и ξ справедливо равенство $|R^2\xi - x|\xi|^2|^2 |x|^2 = |R^2 x - \xi|x|^2|^2 |\xi|^2$. Из него немедленно вытекает, что условие $\xi = xR^2/|x|^2$ эквивалентно условию $x = \xi R^2/|\xi|^2$; поэтому если точка (x, ξ) (из R_{2n}) принадлежит области определения функции $G_R(x, \xi)$, то и точка (ξ, x) принадлежит этой области. Кроме того, из этого равенства вытекает равенство $\frac{R}{|x|\,|R^2x/|x|^2 - \xi|} = \frac{R}{|\xi|\,|R^2\xi/|\xi|^2 - x|}$, а следовательно, и равенство $G_R(x, \xi) = G_R(\xi, x)$. Свойство б) доказано.

Из (32) (или из (32′) при $n = 2$) вытекает, что функция $G_R(x, \xi)$ гармонична по ξ. В силу симметрии функции $G_R(x, \xi)$ (свойство б)) она гармонична и по x. Свойство в) доказано.

Правое неравенство свойства г) при $n > 2$ вытекает из (32). Для доказательства правого неравенства свойства г) при $n = 2$ заметим, что при $|x| \leqslant R$, $|\xi| \leqslant R$ $|x|\,|\xi - R^2x/|x|^2| = |\xi|x| - R^2x/|x|| \leqslant |\xi|\,|x| + R^2 \leqslant 2R^2$. Поэтому при $|x| \leqslant R$, $|\xi| \leqslant R$ $0 \leqslant \ln \frac{2R^2}{|x|\,|\xi - R^2x/|x|^2|}$ и, тем самым,

$$G_R(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2R}{|x - \xi|} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2R^2}{|x|\,|\xi - R^2x/|x|^2|} \leqslant \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2R}{|x - \xi|}.$$

Докажем теперь левые неравенства из г). Пусть сначала $x = 0$. В силу свойства б) $G_R(0, \xi) = G_R(\xi, 0)$, поэтому $G_R(0, \xi) = \frac{1}{\sigma_n}\left(\frac{1}{|\xi|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right) \geqslant 0$ в случае $n > 2$ и $G_R(0, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{|\xi|} \geqslant 0$ при $n = 2$.

Возьмем теперь произвольную точку x^0, $0 < |x^0| < R$, и шар $\{|\xi - x^0| < \varepsilon\}$ радиуса ε, $0 < \varepsilon < R - |x^0|$, лежащий в шаре

$\{|\xi|<R\}$. Согласно свойствам а) и б) $G_R(x^0, \xi)\equiv 0$ для $|\xi|=R$. На сфере $\{|\xi-x^0|=\varepsilon\}$ при достаточно малом ε

$$G_R(x^0, \xi)=\frac{1}{\sigma_n\varepsilon^{n-2}}-\frac{(R/|x^0|)^{n-2}}{\sigma_n\,|x^0R^2/|x^0|^2-\xi|^{n-2}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\sigma_n}\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}-\frac{1}{(R-|x^0|)^{n-2}}\right)>0 \quad \text{при} \quad n>2$$

и

$$G_R(x, \xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x^0|\,|\xi-R^2x^0/|x^0|^2|}{R}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\ln(R-|x^0|)\right)>0 \quad \text{при} \quad n=2.$$

Поэтому в силу принципа максимума гармоническая по ξ функция $G_R(x^0, \xi)>0$ в области $\{|\xi|<R\}\setminus\{|\xi-x^0|\leqslant\varepsilon\}$. Поскольку число $\varepsilon>0$ может быть взято произвольно малым, то из этого неравенства вытекает левое из неравенств в г). Лемма доказана.

Интегральное представление (30) получено в предположении, что функция $u(x)\in C^2(|x|\leqslant R)$. Лемма 5 позволяет получить это представление при меньших требованиях на функцию u.

Лемма 6. *Пусть функция* $u(x)\in C(|x|\leqslant R)\cap C^2(|x|<R)$ *и функция* $\Delta u(x)$ *ограничена в шаре* $\{|x|<R\}$. *Тогда для любой точки* x, $|x|<R$, *справедливо равенство* (30).

Пусть x^0 — произвольная точка шара $\{|x|<R\}$, и пусть ρ_0 и ρ — такие числа, что $|x^0|<\rho_0\leqslant\rho<R$. Так как $u(x)\in C^2(|x|\leqslant\rho)$, то в силу (30) для всех x, $|x|<\rho$, и, в частности, для $x=x$, имеем

$$u(x^0)=\int\limits_{|\xi|=\rho}P_\rho(x^0, \xi)\,u(\xi)\,dS_\xi-\int\limits_{|\xi|<\rho}G_\rho(x^0, \xi)\,\Delta u(\xi)\,d\xi. \tag{33}$$

Сделаем в интеграле по сфере $\{|\xi|=\rho\}$ из (33) замену переменных $\xi=\frac{\eta}{R}\rho$:

$$\int\limits_{|\xi|=\rho}P_\rho(x^0, \xi)\,u(\xi)\,dS_\xi=\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-1}\int\limits_{|\eta|=R}P_\rho\left(x^0, \frac{\eta\rho}{R}\right)u\left(\frac{\eta\rho}{R}\right)dS_\eta.$$

Так как функция $(\rho/R)^{n-1}P_\rho(x^0, \eta\rho/R)\,u(\eta\rho/R)$ по переменным $\eta_1, \ldots, \eta_n$, ρ непрерывна на множестве $\{|\eta|=R, \rho_0\leqslant\rho\leqslant R\}$ и при $\rho\to R$ $(\rho/R)^{n-1}P_\rho(x^0, \eta\rho/R)\,u(\eta\rho/R)\to P_R(x^0, \eta)\,u(\eta)$, то

$$\lim_{\rho\to R}\int\limits_{|\xi|=\rho}P_\rho(x^0, \xi)\,u(\xi)\,dS_\xi=\int\limits_{|\xi|=R}P_R(x^0, \xi)\,u(\xi)\,dS_\xi. \tag{34}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое правой части (33). Обозначим через $\tilde G_\rho(x^0, \xi)$ функцию, равную $G_\rho(x^0, \xi)$ при $|\xi|<\rho$ и нулю для $|\xi|\geqslant\rho$. Тогда

$$\int\limits_{|\xi|<\rho} G_\rho(x^0, \xi)\,\Delta u(\xi)\,d\xi = \int\limits_{|\xi|<R} \tilde{G}_\rho(x^0, \xi)\,\Delta u(\xi)\,d\xi.$$

Очевидно, что $\tilde{G}_\rho(x^0, \xi)\to G_R(x^0, \xi)$ при $\rho\to R$ для всех $\xi\neq x^0$, $|\xi|<R$. Кроме того, на основании свойства г) из леммы 5 функция $\tilde{G}_\rho(x^0, \xi)\,\Delta u(\xi)$ мажорируется не зависящей от ρ интегрируемой в шаре $\{|\xi|<R\}$ функцией:

$$|\tilde{G}_\rho(x^0, \xi)\,\Delta u(\xi)|\leqslant\frac{M}{\sigma_n|x^0-\xi|^{n-2}} \quad \text{при} \quad n>2$$

и

$$|\tilde{G}_\rho(x^0, \xi)\,\Delta u(\xi)|\leqslant\frac{M}{2\pi}\ln\frac{2R}{|x^0-\xi|} \quad \text{при} \quad n=2,$$

где $M=\sup\limits_{|x|\leqslant R}|\Delta u(x)|$. Поэтому на основании теоремы Лебега

$$\lim_{\rho\to R}\int\limits_{|\xi|<\rho} G_\rho(x^0, \xi)\,\Delta u(\xi)\,d\xi = \int\limits_{|\xi|<R} G_R(x^0, \xi)\,\Delta u(\xi)\,d\xi. \tag{35}$$

Переходя к пределу в (33) при $\rho\to R$, с помощью (34) и (35) получим равенство (30) для любой точки из шара $\{|x|<R\}$. Лемма доказана.

Из леммы 6 следует, что классическое решение задачи Дирихле

$$\begin{gathered}\Delta u=f,\ |x|<R,\\ u|_{\{|x|=R\}}=\varphi\end{gathered} \tag{36}$$

при непрерывной на сфере $\{|x|=R\}$ функции φ и ограниченной непрерывной в шаре $\{|x|<R\}$ функции f представляется (если оно существует) в виде

$$u(x)=\int\limits_{|\xi|=R} P_R(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,dS_\xi-\int\limits_{|\xi|<R} G_R(x, \xi)\,f(\xi)\,d\xi. \tag{37}$$

Заметим, что эти условия (как показывает приведенный выше пример) не гарантируют существования классического решения.

В силу теоремы 10 для существования классического решения задачи (36) достаточно потребовать, чтобы $f(x)\in C^1(|x|\leqslant R)$. Таким образом, из теоремы 10 и леммы 6 вытекает следующее утверждение.

Теорема 12. *Если* $f(x)\in C^1(|x|\leqslant R)$ *и* $\varphi(x)\in C(|x|=R)$, *то классическое решение задачи Дирихле* (36) *существует и представляется в виде* (37).

Замечание. Пусть Q — односвязная область плоскости (x_1, x_2), и пусть $z'=F(z)$, $z=x_1+ix_2$, $z'=x_1'+ix_2'$ — аналитическая в Q и непрерывно дифференцируемая (по x_1, x_2) в $\bar{Q}$ функция, осуществляющая взаимно однозначное отображение области Q на круг $\{|z'|<R\}$ радиуса R $(R=|F(z)|\,|_{z\in\partial Q})$.

Обозначим через $u(z)=u(x_1, x_2)$ классическое решение задачи Дирихле

$$\begin{gathered}\Delta u=0, \qquad z\in Q,\\ u\,|_{z\in\partial Q}=\varphi(z),\end{gathered} \tag{38}$$

где $\varphi(z)\in C(\partial Q)$, а через $u'(z')=u'(x_1', x_2')$ — классическое решение задачи Дирихле

$$\begin{gathered}\Delta u'=0, \qquad |z'|<R,\\ u'\,|_{\{|z'|=R\}}=\psi(z'),\end{gathered}$$

где $\psi(z')=\varphi(F_{-1}(z'))$ $(F_{-1}(F(z))\equiv z,\ z\in Q)$.

Согласно теореме 12

$$u'(z')=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|\zeta'|=R}\frac{R^2-|z'|^2}{|z'-\zeta'|^2}\psi(\zeta')\,|d\zeta'|.$$

Из теоремы единственности классического решения задачи Дирихле (теорема 9) и следствия из теоремы 6 вытекает, что $u(z)=u(F_{-1}(z'))=u'(z')$. Поэтому решение задачи (38) имеет вид

$$u(z)=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\partial Q}\frac{R^2-|F(z)|^2}{|F(z)-F(\zeta)|^2}|F'(\zeta)|\,\varphi(\zeta)\,|d\zeta|=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial Q}\frac{|F(\zeta)|^2-|F(z)|^2}{|F(\zeta)-F(z)|^2}\,\frac{|F'(\zeta)|}{|F(\zeta)|}\varphi(\zeta)\,|d\zeta|.$$

4. Гармонические функции в неограниченных областях. Пусть Q — неограниченная область пространства R_n, и пусть ее дополнение $R_n\setminus Q$ содержит хотя бы одну внутреннюю точку; поместим в эту точку начало координат.

Рассмотрим взаимно однозначно отображение

$$x'=\frac{x}{|x|^2} \tag{39}$$

области $R_n\setminus\{0\}$ на себя. Это отображение называется *преобразованием инверсии* (относительно сферы $\{|x|=1\}$), им мы уже пользовались в предыдущем пункте. При отображении (39) сфера $\{|x|=1\}$ переходит в себя, область $\{0<|x|<1\}$ отображается в область $\{|x|>1\}$ и, наоборот, область $\{|x|>1\}$ — в область $\{0<|x|<1\}$. Очевидно, что отображение, обратное к (39), имеет вид

$$x=\frac{x'}{|x'|^2},$$

т. е. тоже является преобразованием инверсии.

В результате преобразования инверсии область Q переходит в некоторую ограниченную область Q'. Отметим, что начало координат является граничной точкой области Q'. В случае, когда ∂Q не ограничена, начало координат является граничной точкой и множества $\bar{Q}'$. Если же ∂Q ограничена, т. е. если Q — внешность некоторого ограниченного множества, то начало координат — изолированная граничная точка области Q' и, тем самым, внутренняя точка множества $\bar{Q}'$.

Пусть в области Q задана функция $u(x)$. Функция $u'(x')$, определенная в области Q' равенством

$$u'(x') = \frac{1}{|x'|^{n-2}}\, u\left(\frac{x'}{|x'|^2}\right), \tag{40}$$

называется *преобразованием Кельвина* функции u.

Из формул (39) и (40) вытекает, что

$$u(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}}\, u'\left(\frac{x}{|x|^2}\right), \tag{41}$$

т. е. преобразование, обратное к (40), тоже является преобразованием Кельвина.

Лемма 7. *Если функция $u(x)$ гармонична в области Q, то функция $u'(x')$ гармонична в области Q'.*

Пусть Q_1' — произвольная строго внутренняя подобласть области Q', а область Q_1 — ее прообраз при преобразовании инверсии. Тогда область Q_1 является ограниченной строго внутренней подобластью области Q. Так как функция u гармонична в Q_1 и принадлежит $C^2(\bar{Q}_1)$, то согласно формуле (9) для всех x из Q_1

$$u(x) = \int\limits_{\partial Q_1}\left[\frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} + \nu(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\right)\right] dS_\xi,$$

где $\mu(\xi) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\Big|_{\partial Q_1}$, $\nu(\xi) = -\frac{u(\xi)}{(n-2)\sigma_n}\Big|_{\partial Q_1}$ — непрерывные на ∂Q_1 функции (для определенности, мы рассматриваем случай $n>2$; в случае $n=2$ все рассуждения совершенно аналогичны). Поэтому в силу (40) для всех $x' \in Q_1'$

$$u'(x') = \int\limits_{\partial Q_1}\left[\frac{\mu(\xi)}{|x'|^{n-2}\left|\frac{x'}{|x'|^2}-\xi\right|^{n-2}} + \right.$$

$$\left. + \nu(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{|x'|^{n-2}\left|\frac{x'}{|x'|^2}-\xi\right|^{n-2}}\right)\right] dS_\xi. \tag{42}$$

Из утверждения в) леммы 5 предыдущего пункта вытекает, что функция $|x'|^{2-n}\left|\frac{x'}{|x'|^2}-\xi\right|^{2-n}$, а следовательно, и функция $\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(|x'|^{2-n}\left|\frac{x'}{|x'|^2}-\xi\right|^{2-n}\right)$ гармоничны по x' при $\frac{x'}{|x'|^2} \neq \xi$. Таким образом, подынтегральная функция в (42) и любая ее производная по x' непрерывны по совокупности переменных ξ, x' и гармоничны по x' при $\xi \in \partial Q_1$ и $x' \in Q'$ $\left(\text{условие } \frac{x'}{|x'|^2} \notin \partial Q_1 \text{ эквивалентно условию } x' \notin \partial Q_1'\right)$.

Следовательно, для любой точки $x^1 \in Q_1'$ равенство (42) можно дифференцировать по x' под знаком интеграла любое число раз и при этом $\Delta u' = 0$. В силу произвольности Q_1' лемма доказана.

Таким образом, исследование гармонических функций в неограниченной области, дополнение которой имеет внутренние точки, с помощью леммы 7 сведено к исследованию гармонических функций в ограниченной области.

Пусть дополнение $R_n \setminus Q$ области Q из R_n ограничено. Заданная в области Q гармоническая функция $u(x)$ называется *регулярной на бесконечности*, если при $|x| \to \infty$ $u(x) = o(1)$ в случае $n > 2$ и $u(x) = o(\ln|x|)$ в случае $n = 2$.

Пусть дополнение области Q имеет внутренние точки (и среди них, как и выше, начало координат). В результате преобразования инверсии (39) область Q перейдет в ограниченную область Q', имеющую изолированную граничную точку — начало координат. Если заданная в Q гармоническая функция регулярна на бесконечности, то в силу (40) преобразование Кельвина $u'(x')$ этой функции при $x' \to 0$ есть $o(|x'|^{2-n})$ при $n > 2$ и $o(\ln|x'|)$ при $n = 2$, т. е. при $x' \to 0$ $u'(x') = o(U(x'))$, где U — фундаментальное решение уравнения Лапласа. Тогда по теореме об устранении особенности существует $\lim\limits_{x' \to 0} u'(x') = A$ и функция $u'(x')$, доопределенная в начале координат значением A (сохраним за нею прежнее обозначение $u'(x')$), является гармонической в области $Q_0' = Q' \cup \{0\}$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 8. *Пусть функция $u(x)$ гармонична в неограниченной области Q, дополнение которой ограничено и имеет внутренние точки, и регулярна на бесконечности. Тогда ее преобразование Кельвина гармонично в Q_0'.*

Согласно теореме 5 функция $u'(x')$ аналитична по x' в $Q' \cup \{0\}$. Поэтому, в частности, существует такое число R_0, что функция $u'(x')$ разлагается в шаре $\{|x'| < R_0\}$ в абсолютно (и равномерно) сходящийся (вместе со всеми производными) ряд Тейлора

$$u'(x') = \sum_{\alpha} A_\alpha x'^\alpha,$$

где $A_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u'(0)$, $A_0 = A$. Но тогда в силу (39) и (41) для всех x, $|x|>1/R_0$,

$$u(x)=\sum_{\alpha} A_\alpha \frac{x^\alpha}{|x|^{2|\alpha|+n-2}}, \tag{43}$$

причем ряд, стоящий в правой части этого равенства, сходится при $|x|>1/R_0$ абсолютно и равномерно вместе со всеми своими производными.

Обозначим через $T(x)$ функцию $u(x)-\frac{A_0}{|x|^{n-2}}$, т. е. при $|x|>1/R_0$ $T(x)=\sum_{|\alpha|\geqslant 1} A_\alpha \frac{x^\alpha}{|x|^{2|\alpha|+n-2}}$. Так как при любом $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $D^\alpha u=D^\alpha \frac{A_0}{|x|^{n-2}}+D^\alpha T(x)$ и так как $|D^\alpha T|\leqslant \frac{C_\alpha}{|x|^{n+|\alpha|-1}}$, где C_α — некоторая положительная постоянная, то для всех x, $|x|>1/R_0$,

$$\left|D^\alpha u-D^\alpha \frac{A_0}{|x|^{n-2}}\right|\leqslant \frac{C_\alpha}{|x|^{n+|\alpha|-1}}. \tag{44}$$

В частности,

$$\begin{gathered}\left|u(x)-\frac{A_0}{|x|^{n-2}}\right|\leqslant \frac{\text{const}}{|x|^{n-1}},\\ \left|\nabla u-\frac{A_0(2-n)x}{|x|^n}\right|\leqslant \frac{\text{const}}{|x|^n}.\end{gathered} \tag{45}$$

Утверждения о поведении при больших значениях $|x|$ гармонической в области Q и регулярной на бесконечности функции $u(x)$, только что установленные в случае, когда дополнение области Q ограничено и имеет внутренние точки, справедливы всегда, когда дополнение области Q ограничено (в частности, Q может совпадать со всем пространством R_n). Действительно, поскольку нас интересуют значения функции $u(x)$ лишь при достаточно больших значениях $|x|$, то ее можно считать заданной только на области $Q_1=\{|x|>R_1\}$, являющейся при достаточно большом R_1 подобластью области Q. А область Q_1 является дополнением множества $\{|x|\leqslant R_1\}$, начало координат для которого является внутренней точкой.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 13. *Пусть дополнение области Q ограничено. Тогда для любой регулярной на бесконечности гармонической в Q функции $u(x)$ существует такая постоянная $R>0$, что для всех x, $|x|>R$, функция $u(x)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся вместе со всеми производными ряд* (43) *и имеют место неравенства* (44).

Из теоремы 13, в частности, вытекает, что если функция $u(x)$ гармоническая в n-мерной, $n>2$, области Q, являющейся внешностью ограниченного множества, убывает на бесконечности, то она убывает не слабее, чем фундаментальное решение уравнения Лапласа, и при этом существует предел функции $u(x)|x|^{n-2}$ при $|x|\to\infty$. В случае $n=2$ гармоническая в Q функция $u(x)$, растущая слабее, чем фундаментальное решение, на самом деле ограничена, и существует ее предел при $|x|\to\infty$.

Замечание. Если дополнение области Q не ограничено, то для гармонической в Q функции $u(x)$, удовлетворяющей условию:

$$u(x)=o(1) \quad \text{при} \quad |x|\to\infty, \qquad x\in Q, \quad \text{для} \quad n>2$$

или

$$u(x)=o(\ln|x|) \quad \text{при} \quad |x|\to\infty, \qquad x\in Q, \quad \text{для} \quad n=2,$$

утверждения теоремы 13, вообще говоря, места не имеют. Например, в случае $n=2$ функция $\arg(x_1+ix_2)$, гармоническая и ограниченная в области $R_2\setminus\{x_2=0,\ x_1\geqslant 0\}$, предела при $|x|\to\infty$ не имеет.

Пусть функция $u(x)$ гармонична во всем пространстве R_n. Будем говорить, что $u(x)$ полуограничена, если она ограничена снизу или сверху, т. е. если для всех $x\in R_n$ с некоторой постоянной M выполняется неравенство $u(x)\geqslant M$ или неравенство $u(x)\leqslant M$ соответственно.

Теорема 14. *Гармоническая в R_n полуограниченная функция постоянна.*

Так как функция $-u(x)$ для ограниченной сверху функции $u(x)$ ограничена снизу, то при доказательстве теоремы достаточно рассмотреть только случай $u(x)\geqslant M$ в R_n. В этом случае гармоническая в R_n функция $v(x)=u(x)-M\geqslant 0$ в R_n. Теорема будет доказана, если мы установим, что $v(x)\equiv\text{const}$.

Возьмем произвольную точку $x^0\in R_n$ и шар $\{|x|<R\}$ радиуса $R>|x^0|$. Так как задача Дирихле для уравнения Лапласа в шаре $\{|x|<R\}$ с граничной функцией $v|_{\{|x|=R\}}$ имеет единственное классическое решение, то для всех x, $|x|<R$,

$$v(x)=\int_{|\xi|=R} P_R(x,\ \xi)\,v(\xi)\,dS_\xi,$$

где $P_R(x,\ \xi)$ — ядро Пуассона задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре $\{|x|<R\}$ (формула (31)). В частности, при $x=x^0$ имеем

$$v(x^0)=\int_{|\xi|=R} P_R(x^0,\ \xi)\,v(\xi)\,dS_\xi=\frac{R^2-|x^0|^2}{\sigma_n R}\int_{|\xi|=R}\frac{v(\xi)}{|x^0-\xi|^n}\,dS_\xi.$$

Поскольку для $|\xi|=R$

$$R-|x^0|\leqslant|x^0-\xi|\leqslant R+|x^0|,$$

то (напомним, что функция $v(\xi)\geqslant 0$)

$$\frac{1}{\sigma_n R^{n-1}}\int\limits_{|\xi|=R} v(\xi)\,dS_\xi\cdot\frac{(R^2-|x^0|^2)\,R^{n-2}}{(R+|x^0|)^n}\leqslant v(x^0)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\sigma_n R^{n-1}}\int\limits_{|\xi|=R} v(\xi)\,dS_\xi\cdot\frac{(R^2-|x^0|^2)\,R^{n-2}}{(R-|x^0|)^n}$$

или в силу первой теоремы о среднем

$$\frac{R^{n-2}(R^2-|x^0|^2)}{(R+|x^0|)^n}\,v(0)\leqslant v(x^0)\leqslant\frac{R^{n-2}(R^2-|x^0|^2)}{(R-|x^0|)^n}\,v(0).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $R\to\infty$, получим $v(x^0)=v(0)$. Так как точка x^0 произвольная, то $v(x)\equiv\mathrm{const}$. Теорема доказана.

Следствие. *Если гармоническая в R_n функция $u(x)$ при всех $x\in R_n$ удовлетворяет неравенству $|u(x)|\leqslant C(1+|x|)^k$, где C — некоторая постоянная, а k — целое неотрицательное число, то $u(x)$ — многочлен степени не выше чем k.*

При $k=0$ это утверждение содержится в теореме 14. Пусть $k>0$. Возьмем произвольное число $R>1$. В силу леммы 3 п. 2 для любого $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $|\alpha|=k$,

$$\max_{|x|\leqslant R}|D^\alpha u|\leqslant k^k\left(\frac{n}{R}\right)^k\max_{|x|\leqslant 2R}|u(x)|\leqslant$$
$$\leqslant Ck^k\left(\frac{n}{R}\right)^k(1+2R)^k\leqslant Ck^k\left(\frac{n}{R}\right)^k(3R)^k=C\,(3kn)^k.$$

Из этого неравенства вытекает, что при любом α, $|\alpha|=k$, гармоническая в R_n функция $D^\alpha u$ ограничена в R_n. Согласно теореме 14 функции $D^\alpha u$, $|\alpha|=k$, постоянны в R_n. Следовательно, $u(x)$ — многочлен степени не выше чем k. Утверждение доказано.

Выше мы установили некоторые свойства гармонических функций в неограниченных областях. В частности, было показано, что исследование гармонической функции в неограниченной области (дополнение которой содержит внутренние точки) может быть сведено с помощью преобразования Кельвина к исследованию гармонической функции в ограниченной области.

Рассмотрим теперь краевые задачи для уравнения Лапласа в неограниченных областях. Прежде всего заметим, что в случае неограниченной области обычных условий на решение (налагаемых в случае ограниченной области) недостаточно для единственности. Например, все функции $c\ln r$, $c(r^k-r^{-k})\cos k\theta$, $c(r^k-r^{-k})\sin k\theta$, $k=1,2,\ldots$, где c — произвольная постоянная, $x_1=r\cos\theta$, $x_2=r\sin\theta$, гармоничны в области $\{r>1\}\subset R_2$, непрерывны в ее замыкании и обращаются в нуль на границе $\{r=1\}$. Поэтому в определение решения естественно включить дополнительное условие, характеризующее поведение решения на бесконечности.

Пусть область $Q=R_n\setminus \bigcup\limits_{i=1}^{N} \bar{Q}_i$, где Q_i, $i=1, \ldots, N$, — ограниченные области с непересекающимися границами.

Функция $u(x)$ из $C^2(Q)$ называется (классическим) *решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области* Q:

$$\begin{aligned} &\Delta u=0, \qquad x\in Q,\\ &u|_{\partial Q}=\varphi, \end{aligned} \tag{46}$$

если она гармонична в Q, непрерывна в $\bar{Q}$, удовлетворяет граничному условию в (46) и регулярна на бесконечности.

Функция $u(x)$ из $C^2(Q)$ называется (классическим) *решением третьей краевой задачи для уравнения Лапласа в* Q:

$$\begin{aligned} &\Delta u=0, \qquad x\in Q,\\ &\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x)u\right)\Big|_{\partial Q}=\varphi, \end{aligned} \tag{47}$$

если она гармонична в Q, непрерывно дифференцируема в $\bar{Q}$, удовлетворяет граничному условию в (47) и регулярна на бесконечности.

При $\sigma\equiv 0$ третья краевая задача называется *второй краевой задачей* или *задачей Неймана.*

Обозначим через Q' ограниченную область, являющуюся образом области Q при преобразовании инверсии (начало координат — внутренняя точка дополнения Q).

Предположим, что $u(x)$ — решение задачи (46). Тогда из леммы 8 следует, что функция $u'(x')$ — преобразование Кельвина функции $u(x)$ (доопределенная по непрерывности в начале координат) — является гармонической функцией в $Q_0'=Q'\cup\{0\}$. Кроме того, очевидно, $u'(x')\in C(\bar{Q}_0')$ и $u'(x')|_{x'\in\partial Q_0'}=\varphi'(x')$, где $\varphi'(x')=\frac{1}{|x'|^{n-2}}\varphi\left(\frac{x'}{|x'|^2}\right)$. Это означает, что $u'(x')$ есть классическое решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в (ограниченной) области Q_0' с граничной функцией $\varphi'(x')$.

Обратно, если $u'(x')$ — классическое решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области Q_0' с граничной функцией $\varphi'(x')$, то функция $u(x)$ — ее преобразование Кельвина — гармонична в Q, непрерывна в $\bar{Q}$, удовлетворяет граничному условию $u|_{\partial Q}=\varphi$ и, очевидно, регулярна на бесконечности, т. е. $u(x)$ — классическое решение задачи (46).

Поэтому из теорем существования и единственности классического решение задачи Дирихле в ограниченной области (теоремы 9 и 10) вытекает

Теорема 15. *При любой непрерывной граничной функции* φ *существует единственное классическое решение задачи Дирихле* (46).

Исследование третьей краевой задачи в неограниченной области Q с помощью преобразования Кельвина также сводится к исследованию третьей краевой задачи в ограниченной области Q'_0. Мы остановимся только на доказательстве теоремы единственности.

Теорема 16. *Третья краевая задача для уравнения Лапласа в области* Q *при* $\sigma(x) \geqslant 0$, $\sigma(x) \not\equiv 0$, *не может иметь более одного решения.*

Вторая краевая задача для уравнения Лапласа в области Q *в случае* $n > 2$ *не может иметь более одного решения, а в случае* $n = 2$ *решение (если оно существует) определяется с точностью до постоянного слагаемого.*

Пусть третья (вторая) краевая задача имеет два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Тогда функция $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ гармонична в Q, непрерывно дифференцируема в $\bar{Q}$, удовлетворяет граничному условию $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\partial Q} = 0$ и регулярна на бесконечности. Возьмем число $R > 0$ столь большим, чтобы область $\{|x| > R\}$ содержалась в Q, и воспользуемся в области $Q_R = Q \cap \{|x| < R\}$ формулой Грина

$$0 = \int_{Q_R} u\Delta u\, dx = -\int_{Q_R} |\nabla u|^2\, dx + \int_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial n} u\, dS +$$
$$+ \int_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n} u\, dS = -\int_{Q_R} |\nabla u|^2\, dx - \int_{\partial Q} \sigma u^2\, dS + \int_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n} u\, dS.$$

В результате имеем равенство

$$\int_{Q_R} |\nabla u|^2\, dx + \int_{\partial Q} \sigma u^2\, dS = \int_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n} u\, dS. \tag{48}$$

В силу теоремы 13 $u|_{\{|x|=R\}} = O\left(\frac{1}{R^{n-2}}\right)$ и $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\{|x|=R\}} = O\left(\frac{1}{R^{n-1}}\right)$ при $n > 2$ и $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\{|x|=R\}} = O\left(\frac{1}{R^2}\right)$ при $n = 2$. Поэтому

$$\int_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n} u\, dS = O\left(\frac{1}{R^{n-2}}\right) \quad \text{при} \quad n > 2$$

и

$$\int_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n} u\, dS = O\left(\frac{1}{R}\right) \quad \text{при} \quad n = 2.$$

Переходя в равенстве (48) к пределу при $R \to \infty$, получим

$$\int_{Q} |\nabla u|^2\, dx + \int_{\partial Q} \sigma u^2\, dS = 0.$$

Поскольку $\sigma \geqslant 0$, то это равенство эквивалентно двум равенствам

$$\int_Q |\nabla u|^2\,dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\partial Q} \sigma u^2\,dS = 0. \tag{49}$$

Из первого равенства в (49) вытекает, что $u \equiv c_0 = \text{const}$ в Q. Если $n > 2$, то в силу регулярности функции $u(x)$ на бесконечности $c_0 = 0$, т. е. $u_1 = u_2$ в Q.

Если $n = 2$ и $\sigma(x) \geqslant 0$, $\sigma(x) \not\equiv 0$ (третья краевая задача), то равенство $c_0 = 0$ вытекает из второго соотношения в (49).

Если же $n = 2$ и $\sigma(x) \equiv 0$ (вторая краевая задача), то функция $u(x) \equiv c_0$ при произвольной постоянной c_0 есть регулярная в Q гармоническая функция, удовлетворяющая однородному граничному условию $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q} = 0$. Теорема доказана.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ IV

1. Показать, что функция $u(x)$, принадлежащая $L_{2\,\text{loc}}(Q)$ и удовлетворяющая при всех $v \in \dot{C}^\infty(\bar{Q})$ тождеству $\int_Q u\,\Delta v\,dx = 0$, гармонична в Q.

2. Найти пополнение множества функций из $L_2(Q)$, гармонических в Q, по норме пространства $L_2(Q)$.

3. Пусть функция $u \in H^2_{\text{loc}}(Q) \cap \mathring{C}(\bar{Q})$ и $\partial Q \in C^2$. Доказать, что если $\Delta u \in L_2(Q)$, то $u \in H^2_{\mathscr{D}}(Q)$.

Отметим, что из результата задачи 3 вытекает, что классическое решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = f$, $u|_{\partial Q} = 0$ с принадлежащей $L_2(Q)$ правой частью f является обобщенным решением и даже решением почти всюду. Следовательно, классические собственные функции первой краевой задачи для оператора Лапласа являются обобщенными собственными функциями.

4. Пусть $\partial Q \in C^2$. На множестве всех функций $u(x)$ из $C^2(Q) \cap \mathring{C}(\bar{Q})$, для которых $\Delta u(x) \in I_2(Q)$, введено скалярное произведение $\int_Q \Delta u \cdot \Delta \bar{v}\,dx$. Найти пополнение этого множества по норме, порожденной этим скалярным произведением.

5. Пусть граница ∂Q области Q принадлежит C^k. Доказать следующие утверждения.

а) В гильбертовом пространстве $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ можно ввести эквивалентные обычному скалярные произведения

$$(f, g)'_{H^k_{\mathscr{D}}(Q)} = \begin{cases} (\Delta^{k/2} f, \Delta^{k/2} g)_{L_2(Q)} & \text{при } k \text{ четном}, \\ (\Delta^{(k-1)/2} f, \Delta^{(k-1)/2} g)_{H^1(Q)} & \text{при } k \text{ нечетном} \end{cases}$$

и

$$(f, g)''_{H^k_{\mathscr{D}}(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} f_s \bar{g}_s |\lambda_s|^k,$$

где $f_s = (f, u_s)_{L_2(Q)}$, а u_s и λ_s — s-я собственная функция и соответствующее ей собственное значение задачи Дирихле для оператора Лапласа в Q.

б) В гильбертовом пространстве $H^k_{\mathcal{N}}(Q)$ можно ввести эквивалентные обычному скалярные произведения

$$(f, g)'_{H^k_{\mathcal{N}}(Q)} = \begin{cases} (\Delta^{k/2} f, \Delta^{k/2} g)_{L_2(Q)} + (f, g)_{L_2(Q)} & \text{при } k \text{ четных,} \\ (\Delta^{(k-1)/2} f, \Delta^{(k-1)/2} g)_{H^1(Q)} + (f, g)_{L_2(Q)} & \text{при } k \text{ нечетных,} \end{cases}$$

$$(f, g)''_{H^k_{\mathcal{N}}(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} f_s \bar{g}_s (|\lambda_s|^k + 1),$$

где $f_s = (f, u_s)_{L_2(Q)}$, а u_s и λ_s — s-я собственная функция и соответствующее ей собственное значение задачи Неймана для оператора Лапласа в Q.

6. Пусть функция $u(x) \in C(\bar{Q})$, и пусть для любой точки $x \in Q$ существует такое число $r = r(x) > 0$, что шар $S_r(x) = \{ |\xi - x| < r \} \subset Q$ и $u(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial S_r(x)} u(\xi)\, dS_\xi$. Показать, что функция $u(x)$ гармонична в Q.

7. Пусть функция $u(x) \in C^1(Q)$, и пусть для любой сферы S, лежащей в Q, $\int\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$ Показать, что функция $u(x)$ гармонична в Q

8. Показать, что первое собственное значение первой краевой задачи для оператора Лапласа в области Q, $\partial Q \in C^2$, однократно и что соответствующая ему собственная функция не обращается в области Q в нуль.

9. Показать, что функция $u(x)$, принадлежащая $C^2(Q)$ и удовлетворяющая в области Q уравнению Гельмгольца $\Delta u + \lambda u = 0$, где λ — постоянная, аналитична в Q.

Заметим, что из результата задачи 9 вытекает, что собственные функции любой краевой задачи для оператора Лапласа в Q аналитичны в Q.

10. Пусть $\lambda_k(Q_1)$ и $\lambda_k(Q_2)$ — k-е собственные значения первой краевой задачи для оператора Лапласа в областях Q_1 и Q_2, $Q_1 \Subset Q_2$. Доказать, что $\lambda_k(Q_1) < \lambda_k(Q_2)$ при всех $k = 1, 2, \ldots$

11. Обозначим через $\tilde{L}_2(\partial Q)$ (∂Q — граница n-мерной области Q) подпространство пространства $L_2(\partial Q)$, состоящее из всех функций, ортогональных (в скалярном произведении $L_2(\partial Q)$) постоянным. Для любой функции $\psi(x) \in \tilde{L}_2(\partial Q)$ существует единственное обобщенное решение $u(x)$ задачи Неймана для уравнения Лапласа в Q с граничной функцией ψ, след которого на ∂Q $u|_{\partial Q} = \varphi \in \tilde{L}_2(\partial Q)$. Таким образом, на $\tilde{L}_2(\partial Q)$ задан оператор A, ставящий каждой функции $\psi \in \tilde{L}_2(\partial Q)$ функцию $\varphi \in \tilde{L}_2(\partial Q)$: $A\psi = \varphi$.

Доказать следующие утверждения.

а) Собственные значения λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, оператора A положительны; собственные функции e_k, $Ae_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, \ldots$, образуют ортонормированный базис пространства $\tilde{L}_2(\partial Q)$.

б) Существует обобщенное решение $u_k(x)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в Q с граничной функцией $\sqrt{\lambda_k}\, e_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Система $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, образует ортонормированный базис в пространстве со скалярным произведением $\int\limits_Q \nabla u \nabla \bar{v}\, dx$, состоящем из всех гармонических в Q функций из $H^1(Q)$, след которых на ∂Q принадлежит $\tilde{L}_2(\partial Q)$.

в) Для любой функции $\psi \in \tilde{L}_2(\partial Q)$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k \sqrt{\lambda_k}\, u_k(x)$, где $\psi_k = (\psi, e_k)_{L_2(\partial Q)}$, сходится в $H^1(Q)$ и представляет собой обобщенное решение задачи Неймана для уравнения Лапласа в Q с граничной функцией ψ.

г) Пусть функция $\varphi \in L_2(\partial Q)$. Для того чтобы существовало обобщенное решение $u(x)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в Q с граничной функцией φ, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k|^2}{\lambda_k}$, где $\varphi_k = (\varphi, e_k)_{L_2(\partial Q)}$. При этом $u(x) = \frac{1}{|\partial Q|} \int_{\partial Q} \varphi \, dS + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k u_k(x)$.

д) Найти собственные значения и собственные функции оператора A в случае, когда область Q есть круг $\{|x| < 1\}$ (двумерный случай), и показать, что условие п. г) настоящей задачи совпадает в этом случае с условием теоремы 13 п. 8 § 1.

12. Для того чтобы функция $f(\varphi)$, заданная на границе $\{r = 1\}$ единичного круга $\{r < 1\}$ плоскости $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ и принадлежащая $L_2(0, 2\pi)$, была граничным значением некоторой функции из $H^1(r < 1)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{t^2} \int_0^{2\pi} (f(\varphi + t) - f(\varphi))^2 \, d\varphi$.

Принадлежащая $C^4(Q) \cap C^1(\bar{Q})$ функция $u(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta^2 u = f, \qquad x \in Q, \tag{1}$$

и граничным условиям

$$u|_{\partial Q} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q} = 0, \tag{2}$$

называется классическим решением задачи Дирихле для уравнения $\Delta^2 u = f$ в области Q. Принадлежащая $C^4(Q) \cap C^2(\bar{Q})$ функция $u(x)$, удовлетворяющая уравнению (1) и граничным условиям

$$u|_{\partial Q} = 0, \qquad \Delta u|_{\partial Q} = 0, \tag{3}$$

называется классическим решением задачи Рикье для уравнения $\Delta^2 u = f$ в области Q.

Пусть функция $f \in L_2(Q)$. Функцию u, принадлежащую пространству $\mathring{H}^2(Q)$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_Q \Delta u \, \Delta \bar{v} \, dx = \int_Q f \bar{v} \, dx \tag{4}$$

при всех $v \in \mathring{H}^2(Q)$, назовем обобщенным решением задачи Дирихле (1), (2). Функцию u, принадлежащую $H^2_{\mathscr{D}}(Q)$ и удовлетворяющую интегральному тождеству (4) при всех $v \in H^2_{\mathscr{D}}(Q)$, назовем обобщенным решением задачи Рикье (1), (3).

13. Пусть $\partial Q \in C^2$. Доказать следующие утверждения.

а) Принадлежащие $C^4(\bar{Q})$ классические решения $u(x)$ задач (1), (2) и (1), (3) являются обобщенными решениями этих задач.

б) Обобщенные решения задач (1), (2) и (1), (3) существуют при всех $f \in L_2(Q)$ и единственны.

Пусть Q — шар радиуса R: $Q = \{|x| < R\}$. Обозначим через S_1 полусферу $\{|x| = R\} \cap \{x_1 > 0\}$, а через S_2 полусферу $\{|x| = R\} \cap \{x_1 \leqslant 0\}$. Функция $u(x)$, принадлежащая пространству $C^2(Q) \cap C^1(Q \cup S_1) \cap C(\bar{Q})$, удовлетворяющая уравнению Пуассона

$$\Delta u = f, \qquad x \in Q, \tag{5}$$

и граничному условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_1}=0, \quad u|_{S_2}=0, \tag{6}$$

называется классическим решением задачи (5), (6).

Обозначим через $\tilde{H}^1(Q)$ подпространство пространства $H^1(Q)$, состоящее из всех функций $u\in H^1(Q)$, след которых на S_2 равен нулю. Пусть $f\in L_2(Q)$. Обобщенным решением задачи (5), (6) назовем функцию $u\in\tilde{H}^1(Q)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_Q \nabla u\, \nabla\bar{v}\, dx=-\int_Q f\bar{v}\, dx$$

при всех $v\in\tilde{H}^1(Q)$.

14. Доказать, что при любой $f\in L_2(Q)$ обобщенное решение задачи (5), (6) существует и единственно.

Пусть Q — ограниченная двумерная область с границей $\partial Q\in C^3$, и пусть $l(x)$ — заданный на ∂Q дважды непрерывно дифференцируемый вектор, $|l(x)|=1$, составляющий угол $\alpha(x)$, $|\alpha(x)|<\pi/2$, с вектором (внешней) нормали к ∂Q $(\alpha(x)=\widehat{(n, l)})$. Функция $u(x)$, принадлежащая $C^1(\bar{Q})\cap C^2(Q)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta u-u=f, \qquad x\in Q, \tag{7}$$

и граничному условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\partial Q}=0, \tag{8}$$

называется классическим решением задачи с наклонной производной (7), (8).

Обозначим через $A(x)$ принадлежащую $C^2(\bar{Q})$ функцию, значение которой на границе ∂Q есть $\operatorname{tg}\alpha(x)$. Пусть $f\in L_2(Q)$. Обобщенным решением задачи (7), (8) назовем функцию $u\in H^1(Q)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_Q(\nabla u\,\nabla\bar{v}+u\bar{v})\,dx+\int_Q A\,(u_{x_2}\bar{v}_{x_1}-u_{x_1}\bar{v}_{x_2})\,dx+\\+\int_Q(A_{x_1}u_{x_2}-A_{x_2}u_{x_1})\,\bar{v}\,dx=-\int_Q f\bar{v}\,dx$$

при всех $v\in H^1(Q)$.

15. Доказать следующие утверждения.

а) Классическое решение задачи (7), (8) является обобщенным решением.

б) Если $\alpha(x)\equiv\mathrm{const}$, то при любой $f\in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение задачи (7), (8); это решение не зависит от способа продолжения ($A(x)$) в Q функции $\operatorname{tg}\alpha(x)$.

Дополнительная литература к главе IV

С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг, Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, ИЛ, 1962.

Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер, Уравнения с частными производными, «Мир», 1966.

А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, «Наука», 1966.

И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, 1948.

И. Н. Векуа, О метагармонических функциях, Тр. Тбилисского матем. ин-та XII (1943), 105—174.

В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, «Наука», 1971.

В. А. Ильин, О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа, УМН 13:1 (1958), 87—180.

Ф. Ион, Плоские волны и сферические средние и их применения в дифференциальных уравнениях с частными производными, ИЛ, 1958.

М. В. Келдыш, О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, УМН 8 (1941), 171—292.

М. В. Келдыш, О полноте системы собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов, УМН 26:4 (1971), 15—41.

Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Application de la méthode de l'algorithme variationel à la solution approchée des équations différentielles aux dérivées partielles du type elliptique, ИАН, ОФМН (1930), 43—71 и 105—114.

Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1, 2, Гостехиздат, 1951.

М. А. Лаврентьев, Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, Изд. АН СССР, 1962.

М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник, Курс вариационного исчисления, Гостехиздат, 1950.

М. М. Лаврентьев, О задаче Коши для уравнения Лапласа, ИАН, сер. матем., 20 (1956), 819—842.

О. А. Ладыженская, Краевые задачи математической физики, «Наука», 1973.

О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, «Наука», 1964.

К. Миранда, Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, 1957.

И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961.

В. А. Стеклов, Об асимптотическом поведении решений линейного дифференциального уравнения, Изд. Харьковского ун-та, 1956.

С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, Физматгиз, 1954.

С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», 1972.

Глава V

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе мы будем изучать задачу Коши и смешанные задачи для гиперболического уравнения вида

$$u_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u(x, t)) + a(x)u(x, t) = f(x, t).$$

Здесь $(x, t) = x_1, \ldots, x_n, t)$ — точка $(n+1)$-мерного пространства R_{n+1}, $x \in R_n$, $t \in R_1$, $\nabla v(x, t) = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)$ и $\operatorname{div}(w_1(x, t), \ldots$ $\ldots, w_n(x, t)) = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n}$; при этом под $\Delta v(x, t)$ будем понимать $\operatorname{div}\nabla v(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}$. Данные задач будем считать вещественнозначными функциями и будем рассматривать только вещественнозначные решения этих задач. В связи с этим в дальнейшем под H^k и C^k, $k = 0, 1, \ldots$, мы будем понимать соответствующие вещественные пространства.

§ 1. Свойства решений волнового уравнения. Задача Коши для волнового уравнения

1. Свойства решений волнового уравнения. Рассмотрим простейшее гиперболическое уравнение второго порядка — волновое уравнение

$$\Box u(x, t) \equiv u_{tt} - \Delta u \equiv u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = f(x, t). \tag{1}$$

Прежде всего найдем некоторые специальные решения однородного волнового уравнения ($\Box u = 0$), зависящие только от $t/|x|$. Функция $v(x, t) = w(t/|x|)$, являющаяся при $|x| \neq 0$ решением однородного волнового уравнения, удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(z^2 - 1)\frac{d^2 w}{dz^2} + (3 - n)z\frac{dw}{dz} = 0.$$

Общее решение этого уравнения в каждом из интервалов $(-\infty, -1)$, $(-1, +1)$, $(+1, +\infty)$ задается формулой

$$c_1 \int |z^2 - 1|^{\frac{n-3}{2}}\, dz + c_2,$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Отсюда, в частности, получаем, что при $0<|x|<-t$, $(z=t/|x|<-1)$ функция $v(x, t)$ имеет вид

$$v(x, t)=c_1 \ln\left|\frac{t-|x|}{t+|x|}\right|+c_2 \quad \text{в случае } n=1,$$

$$v(x, t)=c_1 \ln\frac{|t+\sqrt{t^2-|x|^2}|}{|x|}+c_2 \quad \text{при} \quad n=2,$$

$$v(x, t)=c_1 \frac{t}{|x|}+c_2 \quad \text{при} \quad n=3$$

и т. д.

Будем обозначать через K_{x', t', t^0} конус $\{|x-x'|<t'-t,\ t^0<t<t'\}$ с вершиной в точке (x', t') «высоты» $t'-t^0$, через Γ_{x', t', t^0} — его боковую поверхность $\{|x-x'|=t'-t,\ t^0\leqslant t\leqslant t'\}$,

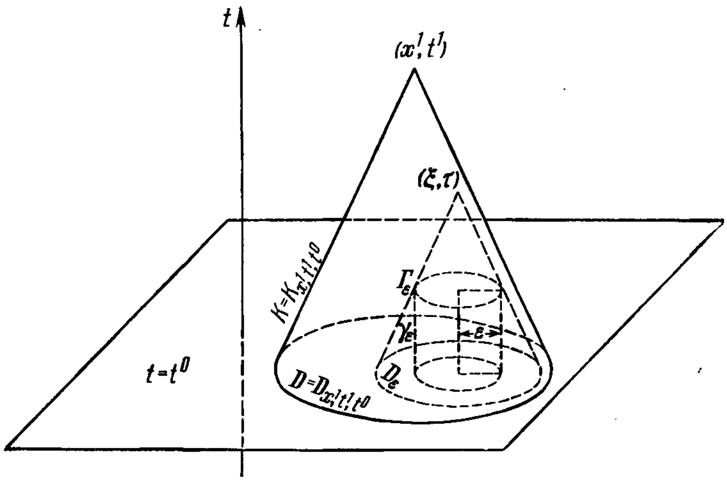

Рис. 2.

являющуюся характеристикой (см. § 2 гл. I) для волнового уравнения, через D_{x', t', t^0} — основание конуса $\{|x-x'|<t'-t^0,\ t=t^0\}$ и через S_{x', t', t^0} — границу основания — сферу $\{|x-x'|=t'-t^0,\ t=t^0\}$.

