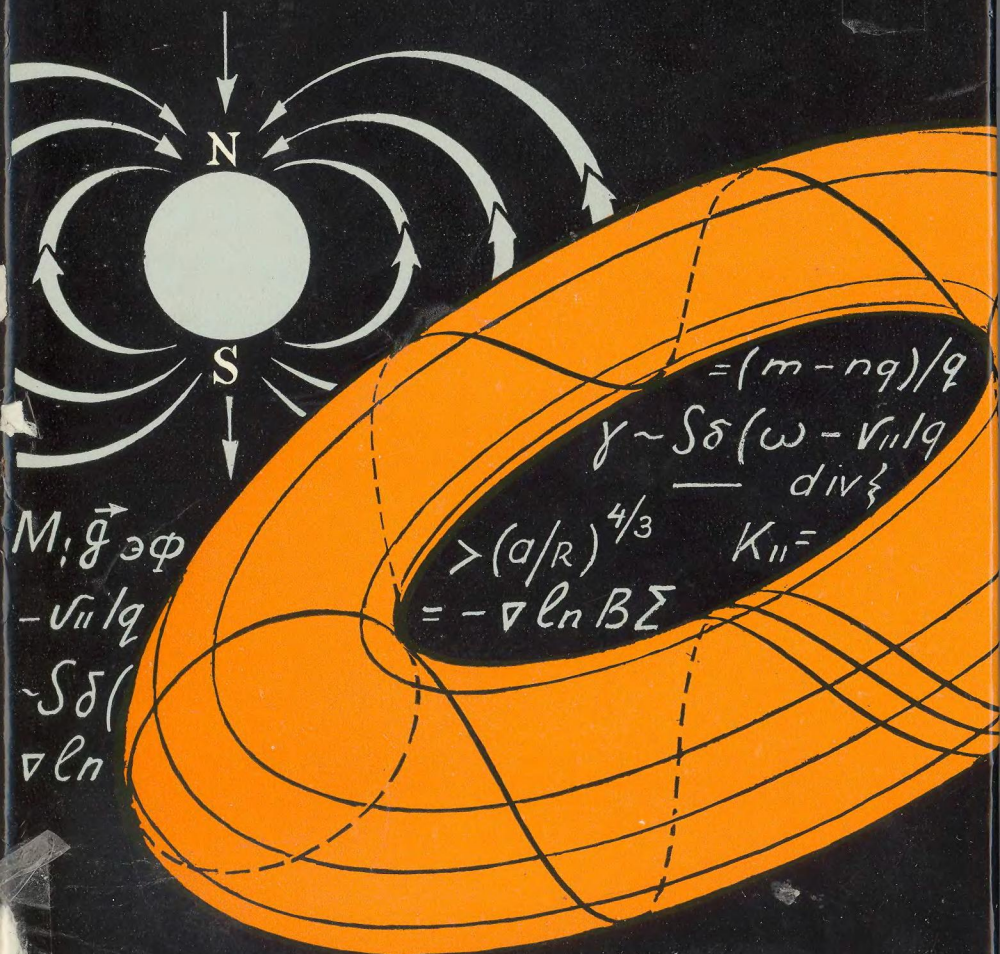


А.Б.Михайловский

# НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ



А. Б. Михайловский

**Неустойчивости  
плазмы  
в магнитных  
ловушках**

---

А.Б.Михайловский  
Неустойчивости  
плазмы  
в магнитных  
ловушках

---



МОСКВА АТОМИЗДАТ 1973

Михайловский А. Б. **Неустойчивости плазмы в магнитных ловушках.** М., Атомиздат, 1978, 296 с.

Излагается теория неустойчивостей плазмы, удерживаемой в магнитных ловушках. Основное внимание уделяется неустойчивостям плазмы в тороидальных (замкнутых) ловушках типа токамак, важных в связи с проблемой управляемого термоядерного синтеза, а также неустойчивостям плазмы в адиабатических (открытых) ловушках, интересных в связи с космическими исследованиями. Анализ неустойчивостей проводится в предположении, что давление плазмы конечно по сравнению с давлением магнитного поля. Обсуждаются как гидромагнитные, так и негидромагнитные неустойчивости.

Книга полезна специалистам по физике плазмы, а также студентам старших курсов, аспирантам, преподавателям вузов и специалистам, работающим в смежных областях физики.

Рис. 2. Библиографический обзор 104 наименования.

**Instabilities of Plasma in Magnetic Traps.** A. B. Mikhailovskii. Atomizdat, Moscow, 1978.

Recent studies of the instability theory for magnetic-trap plasma are presented. Emphasis is given to the instabilities of the tokamak-type toroidal traps, which are important for controlled fusion research, and to instabilities of the open traps, which are interesting for space research.

The book will be an invaluable aid to plasma and space physicists, also to students, post-graduate students, higher-school-teachers and to experts in other fields of physics.

(See Summary in page 296)

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Первое систематизированное изложение теории плазменных неустойчивостей было дано в двухтомной монографии «Теория плазменных неустойчивостей», написанной в 1966—1969 гг. и изданной в СССР в 1970—1971 гг.\*<sup>1</sup>, а в США — в 1974 г.\*<sup>2</sup>. Монография отражала в основном результаты, полученные к 1966 г. Исследования некоторых типов неустойчивостей, таких, как неустойчивости однородной плазмы и неустойчивости неоднородной плазмы низкого давления в прямом магнитном поле, к тому времени достигли насыщения. Исследования же других, и в частности связанных с эффектами конечного давления плазмы и искривленностью магнитного поля, в то время далекие от завершения, продолжали интенсивно развиваться, что привело к необходимости нового изложения теории плазменных неустойчивостей. Частично эта задача была выполнена переизданием монографии «Теория плазменных неустойчивостей»\*<sup>3</sup>, дополненной разделами, касающимися плазмы конечного давления в прямом магнитном поле.

---

\* Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1. Неустойчивости однородной плазмы. М., Атомиздат, 1970; Т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы. М., Атомиздат, 1971.

\*<sup>2</sup> Mikhailovskii A. B. Theory of Plasma Instabilities. V. 1. Instabilities of a Homogeneous Plasma; V. 2. Instabilities of an Inhomogeneous Plasma. N. Y. — London, Consultants Bureau, 1974.

\*<sup>3</sup> Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1. Неустойчивости однородной плазмы. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., Атомиздат, 1975; Т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., Атомиздат, 1977.

Выполнению этой же задачи служит и настоящая монография. В ней излагается теория неустойчивостей, специфичных для плазмы в криволинейном магнитном поле, каковым, например, является поле магнитных ловушек. При этом, как и в новых разделах второго издания «Теории плазменных неустойчивостей», основное внимание уделяется плазме конечного давления.

Выделенность плазмы конечного давления (т. е. плазмы, давление которой не слишком мало по сравнению с давлением магнитного поля), находящейся в криволинейном магнитном поле, обусловлена прежде всего тем, что только такая плазма и представляет интерес для проблемы магнитно-термоядерных реакторов — центрального направления проблемы управляемого термоядерного синтеза. Кроме того, плазма конечного давления является наиболее типичным состоянием вещества в космическом пространстве; в частности, плазмой конечного давления заполнена ближайшая к нам космическая магнитная ловушка — магнитосфера Земли.

Центральное место среди различных типов неустойчивостей плазмы в криволинейном магнитном поле занимает *желобковая (flute) неустойчивость*, называемая также *перестановочной (interchange)* и *конвективной (convective)*. Ее причиной служат градиент давления плазмы и неблагоприятная кривизна магнитных силовых линий. Природа этой неустойчивости может быть изучена в приближении прямых силовых линий магнитного поля с помощью введения фиктивной силы тяжести, как об этом излагалось в т. 2 «Теории плазменных неустойчивостей». (В дальнейшем т. 2 «Теории плазменных неустойчивостей» второго издания будем обозначать как книгу [II], а т. 1 того же издания — как книгу [I]). Важность этой неустойчивости обусловлена тем, что в отсутствие продольного тока она может приводить к гораздо более заметным макроскопическим последствиям, чем остальные разновидности неустойчивостей. При наличии продольного тока на первый план может выступать так называемая *винтовая (kink) неустойчивость*, а также *неустойчивость тиринг-моды (tearing-mode)*. В настоящей книге с наибольшей полнотой излагается теория желобковой неустойчивости (ч. I, II и частично ч. III) и более сжато — теория винтовой неустойчивости и неустойчивости тиринг-моды (основное содержание ч. III).

Если по тем или иным причинам упомянутые выше неустойчивости развиваться не могут, то главными оказываются *негидромагнитные неустойчивости*, называемые также *микронеустойчивостями*. Важность микронеустойчивостей подчеркивалась в обзорах \*—\*<sup>3</sup>. Изложению теории микронеустойчивостей, специфичных для криволинейного магнитного поля, посвящена ч. IV.

Я благодарен Х. Д. Абурджания, В. М. Бардакову, К. О. Бизли (С. О. Beasley), Т. Д. Каладзе, В. А. Клименко, В. М. Кулыгину, Д. Г. Ломинадзе, В. А. Мазуру, Б. И. Меерсону, А. Г. Морозову, А. С. Потапову, О. А. Похотелову, А. И. Пятаку, У. М. Тэнгу (W. M. Tang), А. Л. Френкелю, А. М. Фридману, Е. С. Цапелкину, В. Д. Шафранову, И. Г. Шухману, совместно с которыми была получена часть изложенных в книге результатов.

---

\* Михайловский А. Б. Современное состояние теории устойчивости плазмы. — В кн.: Проблемы теории плазмы. Под ред. А. Г. Ситенко. Киев. «Наукова думка», 1972, с. 173. -

\*<sup>2</sup> Михайловский А. Б. Новое в теории устойчивости плазмы. — «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 324.

\*<sup>3</sup> Ломинадзе Д. Г., Михайловский А. Б., Тэнг У. М. Некоторые проблемы теории микронеустойчивостей токамаков. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 518.

## ЧАСТЬ I

### ПРОСТЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ЖЕЛОБКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ

#### Глава 1

#### ЖЕЛОБКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В АДИАБАТИЧЕСКИХ И МУЛЬТИПОЛЬНЫХ ЛОВУШКАХ

#### § 1.1. Введение

В гл. 9 т. 2 книги «Теория плазменных неустойчивостей» было показано, что в неоднородной плазме, находящейся в скрещенных магнитном и гравитационном полях  $\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{g}$ , может развиваться желобковая неустойчивость, если градиент плотности плазмы  $\nabla n_0$  и сила тяжести (гравитационная сила) имеют противоположные направления:

$$\mathbf{g} \nabla n_0 < 0. \quad (1.1)$$

С точки зрения динамики отдельных частиц роль силы тяжести состоит в том, что под действием этой силы и магнитного поля частицы дрейфуют поперек  $\mathbf{g}$  и магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  со скоростью

$$\mathbf{V}_{др} = - [e_0, \mathbf{g}] / \omega_B. \quad (1.2)$$

Здесь  $\omega_B = eB_0/Mc$  — циклотронная частота соответствующего сорта частиц (ионов или электронов);  $e$ ,  $M$  — их заряд и масса;  $e_0$  — единичный вектор вдоль  $\mathbf{B}_0$ . Скорость такого дрейфа, называемого гравитационным, зависит от знака заряда; иначе говоря, электроны и ионы дрейфуют в противоположные стороны.

Аналогичным образом происходит движение частиц поперек магнитного поля и тогда, когда сила тяжести отсутствует, но имеется кривизна силовых линий магнитного поля. Вычисления, которые будут воспроизведены в при-



ложении 1 к гл. 4, свидетельствуют о том, что в этом случае частицы дрейфуют со скоростью

$$\mathbf{V}_{др} = (1/\omega_B) [\mathbf{e}_0, \nabla \ln B_0] (v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2), \quad (1.3)$$

где  $v_{\perp}$  — модуль поперечной скорости частицы;  $v_{\parallel}$  — ее скорость вдоль магнитного поля. Для простоты магнитное поле считается безвихревым,  $\text{rot } \mathbf{B}_0 = 0$ , так что  $\nabla_{\perp} \ln B_0 = \mathbf{n}/R$ , где  $R$  — радиус кривизны силовой линии;  $\mathbf{n}$  — ее главная нормаль;  $\nabla_{\perp}$  — составляющие градиента, поперечные  $\mathbf{B}_0$ . Скорость, определяемая выражением (1.3), называется *скоростью магнитного дрейфа частицы*.

Согласно (1.3), магнитный дрейф зарядов разного знака — ионов и электронов, как и гравитационный, направлен в противоположные стороны, причем относительная скорость этого движения такая же, как и под действием гравитационной силы  $\mathbf{g}_{\alpha\phi\phi}$ , удовлетворяющей соотношению

$$M_i \mathbf{g}_{\alpha\phi\phi} = -\nabla \ln B_0 \sum_{i,e} M (v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2). \quad (1.4)$$

Индексы  $i, e$  означают ионы и электроны. Здесь и далее, где это возможно, индексы  $i, e$  опускаются.

Учитывая аналогию между гравитационным и магнитным дрейфами, естественно предположить, что магнитный дрейф, как и гравитационный, также может приводить к желобковой неустойчивости неоднородной плазмы. В том, что это так, убедимся на следующем простом примере.

Пусть магнитное поле обладает цилиндрической симметрией и имеет только азимутальную компоненту

$$\mathbf{B}_0 = (0, B_0, 0). \quad (1.5)$$

Вектор  $\nabla B_0$  в этом случае направлен противоположно радиусу, а магнитный дрейф частиц происходит вдоль оси  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{V}_{др} \parallel \mathbf{z}$ . Желобковыми при этом являются возмущения типа перетяжек, т. е. такие, для которых  $\partial\psi/\partial\phi = 0$ , где  $\psi$  — потенциал возмущенного электрического поля  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{E} = -\nabla\psi$ );  $\phi$  — полярный угол в цилиндрической системе координат. Дисперсионное уравнение для таких возмущений получаем так же, как и в § 9.1 книги [II], учитывая поперечную инерцию ионов и конвекцию ионов и элек-

тронов поперек электрического поля эффективной частоты  $\omega' = \omega - \mathbf{kV}_{др}$ . Как и в [II], предполагается, что возмущения зависят от времени по закону  $\exp(-i\omega t)$ ;  $\mathbf{k} = (k_r, 0, k_z)$  — волновой вектор возмущения; пространственная зависимость возмущений принята в виде  $\exp(ik_r r + ik_z z)$ ;  $r$  — радиальная координата. В результате приходим к дисперсионному уравнению, аналогичному уравнению (9.3) книги [III]:

$$\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Bi}^2} + \frac{\epsilon_0 [\nabla \omega_{pi}^2, \mathbf{k}]}{k_{\perp}^2 \omega_{Bi}} \left\langle \frac{1}{\omega - \mathbf{kV}_{др}^i} - \frac{1}{\omega - \mathbf{kV}_{др}^e} \right\rangle = 0. \quad (1.6)$$

Здесь  $\langle \dots \rangle$  — среднее по скоростям частиц; предполагается, что распределение частиц по скоростям максвелловское с пространственно однородной температурой  $T$ ;  $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_0 / M$  — квадрат плазменной (ленгмюровской) частоты;  $k_{\perp}^2 = k_r^2 + k_z^2$ .

Разлагая знаменатели в (1.6) в ряд по малому отношению  $\mathbf{kV}_{др} / \omega$ , приходим к выражению для квадрата частоты

$$\omega^2 = - \frac{2\nabla p \nabla \ln B_0}{M_i n_0} \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2}, \quad (1.7)$$

где  $p = 2n_0 T$  — равновесное давление плазмы. Видно, что при

$$\nabla p \nabla \ln B_0 > 0 \quad (1.8)$$

имеет место неустойчивость с инкрементом порядка\*

$$\gamma \equiv \text{Im } \omega \simeq v_{Ti} / \sqrt{aR}, \quad (1.9)$$

где  $a = (\partial \ln p / \partial r)^{-1}$  — характерный размер неоднородности плазмы;  $v_{Ti} = \sqrt{2T/M_i}$  — тепловая скорость ионов.

Таким образом, из рассмотренного примера следует, что магнитный дрейф частиц приводит к таким же эффектам, как и гравитационный, при

$$v_{Ti}^2 / R \simeq g. \quad (1.10)$$

\* Символ  $\simeq$  здесь и далее означает равенство по порядку величины.

Аналогию между гравитационным и магнитным дрейфами использовали в книге [II] с целью модельного рассмотрения желобковой неустойчивости плазмы, вызываемой неблагоприятной кривизной силовых линий магнитного поля, т. е. такой кривизной, что  $\nabla\rho\nabla \ln B_0 > 0$  [см. (1.8)]. Это позволило вскрыть некоторые основные закономерности желобковой неустойчивости плазмы в магнитных ловушках в рамках модели магнитного поля с прямыми силовыми линиями. Теперь перейдем к анализу желобковой неустойчивости с учетом реальной геометрии магнитного поля. Такой переход от модельного анализа к строгому совершим постепенно. Строгий анализ желобковой неустойчивости плазмы в магнитных ловушках начнем с гл. 3. Что касается данной главы и гл. 2, то, хотя здесь и получаются не только качественные, но и количественные результаты, способ их получения в этих главах не является строгим, он основан на отмеченной выше аналогии между эффектами гравитационного и магнитного дрейфов частиц. При этом, наряду с простотой изложения, преследуется цель дать представление о желобковой неустойчивости как о явлении, связанном с кинетикой заряженных частиц, дрейфующих под действием кривизны магнитного поля. (В гл. 3 и некоторых последующих желобковая неустойчивость трактуется как явление гидромагнитное, т. е. описываемое уравнениями одножидкостной магнитной гидродинамики, см. также п. 3 § 9.1 книги [II].)

Отличие данной главы от гл. 2 состоит в том, что в данной главе рассматриваются магнитные ловушки в отсутствие шира магнитного поля, тогда как в гл. 2 предполагается наличие шира. (О шире магнитного поля см. также гл. 12 книги [II].)

Выше была рассмотрена конфигурация магнитного поля (1.5) с кривизной, не зависящей от координаты вдоль силовой линии этого поля. При этом критерий желобковой неустойчивости (1.8) определяется локальными характеристиками магнитного поля. В реальных магнитных ловушках кривизна силовых линий, вообще говоря, есть функция продольной координаты. В связи с этим возникает вопрос о выводе критерия неустойчивости, аналогичного (1.8), для ловушек с магнитным полем переменной кривизны. Такой критерий выводится в § 1.2. В последующих параграфах обсуждаются следствия, вытекающие из этого критерия

для различных типов магнитных ловушек. При этом отдельно рассматриваются адиабатические ловушки (§ 1.3—1.5) и мультипольные ловушки без продольного поля (§ 1.6). При анализе адиабатических ловушек обсуждается желобковая неустойчивость плазмы в аксиально-симметричной ловушке (§ 1.3); устойчивость плазмы в ловушке с минимумом  $B$  ( $\min B$ ) (§ 1.4); стабилизирующее действие проводящих торцов и разновидность желобковой неустойчивости плазмы большого давления, называемая *баллонной* неустойчивостью (§ 1.5). В § 1.6, посвященном мультипольным ловушкам, разъясняется вопрос о равновесии плазмы в таких ловушках и рассматривается устойчивость плазмы малого и большого давления, удерживаемой в этих ловушках.

Строгое обоснование некоторых выводов, сделанных в данной главе, требует использования криволинейных координат. Сведения об этих координатах приведены в приложении 1 к данной главе. Необходимые для той же цели общие условия равновесия плазмы в магнитных ловушках без шира содержатся в приложении 2.

## **§ 1.2. Критерий устойчивости плазмы в поле сложной геометрии. Усредненный магнитный дрейф**

Как отмечалось в § 9.1 книги [II] (см. также § 1.1), гравитационный дрейф вызывает желобковую неустойчивость, если  $\mathbf{g} \nabla n_0 < 0$  [см. уравнение (1.1)]. При  $\mathbf{g} \nabla n_0 > 0$  он благоприятствует устойчивости плазмы: стабилизирует некоторые возмущения, нарастающие при  $\mathbf{g} = 0$  (см. § 9.5, 9.6 книги [III]). Учитывая это и основываясь на аналогии между эффектами кривизны и гравитационной силы, попытаемся сформулировать критерий, позволяющий различать конфигурации магнитного поля, благоприятные или неблагоприятные с точки зрения теории устойчивости.

Согласно § 1.1, роль гравитационной силы  $M_i \mathbf{g}$  в случае кривого поля играет величина  $M_i \mathbf{g}_{\text{эфф}}$ , определенная соотношением (1.4). Поэтому критерий устойчивости плазмы в кривом поле должен отличаться от критерия устойчивости плазмы в гравитационном поле  $\mathbf{g} \nabla n_0 > 0$  прежде всего заменой  $\mathbf{g}$  на  $\mathbf{g}_{\text{эфф}}$ . Однако  $\mathbf{g}$  не зависит ни от скорости частиц, ни от координаты вдоль силовой линии, тогда как  $\mathbf{g}_{\text{эфф}}$  зависит, вообще говоря, от того и другого. Кроме того,

в случае прямого поля  $\nabla n_0$  не есть функция продольной координаты, тогда как в кривом поле пространственное распределение частиц может зависеть от этой координаты. Поэтому помимо замены  $\mathbf{g}$  на  $\mathbf{g}_{\Phi}$  критерий устойчивости (9.22) книги [II] нужно еще соответствующим образом усреднить по скоростям и координатам. Первым шагом к этому является представление  $\mathbf{g} \nabla n_0$  в виде интеграла по скоростям

$$\mathbf{g} \nabla n_0 \rightarrow \int \mathbf{g} \nabla f_0 dv. \quad (1.11)$$

Затем усредняем этот результат по силовой линии, производя для этого интегрирование по объему какой-либо силовой трубки, окружающей эту силовую линию. Тогда получаем, что устойчивости благоприятствует такая конфигурация поля, для которой

$$\int d\mathbf{r} \int M_i \mathbf{g}_{\Phi} \nabla f_0 dv > 0, \quad (1.12)$$

т. е.

$$\int d\mathbf{r} \sum_{i, e} M \int dv (v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2) \nabla f_0 \nabla \ln B_0 < 0. \quad (1.13)$$

В случае плазмы со скалярным давлением это означает, что

$$\int d\mathbf{r} \nabla p \nabla \ln B_0 < 0. \quad (1.14)$$

Критерии (1.13), (1.14) нельзя рассматривать как строгие, поскольку они получены на основе качественных соображений. В дальнейшем они будут уточнены. При этом окажется что строгие критерии особенно существенно отличаются от приведенных выше в условиях, при которых относительные градиенты магнитного поля и давления сравнимы. Поэтому здесь мы примем обратное, полагая, что относительный градиент давления велик по сравнению с градиентом магнитного поля,  $a \ll R$ .

Представим элемент объема в виде

$$d\mathbf{r} = (dl/B_0) d\Phi, \quad (1.15)$$

где  $dl$  — элемент длины вдоль силовой трубки, а  $d\Phi$  — магнитный поток, проходящий через сечение трубки  $dS$ :

$$d\Phi = B_0 dS. \quad (1.16)$$

Используя постоянство давления и магнитного потока вдоль трубки, представим (1.14) в виде

$$\int d\Phi \nabla p \int (dl/B_0) \nabla_{\perp} \ln B_0 < 0. \quad (1.17)$$

Теперь учтем одно из свойств безвихревого магнитного поля — независимость от поперечных координат величины  $B_0 dl$ ,  $\nabla_{\perp} (B_0 dl) = 0$ . Это следует из соотношений, приведенных в приложении 1 к гл. 1. В частном случае поля (1.5)  $B_0 \sim 1/r$ ,  $dl = r d\varphi$ , так что указанное равенство очевидно. Используя это свойство и сделав в левой части неравенства (1.17) преобразование

$$(dl/B_0) \nabla_{\perp} \ln B_0 = - (1/2) \nabla_{\perp} dl/B_0, \quad (1.18)$$

приведем его к виду

$$\int d\Phi \nabla_{\perp} p \nabla_{\perp} U > 0, \quad (1.19)$$

где

$$U = \int dl/B_0. \quad (1.20)$$

Из (1.19) следует, что кривизна магнитного поля должна благоприятствовать устойчивости, если

$$\nabla p \nabla U > 0. \quad (1.21)$$

Поскольку  $U$  растет с убыванием магнитного поля, то условие (1.21) означает, что благоприятна ситуация, когда модуль магнитного поля имеет минимум в области плазмы, возрастая к ее границе. Поле такой конфигурации называется *магнитной ямой*, или полем с  $\min B$ .

Учитывая сказанное, приходим к следующему рецепту введения  $\mathbf{g}_{\phi\phi}$  в случае поля сложной геометрии:

$$\mathbf{g}_{\phi\phi} = (2T/M_i) \nabla \ln U. \quad (1.22)$$

При таком подходе причиной желобковой неустойчивости является дрейф частиц в скрещенных полях  $\mathbf{g}_{эфф}$  и  $\mathbf{V}_0$ .

### § 1.3. Желобковая неустойчивость плазмы в аксиально-симметричной адиабатической ловушке

Покажем, что в случае аксиально-симметричной адиабатической ловушки критерий (1.21) не удовлетворяется, т. е. что плазма в такой ловушке неустойчива (в рамках принятых выше предположений о максвелловском распределении частиц по скоростям и слабой неоднородности магнитного поля по сравнению с неоднородностью плазмы). Индекс «нуль» у стационарного магнитного поля  $\mathbf{V}_0$  опускается.

Мы считаем, что давление плазмы и связанный с градиентом давления ток в плазме пренебрежимо малы. При этом магнитное поле описывается уравнениями  $\text{rot } \mathbf{V} = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{V} = 0$ . Введем вместо  $\mathbf{V}$  потенциал  $\Psi$ ,  $\mathbf{V} = \nabla \Psi$ . В аксиально-симметричном случае уравнение для потенциала  $\Delta \Psi = 0$  сводится к следующему:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.23)$$

Это уравнение просто решить при малых  $r$ , чем мы и ограничимся. Если при  $r = 0$  магнитное поле равно  $B_0(z)$ , то при  $r \neq 0$ , как следует из (1.23),

$$\Psi = \int^z B_0(z) dz - \frac{r^2}{4} \frac{\partial B_0(z)}{\partial z}. \quad (1.24)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} B_z(z, r) &= B_0(z) - \frac{r^2}{4} \frac{\partial^2 B_0(z)}{\partial z^2}; \\ B_r(z, r) &= -\frac{r}{2} \frac{\partial B_0(z)}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Интеграл  $U$  в этом приближении сводится к следующему:

$$U = \int \frac{dl}{B} = \int \frac{dz}{B_z} = \int \frac{dz}{B_0} \left( 1 + \frac{r^2}{4} \frac{1}{B_0} \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} \right). \quad (1.26)$$

Здесь  $r$  — радиальная координата силовой линии, зависящая от  $z$ . Она определяется из уравнения

$$\frac{dr}{dz} = \frac{B_r}{B_z} \approx -\frac{r}{2} \frac{\partial \ln B_0}{\partial z}, \quad (1.27)$$

т. е. приближенно

$$r^2 = r^2(0) B_0(0)/B_0(z), \quad (1.28)$$

где  $r(0)$  — радиальное расстояние до силовой линии при  $z = 0$ .

Интегрирование в (1.26) проводится по области, занятой плазмой. Предполагается, что частицы удерживаются в области конечных  $z$  из-за отражения от магнитных пробок при больших  $z$ .

Видно, что  $U$  является растущей функцией  $r(0)$ , вследствие чего условие (1.21) не может быть удовлетворено ( $\partial p/\partial r < 0$ ). Поэтому усредненный магнитный дрейф неблагоприятен, а в плазме, удерживаемой в ловушке, должна развиваться желобковая неустойчивость.

Согласно (1.26), скорость нарастания с радиусом функции  $U$  определяется интегралом от квадрата производной  $\partial B_0/\partial z$ . Поэтому всякое дополнительное гофрирование поля ухудшает устойчивость плазмы.

#### § 1.4. Устойчивость плазмы в адиабатической ловушке с $\min B$

В предыдущем параграфе была показана неустойчивость плазмы в адиабатических ловушках, обладающих аксиальной симметрией. Из этого, однако, не вытекает, что неустойчивой должна быть плазма и во всякой аксиально-несимметричной ловушке. Чтобы убедиться в том, что в аксиально-несимметричном поле плазма может оказаться более устойчивой, вычислим  $\int dl/B$  для некоторых примеров таких полей и покажем, что в отличие от случая аксиальной симметрии он убывает, а не нарастает к периферии ловушки.

Пусть помимо обычного поля пробочной конфигурации в плазме имеется еще мультипольное поле, так что

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{проб}} + \mathbf{B}_{\text{мульти}}, \quad (1.29)$$



где  $\mathbf{B}_{\text{проб}}$  — поле (1.25), а  $\mathbf{B}_{\text{мульти}}$  имеет компоненты

$$\begin{aligned} B_{r \text{ мульти}} &= -B_1 n (r/a_0)^{n-1} \cos n\varphi; \\ B_{\varphi \text{ мульти}} &= B_1 n (r/a_0)^{n-1} \sin n\varphi. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Поле  $\mathbf{B}_{\text{мульти}}$  может быть создано пропусканием токов по прямолинейным стержням, параллельным оси ловушки (с противоположным направлением тока в соседних стержнях). В случае достаточно длинных и тонких стержней  $B_1 = 2I/ca_0$ , где  $I$  — ток в стержнях, а  $a_0$  — расстояние от оси ловушки до стержня.

Приближенная формула (1.26) для  $U$  остается в силе, однако теперь  $r(z)$  надо вычислять заново, учитывая, что  $B_r$  складывается из (1.25) и (1.30). Вместо (1.27) имеем

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{r}{2} \frac{\partial \ln B_0}{\partial z} - \frac{B_1}{B_0} n \left( \frac{r}{a_0} \right)^{n-1} \cos n\varphi. \quad (1.31)$$

Функция  $\cos n\varphi$  должна браться при  $\varphi = \varphi(z)$ , где  $\varphi(z)$  определяется из уравнения

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{1}{r} \frac{B_{\varphi}}{B_z} \approx \frac{B_1}{B_0} \frac{n}{r} \left( \frac{r}{a_0} \right)^{n-1} \sin n\varphi. \quad (1.32)$$

Рассмотрим простейший случай  $n=2$ . Из (1.31) тогда следует

$$r^2 = r_0^2 \frac{B_0(0)}{B_0(z)} \exp \left[ -4 \int_0^z \frac{B_1}{a_0 B_0} \cos 2\varphi dz' \right]. \quad (1.33)$$

Подставляя этот результат в (1.26) и проводя интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} U &= \int \frac{dz}{B_0} + \frac{r_0^2}{4} B_0(0) \int dz \left\{ \frac{(B'_0)^2}{B_0^4} + \right. \\ &\left. + 4 \frac{B_1 B'_0 \cos 2\varphi}{B_0^4 a_0} \exp \left[ -4 \int_0^z \frac{B_1}{a_0 B_0} \cos 2\varphi dz' \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

При малом  $B_1/B_0$  здесь можно ограничиться учетом членов не выше квадратичных по  $B_1/B_0$ . Примем также, что

$$B_0(z) = B_0(0) (1 + z^2/l^2), \quad (1.35)$$

полагая  $z \ll 1$ . После интегрирования в (1.32) и подстановки  $\varphi(z)$  в (1.34) с учетом сделанных предположений приводим выражение для  $U$  к виду

$$U = \int \frac{dz}{B_0} + \frac{r_0^2}{l^4 B_0(0)} \left[ 1 - 8 \left( \frac{l B_1}{a_0 B_0(0)} \right)^2 \right] \int z^2 dz. \quad (1.36)$$

Видно, что с ростом  $r$  функция  $U$  убывает, если

$$B_1/B_0 > a_0/2 \sqrt{2}l. \quad (1.37)$$

При этом условии в ловушке рассмотренного типа возможно устойчивое удержание плазмы.

Покажем теперь, что характер радиальной зависимости удельного объема  $U$  качественно связан с пространственным ходом модуля магнитного поля. Пусть  $B_0(z)$  имеет параболическую форму (1.35), а  $\mathbf{B}_{\text{мульти}}$  определяется формулами (1.30) с  $n = 2$ , так что

$$\left. \begin{aligned} B_z(r, z) &= B_0 \left( 1 + \frac{z^2}{l^2} - \frac{r^2}{2l^2} \right); \\ B_r &= -\frac{rz}{l^2} B_0 - 2B_1 \frac{r}{a_0} \cos 2\varphi; \\ B_\varphi &= 2B_1 (r/a_0) \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

Ограничиваясь малыми  $r$  и  $z$ , с помощью (1.38) находим

$$\begin{aligned} |B(r, z, \varphi)|^2 &= B_0^2 + B_0^2 \left\{ \frac{2z^2}{l^2} + \left( \frac{2B_1}{B_0} \right)^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{r}{a_0} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{B_0 a_0}{2B_1 l} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Поверхности равного модуля  $B$  имеют вид вложенных друг в друга эллипсоидов, если

$$B_1/B_0 > a_0/2l. \quad (1.40)$$

Из (1.39) видно также, что на каждом внутреннем эллипсоиде модуль  $B$  меньше, чем на внешнем, т. е.  $B$  растет наружу. Поэтому поле такого типа называют полем с  $\min B$ . Из сравнения (1.40) с (1.37) следует, что в поле с  $\min B$  удельный объем убывает к периферии, что соответствует устойчивости.

## § 1.5. Стабилизация торцами. Баллонная неустойчивость

**1. Стабилизация торцами.** В § 1.2 было показано, что в плазме может развиваться желобковая неустойчивость, если средняя кривизна поля имеет неблагоприятное направление (поле в среднем выпукло наружу),  $U'/U > 0$ . Это, однако, не является достаточным условием для неустойчивости: нужно еще, чтобы возмущения типа желобков относились к классу собственных колебаний плазмы, что не всегда имеет место. В частности, возмущения типа желобков отсутствуют, если плазма граничит с проводящими торцами. Для плазмы, находящейся в гравитационном поле, это было показано в § 14.10 книги [II].

При наличии контакта с торцами следует рассматривать неустойчивости, связанные с нежелобковыми возмущениями,  $k_{\parallel} \neq 0$ . Согласно § 14.10 книги [II] находим, что такие возмущения раскисаиваются, если они не слишком отличаются от желобковых, т. е. когда  $k_{\parallel}$  достаточно мало  $(k_{\parallel} c_A)^2 \lesssim |g\kappa|$ . Поскольку  $k_{\parallel} \simeq \pi/L$ , это означает, что при контакте плазмы с торцами неустойчивость может иметь место, если длина системы  $L$  достаточно велика. Критерий неустойчивости, полученный в § 14.10 книги [II], имеет вид

$$L > \pi (Ra/\beta)^{1/2}. \quad (1.41)$$

Если радиус кривизны  $R$  существенно зависит от координаты вдоль силовой линии (и, возможно, является знакопеременным), то вместо  $R$  сюда следует подставить  $(U'/U)^{-1}$ . Тогда по порядку величины получается критерий неустойчивости

$$L \gtrsim \pi [a/\beta (\ln U)']^{1/2}, \quad (1.42)$$

где штрих — производная по радиусу.

Неравенство (1.42) можно понимать как ограничение сверху на давление  $p$ , при котором плазма еще устойчиво удерживается в ловушке с  $\min B$ :

$$\beta_{\max} \simeq \pi^2 a / l^2 (\ln U)'. \quad (1.43)$$

Величину  $\beta_{\max}$  называют иногда *глубиной магнитной ямы*.

Следует иметь в виду, что критерий (1.41) относится к плазме, погонная плотность которой не слишком мала:  $\Pi_e \equiv (\omega_p e a / c)^2 \gg 1$ , т. е.  $\beta > (M_e / M_i) (\rho_i / a)^2$ . При меньших погонных плотностях он должен быть заменен критерием (9.55) книги [II].

**2. Баллонная неустойчивость.** Пусть в среднем кривизна благоприятна  $U'/U < 0$ . Это означает устойчивость плазмы по отношению к желобковым возмущениям. Может, однако, оказаться, что имеются такие отрезки силовой линии, на которых радиус кривизны направлен наружу. Если длина  $L_1$  и радиус кривизны  $R_1$  этих отрезков таковы, что выполняется условие типа (14.74) книги [II]

$$L_1 \gtrsim \pi (R_1 a / \beta)^{1/2}, \quad (1.44)$$

то в соответствии с предыдущим пунктом должна иметь место раскачка нежелобковых возмущений, локализованных на длине  $L_1$ . Такого типа неустойчивость называется *баллонной*.

### § 1.6. Равновесие и устойчивость плазмы в мультипольных ловушках

Геометрия линейной мультипольной ловушки показана на рис. 1.1. Магнитное поле с компонентами  $B_r$ ,  $B_\varphi$  создается токами, протекающими в одном и том же направлении по расположенным в плазме проводникам. Учитывая соотношение  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , магнитное поле можно характеризовать функцией потока  $\Psi(r, \varphi)$ , такой, что

$$B_r = (1/r) \partial \Psi / \partial \varphi; \quad B_\varphi = -\partial \Psi / \partial r. \quad (1.45)$$

Как видно из рис. 1.1, каждая силовая линия, обходящая ось системы, замыкается после одного обхода. Поэтому, как следует из приложения 2 к гл. 1, условие равновесия плазмы нулевого давления в такой ловушке сводится к требованию

$$[\nabla p, \nabla U] = 0, \quad (1.46)$$

где  $U = \int dl/B$  — интеграл, взятый по длине силовой линии. Если вместо цилиндрических координат  $(r, \varphi)$  использовать ортогональные координаты  $(\Psi, \chi)$ , где  $\Psi$  — маг-

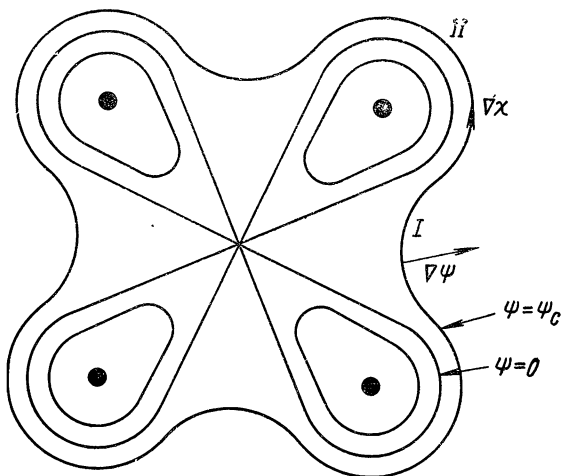


Рис. 1.1. Конфигурация магнитного поля в мультипольной ловушке

нитный поток, проходящий между сепаратрисой и соответствующей силовой линией, а  $\chi$  имеет смысл обобщенного азимута,  $\nabla \chi \nabla \Psi = 0$  (см. рис. 1.1), то из геометрических соображений можно заключить, что  $U$  должно зависеть только от  $\Psi$ , т. е.  $U = U(\Psi)$ . Поэтому  $\nabla U \parallel \nabla \Psi$ , тогда из (1.46) находим, что и давление также должно зависеть только от  $\Psi$ :

$$p = p(\Psi). \quad (1.47)$$

Результат (1.47) остается в силе и при конечных  $\beta$ . В этом случае его можно получить, умножив векторно на  $\nabla \Psi$  уравнение равновесия

$$4\pi \nabla p = [\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}]. \quad (1.48)$$

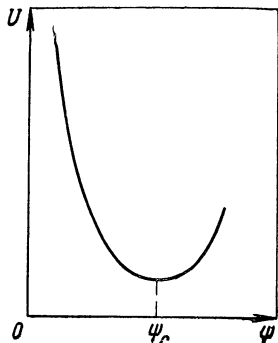


Рис. 1.2. Зависимость  $U$  от  $\Psi$

**1. Желобковая неустойчивость плазмы нулевого давления в мультипольной ловушке.** Как отмечалось в § 1.2, условие устойчивости плазмы нулевого давления с изотропным распределением частиц по скоростям относительно желобковых возмущений имеет вид

$$\nabla p \nabla U \geq 0. \quad (1.49)$$

Покажем, что для мультипольной ловушки это условие выполняется. Поскольку  $dp/d\Psi < 0$ , то достаточно показать, что  $dU/d\Psi < 0$ .

Зависимость  $U = U(\Psi)$  можно качественно выяснить, исходя из геометрических соображений. Как видно из рис. 1.1, при  $\Psi = 0$ , соответствующим силовым линиям сепаратрисы, магнитное поле обращается в нуль. Поэтому  $U(0) = \infty$  (рис. 1.2). С удалением от сепаратрисы магнитное поле отлично от нуля и  $U(\Psi)$  убывает. Это убывание имеет место вплоть до некоторого  $\Psi = \Psi_c$ , после чего  $U(\Psi)$  снова возрастает (см. рис. 1.2). Если при  $\Psi = \Psi_c$  поставить кожух (см. рис. 1.1), то всюду между кожухом и сепаратрисой будет  $dU/d\Psi < 0$ , что и соответствует устойчивости.

**2. Баллонная неустойчивость плазмы конечного давления.** Как и в стабилизированном пробкотроне, поле мультипольной ловушки нарастает к периферии не в каждой точке, а только в среднем. При этом область I на рис. 1.1 дает благоприятный вклад в  $dU/d\Psi$ , тогда как область II является неблагоприятной. Ясно поэтому, что если возмущение локализовано целиком в области II, то оно будет «чувствовать» только неблагоприятную кривизну поля

и вследствие этого может раскачиваться с инкрементом порядка

$$\gamma \simeq v_{Ti}/(aR)^{1/2}, \quad (1.50)$$

где  $a$  — характерный размер градиента давления;  $R$  — радиус кривизны поля в области II. Это *баллонная неустойчивость*. Такого типа возмущение искажает магнитное поле, что должно приводить к подавлению неустойчивости (см. п. 2 § 1.5), если

$$\gamma \lesssim c_A k_{\parallel} \simeq \pi c_A / L, \quad (1.51)$$

где  $L$  — длина области неблагоприятной кривизны;  $c_A$  — скорость Альфвена. Из (1.50) и (1.51) следует, что баллонная неустойчивость не будет развиваться, если

$$\beta \lesssim \pi a R / L^2. \quad (1.52)$$

Это условие определяет максимальное давление гидромагнитно-устойчивой плазмы в мультипольной ловушке.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Криволинейные координаты

При использовании криволинейных координат  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  необходимо указать, о каких проекциях вектора на оси координат идет речь — контравариантных или ковариантных. Контравариантные проекции какого-либо вектора  $\mathbf{A}$ , обозначаемые  $A^i$ , определяются соотношением

$$\mathbf{A} = A^i \partial \mathbf{r} / \partial x^i, \quad (\text{П1.1})$$

тогда как ковариантные, по определению, равны

$$A_i = \mathbf{A} \partial \mathbf{r} / \partial x^i. \quad (\text{П1.2})$$

Связь между  $A_i$  и  $A^i$ , вытекающая из (П1.1), (П1.2), имеет вид

$$A_i = g_{ij} A^j, \quad (\text{П1.3})$$

где

$$g_{ij} = (\partial \mathbf{r} / \partial x^i) \cdot (\partial \mathbf{r} / \partial x^j). \quad (\text{П1.4})$$

Тензор  $g_{ij}$  называется *метрическим*. Он определяет квадрат элемента длины

$$(dl)^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \quad (\text{П1.5})$$

Приведем некоторые результаты тензорного исчисления, касающиеся использования криволинейных координат (обоснование этих результатов можно найти, например, в книге Н. Е. Кочина).

Скалярное и векторное произведения векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  записываются в виде

$$\mathbf{ab} = a_i b^i = a^i b_i = a^i b^j g_{ij}; \quad (\text{П1.6})$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]^i = e^{ijk} a_j b_k / \sqrt{g}; \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_i = \sqrt{g} e^{ijk} a_j b_k. \quad (\text{П1.7})$$

Здесь  $g$  — определитель, составленный из элементов  $g_{ik}$

$$g = |g_{ik}|, \quad (\text{П1.8})$$

а  $e^{ijk} = e_{ijk}$  — единичный полностью антисимметричный тензор.

Дифференциальные операции градиента, дивергенции и ротора выглядят так:

$$(\nabla\varphi)_i = \partial\varphi/\partial x^i; \quad (\text{П1.9})$$

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g} a^i)}{\partial x^i}; \quad (\text{П1.10})$$

$$(\text{rot } \mathbf{a})^i = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ikj} \frac{\partial a_j}{\partial x^k}. \quad (\text{П1.11})$$

Элемент объема  $d\mathbf{r} = dx dy dz$  равен

$$d\mathbf{r} = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (\text{П1.12})$$

Пусть  $x^1, x^2$  — координаты, поперечные силовой линии, а  $x^3$  — продольная, т. е. пусть

$$B^1 = B^2 = 0, \quad B^3 = B. \quad (\text{П1.13})$$

Здесь индекс сверху означает номер контравариантной компоненты. В этих координатах единичный вектор  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{B}/B$  имеет только компоненту  $(\mathbf{e}_0)^3$ , т. е.  $(\mathbf{e}_0)^1 = (\mathbf{e}_0)^2 = 0$ . Поэтому с учетом (П1.1)

$$\mathbf{e}_0 = (\mathbf{e}_0)^3 \partial\mathbf{r}/\partial x^3. \quad (\text{П1.14})$$



Возводя обе части этого равенства в квадрат, учитывая, что  $e_0^2 = 1$  и вспоминая определение (П1.4), находим

$$(e_0)^3 = 1/\sqrt{g_{33}}. \quad (\text{П1.15})$$

Поскольку  $B = \mathbf{B}e_0 = \mathbf{B}(e_0)^3 \partial r / \partial x^3$ , то из (П1.15) и (П1.1) находим

$$B^3 = B/\sqrt{g_{33}}. \quad (\text{П1.16})$$

Для ковариантных компонент, в соответствии с (П1.3), имеем

$$B_k = Bg_{k3}/\sqrt{g_{33}}; (e_0)_k = g_{k3}/\sqrt{g_{33}}. \quad (\text{П1.17})$$

Из  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  и (П1.10) следует

$$\partial (B \sqrt{g} / \sqrt{g_{33}}) / \partial x^3 = 0, \quad (\text{П1.18})$$

т. е. величина  $B\sqrt{g}/\sqrt{g_{33}}$  остается неизменной вдоль силовой линии и зависит только от  $x^1, x^2$ .

В качестве переменных  $x^1, x^2$  могут быть взяты любые функции обычных координат  $x, y, z$ , остающиеся неизменными вдоль силовой линии. В частности, можно конкретизировать эти переменные так, чтобы

$$\mathbf{B} = [\nabla x^1, \nabla x^2]. \quad (\text{П1.19})$$

Взяв отсюда контравариантную компоненту и используя (П1.7), находим, что в этих переменных

$$B \sqrt{g} / \sqrt{g_{33}} = 1. \quad (\text{П1.20})$$

Координаты  $x^1, x^2$ , удовлетворяющие условию (П1.19), часто обозначаются через  $\alpha, \beta$ .

С помощью формул (П1.11) и (П1.17) можно получить, что безвихревое поле,  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ , удовлетворяет условию

$$\partial (\sqrt{g_{33}} B) / \partial x^i = \partial (g_{i3} B / \sqrt{g_{33}}) / \partial x^3, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{П1.21})$$

Элемент длины силовой линии, согласно (П1.5), в рассматриваемых координатах равен

$$dl = \sqrt{g_{33}} dx^3. \quad (\text{П1.22})$$

Учитывая, что  $dr = dS dl$ , и используя (П1.12), для площади поперечного сечения  $dS$  имеем

$$dS = dx^1 dx^2 \sqrt{g} / \sqrt{g_{33}}. \quad (\text{П1.23})$$

Элемент магнитного потока  $d\Phi \equiv BdS$  с учетом (П1.23) можно представить в виде

$$d\Phi = (B \sqrt{g} / \sqrt{g_{33}}) dx^1 dx^2. \quad (\text{П1.24})$$

В координатах  $\alpha, \beta$ , согласно (П1.20), это означает просто

$$d\Phi = d\alpha d\beta. \quad (\text{П1.25})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Условия равновесия плазмы в магнитных ловушках без шира

Как будет показано ниже (см. приложение 2 к гл. 4) в плазме поперек магнитного поля протекает равновесный ток плотностью (при  $p_{\perp 0} = p_{\parallel 0} = p_0$ )

$$\mathbf{j}_{\perp 0} = c [\mathbf{e}_0, \nabla p_0] / B. \quad (\text{П1.26})$$

Этот результат получается также как следствие гидростатического уравнения

$$\nabla p_0 = [\mathbf{j}_0, \mathbf{B}] / c. \quad (\text{П1.27})$$

Уравнение (П1.26) определяет только часть тока, перпендикулярного  $\mathbf{B}$ . Кроме того, в плазме может течь ток вдоль силовых линий,  $\mathbf{j}_{\parallel 0} \equiv \lambda \mathbf{B}$ . Он должен быть таким, чтобы  $\text{div} (\mathbf{j}_{\perp 0} + \mathbf{j}_{\parallel 0}) = 0$ . Для плазмы нулевого давления,  $\text{rot} \mathbf{B} \approx 0$ , это означает

$$\mathbf{B} \nabla \lambda = 2 \nabla B [\mathbf{B}, \nabla p_0] / B^3. \quad (\text{П1.28})$$

Левая часть равенства в координатах  $x^1, x^2, x^3$ , введенных в приложении 1 этой главы, записывается как  $(B / \sqrt{g_{33}}) \partial \lambda / \partial x^3$ . Поэтому из (П1.26) следует

$$\partial \lambda / \partial x^3 = 2 \sqrt{g_{33}} \nabla B [\mathbf{B}, \nabla p_0] / B^4. \quad (\text{П1.29})$$

Это уравнение дает единственное решение для  $\lambda$  при условии, что правая часть равенства ортогональна решению однородного уравнения, т. е. при

$$\oint \nabla B [\mathbf{B}, \nabla p_0] dl / B^4 = 0. \quad (\text{П1.30})$$

Здесь учтено, что  $\sqrt{g_{33}} dx^3 = dl$ , а интегрирование производится по участку силовой линии, лежащему в плазме.

Преобразуем условие равновесия (П1.30) к более удобному виду. Для этого предварительно запишем его в координатах  $x^1, x^2, x^3$ :

$$\int \frac{e^{ijk}}{\sqrt{g}} \frac{\partial p_0}{\partial x^i} \frac{\partial B}{\partial x^j} \frac{g_{k3} dx^3}{B^3} = 0. \quad (\text{П1.31})$$

Здесь все индексы вверху у  $x$  означают контравариантность, а  $B^3$  — это куб магнитного поля. Производную  $\partial p_0 / \partial x^i$  можно вынести за знак интеграла, так как  $p_0$  не зависит от  $x^3$ . Кроме того, из-под интеграла можно вынести и затем сократить величину  $(\sqrt{g_{33}}/B \sqrt{g})$ , — это следует из (П1.18). Затем представляем  $(1/B^2) \partial B / \partial x^j$  как  $-(B/2) \partial (1/B^2) / \partial x^j$ , а оставшуюся перед производной по  $\partial / \partial x^j$  функцию  $B g_{k3} / \sqrt{g_{33}}$  вносим под знак производной; последнее оправдывается формулой (П1.21). В результате получаем

$$e^{ijk} \frac{\partial p_0}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \int \frac{g_{k3}}{B \sqrt{g_{33}}} dx^3 = 0. \quad (\text{П1.32})$$

Здесь  $\partial / \partial x^j$  вынесено за знак производной, так как можно считать  $j \neq 3$ . Кроме того, вследствие  $(i, j) \neq 3$  должно быть  $k = 3$ . Поэтому (П1.32) можно записать еще и так:

$$[\nabla p_0 \nabla U] = 0, \quad (\text{П1.33})$$

где

$$U = \int dl/B. \quad (\text{П1.34})$$

Формула (П1.33) означает, что равновесное давление должно быть постоянно на поверхности постоянного  $U$ , т. е.

$$p_0 = p_0(U). \quad (\text{П1.35})$$

Смысл величины  $U$  можно пояснить так. Пусть

$$dV \equiv \int dS dl \quad (\text{П1.36})$$

объем какой-либо силовой трубки поперечного сечения  $dS = dS(l)$ . Этой силовой трубке соответствует магнитный поток

$$d\Phi \equiv B(l) dS(l), \quad (\text{П1.37})$$

постоянный вдоль трубки, т. е. не зависящий от  $l$ . Из (П1.36) и (П1.37) следует, что введенное выше  $U$  есть производная от объема трубки по магнитному потоку

$$U = dV/d\Phi. \quad (\text{П1.38})$$

## Глава 2

ЖЕЛОБКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ  
В ЗАМКНУТЫХ МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ С ШИРОМ

## § 2.1. Введение

В отличие от гл. 1 здесь рассмотрим возможность развития желобковой неустойчивости плазмы при наличии шира магнитного поля. В § 2.2 выясним этот вопрос для плазмы, находящейся в цилиндрически симметричном магнитном поле с винтовыми силовыми линиями. (Моделью такой криволинейной конфигурации может служить плоский слой плазмы, находящийся в прямолинейном магнитном поле; исследование желобковой неустойчивости в рамках такой модели проводится в приложении 1 к данной главе.)

Интересно также выяснить понятия усредненного магнитного дрейфа и шира для общего случая тороидальных ловушек, что и делается в § 2.3.

§ 2.2. Шир в случае поля  
цилиндрической симметрии.  
Критерий Сайдема для плазменного цилиндра

Согласно гл. 12 книги [II] (см. также приложение 1 к данной главе), одним из факторов, существенно влияющих на устойчивость плазмы, является шир. Понятие шира там было введено для поля с прямыми силовыми линиями. Теперь обобщим это понятие для простейшего случая кривого поля — цилиндрически симметричного поля с винтовыми силовыми линиями

$$\mathbf{B} = (0, B_\varphi, B_z) \quad (2.1)$$

и получим критерий стабилизации широм желобковой неустойчивости плазменного цилиндра.

1. Шир. Соответствующие полю (2.1) единичные орты  $\mathbf{e}_0 \equiv \mathbf{B}/B$  и  $\mathbf{e}_b \equiv [\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_z]$  связаны с  $\mathbf{e}_z$  и  $\mathbf{e}_\varphi$  соотношениями:

$$\mathbf{e}_0 = h_z \mathbf{e}_z + h_\varphi \mathbf{e}_\varphi; \quad \mathbf{e}_b = h_z \mathbf{e}_\varphi - h_\varphi \mathbf{e}_z, \quad (2.2)$$

где  $h_z = B_z/B$ ,  $h_\varphi = B_\varphi/B$ . Поскольку стационарные параметры плазмы и магнитного поля не зависят от  $\varphi$  и  $z$ , то можно принять [ср. с (12.4) книги [III]]

$$\psi(r) = \exp(ik_z z + im\varphi)\psi(r). \quad (2.3)$$

Волновые числа  $k_\parallel$  и  $k_b$  выражаются через  $k_z$  и  $m$  так:

$$k_\parallel = k_z h_z + (m/r) h_\varphi; \quad k_b = (m/r) h_z - k_z h_\varphi. \quad (2.4)$$

Полагая  $k_\parallel(r_0) = 0$ , для  $k_\parallel(r)$  получаем выражение, аналогичное (12.10) книги [III]:

$$k_\parallel(r) = (h_z^2 r k_b \partial \mu / \partial r)_{r=r_0} (r - r_0), \quad (2.5)$$

где

$$\mu = B_\varphi / r B_z. \quad (2.6)$$

Продольное волновое число  $k_\parallel$  зависит от координат, если

$$d\mu/dr \neq 0. \quad (2.7)$$

Величина  $2\pi/\mu$  представляет собой шаг силовой линии. Поэтому в случае цилиндрической симметрии шир имеет место, если шаг поля зависит от радиуса. Мерой шира (см. § 12.1 книги [II]) теперь является величина

$$\Theta = ar h_z^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{B_\varphi}{r B_z} \right). \quad (2.8)$$

Производную  $d\mu/dr$  можно связать с плотностью тока, протекающего вдоль силовых линий  $j_\parallel$ . Для этого умножим уравнение Максвелла  $\text{rot } \mathbf{B} = (4\pi/c) \mathbf{j}$  на единичный вектор  $\mathbf{e}_0$ . Тогда

$$\frac{d\mu}{dr} = \frac{4\pi}{c} \frac{j_\parallel}{r h_z B} - \frac{2B_\varphi}{r^2 B_z}. \quad (2.9)$$

Видно, что радиальная зависимость шага существенно зависит от плотности тока  $j_\parallel$  при

$$j_\parallel > (c/2\pi) (B_\varphi B_z / r B). \quad (2.10)$$

В частности, это имеет место в случае, когда поле  $B_\phi$  создается токовым слоем, расположенным вдали от оси цилиндра. При этом

$$B_\phi \simeq 4\pi a j_{\parallel} / c, \quad (2.11)$$

где  $a$  — ширина слоя. Видно, что при  $a \ll r$  правая часть (2.10) мала по сравнению с левой. В этом предельном случае уравнениям (2.5), (2.9) можно придать смысл, не связанный с понятием шага силовых линий. Поскольку  $B_\phi$  меняется быстрее, чем  $r$ , то

$$\frac{d\mu}{dr} \simeq \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{B_\phi}{B_z} \right), \quad (2.12)$$

где, согласно (2.9),

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{B_\phi}{B_z} \right) = \frac{4\pi}{c} j_{\parallel} \frac{B}{B_z^2}. \quad (2.13)$$

Радиус  $r$  при этом из уравнения (2.5) выпадает, и последнее переходит в (12.10) книги [II]. Радиальная зависимость  $k_{\parallel}$  в этом приближении целиком определяется производной тангенса угла наклона силовой линии к оси  $z$ , а эта производная, в свою очередь, однозначно связана с плотностью тока  $j_{\parallel}$ . Таков переход от цилиндрической симметрии к плоской, рассмотренной в § 12.1 книги [III].

Из (2.9) следует, что шаг силовых линий зависит от радиуса также и в том случае, когда ток в рассматриваемом элементе объема отсутствует или весьма мал:

$$j_{\parallel} \ll (c/2\pi) B_\phi B_z / r B. \quad (2.14)$$

Поле  $B_\phi$  в этом случае обусловлено токами, протекающими вблизи оси цилиндра, в плазме либо в сторонних проводниках. При этом  $\mu$  зависит от радиуса по закону

$$\mu \sim 1/r^2. \quad (2.15)$$

Своеобразная ситуация имеет место в случае пространственно-однородного распределения тока при наличии большого магнитного поля  $B_z$ ,  $j_{\parallel} \approx j_z = \text{const}$ ,  $B_z \approx B$ . При

этом  $B_\phi = (2\pi/c) r j_z$ , а шаг силовых линий постоянен,  $d\mu/dr = 0$ , так что волновое число  $k_{||}$  не зависит от радиуса.

**2. Желобковая неустойчивость и критерий стабилизации Сайдема.** Силовые линии поля (2.1) обладают кривизной, направленной к центру цилиндра. Поэтому в плазме со спадающим по радиусу давлением из-за неблагоприятного магнитного дрейфа частиц может развиваться желобковая неустойчивость. Вместе с тем, магнитное поле (2.1) обладает широм, а шир, согласно гл. 12 книги [II], играет стабилизирующую роль. Благодаря этому желобковой неустойчивости все же может и не быть.

Влияние шира на желобковую неустойчивость в случае, когда последняя вызывается гравитационным дрейфом, рассмотрено в приложении 1 к данной главе. Чтобы применить результаты приложения 1 к плазменному цилиндру, нужно заменить в них  $g$  значением  $g_{\phi\phi}$ , а в качестве  $k'_{||}/k_b$  подставить то, что следует из (2.5).

Выражение для  $g_{\phi\phi}$  находим с помощью правила соответствия (1.4), учитывая, что

$$1/R = (1/r) (B_\phi/B)^2. \quad (2.16)$$

Тогда

$$(g\kappa)_{\phi\phi} = \frac{2}{n_0 M_i} \frac{\partial p_0}{\partial r} \left( \frac{B_\phi}{B} \right)^2;$$

$$k'_{||}/k_b = r (d\mu/dr) (B_z/B)^2. \quad (2.17)$$

По аналогии с приложением 1 заключаем, что при достаточно малом шире,  $d\mu/dr \rightarrow 0$ , в плазменном цилиндре должна развиваться желобковая неустойчивость с инкрементом  $\sqrt{-(g\kappa)_{\phi\phi}}$ , т. е.

$$\gamma = \sqrt{-2 \frac{\partial p_0}{\partial r} \frac{1}{M_i n_0 R}} \simeq \frac{v_{Ti}}{\sqrt{aR}}. \quad (2.18)$$

Эти возмущения локализованы вблизи поверхности  $r = r_0$ , на которой  $k_{||}(r_0) = 0$ , т. е. [см. (2.4)] вблизи  $r_0$ , удовлетворяющего соотношению

$$k_z B_z(r_0) + (m/r) B_\phi(r_0) = 0. \quad (2.19)$$

Если шир не слишком мал, то желобковая неустойчивость должна подавляться. Учитывая (П2.9), по правилам соответствия (2.17) получаем, что для этого должно быть

$$\frac{1}{4} \left( \frac{d \ln \mu}{dr} \right)^2 > - \frac{8\pi}{rB_z^2} \frac{dp_0}{dr}. \quad (2.20)$$

Это критерий стабилизации Сайдема для цилиндрического плазменного шнура.

### § 2.3. Усредненный магнитный дрейф и шир в случае плазмы, удерживаемой в тороидальной ловушке

**1. Тороидальные ловушки с магнитными поверхностями.** Плазма может оставаться в ограниченном объеме, если частицы — все или часть — не испытывают отражения от пробок, т. е. движутся в каком-либо одном направлении вдоль силовых линий. При этом должны оставаться в ограниченном объеме и сами силовые линии. Такого типа магнитные системы называют *замкнутыми ловушками*.

Центральное место среди обширного класса замкнутых ловушек занимают такие, в которых силовые линии лежат на поверхностях тороидов, вложенных друг в друга. Это тороидальные ловушки с магнитными поверхностями.

**2. Критерий благоприятного магнитного дрейфа для ловушек с магнитными поверхностями.** Магнитное поле замкнутых ловушек является кривым, так что частицы, находящиеся в такой ловушке, должны совершать магнитный дрейф. Это может служить причиной желобковой неустойчивости, если интеграл  $\oint dl/B$  растет к периферии плазмы (см. § 1.2). Напротив, магнитный дрейф должен играть стабилизирующую роль, если  $U$  падает к периферии, т. е. в случае поля со средним минимумом  $B$ .

Форма записи критерия благоприятного дрейфа  $\nabla \rho \nabla U > 0$  [см. (1.21)] недостаточно удобна для использования в задаче о замкнутых ловушках, поскольку  $U$  относится к силовой линии, вообще говоря, много раз обходящей тороид по большому радиусу. Этот критерий, однако, можно записать иначе — через поверхностные функции. Учтем, что на каждой рациональной магнитной



поверхности, такой, на которой силовые линии замыкаются через  $N$  оборотов, интеграл  $U$  однозначно связан с производной от объема  $V$  соответствующего тороида по продольному магнитному потоку  $\Phi$  в этом тороиде:

$$\oint dl/B = NdV/d\Phi. \quad (2.21)$$

Поэтому условие благоприятного магнитного дрейфа (1.21) можно представить как

$$\frac{dp}{dV} \frac{\partial}{\partial V} \frac{dV}{d\Phi} > 0. \quad (2.22)$$

Учитывая, что  $d\Phi/dV > 0$ ,  $dp/dV < 0$ , получаем

$$d^2V/d\Phi^2 < 0. \quad (2.23)$$

Замкнутые ловушки, для которых это условие удовлетворяется, называют системами с  $V'' < 0$ .

**3. Шир в случае поля тороидальной ловушки.** Выясним теперь, что представляет собой шир в случае поля тороидальной ловушки. К этому понятию мы подойдем так же, как и в § 12.1 книги [II] и § 2.2, рассматривая координатную зависимость продольного волнового числа. Полагаем, что возмущенный потенциал имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(V) \exp [2\pi i (m\theta + n\zeta)]. \quad (2.24)$$

Здесь используется система координат, в которой силовые линии являются прямыми, а в качестве радиальной координаты взят объем тороида  $V$ . (Координаты  $\theta$  и  $\zeta$  — аналоги азимута и  $z$ -координаты в случае цилиндрической симметрии. Подробнее о криволинейных координатах  $\theta$ ,  $\zeta$ , интегральных характеристиках магнитного поля и условиях равновесия плазмы в тороидальных ловушках см. в приложениях 2, 3 к данной главе.)

Исходя из определения  $k_{\parallel}$  (см. уравнение (12.5) книги [II]), используя правила дифференцирования в криволинейных координатах и повторяя выкладки, аналогичные проделанным в § 12.1 книги [II] и § 2.2, приходим к искомому результату:

$$k_{\parallel} = \frac{V - V_0}{V \sqrt{g_{11}}} k_b \frac{(d\Phi/dV)^2}{B^2 \sqrt{g}} \frac{d}{dV} \left( \frac{d\chi}{d\Phi} \right). \quad (2.25)$$

Здесь  $k_b$  определено соотношением

$$i k_b \psi = \mathbf{e}_b \nabla \psi = \left( \left[ \frac{\mathbf{B}}{B}, \frac{\nabla V}{|\nabla V|} \right] \nabla \psi \right), \quad (2.26)$$

где  $g_{11}$  — компонента метрического тензора  $g_{ik}$  в координатах  $(V, \theta, \zeta)$ ;  $g = |g_{ik}|$ ;  $\chi$ ,  $\Phi$  — поперечный и продольный магнитные потоки.

Таким образом, «радиальная» зависимость  $k_{\parallel}$  имеет место, если от радиуса зависит угол наклона силовых линий к координатным осям  $\theta$ ,  $\zeta$ , т. е. если  $d\chi/d\Phi \neq \text{const}$ .

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

##### **Подавление широм желобковой неустойчивости плазмы в поле тяжести. Критерий Сайдема для плазмы в поле тяжести**

При наличии силы тяжести, направленной против градиента плотности, в плазме развивается желобковая неустойчивость (см. § 9.1 книги [II]). Шир препятствует развитию желобковой неустойчивости, поскольку при  $\Theta \neq 0$  невозможно само существование желобковых возмущений с  $k_{\parallel} = 0$ . При этом характерное  $k_{\parallel}$ , как вытекает из (12.20) книги [II], не может быть существенно меньшим

$$k_{\parallel \text{опт}} \simeq \Theta/a. \quad (П2.1)$$

В то же время раскачка возмущений невозможна, если  $k_{\parallel} \gtrsim \sqrt{|kg|}/c_A$ . (Это относится к не слишком разреженной плазме, см. книгу [II].) Отсюда получается оценка для шира, существенно влияющего на желобковую неустойчивость:

$$\Theta \gtrsim \sqrt{|g|a}/c_A. \quad (П2.2)$$

Рассмотрим теперь стабилизирующую роль шира количественно, предполагая выполненным условие (П2.2).

При наличии шира и силы тяжести колебания с малыми  $k_{\parallel}$  описываются следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{1}{k_{\parallel}} \Delta_{\perp} (k_{\parallel} \psi) - \frac{\omega^2}{c_A^2 k_{\parallel}^2} \Delta_{\perp} \psi - \frac{g \kappa k_b^2}{c_A^2 k_{\parallel}^2} \psi = 0. \quad (П2.3)$$

Это уравнение в случае  $k_{\parallel} = \text{const} \neq 0$  сводится к уравнению (14.72) книги [II] (для  $\omega \gg \omega_{ni}$ ), а при  $k_{\parallel} = 0$  — к (9.4) книги [II],

Будем теперь считать  $dk_{\parallel}/dx \neq 0$  и в соответствии с (12.10) книги [1] примем координатную зависимость  $k_{\parallel}$  в линейном виде

$$k_{\parallel} = k'_{\parallel} (x - x_0). \quad (\text{П2.4})$$

Вместо  $\omega$  введем  $\gamma = -i\omega$ , а вместо  $x - x_0$  переменную

$$\xi = (x - x_0) c_A k'_{\parallel} / \gamma. \quad (\text{П2.5})$$

Тогда (П2.3) запишется в виде

$$(\xi^2 + 1) d^2\psi/d\xi^2 + 2\xi d\psi/d\xi + (k_b/c_A k'_{\parallel})^2 [\gamma_0^2 + \gamma^2 (1 + \xi^2)] \psi = 0, \quad (\text{П2.6})$$

где  $\gamma_0 = \sqrt{-g\kappa}$ .

Мы интересуемся решением (П2.6), локализованным вблизи  $x - x_0$  на размере, малом по сравнению с размером неоднородности  $a$ , т. е. таким решением, которое убывает при больших  $\xi$ . При больших  $\xi$  ( $\xi \gg 1$ ) уравнение (П2.6) сводится к следующему:

$$\xi^2 d^2\psi/d\xi^2 + 2\xi d\psi/d\xi + (k_b/c_A k'_{\parallel})^2 (\gamma_0^2 + \gamma^2 \xi^2) \psi = 0. \quad (\text{П2.7})$$

Решением этого уравнения, ограниченным на бесконечности, является функция Бесселя второго рода от мнимого аргумента, помноженная на  $\xi^{-1/2}$ :

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{\xi}} K_{i\alpha} \left( \frac{k_b \gamma \xi}{c_A k'_{\parallel}} \right), \quad (\text{П2.8})$$

где  $\alpha = [(\gamma_0 k_b/c_A k'_{\parallel})^2 - 1/4]^{1/2}$ .

Теперь примем оправдывающееся результатом предположение, что при наличии шира порядка (П2.2) инкремент существенно уменьшается,  $\gamma \ll \gamma_0$ , либо неустойчивость исчезает вовсе. При этом можно считать  $k_b \gamma \ll k'_{\parallel} c_A$ , так что аргумент функции  $K$  будет мал, если  $1 \ll \xi \ll c_A k'_{\parallel} / k_b \gamma$ . При малом аргументе функция  $K$  остается конечной хотя бы в некоторых точках, если  $\alpha$  вещественно. В противном случае внешнее решение (П2.6) не удастся сшить с внутренним, так что собственные колебания отсутствуют. Поэтому неравенство  $\alpha^2 < 0$  представляет собой критерий стабилизации. В развернутом виде критерий стабилизации (критерий Сайдема) выглядит так:

$$|g| \kappa k_b^2 / c_A^2 k'_{\parallel}{}^2 < 1/4. \quad (\text{П2.9})$$

По порядку величины это означает то же, что и (П2.2).

Пусть, однако,  $\alpha^2 > 0$ . Найдем инкремент возмущений, полагая  $\alpha$  малым по сравнению с единицей, т. е. при условии

$$(\gamma_0 k_b / c_A k'_{\parallel})^2 - 1/4 \ll 1. \quad (\text{П2.10})$$

Для этого надо знать решение (П2.6) при всех  $\xi$ , а не только при  $\xi \gg 1$ .

Полагая в (П2.6)  $\xi \ll \gamma_0 / \gamma \simeq c_A k'_{\parallel} / k_b \gamma$ , приводим это уравнение к виду

$$(\xi^2 + 1) d^2 \psi / d\xi^2 + 2\xi d\psi / d\xi - \nu(\nu + 1) \psi = 0, \quad (\text{П2.11})$$

где  $\nu = -1/2 + i\alpha$ . Решением (П2.11) являются функции Лежандра индекса  $\nu$  и аргумента  $i\xi$ :

$$\psi = AP_{\nu}(i\xi) + BQ_{\nu}(i\xi). \quad (\text{П2.12})$$

При четном  $\psi$  константы  $A$  и  $B$  должны быть выбраны так, чтобы  $A/B = (\pi/2) [i - \cos(\pi\nu/2)]$ .

Для интервала  $1 \ll \xi \ll c_A k'_{\parallel} / k_b \gamma$  из (П2.12), используя асимптотическое представление  $Q$  и  $P$ , получаем

$$\psi = A\xi^{-1/2} \cos[\alpha \ln 8\xi + 2 \arg \Gamma(1 + i\alpha) - \arg \Gamma(1 + 2i\alpha) - \arctg \exp(-\pi\alpha) - \pi/4]. \quad (\text{П2.13})$$

Для таких же  $\xi$  из (П2.8) разложением в ряд можно найти

$$\psi = \text{const } \xi^{-1/2} \cos[\alpha \ln(k_b \gamma \xi / c_A k'_{\parallel}) - \arg \Gamma(1 + i\alpha) + \pi/2]. \quad (\text{П2.14})$$

Оба эти результата должны совпадать друг с другом. Это приводит к следующему дисперсионному уравнению, соответствующему наименьшему уровню:

$$\gamma = 8 |c_A k'_{\parallel} / k_b| \exp[-(\pi + 2)/\alpha]. \quad (\text{П2.15})$$

Видно, что при  $\alpha \ll 1$  инкремент  $\gamma$  экспоненциально мал.

Чтобы изложенные выше результаты применить к задаче об устойчивости плазмы в кривом магнитном поле, нужно в них сделать замену  $g \rightarrow 2(T_e + T_i) / M_i R$ , где  $R$  — радиус кривизны. Условие (П2.9) тогда будет означать, что при заданном шире давление плазмы не должно превышать критическое,  $\beta \equiv 8\pi(p_e + p_i) / B_0^2 < \beta_{\text{крит}}$ , где

$$\beta_{\text{крит}} = \Theta^2 R / 4a. \quad (\text{П2.16})$$

Более строгие критерии стабилизации широм желобковой неустойчивости плазмы в криволинейных магнитных полях приведены в основном тексте данной главы, а также в гл. 5—7.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

**Криволинейные координаты, связанные с магнитными поверхностями**

В случае ловушки с магнитными поверхностями удобно использовать координаты, одна из линий которых характеризует положение магнитной поверхности, т. е. такая, что

$$\mathbf{B}\nabla x^1 = 0, \quad (\text{П2.17})$$

а две другие  $x^2, x^3$  лежат на этой поверхности.

Согласно (П2.17) и (П1.1), в таких координатах  $B^1 = 0$ , тогда как и  $B^2$  и  $B^3$ , вообще говоря, отличны от нуля. Функции  $B^2, B^3$  удовлетворяют следующему соотношению, вытекающему из  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  и (П1.10):

$$\partial(\sqrt{g} B^2)/\partial x^2 + \partial(\sqrt{g} B^3)/\partial x^3 = 0. \quad (\text{П2.18})$$

Отсюда заключаем, что должно быть

$$(B^2, B^3) = \frac{1}{2\pi \sqrt{g}} \left( -\frac{\partial \vartheta}{\partial x^3}, \frac{\partial \vartheta}{\partial x^2} \right), \quad (\text{П2.19})$$

где  $\vartheta$  — некоторая функция  $x^1, x^2, x^3$ , а множитель  $(2\pi)^{-1}$  поставлен из соображений удобства. Учитывая, что  $B^2, B^3$  — периодические функции  $x^2, x^3$ , приходим к следующему общему условию на  $\vartheta$ :

$$\vartheta = a(x^1) x^2 + b(x^1) x^3 + \tilde{\vartheta}(x^1, x^2, x^3), \quad (\text{П2.20})$$

где  $\tilde{\vartheta}$  — периодична по  $x^2, x^3$ . Смысл входящих сюда величин  $a, b$  найдем, продифференцировав (П2.20) по  $x^2$  или по  $x^3$  и усреднив результат по периоду изменения  $x^2, x^3$ , полагая, что этот период равен  $2\pi$ .

Таким путем получаем, например:

$$\begin{aligned} a(x^1) &= (1/4\pi^2) \int dx^2 dx^3 d\vartheta/dx^2 = \\ &= (1/2\pi) \int dx^2 dx^3 B^3 \sqrt{g} = \\ &= \frac{d}{dx^1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{x^1} dx^1 \int dx^2 dx^3 B^3 \sqrt{g} = d\Phi/dx^1, \end{aligned} \quad (\text{П2.21})$$

где

$$\Phi(x^1) \equiv (1/2\pi) \int B^3 dr = (1/2\pi) \int \mathbf{B}\nabla x^3 dr, \quad (\text{П2.22})$$

а интегрирование проводится по объему тороида «радиуса»  $x^1$ . Здесь была учтена также формула для элемента объема (П1.12).

Аналогично (П2.21) можно получить

$$b(x^1) = -d\chi/dx^1, \quad (\text{П2.23})$$

где

$$\chi(x^1) \equiv (1/2\pi) \int B^2 dr = (1/2\pi) \int \mathbf{B} \nabla x^2 dr. \quad (\text{П2.24})$$

Если под  $x^2, x^3$  понимать соответственно азимутальную и продольную координаты тороида, то величины  $\Phi, \chi$  будут иметь смысл соответственно продольного и азимутального магнитных потоков. Здесь под продольным понимается поток, проходящий через сечение тороида, а под азимутальным — между осью тороида и его поверхностью.

С учетом (П2.21)—(П2.24) уравнение (П2.20) можно представить так:

$$\vartheta = x^2 d\Phi/dx^1 - x^3 d\chi/dx^1 + \tilde{\vartheta}(x^1, x^2, x^3). \quad (\text{П2.25})$$

Заменой переменных можно добиться, чтобы правая часть (П2.25) не содержала  $\tilde{\vartheta}$ . Это достигается, например, введением  $\theta, \zeta$ , связанных с  $x^2, x^3$  соотношениями

$$x^2 = \theta - \tilde{\vartheta}/a, \quad x^3 = \zeta \quad (\text{П2.26})$$

или

$$x^2 = \theta, \quad x^3 = \zeta - \tilde{\vartheta}/b. \quad (\text{П2.27})$$

В обоих случаях (П2.25) сводится к виду

$$\vartheta = \theta d\Phi/dx^1 - \zeta d\chi/dx^1. \quad (\text{П2.28})$$

При этом

$$(B^2, B^3) = (1/2\pi \sqrt{g}) (d\chi/dx^1, d\Phi/dx^1). \quad (\text{П2.29})$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

#### Условия равновесия плазмы в замкнутой ловушке с магнитными поверхностями

**1. Уравнение для давления плазмы  $p$ .** Из (П1.27) следует  $\mathbf{B} \nabla p = 0$ . Это означает, что давление плазмы, удерживаемой в ловушке с магнитными поверхностями, должно быть постоянным на этих поверхностях. Иначе говоря, должно быть

$$p = p(x^1). \quad (\text{П2.30})$$

Видно, что градиент давления плазмы в такой ловушке имеет только радиальную компоненту,  $\partial p/\partial x^i = (\partial p/\partial x^1, 0, 0)$ . Уравнение равновесия (П1.27) в этом случае сводится к следующему [учтено (П1.7)]:

$$\partial p/\partial x^1 = (1/c) \sqrt{g} (j^3 B^2 - j^2 B^3). \quad (\text{П2.31})$$

Верхние индексы у  $j$  и  $B$  означают контравариантные проекции на координатные линии  $x^2, x^3$ , лежащие на соответствующих магнитных поверхностях.

Положив  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = \zeta$ , определенным в приложении 2, функции  $B^2, B^3$  можно выразить через производные от магнитных потоков  $\chi, \Phi$  [см. (П2.29)] и тогда (П2.31) запишется в виде

$$\partial p / \partial x^1 = (1/c) (-j^{\zeta} d\chi / dx^1 + j^{\theta} d\Phi / dx^1). \quad (\text{П2.32})$$

Это уравнение можно преобразовать так, чтобы вместо  $j^{\theta}, j^{\zeta}$  в него входили более наглядные характеристики тока. Умножим (П2.32) на  $d\mathbf{r}$  и проинтегрируем результат по  $\theta$  и  $\zeta$ . В левой части равенства при этом появится множитель  $dV$  — элемент объема между магнитными поверхностями  $x^1$  и  $x^1 + dx^1$ . Правую часть равенства преобразуем аналогично (П2.21). При этом получаем

$$\int j^{\theta} d\mathbf{r} = (dI / dx^1) dx^1; \quad \int j^{\zeta} d\mathbf{r} = (dJ / dx^1) dx^1, \quad (\text{П2.33})$$

где  $I, J$  — азимутальный и продольный токи в тороиде, по определению равные [ср. с (П2.22), (П2.24)]:

$$I(x^1) = (1/2\pi) \int \mathbf{j} \nabla \theta d\mathbf{r}; \quad J(x^1) = (1/2\pi) \int \mathbf{j} \nabla \zeta d\mathbf{r}. \quad (\text{П2.34})$$

В результате уравнение равновесия (П2.32) принимает вид

$$\frac{dp}{dx^1} \frac{dV}{dx^1} = \frac{1}{c} \left( \frac{dI}{dx^1} \frac{d\Phi}{dx^1} - \frac{dJ}{dx^1} \frac{d\chi}{dx^1} \right). \quad (\text{П2.35})$$

**2. Условие замыкания токов.** Теперь рассмотрим следствия, вытекающие из  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ . Поскольку  $\mathbf{j} \nabla p = 0$ , то  $\mathbf{j} = (0, j^2, j^3)$ . Поэтому уравнение  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  сводится к уравнению типа (П2.18) с заменой  $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{j}$ . Из него вытекают соотношения, аналогичные (П2.19), (П2.20), (П2.25), (П2.29). Следует иметь в виду, что поскольку координаты  $\theta, \zeta$  уже выбраны, то в уравнении типа (П2.25) остается некоторая, пока произвольная функция, аналогичная  $\tilde{\mathbf{v}}$ . Будем обозначать ее  $\tilde{v}$ . Тогда компоненты  $j^{\theta}, j^{\zeta}$  запишутся в виде [ср. с (П2.29)]

$$(j^{\theta}, j^{\zeta}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{g}} \left\{ \frac{dI}{dx^1} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \zeta}, \frac{dJ}{dx^1} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \right\}. \quad (\text{П2.36})$$

Подставляя этот результат в (П2.31) и учитывая (П2.35), получаем уравнение для  $\tilde{v}$ , аналогичное (П1.28):

$$\mathbf{B} \nabla \tilde{v} = s, \quad (\text{П2.37})$$

где

$$s = -c \frac{dp}{dx^1} \left( 1 - \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{g}} \frac{dV}{dx^1} \right). \quad (\text{П2.38})$$

Отсюда аналогично (П1.33) получаем условие однозначности решения для  $\tilde{v}$

$$\frac{dp}{dx^1} \oint \left( 1 - \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{g}} \frac{dV}{dx^1} \right) \frac{dl}{B} = 0, \quad (\text{П2.39})$$

где интеграл берется вдоль какой-либо замкнутой силовой линии. Видно, что при  $dp/dx^1 \neq 0$  параметры магнитного поля должны удовлетворять соотношению

$$\frac{1}{4\pi^2} \frac{dV}{dx^1} \oint \frac{dl}{\sqrt{g} B} = \oint \frac{dl}{B}. \quad (\text{П2.40})$$

Рассмотрим это соотношение на рациональной магнитной поверхности — такой, на которой силовые линии замыкаются, сделав, скажем,  $N$  оборотов вдоль тороида и некоторое число оборотов по его азимуту. Учитывая, что  $dl/\sqrt{g}B = d\zeta/(d\Phi/dx^1)$ , имеем на такой поверхности

$$\frac{1}{4\pi^2} \oint \frac{dl}{B \sqrt{g}} = \frac{N}{d\Phi/dx^1}. \quad (\text{П2.41})$$

При этом (П2.40) сводится к следующему:

$$(1/N) \oint dl/B = dV/d\Phi. \quad (\text{П2.42})$$

Левая часть равенства называется *приведенной длиной силовой линии*. Поскольку правая часть (П2.42) для данной поверхности есть константа, то приходим к выводу, что условие замыкания токов сводится к постоянству приведенных длин всех силовых линий на рациональных магнитных поверхностях.

Заметим, также, что, используя уравнение Максвелла  $\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j}$  (константы  $c$  и  $4\pi$  опускаем), можно получить следующие выражения для ковариантных компонент магнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= (1/2\pi) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial a} - v \right); \\ B_2 &= (1/2\pi) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + J \right); \\ B_3 &= (1/2\pi) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} - I \right); \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.43})$$

где  $\Phi(a, \theta, \zeta)$  — некоторая функция, периодичная по  $\theta, \zeta$ , имеющая смысл скалярного потенциала вакуумного (при  $\mathbf{j} = 0$ ) магнитного поля. Учитывая связь между ковариантными и контравариант-



ными компонентами магнитного поля  $B_i = g_{ik}B^k$  и соотношения (П2.29), с помощью (П2.43) получаем

$$\left. \begin{aligned} -v + \partial\varphi/\partial a &= \chi' g_{12}/\sqrt{g} + \Phi' g_{13}/\sqrt{g}; \\ J + \partial\varphi/\partial\theta &= \chi' g_{22}/\sqrt{g} + \Phi' g_{23}/\sqrt{g}; \\ -I + \partial\varphi/\partial\zeta &= \chi' g_{23}/\sqrt{g} + \Phi' g_{33}/\sqrt{g}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.44})$$

Полученные в приложениях 2, 3 соотношения частично используются в данной главе, а частично в гл. 5 и последующих.

### Глава 3

#### ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ЖЕЛОБКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

#### § 3.1. Введение

Желобковая неустойчивость, обсуждавшаяся в гл. 1, 2, соответствует возмущениям с частотами порядка

$$|\omega|/\omega_{Bi} \simeq \rho_i/(aR)^{1/2}. \quad (3.1)$$

Согласно книге [II], существует также класс неустойчивостей, вызываемых градиентами плотности и температуры, слабочувствительных к кривизне магнитного поля и проявляющихся даже при  $R \rightarrow \infty$ . Характерная частота возмущений, соответствующих этим неустойчивостям, порядка

$$\omega \simeq \omega_* \simeq k_{\perp}\rho_i v_{Ti}/a, \quad (3.2)$$

что при  $k_{\perp}a \simeq 1$  означает

$$|\omega|/\omega_{Bi} \simeq (\rho_i/a)^2. \quad (3.3)$$

Из сопоставления (3.1) с (3.3) видно, что при одних и тех же длинах волн [оценка (3.1) справедлива, в частности, и при  $k_{\perp}a \simeq 1$ ] характерные частоты неустойчивостей, обсуждавшихся в соответствующих разделах книги [II], малы по сравнению с характерными частотами желобковой

неустойчивости. При этом предполагается отношение  $a/R$  не слишком малым

$$a/R > (\rho_i/a)^2, \quad (3.4)$$

что соответствует так называемому приближению нулевого ларморовского радиуса ионов (в отличие от приближения конечного ларморовского радиуса ионов, когда  $a/R \gtrsim (\rho_i/a)^2$  [см. § 9.2 книги [III]).

Поскольку частота (3.3) мала по сравнению с (3.1), неустойчивости типа (3.3) можно назвать *медленными градиентными неустойчивостями*, тогда как неустойчивости типа (3.1) — *быстрыми градиентными неустойчивостями*.

В случае плазмы, находящейся в прямом магнитном поле, медленные неустойчивости являются единственно возможными (имеется в виду, что  $\mathbf{g} = 0$  и отсутствуют направленные потоки). Поэтому исследование устойчивости такой плазмы сводится к анализу только медленных возмущений, что и делалось, в частности, в гл. 6—8 книги [II]. Если же магнитное поле криволинейное, то прежде всего должна быть исследована возможность раскачки быстрых возмущений, поскольку последние при одних и тех же волновых числах обладают в  $a/\rho_i$  раз большими инкрементами, чем медленные. Исследование медленных возмущений следует проводить лишь тогда, когда невозможна раскачка быстрых.

При условии (3.4) в задаче о быстрых градиентных неустойчивостях [с частотами порядка (3.1)] имеется малый параметр

$$\omega_*/\omega \simeq (\rho_i/a)^2 R/a. \quad (3.5)$$

Благодаря этому уравнения, описывающие такие возмущения, можно существенно упростить. Целью настоящей главы является вывод такого рода упрощенных уравнений и их анализ.

В § 3.2 покажем, что малость параметра (3.5) позволяет использовать для описания плазмы так называемое *гидромагнитное, или одножидкостное приближение*. В этом приближении плазма характеризуется вектором смещения  $\xi$  и тензором возмущенного давления  $\overset{\leftarrow}{p}$  (штрих — возмущение), связанными между собой уравнением движения. Вид тензора давления определяется кинетикой частиц и в свою

очередь, зависит от  $\xi$ , так что  $\overleftrightarrow{p'}$  представляет собой некоторый функционал вектора  $\xi$ ,  $\overleftrightarrow{p'} = \overleftrightarrow{p'}\{\xi\}$ . Этот функционал имеет довольно простой вид в случае столкновительной плазмы и более сложный вид — в случае бесстолкновительной. Для столкновительной плазмы выражение для  $\overleftrightarrow{p'}\{\xi\}$  приведено в § 3.2. Отыскание же аналогичного выражения для бесстолкновительной плазмы проводится в следующей главе.

Отмеченное выше уравнение для вектора смещения  $\xi$ , описывающее быстрые градиентные возмущения плазмы в кривом магнитном поле, по структуре сходно с обсуждавшимся в § 9.1 книги [II] уравнением для  $\xi$ , описывающим желобковую неустойчивость плазмы в поле тяжести. В § 9.1 книги [II] было показано, что критерий гидромагнитной устойчивости плазмы в поле тяжести может быть получен энергетическим методом, т. е. посредством выяснения знака потенциальной энергии возмущений, вид которой определяется уравнением для  $\xi$ . По аналогии с § 9.1 книги [II] в § 3.3 излагается энергетический метод исследования устойчивости плазмы в криволинейном магнитном поле. Такой метод позволит нам оправдать (а иногда и уточнить) результаты гл. 1, 2, полученные, как это отмечалось и ранее, более простым, но недостаточно строгим методом «эффективного гравитационного поля». Изложение энергетического метода важно еще и потому, что именно таким методом было первоначально получено большинство наиболее существенных результатов о желобковой, а также о некоторых других разновидностях неустойчивостей плазмы в магнитных ловушках.

Заметим, что используемый в данной главе термин «устойчивость» означает невозможность развития желобковой неустойчивости, но не всех неустойчивостей вообще. Поэтому критерии устойчивости, получаемые в данной главе, следует понимать только в таком смысле.

### § 3.2. Гидромагнитное описание быстрых градиентных возмущений

Перейдем к выводу упрощенных уравнений, описывающих быстрые градиентные возмущения. Начнем с того, что рассмотрим порядок членов линеаризованного уравнения движения (7.52) книги [II]:

$$\begin{aligned}
 & Mn_0 \{ \partial \mathbf{V}' / \partial t + (\mathbf{V}^{(0)} \nabla) \mathbf{V}' + (\mathbf{V}' \nabla) \mathbf{V}^{(0)} \} + \\
 & + Mn' (\mathbf{V}^{(0)} \nabla) \mathbf{V}^{(0)} = en_0 (\mathbf{E}' + (1/c) [\mathbf{V}', \mathbf{B}_0] + \\
 & + (1/c) [\mathbf{V}^{(0)}, \mathbf{B}']) + en' (\mathbf{E}^{(0)} + (1/c) [\mathbf{V}^{(0)}, \mathbf{B}_0]) - \\
 & - \nabla p' - \operatorname{div} \overleftrightarrow{\pi}' + \mathbf{R}'. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Здесь штрих соответствует возмущенным, «нуль» — равновесным параметрам. Последние, согласно (7.52) книги [II], удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{V}^{(0)} \nabla) \mathbf{V}^{(0)} &= en_0 (\mathbf{E}^{(0)} + [\mathbf{V}^{(0)}, \mathbf{B}_0]/c) - \\
 &- \nabla p^{(0)} - \operatorname{div} \overleftrightarrow{\pi}^{(0)} + \mathbf{R}^{(0)}. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Посредством уравнений (3.6), (3.7) описывается как столкновительная, так и бесстолкновительная плазма; в последнем случае  $\mathbf{R} = 0$ .

1. Компоненты уравнения (3.6), поперечные  $\mathbf{B}_0$ . Предполагаем, что равновесное электрическое поле по порядку не превосходит остальных членов уравнения (3.7). Тогда

$$V_{\perp}^{(0)} \simeq \rho_i v_{Ti} / a, \quad E_{\perp}^{(0)} \simeq T / ea. \quad (3.8)$$

С помощью уравнений непрерывности и теплового баланса (см. (7.52) книги [III]) оцениваем порядок величины возмущений плотности и давления:

$$n' \simeq (n_0 / \omega a) V_{\perp}', \quad p' \simeq (p_0 / \omega a) V_{\perp}'. \quad (3.9)$$

Оценку для  $\operatorname{div} \overleftrightarrow{\pi}'$  получаем с помощью (3.9), полагая  $|\operatorname{div} \overleftrightarrow{\pi}'| \lesssim |\nabla p'|$ . Используя уравнение Максвелла  $\operatorname{rot} \mathbf{E}' = -(1/c) \partial \mathbf{B}' / \partial t$  и первое соотношение (3.8), находим оценку для  $\mathbf{B}'$ :

$$|[\mathbf{V}^{(0)}, \mathbf{B}'] / c| \simeq (\rho_i / a)^2 (\omega_{Bi} / \omega) E_{\perp}' \simeq (\omega / \omega_{Bi}) E_{\perp}'. \quad (3.10)$$

В сильном магнитном поле,  $v \ll \omega_B$ , поперечная часть силы трения  $\mathbf{R}'$  мала как  $(v / \omega_B)^2$ .

Нулевое приближение по  $\omega / \omega_{Bi}$ . Используя приведенные выше оценки, находим, что в прене-

брежении членами порядка  $\omega/\omega_{Bi}$  компоненты уравнения (3.6), поперечные  $\mathbf{V}_0$ , сводятся к следующему уравнению:

$$\mathbf{E}'_{\perp} + [\mathbf{V}', \mathbf{V}_0]/c = 0. \quad (3.11)$$

В этом приближении возмущенное движение электронной и ионной компонент поперек магнитного поля происходит с одинаковой скоростью, равной скорости электрического дрейфа частиц:

$$\mathbf{V}' = c [\mathbf{E}'_{\perp}, \mathbf{V}_0]/B_0^2. \quad (3.12)$$

Напомним, что в отличие от (3.12) поперечная скорость возмущений с  $\omega/\omega_{Bi} \simeq (\rho_i/a)^2$  складывается из одинаковых по порядку величины скорости электрического дрейфа и возмущенной скорости ларморовского обтекания [ср. (3.12) с (7.53) книги [II]].

Первое приближение по  $\omega/\omega_{Bi}$ . В нулевом приближении по  $\omega/\omega_{Bi}$  электронное и ионное уравнения (3.6) вырождаются — сводятся к одному и тому же уравнению (3.11). Чтобы получить второе независимое уравнение, нужно учесть в (3.6) члены порядка  $\omega/\omega_{Bi}$ .

Левая часть электронного уравнения (3.6) мала по сравнению с правой как отношение  $\omega/\omega_{Be}$ , и потому в приближении конечных  $\omega/\omega_{Bi}$  ею можно пренебречь. В левой части ионного уравнения (3.6) члены с пространственными производными скорости малы по сравнению с  $\partial \mathbf{V}'/\partial t$  как  $\omega/\omega_{Bi}$ , в чем убеждаемся при учете (3.8) и (3.9). Опуская эти малые члены и складывая электронное уравнение с ионным, получаем уравнение движения порядка  $\omega/\omega_{Bi}$ :

$$\begin{aligned} M_i n_0 \partial \mathbf{V}'_{\perp} / \partial t = & -\nabla_{\perp} (\rho'_i + \rho'_e) - \operatorname{div}_{\perp} (\overleftrightarrow{\pi}'_i + \overleftrightarrow{\pi}'_e) + \\ & + (1/c) ([\mathbf{j}'_{\perp}, \mathbf{V}_0] + [\mathbf{j}^{(0)}, \mathbf{V}'])_{\perp}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь были использованы соотношения  $n_e = n_i$  (условие квазиэлектронейтральности),  $\mathbf{R}'_e + \mathbf{R}'_i = 0$ . Величины  $\mathbf{j}^{(0)}$  и  $\mathbf{j}'$  означают равновесный и возмущенный токи:

$$\mathbf{j}^{(0)} = n_0 (e_e \mathbf{V}_e^{(0)} + e_i \mathbf{V}_i^{(0)}), \quad (3.14)$$

$$\mathbf{j}'_{\perp} = e_i n_0 (\mathbf{V}'_{\perp i} - \mathbf{V}'_{\perp e}) + e_i n' (\mathbf{V}_{\perp i}^{(0)} - \mathbf{V}_{\perp e}^{(0)}). \quad (3.15)$$

Предполагается, что  $V'_{\perp i}$ ,  $V'_{\perp e}$ , входящие в (3.15), содержат не только члены нулевого порядка (3.12), но и добавки порядка  $\omega/\omega_{Vi}$ .

Одножидкостное описание плазмы. Из (3.11) и (3.13) следует, что при движении поперек магнитного поля плазма ведет себя как однокомпонентная идеально проводящая жидкость с массовой плотностью  $\rho_0$  и тензором полного давления  $\overleftrightarrow{p}'$ :

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= M_i n_0; \\ \overleftrightarrow{p}' &= I (p'_i + p'_e) + \overleftrightarrow{\pi}'_i + \overleftrightarrow{\pi}'_e. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Здесь  $\overleftrightarrow{I}$  — единичный тензор. С этой точки зрения уравнение (3.13) определяет изменение возмущенной скорости  $V'_{\perp}$  при заданных токах  $\mathbf{j}'$ ,  $\mathbf{j}^{(0)}$ , тензоре давления  $\overleftrightarrow{p}'$ , полях  $\mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{B}_0$  и плотности массы  $\rho_0$ :

$$\rho_0 \partial \mathbf{V}' / \partial t = - \operatorname{div} \overleftrightarrow{p}' + [\mathbf{j}'_{\perp}, \mathbf{B}_0] / c + [\mathbf{j}^{(0)}, \mathbf{B}']_{\perp} / c. \quad (3.17)$$

Замкнутую систему уравнений для поля и плазмы при таком способе описания можно получить, выразив  $\overleftrightarrow{p}'$ ,  $\mathbf{j}'_{\perp}$ ,  $\mathbf{B}'$  через  $\mathbf{V}'$ . Связь  $\overleftrightarrow{p}'$  с  $V'_{\perp}$  можно найти из решения кинетического уравнения, что будет сделано позже. Плотность тока  $\mathbf{j}'$  связана с полем  $\mathbf{B}'$  уравнением Максвелла

$$\mathbf{j}' = (c/4\pi) \operatorname{rot} \mathbf{B}', \quad (3.18)$$

а  $\mathbf{B}'$  выражается через  $\mathbf{E}'$  посредством соотношения  $\operatorname{rot} \mathbf{E}' = - (1/c) \partial \mathbf{B}' / \partial t$ . Если предположить, что  $\mathbf{E}' \mathbf{B} = 0$  (условие применимости этого предположения обсуждается в следующем пункте), то недостающая связь между  $\mathbf{E}'$  и  $V'_{\perp}$  определяется уравнением (3.11). Вводя вместо  $\mathbf{V}'$  возмущенное смещение  $\xi$  плазмы, определенное соотношением

$$\partial \xi / \partial t = \mathbf{V}', \quad (3.19)$$

указанным выше способом находим

$$\mathbf{E}' = - (1/c) [\partial \xi / \partial t, \mathbf{B}_0]; \quad \mathbf{B}' = \operatorname{rot} [\xi, \mathbf{B}_0]. \quad (3.20)$$

Выразив с помощью (3.18) и (3.20) плотность тока  $\mathbf{j}'$  и возмущенное поле  $\mathbf{V}'$  через  $\xi$  и подставив результат в уравнение (3.17), приходим к описанию колебаний плазмы как гидродинамического процесса, характеризующегося следующим уравнением для смещения  $\xi$ :

$$\rho_0 \partial^2 \xi / \partial t^2 = - \operatorname{div} \overleftrightarrow{\rho}(\xi) + (1/4\pi) [\operatorname{rot} \mathbf{Q}, \mathbf{V}_0] + \\ + (1/4\pi) [\operatorname{rot} \mathbf{V}_0, \mathbf{Q}]_{\perp}. \quad (3.21)$$

Здесь  $\mathbf{Q} \equiv \operatorname{rot} [\xi, \mathbf{V}_0]$ .

Такой гидродинамический подход противоположен электродинамическому, при котором все возмущенные параметры плазмы выражаются через электрическое поле, а задача о колебаниях плазмы сводится к исследованию уравнений Максвелла с известной диэлектрической проницаемостью.

2. **Продольная компонента уравнения (3.6).** Проектируя векторное уравнение (3.6) на направление  $\mathbf{V}_0$ , пренебрегая членами порядка  $\omega/\omega_B$  [используются оценки (3.10), (3.9)] и считая  $V_{\parallel}^{(0)}/L \ll \omega$ , получаем

$$M n_0 dV'_{\parallel} / dt = e n_0 E'_{\parallel} + e n' E_{\parallel}^{(0)} - \nabla_{\parallel} p' - \\ - (\operatorname{div} \overleftrightarrow{\pi}')_{\parallel} + R'_{\parallel} \quad (3.22)$$

( $L$  — характерный продольный размер).

Как и при рассмотрении поперечного движения плазмы, будем считать, что совокупность двух уравнений (3.22) — электронного и ионного — определяет соответствующие компоненты электрического поля  $\mathbf{E}'$  и скорости массы  $\mathbf{V}'_M \approx \mathbf{V}'_i$ . Поле  $E'_{\parallel}$  определяется электронным уравнением

$$E'_{\parallel} = - \frac{R'_{\parallel e}}{e_e n_0} - \frac{n'}{n_0} E_{\parallel}^{(0)} - \frac{1}{e_e n_0} (\nabla_{\parallel} p'_e + \\ + (\operatorname{div} \overleftrightarrow{\pi}'_e)_{\parallel}) + \frac{M_e}{e_e} \frac{\partial V'_{\parallel e}}{\partial t}, \quad (3.23)$$

а скорость массы — суммой электронного и ионного:

$$\rho_0 \partial V'_{\parallel M} / \partial t = - \nabla_{\parallel} p'. \quad (3.24)$$

Бесстолкновительная плазма,  $R_{\parallel} = 0$ . Согласно (3.7), при  $R_{\parallel} = 0$  равновесное электрическое поле  $E_{\parallel}^{(0)}$  может поддерживаться лишь за счет продольного градиента тензора давления, и потому  $E_{\parallel}^{(0)} \simeq \simeq T/eL$ . Учитывая это соотношение и используя (3.9) и (3.11), находим, что обязанная полю  $E_{\parallel}^{(0)}$  часть  $E'_{\parallel}$  по рядка

$$E'_{\parallel}/E'_{\perp} \simeq (\omega/\omega_{Bi}) (a/L). \quad (3.25)$$

Аналогично приходим к такой же оценке для части  $E'_{\parallel}$ , обязанной  $\nabla_{\parallel} p'_e$  и  $(\text{div } \vec{\pi}'_e)_{\parallel}$ .

Вклад в правую часть (3.23) от инерционного члена  $(M_e/e_e) \partial V'_{\parallel e}/\partial t$  по порядку величины можно записать так:

$$(M_e/e_e) \partial V'_{\parallel e}/\partial t \simeq (M_e/n_0 e^2) \omega j'_{\parallel}. \quad (3.26)$$

Оценку для  $j'_{\parallel}$  находим с помощью уравнения Максвелла  $(\text{rot rot } \mathbf{E}')_{\parallel} = 4\pi i \omega j'_{\parallel}/c$

$$j'_{\parallel} \simeq (c^2/4\pi \omega a^2) E'_{\parallel}. \quad (3.27)$$

Учитывая (3.26) и (3.27), заключаем, что инерционным членом в (3.23) можно пренебречь, если

$$a^2 > c^2/\omega_{pe}^2. \quad (3.28)$$

Это — встречавшийся в книге [II] критерий непотенциальности возмущений. Смысл его в следующем: при выполнении (3.28) компонентой  $E'_{\parallel}$  можно пренебречь даже, если продольное волновое число отлично от нуля. Ясно, однако, что при исследовании быстрых неустойчивостей критерий (3.28) может оказаться необязательным, например в случае потенциальных возмущений желобкового типа; при этом поле  $E'_{\parallel}$  вообще не входит в задачу.

Столкновительная плазма,  $R_{\parallel e} \neq 0$ . При достаточно частых столкновениях основной вклад в правую часть уравнения (3.23) дает член с  $R'_{\parallel e}$ , так что оно сводится к следующему:

$$E'_{\parallel} = (j_{\parallel}/\sigma_{\parallel})', \quad (3.29)$$



где

$$j_{\parallel} = e_e n (V_{\parallel e} - V_{\parallel i}); \sigma_{\parallel} = 1,96e^2 n_e / M_e. \quad (3.30)$$

Здесь использовано выражение для  $R_e$ , приведенное в гл. 9 книги [II] ( $R_{\parallel e}$  не зависит от  $\mathbf{B}_0$ ).

Учитывая приближенную связь (3.27) тока с полем, находим, что при  $j_{\parallel}^{(0)} = 0$  правая часть (3.28) мала по сравнению с левой, если

$$\omega \gg v_{ei} (c/a\omega_p e)^2. \quad (3.31)$$

В этом случае (3.29) сводится к условию идеальной продольной проводимости,  $E'_{\parallel} = 0$ . Критерий (3.31) имеет наглядный смысл: в правой части стоит характерный декремент диффузионного затухания вихревого поля.

Итак, мы показали, что для быстрых возмущений с не слишком малой длиной волны можно принять

$$E'_{\parallel} = 0. \quad (3.32)$$

Это оправдывает принятое в предыдущем пункте приближение идеальной проводимости.

**3. Связь тензора  $\overset{\leftrightarrow}{p}'$  с продольным и поперечным возмущениями давления.** Чтобы сделать замкнутой систему гидродинамических уравнений, необходимо вычислить тензор возмущенного давления. Для быстрых возмущений косые компоненты в тензоре вязкости малы, так что  $\overset{\leftrightarrow}{p}$  диагонален и может быть представлен в виде

$$\overset{\leftrightarrow}{p} \equiv p_{ik} = p_{\perp} \delta_{ik} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) e_i e_k. \quad (3.33)$$

Здесь пока не произведена линеаризация, так что  $p_{\perp} = \bar{p}_{\perp 0} + p'_{\perp}$ ,  $p_{\parallel} = p_{\parallel 0} + p'_{\parallel}$ ;  $e_i \equiv (\mathbf{B}/B)_i = (\mathbf{B}_0/B_0)_i + (\mathbf{B}'_{\perp}/B_0)_i$ . Линеаризуя (3.33), получаем

$$\overset{\leftrightarrow}{p}' = p'_{\perp} \delta_{ik} + (p'_{\parallel} - p'_{\perp}) (e_0)_i (e_0)_k + (p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) [(e_0)_i (e')_k + (e')_i (e_0)_k], \quad (3.34)$$

где  $e_0 \equiv \mathbf{B}_0/B_0$ ;  $e' \equiv \mathbf{B}'_{\perp}/B_0$ . В частном случае скалярного давления  $p_{\parallel 0} = p_{\perp 0} \equiv p_0$ . Это означает

$$\overset{\leftrightarrow}{p}' = p'_{\perp} \delta_{ik} + (p'_{\parallel} - p'_{\perp}) (e_0)_i (e_0)_k. \quad (3.35)$$

4. Тензор давления для столкновительной плазмы. Найдём необходимую нам связь между тензором давления  $\overleftrightarrow{p}$  и смещением плазмы  $\xi$  для случая столкновительной плазмы. (Для случая бесстолкновительной плазмы это будет сделано в гл. 4.)

При  $v_i \gg \omega$  кинетическое уравнение сводится к системе уравнений для моментов. В этом случае связь  $\overleftrightarrow{p}$  с  $\xi$  наиболее проста. Столкновения стремятся сделать функцию распределения изотропной (см. гл. 7 книги [II]), так что с точностью до малых членов порядка  $\rho/a$ ,  $\omega/v$  тензор давления  $\overleftrightarrow{p}$  выражается через скалярное давление

$$\overleftrightarrow{p} = \overleftrightarrow{I} p'. \quad (3.36)$$

В этом приближении с помощью уравнений для моментов типа (7.52) книги [II] находим, что давление  $p$  связано с плотностью массы  $\rho$  и скоростью  $\mathbf{V}$  уравнением адиабаты

$$(\partial/\partial t + \mathbf{V} \nabla) (p/\rho^{\gamma_0}) = 0, \quad (3.37)$$

где  $\gamma_0 = 5/3$ . Учитывая уравнение непрерывности

$$\partial \rho / \partial t + \text{div} (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (3.38)$$

и определение  $\xi$  [уравнение (3.19)], отсюда получаем искомую связь  $p'$  с  $\xi$

$$p' = -\xi \nabla p_0 - \gamma_0 p_0 \text{div} \xi. \quad (3.39)$$

Применимость (3.39) ограничена условием столкновительности  $\omega < v_i$ , которое при  $\omega \simeq v_{Ti}/a$  сводится к следующему:

$$\lambda_{\text{ст}} < a. \quad (3.40)$$

Таким образом, (3.39) имеет место, если длина свободного пробега мала по сравнению с характерными размерами плазмы. Мы, однако, будем использовать (3.39) и для качественного анализа устойчивости бесстолкновительной плазмы, полагая при этом  $\gamma_0 = 2$ . Оправдание такого приближенного подхода и его уточнение будут произведены в гл. 4.

### § 3.3. Энергетический метод

В § 9.1 книги [II] было показано, что желобковые возмущения плазмы можно исследовать энергетическим методом. Таким же методом можно исследовать и быстрые градиентные возмущения плазмы в кривом магнитном поле, описываемые уравнением (3.21). В этом можно убедиться, рассматривая структуру уравнения (3.21).

Сравнивая это уравнение с (9.13) книги [III], находим, что отличие состоит только в конкретном виде оператора  $\hat{K}$ , введенного в гл. 9 книги [II]. Можно показать, что в случае кривого поля оператор  $\hat{K}$  является самосопряженным, так же как и в случае гравитационной силы. Поэтому можно снова сконструировать выражение для потенциальной энергии и свести задачу об устойчивости к вычислению знака потенциальной энергии.

Выражение для энергии получаем, используя определение (9.15) книги [II] и учитывая (9.13) книги [II] и (3.17):

$$W_{\text{пот}} = (1/2) \int \xi \{ \text{div } \overleftrightarrow{p'} - [\text{rot } \mathbf{Q}, \mathbf{B}_0]/4\pi - [\text{rot } \mathbf{B}_0, \mathbf{Q}]/4\pi \} dr, \quad (3.41)$$

где  $\mathbf{Q} = \text{rot } [\xi, \mathbf{B}_0]$ . Вклад от второго члена в фигурной скобке можно преобразовать интегрированием по частям. Полагаем, что плазма ограничена твердой проводящей стенкой, так что на поверхности  $\xi dS = 0$ ,  $\mathbf{B}_0 dS = 0$ . Тогда вместо (3.41) имеем

$$W_{\text{пот}} = (1/2) \int \{ \xi \text{div } \overleftrightarrow{p'} + \mathbf{Q}^2/4\pi - [\xi, \text{rot } \mathbf{B}_0]/4\pi \} dr. \quad (3.42)$$

Сюда следует подставить тензор возмущенного давления  $\overleftrightarrow{p'}$ . Пока ограничимся рассмотрением приближения столкновительной плазмы. В этом приближении тензор возмущенного давления  $\overleftrightarrow{p'}$  определяется соотношениями (3.6), (3.9). С учетом последних выражение (3.42) принимает вид

$$W_{\text{пот}} = (1/2) \int \{ \gamma_0 \rho_0 (\text{div } \xi)^2 + \xi \nabla \rho_0 \text{div } \xi + \mathbf{Q}^2/4\pi - \mathbf{Q} [\xi, \text{rot } \mathbf{B}_0]/4\pi \} dr; \quad \gamma_0 = 5/3. \quad (3.43)$$

Самосопряженность оператора  $\hat{K}$  для этого случая была показана Бернштейном и др.

## Глава 4

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ  
ЖЕЛОБКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

## § 4.1. Введение

В гл. 3 использовалось выражение для потенциальной энергии возмущений, соответствующее приближению столкновительной плазмы. Это приближение предполагает, что частота парных столкновений велика по сравнению с характерными частотами возмущений и характерной частотой обращения частиц вдоль магнитной ловушки. Однако во многих практически интересных случаях удержания плазмы в магнитных ловушках такое приближение не имеет места. В связи с этим встает вопрос о получении критериев устойчивости для бесстолкновительной плазмы, а также вопрос о том, в какой степени критерии устойчивости, получаемые в приближении частых столкновений, могут быть использованы для предсказания поведения бесстолкновительной плазмы. Ответы на эти вопросы дает кинетическая теория желобковой неустойчивости, основные результаты которой излагаются в данной главе.

В согласии со сказанным в гл. 3, для гидромагнитного описания возмущений плазмы, соответствующих желобковой неустойчивости, необходимо знать выражение для тензора возмущенного давления плазмы. При кинетическом описании плазмы, необходимом в случае редких столкновений, для отыскания этого тензора должна быть вычислена возмущенная функция распределения. Последняя в случае магнитного поля с прямыми силовыми линиями вычислялась в книге [II]. В § 4.2 мы воспользуемся методом решения бесстолкновительного кинетического уравнения, изложенным в книге [III] (методом интегрирования по траекториям), и найдем гидромагнитный предел возмущенной функции распределения  $f_1$  в криволинейном магнитном поле. (Термин «гидромагнитный предел» означает, что в величине  $f_1$  учитываются только те слагаемые, которые существенны для обсуждавшегося в гл. 3 гидромагнитного приближения.) Для вычисления  $f_1$  необходимо знать равновесные траектории частиц в криволинейном магнитном поле, которые находятся в приложении 1, и равновесную функцию распределения,

общий вид которой приводится в приложении 2. Заметим, что гидромагнитный предел для  $f_1$  может быть получен также с помощью дрейфового кинетического уравнения.

При произвольном соотношении между частотой возмущений  $\omega$  и частотой обращения частицы вдоль магнитной ловушки  $1/\tau$  ( $\tau$  — период обращения) выражение для  $f_1$  представляет собой сложный интеграл по траектории. Вследствие этого общий анализ устойчивости бесстолкновительной плазмы провести не удастся. Однако при  $\omega\tau \gg 1$  и  $\omega\tau \ll 1$  выражение для  $f_1$  и тензора возмущенного давления  $\overleftrightarrow{p}'$  можно существенно упростить, что и делается в § 4.2. В соответствии с такого рода упрощенными выражениями для  $f_1$  и  $\overleftrightarrow{p}'$  в последующих двух параграфах (§ 4.3, 4.4) приводятся упрощенные выражения для потенциальной энергии возмущений. В § 4.3 это делается для случая  $\omega\tau \gg 1$  (этот случай соответствует так называемому приближению Чу—Голдбергера—Лоу), а в § 4.4 — для случая  $\omega\tau \ll 1$ , соответствующего так называемому приближению короткой ловушки.

Получив в § 4.3, 4.4 выражения для потенциальной энергии возмущений бесстолкновительной плазмы при  $\omega\tau \gg 1$  и  $\omega\tau \ll 1$ , мы можем их сравнить с соответствующим столкновительным выражением, полученным в гл. 3.

Это делается в § 4.5, где показано, что в случае плазмы скалярного давления потенциальная энергия столкновительного приближения не превосходит потенциальную энергию возмущений бесстолкновительной плазмы в короткой ловушке, которая, в свою очередь, не превосходит потенциальную энергию приближения Чу—Голдбергера—Лоу.

Это означает, что если в столкновительном приближении обнаруживается *устойчивость* плазмы в той или иной конфигурации магнитного поля, то в той же самой конфигурации должна быть *устойчива* и бесстолкновительная плазма.

Из этого следует, что кинетический анализ конкретных конфигураций должен проводиться в основном в тех случаях, когда давление плазмы анизотропно, как это имеет место, в частности, при удержании плазмы в адиабатической ловушке.

## § 4.2. Возмущенная функция распределения и возмущенное давление

1. **Общее выражение для возмущенной функции распределения.** Пусть выполняется условие, обратное (3.40),  $\lambda_{\text{ст}} > a$ , что соответствует приближению слабых столкновений. Тогда в линеаризованном кинетическом уравнении можно опустить столкновительный член и записать его решение в виде интеграла по траектории:

$$f_1 = -\frac{e}{M} \int_{-\infty}^t \left( \mathbf{E}'_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}' \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} dt'. \quad (4.1)$$

Функция  $f_0$  удовлетворяет условию (П4.42), и потому

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{\tilde{\mathbf{v}}_{\perp}}{B_0} \frac{\partial F}{\partial \mu_0} + \frac{1}{\omega_B} [\mathbf{e}_0, \nabla F]. \quad (4.2)$$

Здесь  $F(\varepsilon, \mu_0, \mathbf{r}_{\perp}) = f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ;  $\tilde{\mathbf{v}}_{\perp} \equiv \mathbf{v}_{\perp} - \mathbf{V}_{\text{др}}$ , где  $\mathbf{V}_{\text{др}}$  определено формулой (П4.19), т. е.  $\mathbf{v}_{\perp}$  — осциллирующая по  $\alpha$  часть поперечной скорости (см. (П4.2)).

Поля  $\mathbf{E}'_{\perp}$ ,  $\mathbf{B}'$ , стоящие под интегралом в (4.1), берутся на траектории, отличающейся от формы силовой линии ларморовскими осцилляциями. То же относится к магнитному полю  $\mathbf{B}_0$  в (4.2). Нашей целью является нахождение части  $f_1$ , средней по ларморовским осцилляциям. Усреднение членов правой части (4.1) по осцилляциям производится следующим образом. Каждую из величин  $\mathbf{E}'_{\perp}$ ,  $\mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{B}_0$ , зависящих от  $\mathbf{r}_{\perp}$ , разлагаем в ряд около точки  $\bar{\mathbf{r}}_{\perp}$  — средней поперечной координаты

$$X(\mathbf{r}_{\perp}) = X(\bar{\mathbf{r}}_{\perp}) + \delta \mathbf{r}_{\perp} \nabla_{\perp} X(\bar{\mathbf{r}}_{\perp}). \quad (4.3)$$

[Здесь  $\delta \mathbf{r}_{\perp}$  определена формулой (П4.9).] После этого под интегралом в (4.1) оказываются члены, не зависящие от  $\alpha$ , а также пропорциональные  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  и квадратичным комбинациям  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ . Искомый результат получается усреднением по  $\alpha$ .

В качестве примера укажем путь усреднения члена  $\mathbf{v}_\perp \mathbf{E}'_\perp$ :

$$\langle \mathbf{v}_\perp \mathbf{E}'_\perp \rangle = \langle (\tilde{\mathbf{v}}_\perp + \mathbf{V}_{\text{др}}) (\mathbf{E}'_\perp(\bar{\mathbf{r}}_\perp) + \delta \mathbf{r}_\perp \partial \mathbf{E}'_\perp(\bar{\mathbf{r}}_\perp) / \partial \bar{\mathbf{r}}_\perp) \rangle = \mathbf{V}_{\text{др}} \mathbf{E}'_\perp - (v_\perp^2 / 2\omega_B) \mathbf{e}_0 \text{rot } \mathbf{E}'_\perp. \quad (4.4)$$

При этом для  $\bar{f}_1$  получается выражение

$$\bar{f}_1 = -\mu \frac{\partial F}{\partial \mu} \frac{B'_\parallel}{B_0} - \int_{-\infty}^t \left\{ \left( \mathbf{V}'_\perp + v_\parallel \frac{\mathbf{B}'_\perp}{B_0} \right) \nabla F + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \left[ \mathbf{V}'_\perp (\mathbf{e}_0 \nabla) \mathbf{e}_0 \left( v_\parallel^2 - \frac{v_\perp^2}{2} \right) - \frac{v_\perp^2}{2} \text{div } \mathbf{V}'_\perp \right] \right\} dt'. \quad (4.5)$$

Далее упрощаем член с  $\nabla F$ . Учитывая, что  $F$  не зависит от продольной координаты, получаем цепь векторных тождеств:

$$\begin{aligned} \text{div} \{ [\xi_\perp, \mathbf{B}_0] \nabla F \} &= \nabla F \text{rot} [\xi_\perp, \mathbf{B}_0] = \\ &= \text{div} \{ \mathbf{B}_0, (\xi_\perp \nabla F) \} = \mathbf{B}_0 \nabla (\xi_\perp \nabla F). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Вспоминая, что  $\text{rot} [\xi_\perp, \mathbf{B}_0] = \mathbf{B}'$ , отсюда находим

$$(\mathbf{B}'_\perp / B_0) \nabla F = (\mathbf{e}_0 \nabla) (\xi_\perp \nabla F). \quad (4.7)$$

Теперь, используя (4.7) и  $\mathbf{V}'_\perp = -i\omega \xi_\perp$ , преобразуем в удобный вид весь член с  $\nabla F$  в (4.2)

$$(\mathbf{V}'_\perp + v_\parallel \mathbf{B}'_\perp / B_0) \nabla F = (d/dt) (\xi_\perp \nabla F). \quad (4.8)$$

В остальных местах (4.5)  $\mathbf{V}'_\perp$  выражаем через  $\xi_\perp$  и тогда получаем

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= - \left( \xi_\perp \nabla F + \mu \frac{\partial F}{\partial \mu} \frac{B'_\parallel}{B_0} \right) - i\omega \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \int_{-\infty}^t \left\{ \left( v_\parallel^2 - \frac{v_\perp^2}{2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{e}_0 \nabla_0 \xi_\perp + \frac{v_\perp^2}{2} \text{div } \xi_\perp \right\} dt'; \quad \nabla_0 \equiv (\mathbf{e}_0 \nabla). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Это выражение может быть получено также из так называемого дрейфового кинетического уравнения.

Ниже рассмотрим вытекающие из (4.9) результаты, полагая, что имеет место одно из двух:

а) за характерное время возмущения ( $\simeq 1/\omega$ )  $v_{\parallel}$ ,  $v_{\perp}$  изменяются незначительно, а возмущение сильно вытянуто вдоль силовых линий, условие типа  $\omega \gg k_{\parallel} v_{\parallel}$ ;

б) изменение  $v_{\parallel}$ ,  $v_{\perp}$  за время  $1/\omega$  существенно. В первом случае плазму будем называть *длинной*, а во втором — *короткой*.

**2. Приближение длинной плазмы.** В этом приближении интегрирование по  $l'$  сводится просто к умножению на  $i/\omega$ , так что

$$\bar{f}_1 = - \left( \xi_{\perp} \nabla F + \mu \frac{\partial F}{\partial \mu} \frac{B'_{\parallel}}{B_0} \right) + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \left\{ \left( v_{\parallel}^2 - \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \mathbf{e}_0 \nabla_0 \xi_{\perp} + \frac{v_{\perp}^2}{2} \operatorname{div} \xi_{\perp} \right\}. \quad (4.10)$$

Отсюда находим

$$\left. \begin{aligned} p'_{\perp} &\equiv \int M (B_0^2/v_{\parallel}) \bar{f}_1 \mu d\mu d\varepsilon = -\xi_{\perp} \nabla p_{\perp 0} - \\ &\quad - p_{\perp 0} (2 \operatorname{div} \xi_{\perp} + \varepsilon_{\perp} \nabla_0 \mathbf{e}_0); \\ p'_{\parallel} &\equiv \int M (B_0/v_{\parallel}) \bar{f}_1 v_{\parallel}^2 d\mu d\varepsilon = \\ &= -\xi_{\perp} \nabla p_{\parallel 0} - p_{\parallel 0} (\operatorname{div} \xi_{\perp} - 2\xi_{\perp} \nabla_0 \mathbf{e}_0). \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

При вычислении интегралов следует помнить, что независимыми переменными являются  $\mathbf{r}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$ . Нормировка  $F$  предполагается такой, что

$$\int (B_0/v_{\parallel}) F d\mu d\varepsilon = n_0. \quad (4.12)$$

Результаты (4.11) можно также получить, следуя приближению Чу—Голдбергера—Лоу при дополнительном предположении  $\xi_{\parallel} = 0$ .

Из сравнения (4.11) с (3.39) видно, что в рассматриваемом здесь случае длинной плазмы результаты бесстолкно-



вительного и столкновительного приближений совпадают, если только относительный градиент равновесного давления  $\nabla \ln p_0$  велик по сравнению с  $\text{div } \xi / |\xi|$  и  $|(\mathbf{e}_0 \nabla) \xi| / |\xi|$ . При этом в обоих случаях тензор возмущенного давления равен (при  $p_{\parallel 0} = p_{\perp 0} \equiv p_0$ ):

$$p'_{\alpha\beta} = -(\xi \nabla) p_0 \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.13)$$

Если электрическое поле  $\mathbf{E}'$  потенциально,  $\mathbf{E}' = -\nabla \psi$ , а давление плазмы достаточно мало,  $\beta \rightarrow 0$ , то члены с производными от  $\xi$  в уравнениях (4.11) выражаются через радиус кривизны магнитного поля (П4.20):

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \xi_{\perp} &\equiv \frac{i}{\omega} \text{div} \left[ \begin{array}{c} c\mathbf{E} \\ B_0 \end{array} \right] = -2\xi_{\perp} \nabla \ln B_0 = \\ &= -\frac{2n\xi_{\perp}}{R}; \\ (\mathbf{e}_0 \nabla_0) \xi_{\perp} &\equiv -\xi_{\perp} \nabla_0 \mathbf{e}_0 = -\xi_{\perp} \nabla \ln B_0 = \\ &= -n\xi_{\perp}/R. \end{aligned} \right\} (4.14)$$

Поэтому приближение (4.13) законно, если поперечный размер плазмы мал по сравнению с радиусом кривизны:

$$a/R \ll 1. \quad (4.15)$$

Если  $a/R \gtrsim 1$ , то столкновительный результат (3.39) существенно отличается от бесстолкновительного (4.11):

С помощью (4.14) находим, что в пределе  $\beta \rightarrow 0$  и произвольных  $a/R$  выражения (4.11) принимают вид ( $p_{\parallel 0} = p_{\perp 0} \equiv p_0$ ):

$$\left. \begin{aligned} p'_{\perp} &= -\xi_{\perp} \nabla p_0 + (3p_0/R) (\xi \mathbf{n}); \\ p'_{\parallel} &= -\xi_{\perp} \nabla p_0 + (4p_0/R) (\xi \mathbf{n}), \end{aligned} \right\} (4.16)$$

тогда как для столкновительной плазмы из (3.39) вытекает (при  $\xi_{\parallel} = 0$ )

$$p' = -\xi \nabla p_0 + (10/3) (p_0/R) (\xi \mathbf{n}). \quad (4.17)$$

**3. Приближение «короткой» плазмы.** Общее выражение для функции распределения. Пусть за время порядка  $1/\omega$  частица много раз повторяет свою траекторию, либо отражаясь от пробок, либо двигаясь по замкнутому пути без отражений. В этом случае интеграл (4.9) можно представить в виде суммы интегралов, каждый из которых берется по времени одного периода движения частицы, так что

$$\int_{-\infty}^t \{...\} dt' = \int_{t-\tau}^t \{...\} dt' + \int_{t-2\tau}^{t-\tau} \{...\} dt' + \dots + \int_{t-(n+1)\tau}^{t-n\tau} \{...\} dt' + \dots, \quad (4.18)$$

где  $\tau$  определено соотношением (П4.31), а символ  $\{...\}$  это фигурные скобки в (4.9).

В каждом из  $n$ -х интегралов сделаем замену переменной интегрирования  $t' = t'' - n\tau$ . Все функции в фигурных скобках (4.9), кроме  $\xi$ , остаются неизменными, тогда как  $\xi$  преобразуется по закону

$$\xi(t'' - n\tau) = \exp(i\omega n\tau) \xi(t''). \quad (4.19)$$

В результате (4.18) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \{...\} dt' &= [1 + \exp(i\omega\tau) + \exp(2i\omega\tau) + \dots] \int_{t-\tau}^t \{...\} dt' \equiv \\ &\equiv \frac{1}{1 - \exp(i\omega\tau)} \int_{t-\tau}^t \{...\} dt'. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Поскольку мы предполагаем, что  $\omega\tau \ll 1$ , то знаменатель в (4.20) приближенно равен

$$1 - \exp(i\omega\tau) \approx -i\omega\tau. \quad (4.21)$$

Таким путем приводим (4.9) к виду

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 = & - \left( \xi \nabla F + \mu \frac{\partial F}{\partial \mu} \frac{B'_0}{B_0} \right) + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left\{ \left( \frac{v_\perp^2}{2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - v_\parallel^2 \right) \xi_\perp \nabla_0 e_0 + \frac{v_\perp^2}{2} \operatorname{div} \xi_\perp \right\} dt'. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Так как текущее время частицы однозначно определяется положением последней на силовой линии, то интегрирование по  $t'$  в (4.22) можно заменить интегрированием по длине силовой линии, предположив

$$dt' = dl/v_\parallel, \quad (4.23)$$

либо по продольной координате  $x^3$  с учетом соотношения

$$dt' = \sqrt{g_{33}} dx^3/v_\parallel, \quad (4.24)$$

которое вытекает из (4.23) и условия  $dl = \sqrt{g_{33}} dx^3$ .