Пусть (x^1, t^1) — некоторая точка из R_{n+1}, K — конус K_{x^1, t^1, t^0}, $t^0<t^1$, а $D=D_{x^1, t^1, t^0}$ — основание этого конуса (см. рис. 2). Покажем, что если функция $u(x, t)$ достаточно гладкая в $K\cup D$, то ее значение в произвольной точке (x, t) конуса K определяется через $\Box u$ в конусе $\bar{K}_{x, t, t^0}$ и u и u_t на основании этого конуса $\bar{D}_{x, t, t^0}$.

Рассмотрим сначала случай трех пространственных переменных, $n=3$. Будем считать, что $u(x, t)\in C^2(K)\cap C^1(K\cup D)$ и $\Box u\in C(K\cup D)$. Пусть (ξ, τ) — произвольная точка из K, а ε — произвольное положительное число, меньшее $\tau-t^0$, $0<\varepsilon<\tau-t^0$.

Обозначим через K_ε лежащую в K область $\{\varepsilon<|x-\xi|<\tau-t,\ t^0<t<\tau-\varepsilon\}$. Границу области K_ε разобьем на три части: $\Gamma_\varepsilon=\{|x-\xi|=\tau-t,\ t^0\leqslant t\leqslant\tau-\varepsilon\}$, $D_\varepsilon=\{\varepsilon<|x-\xi|<\tau-t^0,\ t=t^0\}$, $\gamma_\varepsilon=\{|x-\xi|=\varepsilon,\ t^0\leqslant t<\tau-\varepsilon\}$.

Возьмем специальное, зависящее только от $\frac{t-\tau}{|x-\xi|}$ решение однородного волнового уравнения

$$v(x-\xi,\ t-\tau)=\frac{t-\tau}{|x-\xi|}+1. \tag{2}$$

Поскольку функции $u(x,\ t)$ и $v(x-\xi,\ t-\tau)$ принадлежат $C^2(K_\varepsilon)$, то в K_ε

$$v\Box u-u\Box v=-\sum_{i=1}^{3}(u_{x_i}v-uv_{x_i})_{x_i}+(u_tv-uv_t)_t.$$

Интегрируя это равенство по K_ε и учитывая, что в K_ε $\Box v=0$, на основании формулы Остроградского получим

$$\int\limits_{K_\varepsilon}v\Box u\,dx\,dt=\int\limits_{\Gamma_\varepsilon\cup D_\varepsilon\cup\gamma_\varepsilon}\left[-\sum_{i=1}^{3}(u_{x_i}v-uv_{x_i})\,n_i+(u_tv-uv_t)\,n_4\right]dS=$$

$$=I_{\Gamma_\varepsilon}+I_{D_\varepsilon}+I_{\gamma_\varepsilon}, \tag{3}$$

где $n=(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4)$ — единичный вектор внешней нормали к ∂K_ε, а I_{Γ_ε}, I_{D_ε}, I_{γ_ε} — интегралы по Γ_ε, D_ε, γ_ε.

Рассмотрим интеграл по Γ_ε. Из (2) вытекает, что $v|_{\Gamma_\varepsilon}=0$. Кроме того, так как

$$\nabla v=(t-\tau)\frac{\xi-x}{|\xi-x|^3},\qquad v_t=\frac{1}{|x-\xi|}, \tag{4}$$

а нормаль на Γ_ε $n=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x_1-\xi_1}{|x-\xi|},\ \frac{x_2-\xi_2}{|x-\xi|},\ \frac{x_3-\xi_3}{|x-\xi|},\ 1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x-\xi}{\tau-t},\ 1\right)$, то

$$\sum_{i=1}^{3}(v_{x_i}n_i)-v_tn_4\Big|_{\Gamma_\varepsilon}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(x-\xi,\ x-\xi)}{|x-\xi|^3}-\frac{1}{|x-\xi|}\right)\equiv 0.$$

Следовательно,

$$I_{\Gamma_\varepsilon}=\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\left[u\left(\sum_{i=1}^{3}v_{x_i}n_i-v_tn_4\right)+v\left(u_tn_4-\sum_{i=1}^{3}u_{x_i}n_i\right)\right]dS=0. \tag{5}$$

Так как на D_ε нормаль $n=(0,\ 0,\ 0,\ -1)$, то в силу (2) и (4)

$$I_{D_\varepsilon}=\int\limits_{\varepsilon<|x-\xi|<\tau-t^0}\frac{u(x,\ t^0)}{|x-\xi|}dx+\int\limits_{\varepsilon<|x-\xi|<\tau-t^0}\left(\frac{\tau-t^0}{|x-\xi|}-1\right)u_t(x,\ t^0)\,dx.$$

Поскольку функции $u(x, t^0)$ и $u_t(x, t^0)$ непрерывны ($u \in C^1(K \cup D)$), существует предел интеграла I_{D_ε} при $\varepsilon \to 0$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{D_\varepsilon} = \int\limits_{|x-\xi|<\tau-t^0} \frac{u(x, t^0)}{|x-\xi|}\,dx + \int\limits_{|x-\xi|<\tau-t^0} \left(\frac{\tau-t^0}{|x-\xi|}-1\right) u_t(x, t^0)\,dx. \tag{6}$$

На поверхности γ_ε нормаль $n = \left(\frac{-x+\xi}{|x-\xi|}, 0\right) = \left(\frac{\xi-x}{\varepsilon}, 0\right)$. Поэтому, учитывая (4), получим

$$I_{\gamma_\varepsilon} = -\int\limits_{t^0}^{\tau-\varepsilon} dt \int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} v\,dS_x + \int\limits_{t^0}^{\tau-\varepsilon} dt \int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n} u\,dS_x =$$
$$= -\int\limits_{t^0}^{\tau-\varepsilon} \left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}+1\right) dt \int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS_x + \int\limits_{t^0}^{\tau-\varepsilon} \frac{t-\tau}{\varepsilon^2}\,dt \int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} u\,dS_x.$$

Так как при $|x-\xi|=\varepsilon$, $t^0 \leqslant t \leqslant \tau-\varepsilon$ имеют место неравенства $\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \leqslant M$ и $|u(x, t)-u(\xi, t)| \leqslant M\varepsilon$, где M — некоторая постоянная ($M = \max\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant\tau-t \\ t^0\leqslant t\leqslant\tau}} |\nabla u|$), то

$$\left|\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS_x\right| \leqslant 4\pi\varepsilon^2 M$$

и

$$\left|\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} u(x, t)\,dS_x - \int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} u(\xi, t)\,dS_x\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} |u(x, t)-u(\xi, t)|\,dS_x \leqslant 4\pi\varepsilon^3 M.$$

Поэтому существует предел интеграла I_{γ_ε} при $\varepsilon \to 0$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\gamma_\varepsilon} = 4\pi \int\limits_{t^0}^{\tau} (t-\tau)\,u(\xi, t)\,dt. \tag{7}$$

Переходя в (3) к пределу при $\varepsilon \to 0$, в силу (5), (6) и (7) получим, что для любой точки (ξ, τ) из K

$$4\pi \int\limits_{t^0}^{\tau} (t-\tau)\,u(\xi, t)\,dt =$$
$$= -\int\limits_{|x-\xi|<\tau-t^0} \frac{u(x, t^0)}{|x-\xi|}\,dx - \int\limits_{|x-\xi|<\tau-t^0} \left(\frac{\tau-t^0}{|x-\xi|}-1\right) u_t(x, t^0)\,dx +$$
$$+ \int\limits_{t^0}^{\tau} dt \int\limits_{|x-\xi|<\tau-t} \left(\frac{t-\tau}{|x-\xi|}+1\right) \Box u(x, t)\,dx.$$

Продифференцируем это равенство по τ:

$$\int_{t^0}^{\tau} u(\xi, t)\,dt = \frac{1}{4\pi(\tau - t^0)} \int\limits_{|x-\xi|=\tau-t^0} u(x, t^0)\,dS_x + \\ + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x-\xi|<\tau-t^0} \frac{u_t(x, t^0)}{|x-\xi|}\,dx + \frac{1}{4\pi} \int_{t^0}^{\tau} dt \int\limits_{|x-\xi|<\tau-t} \frac{\Box u(x, t)}{|x-\xi|}\,dx,$$

откуда

$$u(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{4\pi(\tau - t^0)} \int\limits_{|x-\xi|=\tau-t^0} u(x, t^0)\,dS_x\right) + \\ + \frac{1}{4\pi(\tau - t^0)} \int\limits_{|x-\xi|=\tau-t^0} u_t(x, t^0)\,dS_x + \frac{1}{4\pi} \int_{t^0}^{\tau} dt \int\limits_{|x-\xi|=\tau-t} \frac{\Box u(x, t)}{|x-\xi|}\,dS_x.$$

Поскольку

$$\int_{t^0}^{\tau} dt \int\limits_{|x-\xi|=\tau-t} \frac{\Box u(x, t)}{|x-\xi|}\,dS_x = \int_0^{\tau-t^0} d\lambda \int\limits_{|x-\xi|=\lambda} \frac{\Box u(x, \tau-\lambda)}{|x-\xi|}\,dS_x = \\ = \int\limits_{|x-\xi|<\tau-t^0} \frac{\Box u(x, \tau-|x-\xi|)}{|x-\xi|}\,dx,$$

то для любой точки (x, t) конуса K_{x^1, t^1, t^0} имеет место следующая *формула Кирхгофа*:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi(t - t^0)} \int\limits_{|x-\xi|=t-t^0} u(\xi, t^0)\,dS_\xi\right) + \\ + \frac{1}{4\pi(t - t^0)} \int\limits_{|x-\xi|=t-t^0} u_t(\xi, t^0)\,dS_\xi + \\ + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x-\xi|<t-t^0} \frac{\Box u(\xi, t-|x-\xi|)}{|x-\xi|}\,d\xi. \tag{8}$$

Так как

$$\frac{1}{4\pi(t - t^0)} \int\limits_{|x-\xi|=t-t^0} u(\xi, t^0)\,dS_\xi = \frac{t-t^0}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} u(x+\eta(t-t^0), t^0)\,dS_\eta,$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi(t - t^0)} \int\limits_{|x-\xi|=t-t^0} u(\xi, t^0)\,dS_\xi\right) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} u(x+\eta(t-t^0), t^0)\,dS_\eta + \\ + \frac{t-t^0}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} (\nabla u(x+\eta(t-t^0), t^0), \eta)\,dS_\eta = \\ = \frac{1}{4\pi(t-t^0)^2} \int\limits_{|x-\xi|=t-t^0} [u(\xi, t^0) + (\xi - x)\cdot\nabla u(\xi, t^0)]\,dS_\xi.$$

Поэтому формулу Кирхгофа можно переписать в виде

$$u(x, t)=\frac{1}{4\pi(t-t^0)^2}\int\limits_{|x-\xi|=t-t^0}[u(\xi, t^0)+(\xi-x)\cdot\nabla u(\xi, t^0)]\,dS_\xi+$$
$$+\frac{1}{4\pi(t-t^0)}\int\limits_{|x-\xi|=t-t^0}u_t(\xi, t^0)\,dS_\xi+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t-t^0}\frac{\Box u(\xi, t-|x-\xi|)}{|x-\xi|}\,d\xi. \tag{9}$$

Формулы (8) и (9) показывают, что значение функции u в произвольной точке (x, t) из K выражается через $\Box u$ в $\bar{K}_{x,t,t^0}$ и u и u_t в $\bar{D}_{x,t,t^0}$. Заметим, что значение функции u в точке $(x, t)\in K$ определяется (при $n=3$) значениями функции $\Box u$ не на всем конусе $\bar{K}_{x,t,t^0}$, а лишь на его боковой поверхности Γ_{x,t,t^0} и значениями функций u, u_t и ∇u не на всем основании $\bar{D}_{x,t,t^0}$, а лишь на его границе — сфере S_{x,t,t^0}. В частности, если для некоторой точки $(x, t)\in K$ $\Box u=0$ на Γ_{x,t,t^0} и $u=u_t=|\nabla u|=0$ на S_{x,t,t^0}, то в этой точке $u(x, t)=0$.

Из доказанного немедленно вытекает справедливость при $n=3$ следующей теоремы, утверждающей, что решение u уравнения (1) в конусе $K_{x^1,t^1,t^0}=K$ однозначно определяется значениями u и u_t на основании $D_{x^1,t^1,t^0}=D$ этого конуса.

Теорема 1. *Пусть функции* $u_1(x, t)$ *и* $u_2(x, t)$ *принадлежат* $C^2(K)\cap C^1(K\cup D)$, $\Box u_1=\Box u_2$ *в* K *и* $u_1(x, t^0)|_D=u_2(x, t^0)|_D$, $\left.\frac{\partial u_1(x, t^0)}{\partial t}\right|_D=\left.\frac{\partial u_2(x, t^0)}{\partial t}\right|_D$. *Тогда* $u_1\equiv u_2$ *в* K.

Действительно, функция $u=u_1-u_2$ принадлежит $C^2(K)\cap\cap C^1(K\cup D)$, $\Box u=0$ в K и при $x\in D$ $u(x, t^0)=u_t(x, t^0)=0$. Из (9) вытекает, что $u(x, t)\equiv 0$ в K, т. е. $u_1(x, t)\equiv u_2(x, t)$ в K. Теорема доказана.

Соответствующее представление, а также доказательство теоремы 1 в случае произвольного числа пространственных переменных может быть получено тем же методом. Если функция $u(x, t)\in\in C^2(K)\cap C^1(K\cup D)$, функция $\Box u$ и все ее производные по пространственным переменным до порядка $m=\max\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1, 0\right)$ непрерывны в $K\cup D$, $u(x, t^0)\in C^{\left[\frac{n}{2}\right]}(D)$ и $u_t(x, t^0)\in C^m(D)$, то значение $u(x, t)$ в произвольной точке $(x, t)\in K$ выражается через функцию $\Box u$ (и ее производные по пространственным переменным до порядка m) в $\bar{K}_{x,t,t^0}$ и функции u и u_t (и их производные до порядков $\left[\frac{n}{2}\right]$ и m соответственно) в $\bar{D}_{x,t,t^0}$. Например, для $n>3$ представление получается точно так же, как и для $n=3$, при этом в качестве специального решения однородного волнового уравнения $v(x-\xi,\ t-\tau)$ при $\frac{t-\tau}{|x-\xi|}<-1$ нужно взять функцию $\int\limits_{-1}^{z}(\zeta^2-1)^{\frac{n-3}{2}}\,d\zeta$, $z=\frac{t-\tau}{|x-\xi|}$.

Отметим, что в случае четных n, $n\geqslant 2$, значение функции u в точке $(x,\ t)$ определяется значениями функции $\Box u$ (и ее производных по пространственным переменным) на всем конусе $K_{x,\,t,\,t^0}$ и значениями функций u и u_t (и их производных по пространственным переменным) на всем основании $D_{x,\,t,\,t^0}$. В случае же нечетного числа пространственных переменных $n>3$, как и в случае $n=3$, значение функции u в точке $(x,\ t)$ определяется значениями функции $\Box u$ и ее производных по пространственным переменным только на боковой поверхности $\Gamma_{x,\,t,\,t^0}$ конуса и значениями функций u, u_t и их производных по пространственным переменным только на границе $S_{x,\,t,\,t^0}$ основания.

В случае двух и одного пространственных переменных соответствующие представления, а вместе с ними и доказательства теоремы 1 проще получаются непосредственно из формулы (9)(или (8)).

Пусть функция $u(x,\ t)$, $x=(x_1,\ x_2)$, задана в конусе $K=K_{x^1,\,t^1,\,t^0}$, $x^1=(x_1^1,\ x_2^1)$, и принадлежит $C^2(K)\cap C^1(K\cup D)$, $D=D_{x^1,\,t^1,\,t^0}$ и $\Box u=u_{tt}-u_{x_1x_1}-u_{x_2x_2}\in C(K\cup D)$. Функцию $u(x,\ t)$ можно рассматривать как не зависящую от x_3 функцию четырех переменных x_1, x_2, x_3, t, заданную в четырехмерном конусе $K_{x_1^1,\,x_2^1,\,x_3^1,\,t^1,\,t^0}$, где x_3^1 произвольно; при этом $u(x_1,\ x_2,\ t)\in C^2\left(K_{x_1^1,\,x_2^1,\,x_3^1,\,t^1,\,t^0}\right)\cap C^1\left(K_{x_1^1,\,x_2^1,\,x_3^1,\,t^1,\,t^0}\cup D_{x_1^1,\,x_2^1,\,x_3^1,\,t^1,\,t^0}\right)$ и $u_{tt}-u_{x_1x_1}-u_{x_2x_2}-u_{x_3x_3}\in C\left(K_{x_1^1,\,\ldots,\,t^0}\cup D_{x_1^1,\,\ldots,\,t^0}\right)$. В силу формулы (9) для всех точек $(x_1,\ x_2,\ t)$, принадлежащих K, имеем

$$u(x_1,\ x_2,\ t)=\frac{1}{4\pi(t-t^0)^2}\int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2=(t-t^0)^2}[u(\xi_1,\ \xi_2,\ t^0)+(\xi_1-x_1)\,u_{\xi_1}(\xi_1,\ \xi_2,\ t^0)+(\xi_2-x_2)\,u_{\xi_2}(\xi_1,\ \xi_2,\ t^0)]\,dS_\xi+$$
$$+\frac{1}{4\pi(t-t^0)}\int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2=(t-t^0)^2}u_t(\xi_1,\ \xi_2,\ t^0)\,dS_\xi+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{t-t^0}d\rho\int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2=\rho^2}\frac{\Box u(\xi_1,\ \xi_2,\ t-\rho)}{\rho}\,dS_\xi.$$

Так как

$$\int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2=\rho^2}g(\xi_1,\ \xi_2)\,dS_\xi=$$
$$=2\rho\int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2<\rho^2}\frac{g(\xi_1,\ \xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2}{\sqrt{\rho^2-(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}},\tag{10}$$

то

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi(t-t^0)}\int\limits_{|x-\xi|<t-t^0}\frac{u(\xi,\ t^0)+(\xi-x)\cdot\nabla u(\xi,\ t^0)}{\sqrt{(t-t^0)^2-|x-\xi|^2}}\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t-t^0}\frac{u_t(\xi,\ t^0)\,d\xi}{\sqrt{(t-t^0)^2-|x-\xi|^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{t-t^0}d\rho\int\limits_{|x-\xi|<\rho}\frac{\Box u(\xi,\ t-\rho)}{\sqrt{\rho^2-|x-\xi|^2}}\,d\xi, \tag{11}$$

где $\xi=(\xi_1,\ \xi_2)$, $x=(x_1,\ x_2)$, а точка $(x,\ t)$ — любая точка конуса $K_{x^1,\,t^1,\,t^0}$. Эта формула дает искомое представление функции в случае $n=2$.

Заметим, что для любой точки $(x,\ t)$ конуса K

$$\frac{1}{2\pi(t-t^0)}\int\limits_{|x-\xi|<t-t^0}\frac{u(\xi,\ t^0)+(\xi-x)\cdot\nabla u(\xi,\ t^0)}{\sqrt{(t-t^0)^2-|x-\xi|^2}}\,d\xi=$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t-t^0}\frac{u(\xi,\ t^0)\,d\xi}{\sqrt{(t-t^0)^2-|x-\xi|^2}}\right).$$

Поэтому равенство (11) можно переписать в виде

$$u(x,\ t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t-t^0}\frac{u(\xi,\ t^0)\,d\xi}{\sqrt{(t-t^0)^2-|x-\xi|^2}}\right)+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t-t^0}\frac{u_t(\xi,\ t^0)\,d\xi}{\sqrt{(t-t^0)^2-|x-\xi|^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{t-t^0}d\rho\int\limits_{|x-\xi|<\rho}\frac{\Box u(\xi,\ t-\rho)}{\sqrt{\rho^2-|x-\xi|^2}}\,d\xi. \tag{12}$$

Формула (12) называется *формулой Пуассона*. Аналогично в случае $n=1$ соответствующее представление легко получается из формулы (11) (или (12)). Если $u(x,\ t)\in C^2(K)\cap C^1(K\cup D)$, где $K=K_{x^1,\,t^1,\,t^0}$ (треугольник $\{t-t^1<x-x^1<-t+t^1,\ \ t^0<t<t^1\}$), а $D=D_{x^1,\,t^1,\,t^0}$ (интервал $(x^1+t^0-t^1,\ x^1+t^1-t^0)$), и $\Box u=u_{tt}-u_{xx}\in C(K\cup D)$, то значения функции u в произвольной точке $(x,\ t)\in K$ выражаются следующей *формулой Даламбера*:

$$u(x,\ t)=\frac{u(x-t+t^0,\ t^0)+u(x+t-t^0,\ t^0)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t+t^0}^{x-t^0+t}u_t(\xi,\ t^0)\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t^0}^{t}d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\Box u(\xi,\ \tau)\,d\xi,\qquad (x,\ t)\in K_{x^1,\,t^1,\,t^0}. \tag{13}$$

2. Задача Коши для волнового уравнения. Будем для краткости множества точек $\{x \in R_n,\ t > t^0\}$, $\{x \in R_n,\ t \geqslant t^0\}$, $\{x \in R_n,\ t^0 \leqslant t \leqslant t^1\}$, $\{x \in R_n,\ t = t^0\}$ обозначать через $\{t > t^0\}$, $\{t \geqslant t^0\}$, $\{t^0 \leqslant t \leqslant t^1\}$, $\{t = t^0\}$ соответственно, а пространства $C^k(\{t > t^0\})$, $C^k(\{t \geqslant t^0\})$ через $C^k(t > t^0)$ и $C^k(t \geqslant t^0)$.

Функция $u(x, t)$, принадлежащая $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geqslant 0)$, называется *решением* (*классическим решением*) *задачи Коши для волнового уравнения в полупространстве* $\{t > 0\}$, если при всех $x \in R_n$, $t > 0$ оно удовлетворяет уравнению

$$\square u = f, \tag{14}$$

а при $t = 0$ — начальным условиям

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} &= \psi(x), \end{aligned} \tag{15}$$

где φ, ψ и f — заданные функции.

В силу теоремы 1 предыдущего пункта решение $u(x, t)$ задачи (14), (15) однозначно определяется в любом конусе $K_{x^1,\, t^1,\, 0}$ $(x^1 \in R_n,\ t^1 > 0)$ и, тем самым, во всем полупространстве $\{t > 0\}$ через заданные функции f, φ и ψ. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Задача Коши* (14), (15) *не может иметь более одного решения.*

Перейдем к вопросу о существовании решения задачи Коши.

Пусть решение $u(x, t)$ задачи (14), (15) существует. Из результатов предыдущего пункта вытекает, что если $f \in C(t \geqslant 0)$, то решение представляется в случае трех пространственных переменных $(n = 3)$ формулой Кирхгофа

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-\xi|=t} \varphi(\xi)\, dS_\xi\right) + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-\xi|=t} \psi(\xi)\, dS_\xi + \\ + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t} \frac{f(\xi, t-|x-\xi|)}{|x-\xi|}\, d\xi, \qquad x \in R_3,\ t > 0, \tag{16}$$

в случае двух пространственных переменных $(n = 2)$ — формулой Пуассона

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{t^2-|x-\xi|^2}}\right) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t} \frac{\psi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{t^2-|x-\xi|^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|x-\xi|<\tau} \frac{f(\xi, t-\tau)\, d\xi}{\sqrt{\tau^2-|x-\xi|^2}}, \qquad x \in R_2,\ t > 0, \tag{17}$$

а в случае одного пространственного переменного ($n=1$) — формулой Даламбера

$$u(x, t)=\frac{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-\tau}^{x+\tau} f(\xi, \tau)\,d\xi, \qquad x\in R_1,\ t>0. \tag{18}$$

В связи с этим доказательство существования решения задачи (14), (15) сводится к нахождению условий, при которых функция $u(x, t)$, заданная соответствующим представлением, является решением этой задачи.

Рассмотрим сначала случай трех пространственных переменных ($n=3$). Справедливо следующее утверждение.

Если $\varphi\in C^3(R_3)$, $\psi\in C^2(R_3)$, *а функция* f *и все ее производные по* x_1, x_2, x_3 *до второго порядка включительно непрерывны в* $\{t\geqslant 0\}$, *то функция* u, *заданная формулой Кирхгофа* (16), *является решением задачи Коши* (14), (15); *при этом для любой точки* $(X, T)\in\{t\geqslant 0\}$ *имеет место неравенство*

$$\|u\|_{C(\bar K_{X,T,0})}\leqslant\|\varphi\|_{C(\bar D_{X,T,0})}+T\,\|\,|\nabla\varphi|\,\|_{C(\bar D_{X,T,0})}+$$
$$+T\|\psi\|_{C(\bar D_{X,T,0})}+\frac{T^2}{2}\|f\|_{C(\bar K_{X,T,0})}. \tag{19}$$

Замечание. Из формулы (19) вытекает, что если функция f ограничена в $\{0<t<T\}$, функция ψ ограничена в R_3, а функция φ ограничена в R_3 вместе со всеми первыми производными, то решение u задачи (14), (15) ограничено в $\{0<t<T\}$ и

$$\sup_{\{0<t<T\}}|u|\leqslant\sup_{R_3}|\varphi|+T\sup_{R_3}|\nabla\varphi|+T\sup_{R_3}|\psi|+\frac{T^2}{2}\sup_{\{0<t<T\}}|f|.$$

Прежде всего изучим функцию

$$u_g(x, t, \tau)=\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-\xi|=t} g(\xi, \tau)\,dS_\xi, \qquad x\in R_3,\ t>0,\ \tau>0, \tag{20}$$

где $g(x, \tau)\in C(\tau\geqslant 0)$. В случае, когда функция g не зависит от параметра τ, $g(x, \tau)=g(x)$, функцию $u_g(x, t, \tau)$ будем обозначать через $u_g(x, t)$.

Лемма 1. *Если функция* $g(x, \tau)$ *и все ее производные по* x_1, x_2, x_3 *до порядка* k *включительно,* $k=0, 1, \ldots$, *принадлежат* $C(\tau\geqslant 0)$, *то функция* $u_g(x, t, \tau)$ *и все ее производные по* x_1, x_2, x_3, t *до порядка* k *включительно непрерывны на множестве* $\{x\in R_3,\ t\geqslant 0,\ \tau\geqslant 0\}$. *При* $k\geqslant 2$ *функция* $u_g(x, t, \tau)$ *для любого*

$\tau \geqslant 0$ *удовлетворяет в* $\{t>0\}$ *уравнению* $\Box u_g = 0$ *и условиям* $u_g|_{t=0}=0$, $\Delta u_g|_{t=0}=0$, $u_{gt}|_{t=0}=g(x,\tau)$.

Первое утверждение леммы вытекает из равенства

$$u_g(x, t, \tau) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} g(x+t\eta, \tau)\, dS_\eta. \tag{21}$$

Из (21) следует также, что $u_g|_{t=0}=0$. Так как при $k \geqslant 2$

$$\Delta u_g(x, t, \tau) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \Delta g(x+t\eta, \tau)\, dS_\eta, \tag{22}$$

то $\Delta u_g|_{t=0}=0$.

Дифференцируя (21) по t, получим

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} g(x+t\eta, \tau)\, dS_\eta + \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} (\nabla g(x+t\eta, \tau), \eta)\, dS_\eta, \tag{23}$$

откуда

$$u_{gt}|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} g(x, \tau)\, dS_\eta = g(x, \tau).$$

Поскольку

$$\frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} (\nabla g(x+t\eta, \tau)\cdot\eta)\, dS_\eta =$$

$$= \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\partial g(x+t\eta, \tau)}{\partial n_\eta}\, dS_\eta = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} \frac{\partial g(\xi, \tau)}{\partial n}\, dS_\xi =$$

$$= \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|<t} \Delta g(\xi, \tau)\, d\xi = \frac{I(x, t, \tau)}{4\pi t},$$

где $I(x, t, \tau) = \int\limits_{|x-\xi|<t} \Delta g(\xi, \tau)\, d\xi$, то (23) можно представить в виде

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{1}{t} u_g + \frac{I}{4\pi t},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} = -\frac{1}{t^2} u_g + \frac{1}{t}\frac{\partial u_g}{\partial t} + \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I}{\partial t} - \frac{I}{4\pi t^2} =$$

$$= -\frac{u_g}{t^2} + \frac{1}{t}\left(\frac{u_g}{t} + \frac{I}{4\pi t}\right) + \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I}{\partial t} - \frac{I}{4\pi t^2} = \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I}{\partial t} =$$

$$= \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} \Delta g(\xi, \tau)\, dS_\xi = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \Delta g(x+t\eta, \tau)\, dS_\eta. \tag{24}$$

Из (24) и (22) следует, что $u_{gtt} = \Delta u_g$. Лемма доказана.

Так как второе слагаемое в правой части (16) есть $u_\psi(x, t)$, то в силу леммы 1 ($\psi \in C^2(R_3)$) оно принадлежит $C^2(t \geqslant 0)$, является решением однородного волнового уравнения и удовлетворяет начальным условиям

$$u_\psi|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_\psi}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi.$$

Первое слагаемое в правой части (16) есть $\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}$. Так как $\varphi \in C^3(R_3)$, то функция $\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \in C^2(t \geqslant 0)$, является решением однородного волнового уравнения

$$\Box\left(\frac{\partial}{\partial t} u_\varphi\right) = \frac{\partial}{\partial t} \Box u_\varphi = 0$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$\left.\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi, \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}\right)\right|_{t=0} = \Delta u_\varphi|_{t=0} = 0.$$

Третье слагаемое правой части (16) обозначим через $F(x, t)$ и преобразуем следующим образом:

$$F(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x-\xi|<t} \frac{f(\xi, t-|x-\xi|)}{|x-\xi|} d\xi =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^t \frac{d\rho}{\rho} \int\limits_{|x-\xi|=\rho} f(\xi, t-\rho)\, dS_\xi =$$

$$= \int\limits_0^t \left(\frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int\limits_{|x-\xi|=t-\tau} f(\xi, \tau)\, dS_\xi\right) d\tau = \int\limits_0^t G(x, t, \tau)\, d\tau,$$

где $G(x, t, \tau) = u_f(x, t-\tau, \tau)$. В силу леммы 1 функция $G(x, t, \tau)$ и все ее производные по x_1, x_2, x_3, t до второго порядка включительно непрерывны на множестве $\{x \in R_3,\ t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$ и при любом $\tau \geqslant 0$

$$G_{tt} - \Delta G = 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant \tau,$$
$$G|_{t=\tau} = 0, \quad G_t|_{t=\tau} = f(x, \tau).$$

Тогда функция $F(x, t) = \int\limits_0^t G(x, t, \tau)\, d\tau$ непрерывна в $\{t \geqslant 0\}$ вместе с первой производной по t и всеми производными по x_1, x_2, x_3 до второго порядка включительно. А так как

$$F_t = G|_{\tau=t} + \int\limits_0^t G_t(x, t, \tau)\, d\tau = \int\limits_0^t G_t(x, t, \tau)\, d\tau,$$

то $F \in C^2 (t \geqslant 0)$. Кроме того,

$$\Delta F(x, t) = \int_0^t \Delta G(x, t, \tau)\, d\tau$$

и

$$F_{tt} = G_t|_{\tau=t} + \int_0^t G_{tt}(x, t, \tau)\, d\tau = f + \int_0^t \Delta G(x, t, \tau)\, d\tau.$$

Следовательно, функция $F(x, t)$ удовлетворяет уравнению $\Box F = f$ и однородным начальным условиям $F|_{t=0} = 0$, $F_t|_{t=0} = 0$.

Таким образом, доказано, что заданная формулой (16) функция

$$u(x, t) = \frac{\partial u_\varphi(x, t)}{\partial t} + u_\psi(x, t) + \int_0^t u_f(x, t-\tau, \tau)\, d\tau$$

является решением задачи (14), (15).

Докажем теперь неравенство (19). Пусть (X, T) — произвольная точка полупространства $\{t > 0\}$. В силу (20) для любой точки (x, t) из конуса $K_{X, T, 0}$ и любого $\tau > 0$

$$|u_g(x, t, \tau)| \leqslant t \max_{|x-\xi|=t} |g(\xi, \tau)| \leqslant T \max_{|x-\xi|=t} |g(\xi, \tau)|. \qquad (25)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \| u_\psi \|_{C(\overline{K}_{X,T,0})} &\leqslant T \max_{(x,t)\in K_{X,T,0}} \max_{|x-\xi|=t} |\psi(\xi)| = \\ &= T \max_{|x-X|\leqslant T} |\psi| = T \|\psi\|_{C(\overline{D}_{X,T,0})} \end{aligned} \qquad (26)$$

и

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t u_f(x, t-\tau, \tau)\, d\tau \right\|_{C(\overline{K}_{X,T,0})} &\leqslant \int_0^T (t-\tau) \max_{|x-\xi|=t-\tau} |f(\xi, \tau)|\, d\tau \leqslant \\ &\leqslant \|f\|_{C(\overline{K}_{X,T,0})} \int_0^T (T-\tau)\, d\tau = \frac{T^2}{2} \|f\|_{C(\overline{K}_{X,T,0})}. \end{aligned} \qquad (27)$$

Аналогично в силу (23)

$$\left\| \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \right\|_{C(\overline{K}_{X,T,0})} \leqslant \|\varphi\|_{C(\overline{D}_{X,T,0})} + T \| |\nabla\varphi| \|_{C(\overline{D}_{X,T,0})}. \qquad (28)$$

Неравенство (19) немедленно вытекает из (26) — (28).

Отметим, что условия на функции φ, ψ и f, при которых доказано существование решения задачи Коши, в определенном смысле ослабить нельзя. Следующий пример показывает, что условие принадлежности функции φ пространству $C^2(R_3)$ недостаточно для существования решения задачи (14), (15).

Пусть функция φ принадлежит $C^2(R_3)$ и зависит только от $|x|$, $\varphi(x)=\alpha(|x|)$. И пусть существует решение $u(x, t)$ задачи (14), (15) с этой функцией $\varphi(x)$ и функциями $\psi\equiv 0$ и $f\equiv 0$. Тогда в силу (16)

$$u(x, t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-\xi|=t}\alpha(|\xi|)\,dS_\xi\right).$$

Пусть $|x|\neq 0$. Так как для всех точек ξ сферы $\{|x-\xi|=t\}$ имеет место равенство $|\xi^2|=|x|^2+t^2+2|x|t\cos\theta$, где θ — угол между векторами x и $\xi-x$, то

$$\int\limits_{|x-\xi|=t}\alpha(|\xi|)\,dS_\xi=$$
$$=t^2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\alpha\left(\sqrt{t^2+|x|^2+2|x|t\cos\theta}\right)\sin\theta\,d\theta=$$
$$=2\pi t^2\int\limits_{-1}^{+1}\alpha\left(\sqrt{t^2+|x|^2+2|x|t\lambda}\right)d\lambda=\frac{2\pi t}{|x|}\int\limits_{|t-|x||}^{t+|x|}\rho\alpha(\rho)\,d\rho.$$

Поэтому

$$u(x, t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2|x|}\int\limits_{|t-|x||}^{t+|x|}\rho\alpha(\rho)\,d\rho\right)=$$
$$=\frac{1}{2|x|}\left((t+|x|)\,\alpha(t+|x|)-(t-|x|)\,\alpha(|t-|x||)\right)=$$
$$=\frac{t}{2|x|}\left(\alpha(t+|x|)-\alpha(|t-|x||)\right)+\frac{1}{2}\left(\alpha(t+|x|)+\alpha(|t-|x||)\right).$$

Отсюда в силу непрерывности решения $u(0, t)=t\alpha'(t)+\alpha(t)$. А так как функция $u(0, t)\in C^2(t>0)$, то функция $\alpha(|x|)$ должна принадлежать $C^3(|x|>0)$, что, конечно, не вытекает из принадлежности функции φ пространству $C^2(R_3)$.

Пусть теперь $n=2$. Покажем, что *если* $\varphi(x_1, x_2)\in C^3(R_2)$, $\psi(x_1, x_2)\in C^2(R_2)$, *а функция* $f(x_1, x_2, t)$ *непрерывна в* $\{t\geqslant 0\}$ *вместе со всеми производными по переменным* x_1 *и* x_2 *до второго порядка включительно, то функция* $u(x_1, x_2, t)$, *заданная формулой Пуассона* (17), *является решением задачи* (14), (15). *При этом для любой точки* (X, T) *полупространства* $\{t>0\}$ *имеет место неравенство* (19).

Согласно формуле (10) при любом x_3

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{S_t(x_1, x_2, x_3)} \varphi(\xi_1, \xi_2)\, dS_\xi\right) +$$

$$+\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{S_t(x_1, x_2, x_3)} \psi(\xi_1, \xi_2)\, dS_\xi + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\tau}\int\limits_{S_\tau(x_1, x_2, x_3)} f(\xi_1, \xi_2, t-\tau)\, dS_\xi, \tag{17'}$$

где $S_\rho(x_1, x_2, x_3)$ — сфера радиуса ρ с центром в точке (x_1, x_2, x_3): $(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2=\rho^2$. Как только что доказано, стоящая в правой части равенства (17′) функция является решением задачи: $u_{tt}-u_{x_1x_1}-u_{x_2x_2}-u_{x_3x_3}=f(x_1, x_2, t)$ в $\{t>0\}$, $u|_{t=0}=$ $=\varphi(x_1, x_2)$, $u_t|_{t=0}=\psi(x_1, x_2)$ и для нее выполняется неравенство (19). А так как функция u не зависит от x_3, то она является решением задачи (14), (15) при $n=2$.

При $n=1$ непосредственно проверяется, что *функция* $u(x, t)$, *заданная формулой Даламбера* (18), *является решением задачи* (14), (15), *если* $\varphi \in C^2(R_1)$, $\psi \in C^1(R_1)$, *а функция* $f(x, t)$ *и ее первая производная по* x *непрерывны в* $\{t \geqslant 0\}$. *При этом для всех точек* (X, T) *полуплоскости* $\{t>0\}$ *имеет место неравенство*

$$\|u\|_{C(\overline{K}_{X,T,0})} \leqslant \|\varphi\|_{C(\overline{D}_{X,T,0})} + T\|\psi\|_{C(\overline{D}_{X,T,0})} + \frac{T^2}{2}\|f\|_{C(\overline{K}_{X,T,0})}$$

($K_{X,T,0}$ — треугольник $\{t+X-T<x<T+X-t,\quad 0<t<T\}$, а $D_{X,T,0}=\{X-T<x<X+T,\ t=0\}$ — его основание).

В случае более трех пространственных переменных $(n>3)$ так же, как при $n=3$, устанавливается, что если $\varphi \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(R_n)$, $\psi \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(R_n)$, а функция f непрерывна вместе со своими производными по $x_1, \ldots, x_n$ до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ включительно на множестве $\{t \geqslant 0\}$, то заданная соответствующим представлением функция u является решением задачи (14), (15).

Теорема 3. *Если* $\varphi(x) \in C^{m+3}(R_n)$, $\psi(x) \in C^{m+2}(R_n)$ *и функция* $f(x, t)$ *непрерывна вместе со своими производными по* $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ *до порядка* $m+2$ *включительно в* $\{t \geqslant 0\}$, *где* $m=$ $=\max\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1,\ 0\right)$, *то существует решение* $u(x, t)$ *задачи* (14), (15). *При этом для любой точки* (X, T) *полупространства* $\{t>0\}$ *имеет место неравенство*

$$\|u\|_{C(\overline{K}_{X,T,0})} \leqslant C\Big(\|\varphi\|_{C^{m+1}(\overline{D}_{X,T,0})} + \|\psi\|_{C^m(\overline{D}_{X,T,0})} + \sum_{|\alpha| \leqslant m}\|D^\alpha f\|_{C(\overline{K}_{X,T,0})}\Big)$$

с некоторой зависящей только от T *постоянной* C.

Как уже отмечалось в предыдущем пункте, из формулы Пуассона в случае $n=2$ и из соответствующего представления в случае любого четного $n>2$ вытекает, что значение решения задачи Коши (14), (15) в точке (x, t), $t>0$, зависит от значений функции f (а в случае $n>2$ и от значений ее производных по пространственным переменным) во всем конусе $\bar{K}_{x,t,0}$ и от значений начальных функций φ и ψ (и от значений их производных) на всем основании $\bar{D}_{x,t,0}$ этого конуса. В случае любого нечетного $n\geqslant 3$ (также как и в случае $n=3$) значение решения в точке (x, t) зависит от значений функции f, а в случае $n>3$ и от значений ее производных по пространственным переменным только на боковой поверхности $\Gamma_{x,t,0}$ конуса $K_{x,t,0}$ и от значений начальных функций φ и ψ и их производных только на границе основания конуса — сфере $S_{x,t,0}$.

В связи с этим конус $K_{x,t,0}$ в случае четного числа пространственных переменных $n\geqslant 2$ и коническую поверхность $\Gamma_{x,t,0}$ в случае нечетного $n\geqslant 3$ называют *областью зависимости* решения задачи Коши (14), (15) в точке (x, t) *от правой части уравнения*. Аналогично, шар $D_{x,t,0}$, лежащий на начальной плоскости, в случае четного $n\geqslant 2$ и границу шара — сферу $S_{x,t,0}$ в случае нечетного $n\geqslant 3$ называют *областью зависимости* решения задачи Коши в точке (x, t) *от начальных данных*.

В случае $n=1$ из формулы Даламбера (18) вытекает, что решение задачи Коши в точке (x, t) зависит только от значений функции f в треугольнике $K_{x,t,0}$, от значений начальной функции ψ на основании этого треугольника $D_{x,t,0}$ и от значений функции φ на границе основания — в точках $(x+t, 0)$ и $(x-t, 0)$.

Предположим, что при некотором $R>0$ начальные функции φ и ψ равны нулю для $|x|\geqslant R$, а функция f равна нулю для $|x|+t\geqslant R$. Тогда решение u задачи Коши равно нулю для всех $(x, t)\in \in\{|x|\geqslant R+t,\ t\geqslant 0\}$, поскольку конус $K_{x,t,0}$ при таких (x, t) не имеет общих точек с множеством $\{|x|+t<R,\ t>0\}$, а его основание $\bar{D}_{x,t,0}$ не имеет общих точек с шаром $\{|x|<R,\ t=0\}$. (Это утверждение остается справедливым, даже если f равна нулю только при $|x|\geqslant R+t$.)

В случае четного числа пространственных переменных множество $\{|x|\geqslant R+t,\ t\geqslant 0\}$ является, вообще говоря, максимально возможным множеством, на котором $u=0$. Например, при $n=2$, если взять функцию ψ положительной в круге $\{|x|<R\}$, а функции φ и f равными нулю, то из формулы Пуассона вытекает, что $u(x, t)>0$ при всех $(x, t)\in\{|x|<R+t,\ t>0\}$.

В случае нечетного числа $n\geqslant 3$ пространственных переменных функция $u(x, t)$ обращается в нуль не только на множестве $\{|x|\geqslant R+t,\ t\geqslant 0\}$, но и на множестве $\{|x|\leqslant t-R,\ t\geqslant R\}$, поскольку при $(x, t)\in\{|x|\leqslant t-R,\ t\geqslant R\}$ коническая поверхность

$\Gamma_{x,t,0}$ не имеет общих точек с множеством $\{|x|+t<R,\ t>0\}$, а граница основания $S_{x,t,0}$ не имеет общих точек с шаром $\{|x|<R,\ t=0\}$. Множество $G=\{|x|\geq R+t,\ t\geq 0\}\cup\{|x|\leq t-R,\ t\geq R\}$ является, вообще говоря, максимальным множеством, на котором $u=0$. Например, при $n=3$, если функция $\psi(x)>0$ при $|x|<R$, а функции φ и f равны нулю, то из формулы Кирхгофа вытекает, что $u(x,\ t)>0$ на дополнительной к G области $\{||x|-t|<R,\ t>0\}$.

Если свободный член $f(x,\ t)$ в уравнении (14) задан не во всем полупространстве $\{t>0\}$, а лишь в полосе $\{0<t<T\}=\Pi_T$ при некотором $T>0$, то рассматривают задачу Коши для уравнения (14) в полосе Π_T.

Принадлежащая $C^2(0<t<T)\cap C^1(0\leq t<T)$ функция $u(x,\ t)$ называется *решением задачи Коши* (14), (15) *в полосе* Π_T, если для всех точек $(x,\ t)\in\Pi_T$ она удовлетворяет уравнению (14), а при $t=0$ начальным условиям (15). Для задачи Коши в полосе, конечно, имеют место теоремы существования и единственности, аналогичные соответствующим теоремам для задачи Коши в полупространстве. Задача Коши в полосе Π_T не может иметь более одного решения и, например, в случае $n=3$, для существования решения задачи Коши в полосе Π_T достаточно, чтобы $\varphi\in C^3(R_3)$, $\psi\in C^2(R_3)$, а функция f была непрерывной в $\{0\leq t<T\}$ вместе со всеми производными по переменным x_1, x_2, x_3 до второго порядка включительно; при этом решение задачи представляется в Π_T формулой Кирхгофа.

Наряду с задачей Коши в полупространстве $\{t>0\}$ можно рассматривать задачу Коши и в полупространствах $\{t>t^0\}$ или $\{t<t^0\}$ при любом t^0. Принадлежащая пространству $C^2(t>t^0)\cap$ $\cap\, C^1(t\geq t^0)$ функция $u(x,\ t)$ называется *решением задачи Коши в полупространстве* $\{t>t^0\}$ *для волнового уравнения,* если в $\{t>t^0\}$ она удовлетворяет уравнению $\Box u=f$, а при $t=t^0$ — начальным условиям $u|_{t=t^0}=\varphi$, $u_t|_{t=t^0}=\psi$. Аналогично определяется решение задачи Коши в полупространстве $\{t<t^0\}$. Задача Коши в полупространстве $\{t>t^0\}$ сводится к задаче Коши в полупространстве $\{t>0\}$ с помощью замены t на $t-t^0$. Задача Коши в полупространстве $\{t<t^0\}$ сводится к задаче Коши в полупространстве $\{t>0\}$ с помощью замены t на t^0-t. С помощью замены t на t/a (a — положительная постоянная) к задаче Коши (14), (15) сводится задача Коши в полупространстве $\{t>0\}$ для уравнения $\frac{1}{a^2}u_{tt}-\Delta u=f$.

Пусть D — некоторая n-мерная область плоскости $\{t=0\}$, а лежащая в полупространстве $\{t>0\}$ область Q состоит из точек $(x,\ t)$, являющихся вершинами конусов $K_{x,t,0}$, основания которых (шары $D_{x,t,0}$) принадлежат D. Если, в частности, D есть шар $\{|x-x^0|<R\}$, то область Q является конусом $K_{x^0,R,0}$; если D — куб $\{|x_i-x_i^0|<a,$

$i=1, \ldots, n\}$, то Q — пирамида, основанием которой является этот куб, а вершина расположена в точке (x^0, a); если D — вся плоскость $\{t=0\}$, то Q — полупространство $\{t>0\}$.

Принадлежащая $C^2(Q) \cap C^1(Q \cup D)$ функция $u(x, t)$ называется *решением задачи Коши в Q для волнового уравнения*, если она удовлетворяет в Q уравнению $\square u=f$ и при $t=0$, $x \in D$, — начальным условиям $u|_{t=0}=\varphi$, $u_t|_{t=0}=\psi$.

Из теоремы 1 предыдущего пункта немедленно вытекает теорема единственности решения задачи Коши в Q: задача Коши в Q не может иметь более одного решения.

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае справедлива и теорема существования — теорема 3. Например, при $n=3$ решение задачи Коши в Q существует, если $\varphi \in C^3(D)$, $\psi \in C^2(D)$, а функция f непрерывна в $Q \cup D$ вместе с производными по пространственным переменным до второго порядка включительно. При этом решение $u(x, t)$ задается формулой Кирхгофа (16).

Заметим, что решение задачи Коши (14), (15) в полупространстве $\{t>0\}$ в области Q совпадает с решением задачи Коши в Q для уравнения (14) с начальными функциями φ и ψ, рассматриваемыми только на D.

§ 2. Смешанные задачи

1. Единственность решения. Пусть D — некоторая ограниченная область n-мерного пространства R_n ($x=(x_1, \ldots, x_n)$ — точка этого пространства). В $(n+1)$-мерном пространстве $R_{n+1}=R_n \times \{-\infty< t<+\infty\}$ рассмотрим ограниченный цилиндр $Q_T=\{x \in D,\ 0<t<T\}$ высоты $T>0$. Обозначим через Γ_T боковую поверхность $\{x \in \partial D,\ 0<t<T\}$ цилиндра Q_T, а через D_τ — сечение $\{x \in D,\ t=\tau\}$ этого цилиндра плоскостью $t=\tau$; в частности, верхнее основание цилиндра Q_T есть $D_T=\{x \in D,\ t=T\}$, а нижнее его основание — $D_0=\{x \in D,\ t=0\}$.

В цилиндре Q_T при некотором $T>0$ рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\mathscr{L}u \equiv u_{tt}-\operatorname{div}(k(x)\nabla u)+a(x)u=f(x, t), \tag{1}$$

где $k(x) \in C^1(\overline{D})$, $a(x) \in C(\overline{D})$, $k(x) \geqslant k_0=\text{const}>0$.

Функция $u(x, t)$, принадлежащая пространству $C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$, удовлетворяющая в Q_T уравнению (1), на D_0 начальным условиям

$$u|_{t=0}=\varphi, \tag{2}$$

$$u_t|_{t=0}=\psi, \tag{3}$$

и на Γ_T одному из граничных условий

$$u|_{\Gamma_T}=\chi$$

или

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\Big|_{\Gamma_T}=\chi,$$

где σ — некоторая непрерывная на Γ_T функция, называется (*классическим*) *решением первой или* соответственно *третьей смешанной задачи для уравнения* (1).

Если $\sigma\equiv 0$ на Γ_T, то третья смешанная задача называется *второй смешанной задачей*.