Возмущенное давление «короткой плазмы» нулевого давления. При  $E' = -\nabla\psi$ ,  $\beta \rightarrow 0$  выражение под интегралом в (4.22) можно упростить, используя соотношения (4.14) и (П4.28). В результате получаем

$$\begin{aligned} & \left( \frac{v_\perp^2}{2} - v_\parallel^2 \right) \xi_\perp \nabla_0 e_0 + \frac{v_\perp^2}{2} \operatorname{div} \xi_\perp = \\ & = -\xi_\perp \left( \frac{v_\perp^2}{2} \nabla \ln B_0 + v_\parallel^2 \nabla_0 e_0 \right) = v_\parallel [\xi, e_0] \operatorname{rot} (v_\parallel e_0) = \\ & = v_\parallel B_0 \xi_\perp \nabla (v_\parallel/B_0). \end{aligned} \quad (4.25)$$

С учетом этого и (4.23), (4.24) уравнение (4.22) записывается в виде

$$\bar{f}_1 = -\xi \nabla F + \frac{1}{\tau} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \oint \xi_\perp B_0 \nabla \left( \frac{v_\parallel}{B_0} \right) dl, \quad (4.26)$$

либо

$$\bar{f}_1 = -\xi \nabla F + \frac{1}{\tau} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \oint B_0 \sqrt{g_{33}} (\xi_\perp)^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{v_\parallel}{B_0} \right) dx^3. \quad (4.27)$$

Предполагается, что ось  $x^3$  направлена вдоль поля.

Это выражение для  $\bar{f}_1$  можно еще более упростить. Прежде всего заметим, что функции  $(\xi_\perp)^i$  не зависят от  $x^3$  и потому могут быть вынесены за знак интеграла в (4.27). Действительно, в рассматриваемом здесь случае потенциальных возмущений с  $E'_\parallel = 0$  имеем

$$\xi_\perp = [\nabla \varphi, \mathbf{e}_0]/B_0, \quad (4.28)$$

где  $\varphi \equiv i c \psi' / \omega$  не зависит от  $x^3$  ( $\psi'$  — потенциал  $\mathbf{E}'$ ). Поэтому

$$(\xi_\perp)^i = \frac{e^{ijk}}{B_0 \sqrt{g}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} (\mathbf{e}_0)_k = \frac{e^{ij3} \sqrt{g_{33}}}{B_0 \sqrt{g}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}. \quad (4.29)$$

Здесь учтено, что индексы  $i, j$  пробегают только значения 1, 2. Как отмечалось в приложении 1 к гл. 1, выражение  $B_0 \sqrt{g} / \sqrt{g_{33}}$  не зависит от  $x^3$ . С учетом этого убеждаемся, что и  $(\xi_\perp)^i$  не зависит от  $x^3$ .

Далее, используя выражение (П1.11) для  $\text{rot } \mathbf{B}_0 \neq 0$ , находим

$$\begin{aligned} (\xi_\perp)^i \frac{\partial}{\partial x^i} (B_0 \sqrt{g_{33}}) &= (\xi_\perp)^i \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{g_{i3} B_0}{\sqrt{g_{33}}} \right) \equiv \\ &\equiv (\xi_\perp)^i \frac{\partial}{\partial x^3} B_{0i} = \frac{\partial}{\partial x^3} (\xi_\perp \mathbf{B}_0) = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Это позволяет внести выражение  $B_0 \sqrt{g_{33}}$  под знак дифференциала по  $x^i$  в (4.27). В результате (4.27) принимает окончательный вид

$$\bar{f}_1 = -\xi_\perp \nabla F + \frac{1}{\tau} \frac{\partial F_0}{\partial \varepsilon} (\xi_\perp \nabla) J_\parallel, \quad (4.31)$$

где  $J_{\parallel}$  — продольный адиабатический инвариант (П4.34). Результат (4.31) был получен Б. Б. Кадомцевым.

С помощью (4.31) находим продольное и поперечное возмущенное давление:

$$\left. \begin{aligned} p'_{\parallel} &= -\xi_{\perp} \nabla p_{\parallel 0} + \xi_{\perp} M \int F \nabla (v_{\parallel} B_0) d\mu d\varepsilon + \\ &+ \xi_{\perp} \int \frac{M B_0}{\tau} \sqrt{2(\varepsilon - \mu B_0)} \nabla J_{\parallel} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} d\mu d\varepsilon; \\ p'_{\perp} &= -\xi_{\perp} \nabla p_{\perp 0} + \xi_{\perp} M \int F \mu d\mu d\varepsilon \nabla (B_0^2 / v_{\parallel}) + \\ &+ \xi_{\perp} \int \frac{M B_0^2 \mu}{\tau \sqrt{2(\varepsilon - \mu B_0)}} \nabla J_{\parallel} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} d\mu d\varepsilon. \end{aligned} \right\} (4.32)$$

Приведем выражения для  $\bar{f}_1$  и  $p'_{\parallel}$ ,  $p'_{\perp}$ , записанные в переменных  $\mu$ ,  $J_{\parallel}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Учтем, что

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\mu, \varepsilon} &= \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\mu, J_{\parallel}} - \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial J_{\parallel}} \right)_{\mu, x^i}; \\ \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right)_{x^i, \mu} &= \tau \left( \frac{\partial}{\partial J_{\parallel}} \right)_{x^i, \mu}; \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial J_{\parallel}} = \frac{1}{\tau}; \\ \partial F \{ \mu, J_{\parallel}, \varepsilon(\mu, J_{\parallel}, x^i) \} / \partial x^i &= \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right)_{\mu, J_{\parallel}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^i}. \end{aligned} \right\} (4.33)$$

Тогда из (4.31) следует (индекс  $\perp$  у  $\xi$  опускаем)

$$f_1 = -(\partial F / \partial \varepsilon)_{\mu, J_{\parallel}} (\xi \nabla \varepsilon). \quad (4.34)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} p'_{\parallel} &\equiv \int \bar{f}_1 M v_{\parallel}^2 d\mu dJ_{\parallel} \frac{B_0}{\tau v_{\parallel}} = - \int \frac{M v_{\parallel} B_0}{\tau} (\xi \nabla \varepsilon) \times \\ &\times \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right)_{\mu, J_{\parallel}} d\mu dJ_{\parallel}; \\ p'_{\perp} &\equiv \int M \mu B_0 \bar{f}_1 d\mu dJ_{\parallel} \frac{B_0}{\tau v_{\parallel}} = \\ &= - \int \frac{M \mu B_0^2}{\tau v_{\parallel}} (\xi \nabla \varepsilon) \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right)_{\mu, J_{\parallel}} d\mu dJ_{\parallel}. \end{aligned} \right\} (4.35)$$

«Короткая плазма» конечного давления с изотропным распределением частиц по скоростям. Пусть  $\partial F/\partial \mu = 0$ . В этом случае в выражениях для  $\overleftrightarrow{p}'$  (4.32) можно провести интегрирование по  $\varepsilon$ . Для этого введем новую переменную

$$\alpha \equiv \mu/\varepsilon = (1 - \cos^2 \theta)/B_0, \quad (4.36)$$

где  $\theta = \arccos v_{\parallel}/v$ . Функция  $\bar{f}_1$  [см. (4.22)] тогда может быть записана в виде

$$\bar{f}_1 = -\xi \nabla F + 2\varepsilon \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \frac{J(\mathbf{r}, \alpha)}{K(\mathbf{r}, \alpha)}, \quad (4.37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} J(\mathbf{r}, \alpha) &= \oint \left\{ \left[ 1 - \frac{3}{2} \alpha B_0(l') \right] \mathbf{e}_0 \nabla_0 \xi + \right. \\ &+ \left. \frac{\alpha B_0(l')}{2} \operatorname{div} \xi \right\} \frac{dl'}{\sqrt{1 - \alpha B_0(l')}}; \\ K(\mathbf{r}, \alpha) &= \oint \frac{dl'}{\sqrt{1 - \alpha B_0(l')}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Тензор возмущенного давления представим так [см. (3.35)]:

$$\overleftrightarrow{p}' = -(\xi \nabla p_0) \overleftrightarrow{I} + \delta p'_{\perp} \overleftrightarrow{I} + (\delta p'_{\parallel} - \delta p'_{\perp}) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0. \quad (4.39)$$

Из (4.37) находим

$$\left. \begin{aligned} \delta p'_{\perp} &= -\frac{15}{4} p_0 B_0^2 \int \frac{J(\mathbf{r}, \alpha) \alpha d\alpha}{K(\mathbf{r}, \alpha) \sqrt{1 - \alpha B_0(\mathbf{r})}}; \\ \delta p'_{\parallel} &= -\frac{15}{2} p_0 B_0 \int \frac{J(\mathbf{r}, \alpha) \sqrt{1 - \alpha B_0(\mathbf{r})} dl}{K(\mathbf{r}, \alpha)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

В частном случае  $\beta \rightarrow 0$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{B}' \rightarrow 0$  с учетом (4.14) и  $dl = \sqrt{g_{33}} dx^3$  находим, что  $J(\mathbf{r}, \alpha)$  сводится к следующему:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{r}, \alpha) &= -\int \left[ 1 - \frac{1}{2} \alpha B_0(l') \right] \xi \nabla \ln B_0 \frac{dl}{\sqrt{1 - \alpha B_0}} \equiv \\ &\equiv (1/\sqrt{2\varepsilon}) (\xi_{\perp} \nabla) J_{\parallel}; \end{aligned} \quad (4.41)$$

Таким путем убеждаемся, что (4.32) с  $p_{\parallel 0} = p_{\perp 0}$  — это частный случай (4.40).

### § 4.3. Потенциальная энергия в приближении Чу—Голдбергера—Лоу

Согласно § 4.2, в пренебрежении столкновениями тензор  $\overleftrightarrow{p}'$  анизотропен,  $p'_{\parallel} \neq p'_{\perp}$ . При этом в соответствии с (1.34)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \overleftrightarrow{p}' = & \nabla_{\perp} p' + (p'_{\parallel} - p'_{\perp}) (\mathbf{e}_0 \nabla) \mathbf{e}_0 + (p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) \left\{ \left( \frac{\mathbf{Q}_{\perp}}{B_0} \nabla \right) \mathbf{e}_0 + \right. \\ & \left. + (\mathbf{e}_0 \nabla) \frac{\mathbf{Q}_{\perp}}{B_0} \right\} + \frac{\mathbf{Q}_{\perp}}{B_0} \operatorname{div} [\mathbf{e}_0 (p_{\parallel 0} - p_{\perp 0})]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Подставляя (4.42) в (3.42) и предполагая возмущения локализованными только в области плазмы, после интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} W_{\text{пот}} = & \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\mathbf{Q}^2}{4\pi} + \frac{\mathbf{Q}}{4\pi} [\boldsymbol{\xi}, \operatorname{rot} \mathbf{B}_0] + p'_{\parallel} \boldsymbol{\xi}_{\perp} (\mathbf{e}_0 \nabla) \mathbf{e}_0 - \right. \\ & - p'_{\perp} [\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_{\perp} + \boldsymbol{\xi}_{\perp} (\mathbf{e}_0 \nabla) \mathbf{e}_0] + \frac{p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}}{B_0} [\boldsymbol{\xi} (\mathbf{Q} \nabla) \mathbf{e}_0 - \\ & \left. - \mathbf{Q} (\mathbf{e}_0 \nabla) \boldsymbol{\xi}] \right\} dr. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Учитывая (4.12), находим

$$\begin{aligned} W_{\text{пот}} = & \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\mathbf{Q}^2}{4\pi} - \frac{\mathbf{Q}}{4\pi} [\boldsymbol{\xi}, \operatorname{rot} \mathbf{B}_0] + (\boldsymbol{\xi}_{\perp} \nabla p_{\perp 0}) \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_{\perp} + \right. \\ & + [\mathbf{Q}_{\perp} \nabla_0 \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} (\mathbf{Q}_{\perp} \nabla) \mathbf{e}_0] (p_{\perp 0} - p_{\parallel 0}) / B_0 + 2p_{\perp 0} (\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_{\perp})^2 + \\ & + (3p_{\perp 0} - p_{\parallel 0}) (\boldsymbol{\xi}_{\perp} \nabla_0 \mathbf{e}_0) \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi}_{\perp} \nabla_0 \mathbf{e}_0)^2 (p_{\perp 0} + 2p_{\parallel 0}) - \\ & \left. - (\boldsymbol{\xi}_{\perp} \nabla_0 \mathbf{e}_0) (\boldsymbol{\xi}_{\perp} \nabla) (p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) \right\} dr. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Это выражение для потенциальной энергии возмущений соответствует так называемому приближению Чу — Голдберга — Лоу.

В случае плазмы со скалярным давлением  $p_{\parallel 0} = p_{\perp 0} \equiv p_0$ , (4.44) означает:

$$\begin{aligned} W_{\text{пот}} = & (1/2) \int \{ \mathbf{Q}^2/4\pi - \mathbf{Q} [\xi_{\perp} \text{rot } \mathbf{B}_0]/4\pi + \\ & + (\xi_{\perp} \nabla p_0) \text{div } \xi_{\perp} + 2p_0 [(\text{div } \xi_{\perp})^2 + \\ & + (\xi_{\perp} \nabla_0 \mathbf{e}_0) \text{div } \xi_{\perp} + (3/2) (\xi_{\perp} \nabla_0 \mathbf{e}_0)^2 \} dr. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Для электростатических возмущений плазмы нулевого давления (4.44) сводится к следующему:

$$\begin{aligned} W_{\text{пот}} = & (1/2) \int \{ -(\xi_{\perp} \nabla \ln B_0) \xi_{\perp} \nabla (p_{\parallel 0} + p_{\perp 0}) + \\ & + (4p_{\parallel 0} + 3p_{\perp 0}) (\xi \nabla \ln B_0)^2 \} dr. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Исходя из (4.45) либо (4.46), находим, что энергия электростатических возмущений плазмы нулевого давления с  $p_{\parallel 0} = p_{\perp 0} \equiv p_0$  равна

$$\begin{aligned} W_{\text{пот}} = & (1/2) \int \{ -2 (\xi_{\perp} \nabla p_0) (\xi_{\perp} \nabla \ln B_0) + \\ & + 7p_0 (\xi_{\perp} \nabla \ln B_0)^2 \} dr. \end{aligned} \quad (4.47)$$

#### § 4.4. Потенциальная энергия возмущения плазмы, удерживаемой в «короткой» ловушке

1. Плазма нулевого давления. Опускаем в (4.43) члены с  $\mathbf{Q}$  и подставляем сюда  $p'_{\parallel}$ ,  $p'_{\perp}$  из (4.32). Учитывая, что  $dx^1 dx^2 \sqrt{g} = d\Phi \sqrt{g_{33}} B_0$ , представляем результат в виде

$$\begin{aligned} W_{\text{пот}} = & \frac{1}{2} \sum_{i,e} \int d\Phi \left\{ \int \frac{dl}{B_0} \left[ -(\xi \nabla \ln B_0) \xi \nabla (p_{\parallel 0} + p_{\perp 0}) + \right. \right. \\ & + (\xi_{\perp} \nabla \ln B_0)^2 \left( p_{\parallel 0} + p_{\perp 0} + \int \frac{MB_0^3 \mu^2}{v_{\parallel}} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} d\mu d\varepsilon \right) \left. \right] - \\ & - M \int d\varepsilon d\mu \frac{1}{\tau} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} (\xi \nabla J_{\parallel})^2 \} . \end{aligned} \quad (4.48)$$



Симметричность по  $\xi$  этой квадратичной формы вытекает из условия равновесия (П4.60).

При  $p_{\parallel 0} = p_{\perp 0} \equiv p_0$  (4.48) сводится к следующему:

$$W_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \int d\Phi (\xi \nabla p_0) (\xi \nabla U) + \frac{15}{4} \int p \frac{d\Phi}{K} \left( \xi \nabla \int \sqrt{1 - \alpha B} dl \right)^2, \quad (4.49)$$

где  $U$  и  $K$  определены соответственно формулами (1.19), (4.38).

При использовании канонических переменных (см. приложение 1 к гл. 4) возмущенное давление записывается в форме (4.35). Подставляя этот результат в (4.43) и учитывая, что  $\mathbf{Q} = 0$ , а также соотношения

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= d\alpha d\beta dl, \quad (\mathbf{e}_0 \nabla) \mathbf{e}_0 = \nabla \ln B_0; \\ \operatorname{div} \xi &= -2\xi \nabla \ln B_0, \end{aligned} \quad (4.50)$$

получаем

$$\begin{aligned} W_{\text{пот}} &= -\frac{M}{2} \int d\alpha d\beta \frac{d\mu dJ_{\parallel}}{\tau} (\xi_{\perp} \nabla \varepsilon) \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right)_{\mu, J_{\parallel}} \int \frac{dl}{v_{\parallel}} \times \\ &\quad \times (\xi_{\perp} \nabla \ln B_0) \left( v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Согласно (П4.28),

$$\int (v_{\perp}^2/2) \nabla \ln B_0 = -v_{\parallel} \nabla v_{\parallel}. \quad (4.52)$$

Поэтому

$$\int (dl/v_{\parallel}) \nabla \ln B_0 (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2) = -\nabla J_{\parallel}. \quad (4.53)$$

Учитывая, что

$$\nabla J_{\parallel} = -\tau \nabla \varepsilon, \quad (4.54)$$

приводим (4.51) к виду

$$W_{\text{пот}} = -(M/2) \int d\alpha d\beta d\mu dJ_{\parallel} (\xi \nabla \varepsilon)^2 (\partial F / \partial \varepsilon)_{\mu, J_{\parallel}}. \quad (4.55)$$

**2. Плазма произвольного давления при  $p_{\perp 0} = p_{\parallel 0}$ .** Подставляя (4.39) в (4.43), получаем

$$W_{\text{пот}} = W_1 + W_2, \quad (4.56)$$

где

$$W_1 = (1/2) \int \{Q^2/4\pi - \mathbf{Q} [\xi \operatorname{rot} \mathbf{B}_0]/4\pi + \xi \nabla p_0 \operatorname{div} \xi\} dr; \quad (4.57)$$

$$W_2 = (15/4) \int p d\Phi \int d\alpha [J(\Phi, \alpha)]^2 / K(\Phi, \alpha). \quad (4.58)$$

Входящие сюда  $J$  и  $K$  определены равенством (4.38).

**3. Плазма конечного давления с  $p_{\perp 0} \neq p_{\parallel 0}$ .** Потенциальная энергия представляется при этом в виде (4.56) с  $W_1$  и  $W_2$ , определенными соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} W_1 = & (1/2) \int \{Q^2/4\pi - \mathbf{Q} [\xi, \operatorname{rot} \mathbf{B}_0]/4\pi + \\ & + \xi \nabla p_{\perp 0} \operatorname{div} \xi + (p_{\parallel 0} - p_{\perp 0})/B_0 [\xi (\mathbf{Q}_{\perp} \nabla) \mathbf{e}_0 - \\ & - \mathbf{Q}_{\perp} (\mathbf{e}_0 \nabla) \xi] + (\xi_{\perp} \nabla_0 \mathbf{e}_0) [(p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) (\mathbf{e}_0 \nabla_0 \xi - \operatorname{div} \xi) - \\ & - \xi \nabla (p_{\parallel 0} - p_{\perp 0})] + (\mathbf{e}_0 \nabla_0 \xi - \operatorname{div} \xi)^2 \times \\ & \times \left( 2p_{\perp 0} + M \int (B_0^2/v_{\parallel}) \mu^2 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} d\mu d\varepsilon \right) \} dr; \\ W_2 = & -\frac{M}{2} \int d\Phi d\mu d\varepsilon \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \left\{ \int \frac{dl}{v_{\parallel}} \left[ \mu B_0 \operatorname{div} \xi_{\perp} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{v_{\perp}^2}{2} - v_{\parallel}^2 \right) \xi_{\perp} \nabla_0 \mathbf{e}_0 \right]^2 \left[ \int \frac{dl}{v_{\parallel}} \right]^{-1} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

### § 4.5. Теоремы сравнения

Используя неравенство Шварца

$$(\int fg dx)^2 \leq \int f^2 dx \int g^2 dx, \quad (4.60)$$

покажем, что потенциальная энергия в приближении короткой плазмы не превосходит энергии приближения длинной

плазмы. В качестве  $f$  подставляем в (4.60) выражение в квадратных скобках правой части (4.58), деленное на  $\sqrt{v_{\parallel}}$ , а в качестве  $g$  — величину  $1/\sqrt{v_{\parallel}}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 W_2 \leq & -\frac{M}{2} \int d\Phi d\mu d\varepsilon \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \int \frac{dl}{v_{\parallel}} \left[ \mu B_0 \operatorname{div} \xi_{\perp} + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{v_{\perp}^2}{2} - v_{\parallel}^2 \right) \xi_{\perp} \nabla_0 e_0 \right]^2 = \frac{1}{2} \int \left\{ -2p_{\perp 0} (\operatorname{div} \xi_{\perp} + \right. \\
 & \left. + \xi_{\perp} \nabla_0 e_0) \xi_{\perp} \nabla_0 e_0 + 3(\xi_{\perp} \nabla_0 e_0)^2 p_{\parallel 0} - \right. \\
 & \left. - (\operatorname{div} \xi_{\perp} + \xi_{\perp} \nabla_0 e_0)^2 \int \frac{\mu^2 B_0^3}{v_{\parallel}} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} d\mu d\varepsilon \right\} dr. \quad (4.61)
 \end{aligned}$$

Суммируя этот результат с  $W_1$  [см. (4.57)] и сравнивая с (4.44), приходим к постулированному выше неравенству

$$W_{\text{кор}} \leq W_{\text{дл}}. \quad (4.62)$$

В случае изотропного распределения частиц по скоростям можно показать, что энергия в приближении короткой плазмы не меньше, чем минимизированная по  $\xi_{\parallel}$  энергия в приближении столкновительной плазмы. Для этого применим неравенство (4.60) для оценки снизу интеграла по  $\alpha$  в (4.58), полагая  $f = J/\sqrt{K}$ ,  $g = \sqrt{K}$ :

$$\int d\alpha J^2/K \geq (\int J d\alpha)^2 / \int K d\alpha. \quad (4.63)$$

В соответствии с (4.38), (4.39) входящие в правую часть (4.63) интегралы равны

$$\int J d\alpha = \frac{2}{3} \int (dl/v_{\parallel}) \operatorname{div} \xi; \quad \int K d\alpha = 2 \int dl/v_{\parallel}. \quad (4.64)$$

В результате получаем оценку снизу для (4.58)

$$W_2 \geq (5/6) \int p_0 d\Phi \{ (dl/B) \operatorname{div} \xi_{\perp} \}^2 / \int dl/B. \quad (4.65)$$

Теперь минимизируем выражение для энергии столкновительной плазмы (3.43) по  $\xi_{\parallel}$ . Посредством процедуры минимизации, по  $\xi_{\parallel}$  получаем

$$\left\{ \frac{1}{2} \int \gamma_0 \rho_0 (\operatorname{div} \xi)^2 dr \right\}_{\text{мин}} = \frac{1}{2} \int \gamma_0 \rho_0 d\Phi \left[ \int \frac{dl}{B} \operatorname{div} \xi_{\perp} \right]^2 / \int \frac{dl}{B}. \quad (4.66)$$

Это в совокупности с (4.65) доказывает наше утверждение

Итак, мы показали, что при изотропном распределении частиц по скоростям,  $\rho_{\parallel 0} = \rho_{\perp 0} \equiv \rho_0$ , энергия возмущений бесстолкновительной плазмы, определяемая по формуле (4.56), всегда не меньше энергии столкновительного приближения (3.43):

$$W_{\text{бесст. кол}} \geq W_{\text{ст.}} \quad (4.67)$$

Это означает, что критерии устойчивости, получаемые с помощью более простой гидродинамической формулы (3.43), достаточны для бесстолкновительной плазмы. Поэтому, если преследуется цель вывода достаточных критериев устойчивости плазмы с  $\rho_{\parallel 0} = \rho_{\perp 0}$ , то можно не прибегать к кинетическому описанию плазмы и использовать гидродинамическое. В частности, с помощью формулы (4.49) получается следующий кинетический критерий устойчивости изотропной плазмы нулевого давления:

$$\nabla \rho \nabla U + \frac{15}{2} \rho \int \left( \nabla \oint \sqrt{1 - \alpha B} dl \right)^2 \frac{d\alpha}{\oint dl / \sqrt{1 - \alpha B}} > 0. \quad (4.68)$$

Если же обратиться к теореме сравнения (4.67), то получим, что интегральный член в (4.68) не меньше, чем  $\gamma_0 \rho (\nabla U)^2 / U$  при  $\gamma_0 = 5/3$ .

Сопоставляя (4.56) с (3.43), можно оценить погрешность, связанную с использованием столкновительного приближения. Отличие между этими двумя выражениями обязано членам порядка  $\partial \ln B / \partial \ln \rho$ . Это особенно просто видно на примере формулы (4.49): в существенно кинетическом члене дважды дифференцируется по координатам магнитное поле, а в «гидродинамическом» — один раз поле и один раз дав-

ление. Поэтому в случае, когда  $\partial \ln B / \partial \ln p \ll 1$ , столкновительное и бесстолкновительное приближения дают одинаковые результаты. Поскольку производные магнитного поля связаны с кривизной поля и конечностью  $\beta$ , условие  $\partial \ln B / \partial \ln p \ll 1$  качественно означает, что  $(\beta, a/R) \ll 1$ . В этом случае  $W_{\text{бесст}} \approx W_{\text{ст}}$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Движение частиц в криволинейном магнитном поле

Рассмотрим невозмущенное движение частиц плазмы, находящейся в криволинейном поле. Исходными являются уравнения движения

$$dr/dt = \mathbf{v}(t); \quad d\mathbf{v}/dt = [\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}_B], \quad (\text{П4.1})$$

в которых вектор  $\boldsymbol{\omega}_B = e\mathbf{V}/mc$  изменяется в пространстве как по величине, так и по направлению.

Подставляем скорость частиц в виде

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{e}_0 + v_{\perp} (\mathbf{e}_1 \cos \alpha + \mathbf{e}_2 \sin \alpha), \quad (\text{П4.2})$$

где  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — единичные ортогональные друг другу векторы, удовлетворяющие соотношениям  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{V}/B$ ;  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_0$ . Таким образом,  $\mathbf{e}_0$  направлено по магнитному полю, а  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — поперек. Величина  $v_{\parallel}$  имеет смысл проекции скорости частицы на направление магнитного поля;  $v_{\perp}$  — это модуль поперечной скорости, а  $\alpha$  — фаза ларморовского вращения частицы.

Подставляя (П4.2) в (П4.1), найдем закон изменения во времени величин  $v_{\perp}, v_{\parallel}, \alpha, r$ . С этой целью первое векторное уравнение (П4.1) умножаем на  $\mathbf{e}_1 \cos \alpha + \mathbf{e}_2 \sin \alpha, \mathbf{e}_0, (-\mathbf{e}_1 \sin \alpha + \mathbf{e}_2 \cos \alpha)$ .

Учитываем, что  $d\mathbf{e}_i/dt = (v\nabla) \mathbf{e}_i$ . Результат представляем в виде:

$$\left. \begin{aligned} dv_{\perp}/dt &= -(1/2) v_{\parallel} v_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{e}_0 + \delta f_{\perp}; \\ dv_{\parallel}/dt &= (1/2) v_{\perp}^2 \operatorname{div} \mathbf{e}_0 + \delta f_{\parallel}; \\ d\alpha/dt &= -\omega_B + \delta f_{\alpha}; \\ dr/dt &= v_{\parallel} \mathbf{e}_0 + v_{\perp} (\mathbf{e}_1 \cos \alpha + \mathbf{e}_2 \sin \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (\text{П4.3})$$

где  $\delta f_{\perp}$ ,  $df_{\parallel}$ ,  $df_{\alpha}$  означают:

$$\begin{aligned} \delta f_{\perp} &= -(v_{\parallel}/v_{\perp}) \delta f_{\parallel} = -v_{\parallel}^2 (\mathbf{e}_1 \cos \alpha + \\ &\quad + \mathbf{e}_2 \sin \alpha) (\mathbf{e}_0 \nabla) \mathbf{e}_0 + A_2; \\ \delta f_{\alpha} &= \frac{v_{\parallel}^2}{v_{\perp}} (\mathbf{e}_1 \cos \alpha - \mathbf{e}_2 \sin \alpha) (\mathbf{e}_0 \nabla) \mathbf{e}_0 - \\ &\quad - \frac{v_{\parallel}}{2} \{ \mathbf{e}_0 \operatorname{rot} \mathbf{e}_0 + 2\mathbf{e}_2 (\mathbf{e}_0 \nabla) \mathbf{e}_1 \} + \\ &\quad + v_{\perp} \{ \mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_1 \nabla) \mathbf{e}_2 \cos \alpha - \mathbf{e}_2 (\mathbf{e}_2 \nabla) \mathbf{e}_1 \sin \alpha \} + B_2, \end{aligned} \quad (\text{П4.4})$$

$A_2$ ,  $B_2$  — члены, содержащие  $\cos 2\alpha$ ,  $\sin 2\alpha$ . Явный вид входящих сюда двойных осцилляций по  $\alpha$  в дальнейшем нам не понадобится.

Можно различать две группы эффектов, обусловленных неоднородностью магнитного поля: такие, которые проявляются в нулевом приближении по отношению ларморовского радиуса частиц к характерному градиенту поля  $a_B$ , и такие, которые зависят от этого отношения. Рассмотрим их последовательно.

**1. Нулевое приближение по  $\rho/a_B$ .** В пренебрежении неоднородностью магнитного поля частица совершает циклотронное вращение поперек поля и равномерно движется вдоль поля. Учет неоднородности поля прежде всего сказывается в том, что появляется координатная зависимость частоты и модуля скорости вращательного движения и скорости продольного движения.

Приближенно можно принять, что частота вращения равна циклотронной частоте в точке ведущего центра частицы  $\mathbf{r}$  и  $v_{\perp}$ ,  $v_{\parallel}$ , как и в случае однородного поля, не зависят от ларморовских осцилляций. Последнее означает, что координатная зависимость  $v_{\perp}$ ,  $v_{\parallel}$ , в соответствии с (П4.3), определяется уравнениями

$$\begin{aligned} dv_{\perp}/dt &= -(1/2) v_{\perp} v_{\parallel} \operatorname{div} \mathbf{e}_0; \\ dv_{\parallel}/dt &= (1/2) v_{\perp}^2 \operatorname{div} \mathbf{e}_0. \end{aligned} \quad (\text{П4.5})$$

Ведущий центр частицы в этом приближении «приклеен» к силовой линии

$$\mathbf{e}_0 \times d\mathbf{r}/dt = 0, \quad (\text{П4.6})$$

а его положение на силовой линии определяется соотношением

$$\mathbf{e}_0 d\mathbf{r}/dt = v_{\parallel}. \quad (\text{П4.7})$$

Отклонение поперечной траектории частицы от точки ведущего центра  $\delta \mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}_\perp - \bar{\mathbf{r}}_\perp$  удовлетворяет условию

$$d\delta \mathbf{r}_\perp / dt = v_\perp (\mathbf{e}_1 \cos \alpha + \mathbf{e}_2 \sin \alpha), \quad (\text{П4.8})$$

где временная зависимость стоящих в правой части функций  $\alpha$  определяется уравнением  $d\alpha/dt = -\omega_B \bar{r}$ . Отсюда находим, что, как и в случае прямого поля,

$$\delta \mathbf{r}_\perp = [\mathbf{e}_0, \mathbf{v}_\perp] / \omega_B. \quad (\text{П4.9})$$

Специфичным для кривого магнитного поля эффектом, проявляющимся в этом приближении, является *непостоянство* во времени поперечной и продольной скорости частицы [см. уравнение (П4.5)]. Это относится, однако, не к любому кривому полю, а лишь к такому, градиент напряженности которого вдоль силовой линии отличен от нуля [ср. с (П4.3)]:

$$\text{div } \mathbf{e}_0 \equiv B \nabla (1/B) \neq 0. \quad (\text{П4.10})$$

Движение частицы в этом случае, как и при  $\text{div } \mathbf{e}_0 = 0$ , обладает двумя инвариантами. Одним из них является полная энергия (на единицу массы)

$$\varepsilon = (v_\perp^2 + v_\parallel^2) / 2. \quad (\text{П4.11})$$

Другой инвариант получим, умножив первое уравнение (П4.5) на  $v_\perp / B$ , сделав следующие преобразования в левой и правой частях равенства:

$$\begin{aligned} \frac{v_\perp}{B} \frac{dv_\perp}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{v_\perp^2}{2B} \right) - \frac{v_\perp^2}{2} \frac{d}{dt} \frac{1}{B} - \\ &- \frac{v_\perp^2 v_\parallel}{2B} \text{div } \mathbf{e}_0 = - \frac{v_\perp^2}{2} v_\parallel \mathbf{e}_0 \nabla \left( \frac{1}{B} \right) \end{aligned} \quad (\text{П4.12})$$

и учтя, что в силу (П4.6), (П4.7)

$$d/dt = v_\parallel \mathbf{e}_0 \nabla. \quad (\text{П4.13})$$

В результате находим, что сохраняющейся во времени является величина, обычно называемая *магнитным моментом* частицы

$$\mu \equiv v_\perp^2 / 2B. \quad (\text{П4.14})$$

Согласно (П4.11), (П4.14), поперечная и продольная скорости  $v_\perp, v_\parallel$  связаны с константами движения  $\varepsilon$  и  $\mu$  соотношениями

$$v_\perp = (2\mu B)^{1/2}; \quad v_\parallel = [2(\varepsilon - \mu B)]^{1/2}. \quad (\text{П4.15})$$

Из последнего уравнения видно, что движение частицы в кривом магнитном поле с  $\text{div } \mathbf{e}_0 \neq 0$  может оказаться пространственно-ограниченной областью более слабого поля

$$B(\mathbf{r}) < \varepsilon/\mu. \quad (\text{П4.16})$$

В частности, на этом принципе основано удержание частиц в адиабатических магнитных ловушках, таких, что магнитное поле возрастает в продольном направлении к краю ловушки. Частица остается в ограниченном объеме вследствие отражения от областей с более сильным магнитным полем — от магнитных пробок.

**2. Эффекты, обусловленные конечностью  $\rho/a_B$ .** Выше мы пренебрегли в (П4.3) членами  $\delta f_{\perp}$ ,  $\delta f_{\parallel}$ ,  $\delta f_{\alpha}$ , а в качестве  $\omega_B$  приняли значение этой величины в точке ведущего центра частицы. Теперь учтем указанные члены и примем во внимание, что  $\omega_B$  зависит от координаты на траектории частицы. При этом находим, что величины  $v_{\perp}$ ,  $v_{\parallel}$ ,  $\alpha$  отличаются от принятых в п. 1 значений на добавки  $\delta v_{\perp}$ ,  $\delta v_{\parallel}$ ,  $\delta \alpha$ , удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} d\delta v_{\perp}/dt &= -(v_{\parallel}/v_{\perp})d\delta v_{\parallel}/dt = -v_{\parallel}^2 (\mathbf{e}_1 \cos \alpha + \\ &\quad + \mathbf{e}_2 \sin \alpha) (\mathbf{e}_0 \nabla) \mathbf{e}_0; \\ d\delta \alpha/dt &= -\delta \mathbf{r}_{\perp} \nabla \omega_B + (v_{\parallel}^2/v_{\perp}) (\mathbf{e}_1 \sin \alpha - \\ &\quad - \mathbf{e}_2 \cos \alpha) (\mathbf{e}_0 \nabla) \mathbf{e}_0 + v_{\perp} \{ \mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_1 \nabla) \mathbf{e}_2 \cos \alpha - \\ &\quad - \mathbf{e}_2 (\mathbf{e}_2 \nabla) \mathbf{e}_1 \sin \alpha \}. \end{aligned} \quad (\text{П4.17})$$

Предполагается, что в правых частях равенств опущены несущественные для дальнейшего члены, не зависящие от  $\alpha$  либо содержащие двойные осцилляции по  $\alpha$ .

Учтенные в (П4.17) члены определяют скорость усредненного по осцилляциям движения частицы поперек силовых линий  $\langle d\mathbf{r}_{\perp}/dt \rangle$ . В этом можно убедиться, если в последнее уравнение (П4.3) подставить  $v_{\perp} + \delta v_{\perp}$ ,  $\alpha + \delta \alpha$ ,  $\bar{\mathbf{r}} + \delta \mathbf{r}$  вместо  $v_{\perp}$ ,  $\alpha$ ,  $\bar{\mathbf{r}}$  и удерживать члены соответствующего порядка. Уравнение для  $d\mathbf{r}_{\perp}/dt$  выглядит так:

$$\begin{aligned} \langle d\mathbf{r}_{\perp}/dt \rangle &= \langle \delta v_{\perp} (\mathbf{e}_1 \cos \alpha + \mathbf{e}_2 \sin \alpha) + \\ &\quad + v_{\perp} \{ \cos \alpha (\delta \mathbf{r}_{\perp} \nabla) \mathbf{e}_1 + \sin \alpha (\delta \mathbf{r}_{\perp} \nabla) \mathbf{e}_2 \} + \\ &\quad + v_{\perp} \delta \alpha (-\mathbf{e}_1 \sin \alpha + \mathbf{e}_2 \cos \alpha) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{П4.18})$$

С использованием (П4.9) и (П4.17) отсюда в результате усреднения по ларморовским осцилляциям находим

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{др}} \equiv \langle d\mathbf{r}_{\perp}/dt \rangle &= [\mathbf{e}_0, (v_{\perp}^2/2) \nabla \ln B + \\ &\quad + v_{\parallel}^2 (\mathbf{e}_0 \nabla) \mathbf{e}_0] / \omega_B. \end{aligned} \quad (\text{П4.19})$$



Член, пропорциональный  $v_{\parallel}^2$ , можно представить в более наглядной форме, заметив, что

$$(\mathbf{e}_0 \nabla) \mathbf{e}_0 = n/R, \quad (\text{П4.20})$$

где  $R$  — радиус кривизны силовой линии, а  $\mathbf{n}$  — ее главная нормаль.

В частном случае плазмы нулевого давления  $\beta \rightarrow 0$ , когда равновесный ток в плазме пренебрежимо мал,  $\mathbf{j}_0 \rightarrow 0$ , величину  $\nabla \ln B$  в (П4.19) также можно выразить через радиус кривизны  $R$ . Для этого уравнение  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$  умножаем векторно на  $\mathbf{B}$  и делаем следующие преобразования:

$$[\mathbf{B}[\nabla\mathbf{B}]] = \nabla B^2/2 - (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B} = B\nabla_{\perp} B - B^2(\mathbf{e}_0 \nabla)\mathbf{e}_0 = 0. \quad (\text{П4.21})$$

Далее, учитывая (П4.20), получаем

$$\nabla_{\perp} \ln B = (\mathbf{e}_0 \nabla)\mathbf{e}_0 = n/R. \quad (\text{П4.22})$$

В этом частном случае скорость дрейфа (П4.19) равна

$$\mathbf{V}_{\text{др}} \equiv \langle d\mathbf{r}_{\perp}/dt \rangle = \frac{\mathbf{b}}{R\omega_B} (v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2), \quad (\text{П4.23})$$

где  $\mathbf{b} \equiv [\mathbf{e}_0, \mathbf{n}]$  — бинормаль к силовой линии.

Отметим еще одно из следствий, вытекающих из (П4.17). Это — наличие осциллирующей добавки  $u$  магнитного момента (П4.14). Повторяя выкладки, сходные с теми, которые делались при выводе закона сохранения магнитного момента в нулевом приближении по  $\rho/a_B$ , находим, что теперь сохраняющейся во времени является величина

$$\mu_0 = \mu - (e/Mc) \delta r_{\perp} [\mathbf{e}_0, \mathbf{V}_{\text{др}}], \quad (\text{П4.24})$$

где  $\delta r_{\perp}$  и  $\mathbf{V}_{\text{др}}$  определяются соответственно формулами (П4.9) и (П4.19).

**3. Усредненный дрейф частиц в пространстве между двумя пробками. Продольный адиабатический инвариант.** Пусть частица движется между двумя магнитными пробками. В приближении  $\rho/a_B \rightarrow 0$  она остается на одной и той же силовой линии. В следующем приближении по  $\rho/a_B$  это уже не имеет места — частица смещается относительно силовой линии со скоростью порядка  $v_{\perp}(\rho/a_B)$ . Эта скорость меняется от точки к точке вдоль силовой линии, и вследствие этого не является достаточно удобной характеристикой. Можно, однако, используя малость  $\rho/a_B$ , произвести усреднение поперечного дрейфа по периоду осцилляций частицы между пробками и тем самым вычислить эффективную скорость дрейфа частицы, находящейся на соответствующей силовой линии.

Запишем дрейфовое уравнение (П4.19) в переменных  $x^1, x^2, x^3$ , введенных в приложении 1 к гл. 1 ( $B^1 = B^2 = 0, B^3 \neq 0$ ). Учитывая (П1.1) и соотношение

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}, \quad (\text{П4.25})$$

закключаем, что контравариантными компонентами скорости являются величины  $dx^i/dt$ . Тогда с учетом тождества

$$(\mathbf{e}_0 \nabla) \mathbf{e}_0 = -[\mathbf{e}_0, \text{rot } \mathbf{e}_0] \quad (\text{П4.26})$$

и формул (П1.4), (П1.7), (П1.11), (П1.17) из (П4.19) следует

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} = & \frac{e^{ijk}}{V \bar{g} \omega_B} \left[ v_{\parallel}^2 \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{g_{k3}}{\sqrt{g_{33}}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{v_{\perp}^2}{2} \frac{\partial \ln B}{\partial x^j} \frac{g_{k3}}{\sqrt{g_{33}}} \right]; \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (\text{П4.27})$$

С учетом законов сохранения энергии и магнитного момента частицы имеем следующую цепь равенств:

$$\begin{aligned} \frac{v_{\perp}^2}{2} \frac{\partial \ln B}{\partial x^i} = & -B \left[ \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{v_{\perp}^2}{2B} \right) - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{v_{\perp}^2}{2} \right] = \\ = & -v_{\parallel} \frac{\partial v_{\parallel}}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (\text{П4.28})$$

Поэтому уравнение (П4.27) можно записать так:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{\omega_B \sqrt{g}} e^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( v_{\parallel} \frac{g_{k3}}{\sqrt{g_{33}}} \right). \quad (\text{П4.29})$$

Усредним это уравнение по периоду осцилляций частицы между пробками. Усреднение будем обозначать символом  $\langle \dots \rangle$ , где

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{\tau} \oint (\dots) dt = \frac{1}{\tau} \oint (\dots) \frac{dl}{v_{\parallel}}. \quad (\text{П4.30})$$

Здесь  $\tau$  — период осцилляций

$$\tau = \oint dt = \oint dl/v_{\parallel}, \quad (\text{П4.31})$$

а усреднение производится по замкнутой траектории частицы. Учитывая (П1.22), результат усреднения (П4.29) представляем в виде

$$\left\langle \frac{dx^i}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \oint \frac{\sqrt{g_{33}}}{\omega_B \sqrt{g}} e^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( v_{\parallel} \frac{g_{k3}}{\sqrt{g_{33}}} \right) dx^3; \quad i=1,2. \quad (\text{П4.32})$$

В соответствии с (П1.18) величину  $g_{33}/(\omega_B \sqrt{g})$  можно вынести за знак интеграла. Поскольку  $i = 1, 2$  и поскольку вследствие замкнутости пути интегрирования вклад членов с  $j = 3$  в (П4.32) равен нулю, то можно принять  $k = 3$ . Тогда из (П4.32) получается

$$\left\langle \frac{dx^i}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \frac{\sqrt{g_{33}}}{\omega_B \sqrt{g}} e^{ij3} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial x^i}, \quad (\text{П4.33})$$

где

$$J_{\parallel} = \oint v_{\parallel} \sqrt{g_{33}} dx^3 \equiv \oint v_{\parallel} dt. \quad (\text{П4.34})$$

Здесь  $dt$  — элемент силовой линии, на которой находится частица.

Уравнения (П4.33) дают искомый закон среднего (за период осцилляций между пробками) смещения частицы поперек силовых линий. Можно убедиться в том, что смещение частицы происходит вдоль таких поперечных траекторий, на которых величина  $J_{\parallel} = J_{\parallel}(x^1, x^2)$  остается неизменной. Действительно, подставляя в правую часть равенства

$$\frac{dJ_{\parallel}}{dt} = \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial x^1} \left\langle \frac{dx^1}{dt} \right\rangle + \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial x^2} \left\langle \frac{dx^2}{dt} \right\rangle, \quad (\text{П4.35})$$

и выражая  $\langle dx^i/dt \rangle$  из (П4.33), находим, что

$$dJ_{\parallel}/dt = 0. \quad (\text{П4.36})$$

Величина  $J_{\parallel}$  называется *продольным адиабатическим инвариантом частицы*.

В переменных  $x^1 = \alpha$ ,  $x^2 = \beta$  (см. приложение 1 к гл. 1) уравнения (П4.33) записываются особенно просто:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{Mc}{e\tau} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \beta}; \quad \frac{d\beta}{dt} = -\frac{Mc}{e\tau} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \alpha}. \quad (\text{П4.37})$$

Правые части этих равенств выражены в переменных  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\varepsilon$ . Вместо этого можно использовать набор переменных  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $J_{\parallel}$ , полагая, что энергия  $\varepsilon$  есть функция этих переменных, удовлетворяющая соотношению

$$J_{\parallel} = \oint \sqrt{2(\varepsilon - \mu B)} dl. \quad (\text{П4.38})$$

В новых переменных производные по  $\alpha$ ,  $\beta$  преобразуются по закону

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial \varepsilon / \partial x^i}{\partial \varepsilon / \partial J_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial J_{\parallel}}, \quad (\text{П4.39})$$

где, согласно (П4.38),

$$\partial \varepsilon / \partial J_{\parallel} = 1/\tau. \quad (\text{П4.40})$$

В результате уравнения (П4.37) принимают простой вид:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{Mc}{e} \frac{d\varepsilon}{d\beta}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{Mc}{e} \frac{d\varepsilon}{d\alpha}. \quad (\text{П4.41})$$

По форме эти уравнения полностью аналогичны обычным уравнениям движения частицы с гамильтонианом  $(Mc/e)\varepsilon$ . Они называются *каноническими*.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Функция распределения и макроскопические параметры стационарного состояния плазмы

**1. Нулевое приближение по  $\rho/a$ .** В пренебрежении столкновениями стационарное состояние каждого сорта частиц определяется интегралами движения частицы. Согласно приложению 1 к настоящей главе, интегралами движения, не зависящими явно от времени, являются величины  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\mathbf{r}_{\perp}$  — энергия, магнитный момент и поперечные координаты силовой линии, на которой находится частица. Поэтому стационарная функция распределения в этом приближении есть

$$f_0^{(0)} = F(\varepsilon, \mu, \mathbf{r}_{\perp}), \quad (\text{П4.42})$$

где  $F$  — функция, вообще говоря, произвольного вида.

Функция  $f_0^{(0)}$  не зависит от азимутального угла в пространстве скоростей. Поэтому ее нормировку удобно принять такой, что

$$n_0 = \int f_0^{(0)} v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}. \quad (\text{П4.43})$$

Поскольку в переменных  $\mu, \varepsilon$

$$v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} = (B/v_{\parallel}) d\mu d\varepsilon, \quad (\text{П4.44})$$

то при нормировке (П4.43) макроскопические параметры плазмы, плотность, продольное и поперечное давление выражаются через  $F$  так:

$$\left. \begin{aligned} n_0 &= \int F (B/v_{\parallel}) d\mu d\varepsilon; \\ p_{\parallel} &= M \int F B v_{\parallel} d\mu d\varepsilon; \\ p_{\perp} &= M \int F (B^2 \mu / v_{\parallel}) d\mu d\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П4.45})$$

Если частицы совершают осциллирующее движение между пробками, то, согласно п. 3 приложения 1, имеется еще один интеграл усредненного движения  $J_{\parallel}$ , зависящий от  $\varepsilon, \mu, r_{\perp}, J_{\parallel} = J_{\parallel}(\varepsilon, \mu, r_{\perp})$ . При этом вместо переменных  $(r_{\perp}, \varepsilon, \mu)$  можно использовать набор  $(\alpha, \beta, J_{\parallel}, \mu)$ , где  $\alpha, \beta$  — канонические переменные. Тогда

$$f_0^{(0)} = F(\alpha, \beta, \mu, J_{\parallel}). \quad (\text{П4.46})$$

Согласно уравнению Лиувилля, для стационарной функции  $F$  должно быть

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( F \frac{d\alpha}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( F \frac{d\beta}{dt} \right) = 0. \quad (\text{П4.47})$$

С учетом (П4.41) отсюда следует

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0. \quad (\text{П4.48})$$

Это означает, что  $F$  связана с  $\alpha, \beta$  посредством зависимости от  $\varepsilon = \varepsilon(\mu, J_{\parallel}, \alpha, \beta)$ , так что

$$F = F[\mu, J_{\parallel}, \varepsilon(\mu, J_{\parallel}, \alpha, \beta)]. \quad (\text{П4.49})$$

В переменных  $\alpha, \beta, J_{\parallel}, \mu$  вместо (П4.44) с учетом (П4.40) имеем,

$$v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} = (B/v_{\parallel} \tau) d\mu dJ_{\parallel}. \quad (\text{П4.50})$$

Учитывая также (П1.20) и (П1.23), заключаем, что число частиц в элементе  $dr dv$  определяется формулой

$$f_0^{(0)} dr dv = F[\mu, J_{\parallel}, \varepsilon(\mu, J_{\parallel}, \alpha, \beta)] d\alpha d\beta d\mu dJ_{\parallel} dl / v_{\parallel} \tau. \quad (\text{П4.51})$$

Поскольку  $\oint dl/v_{\parallel} = \tau$ , то из (П4.51) видно, что  $F(\mu, J_{\parallel}, \varepsilon)$  имеет смысл числа частиц на силовой линии, приходящихся на единицу объема в пространстве  $\alpha, \beta, \mu, J_{\parallel}$ .

**2. Первое приближение по  $\rho/a_B$ .** При учете членов порядка  $\rho/a_B$  вместо (П4.42) мы имели бы в соответствии с приложением 1 к настоящей главе:

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = F(\varepsilon, \mu_0, \bar{\mathbf{r}}_{\perp}), \quad (\text{П4.52})$$

где  $\mu_0$  определено формулой (П4.24);  $\bar{\mathbf{r}}_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp} - \delta\mathbf{r}_{\perp}$ , а  $\delta\mathbf{r}_{\perp}$  дается формулой (П4.9). Разлагая правую часть (П4.52) в ряд по  $\mu_0 - \mu$  и  $\delta\mathbf{r}_{\perp}$ , получаем осциллирующую по  $\alpha$  часть стационарной функции распределения:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = & -\frac{1}{\omega_B} [\mathbf{e}_0, \mathbf{v}_{\perp}] \left\{ \nabla F - \frac{1}{B} \times \right. \\ & \left. \times [(v_{\perp}^2/2) \nabla \ln B + v_{\parallel}^2 (\mathbf{e}_0 \nabla) \mathbf{e}_0] \frac{\partial F}{\partial \mu} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П4.53})$$

В переменных  $\mathbf{r}, v_{\perp}, v_{\parallel}$  это означает

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = & -\frac{1}{\omega_B} [\mathbf{e}_0, \mathbf{v}_{\perp}] \left\{ \nabla + v_{\parallel} (\mathbf{e}_0 \nabla) \mathbf{e}_0 \left( \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - v_{\parallel} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\perp}} \right) \right\} f_0^{(0)}. \end{aligned} \quad (\text{П4.54})$$

Эта часть функции распределения определяет плотность электрического тока, перпендикулярного  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\perp 0} \equiv \sum_{i, e} e \int \mathbf{v}_{\perp} f_0 dv = & (c/B) [\mathbf{e}_0, \nabla p_{\perp 0} - \\ & - \mathbf{e}_0 \nabla \mathbf{e}_0 (p_{\perp 0} - p_{\parallel 0})]. \end{aligned} \quad (\text{П4.55})$$

Здесь  $p_{\perp 0}, p_{\parallel 0}$  — поперечное и продольное давление плазмы. При изотропном распределении частиц по скоростям, т. е. когда  $F$  не зависит от  $\mu_0, p_{\perp 0} = p_{\parallel 0} \equiv p_0$ , и тогда вместо (П4.55) имеем

$$\mathbf{j}_{\perp 0} = (c/B) [\mathbf{e}_0, \nabla p_0]. \quad (\text{П4.56})$$

Этот результат можно представить также в виде гидростатического уравнения

$$-\nabla p_0 + [\mathbf{j}_0 \mathbf{B}]/c = 0. \quad (\text{П4.57})$$

Формулы (П4.56), (П4.57), полученные здесь для бесстолкновительной плазмы, имеют силу и в случае столкновительной плазмы.

**3. Условие равновесия плазмы некалярного давления в магнитных ловушках без шира.** В приложении 2 к гл. 1 в предположении изотропного распределения частиц по скоростям  $p_{\perp 0} = p_{\parallel 0} \equiv p_0$ , с использованием соотношений (П4.56), (П4.57) и  $\text{div } \mathbf{j}_0 = 0$  было получено условие равновесия плазмы в такой ловушке (П1.30)

$$\oint \nabla B [\mathbf{B}, \nabla p_0] dl/B^4 = 0, \quad (\text{П4.58})$$

которое также можно записать в виде

$$[\nabla p_0, \nabla U] = 0. \quad (\text{П4.59})$$

Если же  $p_{\perp 0} \neq p_{\parallel 0}$ , то исходя из (П4.54), таким же способом, как и в приложении 2 к гл. 1, можно показать, что условие замыкания токов,  $\text{div } \mathbf{j}_0 = 0$ , приводит к следующему интегральному соотношению для давления:

$$\oint \nabla B [\mathbf{B}, \nabla(p_{\parallel 0} + p_{\perp 0})] dl/B^4 = 0. \quad (\text{П4.60})$$

Это соотношение иногда используется при анализе устойчивости плазмы с некалярным давлением в аксиально-несимметричной адиабатической ловушке.

### Библиографический обзор к части I

Библиографию по вопросам, изложенным в настоящей части, см. в гл. 11—18 книги:

1. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы. М., Атомиздат, 1971 и в обзорной статье:
2. Кадомцев Б. Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Госатомиздат, 1963, с. 132.

## ЧАСТЬ II

### ТЕОРИЯ ЖЕЛОБКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ БОЛЬШОГО ДАВЛЕНИЯ В ТОРОИДАЛЬНЫХ ЛОВУШКАХ С МАГНИТНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

#### Глава 5

##### ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ЖЕЛОБКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ БОЛЬШОГО ДАВЛЕНИЯ В ТОРОИДАЛЬНЫХ ЛОВУШКАХ С МАГНИТНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

#### § 5.1. Введение

Согласно § 3.5, шир труднее всего стабилизирует возмущения, локализованные вблизи той или иной магнитной поверхности. Такие возмущения назовем мелко-масштабными или локальными, в отличие от крупномасштабных или нелокальных возмущений, затрагивающих всю плазму в целом. В настоящей главе покажем, что, используя поперечную мелкомасштабность возмущений, ответственных за желобковую неустойчивость, и их «желобковость», т. е. вытянутость вдоль силовых линий магнитного поля, можно существенно упростить гидромагнитные уравнения и получить критерии устойчивости плазмы в тороидальных ловушках при довольно общих предположениях относительно равновесных параметров плазмы и магнитного поля.

В отличие от глав 3, 4 рассмотрение локальных гидромагнитных возмущений будем проводить методом малых колебаний.

В § 5.2 приведем исходные уравнения и произведем их упрощение для интересующего нас случая мелкомасштабных, почти желобковых возмущений. В § 5.3 получим уравнение для желобковой части возмущенного смещения, которое является одним из главных результатов данной главы. В § 5.4 покажем, как из этого уравнения получается общегеометрический критерий устойчивости, обычно называемый *критерием Мерсье*.

Критерий Мерсье является необходимым и достаточным критерием устойчивости плазмы, удерживаемой в тороидаль-



ных ловушках с широм, по отношению к частному классу локальных возмущений, таких, радиальная длина волны которых мала по сравнению с длиной волны вдоль малого азимута тороидальной ловушки. По этой причине он, вообще говоря, не является достаточным критерием отсутствия желобковой неустойчивости. Для получения достаточного критерия необходим анализ возмущений с произвольным соотношением между радиальной и азимутальной длинами волн. Такой анализ проводится в § 5.5.

В последующих главах мы воспользуемся полученными в данной главе общими критериями устойчивости для анализа устойчивости плазмы в конкретных магнитных конфигурациях, характеризующихся соответствующими метрическими коэффициентами  $g_{ih}$ . При этом нам потребуется выразить через  $g_{ih}$  комбинации равновесных параметров, входящие в эти критерии, и в частности комбинацию, характеризующую глубину средней магнитной ямы, обозначаемую ниже  $W^{(0)}$ . Нахождению связи  $W^{(0)}$  с  $g_{ih}$  посвящен § 5.6.

Во избежание недоразумений заметим, что в настоящей главе и некоторых последующих используется система уравнений одножидкостной магнитной гидродинамики, в которой для простоты опущены константы  $c$  (скорость света), а в ряде случаев — и  $4\pi$ .

### § 5.2. Исходные уравнения и их упрощение для случая мелкомасштабных, почти желобковых возмущений

**1. Равновесное состояние.** Полагаем, что силовые линии стационарного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  образуют систему вложенных магнитных поверхностей. При этом можно ввести, как это делалось и в приложении 2 к гл. 2, систему криволинейных координат:  $x^1 = a$ ;  $x^2 = \theta$ ;  $x^3 = \zeta$ , таких, что координата  $a$  характеризует расстояние от магнитной оси до соответствующей магнитной поверхности, а координаты  $\theta$ ,  $\zeta$  — угловые координаты на поверхности  $a = \text{const}$ , период изменения которых положим равным  $2\pi$ . В соответствии со сказанным в приложении 2 к гл. 2, в качестве координат  $\theta$  и  $\zeta$  можно выбрать такие, в которых силовые линии поля  $\mathbf{B}_0$  являются «прямыми». При этом контравариантные компоненты  $\mathbf{B}_0$  имеют вид [см. (П2.29)]

$$B_0^1 = 0; \quad B_0^2 = \chi' / 2\pi \sqrt{g}; \quad B_0^3 = \Phi' / 2\pi \sqrt{g}, \quad (5.1)$$

где  $g$  — детерминант метрического тензора  $g_{ik}$  координатной системы  $a, \theta, \zeta$ , а  $\chi'(a), \Phi'(a)$  — производные по  $a$  от поперечного (вдоль  $\theta$ ) и продольного (вдоль  $\zeta$ ) магнитных потоков.

Полагая, что равновесное состояние плазмы описывается уравнением [см. (П1.27)]

$$-\nabla p_0 + [\mathbf{j}_0 \mathbf{B}_0] = 0, \quad (5.2)$$

где  $p_0 = p_0(a)$  и  $\mathbf{j}_0$  — равновесные давление и ток в плазме, и учитывая (5.2), заключаем, что  $j_0^1 = 0$ . Две другие контравариантные компоненты  $\mathbf{j}_0$ , связанные условием  $\text{div } \mathbf{j}_0 = 0$ , могут быть представлены как

$$j_0^2 = \left( I' - \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) / 2\pi V \sqrt{g}, \quad j_0^3 = \left( J' + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) / 2\pi V \sqrt{g}. \quad (5.3)$$

Функции  $I'(a)$  и  $J'(a)$  имеют смысл производных по  $a$  от поперечного и продольного токов, протекающих между магнитными поверхностями. Как следует из (5.2), эти величины связаны с градиентом давления соотношением [см. (П2.35)]

$$p_0' V' = I' \Phi' - J' \chi', \quad V' = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V \sqrt{g} d\theta d\zeta, \quad (5.4)$$

где  $V'$  — производная по  $a$  от объема, ограниченного соответствующей магнитной поверхностью. Из (5.2) вытекает также уравнение для функции  $v$  [см. (П2.37)]

$$\mathbf{B}_0 \nabla v = 2\pi p_0' (V'/4\pi^2 V \sqrt{g} - 1). \quad (5.5)$$

Уравнения Максвелла  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}_0$  дают еще два соотношения между токами  $I, J$  и магнитными потоками  $\Phi, \chi$ :

$$\left. \begin{aligned} J &= \left( \frac{g_{22}}{Vg} \right)^{(0)} \chi' + \left( \frac{g_{23}}{Vg} \right)^{(0)} \Phi'; \\ -I &= \left( \frac{g_{23}}{Vg} \right)^{(0)} \chi' + \left( \frac{g_{33}}{Vg} \right)^{(0)} \Phi'. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Здесь и далее индекс нуль вверху означает среднюю по  $\theta$ ,  $\zeta$  часть соответствующей величины

$$(\dots)^{(0)} \equiv (1/4\pi^2) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\theta d\zeta. \quad (5.7)$$

Равновесный ток состоит из двух физически различных частей — вдоль  $\mathbf{V}_0$  и поперек  $\mathbf{V}_0$ , т. е.

$$\mathbf{j}_0 = \alpha_0 \mathbf{V}_0 + \mathbf{j}_{0\perp}, \quad (5.8)$$

где  $\alpha_0 \equiv \mathbf{j}_0 \mathbf{V}_0 / \mathbf{V}_0^2$ , а  $\mathbf{j}_{0\perp}$ , согласно (5.2), равен

$$\mathbf{j}_{0\perp} = [\mathbf{V}_0 / \mathbf{V}_0^2, \nabla p_0]. \quad (5.9)$$

Из условия  $\text{div } \mathbf{j}_0 = 0$  следует, что функция  $\alpha_0$  удовлетворяет соотношению, аналогичному (5.5):

$$\mathbf{V}_0 \nabla \alpha_0 = -\rho'_0 \text{rot}^1 (\mathbf{V}_0 / \mathbf{V}_0^2). \quad (5.10)$$

**2. Исходные уравнения для мелкомасштабных, почти желобковых возмущений.** При наличии возмущений магнитное поле  $\mathbf{V}$ , плотность тока  $\mathbf{j}$  и давление  $p$  отличаются от своих равновесных значений на малые величины, которые в дальнейшем обозначаются соответственно  $\tilde{\mathbf{V}}$ ,  $\tilde{\mathbf{j}}$ ,  $\tilde{p}$ . Иначе говоря, при наличии возмущений  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \tilde{\mathbf{V}}$ ,  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \tilde{\mathbf{j}}$ ,  $p = p_0 + \tilde{p}$ . Вместо  $\tilde{p}$  используем возмущенное смещение  $\tilde{\xi}$ , определив эту величину соотношением  $\tilde{p} = -\rho'_0 \tilde{\xi}$ . В приближении идеальной магнитной гидродинамики со скалярным давлением и при равной нулю частоте возмущений ( $\partial/\partial t = 0$ ) величины  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $p$  удовлетворяют уравнениям:

$$\text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{j}; \quad \text{div } \mathbf{V} = 0; \quad -\nabla p + [\mathbf{j}, \mathbf{V}] = 0. \quad (5.11)$$

Полагая  $\mathbf{j} = \alpha \mathbf{V} + \mathbf{j}_\perp$ , где  $\alpha \equiv \mathbf{j} \mathbf{V} / \mathbf{V}^2$ ;  $\mathbf{j}_\perp = [\mathbf{V} / \mathbf{V}^2, \nabla p]$ , в линейном приближении по возмущениям из (5.11) получаем

$$\mathbf{V}_0 \nabla \tilde{\alpha} + \tilde{\mathbf{V}} \nabla \alpha_0 + \text{div } \tilde{\mathbf{j}}_\perp = 0. \quad (5.12)$$

Упростим уравнение (5.12), предполагая возмущения почти желобковыми вдоль  $\mathbf{B}_0$ :

$$\mathbf{B}_0 \nabla \tilde{X} \ll |[ \mathbf{B}_0, \nabla \tilde{X} ]|, \quad (5.13)$$

и мелкомасштабными поперек  $\mathbf{B}_0$ :

$$[ \mathbf{B}_0, \nabla \ln \tilde{X} ] \gg [ \mathbf{B}_0, \nabla \ln X_0 ], \quad (5.14)$$

где  $\tilde{X}$  и  $X_0$  — какие-либо из возмущенных и равновесных величин.

Начнем с упрощения  $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}$ . По определению.

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{j}}_{\perp} = -\rho'_0 \left\{ \nabla \xi \operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}_0}{\mathbf{B}_0^2} - \operatorname{rot}^1 \left( \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\mathbf{B}_0^2} - \frac{2\mathbf{B}_0 \tilde{\mathbf{B}}}{\mathbf{B}_0^4} \mathbf{B}_0 \right) \right\}. \quad (5.15)$$

Замечаем, что при условиях (5.13), (5.14)

$$\operatorname{rot}^1 \tilde{\mathbf{X}} = \frac{2\pi}{\Phi'} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{B}_0 \tilde{\mathbf{X}}). \quad (5.16)$$

Поэтому

$$\operatorname{rot}^1 \left( \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\mathbf{B}_0^2} - \frac{2\mathbf{B}_0 \tilde{\mathbf{B}}}{\mathbf{B}_0^4} \mathbf{B}_0 \right) = -\frac{2\pi}{\Phi' \mathbf{B}_0^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{B}_0 \tilde{\mathbf{B}}). \quad (5.17)$$

Теперь выразим правую часть (5.17) через  $\xi$ . Для этого исходим из выражения для  $\tilde{\mathbf{j}}^1$  вида

$$\tilde{\mathbf{j}}^1 = -\frac{\rho'_0}{\sqrt{g}} \left( \frac{B_{02}}{\mathbf{B}_0^2} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \zeta} - \frac{B_{03}}{\mathbf{B}_0^2} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \theta} \right) + \alpha_0 \tilde{B}^1. \quad (5.18)$$

Согласно (5.11),

$$\tilde{B}^1 = \mathbf{B}_0 \nabla \xi. \quad (5.19)$$

На основании предположения (5.13) пренебрегаем в правой части (5.18) производными вдоль силовой линии по сравнению с поперечными производными. В этом приближении

$$\tilde{\mathbf{j}}^1 = \frac{2\pi}{\Phi'} \frac{\rho'_0 \partial \xi}{\partial \theta}.$$

Подставляя это выражение в уравнение  $\text{rot}^1 \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{j}}^1$ , находим

$$\partial (\mathbf{B}_0 \tilde{\mathbf{B}}) / \partial \theta = \rho'_0 \partial \xi / \partial \theta. \quad (5.20)$$

С использованием (5.17) и (5.20) вся правая часть (5.15) выражается через  $\xi$ . Далее упростим первый член в фигурных скобках (5.15). В приближении (5.13) с учетом тождества

$$B_0^2 \frac{\partial}{\partial a} \frac{B_{02}}{\mathbf{B}_0^2} + B_0^3 \frac{\partial}{\partial a} \frac{B_{03}}{\mathbf{B}_0^2} \equiv -\frac{1}{\mathbf{B}_0^2} \left( B_{02} \frac{\partial B_0^2}{\partial a} + B_{03} \frac{\partial B_0^3}{\partial a} \right)$$

и соотношения (5.10) получаем

$$\begin{aligned} \nabla \xi \text{rot} \frac{\mathbf{B}_0}{\mathbf{B}_0^2} &= -\frac{\partial \xi}{\partial a} \frac{\mathbf{B}_0 \nabla \alpha_0}{\rho'_0} + \frac{2\pi}{\Phi'} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\mathbf{B}_0^2} \left( B_{02} \frac{\partial B_0^2}{\partial a} + B_{03} \frac{\partial B_0^3}{\partial a} \right) + \mathbf{B}_0 \nabla \frac{B_{01}}{\mathbf{B}_0^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Используя (5.5), находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{B}_0^2} \left( B_{02} \frac{\partial B_0^2}{\partial a} + B_{03} \frac{\partial B_0^3}{\partial a} \right) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{g} \rho'_0} \times \\ &\times (\Omega - \mu' \Phi'^2 \alpha_0) + \frac{1}{2\pi} \mathbf{B}_0 \nabla \left( \frac{\mathbf{v}}{\rho'_0} \right)', \end{aligned} \quad (5.22)$$

где

$$\Omega = \rho_0^2 V'' + J' \chi'' - I' \Phi'', \quad \mu = \chi' / \Phi'. \quad (5.23)$$

С учетом (5.17), (5.20)–(5.22) уравнение (5.15) записывается в виде

$$\begin{aligned} \text{div} \tilde{\mathbf{j}}_{\perp} &= -\frac{2\pi}{\Phi'} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \left[ \frac{\rho_0'^2}{\mathbf{B}_0^2} - \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{g}} (\Omega - \mu' \Phi'^2 \alpha_0) \right] + \\ &+ \frac{\partial \xi}{\partial a} \mathbf{B}_0 \nabla \alpha_0 - \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\rho_0'}{\Phi'} \mathbf{B}_0 \nabla \left[ \left( \frac{\mathbf{v}}{\rho_0'} \right)' + \frac{2\pi B_{01}}{B_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Теперь упростим выражение для  $\alpha$ . По определению

$$\tilde{\alpha} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mathbf{B}_0^2} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{B}} + \left( \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\mathbf{B}_0^2} - \frac{2\mathbf{B}_0(\mathbf{B}_0 \tilde{\mathbf{B}})}{\mathbf{B}_0^4} \right) \operatorname{rot} \mathbf{B}_0. \quad (5.25)$$

Первый член правой части содержит производные  $\tilde{\mathbf{B}}$  в направлениях, поперечных силовым линиям  $\mathbf{B}_0$ . Второй член таких производных не содержит. Он мал по сравнению с первым в силу (5.14). Поэтому

$$\tilde{\alpha} = (\mathbf{B}_0/\mathbf{B}_0^2) \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{B}}. \quad (5.25')$$

Расписывая по компонентам правую часть (5.25') и используя условия (5.13), (5.14), приводим (5.25') к виду

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} = \frac{\Phi'}{2\pi g \mathbf{B}_0^2} & \left[ (\mu g_{23} + g_{33}) \frac{\partial \tilde{B}_2}{\partial a} - (\mu g_{22} + g_{32}) \frac{\partial \tilde{B}_3}{\partial a} - \right. \\ & \left. - \frac{4\pi^2 g \mathbf{B}_0^2}{\Phi'^2} \frac{\partial \tilde{B}_1}{\partial \theta} + (\mu g_{21} + g_{31}) \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{B}_3 + \mu \tilde{B}_2) \right]. \quad (5.26) \end{aligned}$$

Величины  $\tilde{B}_\alpha$  выразим через  $\xi$  и  $\tilde{B}^1$ . Для этого прежде всего выражаем  $\tilde{B}_\alpha$  через  $\tilde{B}^\beta$ ,  $\tilde{B}_\alpha = g_{\alpha\beta} \tilde{B}^\beta$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ). Кроме того, используем условие  $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{B}} = 0$ , которое в требуемом приближении сводится к виду  $\partial(\tilde{B}^2 - \mu \tilde{B}^3)/\partial \theta = -\partial \tilde{B}^1/\partial a$ , и уравнение (5.20), означающее

$$\begin{aligned} (\mu g_{22} + g_{32}) \tilde{B}^2 + (\mu g_{23} + g_{33}) \tilde{B}^3 = \\ = -(\mu g_{21} + g_{31}) \tilde{B}^1 + 2\pi p'_0 \sqrt{g} \xi / \Phi'. \end{aligned}$$

В результате из (5.26) получаем

$$\tilde{\alpha} = 2\pi \sqrt{g} \hat{L}_\perp \tilde{\psi} / \Phi', \quad (5.27)$$

где  $\tilde{\psi} = \int \tilde{B}^1 d\theta$ ;

$$\hat{L}_\perp = - \left( \frac{\Phi'}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{g} \mathbf{B}_0^2} \left( g^{11} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - 2g^{1b} \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta} + g^{bb} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right); \quad (5.28)$$

$$g^{1b} \equiv g^{12} + \mu g^{13}, \quad g^{bb} \equiv g^{22} + 2\mu g^{23} + \mu^2 g^{33}; \quad (5.29)$$

$g^{ik} \equiv g^{-1} M_{ik}$ ;  $M_{ik}$  — алгебраическое дополнение  $g_{ik}$ .

Видно, что  $\tilde{\alpha}$ , входящее в (5.12), пропорционально вторым производным возмущенных величин поперек  $\mathbf{V}_0$ . Столь больших слагаемых во втором члене левой части (5.12) нет. Поэтому уравнение малых колебаний сводится к виду

$$\mathbf{V}_0 \nabla \tilde{\alpha} + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{j}}_{\perp} = 0 \quad (5.30)$$

с  $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}$  и  $\tilde{\alpha}$ , определяемыми формулами (5.24) и (5.27).

### § 5.3. Уравнение для желобковой части возмущенного смещения

Представляем возмущенные величины в виде

$$\tilde{X} = \exp [i(m\theta - n\zeta)] [\tilde{X}^{(0)}(a) + \tilde{X}^{(1)}(a, \theta, \zeta)], \quad (5.31)$$

где  $m$  и  $n$  — целые числа, такие, что  $n/m = \mu(a_0)$ ,  $a_0$  — координата  $a$  некоторой рациональной магнитной поверхности. Полагаем  $|\tilde{X}^{(1)}| \ll |\tilde{X}^{(0)}|$ , что соответствует предположению (5.13) о почти желобковом характере возмущений. При этом условии

$$\mathbf{V}_0 \nabla \tilde{X} = \frac{\Phi'}{2\pi \sqrt{g}} \exp [i(m\theta - n\zeta)] (im\mu' x \tilde{X}^{(0)} + \hat{L}_{\parallel} \tilde{X}^{(1)}), \quad (5.32)$$

где  $\hat{L}_{\parallel} \equiv \mu \partial / \partial \theta + \partial / \partial \zeta$ ,  $x = a - a_0$ .

Вместо функций  $\tilde{X}^{(0)}(x)$ ,  $\tilde{X}^{(1)}(x)$  будем иметь дело с их фурье-компонентами  $\tilde{X}_k^{(0)}$ ,  $\tilde{X}_k^{(1)}$ , определенными соотношением

$$\tilde{X}(x) = \int \exp(ik_x x) \tilde{X}_k dk_x. \quad (5.33)$$

При этом

$$(\mathbf{V}_0 \nabla \tilde{X})_k = \frac{\Phi'}{2\pi \sqrt{g}} \exp [i(m\theta - n\zeta)] \left( -m\mu' \frac{\partial \tilde{X}_k^{(0)}}{\partial k_x} + \hat{L}_{\parallel} \tilde{X}_k^{(1)} \right). \quad (5.34)$$

В  $k_x$ -представлении уравнение (5.30) записывается в виде

$$-m\mu' \partial \tilde{\alpha}_k^{(0)} / \partial k_x + \hat{L}_\parallel \tilde{\alpha}_k^{(1)} + im\xi_k W^{(0)} + \xi_k \hat{L}_\parallel A = 0, \quad (5.35)$$

где  $\xi_k \equiv \xi_k^{(0)} + \xi_k^{(1)}$ ;

$$W^{(0)} = \frac{\Omega}{\Phi'^2} - \mu' \alpha_0^{(0)} - \left( \frac{2\pi\rho'_0}{\Phi'} \right)^2 \left( \frac{V\bar{g}}{\mathbf{B}_0^2} \right)^{(0)}; \quad (5.36)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= i(k_x \alpha_0^{(1)} + m\beta_0^{(1)}); \quad \alpha_0^{(1)} = \alpha_0 - \alpha_0^{(0)}; \\ \beta_0^{(1)} &= \frac{\rho'_0}{\Phi'} \left[ \left( \frac{v}{\rho'_0} \right)' + \frac{2\pi B_{01}}{\mathbf{B}_0^2} \right] + \frac{\mu'}{\Phi'^2} \hat{L}_\parallel^{-1} \alpha_0^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

Из (5.27) следует

$$\tilde{\alpha}_k = 2\pi \sqrt{g} L_\perp \tilde{\psi}_k / \Phi', \quad (5.38)$$

где  $L_\perp$  — собственное значение оператора  $\hat{L}_\perp$ , соответствующее  $k_x$ -й фурье-гармонике:

$$L_\perp = \left( \frac{\Phi'}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{g}\mathbf{B}_0^2} (k_x^2 g^{11} - 2mk_x g^{1b} + m^2 g^{bb}), \quad (5.39)$$

а функция  $\tilde{\psi}_k$ , как следует из определения  $\tilde{\psi}$  и формулы (5.19), связана с  $\xi_k$  соотношением

$$\tilde{\psi}_k = -\frac{i}{m} \frac{\Phi'}{2\pi\sqrt{g}} \left( -m\mu' \frac{\partial \xi_k^{(0)}}{\partial k_x} + \hat{L}_\parallel \xi_k^{(1)} \right). \quad (5.40)$$

Средняя по  $\theta, \zeta$  часть уравнения (5.35) имеет вид

$$-m\mu' \frac{\partial \tilde{\alpha}_k^{(0)}}{\partial k_x} + im\xi_k^{(0)} W^{(0)} - (A\hat{L}_\parallel \xi_k^{(1)})^{(0)} = 0. \quad (5.41)$$

Величина  $\tilde{\alpha}_k^{(0)}$  определяется из соотношений (5.38)—(5.40):

$$\alpha_k^{(0)} = -\frac{i}{m} \left[ -m\mu' \frac{\partial \xi_k^{(0)}}{\partial k_x} L_\perp^{(0)} + (L_\perp^{(1)} \hat{L}_\parallel \xi_k^{(1)})^{(0)} \right], \quad (5.42)$$



где  $L_{\perp}^{(0)}$  — средняя по  $\theta$ ,  $\zeta$  часть  $L_{\perp}$ ,  $L_{\perp}^{(1)} = L_{\perp} - L_{\perp}^{(0)}$ . Входящее в правую часть (5.42), а также в последний член левой части (5.41) выражение  $\hat{L}_{\parallel} \xi_k^{(1)}$  определяется осциллирующей по  $\theta$ ,  $\zeta$  частью уравнения (5.35). Эта часть уравнения (5.35) при используемом нами предположении о малости  $\xi_k^{(1)}/\xi_k^{(0)}$  приводится к виду

$$\tilde{\alpha}_k^{(1)} = -\xi_k^{(0)} A. \quad (5.43)$$

Сюда должно быть подставлено  $\tilde{\alpha}_k^{(1)}$ , определяемое осциллирующей по  $\theta$ ,  $\zeta$  частью уравнения (5.42):

$$\tilde{\alpha}_k^{(1)} = i\mu' L_{\perp}^{(1)} \frac{\partial \xi_k^{(0)}}{\partial k_x} - \frac{i}{m} [L_{\perp} \hat{L}_{\parallel} \xi_k^{(1)} - (L_{\perp} \hat{L}_{\parallel} \xi_k^{(1)})^{(0)}]. \quad (5.44)$$

Из (5.43) и (5.44) находим

$$\hat{L}_{\parallel} \xi_k^{(1)} = \frac{1}{L_{\perp}} \left[ (L_{\perp} \hat{L}_{\parallel} \xi_k^{(1)})^{(0)} + m\mu' L_{\perp}^{(1)} \frac{\partial \xi_k^{(0)}}{\partial k_x} - im\xi_k^{(0)} A \right]. \quad (5.45)$$

Среднее по  $\theta$ ,  $\zeta$  левой части этого уравнения равно нулю. Такому же условию должна удовлетворять и правая часть (5.45). Поэтому

$$\begin{aligned} & (L_{\perp} \hat{L}_{\parallel} \xi_k^{(1)})^{(0)} = \\ & = \frac{m}{Q^{(0)}} \left[ -\mu' \frac{\partial \xi_k^{(0)}}{\partial k_x} (1 - L_{\perp}^{(0)} Q^{(0)}) + i\xi_k^{(0)} (QA)^{(0)} \right], \end{aligned} \quad (5.46)$$

где  $Q \equiv L_{\perp}^{-1}$ . С учетом (5.46) из (5.45) получаем выражение для  $\hat{L}_{\parallel} \xi_k^{(1)}$  как функцию  $\xi_k^{(0)}$ :

$$\hat{L}_{\parallel} \xi_k^{(1)} = m \left\{ \mu' \frac{\partial \xi_k^{(0)}}{\partial k_x} \left( 1 - \frac{Q}{Q^{(0)}} \right) - i\xi_k^{(0)} \left[ QA - \frac{Q}{Q^{(0)}} (QA)^{(0)} \right] \right\}. \quad (5.47)$$

Используя (5.42), (5.46), (5.47) из (5.41) получаем окончательное уравнение для  $\xi_k^{(0)}$

$$\mu'^2 \frac{\partial}{\partial k_x} \left( \frac{1}{Q^{(0)}} \frac{\partial \xi_k^{(0)}}{\partial k_x} \right) - \xi_k^{(0)} \left\{ W^{(0)} + i\mu' \frac{\partial}{\partial k_x} \left[ \frac{(QA)^{(0)}}{Q^{(0)}} \right] + (QA^2)^{(0)} - \frac{[(QA)^{(0)}]}{Q^{(0)}} \right\} = 0. \quad (5.48)$$

Заметим, что член с  $\mu'^2$  соответствует обычному эффекту стабилизации широм; член с  $W^{(0)}$  — средней магнитной яме; квадратичные по  $A$  члены — баллонным эффектам, а линейный по  $\mu'$  и  $A$  член представляет собой совместное действие шира и непостоянства плотности продольного тока вдоль силовых линий магнитного поля.

Из (5.47) следуют пределы применимости нашего приближения  $\xi^{(1)}/\xi^{(0)} \ll 1$ :

$$mx\mu'/\mu \ll 1, \beta \ll \mu^2 ak, \quad (5.49)$$

где  $x$  — характерный размер локализации возмущения;  $k$  — кривизна магнитного поля,  $\beta \simeq p_0/B_0^2$  — относительное давление плазмы.

Видно, что для справедливости уравнения (5.48) в общем случае возмущений с  $mx \simeq a$  следует считать  $a\mu'/\mu \ll 1$ ;  $ak \ll 1$ , где  $a$  — характерный размер плазмы.

#### § 5.4. Критерий устойчивости плазмы относительно возмущений с $m/k_x \rightarrow 0$

Рассмотрим возмущения с  $m/k_x \rightarrow 0$ , продолжая тем не менее считать  $m \gg 1$ . При этом из (5.37) и (5.39)

$$A = ik_x \alpha_0^{(1)}; \quad (5.50)$$

$$Q \equiv L_{\perp}^{-1} = (1/k_x^2)(2\pi V'/\Phi')^2 \sqrt{g\alpha_s}, \quad (5.51)$$

где

$$\alpha_s \equiv B_0^2/g^{11}V'^2 \equiv B_0^2/|\nabla V|^2. \quad (5.52)$$

В этом случае средние по  $\theta$ ,  $\zeta$ , входящие в (5.48), означают:

$$Q^{(0)} = \frac{V'^3}{k_x^2 \Phi'^2} \langle \alpha_s \rangle, \quad \frac{(QA)^{(0)}}{Q^{(0)}} = ik_x \left( \frac{\langle \gamma_s \rangle}{\langle \alpha_s \rangle} - \alpha_0^{(0)} \right);$$

$$(QA^2)^{(0)} - \frac{[(QA)^{(0)}]^2}{Q^{(0)}} = \frac{V'^3}{\Phi'^2} \left( \frac{\langle \gamma_s \rangle^2}{\langle \alpha_s \rangle} - \langle \beta_s \rangle \right) + \frac{V' p_0'^2}{\Phi'^2} \left\langle \frac{1}{B_0^2} \right\rangle, \quad (5.53)$$

где

$$\beta_s = \mathbf{j}_0^2 / |\nabla V|^2, \quad \gamma_s = \mathbf{j}_0 \mathbf{B}_0 / |\nabla V|^2;$$

$$\langle \dots \rangle \equiv [V \bar{g}(\dots)]^{(0)} / (V \bar{g})^{(0)}. \quad (5.54)$$

Подставляя (5.53) в (5.48) и вспоминая определение  $W^{(0)}$  [см. уравнение (5.36)], получаем

$$\mu'^2 \frac{\partial}{\partial k_x} \left( k_x^2 \frac{\partial \xi_k^{(0)}}{\partial k_x} \right) - \frac{V'^3}{\Phi'^2} \xi_k^{(0)} \left[ \langle \alpha_s \rangle \frac{\Omega}{\Phi'^2} - \mu' \langle \gamma_s \rangle + \right. \\ \left. + \frac{V'^3}{\Phi'^2} (\langle \gamma_s \rangle^2 - \langle \alpha_s \rangle \langle \beta_s \rangle) \right] = 0. \quad (5.55)$$

Уравнение типа (5.55) при переходе к  $x$ -представлению сводится к виду (П2.5) с  $\gamma = 0$ . Оно не имеет ограниченных в пространстве решений, если

$$\frac{\mu'^2}{4} + \frac{V'^3}{\Phi'^2} \left[ \langle \alpha_s \rangle \frac{\Omega}{\Phi'^2} - \mu' \langle \gamma_s \rangle + \right. \\ \left. + \frac{V'^3}{\Phi'^2} (\langle \gamma_s \rangle^2 - \langle \alpha_s \rangle \langle \beta_s \rangle) \right] > 0, \quad (5.56)$$

что, в соответствии с приложением 1 к гл. 2, представляет собой необходимое и достаточное условие устойчивости плазмы относительно рассматриваемого типа возмущений. Условие (5.56) называют *критерием устойчивости Мерсье*.

### § 5.5. Достаточный критерий отсутствия желобковой неустойчивости

Умножая обе части равенства (5.48) на  $\xi_k^{(0)*}$  (\* — символ комплексного сопряжения) и интегрируя по  $k_x$ , получаем

$$\int dk_x \left\{ \frac{\mu'^2}{Q^{(0)}} \left| \frac{\partial \xi_k^{(0)}}{\partial k_x} \right|^2 + \left| \xi_k^{(0)} \right|^2 \left\{ W^{(0)} - \mu' \frac{\partial}{\partial \lambda} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[ \frac{\lambda (\bar{Q} \bar{A})^{(0)}}{\bar{Q}^{(0)}} \right] - (\bar{Q} \bar{A}^2)^{(0)} + \frac{[(\bar{Q} \bar{A})^{(0)}]^2}{\bar{Q}^{(0)}} \right\} \right\} = 0. \quad (5.57)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= k_x / m; \\ \bar{Q} &\equiv k_x^2 Q = \left( \frac{2\pi}{\Phi'} \right)^2 \frac{B^2 \sqrt{g}}{g^{11} - 2g^{1b} \lambda^{-1} + g^{bb} \lambda^{-2}}; \\ \bar{A} &\equiv \frac{1}{ik_x} A = \alpha_0^{(1)} + \beta_0^{(1)} \lambda^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (5.58)$$

Левая часть равенства (5.57) определяет квадрат частоты колебаний. Учитывая  $Q^{(0)} > 0$ , находим, что она неотрицательна, если неотрицателен минимум коэффициента при  $|\xi_k^{(0)}|^2$  как функция  $\lambda$ :

$$\min \left\{ W^{(0)} - \mu' \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{\lambda (\bar{Q} \bar{A})^{(0)}}{\bar{Q}^{(0)}} \right] - (\bar{Q} \bar{A}^2)^{(0)} + \frac{[(\bar{Q} \bar{A})^{(0)}]^2}{\bar{Q}^{(0)}} \right\} \geq 0. \quad (5.59)$$

Это соотношение играет роль достаточного условия отсутствия желобковой неустойчивости.

Ясно, что достаточный критерий устойчивости (5.59) будет близок к реальному лишь в случае, если шир достаточно мал.

### § 5.6. Связь средней магнитной ямы с метрическими коэффициентами

В целях использования соотношений (5.56), (5.59) для анализа устойчивости плазмы в конкретных магнитных конфигурациях, выразим функцию  $W^{(0)}$ , определенную соотношением (5.36), через метрические коэффициенты  $g_{ik}$ .

Представляем функцию  $\chi''$ , входящую в выражение (5.23) для  $\Omega$ , в виде

$$\chi'' = \mu' \Phi' + \mu \Phi'' \quad (5.60)$$

Функцию  $\Phi''$  исключаем из (5.23) следующим образом. Дифференцируя оба уравнения (5.6) по  $a$ , умножаем первый результат на  $\chi'$ , а второй — на  $\Phi'$  и складываем одно с другим. Используя выражение для квадрата магнитного поля

$$B^2 = \left( \frac{\Phi'}{2\pi\sqrt{g}} \right)^2 (\mu^2 g_{22} + 2\mu g_{23} + g_{33}), \quad (5.61)$$

а также соотношения (5.4) и (5.60), находим

$$\begin{aligned} \frac{\Phi''}{\Phi'} = & - \frac{p'}{\langle B^2 \rangle} - \frac{[\mu' \Phi' J']}{V' \langle B^2 \rangle} - \frac{\Phi'^2}{V' \langle B^2 \rangle} \left[ \mu^2 \left( \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right)^{(0)'} + \right. \\ & \left. + 2\mu \left( \frac{g_{23}}{\sqrt{g}} \right)^{(0)'} + \left( \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \right)^{(0)'} \right]. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Используя определение  $\alpha_0 = \mathbf{jB}/B^2$  и соотношения (5.3), получаем связь

$$\alpha_0^{(0)} = \frac{J'}{\Phi'} + p' (V\bar{g})^{(0)} \left\langle \frac{\mu g_{22} + g_{23}}{g B^2} \right\rangle. \quad (5.63)$$

Учитывая (5.36), (5.62) и (5.63), находим окончательно:

$$W^{(0)} = W_1^{(0)} + W_2^{(0)} + W_3^{(0)}, \quad (5.64)$$

где

$$\begin{aligned} W_1^{(0)} = & \frac{p'}{(V\bar{g})^{(0)} \langle B^2 \rangle} \left\{ \mu^2 \left[ (V\bar{g})^{(0)} \left( \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right)^{(0)'} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\mu \left[ (V\bar{g})^{(0)} \left( \frac{g_{23}}{\sqrt{g}} \right)^{(0)'} \right]' + \left[ (V\bar{g})^{(0)} \left( \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \right)^{(0)'} \right]' \right] \right\}; \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$W_2^{(0)} = \frac{\rho'^2 V'}{\Phi'^2} \left( \frac{1}{\langle B^2 \rangle} - \left\langle \frac{1}{B^2} \right\rangle \right); \quad (5.66)$$

$$W_3^{(0)} = \frac{\mu' \rho'}{(\sqrt{g})^{(0)} \langle B^2 \rangle} \left[ \left\langle \frac{\mu g_{22} + g_{23}}{g} \right\rangle - \langle B^2 \rangle \left\langle \frac{\mu g_{22} + g_{23}}{g B^2} \right\rangle \right]. \quad (5.67)$$

Заметим также, что критерий Мерсье (5.56) может быть записан в виде

$$\mu'^2/4 + A_0 W^{(0)} - A_1 \mu' - A_0 A_2 + A_1^2 > 0, \quad (5.68)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \left( \frac{2\pi}{\Phi'} \right)^2 \left[ \frac{\sqrt{g} B^2}{g^{11}} (\alpha_0^{(1)})^n \right]^{(0)}; \quad n = 0, 1, 2; \\ \alpha_0^{(1)} &= \frac{jB}{B^2} - \left( \frac{jB}{B^2} \right)^{(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.69)$$

Эта форма записи критерия Мерсье будет, в частности, использована в гл. 7.

### Библиографический обзор к гл. 5

1. Михайловский А. Б. К теории локальной гидромагнитной устойчивости тороидальных плазменных конфигураций. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1973, т. 64, с. 536.  
В настоящей главе мы следовали работе [1].
2. Mercier С. Critère de stabilité d'un système toroidal hydromagnétique en pression scalaire. — «Nucl. Fusion Suppl.», 1962, v. 2, p. 81.  
В работе [2] был впервые получен критерий устойчивости (5.56).

## Глава 6

### УСТОЙЧИВОСТЬ ТОКАМАКА ПРИ БОЛЬШОМ ДАВЛЕНИИ ПЛАЗМЫ

#### § 6.1. Введение

Из теории равновесия следует, что в токамаке круглого сечения может удерживаться плазма с  $\beta \simeq a/R$ , где  $a$  и  $R$  — соответственно малый и большой радиусы тора. В связи с этим возникает вопрос: будет ли плазма при столь больших значениях параметра  $\beta$  оставаться гидромагнитно устойчивой? Выяснение этого вопроса является целью настоящей главы.

Наш анализ будет основываться на общих результатах, изложенных в гл. 5. При этом задача сводится к исследованию уравнения малых колебаний с нулевой частотой для желобковой части возмущенного смещения. Использование уравнения малых колебаний предполагает знание метрических коэффициентов, которые для интересующего нас случая осесимметричного токамака круглого сечения вычисляются в § 6.2. Подстановка метрических коэффициентов в уравнение малых колебаний и упрощение последнего производится в § 6.3. Критерий отсутствия желобковой неустойчивости в токамаке при  $\beta < (a/R)^{4/3}$  выводится в § 6.4. Поведение плазмы с  $\beta > (a/R)^{4/3}$  обсуждается в § 6.5, 6.6, где для этого случая выводится критерий Мерсье (§ 6.5), а также рассматриваются возмущения, не описываемые критерием Мерсье (в том числе возмущения типа *анти-Мерсье*) в предположении достаточно малого шира (§ 6.6).

#### § 6.2. Равновесие плазмы в осесимметричном токамаке круглого сечения

**1. Исходные уравнения.** Исходим из выражения для квадрата длины в квазицилиндрической системе координат  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$ , приведенного, например, в обзоре Л. С. Соловьева и В. Д. Шафранова:

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 + R^2 (1 - k\rho \cos \omega)^2 d\varphi^2. \quad (6.1)$$

Здесь  $k \equiv 1/R$  — кривизна оси квазицилиндрической системы координат по предположению совпадающей с магнитной осью токамака.

Полагаем, что центры магнитных поверхностей  $a = \text{const}$  смещены относительно магнитной оси на расстояние  $\xi(a)$ . Введем полярные координаты  $\rho_0, \omega_0$ , связанные со смещенными центрами:

$$\rho \cos \omega = \rho_0 \cos \omega_0 + \xi(a); \quad \rho \sin \omega = \rho_0 \sin \omega_0. \quad (6.2)$$

Считая  $\rho_0$  и  $\omega_0$  некоторыми функциями  $a$  и  $\theta$ ,  $\rho = \rho_0(a, \theta)$ ,  $\omega_0 = \omega_0(a, \theta)$  и не конкретизируя пока явного вида этих функций, находим, что выражение (6.1) принимает вид

$$dl^2 = g_{11}da^2 + 2g_{12}dad\theta + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\varphi^2, \quad (6.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= \rho_0'^2 + \rho_0^2 \omega_0'^2 + \xi'^2 + 2\xi'(\rho_0' \cos \omega_0 - \dot{\omega}_0' \rho_0 \sin \omega_0); \\ g_{12} &= \rho_0 \dot{\rho}_0 + \rho_0^2 \dot{\omega}_0' + \xi'(\dot{\rho}_0 \cos \omega_0 - \dot{\omega}_0 \rho_0 \sin \omega_0), \\ g_{22} &= \dot{\rho}_0^2 + \rho_0^2 \dot{\omega}_0'^2; \\ g_{33} &= R^2(1 - k\rho_0 \cos \omega_0 - k\xi)^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Здесь штрих означает производную по  $a$ , а точка — по  $\theta$ . В выражении (6.3) мы считаем  $\varphi \equiv \zeta \equiv x^3$ .

В дальнейшем нам необходимо иметь также выражение для  $\sqrt{g}$ . Как вытекает из (6.4), исходная формула для этой величины имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= R(1 - k\rho_0 \cos \omega_0 - k\xi)[\rho_0(\rho_0' \dot{\omega}_0 - \dot{\rho}_0 \omega_0') + \\ &+ \xi'(\dot{\rho}_0 \sin \omega_0 + \rho_0 \dot{\omega}_0 \cos \omega_0)]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

**2. Приближение слабоэллиптических поперечных сечений магнитных поверхностей со слабосмещенными центрами.** Полагаем магнитные поверхности слабоэллиптически, так что

$$\rho_0 = a + \alpha \cos 2\omega_0, \quad (6.6)$$



где  $\alpha/a \ll 1$ . Как будет ясно из последующего, такого рода эллиптичность вызывается конечным давлением плазмы.

Функцию  $\omega_0(a, \theta)$  выбираем в виде

$$\omega_0 = \theta + \lambda(a) \sin \theta + \mu(a) \sin 2\theta. \quad (6.7)$$

Параметры  $\lambda$  и  $\mu$  вводятся для «выпрямления» магнитных силовых линий. Выражения для  $\lambda$  и  $\mu$  мы получим в последующем, исходя из требования, чтобы контравариантные компоненты магнитного поля имели вид (5.1). При этом окажется, что по порядку величины  $\lambda \simeq \xi'$ ,  $\mu \simeq (\xi'^2, \alpha)$ . Это означает, что замена бесконечного ряда по  $\sin n\theta$  на правую часть равенства (6.7) допустима, если только  $\xi' \ll 1$ ,  $\alpha/a \ll 1$ . (Введенная здесь величина  $\mu(a)$  будет встречаться только в данном параграфе; в остальных местах буква  $\mu$  означает  $\chi'/\Phi'$ .)

Помимо параметров  $\xi'$  и  $\alpha/a$  малым считается также параметр  $ka$ . В последующем особое внимание будем уделять случаю  $\xi' \gg ka$ ,  $\alpha/a \gg (ka)^2$ . Для оценок полагаем  $\alpha/a \simeq \simeq \xi'^2$ .

Из (8.6) и (8.7) приближенно следует

$$\rho_0 = a - \lambda a \cos \theta + \alpha \cos 2\theta. \quad (6.8)$$

Для производных, входящих в уравнения (6.4) и (6.5), из (6.7) и (6.8) получаем выражения:

$$\left. \begin{aligned} \rho'_0 &= 1 - (\lambda a)' \cos \theta + \alpha' \cos 2\theta; \\ \dot{\rho}_0 &= \lambda a \sin \theta - 2\alpha \sin 2\theta; \\ \omega'_0 &= \lambda' \sin \theta + \mu' \sin 2\theta; \\ \dot{\omega}_0 &= 1 + \lambda \cos \theta + 2\mu \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

С учетом (6.7)—(6.9) выражения (6.4) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= g_{11}^{(0)} + C_{11}^{(1)} \cos \theta + C_{11}^{(2)} \cos 2\theta; \\ g_{12} &= C_{12}^{(1)} \sin \theta + C_{12}^{(2)} \sin 2\theta; \\ g_{22} &= g_{22}^{(0)} + C_{22}^{(1)} \cos \theta + C_{22}^{(2)} \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Величины  $g_{11}^{(0)}$ ,  $g_{22}^{(0)}$  вычисляются с точностью до членов порядка  $\xi'^2$ :

$$\left. \begin{aligned} g_{11}^{(0)} &= 1 + a^2 \lambda'^2 / 2 + \xi' (\xi' - \lambda - a \lambda'); \\ g_{22}^{(0)} &= a^2 (1 + \lambda^2 / 2). \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Квадратичные поправки учитываются также в  $C_{ik}^{(1)}$  ( $i, k = (1, 2)$ ):

$$\left. \begin{aligned} C_{11}^{(1)} &= \xi' (2 + \alpha' - \lambda^2 / 4 - a \lambda \lambda' / 2 - \mu - a / \mu' + \\ &\quad + a^2 \lambda' \mu' - 2(a \lambda)'); \\ C_{12}^{(1)} &= -a \xi' (1 + \alpha / 2a - \lambda^2 / 8 - \mu / 2) + a^2 \lambda' (1 - \\ &\quad - \alpha / a - \mu) + \lambda (\alpha + a^2 \mu' / 2); \\ C_{22}^{(1)} &= 2\lambda (1 + \mu) a^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

В выражениях для  $C_{ik}^{(2)}$  оставляем только главные члены (квадратичные по  $\xi'$ ):

$$\left. \begin{aligned} C_{11}^{(2)} &= \xi' (\lambda + a \lambda') + 2\alpha' - a^2 \lambda'^2 / 2; \\ C_{12}^{(2)} &= -a \lambda \xi' - 2\alpha + a^2 \lambda \lambda' / 2 + a^2 \mu'; \\ C_{22}^{(2)} &= [\lambda^2 / 2 + 4\mu + 2\alpha / a] a^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

В том же самом приближении из (6.4) получаем

$$g_{33} = [R - \xi + a \lambda / 2 + a (-1 + \lambda^2 / 8 + \mu / 2 - \alpha / 2a) \cos \theta - (\lambda a / 2) \cos 2\theta]^2. \quad (6.14)$$

Аналогично, учитывая выражения (6.7)—(6.9), из (6.5) получаем:

$$V \bar{g} = (V \bar{g})^{(0)} + C^{(1)} \cos \theta + C^{(2)} \cos 2\theta, \quad (6.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} (V \bar{g})^{(0)} &= aR (1 - k \xi - ka \xi' / 2); \\ C^{(1)} &= aR [\xi' (1 - k \xi - \alpha / 2a + \mu / 2 - 3\lambda^2 / 8 - \\ &\quad - \lambda ka / 4) + \lambda (1 - k \xi - \alpha / 2a - \alpha' / 2 + 3ka \lambda / 8) - \\ &\quad - ka (1 - \alpha / a + \alpha' / 2 + \mu / 2)]; \\ C^{(2)} &= aR (\lambda \xi' + 2\mu + \alpha' + \alpha / a - ka \xi' / 2 - ka \lambda). \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

3. Уравнения для  $\lambda$  и  $\mu$ . Из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}^2 \mathbf{B} = \mathbf{j}^2 \quad (6.17)$$

с учетом (5.1) и (5.6) получаем (см. правила ковариантного дифференцирования в приложении 1 к гл. 1):

$$\Phi'(a) = -I(a) \sqrt{g}/g_{33}. \quad (6.18)$$

Представляя  $\sqrt{g}/g_{33}$  в виде

$$\sqrt{g}/g_{33} = (\sqrt{g}/g_{33})^{(0)} + D^{(1)} \cos \theta + D^{(2)} \cos 2\theta + \dots, \quad (6.19)$$

находим, что (6.18) удовлетворяется, если только

$$D^{(1)} = 0; \quad D^{(2)} = 0. \quad (6.20)$$

Используя уравнения (6.14)—(6.16), вычисляем  $D^{(1)}$  и  $D^{(2)}$ . Приравнявая эти величины нулю, получаем

$$\lambda = -[\xi'(1 - \alpha/4a + \alpha'/4 - \xi'^2/8 - 3ka\xi'/4 - 3k^2a^2/8) + ka(1 + 5\alpha/4a + 3\alpha'/4 + k\xi + k^2a^2/4)]. \quad (6.21)$$

$$\mu = -(1/2)[\alpha' + \alpha/a - \xi'^2 - (3/2)ka\xi' - (1/2)k^2a^2]. \quad (6.22)$$

При этом выражение для  $(\sqrt{g}/g_{33})^{(0)}$  совпадает с  $\sqrt{g}/g_{33}$  и имеет вид

$$(\sqrt{g}/g_{33})^{(0)} = \sqrt{g}/g_{33} = (a/R)(1 + k\xi + k^2a^2/2 + ka\xi'/2). \quad (6.23)$$

4. Уравнения для  $\xi$  и  $\alpha$ . По аналогии с (6.18), используя уравнение Максвелла для тока

$$\operatorname{rot}^3 \mathbf{B} = \mathbf{j}^3 \quad (6.24)$$

и выражения (5.1), (5.5) и (5.6), получаем

$$J' + \frac{4\pi^2 p'}{\chi'} [(\sqrt{g})^{(0)} - \sqrt{g}] = \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \chi'\right)' - \chi' \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}}\right). \quad (6.25)$$

Часть этого уравнения, не зависящая от  $\theta$ , дает

$$J = (g_{22}/\sqrt{g})^{(0)} \chi'. \quad (6.26)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при  $\cos \theta$  и  $\cos 2\theta$  в (6.25), получаем два других уравнения. Подставляя в эти уравнения  $g_{i\bar{k}}$  и  $\sqrt{g}$  вида (6.10)–(6.16) и исключая  $\lambda$  и  $\mu$  с использованием формул (6.21) и (6.22), приходим к уравнениям для  $\xi$  и  $\alpha$ :

$$\xi'' + \frac{(a\chi'^2)'}{a\chi'^2} \xi' = k \left[ 1 - \frac{8\pi^2 R^2 a p'}{\chi'^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha}{a} + \frac{3}{2} \alpha' - \frac{9}{4} \xi'^2 \right) \right] + \frac{3\xi'}{a} \left[ \frac{\alpha}{a} + \frac{\xi'^2}{4} + a \frac{\chi''}{\chi'} \left( \frac{7}{4} \xi'^2 - \alpha' \right) \right]; \quad (6.27)$$

$$\alpha'' + \frac{(a\chi'^2)'}{a\chi'^2} \alpha' - \frac{3\alpha}{a^2} = -\frac{12\pi^2 R a p'}{\chi'^2} \xi' - \frac{3}{2} \xi'^2 \left( \frac{\chi''}{\chi'} + \frac{1}{a} \right). \quad (6.28)$$

Заметим, что уравнение (6.28) получено в предположениях  $\xi' \gg ka$ ,  $\alpha/a \gg (ka)^2$ . При тех же предположениях получены поправочные члены в уравнении (6.27). Поэтому в случае  $\xi' \lesssim ka$  уравнение (6.27) должно заменяться следующим, не учитывающим поправочных членов:

$$\xi'' + \frac{(a\chi'^2)'}{a\chi'^2} \xi' = k \left( 1 - \frac{8\pi^2 R^2 a p'}{\chi'^2} \right). \quad (6.29)$$

### § 6.3. Уравнение малых колебаний в случае токамака круглого сечения

Рассмотрим, как выглядит уравнение малых колебаний (5.48) в случае токамака круглого сечения.

**1. Выражение для средней магнитной ямы.** Для оценок полагаем  $\mu = \chi'/\Phi' \simeq 1$ . Учитывая выражения для  $g_{i\bar{k}}$ , выведенные в § 6.2, и пренебрегая членами порядка  $(a/R)^2$  и  $\beta$ , с помощью (5.61) находим

$$B^2 = (\Phi'/2\pi a)^2 \equiv B_s^2. \quad (6.30)$$

В этом приближении в правой части равенства (5.64) для  $W^{(0)}$  важен только член с  $W_1^{(0)}$ . Опуская в  $W_1^{(0)}$  малые члены указанного выше порядка, приходим к выражению

$$W_1^{(0)} = \frac{2p'}{B_s^2 R} \left( \mu^2 + \frac{1}{2a} g_{33}^{(0)'} \right). \quad (6.31)$$

Учитывая выражения (6.16) и (6.23) для  $(\sqrt{g})^{(0)}$  и  $(\sqrt{g}/g_{33})^{(0)}$ , после дифференцирования получаем

$$g_{33}^{(0)'} / a = -R (\xi'' + 3\xi' / a + k). \quad (6.32)$$

Вторую производную,  $\xi''$ , можно отсюда исключить, используя уравнение (6.27). Однако прежде чем это сделать, отметим следующее.

Прежде всего следует учесть, что в пренебрежении членами порядка  $(a/R)^2$  и  $\beta$  из уравнения (5.62) и выражений для  $g_{ik}$  вытекает

$$\Phi'' / \Phi' = 1/a. \quad (6.33)$$

Кроме того, с учетом (6.33) имеем

$$d \ln (\chi' / a) / d \ln a = d \ln \mu / d \ln a. \quad (6.34)$$

Поэтому при вычислении  $\xi''$  члены с  $(\chi' / a)'$  в уравнении (6.27) могут быть просто выражены через шир магнитного поля  $\mu'$ .

Следует также отметить, что учитывать эффект средней магнитной ямы при  $\beta \ll 1$  в уравнении малых колебаний (5.48) важно, если только шир достаточно мал:

$$d \ln \mu / d \ln a \ll 1. \quad (6.35)$$

Поэтому при вычислении  $\xi''$  члены типа  $\xi'^2 \mu'$  в уравнении (6.27) можно опустить. Тогда из (6.27), (6.31) и (6.32) получается следующее выражение для  $W^{(0)}$ :

$$W^{(0)} = \frac{2p'}{B_s^2 R} \left[ \mu^2 - 1 + \frac{4\pi^2 R^2 a p'}{\chi'^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha}{a} + \frac{3}{2} \alpha' - \frac{9}{4} \xi'^2 \right) + \frac{\xi' \mu'}{k\mu} - \frac{3}{2} \frac{\xi'}{ka} \left( \frac{\alpha}{a} - \alpha' + 2\xi'^2 \right) \right]. \quad (6.36)$$

**2. Выражение для  $Q$ .** Согласно определению  $Q \equiv L_{\perp}^{-1}$  и уравнению (5.39) для  $L_{\perp}$ , выражение для  $Q$  имеет исходный вид

$$Q = \left( \frac{2\pi}{\Phi'} \right)^2 \frac{\sqrt{g} B^2}{k_x^2 g^{11} - 2mk_x g^{1b} + m^2 g^{bb}}. \quad (6.37)$$

В случае интересующей нас геометрии магнитного поля с учетом (6.30) это выражение можно представить в виде

$$Q = (\sqrt{g/k_{\perp}^2})(g_{22} \cos^2 \gamma - 2ag_{12} \cos \gamma \sin \gamma + a^2 g_{11} \sin^2 \gamma)^{-1}, \quad (6.38)$$

где  $k_{\perp}^2 = k_x^2 + (m/a)^2$ ;  $\gamma = \text{arctg}(m/ak_x)$ . Здесь можно  $\sqrt{g}$  заменить  $(\sqrt{g})^{(0)} \approx aR$ . Выражения для  $g_{22}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{11}$  даны в § 6.2. С учетом этого выражение для  $Q$  может быть представлено в виде

$$Q = Q^{(0)} + Q_a^{(1)} \cos \theta + Q_b^{(1)} \sin \theta + Q_a^{(2)} \cos 2\theta + Q_b^{(2)} \sin 2\theta, \quad (6.39)$$

где

$$Q^{(0)} = \frac{R}{ak_{\perp}^2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \xi'^2 + a\xi' \xi'' + \frac{a^2 \xi''^2}{2} \right) \cos 2\gamma - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} (a\xi'' - \xi') (a\xi'' + 3\xi') \cos 4\gamma \right]; \quad (6.40)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_a^{(1)} &= (2R/ak_{\perp}^2) \xi' \cos 2\gamma; \\ Q_b^{(1)} &= -(R/ak_{\perp}^2) (\xi' + a\xi'') \sin 2\gamma; \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_a^{(2)} &= \frac{R}{ak_{\perp}^2} \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{7}{2} \xi'^2 + a\xi' \xi'' + \frac{a^2 \xi''^2}{2} - 4\alpha' \right) \times \right. \\ &\quad \times \cos 2\gamma + \left[ 2\xi'^2 \frac{1}{4} (a\xi'' - \xi') (a\xi'' + 3\xi') \right] \cos 4\gamma \left. \right\}; \\ Q_b^{(2)} &= \frac{R}{ak_{\perp}^2} \left[ \left( \frac{\xi'^2}{4} + \frac{3}{4} a\xi' \xi'' + \alpha' - 3 \frac{\alpha}{a} \right) \sin 2\gamma - \right. \\ &\quad \left. - \xi' (\xi' + a\xi'') \sin 4\gamma \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

**3. Выражения для  $A$  и  $A^2$ .** В терминах  $k_{\perp}$  и  $\gamma$  уравнение (5.37) для  $A$  принимает вид

$$A = ik_{\perp} (\alpha_0^{(1)} \cos \gamma - a\beta_0^{(1)} \sin \gamma). \quad (6.43)$$

Выражения для  $\alpha_0^{(1)}$  и  $\beta_0^{(1)}$  можно найти с использованием соотношений (5.37), определения

$$\alpha_0 = \mathbf{j}\mathbf{V}/\mathbf{V}^2, \quad (6.44)$$

выражений (5.3), а также формул (6.15), (6.16), (6.21), (6.22), (6.28) и (6.34):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0^{(1)} &= c \left[ \left( 1 - \frac{3}{8} \xi'^2 + \frac{\alpha'}{4} + \frac{3}{4} \frac{\alpha}{a} \right) \cos \theta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\xi'}{2} \cos 2\theta \right]; \\ a\beta_0^{(1)} &= c \left[ \left( 1 - \frac{3}{8} a\xi' \xi'' + \frac{\alpha'}{4} + \frac{3}{4} \frac{\alpha}{a} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin \theta - \frac{1}{4} (\xi' + a\xi'') \sin 2\theta \right]; \end{aligned} \right\} (6.45)$$

где  $c \equiv 8\pi^2 p' a^2 / \chi' \Phi'$ .

Выражение для  $A^2$  в требуемом приближении имеет вид

$$\begin{aligned} A^2 &= (A^2)^{(0)} + (A^2)_a^{(1)} \cos \theta + (A^2)_b^{(1)} \sin \theta + \\ &\quad + (A^2)_a^{(2)} \cos 2\theta + (A^2)_b^{(2)} \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (6.46)$$

где

$$\begin{aligned} (A^2)^{(0)} &= -\frac{k_{\perp}^2 c^2}{2} \left\{ 1 - \frac{\xi'^2}{2} + \frac{\alpha'}{2} + \frac{3}{2} \frac{\alpha}{a} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin^2 \gamma \left[ -\frac{1}{4} \xi' (a\xi'' - \xi') + \frac{1}{32} (a\xi'' - \xi')^2 \right] \right\}; \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$\left. \begin{aligned} (A^2)_a^{(1)} &= (k_{\perp}^2 c^2 / 2) [\xi' + (1/2)(a\xi'' - \xi') \sin^2 \gamma]; \\ (A^2)_b^{(1)} &= -(k_{\perp}^2 c^2 / 8) (a\xi'' - \xi') \sin 2\gamma; \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

$$(A^2)_a^{(2)} = -(k_{\perp}^2 c^2 / 2) \cos 2\gamma; \quad (A^2)_b^{(2)} = (k_{\perp}^2 c^2 / 2) \sin 2\gamma. \quad (6.49)$$

**4. Вклад баллонных эффектов.** Теперь получим выражение для функции

$$B \equiv (QA^2)^{(0)} - [(QA^{(0)})^2 / Q^{(0)}], \quad (6.50)$$

соответствующей вкладу баллонных эффектов в уравнение (5.48).

Используя соотношения (6.39)—(6.45), находим

$$(QA)^{(0)} = i(Rc/k_{\perp})[\xi' \cos\gamma + (1/2)(a\xi'' - \xi')\sin\gamma\sin 2\gamma]. \quad (6.51)$$

Выражение для  $(QA^2)^{(0)}$  находится с использованием (6.39)—(6.49) и следующего соотношения:

$$(QA^2)^{(0)} = Q^{(0)}(A^2)^{(0)} + (1/2)[Q_a^{(1)}(A^2)_a^{(1)} + Q_b^{(1)}(A^2)_b^{(1)} + \\ + Q_a^{(2)}(A^2)_a^{(2)} + Q_b^{(2)}(A^2)_b^{(2)}]. \quad (6.52)$$

В результате получаем

$$B = -\frac{1}{2}(8\pi^2 p' a^2/\chi' \Phi')^2 \left(1 + \frac{3}{2}\alpha' + \frac{3}{2}\frac{\alpha}{a} - \frac{9}{4}\xi'^2 - s\right), \quad (6.53)$$

где

$$s = 2 \sin^2 \gamma [\xi'^2/2 + (3/8)(a\xi'' - \xi')(a\xi'' + 3\xi') - \\ - (1/32)(a\xi'' - \xi')^2] - \sin^2 2\gamma [(3/4)\xi'^2 - (3/2)(\alpha' - \alpha/a) + \\ + (5/8)\xi'(a\xi'' - \xi')]. \quad (6.54)$$

**5. Вклад члена, линейного по  $\mu'$ , в уравнение (5.48).** Этот вклад находим с использованием соотношений (6.40)—(6.42) и (6.51):

$$i\mu' \frac{\partial}{\partial k_x} \left[ \frac{(QA)^{(0)}}{Q^{(0)}} \right] = -\frac{\mu'}{\mu} \frac{8\pi^2 p' a^2}{\Phi'^2} \times \\ \times [\xi' - (a\xi'' - \xi') \sin^2 \gamma \cos 2\gamma]. \quad (6.55)$$

**6. Уравнение (5.48) для токамака круглого сечения.** Используя результаты, полученные в предыдущих пунктах, приводим уравнение малых колебаний (5.48) к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial k_x} \left( k_{\perp}^2 \frac{\partial \tilde{\xi}_k^{(0)}}{\partial k_x} \right) - U \tilde{\xi}_k^{(0)} = 0, \quad (6.56)$$



где

$$U = U_0 + U_1 \sin^2 \gamma + U_2 \sin^2 2\gamma; \quad (6.57)$$

$$U_0 = \frac{2p'}{aB_s^2 \mu'^2} \left[ \mu^2 - 1 - \frac{3}{2} \frac{\xi'}{ka} \left( 2 \xi'^2 - \alpha' + \frac{\alpha}{a} \right) \right]; \quad (6.58)$$

$$U_1 = \frac{2p'}{aB_s^2 \mu'^2} \left\{ \frac{8\pi^2 R^2 ap'}{\chi'^2} \left[ \frac{\xi'^2}{2} + \frac{3}{8} (a\xi'' - \xi') \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (a\xi'' + 3\xi') - \frac{1}{32} (a\xi'' - \xi')^2 \right] - \frac{a\mu'}{\mu} \frac{a\xi'' - \xi'}{ka} \right\}; \quad (6.59)$$

$$U_2 = -\frac{[2p']}{aB_s^2 \mu'^2} \left\{ \frac{4\pi^2 R^2 ap'}{\chi'^2} \left[ \frac{3}{4} \xi'^2 - \frac{3}{8} \left( \alpha' - \frac{\alpha}{a} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5}{8} \xi' (a\xi'' - \xi') \right] + \frac{1}{2} \frac{a\mu'}{\mu} \frac{a\xi'' - \xi'}{ka} \right\}. \quad (6.60)$$

7. Уравнение для  $\tilde{\xi}^{(0)}(x)$ . Переходя в  $x$ -пространство, из (6.56) получаем дифференциальное уравнение шестого порядка:

$$\hat{D}\{\hat{D}x\hat{D}[x\tilde{\xi}^{(0)}(x)] + [U_0\hat{D} + (m/a)^2(U_1 + 4U_2)]\tilde{\xi}^{(0)}(x)\} - \\ - 4(m/a)^2U_2\tilde{\xi}^{(0)}(x) = 0, \quad (6.61)$$

где  $\hat{D} \equiv (m/a)^2 - \partial^2/\partial x^2$ .

При  $U_2 = 0$  соотношение (6.56) дает дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\hat{D}x\hat{D}[x\tilde{\xi}^{(0)}(x)] - [U_0\hat{D} + (m/a)^2U_1]\tilde{\xi}^{(0)}(x) = 0. \quad (6.62)$$

В приближении  $U_1 \rightarrow 0$ ,  $U_2 \rightarrow 0$  из (6.56) получаем уравнение второго порядка:

$$x\hat{D}[x\tilde{\xi}^{(0)}(x)] - U_0\tilde{\xi}^{(0)}(x) = 0. \quad (6.63)$$

Анализ уравнения (6.56) и вытекающих из него уравнений (6.61) — (6.63) будет произведен в последующих параграфах.

### § 6.4. Критерий отсутствия желобковой неустойчивости в токамаке при $\beta < (a/R)^{4/3}$

Из (6.57)—(6.60) видно, что поправочные члены в выражении для  $U$  не важны, если

$$\xi'^3 \ll ka. \quad (6.64)$$

В то же время, согласно (6.27), выражение для  $\xi$  в этом приближении определяется уравнением (6.29)

$$\xi'' + (\alpha\chi'^2)' \xi' / \alpha\chi'^2 = k(1 - 8\pi^2 R^2 a r' / \chi'^2). \quad (6.65)$$

Видно, что в этом случае

$$\xi' \simeq \max(ka, \beta/ka). \quad (6.66)$$

(Полагается  $\mu \simeq 1$ .) Из (6.64) и (6.66) следует, что поправками в  $U$  можно пренебрегать, если

$$\beta < (a/R)^{4/3}. \quad (6.67)$$

При этом уравнение малых колебаний сводится к (6.63) с

$$U_0 = (2p'/aB_s^2\mu'^2)(\mu^2 - 1). \quad (6.68)$$

Оно аналогично уравнению (П2.3). Используя эту аналогию и анализ, проведенный в приложении 1 к гл. 2, заключаем, что необходимый и достаточный критерий отсутствия желобковой неустойчивости плазмы токамака с  $\beta < (a/R)^{4/3}$  имеет вид

$$1/4 + (2p'/aB_s^2\mu'^2)(\mu^2 - 1) > 0. \quad (6.69)$$

Восстановив здесь ранее опущенный у  $p$  множитель  $4\pi$ , приходим к критерию

$$\mu'^2/4\mu^2 + (8\pi p'/aB_s^2)(1 - q^2) > 0 \quad (6.70)$$

$q \equiv 1/\mu$ ). Этот результат можно получить также на основе качественных представлений о магнитном дрейфе частиц:

### § 6.5. Критерий Мерсье для токамака круглого сечения при $\beta > (a/R)^{4/3}$

Рассмотрим уравнение (6.56) при  $k_x \gg m/a$ , т. е. при  $\gamma = 0$ . В этом предельном случае получаем стандартное уравнение [ср. с (5.55)]

$$\frac{\partial}{\partial k_x} \left( k_x^2 \frac{\partial \tilde{\xi}_k^{(0)}}{\partial k_x} \right) - U_0 \tilde{\xi}_k^{(0)} = 0, \quad (6.71)$$

из которого находим критерий устойчивости

$$1/4 + U_0 > 0, \quad (6.72)$$

что в развернутой форме означает [см. (6.58)]:

$$\frac{1}{4} \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^2 + \frac{2p'}{aB_s^2} \left\{ 1 - q^2 \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{\xi'}{ka} \left( 2 \xi'^2 - \alpha' + \frac{\alpha}{a} \right) \right] \right\} > 0. \quad (6.73)$$

Это — критерий устойчивости Мерсье для случая токамака круглого сечения.

При малом давлении плазмы,  $\beta < (a/R)^{4/3}$ , критерий (6.73) переходит в (6.69). При более высоком давлении плазмы в (6.73) необходимо учитывать добавочные члены в квадратных скобках при  $q^2$ , а также вклад членов с давлением в шир магнитного поля, т. е. в слагаемое  $(\mu'/\mu)^2$  в (6.73). Рассмотрим, что означает (6.73) в этом случае, т. е. при

$$\beta \gtrsim (a/R)^{4/3}. \quad (6.74)$$

Покажем, что

$$P \equiv \frac{3}{2} \frac{\xi'}{ka} \left( 2 \xi'^2 - \alpha' + \frac{\alpha}{a} \right) > 0. \quad (6.75)$$

Тем самым будет показано, что углубление магнитной ямы из-за конечного давления плазмы больше, чем дестабилизация, вызываемая баллонными эффектами.

Используя формулы (6.27), (6.28), находим

$$\alpha = Ca + \frac{3}{16} \left[ a \int_0^a \frac{(a^2 \xi'^2)'}{a^2} da - \frac{1}{a^3} \int_0^a (a^2 \xi'^2)' a^2 da \right], \quad (6.76)$$

где  $C$  — некоторая константа, зависящая от граничных условий. Учитывая (6.76), приводим выражение (6.75) для  $P$  к виду

$$P = \frac{9}{4} \frac{\xi'}{ka} \left( \frac{5}{6} \xi'^2 + \frac{1}{a^4} \int_0^a a^2 \xi'^3 da \right). \quad (6.77)$$

Из (6.29) получаем выражение для  $\xi'$

$$\xi' = - (8\pi^2 R/a\chi'^2) \int_0^a p' a^2 da, \quad (6.78)$$

из которого ясно, что  $\xi' > 0$  при  $p' < 0$  (мы интересуемся только случаями радиально спадающего давления). Это доказывает, что  $P > 0$ .

Теперь рассмотрим влияние конечности давления на шир. Из (6.26) и выражений для  $g_{22}$  и  $\sqrt{g}$  следует

$$\chi' = (R/a)J (1 - \xi'^2/2). \quad (6.79)$$

Подставляя это в (6.34), получаем

$$\mu'/\mu = -\xi'\xi'' + (J/a^2)' a^2/J. \quad (6.80)$$

В частности, в случае однородно распределенного тока  $J \sim a^2$

$$\mu'/\mu = -\xi'\xi''. \quad (6.81)$$

В этом случае по порядку величины

$$a\mu'/\mu \simeq (\beta_J ka)^2, \quad (6.82)$$

где  $\beta_J \simeq \rho/B_0^2$ , а  $B_0$  с точностью до членов порядка  $\xi'^2$  означает

$$B_0 \approx \chi'/2\pi R. \quad (6.83)$$

Из (6.82) видно, что шир, обусловленный конечным давлением, дает в критерий Мерсье вклад того же порядка, что и суммарный вклад от средней магнитной ямы и баллонных эффектов.

В качестве примера рассмотрим, что дает критерий (6.73) для случая параболического давления:

$$p = p_0 (1 - a^2/a_0^2). \quad (6.84)$$

Из (6.76) и (6.78) следует:

$$\xi' = ka\beta_J; \quad (6.85)$$

$$\alpha = Ca + k^2 a^3 \beta_J^3 / 4, \quad (6.86)$$

где  $\beta_J \equiv p_0/B_{\theta_0}^2$ ;  $B_{\theta_0} = \chi'(a_0)/2\pi R$ . С учетом этих соотношений (6.73) принимает вид

$$(\mu'/2\mu)^2 - (4p_0/a_0^3 B_{\theta_0}^2) \left[ 1 - q^2 \left( 1 + \frac{9}{4} \beta_J^3 k^2 a^2 \right) \right] > 0. \quad (6.87)$$

Видно, что для устойчивости плазмы относительно возмущений с  $k_x \gg m/a$  достаточно выполнения условия

$$q^2 > [1 + (9/4)\beta_J^3 k^2 a^2]^{-1}, \quad (6.88)$$

что является более благоприятным с точки зрения проблемы устойчивости, чем условие  $q^2 > 1$ , получающееся при малых  $\beta_J$ .

Если давление параболическое, а продольный ток однороден,  $J \sim a^2$ , то с учетом (6.81) и (6.85) критерий (6.87) сводится к критерию

$$q^2 > [1 + (37/16)\beta_J^3 k^2 a^2]^{-1}, \quad (6.89)$$

несколько более благоприятному, чем (6.88).

### § 6.6. Возмущения с произвольными $k_x/k_{\perp}$ в случае пренебрежимо малого шира

Пусть шир достаточно мал, так что

$$(U_0, U_1, U_2) \gg 1. \quad (6.90)$$

При этом уравнение (6.56) имеет приближенное решение

$$\tilde{\xi}_k^{(0)} \sim \delta(k_x - k_{x0}), \quad (6.91)$$

где  $k_{x0}$  удовлетворяет уравнению

$$U(\gamma_0) = 0, \quad (6.92)$$

а

$$\gamma_0 \equiv \gamma(k_{x0}).$$

Уравнение (6.92) дает границу устойчивости плазмы относительно возмущений типа  $\exp(ik_{x0}x)$ . Достаточное условие устойчивости в этом случае получается из требования, чтобы при всех  $\gamma_0$

$$U(\gamma_0) \geq 0. \quad (6.93)$$

Условие (6.93), как видно, есть частный случай общегеометрического достаточного условия устойчивости (5.59).