Так как случай неоднородных граничных условий легко сводится к случаю однородных граничных условий, то в дальнейшем мы будем рассматривать однородные граничные условия

$$u\,|_{\Gamma_T}=0 \tag{4}$$

и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\Big|_{\Gamma_T}=0. \tag{5}$$

Будем считать, что коэффициент $a(x)$ в уравнении (1) неотрицателен в Q_T, а функция σ в граничном условии (5) зависит лишь от x, $\sigma=\sigma(x)$, и неотрицательна на Γ_T.

Пусть функция $u(x, t)$ является решением одной из задач (1) — (4) или (1), (2), (3), (5), причем правая часть $f(x, t)$ уравнения (1) принадлежит $L_2(Q_T)$. Возьмем произвольное δ, $0<\delta<T$. Умножим (1) на функцию $v(x, t)$, принадлежащую $C^1(\bar{Q}_{T-\delta})$ и удовлетворяющую условию

$$v\,|_{D_{T-\delta}}=0, \tag{6}$$

и проинтегрируем полученное равенство по цилиндру $Q_{T-\delta}$. Так как $u_{tt}v=(u_tv)_t-u_tv_t$, а $v\operatorname{div}(k\nabla u)=\operatorname{div}(kv\nabla u)-k\nabla u\nabla v$, то, учитывая начальное условие (3) и условие (6) с помощью формулы Остроградского, получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_{T-\delta}} fv\,dx\,dt=&\int\limits_{Q_{T-\delta}}((u_tv)_t-\operatorname{div}(kv\nabla u))\,dx\,dt+\\ &+\int\limits_{Q_{T-\delta}}(k\nabla u\nabla v+auv-u_tv_t)\,dx\,dt=\\ &=\int\limits_{D_{T-\delta}}u_tv\,dx-\int\limits_{D_0}u_tv\,dx-\int\limits_{\Gamma_{T-\delta}}k\frac{\partial u}{\partial n}v\,dS\,dt+\\ +\int\limits_{Q_{T-\delta}}(k\nabla u\nabla v+auv-u_tv_t)\,dx\,dt&=-\int\limits_{D_0}\psi v\,dx-\int\limits_{\Gamma_{T-\delta}}kv\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt+\\ &+\int\limits_{Q_{T-\delta}}(k\nabla u\nabla v+auv-u_tv_t)\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{7}$$

Если $u(x, t)$ есть решение третьей (или второй) смешанной задачи, то в силу (5) из последнего равенства вытекает, что $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_{T-\delta}} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)\,dx\,dt + \int_{\Gamma_{T-\delta}} k\sigma uv\,dS\,dt = \\ = \int_{Q_{T-\delta}} fv\,dx\,dt + \int_{D_0} \psi v\,dx$$

при всех $v(x, t)$ из $C^1(\overline{Q}_{T-\delta})$, для которых выполнено условие (6), а следовательно, и при всех $v(x, t)$ из $H^1(Q_{T-\delta})$, удовлетворяющих условию (6).

Если функция $u(x, t)$ является решением первой смешанной задачи, то предположим дополнительно, что $v(x, t)$ удовлетворяет условию

$$v|_{\Gamma_{T-\delta}} = 0. \tag{8}$$

Тогда из (7) получим, что $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_{T-\delta}} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)dx\,dt = \int_{D_0} \psi v\,dx + \int_{Q_{T-\delta}} fv\,dx\,dt$$

при всех $v \in H^1(Q_{T-\delta})$, для которых выполнены условия (6) и (8).

С помощью полученных тождеств введем понятия обобщенных решений рассматриваемых смешанных задач. Будем предполагать, что $f(x, t) \in L_2(Q_T)$, а $\psi(x) \in L_2(D)$.

Принадлежащая пространству $H^1(Q_T)$ функция u называется *обобщенным решением в Q_T первой смешанной задачи* (1)—(4), если она удовлетворяет начальному условию (2), граничному условию (4) и тождеству

$$\int_{Q_T} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)dx\,dt = \int_{D_0} \psi v\,dx + \int_{Q_T} fv\,dx\,dt \tag{9}$$

при всех $v \in H^1(Q_T)$, для которых выполнены условия (4) и условие

$$v|_{D_T} = 0. \tag{10}$$

Принадлежащая пространству $H^1(Q_T)$ функция u называется *обобщенным решением в Q_T третьей* (*второй* при $\sigma = 0$) *смешанной задачи* (1), (2), (3), (5), если она удовлетворяет начальному условию (2) и тождеству

$$\int_{Q_T} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)dx\,dt + \int_{\Gamma_T} k\sigma uv\,dS\,dt = \\ = \int_{D_0} \psi v\,dx + \int_{Q_T} fv\,dx\,dt \tag{11}$$

при всех $v \in H^1(Q_T)$, для которых выполнено условие (10).

Заметим, что, как и классические решения, обобщенные решения обладают следующим свойством. *Если u — обобщенное решение задачи* (1) — (4) *или задачи* (1), (2), (3), (5) *в цилиндре Q_T, то оно является обобщенным решением соответствующей задачи и в цилиндре $Q_{T'}$ при любом $T' < T$.*

Действительно, если функция u является обобщенным решением в Q_T одной из рассматриваемых задач, то для любого $T' < T$ $u \in H^1(Q_{T'})$, в случае первой смешанной задачи $u|_{\Gamma_{T'}} = 0$, и для нее при всех v, принадлежащих $H^1(Q_T)$ и удовлетворяющих условию $v|_{D_T} = 0$, а в случае первой смешанной задачи еще и условию $v|_{\Gamma_T} = 0$, имеет место соответствующее интегральное тождество.

Нетрудно непосредственно проверить, что если функция v принадлежит $H^1(Q_{T'})$, $v|_{D_{T'}} = 0$ и $v = 0$ в $Q_T \setminus Q_{T'}$, то $v \in H^1(Q_T)$ и $v|_{D_T} = 0$; а если, дополнительно, $v|_{\Gamma_{T'}} = 0$, то и $v|_{\Gamma_T} = 0$. Поэтому функция u удовлетворяет интегральному тождеству, с помощью которого определяется обобщенное решение соответствующей смешанной задачи в $Q_{T'}$.

Отметим еще, что понятие обобщенного решения смешанной задачи введено нами как обобщение понятия классического (при $f \in L_2(Q_T)$) решения, причем доказано следующее утверждение: *классическое решение в Q_T каждой из задач* (1) — (4) *и* (1), (2), (3), (5) *с $f \in L_2(Q_T)$ является обобщенным решением этой задачи в $Q_{T-\delta}$ при любом $\delta \in (0, T)$.*

Наряду с классическим и обобщенным решениями смешанных задач можно ввести понятие решения почти всюду (решения п. в.). Функция u называется *решением п. в. смешанной задачи* (1) — (4) или *третьей* (*второй* при $\sigma = 0$) *смешанной задачи* (1), (2), (3), (5), если она принадлежит $H^2(Q_T)$, удовлетворяет в Q_T (для п. в. $(x, t) \in Q_T$)) уравнению (1), удовлетворяет начальным условиям (2) и (3) и одному из граничных условий (4) или (5) соответственно.

Сразу из определения вытекает, что если классическое решение задачи (1) — (4) или задачи (1), (2), (3), (5) принадлежит пространству $H^2(Q_T)$, то оно является решением п. в. соответствующей задачи. Кроме того, если решение п. в. задачи (1) — (4) (или задачи (1), (2), (3), (5)) принадлежит $C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \bar{D}_0)$, то оно является классическим решением этой задачи (функция $u_{tt} - \operatorname{div}(k\nabla u) + au - f$ непрерывна и почти всюду в Q_T равна нулю; следовательно, она равна нулю всюду в Q_T).

Как было показано выше, классическое решение первой или третьей (второй) смешанной задачи для уравнения (1) в Q_T при $f \in L_2(Q_T)$ является обобщенным решением соответствующей задачи в $Q_{T-\delta}$ при любом $\delta \in (0, T)$. Аналогично доказывается, что решение п. в. первой или третьей (второй) смешанной задачи для уравнения (1) в Q_T является обобщенным решением соответствующей задачи в Q_T.

Имеет место также следующее, в определенном смысле обратное, утверждение.

Лемма 1. *Если обобщенное решение задачи* (1) — (4) *или задачи* (1), (2), (3), (5) *принадлежит пространству* $H^2(Q_T)$, *то оно является решением п. в. соответствующей задачи. Если обобщенное решение задачи* (1) — (4) *или задачи* (1), (2), (3), (5) *принадлежит* $C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \bar{D}_0)$, *то оно является классическим решением соответствующей задачи.*

Доказывать оба утверждения леммы будем одновременно.

Пусть обобщенное решение задачи (1) — (4) или задачи (1), (2), (3), (5) принадлежит $H^2(Q_T)$ (или $C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \bar{D}_0)$). Тогда для доказательства утверждения леммы достаточно установить, что в Q_T функция u удовлетворяет уравнению (1), на D_0 — начальному условию (3), а в случае третьей (второй) смешанной задачи и граничному условию (5) на Γ_T.

Возьмем произвольную функцию $v \in C^1(\bar{Q}_T)$ и преобразуем (9) или соответственно (11) с помощью формулы Остроградского следующим образом:

$$\int_{Q_T} (-\operatorname{div} k\nabla u + au + u_{tt} - f)\, v\, dx\, dt = 0.$$

Если $u \in H^2(Q_T)$, то $-\operatorname{div}(k\nabla u) + au + u_{tt} - f \in L_2(Q_T)$, а так как множество $\dot{C}^1(\bar{Q}_T)$ всюду плотно в $L_2(Q_T)$, то функция u удовлетворяет п. в. в Q_T уравнению (1).

Если $u \in C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \bar{D}_0)$, то $-\operatorname{div}(k\nabla u) + au + u_{tt} - f \in L_2(Q')$ при произвольной подобласти $Q' \Subset Q$; поскольку множество функций $\dot{C}^1(\bar{Q}_T)$ всюду плотно в $L_2(Q')$, то из произвольности Q' вытекает, что функция u удовлетворяет в Q_T уравнению (1). (Так как функция $-\operatorname{div}(k\nabla u) + au + u_{tt}$ непрерывна в Q_T, то и функция f непрерывна в Q_T, т. е. функция u удовлетворяет уравнению (1) всюду.)

Возьмем произвольную функцию v, принадлежащую $C^1(\bar{Q}_{T-\delta})$ при некотором $\delta \in (0, T)$ и удовлетворяющую условиям (6) и (8). Если $u \in H^2(Q_T)$, то из (9) или соответственно (11) с помощью формулы Остроградского получаем равенство

$$\int_{D_0} (u_t - \psi)\, v\, dx = 0.$$

Это же равенство справедливо и в случае, когда $u \in C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \bar{D}_0)$, так как в этом случае $-\operatorname{div} k\nabla u + u_{tt} = f - au \in L_1(Q_T)$ и $u \in C^1(\bar{Q}_{T-\delta})$. Поскольку по любой функции g из $\dot{C}^1(\bar{D}_0)$ (множество таких функций всюду плотно в $L_2(D_0)$)

можно построить функцию v, принадлежащую $C^1(\bar{Q}_{T-\delta})$ и удовлетворяющую условиям (6), (8) и условию $v|_{D_0}=g$, то функция u удовлетворяет начальному условию (3).

Возьмем теперь для любого $\delta \in (0, T)$ произвольную функцию $v \in C^1(\bar{Q}_{T-\delta})$, удовлетворяющую условию (6). Тогда из (11) получим

$$\int\limits_{\Gamma_{T-\delta}} kv\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right) dS\,dt=0.$$

Но для любой непрерывно дифференцируемой и финитной на Γ_T функции g (множество таких функций всюду плотно в $L_2(\Gamma_T)$) можно найти $\delta \in (0, T)$ и функцию $v \in C^1(\bar{Q}_{T-\delta})$, удовлетворяющую условию (6) и условию $v|_{\Gamma_{T-\delta}}=g/k$. Поэтому $\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\Big|_{\Gamma_T}=0$. Лемма доказана.

Докажем теперь следующую теорему единственности.

Теорема 1. *Каждая из задач* (1)—(4) *и* (1), (2), (3), (5) *не может иметь более одного обобщенного решения.*

Пусть u — обобщенное решение задачи (1)—(4) или задачи (1), (2), (3), (5) при $f=0$ в Q_T, $\varphi=0$, $\psi=0$ на D_0. Покажем, что $u=0$ в Q_T.

Возьмем произвольное $\tau \in (0, T)$ и рассмотрим функцию

$$v(x, t)=\begin{cases}\int\limits_t^\tau u(x, \theta)\,d\theta, & 0<t<\tau,\\ 0, & \tau<t<T.\end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что функция v имеет в Q_T обобщенные производные

$$v_t=\begin{cases}-u, & 0<t<\tau,\\ 0, & \tau<t<T,\end{cases}$$

и

$$v_{x_i}=\begin{cases}\int\limits_t^\tau u_{x_i}(x, \theta)\,d\theta, & 0<t<\tau,\\ 0\quad, & \tau<t<T.\end{cases}$$

Следовательно, $v(x, t) \in H^1(Q_T)$. При этом $v|_{D_T}=0$, и в случае, когда u — обобщенное решение первой смешанной задачи, $v|_{\Gamma_T}=0$.

Подставим функцию v в тождество (9), если u является обобщенным решением задачи (1)—(4), или в тождество (11), если u является обобщенным решением задачи (1), (2), (3), (5). Тогда в случае первой смешанной задачи получим равенство

$$\int\limits_{Q_\tau}\left(k\nabla u\int\limits_t^\tau \nabla u\,d\theta-avv_t+u_tu\right)dx\,dt=0,$$

а в случае третьей (второй) задачи — равенство

$$\int_{Q_\tau}\left(k\nabla u\int_t^\tau \nabla u\,d\theta - avv_t + u_t u\right)dx\,dt + \int_{\Gamma_\tau} k\sigma u(x,\ t)\int_t^\tau u(x,\ \theta)\,d\theta\,dS\,dt = 0$$

(напомним, что в области Q_τ $v_t = -u \in H^1(Q_\tau)$ и, следовательно, $v_t|_{\Gamma_\tau} \in L_2(\Gamma_\tau)$). Так как

$$\int_{Q_\tau} k(x)\nabla u(x,\ t)\int_t^\tau \nabla u(x,\ \theta)\,d\theta\,dt\,dx =$$

$$= \int_D k(x)\int_0^\tau \nabla u(x,\ t)\left[\int_t^\tau \nabla u(x,\ \theta)\,d\theta\right]dt\,dx =$$

$$= \int_D k(x)\int_0^\tau \nabla u(x,\ \theta)\,d\theta\int_0^\theta \nabla u(x,\ t)\,dt\,dx =$$

$$= \int_D k(x)\int_0^\tau \nabla u(x,\ \theta)\,d\theta\int_0^\tau \nabla u(x,\ t)\,dt\,dx -$$

$$- \int_D k(x)\int_0^\tau \nabla u(x,\ \theta)\,d\theta\int_\theta^\tau \nabla u(x,\ t)\,dt\,dx =$$

$$= \int_D k(x)\left|\int_0^\tau \nabla u(x,\ t)\,dt\right|^2 dx - \int_{Q_\tau} k(x)\nabla u(x,\ t)\int_t^\tau \nabla u(x,\ \theta)\,d\theta\,dt\,dx,$$

то

$$\int_{Q_\tau} k(x)\nabla u(x,\ t)\int_t^\tau \nabla u(x,\ \theta)\,d\theta\,dt\,dx = \frac{1}{2}\int_D k(x)\left|\int_0^\tau \nabla u(x,\ t)\,dt\right|^2 dx.$$

Поскольку аналогично

$$\int_{\Gamma_\tau} k\sigma u(x,\ t)\int_t^\tau u(x,\ \theta)\,d\theta\,dS\,dt =$$

$$= \int_{\partial D} k\sigma\left(\int_0^\tau u(x,\ t)\,dt\right)^2 dS - \int_{\Gamma_\tau} k\sigma u(x,\ t)\int_t^\tau u(x,\ \theta)\,d\theta\,dS\,dt,$$

то

$$\int_{\Gamma_\tau} k\sigma u(x,\ t)\int_t^\tau u(x,\ \theta)\,d\theta\,dS\,dt = \frac{1}{2}\int_{\partial D} k\sigma\left(\int_0^\tau u(x,\ t)\,dt\right)^2 dS.$$

Кроме того,

$$\int_{Q_\tau} avv_t\,dx\,dt = -\int_{D_0} av^2\,dx - \int_{Q_\tau} av_t v\,dx\,dt.$$

Поэтому

$$\int\limits_{Q_\tau} avv_t\,dx\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_{D_0} av^2\,dx.$$

Аналогично имеем

$$\int\limits_{Q_\tau} uu_t\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} u^2\,dx.$$

Следовательно, если u — решение первой смешанной задачи, то

$$\int\limits_D k(x)\left|\int\limits_0^\tau \nabla u(x,\ t)\,dt\right|^2 dx + \int\limits_{D_0} av^2\,dx + \int\limits_{D_\tau} u^2\,dx = 0,$$

а если u — решение третьей (второй) смешанной задачи, то

$$\int\limits_D k(x)\left|\int\limits_0^\tau \nabla u(x,\ t)\,dt\right|^2 dx + \int\limits_{D_0} av^2\,dx + \int\limits_{D_\tau} u^2\,dx + \\ + \int\limits_{\partial D} k\sigma\left(\int\limits_0^\tau u(x,\ t)\,dt\right)^2 dS = 0.$$

Так как $k(x) > 0$, $a(x) \geqslant 0$ в Q_T и $\sigma(x) \geqslant 0$ на Γ_T, то из этих равенств вытекает, что $\int\limits_{D_\tau} u^2\,dx = 0$. Поскольку τ — произвольное число из интервала $(0,\ T)$, то $u = 0$ в Q_T. Теорема доказана.

Как было показано, классические решения задач (1) — (4) и (1), (2), (3), (5) являются и обобщенными решениями этих задач в $Q_{T-\delta}$ при любом $\delta \in (0,\ T)$. Поэтому из теоремы 1 немедленно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Каждая из задач* (1) — (4) *и* (1), (2), (3), (5) *не может иметь более одного классического решения.*

Так как решения п. в. задач (1) — (4) и (1) — (3), (5) являются и обобщенными решениями этих задач, то из теоремы 1 вытекает также

Следствие 2. *Каждая из задач* (1) — (4) *и* (1), (2), (3), (5) *не может иметь более одного решения п. в.*

2. Существование обобщенного решения. Перейдем теперь к доказательству существования решений задач (1) — (4) и (1), (2), (3), (5). Для этого воспользуемся *методом Фурье*, который заключается в том, что решение смешанной задачи ищется в виде ряда по собственным функциям соответствующей эллиптической краевой задачи.

Пусть $v(x)$ — обобщенная собственная функция первой краевой задачи

$$\begin{gathered} \operatorname{div}(k\nabla v) - av = \lambda v, \qquad x \in D, \\ v|_{\partial D} = 0 \end{gathered} \tag{12}$$

или третьей (второй при $\sigma=0$) краевой задачи

$$\begin{gathered}\operatorname{div}(k\nabla v)-av=\lambda v, \qquad x\in D,\\ \left(\frac{\partial v}{\partial n}+\sigma v\right)\Big|_{\partial D}=0\end{gathered} \tag{13}$$

(λ — соответствующее собственное значение). Это означает, что в случае первой краевой задачи $v\in \mathring{H}^1(D)$ и для всех $\eta\in\mathring{H}^1(D)$

$$\int_D (k\nabla v\nabla\eta+av\eta)\,dx+\lambda\int_D v\eta\,dx=0, \tag{14}$$

а в случае третьей (второй) краевой задачи $v\in H^1(D)$ и при всех $\eta\in H^1(D)$

$$\int_D (k\nabla v\nabla\eta+av\eta)\,dx+\int_{\partial D} k\sigma v\eta\,dS+\lambda\int_D v\eta\,dx=0. \tag{15}$$

Рассмотрим ортонормированную в $L_2(D)$ систему $v_1, v_2, \ldots$, состоящую из всех обобщенных собственных функций задачи (12) или соответственно задачи (13); $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — последовательность соответствующих собственных значений (последовательность собственных значений, как обычно, считаем невозрастающей, причем каждое собственное значение повторяется в этой последовательности столько раз, какова его кратность). Как было доказано в § 1 гл. IV, система $v_1, v_2, \ldots$ является ортонормированным базисом в $L_2(D)$ и $\lambda_k\to-\infty$ при $k\to\infty$. В случае первой, третьей при $\sigma\not\equiv 0$ на ∂D и второй при $a\not\equiv 0$ в D краевых задач (напомним, что $k(x)\geqslant k_0>0$, $a(x)\geqslant 0$ в D и $\sigma(x)\geqslant 0$ на ∂D) первое собственное значение $\lambda_1<0$, т. е. $0>\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots$ Если $a(x)\equiv 0$ в D, то в случае второй краевой задачи $0=\lambda_1>\lambda_2\geqslant\ldots$

Предположим, что начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в (2) и (3) принадлежат $L_2(D)$, а функция $f(x, t)\in L_2(Q_T)$. Согласно теореме Фубини $f(x, t)\in L_2(D)$ для п. в. $t\in(0, T)$. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и функцию $f(x, t)$ для почти всех значений $t\in(0, T)$ разложим в ряды Фурье по системе $v_1(x), v_2(x), \ldots$ обобщенных собственных функций задачи (12), если рассматривается задача (1) — (4), или задачи (13), если рассматривается задача (1), (2), (3), (5),

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k v_k(x),\quad \psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k v_k(x),\quad f(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\,v_k(x), \tag{16}$$

где $\varphi_k=(\varphi, v_k)_{L_2(D)}$, $\psi_k=(\psi, v_k)_{L_2(D)}$, а $f_k(t)=\int_D f(x,t)\,v_k(x)\,dx$, $k=1, 2, \ldots$ Так как $|f_k(t)|^2\leqslant\int_D f^2(x, t)\,dx\cdot\int_D v_k^2\,dx=\int_D f^2(x, t)\,dx$, то $f_k(t)\in L_2(0, T)$, $k=1, 2, \ldots$ Согласно равенству Парсеваля —

Стеклова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 = \|\varphi\|^2_{L_2(D)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2 = \|\psi\|^2_{L_2(D)} \tag{17}$$

и для п. в. $t \in (0, T)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(t) = \int_D f^2(x, t)\, dx.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(t)\, dt = \int_{Q_T} f^2\, dx\, dt. \tag{17'}$$

Возьмем сначала в качестве начальных функций в (2) и (3) функции $\varphi_k v_k(x)$ и $\psi_k v_k(x)$ — k-е «гармоники» из рядов (16), а в качестве функции, стоящей в правой части уравнения (1), — функцию $f_k(t)\, v_k(x)$, $k \geq 1$. Рассмотрим функцию

$$u_k(x, t) = U_k(t)\, v_k(x), \tag{18}$$

где

$$U_k(t) = \varphi_k \cos\sqrt{-\lambda_k}\, t + \frac{\psi_k}{\sqrt{-\lambda_k}} \sin\sqrt{-\lambda_k}\, t + \\ + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^t f_k(\tau) \sin\sqrt{-\lambda_k}\,(t-\tau)\, d\tau; \tag{19}$$

в случае, когда $\lambda_1 = 0$,

$$U_1(t) = \varphi_1 + \psi_1 t + \int_0^t f_1(\tau)(t-\tau)\, d\tau = \\ = \lim_{\lambda_1 \to 0} \left(\varphi_1 \cos\sqrt{-\lambda_1}\, t + \frac{\psi_1}{\sqrt{-\lambda_1}} \sin\sqrt{-\lambda_1}\, t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}} \int_0^t f_1(\tau) \sin\sqrt{-\lambda_1}\,(t-\tau)\, d\tau \right).$$

Функция $U_k(t)$, очевидно, принадлежит $H^2(0, T)$, удовлетворяет при $t=0$ начальным условиям $U_k(0) = \varphi_k$, $U_k'(0) = \psi_k$ и для п. в. $t \in (0, T)$ является решением уравнения

$$U_k'' - \lambda_k U_k = f_k, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

Покажем, что если $v_k(x)$ и λ_k — обобщенная собственная функция и соответствующее собственное значение задачи (12) (или задачи (13)), то функция $u_k(x, t)$ есть обобщенное решение первой (соответственно третьей или второй) смешанной задачи для уравнения

$$u_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\,\nabla u) + au = f_k(t)\, v_k(x)$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi_k v_k(x), \quad u_t|_{t=0} = \varphi_k v_k(x).$$

Действительно, функция $u_k(x, t) \in H^1(Q_T)$, на D_0 она удовлетворяет начальному условию (2) и в случае первой смешанной задачи — граничному условию (4). Покажем, что функция $u_k(x, t)$ в случае первой смешанной задачи удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (k\nabla u_k \nabla v + a u_k v - u_{kt} v_t)\, dx\, dt = \\ = \psi_k \int\limits_{D_0} v_k(x) v\, dx + \int\limits_{Q_T} f_k(t) v_k(x) v\, dx\, dt \qquad (9_k)$$

для всех принадлежащих пространству $H^1(Q_T)$ функций v, удовлетворяющих условиям (4) и (10), а в случае второй и третьей смешанных задач — тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (k\nabla u_k \nabla v + a u_k v - u_{kt} v_t)\, dx\, dt + \int\limits_{\Gamma_T} k\sigma u_k v\, dS\, dt = \\ = \psi_k \int\limits_{D_0} v_k(x) v\, dx + \int\limits_{Q_T} f_k(t) v_k(x) v\, dx\, dt \qquad (11_k)$$

для всех удовлетворяющих условию (10) v из $H^1(Q_T)$. Справедливость тождеств (9_k) и (11_k), очевидно, достаточно установить лишь для всех функций v, непрерывно дифференцируемых в $\overline{Q}_T$ и удовлетворяющих условиям (4) и (10), соответственно, условию (10).

В силу (10), (18) и (19)

$$\int\limits_{Q_T} u_{kt} v_t\, dx\, dt = \int\limits_D v_k(x) \left[\int\limits_0^T U_k'(t) v_t\, dt\right] dx = \\ = \int\limits_D v_k(x) \left[-\psi_k v(x, 0) - \int\limits_0^T U_k''(t) v\, dt\right] dx = \\ = -\psi_k \int\limits_D v_k(x) v(x, 0)\, dx - \lambda_k \int\limits_{Q_T} u_k v\, dx\, dt - \int\limits_{Q_T} f_k(t) v_k(x) v\, dx\, dt.$$

Поэтому в случае первой смешанной задачи тождество (9_k) вытекает из (14):

$$\int\limits_{Q_T} (k\nabla u_k \nabla v + a u_k v - u_{kt} v_t)\, dx\, dt = \\ = \int\limits_0^T U_k(t)\, dt \int\limits_D (k(x) \nabla v_k \nabla v + a v_k v + \lambda_k v_k v)\, dx + \\ + \psi_k \int\limits_D v_k(x) v(x, 0)\, dx + \int\limits_{Q_T} f_k(t) v_k(x) v\, dx\, dt = \\ = \psi_k \int\limits_D v_k(x) v(x, 0)\, dx + \int\limits_{Q_T} f_k(t) v_k(x) v\, dx\, dt,$$

Аналогично, в случае третьей (второй) смешанной задачи тождество (11_k) вытекает из (15):

$$\int\limits_{Q_T} (k(x)\nabla u_k \nabla v + a u_k v - u_{kt} v_t)\,dx\,dt + \int\limits_{\Gamma_T} k(x)\sigma u_k v\,dS\,dt =$$
$$= \int\limits_0^T U_k(t)\,dt\left[\int\limits_D (k(x)\nabla v_k \nabla v + a v_k v + \lambda_k v_k v)\,dx + \int\limits_{\partial D} k(x)\sigma v_k v\,dS\right] +$$
$$+ \psi_k \int\limits_D v_k(x)\, v(x,\ 0)\,dx + \int\limits_{Q_T} f_k(t)\, v_k(x)\, v\,dx\,dt =$$
$$= \psi_k \int\limits_D v_k(x)\, v(x,\ 0)\,dx + \int\limits_{Q_T} f_k(t)\, v_k(x)\, v\,dx\,dt.$$

Если в качестве начальных функций в (2) и (3) взять частичные суммы рядов из (16) $\sum\limits_{k=1}^{N} \varphi_k v_k(x)$ и $\sum\limits_{k=1}^{N} \psi_k v_k(x)$ при некотором N, а в качестве функции f в (1) взять частичную сумму ее ряда Фурье $\sum\limits_{k=1}^{N} f_k(t)\, v_k(x)$, то обобщенным решением задачи (1)—(4) ((1), (2), (3), (5)) будет функция

$$S_N(x,\ t) = \sum_{k=1}^{N} u_k(x,\ t) = \sum_{k=1}^{N} U_k(t)\, v_k(x).$$

В частности, в случае первой смешанной задачи эта функция удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (k\nabla S_N \nabla v + a S_N v - S_{Nt} v_t)\,dx\,dt =$$
$$= \int\limits_D \sum_{k=1}^{N} \psi_k v_k(x)\, v(x,\ 0)\,dx + \int\limits_{Q_T} \sum_{k=1}^{N} f_k(t)\, v_k(x)\, v(x,\ t)\,dx\,dt \tag{21}$$

при всех $v \in H^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям (4) и (10), а в случае третьей (второй) задачи — тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (k\nabla S_N \nabla v + a S_N v - S_{Nt} v_t)\,dx\,dt + \int\limits_{\Gamma_T} k\sigma S_N v\,dS\,dt =$$
$$= \int\limits_D \sum_{k=1}^{N} \psi_k v_k(x)\, v(x,\ 0)\,dx + \int\limits_{Q_T} \sum_{k=1}^{N} f_k(t)\, v_k(x)\, v\,dx\,dt \tag{22}$$

при всех $v \in H^1(Q_T)$, удовлетворяющих условию (10).

Поэтому естественно ожидать, что при определенных предположениях относительно φ, ψ и f решение задачи (1)—(4) ((1), (2), (3), (5)) можно представить в виде ряда

$$u(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)\, v_k(x), \tag{23}$$

где $v_1, v_2, \ldots$ — обобщенные собственные функции задачи (12) (соответственно (13)).

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(D)$, *а* $\varphi \in \mathring{H}^1(D)$ *в случае первой смешанной задачи* (1)—(4) *и* $\varphi \in H^1(D)$ *в случае третьей (второй) смешанной задачи* (1), (2), (3), (5). *Тогда обобщенное решение* u *соответствующей задачи существует и представляется сходящимся в* $H^1(Q_T)$ *рядом* (23). *При этом имеет место неравенство*

$$\|u\|_{H^1(Q_T)} \leqslant C\left(\|\varphi\|_{H^1(D)} + \|\psi\|_{L_2(D)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}\right), \tag{24}$$

в котором положительная постоянная C *не зависит от* φ, ψ *и* f.

Из формулы (19) вытекает, что для всех $t \in [0, T]$

$$|U_k(t)| \leqslant |\varphi_k| + |\psi_k|\,|\lambda_k|^{-1/2} + |\lambda_k|^{-1/2}\int_0^T |f_k(t)|\,dt \quad \text{при} \quad k > 1$$

и

$$|U_1(t)| \leqslant |\varphi_1| + C_1|\psi_1| + C_1\int_0^T |f_1(t)|\,dt$$

(в случае второй смешанной задачи при $a \equiv 0$ $C_1 = T$, в остальных случаях $C_1 = 1/\sqrt{|\lambda_1|}$). Поэтому для всех $t \in [0, T]$

$$U_k^2(t) \leqslant 3\varphi_k^2 + 3\psi_k^2|\lambda_k|^{-1} + 3|\lambda_k|^{-1}\left(\int_0^T |f_k|\,dt\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C(T)\left(\varphi_k^2 + \psi_k^2|\lambda_k|^{-1} + |\lambda_k|^{-1}\int_0^T f_k^2\,dt\right) \quad \text{при} \quad k > 1, \tag{25}$$

$$U_1^2(t) \leqslant C(T)\left(\varphi_1^2 + \psi_1^2 + \int_0^T f_1^2\,dt\right). \tag{25'}$$

Поскольку при любом k, $k = 1, 2, \ldots$, $\left|\frac{dU_k}{dt}\right| \leqslant |\varphi_k|\,|\lambda_k|^{1/2} + |\psi_k| + \int_0^T |f_k|\,dt$, то для всех $t \in [0, T]$

$$\left|\frac{dU_k}{dt}\right|^2 \leqslant C(T)\left(\varphi_k^2|\lambda_k| + |\psi_k|^2 + \int_0^T f_k^2\,dt\right). \tag{26}$$

Так как функция φ принадлежит в случае первой смешанной задачи пространству $\mathring{H}^1(D)$ (в случае третьей смешанной задачи — пространству $H^1(D)$), то из теоремы 3 п. 3 § 1 гл. IV следует, что ее ряд Фурье (16) по системе собственных функций задачи (12) (или задачи (13) соответственно) сходится к ней в норме пространства $H^1(D)$. При этом существует такая постоянная $C > 0$, что для всех φ из $\mathring{H}^1(D)$ (или, соответственно, из $H^1(D)$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 |\lambda_k| \leqslant C_1 \|\varphi\|^2_{H^1(D)}. \tag{27}$$

Рассмотрим частичную сумму $S_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} U_k(t) v_k(x)$ ряда (23). При каждом $t \in [0, T]$ она и ее производная по t (в силу теоремы 3 п. 2 § 6 гл. III функции $U_k(t)$ и $U_k'(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, непрерывны на $[0, T]$) принадлежат $\mathring{H}^1(D_t)$ (или $H^1(D_t)$).

При исследовании задачи (1) — (4) в пространстве $\mathring{H}^1(D_t)$ удобно ввести скалярное произведение

$$\int_{D_t} (k\nabla u \nabla v + auv)\, dx.$$

При исследовании задачи (1), (2), (3), (5) в пространстве $H^1(D_t)$ введем скалярное произведение

$$\int_{D_t} (k\nabla u \nabla v + auv)\, dx + \int_{\partial D_t} k\sigma uv\, dS,$$

если или $a \not\equiv 0$ в D, или $\sigma \not\equiv 0$ на ∂D, и скалярное произведение

$$\int_{D_t} (k\nabla u \nabla v + uv)\, dx,$$

если $a \equiv 0$ в D и $\sigma \equiv 0$ на ∂D. Поскольку в случае первой и третьей при $\sigma \not\equiv 0$ смешанных задач и в случае второй смешанной задачи при $a \not\equiv 0$ системы функций $v_1/\sqrt{-\lambda_1}$, $v_2/\sqrt{-\lambda_2}$, ... ортонормированы в соответствующих скалярных произведениях, а в случае второй смешанной задачи при $a \equiv 0$ ортонормирована система функций $v_1/\sqrt{1-\lambda_1}$, $v_2/\sqrt{1-\lambda_2}$, ..., то для всех $t \in [0, T]$ и любых M и N, $1 \leqslant M < N$, в силу (25) имеем

$$\|S_N(x, t) - S_M(x, t)\|^2_{H^1(D_t)} = \left\| \sum_{k=M+1}^{N} U_k(t) v_k(x) \right\|^2_{H^1(D_t)} =$$
$$= \sum_{k=M+1}^{N} U_k^2(t) |\lambda_k| \leqslant C(T) \sum_{k=M+1}^{N} \left(\varphi_k^2 |\lambda_k| + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2\, dt \right),$$

если или $a \not\equiv 0$ в D, или $\sigma \not\equiv 0$ на ∂D, и

$$\|S_N(x, t) - S_M(x, t)\|^2_{H^1(D_t)} = \sum_{k=M+1}^{N} U_k^2(t)(1 - \lambda_k) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1 + |\lambda_2|}{|\lambda_2|} C(T) \sum_{k=M+1}^{N} \left(\varphi_k^2 (1 + |\lambda_k|) + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2\, dt \right),$$

если $a \equiv 0$ в D и $\sigma \equiv 0$ на ∂D. Таким образом, во всех случаях

$$\|S_N(x, t) - S_M(x, t)\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \sum_{k=M+1}^{N} \left(\varphi_k^2 (1 + |\lambda_k|) + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2\, dt\right) \quad (28)$$

при всех $t \in [0, T]$. Аналогично, в силу (26) для всех $t \in [0, T]$

$$\left\|\frac{\partial S_N}{\partial t} - \frac{\partial S_M}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D_t)} = \left\|\sum_{k=M+1}^{N} U_k'(t)\, v_k(x)\right\|^2_{L_2(D_t)} =$$
$$= \sum_{k=M+1}^{N} U_k'^2(t) \leqslant C_3 \sum_{k=M+1}^{N} \left(\varphi_k^2 |\lambda_k| + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2\, dt\right). \quad (28')$$

Наряду с этими неравенствами имеют так же место справедливые при всех $t \in [0, T]$ и любых $N \geqslant 1$ неравенства

$$\|S_N(x, t)\|^2_{H^1(D_t)} = \left\|\sum_{k=1}^{N} U_k(t)\, v_k(x)\right\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C_4 \sum_{k=1}^{N} \left(\varphi_k^2 (1 + |\lambda_k|) + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2\, dt\right), \quad (29)$$

$$\left\|\frac{\partial S_N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D_t)} = \left\|\sum_{k=1}^{N} U_k'(t)\, v_k(x)\right\|^2_{L_2(D_t)} = \sum_{k=1}^{N} U_k'^2(t) \leqslant$$
$$\leqslant C_5 \sum_{k=1}^{N} \left(\varphi_k^2 (|\lambda_k| + 1) + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2\, dt\right). \quad (29')$$

Складывая проинтегрированные по $t \in (0, T)$ неравенства (28) и (28′), получим неравенство

$$\|S_N(x, t) - S_M(x, t)\|^2_{H^1(Q_T)} \leqslant$$
$$\leqslant C_6 \sum_{k=M+1}^{N} \left(\varphi_k^2 (1 + |\lambda_k|) + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2\, dt\right). \quad (30)$$

Согласно (17), (17′) и (27) ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 (1 + |\lambda_k|)$, $\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2\, dt$ сходятся. Поэтому из (30) вытекает, что ряд (23) сходится в $H^1(Q_T)$ и, следовательно, его сумма $u \in H^1(Q_T)$. Функция $u(x, t)$, очевидно, удовлетворяет начальному условию (2) и в случае первой смешанной задачи граничному условию (4). Переходя к пределу при $N \to \infty$ в равенстве (21) в случае задачи (1) — (4) или в равенстве (22) в случае задачи (1), (2), (3), (5), получим, что u удовлетворяет тождеству (9), соответственно (11). Таким образом, u — обобщенное решение первой, соответственно третьей смешанной задачи. Складывая проинтегрированные по $t \in (0, T)$ неравенства (29) и (29′) с помощью (17), (17′) и (27), получаем неравенства (24). Теорема доказана.

3. Метод Галёркина. Можно дать и другие, независимые от п. 2 и не использующие свойств собственных функций, доказательства существования обобщенных решений смешанных задач. Одному из таких методов доказательства теорем существования — методу Галёркина, который одновременно является и приближенным методом решения смешанных задач, посвящен настоящий пункт. Заметим, что, в отличие от метода Фурье, метод Галёркина позволяет исследовать смешанные задачи в случае, когда коэффициенты зависят не только от пространственных переменных x, но и от времени t. Рассмотрим, для определенности, первую смешанную задачу (1) — (4). Как и прежде, предполагаем, что $\varphi \in \mathring{H}^1(D)$, $\psi \in L_2(D)$, $f \in L_2(Q_T)$.

Метод Галёркина состоит в следующем.

Пусть $v_1(x), v_2(x), \ldots$ — произвольная система функций из $C^2(\bar{D})$, удовлетворяющих граничному условию $v_k|_{\partial D} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, линейно независимая и полная в $\mathring{H}^1(D)$, т. е. линейное многообразие, натянутое на эту систему, всюду плотно в $\mathring{H}^1(D)$. Для произвольного целого m в конечномерном подпространстве V_m пространства $L_2(D)$, натянутом на функции v_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, решается задача, получающаяся из задачи (1)—(4) ортогональным проектированием на это подпространство, т. е. ищется функция $w_m(x, t)$ (из $H^2(Q_T)$), принадлежащая при каждом $t \in [0, T]$ подпространству V_m, удовлетворяющая условиям (2) и (3) с начальными функциями $\varphi^m(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \varphi_k v_k(x)$, $\psi^m(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \psi_k v_k(x)$ — ортогональными проекциями на подпространство V_m функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно, и такая, что при п. в. $t \in (0, T)$ ортогональные проекции на V_m (в скалярном произведении $L_2(D)$) функций $f(x, t)$ и $w_{mtt} - \operatorname{div}(k\nabla w_m) + aw_m$ совпадают. Это означает, что ищутся такие функции $c_1(t), \ldots, c_m(t)$ (из $H^2(0, T)$), удовлетворяющие условиям $c_k(0) = \varphi_k$, $c_k'(0) = \psi_k$, $k = 1, \ldots, m$, что функция $w_{mtt} - \operatorname{div}(k\nabla w_m) + aw_m - f$, где

$$w_m(x, t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t)\, v_k(x), \tag{31}$$

для п. в. $t \in (0, T)$ (для которых $f \in L_2(D_t)$) ортогональна в $L_2(D)$ подпространству V_m, т. е.

$$\int_D (w_{mtt} - \operatorname{div}(k\nabla w_m) + aw_m)\, v_k\, dx = \int_D f v_k\, dx \tag{32}$$

для $k = 1, \ldots, m$.

Метод Галёркина заключается в том, что решение u задачи (1)—(4) аппроксимируется решениями w_m «спроектированных» задач. Для его обоснования нужно доказать, что решение w_m каждой из таких задач существует (и единственно) и последовательность w_m, $m=1, 2, \ldots$, в некотором смысле (слабо в $H^1(Q_T)$) сходится к u.

Рассмотрим, для простоты, случай однородных начальных условий ($\varphi=0$, $\psi=0$). Тогда $\varphi_k=\psi_k=0$, $k=1, \ldots$, т. е.

$$c_k(0)=c_k'(0)=0, \qquad k=1, \ldots, m. \tag{33}$$

Равенства (32) есть линейная относительно функций $c_1(t), \ldots$ $\ldots, c_m(t)$ система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{s=1}^{m} \left(c_s''(t)\,(v_k, v_s)_{L_2(D)}+c_s(t)\,(v_k, v_s)_{\overset{\circ}{H}{}^1(D)}\right)=f_k(t), \qquad k=1, \ldots, m, \tag{34}$$

где

$$f_k(t)=\int_D f(x, t)\,v_k(x)\,dx \in L_2(0, T)\ \left((h, g)_{\overset{\circ}{H}{}^1(D)}=\int_D (k\nabla h\nabla g+ahg)\,dx\right).$$

Докажем, что система (34) имеет единственное принадлежащее $H^2(0, T)$ (все координаты принадлежат $H^2(0, T)$) решение, удовлетворяющее начальным условиям (33).

Так как система функций $v_1, v_2, \ldots$ линейно независима, то при любом $m \geqslant 1$ определитель матрицы с элементами $(v_k, v_s)_{L_2(D)}$, $k, s=1, \ldots, m$, отличен от нуля (аналогичное утверждение доказано в п. 9 § 1 гл. IV). Поэтому линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (34) можно разрешить относительно старших производных. Следовательно, задача (34), (33) эквивалентна задаче

$$c'(t)=Ac(t)+F(t), \quad c(0)=0, \tag{35}$$

где $c(t)=(c_1'(t), \ldots, c_m'(t), c_1(t), \ldots, c_m(t))$, $F(t)=(F_1(t), \ldots, F_{2m}(t))$, $(F_1(t), \ldots, F_m(t))=\|(\varphi_k, \varphi_s)_{L_2(D)}\|^{-1}(f_1(t), \ldots, f_m(t))$, $F_{m+1}(t)\equiv \ldots \equiv$ $\equiv F_{2m}(t)\equiv 0$, а

$$A=-\begin{Vmatrix} 0, & \|(\varphi_k, \varphi_s)_{L_2(D)}\|^{-1}\cdot\|(\varphi_k, \varphi_s)_{\overset{\circ}{H}{}^1(D)}\| \\ I, & 0 \end{Vmatrix}$$

— матрица порядка $2m$ (I — единичная матрица порядка m). Очевидно, вектор $F(t) \in L_2(0, T)$ ($F_i(t) \in L_2(0, T)$, $i=1, \ldots, 2m$).

Для доказательства утверждения достаточно показать, что задача (35) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $H^1(0, T)$. Как обычно, заменим задачу (35) эквивалентной ей системой интегральных уравнений

$$c(t)=\int_0^t Ac(\tau)\,d\tau+\int_0^t F(\tau)\,d\tau \tag{36}$$

с принадлежащим $H^1(0, T)$ и, тем самым, непрерывным на $[0, T]$ свободным членом $\int_0^t F(\tau)\,d\tau$: если $c(t)$ есть принадлежащее $H^1(0, T)$ решение задачи (35), то в силу теоремы 3 п. 2 § 6 гл. III оно непрерывно на $[0, T]$ и удовлетворяет системе (36); если $c(t)$ — непрерывное на $[0, T]$ решение системы (36), то оно, очевидно, принадлежит $H^1(0, T)$ и является решением задачи (35). А существование (и единственность) решения (непрерывного на $[0, T]$) системы интегральных уравнений (36) устанавливается в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений при доказательстве теоремы существования решения задачи Коши для линейной нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, стр. 177).

Таким образом, установлено существование и единственность при любом $m=1, 2, \ldots$ функций $w_m(x, t)$ вида (31), удовлетворяющих равенствам (32) и начальным условиям $w_m|_{t=0}=\frac{\partial w_m}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$.

Умножим (32) на $c_k'(t)$, проинтегрируем по $(0, \tau)$, где τ — произвольное число из $[0, T]$, и просуммируем по k от 1 до m. В результате получим равенство

$$\int_{Q_\tau} (w_{mtt}-\operatorname{div}(k\nabla w_m)+aw_m)\,w_{mt}\,dx\,dt=\int_{Q_\tau} fw_{mt}\,dx\,dt. \tag{37}$$

Так как $w_{mtt}w_{mt}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}w_{mt}^2\right)$, $\operatorname{div}(k\nabla w_m)\cdot w_{mt}=\operatorname{div}(kw_{mt}\nabla w_m)-$ $-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{k}{2}|\nabla w_m|^2\right)$ и $aw_mw_{mt}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}aw_m^2\right)$, то

$$\int_{Q_\tau} (w_{mtt}-\operatorname{div}(k\nabla w_m)+aw_m)\,w_{mt}\,dx\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{D_\tau} (w_{mt}^2+k|\nabla w_m|^2+aw_m^2)\,dx.$$

Замечая, что в подпространстве $\tilde{H}^1(Q_T)$ пространства $H^1(Q_T)$, состоящем из функций, обращающихся в нуль на $\Gamma_T\cup D_0$, можно ввести эквивалентную обычной норму

$$\|w\|_{\tilde{H}^1(Q_T)}=\left(\int_{Q_T} (w_t^2+k|\nabla w|^2+aw^2)\,dx\,dt\right)^{1/2},$$

получим

$$2\int_0^T d\tau \int_{Q_\tau} (w_{mtt} - \operatorname{div}(k\nabla w_m) + aw_m)\, w_{mt}\, dx = \|w_m\|^2_{\tilde{H}^1(Q_T)}.$$

Поэтому из равенства (37) имеем

$$\|w_m\|^2_{\tilde{H}^1(Q_T)} = 2\int_0^T d\tau \int_0^\tau dt \int_D f(x, t)\, w_{mt}(x, t)\, dx =$$
$$= 2\int_{Q_T} (T-t)\, f(x, t)\, w_{mt}(x, t)\, dx\, dt \leqslant 2T\|f\|_{L_2(Q_T)} \|w_{mt}\|_{L_2(Q_T)} \leqslant$$
$$\leqslant 2T\|f\|_{L_2(Q_T)} \|w_m\|_{\tilde{H}^1(Q_T)},$$

откуда

$$\|w_m\|_{\tilde{H}^1(Q_T)} \leqslant 2T\|f\|_{L_2(Q_T)}.$$

Таким образом, множество функций w_m, $m=1, 2, \ldots$, ограничено в $\tilde{H}^1(Q_T)$. Из теоремы 3 п. 8 § 3 гл. II следует, что это множество слабо компактно в $\tilde{H}^1(Q_T)$, т. е. из него можно выделить подпоследовательность (будем ее снова обозначать через w_m), слабо сходящуюся в $\tilde{H}^1(Q_T)$ к некоторой функции $u \in \tilde{H}^1(Q_T)$.

Функция u есть искомое обобщенное решение смешанной задачи. Для того чтобы это доказать, очевидно, достаточно проверить, что при любой $v \in \tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$ — так обозначим подпространство пространства $H^1(Q_T)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на $D_T \cup \Gamma_T$ — имеет место интегральное тождество (9) (в котором $\psi = 0$):

$$\int_{Q_T} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)\, dx\, dt = \int_{Q_T} fv\, dx\, dt. \tag{38}$$

Для этого в свою очередь достаточно тождество (38) установить для некоторого всюду плотного в $\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$ множества функций $\mathcal{M}$.

В качестве $\mathcal{M}$ возьмем множество всех линейных комбинаций функций $v_k(x)\,\theta(t)$, где $k=1, 2, \ldots$, а $\theta(t)$ — произвольная функция из $C^1([0, T])$, удовлетворяющая условию $\theta(T)=0$. Покажем сначала, что равенство (38) справедливо для любой функции $v(x, t) = v_k(x)\,\theta(t)$, а следовательно, и для любой v из $\mathcal{M}$, а затем убедимся, что множество $\mathcal{M}$ всюду плотно в $\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$.

Интегрируя по $(0, T)$ умноженное на $\theta(t)$ равенство (32), для $m \geqslant k$ получим

$$\int_{Q_T} [(k\nabla w_m \nabla v_k + aw_m v_k)\,\theta - w_{mt} v_k \theta']\, dx\, dt = \int_{Q_T} fv_k\theta\, dx\, dt.$$

Отсюда вытекает (38), так как при $m \to \infty$ w_m слабо в $H^1(Q_T)$ сходится к u.