В явном виде условие (6.93) означает

$$q^2 > [1 + \Delta(\gamma, a)]^{-1}, \quad (6.94)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma, a) = & \frac{3}{2} \frac{\xi'}{ka} \left( 2\xi'^2 - \alpha' + \frac{\alpha}{a} \right) + ka \left( \frac{4\pi^2 R^2 ap'}{\chi'^2} \right)^2 \times \\ & \times \left( \frac{11}{8} a\xi'' - \frac{7}{8} \xi' \right) \sin^2 \gamma + \left( \frac{2\pi R}{\chi'} \right)^2 ap' \left[ \frac{3}{4} \xi'^2 - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \left( \alpha' - \frac{\alpha}{a} \right) + \frac{5}{8} \xi' (a\xi'' - \xi') \right] \sin^2 2\gamma. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Индекс нуль у  $\gamma$  опущен. Функция  $\Delta(\gamma, a)$  описывает влияние давления на устойчивость плазмы относительно возмущений с тем или иным значением параметра  $\gamma$ .

При параболическом распределении давления (см. § 6.5)

$$\Delta(\gamma, a) = \beta^3 k^2 a^2 (9/4 + 2 \sin^2 \gamma). \quad (6.96)$$

Видно, что в этом случае возмущения с  $\gamma \neq 0$  более устойчивы, чем с  $\gamma = 0$ .

Теперь рассмотрим гауссово распределение давления

$$p = p_0 \exp(-a^2/a_0^2). \quad (6.97)$$

Положим также  $\gamma = \pi/2$  (т. е.  $k_x \ll m/a$  — возмущение типа анти-Мерсье). При этом

$$\Delta = \beta_J^3 k^2 a^2 [F_1(t) + F_2(t)], \quad (6.98)$$

где  $t \equiv (a/a_0)^2$ ,

$$F_1(t) = 3S(t) [2S^2(t) + 3t(\frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} + te^{-2t})]/t^6;$$

$$F_2(t) = 2e^{-2t} [11e^{-t} - 20S(t)/t^2], \quad S(t) = 1 - e^{-t}(1+t). \quad (6.99)$$

Функция  $F_1$  характеризует вклад эффектов порядка  $\beta_J^3$  в критерий Мерсье, а  $F_2$  — отклонение от критерия Мерсье. При  $t \rightarrow 0$  функция  $F_2$  положительна [ $F_2(0) = 2$ , ср. с (6.96)]. Следовательно, возмущения типа Мерсье в этом случае более опасны, чем возмущения типа анти-Мерсье. Однако уже при небольших значениях параметра  $t (t \geq 0,2)$  функция  $F_2$  становится отрицательной. Это означает, что в соответствующей области шнура, а именно при  $a^2 > 0,2 a_0^2$ , возмущения типа анти-Мерсье более опасны, чем возмущения типа Мерсье.

Рассмотренный пример показывает, что критерий Мерсье не представляет собой необходимое и достаточное условие отсутствия желобковой неустойчивости плазмы.

Большое давление плазмы приводит к стабилизации возмущений типа Мерсье при произвольном профиле давления. Но неочевидно, стабилизируются ли при произвольном профиле давления и все другие типы возмущений.

Хотя мы говорим о плазме большого давления, наше рассмотрение ограничено условием  $\beta_J < k/a$ . В последнее время было показано, что при  $\beta_J \simeq k/a$  большое давление плазмы играет дестабилизирующую роль.

### Библиографический обзор к гл. 6

1. Mikhailovskii A. V. Tokamak stability at high plasma pressure. — «Nucl. Fusion», 1974, v. 14, p. 483.  
Изложение результатов этой работы (с исправлением неточностей в [1]) составляет основу настоящей главы.
2. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. О желобковой неустойчивости плазмы в тороидальной геометрии. — «Докл. АН СССР», 1966, т. 170, с. 811.

3. Ware A. A., Haas F. A. Stability of a circular toroidal plasma under average magnetic well conditions. — «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 956.
4. Шафранов В. Д., Юрченко Э. И. Критерий желобковой неустойчивости плазмы в тороидальной геометрии. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 53, с. 1157. В работах [2—4] учитывались эффекты порядка  $\beta_J$ .
5. Шафранов В. Д., Юрченко Э. И. Удержание плазмы в токамаке с  $\beta_J \gg 1$  при произвольном распределении тока. — In: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. V. 2. IAEA, Vienna, 1971, p. 519.  
В этой работе впервые был произведен учет эффектов порядка  $\beta_J^3 (ka)^2$ , но вследствие ошибки в вычислениях был получен физически неверный результат о роли этих эффектов (см. подробнее работу [1]).

## Глава 7

### САМОСТАБИЛИЗАЦИЯ ПЛАЗМЫ БОЛЬШОГО ДАВЛЕНИЯ В ЛОВУШКАХ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МАГНИТНОЙ ОСЬЮ

#### § 7.1. Введение

Из гл. 6 следует, что с увеличением давления плазмы желобковая неустойчивость в токамаке может играть меньшую роль, чем при малом давлении. В связи с этим представляет интерес выяснить, имеет ли место такого рода самостабилизация плазмы большого давления в ловушках более общего типа, и в частности в ловушках с пространственной магнитной осью. Важность таких ловушек обусловлена тем, что в них может достигаться равновесие без пропускания продольного тока.

Исследование устойчивости ловушек с пространственной магнитной осью может быть проведено по схеме, аналогичной изложенной в гл. 6. При этом можно получить критерий устойчивости для периферийной области ловушки (см. статьи, отмеченные в конце настоящей главы). Здесь мы, однако, изложим другую схему исследования устойчивости таких ловушек, позволяющую получить критерий устойчивости центральной области ловушки.

В § 7.2 покажем, что общее уравнение малых колебаний желобкового типа (5.48) вблизи магнитной оси ловушек с сильным продольным магнитным полем существенно упро-



щается. При этом можно получить необходимый и достаточный критерий локальной неустойчивости относительно возмущений с произвольным соотношением между радиальной и азимутальной длинами волн.

С помощью критерия устойчивости, полученного в § 7.2, можно показать, что имеет место эффект компенсации (частичной или полной) стабилизирующих и дестабилизирующих членов, обусловленных давлением плазмы (углубления магнитной ямы и баллонных членов). Соответствующий анализ производится в § 7.3.

В критерий устойчивости, полученный в § 7.2, входят параметры, характеризующие форму магнитных поверхностей — «эллиптичность» и «треугольность». В § 7.4 на модели винтового шнура показывается, что давление плазмы влияет также и на эти параметры. Тем самым встает вопрос о выяснении роли эллиптичности и треугольности, индуцируемых давлением плазмы, на устойчивость. Этот вопрос обсуждается в § 7.5, где делается вывод, что в результате такого рода искажения магнитных поверхностей имеет место эффект самостабилизации плазмы большого давления в тороидальных ловушках с круговым или почти круговым сечением кожуха.

## § 7.2. Критерий устойчивости плазмы вблизи магнитной оси

**1. Предварительные замечания.** Уравнение (5.48) упрощается, если оно применяется для анализа устойчивости части плазмы, находящейся вблизи магнитной оси ловушек с сильным продольным магнитным полем. При этом оно сводится к уравнению такой же структуры, как и в случае цилиндрического шнура круглого сечения, благодаря чему с его помощью можно получить необходимый и достаточный критерий устойчивости центральной области плазмы относительно возмущений с произвольным  $k_x/m$ . Указанное упрощение уравнения (5.48) обусловлено тем, что в этом случае довольно прост вид метрического тензора  $g_{ik}$ . В п. 2 получим соответствующие выражения для  $g_{ik}$ , а в п. 3 выведем указанный выше критерий устойчивости.

**2. Метрический тензор.** При выводе выражений для элементов метрического тензора  $g_{ik}$  вблизи магнитной оси будем следовать В. Д. Шаfranову и Э. И. Юрченко.

Вводим квазицилиндрическую систему координат  $\rho$ ,  $u$ ,  $s$ , связанную с магнитной осью, полагая, что магнитная ось характеризуется кривизной  $k(s)$  и кручением  $\kappa(s)$ , где  $s$  — расстояние вдоль магнитной оси, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки. Согласно работе В. Д. Шафранова и Э. И. Юрченко, квадрат элемента длины в этой системе координат записывается в виде

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 - 2\vartheta' ds (ydx - xdy) + (h^2 + \vartheta'^2 \rho^2) ds^2, \quad (7.1)$$

где  $x = \rho \cos u$ ;  $y = \rho \sin u$ ;  $u = \theta_0 + \delta(s)$ ;  $\theta_0$  — угол, отсчитываемый от главной нормали к магнитной оси;  $h = 1 - \rho \cos \theta_0$ ;  $\vartheta' = -\kappa(s)k + \delta'(s)$ ; штрих — производная по  $s$ . Предполагается, что координатная система ортогональна в плоскости  $s = \text{const}$  и вращается с угловой скоростью  $\delta'(s)$  относительно нормали при движении вдоль магнитной оси.

Переход от координат  $\rho$ ,  $u$ ,  $s$  к интересующим нас координатам  $a$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$ , связанным с магнитными поверхностями и «выпрямленными» силовыми линиями, совершаем в несколько этапов. На первом этапе учитываем эллиптичность магнитных поверхностей  $\varepsilon$  и смещения их геометрической оси от магнитной оси  $\xi_x$ ,  $\xi_y$ , вводя вместо  $(\rho, u)$  переменные  $(\rho_0, \omega)$ , связанные с  $(\rho, u)$  соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos u &= \exp(-\eta/2) (\rho_0 \cos \omega + \xi_x); \\ \rho \sin u &= \exp(\eta/2) (\rho_0 \sin \omega + \xi_y), \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

где  $\eta$  связано с  $\varepsilon$  соотношением  $\varepsilon = \text{th } \eta$ . На втором этапе учитываем треугольность магнитных поверхностей, вводя вместо радиальной координаты  $\rho_0$  другую радиальную координату  $a$ , такую, что

$$\rho_0^2 + 2(\alpha \cos 3\omega + \beta \sin 3\omega)\rho_0^3 = a^2, \quad (7.3)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — параметры, характеризующие треугольность; они предполагаются малыми по сравнению с  $1/\rho_0$ :  $\alpha\rho_0 \ll 1$ ,  $\beta\rho_0 \ll 1$ . На третьем этапе совершаем «выпрямление» силовых линий, вводя вместо  $\omega$  новую циклическую переменную  $\theta$ , полагая

$$\omega = \theta + a (\lambda_1 \sin \theta + \mu_1 \cos \theta + \lambda_3 \sin 3\theta + \mu_3 \cos 3\theta), \quad (7.4)$$

где  $\lambda_1, \mu_1, \lambda_3, \mu_3$  — параметры выпрямления, которые должны быть определены с помощью условий равновесия.

Что касается перехода от  $s$  к  $\xi$ , то этот переход совершается тривиально: переменную  $\xi$  вводим соотношением

$$\xi = s/R, \quad (7.5)$$

где  $R = L/2\pi$ ;  $L$  — длина магнитной оси.

Далее, поскольку из окончательного результата следует, что  $(\xi_x, \xi_y) \sim a^2$ , вместо  $\xi_x, \xi_y$  вводим  $\xi_1(s), \xi_2(s)$  такие, что

$$\xi_x = a^2 \xi_1; \quad \xi_y = a^2 \xi_2. \quad (7.6)$$

В результате (5.70) преобразуется к виду

$$dl^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (7.7)$$

где  $x^i = (a, \theta, \xi)$ , а  $g_{ik}$  — искомые компоненты метрического тензора. Элементы  $g_{ik}$  содержат параметры выпрямления  $\lambda_1, \mu_1, \lambda_3, \mu_3$ , которые определяем с помощью приближенного соотношения

$$(\partial/\partial\theta)(g_{33}/\sqrt{g}) = 0, \quad (7.8)$$

вытекающего из (П2.44).

Поскольку

$$g_{33}/\sqrt{g} = (R/a) \{ 1 - [ \exp(-\eta/2)k \cos \delta + 2\xi_1 + \lambda_1 ] \cos \theta + \\ + [ \exp(\eta/2)k \sin \delta + 2\xi_2 - \mu_1 ] \sin \theta + \\ + 3(\lambda_3 - \alpha) \cos 3\theta - 3(\mu_3 + \beta) \sin 3\theta \}, \quad (7.9)$$

то, согласно (7.8),

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -[2\xi_1 + \exp(-\eta/2)k \cos \delta]; \\ \mu_1 &= 2\xi_2 + \exp(\eta/2)k \sin \delta; \\ \lambda_3 &= \alpha; \quad \mu_3 = -\beta. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Использование этих соотношений позволяет исключить параметры выпрямления из элементов  $g_{ik}$ . При этом в необходимом для дальнейшего приближения получаем

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= \text{ch } \eta - \text{sh } \eta \cos 2\theta; \\ g_{12} &= g_{21} = a \text{ sh } \eta \sin 2\theta; \\ g_{22} &= a^2 (\text{ch } \eta + \text{sh } \eta \cos 2\theta); \quad g_{13} = g_{31} = 0; \\ g_{23} &= g_{32} = -a^2 \theta'(\xi); \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned}
 (g_{33})^{(0)} = & R^2 \{1 - a^2 [4 (e^{-\eta/2} \langle k \cos \delta \xi_1 \rangle + \\
 & + e^{\eta/2} \langle k \sin \delta \xi_2 \rangle) + (1/2)(e^{-\eta} \langle k^2 \cos^2 \delta \rangle + \\
 & + e^{\eta} \langle k^2 \sin^2 \delta \rangle) - (\vartheta'^2/R^2) \operatorname{ch} \eta]\}. \quad (7.12)
 \end{aligned}$$

Здесь скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по  $\zeta$ . В дополнение к приведенным выше значениям  $g_{ik}$  нам необходимо также знать  $\sqrt{g}$  с учетом членов порядка  $k$  ( $\zeta$ ). С этой точностью

$$\begin{aligned}
 \sqrt{g} = & aR \{1 - 2a[\exp(-\eta/2)k \cos \delta \cos \theta + \\
 & + \exp(\eta/2)k \sin \delta \sin \theta]\}. \quad (7.13)
 \end{aligned}$$

Заметим, что соотношения (7.11) являются приближенными. Точность, с которой выписаны соответствующие элементы  $g_{ik}$ , достаточна, чтобы вывести интересующий нас в этом параграфе общий критерий устойчивости плазмы вблизи магнитной оси. В этот критерий, как будет ясно далее, входит производная по  $a$  от  $(g_{33})^{(0)}$ , а эта величина, согласно (7.12), зависит от смещений  $\xi_1, \xi_2$ . При вычислении смещений  $\xi_1, \xi_2$  требуется знать  $g_{ik}$  с большей точностью, чем дают формулы (7.11). При этом оказывается, что играет роль как эллиптичность сечений магнитных поверхностей, так и их треугольность, формально не фигурирующая в соотношениях (7.11)—(7.13).

**3. Критерий устойчивости.** Для вычисления  $Q \equiv L_{\perp}^{-1}$  [см. уравнение (5.39)] достаточно знать  $g_{ik}$  в нулевом приближении по  $ka$ . При этом квадрат магнитного поля  $B_0^2$  можно заменить на  $B_s^2$ , где  $B_s = \Phi'/2\pi a$ . Тогда

$$Q = aR/k_{\perp}^2 g_{22}(\theta - \lambda), \quad (7.14)$$

где  $k_{\perp}^2 \equiv k_x^2 + (m/a)^2$ ;  $\lambda = \operatorname{arctg}(m/ak_x)$ ;  $g_{22}(\theta - \lambda)$  означает выражение (7.11) для  $g_{22}$ , в котором  $\theta \rightarrow \theta - \lambda$ .

При вычислении  $A$  [см. уравнение (5.37)] важны члены порядка  $ka$  в выражении (7.13) для  $\sqrt{g}$ . При этом членами более высокого порядка по  $ka$  будем пренебрегать. В этом приближении выражение (5.37) для  $A$  упрощается:

$$A = i [k_x \alpha_0^{(1)} - (m/\Phi') p_0' (v/p_0)']. \quad (7.15)$$

Из (5.3) получаем

$$\alpha_0^{(1)} \equiv (\mathbf{j}_0 \mathbf{B}_0 / B_0^2)^{(1)} = (1/\Phi') \partial \mathbf{v} / \partial \theta. \quad (7.16)$$

Учитывая  $\rho'_0 \sim a$ ,  $\mathbf{v} \sim a^2$ , находим, что  $\rho'_0 (\mathbf{v}/\rho'_0)' = \mathbf{v}/a$ . Поэтому

$$A = \frac{ik_{\perp}}{\Phi'} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} \cos \lambda - \mathbf{v} \sin \lambda \right). \quad (7.17)$$

Поскольку в соответствии с (5.5) и (7.13)  $\mathbf{v} \sim (\cos \theta, \sin \theta)$ , то из (7.17) следует

$$A = \frac{ik_{\perp}}{\Phi'} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{v}(\theta - \lambda). \quad (7.18)$$

При  $Q$  и  $A$  вида (7.14) и (7.18) с  $g_{22}$  вида (7.11) и  $\mathbf{v}$ , определяемом уравнениями (5.5) и (7.13), средние, входящие в (5.48), таковы:

$$Q^{(0)} = R/k_{\perp}^2 a; (QA)^{(0)} = 0; (QA^2)^{(0)} = -\lambda_{33}^{\theta\theta} / \Phi'^2, \quad (7.19)$$

где

$$\lambda_{33}^{\theta\theta} \equiv \left[ \frac{g_{33} \sqrt{g}}{g g^{11}} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{(0)} \approx aR \left[ \frac{1}{g_{22}} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{(0)}. \quad (7.20)$$

При условиях (7.19) уравнение (5.48) означает

$$\mu'^2 \frac{\partial}{\partial k_x} \left[ \left( k_x^2 + \frac{m^2}{a^2} \right) \frac{\partial \xi_k^{(0)}}{\partial k_x} \right] - \xi_k^{(0)} \frac{R}{a} \left( W^{(0)} - \frac{\lambda_{33}^{\theta\theta}}{\Phi'^2} \right) = 0. \quad (7.21)$$

Отсюда вытекает критерий устойчивости (ср. с приложением 1 к гл. 2):

$$\frac{\mu'^2}{4} + \frac{R}{a} \left( W^{(0)} - \frac{\lambda_{33}^{\theta\theta}}{\Phi'^2} \right) > 0, \quad (7.22)$$

что при очень малом  $\mu'$  сводится к условию

$$W^{(0)} - \lambda_{33}^{00} / \Phi'^2 > 0. \quad (7.23)$$

Теперь найдем явный вид функции  $W^{(0)}$ . Из (5.36) следует, что при  $\mu' \rightarrow 0$

$$W^{(0)} = \frac{p'_0}{\Phi'^2} \left( V'' - \frac{\Phi''}{\Phi'} V' - p'_0 V' \left\langle \frac{1}{\mathbf{B}_0^2} \right\rangle \right). \quad (7.24)$$

Для нахождения  $\Phi''/\Phi'$  продифференцируем каждое из уравнений (5.6) по  $a$ , после чего первый результат умножим на  $\chi'$ , второй — на  $\Phi'$  и сложим одно с другим. Тогда с учетом (5.4) получаем (ср. с (5.62))

$$\begin{aligned} \frac{\Phi''}{\Phi'} = & -\frac{p'_0}{\langle \mathbf{B}_0^2 \rangle} - \frac{\Phi'^2}{V' \langle \mathbf{B}_0^2 \rangle} \left[ \mu^2 \left( \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right)^{(0)} + 2\mu \left( \frac{g_{23}}{\sqrt{g}} \right)^{(0)} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \right)^{(0)} \right]'. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Подставляя этот результат в (7.24) и учитывая  $V'' = (2\pi)^2 [(\sqrt{g})^{(0)}]'$ , находим (ср. с (5.64))

$$\begin{aligned} W^{(0)} = & \frac{p'_0}{(\sqrt{g})^{(0)} \langle \mathbf{B}_0^2 \rangle} (\mu^2 g_{22}^{(0)} + 2\mu g_{23}^{(0)} + g_{33}^{(0)})' + \\ & + \frac{p_0'^2 V'}{\Phi'^2} \left( \frac{1}{\langle \mathbf{B}_0^2 \rangle} - \left\langle \frac{1}{\mathbf{B}_0^2} \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Разность  $1/\langle \mathbf{B}_0^2 \rangle - \langle 1/\mathbf{B}_0^2 \rangle$  порядка  $k^2 a^2 / B_s^2$ , так что вклад члена с  $p_0'^2$  в правую часть (7.26) мал как  $\beta \equiv 2\rho_0 / B_s^2$ , и потому этот член должен быть опущен. Заменяя  $g_{22}^{(0)}$ ,  $g_{23}^{(0)}$  их приближенными значениями, получающимися из (7.11), и полагая  $(\sqrt{g})^{(0)} \approx aR$ ,  $\langle \mathbf{B}_0^2 \rangle \approx B_s^2$ , приходим к окончательному результату:

$$W^{(0)} = \frac{4\pi^2 a p'_0}{R \Phi'^2} (\mu^2 a^2 \operatorname{ch} \eta - 2\mu a^2 \vartheta'(\zeta) + g_{33}^{(0)})'. \quad (7.27)$$

Данное рассмотрение показывает, что критерий устойчивости плазмы вблизи магнитной оси по отношению к возмущениям с произвольным  $m/ak_x$  в пренебрежении широм оказывается таким же, как и критерий Мерсье.

### § 7.3. Компенсация стабилизирующих и дестабилизирующих эффектов, обусловленных давлением плазмы

В критерий устойчивости (7.23) [или (7.22)] входит дестабилизирующий фактор  $\lambda_{33}^{00}$ , пропорциональный квадрату давления плазмы. Выражение (7.27) для  $W^{(0)}$  также содержит члены, квадратичные по давлению (поскольку, согласно (7.12),  $g_{33}^{(0)}$  содержит смещения  $\xi_1, \xi_2$ , которые имеют части, пропорциональные давлению). Поэтому критерий устойчивости (7.23) можно представить в виде

$$W_0^{(0)} + \Delta_p > 0. \quad (7.28)$$

Здесь  $W_0^{(0)}$  — вклад в  $W^{(0)}$ , линейный по давлению; величина  $\Delta_p$  означает

$$\Delta_p = W_p^{(0)} - \lambda_{33}^{00}/\Phi'^2, \quad (7.29)$$

а  $W_p^{(0)}$  — вклад в  $W^{(0)}$ , квадратичный по давлению.

Следуя В. Д. Шафранову и Э. И. Юрченко, можно показать, что при малом  $\epsilon$

$$\Delta_p = (4\pi^2 p' a R / \Phi'^2) A^2 \epsilon^2 / 2, \quad (7.30)$$

где

$$A^2 = R^2 \left\{ \frac{|k_n|^2}{\mu^2} + \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{|k_{n+l}|^2}{(\mu+l)^2} + \frac{|k_{n-l}|^2}{(\mu-l)^2} \right] \right\}, \quad (7.31)$$

где  $k_n$  — фурье-гармоники кривизны, определенные в работе В. Д. Шафранова и Э. И. Юрченко. Видно, что при  $\epsilon \rightarrow 0$  члены в (7.31), квадратичные по давлению, исчезают. Если же  $\epsilon$  конечно, то, как следует из (7.30), члены с квадратом давления играют дестабилизирующую роль.

Заметим, что давление может влиять также на форму магнитных поверхностей — эллиптичность и треугольность. Этот факт будет рассмотрен в следующем параграфе.

#### **§ 7.4. Влияние давления плазмы на форму магнитных поверхностей и критерий устойчивости, учитывающий это влияние**

1. **Введение.** В предыдущих двух параграфах при рассмотрении устойчивости центральной области плазмы в тороидальных ловушках фактически предполагалось, что параметры, характеризующие форму магнитных поверхностей (эллиптичность и треугольность), не зависят от давления плазмы. Покажем на примере винтового шнура, что при достаточно большом давлении плазмы такое предположение перестает оправдываться. При этом оказывается, что индуцируемые давлением плазмы эллиптичность и треугольность могут приводить к ее стабилизации.

В п.2 найдем форму магнитных поверхностей винтового шнура при большом давлении плазмы, а в п. 3 получим критерий устойчивости центральной области винтового шнура с учетом частей эллиптичности и треугольности, обусловленных давлением плазмы.

2. **Форма магнитных поверхностей в приосевой области винтового шнура при большом давлении плазмы.** Согласно обзорной работе Л. С. Соловьева и В. Д. Шафранова, уравнение семейства магнитных поверхностей вблизи магнитной оси винтового шнура имеет вид

$$\psi = C [\rho_0^2 (1 + \varepsilon \cos 2\theta_0) + \rho_0^3 (\alpha_1 \cos \theta_0 + \alpha_3 \cos 3\theta_0)], \quad (7.32)$$

где  $\psi$  — поверхностная функция;  $C$  — некоторая константа;  $\theta_0 = \omega_0 - \kappa_0 s$ ;  $\rho_0, \omega_0$  — квазицилиндрические координаты, связанные с магнитной осью;  $\kappa_0$  — кручение оси;  $s$  — длина дуги магнитной оси, отсчитываемая от некоторой точки  $s = 0$ ;  $\varepsilon, \alpha_1, \alpha_3$  — некоторые параметры. Нам необходимо найти зависимость  $\varepsilon, \alpha_1, \alpha_3$  от формы кожуха и давления плазмы. С этой целью в качестве исходных воспользуемся некоторыми результатами § 6 обзорной работы Л. С. Соловьева и В. Д. Шафранова.



Вводим квазицилиндрические координаты  $\rho$ ,  $\omega$ , связанные с геометрической осью шнура, и вспомогательную координату  $\theta = \omega - \kappa_0 s$ . Компоненты магнитного поля в этой системе координат обозначаем  $B_\rho$ ,  $B_\omega$ ,  $B_s$  и вводим функции  $\psi(\rho, \theta)$  и  $I_B(\rho, \theta)$ , определенные соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \partial\psi/\partial\rho &= \kappa_0 \rho B_s - h_s B_\omega, \quad \partial\psi/\partial\theta = \rho h_s B_\rho; \\ I_B &= h_s B_s + \kappa_0 \rho B_\omega, \end{aligned} \right\} (7.33)$$

где  $h_s = 1 - k_0 \rho \cos \theta$ . Согласно работе Л. С. Соловьева и В. Д. Шафранова,  $\psi$  и  $I_B$  — поверхностные функции, причем  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho h_s} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \rho h_s \frac{\partial\psi/\partial\rho}{h_s^2 + \kappa_0^2 \rho^2} \right) + \frac{1}{\rho^2 h_s} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{1}{h_s} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) - \\ - \frac{2\kappa_0 I_B(\psi)}{(h_s^2 + \kappa_0^2 \rho^2)^2} + \frac{I_B I_B'(\psi)}{h_s^2 + \kappa_0^2 \rho^2} + 4\pi p'(\psi) = 0. \end{aligned} \quad (7.34)$$

При  $k_0 \rho \ll 1$ ,  $\kappa_0 \rho \ll 1$  и при условиях  $p'(\psi) = \text{const}$ ,  $I_B'(\psi) = \text{const}$ ,  $I_B(\psi) \approx \text{const}$  уравнение (7.34) сводится к следующему:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 2\kappa_0 I_B - j_0 + 2kp' \rho \cos \theta, \quad (7.35)$$

где  $j_0 \equiv p' + I_B I_B'$ .

Общее решение (7.35) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi = \lambda_0 + \lambda_1 \rho \cos \theta + \lambda_2 \rho^2 + \lambda_3 \rho^2 \cos 2\theta + \lambda_4 \rho^3 \cos \theta + \\ + \lambda_5 \rho^3 \cos 3\theta. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Константы  $\lambda_2$ ,  $\lambda_4$  определяются правой частью (7.35):

$$\lambda_2 = C, \quad \lambda_4 = kp'/4; \quad C \equiv (2\kappa_0 I_B - j_0)/4, \quad (7.37)$$

а остальные четыре константы — граничными условиями. Найдем их, полагая, что плазма ограничена идеально проводящим кожухом с эллиптичностью  $\epsilon_0$  и треугольностью  $q_0$ , т. е., в соответствии с работой Л. С. Соловьева и В. Д. Шафранова, считая, что на граничной поверхности

(кожухе) координаты  $\rho$  и  $\theta$  связаны соотношением

$$\rho^2 (1 + \varepsilon_0 \cos 2\theta) + q_0 [(2 - \varepsilon_0) \cos 3\theta + 3\varepsilon_0 \cos \theta] = a_0^2. \quad (7.38)$$

Принимая, кроме того, что на кожухе  $\psi = 0$ , и считая  $q_0$  малым порядка  $k_0\rho$ , находим

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= -Ca_0^2; \\ \lambda_1 &= -[a_0^2/(2 + \varepsilon_0)]k_0\rho'/2, \quad \lambda_3 = \varepsilon_0 C; \\ \lambda_5 &= [\varepsilon_0/(2 + \varepsilon_0)]k\rho'/4 + 4Cq_0(1 - \varepsilon_0^2)/(2 + \varepsilon_0). \end{aligned} \right\} (7.39)$$

Теперь в (7.36) следует перейти к координатам  $\rho_0, \theta_0$ , связанным с магнитной осью. Связь между  $(\rho, \theta)$  и  $(\rho_0, \theta_0)$  определяется соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \theta &= \rho_0 \cos \theta_0 - \Delta; \\ \rho \sin \theta &= \rho_0 \sin \theta_0. \end{aligned} \right\} (7.40)$$

Величина  $\Delta$  — смещение магнитной оси от геометрической, определяется из условия, что функция  $\psi(\rho_0, \theta_0)$  не содержит членов, линейных по  $\rho_0$ :

$$a_0^2\alpha - \Delta(1 + \varepsilon_0)(2 - 3\alpha\Delta) = 0. \quad (7.41)$$

В результате (7.36) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \psi(\rho_0, \theta_0) &= C_1\{C_2 + \rho_0^2(1 + \varepsilon \cos 2\theta_0) + \\ &+ \rho_0^3(\alpha_1 \cos \theta_0 + \alpha_3 \cos 3\theta_0)\}, \end{aligned} \quad (7.42)$$

где  $C_1, C_2$  — некоторые константы, явный вид которых для нас не важен,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= (\varepsilon_0 - \alpha\Delta - 2\varepsilon_0\alpha\Delta)[1 - \alpha\Delta(2 + \varepsilon_0)]^{-1}; \\ \alpha_1 &= \alpha(1 + \varepsilon_0/2)[1 - \alpha\Delta(2 + \varepsilon_0)]^{-1}; \\ \alpha_3 &= [\alpha\varepsilon_0/2 + 4q_0(1 - \varepsilon_0^2)/(2 + \varepsilon_0)][1 - \alpha\Delta(2 + \varepsilon_0)]^{-1}; \\ \alpha &= (k_0\rho'/4C)/(1 + \varepsilon_0/2). \end{aligned} \right\} (7.43)$$

Из (7.43) следует приближенное ( $\varepsilon_0 \ll 1$ ) выражение

$$q_1 \equiv [(2 + \varepsilon)\alpha_3 - \varepsilon\alpha_1]/4(1 - \varepsilon^2) = q_0 + \alpha^2\Delta/4. \quad (7.44)$$

(Заметим, что в § 7.3  $q_1$  обозначалась буквой  $\alpha$ .) В том же приближении и при  $\Delta/a_0 \ll 1$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 - \alpha \Delta; \quad \Delta = k_0 \beta_\theta a_0^2 / 2; \quad \alpha = -k_0 \beta_\theta; \\ \beta_\theta &\equiv p_0 / (\kappa_0 a I_B - j_0 a / 2). \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

**3. Критерий устойчивости приосевой части винтового шнура.** При малой эллиптичности критерий (7.28) означает

$$\frac{\varepsilon^2 \beta_\theta}{2} < \frac{\mu_J - \mu_0}{\mu_J + \mu_0} - \frac{\mu_J^2}{k_0^2 R^2} + 6\varepsilon \frac{q_1}{k_0}. \quad (7.46)$$

Здесь

$$\beta_\theta = (p_0 / B_0^2) (R / \mu a_0)^2; \quad \mu_J = j_0 R / 2 B_0;$$

$$R = (\kappa_0^2 + k_0^2)^{-1/2}; \quad \mu_0 = -\kappa_0 R; \quad \mu = \mu_0 + \mu_J;$$

$k_0$  — кривизна магнитной оси, а параметр  $q_1$  определен первым равенством (7.44). Предполагается, что  $a_0$  — радиус кожуха и что положение кожуха совпадает с магнитной поверхностью, на которой  $p = 0$ .

Подстановка (7.44), (7.45) в (7.46) приводит к искомому критерию устойчивости центральной области винтового шнура:

$$\begin{aligned} \beta_\theta \left( \varepsilon_0 + \frac{1}{2} k_0^2 a_0^2 \beta_\theta^2 \right)^2 &< \frac{\mu_J - \mu_0}{\mu_J + \mu_0} - \frac{\mu_J^2}{k_0^2 R^2} + \\ &+ 6 \left( \varepsilon_0 + \frac{1}{2} k_0^2 a_0^2 \beta_\theta^2 \right) \left( \frac{q_0}{k_0} + \frac{1}{8} k_0^2 a_0^2 \beta_\theta^2 \right). \end{aligned} \quad (7.47)$$

Анализ критерия устойчивости (7.47) будет произведен в следующем параграфе.

### § 7.5. Эффект самостабилизации плазмы большого давления в ловушках с круглым или почти круглым сечением кожуха

Рассмотренная в § 7.4 геометрия винтового шнура может служить моделью осесимметричного токамака (при  $\kappa_0 = 0$ , т. е. при  $\mu_0 = 0$ ), а также моделью тороидаль-

ных ловушек без продольного тока (при  $\mu_J = 0$ ), таких, как стеллараторы типа восьмерки Спитцера. Поэтому критерий устойчивости (7.47) может быть использован в задаче об устойчивости как токамаков, так и стеллараторов типа восьмерки Спитцера. При этом получаются следствия, изложенные ниже в п. 1 — 3.

**1. Токамаки.** Критерий устойчивости (7.47), записанный для токамака, имеет вид

$$1 + (6q_0/k_0)(\varepsilon_0 + k_0^2 a_0^2 \beta_J^3/2) > 1/q^2 + (\beta_J/2)(\varepsilon_0 + k_0^2 a_0^2 \beta_J^3/2)(\varepsilon_0 - k_0^2 a_0^2 \beta_J^3), \quad (7.48)$$

где  $\beta_J \equiv \beta_0$ ;  $q \equiv 1/\mu$  — коэффициент запаса.

Если кожух круглый,  $q_0 = 0$ ,  $\varepsilon_0 = 0$ , то отсюда следует

$$1 + (1/4)k_0^4 a_0^4 \beta_J^5 > 1/q^2. \quad (7.49)$$

Это означает, что с ростом параметра  $\beta_J$  желобковая неустойчивость может отсутствовать даже при  $q < 1$ , т. е. плазма с большим  $\beta_J$  более устойчива, чем плазма с малым  $\beta_J$ .

Из (7.48) видно также, что эллиптичность кожуха перестает играть роль, если

$$k_0^2 a_0^2 \beta_J > \varepsilon_0, \quad (7.50)$$

а треугольность кожуха не важна, если

$$q_0/k_0 < k_0^2 a_0^2 \beta_J^3. \quad (7.51)$$

Ясно также, что при большом давлении плазмы треугольность кожуха может приводить к стабилизации, даже если эллиптичность кожуха отсутствует (при малом давлении, как видно из (7.48), треугольность кожуха не сказывается, если  $\varepsilon_0 = 0$ ).

**2. Об устойчивости стеллараторов типа восьмерки Спитцера.** В свое время Спитцер предложил использовать для удержания плазмы тороидальные ловушки круглого сечения. Он рассмотрел конкретные типы таких ловушек,

имеющие форму пространственной «восьмерки». От токамаков такие ловушки отличаются тем, что в них отсутствует продольный ток.

Джонсон и др. рассмотрели устойчивость плазмы в ловушках типа восьмерки Спитцера в предположении, что давление плазмы мало. Было показано, что тороидальные ловушки круглого сечения без продольного тока, заполненные плазмой низкого давления, характеризуются отсутствием магнитной ямы и нулевым широм, и потому не удовлетворяют требованиям гидромагнитной устойчивости. В результате интерес к ловушкам круглого сечения без продольного тока упал, а экспериментальные исследования удержания плазмы в таких ловушках были прекращены.

Учитывая соотношение (7.48), заключаем, что вывод о неустойчивости плазмы в тороидальных ловушках круглого сечения без продольного тока, вообще говоря, теряет силу в случае плазмы достаточно высокого давления, когда  $\beta_\theta > 1$ . Так, из (7.47) вытекает, что центральная область шнура устойчива, если

$$-1 + (1/4)k_0^4 a_0^4 \beta_0^5 > 0. \quad (7.52)$$

Итак, наш анализ свидетельствует о принципиальной возможности гидромагнитноустойчивого удержания плазмы достаточно высокого давления в бестоковых тороидальных ловушках круглого сечения.

При практическом использовании наших результатов следует иметь в виду, что при получении соотношения (7.47) отношение  $\Delta/a$  полагалось малым. Дополнительный анализ, проведенный для центральной области шнура при конечном  $\Delta/a$ , показывает, что рассмотренный здесь эффект самостабилизации центральной области шнура имеет место лишь в случае, когда длина тороидальной ловушки значительно превышает радиус ее поперечного сечения.

**3. О роли эллиптичности и треугольности поперечного сечения стеллараторов.** При малом  $\beta_\theta$  из (7.47) следует, что для достижения гидромагнитной устойчивости плазмы низкого давления в стеллараторе необходимо делать сечение стелларатора эллиптическим,  $\varepsilon_0 \neq 0$ , и слегка треугольным,  $q_0 \neq 0$ . Из полной же формулы (7.47) вытекает, что при удержании в стеллараторе плазмы с достаточно большим  $\beta_\theta$  роль эллиптичности и треугольности незначительна,

если

$$\varepsilon_0 < (1/2)(k_0 a_0 \beta_0)^2; \quad (7.53)$$

$$q_0/k_0 < (1/8)k_0^2 a_0^2 \beta_0^3. \quad (7.54)$$

Еще один важный результат, вытекающий из (7.47), состоит в следующем. Согласно обычной «идеологии» стеллараторов, стабилизирующая роль треугольности,  $q_0$ , при малом давлении плазмы проявляется, если только кожух эллиптичен,  $\varepsilon_0 \neq 0$  (это видно из (7.47) при малом  $\beta_0$ ). Если же  $\beta_0$  достаточно велико, так что удовлетворяется условие (7.52), а треугольность  $q_0$  значительна, так что

$$q_0/k_0 > (1/8)k_0^2 a_0^2 \beta_0^3, \quad (7.55)$$

то эффект стабилизации треугольностью перестает зависеть от эллиптичности. Критерий устойчивости при  $\varepsilon_0 = 0$  и  $q_0$ , удовлетворяющем условию (7.55), имеет вид

$$-1 + 3k_0 q_0 a^2 \beta_0^3 > 0. \quad (7.56)$$

Таким образом, проведенный выше анализ свидетельствует о том, что «плохая» ловушка для плазмы низкого давления может оказаться «хорошей» для плазмы высокого давления.

### **§ 7.6. Критерий устойчивости плазмы большого давления в тороидальных ловушках с произвольной формой магнитной оси**

Изложенные выше выводы были сделаны из рассмотрения простейшей модели тороидальных магнитных ловушек с пространственной магнитной осью — винтового шнура. Для строгого обоснования этих выводов необходим анализ магнитных ловушек с произвольной формой магнитной оси. Такой анализ был проведен Х. Д. Абурджания и автором. В целом он подтверждает отмеченную выше концепцию: плазма, неустойчивая при малом давлении, может оказаться устойчивой при большом давлении.

Таким образом, совокупность отмеченных выше результатов свидетельствует о принципиальной возможности достижения термоядерных параметров в бестоковых замкнутых ловушках с пространственной магнитной осью.

### Библиографический обзор к гл. 7

1. Михайловский А. Б., Шафранов В. Д. О гидромагнитной устойчивости стеллараторов типа «восьмерки» Спитцера при высоком давлении плазмы. — «Письма в ЖЭТФ», 1973, т. 18, с. 208.
2. Михайловский А. Б., Шафранов В. Д. Эффект самостабилизации плазмы высокого давления в тороидальных ловушках. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1974, т. 66, с. 190.  
В работах [1—2] было указано на возможность самостабилизации плазмы большого давления в бестоковых ловушках круглого или почти круглого сечения. Часть результатов этих работ изложена в § 7.4, 7.5.
3. Spitzer L. The stellarator concept. — «Phys. Fluids», 1958, v. 1, p. 253.  
Обсуждаются стеллараторы типа восьмерки.
4. Some stable hydromagnetic equilibria. — «Phys. Fluids», 1958, v. 1, p. 281. Auth.: Johnson J. L., Oberman C. R., Kulsrud R. M., Frieman E. A.  
Обсуждается устойчивость стеллараторов типа восьмерки Спитцера при малом давлении плазмы.
5. Михайловский А. Б. К теории локальной гидромагнитной устойчивости тороидальных плазменных конфигураций. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1973, т. 64, с. 536.
6. Shafranov V. D., Yurchenko E. I. Influence of ballooning effects on plasma stability in closed systems. — «Nucl. Fusion», 1968, v. 8, p. 329.
7. Соловьев Л. С., Шафранов В. Д. Замкнутые конфигурации для удержания плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 5. М., Атомиздат, 1967, с. 3.  
Результаты работ [5—7] использовались в § 7.2—7.4.
8. Абурджания Х. Д., Михайловский А. Б. Самостабилизация плазмы большого давления в тороидальных ловушках с произвольной формой магнитной оси. — Препринт ИАЭ-2690. М., 1976.  
В работе [8] выводится общий критерий устойчивости для периферийной области плазменного шнура большого давления.
9. Фроленков А. В. Об устойчивости плазмы в системах с замкнутыми силовыми линиями. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 679.  
Исследуется устойчивость плазмы большого давления в тороидальных ловушках с замкнутыми силовыми линиями без вращательного преобразования.
10. Herrnegger F., Nührenberg J. Finite  $\beta$  stabilization of a diffuse helical  $l=1$  MHD equilibrium. — «Nucl. Fusion», 1975, v. 15, p. 1025.  
Обсуждаются некоторые стабилизирующие эффекты, обусловленные конечным  $\beta$ .

## Глава 8

### ЖЕЛОБКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ БОЛЬШОГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

#### § 8.1. Введение

Наиболее важной неустойчивостью, чувствительной к форме силовых линий магнитного поля, является желобковая, обсуждавшаяся в предшествующих главах. Другой неустойчивостью, связанной с искривленностью силовых линий магнитного поля, является так называемая неустойчивость  $g$ -моды, иначе называемая *непотенциальной гравитационно-диссипативной неустойчивостью*, представляющей собой аналог желобковой неустойчивости в плазме с конечной проводимостью.

Как и обычная желобковая неустойчивость, неустойчивость  $g$ -моды может быть рассмотрена в модельной постановке с помощью введения в задачу фиктивной силы тяжести. Такое рассмотрение излагается в приложении в настоящей главе. Основной же целью данной главы является получение общего критерия устойчивости  $g$ -моды для плазмы тороидальной геометрии при произвольном значении параметра  $\beta$ , допускаемого условием равновесия. Проведем анализ с использованием системы гидромагнитных уравнений с конечной проводимостью, которые приводятся и линеаризуются в § 8.2. При этом, как и в гл. 5, возмущения считаются почти желобковыми вдоль силовых линий магнитного поля и мелкомасштабными поперек силовых линий. В § 8.3 линеаризованные гидромагнитные уравнения сводятся к одному — для желобковой части возмущенного смещения. В § 8.4 это уравнение решается и находится общий критерий устойчивости  $g$ -моды. В § 8.5 этот общий критерий устойчивости упрощается для случая осесимметричного токамака круглого сечения. Результаты обсуждаются в § 8.6.



## § 8.2. Линеаризация гидромагнитных уравнений

1. Исходные уравнения, используемые для описания возмущений. В качестве исходных уравнений примем уравнения одножидкостной магнитной гидродинамики с конечной проводимостью:

$$\rho d\mathbf{V}/dt = -\nabla p + [\mathbf{j}, \mathbf{B}]; \quad (8.1)$$

$$d\rho/dt + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0; \quad (8.2)$$

$$d(\rho\rho^{-\gamma_0})/dt = 0; \quad (8.3)$$

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = -\operatorname{rot} \mathbf{E}; \quad (8.4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j}; \quad (8.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (8.6)$$

$$\mathbf{E} + [\mathbf{V}, \mathbf{B}] = \mathbf{j}/\sigma. \quad (8.7)$$

Величины  $\rho$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $p$  означают плотность, скорость и давление плазмы;  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  — магнитное и электрическое поля;  $\mathbf{j}$ ,  $\sigma$  — ток и проводимость;  $\gamma_0$  — показатель адиабаты.

2. Условие замыкания токов. Из (8.5) следует уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (8.8)$$

означающее условие замыкания токов.

Из (8.1) находим, что выражение для плотности электрического тока можно представить в виде

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_B + \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_V, \quad (8.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j}_B &= \alpha\mathbf{B}; \quad \mathbf{j}_p = [\mathbf{B}, \nabla p]/B^2; \\ \mathbf{j}_V &= [\mathbf{B}, \rho d\mathbf{V}/dt]/B^2, \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

а выражение для  $\alpha$ , в соответствии с (8.5), имеет вид (ср. с гл. 5)

$$\alpha = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{B}/B^2. \quad (8.11)$$

Подставим (8.9) в (8.8) и произведем линейризацию получающегося при этом уравнения.

Как и в гл. 5, при вычислении вклада  $\mathbf{j}_B$  в (8.8) полагаем  $\tilde{\mathbf{B}} \nabla \alpha_0 \ll \mathbf{B}_0 \nabla \tilde{\alpha}$ . (Это соответствует пренебрежению эффектами, вызывающими неустойчивости винтовую и tearing-mode, об этом см. гл. 9, 10). В этом приближении

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_B = \mathbf{B}_0 \nabla \tilde{\alpha}. \quad (8.12)$$

Вклад  $\mathbf{j}_p$  в (8.8) преобразуем аналогично гл. 5. Отличие от гл. 5 состоит в том, что в гл. 5 вместо возмущенного давления  $p$  мы использовали переменную  $\xi \equiv -\tilde{p}/p'_0$ . Теперь такого рода соотношение не используем и записываем  $\operatorname{div} \mathbf{j}_p$  в терминах  $\tilde{p}$ . Переобозначая в уравнении (5.24)  $\xi \rightarrow \tilde{p}/p'_0$ , без дополнительных вычислений получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_p = -\frac{\Phi' W^{(0)}}{2\pi \sqrt{g\rho'_0}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} - \frac{1}{p'_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial a} \mathbf{B}_0 \nabla \alpha_0, \quad (8.13)$$

где  $W^{(0)}$  определено соотношением (5.36).

В правой части (8.13) мы пренебрегли осциллирующими по  $\theta$ ,  $\zeta$  членами, содержащими множитель  $\partial \tilde{p}/\partial \theta$ , учитываемыми в гл. 5. Это связано с тем, что, в отличие от гл. 5, мы полагаем  $(\partial \tilde{p}/\partial \theta)/(\partial \tilde{p}/\partial a) \rightarrow 0$ .

Отметим также, что при получении (8.13), как и в гл. 5, используется уравнение баланса возмущенного давления

$$\mathbf{B}_0 \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{p} = 0. \quad (8.14)$$

Уравнение (8.14) получается при подстановке (8.9) в  $a$ -ю контравариантную компоненту уравнения (8.5).

Вклад  $\mathbf{j}_V$  в (8.8) находим, учитывая, что в стационарном состоянии плазма покоится,  $\mathbf{V}_0 = 0$ . Возмущенную скорость  $\tilde{\mathbf{V}}$  выражаем через смещение  $\xi$ , определенное соотношением [ср. с. гл. 3]

$$\tilde{\mathbf{V}} = \partial \xi / \partial t. \quad (8.15)$$

Зависимость всех возмущенных величин от времени принимаем в виде  $\exp(\gamma t)$ . При этом

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_V = -\gamma^2 \rho_0 (\mathbf{B}_0 / B_0^2) \operatorname{rot} \xi. \quad (8.16)$$

Подставляя (8.12), (8.13), (8.16) в (8.8), получаем

$$\mathbf{B}_0 \nabla \tilde{\alpha} - \frac{W^{(0)} \Phi'}{2\pi \sqrt{g\rho'_0}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho'_0} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial a} \mathbf{B}_0 \nabla \alpha_0 - \frac{\gamma^2 \rho_0}{\mathbf{B}_0^2} \mathbf{B}_0 \operatorname{rot} \xi = 0. \quad (8.17)$$

**3. Связь между возмущениями магнитного поля и смещением.** Из (8.4)—(8.7) следует

$$\partial \tilde{\mathbf{B}} / \partial t = \operatorname{rot} [\tilde{\mathbf{V}}, \mathbf{B}_0] + \Delta \tilde{\mathbf{B}} / \sigma_0. \quad (8.18)$$

В принятом приближении  $\Delta = g^{11} \partial^2 / \partial a^2$ . С учетом этого и уравнения (8.15) из (8.18) находим

$$\left. \begin{aligned} \hat{D} \tilde{B}^1 &= \mathbf{B}_0 \nabla \xi^1, \quad \hat{D} Y_{\perp} = \mathbf{B}_0 \nabla X_{\perp} - \mu' (\Phi' / 2\pi)^2 \xi^1 / \sqrt{g}; \\ \hat{D} Y_{\parallel} &= -\operatorname{div} \xi + \mathbf{B}_0 \nabla X_{\parallel} - \frac{X_{\perp}}{\rho'_0} \mathbf{B}_0 \nabla \alpha_0 - \\ &\quad - \frac{W^{(0)}}{\rho'_0} \left( \frac{\Phi'}{2\pi} \right)^2 \frac{\xi^1}{\sqrt{g}}, \end{aligned} \right\} (8.19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Y_{\perp} &= [\tilde{\mathbf{B}} \mathbf{B}_0]_1 \equiv (1/2\pi)(\Phi' \tilde{B}^2 - \chi' \tilde{B}^3); \\ Y_{\parallel} &= \mathbf{B}_0 \tilde{\mathbf{B}} / \mathbf{B}_0^2; \\ X_{\perp} &= [\xi, \mathbf{B}_0]_1 \equiv (1/2\pi)(\Phi' \xi^2 - \chi' \xi^3); \\ X_{\parallel} &= \mathbf{B}_0 \xi / \mathbf{B}_0^2; \\ \hat{D} &= 1 - (g^{11} / \sigma_0 \gamma) \partial^2 / \partial a^2. \end{aligned} \right\} (8.20)$$

**4. Возмущение продольного тока.** В пренебрежении членами, малыми, как параметр мелкомасштабности ( $\partial / \partial a \gg \gg 1/a$ ), линеаризованная часть уравнения (8.11) имеет вид

$$\tilde{\alpha} = (\mathbf{B}_0 / \mathbf{B}_0^2) \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{B}}. \quad (8.21)$$

С учетом (8.19) отсюда следует

$$\tilde{\alpha} = (g^{11} / \mathbf{B}_0^2) \partial Y_{\perp} / \partial a. \quad (8.22)$$

**5. Возмущенное давление плазмы и роль уравнения баланса возмущенных давлений.** Из (8.2), (8.3) получаем хорошо известный результат

$$\tilde{p} = -\xi^1 p'_0 - \gamma_0 p_0 \operatorname{div} \xi. \quad (8.23)$$

При подстановке  $\tilde{p}$  в виде (8.23) и  $\mathbf{B}_0 \tilde{\mathbf{B}}$  в виде (8.19), (8.20) в уравнение баланса возмущенных давлений (8.14) приходим к уравнению для  $\operatorname{div} \xi$ .

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_0^2 \hat{D}^{-1} + \gamma_0 p_0) \operatorname{div} \xi = & \left[ \mathbf{B}_0^2 \frac{W^{(0)}}{p'_0 \sqrt{g}} \left( \frac{\Phi'}{2\pi} \right)^2 \hat{D}^{-1} - p'_0 \right] \xi^1 + \\ & + \mathbf{B}_0^2 \hat{D}^{-1} \left( \mathbf{B}_0 \nabla X_{\parallel} - \frac{X_{\perp}}{p'_0} \mathbf{B}_0 \nabla \alpha_0 \right). \end{aligned} \quad (8.24)$$

При  $\mathbf{B}_0 \nabla = 0$ , т. е. в случае, когда стационарные параметры плазмы и поля однородны вдоль магнитного поля, а возмущения являются желобковыми (такая ситуация имеет место, например, в случае аксиально-симметричных возмущений цилиндрического плазменного шнура без продольного магнитного поля, см. гл. 3), уравнение (8.24) дает возможность выразить  $\operatorname{div} \xi$  через  $\xi^1$ . Например, в отсутствие диссипации,  $\hat{D} = 1$ , эта связь имеет вид

$$\operatorname{div} \xi = \frac{\mathbf{B}_0^2 V''/V' - p'_0}{\mathbf{B}_0^2 + \gamma_0 p_0} \xi^1. \quad (8.25)$$

Здесь учтено, что в отсутствие продольной неоднородности  $4\pi^2 \sqrt{g} = V'$ ;  $W^{(0)} = p'_0 V''$ . Согласно (8.23), (8.25)  $\tilde{p}$  выражается через  $\xi^1$ :

$$\tilde{p} = -\xi^1 \frac{p'_0 + \gamma_0 p_0 V''/V'}{1 + \gamma_0 p_0 / \mathbf{B}_0^2}. \quad (8.26)$$

Подстановка такого выражения для  $\tilde{p}$  в уравнение (8.17) приводит к критерию устойчивости

$$\frac{V''}{V'} \left( \frac{p'_0}{p_0} + \gamma_0 \frac{V''}{V'} \right) \geq 0. \quad (8.27)$$

Иначе обстоит дело в случае, когда стационарные параметры плазмы и поля неоднородны вдоль силовых линий, а возмущения — нежелобковые. В этом случае в правой части (8.24) необходимо учитывать члены с  $X_{\parallel}$ ,  $X_{\perp}$ . Причем в интересующем нас случае возмущений с  $(\partial/\partial\theta)/(\partial/\partial a) \rightarrow 0$  члены с  $X_{\parallel}$ ,  $X_{\perp}$ , как будет видно несколько ниже, велики по сравнению с членами, содержащими  $\xi^1$ . При этом вместо (8.25) из (8.24) следует

$$\left(1 + \frac{\gamma_0 p_0}{\mathbf{B}_0^2} \hat{D}\right) \operatorname{div} \xi = \mathbf{B}_0 \nabla X_{\parallel} - \frac{X_{\perp}}{p'_0} \mathbf{B}_0 \nabla \alpha_0. \quad (8.28)$$

Вместо (8.26) выражение для  $\tilde{p}$  в этом случае имеет вид

$$\tilde{p} = -\xi^1 p'_0 - \gamma_0 p_0 \left(1 + \frac{\gamma_0 p_0}{\mathbf{B}_0^2} \hat{D}\right)^{-1} \left(\mathbf{B}_0 \nabla X_{\parallel} - \frac{X_{\perp}}{p'_0} \mathbf{B}_0 \nabla \alpha_0\right). \quad (8.29)$$

**6. Уравнение продольного движения.** Проектируя векторное уравнение (8.1) на направление полного магнитного поля, производя линеаризацию и учитывая (8.19), (8.23) и (8.28), получаем

$$\begin{aligned} \gamma^2 \rho_0 X_{\parallel} + \frac{p'_0}{\mathbf{B}_0^2} (\hat{D} - 1) \tilde{B}^1 - \frac{\gamma_0 p_0}{\mathbf{B}_0^2} \left(1 + \frac{\gamma_0 p_0}{\mathbf{B}_0^2} \hat{D}\right)^{-1} \times \\ \times \mathbf{B}_0 \nabla \left(\mathbf{B}_0 \nabla X_{\parallel} - \frac{X_{\perp}}{p'_0} \mathbf{B}_0 \nabla \alpha_0\right) = 0. \end{aligned} \quad (8.30)$$

**7. Связь между поперечными смещениями.** Мы использовали уравнение (8.28), чтобы во всех остальных уравнениях выразить  $\operatorname{div} \xi$  через  $X_{\parallel}$ ,  $X_{\perp}$ . Теперь учитывая, что члены левой части (8.28) велики по сравнению с членами правой части, с помощью этого уравнения находим связь между  $X_{\perp}$  и  $\xi^1$ :

$$\partial \xi^1 / \partial a + (2\pi / \Phi') \partial X_{\perp} / \partial \theta = 0. \quad (8.31)$$

Видно, что отношение  $\xi^1 / X_{\perp}$  мало как  $(\partial/\partial\theta)/(\partial/\partial a)$ , что и было использовано выше при получении (8.28).

### § 8.3. Уравнение для желобковой части радиального смещения

Дальнейшее преобразование линеаризованных гидромагнитных уравнений производим аналогично § 5.7, представляя возмущенные величины  $\tilde{X}$  в виде (5.31) и используя соотношения (5.32)—(5.34). В результате получаем, что в  $k_x$ -представлении уравнение (8.14) означает [ср. с (5.35)]

$$-m\mu' \frac{\partial \tilde{\alpha}_k^{(0)}}{\partial k_x} + \hat{L}_\parallel \tilde{\alpha}_k^{(1)} - im \frac{\tilde{p}_k}{\rho'_0} W^{(0)} - \frac{ik_x \tilde{p}_k}{\rho'_0} \hat{L}_\parallel \alpha_0 + \\ + i \frac{k_x^2}{m} \frac{\gamma^2 \rho_0 \sqrt{g} g^{11}}{B_0^2} \xi_h = 0. \quad (8.32)$$

При получении последнего члена левой части (8.32) было учтено вытекающее из (8.31) соотношение

$$X_{\perp k} = -(k_x/m)(\Phi'/2\pi)\xi_h. \quad (8.33)$$

Здесь и ниже  $\xi \equiv \xi^1$ .

Согласно (8.19), (8.20), (8.22), (8.33),

$$\tilde{\alpha}_k = -\frac{i}{m} L_\perp^* \left( -m\mu' \frac{\partial \xi_k^{(0)}}{\partial k_x} + \hat{L}_\parallel \xi_k^{(1)} \right), \quad (8.34)$$

где

$$\left. \begin{aligned} L_\perp^* &= L_\perp/D, \quad L_\perp = k_x^2 (g^{11}/\sqrt{g} B_0^2)(\Phi'/2\pi)^2; \\ D &= 1 + k_x^2 g^{11}/\gamma \sigma_0. \end{aligned} \right\} \quad (8.35)$$

Средняя по  $\theta, \zeta$  часть уравнения (8.33) имеет вид

$$-m\mu' \frac{\partial \tilde{\alpha}_k^{(0)}}{\partial k_x} - im \tilde{p}_k^{(0)} \frac{W^{(0)}}{\rho'_0} + \frac{ik_x}{\rho'_0} (\alpha_0^{(1)} \hat{L}_\parallel \tilde{p}_k^{(1)})^{(0)} + \\ + \frac{ik_x^2 \gamma^2 \xi_k^{(0)}}{m} \left( \frac{\rho_0 \sqrt{g} g^{11}}{B_0^2} \right)^{(0)} = 0. \quad (8.36)$$

Здесь, согласно (8.34) [ср. с (5.44)],

$$\tilde{\alpha}_k^{(0)} = -\frac{i}{m} \left[ -m\mu' L_{\perp}^{*(0)} \frac{\partial \xi_k^{(0)}}{\partial k_x} + (L_{\perp}^{*(1)} \hat{L}_{\parallel} \xi_k^{(1)})^{(0)} \right]. \quad (8.37)$$

Аналогично § 7.3 из осциллирующей по  $\theta$ ,  $\zeta$  части уравнений (8.32) и (8.34) находим выражение для  $\hat{L}_{\parallel} \xi_k^{(1)}$ , которое подставляем в (8.37), а результат — в (8.36). Представляя  $\tilde{\rho}_k$  в виде

$$\tilde{\rho}_k = -\xi_k \rho'_0 + \delta \tilde{\rho}_k, \quad (8.38)$$

преобразуем (8.36) к виду, аналогичному уравнению (5.48):

$$\begin{aligned} \mu'^2 \frac{\partial}{\partial k_x} \left( \frac{1}{Q^{*(0)}} \frac{\partial \xi_k^{(0)}}{\partial k_x} \right) - \xi_k^{(0)} \left\{ W^{(0)} - k_x^2 (Q^* \alpha_0^{(1)2})^{(0)} + \right. \\ \left. + k_x^2 \frac{[(Q^* \alpha_0^{(1)})^{(0)}]^2}{Q^{*(0)}} - \mu' \frac{\partial}{\partial k_x} \left[ k_x \frac{(Q^* \alpha_0^{(1)})^{(0)}}{Q^{*(0)}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{k_x^2}{m^2} \gamma^2 \left( \frac{\rho_0 \sqrt{g} g^{11}}{\mathbf{B}_0^2} \right)^{(0)} \right\} - \\ - \frac{k_x}{m \rho'_0} (\alpha_0^{(1)} \hat{L}_{\parallel} \delta \tilde{\rho}_k)^{(0)} = 0. \quad (8.39) \end{aligned}$$

Здесь  $Q^* \equiv D/L_{\perp}$ . Теперь нам остается найти связь  $\tilde{L}_{\parallel} \delta \tilde{\rho}_k$  с  $\xi_k^{(0)}$ , после чего все члены уравнения (8.39) будут выражены через  $\xi_k^{(0)}$ .