Покажем, что $\mathcal{M}$ всюду плотно в $\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$. Для этого достаточно установить, что любую функцию $\eta(x, t)$ из $C^2(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющую условию

$$\eta|_{\Gamma_T \cup D_T} = 0 \tag{39}$$

(множество таких функций всюду плотно в $\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$), можно аппроксимировать в метрике пространства $H^1(Q_T)$ функциями из $\mathcal{M}$. Норму в пространстве $\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$ определим равенством

$$\|f\|_{\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)} = \left(\int\limits_{Q_T} (f_t^2 + |\nabla f|^2)\, dx\, dt\right)^{1/2}.$$

Заметим, что множество $\mathcal{M}$ можно рассматривать как множество всех линейных комбинаций функций $v_k^*(x)\theta(t)$, где $\theta(t)$ — произвольная функция из $C^1([0, T])$, обращающаяся в нуль при $t = T$, а $v_1^*, v_2^*, \ldots$ — ортонормированный базис пространства $\mathring{H}^1(D)$ (в скалярном произведении $(f, g)_{\mathring{H}^1(D)} = \int\limits_D \nabla f \nabla g\, dx$), полученный в результате ортонормирования системы $v_1, v_2, \ldots$ методом Грамма — Шмидта (см. п. 5 § 2 гл. II).

Пусть $\eta(x, t)$ — произвольная функция из $C^2(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющая условию (39). Так как для любого $t \in [0, T]$ функции $\eta(x, t)$ и $\eta_t(x, t)$ принадлежат $\mathring{H}^1(D)$, то их можно разложить в сходящиеся в метрике $\mathring{H}^1(D)$ ряды Фурье

$$\begin{gathered} \eta(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t)\, v_k^*(x), \\ \eta_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k'(t)\, v_k^*(x), \end{gathered} \tag{40}$$

где

$$\eta_k(t) = \int\limits_D \nabla\eta(x, t)\, \nabla v_k^*(x)\, dx. \tag{41}$$

При этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\eta_k^2(t) + \eta_k'^2(t)) = \int\limits_D (|\nabla\eta(x, t)|^2 + |\nabla\eta_t(x, t)|^2)\, dx, \quad t \in [0, T]. \tag{42}$$

Обозначим через $\eta_N(x, t)$ частичную сумму ряда (40):

$$\eta_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} \eta_k(t)\, v_k^*(x). \tag{43}$$

Из (41) и (43) вытекает, что для любого $N \geq 1$ при всех $t \in [0, T]$ функция $\eta_t - \eta_{Nt} \in \mathring{H}^1(D_t)$. Поэтому на основании неравенства

Стеклова (п. 6 § 5 гл. III)

$$\|\eta_t-\eta_{Nt}\|_{L_2(D_t)}\leqslant C\|\eta_t-\eta_{Nt}\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(D_t)},$$

где $C>0$ — постоянная, зависящая лишь от области D. Следовательно, для любого $N\geqslant 1$ при всех $t\in[0, T]$

$$\|\eta_t-\eta_{Nt}\|^2_{L_2(D_t)}+\|\eta-\eta_N\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(D_t)}\leqslant C^2\|\eta_t-\eta_{Nt}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(D_t)}+$$
$$+\|\eta-\eta_N\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(D_t)}=\sum_{k=N+1}^{\infty}(\eta_k^2(t)+C^2\eta_k'^2(t)).$$

В силу (42) для любого $t\in[0, T]$ $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}(\eta_k^2(t)+C^2\eta_k'^2(t))\downarrow 0$ при $N\to\infty$. Поэтому на основании теоремы Леви (теорема 3 п. 6 § 1 гл. II) получим, что при $N\to\infty$

$$\|\eta-\eta_N\|^2_{\tilde{\overset{\circ}{H}}{}^1(Q_T)}=\int_0^T\left(\|\eta_t-\eta_{Nt}\|^2_{L_2(D_t)}+\|\eta-\eta_N\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(D_t)}\right)dt\to 0.$$

Утверждение доказано.

Заметим, что в силу единственности обобщенного решения u задачи (1)—(4) (теорема 1) из доказанного следует, что не только некоторая подпоследовательность последовательности w_m, $m=1, 2, \ldots$, но и сама эта последовательность слабо в $H^1(Q_T)$ сходится к u.

4. Гладкость обобщенных решений. Существование решения п. в. и классического решения. При исследовании гладкости обобщенных решений ограничимся рассмотрением первой и второй (в граничном условии (5) $\sigma\equiv 0$) смешанных задач для частного случая уравнения (1) — волнового уравнения (в (1) $k\equiv 1$, $a\equiv 0$), хотя при достаточной гладкости коэффициентов уравнения и функции σ тем же методом устанавливаются аналогичные результаты и в общем случае.

Пусть $u(x, t)$ — обобщенное решение первой или второй смешанных задач для волнового уравнения

$$u_{tt}-\Delta u=f(x, t), \tag{44}$$

$$u|_{t=0}=\varphi, \quad u_t|_{t=0}=\psi \tag{45}$$

и или

$$u|_{\Gamma_T}=0 \tag{46}$$

в случае первой смешанной задачи, или

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_T}=0 \tag{47}$$

в случае второй смешанной задачи.

В предыдущих пунктах было показано, что задачи (44)—(46) и (44), (45), (47) имеют (единственные) обобщенные решения, если $\psi \in L_2(D)$, $f \in L_2(Q_T)$, а функция φ принадлежит пространству $\mathring{H}^1(D)$ в случае первой задачи или пространству $H^1(D)$ в случае второй задачи. При этом (см. п. 2) каждое из этих обобщенных решений $u(x, t)$ представляется сходящимся в $H^1(Q_T)$ рядом

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) v_k(x), \tag{48}$$

где

$$U_k(t) = \varphi_k \cos\sqrt{-\lambda_k}t + \frac{\psi_k}{\sqrt{-\lambda_k}} \sin\sqrt{-\lambda_k}t + \\ + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^t f_k(\tau) \sin\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\,d\tau, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{49}$$

(в случае второй смешанной задачи

$$U_1(t) = \varphi_1 + t\psi_1 + \int_0^t (t-\tau) f_1(\tau)\,d\tau = \\ = \lim_{\lambda\to 0}\left(\varphi_1 \cos\sqrt{-\lambda}t + \frac{\psi_1}{\sqrt{-\lambda}}\sin\sqrt{-\lambda}t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^t f_1(\tau) \sin\sqrt{-\lambda}(t-\tau)\,d\tau\right)\Bigg),$$

$$\varphi_k = (\varphi, v_k)_{L_2(D)}, \qquad \psi_k = (\psi, v_k)_{L_2(D)},$$

$$f_k(t) = \int_{D_t} f(x, t) v_k(x)\,dx, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{50}$$

а $v_1, v_2, \ldots$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — последовательности обобщенных собственных функций и соответствующих собственных значений первой, если рассматривается задача (44)—(46), или второй, если рассматривается задача (44), (45), (47), краевой задачи для оператора Лапласа в D (напомним, что в случае первой краевой задачи $\lambda_k < 0$ при всех $k = 1, 2, \ldots$, а в случае второй краевой задачи $\lambda_k < 0$ для $k = 2, 3, \ldots$ и $\lambda_1 = 0$, причем $v_1 = \text{const} = 1/\sqrt{|D|}$).

Предположим, что граница ∂D области D принадлежит классу C^s при некотором $s \geqslant 1$. Тогда в силу теоремы 7 п. 4 § 2 гл. IV собственные функции $v_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, первой и второй краевых задач для оператора Лапласа принадлежат пространствам $H^s_{\mathscr{D}}(D)$ и $H^s_{\mathscr{N}}(D)$ соответственно, т. е. принадлежат $H^s(D)$ и удовлетворяют на ∂D в случае первой краевой задачи граничным условиям

$$v_k|_{\partial D} = \ldots = \Delta^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} v_k|_{\partial D} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

а в случае второй краевой задачи при $s > 1$ — граничным условиям

$$\left.\frac{\partial v_k}{\partial n}\right|_{\partial D} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n} \Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1} v_k|_{\partial D} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Напомним, что $H^1_{\mathcal{N}}(D) = H^1(D)$.

Предположим также, что в случае первой смешанной задачи (44)—(46) $\varphi \in H^s_{\mathfrak{D}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathfrak{D}}(D)$, а f принадлежит подпространству $\tilde{H}^{s-1}_{\mathfrak{D}}(Q_T)$ пространства $H^{s-1}(Q_T)$, состоящему при $s > 1$ из всех функций $f \in H^{s-1}(Q_T)$, для которых

$$f|_{\Gamma_T} = \ldots = \Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1} f|_{\Gamma_T} = 0.$$

При $s = 1$ $\tilde{H}^{s-1}_{\mathfrak{D}}(Q_T) = \tilde{H}^0_{\mathfrak{D}}(Q_T) = L_2(Q_T)$.

В случае второй смешанной задачи (44), (45), (47) будем предполагать, что $\varphi \in H^s_{\mathcal{N}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathcal{N}}(D)$, а f принадлежит подпространству $\tilde{H}^{s-1}_{\mathcal{N}}(Q_T)$ пространства $H^{s-1}(Q_T)$, состоящему при $s > 2$ из всех функций $f \in H^{s-1}(Q_T)$, для которых

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n} \Delta^{\left[\frac{s-1}{2}\right]-1} f|_{\Gamma_T} = 0.$$

При $s = 2$ $\tilde{H}^{s-1}_{\mathcal{N}}(Q_T) = \tilde{H}^1_{\mathcal{N}}(Q_T) = H^1(Q_T)$, при $s = 1$ $\tilde{H}^{s-1}_{\mathcal{N}}(Q_T) = \tilde{H}^0_{\mathcal{N}}(Q_T) = L_2(Q_T)$.

В этом пункте будет доказано, что при сделанных предположениях обобщенные решения смешанных задач принадлежат пространству $H^s(Q_T)$ и при достаточно больших s являются классическими решениями.

Теорема 3. *Пусть при некотором* $s \geq 1$ $\partial D \in C^s$ *и в случае первой смешанной задачи* (44)—(46) $\varphi \in H^s_{\mathfrak{D}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathfrak{D}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathfrak{D}}(Q_T)$, *а в случае второй смешанной задачи* (44), (45), (47) $\varphi \in H^s_{\mathcal{N}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathcal{N}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathcal{N}}(Q_T)$. *Тогда ряд* (48) *сходится к обобщенному решению* $u(x, t)$ *в* $H^s(D_t)$ *равномерно по* $t \in [0, T]$. *Кроме того, для любого* $p = 1, \ldots, s$ *ряд, полученный из ряда* (48) p*-кратным почленным дифференцированием по* t, *сходится в* $H^{s-p}(D_t)$ *равномерно по* $t \in [0, T]$, *и для всех* $t \in [0, T]$ *имеют место неравенства*

$$\sum_{p=0}^{s} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^p}{\partial t^p} (U_k(t) v_k(x)) \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leq$$
$$\leq C \left(\|\varphi\|^2_{H^s(D)} + \|\psi\|^2_{H^{s-1}(D)} + \|f\|_{H^{s-1}(Q_T)} \right). \qquad (51)$$

Утверждение теоремы о равномерной по $t \in [0, T]$ сходимости в $H^{s-p}(D_t)$, $p=0, \ldots, s$, ряда, полученного из ряда (48) p-кратным почленным дифференцированием по t, означает, что при любом $t \in [0, T]$ последовательность следов $\left.\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^p}{\partial t^p}(U_k(t)\, v_k(x))\right|_{D_t}$ на D_t p-х производных по t частичных сумм ряда (48) (каждая из этих частичных сумм принадлежит $H^1(Q_T)$) сходится в $H^{s-p}(D_t)$ и эта сходимость равномерна по $t \in [0, T]$, т. е.

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\| \sum_{k=M+1}^{N} \frac{\partial^p}{\partial t^p}(U_k(t)\, v_k(x)) \right\|_{H^{s-p}(D_t)} \to 0 \text{ при } M,\ N \to \infty.$$

Тогда последовательность частичных сумм ряда (48) сходится и в $H^s(Q_T)$ и из оценки (51) вытекает неравенство

$$\|u\|_{H^s(Q_T)} \leqslant C' \left(\|\varphi\|_{H^s(D)} + \|\psi\|_{H^{s-1}(D)} + \|f\|_{H^{s-1}(Q_T)} \right). \tag{52}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть при некотором* $s \geqslant 1$ $\partial D \in C^s$ *и в случае первой смешанной задачи* (44)—(46) $\varphi \in H^s_{\mathscr{D}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{D}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_T)$, *а в случае второй смешанной задачи* (44), (45), (47) $\varphi \in H^s_{\mathscr{N}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{N}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T)$. *Тогда обобщенное решение каждой из этих задач принадлежит* $H^s(Q_T)$ *и ряд* (48) *сходится к нему в* $H^s(Q_T)$. *При этом имеет место неравенство* (52).

Для любого $p=0, \ldots, s-1$ функция $\frac{\partial^p u}{\partial t^p}$ имеет след на D_t при каждом $t \in [0, T]$ и ряд, полученный из ряда (48) почленным p-кратным дифференцированием по t, сходится к $\left.\frac{\partial^p u}{\partial t^p}\right|_{D_t}$ в $H^{s-p}(D_t)$ равномерно по $t \in [0, T]$. Так как и при $p=s$ последовательность частичных сумм ряда $\left.\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^s}{\partial t^s}(U_k(t)\, v_k(x))\right|_{D_t}$, составленного из следов на D_t принадлежащих $H^1(Q_T)$ функций $\frac{\partial^s(U_k v_k)}{\partial t^s}$, сходится в $L_2(D_t)$ (равномерно по $t \in [0, T]$), то ее предел при каждом $t \in [0, T]$ можно назвать следом на D_t s-й производной по t обобщенного решения $u(x, t)$.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 3, докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Если* $f \in H^q(Q_T)$, $q \geqslant 0$, *а* $g \in L_2(D)$, *то функция*

$$h(t) = \int_{D_t} f(x, t)\, g(x)\, dx$$

принадлежит $H^q(0, T)$ *и имеют место равенства*

$$\frac{d^p h(t)}{dt^p} = \int\limits_{D_t} \frac{\partial^p f(x, t)}{dt^p} g(x)\, dx, \quad 0 \leqslant p \leqslant q.$$

Так как для $p = 0, 1, \ldots, q$ $\frac{\partial^p f}{\partial t^p} \in L_2(Q_T)$, то в силу теоремы Фубини для п. в. $t \in (0, T)$ функции $g(x) \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p}$ интегрируемы по D_t и функции

$$h^{(p)}(t) = \int\limits_{D_t} \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} g(x)\, dx, \qquad p = 0, 1, \ldots, q$$

$(h^{(0)}(t) = h(t))$, интегрируемы по $(0, T)$. Поскольку, кроме того,

$$\left(\int\limits_{D_t} \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} g(x)\, dx\right)^2 \leqslant \int\limits_{D_t} \left(\frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p}\right)^2 dx \cdot \|g\|^2_{L_2(D)},$$

то $h^{(p)}(t) \in L_2(0, T)$, $p = 0, \ldots, q$.

Для произвольной функции $\eta(x, t) \in \dot{C}^q(\bar{Q}_T)$

$$\int\limits_{Q_T} \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} \eta(x, t)\, dx\, dt = (-1)^p \int\limits_{Q_T} f(x, t) \frac{\partial^p \eta(x, t)}{\partial t^p}\, dx\, dt,$$

поэтому при произвольных $\eta_1(t) \in \dot{C}^q([0, T])$ и $\eta_2(x) \in \dot{C}^q(\bar{D})$ имеет место равенство

$$\int\limits_0^T \eta_1(t) \left(\int\limits_D \frac{\partial^p f}{\partial t^p} \eta_2(x)\, dx\right) dt = (-1)^p \int\limits_0^T \frac{d^p \eta_1(t)}{dt^p} \left(\int\limits_D f \eta_2(x)\, dx\right) dt.$$

Множество $\dot{C}^q(\bar{D})$ всюду плотно в $L_2(D)$, поэтому последнее равенство имеет место и при произвольной $\eta_2 \in L_2(D)$, и, в частности, при $\eta_2 = g$. Таким образом, при всех $\eta_1(t) \in \dot{C}^q([0, T])$

$$\int\limits_0^T \eta_1 h^{(p)}\, dt = (-1)^p \int\limits_0^T \frac{d^p \eta_1}{dt^p} h\, dt, \qquad p = 1, \ldots, q.$$

Это означает, что при $p = 1, \ldots, q$ функция $h^{(p)}(t)$ является обобщенной производной p-го порядка функции $h(t)$, т. е. $\frac{d^p h}{dt^p} = h^{(p)} \in L_2(0, T)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Из леммы 2 вытекает, что функции $f_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, заданные формулой (50), принадлежат пространству $H^{s-1}(0, T)$ и, тем самым (см. теорему 3 п. 2 § 6 гл. III), при $s \geqslant 2$ пространству $C^{s-2}([0, T])$. Следовательно, удовлетворяющие на $(0, T)$ уравнениям $U_k'' - \lambda_k U_k = f_k$ функции U_k, $k=1, 2, \ldots$, заданные формулой (49), принадлежат пространству $H^{s+1}(0, T)$, а значит, и пространству $C^s([0, T])$.

Тогда в силу свойств собственных функций $v_k(x)$ частичные суммы $S_N(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{N} U_k(t) v_k(x)$ ряда (48) принадлежат пространству $H^s(Q_T)$ и при всех $t \in [0, T]$ — пространству $H^s_{\mathscr{D}}(D_t)$ в случае задачи (44) — (46) (или пространству $H^s_{\mathscr{N}}(D_t)$ в случае задачи (44), (45), 47)).

Кроме того, при $p=1, \ldots, s$ функция $\dfrac{\partial^p S_N}{\partial t^p}$ принадлежит пространству $H^{s-p+1}(Q_T)$ и при всех $t \in [0, T]$ — пространству $H^s_{\mathscr{D}}(D_t)\,(H^s_{\mathscr{N}}(D_t))$. Поэтому на основании леммы 3 п. 5 § 2 гл. IV и ортогональности в $L_2(D)$ и $H^1(D)$ собственных функций $v_k(x)$ имеем при всех $t \in [0, T]$, любых $p=0, \ldots, s$ и любых M и N, $1 \leqslant M < N$, неравенства

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} - \frac{\partial^p S_M}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_1 \left\| \Delta^{\frac{s-p}{2}} \frac{\partial^p}{\partial t^p}(S_N - S_M) \right\|^2_{L_2(D_t)} = C_1 \left\| \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{\frac{s-p}{2}} \frac{d^p U_k(t)}{dt^p} v_k(x) \right\|^2_{L_2(D_t)} = C_1 \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2$$

в случае четного $s-p$ и

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} - \frac{\partial^p S_M}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_1' \left\| \Delta^{\frac{s-p-1}{2}} \frac{\partial^p}{\partial t^p}(S_N - S_M) \right\|^2_{H^1(D_t)} = C_1' \left\| \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{\frac{s-p-1}{2}} \frac{d^p U_k(t)}{dt^p} v_k(x) \right\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant C_1 \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k(t)}{dt^p} \right)^2$$

в случае нечетного $s-p$. То есть при всех $t \in [0, T]$, любых $p=0, \ldots, s$, и любых M и N, $1 \leqslant M < N$,

$$\left\| \frac{\partial^p (S_N - S_M)}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_1 \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k(t)}{dt^p} \right)^2. \tag{53}$$

Аналогично, при всех $t \in [0, T]$, любых $p=0, \ldots, s$ и любых $N \geqslant 1$

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_1 \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k(t)}{dt^p} \right)^2$$

в случае первой смешанной задачи ($\lambda_1 \neq 0$) и

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} = \left\| \frac{\partial^p (U_1 v_1)}{\partial t^p} + \frac{\partial^p (S_N - S_1)}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\frac{d^p U_1}{dt^p} \right)^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{|D|}} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} + 2 \left\| \frac{\partial^p (S_N - S_1)}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \left(\left(\frac{d^p U_1}{dt^p} \right)^2 + \sum_{k=2}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2 \right)$$

в случае второй смешанной задачи ($\lambda_1 = 0$). Таким образом, при всех $t \in [0, T]$, $p=0, \ldots, s$, $N \geqslant 1$

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_3 \left(\left(\frac{d^p U_1}{dt^p} \right)^2 + \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2 \right).$$

Суммируя последние неравенства по p от нуля до s, получим

$$\sum_{p=0}^{s} \left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_3 \sum_{p=0}^{s} \left[\left(\frac{d^p U_1}{dt^p} \right)^2 + \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2 \right]. \quad (54)$$

Воспользуемся теперь следующей леммой, доказательство которой будет приведено далее.

Лемма 3. *Если при некотором* $s \geqslant 1$ $\partial D \in C^s$ *и* $\varphi \in H^s_{\mathscr{D}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{D}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ *в случае первой смешанной задачи* (44) — (46) *или* $\varphi \in H^s_{\mathscr{N}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{N}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T)$ *в случае второй смешанной задачи* (44), (45), (47), *то при любом* $p \leqslant s$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d^p U_k(t)}{dt^p} \right)^2 |\lambda_k|^{s-p}$ *сходится равномерно по* $t \in [0, T]$ *и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2 |\lambda_k|^{s-p} \leqslant C \left(\|\varphi\|^2_{H^s(D)} + \|\psi\|^2_{H^{s-1}(D)} + \|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)} \right), \quad (55)$$

где постоянная $C > 0$ *зависит только от* Q_T.

В силу этой леммы из неравенств (53) вытекает, что для каждого $p=0, 1, \ldots, s$ последовательность $\left. \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right|_{D_t}$ сходится в $H^{s-p}(D_t)$ равномерно по $t \in [0, T]$, а из неравенства (54) в силу очевидной оценки $\left(\frac{d^pU_1}{dt^p}\right)^2 \leqslant \mathrm{const}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{L}_2(D)} + \|\psi\|^2_{\overset{\circ}{L}_2(D)} + \|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)}\right)$ вытекает неравенство (51). Теорема доказана.

Из следствия 1 при $s=2$ вытекает, что обобщенное решение каждой из рассматриваемых смешанных задач принадлежит $H^2(Q_T)$, а следовательно, является решением п. в.

Отметим, что в условии теоремы 3 кроме требований гладкости заданных функций предполагается выполнение условий

$$\varphi|_{\partial D} = \ldots = \Delta^{\left[\frac{s-1}{2}\right]}\varphi|_{\partial D} = 0, \quad \psi|_{\partial D} = \ldots = \Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1}\psi|_{\partial D} = 0 \tag{56}$$

и

$$f|_{\Gamma_T} = \ldots = \Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1}f|_{\Gamma_T} = 0 \tag{57}$$

в случае первой смешанной задачи и выполнение условий

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{\partial D} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1}\varphi\bigg|_{\partial D} = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{\partial D} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{\left[\frac{s-3}{2}\right]}\psi\bigg|_{\partial D} = 0 \tag{58}$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_T} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{\left[\frac{s-3}{2}\right]}f\bigg|_{\Gamma_T} = 0 \tag{59}$$

в случае второй смешанной задачи. Заметим, что для справедливости утверждения теоремы 3 некоторые условия такого рода необходимы.

Действительно, например, в случае первой смешанной задачи при $s \geqslant 2$ из того, что $\varphi(x) = u(x, t)|_{t=0}$ представляется сходящимся в $H^s(D_0)$ рядом (48), а $\psi(x) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0}$ (u — решение п. в.) представляется сходящимся в $H^{s-1}(D_0)$ рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{dU_k(t)}{dt}\Big|_{t=0} \times$ $\times v_k(x)$, вытекает выполнение условий (56). Так как ряд (48) сходится к решению п. в. $u(x, t)$ в $H^s(Q_T)$, а следовательно, ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k(t)\,\Delta v_k(x)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{d^2U_k(t)}{dt^2}\, v_k(x)$ сходятся к Δu и к u_{tt} соответственно в $H^{s-2}(Q_T)$, то $f = u_{tt} - \Delta u$ при $s \geqslant 3$ удовлетворяет условиям

$$f|_{\Gamma_T} = \ldots = \Delta^{\left[\frac{s-3}{2}\right]}f|_{\Gamma_T} = 0.$$

В случае четного s в теореме 3 потребовано дополнительно условие $\Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1} f|_{\Gamma_T}=0$. Это условие, действительно, является лишним. Для простоты покажем это при $s=2$.

Следствие 2. *Пусть $\partial D \in C^2$, а $f \in H^1(Q_T)$, и пусть в случае задачи* (44) — (46) $\varphi \in H^2_{\mathcal{D}}(D)$, $\psi \in H^1_{\mathcal{D}}(D)$, *а в случае задачи* (44), (45), (47) $\varphi \in H^2_{\mathcal{N}}(D)$, $\psi \in H^1_{\mathcal{N}}(D)$. *Тогда для* $p=0, 1, 2$ *ряд, полученный из ряда* (48) *p-кратным почленным дифференцированием по t, сходится в $H^{2-p}(D_t)$ равномерно по $t \in [0, T]$ и сумма $u(x, t)$ ряда* (48) *является решением п. в. задачи* (44) — (46) *или соответственно задачи* (44), (45), (47). *При этом для всех $t \in [0, T]$ имеют место неравенства* (51) *при* $s=2$.

В силу теоремы 3 это утверждение достаточно доказать в случае однородных начальных условий: $\varphi=0$, $\psi=0$.

Так как при $k>1$

$$U_k(t)=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}}\int_0^t f_k(\tau)\sin\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{|\lambda_k|}\left(f_k(t)-f_k(0)\cos\sqrt{-\lambda_k}\,t\right)-$$

$$-\frac{1}{|\lambda_k|}\int_0^t f_k'(\tau)\cos\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\,d\tau.$$

$$U_k'(t)=\int_0^t f_k(\tau)\cos\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}}f_k(0)\sin\sqrt{-\lambda_k}\,t+\frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}}\int_0^t f_k'(\tau)\sin\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\,d\tau,$$

$$U_k''(t)=f_k(t)+\lambda_k U_k(t)=$$

$$=f_k(0)\cos\sqrt{-\lambda_k}\,t+\int_0^t f_k'(\tau)\cos\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\,d\tau,$$

то

$$\lambda_k^2 U_k^2(t)\leqslant \mathrm{const}\left(f_k^2(t)+f_k^2(0)+T\int_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau\right),$$

$$|\lambda_k|\,(U_k'(t))^2\leqslant \mathrm{const}\left(f_k^2(0)+T\int_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau\right),$$

$$(U_k''(t))^2\leqslant \mathrm{const}\left(f_k^2(0)+T\int_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau\right).$$

А так как в силу принадлежности f пространству $H^1(Q_T)$ и леммы 2 сходятся ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2(t)$ равномерно по

$t\in[0, T]$, то из неравенств (53) и (54) вытекает справедливость доказываемого утверждения.

Заметим, что если $f=0$, то из соотношения

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D_t)}+\|\,|\nabla u|\,\|^2_{L_2(D_t)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{dU_k(t)}{dt}\right)^2+|\lambda_k|U_k^2(t)\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\psi_k\cos\sqrt{|\lambda_k|}\,t-\varphi_k\sqrt{|\lambda_k|}\sin\sqrt{|\lambda_k|}\,t\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\psi_k\sin\sqrt{|\lambda_k|}\,t+\varphi_k\sqrt{|\lambda_k|}\cos\sqrt{|\lambda_k|}\,t\right)^2\right]=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_k^2+|\lambda_k|\varphi_k^2)=\|\psi\|^2_{L_2(D)}+\|\,|\nabla\varphi|\,\|_{L_2(D)}$$

вытекает, что для решений при всех $t\in[0, T]$ имеет место равенство

$$\int\limits_{D_t}\left(\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right)^2+|\nabla u(x, t)|^2\right)dx=\int\limits_{D}(\psi^2+|\nabla\varphi|^2)\,dx,$$

которое называется *«законом сохранения энергии»*.

Теорема 4. *Пусть* $\partial D\in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}$, *и пусть в случае задачи* (44) — (46) $\varphi\in H_{\mathscr{D}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(D)$, $\psi\in H_{\mathscr{D}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(D)$, $f\in\tilde{H}_{\mathscr{D}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(Q_T)$, *а в случае задачи* (44), (45), (47) $\varphi\in H_{\mathscr{N}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(D)$, $\psi\in H_{\mathscr{N}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(D)$, $f\in\tilde{H}_{\mathscr{N}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(Q_T)$. *Тогда ряд* (48) *сходится в* $C^2(\bar{Q}_T)$ *и его сумма* $u(x, t)$ *является классическим решением соответствующей задачи. При этом имеют место неравенства*

$$\|u\|_{C^p(\bar{Q}_T)}\leqslant C\left(\|\varphi\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+p+1}(D)}+\|\psi\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+p}(D)}+\right.$$
$$\left.+\|f\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+p}(Q_T)}\right),\quad p=0,\ 1,\ 2. \tag{60}$$

Доказательство. Поскольку $\partial D\in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}$, то обобщенные собственные функции $v_1(x)$, $v_2(x)$, ... первой и второй краевых задач для оператора Лапласа в D принадлежат пространству $H^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(D)$ и, тем самым, в силу теоремы 3 п. 2 § 6 гл. III пространству $C^2(\bar{D})$. Поэтому частичные суммы $S_N(x, t)$, $N=1, 2, \ldots$, ряда (48) принадлежат $C^2(\bar{Q}_T)$.

На основании теоремы 3 п. 2 § 6 гл. III и неравенства (53) для всех $t \in [0, T]$ и $1 \leqslant M < N$ имеем

$$\|S_N - S_M\|^2_{C^2(\overline{D}_t)} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}(S_N - S_M)\right\|^2_{C^1(\overline{D}_t)} + \left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}(S_N - S_M)\right\|^2_{C(\overline{D}_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C\left(\|S_N - S_M\|^2_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(D_t)} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}(S_N - S_M)\right\|^2_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(D_t)} + \right.$$
$$\left. + \left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}(S_N - S_M)\right\|^2_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(D_t)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant C_4 \sum_{p=0}^{2} \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{\left[\frac{n}{2}\right]+3-p} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p}\right)^2,$$

откуда следует, что

$$\|S_N - S_M\|^2_{C^2(\overline{Q}_T)} \leqslant C_4 \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \sum_{p=0}^{2} \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{\left[\frac{n}{2}\right]+3-p} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p}\right)^2.$$

Согласно лемме 3 ряды с общими членами $\left(\frac{d^p U_k}{dt^p}\right)^2 |\lambda_k|^{\left[\frac{n}{2}\right]+3-p}$, $p = 0, 1, 2$, сходятся равномерно на $[0, T]$, поэтому ряд (48) сходится в $C^2(\overline{Q}_T)$. Таким образом, $u \in C^2(\overline{Q}_T)$. Так как при $p = 0, 1, 2$ по теореме 3 п. 2 § 6 гл. III

$$\|u\|_{C^p(\overline{Q}_T)} = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \sum_{q=0}^{p} \left\|\frac{\partial^q u}{\partial t^q}\right\|_{C^{p-q}(\overline{D}_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \sum_{q=0}^{p} \left\|\frac{\partial^q u}{\partial t^q}\right\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1+p-q}(D_t)},$$

то неравенства (60) являются следствиями неравенств (51), в которых $s = \left[\frac{n}{2}\right] + 1 + p$. Теорема 4 доказана.

Доказательство леммы 3 удобно разбить на два этапа: сначала установить ее справедливость в случае, когда $f = 0$, а затем — в случае когда $\varphi = \psi = 0$.

Пусть $f = 0$. Из формул (49) тогда вытекает, что для всех $t \in [0, T]$ и $k = 1, 2, \ldots$ в случае первой смешанной задачи и $k = 2, 3, \ldots$ в случае второй смешанной задачи

$$|U_k(t)| \leqslant |\varphi_k| + \frac{|\psi_k|}{\sqrt{|\lambda_k|}},$$

и в случае второй смешанной задачи

$$|U_1(t)| \leqslant |\varphi_1| + T|\psi_1|.$$

Кроме того, для всех $t \in [0, T]$ при любых $p = 1, 2, \ldots$

$$\left| \frac{d^p U_k}{dt^p} \right| \leqslant |\varphi_k| \, |\lambda_k|^{p/2} + |\psi_k| \, |\lambda_k|^{(p-1)/2}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

(если $\lambda_1 = 0$, то $(\lambda_1)^0 = 1$). Следовательно, при всех $t \in [0, T]$ для любых $k \geqslant 1$ и p, $0 \leqslant p \leqslant s$,

$$\left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2 |\lambda_k|^{s-p} \leqslant 2 \left(\varphi_k^2 \, |\lambda_k|^s + \psi_k^2 \, |\lambda_k|^{s-1} \right).$$

Поэтому утверждение леммы 3 (при $f = 0$) вытекает из сходимости числовых рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 \, |\lambda_k|^s$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k^2 \, |\lambda_k|^{s-1}$ и неравенств

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 \, |\lambda_k|^s \leqslant C \| \varphi \|^2_{H^s(D)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2 \, |\lambda_k|^{s-1} \leqslant C \| \psi \|_{H^{s-1}(D)},$$

в которых постоянная $C > 0$ не зависит от φ и ψ (теорема 8, п. 5, § 2, гл. IV).

Для доказательства справедливости леммы 3 в случае, когда $\varphi = \psi = 0$, нам потребуется несколько вспомогательных предложений.

Лемма 4. *Пусть $\partial D \in C^2$. Тогда*

1) *если функция $f(x, t)$ принадлежит пространству $\tilde{H}^q_{\mathscr{D}}(Q_T)$, $q \geqslant 2$, то при любом p, $p = 1, \ldots, q$, $\frac{\partial^p f}{\partial t^p}$ принадлежит пространству $\tilde{H}^{q-p}_{\mathscr{D}}(Q_T)$;*

2) *если функция $f(x, t)$ принадлежит пространству $\tilde{H}^q_{\mathscr{N}}(Q_T)$, $q \geqslant 2$, то при любом p, $p = 1, \ldots, q$, $\frac{\partial^p f}{\partial t^p}$ принадлежит пространству $\tilde{H}^{q-p}_{\mathscr{N}}(Q_T)$.*

Для доказательства первого утверждения леммы, очевидно, достаточно установить, что если $G \in H^2(Q_T)$ и $G|_{\Gamma_T} = 0$, то $G_t|_{\Gamma_T} = 0$.

Для доказательства второго утверждения достаточно показать, что если $G \in H^3(Q_T)$ и $\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\Gamma_T} = 0$, то $\left. \frac{\partial}{\partial n} G_t \right|_{\Gamma_T} = 0$.

Докажем первое утверждение. Так как $G|_{\Gamma_T} = 0$, то при любом i, $1 \leqslant i \leqslant n$, имеем

$$\int_{Q_T} G_{x_i t} \eta \, dx \, dt = -\int_{Q_T} G_{x_i} \eta_t \, dx \, dt = \int_{Q_T} G \eta_{x_i t} \, dx \, dt = -\int_{Q_T} G_t \eta_{x_i} \, dx \, dt,$$

где η — произвольная функция из $C^2(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющая условиям $\eta|_{D_0} = \eta|_{D_T} = 0$. С другой стороны, при любом i, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\int_{Q_T} G_{x_i t} \eta \, dx \, dt = \int_{\Gamma_T} G_t \eta \, n_i \, dS \, dt - \int_{Q_T} G_t \eta_{x_i} \, dx \, dt,$$

где n_i — косинус угла между (внешней) нормалью к Γ_T и осью Ox_i.

Таким образом, для любых функций $\eta \in C^2(\overline{\Gamma}_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta|_{\partial D_0} = \eta|_{\partial D_T} = 0$, имеют место равенства

$$\int\limits_{\Gamma_T} G_t \eta n_i \, dS \, dt = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{61}$$

Покроем замкнутую поверхность $\overline{\Gamma}_T$ конечным числом (открытых $(n+1)$-мерных) шаров $V_1, \ldots, V_m$ так, чтобы для каждого $j = 1, \ldots, m$ нашлось такое число $i = i(j)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, что на $\overline{\Gamma}_{Tj}$, где $\Gamma_{Tj} = \Gamma_T \cap V_j$, функция $|n_{i(j)}(x)| > 0$. Возьмем произвольное j, $1 \leqslant j \leqslant m$, и произвольную функцию $\eta(x, t) \in \dot{C}^2(\overline{\Gamma}_{Tj})$, продолженную (на Γ_T) нулем вне Γ_{Tj}. Из (61) следует, что

$$\int\limits_{\Gamma_{Tj}} G_t n_{i(j)}(x) \eta(x, t) \, dS \, dt = 0.$$

Поскольку множество функций $n_{i(j)}(x) \eta(x, t)$ при произвольных $\eta(x, t)$ из $\dot{C}^2(\overline{\Gamma}_{Tj})$ всюду плотно в $L_2(\Gamma_{Tj})$, то $G_t|_{\Gamma_{Tj}} = 0$. Следовательно, $G_t|_{\Gamma_T} = 0$. Первое утверждение доказано.

Аналогично доказывается и второе утверждение. Действительно, так как $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = 0$, то при любой $\eta \in C^2(\overline{Q}_T)$, $\eta|_{D_0} = \eta|_{D_T} = 0$, имеем

$$\int\limits_{Q_T} \Delta G_t \cdot \eta \, dx \, dt = -\int\limits_{Q_T} \Delta G \cdot \eta_t \, dx \, dt = \\ = \int\limits_{Q_T} \nabla G \cdot \nabla \eta_t \, dx \, dt = -\int\limits_{Q_T} \nabla G_t \cdot \nabla \eta \, dx \, dt.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{Q_T} \Delta G_t \cdot \eta \, dx \, dt = \int\limits_{\Gamma_T} \frac{\partial G_t}{\partial n} \cdot \eta \, dS \, dt - \int\limits_{Q_T} \nabla G_t \cdot \nabla \eta \, dx \, dt,$$

откуда

$$\int\limits_{\Gamma_T} \frac{\partial}{\partial n} G_t \cdot \eta \, dS \, dt = 0$$

для любой $\eta \in C^2(\overline{\Gamma}_T)$. Следовательно, $\left.\frac{\partial G_t}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = 0$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если $\partial D \in C^2$ и функция $f(x, t)$ принадлежит пространству $\tilde{H}^q_{\mathcal{D}}(Q_T)$ или пространству $\tilde{H}^q_{\mathcal{N}}(Q_T)$ при некотором $q \geqslant 2$, то при любом $t \in [0, T]$ и $p = 1, \ldots, q-1$ след функции $\frac{\partial^p f}{\partial t^p}$ на D_t принадлежит $H^{q-p-1}_{\mathcal{D}}(D_t)$ или соответственно $H^{q-p-1}_{\mathcal{N}}(D_t)$.*

Для доказательства леммы 5 в силу леммы 4 достаточно доказать следующее утверждение. Если функция $G(x, t) \in H^2(Q_T)$, то при любом $t \in [0, T]$ $G|_{D_t} \in H^1(D_t)$; если $G \in H^2(Q_T)$ и $G|_{\Gamma_T} = 0$, то при любом $t \in [0, T]$ $G|_{D_t} \in \mathring{H}^1(D_t)$.

В силу теоремы о следах (теорема 1, п. 1, § 5, гл. III) при любом $t \in [0, T]$ $G|_{D_t} \in L_2(D_t)$ и $G_{x_i}|_{D_t} \in L_2(D_t)$, $i = 1, \ldots, n$. Возьмем произвольную функцию $\eta_1(t)$ из $\dot{C}^1([0, T])$ и произвольную функцию $\eta_2(x)$ из $\dot{C}^1(\overline{D})$. На основании формулы Остроградского при любом $i = 1, \ldots, n$

$$\int_{Q_T} G_{x_i}\eta_1\eta_2\,dx\,dt = -\int_{Q_T} G\eta_1\eta_{2x_i}\,dx\,dt, \tag{62}$$

т. е.

$$\int_0^T \eta_1(t)\left[\int_{D_t} (G_{x_i}\eta_2 + G\eta_{2x_i})\,dx\right]dt = 0.$$

Так как множество $\dot{C}^1([0, T])$ всюду плотно в $L_2(0, T)$, а функция $\int_{D_t} (G_{x_i}\eta_2 + G\eta_{2x_i})\,dx$ в силу леммы 2 принадлежит пространству $H^1(0, T)$ и, тем самым, является непрерывной на $[0, T]$, то при произвольной функции $\eta_2(x) \in \dot{C}^1(\overline{D})$ для всех $t \in [0, T]$

$$\int_{D_t} G_{x_i}\eta_2\,dx = -\int_{D_t} G\eta_{2x_i}\,dx. \tag{63}$$

Следовательно, при любом $t \in [0, T]$ $G|_{D_t} \in H^1(D_t)$ и ее обобщенной производной по x_i является след на D_t функции $G_{x_i}(x, t)$, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть теперь $G \in H^2(Q_T)$ и $G|_{\Gamma_T} = 0$. Тогда равенства (62) имеют место и при любой функции $\eta_2(x)$ из $C^1(\overline{D})$. Поэтому для любой $\eta_2(x)$ из $C^1(\overline{D})$ при всех $t \in [0, T]$ имеют место и равенства (63).

По доказанному при любом $t \in [0, T]$ $G|_{D_t} \in H^1(D_t)$, поэтому при любой $\eta_2(x) \in C^1(\overline{D})$ наряду с равенствами (63) имеют место и равенства

$$\int_{D_t} G_{x_i}\eta_2\,dx = \int_{\partial D_t} G\eta_2 n_i\,dS - \int_{D_t} G\eta_{2x_i}\,dx.$$

Таким образом, при произвольной $\eta_2(x)$ из $C^1(\overline{D})$

$$\int_{\partial D_t} G\eta_2 n_i\,dS = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Из этих равенств вытекает (ср. доказательство леммы 4), что след функции $G(x, t)|_{D_t}$ на границе ∂D_t области D_t равен нулю. Лемма доказана.

Замечание. Из доказательства леммы 5 немедленно вытекает справедливость следующего утверждения. Если $\partial D \in C^2$ и $f(x, t) \in H^q(Q_T)$, то при любом $t \in [0, T]$ $f|_{D_t} \in H^{q-1}(D_t)$.

Лемма 6. *Пусть $v_1, v_2, \ldots$ — ортонормированный базис пространства $L_2(D)$. Тогда для любой функции $G(x, t) \in L_2(Q_T)$ имеет место равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left(\int_{D_t} G(x, t)\, v_k(x)\, dx \right)^2 dt = \|G\|^2_{L_2(Q_T)}.$$

Поскольку для п. в. $t \in (0, T)$ функция $G(x, t) \in L_2(D_t)$, то для этих значений t

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{D_t} G(x, t)\, v_k(x)\, dx \right)^2 = \|G(x, t)\|^2_{L_2(D_t)}.$$

Интегрируя это соотношение по $(0, T)$, согласно теореме Леви получаем требуемое равенство. Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству леммы 3 в случае, когда $\varphi = \psi = 0$. Из (49) и (50) имеем

$$U_k(t) = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}} \int_{Q_t} f(x, \tau)\, v_k(x) \sin \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{49'}$$

(в случае второй смешанной задачи $U_1(t) = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \int_{Q_t} (t-\tau) \times$

$\times f(x, \tau)\, dx\, d\tau$).

Пусть сначала $p = 0$. Поскольку функции f и v_k принадлежат пространству $\tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ (или $\tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T)$), а $\Delta^{\mu} v_k = \lambda_k^{\mu} v_k$ при любом $\mu = 1, \ldots, [s/2]$, то для всех $t \in [0, T]$ в случае четного $s-1$

$$|\lambda_k|^{s/2} U_k(t) = (-1)^{\frac{s-1}{2}} \int_{Q_t} f(x, \tau)\, \Delta^{\frac{s-1}{2}} v_k(x) \sin \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, dx\, d\tau =$$

$$= (-1)^{\frac{s-1}{2}} \int_{Q_t} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x, \tau) \cdot v_k(x) \sin \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, dx\, d\eta = \tilde{\alpha}_k(t),$$

где

$$\tilde{\alpha}_k^2(t) \leqslant \int_0^t \sin^2 \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\,d\tau \cdot \int_0^t d\tau \left(\int_{D_\tau} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x,\tau) \cdot v_k(x)\,dx \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant T \int_0^T \left(\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x,t) \cdot v_k(x)\,dx \right)^2 dt.$$

Так как $\Delta^{\frac{s-1}{2}} f \in L_2(Q_T)$, то в силу леммы 6 числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left(\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x,t)\, v_k(x)\,dx \right)^2 dt$ сходится и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T \left(\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x,t)\, v_k(x)\,dx \right)^2 dt =$$

$$= \int_{Q_T} \left(\Delta^{\frac{s-1}{2}} f \right)^2 dx\,dt \leqslant C' \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k^2(t)$ равномерно на $[0, T]$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k^2(t) \leqslant TC' \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)} = C \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

В случае, когда $s-1$ нечетно,

$$|\lambda_k|^{s/2} U_k(t) =$$

$$= (-1)^{\frac{s-2}{2}} |\lambda_k|^{1/2} \int_{Q_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x,\tau)\, v_k(x) \sin \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\,dx\,d\tau =$$

$$= (-1)^{\frac{s-2}{2}} \int_{Q_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x,\tau)\, v_k(x)\, d\left(\cos \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\right) dx =$$

$$= (-1)^{\frac{s-2}{2}} \left\{ \int_{D_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x,t)\, v_k(x)\,dx - \right.$$

$$- \cos \sqrt{|\lambda_k|}\, t \int_{D_0} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x,0)\, v_k(x)\,dx -$$

$$\left. - \int_0^t \cos \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau) \left[\int_{D_\tau} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_\tau(x,\tau)\, v_k(x)\,dx \right] d\tau \right. =$$

$$= \tilde{\tilde{\alpha}}_k^{(1)}(t) + \tilde{\tilde{\alpha}}_k^{(2)}(t) + \tilde{\tilde{\alpha}}_k^{(3)}(t) = \tilde{\tilde{\alpha}}_k(t),$$

где

$$\left|\tilde{\tilde{\alpha}}_k^{(1)}(t)\right|^2=\left|\int\limits_{D_t}\Delta^{\frac{s-2}{2}}f(x,\ t)\,v_k(x)\,dx\right|^2,$$

$$\left|\tilde{\tilde{\alpha}}_k^{(2)}(t)\right|^2\leqslant\left|\int\limits_{D_0}\Delta^{\frac{s-2}{2}}f(x,\ 0)\,v_k(x)\,dx\right|^2,$$

$$\left|\tilde{\tilde{\alpha}}_k^{(3)}(t)\right|^2\leqslant T\int\limits_0^T\left(\int\limits_{D_t}\Delta^{\frac{s-2}{2}}f_t(x,\ t)\,v_k(x)\,dx\right)^2dt.$$

Функция $\Delta^{\frac{s-2}{2}}f\in H^1(Q_T)$, поэтому при всех $t\in[0,\ T]$ $\Delta^{\frac{s-2}{2}}f(x,t)\in L_2(D_t)$ и

$$\left\|\Delta^{\frac{s-2}{2}}f(x,\ t)\right\|^2_{L_2(D_t)}\leqslant\mathrm{const}\left\|\Delta^{\frac{s-2}{2}}f(x,\ t)\right\|^2_{H^1(Q_T)}\leqslant\mathrm{const}\,\|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\tilde{\tilde{\alpha}}_k^{(2)}(t)\right|^2$ сходится равномерно на $[0,\ T]$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\tilde{\tilde{\alpha}}_k^{(2)}(t)\right|^2\leqslant C^{(2)}\|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Так как для любой функции $G(x,\ t)\in H^1(Q_T)$ в силу абсолютной непрерывности интеграла

$$\|G\|^2_{L_2(D_{t'})}-\|G\|^2_{L_2(D_{t''})}=2\int\limits_{t'}^{t''}\int\limits_{D_\tau}G(x,\ \tau)\,G_\tau(x,\ \tau)\,dx\,d\tau=o(1)$$

при

$$|t'-t''|\to0,\quad t'\in[0,\ T],\quad t''\in[0,\ T],$$

то функция $\left\|\Delta^{\frac{s-2}{2}}f\right\|^2_{L_2(D_t)}$ непрерывна на $[0,\ T]$. Следовательно, при всех $t\in[0,\ T]$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int\limits_{D_t}\Delta^{\frac{s-2}{2}}f(x,\ t)\,v_k(x)\,dx\right)^2=\left\|\Delta^{\frac{s-2}{2}}f\right\|^2_{L_2(D_t)}\leqslant C\|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)},$$

причем по теореме Дини ряд, стоящий в левой части этого равенства (в силу леммы 2 члены этого ряда непрерывны на $[0,\ T]$) сходится равномерно на $[0,\ T]$. Отсюда вытекает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\tilde{\tilde{\alpha}}_k^{(1)}(t)\right|^2$ сходится равномерно на $[0,\ T]$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\tilde{\tilde{\alpha}}_k^{(1)}(t)\right|^2\leqslant C^{(1)}\|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Далее, функция $\Delta^{\frac{s-2}{2}} f_t \in L_2(Q_T)$, поэтому согласно лемме 6

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left(\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_t(x, t)\, v_k(x)\, dx \right)^2 dt = \left\| \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_t \right\|_{L_2(Q_T)} \leqslant C \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \tilde{\tilde{\alpha}}^{(3)}_k(t) \right|^2$ сходится равномерно на отрезке $[0, T]$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \tilde{\tilde{\alpha}}^{(3)}(t) \right|^2 \leqslant C^{(3)} \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\alpha}}^2_k(t)$ сходится равномерно на $[0, T]$ и его сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\alpha}}^2_k(t) \leqslant C \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Утверждение леммы 3 при $p=0$ доказано.

Аналогично оно доказывается и при $p=1$. Согласно (49′), (50) при четных $s-1$

$$|\lambda_k|^{\frac{s-1}{2}} \frac{dU_k}{dt} = (-1)^{\frac{s-1}{2}} \int_{Q_t} f(x, \tau)\, \Delta^{\frac{s-1}{2}} v_k(x) \cos \sqrt{|\lambda_k|}(t-\tau)\, dx\, d\tau =$$

$$= (-1)^{\frac{s-1}{2}} \int_{Q_t} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x, \tau) \cdot v_k(x) \cos \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, dx\, d\tau = \tilde{\beta}_k(t).$$

Так как

$$\tilde{\beta}^2_k(t) \leqslant T \int_0^T dt \left(\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x, t)\, v_k(x)\, dx \right)^2,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\beta}^2_k(t)$, так же как и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}^2_k(t)$, равномерно на $[0, T]$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\beta}^2_k(t) \leqslant C \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

В случае нечетного $s-1$

$$|\lambda_k|^{\frac{s-1}{2}} \frac{dU_k}{dt} =$$

$$= (-1)^{\frac{s-2}{2}} |\lambda_k|^{\frac{1}{2}} \int\limits_{Q_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, \tau)\, v_k(x) \cos\sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, dx\, d\tau =$$

$$= (-1)^{\frac{s-2}{2}} \Bigl(\sin\sqrt{|\lambda_k|}\, t \cdot \int\limits_{D_0} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, 0)\, v_k(x)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_\tau(x, \tau)\, v_k(x) \sin\sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, dx\, d\tau\Bigr) =$$

$$= \tilde{\tilde{\beta}}_k^{(2)}(t) + \tilde{\tilde{\beta}}_k^{(3)}(t) = \tilde{\tilde{\beta}}_k(t).$$

Так как

$$\left|\tilde{\tilde{\beta}}_k^{(2)}(t)\right|^2 \leqslant \Bigl(\int\limits_{D_0} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, 0)\, v_k(x)\, dx\Bigr)^2,$$

$$\left|\tilde{\tilde{\beta}}_k^{(3)}(t)\right|^2 \leqslant T \int\limits_0^T \Bigl(\int\limits_{D_\tau} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_\tau(x, \tau)\, v_k(x)\, dx\Bigr)^2 d\tau,$$

то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \bigl(\tilde{\tilde{\beta}}_k^{(s)}(t)\bigr)^2$ (так же как и ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \bigl(\tilde{\tilde{\alpha}}_k^{(s)}(t)\bigr)^2$), $s=2, 3$, а следовательно, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\beta}}_k^2(t)$ сходятся равномерно на $[0, T]$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\beta}}_k^2(t) \leqslant C \|f\|_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Утверждение леммы 3 при $p=1$ доказано.

Пусть теперь $p \geqslant 2$. Так как функция $U_k(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $U_k'' - \lambda_k U_k = f_k$, то в случае четного p, $2 \leqslant p \leqslant s$,

$$\frac{d^p U_k}{dt^p} = \lambda_k^{\frac{p}{2}} U_k + \lambda_k^{\frac{p-2}{2}} f_k + \lambda_k^{\frac{p-4}{2}} \frac{d^2 f_k}{dt^2} + \ldots + \frac{d^{p-2} f_k}{dt^{p-2}},$$

а в случае нечетного p, $2 < p \leqslant s$,

$$\frac{d^p U_k}{dt^p} = \lambda_k^{\frac{p-1}{2}} \frac{dU_k}{dt} + \lambda_k^{\frac{p-3}{2}} \frac{df_k}{dt} + \ldots + \frac{d^{p-2} f_k}{dt^{p-2}}.$$

Поэтому утверждение леммы 3 будет доказано для любого $p \leqslant s$, если проверить, что для любого q, $0 \leqslant q \leqslant s-2$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{s-2-q} \Bigl(\frac{d^q f_k}{dt^q}\Bigr)^2$ сходится равномерно на $[0, T]$ и имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{s-2-q}\left(\frac{d^q f_k}{dt^q}\right)^2 \leqslant C\|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)},$$

в котором постоянная $C>0$ зависит только от Q_T.

В силу лемм 2 и 5 в случае четного $s-q$ для всех $t\in[0, T]$ имеем

$$|\lambda_k|^{\frac{s-q-2}{2}}\frac{d^q f_k}{dt^q} = |\lambda_k|^{\frac{s-q-2}{2}}\int\limits_{D_t}\frac{\partial^q f(x, t)}{\partial t^q}v_k(x)\,dx =$$

$$= (-1)^{\frac{s-q-2}{2}}\int\limits_{D_t}\Delta^{\frac{s-q-2}{2}}\frac{\partial^q f(x, t)}{\partial t^q}v_k(x)\,dx = \tilde{\gamma}_k(t).$$

Так как $\Delta^{\frac{s-q-2}{2}}\frac{\partial^q f}{\partial t^q}\in H^1(Q_T)$, то при любом $t\in[0, T]$ $\Delta^{\frac{s-q-2}{2}}\frac{\partial^q f}{\partial t^q}\in L_2(D_t)$ и функция $\left\|\Delta^{\frac{s-q-2}{2}}\frac{\partial^q f(x, t)}{\partial t^q}\right\|^2_{L_2(D_t)}$ непрерывна на $[0, T]$. Поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_k^2(t)$ сходится равномерно на $[0, T]$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\gamma}_k^2(t) = \left\|\Delta^{\frac{s-q-2}{2}}\frac{\partial^q f(x, t)}{\partial t^q}\right\|^2_{L_2(D_t)} \leqslant C\|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Пусть $s-q$ нечетное. Тогда для всех $t\in[0, T]$

$$|\lambda_k|^{\frac{s-q-2}{2}}\frac{\partial^q f_k}{\partial t^q} =$$

$$= (-1)^{\frac{s-q-3}{2}}|\lambda_k|^{\frac{1}{2}}\int\limits_{D_t}\Delta^{\frac{s-q-3}{2}}\frac{\partial^q f(x, t)}{\partial t^q}v_k(x)\,dx = \sqrt{|\lambda_k|}\,\tilde{\tilde{\gamma}}_k(t).$$

Так как $\Delta^{\frac{s-q-3}{2}}\frac{\partial^q f}{\partial t^q}\in \tilde{H}^2_{\mathscr{D}}(Q_T)$ (или $\tilde{H}^2_{\mathscr{N}}(Q_T)$), то в силу леммы 5 при любом $t\in[0, T]$ $\Delta^{\frac{s-q-3}{2}}\frac{\partial^q f}{\partial t^q}\in \mathring{H}^1(D_t)$ (или $H^1(D_t)$), причем функция $\left\|\Delta^{\frac{s-q-3}{2}}\frac{\partial^q f}{\partial t^q}\right\|^2_{H^1(D_t)}$ непрерывна на $[0, T]$. Поскольку при любом $t\in[0, T]$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\tilde{\tilde{\gamma}}_k^2(t)(|\lambda_k|+1) = \left\|\Delta^{\frac{s-q-3}{2}}\frac{\partial^q f}{\partial t^q}\right\|^2_{H^1(D_t)}$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\tilde{\tilde{\gamma}}_k^2(t)(|\lambda_k|+1)$ и, тем более, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\tilde{\tilde{\gamma}}_k^2(t)|\lambda_k|$ сходятся равномерно на $[0, T]$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\gamma}}_k^2(t)\,|\lambda_k| \leqslant \left\| \Delta^{\frac{s-q-3}{2}} \frac{\partial^q f}{\partial t^q} \right\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant C \|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Лемма доказана.

Как уже отмечалось, без условий на заданные функции типа (56) и (57) в случае первой смешанной задачи и (58) и (59) в случае второй смешанной задачи теоремы 3 и 4 несправедливы. Однако если мы хотим установить гладкость обобщенных решений, а не сходимость в соответствующем пространстве ряда Фурье, то условия (56), (57) и соответственно (58), (59) могут быть существенно ослаблены. Остановимся, например, на случае первой смешанной задачи.

Теорема 3′. *Пусть при некотором* $s \geqslant 1$ $\partial D \in C^s$, $\varphi \in H^s(D)$, $\psi \in H^{s-1}(D)$, $f \in H^{s-1}(Q_T)$ *и выполнены следующие условия согласования*:

$$\varphi|_{\partial D} = \ldots = \left[\Delta^{\left[\frac{s-1}{2}\right]}\varphi + \sum_{i=0}^{\left[\frac{s-3}{2}\right]} \Delta^{\left[\frac{s-3}{2}\right]-i} \frac{\partial^{2i} f}{\partial t^{2i}} \right]\Bigg|_{\partial D_0} = 0 \qquad (64)$$

и при $s \geqslant 2$

$$\psi|_{\partial D} = \ldots = \left[\Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1}\psi + \sum_{i=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]-2} \Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-2-i} \frac{\partial^{2i+1} f}{\partial t^{2i+1}} \right]\Bigg|_{\partial D_0} = 0 \qquad (65)$$

(*считаем, что при* $s < 0$ $\sum_{i=0}^{s} a_i = 0$). *Тогда обобщенное решение первой смешанной задачи* (44)—(46) *принадлежит* $H^s(Q_T)$.

При $s = 1$ условия согласования (64) и (65) в теореме 3′ имеют вид

$$\varphi|_{\partial D} = 0,$$

при $s = 2$ — вид

$$\varphi|_{\partial D} = \psi|_{\partial D} = 0,$$

а при $s = 3$ — вид

$$\varphi|_{\partial D} = \psi|_{\partial D} = 0, \quad (\Delta\varphi + f)|_{\partial D_0} = 0.$$

Так как $f \in H^{s-1}(Q_T)$, то в силу замечания к лемме 5 ее след $f|_{D_0}$ принадлежит $H^{s-2}(D_0)$. Следовательно, для $s \geqslant 3$ при любом $i = 0, \ldots, \left[\frac{s-3}{2}\right]$ существует принадлежащий $L_2(\partial D_0)$ след $\Delta^{\left[\frac{s-3}{2}\right]-i} \frac{\partial^{2i} f}{\partial t^{2i}}\Big|_{\partial D_0}$, а для $s \geqslant 4$ при любом $i = 0, \ldots, \left[\frac{s}{2}\right] - 2$ — след $\Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-2-i} \frac{\partial^{2i+1} f}{\partial t^{2i+1}}\Big|_{\partial D_0}$.

Доказательство. При $s=1$ утверждение теоремы очевидно. При $s=2$ оно вытекает из следствия 2 к теореме 3. Докажем его при $s=3$; для $s>3$ доказательство аналогично.

Вместе с задачей (44)—(46) рассмотрим задачу

$$v_{tt}-\Delta v=f_t, \tag{66}$$

$$v|_{t=0}=\psi, \tag{67}$$

$$v_t|_{t=0}=\Delta\varphi+f|_{D_0}. \tag{68}$$

Условия теоремы гарантируют существование обобщенного решения $v(x, t)$ задачи (66)—(68). В силу следствия 2 к теореме 3 функция $v(x, t)$ принадлежит $H^2(Q_T)$ и является решением п. в. задачи (66)—(68). Покажем, что $v=u_t$.

Функция

$$w(x, t)=\varphi(x)+\int_0^t v(x, \tau)\,d\tau,$$

очевидно, принадлежит $H^2(Q_T)$, и

$$\nabla w=\nabla\varphi+\int_0^t \nabla v(x, \tau)\,d\tau,$$

$$w_t=v.$$

В силу того, что v является обобщенным решением задачи (66)—(68), функция w удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_T}(\nabla w_t\nabla\eta-w_{tt}\eta_t)\,dx\,dt=\int_{D_0}(f+\Delta\varphi)\,\eta\,dx+\int_{Q_T}f_t\eta\,dx\,dt \tag{69}$$

для всех $\eta\in H^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям

$$\eta|_{D_T}=0, \quad \eta|_{\Gamma_T}=0. \tag{70}$$

Пусть $\eta\in C^2(\bar{Q}_T)$ и удовлетворяет условиям

$$\eta|_{D_T}=\eta_t|_{D_T}=0, \quad \eta|_{\Gamma_T}=0. \tag{71}$$

Тогда

$$\int_{Q_T}(\nabla w_t\nabla\eta-w_{tt}\eta_t)\,dx\,dt=$$

$$=-\int_{Q_T}(\nabla w\nabla\eta_t-w_t\eta_{tt})\,dx\,dt-\int_{D_0}(\nabla\varphi\nabla\eta-\psi\eta_t)\,dx=$$

$$=-\int_{Q_T}(\nabla w\nabla\eta_t-w_t\eta_{tt})\,dx\,dt+\int_{D_0}(\Delta\varphi\cdot\eta+\psi\eta_t)\,dx$$

и

$$\int_{Q_T}f_t\eta\,dx\,dt=-\int_{Q_T}f\eta_t\,dx\,dt-\int_{D_0}f\eta\,dx.$$

Подставляя эти равенства в (69), получим

$$\int_{Q_T} (\nabla w \nabla \eta_t - w_t \eta_{tt})\, dx\, dt = \int_{D_0} \psi \eta_t\, dx + \int_{Q_T} f \eta_t\, dx\, dt.$$

Так как для любой функции $\zeta(x, t)$, принадлежащей $C^2(\bar{Q}_T)$ и удовлетворяющей условиям (70), найдется такая принадлежащая $C^2(\bar{Q}_T)$ и удовлетворяющая условиям (71) функция $\eta(x, t)$, что $\zeta = \eta_t$ $\left(\eta(x, t) = -\int_t^T \zeta(x, \tau)\, d\tau\right)$, то функция w удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} (\nabla w \nabla \zeta - w_t \zeta_t)\, dx\, dt = \int_{D_0} \psi \zeta\, dx + \int_{Q_T} f \zeta\, dx\, dt$$

для всех $\zeta(x, t)$, принадлежащих $C^2(\bar{Q}_T)$ и удовлетворяющих условиям (70), а следовательно, и для всех удовлетворяющих условиям (70) ζ из $H^1(Q_T)$. В силу единственности обобщенного решения задачи (44)—(46) $w = u$ и, тем самым, $v = u_t$.

Таким образом, $u \in H^2(Q_T)$ $u_t \in H^2(Q_T)$. Так как u является решением п. в. задачи (44)—(46), то при п. в. $t \in [0, T]$ функция $u(x, t)$ является решением п. в. первой краевой задачи для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f_1, \qquad x \in D_t,$$
$$u|_{\partial D_t} = 0,$$

где $f_1 = (f + u_{tt})|_{D_t}$. Так как в силу следствия 2 из теоремы 3 $u_{tt}|_{D_t} = v_t|_{D_t} \in H^1(D_t)$, то $f_1 \in H^1(D_t)$ и согласно теореме 4 п. 3 § 2 гл. IV для п. в. $t \in [0, T]$ $u \in H^3(D_t)$ и

$$\|u\|_{H^3(D_t)} \leqslant \text{const}\, \|f_1\|_{H^1(D_t)} \leqslant \text{const}\, [\|f\|_{H^1(D_t)} + \|u_{tt}\|_{H^1(D_t)}] \leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\, [\|f\|_{H^2(Q_T)} + \|\psi\|_{H^2(D)} + \|\Delta\varphi + f\|_{H^1(D_0)} + \|f_t\|_{H_1(Q_T)}] \leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\, [\|f\|_{H^2(Q_T)} + \|\psi\|_{H^2(D)} + \|\varphi\|_{H^3(D)}].$$

Следовательно, $u \in H^3(Q_T)$. Теорема доказана.

§ 3. Обобщенное решение задачи Коши

Рассмотрим в полосе $\Pi_T = \{x \in R_n,\ 0 < t < T\}$ при некотором $T > 0$ гиперболическое уравнение

$$u_{tt} - \operatorname{div}(k(x) \nabla u) + a(x) u = f, \tag{1}$$

где $k(x) \in C^1(R_n)$, $a(x) \in C(R_n)$, $\inf_{x \in R_n} k(x) = k_0 > 0$, $\sup_{x \in R_n} k(x) = k_1 < \infty$; будем также считать, что $a(x) \geqslant 0$.

Принадлежащая $C^2(\Pi_T) \cap C^1(\Pi_T \cup \{t = 0\})$ функция $u(x, t)$ называется *классическим решением задачи Коши* для уравнения (1) в полосе Π_T, если в Π_T она удовлетворяет уравнению (1), а при $t=0$ — начальным условиям

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \tag{2}$$

$$u_t|_{t=0}=\psi(x). \tag{3}$$

Обозначим для произвольного $R>0$ через $Q_{T,R}$ цилиндр $\{|x|<R,\ 0<t<T\}$, через $S_{T,R}$ — его боковую поверхность $\{|x|=R,\ 0<t<T\}$, а через $D_{\tau,R}$, $\tau\in[0,\ T]$, — множество $\{|x|<R,\ t=\tau\}$; в частности, $D_{0,R}$ — нижнее, а $D_{T,R}$ — верхнее основания цилиндра $Q_{T,R}$.

Пусть $u(x,\ t)$ — классическое решение задачи Коши (1)—(3) в полосе $\Pi_{T+\delta}$ при некотором $\delta>0$ с функцией $f(x,\ t)$, принадлежащей $L_2(Q_{T,R})$ при любом $R>0$. Умножим (1) на произвольную функцию $v(x,\ t)$, удовлетворяющую при некотором $R_0 = R_0(v)>0$ следующему условию:

$$\begin{gathered} v(x,\ t)\in H^1(Q_{T,R_0}),\quad v(x,\ t)=0 \text{ в } \Pi_T\setminus Q_{T,R_0}, \\ v|_{D_{T,R_0}}=0,\quad v|_{S_{T,R_0}}=0, \end{gathered} \tag{4}$$

и проинтегрируем полученное равенство по полосе Π_T. С помощью формулы Остроградского получим

$$\int\limits_{\Pi_T}(k\nabla u\nabla v+auv-u_tv_t)\,dx\,dt = \\ =\int\limits_{\Pi_T} fv\,dx\,dt+\int\limits_{R_n}\psi(x)\,v(x,\ 0)\,dx \tag{5}$$

(в этом равенстве интегрирование на самом деле производится не по всей полосе Π_T и плоскости $\{x\in R_n,\ t=0\}$, а лишь по цилиндру Q_{T,R_0} и его нижнему основанию D_{0,R_0} соответственно).

Пусть $f(x,\ t)\in L_2(Q_{T,R})$, а $\psi(x)\in L_2(|x|<R)$ при любом $R>0$. Введем следующее определение.

Функция u называется *обобщенным решением задачи Коши* (1)—(3) *в полосе* Π_T, если она принадлежит $H^1(Q_{T,R})$ при всех $R>0$, удовлетворяет интегральному тождеству (5) для всех v, удовлетворяющих условию (4) при некотором $R_0=R_0(v)>0$, и удовлетворяет начальному условию (2) (т. е. $u(x,\ t)|_{D_{0,R}}=\varphi(x)$ при любом $R>0$).

Наряду с понятиями классического и обобщенного решений задачи Коши (1)—(3) можно ввести понятие решения п. в. этой задачи.

Функция u называется *решением п. в. в* Π_T *задачи Коши* (1)—(3), если она принадлежит $H^2(Q_{T,R})$ при всех $R>0$, удовлетворяет уравнению (1) для п. в. $(x,\ t)\in\Pi_T$ и удовлетворяет начальным условиям (2) и (3) (т. е. $u|_{D_{0,R}}=\varphi$, $u_t|_{D_{0,R}}=\psi$ при любом $R>0$).

Выше было показано, что классическое решение в $\Pi_{T+\delta}$ (при произвольном $\delta>0$) задачи (1)—(3) с f, принадлежащей $L_2(Q_{T,R})$ при любом $R>0$, является обобщенным решением в Π_T этой задачи. Аналогично доказывается, что и решение п. в. задачи (1)—(3) (в Π_T) является обобщенным решением (в Π_T) этой задачи.

Так же как и в случае смешанных задач, легко показать (ср. с леммой 1, п. 1, § 2), что если обобщенное решение в Π_T задачи (1)—(3) принадлежит $H^2(Q_{T,R})$ при любом $R>0$, то оно является решением п. в., а если оно принадлежит $C^2(\Pi_T)\cap C^1(\Pi_T\cup\{t=0\})$, то является классическим решением.

Перейдем теперь к доказательству теорем существования и единственности обобщенного решения задачи (1)—(3). Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Возьмем некоторое число $\gamma>\sqrt{k_1}$ ($k_1=\sup\limits_{x\in R_n} k(x)<\infty$). Пусть t_1 — произвольное число, большее чем T, а x^0 — произвольная точка из R_n. Обозначим через $K_{t_1,\tau}(x^0)$, где $\tau\in(0,T]$, лежащий в Π_T усеченный конус $\{|x-x^0|<\gamma(t_1-t),\ 0<t<\tau\}$, через $\Gamma_{t_1,\tau}(x^0)$ — его боковую поверхность, $\Gamma_{t_1,\tau}(x^0)=\{|x-x^0|=\gamma(t_1-t),\ 0<t<\tau\}$, а через $D_{\theta,\gamma(t_1-\theta)}(x^0)$ — множество $\{|x-x^0|<\gamma(t_1-\theta),\ t=\theta\}$, $0\leqslant\theta\leqslant\tau$ (тогда $D_{0,\gamma t_1}(x^0)$ и $D_{\tau,\gamma(t_1-\tau)}(x^0)$ — его нижнее и верхнее основания). Если x^0 — начало координат пространства R_n, то конус $K_{t_1,\tau}(x^0)=K_{t_1,\tau}(0)$ будем обозначать через $K_{t_1,\tau}$, а поверхность $\Gamma_{t_1,\tau}(0)$ — через $\Gamma_{t_1,\tau}$. В этом случае $D_{\tau,\gamma(t_1-\tau)}(0)=D_{\tau,\gamma(t_1-\tau)}$ и, в частности, $D_{0,\gamma t_1}$ и $D_{T,\gamma(t_1-T)}$ — нижнее и верхнее основания конуса $K_{t_1,T}$.

Лемма 1. *Пусть при некоторых $t_1>T$ и $x^0\in R_n$ функция $u(x,t)\in H^1(K_{t_1,T}(x^0))$, $u|_{D_{0,\gamma t_1}(x^0)}=0$ и*

$$\int\limits_{K_{t_1,T}(x^0)}(k(x)\nabla u\nabla v+auv-u_tv_t)\,dx\,dt=0 \tag{6}$$

для всех v, удовлетворяющих следующему условию:

$$v\in H^1(K_{t_1,T}(x^0)),\quad v=0 \ \text{ в } \ \Pi_T\setminus K_{t_1,T}(x^0),$$
$$v|_{D_{T,\gamma(t_1-T)}(x^0)}=0,\quad v|_{\Gamma_{t_1,T}(x^0)}=0.$$

Тогда $u=0$ в $K_{t_1,T}(x^0)$.

Очевидно, справедливость леммы 1 достаточно установить при $x^0=0$.

Возьмем произвольное $\tau\in(0,T]$ и рассмотрим в $K_{t_1,T}$ функцию

$$v(x,t)=\begin{cases}\int\limits_t^{\theta(x)} u(x,z)\,dz & \text{в } K_{t_1,\tau},\\ 0 & \text{в } K_{t_1,T}\setminus K_{t_1,\tau},\end{cases}$$

где

$$\theta(x)=\begin{cases} t_1-\dfrac{|x|}{\gamma} & \text{при} \quad \gamma(t_1-\tau)<|x|<\gamma t_1, \\ \tau & \text{при} \quad |x|<\gamma(t_1-\tau) \end{cases}$$

($t=\theta(x)$, $|x|<\gamma t_1$, — уравнение поверхности $\Gamma_{t_1,\tau}\cup\bar{D}_{\tau,\gamma(t_1-\tau)}$). Функция $v(x, t)$ принадлежит $H^1(K_{t_1,T})$, $v|_{\Gamma_{t_1\tau'}}=0$, $v|_{D_{\tau',\gamma(t_1-\tau')}}=0$ для всех $\tau'\in[\tau, T]$, и обобщенные производные функции v имеют вид

$$\nabla v=\begin{cases} \int\limits_t^{\theta(x)}\nabla u(x, z)\,dz+u(x, \theta(x))\nabla\theta & \text{в} \quad K_{t_1,\tau}, \\ 0 & \text{в} \quad K_{t_1,T}\setminus K_{t_1,\tau}, \end{cases} \tag{7}$$

$$v_t=\begin{cases} -u(x, t) & \text{в} \quad K_{t_1,\tau}, \\ 0 & \text{в} \quad K_{t_1,T}\setminus K_{t_1,\tau}. \end{cases} \tag{8}$$

Проще всего в этом можно убедиться следующим образом. Так как $u\in H^1(K_{t_1,T})$, то существует последовательность u_s, $s=1, 2, \ldots$, функций из $C^1(\bar{K}_{t_1,T})$, сходящаяся к u в $H^1(K_{t_1,T})$. Рассмотрим последовательность принадлежащих $C^1(\bar{K}_{t_1,T})$ функций $v_1, v_2, \ldots$,

$$v_m(x, t)=\begin{cases} \zeta_m(t)\int\limits_t^{\theta(x)}u_m(x, z)\,dz & \text{в} \quad K_{t_1,\tau}, \\ 0 & \text{в} \quad K_{t_1,T}\setminus K_{t_1,\tau}, \end{cases}$$

где $\zeta_m(t)$ равна 1 при $t<\tau(1-1/m)$, равна 0 при $t>\tau$, $0\leqslant\zeta_m(t)\leqslant 1$, $\zeta_m(t)\in C^1(-\infty, +\infty)$, $\left|\frac{d\zeta_m}{dt}\right|\leqslant C_0 m$. При любом $\tau'\in[\tau, T]$ $v_m|_{\Gamma_{t_1,\tau'}\cup D_{\tau',\gamma(t_1-\tau')}}=0$. Покажем, что последовательность v_m, $m=1, 2, \ldots$, сходится в $H^1(K_{t_1,T})$ к v. Действительно, последовательность v_m, $m=1, 2, \ldots$, очевидно, сходится к v в $L_2(K_{t_1,T})$, последовательность ∇v_m, $m=1, 2, \ldots$,

$$\nabla v_m=\begin{cases} \zeta_m(t)\int\limits_t^{\theta(x)}\nabla u_m(x, z)\,dz+\zeta_m(t)\,u_m(x, \theta(x))\nabla\theta \text{ в } K_{t_1,\tau}, \\ 0 \qquad\qquad \text{в } K_{t_1,T}\setminus K_{t_1,\tau}, \end{cases}$$

сходится в $L_2(K_{t_1,T})$ к вектор-функции ∇v, заданной формулой (7), (т. е. $(v_m)_{x_i} \to v_{x_i}$, $i=1, \ldots, n$, при $m \to \infty$) и так как

$$C_0^2 m^2 \int\limits_{K_{t_1,\tau} \setminus K_{t_1,\tau(1-1/m)}} \left(\int\limits_t^{\theta(x)} u_m(x, z)\, dz \right)^2 dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant C_0^2 T^2 \int\limits_{K_{t_1,\tau} \setminus K_{t_1,\tau(1-1/m)}} u_m^2(x, z)\, dx\, dz \leqslant$$
$$\leqslant 2C_0^2 T^2 \left[\int\limits_{K_{t_1,T}} (u-u_m)^2\, dx\, dt + \int\limits_{K_{t_1,\tau} \setminus K_{t_1\,\tau(1-1/m)}} u^2\, dx\, dt \right] \to 0$$

при $m \to \infty$, то последовательность $v_{1t}, v_{2t}, \ldots,$

$$v_{mt} = \begin{cases} -\zeta_m(t)\, u_m(x, t) + \zeta_m'(t) \int\limits_\tau^{\theta(x)} u_m(x, z)\, dz & \text{в } K_{t_1,\tau}, \\ 0 & \text{в } K_{t_1,T} \setminus K_{t_1,\tau}, \end{cases}$$

сходится в $L_2(K_{t_1,T})$ к функции v_t, задаваемой формулой (8).

Подставляя функцию v в тождество (6), получим

$$\int\limits_{K_{t_1,\tau}} k(x) \nabla u(x, t) \int\limits_t^{\theta(x)} \nabla u(x, z)\, dz\, dx\, dt +$$
$$+ \int\limits_{K_{t_1,\tau}} k(x)\, u(x, \theta(x))\, \nabla u(x, t)\, \nabla\theta\, dx\, dt -$$
$$- \int\limits_{K_{t_1,\tau}} a(x)\, v_t v\, dx\, dt + \int\limits_{K_{t_1,\tau}} u_t u\, dx\, dt = 0. \qquad (9)$$

Так как $v|_{\Gamma_{t_1,\tau} \cup D_{\tau,\gamma(t_1-\tau)}} = 0$, то

$$\int\limits_{K_{t_1,\tau}} a v v_t\, dx\, dt = -\frac{1}{2} \int\limits_{D_{0,\gamma t_1}} a v^2\, dx \leqslant 0. \qquad (10)$$

Так как $u|_{D_{0,\gamma t_1}} = 0$, то аналогично имеем

$$\int\limits_{K_{t_1,\tau}} u u_t\, dx\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{|x|<\gamma t_1} u^2(x, \theta(x))\, dx. \qquad (11)$$

Поскольку

$$\int_{K_{t_1,\tau}} k(x)\nabla u(x,t)\int_t^{\theta(x)}\nabla u(x,z)\,dz\,dt\,dx=$$

$$=\int_{|x|<\gamma t_1} k(x)\int_0^{\theta(x)}\nabla u(x,t)\int_t^{\theta(x)}\nabla u(x,z)\,dz\,dt\,dx=$$

$$=\int_{|x|<\gamma t_1} k(x)\int_0^{\theta(x)}\nabla u(x,t)\int_0^{\theta(x)}\nabla u(x,z)\,dz\,dt\,dx-$$

$$-\int_{|x|<\gamma t_1} k(x)\int_0^{\theta(x)}\nabla u(x,t)\int_0^{t}\nabla u(x,z)\,dz\,dt\,dx=$$

$$=\int_{|x|<\gamma t_1} k(x)\left|\int_0^{\theta(x)}\nabla u(x,t)\,dt\right|^2dx-$$

$$-\int_{|x|<\gamma t_1} k(x)\int_0^{\theta(x)}\nabla u(x,z)\int_z^{\theta(x)}\nabla u(x,t)\,dt\,dz\,dx,$$

то согласно (7)

$$\int_{K_{t_1,\tau}} k(x)\nabla u(x,t)\int_t^{\theta(x)}\nabla u(x,z)\,dz\,dt\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{|x|<\gamma t_1} k(x)\left|\int_0^{\theta(x)}\nabla u(x,t)\,dt\right|^2dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{|x|<\gamma t_1} k(x)\left[\left|\int_0^{\theta(x)}\nabla u(x,t)\,dt+u(x,\theta(x))\nabla\theta\right|^2-\right.$$

$$\left.-2u(x,\theta(x))\nabla\theta\int_0^{\theta(x)}\nabla u(x,t)\,dt-u^2(x,\theta(x))\,|\nabla\theta|^2\right]dx\geqslant$$

$$\geqslant\int_{K_{t_1,\tau}} k(x)\,u(x,\theta(x))\,\nabla\theta\nabla u(x,t)\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{|x|<\gamma t_1} k(x)\,u^2(x,\theta(x))\,|\nabla\theta|^2\,dx.$$

Поэтому

$$\int_{K_{t_1,\tau}} k(x)\nabla u(x,t)\int_t^{\theta(x)}\nabla u(x,z)\,dz\,dt\,dx+$$

$$+\int_{K_{t_1,\tau}} k(x)\,u(x,\theta(x))\,\nabla u\cdot\nabla\theta\,dx\,dt\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{1}{2}\int_{|x|<\gamma t_1} k(x)\,u^2(x,\theta(x))\,|\nabla\theta|^2\,dx\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{k_1}{2\gamma^2}\int_{|x|<\gamma t_1} u^2(x,\theta(x))\,dx. \qquad (12)$$

Подставляя соотношения (10)—(12) в (9), получим неравенство $\left(1-\frac{k_1}{\gamma^2}\right)\int\limits_{|x|<\gamma t_1} u^2(x,\ \theta(x))\,dx\leqslant 0$, из которого вытекает, что $\int\limits_{D_{\tau,\ \gamma(t_1-\tau)}} u^2(x,\ \tau)\,dx=0$, откуда в силу произвольности $\tau\in(0,\ T)$ получаем, что $u=0$ в $K_{t_1,\ T}$. Лемма доказана.

Из леммы 1 немедленно вытекает теорема единственности обобщенного решения задачи Коши (1)—(3), а следовательно, и единственность решения п. в. и классического решения.

Теорема 1. *Задача Коши* (1)—(3) *не может иметь более одного обобщенного решения, более одного решения п. в. и более одного классического решения.*

Пусть u_1 и u_2 — обобщенные решения (и, в частности, решения п. в.) задачи (1)—(3) ($f\in L_2(Q_{T,\ R})$ $\psi\in L_2(|x|<R)$ для всех $R>0$). Тогда их разность u_1-u_2 удовлетворяет условиям леммы 1 при любых $t_1>T$ и $x^0\in R_n$. Поэтому $u_1=u_2$.

Если u_1 и u_2 — классические решения задачи (1)—(3), то их разность u_1-u_2 является классическим решением задачи (1)—(3) с равными нулю функциями f, φ и ψ; поэтому u_1-u_2 является обобщенным решением и, следовательно, $u_1=u_2$. Теорема доказана.

Пусть $\varphi\in H^1(|x|<R)$, $\psi\in L_2(|x|<R)$, $f\in L_2(Q_{T,\ R})$ для любого $R>0$. При каждом m, $m=1,\ 2,\ \ldots$, возьмем бесконечно дифференцируемую в $\overline{\Pi}_T$ функцию $\zeta_m(x,\ t)$, равную 1 в $K_{8mT,\ T}$ и нулю в $\Pi_T\setminus K_{8(m+1/2)T,\ T}$, и обозначим через $u_m(x,\ t)$ обобщенное решение в цилиндре $Q_{T,\ 8(m+1)T\gamma}$ следующей смешанной задачи:

$$\begin{gathered}
u_{mtt}-\operatorname{div}(k(x)\nabla u_m)+a(x)u_m=f_m(x,\ t),\\
u_m|_{D_{0,\ 8(m+1)T\gamma}}=\varphi_m(x),\\
u_{mt}|_{D_{0,\ 8(m+1)T\gamma}}=\psi_m(x),\\
u_m|_{S_{T,\ 8(m+1)T\gamma}}=0,
\end{gathered}\tag{13}$$

где $\varphi_m(x)=\varphi(x)\zeta_m(x,\ 0)$, $\psi_m(x)=\psi(x)\zeta_m(x,\ 0)$, $f_m(x,\ t)=f(x,\ t)\zeta_m(x,\ t)$. Это означает, что функция u_m принадлежит $H^1(Q_{T,\ 8(m+1)T\gamma})$, удовлетворяет начальному условию $u_m|_{D_{0,\ 8(m+1)T\gamma}}=0$ и при всех v из $H^1(Q_{T,\ 8(m+1)T\gamma})$, для которых $v|_{D_{T,\ 8(m+1)T\gamma}}=0$ и $v|_{S_{T,\ 8(m+1)T\gamma}}=0$, удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_{T,\ 8(m+1)T\gamma}}(k(x)\nabla u_m\nabla v+au_mv-u_{mt}v_t)\,dx\,dt=\\
=\int\limits_{Q_{T,\ 8(m+1)T\gamma}} f_mv\,dx\,dt+\\
+\int\limits_{D_{0,\ 8(m+1)T\gamma}}\psi_m(x)\,v(x,\ 0)\,dx,\qquad m=1,\ 2,\ \ldots\tag{14}$$

Так как $\varphi_m \in \overset{\circ}{H}{}^1(D_{0,\,8(m+1)T\gamma})$ $(\varphi \in H^1(D_{0,\,8(m+1)T\gamma})$ и равна нулю для $8(m+1/2)T\gamma < |x| < 8(m+1)T\gamma)$, то согласно теореме 1 предыдущего параграфа обобщенные решения u_m существуют.

Возьмем произвольную точку $x^0 \in R_n$, для которой $|x^0| = (8m+6)T\gamma$, и подставим в тождество (14) произвольную функцию v, удовлетворяющую следующему условию:

$$v \in H^1(K_{2T,\,T}(x^0)), \quad v=0 \quad \text{в} \quad \Pi_T \diagdown K_{2T,\,T}(x^0),$$
$$v|_{D_{T,\,T\gamma}(x^0)}=0, \quad v|_{\Gamma_{2T,\,T}(x^0)}=0$$

(нетрудно проверить, что такая функция v принадлежит $H^1(Q_{T,\,8(m+1)T\gamma})$ и что ее следы на $D_{T,\,8(m+1)T\gamma}$ и $S_{T,\,8(m+1)T\gamma}$ равны нулю). В силу леммы 1 получаем, что $u_m=0$ в $K_{2T,\,T}(x^0)$. Поскольку x^0 — произвольная точка n-мерной сферы $\{|x| = (8m+6)T\gamma,\ t=0\}$, то $u_m=0$ в цилиндрическом слое $\{(8m+5)T\gamma < |x| < (8m+7)T\gamma,\ 0<t<T\}$.

Обозначим через $\tilde{u}_m(x,\,t)$ функцию, равную $u_m(x,\,t)$ в $Q_{T,\,(8m+6)T\gamma}$ и нулю в $\Pi_T \diagdown Q_{T,\,(8m+6)T\gamma}$, $m=1,\,2,\,\ldots$ Очевидно, функция $\tilde{u}_m$, $m=1,\,2,\,\ldots$, принадлежит пространству $H^1(Q_{T,\,R})$ и

$$\tilde{u}_m|_{D_{0,\,R}} = \varphi_m \tag{15}$$

при любом $R>0$.

Возьмем произвольную функцию v, удовлетворяющую условию (4) с некоторым $R_0=R_0(v)>0$. Если $R_0<(8m+7)T\gamma$, то функцию v можно подставить в (14). А так как $u_m(x,\,t)=\tilde{u}_m(x,\,t)$ в $Q_{T,\,(8m+7)T\gamma}$, то имеем

$$\int_{\Pi_T} (k\nabla\tilde{u}_m\nabla v + a\tilde{u}_m v - \tilde{u}_{mt}v_t)\,dx\,dt = \\ = \int_{\Pi_T} f_m v\,dx\,dt + \int_{R_n} \psi_m(x)\,v(x,\,0)\,dx. \tag{16}$$

Пусть $R_0>(8m+7)T\gamma$. Поскольку $\tilde{u}_m=u_m$ в $Q_{T,\,(8m+7)T\gamma}$ и $\tilde{u}_m=0$ в $\Pi_T \diagdown Q_{T,\,(8m+5)T\gamma}$ (в $Q_{T,\,(8m+7)T\gamma} \diagdown Q_{T,\,(8m+5)T\gamma}$ $\tilde{u}_m = u_m=0$), то

$$\int_{\Pi_T} (k\nabla\tilde{u}_m\cdot\nabla v + a\tilde{u}_m v - \tilde{u}_{mt}v_t)\,dx\,dt = \\ = \int_{Q_{T,\,(8m+5)T\gamma}} (k\nabla u_m\cdot\nabla v + a u_m v - u_{mt}v_t)\,dx\,dt.$$

Возьмем некоторую бесконечно дифференцируемую в $\bar{\Pi}_T$ функцию $\zeta_m(x)$, равную 1 в $Q_{T,\,(8m+5)T\gamma}$ и нулю в $\Pi_T \diagdown Q_{T,\,(8m+7)T\gamma}$. Подставляя функцию $v\zeta_m$ в (14), получим ($u_m=0$ в $Q_{T,\,(8m+7)T\gamma} \diagdown Q_{T,\,(8m+5)T\gamma}$, $f_m=0$ в $\Pi_T \diagdown Q_{T,\,(8m+4)T\gamma}$, а $\psi_m=0$

в $\{|x|>(8m+4)T\gamma\}$)

$$\int\limits_{Q_{T,\,(8m+5)\,T\gamma}} (k\nabla u_m\cdot\nabla v+au_m v-u_{mt}v_t)\,dx\,dt=$$

$$=\int\limits_{Q_{T,\,8(m+1)\,T\gamma}} \left(k\nabla u_m\cdot\nabla\left(v\tilde{\zeta}_m\right)+au_m\left(v\tilde{\zeta}_m\right)-u_{mt}\left(v\tilde{\zeta}_m\right)_t\right)dx\,dt=$$

$$=\int\limits_{\Pi_T} f_m v\,dx\,dt+\int\limits_{R_n}\psi_m(x)\,v(x,\ 0)\,dx.$$

Таким образом, функция $\tilde{u}_m$ удовлетворяет интегральному тождеству (16) для всех v, для которых при некотором $R_0=R_0(v)>0$ выполнено условие (4). Следовательно, функция $\tilde{u}_m$ является обобщенным решением в Π_T задачи Коши (1)—(3) с функциями $\varphi=\varphi_m$, $\psi=\psi_m$, $f=f_m$, $m=1,\ 2,\ \ldots$ Поскольку функция $\tilde{u}_{m'}-\tilde{u}_m$ (считаем, что $m'>m$) является обобщенным в Π_T решением задачи Коши (1)—(3) с функциями $\varphi=\varphi_{m'}-\varphi_m=0$ при $|x|<8mT\gamma$, $\psi=\psi_{m'}-\psi_m=0$ при $|x|<8mT\gamma$ и $f=f_{m'}-f_m=0$ в $K_{8mT,\,T}$, то в силу леммы 1 $\tilde{u}_{m'}-\tilde{u}_m=0$ в $K_{8mT,\,T}$. То есть при всех $m'\geqslant m$ $\tilde{u}_{m'}=\tilde{u}_m$ в $K_{8mT,\,T}$, а следовательно и в $Q_{T,\,(8m-1)\,T\gamma}$. Это означает, что последовательность функций $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, ... сходится п. в. в Π_T к некоторой функции u, причем для любого $R>0$ существует такое число $N=N(R)$ $\left(N(R)=1+\left[\frac{R+T\gamma}{8T\gamma}\right]\right)$, что в $Q_{T,\,R}$ $u=\tilde{u}_m=u_m$ при всех $m\geqslant N$. Из (15) и (16) вытекает, что $u|_{t=0}=\varphi$ (при любом $R>0$ для $m\geqslant N(R)$ $\varphi_m=\varphi$ в $D_{0,\,R}$ и $\varphi_m=\tilde{u}_m|_{D_{0,\,R}}=u|_{D_{0,\,R}}$) и u удовлетворяет интегральному тождеству (5) для всех v, для которых при некотором $R_0=R_0(v)>0$ выполнено условие (4).

Следовательно, u — обобщенное решение в Π_T задачи Коши (1)—(3). Таким образом, установлена

Теорема 2. *Если* $\varphi(x)\in H^1(|x|<R)$, $\psi(x)\in L_2(|x|<R)$ *и* $f\in L_2(Q_{T,\,R})$ *при любом* $R>0$, *то существует обобщенное решение в* Π_T *задачи Коши* (1)—(3).

Отметим, что доказано и следующее утверждение. Для любого $R>0$ существует такое $N=N(R)$, что обобщенное решение u задачи (1)—(3) в цилиндре $Q_{T,\,R}$ совпадает с решениями u_m смешанных задач (13) при всех $m\geqslant N$.

Рассмотрим теперь частный случай уравнения (1) — волновое уравнение ($k\equiv 1$, $a\equiv 0$ в (1))

$$u_{tt}-\Delta u=f. \tag{17}$$

Пусть при некотором целом $s>1$ $\varphi\in H^s(|x|<R)$, $\psi\in H^{s-1}(|x|<R)$, $f\in H^{s-1}(Q_{T,R})$ для любого $R>0$. Тогда по теореме 3 п. 4 предыдущего параграфа обобщенное решение

$u_m(x, t)$ смешанной задачи (13) (при $k \equiv 1$, $a \equiv 0$) принадлежит $H^s(Q_{T,8(m+1)T\gamma})$

$$\Big(\varphi_m = \zeta_m(x, 0)\,\varphi(x) \in H^s_{\mathscr{D}}(D_{0,8(m+1)T\gamma}),$$
$$\psi_m = \zeta_m(x, 0)\,\psi(x) \in H^{s-1}_{\mathscr{D}}(D_{0,8(m+1)T\gamma}),$$
$$f_m = \zeta_m f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_{T,8(m+1)T\gamma})\Big).$$

Следовательно, обобщенное в Π_T решение u задачи Коши (17), (2), (3) принадлежит $H^s(Q_{T,R})$ при любом $R > 0$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. *Если при некотором целом* $s > 1$ $\varphi \in H^s(|x| < R)$, $\psi \in H^{s-1}(|x| < R)$, $f \in H^{s-1}(Q_{T,R})$ *для любого* $R > 0$, *то обобщенное решение задачи Коши* (17), (2), (3) *принадлежит* $H^s(Q_{T,R})$ *при любом* $R > 0$.

Так как принадлежащее пространству $H^2(Q_{T,R})$ при любом $R > 0$ обобщенное решение задачи Коши является решением п. в. этой задачи, то из теоремы 3 (при $s = 2$) вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Если* $\varphi \in H^2(|x| < R)$, $\psi \in H^1(|x| < R)$, $f \in H^1(Q_{T,R})$ *для любого* $R > 0$, *то существует решение п. в. в* Π_T *задачи Коши* (17), (2), (3).

Отметим, что порядки гладкости начальных функций и правой части уравнения, гарантирующие существование обобщенного решения задачи Коши или решения п. в., не зависят (теоремы 2,4) от размерности пространства.

Пусть $s = \left[\frac{n}{2}\right] + 3$. Тогда в силу теоремы 4 п. 4 предыдущего параграфа обобщенное решение $u_m(x, t)$ смешанной задачи (13) (при $k \equiv 1$, $a \equiv 0$) является классическим решением этой задачи. Следовательно, обобщенное решение $u(x, t)$ задачи (17), (2), (3) является классическим решением задачи (17), (2), (3).

Таким образом, доказана

Теорема 5. *Если* $\varphi \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(|x| < R)$, $\psi \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(|x| < R)$, $f \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(Q_{T,R})$ *при любом* $R > 0$, *то существует классическое решение задачи Коши* (17), (2), (3).

В качестве дополнения к теоремам 4 и 5 о существовании решения п. в. и классического решения задач Коши (17), (2), (3) докажем следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть u — решение п. в. задачи* (17), (2), (3) *в* Π_T *или классическое решение этой задачи с* $f \in L_2(Q_{T,R})$ *при любом* $R > 0$. *Тогда при любом* $R > 0$ *и любом* t, $0 < t < \min(R, T)$, *имеет место неравенство*

$$E_R^{1/2}(t) \leqslant E_R^{1/2}(0) + 2^{-1/2}\sqrt{t}\,\|f\|_{L_2(K_{R,T})}, \tag{18}$$

где

$$E_R(t)=\int\limits_{D_{t,R-t}}(u_t^2+|\nabla u|^2)\,dx, \tag{19}$$

$$D_{\tau,R-\tau}=\{|x|<R-\tau,\ t=\tau\},$$

$$K_{R,\tau}=\{|x|<R-t,\ 0<t<\tau\},\ \tau\in[0,\ \min(R,\ T)].$$

Возьмем произвольное $\tau\in(0,\ \min(R,\ T))$ и проинтегрируем по усеченному конусу $K_{R,\tau}$ умноженное на u_t равенство (17)

$$\int\limits_{K_{R,\tau}}(u_{tt}u_t-u_t\Delta u)\,dx\,dt=\int\limits_{K_{R,\tau}}fu_t\,dx\,dt.$$

Согласно формуле Остроградского получим

$$\int\limits_{D_{\tau,R-\tau}}(u_t^2+|\nabla u|^2)\,dx-\int\limits_{D_{0,R}}(\psi^2+|\nabla\varphi|^2)\,dx+$$
$$+\int\limits_{\Gamma_{R,\tau}}\left[(u_t^2+|\nabla u|^2)\,n_0-2u_t\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}n_i\right]dS=2\int\limits_{K_{R,\tau}}fu_t\,dx\,dt,$$

где $\Gamma_{R,\tau}$ — боковая поверхность конуса $K_{R,\tau}$, $\Gamma_{R,\tau}=\{|x|=R-t,\ 0<t<\tau\}$, а $(n_0,\ n_1,\ \ldots,\ n_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{x_1}{\sqrt{2}(R-t)},\ \ldots,\ \frac{x_n}{\sqrt{2}(R-t)}\right)$ — вектор внешней нормали к $\Gamma_{R,\tau}$. Поскольку на $\Gamma_{R,\tau}$

$$(u_t^2+|\nabla u|^2)\,n_0-2u_t\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}n_i=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{u_tx_i}{R-t}\right)^2-2\frac{u_tx_i}{R-t}u_{x_i}+u_{x_i}^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_tx_i}{R-t}-u_{x_i}\right)^2\geqslant 0,$$

то

$$E_R(\tau)\leqslant E_R(0)+2\int\limits_{K_{R,\tau}}|f|\,|u_t|\,dx\,dt\leqslant E_R(0)+$$
$$+2\|f\|_{L_2(K_{R,\tau})}\Big(\int\limits_{K_{R,\tau}}(u_t^2+|\nabla u|^2)\,dx\,dt\Big)^{1/2}. \tag{20}$$

Так как $2|ab|=2\left|a\sqrt{2\tau}\frac{b}{\sqrt{2\tau}}\right|\leqslant 2\tau a^2+\frac{b^2}{2\tau}$, то из (20) вытекает, что для всех $t\in(0,\ \tau)$

$$E_R(t)\leqslant E_R(0)+2\tau\|f\|^2_{L_2(K_{R,\tau})}+\frac{1}{2\tau}\int\limits_{K_{R,\tau}}(u_t^2+|\nabla u|^2)\,dx\,dt.$$

Интегрируя это неравенство по $t \in (0, \tau)$, получим

$$\int\limits_{K_{R,\tau}} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\,dx\,dt \leqslant \tau E_R(0) + 2\tau^2 \|f\|^2_{L_2(K_{R,\tau})} + \frac{1}{2} \int\limits_{K_{R,\tau}} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\,dx\,dt,$$

откуда

$$\int\limits_{K_{R,\tau}} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\,dx\,dt \leqslant 2\tau E_R(0) + 4\tau^2 \|f\|^2_{L_2(K_{R,\tau})} \leqslant \left(2\sqrt{\tau}\, E_R^{1/2}(0) + 2\tau \|f\|_{L_2(K_{R,\tau})}\right)^2. \quad (21)$$

Неравенство (18) вытекает из (20) и (21). Теорема доказана.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ V

Пусть $u(x, t)$, $x = (x_1, x_2) \in R_2$, — решение (классическое) задачи Коши

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \qquad u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi \quad (1)$$

с финитными начальными функциями φ и ψ: $\varphi = \psi = 0$ при $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 > R_0^2$.