Согласно (8.38), (8.29), (8.30)

$$\hat{L}_{\parallel} \delta \tilde{\rho} = -[\mathbf{B}_0^2 \rho_0 X_{\parallel} \gamma^2 - \rho'_0 (\hat{D} - 1) \tilde{B}^1] 2\pi \sqrt{g} / \Phi'. \quad (8.40)$$

Левая часть этого уравнения не содержит слагаемых, постоянных по  $\theta$ ,  $\zeta$ . Следовательно, таких слагаемых не должно быть и в правой части (8.40), что означает

$$\{ \sqrt{g} [\gamma^2 \mathbf{B}_0^2 \rho_0 X_{\parallel} - \rho'_0 (\hat{D} - 1) \tilde{B}^1] \}^{(0)} = 0. \quad (8.41)$$

Полагая  $X_{\parallel} = X_{\parallel}^{(0)} + X_{\parallel}^{(1)}$ , отсюда находим

$$\begin{aligned} \gamma^2 X_{\parallel}^{(0)} = & -\frac{1}{(\sqrt{g} \mathbf{B}_0^2 \rho_0)^{(0)}} \left\{ \gamma^2 (\sqrt{g} \mathbf{B}_0^2 \rho_0 X_{\parallel}^{(1)})^{(0)} - \right. \\ & \left. - \rho'_0 [V \sqrt{g} (\hat{D} - 1) \tilde{B}^1]^{(0)} \right\}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Выражение для  $X_{\parallel}^{(1)}$  находим с помощью уравнения (8.30), решая его методом последовательных приближений по параметрам  $\gamma^2$  и  $\tilde{B}^1$ . С учетом (8.33) получаем

$$X_{\parallel k}^{(1)} = \frac{k_x}{m} \frac{\Phi' \alpha_0^{(1)}}{2\pi \rho'_0} \xi_k^{(0)}. \quad (8.43)$$

С помощью (8.19), (8.40), (8.42), (8.43) выражаем  $\hat{L}_{\parallel} \delta \rho$  через  $\xi_k^{(0)}$ . При этом получаем

$$\begin{aligned} \frac{k_x}{m \rho'_0} (\alpha_0^{(1)} \hat{L}_{\parallel} \delta \tilde{\rho}_k)^{(0)} = & \frac{k_x^2}{m^2} \frac{\gamma^2 \xi_k^{(0)}}{\rho_0'^2} \left\{ (\alpha_0^{(1)} \rho_0 \mathbf{B}_0^2 \sqrt{g})^{(0)} - \right. \\ & \left. - \frac{[(\rho_0 \mathbf{B}_0^2 \sqrt{g} \alpha_0^{(1)})^{(0)}]^2}{(\rho_0 \mathbf{B}_0^2 \sqrt{g})^{(0)}} \right\} + k_x^2 \xi_k^{(0)} \left\{ [\alpha_0^{(1)2} (Q^* - Q)]^{(0)} - \right. \\ & \left. - \frac{(\alpha_0^{(1)} Q^*)^{(0)}}{Q^{*(0)}} [\alpha_0^{(1)} (Q^* - Q)]^{(0)} + \right. \\ & \left. + \frac{(\alpha_0^{(1)} \mathbf{B}_0^2 \sqrt{g})^{(0)}}{(\mathbf{B}_0^2 \sqrt{g})^{(0)}} \left[ (\alpha_0^{(1)} Q)^{(0)} - \frac{Q^{(0)}}{Q^{*(0)}} (Q^* \alpha_0^{(1)})^{(0)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (8.44)$$

где, как и в § 5.3,  $Q \equiv L_{\perp}^{-1}$ . Подставляя этот результат в (8.40), получаем искомое уравнение для  $\xi_k^{(0)}$ :

$$\begin{aligned} \mu'^2 \frac{\partial}{\partial k_x} \left[ \frac{k_x^2}{A_0 + (k_x^2 / \gamma \sigma_0) C_0} \frac{\partial \xi_k^{(0)}}{\partial k_x} \right] - \\ - \xi_k^{(0)} \left( W_M + \delta W + \frac{k_x^2}{m^2} \gamma^2 \Lambda \right) = 0. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Здесь  $W_M$  — совокупность величин, фигурирующая в критерии Мерсье (5.68):

$$W_M = W - A_2 + A_1^2 / A_0 - \mu' A_1 / A_0. \quad (8.46)$$



Величины  $W$  и  $A_n$  ( $n = 0, 1, 2$ ) определены соотношениями (5.69), а  $\delta W$  означает

$$\delta W = - \left( \frac{A_1}{A_0} - \frac{A_1 + k_x^2 C_1 / \gamma \sigma_0}{A_0 + k_x^2 C_0 / \gamma \sigma_0} \right) \left( A_1 - A_0 \frac{C_1}{C_0} \right) + \\ + \mu' \frac{\partial}{\partial k_x} \left[ k_x \left( \frac{A_1}{A_0} - \frac{A_1 + k_x^2 C_1 / \gamma \sigma_0}{A_0 + k_x^2 C_0 / \gamma \sigma_0} \right) \right]. \quad (8.47)$$

Остальные обозначения в (8.45)—(8.47) таковы:

$$\left. \begin{aligned} C_n &= (2\pi / \Phi')^2 (\alpha_0^{(1)n} \sqrt{g} B_0^2)^{(0)}; \quad n = 0, 1; \\ \Lambda &= \left( \frac{\rho_0 \sqrt{g} g^{11}}{B_0^2} \right)^{(0)} + \frac{1}{\rho_0'^2} \left\{ (\alpha_0^{(1)2} \rho_0 B_0^2 \sqrt{g})^{(0)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{[(\alpha_0^{(1)} \rho_0 B_0^2 \sqrt{g})^{(0)}]^2}{(\rho_0 B_0^2 \sqrt{g})^{(0)}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8.48)$$

### § 8.4. Общий критерий устойчивости

В соответствии с приложением 1 к настоящей главе, критерий устойчивости плазмы относительно возмущений типа  $g$ -моды можно получить, рассмотрев уравнение (8.45) при  $k_x^2 \gg \gamma \sigma_0$ . При этом (8.45) принимает вид

$$\frac{\gamma \sigma_0}{C_0} \mu'^2 \frac{\partial^2 \xi k^{(0)}}{\partial k_x^2} - \xi k^{(0)} \left[ W_M - \frac{1}{A_0} \left( A_1 - A_0 \frac{C_1}{C_0} \right)^2 + \right. \\ \left. + \mu' \left( \frac{A_1}{A_0} - \frac{C_1}{C_0} \right) + \frac{k_x^2 \gamma^2}{m^2} \Lambda \right] = 0. \quad (8.49)$$

Это — уравнение осциллятора. Оно не имеет ограниченных в пространстве решений, если

$$W_M - (A_1 - A_0 C_1 / C_0)^2 / A_0 + \mu' (A_1 / A_0 - C_1 / C_0) > 0. \quad (8.50)$$

Это и есть искомый критерий устойчивости плазмы относительно возмущений типа  $g$ -моды для общего вида тороидальных ловушек.

Этот критерий может быть записан также в следующем инвариантном виде:

$$\Omega - V'^3 \langle \beta_s \rangle - \mu' \Phi'^2 \langle \delta_s \rangle / \langle \epsilon_s \rangle - V'^3 (\langle \delta_s \rangle / \langle \epsilon_s \rangle) \times \\ \times (\langle \alpha_s \rangle \langle \delta_s \rangle / \langle \epsilon_s \rangle - 2 \langle \gamma_s \rangle) > 0, \quad (8.51)$$

где аналогично гл. 5 здесь введены обозначения  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$ ,  $\gamma_s$ , определенные соотношениями (5.52), (5.54), а  $\delta_s$  и  $\epsilon_s$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \delta_s &= (2\pi/\Phi')^2 \alpha_0^{(1)} \mathbf{B}_0^2; \\ \epsilon_s &= (2\pi/\Phi')^2 \mathbf{B}_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.52)$$

### § 8.5. Критерий устойчивости для осесимметричного токамака круглого сечения

Рассмотрим следствия, вытекающие из общего критерия (8.50) для случая осесимметричного токамака круглого сечения, обсуждавшегося в гл. 6.

Учитываем, что в этом случае продольное магнитное поле велико, так что

$$g_{33} \gg (\mu^2 g_{22}, \mu g_{23}); \quad (8.53)$$

$$\mathbf{B}_0^2 \approx (\Phi'/2\pi)^2 g_{33}/g, \quad (8.54)$$

а условие прямых силовых линий при этом сводится к условию

$$g_{33}/\sqrt{g} = (g_{33}/\sqrt{g})^{(0)}. \quad (8.55)$$

При этом из (8.48) следует  $C_1 = 0$ , а критерий (8.50) при подстановке в него  $W_M$  из (8.46) сводится к неравенству

$$W_M^{(0)} - A_2 > 0, \quad (8.56)$$

означающему, что средняя магнитная яма  $W_M^{(0)}$  должна превосходить квадратичный баллонный эффект.

В случае осесимметричного токамака круглого сечения функция  $W^{(0)}$ , согласно гл. 6, имеет вид

$$W^{(0)} = \frac{2p'_0}{RB_s^2} \left[ \mu^2 - \frac{1}{2k} \left( \xi_0'' + \frac{3\xi_0'}{a} + k \right) \right], \quad (8.57)$$

где равновесное смещение  $\xi_0$ , согласно той же главе, удовлетворяет уравнению

$$\xi_0'' + \xi_0' (3/a - 2q'/q) = k (1 - 2ap'_0/B_s^2). \quad (8.58)$$

Здесь, как и в гл. 6,  $q \equiv 1/\mu$ ;  $R \equiv 1/k$  — радиус кривизны магнитной оси;  $B_s$ ,  $B_\theta$  — продольное и поперечное магнитное поле. С учетом (8.58) уравнение (8.57) дает

$$W^{(0)} = \frac{2p'_0 \mu^2}{RB_s^2} \left[ 1 - q^2 \left( 1 + \frac{q'}{q} \xi_0' - \frac{ap'_0}{B_\theta^2} \right) \right]. \quad (8.59)$$

Поскольку в токамаке  $B_s \gg B_\theta$ , критерий устойчивости  $g$ -моды имеет вид (8.56). Функция  $\alpha_0^{(1)}$ , входящая в  $A_2$ , согласно гл. 6, связана с функцией  $v$  соотношением

$$\alpha_0^{(1)} = (1/\Phi') \partial v / \partial \theta. \quad (8.60)$$

В общем случае функция  $v$  удовлетворяет уравнению (5.5), а для случая токамака, согласно гл. 6, определяется соотношением

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = 4\pi \frac{a^2}{R} \frac{p'_0}{B_\theta} \cos \theta. \quad (8.61)$$

Учитывая также, что в случае круглого токамака  $\sqrt{g} \approx aR$ ,  $g_{22} \approx a^2$ , с помощью (5.69), (8.60) и (8.61) находим

$$A_2 = 2ap_0'^2/R B_s^2 B_\theta^2. \quad (8.62)$$

Подставляя (8.59) и (8.62) в (8.56), получаем критерий устойчивости токамака круглого сечения по отношению к возмущениям типа  $g$ -моды:

$$q^2 > 1 - aqq' \xi_0' / ka. \quad (8.63)$$

Согласно (8.58),

$$\frac{\xi'_0}{ka} = \frac{q^2}{a^4} \int_0^a \frac{a^3}{q^2} \left( 1 - \frac{2ap'_0}{B_\theta^2} \right) da, \quad (8.64)$$

так что  $\xi'/ka > 0$ . Следовательно, член с  $q'$  в (8.63) играет стабилизирующую роль, если

$$q'/q > 0. \quad (8.65)$$

Напротив, при  $q'/q < 0$  вклад шира в (8.63) соответствует дестабилизации. При большом коэффициенте запаса,  $q \gg 1$ , условие устойчивости, вытекающее из (8.63) и (8.64), имеет вид

$$-\frac{qq'}{a^3} \int_0^a \frac{a^3}{q^2} \left( 1 - \frac{2ap'_0}{B_\theta^2} \right) da < 1. \quad (8.66)$$

При параболическом распределении давления  $p_0 = p_0 (1 - a^2/a_0^2)$ , приблизительно линейном  $B_\theta \approx B_{\theta_0} a/a_0$  и  $\beta_J \equiv p_0/B_\theta^2 \gg 1$  из (8.63), (8.64) следует

$$q^2 (1 + \beta_J a q'/q) > 1. \quad (8.67)$$

Этот результат справедлив, если  $aq'/q$  не слишком мало, так что  $aq'/q \gg (\beta_J ka)^2$ . Если  $aq'/q \simeq (\beta_J ka)^2$ , то при вычислении функций  $W^{(0)}$  и  $A_2$  необходимо удерживать члены порядка  $\xi'^2$ . Используя результаты гл. 6, находим, что при  $aq'/q \simeq (\beta_J ka)^2$  критерий устойчивости (8.67) заменяется следующим:

$$q^2 [1 + \beta_J a q'/q - (7/4)\beta_J^3 (ka)^2] > 1. \quad (8.68)$$

Согласно гл. 6, в случае однородного тока

$$aq'/q = (\beta_J ka)^2. \quad (8.69)$$

Тогда критерий (8.68) сводится к следующему:

$$q^2 [1 - (3/4)\beta_J^3 (ka)^2] > 1. \quad (8.70)$$

Это означает, что при

$$\beta_J > (4R^2/3a^2)^{1/3} \quad (8.71)$$

плазма с однородным током неустойчива относительно возмущений типа  $g$ -моды, несмотря на то, что при таких  $\beta$  средняя магнитная яма и шир значительны.

### § 8.6. Обсуждение результатов

Полученный выше общий критерий устойчивости  $g$ -моды (8.50), примененный к случаю осесимметричного токамака круглого сечения, показывает, что устойчивость  $g$ -моды существенно зависит от знака  $q'/q$ . При  $q'/q > 0$  и  $aq'/q \gg (\beta_J ka)^2$  условие  $q^2 > 1$  является достаточным условием устойчивости  $g$ -моды. Если  $aq'/q < 0$  и  $|aq'/q| \geq 1/\beta_J$ , то  $g$ -мода неустойчива. Можно думать, что качественно эти результаты остаются в силе и при некруговой форме кожуха.

Если  $\beta_J \gg 1$ , а шир невелик, то критерий устойчивости токамака круглого сечения относительно возмущений  $g$ -моды имеет вид (8.68). В этом случае плазма становится неустойчивой даже при  $q^2 \gg 1$  и  $aq'/q > 0$ , если  $aq'/q < (7/4)(\beta_J ka)^2$ . В случае однородно-распределенного тока и  $\beta_J \gg 1$  неустойчивость  $g$ -моды должна иметь место при условии (8.71).

Результаты при  $\beta_J \gg 1$  и  $aq'/q \ll 1$ , по-видимому, более чувствительны к форме кожуха, чем при  $aq'/q \simeq 1$ . Поэтому для выяснения устойчивости  $g$ -моды при  $\beta_J \gg 1$  и  $aq'/q \ll 1$  в ловушках с некруговым сечением кожуха требуется дополнительное рассмотрение.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

##### Непотенциальная гравитационно-диссипативная неустойчивость плоского слоя плазмы

В приложении 1 к гл. 2 в пренебрежении диссипацией были рассмотрены непотенциальные возмущения плазмы, находящейся в поле тяжести и магнитном поле с широм. В этом приложении было показано, что возмущения нарастают, если не удовлетворяется критерий Сайдема (П2.9). Теперь критерий Сайдема будем считать выполненным и покажем, что вследствие диссипации (трения электронов об ионы) сайдемовские возмущения все же могут нарастать, если сила тяжести направлена против градиента плотности ( $-g\kappa > 0$ ).

Система исходных уравнений, описывающих интересующий нас тип возмущений, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\perp} \psi + \frac{g\kappa}{\omega^2} k_b^2 \psi - i \frac{M_i}{M_e} \frac{\omega_{Bi}^2}{\nu_{ei} \omega} k_{\parallel}^2 \left( \psi - \right. \\ \left. - \frac{\omega}{ck_{\parallel}} A_{\parallel} \right) = 0; \\ \Delta_{\perp} A_{\parallel} - \frac{ik_{\parallel} \omega_{pe}^2}{c\nu_{ei}} \left( \psi - \frac{\omega}{ck_{\parallel}} A_{\parallel} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П8.1})$$

Различаем две характерные области  $x$ : внешнюю по отношению к диссипативному слою и внутреннюю. Считая частоту возмущений достаточно малой, во внешней области пренебрегаем инерцией ионов, и тогда из (П8.1) получается

$$\frac{d^2 A_{\parallel}}{dx^2} - k_b^2 \left( 1 - \frac{g\kappa}{c_A^2 k_{\parallel}^2} \right) A_{\parallel} = 0. \quad (\text{П8.2})$$

Это такого же типа уравнение, как и (П2.7), но записанное не для  $\psi$ , а для  $A_{\parallel} \sim x\psi$ . Решение (П8.2) имеет вид, аналогичный (П2.8):

$$A_{\parallel} = C (k_b x)^{1/2} K_s (k_b x), \quad (\text{П8.3})$$

где  $s = [1/4 + g\kappa (k_b/k'_{\parallel} c_A)^2]^{1/2}$ . При  $k_b x \ll 1$  отсюда находим  $A_{\parallel} \sim x^{(1/2-s)}$ . Поэтому на границе между идеально проводящей и диссипативной областями логарифмическая производная векторного потенциала  $A_{\parallel}$  порядка

$$d \ln A_{\parallel} / dx \simeq (1/2 - s) / \delta, \quad (\text{П8.4})$$

где  $\delta$  — ширина диссипативной области, определенная соотношением

$$\delta = (M_e/M_i)^{1/4} (\gamma \nu_{ei} / \omega_{Bi}^2 k'_{\parallel})^{1/4}. \quad (\text{П8.5})$$

Кроме того, из решения внутренней задачи следует, что логарифмическая производная порядка

$$d \ln A_{\parallel} / dx \simeq (\omega_{pe}/c)^2 (\gamma/\nu_{ei}) \delta. \quad (\text{П8.6})$$

Приравнявая (П8.4) и (П8.6) и учитывая (П8.5), находим

$$\gamma \simeq \gamma_0 (\gamma_0 k_b^4 \nu_{ei} / k'_{\parallel}{}^2 \omega_{Bi}^2)^{1/3}, \quad (\text{П8.7})$$

где  $\gamma_0 = \sqrt{-g\kappa}$  — инкремент желобковой неустойчивости.

## Библиографический обзор к гл. 8

1. **Mikhailovskii A. B.** The stability criterion of the  $g$ -mode in a toroidal plasma. — «Nucl. Fusion», 1975, v. 15, p. 95.  
Этой работе мы следовали при изложении в настоящей главе.
2. **Furth H. P., Killeen J., Rosenbluth M. N.** Finite-resistivity instabilities of a sheet pinch. — «Phys. Fluids», 1963, v. 6, p. 459.  
Это — основополагающая работа по гравитационно-диссипативной неустойчивости (неустойчивости  $g$ -моды).
3. **Михайловский А. Б.** Теория плазменных неустойчивостей. Т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы. М., Атомиздат, 1971. В гл. 9 этой книги можно найти подробную библиографию по неустойчивостям типа  $g$ -моды.
4. **Glasser A. H., Greene J. M., Johnson J. L.** Resistive instabilities in a tokamak. — «Phys. Fluids», 1976, v. 19, p. 567.  
В работе [4] были воспроизведены некоторые результаты работы [1].

## ЧАСТЬ III

### КРУПНОМАСШТАБНЫЕ ГИДРОМАГНИТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

#### Глава 9

#### КРУПНОМАСШТАБНЫЕ ГИДРОМАГНИТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАЗМЫ

##### § 9.1. Введение

Обсуждавшиеся выше возмущения, ответственные за желобковую неустойчивость плазмы в кривом магнитном поле, предполагались мелкомасштабными, в том смысле, что их характерный поперечный масштаб мал по сравнению с характерными размерами неоднородности плазмы и магнитного поля. Согласно § 9.1 книги [II], желобковая неустойчивость может быть связана также с крупномасштабными возмущениями. Это было показано для случая плазмы с резкой границей, находящейся в поле тяжести. Учитывая отмеченную в § 1.1 аналогию между эффектами кривизны и силы тяжести, естественно ожидать возможность развития желобковой неустойчивости также в плазме с резкой границей, находящейся в кривом магнитном поле. Такого рода желобковая неустойчивость исследуется в § 9.2.

Крупномасштабная желобковая неустойчивость — это не единственная разновидность крупномасштабных неустойчивостей плазмы. В § 9.3, 9.4 показано, что существует также класс крупномасштабных неустойчивостей, связанных с протеканием по плазме продольного тока. Такого рода неустойчивости называют *винтовыми* (kink). Весьма важным является то, что в плазме со свободной границей (§ 9.3) винтовая неустойчивость может обладать инкрементом, существенно большим характерного инкремента желобковой неустойчивости.

Если крупномасштабная желобковая неустойчивость может быть проанализирована без конкретизации геомет-



рии плазмы, что и делается в § 9.2, то для исследования винтовой неустойчивости такая конкретизация необходима. Простейшей системой плазма — магнитное поле, допускающей количественный анализ винтовой неустойчивости, является цилиндрический плазменный шнур круглого сечения. Такая система как раз и служит объектом исследования в § 9.3, 9.4. Исходные уравнения, необходимые для этого, получены в приложении 1 к настоящей главе.

Следует отметить, что, как видно из гл. 2, 3, цилиндрический плазменный шнур круглого сечения является также удобной плазменной системой для исследования желобковой неустойчивости. Поэтому, используя гидромагнитные уравнения приложения 1, можно рассматривать соответствие между обоими типами крупномасштабных неустойчивостей — желобковой и винтовой. Такой анализ цилиндра с однородным током и однородной плотностью, окруженного проводящим кожухом, проводится в приложении 2.

При исследовании винтовых неустойчивостей часто используется энергетический метод, излагавшийся в гл. 3. При этом выявляются неустойчивости в условиях, близких к границе устойчивости. В связи с этим представляет интерес выяснить картину неустойчивостей плазмы с параметрами, далекими от границы устойчивости. Такое выяснение, основывающееся на использовании уравнения малых колебаний, проводится в приложении 3, где, в частности, показано, что при двухступенчатом распределении плотности по радиусу существует винтовая неустойчивость с инкрементом, существенно бóльшим, чем получающийся при энергетическом подходе.

## § 9.2. Желобковая неустойчивость плазмы с резкой границей в кривом магнитном поле

В § 9.1 книги [II] было получено следующее уравнение, описывающее желобковые возмущения плазмы в поле тяжести при произвольном соотношении между поперечной длиной волны и поперечным размером неоднородности плазмы [уравнение (9.4) книги [II]]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( n_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - k_y^2 \psi n_0 + \frac{k_y^2 g}{\omega^2} \psi \frac{\partial n_0}{\partial x} = 0. \quad (9.1)$$

Учитывая правила соответствия (1.10), (1.11), заключаем, что в случае плазмы низкого давления, находящейся в кривом магнитном поле, вместо (9.1) должно иметь место уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( n_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - k_y^2 \psi n_0 - \frac{2k_y^2 \psi}{\omega^2} \frac{\mathbf{n}}{R} \nabla p_0 = 0, \quad (9.2)$$

где, как и в § 1.1,  $\mathbf{n}$  — главная нормаль к силовой линии;  $R$  — радиус кривизны;  $p_0$  — равновесное давление плазмы (плазма предполагается максвелловской). Мы используем локальную систему координат с осью  $x$ , направленной по главной нормали к силовой линии, осью  $y$  — по бинормали и осью  $z$  — по силовой линии.

Предполагая, что плотность и давление плазмы скачком падают до нуля на расстоянии  $a \ll 1/k_y$ , как и в § 9.1 книги [II], решаем уравнение (9.2) методом поверхностных волн. При этом аналогично (9.5) книги [II] получаем

$$\omega^2 = -2 |k_y| \frac{p_0}{n_0 R} \operatorname{sgn}(\mathbf{n}, \nabla p_0). \quad (9.3)$$

Неустойчивость имеет место ( $\omega^2 < 0$ ), если  $\mathbf{n} \nabla p_0 > 0$ , что соответствует плазме с границей, выпуклой в сторону вакуума.

При  $k_z \neq 0$  вместо (9.2) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ n_0 \left( 1 - \frac{k_z^2 c_A^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] - k_y^2 \psi n_0 \left( 1 - \frac{k_z^2 c_A^2}{\omega^2} \right) - \\ - \frac{2k_y^2 \psi}{\omega^2} \frac{\mathbf{n}}{R} \nabla p_0 = 0, \end{aligned} \quad (9.4)$$

что получается с учетом (2.51) книги [II] и (9.2). Из (9.4) вместо (9.3) следует

$$\omega^2 = k_z^2 c_A^2 - 2 |k_y| \frac{p_0}{n_0 R} \operatorname{sgn}(\mathbf{n}, \nabla p_0). \quad (9.5)$$

Видно, что желобковая неустойчивость плазмы с резкой границей стабилизируется, если

$$k_z^2 c_A^2 > 2 |k_y| \frac{p_0}{n_0 R} \operatorname{sgn}(\mathbf{n}, \nabla p_0). \quad (9.6)$$

На пределе применимости приближения резкой границы, т. е. при  $k_y a \simeq 1$ , это условие качественно согласуется с неравенством, обратным (1.41).

### § 9.3. Винтовая неустойчивость плазменного шнура со свободной границей при $m = 1$

Рассмотрим уравнение (П9.7) при  $m = 1$ , полагая  $(\alpha r)^2 \ll 1$ ,  $(B_\Phi/B)^2 \ll 1$ ;  $\kappa \ll 1$ . В пренебрежении членами указанного здесь порядка малости это уравнение принимает вид

$$\frac{1}{r} [r^3 (\rho \omega^2 - y^2/4\pi) \xi_r']' + r \rho' \omega^2 \xi_r = 0. \quad (9.7)$$

**1. Шнур с однородной плотностью.** Пусть  $\rho = \text{const} \equiv \rho_0$  при  $0 < r < a$  и  $\rho = 0$  при  $r > a$ . При этом уравнение (9.7) сводится к следующему:

$$[r^3 (\rho \omega^2 - y^2/4\pi) \xi_r']' = 0. \quad (9.8)$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим отмеченному в приложении 1 условию конечности  $\xi_r(0)$ , является

$$\xi_r = \text{const} \equiv \xi_r(a). \quad (9.9)$$

Полагаем, что при  $r = a$  плазма граничит с вакуумом, так что при  $r = a$  имеем условие сшивки (П9.12), которое при принятых выше предположениях и с учетом (9.9) записывается в виде

$$\omega^2 = \frac{B_\Phi^2(a)}{4\pi\rho_0 a^2} \left[ 2(nq_0 - 1) - (nq_0 - 1)^2 a \left( \frac{Q_r'}{Q_r} \right)_e \right], \quad (9.10)$$

где  $q_0 \equiv LB_\Phi(a)/2\pi a B_z(a)$ ;  $n = -2\pi k_z L$ ;  $L$  — длина плазменного шнура.

Из уравнения (П9.10) находим, что при  $m = 1$  решение  $Q_r(r)$ , удовлетворяющее граничному условию  $Q_r(b) = 0$ , имеет вид

$$Q_r(r) = Q_r(a) \frac{(a/r)^2 - (a/b)^2}{1 - (a/b)^2}. \quad (9.11)$$

Отсюда находим

$$\left( \frac{Q'_r}{Q_r} \right)_z = \frac{2}{a(1-a^2/b^2)}. \quad (9.12)$$

Подставляя (9.12) в (9.10), приходим к дисперсионному уравнению

$$\omega^2 = \frac{B_\Phi^2(a)}{4\pi\rho_0 a^2} \left[ 2(nq_0 - 1) + \frac{2}{1-(a/b)^2} (nq_0 - 1)^2 \right]. \quad (9.13)$$

Видно, что  $\omega^2 < 0$ , т. е. имеет место неустойчивость, если

$$nq_0 - 1 + \frac{(nq_0 - 1)^2}{1-(a/b)^2} < 0. \quad (9.14)$$

Эта неустойчивость называется винтовой. Из (9.13) следует, что, как функция параметра  $1 - nq_0$  инкремент достигает максимума, определяемого формулой В. Д. Шафранова:

$$\gamma_{\text{макс}}^2 = \frac{B_\Phi^2(a)}{8\pi\rho_0 a^2} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (9.15)$$

При этом  $1 - nq_0 = (1 - nq_0)_{\text{опт}}$ , где

$$(1 - nq_0)_{\text{опт}} = \frac{1}{2} (1 - a^2/b^2). \quad (9.16)$$

Подчеркнем, что полученные выше результаты относятся к случаю плазмы с  $\rho = \text{const}$ . Плазма с  $\rho \neq \text{const}$  обсуждается в приложении 3.

Заметим также, что, согласно (9.16), плазма должна быть устойчива, если  $nq_0 = 1$  и  $y = \text{const}$ , что не согласуется с представлением о желобковой неустойчивости. Уточнение этого результата производится в п.2.

**2. Граница устойчивости шнура с однородным током при малых  $1 - nq$ .** Как отмечалось выше, результаты (9.13), (9.14) должны быть уточнены при достаточно малых  $1 - nq_0$ , поскольку они не учитывают желобковую неустойчивость. С этой целью рассмотрим шнур с однородным током, так что  $y = \text{const}$ . Согласно (П9.7), граница устойчивости ( $\omega = 0$ ) удовлетворяет уравнению

$$(r^3 y^2 \xi_r)' + 4r^3 b_\Phi^2 \alpha^2 \xi_r = 0. \quad (9.17)$$

Отсюда следует

$$(\xi'_r/\xi_r)_i = -\alpha^2 b_\phi^2 a / y_0^3. \quad (9.18)$$

Из (П9.12), (9.12) и (9.18) находим

$$\frac{(1-nq)^2}{1-(a/b)^2} - (1-nq) - \frac{\alpha^2 a^2}{2} = 0. \quad (9.19)$$

Следовательно, для устойчивости необходимо, чтобы

$$q > 1 + \alpha^2 a^2 / 2 \quad (9.20)$$

(полагается  $n = 1$ ). В противном случае в окрестности  $q = 1$  должна иметь место крупномасштабная желобковая неустойчивость.

#### § 9.4. Внутренняя винтовая неустойчивость моды $m = 1$

Пусть при  $r = a$  плазма граничит с проводящим кожухом и пусть плотность тока в плазме является спадающей функцией радиуса, так что параметр  $q$  растет с радиусом. Полагаем, что  $q = 1$  при некотором  $a_* < a$ . Рассмотрим возмущения такой плазмы с  $m = 1$ , полагая их частоту достаточно малой и пренебрегая тем самым эффектами, связанными с градиентом плотности. При этом из (П9.7) получается

$$[(4\pi\gamma^2 + y^2)r^3\xi'_r]' - g_1\xi_r = 0, \quad (9.21)$$

где

$$g_1 = k_z^2 r (8\pi\rho' + 3k_z^2 r^2 B_z^2 + 2k_z r B_z B_\phi - B_\phi^2). \quad (9.22)$$

Заметим, что уравнение (9.22) при  $\gamma \rightarrow 0$ ,  $B_z = \text{const}$ ,  $B_\phi \sim \sim r$  и  $y \ll b_\phi$  переходит в (9.17), в чем можно убедиться, воспользовавшись условием равновесия (3.59).

Поскольку функция  $g_1\xi_r$  мала, как  $k_z^2$ , по сравнению с остальными членами уравнения (9.21), то это уравнение можно решить приближенно. При этом следует различать область малых  $y$ , где  $y^2 \simeq 4\pi\gamma^2$  (сингулярный слой) и области больших  $y$ , где  $y^2 \gg 4\pi\gamma^2$ , соответствующие  $r <$

$< a_*$  и  $r > a_*$  (области вне сингулярного слоя). Тогда из (9.21) находим, что при  $r < a_*$

$$\xi_r \approx \xi_0; \quad \frac{d\xi_r}{dr} = \frac{\xi_0}{r^3 y^2} \int_0^r g_1 dr; \quad (9.23)$$

при  $r > a_*$

$$\xi_r = -c_2 \int_r^\infty \frac{dr}{r^3 y^2}; \quad d\xi_r/dr = c_2/r^3 y^2; \quad (9.24)$$

( $c_2$  — некоторая константа). Внутри сингулярного слоя полагаем

$$y = y'_* x, \quad (9.25)$$

где  $x \equiv r - a_*$ ;  $y'_* = y'$  при  $r = a_*$ . При этом из (9.21) следует

$$\xi_r = \frac{1}{2} \xi_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \arctg \left[ \frac{x |y'_*|}{\gamma (4\pi\rho_*)^{1/2}} \right] \right\}, \quad (9.26)$$

где  $\rho_* = \rho(a_*)$ . Здесь константы выбраны так, что при  $x \rightarrow -\infty$  (9.26) переходит в (9.23), а при  $x \rightarrow \infty$ , — стремится к нулю.

Из (9.26) находим, что при  $|x| \rightarrow \infty$

$$\frac{d\xi_r}{dr} = \frac{2}{\pi^{1/2}} \frac{\rho_*^{1/2} \gamma}{x^2 |y'_*|} \xi_0. \quad (9.27)$$

Сшивая этот результат со второй формулой (9.23), приходим к дисперсионному уравнению

$$\gamma = - \frac{\sqrt{\pi}}{2\rho_*^{1/2} |y'_*| a_*^3} \int_0^{a_*} g_1 dr. \quad (9.28)$$

По порядку

$$\gamma \simeq (k_z a)^2 B_\phi / a \sqrt{4\pi\rho_*}. \quad (9.29)$$

Из сравнения (9.29) с (9.15) видно, что инкремент рассмотренной здесь внутренней винтовой моды мал по сравнению с инкрементом винтовой неустойчивости шнура со свободной границей как  $(k_z a)^2$ .

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

**Уравнение малых колебаний  
цилиндрического шнура**

Исходим из уравнения (3.21) для смещения  $\xi$  и выражения для скалярного давления вида (3.36), (3.39). Полагая, что возмущения зависят от времени по закону  $\exp(-i\omega t)$ , приводим (3.21) к виду

$$-\rho_0 \omega^2 \xi = -\nabla \left( p' + \frac{\mathbf{B}_0 \mathbf{Q}}{4\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \{ (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{Q} + (\mathbf{Q} \nabla) \mathbf{B}_0 \}. \quad (\text{П9.1})$$

Считаем равновесные параметры плазмы и магнитного поля зависящими только от координаты  $r$  цилиндрической системы координат  $r, \varphi, z$  и представляем зависимость возмущений от  $\varphi$  и  $z$  в виде  $\exp(im\varphi + ik_z z)$ . Индексы нуль у равновесных параметров для простоты опускаем.

Преобразуем слагаемое в фигурных скобках (П9.1) с учетом правил дифференцирования ортов  $\partial \mathbf{e}_r / \partial \varphi = \mathbf{e}_\varphi$ ,  $\partial \mathbf{e}_\varphi / \partial \varphi = -\mathbf{e}_r$ . Тогда (П9.1) принимает вид

$$-\rho \omega^2 \xi = -\nabla \left( \tilde{p} + \frac{\mathbf{BQ}}{4\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \{ i k_{\parallel} \mathbf{BQ} - \frac{2B_\varphi Q_\varphi}{r} \mathbf{e}_r + Q_r \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) \mathbf{e}_\varphi - \frac{\partial B_z}{\partial r} \mathbf{e}_z \right] \}. \quad (\text{П9.2})$$

Здесь  $k_{\parallel}$  определено первым соотношением (2.4), а вместо  $p'$  используется обозначение  $\tilde{p}$ .

Из соотношения  $\mathbf{Q} = \text{rot} [\xi, \mathbf{B}]$  (см. § 3.2) вытекают связи

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= i k_{\parallel} B \xi_r; & Q_\varphi &= k_z \xi - \partial (r \xi_r B_\varphi) / \partial r; \\ Q_z &= -(m/r) \xi - (1/r) \partial (r \xi_r B_z) / \partial r, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П9.3})$$

где  $\xi = i (\xi_\varphi B_z - \xi_z B_\varphi)$ .

Умножая обе части равенства (П9.2) на  $(m/r) \mathbf{e}_\varphi + k_z \mathbf{e}_z$ , а затем на  $k_z \mathbf{e}_\varphi - (m/r) \mathbf{e}_z$ , с учетом (П9.3) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{p} + \frac{\mathbf{QB}}{4\pi} = & -\frac{r}{m^2(1+\alpha^2 r^2)} (\rho k_{\parallel}^2 c_A^2 F' - \\ & - \frac{mk_{\parallel}}{2\pi r} B B_\varphi \xi_r - \omega^2 \rho r \eta); \end{aligned} \quad (\text{П9.4})$$

$$\begin{aligned} (\omega^2 - k_{\parallel}^2 c_A^2) \zeta = & \frac{r/m^2}{1+\alpha^2 r^2} [k_{\parallel}^2 c_A^2 (B k_b F' + \\ & + 2k_z B_\varphi r F) + \omega^2 B r k_b \eta], \end{aligned} \quad (\text{П9.5})$$

где  $F = r \xi_r$ ; штрих — производная по  $r$ ;  $\alpha = k_z/m$ ;  $c_A^2 = B^2/4\pi\rho$ ;  $\eta = i(m \xi_{\rho/r} + k_z \xi_z)$ , а  $k_b$  определено вторым уравнением системы (2.4). Кроме того, из (3.39) и (П9.3) следует

$$\begin{aligned} \tilde{p} + \frac{\mathbf{QB}}{4\pi} = & -\frac{1}{4\pi} \left[ (B^2 + 4\pi\gamma_0 \rho) \frac{F'}{r} - \frac{2B_\varphi^2}{r^2} F + \right. \\ & \left. + 4\pi\gamma_0 \rho \eta - B_\varphi k_b \zeta \right]. \end{aligned} \quad (\text{П9.6})$$

С помощью (П9.4)–(П9.6) выражаем  $\eta$ ,  $\zeta$  и  $\tilde{p} + \mathbf{QB}/4\pi$  через  $\xi_r$ , результат подставляем в  $r$ -ю проекцию уравнения (П9.1). Тогда приходим к уравнению, впервые полученному Л. С. Соловьевым:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[ \frac{r^3 s \xi_r'}{(1-\kappa)\beta} \right]' - r \xi_r \left\{ \frac{s}{r(1-\kappa)\beta} [m^2 - 1 + m^2(\alpha^2 r^2 - \kappa\beta)] - \right. \\ \left. - \left[ \frac{s}{(1-\kappa)\beta} \right]' - \frac{4\alpha^2 r y^2 b_\varphi^2}{\beta s} + \left( \frac{q + \kappa b_\varphi^2}{1-\kappa} \right)' + \right. \\ \left. + \frac{\kappa\beta}{(1-\kappa)rs} (q + b_\varphi^2)^2 \right\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{П9.7})$$

которое можно представить также в виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{rs}{1-\kappa} \frac{F'}{\beta} \right)' - \left\{ \frac{m^2 s}{r} - \frac{4\alpha^2 r y^2 b_\varphi^2}{\beta s} + \right. \\ \left. + \left( \frac{q + \kappa b_\varphi^2}{1-\kappa} \right)' + \frac{\kappa}{1-\kappa} \frac{\beta}{rs} (q + b_\varphi^2)^2 \right\} F = 0. \end{aligned} \quad (\text{П9.7}')$$



Здесь

$$\left. \begin{aligned} s &= 4\pi\omega^2/m^2 - y^2; \quad y = (b_\varphi + \alpha B_z) \equiv mBk_{\parallel}; \\ b_\varphi &= B_\varphi/r; \quad \beta = 1 + \alpha^2 r^2; \quad q = b_\varphi^2 - 2yb_\varphi/\beta; \\ \kappa &= \frac{\omega^2 r^2}{c_A^2 m^2 \beta} \left( 1 + \frac{c_s^2}{c_A^2} - \frac{c_s^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} \right)^{-1}; \quad c_s^2 = \gamma_0 p/\rho. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П9.8})$$

Одним из двух граничных условий уравнения (П9.7) является условие конечности  $\xi_r$  при  $r = 0$ . Второе граничное условие зависит от того, касается ли плазма кожуха, а также от свойств кожуха.

Если плазма касается кожуха, а кожух — идеально проводящий, то  $\xi_r(a) = 0$ , где  $a$  — радиальная координата кожуха (это следует из требования, что на кожухе  $Q_r = 0$ , а также из связи  $Q_r = ik_{\parallel} B \xi_r \equiv imy \xi_r$ ).

В случае, если между плазмой и кожухом имеется вакуумная область  $a < r < b$ , то решение уравнения (П9.7) при  $r < a$  должно быть сшито с вакуумным решением. Условие сшивки при  $r = a$  в этом случае получается интегрированием (П9.7) вдоль переходного слоя между плазмой и вакуумом с учетом постоянства  $\xi_r$  в этом слое. Ниже мы будем интересоваться только переходными слоями в отсутствие поверхностных токов. При этом  $B_z$  и  $B_\varphi$  вдоль слоя непрерывны, так что условие сшивки сводится к следующему:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{\beta} \left\{ \frac{s_i}{1-\kappa_i} \left[ \left( \frac{\xi'_r}{\xi_r} \right)_i + \frac{1}{a} \right] + y_0^2 \left[ \left( \frac{\xi'_r}{\xi_r} \right)_e + \frac{1}{a} \right] \right\} - \\ - \frac{\kappa_i a}{1-\kappa_i} b_{\varphi_0}^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{П9.9})$$

Здесь индексами  $i$  и  $e$  обозначены величины во внутренней (internal) и внешней (external) областях, примыкающих к переходному слою, а индексами нуль — величины, непрерывные в слое.

Для вычисления входящей в (П9.9) величины  $(\xi'_r/\xi_r)_e$  необходимо решить уравнение (П9.7) в вакуумной области с граничным условием  $\xi_r(b) = 0$  (предполагается, что при  $r = b$  находится проводящий кожух). С учетом того, что в вакууме  $\rho = 0$ ;  $s = -y^2$ ;  $\kappa = 0$ ;  $B_z(r) = \text{const}$ ;  $B_\varphi(r) = (a/r) B_\varphi(a)$ , уравнение (П9.7) в вакуумной области приводится к виду

$$\left[ \frac{r}{\beta} (rQ_r)' \right]' - m^2 Q_r = 0, \quad (\text{П9.10})$$

что, очевидно, представляет собой также следствие вакуумных уравнений Максвелла  $\text{rot } \mathbf{Q} = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{Q} = 0$ .

При получении (П9.10) была учтена отмеченная выше связь  $Q_r = imy\xi_r$ . При учете этой связи и того, что в вакуумной области  $y' = -2b_\Phi/r$ , условие сшивки (П9.9) можно записать также в виде

$$\frac{a^2}{b} \left\{ \frac{s_i}{1-\kappa_i} \left[ \left( \frac{\xi'_r}{\xi_r} \right)_i + \frac{1}{a} \right] + y_0^2 \left[ \left( \frac{Q'_r}{Q_r} \right)_e + \frac{2b_{\Phi 0}}{ay_0} + \frac{1}{a} \right] \right\} + \frac{\kappa_i}{1-\kappa_i} b_{\Phi 0}^2 = 0. \quad (\text{П9.11})$$

В важном частном случае  $\kappa \rightarrow 0$  это условие сводится к следующему:

$$s_i \left[ \left( \frac{\xi'_r}{\xi_r} \right)_i + \frac{1}{a} \right] + y_0^2 \left[ \left( \frac{Q'_r}{Q_r} \right)_e + \frac{2b_{\Phi 0}}{ay_0} + \frac{1}{a} \right] = 0. \quad (\text{П9.12})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Собственные колебания цилиндра с однородным током и однородной плотностью, окруженного проводящим кожухом

Используя (П9.7), рассмотрим возмущения плазменного цилиндра с однородным продольным током,  $B_z = \text{const}$ , и однородной плотностью. Полагаем возмущения вытянутыми вдоль цилиндра,  $\alpha r \ll 1$ , а их частоту малой по сравнению с частотой быстрого магнитного звука,  $\omega \ll c_A/r$ . При учете сказанного уравнение (П9.7) принимает вид

$$F'' + \frac{1}{r} F' - \left( \frac{m^2}{r^2} - \lambda^2 \right) F = 0, \quad (\text{П9.13})$$

где

$$\lambda^2 = \frac{b_\Phi^2 k_z^2}{\pi r (\gamma^2 + k_\parallel^2 c_A^2)} \frac{\gamma^2 + k_\parallel^2 c_s^2}{\gamma^2 (1 + c_s^2/c_A^2) + k_\parallel^2 c_s^2}; \quad (\text{П9.14})$$

$\gamma^2 \equiv -\omega^2$ . Рассмотрим модельную задачу, полагая  $c_s^2 k_\parallel^2 = \text{const}$ . При этом  $\lambda^2$  оказывается числом, а уравнение (П9.13) сводится к уравнению Бесселя. Решая это уравнение с граничным условием  $F(a) = 0$  (это предполагает наличие при  $r = a$  идеально проводящего твердого кожуха), находим, что величина  $\lambda^2$  имеет собственные значения:

$$\lambda^2 = z_m^2/a^2, \quad (\text{П9.15})$$

где  $z_m$  — корни уравнения

$$J_m(z_m) = 0; \quad (\text{П9.16})$$

$J_m$  — функция Бесселя.

Из (П9.14), (П9.15) получается биквадратное уравнение для  $\gamma$ :

$$\left[ \gamma^2 \left( 1 + \frac{c_s^2}{c_A^2} \right) + k_{\parallel}^2 c_s^2 \right] (\gamma^2 + k_{\parallel}^2 c_A^2) - 4 \frac{a^2 k_z^2}{z_m^2} \gamma_k^2 (\gamma^2 + k_{\parallel}^2 c_s^2) = 0, \quad (\text{П9.17})$$

где  $\gamma_k^2 \equiv b_{\Phi}^2/4\pi\rho \equiv B_{\Phi}^2(a)/4\pi\rho a^2$  — квадрат характерного инкремента винтовой (kink) неустойчивости плазмы со свободной границей (см. § 9.3).

Уравнение (П9.17) имеет решение с  $\gamma = 0$  при

$$k_{\parallel}^2 \left( k_{\parallel}^2 - \frac{4a^2 k_z^2}{z_m^2 c_A^2} \gamma_k^2 \right) = 0. \quad (\text{П9.18})$$

Это — уравнение для границы устойчивости. Оно определяет четыре значения  $k_{\parallel}$ , два из которых нулевые

$$k_{\parallel 1, 2} = 0, \quad (\text{П9.19})$$

а два других равны

$$k_{\parallel 3, 4} = \pm \frac{2a |k_z|}{z_m c_A} |\gamma_k|. \quad (\text{П9.20})$$

Корни (П9.17), обращающиеся в нуль при  $k_{\parallel} = 0$ , при малых ненулевых  $k_{\parallel}$  имеют вид

$$\gamma^2 = -k_{\parallel}^2 c_s^2, \quad (\text{П9.21})$$

что соответствует ионно-звуковым колебаниям с вещественной частотой

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 c_s^2. \quad (\text{П9.22})$$

Это означает, что корни  $k_{\parallel 1, 2}$  не описывают границу устойчивости. Что касается корней (П9.17), обращающихся в нуль при  $k_{\parallel} = k_{\parallel 3, 4}$ , то вблизи таких  $k_{\parallel}$

$$\gamma^2 = \frac{1}{c_A^2} (k_{\parallel 3, 4}^2 - k_{\parallel}^2). \quad (\text{П9.23})$$

Отсюда следует, что имеет место неустойчивость,  $\gamma^2 > 0$ , если

$$-2 \frac{k_z^2 a^2}{z_m |q|} < k_{\parallel} a < 2 \frac{k_z^2 a^2}{z_m |q|}, \quad (\text{П9.24})$$

где, как и в § 9.3,  $q = B_{\varphi}(a)/k_z a B_0$ .

С помощью (П9.17) находим, что экстремумы инкремента достигаются при

$$k_{\parallel} = 0, \quad (\text{П9.25})$$

а также при  $k_{\parallel}$ , удовлетворяющем уравнению

$$k_{\parallel}^4 - 2k_{\parallel}^2 k_0^2 \left(1 - 2 \frac{c_s^2}{c_A^2}\right) + k_0^2 \left(1 + \frac{c_s^2}{c_A^2} - \frac{c_s^4}{c_A^4}\right) = 0, \quad (\text{П9.26})$$

где  $k_0^2 \equiv k_{\parallel}^2|_{z,4}$ . Это уравнение имеет вещественные решения, если только

$$c_s^2/c_A^2 > (1/2)(1 + \sqrt{5}), \quad (\text{П9.27})$$

что соответствует плазме большего давления,  $\beta \gtrsim 1$ . При невыполнении условия (П9.27) инкремент имеет только один экстремум (максимум) при  $k_{\parallel} = 0$ . В последнем случае

$$\gamma_{\text{макс}}^2 = \frac{4a^2 k_z^2}{z_m^2 (1 + c_s^2/c_A^2)} \frac{B_{\varphi}^2(a)}{4\pi a^2}, \quad (\text{П9.28})$$

что находится в соответствии с представлениями о желобковой неустойчивости. Чтобы убедиться в этом, следует учесть условие равновесия (3.59) и принятые выше предположения  $B_z = \text{const}$ ,  $\beta_{\varphi} \sim r$ , а также приближенное соотношение

$$k_z^2 = \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left[\frac{B_{\varphi}(a)}{B_z}\right]^2, \quad (\text{П9.29})$$

вытекающее из условия  $k_{\parallel} \ll k_z$ .

Проведенное выше рассмотрение показывает, что в случае пространственно-однородного тока, протекающего по плазме с закрепленной границей, и  $B_z = \text{const}$  винтовая неустойчивость, связанная с раскачкой возмущений с  $k_{\parallel} \neq 0$ , превалирует над желобковой, если давление плазмы превосходит давление магнитного поля,  $\beta > 1$ . При  $\beta < 1$  определяющей является желобковая неустойчивость.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

**Мода  $m=1$  в шнуре с неоднородной плотностью и однородным током**

Решение типа поверхностной волны, описываемое уравнением (9.9) имеет место и при  $\rho = \text{const}$ , если  $\omega$  достаточно мало, т. е. вблизи границы устойчивости. При конечных же  $\omega$ , т. е. вдали от границы устойчивости, и  $\rho \neq \text{const}$ , как следует из (9.7), такое решение отсутствует. Убедимся в этом.

**1. Случай малых  $\omega$  (область параметров вблизи границы устойчивости).** Считая  $\omega$  малым параметром, так что

$$\omega^2 \ll y^2/4\pi\rho, \quad (\text{П9.30})$$

с помощью (9.7) находим

$$\left( \frac{\xi_r'}{\xi_r} \right)_i = \frac{4\pi\omega^2}{y_0^2 a} (\rho_i - \langle \rho \rangle), \quad (\text{П9.31})$$

где  $\langle \rho \rangle$  — средняя по сечению плотность;

$$\langle \rho \rangle = 2 \int_0^a \rho r dr / a^2. \quad (\text{П9.32})$$

Подставляя (П9.31) и (9.12) в (П9.12), приходим к результату В. Д. Шафранова:

$$\omega^2 = \frac{B_\Phi^2(a)}{4\pi a^2 \langle \rho \rangle} \left[ 2(nq_0 - 1) + \frac{2(nq_0 - 1)^2}{1 - a^2/b^2} \right]. \quad (\text{П9.33})$$

Этот результат не противоречит условию (П9.30), если

$$2(nq_0 - 1) + \frac{2}{1 - (a/b)^2} (nq - 1)^2 \ll (nq_0 - 1)^2, \quad (\text{П9.34})$$

что означает близость параметров плазмы к границе устойчивости.

**2. Пример шнура с «двухступенчатой» плотностью.** Чтобы выяснить вопрос об инкременте неустойчивости вдали от границы устойчивости, т. е. без использования предположения (П9.30), рассмотрим пример шнура с плотностью, имеющей вид двух ступенек, так что

$$\rho = \begin{cases} \rho_1, & 0 < r < a_* \\ \rho_2, & a_* < r < a, \end{cases} \quad (\text{П9.35})$$

причем  $\rho_1 > \rho_2$ . Полагаем также, что при  $a_* < r < a$ ,  $B_z = \text{const}$ ,  $B_\varphi(r) = B_\varphi(a)r/a$ , так что  $y = \text{const}$ .

В областях  $0 < r < a_*$  и  $a_* < r < a$  уравнение (9.7) сводится к более простому уравнению (9.8). Из него следует

$$\xi_r = \begin{cases} C, & 0 < r < a_*; \\ C_1 + \frac{C_2}{r^2 (\rho_2 \omega^2 - y^2/4\pi)}, & a_* < r < a, \end{cases} \quad (\text{П9.36})$$

где  $C, C_1, C_2$  — некоторые константы. Используя условия сшивки при  $r = a_*$

$$\left. \begin{aligned} \xi_r(a_* - 0) &= \xi_r(a_* + 0); \\ (\rho_1 \omega^2 - y^2/4\pi) \xi_r'(a_* - 0) &= (\rho_2 \omega^2 - y^2/4\pi) \xi_r'(a_* + 0), \end{aligned} \right\} \quad (\text{П9.37})$$

находим связь между константами

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{(\rho_1 - \rho_2) \omega^2}{\rho_2 \omega^2 - y^2/4\pi} \right] C; \\ C_2 &= -\frac{a_*^2}{2} \frac{(\rho_1 - \rho_2) \omega^2}{\rho_2 \omega^2 - y^2/4\pi} C. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П9.38})$$

Из (П9.36), (П9.38) следует

$$\left( \frac{\xi_r'}{\xi_r} \right)_i = \frac{1}{a} \frac{(a_*/a)^2 (\rho_1 - \rho_2) \omega^2}{\omega^2 \left[ \rho_2 + \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2) \left( 1 - \frac{a_*^2}{a^2} \right) \right] - \frac{y^2}{4\pi}}. \quad (\text{П9.39})$$

Подставляя (9.9) и (П9.39) в (П9.12), получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} \omega^4 \left[ 1 + \frac{\Delta}{2} \left( 1 + \frac{a_*^2}{a^2} \right) \right] - \omega^2 \left\{ \Omega^2 \left( 1 + \Delta \frac{a_*^2}{a^2} \right) + \right. \\ \left. + \Omega_0^2 \left[ 1 + \frac{\Delta}{2} \left( 1 - \frac{a_*^2}{a^2} \right) \right] \right\} + \Omega_0^2 \Omega^2 = 0, \end{aligned} \quad (\text{П9.40})$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \rho_1/\rho_2 - 1; \quad \Omega^2 = y_0^2/4\pi\rho_2; \\ \Omega_0^2 &= \frac{y_0^2}{4\pi\rho_2} \left( \frac{2}{1 - a^2/b^2} - \frac{2b_\varphi}{y_0} \right). \end{aligned}$$

Из (П9.40) видно, что при  $\Omega_0^2 > 0$  все корни  $\omega$  вещественны, так что это неравенство является достаточным условием устойчивости. Если  $\Omega_0^2 < 0$ , то два из четырех корней  $\omega$  комплексны, причем для одного из них  $\text{Im } \omega > 0$ , что соответствует неустойчивости. Это означает, что отмеченное выше обратное условие  $\Omega_0^2 > 0$  является не только достаточным, но и необходимым условием неустойчивости. При малом отрицательном  $\Omega_0^2$  решение (П9.40), соответствующее неустойчивости, имеет вид

$$\omega^2 = \frac{\Omega_0^2}{1 + \Delta a_*^2/a^2} \equiv \frac{B_\Phi^2(a)[2(nq-1) + 2(nq-1)^2/(1-a^2/b^2)]}{4\pi[\rho_2(1-a_*^2/a^2) + \rho_1 a_*^2/a^2]}, \quad (\text{П9.41})$$

что в случае плотности вида (П9.39) означает то же самое, что и (П9.37).

Рассмотрим уравнение (П9.40) при большом внутреннем скачке плотности,  $\Delta \gg 1$ , когда это уравнение сводится к виду

$$\omega^4 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_*^2}{a^2}\right) - \omega^2 \left[ \Omega^2 \frac{a_*^2}{a^2} + \Omega_0^2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_*^2}{a^2}\right) \right] + \frac{\Omega_0^2 \Omega^2}{\Delta} = 0. \quad (\text{П9.42})$$

Вдали от границы неустойчивости, а именно при

$$\Omega^2 \frac{a_*^2}{a^2} + \Omega_0^2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_*^2}{a^2}\right) < 0 \quad (\text{П9.43})$$

уравнение (П9.42) имеет два больших мнимых корня:

$$\gamma^2 = - \frac{2}{1 + a_*^2/a^2} \left[ \Omega^2 \frac{a_*^2}{a^2} + \Omega_0^2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_*^2}{a^2}\right) \right]. \quad (\text{П9.44})$$

Максимум инкремента достигается при

$$(1-nq)_{\text{опт}} = \frac{1}{2} \frac{(1-a_*^2/a^2)(1-a^2/b^2)}{1-a_*^2/b^2}, \quad (\text{П9.45})$$

причем

$$\gamma_{\text{макс}}^2 = \frac{B_\Phi^2(a)}{8\pi\rho_2 a^2} \frac{(1-a_*^2/a^2)^2(1-a^2/b^2)}{(1+a_*^2/a^2)(1-a_*^2/b^2)}. \quad (\text{П9.46})$$

По порядку величины

$$\gamma_{\text{макс}}^2 / \gamma_0^2 \approx \rho_1 / \rho_2 \gg 1, \quad (\text{П9.47})$$

где  $\gamma_0$  — инкремент, вычисляемый по средней плотности [т. е. по формуле типа (П9.33)].

Отметим, что по порядку величины

$$\xi_r(a)/\xi_r(0) \simeq \rho_1/\rho_2 \gg 1, \quad (\text{П9.48})$$

так что возмущение локализовано в основном в периферийной области плазмы.

### Библиографический обзор к гл. 9

1. **Кадомцев Б. Б.** Гидромагнитная устойчивость плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, с. 132.  
В обзоре [1] можно найти ссылки на ранние работы по крупномасштабным гидромагнитным неустойчивостям.
2. **Шафранов В. Д.** К вопросу о гидромагнитной устойчивости плазменного шнура с током в сильном продольном магнитном поле. — «Журн. техн. физ.», 1970, т. 40, с. 241.  
В работе [2] обсуждаются винтовые неустойчивости плазменного цилиндра с током.
3. **Соловьев Л. С.** Гидромагнитная устойчивость замкнутых плазменных конфигураций. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 6. М., Атомиздат, 1972, с. 210.
4. **Rosenbluth M. N., Dagazian R. Y., Rutherford P. H.** Nonlinear properties of the internal  $m=1$  kink instability in the cylindrical tokamak — «Phys. Fluids», 1973, у. 16, р. 1864.  
Результаты работ [3, 4] использовались нами в настоящей главе.

## Глава 10

### КРУПНОМАСШТАБНЫЕ ГИДРОМАГНИТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ ПРИ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

#### § 10.1. Введение

Фюрт, Киллин и Розенблют показали, что при учете конечной проводимости плазмы обнаруживаются, в частности, гравитационно-диссипативная неустойчивость, обсуждавшаяся нами в гл. 8, а также неустойчивость тиринг-моды. Обсуждению тиринг-моды посвящен § 10.2.

Помимо отмеченных выше неустойчивостей в плазме с конечной проводимостью могут иметь место также некоторые другие разновидности гидромагнитных неустойчивостей. Сведения о них можно найти в работах, указанных в библиографическом обзоре к настоящей главе.



### § 10.2. Неустойчивость тиринг-моды

Рассмотрим возможность раскачки током непотенциальных возмущений плоского слоя столкновительной плазмы. Предположения о непотенциальности и столкновительности оправдываются, если

$$(\omega_{pe}/ck_{\perp})^2 < \omega/v_{ei} < 1, \quad (10.1)$$

где  $\omega_{pe}$  — электронная плазменная частота;  $v_{ei}$  — частота столкновений электронов с ионами. При этих предположениях возмущения описываются следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\perp} \left( \frac{\omega_{pi}}{\omega_{Bi}} \right)^2 \nabla_{\perp} \psi + \frac{4\pi k_b}{B_0 \omega} \frac{\partial j_{\parallel}}{\partial x} A_{\parallel} - \\ - i \frac{\omega_{pe}^2 k_{\parallel}^2}{\omega v_{ei}} \left( \psi - \frac{\omega}{ck_{\parallel}} A_{\parallel} \right) = 0; \\ \Delta_{\perp} A_{\parallel} - \frac{ik_{\parallel} \omega_{pe}^2}{c v_{ei}} \left( \psi - \frac{\omega}{ck_{\parallel}} A_{\parallel} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Величина  $A_{\parallel}$  — составляющая векторного потенциала возмущения  $\mathbf{A}$  вдоль  $\mathbf{B}_0$ .

Мы интересуемся возмущениями с  $\omega \gg \omega_*$ , и потому опустили здесь члены порядка  $\omega_*/\omega$ . Частота электронно-ионных столкновений предполагается довольно большой:  $v_{ei} > (k_{\parallel} v_{Te})^2/\omega$ .

В уравнениях (10.2) продольное волновое число  $k_{\parallel}$  — функция координаты  $x$ , обращающаяся в нуль где-либо при  $x = x_0$ . Вдали от  $x_0$ , т. е. там, где можно считать выполненными неравенства:

$$\left. \begin{aligned} \omega v_{ei} / [(M_i/M_e) \omega_{Bi}^2 k_{\parallel}^2 / k_{\perp}^2] < 1; \\ v_{ei} k_b (\partial j_{0\parallel} / \partial x) \omega k_{\parallel} e_e \omega_{Be} n_0 < 1, \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

как из первого, так и из второго равенства (10.2) приближенно следует

$$A_{\parallel} = (ck_{\parallel}/\omega)\psi. \quad (10.4)$$

Это означает отсутствие продольной компоненты возмущенного электрического поля,  $E_{\parallel} = 0$ . Учитывая малую разность между  $\psi$  и  $\omega A_{\parallel}/ck_{\parallel}$ , получаем уравнение, описывающее возмущения вдали от точки  $x = x_0$ :

$$\Delta_{\perp} A_{\parallel} - \frac{4\pi k_b}{k_{\parallel} c B_0} \frac{\partial j_{0\parallel}}{\partial x} A_{\parallel} = 0. \quad (10.5)$$

Величины  $k_b$  и  $B_0$  предполагаются слабыми функциями  $x$ . Поэтому, используя (12.3) и (12.7) книги [III], в последнем члене левой части (10.5) можно сделать преобразования

$$\frac{4\pi k_b}{c B_0} \frac{\partial j_{0\parallel}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{4\pi k_b j_{0\parallel}}{c B_0} \right) = \frac{\partial^2 k_{\parallel}}{\partial x^2}. \quad (10.6)$$

В результате (10.5) приводится к виду

$$\frac{d^2 A_{\parallel}}{dx^2} - k_b^2 A_{\parallel} - \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{d^2 k_{\parallel}}{dx^2} A_{\parallel} = 0. \quad (10.7)$$

Уравнение (10.7) становится незаконным при очень малых  $k_{\parallel}(x)$  (т. е. при  $x \approx x_0$ ), поскольку отброшенные выше члены при этом не малы. Поэтому при  $x \approx x_0$  решение приближенного уравнения (10.7) должно быть сшито с решением более точной системы уравнений (10.2). Если  $x_1, x_2$  — некоторые точки вблизи  $x_0$  ( $x_1 < x_0 < x_2$ ), в которых еще справедливо уравнение (10.7), то условие сшивки решений сводится к приравнению разностей

$$\Delta = [d \ln A_{\parallel}(x)/dx] \Big|_{x_1}^{x_2}, \quad (10.8)$$

вычисляемых при решении «внешней» и «внутренней» задач.

Решение во внешней области находим с помощью (10.7) и граничных условий:

$$A_{\parallel}(x_+) = A_{\parallel}(x_-) = 0, \quad (10.9)$$

где  $x_+$ ,  $x_-$  — координаты границы плазмы (плазма предполагается ограниченной проводящим кожухом). Для простоты примем  $k_b |x_+ - x_-| \ll 1$ . Тогда в (10.7) можно пренебречь членом с  $k_b^2$ , после чего решение удается найти в явном виде:

$$A_{\parallel}(x) = Ck_{\parallel} \begin{cases} \int_x^{x_+} dx/k_{\parallel}^2, & x > x_0; \\ - \int_{x_-}^x dx/k_{\parallel}^2, & x < x_0, \end{cases} \quad (10.10)$$

где  $C$  — произвольная константа. При получении (10.10) предполагалось, что при  $x \approx x_0$  значения  $A_{\parallel}$  справа и слева от точки  $x_0$  одинаковы. Подставляя (10.10) в (10.8), находим  $\Delta$  для внешней задачи:

$$\Delta = -[k'_{\parallel}(x_0)]^2 \left[ \frac{1}{k_{\parallel}(x_+) k'_{\parallel}(x_+)} - \frac{1}{k_{\parallel}(x_-) k'_{\parallel}(x_-)} + \int_{x_-}^{x_+} \frac{k''_{\parallel} dx}{k_{\parallel}(k'_{\parallel})^2} \right]. \quad (10.11)$$

Во внутренней области ( $x \approx x_0$ ) система (10.2) записывается так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \frac{M_i}{M_e} \frac{\omega_{Bi}^2}{v_{ei} \gamma} k_{\parallel}^2 (x - x_0)^2 \psi = \\ = \frac{i}{c} \frac{M_i}{M_e} \frac{\omega_{Bi}^2}{v_{ei}} k'_{\parallel} (x - x_0) A_{\parallel}; \\ \frac{d^2 A_{\parallel}}{dx^2} = \left( \frac{\omega_{pe}}{c} \right)^2 \frac{\gamma}{v_{ei}} \left[ A_{\parallel} - \frac{ck'_{\parallel} (x - x_0)}{i\gamma} \psi \right], \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

где  $\gamma = -i\omega$ . Здесь по-прежнему считается выполненным второе неравенство (10.3).

Из второго уравнения (10.12) следует

$$\Delta = \left( \frac{\omega_{pe}}{c} \right)^2 \frac{\gamma}{v_{ei}} \int_{x_1}^{x_2} \left[ 1 - \frac{ck_{\parallel} (x - x_0)}{i\gamma} \frac{\psi}{A_{\parallel}} \right] dx. \quad (10.13)$$

Учтено, что вблизи  $x_0$  приближенно  $A_{\parallel} = \text{const}$ . С ростом  $|x - x_0|$  подынтегральное выражение в (10.13) стремится к нулю [в силу (10.4)], так что пределы интегрирования  $x_1, x_2$  можно заменить бесконечными.