1. Показать, что функция $u(x, t)$ аналитична в конусе $\{|x| < t - R_0, t > R_0\}$

2. Доказать, что существует такая положительная постоянная C, что при всех $x \in R_2$ и $t \geqslant 0$ для решения $u(x, t)$ задачи (1) имеет место оценка

$$|u(x, t)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{t}\,\left(1 + \sqrt{|t - |x||}\right)}.$$

При этом, если $\varphi \equiv 0$ и $\psi \geqslant 0$, $\psi \not\equiv 0$, то существуют такие положительные постоянные C_0 и T, что при всех $t \geqslant T$ и $|x| \leqslant t - R_0$

$$u(x, t) \geqslant \frac{C_0}{\sqrt{t}\left(1 + \sqrt{|t - |x||}\right)}.$$

3. Показать, что для любого $R > 0$ существует такое $T > 0$, что для всех $(x, t) \in \{|x| \leqslant R, t \geqslant T\}$ решение $u(x, t)$ задачи (1) представляется в виде суммы сходящегося ряда

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m(x)}{t^{m+1}};$$

найти c_0 и c_1.

Доказать, что если для какого-нибудь круга $K_0 = \{|x - x^0| < r_0\}$ (x^0 — некоторая точка из R_2, r_0 — некоторое положительное число) и всех натуральных l $t^l u(x, t) \to 0$ равномерно по $x \in K_0$, то $u \equiv 0$.

4. Пусть $\varphi \in C^2(R_2)$, а $\psi \in C^1(R_2)$, и пусть все вторые производные функции φ и все первые производные функции ψ принадлежат классу $C^\alpha(R_2)$ (см. задачу 17 гл. III) при некотором $\alpha > 1/2$. Доказать, что тогда существует классическое решение задачи Коши (1).

5. Пусть $u(x, t)$, $x=(x_1, x_2, x_3)\in R_3$, — решение (классическое) задачи Коши

$$u_{tt}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2},$$
$$u|_{t=0}=\varphi,\quad u_t|_{t=0}=\psi, \tag{2}$$

с финитными начальными функциями φ и ψ.

Показать, что при всех $x\in R_3$ и $t>0$

$$|u(x, t)|\leqslant C/t,$$

где C — некоторая положительная постоянная.

6. Пусть функция $u(x, t)$, $x=(x_1, x_2, x_3)\in R_3$, принадлежит $C^3(Q\diagdown\{x^0, t^0\})$, где Q — некоторая область четырехмерного пространства R_4, а (x^0, t^0) — некоторая точка области Q, и удовлетворяет в $Q\diagdown\{x^0, t^0\}$ волновому уравнению (2). Доказать, что u принадлежит $C^2(Q)$ (т. е. ее можно доопределить в точке (x^0, t^0) таким образом, чтобы она стала дважды непрерывно дифференцируемой в Q).

7. Пусть функция $u(x, t)=v(x-nt)$, $x=(x_1, x_2, x_3)$, $n=(n_1, n_2, n_3)$ — постоянный вектор, принадлежит $C^3(R_4\diagdown L)$, где L — прямая, заданная уравнением $x-nt=0$, и удовлетворяет вне L волновому уравнению (2). Доказать, что если $u(x, t)=o(1/r)$, где r — расстояние от точки (x, t) до прямой L, то $u(x, t)\in C^2(R_4)$ (т. е. ее можно доопределить на L так, что она станет дважды непрерывно дифференцируемой в R_4).

8. Пусть $u(x, t)$ — классическое или обобщенное решение в $\{t>0\}$ задачи Коши для волнового уравнения

$$u_{tt}=\Delta u+f(x, t), \tag{3}$$
$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x), \tag{4}$$

и пусть $u_R(x, t)$ — классическое или соответственно обобщенное решение второй смешанной задачи для волнового уравнения в цилиндре $\{|x|<R+1,\ t>0\}$, $R>0$,

$$(u_R)_{tt}=\Delta u_R+f_R,$$
$$u_R|_{t=0}=\varphi_R,\quad u_{Rt}|_{t=0}=\psi_R,\quad \left.\frac{\partial u_R}{\partial n}\right|_{|x|=R+1}=0,$$

причем при $|x|<R$ $\varphi_R=\varphi$, $\psi_R=\psi$ и при $|x|<R$, $t<R$ $f_R=f$. Показать, что в любом цилиндре $Q_T=\{x\in D_0,\ 0<t<T\}$, где D_0 — произвольная n-мерная область, а T — произвольное положительное число, разность $u-u_R=0$ при достаточно большом R.

9. Решение первой смешанной задачи для волнового уравнения в цилиндре $Q_T=\{x\in D_0,\ 0<t<T\}$ можно определить следующим образом: функция $u(x, t)$ называется классическим решением первой смешанной задачи для волнового уравнения (3), если она принадлежит $C^2(Q_T)\cap C^1(Q_T\cup D_0)\cap C(Q_T\cup \cup\Gamma_T\cup\bar{D}_0)$, удовлетворяет в Q_T уравнению (3), на D_0 — начальным условиям (4) и на Γ_T — граничному условию

$$u|_{\Gamma_T}=\chi. \tag{5}$$

Доказать единственность такого решения.

10. Доказать существование и единственность в цилиндре $Q_T=\{x\in D_0,\ 0<t<T\}$ обобщенного решения третьей смешанной задачи (см. п. 1 § 2) для

волнового уравнения

$$u_{tt}-\Delta u=f(x,\ t),$$
$$\left\{\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x)\,u\right\}\Big|_{\Gamma_T}=0,$$
$$u\,|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t\,|_{t=0}=\psi(x)$$

($\varphi\in H^1(D_0)$, $\psi\in L_2(D_0)$, $f\in L_2(Q_T)$) в случае произвольной непрерывной на ∂D_0 функции $\sigma(x)$ (без предположения о ее неотрицательности).

11. Принадлежащая пространству $H^1(Q_T)$ функция $u(x,\ t)$ называется обобщенным решением задачи

$$u_{tt}=\Delta u,\quad (x,\ t)\in Q_T,$$
$$\left\{\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right\}\Big|_{\Gamma_T}=0,$$
$$u\,|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t\,|_{t=0}=\psi(x),$$

где $\sigma(x)\in C(\partial D_0)$, $\sigma(x)\geqslant 0$, $\varphi\in H^1(D)$, $\psi\in L_2(D)$, если она удовлетворяет начальному условию $u\,|_{t=0}=\varphi$ и интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T}(u_tv_t-\nabla u\nabla v)\,dx\,dt=\int\limits_{\Gamma_T}\sigma uv_t\,dS\,dt+\int\limits_{D_0}\psi v\,dx+\int\limits_{\partial D_0}\sigma\varphi v\,dS$$

при всех v из $C^1(\bar{Q}_T)$, для которых $v_t\in C^1(\bar{Q}_T)$ и $v\,|_{t=T}=0$.

Доказать существование и единственность обобщенного решения этой задачи.

Дополнительная литература к главе V

В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, «Наука», 1971.

Ф. Ион, Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, ИЛ, 1958.

Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1, 2, Гостехиздат, 1951.

О. А. Ладыженская, Краевые задачи математической физики, «Наука», 1973.

О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, 1953.

И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961.

И. Г. Петровский, On the diffusion of waves and lacunas for hyperbolic equations, Матем. сб. 17 (1945), 289—370.

С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, Физматгиз, 1954.

С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.

В. А. Стеклов, Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений, Изд. Харьковского ун-та, 1956.

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», 1972.

Глава VI

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе мы будем изучать задачу Коши и смешанные задачи для параболического уравнения вида

$$u_t - \operatorname{div}(k(x)\nabla u(x, t)) + a(x)u(x, t) = f(x, t).$$

Здесь $(x, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)$ — точка $(n+1)$-мерного пространства R_{n+1}, $x \in R_n$, $t \in R_1$; $\nabla v(x, t) = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)$ и $\operatorname{div}(w_1(x, t), \ldots$ $\ldots, w_n(x, t)) = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n}$; при этом под $\Delta v(x, t)$ будем понимать $\operatorname{div}\nabla v(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}$. Данные задач будем считать вещественнозначными функциями и будем рассматривать только вещественнозначные решения этих задач. В связи с этим используемые в дальнейшем функциональные пространства $C^{p,q}$, $H^{p,q}$, ... будем считать вещественными *).

§ 1. Свойства решений уравнения теплопроводности. Задача Коши для уравнения теплопроводности

1. Свойства решений уравнения теплопроводности. Рассмотрим простейшее параболическое уравнение — уравнение теплопроводности

$$\mathcal{L}u \equiv u_t - \Delta u = f(x, t). \tag{1}$$

Прежде всего построим в полупространстве $\{t > 0\} = \{x \in R_n, t > 0\}$ некоторые специальные решения однородного уравнения теплопроводности

$$\mathcal{L}u \equiv u_t - \Delta u = 0. \tag{1_0}$$

Рассмотрим сначала случай одного пространственного переменного, $n = 1$. Зависящая только от x^2/t функция $u(x, t) = w(x^2/t)$, являющаяся в $\{t > 0\}$ решением уравнения $u_t - u_{xx} = 0$, удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$4zw''(z) + (2+z)w'(z) = 0.$$

---

*) Определения пространств $C^{p,q}$ и $H^{p,q}$ даны соответственно в п. 1 и п. 2 § 7 гл. III.

Общее решение этого уравнения на полуоси $(0, \infty)$ задается формулой $c_1\int\limits_0^z e^{-\zeta/4}\zeta^{-1/2}\,d\zeta+c_2$, где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Тогда функция $c_1\int\limits_0^{x^2/t} e^{-\zeta/4}\zeta^{-1/2}\,d\zeta+c_2$ является решением уравнения (1_0) (при $n=1$) в областях $\{x>0,\ t>0\}$ и $\{x<0,\ t>0\}$.

Положим $c_2=0$, а $c_1=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}$ при $x>0$ и $c_1=-\frac{1}{4\sqrt{\pi}}$ при $x<0$. Полученная функция, как нетрудно проверить, бесконечно дифференцируема в полуплоскости $\{x\in R_1,\ t>0\}$ и, следовательно, удовлетворяет в этой полуплоскости уравнению (1_0). Тогда этому уравнению будет удовлетворять и любая производная (по x или по t) этой функции, в частности, первая производная по x — функция $U(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$.

Пусть теперь $n>1$. Для того чтобы построить в этом случае нужные нам решения уравнения (1_0), заметим, что если функции $v_i(x, t)$, $i=1, \ldots, n$, являются решениями уравнения (1_0) при $n=1$ в полуплоскости $\{x\in R_1,\ t>0\}$, то функция $v(x, t)=v_1(x_1, t)\,v_2(x_2, t)\ldots v_n(x_n, t)$ является решением уравнения (1_0) в полупространстве $\{x\in R_n,\ t>0\}$. Поэтому, в частности, решением уравнения (1_0) в полупространстве $\{t>0\}$ является функция

$$U(x, t)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\frac{x_i^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}=\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n}.$$

Отсюда следует, что если (x^0, t^0) — произвольная точка из R_{n+1}, то функция

$$U(x-x^0,\ t-t^0)=\frac{e^{-\frac{|x-x^0|^2}{4(t-t^0)}}}{(2\sqrt{\pi(t-t^0)})^n}$$

является решением уравнения (1_0) в полупространстве $\{t>t^0\}=\{x\in R_n,\ t>t^0\}$. Эта функция называется *фундаментальным решением уравнения теплопроводности* (с особенностью в точке (x^0, t^0)).

Отметим следующие свойства фундаментального решения.

Если функцию $U(x-x^0,\ t-t^0)$ продолжить нулем в полупространство $\{t<t^0\}=\{x\in R_n,\ t<t^0\}$, то полученная функция будет бесконечно дифференцируемой в $R_{n+1}\setminus\{x^0, t^0\}$.

Для всех $x^0 \in R_n$, $t > t^0$

$$\int_{R_n} U(x-x^0,\ t-t^0)\,dx = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{R_n} e^{-|\xi|^2}\,d\xi = 1. \tag{2}$$

Функция $U(x-x^0,\ t-t^0)$ как функция переменных $(x^0,\ t^0) = (x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ t^0)$ является решением уравнения

$$\mathscr{L}^*_{x^0,\,t^0} U(x-x^0,\ t-t^0) \equiv -\frac{\partial U}{\partial t^0} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^{0\,2}} = 0 \tag{1_0^*}$$

в полупространстве $\{t^0 < t\} = \{x^0 \in R_n,\ t^0 < t\}$.

Рассмотрим (ограниченную характеристиками уравнения (1)) полосу $\{0 < t < T\} = \{x \in R_n,\ 0 < t < T\}$. Как и в случае уравнения Лапласа и волнового уравнения, используя построенные специальные решения (фундаментальное решение), установим представление в этой полосе произвольной функции $u(x,\ t)$, принадлежащей $C^{2,1}(0 < t < T) \cap C(0 \leqslant t < T)$, через функции $\mathscr{L}u = u_t - \Delta u$ и $u(x,\ 0)$ — значение функции $u(x,\ t)$ на плоскости $\{t = 0\} = \{x \in R_n,\ t = 0\}$. При этом будем предполагать, что функции $u(x,\ t)$ и $\mathscr{L}u(x,\ t)$ ограничены в $\{0 < t < T\}$.

Возьмем бесконечно дифференцируемые в R_n функции $\zeta_N(x) = \zeta_N(|x|)$, $N = 1,\ 2,\ \ldots$, удовлетворяющие следующим условиям: $\zeta_N(x) \equiv 1$ при $|x| < N$, $\zeta_N(x) \equiv 0$ при $|x| > N+1$ и $|\zeta_N(x)| \leqslant C_0$, $|\nabla\zeta_N| \leqslant C_0$, $|\Delta\zeta_N| \leqslant C_0$, где постоянная C_0 не зависит от N.

Пусть $(\xi,\ \tau)$ — произвольная точка полосы $\{0 < t < T\}$. Так как функции $\zeta_N(x)\,u(x,\ t)$, $N = 1,\ 2,\ \ldots$, и $U(\xi - x,\ \tau - t)$ принадлежат $C^{2,1}(0 < t < \tau)$, то в силу (1_0^*) и соотношения

$$\mathscr{L}(u(x,\ t)\,\zeta_N(x)) = \zeta_N \mathscr{L}u - 2\nabla\zeta_N \cdot \nabla u - u\Delta\zeta_N$$

для всех $(x,\ t) \in \{0 < t < \tau\}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} U(\xi - x,\ \tau - t)\,(\zeta_N(x)\,\mathscr{L}u(x,\ t) - 2\nabla\zeta_N(x)\cdot\nabla u(x,\ t) - u(x,\ t)\,\Delta\zeta_N(x)) = \\ = U(\xi - x,\ \tau - t)\,\mathscr{L}(u(x,\ t)\,\zeta_N(x)) - u(x,\ t)\,\zeta_N(x) \times \\ \times \mathscr{L}^*_{x,\,t}(U(\xi - x,\ \tau - t)) = (u\zeta_N U)_t + \sum_{i=1}^{n} (u\zeta_N U_{x_i} - (u\zeta_N)_{x_i} U)_{x_i}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем его по цилиндру $\{|x| < N+1,\ \varepsilon < t < \tau - \varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon \in (0,\ \tau/2)$. С помощью формулы Остроградского получим

$$\int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{|x|<N+1} \zeta_N(x)\mathscr{L}u(x, t)\cdot U(\xi-x, \tau-t)\,dx =$$

$$= \int_{|x|<N+1} u(x, \tau-\varepsilon)\zeta_N(x)U(\xi-x, \varepsilon)\,dx -$$

$$- \int_{|x|<N+1} u(x, \varepsilon)\zeta_N(x)U(\xi-x, \tau-\varepsilon)\,dx +$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{N<|x|<N+1} u(x, t)\cdot\Delta\zeta_N(x)\cdot U(\xi-x, \tau-t)\,dx +$$

$$+2\int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{N<|x|<N+1} \nabla u(x, t)\cdot\nabla\zeta_N(x)\cdot U(\xi-x, \tau-t)\,dx =$$

$$= \int_{|x|<N+1} u(x, \tau-\varepsilon)\zeta_N(x)U(\xi-x, \varepsilon)\,dx -$$

$$- \int_{|x|<N+1} u(x, \varepsilon)\zeta_N(x)U(\xi-x, \tau-\varepsilon)\,dx -$$

$$- \int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{N<|x|<N+1} u(x, t)\Delta\zeta_N(x)\cdot U(\xi-x, \tau-t)\,dx -$$

$$-2\int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{N<|x|<N+1} u(x, t)\nabla\zeta_N(x)\cdot\nabla_x U(\xi-x, \tau-t)\,dx =$$

$$= I_{1,\varepsilon,N} + I_{2,\varepsilon,N} + I_{3,\varepsilon,N} + I_{4,\varepsilon,N}. \qquad (3)$$

Перейдем в равенстве (3) к пределу сначала при $N\to\infty$, а затем при $\varepsilon\to+0$.

Так как для всех $N=1, 2, \ldots$ и всех $(x, t)\in\{0<t<\tau\}$ $|\zeta_N(x)\mathscr{L}u(x, t)|\leqslant C_0\cdot\sup\limits_{\{0<t<T\}}|\mathscr{L}u|$ ($\mathscr{L}u$ ограничена в $\{0<t<T\}$), то в силу (2) для всех $t\in(0, \tau)$

$$\int_{R_n} |\zeta_N(x)\mathscr{L}u(x, t)\cdot U(\xi-x, \tau-t)|\,dx \leqslant C_0 \sup_{\{0<t<T\}} |\mathscr{L}u(x, t)|.$$

Следовательно, на основании теоремы Лебега имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty}\int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{|x|<N+1} \zeta_N(x)\mathscr{L}u(x, t)\cdot U(\xi-x, \tau-t)\,dx =$$

$$=\int_0^{\tau} dt \int_{R_n} \mathscr{L}u(x, t)\cdot U(\xi-x, \tau-t)\,dx. \qquad (4)$$

Так как для всех $N=1, 2, \ldots$ и всех $(x, t)\in\{0<t<\tau\}$ $|\zeta_N(x)u(x, t)|\leqslant C_0\cdot\sup\limits_{\{0<t<T\}}|u(x, t)|$ (u ограничена в $\{0<t<T\}$),

то для всех $t \in (0, \tau)$

$$\int_{R_n} |\zeta_N(x) u(x, t) \cdot U(\xi - x, \tau - t)| \, dx \leqslant C_0 \sup_{\{0<t<T\}} |u(x, t)|,$$

откуда

$$\lim_{N\to\infty} \int_{|x|<N+1} \zeta_N(x) u(x, \tau-\varepsilon) U(\xi - x, \varepsilon) \, dx = \\ = \int_{R_n} u(x, \tau-\varepsilon) U(\xi - x, \varepsilon) \, dx$$

и

$$\lim_{N\to\infty} \int_{|x|<N+1} \zeta_N(x) u(x, \varepsilon) U(\xi - x, \tau - t) \, dx = \\ = \int_{R_n} u(x, \varepsilon) U(\xi - x, \tau - \varepsilon) \, dx.$$

Но функция $u(x, t)$ непрерывна и ограничена в $\{0 \leqslant t \leqslant \tau\}$, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{N\to\infty} I_{1,\varepsilon,N} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{R_n} u(x, \tau-\varepsilon) U(\xi - x, \varepsilon) \, dx = \\ = \frac{1}{(\pi)^{n/2}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{R_n} u(\xi + 2\sqrt{\varepsilon}\,\eta, \tau - \varepsilon) e^{-|\eta|^2} d\eta = \\ = u(\xi, \tau) \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{R_n} e^{-|\eta|^2} d\eta = u(\xi, \tau) \quad (5)$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{N\to\infty} I_{2,\varepsilon,N} = \int_{R_n} u(x, 0) U(\xi - x, \tau) \, dx. \quad (6)$$

Так как для всех $N = 1, 2, \ldots$ и всех $(x, t) \in \{0 < t < \tau\}$ $|u(x, t) \Delta\zeta_N(x)| \leqslant C_0 \sup_{\{0<t<T\}} |u(x, t)|$, то для всех $t \in (0, \tau)$

$$\int_{R_n} |u(x, t) \Delta\zeta_N(x) \cdot U(\xi - x, \tau - t)| \, dx \leqslant C_0 \sup_{\{0<t<T\}} |u|.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{N\to\infty} |I_{3,\varepsilon,N}| \leqslant \\ \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{N\to\infty} \int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{N<|x|<N+1} |u(x, t) \Delta\zeta_N(x) \cdot U(\xi - x, \tau - t)| \, dx \leqslant \\ \leqslant C_0 \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \lim_{N\to\infty} \int_{N<|x|<N+1} |u(x, t)| U(\xi - x, \tau - t) \, dx = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим, наконец, слагаемое $I_{4,\varepsilon,N}$ в (3). Так как для всех $(x, t) \in \{0 < t < \tau\}$ и всех $N = 1, 2, \ldots$ $|\nabla\zeta_N \cdot u| \leqslant C_0 \sup\limits_{\{0<t<T\}} |u(x, t)|$, то для всех $t \in (0, \tau)$

$$\int\limits_{R_n} |u(x, t) \nabla\zeta_N(x) \cdot \nabla_x U(\xi - x, \tau - t)|\, dx \leqslant C_0 \int\limits_{R_n} |u(x, t)|\,|\nabla_x U|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \sup_{\{0<t<T\}} |u| \int\limits_{R_n} \frac{|x-\xi|\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(\tau-t)}}}{2(\tau-t)(2\sqrt{\pi(\tau-t)})^n}\, dx =$$

$$= \frac{C_0 \sup|u|}{\pi^{n/2}\sqrt{\tau-t}} \int\limits_{R_n} |\eta|\, e^{-|\eta|^2}\, d\eta = \frac{C_1}{\sqrt{\tau-t}},$$

где C_1 — не зависящая от N постоянная. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{N\to\infty} I_{4,\varepsilon,N} = 0. \tag{8}$$

Из соотношений (3)—(8) вытекает нужное представление функции u.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Если функция $u(x, t)$ принадлежит $C^{2,1}(0 < t < T) \cap C(0 \leqslant t < T)$, ограничена в $\{0 < t < T\}$ и функция $\mathscr{L}u$ ограничена в $\{0 < t < T\}$, то для любой точки (x, t) из $\{0 < t < T\}$ имеет место равенство

$$u(x, t) = \int\limits_{R_n} u(\xi, 0)\, U(x-\xi, t)\, d\xi +$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R_n} \mathscr{L}u(\xi, \tau)\, U(x-\xi, t-\tau)\, d\xi. \tag{9}$$

Используя представление (9), установим некоторые свойства решений уравнения теплопроводности.

Теорема 1. *Если функция $u(x, t)$ принадлежит $C^{2,1}(Q)$ и $\mathscr{L}u = u_t - \Delta u = 0$ в Q, где Q — некоторая область $(n+1)$-мерного пространства R_{n+1}, то $u(x, t) \in C^\infty(Q)$, и при любом t^0 функция $u(x, t^0)$ (как функция переменных $x_1, \ldots, x_n$) аналитична в $Q \cap \{t = t^0\}$.*

Пусть (x^0, t^0) — произвольная точка из Q. Будем считать, что $t^0 > 0$ (этого всегда можно добиться с помощью переноса начала координат). Возьмем такое $\delta = \delta(x^0, t^0) > 0$, что цилиндр $Q_{x^0, t^0, 2\delta} = \{|x - x^0| < 2\delta,\ |t - t^0| < 2\delta\} \Subset Q \cap \{t > 0\}$, и пусть $\zeta(x, t)$ — бесконечно дифференцируемая в R_{n+1} функция, равная 1 в $Q_{x^0, t^0, \delta} = \{|x - x^0| < \delta,\ |t - t^0| < \delta\}$ и равная нулю вне $Q_{x^0, t^0, 2\delta}$. Тогда функция $\tilde{u}(x, t)$, равная $u(x, t)\zeta(x, t)$ в $Q_{x^0, t^0, 2\delta}$ и равная нулю вне $Q_{x^0, t^0, 2\delta}$, принадлежит $C^{2,1}(0<t<T)\cap C(0\leqslant t\leqslant T)$ при $T> >t^0+2\delta$, ограничена в $\{0<t<T\}$, совпадает с функцией $u(x, t)$ в $Q_{x^0, t^0, \delta}$ и $\tilde{u}(x, 0)=0$; кроме того, функция $\mathscr{L}(\tilde{u}(x, t))$ ограничена в $\{0<t<T\}$ и $\mathscr{L}(\tilde{u})=0$ при $(x, t)\in Q_{x^0, t^0, \delta}$ и при $(x, t)\in \in\{0<t<T\}\setminus Q_{x^0, t^0, 2\delta}$. В силу (9) для всех точек $(x, t)\in Q_{x^0, t^0, \delta}$ имеем

$$u(x, t)=\int_0^t d\tau \int_{R_n} U(x-\xi, t-\tau)\mathscr{L}(\tilde{u}(\xi, \tau))\,d\xi=$$

$$=\int_{t^0-2\delta}^{t^0-\delta} d\tau \int_{|x^0-\xi|<2\delta} \frac{g(\xi, \tau)}{(t-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}\,d\xi+$$

$$+\int_{t^0-\delta}^{t} d\tau \int_{\delta<|x^0-\xi|<2\delta} \frac{g(\xi, \tau)}{(t-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}\,d\xi,$$

где $g(\xi, \tau)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n}\mathscr{L}(\tilde{u}(\xi, \tau))$.

Из этого представления немедленно вытекает, что $u(x, t)\in \in C^\infty(Q_{x^0, t^0, \delta})$. Таким образом, первое утверждение теоремы (точка (x^0, t^0) — произвольная точка области Q) доказано.

Покажем теперь, что функция

$$u(x, t^0)=\int_{t^0-2\delta}^{t^0-\delta} d\tau \int_{|x^0-\xi|<2\delta} \frac{g(\xi, \tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t^0-\tau)}}\,d\xi+$$

$$+\int_{t^0-\delta}^{t^0} d\tau \int_{\delta<|x^0-\xi|<2\delta} \frac{g(\xi, \tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t^0-\tau)}}\,d\xi=$$

$$=\int_D \frac{g(\xi, \tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t^0-\tau)}}\,d\xi\,d\tau, \qquad (10)$$

где область $D=\{|x^0-\xi|<2\delta,\ t^0-2\delta<\tau<t^0\}\setminus\{|\xi-x^0|\leqslant\delta,\ t^0-\delta\leqslant\tau\leqslant t^0\}$, аналитична в некоторой окрестности точки x^0. Для этого рассмотрим в $(3n+1)$-мерном (вещественном) пространстве R_{3n+1} переменных x, y, ξ, τ $(x=(x_1, \ldots, x_n),\ y=(y_1, \ldots, y_n),\ \xi= =(\xi_1, \ldots, \xi_n))$ область $D_1=\{|x-x^0|<\delta/4,\ |y|<\delta/4,\ (\xi, \tau)\in D\}$ и заданную в ней комплекснозначную функцию

$$G(x, y, \xi, \tau)=\frac{g(\xi, \tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{1}{4(t^0-\tau)}\sum_{k=1}^{n}(x_k+iy_k-\xi_k)^2}=$$

$$=\frac{g(\xi, \tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{+\frac{|y|^2-|x-\xi|^2}{4(t^0-\tau)}} e^{-i\frac{(x-\xi, y)}{2(t^0-\tau)}}.$$

Заметим, что при $y=0$ функция G совпадает (для $|x-x^0|<\delta/4$ $(\xi, \tau)\in D$) с подынтегральной функцией в (10).

Функция G и ее производные G_{x_k} и G_{y_k}, $k=1, \ldots, n$, очевидно, принадлежат $C(\overline{D}_1 \setminus \{\tau=t^0\})$ (здесь $\{\tau=t^0\}=\{x\in R_n,\ y\in R_n,\ \xi\in R_n,\ \tau=t^0\}$). Рассмотрим функции G, G_{x_k}, G_{y_k}, $k=1, \ldots, n$, в подобласти $D_1'=\{|x-x^0|<\delta/4,\ |y|<\delta/4,\ \delta<|\xi-x^0|<2\delta,\ t^0-\delta<\tau<t^0\}$ области D_1. Так как в D_1' $|\xi-x|=|\xi-x^0+x^0-x|\leqslant \leqslant|\xi-x^0|+|x^0-x|\leqslant 9\delta/4$, $|\xi-x|\geqslant|\xi-x^0|-|x^0-x|\geqslant 3\delta/4$ и $|y|<\delta/4$, то для всех точек (x, y, ξ, τ) из D_1'

$$|G|\leqslant\frac{g_0}{(t^0-\tau)^{n/2}}e^{-\frac{\delta^2}{8(t^0-\tau)}},$$

$$|G_{x_k}|=|G_{y_k}|\leqslant g_0\frac{|x-\xi|+|y|}{2(t^0-\tau)^{\frac{n}{2}+1}}e^{\frac{|y|^2-|x-\xi|^2}{4(t^0-\tau)}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{5g_0\delta}{4(t^0-\tau)^{\frac{n}{2}+1}}e^{-\frac{\delta^2}{8(t^0-\tau)}},\qquad k=1, \ldots, n,$$

где $g_0=\max\limits_{(\xi,\tau)\in\overline{D}}|g(\xi, \tau)|$.

Следовательно, функции G, G_{x_k}, G_{y_k}, $k=1, 2, \ldots, n$, принадлежат $C(\overline{D}_1')$ $(G(x, y, \xi, t^0)=G_{x_k}(x, y, \xi, t^0)=G_{y_k}(x, y, \xi, t^0)=0$, $k=1, \ldots, n)$ и, тем самым, принадлежат $C(\overline{D}_1)$.

Кроме того, так как функция G аналитична по каждому из переменных $x_1+iy_1, \ldots, x_n+iy_n$ (при любом $\tau<t^0$), то при каждом k, $k=1, \ldots, n$, она удовлетворяет в D_1 условию Коши — Римана

$$(\mathrm{Re}\,G)_{x_k}=(\mathrm{Im}\,G)_{y_k},\quad (\mathrm{Re}\,G)_{y_k}=-(\mathrm{Im}\,G)_{x_k}.$$

Таким образом, комплекснозначная функция

$$F(x, y)=$$
$$=\int\limits_D G(x, y, \xi, \tau)\,d\xi\,d\tau=\int\limits_D\frac{g(\xi, \tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}}e^{-\frac{1}{4(t^0-\tau)}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k+iy_k-\xi_k)^2}d\xi\,d\tau$$

непрерывно дифференцируема в области $V=\{|x-x^0|<\delta/4,\ |y|< <\delta/4\}$ пространства R_{2n}, причем для всех $(x, y)\in V$ и при любом k, $k=1, \ldots, n$,

$$(\mathrm{Re}\,F)_{x_k}=(\mathrm{Im}\,F)_{y_k},\quad (\mathrm{Re}\,F)_{y_k}=-(\mathrm{Im}\,F)_{x_k}.$$

Поэтому для любой точки (x^1, y^1) из области V функция $F(x_1^1, \ldots \ldots, x_{k-1}^1, x_k, x_{k+1}^1, \ldots, x_n^1, y_1^1, \ldots, y_{k-1}^1, y_k, y_{k+1}^1, \ldots, y_n^1)$ двух (вещественных) переменных x_k и y_k является аналитической функцией комплексного переменного x_k+iy_k в точке $x_k^1+iy_k^1$, $k=1, \ldots, n$. Легко показать*), что тогда функция $F(x, y)$ является аналитической функцией n комплексных переменных $x_1+iy_1, \ldots, x_n+iy_n$ в области V. А так как при $|x-x^0|<\delta$ функция $F(x, 0)$ совпадает с исследуемой функцией $u(x, t^0)$, то утверждение теоремы доказано.

Замечание. Удовлетворяющая в некоторой области Q пространства R_{n+1} однородному уравнению теплопроводности функция $u(x, t)$ не обязана быть аналитической по t.

Например, функция $u(x, t)$, равная $t^{-n/2}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ при $|x|>1$, $t>0$ и нулю при $|x|>1$, $t\leqslant 0$, удовлетворяет в $\{|x|>1, -\infty<t<\infty\}$ уравнению (1_0), но не является аналитической по t (конечно, она принадлежит $C^\infty(|x|>1, -\infty<t<\infty)$).

2. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Принадлежащая пространству $C^{2,1}(0<t<T)\cap C(0\leqslant t<T)$ функция $u(x, t)$ называется *решением* (*классическим решением*) *задачи Коши для уравнения* (1), если в $\{0<t<T\}$ она удовлетворяет уравнению (1), а при $t=0$ — начальному условию

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \tag{11}$$

где $f(x, t)$ и $\varphi(x)$ — заданные функции.

Прежде всего докажем следующую теорему единственности.

Теорема 2. *Задача Коши* (1), (11) *не может иметь более одного ограниченного в* $\{0<t<T\}$ *классического решения.*

Предположим, что $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — два ограниченных в $\{0<t<T\}$ классических решения задачи (1), (11). Тогда функция $u=u_1-u_2$ является ограниченным в $\{0<t<T\}$ решением однородного уравнения теплопроводности (1_0), удовлетворяющим однородному начальному условию

$$u|_{t=0}=0. \tag{11_0}$$

Следовательно, для функции u в полосе $\{0<t<T\}$ справедливо полученное в предыдущем пункте представление (9), из которого немедленно вытекает, что $u\equiv 0$ в $\{0<t<T\}$. Теорема доказана.

Обозначим через $M_\sigma=M_\sigma(T)$, $\sigma\geqslant 0$, множество всех заданных в $\{0\leqslant t<T\}$ функций $u(x, t)$, для каждой из которых существуют такие положительные постоянные A и a (зависящие от этой функции), что

$$|u(x, t)|\leqslant Ae^{a|x|^\sigma}, \quad \text{для всех} \quad (x, t)\in\{0\leqslant t<T\}.$$

*) См., например, В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, «Наука», 1964, стр. 42, или Б. В. Шабат, Введение в комплексной анализ, «Наука», 1969, стр. 273

Ясно, что множество M_σ при любом $\sigma \geqslant 0$ является линейным пространством, причем $M_\sigma \subset M_{\sigma'}$ при $\sigma \leqslant \sigma'$; M_0 есть множество всех ограниченных в $\{0 \leqslant t < T\}$ функций, а M_2 — множество всех функций, для каждой из которых существуют такие положительные постоянные A и a, что

$$|u(x,\ t)| \leqslant Ae^{a|x|^2} \quad \text{для всех} \quad (x,\ t) \in \{0 \leqslant t < T\}. \tag{12}$$

В теореме 2 установлена единственность решения задачи Коши (1), (11) в множестве ограниченных функций M_0. На самом деле, единственность решения имеет место и в M_2 и, тем самым, в любом M_σ, $0 \leqslant \sigma \leqslant 2$. А именно, имеет место следующее, обобщающее теорему 2, утверждение.

Теорема 2′. *Задача Коши* (1), (11) *не может иметь более одного решения, принадлежащего* M_2 *).

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть при некотором* $T > 0$ *в полосе* $\{0 < t < T\}$ *функция* $u(x,\ t)$ *является решением задачи* (1_0), (11_0) *и удовлетворяет неравенству* (12) *с некоторыми постоянными* $a > 0$ *и* $A > 0$. *Тогда* $u = 0$ *в полосе* $\{0 < t < T_1\}$, *где* $T_1 = \min\{T,\ 1/5a\}$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим в $\{0 < t < T_1\}$ две функции

$$w_\pm(x,\ t) = \pm u(x,\ t) + \varepsilon\left(t + \frac{1}{(T_1 - t)^{n/2}} e^{\frac{|x|^2}{4(T_1 - t)}}\right).$$

Эти функции, очевидно, принадлежат $C^{2,1}(0<t<T_1) \cap C(0 \leqslant t < T_1)$. Так как $u|_{t=0} = 0$, то для всех $x \in R_n$

$$w_\pm(x,\ 0) = \varepsilon T_1^{-n/2} e^{\frac{|x|^2}{4T_1}} > 0. \tag{13}$$

Так как $\mathscr{L}u = 0$ в $\{0<t<T_1\}$, то для всех точек $(x,\ t) \in \{0<t<T_1\}$

$$\mathscr{L}(w_\pm) = \pm \mathscr{L}(u) + \varepsilon \mathscr{L}\left(t + (T_1 - t)^{-n/2} e^{\frac{|x|^2}{4(T_1 - t)}}\right) = \varepsilon > 0. \tag{14}$$

Пусть $(x^0,\ t^0)$ — произвольная точка полосы $\{0 < t < T_1\}$. Возьмем столь большое число $R > 0$, чтобы точка $(x^0,\ t^0)$ принадлежала цилиндру $\{|x| < R,\ 0 < t < T_1\}$ и чтобы функции $w_\pm(x,\ t)$ на боковой поверхности $\{|x| = R,\ 0 < t < T_1\}$ этого цилиндра были положительными

$$w_\pm(x,\ t)|_{|x|=R} > 0, \qquad 0 < t < T_1 \tag{15}$$

(последнего всегда можно добиться, поскольку $w_\pm|_{|x|=R} =$

*) Можно показать (см. А. Н. Тихонов, Théoremès d'unicité pour l'équation de la chaleur, Матем. сб. 42 (1935), 199—216), что при любом $\sigma > 2$ в множестве M_σ решение задачи (1), (11) неединственно.

$$= \pm u|_{|x|=R} + \varepsilon\left(t + (T_1-t)^{-n/2} e^{\frac{R^2}{4(T_1-t)}}\right) \geqslant -Ae^{aR^2} + \varepsilon T_1^{-n/2} e^{\frac{R^2}{4T_1}} \geqslant$$
$$\geqslant -Ae^{aR^2} + \varepsilon (5a)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{5aR^2}{4}} \to +\infty \text{ при } R\to\infty).$$

Докажем теперь, что если некоторая функция $w(x, t)$ принадлежит $C^{2,1}(\{|x|<R,\ 0<t<T_1\}) \cap C(\{|x|\leqslant R,\ 0\leqslant t<T_1\})$ и удовлетворяет условиям

$$w(x, 0) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |x|\leqslant R, \tag{13'}$$
$$\mathscr{L}w(x, t) > 0 \quad \text{в} \quad \{|x|<R,\ 0<t<T_1\} \tag{14'}$$

и

$$w|_{|x|=R} \geqslant 0 \quad \text{для} \quad 0\leqslant t<T_1, \tag{15'}$$

то

$$w(x, t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x, t) \in \{|x|<R,\ 0<t<T_1\}. \tag{16'}$$

Предположим, напротив, что в $\{|x|<R,\ 0<t<T_1\}$ существует такая точка (x', t'), что $w(x', t')<0$. Обозначим тогда через (x'', t'') точку из $\{|x|\leqslant R,\ 0\leqslant t\leqslant t'\}$, в которой функция $w(x, t)$ $(w(x, t)\in C(\{|x|\leqslant R,\ 0\leqslant t\leqslant t'\}))$ достигает минимума, т. е.

$$w(x'', t'') = \min_{\{|x|\leqslant R,\ 0\leqslant t\leqslant t'\}} w(x, t) \leqslant w(x', t') < 0.$$

В силу (13′) и (15′) $(x'', t'')\in\{|x|<R,\ 0<t\leqslant t'\}$. Если $(x'', t'')\in$ $\in\{|x|<R,\ 0<t<t'\}$, то $\frac{\partial w(x'', t'')}{\partial t}=0$ и $\frac{\partial^2 w(x'', t'')}{\partial x_i^2}\geqslant 0$, $i=1, \ldots$ $\ldots, n$, откуда $\mathscr{L}w(x'', t'')\leqslant 0$, что противоречит (14′). Если $(x'', t'')\in\{|x|<R,\ t=t'\}$, то $\frac{\partial w(x'', t'')}{\partial t}\leqslant 0$ и $\frac{\partial^2 w(x'', t'')}{\partial x_i^2}\geqslant 0$, $i=1, \ldots, n$, откуда $\mathscr{L}w(x'', t'')\leqslant 0$, что снова противоречит (14′). Таким образом, неравенство (16′) доказано.

Так как функции $w_\pm(x, t)$ в силу (13) — (15) удовлетворяют условиям (13′) — (15′), то для всех $(x, t)\in\{|x|<R,\ 0<t<T_1\}$ имеют место неравенства $w_\pm(x, t)\geqslant 0$, откуда $w_\pm(x^0, t^0)\geqslant 0$, т. е.

$$|u(x^0, t^0)| \leqslant \varepsilon\left(t^0 + \frac{1}{(T_1-t^0)^{n/2}} e^{\frac{|x^0|^2}{4(T_1-t^0)}}\right).$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ и точки (x^0, t^0) из этого неравенства вытекает, что $u(x, t)\equiv 0$ в $\{0<t<T_1\}$. Лемма доказана.

Докажем теперь теорему 2. Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — два решения в $\{0<t<T\}$ задачи (1), (11), принадлежащих M_2. Тогда их разность $u=u_1-u_2$ является в $\{0<t<T\}$ решением задачи (1_0), (11_0) и удовлетворяет для всех $(x, t)\in\{0\leqslant t<T\}$ неравенству (12) с некоторыми постоянными $A>0$ и $a>0$.

В силу леммы 1 $u(x, t)=0$ в $\{0<t<T_1\}$, где $T_1=\min\left(T, \frac{1}{5a}\right)$. Если $T_1=T$, то утверждение теоремы доказано.

Пусть $T_1=\frac{1}{5a}<T$. Тогда в силу непрерывности функции $u(x, t)$ в $\{0<t<T\}$ $u\Big|_{t=\frac{1}{5a}}=0$. Поэтому функция $v(x, t)=u\left(x, t+\frac{1}{5a}\right)$ является в полосе $\left\{0<t<T-\frac{1}{5a}\right\}$ решением задачи (1_0), (11_0) и удовлетворяет в этой полосе неравенству (12). Согласно лемме 1 $v(x, t)=0$ в $\{0<t<T_2\}$, где $T_2=\min\left\{T-\frac{1}{5a}, \frac{1}{5a}\right\}$, откуда следует, что $u(x, t)=0$ в $\left\{0<t<T_2+\frac{1}{5a}\right\}$. Если $T_2+\frac{1}{5a}<T$ (тогда $T_2=\frac{1}{5a}$), то, повторяя это рассуждение, получим, что $u(x, t)=0$ в $\left\{0<t<2\cdot\frac{1}{5a}+T_3\right\}$, где $T_3=\min\left(T-\frac{2}{5a}, \frac{1}{5a}\right)$, и так далее. Через конечное число шагов получим, что $u=0$ в $\{0<t<T\}$. Теорема доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы существования решения задачи Коши (1), (11). Из предыдущего пункта вытекает, что если ограниченное в $\{0<t<T\}$ решение задачи (1), (11) с ограниченной в $\{0<t<T\}$ функцией $f(x, t)$ существует, то оно имеет вид

$$u(x, t)=\int\limits_{R_n} U(x-\xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_{R_n} U(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{17}$$

Поэтому доказательство существования решения естественно сводится к нахождению таких условий на функции φ и f, при которых функция $u(x, t)$, задаваемая формулой (17), является классическим решением задачи (1), (11).

Обозначим через $B(R_n)$ и $B(0<t<T)$ банаховы пространства непрерывных и ограниченных в R_n или соответственно в полосе $\{0<t<T\}$ функций с нормой $\|\varphi\|_{B(R_n)}=\sup\limits_{x\in R_n}|\varphi(x)|$ и $\|f\|_{B(0<t<T)}=$
$=\sup\limits_{(x, t)\in\{0<t<T\}}|f(x, t)|$.

Теорема 3. *Если $\varphi(x)$ принадлежит $B(R_n)$, а функции $f(x, t)$ и $f_{x_i}(x, t)$, $i=1, \ldots, n$, принадлежат $B(0<t<T)$, то существует принадлежащее $B(0<t<T)$ классическое решение $u(x, t)$ задачи* (1), (11) *и оно задается формулой* (17); *при этом*

$$\|u\|_{B(0<t<T)}\leqslant\|\varphi\|_{B(R_n)}+T\|f\|_{B(0<t<T)}. \tag{18}$$

Теорема 3 немедленно вытекает из следующих двух вспомогательных утверждений.

Лемма 2. *Если $\varphi \in B(R_n)$, то функция*

$$u_1(x, t) = \int_{R_n} U(x-\xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi \tag{19}$$

является классическим решением задачи Коши (1_0), (11) *в полупространстве* $\{t>0\}$; *при этом для всех* $x \in R_n$, $t>0$ *имеют место неравенства*

$$\inf_{x\in R_n} \varphi(x) \leqslant u_1(x, t) \leqslant \sup_{x\in R_n} \varphi(x). \tag{20}$$

Лемма 3. *Если f и f_{x_i}, $i=1, \ldots, n$, принадлежат $B(0<t<T)$, то функция*

$$u_2(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{R_n} U(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\,d\xi, \quad (x, t) \in \{0<t<T\}, \tag{21}$$

принадлежит $B(0<t<T)$ и является классическим решением задачи Коши (1), (11_0) *в полосе* $\{0<t<T\}$; *при этом*

$$\|u_2\|_{B(0<t<T)} \leqslant T\,\|f\|_{B(0<t<T)}. \tag{22}$$

Доказательство леммы 2. Для доказательства леммы 2 достаточно установить следующие свойства функции $u_1(x, t)$:

а) $u_1 \in C^{2,1}(t>0)$ и $\mathscr{L}u_1 = 0$ в $\{t>0\}$,

б) для функции u_1 имеют место неравенства (20),

в) функция u_1 принадлежит пространству $C(t \geqslant 0)$ и удовлетворяет начальному условию (11).

Возьмем произвольные числа δ и T_1, $0<\delta<T_1$. Так как для всех $x \in R_n$, $\xi \in R_n$, $t \in [\delta, T_1]$ при любых $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i=1, \ldots, n$, и $\beta \geqslant 0$

$$\left| \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} D_x^\alpha U(x-\xi, t) \right| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|\xi-x|)^{|\alpha|+2\beta} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4T_1}},$$

где $C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}(\delta)$ — некоторые положительные постоянные, то функция $u_1(x, t) \in C^\infty(\delta<t<T_1)$, причем

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} D_x^\alpha u_1(x, t) = \int_{R_n} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} D_x^\alpha U(x-\xi, t)\cdot\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Так как в полосе $\{\delta<t<T_1\}$ функция $U(x-\xi, t)$ удовлетворяет (по (x, t)) уравнению (1_0), то в этой полосе уравнению (1_0) удовлетворяет и функция $u_1(x, t)$. Следовательно, в силу произвольности чисел $\delta>0$ и $T_1>\delta$ функция $u_1(x, t)$ обладает свойством а).

Поскольку функция U неотрицательна, то согласно (2) при всех $x \in R_n$ и $t > 0$ имеем неравенства

$$u_1(x, t) \leqslant \int\limits_{R_n} U(x-\xi, t)\left(\sup_{\xi \in R_n} \varphi(\xi)\right) d\xi = \sup_{x \in R_n} \varphi(x),$$

$$u_1(x, t) \geqslant \int\limits_{R_n} U(x-\xi, t)\left(\inf_{\xi \in R_n} \varphi(\xi)\right) d\xi = \inf_{x \in R_n} \varphi(x).$$

Таким образом, установлено свойство б).

Перейдем к доказательству свойства в). Возьмем произвольную точку $x^0 \in R_n$ и покажем, что $\lim\limits_{\substack{(x, t) \to (x^0, 0) \\ (x, t) \in \{t > 0\}}} u_1(x, t) = \varphi(x^0)$. В силу (2) для любых $(x, t) \in \{t > 0\}$ и при любом $\delta > 0$ имеем

$$u_1(x, t) - \varphi(x^0) = \int\limits_{R_n} U(x-\xi, t)(\varphi(\xi) - \varphi(x^0))\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{|\xi - x^0| \leqslant \delta} U(x-\xi, t)(\varphi(\xi) - \varphi(x^0))\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_{|\xi - x^0| > \delta} U(x-\xi, t)(\varphi(\xi) - \varphi(x^0))\, d\xi = I_{1,\delta} + I_{2,\delta}. \qquad (23)$$

Так как функция φ непрерывна в точке x^0, то по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ (его мы и возьмем в равенстве (23)), что $|\varphi(\xi) - \varphi(x^0)| < \varepsilon/2$, как только $|\xi - x^0| < \delta$. Поэтому

$$|I_{1,\delta}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{|x^0 - \xi| \leqslant \delta} U(x-\xi, t)\, d\xi \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{R_n} U(x-\xi, t)\, d\xi = \varepsilon/2. \qquad (24)$$

Пусть $|x - x^0| < \delta/2$; тогда при $|\xi - x^0| > \delta$ имеем $|x - \xi| = |x - x^0 + x^0 - \xi| \geqslant |x^0 - \xi| - |x - x^0| > \delta - \delta/2 = \delta/2$. Поэтому

$$|I_{2,\delta}| \leqslant \int\limits_{|x^0 - \xi| > \delta} \frac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{8t}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{8t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n} (|\varphi(\xi)| + |\varphi(x^0)|)\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\|\varphi\|_{B(R_n)}}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\delta^2}{32t}} \int\limits_{|x^0 - \xi| > \delta} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{8t}}\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\|\varphi\|_{B(R_n)}}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\delta^2}{32t}} \int\limits_{R_n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{8t}}\, d\xi = \text{const}\, e^{-\frac{\delta^2}{32t}} \leqslant \varepsilon/2, \qquad (25)$$

если только $t \in (0, \delta_0)$ при достаточно малом δ_0. Таким образом, из (23)—(25) получаем, что для всех точек (x, t) полупространства $\{t > 0\}$, для которых $|x - x^0|^2 + t^2 < \min(\delta_0^2, \delta^2/4)$, $|u_1(x, t) - \varphi(x^0)| < \varepsilon$. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Представим функцию $u_2(x, t)$ (см. (21)) в виде

$$u_2(x, t)=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int_0^t d\tau\int_{R_n} e^{-|\xi|^2}f(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\,d\xi, \qquad (26)$$
$$(x, t)\in\{0<t<T\}.$$

Для доказательства леммы достаточно проверить, что

а) $u_2(x, t)\in C(0\leqslant t<T)$, $u_2(x, 0)=0$,

б) имеет место неравенство (22),

в) $u_2(x, t)\in C^{2,1}(0<t<T)$ и $\mathscr{L}u_2=f$ в $\{0<t<T\}$.

Так как функция $f(x, t)$ ограничена в $\{0<t<T\}$, то $\left|e^{-|\xi|^2}f(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\right|\leqslant e^{-|\xi|^2}\|f\|_{B(0<t<T)}$ и, следовательно (f непрерывна), функция

$$g(x, t, \tau)=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{R_n} e^{-|\xi|^2}f(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\,d\xi$$

непрерывна и ограничена на множестве $\{x\in R_n,\ 0<t<T,\ 0<\tau\leqslant t\}$ и $g(x, t, t)=f(x, t)$, $|g(x, t, \tau)|\leqslant\|f\|_{B(0<t<T)}$. Поэтому функция $u_2(x, t)=\int_0^t g(x, t, \tau)\,d\tau$ принадлежит $C(0\leqslant t<T)$, $u_2|_{t=0}=0$ и $\|u_2\|_{B(0<t<T)}\leqslant T\|f\|_{B(0<t<T)}$. Свойства а) и б) доказаны.

Поскольку функция $f(x, t)$ имеет в $\{0<t<T\}$ непрерывные производные $f_{x_i}(x, t)$, $i=1, \ldots, n$, и $|f|+|\nabla f|\leqslant\mathrm{const}$ в $\{0<t<T\}$, то функция $g(x, t, \tau)$ имеет непрерывные производные $g_{x_i}(x, t, \tau)$, $i=1, \ldots, n$, на множестве $\{x\in R_n,\ 0<t<T,\ 0<\tau\leqslant t\}$. Следовательно, функция $u_2(x, t)$ имеет непрерывные на $\{0\leqslant t<T\}$ производные $u_{2x_i}(x, t)$, $i=1, \ldots, n$, причем

$$u_{2x_i}(x, t)=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int_0^t d\tau\int_{R_n} e^{-|\xi|^2}f_{x_i}(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\,d\xi=$$
$$=\frac{1}{2\pi^{n/2}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{R_n} e^{-|\xi|^2}f_{\xi_i}(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\,d\xi=$$
$$=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{R_n} e^{-|\xi|^2}\xi_i f(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\,d\tau,\quad i=1, \ldots, n. \qquad (27)$$

Так как при любом $j=1, \ldots, n$

$$\left|e^{-|\xi|^2}\xi_j f_{x_j}(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\right|\leqslant|\xi|\,e^{-|\xi|^2}\|f_{x_j}\|_{B(0<t<T)},$$

то функции $\int\limits_{R_n} e^{-|\xi|^2}\xi_j f(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\,d\xi$ имеют первые производные по всем $x_1, \ldots, x_n$, непрерывные и ограниченные на множестве $\{x\in R_n,\ 0<t<T,\ 0<\tau\leqslant t\}$. Из (27) тогда вытекает, что функция $u_2(x,\ t)$ имеет все производные по $x_1, \ldots, x_n$ до второго порядка включительно, непрерывные в $\{0\leqslant t<T\}$. Причем

$$\Delta u_2(x,\ t)=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{R_n} e^{-|\xi|^2}\sum_{i=1}^n \xi_i f_{x_i}(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\,d\xi. \qquad (28)$$

Далее, для произвольных точек $(x,\ t)$ и $(x,\ t+\Delta t)$, $\Delta t>0$, принадлежащих $\{0<t<T\}$,

$$\frac{u_2(x,\ t+\Delta t)-u_2(x,\ t)}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} g(x,\ t+\Delta t,\ \tau)\,d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t \frac{g(x,\ t+\Delta t,\ \tau)-g(x,\ t,\ \tau)}{\Delta t}\,d\tau=I_1(\Delta t)+I_2(\Delta t). \qquad (29)$$

В силу непрерывности по τ функции $g(x,\ t+\Delta t,\ \tau)$ на отрезке $[t,\ t+\Delta t]$ $I_1(\Delta t)=g(x,\ t+\Delta t,\ t+\theta\Delta t)$, где $\theta=\theta(x,\ t,\ \Delta t)$, $0\leqslant\theta\leqslant 1$. Следовательно,

$$\lim_{\Delta t\to+0} I_1(\Delta t)=g(x,\ t,\ t)=f(x,\ t). \qquad (30)$$

Так как функция f имеет непрерывные и ограниченные в $\{0<t<T\}$ производные по $x_1, \ldots, x_n$, то функция $g(x,\ t,\ \tau)$ имеет непрерывную в $\{x\in R_n,\ 0<t<T,\ 0<\tau<t\}$ производную по t:

$$g_t(x,\ t,\ \tau)=\frac{1}{\pi^{n/2}\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{R_n} e^{-|\xi|^2}\sum_{i=1}^n \xi_i f_{x_i}(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\,d\xi,$$

причем $|g_t(x,\ t,\ \tau)|\leqslant \mathrm{const}/\sqrt{t-\tau}$. Тогда

$$\left|\frac{g(x,\ t+\Delta t,\ \tau)-g(x,\ t,\ \tau)}{\Delta t}\right|\leqslant\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}|g_{t'}(x,\ t',\ \tau)|\,dt'\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{dt'}{\sqrt{t'-\tau}}\leqslant \mathrm{const}/\sqrt{t-\tau}.$$

Поэтому (на основании теоремы Лебега)

$$\lim_{\Delta t\to+0} I_2(\Delta t)=$$
$$=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{R_n} e^{-|\xi|^2}\sum_{i=1}^n \xi_i f_{x_i}(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\,d\xi. \qquad (31)$$

Из (28) — (31) следует, что

$$\lim_{\Delta t\to+0}\frac{u_2(x,\ t+\Delta t)-u_2(x,\ t)}{\Delta t}=f(x,\ t)+\Delta u_2(x,\ t). \qquad (32)$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\Delta t\to-0}\frac{u_2(x,\ t+\Delta t)-u_2(x,\ t)}{\Delta t}=-\lim_{\Delta t\to-0}\frac{1}{\Delta t}\int_{t+\Delta t}^{t} g(x,\ t,\ \tau)\,d\tau+$$
$$+\lim_{\Delta t\to-0}\int_0^{t+\Delta t}\frac{g(x,\ t+\Delta t,\ \tau)-g(x,\ t,\ \tau)}{\Delta t}\,d\tau=f(x,\ t)+\Delta u_2(x,\ t). \qquad (32')$$

Следовательно, функция $u_2(x,\ t)$ имеет непрерывную в $\{0<t<T\}$ производную по t, равную $f+\Delta u_2$. Лемма доказана.

В теореме 3 установлено существование классического решения задачи Коши (1), (11) при любых ограниченных φ из $C(R_n)$ и любых ограниченных f из $C(0<t<T)$, для которых непрерывны и ограничены в $\{0<t<T\}$ все производные первого порядка по пространственным переменным. Возникает вопрос: не достаточно ли для разрешимости задачи Коши (1), (11) предположить относительно функции f лишь ее непрерывность и ограниченность? Условие существования (ограниченных) производных по пространственным переменным у функции f, действительно, является завышенным: можно доказать, что для разрешимости задачи (1), (11) достаточно предположить, что (непрерывная и ограниченная) функция $f(x,\ t)$ удовлетворяет по пространственным переменным условию Гёльдера, т. е. что для любой точки $(x,\ t)$ из $\{0<t<T\}$ существуют такие постоянные $M>0$, $\alpha>0$ (зависящие от этой точки), что $|f(x',\ t)-f(x,\ t)|\leqslant M|x'-x|^\alpha$ для всех $x'\in R_n$. Однако, если функция f только непрерывна (и ограничена) в $\{0<t<T\}$, то задача (1), (11), как показывает следующий пример, может не иметь (классического) решения.

Пусть $\zeta=\zeta(|x|)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая в R_n функция, равная 1 для $|x|<1/2$ и нулю для $|x|>3/4$. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\mathscr{L}u=u_t-\Delta u=f_0(x), \qquad (33)$$
$$u|_{t=0}=\varphi_0(x), \qquad (34)$$

где

$$f_0(x) = -\frac{x_1^2-x_2^2}{2|x|^2}\zeta(|x|)((n+2)(-\ln|x|)^{-1/2}+\frac{1}{2}(-\ln|x|)^{-3/2})+ \\ +\frac{x_1^2-x_2^2}{|x|}\zeta'(|x|)((n+3)(-\ln|x|)^{1/2}-(-\ln|x|)^{-1/2})+ \\ +(x_1^2-x_2^2)\zeta''(|x|)(-\ln|x|)^{1/2},$$

а

$$\varphi_0(x) = (x_1^2-x_2^2)\zeta(|x|)(-\ln|x|)^{1/2}.$$

Функция $f_0(x) \in C(R_n) \cap C^\infty(|x|>0)$ равна нулю при $|x|>3/4$ и, тем самым, ограничена в R_n. Начальная функция $\varphi_0(x) \in C^1(R_n) \cap C^\infty(|x|>0)$ равна нулю при $|x|>3/4$ и, тем самым, ограничена в R_n. Непосредственно проверяется (ср. с соответствующим примером для уравнения Пуассона, гл. IV, § 3, п. 3), что ограниченная функция $u(x,t) \equiv \varphi_0(x)$ (она не зависит от t) удовлетворяет при $|x|>0$ уравнению (33). Кроме того, функция $u(x,t)$, очевидно, удовлетворяет начальному условию (34).

Однако функция $u(x,t) \equiv \varphi_0(x)$ не принадлежит $C^{2,1}(0<t<T)$ ни при каком $T>0$, поскольку, например, $\lim\limits_{|x|\to 0} u_{x_1x_1}(x,t)=\infty$. Следовательно, эта функция не является решением задачи (33), (34).

Докажем, что задача (33), (34) вообще не имеет решения ни в какой полосе $\{0<t<T\}$. Пусть, напротив, существует решение $v(x,t)$ задачи (33), (34) в полосе $\{0<t<T\}$ при некотором $T>0$. Тогда функция $w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)=\varphi_0(x)-v(x,t) \in C^{2,1}(\{|x|>0,\ 0<t<T\})$ и удовлетворяет на множестве $\{|x|>0, 0<t<T\}$ однородному уравнению теплопроводности (1_0). Кроме того, так как $\varphi_0 \in C^1(R_n)$, $w(x,t) \in C^1(T/2 \leqslant t<T)$. Таким образом, $w(x,t) \in C^{2,1}(\{0<|x|\leqslant 1,\ T/2\leqslant t<T\}) \cap C^1(\{|x|\leqslant 1,\ T/2\leqslant t<T\})$ и $w_t-\Delta w=0$ для всех точек (x,t) из $\{0<|x|<1,\ T/2<t<T\}$.

Покажем, что тогда функция $w(x,t)$ должна принадлежать пространству $C^{2,1}(\{|x|<1,\ T/2<t<T\})$, чего быть не может, поскольку функция $v \in C^{2,1}(\{|x|<1,\ T/2<t<T\})$, а функция $u(x,t)=\varphi_0(x) \notin C^{2,1}(\{|x|<1,\ T/2<t<T\})$.

Итак, пусть $w(x,t) \in C^{2,1}(\{0<|x|\leqslant 1,\ T/2\leqslant t<T\}) \cap C^1(\{|x|\leqslant 1, T/2\leqslant t<T\})$ и $\mathscr{L}w=0$ в $\{0<|x|<1, T/2<t<T\}$. Покажем, что $w(x,t) \in C^{2,1}(\{|x|<1,\ T/2<t<T\})$. Доказательство этого утверждения в известном смысле повторяет рассуждения, примененные в п. 1 при установлении представления (9).

Возьмем произвольную точку (ξ,τ) из $\{0<|x|<1,\ T/2<t<T\}$ и произвольное $\varepsilon \in (0,\ \tau-T/2)$. На множестве $\{0<|x|<1,\ T/2<t<\tau\}$ имеет место равенство

$$(w(x,t)U(\xi-x,\ \tau-t))_t+\sum_{i=1}^n (wU_{x_i}-w_{x_i}U)_{x_i}= \\ =U(\xi-x,\ \tau-t)\mathscr{L}w(x,t)-w(x,t)\mathscr{L}^*_{x,t}U(\xi-x,\ \tau-t)=0.$$

Проинтегрируем его по $\{\delta<|x|<1,\ T/2<t<\tau-\varepsilon\}$, где δ — произвольное число из интервала $(0, |\xi|)$. С помощью формулы Остроградского получим

$$\int\limits_{\delta<|x|<1} w(x,\ \tau-\varepsilon)\, U(\xi-x,\ \varepsilon)\, dx = \int\limits_{\delta<|x|<1} w(x,\ T/2)\ \times$$
$$\times\, U(\xi-x,\ \tau-T/2)\, dx - \int\limits_{T/2}^{\tau-\varepsilon} dt \int\limits_{|x|=1} \left(w(x,\ t)\, \frac{\partial U(\xi-x,\ \tau-t)}{\partial n_x} -\right.$$
$$\left.- \frac{\partial w(x,\ t)}{\partial n}\, U(\xi-x,\ \tau-t)\right) dS_x - \int\limits_{T/2}^{\tau-\varepsilon} dt \int\limits_{|x|=\delta} \left(w(x,\ t)\ \times\right.$$
$$\left.\times\, \frac{\partial U(\xi-x,\ \tau-t)}{\partial n_x} - \frac{\partial w(x,\ t)}{\partial n}\, U(\xi-x,\ \tau-t)\right) dS_x =$$
$$= I_{1,\,\delta} + I_{2,\,\varepsilon} + I_{3,\,\varepsilon,\,\delta}. \qquad (35)$$

Перейдем в (35) к пределу сначала при $\varepsilon \to 0$, а затем при $\delta \to 0$. Возьмем произвольное δ_0, $0<\delta_0<\min(1-|\xi|,\ |\xi|-\delta)$. Тогда

$$\int\limits_{\delta<|x|<1} w(x,\ \tau-\varepsilon)\, U(\xi-x,\ \varepsilon)\, dx =$$
$$= \int\limits_{|x-\xi|<\delta_0} w(x,\ \tau-\varepsilon)\, U(\xi-x,\ \varepsilon)\, dx +$$
$$+ \int\limits_{\{\delta<|x|<1\}\cap\{|x-\xi|\geqslant\delta_0\}} w(x,\ \tau-\varepsilon)\, U(\xi-x,\ \varepsilon)\, dx.$$

Поскольку на множестве $\{\delta<|x|<1\} \cap \{\delta_0 \leqslant |x-\xi|\}$

$$|w(x,\ \tau-\varepsilon)\ U\ (\xi-x,\ \varepsilon)| \leqslant \max|w(x,\ t)|\exp\left(-\frac{\delta_0^2}{4\varepsilon}\right)\Big/ (2\sqrt{\pi\varepsilon})^n,$$

то при $\varepsilon\to 0$ $\displaystyle\int\limits_{\{\delta<|x|<1\}\cap\{|x-\xi|\geqslant\delta_0\}} w(x,\ \tau-\varepsilon)\, U(\xi-x,\ \varepsilon)\, dx \to 0.$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\delta<|x|<1} w(x,\ \tau-\varepsilon)\, U(\xi-x,\ \varepsilon)\, dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x-\xi|<\delta_0} w(x,\ \tau-\varepsilon)\, U(\xi-x,\ \varepsilon)\, dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{|\eta|<\frac{\delta_0}{2\sqrt{\varepsilon}}} w(\xi+2\eta\sqrt{\varepsilon},\ \tau-\varepsilon)\, e^{-|\eta|^2}\, d\eta = w(\xi,\ \tau),$$

и следовательно,

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\delta<|x|<1} w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx = w(\xi,\ \tau). \tag{36}$$

Далее, очевидно,

$$\lim_{\delta\to 0} I_{1,\,\delta} = \int\limits_{|x|<1} w(x,\ T/2)\,U(\xi-x,\ \tau-T/2)\,dx, \tag{37}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{2,\,\varepsilon} = \int\limits_{T/2}^{\tau} dt \int\limits_{|x|<1}\left(w(x,\ t)\frac{\partial U(\xi-x,\ \tau-t)}{\partial n_x} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial w(x,\ t)}{\partial n}\,U(\xi-x,\ \tau-t)\right) dS_x, \tag{38}$$

и поскольку $w\in C^1(\{|x|\leqslant 1,\ T/2\leqslant t\leqslant\tau\})$, то

$$\lim_{\delta\to 0}\ \lim_{\varepsilon\to 0} I_{3,\,\varepsilon,\,\delta} = 0. \tag{39}$$

Из соотношений (35)—(39) вытекает, что для любой точки $(x,\ t)$ из $\{0<|x|<1,\ T/2<t<T\}$ имеет место равенство

$$w(x,\ t) = \int\limits_{|\xi|<1} w(\xi,\ T/2)\,U(x-\xi,\ t-T/2)\,d\xi -$$

$$- \int\limits_{T/2}^{t} d\tau \int\limits_{|\xi|=1}\left(w(\xi,\ \tau)\frac{\partial U(x-\xi,\ t-\tau)}{\partial n_\xi} - \frac{\partial w(\xi,\ \tau)}{\partial n}\,U(x-\xi,\ t-\tau)\right) dS_\xi,$$

из которого немедленно следует, что w принадлежит $C^\infty(\{|x|<1,\ T/2<t<T\})$ и, тем более, $C^{2,1}(\{|x|<1,\ T/2<t<T)\}$. Утверждение доказано.

§ 2. Смешанные задачи

1. Единственность решения. Пусть D — ограниченная область n-мерного пространства R_n $(x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ — точка этого пространства). Так же как и в случае смешанных задач для гиперболических уравнений, рассмотрим в $(n+1)$-мерном пространстве $R_{n+1}=R_n\times\times\{-\infty<t<+\infty\}$ ограниченный цилиндр $Q_T=\{x\in D,\ 0<t<T\}$ высоты $T>0$, и пусть Γ_T — боковая поверхность этого цилиндра: $\Gamma_T=\{x\in\partial D,\quad 0<t<T\}$, а D_τ, $\tau\in[0,\ T]$, — множество $\{x\in D,\ t=\tau\}$, в частности, $D_0=\{x\in D,\ t=0\}$ — нижнее основание цилиндра Q_T, а $D_T=\{x\in D,\ t=T\}$ — его верхнее основание.

Рассмотрим в цилиндре Q_T при некотором $T>0$ параболическое уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv u_t - \operatorname{div}(k(x)\,\nabla u) + a(x)\,u = f(x,\ t), \tag{1}$$

где $k(x)\in C^1(\bar{Q}_T)$, $a(x)\in C(\bar{Q}_T)$, $k(x)\geqslant k_0=\mathrm{const}>0$.

Функция $u(x, t)$, принадлежащая пространству $C^{2,1}(Q_T)\cap$ $\cap C(Q_T\cup\Gamma_T\cup\bar D_0)$ *), удовлетворяющая в Q_T уравнению (1), на D_0 — начальному условию

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \tag{2}$$

а на Γ_T — граничному условию

$$u|_{\Gamma_T}=\chi,$$

называется *классическим решением первой смешанной задачи для уравнения* (1).

Функция $u(x, t)$, принадлежащая пространству $C^{2,1}(Q_T)\cap$ $\cap C(Q_T\cup\Gamma_T\cup\bar D_0)\cap C^{1,0}(Q_T\cup\Gamma_T)$, удовлетворяющая в Q_T уравнению (1), на D_0 — начальному условию (2), а на Γ_T — граничному условию

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x)u\right)\Big|_{\Gamma_T}=\chi,$$

где $\sigma(x)$ — непрерывная на Γ_T функция, называется *классическим решением третьей смешанной задачи для уравнения* (1).

Если $\sigma\equiv 0$, то третья смешанная задача называется *второй смешанной задачей*

Так как случай неоднородных граничных условий легко сводится к случаю однородных граничных условий, то в дальнейшем мы будем рассматривать однородные граничные условия

$$u|_{\Gamma_T}=0 \tag{3}$$

и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x)u\right)\Big|_{\Gamma_T}=0. \tag{4}$$

Будем считать, что коэффициент $a(x)$ в уравнении (1) неотрицателен в Q_T, а функция $\sigma(x)$ в граничном условии (4) неотрицательна на Γ_T.

Лемма 1. *Пусть $f(x, t)\in L_2(Q_T)$, и пусть $u(x, t)$ — классическое решение третьей (второй) смешанной задачи* (1), (2), (4) *или принадлежащее $C^{1,0}(Q_T\cup\Gamma_T)$ классическое решение первой смешанной задачи* (1)—(3). *Тогда $u(x, t)\in H^{1,0}(Q_T)$* **).

Возьмем произвольные $\tau\in(0, T)$ и $\varepsilon\in(0, \tau)$ и проинтегрируем умноженное на u равенство (1) по цилиндру $Q_{\varepsilon,\tau}=\{x\in D,$ $\varepsilon<t<\tau\}$. Так как в Q_T $uu_t=\frac{1}{2}(u^2)_t$, $u\operatorname{div}(k\nabla u)=\operatorname{div}(ku\nabla u)$ —

*) Определение пространств $C^{p,q}$ см. в п.1, § 7, гл. III

**) Пространства $H^{r,0}(Q_T)$ введены в п. 2 § 7 гл. III. Там же рассмотрены и свойства элементов этого пространства.

$-k|\nabla u|^2$, а $\frac{1}{2}(u^2)_t-\operatorname{div}(ku\nabla u)=fu-au^2-k|\nabla u|^2\in L_1(Q_{\varepsilon,\tau})$, то согласно формуле Остроградского имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}u^2\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{D_\varepsilon}u^2\,dx+\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}k|\nabla u|^2\,dx\,dt+\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}au^2\,dx\,dt-\\-\int\limits_{\Gamma_{\varepsilon,\tau}}ku\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt=\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}fu\,dx\,dt,$$

где $\Gamma_{\varepsilon,\tau}=\{x\in\partial D,\ \varepsilon<t<\tau\}$, откуда в случае, когда $u(x,t)$ — решение первой смешанной задачи,

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}u^2\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{D_\varepsilon}u^2\,dx+\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}k|\nabla u|^2\,dx\,dt+\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}au^2\,dx\,dt=\\=\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}fu\,dx\,dt,$$

а в случае, когда $u(x,t)$ — решение третьей (второй) смешанной задачи,

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}u^2\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{D_\varepsilon}u^2\,dx+\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}k|\nabla u|^2\,dx\,dt+\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}au^2\,dx\,dt+\\+\int\limits_{\Gamma_{\varepsilon,\tau}}k\sigma u^2\,dS\,dt=\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}fu\,dx\,d\tau.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}u^2\,dx+k_0\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}|\nabla u|^2\,dx\,dt\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}u^2\,dx+\\+\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}k(x)|\nabla u|^2\,dx\,dt\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{D_\varepsilon}u^2\,dx+\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}|f||u|\,dx\,dt\leqslant\\\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{D_\varepsilon}u^2\,dx+\|u\|_{L_2(Q_{\varepsilon,\tau})}\|f\|_{L_2(Q_T)}.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon\to 0$. В результате получим, что

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}u^2\,dx\leqslant\frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L_2(D)}+\|u\|_{L_2(Q_\tau)}\|f\|_{L_2(Q_T)}\tag{5}$$

и

$$k_0\int\limits_{Q_\tau}|\nabla u|^2\,dx\,dt\leqslant\frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L_2(D)}+\|u\|_{L_2(Q_\tau)}\|f\|_{L_2(Q_T)}.\tag{6}$$

Возьмем произвольное $t \in (0, T)$ и проинтегрируем неравенство (5) по $\tau \in (0, t)$

$$\int_0^t \int_{D_\tau} u^2\,dx\,d\tau \leqslant T\|\varphi\|^2_{L_2(D)} + 2T\|u\|_{L_2(Q_t)}\|f\|_{L_2(Q_T)} \leqslant$$
$$\leqslant T\|\varphi\|^2_{L_2(D)} + 2T^2\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2(Q_t)},$$

откуда вытекает, что для любого $t \in (0, T)$

$$\|u\|^2_{L_2(Q_t)} \leqslant 2T\|\varphi\|^2_{L_2(D)} + 4T^2\|f\|^2_{L_2(Q_T)} = C_0^2.$$

Следовательно, $u \in L_2(Q_T)$ и

$$\|u\|_{L_2(Q_T)} \leqslant C_0. \tag{7}$$

Тогда из (6) имеем

$$\||\nabla u|\|^2_{L_2(Q_\tau)} \leqslant \frac{1}{2k_0}\|\varphi\|^2_{L_2(D)} + \frac{C_0}{k_0}\|f\|_{L_2(Q_T)}$$

при любом $\tau \in (0, T)$. Следовательно, $|\nabla u| \in L_2(Q_T)$. Лемма доказана.

Замечание. Из неравенств (5) и (7) немедленно вытекает, что для классического решения третьей (второй) смешанной задачи (1), (2), (4) и для принадлежащего $C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ классического решения первой смешанной задачи (1)—(3) имеет место оценка

$$\|u\|_{L_2(D_\tau)} \leqslant C_1, \quad \tau \in (0, T), \tag{8}$$

где постоянная C_1 зависит только от T, $\|\varphi\|_{L_2(D)}$ и $\|f\|_{L_2(Q_T)}$.

Пусть u является классическим решением третьей (второй) смешанной задачи (1), (2), (4) или принадлежащим $C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ классическим решением первой смешанной задачи (1)—(3), причем функция $f(x, t) \in L_2(Q_T)$. Умножим (1) на произвольную функцию $v(x, t)$, принадлежащую $C^1(\bar{Q}_T)$ и удовлетворяющую условию

$$v|_{D_T} = 0, \tag{9}$$

и проинтегрируем полученное равенство по цилиндру $Q_{\varepsilon,\tau}$, где τ — произвольное число из $(0, T)$, а ε — произвольное число из $(0, \tau)$. Согласно формуле Остроградского получим

$$\int_{Q_{\varepsilon,\tau}} (-uv_t + k\nabla u\nabla v + auv)\,dx\,dt - \int_{\Gamma_{\varepsilon,\tau}} kv\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt + \int_{D_\tau} uv\,dx =$$
$$= \int_{D_\varepsilon} uv\,dx + \int_{Q_{\varepsilon,\tau}} fv\,dx\,dt. \tag{10}$$

Если u — решение первой смешанной задачи, то предположим дополнительно, что

$$v|_{\Gamma_T}=0. \tag{11}$$

В этом случае равенство (10) примет вид

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} (-uv_t+k\nabla u\nabla v+auv)\,dx\,dt+\int\limits_{D_\tau} uv\,dx= \\ =\int\limits_{D_\varepsilon} uv\,dx+\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} fv\,dx\,dt. \tag{10'}$$

Если u — решение третьей (второй) смешанной задачи, то равенство (6) имеет вид

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} (-uv_t+k\nabla u\nabla v+auv)\,dx\,dt+\int\limits_{\Gamma_{\varepsilon,\tau}} k\sigma uv\,dS\,dt+\int\limits_{D_\tau} uv\,dx= \\ =\int\limits_{D_\varepsilon} uv\,dx+\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} fv\,dx\,dt. \tag{10''}$$

В силу леммы 1 $u\in H^{1,0}(Q_T)$ и, следовательно (см. § 7 гл. III), $u|_{\Gamma_T}\in L_2(\Gamma_T)$. Используя (8) и (9), перейдем в равенствах (10′) и (10″) к пределу при $\varepsilon\to 0$ и $\tau\to T$. В результате получим следующие утверждения.

Принадлежащее $C^{1,0}(Q_T\cup\Gamma_T)$ классическое решение $u(x, t)$ первой смешанной задачи удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (-uv_t+k\nabla u\nabla v+auv)\,dx\,dt=\int\limits_{D_0}\varphi v\,dx+\int\limits_{Q_T} fv\,dx\,dt \tag{12}$$

для всех v из $C^1(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющих условиям (9) и (11), а следовательно, и *для всех v из $H^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям* (9) *и* (11).

Классическое решение $u(x, t)$ третьей (второй при $\sigma=0$) смешанной задачи удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (-uv_t+k\nabla u\nabla v+auv)\,dx\,dt+\int\limits_{\Gamma_T} k\sigma uv\,dS\,dt= \\ =\int\limits_{D_0}\varphi v\,dx+\int\limits_{Q_T} fv\,dx\,dt \tag{13}$$

для всех v из $C^1(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющих условию (9), а следовательно, и *для всех v из $H^1(Q_T)$, удовлетворяющих условию* (9).

С помощью полученных тождеств введем понятия обобщенных решений рассматриваемых смешанных задач. Будем предполагать, что $f(x, t)\in L_2(Q_T)$, а $\varphi(x)\in L_2(D)$.

Принадлежащая пространству $H^{1,0}(Q_T)$ функция $u(x, t)$ называется *обобщенным решением первой смешанной задачи* (1)—(3), если она удовлетворяет граничному условию (3) и тождеству (12) для всех $v(x, t)$ из $H^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям (9) и (11).

Принадлежащая пространству $H^{1,0}(Q_T)$ функция $u(x, t)$ называется *обобщенным решением третьей* (*второй при* $\sigma=0$) *смешанной задачи* (1), (2), (4), если она удовлетворяет тождеству (13) при всех $v(x, t)$ из $H^1(Q_T)$, удовлетворяющих условию (9).

Наряду с классическим и обобщенным решениями смешанных задач можно ввести понятие решения п. в.

Функция $u(x, t)$ называется *решением п. в. первой смешанной задачи* (1) — (3) *или третьей* (*второй при* $\sigma=0$) *смешанной задачи* (1), (2), (4), если она принадлежит пространству $H^{2,1}(Q_T)$, удовлетворяет для почти всех $(x, t) \in Q_T$ уравнению (1), удовлетворяет начальному условию (2) и одному из граничных условий (3) или (4) соответственно.

Выше было показано, что классическое решение третьей (второй) смешанной задачи (1), (2), (4) и принадлежащее $C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ классическое решение первой смешанной задачи (1)—(3) являются обобщенными решениями соответствующих смешанных задач. Аналогично доказывается, что решение п. в. первой, второй или третьей смешанной задачи является обобщенным решением соответствующей задачи. Легко также установить, что если обобщенное решение первой смешанной задачи (1)—(3) или третьей (второй) смешанной задачи (1), (2), (4) принадлежит $H^{2,1}(Q_T)$, то оно является решением п. в. этой задачи, если же обобщенное решение в случае задачи (1)—(3) принадлежит $C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T \cup \bar{D}_0)$, а в случае задачи (1), (2), (4) принадлежит $C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T \cup \cup \bar{D}_0) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$, то оно является классическим решением (ср. п. 1 § 2 гл. V, где приведены доказательства соответствующих утверждений для решений смешанных задач для гиперболического уравнения).

Отметим еще, что обобщенное решение смешанной задачи для параболического уравнения, так же как и классическое решение и решение п. в., обладает следующим свойством: если $u(x, t)$ есть обобщенное решение смешанной задачи (1)—(3) или задачи (1), (2), (4) в цилиндре Q_T, то оно является обобщенным решением соответствующей задачи и в цилиндре $Q_{T'}$ при любом T', $0 < T' < T$. Доказательство этого утверждения тоже совершенно аналогично доказательству соответствующего утверждения для решений смешанных задач для гиперболического уравнения.

Установим теперь теоремы единственности решений смешанных задач.

Теорема 1. *Первая смешанная задача* (1)—(3) *не может иметь более одного обобщенного решения.*

Третья (*вторая*) *смешанная задача* (1), (2), (4) *не может иметь более одного обобщенного решения.*

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы единственности обобщенных решений смешанных задач для гиперболического уравнения (теорема 1 п.1 § 2 гл. V).

Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — два обобщенных решения задачи (1)—(3) или задачи (1), (2), (4). Тогда функция $u=u_1-u_2$ является обобщенным решением соответствующей задачи при $f=0$ и $\varphi=0$. Нам нужно показать, что $u=0$ в Q_T.

Рассмотрим в Q_T функцию

$$v(x, t)=\int_t^T u(x, \theta)\,d\theta.$$

Непосредственно проверяется, что функция v имеет в Q_T обобщенные производные

$$v_t=-u,$$
$$v_{x_i}=\int_t^T u_{x_i}(x, \theta)\,d\theta, \quad i=1, \ldots, n.$$

Так как, очевидно, функции v, v_t и v_{x_i}, $i=1, \ldots, n$, принадлежат $L_2(Q_T)$, то $v\in H^1(Q_T)$. При этом $v|_{D_T}=0$, $v|_{\Gamma_T}=\int_t^T u|_{\Gamma_T}\,d\theta$, и, в частности, если u — обобщенное решение первой смешанной задачи, то $v|_{\Gamma_T}=0$. Подставим функцию v в тождество (12), если u — решение задачи (1)—(3), или в тождество (13), если u — решение задачи (1), (2), (4). Тогда в случае первой смешанной задачи получим равенство

$$\int_{Q_T}\left(u^2(x, t)+k\nabla u(x,t)\cdot\int_t^T \nabla u(x, \theta)\,d\theta-av(x, t)\,v_t(x, t)\right)dx\,dt=0, \tag{14}$$

а в случае третьей (второй) смешанной задачи — равенство

$$\int_{Q_T}\left(u^2(x, t)+k(x)\nabla u(x, t)\cdot\int_t^T \nabla u(x, \theta)\,d\theta-avv_t\right)dx\,dt+$$
$$+\int_{\Gamma_T} k\sigma u(x, t)\int_t^T u(x, \theta)\,d\theta\,dS\,dt=0. \tag{14'}$$

Так как (см. доказательство теоремы 1 п. 1 § 2 гл. V)

$$\int_{Q_T} k\nabla u(x, t)\int_t^T \nabla u(x, \theta)\,d\theta\,dx\,dt=\frac{1}{2}\int_D k\left|\int_0^T \nabla u(x, t)\,dt\right|^2 dx\geqslant 0,$$
$$\int_{\Gamma_T} k\sigma u(x, t)\int_t^T u(x, \theta)\,d\theta\,dS\,dt=\frac{1}{2}\int_{\partial D} k\sigma\left(\int_0^T u(x, t)\,dt\right)^2 dS\geqslant 0$$

и

$$\int_{Q_T} avv_t dx\, dt = -\frac{1}{2}\int_{D_0} av^2 dx \leqslant 0,$$

то из (14) и (14′) имеем

$$\int_{Q_T} u^2(x, t)\, dx\, dt \leqslant 0,$$

откуда вытекает, что $u \equiv 0$ в Q_T. Теорема доказана.

Поскольку решение п. в. смешанной задачи (1)—(3) или смешанной задачи (1), (2), (4) является и обобщенным решением соответствующей задачи, то из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Первая смешанная задача* (1) — (3) *не может иметь более одного решения п. в.*

Третья (*вторая*) *смешанная задача* (1), (2), (4) *не может иметь более одного решения п. в.*

Из теоремы 1 вытекает также следующее утверждение.

Следствие 2. *Третья (вторая) смешанная задача* (1), (2), (4) *не может иметь более одного классического решения.*

Действительно, пусть u_1 и u_2 — два классических решения задачи (1), (2), (4). Тогда их разность является классическим решением задачи (1), (2), (4) с $\varphi = 0$ и $f = 0 \in L_2(Q_T)$. Следовательно, $u_1 - u_2$ является обобщенным решением и в силу теоремы 1 равно нулю.

Установим теперь теорему единственности классического решения первой смешанной задачи.

Теорема 2. *Первая смешанная задача* (1) — (3) *не может иметь более одного классического решения.*

Пусть u_1 и u_2 — два классических решения в цилиндре Q_T первой смешанной задачи (1) — (3). Тогда функция $u = u_1 - u_2$ принадлежит $C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T \cup \bar{D}_0)$, удовлетворяет в Q_T однородному уравнению

$$\mathcal{L}u = u_t - \operatorname{div}(k \nabla u) + au = 0, \tag{1_0}$$

на Γ_T — граничному условию (3) и на D_0 — однородному начальному условию

$$u|_{t=0} = 0. \tag{2_0}$$

Покажем, что $u(x, t)$ равно нулю в Q_T.

Предположим, что существует такая точка $(x^0, t^0) \in Q_T$, что $u(x^0, t^0) \neq 0$. Будем считать, что $u(x^0, t^0) > 0$ (если $u(x^0, t^0) < 0$, то вместо функции u рассмотрим функцию $-u$, для нее выполнено (1_0), (2_0) и (3) и $-u(x^0, t^0) > 0$).

Обозначим $u(x^0, t^0)$ через M и рассмотрим функцию

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{M}{2t^0}(t - t^0).$$

Прежде всего отметим, что

$$\mathscr{L}v = -\frac{M}{2t^0} < 0 \text{ для всех } (x, t) \in Q_T. \qquad (15)$$

Так как $v \in C(\bar{Q}_{t^0})$, то в $\bar{Q}_{t^0}$ существует точка (x^1, t^1), в которой функция $v(x, t)$ достигает своего максимального значения; при этом, поскольку $v(x^0, t^0) = u(x^0, t^0) = M$, то $v(x^1, t^1) \geqslant \geqslant v(x^0, t^0) = M$.

Точка (x^1, t^1) не может принадлежать множеству $\bar{\Gamma}_{t^0} \cup D_0$, так как $v|_{\Gamma_T} = u|_{\Gamma_T} - \frac{M}{2t^0}(t - t^0) = \frac{M}{2t^0}(t^0 - t) \leqslant \frac{M}{2}$ и $v|_{D_0} = u|_{D_0} + \frac{M}{2} = \frac{M}{2}$. Следовательно, точка (x^1, t^1) должна принадлежать множеству $Q_{t^0} \cup D_{t^0}$. Пусть она принадлежит Q_{t^0}. Тогда $v_t(x^1, t^1) = 0$, $v_{x_i}(x^1, t^1) = 0$ и $v_{x_i x_i}(x^1, t^1) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. То есть $\mathscr{L}v(x^1, t^1) = v_t(x^1, t^1) - k(x^1)\Delta v(x^1, t^1) - \nabla k(x^1)\nabla v(x^1, t^1) + a(x^1) \times v(x^1, t^1) \geqslant 0$, а это противоречит (15). Если же $(x^1, t^1) \in D_{t^0}$, то $v_t(x^1, t^1) \geqslant 0$, $v_{x_i}(x^1, t^1) = 0$ и $v_{x_i x_i}(x^1, t^1) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. То есть снова $\mathscr{L}v(x^1, t^1) \geqslant 0$. Теорема доказана.

2. Существование обобщенного решения. Перейдем теперь к доказательству существования решений задач (1)—(3) и (1), (2), (4). Для этого так же, как и в гиперболическом случае, воспользуемся методом Фурье.

Пусть $v(x)$ — обобщенная собственная функция первой краевой задачи

$$\operatorname{div}(k(x)\nabla v) - av = \lambda v, \quad x \in D, \qquad (16)$$
$$v|_{\partial D} = 0$$

или третьей (второй при $\sigma = 0$) краевой задачи

$$\operatorname{div}(k(x)\nabla v) - av = \lambda v, \quad x \in D,$$
$$\left.\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \sigma(x)v\right)\right|_{\partial D} = 0 \qquad (17)$$

(λ — соответствующее собственное значение). Это означает, что в случае первой краевой задачи v принадлежит $\mathring{H}^1(D)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_D (k\nabla v\nabla\eta + av\eta)\,dx + \lambda\int_D v\eta\,dx = 0$$

при всех $\eta \in \mathring{H}^1(D)$, а в случае третьей (второй) краевой задачи $v \in H^1(D)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_D (k\nabla v\nabla\eta + av\eta)\,dx + \int_{\partial D} k\sigma v\eta\,dS + \lambda\int_D v\eta\,dx = 0$$

при всех $\eta \in H^1(D)$.

Рассмотрим ортонормированную в $L_2(D)$ систему $v_1, v_2, \ldots$, состоящую из всех обобщенных собственных функций задачи (16) или соответственно задачи (17); $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — последовательность соответствующих собственных значений; последовательность собственных значений, как обычно, считаем невозрастающей, причем каждое собственное значение повторяется в этой последовательности столько раз, какова его кратность. Как было показано в § 1 гл. IV, система $v_1, v_2, \ldots$ является ортономированным базисом в $L_2(D)$ и $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$. В случае первой, третьей при $\sigma \not\equiv 0$ на ∂D и второй при $a \not\equiv 0$ в D краевых задач (напомним, что $a(x) \geqslant 0$ в D и $\sigma(x) \geqslant 0$ на ∂D) первое собственное значение $\lambda_1 < 0$, т. е. $0 > \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots$ Если $a \equiv 0$ в D, то в случае второй краевой задачи $0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \ldots$.

Предположим, что начальная функция φ в (2) принадлежит $L_2(D)$, а функция $f \in L_2(Q_T)$. Согласно теореме Фубини $f(x, t) \in L_2(D_t)$ для п. в. $t \in (0, T)$. Функцию φ и функцию $f(x, t)$ для п. в. значений $t \in (0, T)$ разложим в ряды Фурье по системе $v_1, v_2, \ldots$ обобщенных собственных функций задачи (16), если рассматривается задача (1), (2), (3), или задачи (17), если рассматривается задача (1), (2), (4):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k(x), \\ f(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) v_k(x), \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\varphi_k = (\varphi, v_k)_{L_2(D)}, \quad f_k(t) = (f(x, t), v_k(x))_{L_2(D)}, \tag{19}$$

причем функции $f_k(t)$ принадлежат $L_2(0, T)$. Согласно равенству Парсеваля — Стеклова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 = \|\varphi\|^2_{L_2(D)} \tag{20}$$

и для п. в. $t \in (0, T)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(t) = \int_D f^2(x, t)\, dx,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(t)\, dt = \int_{Q_T} f^2(x, t)\, dx\, dt. \tag{20'}$$

Рассмотрим для любого $k = 1, 2, \ldots$ принадлежащую $H^1(0, T)$ функцию

$$U_k(t) = \varphi_k e^{\lambda_k t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{\lambda_k (t-\tau)}\, d\tau, \tag{21}$$

удовлетворяющую п. в. на $(0, T)$ уравнению

$$U_k' - \lambda_k U_k = f_k, \tag{22}$$

и удовлетворяющую ($H^1(0, T) \subset C([0, T])$) условию

$$U_k(0) = \varphi_k. \tag{22'}$$

Легко (как и в гиперболическом случае) проверить, что функция

$$u_k(x, t) = U_k(t)\, v_k(x)$$

является обобщенным решением первой, если $v_k(x)$ — собственная функция задачи (16), или третьей (второй), если $v_k(x)$ — собственная функция задачи (17), смешанной задачи для уравнения

$$u_t - \operatorname{div}(k\nabla u) + au = f_k(t)\, v_k(x)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi_k v_k(x).$$

Следовательно, если в качестве начальной функции в (2) и правой части в уравнении (1) взять частичные суммы рядов (18) $\sum\limits_{k=1}^{N} \varphi_k v_k(x)$ и $\sum\limits_{k=1}^{N} f_k(t)\, v_k(x)$, то обобщенным решением задачи (1) — (3) или соответственно задачи (1), (2), (4) будет функция

$$S_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} U_k(t)\, v_k(x).$$

В частности, в случае первой смешанной задачи $S_N(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (-S_N v_t + k\nabla S_N \cdot \nabla v + aS_N v)\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{D_0} \sum_{k=1}^{N} \varphi_k v_k(x)\, v(x, 0)\, dx + \int\limits_{Q_T} \sum_{k=1}^{N} f_k(t)\, v_k(x)\, v(x, t)\, dx\, dt \tag{23}$$

при всех v из $H^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям (9) и (11), а в случае третьей (второй) смешанной задачи — интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (-S_N v_t + k\nabla S_N \cdot \nabla v + aS_N v)\, dx\, dt + \int\limits_{\Gamma_T} k\sigma S_N v\, dS\, dt =$$

$$= \int\limits_{D_0} \sum_{k=1}^{N} \varphi_k v_k(x)\, v(x, 0)\, dx + \int\limits_{Q_T} \sum_{k=1}^{N} f_k(t)\, v_k(x)\, v(x, t)\, dx\, dt \tag{23'}$$

при всех v из $H^1(Q_T)$, удовлетворяющих условию (9).

Покажем, что обобщенное решение задачи (1) — (3) или задачи (1), (2), (4) задается рядом

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)\, v_k(x), \tag{24}$$

где в случае задачи (1) — (3) $v_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, — собственные функции задачи (16), а в случае задачи (1), (2), (4) $v_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, — собственные функции задачи (17).

Теорема 3. *Если $f \in L_2(Q_T)$ и $\varphi \in L_2(D)$, то каждая из смешанных задач* (1), (2), (3) *или* (1), (2), (4) *имеет обобщенное решение u. Это решение представляется сходящимся в $H^{1,0}(Q_T)$ рядом* (24). *При этом имеет место неравенство*

$$\|u\|_{H^{1,0}(Q_T)} \leqslant C\left(\|\varphi\|_{L_2(D)}+\|f\|_{L_2(Q_T)}\right), \tag{25}$$

в котором постоянная $C>0$ не зависит от φ и f.

Из формулы (21) вытекает, что для всех $t \in [0, T]$

$$|U_k(t)| \leqslant |\varphi_k|\, e^{\lambda_k t}+\int_0^t |f_k(\tau)|\, e^{\lambda_k (t-\tau)}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant |\varphi_k|\, e^{\lambda_k t}+\frac{\|f_k\|_{L_2(0,\, T)}}{\sqrt{2|\lambda_k|}} \quad \text{при} \quad k>1$$

и

$$|U_1(t)| \leqslant |\varphi_1|+C_1\|f_1\|_{L_2(0,\, T)},$$

где $C_1=\sqrt{T}$ в случае второй смешанной задачи при $a \equiv 0$, в остальных случаях $C_1=1/\sqrt{2|\lambda_1|}$. Поэтому для всех $t \in [0, T]$

$$U_k^2(t) \leqslant 2\varphi_k^2 e^{2\lambda_k t}+\frac{1}{|\lambda_k|}\|f_k\|^2_{L_2(0,\, T)} \quad \text{при} \quad k>1 \tag{26}$$

и

$$U_1^2(t) \leqslant 2\varphi_1^2+2C_1^2\|f_1\|^2_{L_2(0,\, T)}. \tag{26'}$$

Рассмотрим частичную сумму $S_N(x, t)$ ряда (24). При каждом $t \in [0, T]$ она принадлежит пространству $\mathring{H}^1(D_t)$ в случае первой смешанной задачи или пространству $H^1(D_t)$ в случае третьей (второй) смешанной задачи.

При исследовании задачи (1) — (3) удобно ввести в пространстве $\mathring{H}^1(D_t)$ скалярное произведение

$$\int_{D_t} (k\nabla u \nabla v+a u v)\, dx.$$

При исследовании задачи (1), (2), (4) введем в пространстве $H^1(D_t)$ скалярное произведение

$$\int_{D_t} (k\nabla u \nabla v+a u v)\, dx+\int_{\partial D_t} k\sigma u v\, dS,$$

если или $a \not\equiv 0$ в D, или $\sigma \not\equiv 0$ на ∂D, и скалярное произведение

$$\int_{D_t} (k\nabla u \nabla v + uv)\, dx,$$

если $a \equiv 0$ в D и $\sigma \equiv 0$ на ∂D. Поскольку в случае первой и третьей при $\sigma \not\equiv 0$ смешанных задач и в случае второй смешанной задачи при $a \not\equiv 0$ системы функций $v_1/\sqrt{-\lambda_1}$, $v_2/\sqrt{-\lambda_2}$, ..., ортонормированы в соответствующих скалярных произведениях, а в случае второй смешанной задачи при $a \equiv 0$ ортонормирована система функций $v_1/\sqrt{1-\lambda_1}$, $v_2/\sqrt{1-\lambda_2}$, ..., то для всех $t \in [0, T]$ и любых M и N, $1 \leqslant M < N$, в силу (26) имеем

$$\| S_N(x, t) - S_M(x, t)\|^2_{H^1(D_t)} = \left\| \sum_{k=M+1}^{N} U_k(t)\, v_k(x) \right\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=M+1}^{N} U_k^2(t)\, |\lambda_k| \leqslant \sum_{k=M+1}^{N} \left(2e^{2\lambda_k t} \varphi_k^2 |\lambda_k| + \int_0^T f_k^2(t)\, dt \right),$$

в случае первой смешанной задачи и в случае второй или третьей смешанных задач, если или $a \not\equiv 0$ в D, или $\sigma(x) \not\equiv 0$ на ∂D,

$$\| S_N(x, t) - S_M(x, t)\|^2_{H^1(D_t)} = \sum_{k=M+1}^{N} U_k^2(t)\,(1 + |\lambda_k|) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=M+1}^{N} \left[2e^{2\lambda_k t} \varphi_k^2 (1 + |\lambda_k|) + \frac{1+|\lambda_k|}{|\lambda_k|} \int_0^T f_k^2(t)\, dt \right] \leqslant$$
$$\leqslant 2\,\frac{1+|\lambda_2|}{|\lambda_2|} \sum_{k=M+1}^{N} \left[e^{2\lambda_k t} (1 + |\lambda_k|)\, \varphi_k^2 + \int_0^T f_k^2(t)\, dt \right],$$

если $a \equiv 0$ в D и $\sigma \equiv 0$ на ∂D. То есть в обоих случаях имеет место неравенство

$$\| S_N(x, t) - S_M(x, t)\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sum_{k=M+1}^{N} \left(\varphi_k^2 e^{2\lambda_k t} (1 + |\lambda_k|) + \int_0^T f_k^2(t)\, dt \right). \quad (27)$$

Наряду с этим неравенством в силу (26′) справедливо при всех $t \in [0, T]$ и любых $N \geqslant 1$ и неравенство

$$\| S_N(x, t)\|^2_{H^1(D_t)} = \left\| U_1 v_1 + \sum_{k=2}^{N} U_k v_k \right\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \sum_{k=1}^{N} \left(\varphi_k^2 e^{2\lambda_k t} (1 + |\lambda_k|) + \int_0^T f_k^2(t)\, dt \right). \quad (28)$$

Интегрируя по $t \in (0, T)$ неравенства (27) и (28), получим

$$\| S_N - S_M \|^2_{H^{1,0}(Q_T)} \leqslant C_3 \sum_{k=M+1}^{N} \left(\varphi_k^2 + \int_0^T f_k^2(t)\, dt \right), \tag{29}$$

$$\| S_N \|^2_{H^{1,0}(Q_T)} \leqslant C_4 \sum_{k=1}^{N} \left(\varphi_k^2 + \int_0^T f_k^2(t)\, dt \right). \tag{30}$$

В силу (20) и (20′) ряд с общим членом $\varphi_k^2 + \int_0^T f_k^2(t)\, dt$ сходится. Поэтому из (29) вытекает, что ряд (24) сходится в $H^{1,0}(Q_T)$ и, следовательно, его сумма $u(x, t)$ принадлежит $H^{1,0}(Q_T)$ и удовлетворяет в случае первой смешанной задачи граничному условию (3). Переходя к пределу при $N \to \infty$ в тождестве (23) в случае первой задачи или в тождестве (23′) в случае третьей (второй) задачи, получим, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет тождеству (12) или тождеству (13) соответственно. Следовательно, $u(x, t)$ — обобщенное решение. Неравенство (25) вытекает из (30), если в нем перейти к пределу при $N \to \infty$ и воспользоваться равенствами (20) и (20′). Теорема доказана.