Нам остается найти из первого равенства (10.1) отношение  $\psi/A_{\parallel}$ , вычислить интеграл (10.13) и приравнять результат правой части (10.11). Используя замену переменных

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= \xi \delta; \\ \psi/A_{\parallel} &= (-i\gamma)/(ck'_{\parallel} \delta) \Phi; \\ \delta &\equiv (M_e/M_i)^{1/4} (\gamma v_{ei}/\omega_{Bi}^2 k'_{\parallel})^{1/4}, \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

приводим (10.13) и первое уравнение (10.12) к каноническому виду:

$$\Delta = QI; \quad (10.15)$$

$$d^2\Phi/d\xi^2 - \xi^2\Phi = \xi, \quad (10.16)$$

где

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \Phi\xi) d\xi; \quad (10.17)$$

$$Q = (\omega_{pe}/c)^2 \gamma \delta / v_{ei}. \quad (10.18)$$

Интеграл  $I$  вычислен в работе Фюрта и др. и равен

$$I = 4\pi\Gamma(3/4)/\Gamma(1/4). \quad (10.19)$$

Ввиду положительности  $Q$  и  $I$  (при  $\gamma > 0$ ) равенство (10.15) может удовлетвориться, если только  $\Delta > 0$ , т. е. согласно (10.11) при

$$\int_{x_-}^{x_+} \frac{k_{\parallel}'' dx}{k_{\parallel} k_{\parallel}'^2} + \frac{1}{k_{\parallel}(x_+) k_{\parallel}'(x_+)} - \frac{1}{k_{\parallel}(x_-) k_{\parallel}'(x_-)} < 0. \quad (10.20)$$

Это соотношение играет роль критерия неустойчивости. Оно может быть записано через одни только стационарные параметры плазмы и в конечном счете определяется распределением тока по сечению плазмы.

Пусть неравенство (10.20) выполнено, так что имеет место неустойчивость, часто называемая неустойчивостью тиринг-моды (от tearing — разрывной). С помощью (10.15), (10.18) и последнего равенства (10.14) оцениваем инкремент возмущений и ширину внутренней области:

$$\gamma \simeq \gamma_0^{2/5} \nu_{ei}^{3/5} \Pi_e^{-2/5}; \quad (10.21)$$

$$\delta \simeq a \Pi_e^{-3/5} (\nu_{ei}/\gamma_0)^{2/5}, \quad (10.22)$$

где  $\gamma_0 = (M_e/M_i)^{1/2} V_0/a$  — инкремент токовой неустойчивости бесстолкновительной плазмы в отсутствие шири (см. уравнение (6.43) книги [II]);  $\Pi_e \equiv (\omega_{pe}a/c)^2$  — погонная плотность электронов.

### Библиографический обзор к гл. 10

1. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы. М., Атомиздат, 1971. В гл. 8 книги [1] см. раннюю библиографию по вопросам, обсуждаемым в данной главе.
2. Резистивные внутренние винтовые моды. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 961. Авт.: Коппи Б., Галвао Р., Пелла Р., Розенблют М., Резерфорд П. В работе [2] исследуются некоторые, не рассмотренные выше разновидности неустойчивостей. Здесь же см. более позднюю библиографию.

## ЧАСТЬ IV

### МИКРОНЕУСТОЙЧИВОСТИ

#### Глава 11

##### ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ (ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ) НЕУСТОЙЧИВОСТИ

##### § 11.1. Введение

В данной главе рассмотрим низкочастотные электростатические (потенциальные) микронеустойчивости с частотой, малой по сравнению с ионно-циклотронной.

Исходные уравнения для низкочастотных потенциальных возмущений плазмы, учитывающие искривленность и продольную неоднородность силовых линий магнитного поля, выводятся в § 11.2. Анализ неустойчивостей производится в § 11.3—11.12. В § 11.3 обсуждается устойчивость плазмы в адиабатической ловушке с  $\min B$ , в § 11.4 выводятся некоторые общие критерии устойчивости плазмы по отношению к низкочастотным возмущениям. В § 11.5 обсуждается эффект стабилизации желобковой неустойчивости, обусловленный конечным ларморовским радиусом ионов, и рассматриваются косые «дрейфовые» волны в случае магнитного поля сложной геометрии. В § 11.6 вводится представление о неустойчивости запертых частиц. В этом же параграфе, а также в § 11.7—11.12 обсуждаются неустойчивости плазмы в тороидальных ловушках типа токамак.

##### § 11.2. Уравнения для низкочастотных возмущений

1. **Общее выражение для возмущенной плотности заряда.** При достаточно малом давлении плазмы возмущения можно считать потенциальными,  $\mathbf{E} = -\nabla\psi$ . Такие возмущения описываются уравнением Пуассона  $\Delta\psi + 4\pi\Sigma n' = 0$ . Возмущенную плотность заряда найдем

методом интегрирования по траекториям. Исходим из выражения для  $f_1$  в форме (4.95) книги [III] (см. также (4.1)), учитывая, что  $F$  зависит от  $\varepsilon$ ,  $\mu_0$ ,  $\mathbf{r}_\perp$  [см. (П4.52)], и выражаем производную  $\partial F/\partial \mathbf{v}$  через интегралы движения [см. (4.2)]. Тогда

$$f_1 = \frac{e}{M} \int_{-\infty}^t \nabla \psi \left( \mathbf{v} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{\tilde{\mathbf{v}}_\perp}{B} \frac{\partial F}{\partial \mu_0} + \frac{1}{\omega_B} [\mathbf{e}_0, \nabla F] \right) dt'. \quad (11.1)$$

Как и всюду до сих пор, полагаем, что временная зависимость возмущений имеет вид  $\exp(-i\omega t)$ . Зависимость  $\psi$  от поперечных координат представляем в виде

$$\psi \sim \psi_0 \exp(i \int \mathbf{k}_\perp d\mathbf{r}_\perp), \quad (11.2)$$

полагая  $\mathbf{k}_\perp$  большим по сравнению с  $(\nabla_\perp \ln F)^{-1}$  (приближение мелкомасштабных возмущений). Учитываем, что  $\mathbf{r}_\perp$  имеет осциллирующую по времени часть [см. приложение 1 к гл. 4], и разлагаем  $\exp(i\mathbf{k}_\perp \delta \mathbf{r}_\perp)$  в ряд по функциям Бесселя. В результате выражение для  $f_1$  будет представлять собой бесконечный ряд, аналогичный (4.103) книги [III]. В приближении низкочастотных возмущений,  $\omega \ll \omega_B$ , в этом ряду можно произвести суммирование, и тогда для средней по углу в пространстве скоростей части  $f_1$  получается

$$f_1 = \frac{e\psi}{M} \left[ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + (1 - J_0^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right] + \frac{ie}{M} \left\{ \omega \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{\mathbf{k}_\perp}{\omega_B} [\mathbf{e}_0, \nabla F] \right\} \times \\ \times J_0 \int_{-\infty}^t \psi_0 \exp \left[ i \int_t^{t'} (\omega - \omega_D) dt'' \right] J_0 dt'. \quad (11.3)$$

Здесь  $\omega_D = \mathbf{k}_\perp \mathbf{V}_{др}$ , где  $\mathbf{V}_{др}$  — скорость магнитного дрейфа частиц, определенная соотношением (1.1). При выводе (11.3) было учтено тождество

$$\frac{\mathbf{k}_\perp}{\omega_B} [\mathbf{e}_0, \nabla F] = - \frac{i \sqrt{g_{33}}}{\omega_B \sqrt{g}} e^{3jk} \frac{\partial F}{\partial x^j} \frac{\partial \ln \psi}{\partial x^k}, \quad (j, k = 1, 2) \quad (11.4)$$

и неизменность вдоль силовой линии величины  $\sqrt{g_{33}}/B\sqrt{g}$  [см. приложение 1 к гл. 1]. Благодаря этому выражение  $(\mathbf{k}_\perp/\omega_B) [\mathbf{e}_0, \nabla F]$  можно было вынести за знак интеграла по  $t'$ .

Выражение (11.3) сходно с (4.9), а в предельном случае  $\omega \gg \omega_D$ ,  $\mathbf{k}_\perp v_\perp \ll \omega_B$  эти выражения совпадают друг с другом, — в пренебрежении в (4.9) непотенциальностью возмущений ( $B'_\parallel = 0$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla\psi$ ).

Предполагая, что частицы осциллируют между пробками с периодом  $\tau = \oint dl/v_\parallel$ , в (11.3) можно перейти от бесконечного интеграла к конечному, воспользовавшись преобразованием типа (4.20):

$$\int_{-\infty}^t \{...\} dt' = \left[ 1 - \exp i \int_0^\tau (\omega - \omega_D) dt \right]^{-1} \int_{t-\tau}^t \{...\} dt'. \quad (11.5)$$

Интеграл по  $t'$  в правой части равенства можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \int_{t-\tau}^t \{...\} dt' &= \int_{t-\tau}^{-\tau/2} \{...\} dt' + \int_{-\tau/2}^0 \{...\} dt' + \int_0^t \{...\} dt' = \\ &= i \exp[-ivM(l_1, l)] \left\{ \frac{1}{\sin M(l_1, l_2)} \int_{l_1}^{l_2} J_0 \psi \cos M(l_2, l') \frac{dl'}{v_\parallel} + \right. \\ &\quad \left. + iv \int_{l_1}^t J_0 \psi \exp[ivM(l', l)] dl'/v_\parallel \right\}. \quad (11.6) \end{aligned}$$

Здесь  $M(a, b) = \int_a^b (\omega - \omega_D) dl/v_\parallel$ . При выводе последнего соотношения было учтено, что вследствие предполагаемого нами равенства числа частиц, движущихся в ту и другую сторону:

$$\psi[l(t)] = \psi[l(\tau - t)]. \quad (11.7)$$

В (11.6) введен индекс  $\nu$ , равный «+1», для частиц, движущихся в положительном направлении вдоль силовой линии, и «-1» — в случае противоположного направления



движения. При вычислении плотности заряда нужно произвести суммирование по  $\nu$ . С учетом этого получается выражение для плотности каждого сорта зарядов:

$$\begin{aligned} \rho^{(\alpha)} = & \frac{e^2}{M} \int \frac{B}{v_{\parallel}} d\mu d\varepsilon \left\{ \psi \left[ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + (1 - J_0^2) \frac{1}{B} \frac{\partial F}{\partial \mu} \right] - \right. \\ & \left. - J_0 \left( \omega \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{\mathbf{k}_{\perp}}{\omega_B} [\mathbf{e}_0, \nabla F] \right) \left[ \frac{\cos M(l_1, l)}{\sin M(l_1, l_2)} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \int_{l_1}^{l_2} J_0 \psi \cos M(l', l_2) \frac{dl'}{v_{\parallel}} - \int_{l_1}^l J_0 \psi \sin M(l, l') \frac{dl'}{v_{\parallel}} \right] \right\}. \quad (11.8) \end{aligned}$$

Подстановка этого выражения в уравнение Пуассона дает исходное уравнение, с помощью которого можно исследовать устойчивость плазмы в поле сложной геометрии.

**2. Интегральное соотношение.** Как видно из (11.8), возмущенная плотность связана с возмущенным потенциалом интегрально, а не локально, как это имело бы место в случае продольно-однородного магнитного поля и возмущений потенциала вида  $\exp(ik_z z)$ . Поэтому отыскание собственных значений частоты колебаний теперь довольно сложно. Однако для выяснения условий устойчивости и неустойчивости достаточно знать не саму частоту, а лишь знак ее мнимой части. Этого в ряде случаев можно достигнуть использованием вытекающих из уравнений Пуассона интегральных соотношений, до некоторой степени аналогичных тем, которые использовались при анализе гидромагнитных неустойчивостей в гл. 3, 4. В гидромагнитном приближении мы имели дело с вещественным функционалом, имеющим смысл потенциальной энергии возмущений. Теперь учитываются процессы резонансного взаимодействия частиц с волной и потому приходится иметь дело с комплексным функционалом. Вещественная часть такого функционала в некоторых случаях соответствует полной энергии колебаний, а мнимая характеризует баланс энергии между волной и резонансными частицами.

Подставим плотность зарядов (11.8) в уравнение Пуассона, помножим последнее на  $\psi^*$  и проинтегрируем по пространству. В качестве поперечных координат будем использовать введенные в приложении 1 к гл. 1 переменные  $\alpha, \beta$ . При этом  $dr = d\alpha d\beta dl/B$ . После некоторых преобразований получаем следующее интегральное соотношение:

$$\begin{aligned}
 Q = \int d\alpha d\beta \left\{ \int \frac{|\nabla\psi|^2 dl}{B} - \sum \frac{4\pi e^2}{M} \int d\mu d\varepsilon \left[ \int_{l_1}^{l_2} \frac{|\psi|^2 dl}{v_{\parallel}} \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. + (1 - J_0^2) \frac{\partial F}{B \partial \mu} \right) - \left( \omega \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{\mathbf{k}_{\perp}}{\omega_B} [\mathbf{e}_0, \nabla F] \right) \frac{\cos M(l_1, l)}{\sin M(l_1, l_2)} \times \right. \right. \\
 \left. \left. \times \left| \int_{l_1}^{l_2} J_0 \psi \cos M(l, l_2) \frac{dl}{v_{\parallel}} \right|^2 + \int_{l_1}^{l_2} \frac{dl}{v_{\parallel}(l)} \times \right. \right. \\
 \left. \left. \times \int_{l_1}^{l_2} \frac{dl'}{v_{\parallel}(l')} \sin M(l, l_2) \cos M(l', l_2) J_0(l) J_0(l') (\psi^*(l) \psi(l') + \right. \right. \\
 \left. \left. \left. + \psi(l) \psi^*(l')) \right] \right\} = 0. \quad (11.9)
 \end{aligned}$$

При вещественных  $\omega$  и  $\mathbf{k}_{\perp}$  все члены в фигурной скобке вещественны, если только функция  $\sin M(l_1, l_2)$  не обращается в нуль ни при каких  $\varepsilon$  и  $\mu$ . В противном случае имеет место резонанс между волной и частицами с соответствующими  $\varepsilon$  и  $\mu$ , и тогда член с  $1/\sin M$  должен быть записан в комплексной форме типа  $P(1/\sin M) - i\pi a \delta(\sin M)$ , где  $P$  — главное значение;  $a$  — некоторая константа. Член с  $\delta$ -функцией и дает вклад в  $\text{Im } Q$ .

**3. Некоторые частные случаи.** а) **П р и б л и ж е н и е «к о р о т к о й п л а з м ы»**,  $\omega t \ll 1$ . Пусть за время порядка  $1/\omega$  частица успевает совершить много осцилляций между пробками. Тогда в правой части (11.8) функции  $\cos M$ ,  $\sin M$  можно разложить в ряд по малому аргументу  $M$ . В пренебрежении членами порядка  $\omega t$  имеем

$$\begin{aligned}
 \rho^{(\alpha)} = \frac{e^2}{M} \int \frac{B}{v_{\parallel}} d\mu d\varepsilon \left\{ \left( \psi - \frac{\omega J_0(\overline{\psi J_0})}{\omega - \omega_D} \right) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \right. \\
 \left. + \psi (1 - J_0^2) \frac{\partial F}{B \partial \mu} - \frac{J_0(\overline{\psi J_0})}{\omega - \omega_D} \frac{\mathbf{k}_{\perp}}{\omega_B} [\mathbf{e}_0, \nabla F] \right\}, \quad (11.10)
 \end{aligned}$$

$$\text{где } (\overline{\psi J_0}) = \left( \int_{l_1}^{l_2} \psi J_0 dl / v_{\parallel} \right) / \left( \int_{l_1}^{l_2} dl / v_{\parallel} \right).$$

Если приближение  $\omega\tau \ll 1$  выполнено как для электронов, так и для ионов, то выражение (11.9) для  $Q$  имеет вид

$$Q = \int d\alpha d\beta \left\{ \int \frac{|\nabla\psi|^2 dl}{B} - \sum \frac{4\pi e^2}{M} \int d\mu d\varepsilon \frac{\tau}{2} \times \right. \\ \times \left[ \left( |\overline{\psi}|^2 - \frac{\omega |(\overline{J_0\psi})|^2}{\omega - \omega_D} \right) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + (|\overline{\psi}|^2 - |(\overline{J_0\psi})|^2) \frac{\partial F}{B\partial\mu} - \right. \\ \left. \left. - \frac{|(\overline{J_0\psi})|^2}{\omega - \omega_D} \frac{k_{\perp}}{\omega_B} [\mathbf{e}_0, \nabla F] \right] \right\}. \quad (11.11)$$

б) Приближение длинной плазмы,  $\omega\tau \gg 1$ . В этом случае в интегралах правой части (11.8) величины  $\cos M$  ( $l', l_2$ ),  $\sin M$  ( $l, l'$ ) являются быстроменяющимися функциями  $l'$ . Используя это, приводим (11.8) к виду

$$\rho(\alpha) = \frac{e^2 \psi}{M} \int \frac{B}{v_{\parallel}} d\mu d\varepsilon \left\{ \left( 1 - \frac{\omega J_0^2}{\omega - \omega_D} \right) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \right. \\ \left. + (1 - J_0^2) \frac{\partial F}{\partial \mu} - \frac{J_0^2 k_{\perp}}{\omega_B (\omega - \omega_D)} [\mathbf{e}_0, \nabla F] \right\}. \quad (11.12)$$

В отличие от (11.10), возмущенная плотность в этом случае определяется локальными характеристиками поля и плазмы.

в) Приближение конечного  $\omega\tau$ . В этом приближении учитывается продольный резонанс частиц с волной, не содержащийся в предельных случаях  $\omega\tau = 0$  и  $\omega\tau = \infty$ . Рассмотрим этот эффект при дополнительных предположениях  $\omega \gg \omega_D$ ;  $k_{\perp} v_{\perp} \ll \omega_B$ ;  $\omega\tau \ll 1$ . При этом из (11.8) получаем

$$\rho^{(\alpha)} = \frac{e^2}{M} \int \frac{B}{v_{\parallel}} d\mu d\varepsilon \left\{ \tilde{\psi} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} - \frac{k_{\perp}}{\omega \omega_B} [\mathbf{e}_0, \nabla F] \bar{\psi} + \right. \\ \left. + \frac{i\pi}{2} \left( \omega \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{k_{\perp}}{\omega_B} [\mathbf{e}_0, \nabla F] \right) \delta(\sin(\omega\tau/2)) \cos \omega\tau \times \right. \\ \left. \times \int_{t_1}^{t_2} \cos(\omega t') \psi dt' \right\}, \quad (11.13)$$

где  $\tilde{\psi} = \psi - \bar{\psi}$ ,  $t = \int_{t_1}^l dl/v_{\parallel}$ .

В выражении (11.13) опущены малые вещественные члены порядка  $\omega_D/\omega$ ,  $(k_{\perp} v_{\perp}/\omega_B)^2$ , которые просто восстановить, обратившись к (11.10).

### § 11.3. Устойчивость термодинамически квазиравновесной плазмы в адиабатической ловушке с $\min B$

В гл. 6 книги [II] было показано, что в пренебрежении кривизной магнитного поля плазма может быть неустойчива, если ее плотность или температура зависят от поперечных координат. Рассмотренные там неустойчивости — это и есть основные типы негидромагнитных неустойчивостей бесстолкновительной плазмы, каковой в известном смысле можно считать плазму в адиабатической ловушке. Однако результаты гл. 6 книги [II] нельзя автоматически переносить на случай плазмы в адиабатической ловушке. Причин к этому, по крайней мере, две.

Прежде всего, картина низкочастотных неустойчивостей чувствительна к наличию кривизны силовых линий. Это следует из анализа, проведенного в гл. 9 книги [III], где эффект кривизны моделировался введением силы тяжести. Используя аналогию между силой тяжести и кривизной, и результаты гл. 9 книги [II], можно заключить, что в случае обычной адиабатической ловушки должна иметь место дополнительная дестабилизация негидромагнитных возмущений, тогда как в случае ловушки с  $\min B$  возможна частичная или полная стабилизация этих возмущений. Количественно этот вопрос мы исследуем в § 11.5.

Другая причина, по которой требуется дополнительный анализ негидромагнитных возмущений плазмы в адиабатической ловушке, состоит в том, что неоднородная плазма в поле с  $\min B$  может оказаться термодинамически более равновесной, чем в случае прямого поля. Это обусловлено своеобразным стабилизирующим эффектом, который обсуждается ниже.

Вспомним, что стационарная функция распределения каждого сорта зарядов может быть записана как некоторая функция интегралов энергии, магнитного момента и поперечных координат [см. уравнение (П4.42)]:

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = F(\varepsilon, \mu_0, \mathbf{r}_\perp). \quad (11.14)$$

Здесь  $\varepsilon = v^2/2$ ;  $\mu_0 = \tilde{v}_\perp^2/2B$ ; в дальнейшем индекс нуль у  $\mu$  опускается. При переходе к приближению прямого однородного поля координатная зависимость  $f_0$  определяется только зависимостью  $F$  от интеграла  $\mathbf{r}_\perp$ . В случае кривого поля координатная зависимость содержится также в  $\mu$ . Более того, можно представить себе пространственно-неоднородное распределение с  $F$ , вовсе не зависящим от  $\mathbf{r}_\perp$ :

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = F(\varepsilon, \mu). \quad (11.15)$$

Можно показать, что в случае поля с  $\min B$  такое  $f_0$  может соответствовать пространственному распределению частиц, локализованному по всем трем координатам. Плазма с таким  $F$  гидромагнитно устойчива, если

$$\partial F / \partial \varepsilon < 0. \quad (11.16)$$

Покажем теперь, что при этом условии плазма с  $f_0$  вида (11.15) устойчива относительно всех типов низкочастотных возмущений для весьма широкого класса распределений  $F(\mu)$ .

Уравнения, описывающие низкочастотные возмущения плазмы в кривом поле, получены в § 11.2. Воспользуемся приведенным там интегральным соотношением (11.9), полагая в нем  $\nabla F = 0$ . (Напомним, что  $\nabla F$  в (11.9) берется при постоянном  $\mu$ , так что  $\nabla F = 0$  не означает пренебрежения координатной зависимостью  $f_0$ ).

Выясним, при каких условиях этому соотношению могут удовлетворять только решения с  $\text{Im } \omega \leq 0$ .

Исходя из критерия Найквиста (см. § 2.7 книги [1]) и не конкретизируя пока вида  $Q$ , можно заключить, что неустойчивость отсутствует,  $\text{Im } \omega \leq 0$ , если при всех вещественных  $\omega$

$$\text{Im } \omega Q < 0 \quad (11.17)$$

и если, кроме того,

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} Q(\omega) > 0. \quad (11.18)$$

Мнимая часть  $Q$  связана с полюсами функции  $1/\sin M(l_1, l_2)$ . Эти полюса соответствуют резонансу частиц с волной. Условие резонанса  $\sin M(l_1, l_2) = 0$  означает

$$M(l_1, l_2) \equiv \int_{l_1}^{l_2} (\omega - \mathbf{kV}_{\text{др}}) dl / v_{\parallel} = \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11.19)$$

Учитывая это, с помощью (11.9) находим, что при  $f_0$  вида (11.15)

$$\begin{aligned} \text{Im } \omega Q = \pi \omega^2 \sum \frac{4\pi e^2}{M} \int d\alpha d\beta \left| \int_{l_1}^{l_2} J_0 \psi \cos M(l, l_2) \frac{dl}{v_{\parallel}} \right|^2 \times \\ \times \delta[\sin M(l_1, l_2)] \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Видно, что при условии (11.16) неравенство (11.17) удовлетворяется.

Второе необходимое условие устойчивости (11.18) при  $Q$  вида (11.9) означает

$$\begin{aligned} \int d\alpha d\beta \left\{ \int \frac{|\nabla \psi|^2 dl}{B} - \sum \frac{4\pi e^2}{M} \int d\varepsilon d\mu \frac{|\psi|^2 (1 - J_0^2) dl}{v_{\parallel}} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{B \partial \mu} \right) \right\} > 0, \end{aligned} \quad (11.21)$$

Оно заведомо удовлетворяется, если

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{B \partial \mu} < 0. \quad (11.22)$$

В приближении однородного магнитного поля условия (11.16) и (11.22) имеют простой смысл. Первое означает, что  $F$  должно монотонно спадать с ростом продольной скорости,  $\partial F / \partial \ln v_{\parallel} < 0$ . Ясно, что в противном случае могли бы развиваться пучковые неустойчивости, связанные с резонансом типа  $\omega = k_{\parallel} v_{\parallel}$ .

Второе условие означает, что функция распределения должна монотонно спадать с поперечной скоростью,  $\partial f_0 / \partial v_{\perp}^2 < 0$ . В противном случае может проявляться эффект конусности. В принятом выше приближении речь идет о влиянии немонотонности  $f_0$  на низкочастотные неустойчивости,  $\omega \ll \omega_B$ , к числу которых относится рассмотренная в § 8.4 книги [I] неустойчивость Дорри, Гэста, Харриса. Как было показано в § 8.4 книги [I], она развивается не при всяком немонотонном распределении, а лишь при таком, что  $\langle (1 - J_0^2) \partial F / \partial \varepsilon_{\perp} \rangle > 0$ . Этот необходимый критерий неустойчивости вытекает также из (11.21).

### § 11.4. Некоторые общие критерии устойчивости плазмы по отношению к низкочастотным возмущениям

Теперь рассмотрим плазму с функцией распределения вида (11.14). Такая плазма более неустойчива, чем в случае (11.15). Тем не менее при достаточно благоприятном распределении по  $\varepsilon$  и  $\mu$  может быть достигнута устойчивость.

Как и в § 11.3, мы интересуемся здесь устойчивостью плазмы только по отношению к низкочастотным возмущениям,  $\omega \ll \omega_{Bi}$ . Частота таких возмущений удовлетворяет интегральному соотношению (11.9). Будем исследовать это соотношение таким же путем, как и в § 11.3, предполагая, однако, что теперь  $\nabla F \neq 0$ . Величина  $\text{Im } \omega Q$  при этом имеет вид, сходный с (11.20), но с тем отличием, что под интегралом заменяется

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{k_{\perp}}{\omega \omega_B} [\mathbf{e}_0, \nabla F]. \quad (11.23)$$

Перейдем в выражении для  $\text{Im } \omega Q$  от переменных  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  к переменным  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $J_{\parallel}$ , которые были введены в приложении 1 к гл. 4. Энергия частицы  $\varepsilon$  теперь будет функци-

ей новых переменных, а функция распределения будет зависеть от  $\mu, J_{\parallel}, \varepsilon$  ( $\mu, J_{\parallel}, \alpha, \beta$ ). При переходе к новым переменным правая часть (11.23) выражается так:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right)_{\mu, \tau} + \frac{k_{\perp}}{\omega \omega_B} [\mathbf{e}_0, (\nabla F)_{\varepsilon, \mu}] = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right)_{\mu, J_{\parallel}} + \left(\frac{\partial F}{\partial J_{\parallel}}\right)_{\mu, \varepsilon} \left(\tau + \frac{k_{\perp} [\mathbf{e}_0, \nabla J_{\parallel}]}{\omega \omega_B}\right), \quad (11.24)$$

а выражение (11.19) для  $M(l_1, l_2)$  имеет вид

$$M(l_1, l_2) = \omega (\tau + \mathbf{k}_{\perp} [\mathbf{e}_0, \nabla J_{\parallel}] / \omega \omega_B). \quad (11.25)$$

Выражения в скобках (11.24) и (11.25) одинаковы. Второй член в этих скобках относится к первому как характерная частота магнитного дрейфа к частоте колебаний  $\mathbf{kV}_{др}/\omega$ .

Рассмотрим по отдельности случаи возмущений, когда этот член мал или порядка первого.

**1. Возмущения с  $\omega/k_{\perp} \gg V_{др}$ .** При частотах возмущений таких, что  $\omega \gg \mathbf{kV}_{др}$ , вторым членом в указанных выше скобках можно пренебречь, и тогда знак  $\text{Im } \omega Q$  будет определяться знаком суммы

$$(\partial F / \partial \varepsilon)_{\mu, J_{\parallel}} + \tau (\partial F / \partial J_{\parallel})_{\mu, \varepsilon} \equiv (\partial F / \partial \varepsilon)_{\mu, \alpha, \beta}.$$

Устойчивости соответствует такое распределение, для которого

$$(\partial F / \partial \varepsilon)_{\mu, \alpha, \beta} < 0. \quad (11.26)$$

Этот критерий устойчивости является обобщением (11.16) на случай функций распределения, зависящих от поперечных координат. Условие резонанса (11.19) при  $\omega \gg \mathbf{kV}_{др}$  удовлетворяется только, если  $n \neq 0$ , т. е. для частиц, у которых

$$\tau = \pi n / \omega; \quad n = 1, 2 \dots \quad (11.27)$$

Такого типа резонанс характерен для градиентных неустойчивостей в приближении прямого поля, где роль  $(\tau/\pi n)^{-1}$  играет величина  $k_z v_z$ . Поэтому (11.26) имеет смысл критерия устойчивости по отношению к градиентным возмущениям типа косых волн.



2. Возмущения с  $\omega/k_{\perp} \leq V_{др}$ . В этом случае важен также резонанс  $n = 0$ . Если, кроме того,  $k_{\perp} V_{др} < 1/\tau$ , т. е.  $k_{\perp} \rho < R/L$ , где  $R$  — характерный радиус кривизны;  $L$  — длина системы, то этот резонанс является единственно существенным. При этом скобки в (11.24) обращаются в нуль, так что условие устойчивости сводится к виду

$$(\partial F/\partial \varepsilon)_{\mu, J_{\parallel}} < 0. \quad (11.28)$$

Оно совпадает с условием гидромагнитной устойчивости (11.16).

### § 11.5. Желобковые возмущения и косые «дрейфовые» волны

1. Желобковые возмущения плазмы в криволинейном магнитном поле. Перейдем к исследованию конкретных типов возмущений плазмы в криволинейном магнитном поле.

Будем предполагать, что за время  $\simeq 1/\omega$  ионы много раз успевают пролететь вдоль ловушки,  $\omega \tau_i \ll 1$ . Для желобковых возмущений с  $\omega \simeq v_{Ti}/(aR)^{1/2}$  это означает  $L < (aR)^{1/2}$ , где  $R$  — средний радиус кривизны,  $L$  — длина ловушки, а  $a$  — характерный поперечный размер. При исследовании таких возмущений можно использовать интегральное соотношение (11.9). Полагаем  $k_{\perp} \rho_i \ll 1$ , но удерживаем члены порядка  $(k_{\perp} \rho_i)^2$ . Потенциал представляем в виде  $\psi = \bar{\psi} + \tilde{\psi}$ . С помощью уравнения Пуассона, в которое плотность электронов подставлена в виде (11.10), а плотность ионов в виде (11.12), находим оценку для  $\tilde{\psi}$ :

$$\tilde{\psi} \simeq (k_{\perp} \rho_i)^2 \bar{\psi}. \quad (11.29)$$

Вклад членов с  $\tilde{\psi}$  в соотношение (11.9) порядка  $(k_{\perp} \rho_i)^4$ , так что им можно пренебречь. В результате (11.9) сводится к виду:

$$Q = - \int d\alpha d\beta |\bar{\psi}|^2 \left\{ \frac{4\pi e^2}{M_i} \int d\mu d\varepsilon \left( \frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F_i}{V \partial \mu} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k_{\perp}}{\omega \omega_{Bi}} [e_0, \nabla F_i] + k_{\perp} V_{др} \frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon} \right) \int \frac{(k_{\perp} v_{\perp})^2}{2\omega_{Bi}^2} \frac{dl}{v_{\parallel}} \right.$$

$$-\frac{1}{\omega^2} \sum_{i, e} \frac{4\pi e^2}{M} \int d\mu d\varepsilon \int \frac{dl}{v_{\parallel}} \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{V}_{др} \left( \frac{\mathbf{k}_{\perp}}{\omega_B} [\mathbf{e}_0, \nabla F] + \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{V}_{др}}{\omega} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right) = 0. \quad (11.30)$$

В пренебрежении членом с  $1/\omega$  отсюда следует критерий гидромагнитной устойчивости (11.28). Член с  $1/\omega$  описывает эффект конечного ларморовского радиуса ионов, обсуждавшийся для случая плазмы в поле тяжести в § 9.2 книги [II].

Таким образом, видно, что задача о желобковых возмущениях в криволинейном магнитном поле качественно сводится к задаче о плазме в поле тяжести. При таком анализе, однако, получается дополнительная информация о характере усреднения стационарных параметров по скоростям и пространству.

**2. Косые «дрейфовые» волны в плазме в криволинейном магнитном поле.** Рассмотрим длинноволновые возмущения,  $k_{\perp} \rho_i \ll 1$ , с частотой, удовлетворяющей условиям

$$(1/\tau_i, \omega_D) \ll \omega \ll 1/\tau_e. \quad (11.31)$$

Используя (11.10) и (11.12) и учитывая условие квазинейтральности, в нулевом приближении по указанным здесь малым параметрам получаем интегральное соотношение [ср. с (11.9)]:

$$\int d\alpha d\beta d\varepsilon d\mu \frac{\tau}{2} \left\{ |\tilde{\psi}|^2 \left( \frac{\partial F_e}{\partial \varepsilon} + \frac{\mathbf{k}_{\perp}}{\omega \omega_{Be}} [\mathbf{e}_0, \nabla F_i] \right) \right\} = 0. \quad (11.32)$$

Отсюда получается, что при  $\tilde{\psi}$ , не равном тождественно нулю, в плазме существует ветвь колебаний с частотой

$$\omega = - \frac{\int \tau (\mathbf{k}_{\perp} / \omega_{Be}) [\mathbf{e}_0, \nabla F_i] |\tilde{\psi}|^2 d\alpha d\beta d\mu d\varepsilon}{\int \tau (\partial F_e / \partial \varepsilon) |\tilde{\psi}|^2 d\alpha d\beta d\mu d\varepsilon}. \quad (11.33)$$

Это выражение удовлетворяет принятому выше приближению  $\omega \gg \omega_D$ , если только

$$(\partial \ln F / \partial r_{\perp})_{\mu, \varepsilon} \gg \partial \ln B / \partial r_{\perp}, \quad (11.34)$$

т. е. только в ситуациях, существенно отличных от обсуждавшихся в § 11.3, где предполагалось  $(\partial \ln F / \partial r_{\perp})_{\mu, \varepsilon} = 0$ .

Ветвь (11.33) является аналогом ветви (6.9) книги [II], существующей в случае однородного магнитного поля (косые дрейфовые волны). Колебания типа (6.9) книги [II] раскачиваются, либо затухают при взаимодействии с ними резонансных частиц. То же имеет место и в случае колебаний типа (11.33). Критерий неустойчивости, получающийся при учете мнимого члена в (11.13), не имеет столь наглядного вида, как в случае однородного магнитного поля. Более того, он может быть записан в явной форме, если только известна зависимость  $\psi(l)$ . Заметим, что возмущения типа (11.33) могут раскачиваться также вследствие столкновительной диссипации на запертых электронах. Этот эффект будет рассмотрен в § 11.8.

**3. Низкочастотные неустойчивости плазмы в продольно-неоднородном магнитном поле при  $\rho_i/a > a/L$ .** Пусть параметры плазмы и магнитного поля таковы, что

$$\rho_i/a > \pi a/L; \quad (11.35)$$

(здесь  $a$ ,  $L$  — поперечный и продольный размеры плазмы,  $\rho_i$  — ларморовский радиус ионов). При этом условии возмущения с  $\omega \simeq \omega^*$  и  $k_{\perp} a \simeq 1$  являются быстрыми по сравнению с пролетным временем ионов,  $\omega \tau_i > 1$  (приближение «длинной» плазмы). Ясно, что неравенство  $\omega \tau_i > 1$  может удовлетворяться и при условии, обратном (11.35), если  $k_{\perp} a \gg 1$ . Поэтому часть результатов настоящего параграфа, получающихся в приближении  $\omega \tau_i > 1$ , относится и к случаю «короткой» плазмы, обсуждаемому в § 11.6.

Если  $|\partial \ln T / \partial \ln n_0| \gtrsim 1$ , то в случае продольно-неоднородного магнитного поля, как и в случае однородного, может развиваться градиентно-температурная неустойчивость с  $\gamma \simeq \text{Re } \omega \simeq \omega^*$  (см. § 6.2 книги [III]), которая по оценкам, должна приводить к турбулентным потерям порядка бомовских.

Как следует из анализа, проведенного в гл. 6, 9 книги [III], плазма с  $\nabla T = 0$  более устойчива, чем при  $\nabla T \neq 0$ . Однако и при  $\nabla T = 0$  могут развиваться неустойчивости, инкремент которых пропорционален малым параметрам  $(k_{\perp} \rho_i)^2$  (см. § 6.1 книги [III]), либо  $a/R$  (см. § 9.5 книги [II]). Эти результаты были получены в приближении продольно-

однородного магнитного поля. Выясним теперь, как выглядит аналогичная картина в случае продольно-неоднородного поля.

Предполагаем частоту возмущений, лежащей в пределах

$$(\omega_D, \tau_i^{-1}) < \omega < (\tau_e^{-1}, \omega_{Bi}), \quad (11.36)$$

а волновое число  $k_{\perp}$  малым по сравнению с  $1/\rho_i$ ,  $k_{\perp}\rho_i \ll 1$ . Выясним сначала, какие ветви колебаний существуют в этих условиях, а затем учтем взаимодействие с ними резонансных электронов и оценим обусловленный этим инкремент.

а. Ветви колебаний. Исходя из выражений (11.10) для плотности электронов и (11.12) для плотности ионов и делая в них разложения по указанным выше малым параметрам, составляем квадратичную форму  $Q$  [ср. с (11.9), (11.11)]:

$$Q = \int d\alpha d\beta \left\{ \frac{4\pi e^2}{T_e} \left( 1 - \frac{\omega_e^*}{\omega} \right) \int \frac{\tau}{2} F_e d\mu d\varepsilon \left[ |\bar{\psi}|^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - |\bar{\psi}|^2 \left( 1 + \frac{\bar{\omega}_{De}}{\omega} \right) \right] + \frac{4\pi e^2}{T_i} \left( 1 - \frac{\omega_i^*}{\omega} \right) \int \frac{dl}{B} \left[ \left( k_{\perp}^2 \rho_i^2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2 \frac{\omega_i^*}{\omega} \frac{\partial \ln B}{\partial \ln n_0} \right) |\psi|^2 - \frac{v_{Ti}^2}{2\omega^2} \left| \frac{\partial \psi}{\partial l} \right|^2 \right] \right\} = 0. \quad (11.37)$$

Здесь  $\omega_{\alpha}^* = (T_{\alpha} k_{\perp} / M_{\alpha} \omega_{B\alpha}) [\mathbf{e}_0, \nabla \ln n_0]$  — градиентная (дрейфовая) частота (предполагается  $\nabla T = 0$ ).

Приближенно уравнение (11.37) может быть удовлетворено при  $\psi = \bar{\psi}$  или при  $\omega \approx \omega_e^*$ . Первая возможность соответствует желобковым возмущениям. При этом (11.37) сводится к дисперсионному уравнению

$$\int \frac{dl}{B} \left[ \left( 1 - \frac{\omega_i^*}{\omega} \right) k_{\perp}^2 \rho_i^2 + 2 \frac{\omega_e^*}{\omega} \left( 1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \frac{\partial \ln B}{\partial \ln n_0} \right] = 0. \quad (11.38)$$

Вторая возможность соответствует нежелобковым возмущениям с частотой, отличающейся от  $\omega_e^*$  на малую величину порядка  $(v_{Ti}/L\omega_e^*)^2$ ,  $(k_{\perp}\rho_i)^2$  и  $a/R$ :

$$1 - \frac{\omega_i^*}{\omega} = - \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \times$$

$$\times \frac{\int \frac{dl}{B} \left[ \left( k_{\perp}^2 \rho_i^2 + 2 \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial \ln B}{\partial \ln n_0} \right) |\psi|^2 - \frac{T_i}{M_i \omega_e^*} \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|^2 \right]}{\int \frac{\tau}{2} F_e d\mu d\varepsilon (|\bar{\psi}|^2 - |\bar{\psi}|^2)}. \quad (11.39)$$

Это — аналог ветви косых градиентных возмущений (дрейфовых волн), описываемых дисперсионным уравнением (11.33).

б. Взаимодействие с колебаниями резонансных электронов. Резонансные частицы можно учесть, добавляя в  $Q$  мнимые члены, получающиеся при обходе особенности в знаменателе возмущенной функции распределения (ср. с § 11.3, 11.4). Поскольку  $\omega \gg (\omega_{Dl}, \tau_i^{-1})$ , то число резонансных ионов экспоненциально мало, как и в приближении однородного магнитного поля (ср. с § 6.1 книги [III]). Что касается электронов, то для них по порядку величины  $\omega_{De} < \omega < \tau_e^{-1}$ . Отсюда следует, что вклад в инкремент из-за поперечного электронного резонанса,  $\omega = \bar{\omega}_D$ , как и ионного, будет экспоненциально мал. Продольный резонанс,  $\omega = 2\pi n/\tau_e$ , осуществляется электронами, энергия которых мала по сравнению с тепловой как

$$(M_e \varepsilon / T)^{1/2} \simeq \omega L / v_{Te}. \quad (11.40)$$

Поскольку при малых  $\varepsilon f_e \sim 1/v_{Te}^3$ , то число таких электронов мало как  $(\omega L / v_{Te})^3$ . Это качественно отличается от случая однородного магнитного поля, когда в задачу входит только продольная функция распределения, которая при малых  $v_{\parallel}$  мала, как  $1/v_{Te}$ . Поэтому вклад в инкремент, обязанный резонансным электронам, будет теперь содержать множитель

$$\gamma \sim (\omega L / v_{Te})^3, \quad (11.41)$$

в отличие от

$$\gamma \sim \omega / k_z v_{Te}, \quad (11.42)$$

как это было в приближении продольно-однородного поля.

Взаимодействие резонансных электронов с колебаниями может приводить к раскачке последних, если только  $1 - \omega_e^*/\omega < 0$  (ср. с § 6.1 книги [III]). Этому условию при не слишком малых  $k_{\perp}$  удовлетворяет одна из ветвей желобковых возмущений (11.38). Нежелобковая ветвь (11.39) раскачивается, если подынтегральное выражение числителя правой части положительно, т. е. при

$$\left(\frac{v_{Ti}}{\omega_e^*}\right)^2 \int \frac{dl}{B} \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|^2 < \int \frac{dl}{B} |\psi|^2 \left( k_{\perp}^2 \rho_i^2 + 2 \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial \ln B}{\partial \ln n_0} \right). \quad (11.43)$$

Качественно это соответствует тем же самым ограничениям сверху на длину плазмы, что и найденные в § 6.1, 9.2 книги [III].

Оценку инкремента нежелобковых возмущений можно получить, используя результаты § 6.1 книги [III] и учитывая различие в числе резонансных частиц, характеризуемое соотношениями (11.41) и (11.42).

### § 11.6. Неустойчивость запертых частиц гидродинамического типа

**1. Качественное рассмотрение.** Пусть плазма, удерживаемая в магнитной ловушке, устойчива по отношению к возмущениям желобкового типа. В пренебрежении эффектом шира это означает, что магнитный дрейф частиц, усредненный по функции распределения и по длине силовой линии, имеет благоприятное направление, т. е. такое же, как и дрейф частиц под действием силы тяжести, направленной внутрь плазмы. В такой плазме могут, однако, развиваться различного рода нежелобковые неустойчивости. Некоторые из них имеют такую же природу, как и неустойчивости плазмы в однородном поле, например, рассмотренные в гл. 6 книги [III] неустойчивости, обусловленные градиентами плотности или температуры. Количественные соотношения для таких неустойчивостей в случае криволинейного магнитного поля получаются способом, указанным в § 11.5. Здесь рассмотрим новый класс нежелобковых неустойчивостей, так называемых «неустойчивостей запертых частиц», причиной которых, как и желобковой, является

ся магнитный дрейф частиц и неоднородность плазмы. Вначале рассмотрим это явление качественно. При этом будем полагать, что ловушка замкнута (типа свернутой в тор гофрированной адиабатической ловушки).

Учтем, что магнитное поле замкнутой ловушки неоднородно вдоль силовой линии. Частицы с не слишком большой продольной скоростью, движущиеся в такой ловушке, отражаются от областей с более сильным магнитным полем и вследствие этого локализованы в областях более слабого поля. Такие частицы будем называть запертыми в отличие от пролетных, которые движутся вдоль силовой линии без отражений.

Магнитный дрейф запертых частиц связан с кривизной поля только в той области, где эти частицы локализованы. Поэтому усреднение этого дрейфа должно происходить не по всей длине силовой линии, а только по области относительно слабого поля. В этой области кривизна поля, вообще говоря, является неблагоприятной, как, например, в случае пробкотрона без стабилизирующих стержней. Если и амплитуда возмущений имеет максимум именно в таких областях, то запертые частицы должны играть дестабилизирующую роль в отличие от случая желобковых возмущений, где само по себе наличие запертых частиц к неустойчивости не приводит.

Отмеченный выше эффект неблагоприятного дрейфа запертых частиц вытекает из следующего элементарного рассмотрения. Учитывая только области с неблагоприятной кривизной и полагая в этих областях амплитуду возмущений постоянной, находим вклад запертых частиц в диэлектрическую проницаемость (ср. с § 9.1 книги [II]):

$$\varepsilon_0^{\text{зап}} \simeq \frac{\omega_{pi}^2 \text{зап}}{\omega_{Bi}^2} \frac{g_{\text{эфф}} \kappa}{\omega^2}. \quad (11.44)$$

Пролетные частицы находятся в возмущенном электрическом поле, меняющемся вдоль силовой линии, и потому они распределены по закону Больцмана и имеют диэлектрическую проницаемость, по порядку равную

$$\varepsilon_0^{\text{прол}} \simeq 4\pi n_{\text{прол}} e^2 / k^2 T. \quad (11.45)$$

Суммируя (11.44) и (11.45) и приравнивая результат нулю получаем инкремент

$$\gamma = \gamma_0 k_{\perp} \rho_i (n_{\text{зап}}/n_{\text{прол}})^{1/2}, \quad (11.46)$$

где  $\gamma_0 \simeq v_{Ti}/(aR)^{1/2}$  — инкремент желобковой неустойчивости. Мы учли, что, согласно (1.10),  $g_{\text{эфф}} \simeq v_{Ti}^2/R$ .

Рассмотренная здесь качественно неустойчивость, первоначально обнаруженная Б. Б. Кадомцевым, — простейшая из класса так называемых неустойчивостей запертых частиц. Будем называть ее «неустойчивостью на запертых частицах гидродинамического типа».

Перейдем к количественному анализу этой неустойчивости. Вначале рассмотрим случай мультипольной ловушки, а затем тороидальной ловушки типа токамак.

**2. Случай мультипольной ловушки.** Предварительно заметим, что в приближении продольно-однородного магнитного поля в гл. 6 книги [II] было показано, что градиентные неустойчивости не развиваются, если  $\omega^* < k_z v_{Ti}$ . В случае возмущений с  $k_{\perp} a \approx 1$  это означает относительную малость продольной длины устройства  $L$ ,

$$\rho_i/a < \pi a/L. \quad (11.47)$$

При условии (11.47) возмущения с  $\omega \lesssim \omega^*$  следует считать медленными по сравнению с периодом движения частиц вдоль силовых линий,  $\omega \tau_i < 1$ . Возмущенный потенциал при этом удовлетворяет интегральному соотношению (11.11). Используя последнее, таким же путем, как и в § 11.4, можно получить достаточное условие устойчивости. Полагая  $\partial F/\partial \varepsilon < 0$  (это имеет место, например, при максвелловском  $F$ ) и  $\partial F/\partial \varepsilon + \partial F/B \partial \mu < 0$  (это исключает класс существенно «конусных» распределений) и учитывая, что  $F$  и  $\bar{\omega}_D$  зависят только от одной координаты  $\Psi$  (см. рис. 1.1), находим, что плазма устойчива, если при всех  $\varepsilon$  и  $\mu$

$$(\partial F/\partial \Psi) \partial J_{\parallel} / \partial \Psi > 0, \quad (11.48)$$

где  $J_{\parallel} = \int v_{\parallel} dl$ . Здесь было использовано соотношение (4.53), связывающее усредненный по силовой линии магнитный дрейф частицы  $V_{\text{др}}$  с ее продольным адиабатическим инвариантом  $J_{\parallel}$ .



При максвелловском  $F$  с  $\nabla T = 0$  условие (11.48) означает

$$\frac{\partial n_0}{\partial \Psi} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \Psi} > 0. \quad (11.49)$$

При плотности, спадающей с  $\Psi$ ,  $\partial n_0 / \partial \Psi < 0$ , из (11.49) вытекает, что плазма устойчива, если для всех ее частиц

$$\partial J_{\parallel} / \partial \Psi < 0. \quad (11.50)$$

Устройства, в которых это имеет место, называют системами с тах  $J_{\parallel}$ .

Если распределение по скоростям максвелловское, но  $\nabla T \neq 0$ , то вместо (11.49) из (11.48) получается

$$\frac{\partial \ln n_0}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \Psi} \left[ 1 - \left( \frac{3}{2} - \frac{Mv^2}{2T} \right) \eta \right] > 0, \quad (11.51)$$

где  $\eta \equiv \partial \ln T / \partial \ln n_0$ . Это означает, что при

$$\eta > 2/3 \quad (11.52)$$

система с тах  $J_{\parallel}$ , вообще говоря, может быть неустойчива.

Выясним, следуя Розенблюту, удовлетворяется ли достаточное условие устойчивости (11.50) в случае мультипольного поля типа изображенного на рис. 1.1. Используя соотношения (П4.38) и (П4.22), сделаем следующие тождественные преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \Psi} &= \int \frac{dl}{R} B \frac{d}{dB} \frac{\sqrt{1-\lambda B}}{B} = \\ &= - \int dB B \frac{d\alpha}{dB} \frac{d}{dB} \frac{\sqrt{1-\lambda B}}{B}. \end{aligned} \quad (11.53)$$

Здесь  $\lambda = \mu/\varepsilon$ ;  $\alpha$  — угол между силовой линией и каким-либо фиксированным направлением на плоскости  $(x, y)$ . Обратившись к рис. 1.1, видим, что  $d\alpha/dB \rightarrow -\infty$  вблизи точек  $B = B_{\text{макс}}$  и  $d\alpha/dB \rightarrow +\infty$  вблизи  $B = B_{\text{мин}}$ .

Вклад в интеграл от области с  $B \approx B_{\text{макс}}$  больше, чем от области с  $B \approx B_{\text{мин}}$  для частиц, у которых

$$\lambda \approx 1/B_{\text{макс}}. \quad (11.54)$$

Для таких частиц удовлетворяется условие, обратное (11.50), и поэтому они могут приводить к неустойчивости.

В том что неустойчивость действительно может иметь место, убеждает следующее рассмотрение. Полагаем  $F_e$  и  $F_i$  максвелловскими с  $T_e = T_i = T$  и считаем  $\nabla T = 0$ . Рассмотрим возмущения с  $\omega_D < \omega < \omega^*$  и  $k_{\perp} \rho_i \ll 1$ . При этом из (11.11) следует

$$\omega^2 = \omega^* \int d\mu d\epsilon \tau F \omega_D |\bar{\psi}|^2 / \int d\mu d\epsilon \tau F (|\bar{\psi}|^2 - |\psi|^2). \quad (11.55)$$

Здесь знаменатель неотрицателен, так что знак квадрата частоты определяется знаком числителя. В случае возмущений желобкового типа, когда  $\bar{\psi} \approx \psi$ , интегрирование в числителе сводится к усреднению магнитного дрейфа по всем частицам и дает  $\omega^2 > 0$ , в согласии с § 2.6 и 1.2. Рассмотрим, однако, возмущения, локализованные вблизи точки  $\chi = \chi_0$ , в которой  $B(\chi_0) = B_{\text{макс}}$ . Полагая для простоты  $\psi \sim \delta(\chi - \chi_0)$ , имеем

$$\bar{\psi} \sim \int \psi dl / v_{\parallel} \sim (1 - \lambda B_{\text{макс}})^{-1/2}. \quad (11.56)$$

Видно, что наибольший вклад в интеграл числителя (11.55) дают частицы с  $\lambda \equiv \mu/\epsilon \approx 1/B_{\text{макс}}$ . Но, согласно сказанному выше, такие частицы имеют неблагоприятный магнитный дрейф. Поэтому теперь  $\omega^2 < 0$ , что соответствует неустойчивости. По порядку величины инкремент равен

$$\gamma \simeq (\omega_D \omega^*)^{1/2} \simeq \omega^* (a/R)^{1/2}. \quad (11.57)$$

Таким образом, даже при условии (11.47) мультипольная ловушка оказывается неустойчивой. Эта неустойчивость обусловлена наличием запертых частиц, доходящих до области  $B = B_{\text{макс}}$  и небольшой доли пролетных частиц, скорость которых при  $\chi = \chi_0$  мала по сравнению с тепловой.

**3. Случай тороидальной ловушки типа токамак.** Количественный анализ гидродинамической неустойчивости на за-

пертых частицах в тороидальных ловушках типа токамак впервые был произведен Б. Б. Кадомцевым и О. П. Погуде в предположении, что токамак осесимметричен с круговыми сечениями магнитных поверхностей. В результате этими авторами было получено следующее выражение для квадрата инкремента:

$$\gamma^2 \simeq \varepsilon^{1/2} \bar{\omega}_D \omega_p^* / 2, \quad (11.58)$$

где  $\varepsilon = a/R$ ,  $\bar{\omega}_D$  — средняя частота магнитного дрейфа;  $\omega_p^*$  — частота ларморовского дрейфа, связанного с градиентом давления плазмы  $p$ . Результат (11.58) находится в качественном соответствии с (11.46), в чем можно убедиться, учитывая, что в случае токамака  $n_{зап}/n_{прол} \simeq \varepsilon^{1/2}$ .

### § 11.7. Диссипативная неустойчивость на запертых ионах

Изложенные в § 11.6 результаты о гидродинамической неустойчивости на запертых частицах основывались на предположении о бесстолкновительности ионов и электронов. При этом качественный анализ соответствующей неустойчивости можно было провести, исходя из оценочных выражений для диэлектрической проницаемости запертых и пролетных частиц вида (11.44), (11.45). Теперь рассмотрим, как изменится полученная в § 11.6 картина при наличии столкновений между частицами. При этом коснемся только тороидальных ловушек типа токамак.

Учтем, что столкновения сильнее всего влияют на движение запертых частиц (в этом можно убедиться, например, рассмотрев интеграл столкновений типа Ландау, определяемый формулой (П7.3) книги [II] при  $v_{\parallel} \ll v_T$ ) и что для запертых частиц

$$v_{зап} \simeq v/\varepsilon, \quad (11.59)$$

где  $v$  — характерная частота столкновений соответствующего сорта частиц. Поэтому, считая столкновения не слишком частыми, можно учитывать их роль только в динамике запертых частиц. Тогда оценка выражения для диэлектрической проницаемости пролетных частиц (11.45) останется прежней. Для запертых же частиц вместо (11.44) будем иметь [ср. с (9.3) книги [II] и с (1.6)]

$$\varepsilon_0^{\text{зап}} \simeq \frac{\kappa k b \omega_{pi}^2 \text{зап}}{\omega_{Bi} k_{\perp}^2} \times \left( \frac{1}{\omega + i\nu_{\text{зап}}^e - kV_{\text{др}}^e} - \frac{1}{\omega + i\nu_{\text{зап}}^i - kV_{\text{др}}^i} \right), \quad (11.60)$$

где смысл используемых символов можно понять, обратившись к § 1.1 (либо к § 9.1 книги [II]).

Оценочное выражение (11.60) при  $\omega \gg k V_{\text{др}} \gg v_{\text{зап}}$  переходит в (11.44). Если же  $v_{\text{зап}}^e \gg \omega \gg v_{\text{зап}}^i$ , то с помощью (11.60), (11.45) можно получить оценочное дисперсионное уравнение, из которого следует оценка для частоты, впервые найденная Б. Б. Кадомцевым и О. П. Погуде:

$$\omega \simeq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \omega_e^* + i \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\omega_e^{*2}}{\varepsilon} - i \frac{\nu_i}{\varepsilon}. \quad (11.61)$$

Согласно (11.61), имеет место неустойчивость, если

$$\nu_i \nu_e < \varepsilon^2 \omega^{*2}/4. \quad (11.62)$$

Эта неустойчивость называется *диссипативной неустойчивостью на запертых ионах*. Количественный анализ ее впервые был произведен Р. З. Сагдеевым и А. А. Галеевым, рассмотревшими осесимметричный токамак круглого сечения. Согласно их расчетам, при условии (11.62)

$$\omega = 1,3 \omega_{*t}^e (1 + i 0,96 \varepsilon \omega_{*t}^2 / \nu_e), \quad (11.63)$$

где

$$\omega_{*t}^e = 2 \sqrt{2\varepsilon} \omega_{ne} (1 + T_e/T_i)^{-1}, \quad (11.64)$$

а индекс  $t$  означает запертые (*trapped*).

### § 11.8. Диссипативная неустойчивость на запертых электронах

В п. 2 § 11.5 было показано, что при условиях (11.31) в плазме, удерживаемой в продольно-неоднородном магнитном поле, существует ветвь колебаний с частотой (11.33), которая является аналогом ветви косых «дрейфовых» волн, подробно обсуждавшейся в приближении однородного магнитного поля в книге [II]. Рассмотрим столк-

новительное взаимодействие с этой ветвью запертых электронов. Рассмотрение будем проводить качественно, аналогично п. 1 § 11.6 и § 11.7. При этом для определенности будем иметь в виду плазму, удерживаемую в тороидальных ловушках типа токамак.

Учтем, что при условиях (11.31) вклад в диэлектрическую проницаемость пролетных частиц по порядку величины определяется выражением (ср. с (6.1) и (6.5) книги [III])

$$\epsilon_{\text{прол}} \simeq \frac{1}{k_{\perp}^2 d^2} \left( 1 - \frac{\omega_{ne}}{\omega} + k_{\perp}^2 \rho_i^2 \right). \quad (11.65)$$

Поскольку при условиях (11.31) важно только запираение электронов (но не ионов), то

$$\epsilon_{\text{зап}} \simeq \frac{\epsilon^{1/2}}{k_{\perp}^2 d^2} \frac{\omega - \omega_{ne}}{\omega + i\nu_{\text{зап}}^e}. \quad (11.66)$$

При  $\nu_{\text{зап}}^e \gg \omega$  с помощью (11.65), (11.66) находим

$$\omega \simeq \omega_{ne} + i\epsilon^{3/2} (k_{\perp} \rho_i)^2 \omega_{ne}^2 / \nu_e. \quad (11.67)$$

Неустойчивость, описываемая этим уравнением, называется *диссипативной неустойчивостью на запертых электронах*.

При  $\nabla T \neq 0$  в правой части (11.67) вместо  $(k_{\perp} \rho_i)^2$  стоит величина порядка  $d \ln T / d \ln n_0$  (ср. с аналогичной ситуацией в гл. 6, 8 книги [III]). Диссипативная неустойчивость на запертых электронах в плазме с  $\nabla T \neq 0$  впервые рассматривалась Б. Б. Кадомцевым и О. П. Погуце.

### § 11.9. Коротковолновая неустойчивость гидродинамического типа на запертых электронах

Теперь рассмотрим возмущения с поперечными длинами волн, меньшими ларморовского радиуса ионов,  $k_{\perp} \rho_i > 1$ . Запертостью ионов пренебрегаем. Кроме того, считаем  $\omega \gg k_{\parallel} v_{Ti}$ ,  $k_{\parallel} \gg 1/qR$ ,  $\omega < \omega^*$ . Тогда

$$\epsilon_0^{(i)} = \frac{1}{k_{\perp}^2 d_i^2} \left[ 1 + \frac{\omega_{ni}}{\omega} I_0(z_i) e^{-z_i} \right]; \quad (11.68)$$

$$\epsilon_0^{(e)} = \frac{1}{k_{\perp}^2 d_e^2} \left[ 1 + C \epsilon^{1/2} \frac{\omega_{ne}}{\omega} \left( 1 + \frac{\bar{\omega}_{De}}{\omega} \right) \right], \quad (11.69)$$

где  $C$  — положительный коэффициент порядка единицы;  $\omega_{De}$  — частота среднего магнитного дрейфа запертых электронов;  $z_i = k_{\perp}^2 T_i / M_i \omega_{Bi}^2$ . С помощью (11.68), (11.71) находим, что при

$$C\varepsilon^{1/2} \approx (2\pi z_i)^{-1/2} \quad (11.70)$$

имеет место аperiодическая неустойчивость с инкрементом порядка

$$\gamma \simeq \varepsilon^{3/4} \omega^*, \quad (11.71)$$

по структуре аналогичным (11.46), (11.58). Эту неустойчивость первоначально анализировали Коппи и Револьт.

### § 11.10. Коротковолновые диссипативные неустойчивости на запертых электронах. Взаимодействие быстрых ионов с коротковолновыми возмущениями

В отличие от § 11.9, пренебрежем магнитным дрейфом запертых электронов, но учтем их столкновения, полагая их слабыми,  $\omega \gg v_{\text{зан}}^e$ . Кроме того, будем считать  $\nabla T_e \neq 0$ . При этом

$$\varepsilon_0^{(e)} = \frac{1}{k_{\perp}^2 d_e^2} \left\{ 1 + C\varepsilon^{1/2} \frac{\omega_{ne}}{\omega} \left[ 1 - i \frac{v_{\text{эфф}}^e}{\omega} (1 + C_1 \eta_e) \right] \right\}, \quad (11.72)$$

где  $C_1$  — численный коэффициент, а  $v_{\text{эфф}}^e$  — некоторая эффективная частота столкновений, смысл которой разъясним ниже.

С помощью (11.68), (11.72) получаем

$$\text{Re } \omega = \frac{(2\pi z_i)^{-1/2} - C\varepsilon^{1/2}}{1 + T_e/T_i} \omega_{ne}; \quad (11.73)$$

$$\gamma = \frac{C\varepsilon^{1/2} v_{\text{эфф}}^e (1 + C_1 \eta_e)}{(2\pi z_i)^{-1/2} - C\varepsilon^{1/2}}. \quad (11.74)$$

При не слишком малых длинах волн, когда  $(2\pi z_i)^{-1/2} > C\varepsilon^{1/2}$ , уравнения (11.73), (11.74) описывают неустойчивость, представляющую собой продолжение длинноволновой диссипативной неустойчивости на запертых электронах, рассмотренной в § 11.10, на область  $z_i \gtrsim 1$ . При этом

$$\operatorname{Re} \omega = \frac{\omega_{ne} (2\pi z_i)^{-1/2}}{1 + T_e/T_i}, \quad (11.75)$$

так что фазовая скорость возмущений направлена в сторону ларморовской (диамагнитной) скорости электронов,  $\omega/\omega_{ne} > 0$ . Такая неустойчивость возможна даже при  $\nabla T_e = 0$ . В этом случае

$$\gamma \simeq C\varepsilon^{1/2} v_{\text{эфф}}^e (2\pi z_i)^{-1/2}. \quad (11.76)$$

Если же волны достаточно короткие,  $(2\pi z_i)^{-1/2} < C\varepsilon^{1/2}$  то, согласно (11.73),

$$\operatorname{Re} \omega = \frac{C\varepsilon^{1/2} \omega_{ni}}{1 + T_i/T_e}, \quad (11.77)$$

так что  $\omega/\omega_{ne} < 0$ . В этих условиях для неустойчивости необходимо наличие градиента электронной температуры, а именно, должно быть

$$1 + C_1 \eta_e < 0. \quad (11.78)$$

При этом

$$\gamma = -C v_{\text{эфф}}^e (1 + C_1 \eta_e). \quad (11.79)$$

Качественные соотношения типа (11.77)—(11.79) были получены Коппи и Револдтом. Количественный анализ коротковолновых возмущений был произведен автором. При этом было найдено

$$\left. \begin{aligned} v_{\text{эфф}}^e &= \frac{4,1 (v_e/\varepsilon\omega)^{1/2}}{\{\ln [32 (\varepsilon\omega/2v_e)^{1/2}]\}^{3/2}}; \\ C &= 2,6; C_1 = -0,66. \end{aligned} \right\} \quad (11.80)$$

При таком значении коэффициента  $C_1$  критерий неустойчивости (11.78) имеет вид

$$\eta_e > 1,52. \quad (11.81)$$

Таким образом, в плазме токамака могут развиваться две разновидности коротковолновых диссипативных неустойчивостей на запертых электронах. Одна из них, связанная с не слишком короткими длинами волн, может иметь место при  $\nabla T_e = 0$ , а вторая, более коротковолновая, возможна, если только  $\nabla T_e \neq 0$ .

Ветви колебаний типа (11.75), (11.77) интересны также в связи с задачами о плазме токамака, содержащей группы быстрых ионов; такие ионы могут взаимодействовать с соответствующими типами колебаний и, вообще говоря, могут приводить к их раскачке. Вопрос о такого рода взаимодействии был поставлен Коппи и Бхарда, а правильный ответ был получен автором.