Отметим, что, так же как и в гиперболическом случае, существование обобщенных решений рассматриваемых смешанных задач может быть проведено с помощью метода Галёркина.

3. Гладкость обобщенных решений смешанных задач. Существование решения п.в. и классического решения. При исследовании гладкости обобщенных решений ограничимся рассмотрением первой и второй (в граничном условии (4) $\sigma \equiv 0$) смешанных задач для частного случая уравнения (1) — уравнения теплопроводности (в (1) $k \equiv 1$, $a \equiv 0$), хотя при достаточной гладкости коэффициентов и функции σ тем же методом устанавливаются аналогичные результаты и в общем случае.

Пусть $u(x, t)$ — обобщенное решение первой или второй смешанной задачи для уравнения теплопроводности:

$$u_t - \Delta u = f, \tag{31}$$

$$u|_{t=0} = \varphi \tag{32}$$

и или

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \tag{33}$$

в случае первой смешанной задачи, или

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma_T} = 0 \tag{34}$$

в случае второй смешанной задачи.

Напомним (см. п. 4 § 2 гл. IV), что если граница ∂D области D принадлежит классу C^r при некотором $r \geqslant 1$, то обобщенные собственные функции $v_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, первой и второй краевых задач для оператора Лапласа принадлежат пространствам $H^r_{\mathscr{D}}(D)$ и $H^r_{\mathscr{N}}(D)$ соответственно, т. е. принадлежат $H^r(D)$ и удовлетворяют на ∂D в случае первой краевой задачи граничным условиям

$$v_k\Big|_{\partial D}=\ldots=\Delta^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}v_k\Big|_{\partial D}=0,\quad k=1,2,\ldots,$$

а в случае второй краевой задачи при $r>1$ — граничным условиям

$$\frac{\partial v_k}{\partial n}\Big|_{\partial D}=\ldots=\frac{\partial}{\partial n}\Delta^{\left[\frac{r}{2}\right]-1}v_k\Big|_{\partial D}=0,\qquad k=1,2,\ldots;$$

при $r=1$ $H^r_{\mathscr{N}}(D)=H^1_{\mathscr{N}}(D)=H^1(D)$.

Обозначим через $\tilde H^{2l,l}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ при целом $l\geqslant 1$ подпространство пространства $H^{2l,l}(Q_T)$ (см. п. 2 § 7 гл. III), состоящее из всех функций f из $H^{2l,l}(Q_T)$, для которых

$$f\,|\,\Gamma_T=\ldots=\Delta^{l-1}f\,|\,\Gamma_T=0;$$

под $\tilde H^{2l,l}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ при $l=0$ будем понимать пространство $L_2(Q_T)$: $\tilde H^{0,0}_{\mathscr{D}}(Q_T)=H^{0,0}(Q_T)=L_2(Q_T)$.

Через $\tilde H^{2l,l}_{\mathscr{N}}(Q_T)$ при целом $l\geqslant 1$ обозначим подпространство пространства $H^{2l,l}(Q_T)$, состоящее из всех функций f из $H^{2l,l}(Q_T)$, для которых

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\Gamma_T}=\ldots=\frac{\partial}{\partial n}\Delta^{l-1}f\Big|_{\Gamma_T}=0;$$

под $\tilde H^{2l,l}_{\mathscr{N}}(Q_T)$ при $l=0$ будем понимать пространство $L_2(Q_T)$: $\tilde H^{0,0}_{\mathscr{N}}(Q_T)=L_2(Q_T)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть при некотором* $s\geqslant 1$ $\partial D\in C^{2s}$ *и в случае первой смешанной задачи* (31) — (33) $\varphi\in H^{2s-1}_{\mathscr{D}}(D)$, $f\in\tilde H^{2(s-1),(s-1)}_{\mathscr{D}}(Q_T)$, *а в случае второй смешанной задачи* (31), (32), (34) $\varphi\in H^{2s-1}_{\mathscr{N}}(D)$, $f\in\tilde H^{2(s-1),(s-1)}_{\mathscr{N}}(Q_T)$. *Тогда обобщенное решение* $u(x,t)$ *каждой из этих задач принадлежит пространству* $H^{2s,s}(Q_T)$ *и ряд* (24) *сходится к нему в* $H^{2s,s}(Q_T)$. *При этом имеет место неравенство*

$$\|u\|_{H^{2s,s}(Q_T)}\leqslant C\left(\|\varphi\|_{H^{2s-1}(D)}+\|f\|_{H^{2(s-1),s-1}(Q_T)}\right),\tag{35}$$

в котором положительная постоянная C *не зависит от* φ *и* f.

Заметим, что в условии теоремы 4 кроме требований гладкости заданных функций предполагается выполнение условий

$$\varphi|_{\partial D} = \ldots = \Delta^{s-1}\varphi|_{\partial D} = 0$$

и

$$f|_{\Gamma_T} = \ldots = \Delta^{s-2} f|_{\Gamma_T} = 0$$

в случае первой смешанной задачи и выполнение условий

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\partial D} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{s-2}\varphi|_{\partial D} = 0$$

и

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{s-2} f|_{\Gamma_T} = 0$$

в случае второй смешанной задачи. Для справедливости утверждения теоремы 4 о сходимости ряда (24) в $H^{2s,s}(Q_T)$ к обобщенному решению соответствующей смешанной задачи эти условия необходимы. Однако если интересоваться только гладкостью обобщенного решения (а не сходимостью к нему ряда Фурье), то, как и в случае гиперболических уравнений (см. теорему 3′ п. 4 § 2 гл. V), эти условия можно существенно ослабить; как и в случае гиперболических уравнений, они могут быть заменены условиями согласования функций φ и f на ∂D_0.

Доказательство теоремы 4. В силу леммы 2 п. 4 § 2 гл. V, функции $f_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, заданные формулой (19), принадлежат пространству $H^{s-1}(0, T)$ (и, тем самым, при $s \geqslant 2$ — пространству $C^{s-2}([0, T])$). Следовательно, удовлетворяющие на $(0, T)$ уравнениям (22) функции $U_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, заданные формулой (21), принадлежат пространству $H^s(0, T)$, а значит, и пространству $C^{s-1}([0, T])$. Тогда в силу свойств собственных функций $v_k(x)$ частичные суммы $S_N(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{N} U_k(t)\, v_k(x)$ ряда (24) принадлежат пространству $\tilde{H}^{2s,s}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ и при всех $t \in [0, T]$ пространству $H^{2s}_{\mathscr{D}}(D_t)$ в случае первой, или пространству $\tilde{H}^{2s,s}_{\mathscr{N}}(Q_T)$ и при всех $t \in [0, T]$ пространству $H^{2s}_{\mathscr{N}}(D_t)$ в случае второй смешанной задачи. Кроме того, при $p = 1, \ldots, s$ функции $\frac{\partial^p S_N}{\partial t^p}$ принадлежат пространству $H^{2(s-p),\, s-p}(Q_T)$ и при всех $t \in [0, T]$ пространству $H^{2s}_{\mathscr{D}}(D_t)$ в случае первой или пространству $H^{2s}_{\mathscr{N}}(D_t)$ в случае второй смешанной задачи. Поэтому на основании леммы 3 п. 5 § 2, гл. IV и ортогональности в $L_2(D_t)$ собственных функций $v_k(x)$ имеем при всех $t \in [0, T]$, любых $p = 0, \ldots, s$ и любых M и N, $1 \leqslant M < N$, неравенства

$$\left\|\frac{\partial^p S_N}{\partial t^p}-\frac{\partial^p S_M}{\partial t^p}\right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)}\leqslant$$

$$\leqslant C_1\left\|\Delta^{s-p}\frac{\partial^p}{\partial t^p}(S_N-S_M)\right\|^2_{L_2(D_t)}=$$

$$=C_1\left\|\sum_{k=M+1}^{N}|\lambda_k|^{s-p}\frac{d^pU_k}{dt^p}v_k(x)\right\|^2_{L_2(D_t)}=$$

$$=C_1\sum_{k=M+1}^{N}|\lambda_k|^{2(s-p)}\left(\frac{d^pU_k}{dt^p}\right)^2 \quad (36)$$

Аналогично, при всех $t\in[0, T]$, любых $p=0, \ldots, s$ и любых $N\geqslant 1$

$$\left\|\frac{\partial^p S_N}{\partial t^p}\right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)}\leqslant C_1\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^{2(s-p)}\left(\frac{d^pU_k}{dt^p}\right)^2$$

в случае первой смешанной задачи ($\lambda_1\neq 0$) и

$$\left\|\frac{\partial^p S_N}{\partial t^p}\right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)}=\left\|\frac{\partial^p(U_1v_1)}{\partial t^p}+\frac{\partial^p(S_N-S_1)}{\partial t^p}\right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)}\leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\frac{d^pU_1}{dt^p}\right)^2\left\|\frac{1}{\sqrt{|D|}}\right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)}+2\left\|\frac{\partial^p(S_N-S_1)}{\partial t^p}\right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)}\leqslant$$

$$\leqslant C_2\left(\left(\frac{d^pU_1}{dt^p}\right)^2+\sum_{k=2}^{N}|\lambda_k|^{2(s-p)}\left(\frac{d^pU_k}{dt^p}\right)^2\right)$$

в случае второй смешанной задачи ($\lambda_1=0$). Таким образом, в обоих случаях при всех $t\in[0, T]$, $p=0, \ldots, s$, $N\geqslant 1$

$$\left\|\frac{\partial^p S_N}{\partial t^p}\right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)}\leqslant C_3\left(\left(\frac{d^pU_1}{dt^p}\right)^2+\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^{2(s-p)}\left(\frac{d^pU_k}{dt^p}\right)^2\right). \quad (37)$$

Интегрируя по $t\in(0, T)$ и суммируя по p, $p=0, \ldots, s$, неравенства (36), получим

$$\|S_N-S_M\|^2_{H^{2s,\,s}(Q_T)}\leqslant C_1\sum_{p=0}^{s}\sum_{k=M+1}^{N}|\lambda_k|^{2(s-p)}\left\|\frac{d^pU_k}{dt^p}\right\|^2_{L_2(0,\,T)}. \quad (38)$$

Аналогично из неравенств (37) получаем неравенства

$$\|S_N\|^2_{H^{2s,\ s}(Q_T)} \leqslant C_3 \sum_{p=0}^{s} \left(\left\| \frac{d^pU_1}{dt^p} \right\|^2_{L_2(0,\ T)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{2(s-p)} \left\| \frac{d^pU_k}{dt^p} \right\|^2_{L_2(0,\ T)} \right). \quad (39)$$

Воспользуемся далее следующей леммой, доказательство которой будет приведено позднее.

Лемма 2. *Пусть при некотором* $q \geqslant 0$ $\partial D \in C^{2q+2}$ *в случае первой смешанной задачи* (31) — (33) $\varphi \in H^{2q+1}_{\mathscr{D}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{2q,\ q}_{\mathscr{D}}(Q_T)$, *а в случае второй смешанной задачи* (31), (32), (34) $\varphi \in H^{2q+1}_{\mathscr{N}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{2q,\ q}_{\mathscr{N}}(Q_T)$. *Тогда при любом* p, $0 \leqslant p \leqslant q+1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{2(q+1-p)} \left\| \frac{d^pU_k}{dt^p} \right\|^2_{L_2(0,\ T)} \leqslant C\left(\|\varphi\|^2_{H^{2q+1}(D)} + \|f\|^2_{H^{2q,\ q}(Q_T)}\right), \quad (40)$$

где положительная постоянная C *не зависит от* φ *и* f.

В силу этой леммы (при $q = s-1$) из неравенств (38) вытекает, что ряд (24) сходится в $H^{2s,\ s}(Q_T)$. Следовательно, обобщенные решения задач (31) — (33) и (31), (32), (34) принадлежат пространству $H^{2s,\ s}(Q_T)$ (и даже пространствам $\tilde{H}^{2s,\ s}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ или $\tilde{H}^{2s,\ s}_{\mathscr{N}}(Q_T)$ соответственно). Переходя в (39) к пределу при $N \to \infty$, с помощью (40) и очевидных неравенств $\left\| \frac{d^pU_1}{dt^p} \right\|^2_{L_2(0,\ T)} \leqslant \mathrm{const}\,(\|\varphi\|^2_{L_2(D)} + \|f\|^2_{H^{2(s-1),\ s-1}(Q_T)})$, $p = 0, \ldots, s$, получаем неравенство (35). Теорема доказана.

Поскольку принадлежащее пространству $H^{2,\ 1}(Q_T)$ обобщенное решение смешанной задачи является решением п. в., то из теоремы 4 при $s = 1$ вытекает

Следствие. *Пусть* $\partial D \in C^2$, $f \in L_2(Q_T)$, *и пусть в случае первой смешанной задачи* (31) — (33) $\varphi \in \mathring{H}^1(D)$, *а в случае второй смешанной задачи* (31), (32), (34) $\varphi \in H^1(D)$. *Тогда ряд* (24) *сходится в* $H^{2,\ 1}(Q_T)$ *и его сумма является решением п. в. задачи* (31) — (33) *или соответственно задачи* (31), (32), (34). *При этом имеет место неравенство*

$$\|u\|_{H^{2,\ 1}(Q_T)} \leqslant C\,(\|\varphi\|_{H^1(D)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}),$$

в котором положительная постоянная C *не зависит от* φ *и* f.

Прежде чем установить справедливость леммы 2, которой мы воспользовались при доказательстве теоремы 4, докажем следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 3. *Если* $f(x, t) \in H^{r,0}(Q_T)$, $r \geqslant 1$, *a* $g(t) \in L_2(0, T)$, *то функция*

$$h(x) = \int_0^T f(x, t)\, g(t)\, dt$$

принадлежит $H^r(D)$ *и для любого* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leqslant r$,

$$D_x^\alpha h(x) = \int_0^T D_x^\alpha f(x, t)\, g(t)\, dt. \qquad (41)$$

Если при этом $f|_{\Gamma_T} = 0$, *то* $h|_{\partial D} = 0$, *а если при* $r \geqslant 2$ $\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = 0$, *то* $\left.\frac{\partial h}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0$.

Прежде всего заметим, что из принадлежности функции f пространству $L_2(Q_T)$ вытекает, что $h \in L_2(D)$. Действительно, так как $f(x, t)\, g(t) \in L_1(Q_T)$, то по теореме Фубини $h \in L_1(D)$, а поскольку, кроме того, $h^2(x) \leqslant \int_0^T f^2(x, t)\, dt \cdot \|g\|^2_{L_2(0, T)}$, то $h \in L_2(D)$.

Таким образом, функция h и функции

$$h_\alpha(x) = \int_0^T D_x^\alpha f(x, t)\, g(t)\, dt, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ |\alpha| \leqslant r,$$

принадлежат $L_2(D)$.

Возьмем произвольную функцию $\eta(x)$ из $\dot{C}^r(\overline{D})$. Так как, очевидно, $g(t)\, \eta(x) \in H^{r,0}(Q_T)$, то для любого α, $|\alpha| \leqslant r$,

$$\int_D h_\alpha(x)\, \eta(x)\, dx = \int_{Q_T} D_x^\alpha f(x, t) \cdot \eta(x)\, g(t)\, dx\, dt =$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \int_{Q_T} f(x, t) \cdot D_x^\alpha \eta(x) \cdot g(t)\, dx\, dt = (-1)^{|\alpha|} \int_D h(x)\, D_x^\alpha \eta(x)\, dx.$$

Следовательно, функция h имеет обобщенные производные $D_x^\alpha h = h_\alpha$, $|\alpha| \leqslant r$, принадлежащие $L_2(D)$, т. е. $h \in H^r(D)$.

Если $f|_{\Gamma_T} = 0$, то для любой функции $\eta(x) \in C^1(\overline{D})$ и любого $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_D h_{x_i} \eta\, dx = \int_{Q_T} f_{x_i}(x, t)\, \eta(x)\, g(t)\, dx\, dt =$$
$$= -\int_{Q_T} f(x, t) \cdot \eta_{x_i}(x)\, g(t)\, dx\, dt = -\int_D h \cdot \eta_{x_i}\, dx.$$

С другой стороны, поскольку $h \in H^1(D)$, то при произвольной $\eta \in C^1(\overline{D})$

$$\int_D h_{x_i}\eta\,dx = \int_{\partial D} h\eta n_i\,dS - \int_D h\eta_{x_i}\,dx,$$

где $n_i(x)$ — координаты вектора внешней нормали к ∂D в точке x. Следовательно, при любой $\eta(x) \in C^1(\partial D)$

$$\int_{\partial D} h\eta n_i\,dS = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

откуда (ср. с доказательством леммы 4 п. 4 § 2 гл. V) вытекает, что $h|_{\partial D} = 0$.

Если $r \geqslant 2$ и $\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = 0$, то (ср. с доказательством леммы 4 п. 4 § 2 гл. V) для любой функции $\eta \in C^2(\overline{D})$

$$\int_D \Delta h(x)\cdot\eta(x)\,dx = \int_{Q_T} \Delta f(x, t)\cdot\eta(x)\,g(t)\,dx\,dt =$$
$$= -\int_{Q_T} \nabla f(x, t)\cdot\nabla\eta(x)\,g(t)\,dx\,dt = -\int_D \nabla h\cdot\nabla\eta\,dx.$$

С другой стороны, поскольку $h \in H^2(D)$, то для любой $\eta \in C^1(\overline{D})$

$$\int_D \Delta h\cdot\eta\,dx = \int_{\partial D} \frac{\partial h}{\partial n}\eta\,dS - \int_D \nabla h\cdot\nabla\eta\,dx.$$

Следовательно, для любой функции $\eta \in C^1(\partial D)$

$$\int_{\partial D} \frac{\partial h}{\partial n}\eta\,dS = 0,$$

т. е. $\left.\frac{\partial h}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть функция* $g(t) \in L_2(0, T)$, *а функция* $f(x, t)$ *принадлежит пространству* $\tilde{H}_{\mathscr{D}}^{2r,\,r}(Q_T)$ *или пространству* $\tilde{H}_{\mathscr{N}}^{2r,\,r}(Q_T)$ *при некотором* $r \geqslant 0$. *Тогда функция* $h(x)$ *принадлежит пространству* $H_{\mathscr{D}}^{2r}(D)$ *или пространству* $H_{\mathscr{N}}^{2r}(D)$ *соответственно. При этом для любого* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leqslant 2r$, *имеет место формула* (41).

Лемма 4. *Пусть* $\partial D \in C^2$. *Если при некотором* $q \geqslant 0$ *функция* $f(x, t) \in \tilde{H}_{\mathscr{D}}^{2q,\,q}(Q_T)$, *то при любом* p, $p = 0, \ldots, q$, $\frac{\partial^p f}{\partial t^p} \in \tilde{H}_{\mathscr{D}}^{2(q-p),\,q-p}(Q_T)$. *Если* $f \in \tilde{H}_{\mathscr{N}}^{2q,\,q}(Q_T)$, *то при любом* p, $p = 0, \ldots, q$, $\frac{\partial^p f}{\partial t^p} \in \tilde{H}_{\mathscr{N}}^{2(q-p),\,q-p}(Q_T)$.

При $q=0$ и $q=1$ утверждения леммы очевидны. При $q \geqslant 2$ первое утверждение является непосредственным следствием установленного при доказательстве леммы 4 п. 4 § 2 гл. V утверждения: *если* $G \in H^2(Q_T)$ *и* $G|_{\Gamma_T}=0$, *то* $G_t|_{\Gamma_T}=0$. Второе утверждение леммы, очевидно, вытекает из следующего: *если* $G \in H^{4,2}(Q_T)$ *и* $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma_T}=0$, *то* $\left.\frac{\partial G_t}{\partial n}\right|_{\Gamma_T}=0$. Заметим, что оно доказывается точно так же, как аналогичное утверждение в лемме 4 п. 4 § 2 гл. V. Действительно, так как $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma_T}=0$, то при любой $\eta \in C^2(\bar{Q}_T)$, $\eta|_{D_0}=\eta|_{D_T}=0$, имеем

$$\int_{Q_T} \Delta G_t \cdot \eta \, dx\, dt = -\int_{Q_T} \Delta G \cdot \eta_t \, dx\, dt = \int_{Q_T} \nabla G \cdot \nabla \eta_t \, dx\, dt = -\int_{Q_T} \nabla G_t \cdot \nabla \eta \, dx\, dt.$$

С другой стороны,

$$\int_{Q_T} \Delta G_t \cdot \eta \, dx\, dt = \int_{\Gamma_T} \frac{\partial G_t}{\partial n} \cdot \eta \, dS\, dt - \int_{Q_T} \nabla G_t \cdot \nabla \eta \, dx\, dt.$$

Поэтому

$$\int_{\Gamma_T} \frac{\partial G_t}{\partial n} \cdot \eta \, dS\, dt = 0$$

для любой $\eta \in C^2(\bar{\Gamma}_T)$, $\eta|_{\partial D_0}=\eta|_{\partial D_T}=0$. Следовательно, $\left.\frac{\partial G_t}{\partial n}\right|_{\Gamma_T}=0$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\partial D \in C^2$, *и пусть при некотором* $q \geqslant 0$ $f(x, t) \in \tilde{H}^{2q, q}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ *или* $f(x, t) \in \tilde{H}^{2q, q}_{\mathscr{N}}(Q_T)$. *Тогда при любом* p, $p=0, \ldots, q$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{2(q-p)} \left\| \frac{d^p f_k}{dt^p} \right\|^2_{L_2(0, T)} \leqslant C \|f\|^2_{H^{2q, q}(Q_T)}, \tag{42}$$

где положительная постоянная C *не зависит от* f.

Согласно лемме 2 п. 4 § 2 гл. V при любом p, $0 \leqslant p \leqslant q$, $\frac{d^p f_k(t)}{dt^p} = \int_D \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} v_k(x)\, dx$, поэтому

$$|\lambda_k|^{2(q-p)} \int_0^T \left(\frac{d^p f_k(t)}{dt^p}\right)^2 dt = |\lambda_k|^{2(q-p)} \int_D \left(\int_0^T \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} \frac{d^p f_k(t)}{dt^p}\, dt\right) v_k(x)\, dx = \lambda_k^{q-p} \int_D \left(\int_0^T \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} \frac{d^p f_k(t)}{dt^p}\, dt\right) \Delta^{q-p} v_k(x)\, dx.$$

По лемме 4 функция $\frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p}$ принадлежит $\tilde{H}_{\mathscr{D}}^{2(q-p),\, q-p}(Q_T)$ или соответственно $\tilde{H}_{\mathscr{N}}^{2(q-p),\, q-p}(Q_T)$; значит, в силу следствия из леммы 3 функция $\int\limits_0^T \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p}\frac{d^p f_k(t)}{dt^p}\,dt$ принадлежит $H_{\mathscr{D}}^{2(q-p)}(D)$ или соответственно $H_{\mathscr{N}}^{2(q-p)}(D)$. Следовательно,

$$|\lambda_k|^{2(q-p)}\int\limits_0^T\left(\frac{d^p f_k(t)}{dt^p}\right)^2 dt =$$

$$= \lambda_k^{q-p}\int\limits_D \Delta^{q-p}\left(\int\limits_0^T \frac{\partial^p f}{\partial t^p}\frac{d^p f_k}{dt^p}\,dt\right)\cdot v_k\,dx =$$

$$= \lambda_k^{q-p}\int\limits_{Q_T} \Delta^{q-p}\frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p}\cdot\frac{d^p f_k(t)}{dt^p}\,v_k(x)\,dx\,dt =$$

$$= \lambda_k^{q-p}\int\limits_D\int\limits_0^T\left(\Delta_y^{q-p}\frac{\partial^p f(y, t)}{\partial t^p}\right)\left(\int\limits_D\frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p}v_k(x)\,dx\right)v_k(y)\,dy\,dt =$$

$$= \lambda_k^{q-p}\int\limits_D\left(\int\limits_0^T\frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p}g_k^{(p)}(t)\,dt\right)v_k(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_D\left(\int\limits_0^T\frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p}g_k^{(p)}(t)\,dt\right)\Delta^{q-p}v_k(x)\,dx, \qquad (43)$$

где функция $g_k^{(p)}(t) = \int\limits_D \Delta^{q-p}\frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p}\cdot v_k(x)\,dx$ в силу леммы 2 п. 4 § 2 гл. V принадлежит $L_2(0, T)$. Функция $\Delta^{q-p}\frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p}\in L_2(Q_T)$, поэтому для п. в. $t\in(0, T)$ $\Delta^{q-p}\frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p}\in L_2(D_t)$ и для п. в. $t\in(0, T)$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(g_k^{(p)}(t))^2 = \left\|\Delta^{q-p}\frac{\partial^p f}{\partial t^p}\right\|^2_{L_2(D_t)}$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|g_k^{(p)}\|^2_{L_2(0, T)} = \left\|\Delta^{q-p}\frac{\partial^p f}{\partial t^p}\right\|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant \mathrm{const}\,\|f\|^2_{H^{2q, q}(Q_T)}. \qquad (44)$$

Так как в силу леммы 4 и следствия из леммы 3 функция $\int\limits_0^T\frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p}g_k^{(p)}(t)\,dt$ принадлежит $H_{\mathscr{D}}^{2(q-p)}(D)$ или соответственно

$H^{2(q-p)}_{\mathscr{N}}(D)$, то из (43) имеем равенство

$$|\lambda_k|^{2(q-p)} \int_0^T \left(\frac{d^p f_k(t)}{dt^p}\right)^2 dt =$$
$$= \int_D \Delta^{q-p}\left(\int_0^T \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} g_k^{(p)}(t)\,dt\right) v_k(x)\,dx = \int_0^T (g_k^{(p)}(t))^2\,dt,$$

из которого в силу (44) немедленно вытекает (42). Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству леммы 2. Так как функция $f \in H^{2q,\,q}(Q_T) \subset H^q(Q_T)$, то функция $f_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, принадлежат (лемма 2 п. 4 § 2 гл. V) $H^q(0, T)$. Поэтому согласно (21) и (22) функции $U_k(t)$, $k=1, 2, \ldots$, принадлежат $H^{q+1}(0, T)$. Из (22) вытекает, что при любом p, $1 \leqslant p \leqslant q+1$,

$$\frac{d^p U_k}{dt^p} = \lambda_k^p U_k + \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_k^{p-r-1} \frac{d^r f_k}{dt^r}, \qquad t \in (0, T).$$

Следовательно, в силу неравенства (42) леммы 5 для доказательства неравенств (40) достаточно установить, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{2(q+1)} \|U_k\|^2_{L_2(0,\,T)} \leqslant \mathrm{const}\left(\|\varphi\|^2_{H^{2q+1}(D)} + \|f\|^2_{H^{2q,\,q}(Q_T)}\right). \tag{45}$$

Умножим (22) на U_k и проинтегрируем полученное равенство по $t \in (0, T)$. Пользуясь условием (22′), получим

$$\frac{1}{2} U_k^2(T) - \frac{1}{2}\varphi_k^2 - \lambda_k \int_0^T U_k^2(t)\,dt = \int_0^T f_k(t)\,U_k(t)\,dt,$$

откуда ($\lambda_k \leqslant 0$) имеем неравенство

$$|\lambda_k|\,\|U_k\|^2_{L_2(0,\,T)} \leqslant \frac{1}{2}\varphi_k^2 + \|f_k\|_{L_2(0,\,T)} \|U_k\|_{L_2(0,\,T)}$$

и, тем самым, неравенство

$$|\lambda_k|^{2q+2} \|U_k\|^2_{L_2(0,\,T)} \leqslant \frac{1}{2}\varphi_k^2 |\lambda_k|^{2q+1} +$$
$$+ \left(|\lambda_k|^q \|f_k\|_{L_2(0,\,T)}\right)\left(|\lambda_k|^{q+1} \|U_k\|_{L_2(0,\,T)}\right) \leqslant \frac{1}{2}\varphi_k^2 |\lambda_k|^{2q+1} +$$
$$+ \frac{1}{2}|\lambda_k|^{2q} \|f_k\|^2_{L_2(0,\,T)} + \frac{1}{2}|\lambda_k|^{2q+2} \|U_k\|^2_{L_2(0,\,T)}.$$

Таким образом,

$$|\lambda_k|^{2q+2} \|U_k\|^2_{L_2(0,\,T)} \leqslant \varphi_k^2 |\lambda_k|^{2q+1} + |\lambda_k|^{2q} \|f_k\|^2_{L_2(0,\,T)},$$

и, следовательно, неравенство (45) вытекает из неравенства (42) (при $p=0$) и неравенства (теорема 8 п. 5 § 2 гл. IV)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 |\lambda_k|^{2q+1} \leqslant \text{const} \|\varphi\|^2_{H^{2q+1}(D)}.$$

Лемма 2 доказана.

Докажем теперь теорему о существовании классических решений задач (31)—(33) и (31), (32), (34).

Заметим, что если $f \in H^{2,1}(Q_T)$, то определенные равенством (21) функции $U_k(t)$, $k=1, 2, \ldots$, принадлежат пространству $H^2(0, T)$, а следовательно, и пространству $C^1([0, T])$.

Если $\partial D \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}$, то в силу теоремы 7 п. 4 § 2 гл. IV собственные функции $v_k(x)$ первой или второй краевой задачи для оператора Лапласа в D принадлежат пространству $H^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(D)$, а следовательно (теорема 3 п. 2 § 6 гл. III), и пространству $C^2(\bar{D})$. Тогда частичные суммы S_N ряда (24) принадлежат пространству $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$.

Теорема 5. *Пусть $\partial D \in C^{2s_0+1}$, где $2s_0+1 \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+3$, и пусть в случае первой смешанной задачи (31)—(33) $\varphi \in H_{\mathscr{D}}^{2s_0+1}(D)$, $f \in \tilde{H}_{\mathscr{D}}^{2s_0, s_0}(Q_T)$, а в случае второй смешанной задачи (31), (32), (34) $\varphi \in H_{\mathscr{N}}^{2s_0+1}(D)$, $f \in \tilde{H}_{\mathscr{N}}^{2s_0, s_0}(Q_T)$. Тогда ряд (24) сходится в $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ и его сумма является классическим решением первой смешанной задачи (31)—(33) или соответственно второй смешанной задачи (31), (32), (34). При этом*

$$\|u\|_{C(\bar{Q}_T)} \leqslant C\left(\|\varphi\|_{H^{2s_0-1}(D)} + \|f\|_{H^{2(s_0-1),\, s_0-1}(Q_T)}\right), \tag{46}$$

где положительная постоянная C не зависит от φ и f.

Установим сначала нужные нам оценки функции $U_k(t)$ и ее производной $U_k'(t)$, $k=1, 2, \ldots$ Из формулы (21) получаем, что

$$|U_k(t)| \leqslant |\varphi_k| + \frac{1}{\sqrt{2|\lambda_k|}} \|f_k\|_{L_2(0,T)} \quad \text{при} \quad k > 1$$

и

$$|U_1(t)| \leqslant |\varphi_1| + C_1 \|f_1\|_{L_2(0,T)},$$

где $C_1 = 1/\sqrt{2|\lambda_1|}$ в случае первой и $C_1 = \sqrt{T}$ в случае второй смешанной задачи. Из (22) тогда вытекает, что при всех $t \in [0, T]$

$$|U_k'(t)| \leqslant |\lambda_k| |U_k| + |f_k| \leqslant |\lambda_k| |\varphi_k| + |f_k| + \\ + \frac{\sqrt{|\lambda_k|}}{\sqrt{2}} \|f_k\|_{L_2(0,T)} \quad \text{при} \quad k \geqslant 1.$$

Поэтому для всех $t \in [0, T]$

$$U_k^2(t) \leqslant 2|\varphi_k|^2 + \frac{1}{|\lambda_k|}\|f_k\|^2_{L_2(0,T)}, \qquad k > 1, \tag{47}$$

$$U_1^2(t) \leqslant 2\varphi_1^2 + 2C_1^2\|f_1\|^2_{L_2(0,T)}, \tag{47'}$$

$$U_k'^2(t) \leqslant 3\lambda_k^2\varphi_k^2 + \frac{3}{2}|\lambda_k|\,\|f_k\|^2_{L_2(0,T)} + 3|f_k|^2 \qquad k \geqslant 1. \tag{48}$$

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 6. *Пусть $f(t)$ — произвольная функция из $H^1(0, T)$, а ε — произвольное число из $(0, T]$. Тогда для всех $t \in [0, T]$ имеет место неравенство*

$$f^2(t) \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\|f\|^2_{L_2(0,T)} + 2\varepsilon\|f'\|^2_{L_2(0,T)}. \tag{49}$$

Обозначим через α среднее значение функции f на интервале $(0, T)$:

$$\alpha = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt,$$

и рассмотрим непрерывную на $[0, T]$ функцию

$$f_\alpha(t) = f(t) - \alpha.$$

Так как $\int_0^T f_\alpha(t)\,dt = 0$, то существует такая точка $t^0 \in (0, T)$, что $f_\alpha(t^0) = 0$. Поэтому для любого $t \in [0, T]$ и любого $\varepsilon > 0$

$$f_\alpha^2(t) = 2\int_{t^0}^t f_\alpha(t) f_\alpha'(t)\,dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T f_\alpha^2(t)\,dt + \varepsilon\int_0^T f'^2(t)\,dt.$$

Следовательно, для любого $t \in [0, T]$ и любого ε, $0 < \varepsilon \leqslant T$, имеем

$$f^2(t) - 2\alpha f(t) + \alpha^2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^T f^2(\tau)\,d\tau - 2\alpha\int_0^T f(\tau)\,d\tau + \alpha^2 T\right) +$$
$$+ \varepsilon\int_0^T f'^2(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T f^2(\tau)\,d\tau + \varepsilon\int_0^T f'^2(\tau)\,d\tau - \frac{\alpha^2 T}{\varepsilon} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T f^2(\tau)\,d\tau + \varepsilon\int_0^T f'^2(\tau)\,d\tau - \alpha^2,$$

откуда вытекает неравенство

$$\frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2_{L_2(0,T)}+\varepsilon\|f'\|^2_{L_2(0,T)}\geqslant 2\alpha^2-2\alpha f(t)+f^2(t)=$$
$$=\left(\sqrt{2}\,\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}f(t)\right)^2+\frac{f^2(t)}{2}\geqslant\frac{f^2(t)}{2},$$

совпадающее с неравенством (49). Лемма доказана.

Рассмотрим неравенство (48) для таких k, что $|\lambda_k|\geqslant 1/T$; наименьшее из этих k обозначим через k_0. Тогда в силу леммы 6 для всех $k\geqslant k_0$ (напомним, что последовательность $|\lambda_k|$ монотонно не убывает)

$$|f_k(t)|^2\leqslant 2|\lambda_k|\,\|f_k\|^2_{L_2(0,T)}+\frac{2}{|\lambda_k|}\|f_k'\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Подставляя последнее неравенство в (48), при всех $t\in[0,T]$ и $k\geqslant k_0$ получим

$$U_k'^2(t)\leqslant 3\lambda_k^2\varphi_k^2+\frac{15}{2}|\lambda_k|\,\|f_k\|^2_{L_2(0,T)}+\frac{6}{|\lambda_k|}\|f_k'\|^2_{L_2(0,T)}\leqslant$$
$$\leqslant 8\left(\lambda_k^2\varphi_k^2+|\lambda_k|\,\|f_k\|^2_{L_2(0,T)}+\frac{1}{|\lambda_k|}\|f_k'\|^2_{L_2(0,T)}\right). \quad (50)$$

На основании теоремы 3 п. 2 § 6 гл. III, леммы 3 п. 5 § 2 гл. IV и неравенств (47) и (50) для всех $t\in[0,T]$ и всех M и N, $k_0\leqslant M<N$, имеем

$$\|S_N-S_M\|^2_{C^2(\bar D_t)}+\left\|\frac{\partial}{\partial t}(S_N-S_M)\right\|^2_{C(\bar D_t)}\leqslant$$
$$\leqslant C_1\left(\|S_N-S_M\|^2_{H^{2s_0+1}(D_t)}+\left\|\frac{\partial}{\partial t}(S_N-S_M)\right\|^2_{H^{2s_0-1}(D_t)}\right)\leqslant$$
$$\leqslant C_2\left(\left\|\sum_{k=M+1}^{N}U_k(t)\,\Delta^{s_0}v_k(x)\right\|^2_{H^1(D_t)}+\right.$$
$$\left.+\left\|\sum_{k=M+1}^{N}U_k'(t)\,\Delta^{s_0-1}v_k(x)\right\|^2_{H^1(D_t)}\right)\leqslant$$
$$\leqslant C_3\sum_{k=M+1}^{N}\left(|\lambda_k|^{2s_0+1}U_k^2(t)+|\lambda_k|^{2s_0-1}U_k'^2(t)\right)\leqslant$$
$$\leqslant C_4\sum_{k=M+1}^{N}\left(\varphi_k^2|\lambda_k|^{2s_0+1}+\lambda_k^{2s_0}\|f_k\|^2_{L_2(0,T)}+\lambda_k^{2s_0-2}\|f_k'\|^2_{L_2(0,T)}\right).$$

Следовательно,

$$\|S_N-S_M\|^2_{C^{2,1}(\bar Q_T)}\leqslant$$
$$\leqslant C_5\sum_{k=M+1}^{N}\left(\varphi_k^2|\lambda_k|^{2s_0+1}+|\lambda_k|^{2s_0}\|f_k\|^2_{L_2(0,T)}+\lambda_k^{2s_0-2}\|f_k'\|^2_{L_2(0,T)}\right). \quad (51)$$

Аналогично, с помощью (47′) получаем, что при всех $t\in[0, T]$ и всех $N\geqslant 1$ справедливы неравенства

$$\|S_N\|^2_{C(\bar{D}_t)}\leqslant C_6\|S_N\|^2_{H^{2s_0-1}(D_t)}\leqslant C_7\left(U_1^2(t)+\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^{2s_0-1}U_k^2(t)\right)\leqslant$$
$$\leqslant C_8\left(\varphi_1^2+\|f_1\|^2_{L_2(0,T)}+\sum_{k=1}^{N}\left(\varphi_k^2|\lambda_k|^{2s_0-1}+\lambda_k^{2s_0-2}\|f_k\|^2_{L_2(0,T)}\right)\right),$$

а следовательно, и неравенства

$$\|S_N\|^2_{C(\bar{Q}_T)}\leqslant$$
$$\leqslant C_9\left(\varphi_1^2+\|f_1\|^2_{L_2(0,T)}+\sum_{k=1}^{N}\left(\varphi_k^2|\lambda_k|^{2s_0-1}+\lambda_k^{2s_0-2}\|f_k\|^2_{L_2(0,T)}\right)\right). \tag{52}$$

Так как функция φ принадлежит пространству $H^{2s_0+1}_{\mathcal{D}}(D)$ в случае первой смешанной задачи или пространству $H^{2s_0+1}_{\mathcal{N}}(D)$ в случае второй смешанной задачи, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2|\lambda_k|^{2s_0+1}$ сходится. Кроме того, из принадлежности функции φ пространству $H^{2s_0-1}_{\mathcal{D}}(D)$ или соответственно пространству $H^{2s_0-1}_{\mathcal{N}}(D)$ вытекает (теорема 8 п. 5, § 2 гл. IV), что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2|\lambda_k|^{2s_0-1}\leqslant \text{const}\,\|\varphi\|^2_{H^{2s_0-1}(D)}. \tag{53}$$

Поскольку в случае первой смешанной задачи $f\in\tilde{H}^{2s_0,\,s_0}_{\mathcal{D}}(Q_T)$, а в случае второй смешанной задачи $f\in\tilde{H}^{2s_0,\,s_0}_{\mathcal{N}}(Q_T)$, то согласно лемме 5 сходятся ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^{2s_0}\|f_k\|^2_{L_2(0,T)}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^{2(s_0-1)}\|f'_k\|^2_{L_2(0,T)}$. Кроме того, из принадлежности функции f пространству $\tilde{H}^{2(s_0-1),\,s_0-1}_{\mathcal{D}}(Q_T)$ или соответственно пространству $\tilde{H}^{2(s_0-1),\,s_0-1}_{\mathcal{N}}(Q_T)$ и неравенств (42) леммы 5 имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^{2(s_0-1)}\|f_k\|^2_{L_2(0,T)}\leqslant \text{const}\,\|f\|^2_{H^{2(s_0-1),\,s_0-1}(Q_T)}. \tag{54}$$

Поэтому из неравенств (51) вытекает, что ряд (24) сходится в $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ и его сумма $u(x, t)$ принадлежит $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ и, следовательно, является классическим решением соответствующей смешанной задачи. Справедливость оценки (46) вытекает из неравенств (52) — (54). Теорема доказана.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VI

1. Пусть D — ограниченная область пространства R_n, $n>2$, а x^0 — некоторая точка из D. Пусть функция $u(x, t) \in C^{2,1}(\{x \in D \setminus x^0, 0<t<T\})$, $T>0$, удовлетворяет в $\{x \in D \setminus x^0, 0<t<T\}$ однородному уравнению теплопроводности, и пусть равномерно по $t \in (0, T)$ $u(x, t)|x-x^0|^{n-2} \to 0$ при $x \to x^0$. Показать, что тогда функцию $u(x, t)$ можно так доопределить на множестве $\{x=x^0, 0<t<T\}$ что полученная функция будет принадлежать $C^\infty(\{x \in D, 0<t<T\})$.

2. Пусть функция $u(x, t)$ принадлежит $C^{2,1}(t>0)$ и является в полупространстве $\{t>0\}$ решением однородного уравнения теплопроводности, и пусть существует такая функция $A(x)$, что при любом $R>0$ равномерно по $x \in \{|x|<R\}$ $u(x, t) \to A(x)$ при $t \to \infty$. Доказать, что функция $A(x)$ гармонична в R_n.

3. Пусть функция $\varphi(x)$ принадлежит $C(R_n)$ и для всех $x \in R_n$ удовлетворяет неравенству $|\varphi(x)| \leq Ce^{a|x|^2}$, где C и a — некоторые положительные постоянные. Доказать, что в полосе $\left\{x \in R_n, 0<t<\frac{1}{4a}\right\}$ существует решение $u(x, t)$ задачи Коши

$$u_t - \Delta u = 0, \quad x \in R_n, \quad 0<t<\frac{1}{4a}, \qquad u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{1}$$

Это решение задается формулой Пуассона и принадлежит классу единственности B_2.

Если функция $\varphi(x) \in C(R_n)$ и удовлетворяет условию: для любого $\varepsilon>0$ существует такое $C=C(\varepsilon)>0$, что

$$|\varphi(x)| < Ce^{\varepsilon|x|^2} \quad \text{для всех} \quad x \in R_n, \tag{2}$$

то из результата задачи 3 вытекает, что в полупространстве $\{t>0\}$ существует решение задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности с начальной функцией $\varphi(x)$, принадлежащее классу единственности B_2, причем это решение задается формулой Пуассона.

4. Пусть функция $\varphi(x) \in C(R_n)$ и для любого $\varepsilon>0$ существует такая постоянная $C=C(\varepsilon)>0$, что имеет место (2). Обозначим через $u(x, t)$ решение задачи Коши (из класса B_2)

$$u_t - \Delta u = 0, \quad x \in R_n, \quad t>0, \qquad u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{3}$$

Доказать следующее утверждение. Если существует такая функция $A(x)$, что для любого $R>0$ равномерно по $x \in \{|x|<R\}$ $\frac{n}{\sigma_n \rho^n} \int\limits_{|x-\xi|<\rho} u(\xi)\, d\xi \to A(x)$ при $\rho \to \infty$ (σ_n — площадь поверхности единичной сферы в R_n), то равномерно по $x \in \{|x|<R\}$ (при любом $R>0$) $\lim\limits_{t\to\infty} u(x, t) = A(x)$, причем $A(x)$ — гармоническая функция.

5. Пусть $u(x, t)$ — принадлежащее B_2 решение задачи Коши (3), где $\varphi(x) \in B(R_n)$, и пусть $\lim\limits_{t\to\infty} u(0, t) = A$. Доказать, что тогда для любой точки $x \in R_n$ $\lim\limits_{t\to\infty} u(x, t) = A$.

6. Показать, что решение $u(x, t)$ задачи Коши (3), где $\varphi \in B(R_n)$, является аналитической по (x, t) функцией в полупространстве $\{x \in R_n,\ t > 0\}$.

7. Показать, что классическое решение первой смешанной задачи

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u = 0, \quad (x, t) \in Q_T = \{D \times (0, T)\}, \\ &u|_{D_0} = \varphi(x), \\ &u|_{\Gamma_T} = 0 \end{aligned}$$

является обобщенным решением этой задачи, если $\partial D \in C^2$.

8. Доказать теоремы существования и единственности обобщенных решений первой, второй и третьей смешанных задач для параболического уравнения (задач (1)—(3) и (1), (2), (4) из п. 1 § 2) без предположения о неотрицательности функций $a(x)$ и $\sigma(x)$.

9. Пусть функция $u(x, t)$ принадлежит $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, удовлетворяет в Q_T однородному уравнению теплопроводности $(u_t - \Delta u = 0)$ и однородному начальному условию $(u|_{D_0} = 0$, D_0 — нижнее основание цилиндра $Q_T)$. Доказать, что тогда $u \in C^\infty(Q_T \cup D_0)$. Доказать также, что для любой точки (x, t) цилиндра $\{D' \times (0, T)\}$, где $D' \Subset D_0$, $\rho = \inf\limits_{\substack{x' \in \partial D' \\ x'' \in \partial D_0}} |x' - x''| > 0$,

$$|D^\alpha u(x, t)| \leqslant C(\alpha, T) \frac{e^{-\frac{\rho^2}{8T}}}{\rho^{2\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + 2}} \|u\|_{C(\bar{Q}_T)},$$

где $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\alpha_0 + \ldots + \alpha_n} u}{\partial t^{\alpha_0} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, а $C(\alpha, T)$ — положительная постоянная, зависящая лишь от вектора α и числа T.

10. Пусть функция $\varphi \in B(R_n)$, а D_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — последовательность областей пространства R_n, $D_i \subset D_{i+1}$, $i = 1, \ldots,$ $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i = R_n$. Обозначим через $u_i(x, t)$ решение уравнения $u_t - \Delta u = 0$ в $D_i \times (0, T)$, непрерывное в $\{\bar{D}_i \times [0, T]\}$ и удовлетворяющее начальному условию $u_i|_{D_i} = \varphi$. Предположим, что $\|u_i\|_{C(\bar{D}_i \times [0, T])} \leqslant C$, где положительная постоянная C не зависит от i. Тогда равномерно по (x, t) из $\bar{D} \times [0, T]$, где D — произвольная ограниченная область из R_n, последовательность u_i, $i = 1, 2, \ldots,$ сходится к (ограниченному) решению задачи Коши в полосе $\{x \in R_n,\ 0 < t < T\}$ для однородного уравнения теплопроводности с начальной функцией φ. Доказать.

Дополнительная литература к главе VI

В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, «Наука», 1971.

А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник, Линейные уравнения второго порядка параболического типа, УМН 17 : 3 (1962), 3—146.

О. А. Ладыженская, Краевые задачи математической физики, «Наука», 1973.

О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», 1967.

В. П. Михайлов, О задаче Дирихле для параболического уравнения, 1, Матем. сб. **61** : 1 (1963), 40—64; 2, Матем. сб. **62** : 2 (1963), 140—159.

И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961.

И. Г. Петровский, Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung, Compos. mathem. **1** (1935), 389—419.

С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, Физматгиз, 1954.

А. Н. Тихонов, Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur, Матем. сб. **42** (1935), 199—216.

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», 1972.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