### § 11.11. Квазинечетные моды в тороидальных ловушках и их взаимодействие с запертыми частицами и группами высокоэнергичных ионов

Рассмотренные в § 11.6—11.10 неустойчивости плазмы в тороидальных ловушках типа токамак связаны с возмущениями, амплитуда потенциала которых является четной функцией угла  $\theta$ ; иначе говоря, там считалось

$$\psi = \exp[-i\omega t + ik_a a + i(m\theta - n\varphi)] \bar{\psi}(\theta), \quad (11.82)$$

где

$$\bar{\psi}(\theta) = \bar{\psi}(-\theta). \quad (11.83)$$

Предполагается, что  $|s| \leq 1/2$ , где  $s = m - nq$ . Такого рода возмущения называются *четными модами*.

В связи с этим встает вопрос о существовании и о возможности раскачки возмущений типа нечетных мод, т. е. таких, что

$$\bar{\psi}(\theta) = -\bar{\psi}(-\theta). \quad (11.84)$$



Такие моды, если бы они существовали, были бы нечувствительны к диссипации на запертых частицах.

Вопрос о нечетных модах был поставлен Коппи. Правильный ответ на него был получен в работах В. А. Мазура, автора и И. Г. Шухмана. Оказывается, что о существовании строго нечетных мод (так же, как и строго четных) можно говорить только в предельном случае  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow 0$ . При конечных, хотя и малых, значениях параметров  $\varepsilon$  и  $s$  четные и нечетные моды перепутываются (зацепляются) друг с другом, так что реально следует говорить о квазичетных и квазинечетных модах. При этом оказывается, что квазинечетные моды также чувствительны к диссипации на запертых частицах, хотя и в меньшей степени, чем квазичетные.

Учет такого рода диссипации существен, например, в задачах о взаимодействии квазинечетных мод с высокоэнергичными ионами, образующимися вследствие инжекции в тороидальную ловушку потока быстрых нейтральных атомов, и с быстрыми  $\alpha$ -частицами, рождающимися при термоядерных реакциях. Соответствующий вопрос был поставлен Коппи и Бхадра, а правильный ответ получили В. А. Мазур, автор и И. Г. Шухман.

### § 11.12. Примесные неустойчивости в токамаке

В свое время Коппи, Фюрт, Розенблют и Р. З. Сагдеев отметили, что примеси тяжелых ионов могут существенно влиять на устойчивость плазмы и, в частности, приводить к появлению новых типов неустойчивостей, впоследствии получивших название примесных или неустойчивостей из-за примесей (ссылку на работу Коппи и др. см. в гл. 6 книги [III]). Этими авторами были рассмотрены неустойчивости в приближении прямого магнитного поля. Затем в теории примесных неустойчивостей стали учитываться тороидальные эффекты, что важно в связи с проблемой термоядерных реакторов — токамаков. На этом пути были выявлены некоторые новые разновидности примесных неустойчивостей.

К числу наиболее важных примесных неустойчивостей относятся неустойчивости, качественно впервые обсуждавшиеся Коппи, а количественно — автором и И. Г. Шухманом. Как и неустойчивости типа Кадомцева—Погуце, рассмотренные в § 11.6, 11.7. они связаны с запертыми

ионами основной компоненты плазмы. Однако в отличие от неустойчивостей (§ 11.6, 11.7), соответствующих четным модам (см. § 11.11), примесные неустойчивости, обсуждавшиеся Коппи, автором и И. Г. Шухманом, связаны с расщепкой нечетных мод.

Важность нечетных мод в задаче о примесных неустойчивостях обусловлена тем, что возмущенная плотность запертых ионов основной компоненты плазмы, соответствующая этим модам, мала по сравнению с их возмущенной плотностью, соответствующей четным модам, благодаря чему оказывается, что в четных модах важна роль примесных ионов.

### Библиографический обзор к гл. 11

1. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы. М., Атомиздат, 1971. В гл. 15, 16, 18 книги [1] можно найти библиографию по вопросам, изложенным в § 11.2—11.7.
2. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Диссипативная неустойчивость на запертых частицах в плотной плазме. — «Докл. АН СССР», 1969, т. 186, с. 553.  
В этой работе впервые исследовалась диссипативная неустойчивость на запертых электронах (см. § 11.8).
3. Coppi B., Rewoldt G. Fluid-like instability of trapped electrons in confined plasmas. — «Phys. Lett.», 1974, v. 49A, p. 36.  
Здесь первоначально анализировалась коротковолновая неустойчивость гидродинамического типа на запертых электронах (§ 11.9).
4. Coppi B., Rewoldt G. New trapped electron instability. — «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 33, p. 1329.
5. Михайловский А. Б. Коротковолновая диссипативная неустойчивость на запертых электронах. — «Письма в ЖЭТФ», 1976, т. 23, с. 436.  
В работах [4, 5] было указано на возможность существования коротковолновых диссипативных неустойчивостей на запертых электронах (см. § 11.10).
6. Coppi B. Plasma collective modes involving geometry and velocity spaces. — «Riv. Nuovo cimento», 1969, v. 1, p. 357.  
В этой обзорной работе изложена, в частности, концепция Коппи о четных и нечетных модах (см. § 11.11).
7. Coppi B., Bhadra D. K. Collective modes in an inhomogeneous beam injected plasma. — «Phys. Fluids», 1975, v. 18, p. 692.  
Здесь рассматривалось возбуждение быстрыми ионами коротковолновых возмущений (см. § 11.10) и возмущений типа нечетных мод (см. § 11.11).
8. Михайловский А. Б. О возбуждении быстрыми ионами коротковолновой моды на запертых электронах. — Препринт ИАЭ-2663. М., 1976; «Физика плазмы». 1977, т. 3, с. 74.

В этой работе исследовалась роль электронных столкновений в задаче о возбуждении быстрыми ионами коротковолновой моды на запертых электронах (см. § 11.10). Было показано, что в типичных условиях токамака декремент затухания этой моды, обусловленной электронными столкновениями, велик по сравнению с инкрементом, найденным Коппи и Бхадра [7]. Был сделан вывод, что предсказанные этими авторами неустойчивости в реальных условиях токамака невозможны.

9. Мазур В. А., Михайловский А. Б., Шухман И. Г. Влияние запертых электронов на нечетные «дрейфовые» моды в токамаке. — Препринт ИАЭ-2698. М., 1976; «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1977, т. 72, с. 956.
10. Михайловский А. Б., Шухман И. Г. Квазинечетные альфвеновские моды в токамаке и их взаимодействие с запертыми электронами. — Препринт ИАЭ-2707. М., 1976.  
В работе [9] и частично в [10] исследовались нечетные «дрейфовые» моды и их взаимодействие с запертыми электронами и быстрыми ионами (см. § 11.11).
11. Coppi В. Plasma modes due to impurity and magnetically trapped ions. — «Phys. Rev. Lett.», 1973, v. 31, p. 1441.
12. Михайловский А. Б., Шухман И. Г. О примесных неустойчивостях в токамаке. — Препринт ИАЭ-2732. М., 1976; «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 495.  
В работах [11, 12] изучались примесные неустойчивости в токамаке (см. § 11.12).

## Глава 12

### СТАБИЛИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ МИКРОНЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ ПРИ БОЛЬШОМ ДАВЛЕНИИ ПЛАЗМЫ

#### § 12.1. Введение

В книге [II] отмечалось, что потенциальные (электростатические) неустойчивости, предсказываемые для плазмы низкого давления, могут подавляться с ростом давления плазмы. Там шла речь о неустойчивостях, обнаруживаемых в приближении прямого магнитного поля. Представляет интерес выяснить влияние давления плазмы на неустойчивости, специфичные для криволинейного магнитного поля. Применительно к гидромагнитным неустойчивостям этот вопрос рассматривался в гл. 6—8, где, в частности, был выявлен гидромагнитный эффект самостабилизации плазмы большого давления. В настоящей главе исследуем влияние давления плазмы на некоторые типы микронеустойчивостей. В § 12.2 рассмотрим неустойчи-

вость на косых дрейфовых волнах, которая при конечном давлении плазмы переплетается с альфвеновской неустойчивостью; в § 12.3 — неустойчивость гидродинамического типа на запертых ионах, а в § 12.4 — коротковолновые неустойчивости на запертых электронах. При этом обнаруживается стабилизация неустойчивостей с ростом давления плазмы.

### **§ 12.2. Стабилизация альфвеновских и косых дрейфовых волн, связанная с запиранием резонансных электронов, в плазме конечного давления**

**1. Введение.** Согласно § 14.2 книги [II], неоднородная плазма с  $\nabla T = 0$  (т. е. при наличии одного только градиента плотности,  $\nabla n_0 \neq 0$ ) и не слишком малым давлением ( $\beta \equiv 16\pi n_0 T / B_0^2 > M_e / M_i$ ) более устойчива, чем плазма нулевого давления ( $\beta \ll M_e / M_i$ ). Как отмечалось в § 14.2 книги [II], неустойчивости плазмы с  $\beta > M_e / M_i$  и  $\nabla n_0 \neq 0$  связаны с возбуждением резонансными электронами альфвеновских и косых дрейфовых волн и характеризуются инкрементом  $\gamma \sim \beta^{-1/2}$ . Согласно § 14.3 книги [II], эти неустойчивости подавляются с ростом  $\beta$  вследствие затухания на ионах, так что плазма с  $T_e = T_i$  устойчива, если  $\beta > 0,13$ . Такой результат получается в предположении продольно-однородного магнитного поля. В данном параграфе выясняется, как изменится этот результат при наличии продольной неоднородности магнитного поля.

Важной спецификой случая продольно-неоднородного поля является запираение частиц в областях более слабого магнитного поля. Запертые частицы взаимодействуют с колебаниями иначе, чем пролетные. Одним из следствий этого является возможность развития неустойчивостей, не имеющих аналога в случае однородного магнитного поля. Такого рода неустойчивости, называемые неустойчивостями запертых частиц, обсуждались в гл. 11. В настоящем параграфе мы проанализируем другое следствие запираения частиц — уменьшение числа пролетных частиц, резонансно взаимодействующих с колебаниями. В приближении плазмы нулевого давления,  $\beta \ll M_e / M_i$ , этот эффект был рассмотрен в § 11.6. Целью настоящего параграфа является рассмотрение этого эффекта при  $\beta > M_e / M_i$ .

В соответствии с гл. 13 книги [II], при анализе колебаний плазмы с  $\beta > M_e/M_i$  необходимо учитывать непотенциальность их электрического поля и возмущения магнитного. Общие соотношения, учитывающие эти эффекты в приближении слабой неоднородности статического магнитного поля, приводятся в п. 2. Возмущения плотностей зарядов и токов, связанные с резонансными электронами, движущимися в продольно-неоднородном магнитном поле, вычисляются в п. 3. В п. 4 выводится выражение для критического  $\beta$ , при котором неустойчивости подавляются. Результаты обсуждаются в п. 5.

**2. Постановка задачи.** а) Каноническая форма электродинамических уравнений при  $M_e/M_i < \beta < 1$ . Как отмечалось в гл. 13 книги [II] при  $M_e/M_i < \beta < 1$  электромагнитное поле возмущений плазмы можно характеризовать двумя функциями: скалярным потенциалом  $\psi$  и компонентой векторного потенциала, параллельной статическому магнитному полю  $\mathbf{B}_0$ ,  $A_{\parallel} = A_{\parallel} \mathbf{e}_0$ , где  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{B}_0/B_0$ . Возмущения электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , связаны с  $\psi$  и  $A_{\parallel}$  соотношениями

$$\mathbf{E} = -\nabla\psi - (\mathbf{e}_0/c) \partial A_{\parallel}/\partial t; \quad \mathbf{B} = [\nabla A_{\parallel}, \mathbf{e}_0]. \quad (12.1)$$

Функции  $\psi$  и  $A_{\parallel}$  удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{\alpha=e,i} \rho^{(\alpha)} = 0; \quad k_{\perp}^2 A_{\parallel} = (4\pi/c) \sum_{\alpha=e,i} j_{\parallel}^{(\alpha)}, \quad (12.2)$$

где  $\rho^{(\alpha)}$ ,  $j_{\parallel}^{(\alpha)}$  — возмущения плотностей зарядов и продольных токов электронов и ионов, зависящие от  $\psi$  и  $A_{\parallel}$ :

$$\rho^{(\alpha)} = \rho^{(\alpha)}(\psi) + \rho^{(\alpha)}(A_{\parallel}); \quad j_{\parallel}^{(\alpha)} = j_{\parallel}^{(\alpha)}(\psi) + j_{\parallel}^{(\alpha)}(A_{\parallel}). \quad (12.3)$$

Удобно записать (12.2) в операторной форме, введя операторы  $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}$ , определенные соотношениями (ср. с § 13.3 книги [II])

$$\rho^{(\alpha)}(\psi) = -(k_{\perp}^2/4\pi) \varepsilon_{00}^{(\alpha)} \psi; \quad \rho^{(\alpha)}(A_{\parallel}) = (k_{\perp} \omega/4\pi c) \varepsilon_{03}^{(\alpha)} A_{\parallel};$$

$$j_{\parallel}^{(\alpha)}(\psi) = -(k_{\perp} \omega/4\pi) \varepsilon_{30}^{(\alpha)} \psi; \quad j_{\parallel}^{(\alpha)}(A_{\parallel}) = (\omega^2/4\pi c) \varepsilon_{33}^{(\alpha)} A_{\parallel}. \quad (12.4)$$

Здесь  $\omega$  — частота колебаний;  $k_{\perp}$  — поперечное волновое число (зависимость возмущений от времени и поперечных координат выбрана в виде  $\exp(-i\omega t + ik_{\perp} r_{\perp})$ ). Тогда вместо (12.2) имеем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{00}\psi - (\omega/ck_{\perp}) \varepsilon_{03}A_{\parallel} &= 0; \\ -(\omega/ck_{\perp}) \varepsilon_{30}\psi + [(\omega/ck_{\perp})^2 \varepsilon_{33} - 1] A_{\parallel} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

где  $\varepsilon_{ik} = \sum_{\alpha=e,i} \varepsilon_{jk}^{(\alpha)}$ .

б) Дисперсионное уравнение в пренебрежении неоднородностью магнитного поля и резонансными частицами. В приближении однородного магнитного поля  $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{z}$  и возмущений вида  $\exp(ik_{\parallel}z)$  операторы  $\varepsilon_{ik}$  — просто числа. Они могут быть найдены с использованием выражения для возмущенной функции распределения, приведенной в гл. 13 книги [II]:

$$f^{(\alpha)} = - \frac{e_{\alpha} F^{(\alpha)}}{T} \left[ \psi - \left( \psi - \frac{v_{\parallel}}{c} A_{\parallel} \right) \frac{\omega - \omega_{\alpha}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \times \right. \\ \left. \times J_0^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{B\alpha}} \right) \right], \quad (12.6)$$

и формул для плотностей зарядов и токов

$$\rho^{(\alpha)} = \int f^{(\alpha)} dv; \quad j_{\parallel}^{(\alpha)} = \int v_{\parallel} f^{(\alpha)} dv. \quad (12.7)$$

В уравнении (12.6)  $F$  означает максвелловскую функцию распределения,  $\omega_{\alpha} = k_{\parallel} \kappa T / e_{\alpha} B$ ,  $\kappa = \partial \ln n_0 / \partial x$ ;  $n_0$  и  $T$  — соответственно плотность и температура плазмы.

В интересующем нас случае  $v_{Ti} \ll \omega / k_{\parallel} \ll v_{Te}$  ( $v_{Te} = (2T/M_e)^{1/2}$  — тепловая скорость) и в пренебрежении резонансными частицами величины  $\varepsilon_{ik}$  равны (обозначено верхним индексом нуль)

$$\varepsilon_{00}^{(0)} = \varepsilon_{\perp} + (k_{\parallel}/k_{\perp})^2 \varepsilon_{\parallel}; \quad \varepsilon_{03}^{(0)} = \varepsilon_{30}^{(0)} = (k_{\parallel}/k_{\perp}) \varepsilon_{\parallel}; \\ \varepsilon_{33}^{(0)} = \varepsilon_{\parallel}, \quad (12.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\perp} &= (c/c_A)^2 (1 - \omega/\omega_i) \Phi(z_i); \\ \varepsilon_{\parallel} &= (k_{\parallel} d)^{-2} (1 - \omega_e/\omega); \\ \Phi(z_i) &= [1 - I_0(z_i) \exp(-z_i)]/z_i; \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

$c_A = (B_0/4\pi M_i n_0)^{1/2}$  — скорость Альфвена;  $d = (T/4\pi n_0 e^2)^{1/2}$  — радиус Дебая;  $z_i = k_{\perp}^2 T/M_i \omega_{Bi}^2$ . В этом приближении из (12.5) получается дисперсионное уравнение

$$\varepsilon_{\parallel} [\varepsilon_{\perp} - (k_{\parallel}/k_{\perp})^2 N^2] - \varepsilon_{\perp} N^2 = 0, \quad N^2 \equiv (ck_{\perp}/\omega)^2, \quad (12.10)$$

в явном виде означающее

$$\begin{aligned} (1 - \omega_e/\omega) [(1 - \omega_i/\omega) \Phi - k_{\parallel}^2 c_A^2/\omega^2] - \\ - z_i \Phi (1 - \omega_i/\omega) k_{\parallel}^2 c_A^2/\omega^2 = 0. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Это уравнение описывает колебания с вещественными частотами. Нам следует найти мнимые поправки к этим частотам, определяемые взаимодействием колебаний с резонансными частицами.

в) Квадратичная форма. Умножая первое и второе уравнения (12.5), соответственно на  $\psi^*$  и  $A_{\parallel}^*$  (\* — символ комплексного сопряжения), затем складывая одно с другим и интегрируя сумму по пространству, получаем

$$\begin{aligned} \langle \psi^* \varepsilon_{00} \psi \rangle - \frac{\omega}{ck_{\perp}} \langle \psi^* \varepsilon_{03} A_{\parallel} + A_{\parallel}^* \varepsilon_{30} \psi \rangle + \\ + \langle A_{\parallel}^* \left( \frac{\omega^2}{c^2 k_{\perp}^2} \varepsilon_{33} - 1 \right) A_{\parallel} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Здесь  $\langle \dots \rangle \equiv \int (\dots) d\mathbf{r}$ .

Вследствие эффектов резонансных частиц входящие в (12.12) величины  $\varepsilon_{ik}$  отличаются от  $\varepsilon_{ik}^{(0)}$ , так что теперь

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + \varepsilon_{ik}^{(1)}. \quad (12.13)$$

С учетом членов порядка  $\varepsilon_{ik}^{(1)}$  из (12.12) следует

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_{00}^{(0)} \langle \psi^* \psi \rangle - \frac{\omega}{ck_{\perp}} \varepsilon_{03}^{(0)} \langle \psi^* A_{\parallel} + A_{\parallel}^* \psi \rangle + \\
& + \left( \frac{\omega^2}{c^2 k_{\perp}^2} \varepsilon_{33}^{(0)} - 1 \right) \langle A_{\parallel}^* A_{\parallel} \rangle + \langle \psi^* \varepsilon_{00}^{(1)} \psi \rangle - \frac{\omega}{ck_{\perp}} \langle \psi^* \varepsilon_{03}^{(1)} A_{\parallel} + \\
& + A_{\parallel}^* \varepsilon_{30}^{(1)} \psi \rangle + \frac{\omega^2}{c^2 k_{\perp}^2} \langle A_{\parallel}^* \varepsilon_{33}^{(1)} A_{\parallel} \rangle = 0. \quad (12.14)
\end{aligned}$$

Теперь используем соотношение между  $A_{\parallel}$  и  $\psi$ , вытекающее из (12.5), и исключим  $A_{\parallel}$  из (12.14). Очевидно, что в поправочные члены уравнения (12.14) следует подставлять только результат нулевого приближения (12.5)

$$A_{\parallel} = \frac{\omega}{ck_{\perp}} \frac{\varepsilon_{30}^{(0)}}{(\omega/ck_{\perp})^2 \varepsilon_{33}^{(0)} - 1} \psi. \quad (12.15)$$

Заметим также, что мы интересуемся только поправками к мнимой части частоты. Поскольку комбинации  $\langle \psi^* A_{\parallel} + A_{\parallel}^* \psi \rangle$  и  $\langle A_{\parallel}^* A_{\parallel} \rangle$  — вещественны, то при подстановке  $A_{\parallel}$  в главные члены уравнения (12.14) также достаточно учитывать лишь нулевое приближение, т. е. (12.15). При этом из (12.14) получается уравнение

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_{\parallel} [\varepsilon_{\perp} - (k_{\parallel}/k_{\perp})^2 N^2] - \varepsilon_{\perp} N^2 + \frac{1}{\langle \psi^* \psi \rangle} \left\{ \varepsilon_{\parallel} \langle \psi^* \left[ \varepsilon_{00}^{(1)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} (\varepsilon_{03}^{(1)} + \varepsilon_{30}^{(1)}) + \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} \varepsilon_{33}^{(1)} \right] \psi \rangle - \right. \\
& \left. - N^2 \langle \psi^* \varepsilon_{00}^{(1)} \psi \rangle + \varepsilon_{\perp} \langle \psi^* \varepsilon_{33}^{(1)} \psi \rangle \right\} = 0. \quad (12.16)
\end{aligned}$$

Теперь необходимо найти явный вид операторов  $\varepsilon_{ik}^{(1)}$ , что и будет сделано в следующем пункте.

**3. Вычисление вклада резонансных электронов.** Поскольку резонансные ионы принадлежат к «хвосту» максвелловского распределения  $v_{\text{рез}} = \omega/k_{\parallel} \simeq c_A \gg v_{Ti}$ , то влиянием продольной неоднородности магнитного поля на движение ионов можно пренебречь. Поэтому вклад резонансных ионов в  $\varepsilon_{ik}^{(1)}$  можно найти, используя выражение



для  $f^{(i)}$  вида (12.6), что делалось в гл. 13 книги [II]. Таким образом, остается вычислить только вклад резонансных электронов. Переходим к этому вычислению, опуская индекс электронов «e» всюду, где это возможно.

Из уравнения Власова стандартным образом находим общее выражение для возмущенной функции распределения электронов:

$$f = -\frac{eF}{T} \left\{ \psi + i(\omega - \omega_e) \int_{-\infty}^t \left( \psi - \frac{v_{\parallel} A_{\parallel}}{c} \right) \times \right. \\ \left. \times \exp[-i\omega(t' - t)] dt' \right\}. \quad (12.17)$$

Мы интересуемся только пролетными электронами, движущимися в каком-либо одном направлении вдоль силовых линий. Для простоты полагаем силовые линии замкнутыми. При этом в соответствии с § 11.2 интеграл по бесконечному времени (12.17) может быть выражен через интеграл по периоду движения частицы вдоль замкнутой силовой линии, так что

$$f = f' + \frac{eF}{T} (\omega - \omega_e) \frac{\cos(\bar{\omega}\tau/2)}{2 \sin(\bar{\omega}\tau/2)} \int_0^L \left( \psi - \right. \\ \left. - \frac{v_{\parallel}}{c} A_{\parallel} \right) \exp\left(-i\omega \int_t^{t'} \frac{dl''}{v_{\parallel}}\right) \frac{dl'}{v_{\parallel}}; \quad (12.18)$$

$$f' = -\frac{eF}{T} \left\{ \psi + \frac{i}{2} (\omega - \omega_e) \left[ \int_0^t \left( \psi - \frac{v_{\parallel}}{c} A_{\parallel} \right) \times \right. \right. \\ \left. \times \exp\left(-i\omega \int_t^{t'} \frac{dl''}{v_{\parallel}}\right) \frac{dl'}{v_{\parallel}} - \int_t^L \left( \psi - \frac{v_{\parallel}}{c} A_{\parallel} \right) \times \right. \\ \left. \left. \times \exp\left(-i\omega \int_t^{t'} \frac{dl''}{v_{\parallel}}\right) \frac{dl'}{v_{\parallel}} \right] \right\}; \quad (12.19)$$

где  $\bar{\omega} = \omega - k_{\parallel} \bar{v}_{\parallel}$ ;  $\bar{v}_{\parallel} = \oint dl/\tau$  — средняя за период скорость частицы;  $\tau = \oint dl/v_{\parallel}$  — период;  $L = \oint dl$  — длина силовой линии.

Используя уравнения (12.18), (12.7) и (12.4), можно найти средние значения  $\varepsilon_{ik}^{(1)}$ , входящие в (12.16). Мнимая часть их не зависит от  $f'$ , она определяется полюсами выражения  $\cos(\bar{\omega}\tau/2)/2 \sin(\bar{\omega}\tau/2)$ . Мнимая часть этого выражения определяется соотношением (см. также гл. 11)

$$\text{Im} \frac{\cos(\bar{\omega}\tau/2)}{2 \sin(\bar{\omega}\tau/2)} = -\frac{\pi}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\bar{\omega} - \omega_n), \quad (12.20)$$

где  $\omega_n$  есть решение уравнения  $\sin(\omega_n\tau/2) = 0$ , т. е.

$$\omega_n = 2\pi n/\tau; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12.21)$$

В результате получаем (ср. с гл. 11)

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle \psi^* \varepsilon_{33}^{(1)} \psi \rangle &= \frac{\pi}{(k_{\parallel} d)^2} \left(1 - \frac{\omega_e}{\omega}\right) \int F_0 d\alpha d\beta d\epsilon d\mu \times \\ &\times \frac{\bar{\omega}}{\tau} \sum_n \delta\left(\bar{\omega} - \frac{2\pi n}{\tau}\right) \left| \int_0^L \psi(l') \exp\left[-i\omega \int_0^l \frac{dl'}{v_{\parallel}}\right] \frac{dl}{v_{\parallel}} \right|^2; \end{aligned} \quad (12.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Im} \langle \psi^* \varepsilon_{00}^{(1)} \psi \rangle &= \left(\frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}}\right)^2 \text{Im} \langle \psi^* \varepsilon_{33}^{(1)} \psi \rangle; \\ \text{Im} \langle \psi^* \left[ \varepsilon_{00}^{(1)} - \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} (\varepsilon_{03}^{(1)} + \varepsilon_{30}^{(1)}) + \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} \varepsilon_{33}^{(1)} \right] \psi \rangle &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.23)$$

При получении уравнений (12.23) были использованы тождества

$$\begin{aligned} \int_0^L [\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}(l)] \psi(l) \exp\left(-i\omega \int_0^l \frac{dl'}{v_{\parallel}}\right) \frac{dl}{v_{\parallel}(l)} = \\ = i \int_0^{\tau} \frac{d}{dt} \psi[l(t), t] dt = 0. \end{aligned} \quad (12.24)$$

В формуле (12.22)  $F_0 = F/n_0$ ;  $\varepsilon = v^2/2$ ;  $\mu = v_{\perp}^2/2B_0$ ;  $\alpha, \beta$  — поперечные координаты;  $d\alpha d\beta = B d\tau_{\perp}$ . Заметим, что поскольку  $k_{\parallel} = 2\pi n_1/L$ ,  $n_1 = \pm 1, \pm 2, \dots$ , то в (12.22) можно заменить  $\omega \rightarrow \omega$  и при этом переобозначить индекс суммирования по  $n$ . Поэтому в дальнейшем черта над  $\omega$ , как правило, будет опускаться.

Используя уравнения (12.22), (12.23) и аналогичные уравнения для ионов, можно привести уравнение (12.15) к виду, аналогичному (12.11):

$$\left[ (1 - \omega_e/\omega) + i \sum_{\alpha=e,i} (1 - \omega_{\alpha}/\omega) \xi^{(\alpha)} \right] \left[ (1 - \omega_i/\omega) \Phi - k_{\parallel}^2 c_A^2/\omega^2 \right] - z_i \Phi (1 - \omega_i/\omega) k_{\parallel}^2 c_A^2/\omega^2 = 0, \quad (12.25)$$

где

$$\xi^{(e)} = \frac{\pi}{\langle \psi^* \psi \rangle} \int F_0^{(e)} d\mu d\varepsilon d\alpha d\beta \frac{\omega}{\tau} \sum_n \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\tau}\right) \times \left| \int_0^L \psi(l) \exp\left(-i\omega \int_0^l \frac{dl'}{v_{\parallel}}\right) \frac{dl}{v_{\parallel}} \right|^2; \quad (12.26)$$

$$\xi^{(i)} = \frac{\omega \sqrt{\pi}}{k_{\parallel} v_{Ti}} \exp[-(\omega/k_{\parallel} v_{Ti})^2 - z_i] I_0(z_i). \quad (12.27)$$

В приближении потенциальных возмущений  $\omega/k_{\parallel} c_A \rightarrow 0$ ,  $z_i \ll 1$ , уравнение (12.25) находится в соответствии с (11.30).

**4. Граница устойчивости.** При  $z_i \ll 1$  уравнение (12.25) описывает взаимодействие резонансных частиц с двумя типами волн: так называемых дрейфовых волн с частотами близкими к

$$\omega = \omega_e, \quad (12.28)$$

и альфвеновских волн с частотами, определяемыми приближенным уравнением

$$\omega^2 - \omega \omega_i - k_{\parallel}^2 c_A^2 = 0. \quad (12.29)$$

Вопрос о возбуждении этих волн резонансными электронами и их стабилизации резонансными ионами в пренебрежении продольной неоднородностью магнитного поля излагался в гл. 14 книги [II]. Теперь нас интересует стабилизирующая роль ионов при наличии продольной неоднородности магнитного поля.

Из (12.25) находим, что затухание на ионах уравнивает раскачку на электронах, если удовлетворяются следующие два соотношения:

$$(1 - \omega_e/\omega) \xi^{(e)} + (1 - \omega_i/\omega) \xi^{(i)} = 0; \quad (12.30)$$

$$\left(1 - \frac{\omega_i}{\omega}\right) \left[ \left(1 - \frac{\omega_i}{\omega}\right) \Phi(z_i) - \frac{k_{\parallel}^2 c_A^2}{\omega^2} \right] - z_i \left(1 - \frac{\omega_i}{\omega}\right) \frac{k_{\parallel}^2 c_A^2}{\omega^2} \Phi(z_i) = 0. \quad (12.31)$$

Из (12.27) следует [ср. с гл. 14 книги [II]], что  $\xi^{(i)}$  достигает минимума при  $\omega$  и  $k_{\parallel}$ , соответствующих максимуму фазовой скорости  $\omega/k_{\parallel}$ . Из (12.31) получаем соответствующие выражения для  $k_{\parallel}$  и  $\omega$  [ср. с гл. 14 книги [II]]

$$k_{\parallel} = k_{\parallel}^{(0)} \equiv \sqrt{2} \frac{\omega_e}{c_A} \{v(z_i) [1 - I_0 \exp(-z_i)]\}^{1/2}; \quad (12.32)$$

$$\omega = \omega^{(0)} \equiv \omega_e I_0 \exp(-z_i) v(z_i), \quad (12.33)$$

где

$$v(z_i) = \{[1 - \sqrt{1 - I_0 \exp(-z_i)}] / I_0 \exp(-z_i)\}^2. \quad (12.34)$$

Из (12.30), (12.27), (12.32) и (12.33) получаем выражение для критического  $\beta$ , соответствующего границе неустойчивости:

$$\beta = \mu(z_i) \{ \ln [ \sqrt{\pi} h(z_i) \omega / k_{\parallel} v_{Ti} \xi^{(e)} ] \}^{-1}, \quad (12.35)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu(z_i) &= \frac{z_i v I_0 \exp(-z_i)}{1 - I_0 \exp(-z_i)}; \\ h(z_i) &= I_0 \exp(-z_i) \frac{1 + v I_0 \exp(-z_i)}{1 - v I_0 \exp(-z_i)}; \\ \xi^{(e)}(k_{\parallel}, \omega) &= \xi^{(e)}(k_{\parallel}^{(0)}, \omega^{(0)}). \end{aligned} \right\} \quad (12.36)$$

Продольное изменение напряженности магнитного поля приводит к захвату электронов и к уменьшению величины  $\xi^{(e)}$ . Поэтому в согласии с (12.35) максимум параметра  $\beta$  для неустойчивой плазмы также должен убывать. Используя явный вид  $\xi^{(e)}$  [уравнение (12.26)], оценим, насколько сильно убывает  $\beta_{\text{макс}}$  вследствие эффекта запираания электронов.

Воспользуемся тем, что продольная зависимость потенциала является почти экспоненциальной ( $\psi(l) \sim \exp(ik_{\parallel}l)$ ), и учтем принятое выше предположение о малости отклонения магнитного поля от его среднего значения,  $|B_0 - \bar{B}_0| \ll \ll \bar{B}_0$ . Тогда из (12.26) приближенно получаем

$$\xi^{(e)} = \pi \bar{B}_0 \int F_0^{(e)} d\mu d\varepsilon \frac{\omega}{\tau} \sum_n \delta\left(\bar{\omega} - \frac{2\pi n}{\tau}\right) \times \\ \times \left| \int_0^L \exp\left[-i \int_0^l (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \frac{dl'}{v_{\parallel}}\right] \frac{dl}{v_{\parallel}} \right|^2. \quad (12.37)$$

Отсюда получается оценка

$$\xi^{(e)} \leq \pi \bar{B}_0 \int F_0^{(e)} d\mu d\varepsilon \omega \tau \sum_n \delta(\bar{\omega} - 2\pi n/\tau). \quad (12.38)$$

Если вместо  $\mu$  ввести новую переменную  $\lambda = \mu/\varepsilon$  и произвести в правой части (12.38) стандартное интегрирование по  $\varepsilon$  (ср. с гл. 11), то получается

$$\xi^{(e)} \leq V \sqrt{\pi} \int_0^{1/B_0 \text{ макс}} \bar{B}_0 d\lambda (L_0(\lambda)/L) (M\varepsilon_n/T)^{3/2} \exp(-M\varepsilon_n/T), \quad (12.39)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_n &= \omega^2 L_0^2(\lambda)/2 [2\pi(n+s)]^2; \\ L_0(\lambda) &= \int_0^L dl \sqrt{1 - \lambda B}; \quad s = k_{\parallel} L/2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (12.40)$$

Так как члены ряда (12.39) при больших  $n$  убывают как  $1/n^3$ , то будем учитывать только член с  $n = 0$ , полагая  $|s| \lesssim 1/2$ .

При  $|B_0 - \bar{B}_0|/\bar{B}_0 \ll (\omega/k_{\parallel}v_{Te})^2$  выражение (12.39) можно свести к  $\sqrt{\pi}\omega/k_{\parallel}v_{Te}$ , т. е. в этом приближении запираение несущественно. Поэтому интересно рассмотреть противоположный предел, т. е.  $\max |B_0 - \bar{B}_0|/\bar{B}_0 \gg (\omega/k_{\parallel}v_{Te})^2$ , что при  $\omega \simeq k_{\parallel}c_A$  означает

$$\Delta B_0/\bar{B}_0 \gg M_e/M_i\beta, \quad (12.41)$$

где  $\Delta B_0 = \max |B_0 - \bar{B}_0|$ . При этом из (12.39) следует оценка

$$\max \xi^{(e)} \simeq \left( \frac{\omega}{k_{\parallel}v_{Te}} \right)^3 \frac{B_0}{\Delta B_0} \simeq \left( \frac{M_e}{M_i\beta} \right)^{3/2} \frac{B_0}{\Delta B_0}. \quad (12.42)$$

Эта точность достаточна для оценки  $\beta_{\text{макс}}$ , так как  $\xi^{(e)}$  входит в (12.35) в качестве аргумента логарифмической функции. Учитывая (12.42), из (12.35) получаем с логарифмической точностью

$$\beta_{\text{макс}} \leq \mu(z_i) \left[ (3/2) \ln(M_i/M_e) - \ln \frac{1}{\beta} - \right. \\ \left. - \ln(B_0/\Delta B_0) + \ln h(z_i) \right]^{-1}. \quad (12.43)$$

В частности, отсюда следует, что при  $\Delta B_0/B_0 \simeq 0,1$  плазма устойчива, если

$$\beta \geq 7\%. \quad (12.44)$$

Как и в случае однородного магнитного поля, максимум  $\beta$  соответствует длинноволновым возмущениям,  $z_i \simeq 0,1$ .

**5. Обсуждение результатов.** Изложенный выше анализ свидетельствует о том, что влияние продольной неоднородности магнитного поля на возбуждение альфвеновских и косых дрейфовых волн важно, если удовлетворяется условие (12.41). Оно приводит к уменьшению числа резонансных

электронов вследствие их запираания в областях слабого магнитного поля. Совместное действие этого эффекта с затуханием колебаний на ионах приводит к стабилизации плазмы уже при довольно малых значениях параметра  $\beta$ . Например, при  $\Delta B_0/B_0 \simeq 0,1$  плазма является устойчивой по отношению к альфвеновским и дрейфовым волнам, если  $\beta \gtrsim 7\%$ . Это значение  $\beta$  составляет примерно половину того значения, которое определяется только одним из этих эффектов — затуханием на ионах.

### § 12.3. Стабилизация неустойчивости запертых частиц гидродинамического типа в плазме конечного давления

В § 11.6 при рассмотрении бесстолкновительной неустойчивости запертых частиц предполагалось, что давление плазмы пренебрежимо мало,  $\beta \rightarrow 0$ . При этом скорость магнитного дрейфа частиц характеризовалась соотношением (1.1), не зависящим от  $\beta$ . Если считать  $\beta$  конечным, то вместо (1.1) для скорости магнитного дрейфа следует использовать выражение [см. (П4.19)]

$$\mathbf{V}_D = [e_0, (v_{\perp}^2/2) \nabla \ln B + v_{\parallel}^2 (\mathbf{e}_0 \nabla) \mathbf{e}_0] / \omega_B. \quad (12.45)$$

С помощью условия равновесия  $\nabla(p + B^2/8\pi) = -(\mathbf{V} \nabla) \mathbf{B} / 8\pi$  находим, что приближение  $\beta \rightarrow 0$  нарушается, если

$$\beta \gtrsim a/R. \quad (12.46)$$

При таком  $\beta$  теория бесстолкновительной неустойчивости запертых частиц, изложенная в § 11.6, требует пересмотра, что и является целью настоящего параграфа.

Из гл. 13 книги [II] следует, что если в теории градиентных неустойчивостей учитывается часть скорости магнитного дрейфа, обусловленная конечным  $\beta$ , то необходимо учитывать также возмущение магнитного поля, параллельное основному магнитному полю  $\mathbf{B}_0$ ,  $\tilde{B}_{\parallel} \equiv \tilde{B} \mathbf{B}_0 / B_0$ . Это означает, что наряду со скалярным потенциалом  $\psi$  нам следует учитывать также компоненты векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , поперечные  $\mathbf{B}_0$ . При этом

$$\mathbf{E} = -\nabla\psi - (1/c) \partial \mathbf{A}_{\perp} / \partial t; \quad \tilde{\mathbf{B}} = \text{rot } \mathbf{A}_{\perp}, \quad (12.47)$$

где  $\mathbf{A}_\perp = \mathbf{A} - \mathbf{B}_0 (\mathbf{A}\mathbf{B}_0)/B_0^2$ . Согласно § 13.2 книги [II],  $\text{div } \mathbf{A}_\perp = 0$ , т. е.  $\mathbf{k}_\perp \mathbf{A}_\perp = 0$ . Поэтому мы будем иметь дело с двумя электродинамическими переменными: скалярным потенциалом  $\psi$  и компонентой векторного потенциала  $A_\perp \equiv [\mathbf{k}_\perp \mathbf{A}_\perp] \mathbf{e}_0/k_\perp$ .

В соответствии со сказанным исходим из возмущенной функции распределения частиц вида (ср. с (11.1), а также с (13.37) книги [II])

$$f_1 = \frac{e}{M} \left[ \psi \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{[\mathbf{e}_0, \nabla F]}{c\omega_B} \mathbf{A}_\perp + \right. \\ \left. + i \left( \omega \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{\mathbf{k}_\perp [\mathbf{e}_0, \nabla F]}{\omega_B} \right) \int \left( \psi - \frac{\mathbf{v}_\perp \mathbf{A}_\perp}{c} \right) dt' \right]. \quad (12.48)$$

Аналогично гл. 11, интеграл (12.48) по бесконечному времени сводим к интегралу по периоду колебаний частиц между пробками магнитного поля  $\tau$ . Затем, совершая предельный переход к  $\omega \ll \omega_b \equiv 2\pi/\tau$ , получаем

$$f_1 = \frac{e}{M} \left\{ \psi \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{[\mathbf{e}_0, \nabla F]}{c\omega_B} \mathbf{A}_\perp - \right. \\ \left. - \left( \omega \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{\mathbf{k}_\perp [\mathbf{e}_0, \nabla F]}{\omega_B} \right) \frac{1}{\omega - \bar{\omega}_D} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left( \frac{k_\perp v_\perp}{\omega} \right) \times \right. \\ \left. \times \exp(i\xi \sin \alpha - in\alpha) \left( \overline{\psi J_0} + i \frac{v_\perp \overline{A_\perp}}{c} J_1 \right) \right\}. \quad (12.49)$$

Здесь используются те же обозначения, что и в гл. 11; в частности, черта сверху означает среднее по периоду  $\tau$ .

С помощью (12.49), аналогично (11.8), находим суммарную возмущенную плотность электронов и ионов:

$$\rho_1 = - \sum_{\alpha=i,e} \frac{e_\alpha^2}{T_\alpha} \int F_\alpha \left[ \psi - \left( 1 - \frac{\omega_* \bar{\omega}_D}{\omega^2} \right) \bar{\psi} + \right. \\ \left. + \frac{ik_\perp v_\perp^2 \bar{A}_\perp}{2c\omega_{B\alpha}} \frac{\omega_* \alpha}{\omega} \right] \frac{B}{|v_\parallel|} d\varepsilon d\mu, \quad (12.50)$$



Предполагается, что  $T_e = T_i$ ,  $\nabla T = 0$ ,  $\omega \gg \bar{\omega}_D$ ,  $\xi \ll 1$ .

В выражение для возмущенной плотности (12.50) входит  $A_{\perp}$ . Вычислим эту величину, используя вытекающее из уравнений Максвелла соотношение

$$A_{\perp} = (4\pi/c) j_{\perp}/k_{\perp} \equiv (4\pi e_0/c k_{\perp}) [\mathbf{k}_{\perp}, \mathbf{j}_{\perp}], \quad (12.51)$$

и определение

$$\mathbf{j}_{\perp} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v}_{\perp} f_1 dv. \quad (12.52)$$

В результате получаем

$$A_{\perp} = -\frac{4\pi i}{ck_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{T_{\alpha}} \int \frac{v_{\perp}^2 F_{\alpha}}{2\omega_{B\alpha}} \frac{\omega_{\alpha}^*}{\omega} \bar{\psi} \frac{B}{|v_{\parallel}|} d\epsilon d\mu. \quad (12.53)$$

В правой части (12.53) мы пренебрегли вкладом  $A_{\perp}$  в возмущенный ток, малым как  $\beta$ .

Подставляя (12.53) в (12.51), умножая затем обе части равенства на  $\psi^*$ , интегрируя по объему и учитывая условие квазинейтральности, приходим к следующей интегральной форме [ср. с (11.9)]:

$$\int d\alpha d\beta \left\{ \int \tau F \left( \bar{\psi}^2 - \bar{\psi}^2 + \frac{\omega_* \bar{\omega}_D}{\omega^2} \bar{\psi}^2 \right) d\epsilon d\mu + \right. \\ \left. + \frac{4\pi}{c^2} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{T_{\alpha}} \frac{\omega_{\alpha}^2}{\omega^2} \int \bar{G}^2(l) \frac{dl}{B} \right\} = 0, \quad (12.54)$$

где

$$G(l) = \int F \bar{\psi} \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_B} \frac{B}{|v_{\parallel}|} d\epsilon d\mu. \quad (12.55)$$

Согласно (12.54), квадрат частоты колебаний определяется выражением (интеграл по  $\alpha$ ,  $\beta$  опускаем)

$$\omega^2 = -\omega_*^2 \frac{\int \tau F (\bar{\omega}_D/\omega_*) \bar{\psi}^2 d\epsilon d\mu + (8\pi e^2/c^2 T) \int G^2(l) dl/B}{\int \tau F (\bar{\psi}^2 - \bar{\psi}^2) d\epsilon d\mu}. \quad (12.56)$$

В случае потенциальных возмущений второе слагаемое в числителе (12.56) отсутствует. Если, кроме того, в выражении для  $\bar{\omega}_D$  пренебречь вкладом порядка  $\beta$ , то (12.56) сведется к (11.55). Видно также, что непотенциальность возмущений (члены с  $G^2$ ) является дестабилизирующим фактором, а часть  $\bar{\omega}_D$ , пропорциональная  $\beta$ ,  $\bar{\omega}_D$  ( $\beta$ )-стабилизирующим. Последнее вытекает из того, что

$$\bar{\omega}_D(\beta) = -(\beta/2) \omega_*, \quad (12.57)$$

поэтому  $\bar{\omega}_D(\beta) \omega_* < 0$ . Поскольку вклад непотенциальности также пропорционален параметру  $\beta$ , то для выяснения роли конечного  $\beta$  необходимо определить знак разности

$$S = \int \frac{\bar{\beta}}{2} \tau F \bar{\psi}^2 \frac{M v_{\perp}^2}{2T} d\varepsilon d\mu - \frac{8\pi e^2}{c^2 T} \int G^2(l) \frac{dl}{B}. \quad (12.58)$$

Представим  $G(l)$ , определенное соотношением (12.55), в виде

$$G(l) = \int K(l, \lambda) \bar{\psi} d\lambda, \quad (12.59)$$

где

$$K(l, \lambda) = \frac{3}{4} \frac{T}{M \omega_B} \frac{B^2 \lambda n_0}{\sqrt{1-\lambda B}}; \quad \lambda = \mu/\varepsilon. \quad (12.60)$$

Здесь были использованы соотношения

$$\begin{aligned} n_0 &= \int F \frac{B}{|v_{\parallel}|} d\varepsilon d\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \int F(\varepsilon) \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \int_0^{1/B} \frac{B d\lambda}{\sqrt{1-\lambda B}} = \\ &= \sqrt{2} \int F(\varepsilon) \varepsilon^{1/2} d\varepsilon. \end{aligned} \quad (12.61)$$

Далее используем неравенство Шварца

$[\int g(x) f(x) dx]^2 \leq \int [g(x)]^2 dx \int [f(x)]^2 dx$ , полагая  $x = \lambda$ ;  $g(x) = \sqrt{K(\lambda)}$ ;  $f(x) = \sqrt{K(\lambda)} \bar{\psi}$ . Тогда получаем

$$G^2(l) \leq \int K d\lambda \int K \bar{\psi}^2 d\lambda. \quad (12.62)$$

Первый интеграл в правой части этого неравенства вычисляется с помощью соотношения (12.60), так что

$$\int K(\lambda) d\lambda = Tn_0/M\omega_B. \quad (12.63)$$

Поэтому (12.62) означает

$$G^2(l) \leq (Tn_0/M\omega_B) \int K\bar{\psi}^2 d\lambda. \quad (12.64)$$

С учетом (12.64) и (12.59) получаем неравенство

$$S \geq 0. \quad (12.65)$$

Это неравенство может стать равенством ( $S=0$ ) только в случае чисто желобковых возмущений  $\psi(l) = \text{const}$ . Однако специфичным для рассматриваемой нами бесстолкновительной неустойчивости запертых частиц является нежелобковость возмущений,  $\psi \neq \text{const}$ , а при этом  $S > 0$ , что означает стабилизацию при конечном  $\beta$ . Качественным критерием такой стабилизации является приведенное выше условие (12.46).

### § 12.4. Стабилизация коротковолновых неустойчивостей в токамаке при большом давлении плазмы

#### 1. Постановка задачи и исходные уравнения.

Согласно § 11.9, 11.10, в токамаке могут развиваться коротковолновые неустойчивости ( $k_{\perp}\rho_i \gtrsim 1$ ), связанные с наличием запертых электронов. Анализ этих неустойчивостей производился в приближении потенциального электрического поля,  $\mathbf{E} = -\nabla\psi$ . Чтобы выяснить возможность развития их при большом давлении плазмы, необходимо, аналогично § 12.2, 12.3, учитывать непотенциальность возмущений.

Возмущения описываем величинами  $\zeta$  и  $\psi$ , определенными следующим образом:  $\zeta$  характеризует возмущенное магнитное поле  $\mathbf{B}$ , так что контравариантные компоненты поля  $\mathbf{B}$  в координатах  $a, \theta, \varphi$  имеют вид

$$B^a = \mathbf{B}_0 \nabla \zeta; \quad B^\theta = (i/m) (\mathbf{B}_0 \nabla \zeta)'; \quad (12.66)$$

$\psi$  характеризует составляющую возмущенного электрического поля  $E_{\parallel} \equiv \mathbf{E} \mathbf{V}_0 / B_0$ , параллельную полю  $\mathbf{V}_0$ , так что

$$E_{\parallel} = -(\mathbf{V}_0 \nabla \psi) / B_0. \quad (12.67)$$

При этом поперечное полю  $\mathbf{V}_0$  возмущенное электрическое поле  $\mathbf{E}_{\perp} \equiv \mathbf{E} - E_{\parallel} \mathbf{V}_0 / B_0$  имеет ковариантные компоненты

$$E_{\theta} = -i\omega a B_s \xi^a / c; \quad E_a = -i\omega k_a a B_s \xi^a / mc, \quad (12.68)$$

где  $\xi^a$  —  $a$ -я — контравариантная компонента вектора смещения электронов  $\xi$ , связанная с  $\zeta$  и  $\psi$  соотношением

$$\xi^a = \zeta + \psi mc / a B_s \omega. \quad (12.69)$$

Связь между  $\zeta$  и  $\psi$  найдем, используя уравнение квазинейтральности ( $n_e = n_i$ ) и уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_{\perp} = -(c/4\pi) (\mathbf{e}_0 \nabla) (\mathbf{e}_0 \operatorname{rot} \mathbf{V}), \quad (12.70)$$

вытекающее из уравнений Максвелла  $\operatorname{rot} \mathbf{V} = (4\pi/c) \mathbf{j}$ .

Возмущенная плотность ионов  $n_i$  определяется поперечным электрическим полем  $\mathbf{E}_{\perp}$ , так что в соответствии с (11.69)

$$n_i = -\frac{e_i n_0}{T_i} \left[ 1 + \frac{\omega n_i}{\omega} I_0(z_i) e^{-z_i} \right] \left( \psi + \frac{\omega a B_s}{mc} \zeta \right). \quad (12.71)$$

Возмущенная плотность электронов обусловлена вкладом пролетных и запертых частиц,  $n_e = n_c + n_t$ , где символ «с» означает «пролетные» (*circulating*). Выражение для  $n_c$  находится так же, как и в случае однородного магнитного поля (ср. с гл. 13 книги [II]),

$$n_c = -e_e n_0 \psi / T_e - \zeta n_0', \quad (12.72)$$

а возмущенная плотность запертых электронов зависит только от  $\psi$ , так что в соответствии с (11.70), (11.73)

$$n_t = -\frac{e_e n_0 \psi}{T_e} C \varepsilon^{1/2} \frac{\omega n_e}{\omega} \left[ 1 - \frac{\bar{\omega}_{De}}{\omega} (1 + \eta_e) - \right. \\ \left. - i \frac{v_{\Delta\Phi}^e}{\omega} (1 + C_1 \eta_e) \right]. \quad (12.73)$$

С помощью условия квазинейтральности и уравнений (12.71)—(12.73) находим одно из искомых соотношений, связывающих  $\psi$  и  $\zeta$ :

$$D_0 \psi + \frac{\omega a B_s}{mc} \zeta \left[ 1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} (1 - I_0 e^{-z}) \right] = 0, \quad (12.74)$$

где  $z \equiv z_i$ ;

$$D_0 = 1 + \frac{T_i}{T_e} - \frac{\omega_{ni}}{\omega} [C V \bar{\varepsilon} - I_0 \exp(-z)] - \\ - \frac{\omega_{ni} \bar{\omega}_{De}}{\omega^2} C V \bar{\varepsilon} (1 + \eta_e) + i C V \bar{\varepsilon} \frac{\omega_{ni} v_{\Phi}^e}{\omega^2} (1 + C_1 \eta_e). \quad (12.75)$$

В потенциальном приближении, т. е. в пренебрежении  $\zeta$ , из (12.74) следует дисперсионное уравнение  $D_0 = 0$ , из которого вытекают результаты, изложенные в § 11.9, 11.10. Чтобы выяснить, как эти результаты зависят от давления плазмы, необходимо учесть в (12.74)  $\zeta$  и, используя уравнение (12.70), получить дополнительное соотношение между  $\psi$  и  $\zeta$ . Действуя в этом направлении, находим, что при  $z > 1$  выражение для  $\text{div } \mathbf{j}_{\perp}$  имеет такой же вид, как и в случае прямого магнитного поля [см. гл. 13 книги [II]]:

$$\text{div } \mathbf{j}_{\perp} = \frac{\omega}{4\pi i} k_{\perp}^2 \varepsilon_{11} \left( \psi + \frac{\omega a B_s}{mc} \zeta \right), \quad (12.76)$$

где

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{k_{\perp}^2 d_i^2} \left( 1 - \frac{\omega_{ni}}{\omega} \right) [1 - I_0 \exp(-z)]. \quad (12.77)$$

Подставляя (12.77) в (12.70), находим

$$[\varepsilon_{11} - (ck_{\parallel}/\omega)^2] \zeta = -\varepsilon_{11} \psi mc/\omega a B_s. \quad (12.78)$$

**2. Стабилизация коротковолновой неустойчивости гидродинамического типа.** Рассмотрим влияние непотенциальности на неустойчивость гидродинамического типа, описываемую уравнением (11.71). Из (12.74) и (12.78) следует, что при учете непотенциальности дисперсионное уравнение (11.71) заменяется следующим:

$$\gamma^2 = -C \varepsilon^{1/2} \omega_{ni} \bar{\omega}_{De} \{ 1 + T_i/T_e + \omega_{ni}^2/k_{\parallel}^2 c_A^2 z_i \}^{-1}. \quad (12.79)$$

По предположению мы интересуемся возмущениями с  $k_{\parallel} \simeq \simeq 1/qR$ . С учетом этого и  $k_b \simeq k_a$  заключаем, что непотенциальность существенна при

$$\beta_J \gtrsim 1. \quad (12.80)$$

При этом условии вместо (11.74) имеем

$$\gamma^2 \simeq \varepsilon^{3/2} \omega_{ni}^2 / \beta_J. \quad (12.81)$$

Из (12.79) следует также, что, уменьшаясь с ростом  $\beta_J$ , частота колебаний  $\omega \equiv i\gamma$  перестает удовлетворять исходному предположению  $\omega > \overline{\omega}_{De} \simeq \varepsilon\omega^*$ , если

$$\beta_J \gtrsim 1/\varepsilon^{1/2}. \quad (12.82)$$

**3. Стабилизация диссипативной неустойчивости, связанной с ветвью (11.77).** Аналогично (12.79) вместо соотношения (11.77) для частоты диссипативной неустойчивости при учете непотенциальности получается

$$\text{Re } \omega = C\varepsilon^{1/2} \omega_{ni} \{1 + T_i/T_e + \omega_{ni}^2/k_{\parallel}^2 c_A^2 z_i\}^{-1}. \quad (12.83)$$

При этом связь  $\text{Im } \omega$  с  $\text{Re } \omega$  остается прежней (см. соотношение (11.79)). Из (12.83) видно, что как и в случае неустойчивости гидродинамического типа, непотенциальность важна при условии (12.80). При этом условии

$$\text{Re } \omega \simeq \varepsilon^{1/2} \omega_{ni} / \beta_J. \quad (12.84)$$

Если же параметр  $\beta_J$  удовлетворяет условию (12.82), то ветвь (12.83) исчезает, поскольку при этом нарушается исходное предположение  $\omega > \overline{\omega}_{De}$ .

**4. Выводы.** Таким образом, выше показано, что гидродинамическая и диссипативная коротковолновые неустойчивости на запертых электронах, рассмотренные в § 11.9, 11.10, ведут себя как потенциальные, если  $\beta_J < 1$ . При  $1 < \beta_J < 1/\varepsilon^{1/2}$  они сменяются непотенциальными неустойчивостями, характеризующимися соотношениями (12.81), (12.84). Если же  $\beta_J > \varepsilon^{-1/2}$ , то ни гидродинамическая, ни диссипативная неустойчивости невозможны.

## Библиографический обзор к гл. 12

1. **Mikhailovskii A. V.** Instability of finite pressure inhomogeneous plasma in a longitudinally inhomogeneous magnetic field. — «Plasma Phys.», 1971, v. 13, p. 955.  
Основное содержание этой работы изложено в § 12.2.
2. **Михайловский А. Б., Фридман А. М.** Устойчивость плазмы конечного давления с запретными частцами. — «Докл. АН СССР», 1970, т. 194, с. 551.  
Показано, что при конечных  $\beta$  бесстолкновительная неустойчивость на запертых ионах подавляется (см. § 12.3). Совместно с А. М. Фридманом были получены результаты, представленные в § 12.3.
3. **Курсаков В. Н.** Граница неустойчивости запертых частиц в плазме конечного давления в тороидальных системах. — «Атомная энергия», 1970, т. 29, с. 388.
4. **Bussac M. N., Laval G., Pellat R.** Electromagnetic trapped particle modes in multipoles. — «Phys. Lett.», 1970, v. 32A, p. 491.
5. **Rosenbluth M. N., Sloan M. L.** Finite  $\beta$  stabilization of the collisionless trapped particle instability. — «Phys. Fluids», 1971, v. 14, p. 1725.
6. **Glasser A., Frieman E. A., Yoshikawa S.** Stabilization of the collisionless trapped particle instability by shaping of the tokamak cross section. — «Phys. Fluids», 1974, v. 17, p. 181.
7. **Dobrott D. R., Greene J. M.**  $\beta$ -Effects on collisionless trapped particle instability in non-circular cross-sectioned tokamaks. — «Plasma Phys.», 1975, v. 17, p. 929.  
В работах [3—7] обсуждается эффект стабилизации, отмеченный в § 12.3, в различных конкретных конфигурациях магнитного поля.
8. **Михайловский А. Б.** Коротковолновые неустойчивости на запертых электронах в токамаке при большом давлении плазмы. — «Докл. АН СССР», 1976, т. 228, с. 1317.  
Основные результаты этой работы изложены в § 12.4.
9. **Михайловский А. Б., Морозов А. Г.** Коротковолновые непотенциальные неустойчивости в токамаке при большом давлении плазмы. — Препринт ИАЭ-2686. М., 1976.  
В работе [9] исследуется влияние конечного давления плазмы на некоторые другие типы коротковолновых неустойчивостей.

## Глава 13

### НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ (ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ) МИКРОНЕУСТОЙЧИВОСТИ

#### § 13.1. Введение

Наряду с потенциальными (электростатическими) неустойчивостями, характерными для плазмы малого давления, существуют также непотенциальные (электромагнитные), которые могут иметь место либо при не слишком малом давлении плазмы, либо при наличии в плазме группы довольно быстрых частиц. Их рассмотрению посвящены настоящая глава, а также гл. 14—18.

В первой части данной главы (§ 13.2—13.5) анализируются альфвеновские возмущения плазмы с максвелловским распределением частиц по скоростям в простейшей тороидальной ловушке — осесимметричном токамаке круглого сечения. Такие возмущения в гидромагнитном приближении уже рассматривались выше, в частности в гл. 6, где изучалась желобковая неустойчивость токамака круглого сечения. Теперь учтем некоторые негидромагнитные эффекты и, прежде всего, негидромагнитную часть возмущенного давления плазмы. Общая схема учета негидромагнитных эффектов в альфвеновских волнах излагается в § 13.2. Вычисление негидромагнитной части давления в приближении двухжидкостной гидродинамики производится в § 13.3, а в приближении дрейфового кинетического уравнения — в § 13.4. Там же, в § 13.3, 13.4, делается анализ и соответствующих дисперсионных уравнений, который выявляет гидродинамические и кинетические неустойчивости. Обсуждение результатов, полученных в § 13.3, 13.4, дается в § 13.5.

Во второй части данной главы (§ 13.6—13.9) обсуждаются коротковолновые непотенциальные возмущения (§ 13.6), альфвеновские и магнитно-звуковые неустойчивости, вызываемые группой быстрых частиц в условиях простой геометрии магнитного поля (§ 13.6, 13.8) и неустойчивости потока плазмы большого давления с неоднородным профилем скорости (§ 13.9).



### § 13.2. Уравнение малых колебаний альфвеновского типа в осесимметричном токамаке круглого сечения

Исходим из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = (4\pi/c) \mathbf{j} \quad (13.1)$$

и выражения для плотности тока  $\mathbf{j}_\perp$ , поперечного магнитному полю (см., например, обзорную работу В. Д. Шафранова):

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{c}{B^2 + 4\pi(p_\perp - p_\parallel)} \left[ \mathbf{B}, \nabla p_\perp - \frac{p_\perp - p_\parallel}{B^2} \nabla \frac{B^2}{2} + \right. \\ \left. + \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla \pi \right]. \quad (13.2)$$

Используя (13.1), (13.2), исследуем возмущения в осесимметричном токамаке круглого сечения (ср. с гл. 6). Стационарное давление плазмы считаем изотропным,  $p_{\perp 0} = p_{\parallel 0} \equiv p_0$ . (Индекс нуль здесь и далее означает стационарную часть.) Как и в гл. 6, в качестве координат используем криволинейные координаты  $a$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , смысл которых разъяснялся также в приложении 2 к гл. 2, где вместо  $\varphi$  использовалось обозначение  $\xi$ .

Полагая тороидальность слабой,  $a/R \ll 1$ , представляем возмущенные величины в виде

$$\tilde{X} = \exp(im\theta - in\varphi) [\tilde{X}_0 + \tilde{X}_{-1} \exp(-i\theta) + \tilde{X}_{+1} \exp(i\theta)]. \quad (13.3)$$

Как и в гл. 5, числа  $m$  и  $n$  предполагаются большими,  $(m, n) \gg 1$ ; величинами порядка  $1/m$ ,  $1/n$  пренебрегаем.

При сделанных предположениях проекция линеаризованного уравнения (13.1) на направление неоднородности плазмы с подстановкой в него  $\mathbf{j}_\perp$  из (13.2) приводит к уравнению баланса возмущенных давлений плазмы и магнитного поля

$$\tilde{B}_\parallel B_0 / 4\pi + \tilde{p}_\perp = 0, \quad (13.4)$$

где  $\tilde{B}_{\parallel} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{B}_0/B_0$ . Учитывая (13.4) и (13.2) и взяв дивергенцию от поперечных компонент (13.1), получаем

$$\mathbf{B}_0 \nabla \tilde{\alpha} = (c \nabla \tilde{p} / B_0^4) [\mathbf{B}_0, \nabla (B_0^2 + 8\pi p_0)] - \text{div} [c \mathbf{B}_0 / B_0^2, \rho d\mathbf{V}/dt + \nabla \overleftrightarrow{\pi}] = 0. \quad (13.5)$$

Здесь

$$\tilde{p} \equiv (\tilde{p}_{\perp} + \tilde{p}_{\parallel})/2; \quad \alpha = (c/4\pi B^2) \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{B}. \quad (13.6)$$

При получении (13.5) было учтено также вытекающее из (13.1) и уравнения  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  соотношение

$$\text{div} (\text{rot } \mathbf{B})_{\perp} = -(\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{B} / B^2. \quad (13.7)$$

Уравнение (13.5) отличается от (5.30) учетом поперечной инерции плазмы, кривой вязкости и анизотропии возмущенного давления. Однако главное отличие состоит в более сложной связи между возмущением давления  $\tilde{p}$  и возмущением магнитного поля  $\mathbf{B}$ . В гл. 5 эта связь определялась условием постоянства давления вдоль силовых линий, в линейном приближении означавшем

$$\tilde{\mathbf{B}} \nabla p_0 + \mathbf{B}_0 \nabla \tilde{p} = 0. \quad (13.8)$$

Здесь мы рассмотрим более сложную ситуацию, когда условие (13.8) не имеет места. При этом будем считать, что  $\tilde{p}$  состоит из суммы двух частей

$$\tilde{p} = \tilde{p}^{(1)} + \tilde{p}^{(2)}, \quad (13.9)$$

где  $\tilde{p}^{(1)}$  — часть возмущенного давления, удовлетворяющая соотношению типа (13.8)

$$\tilde{\mathbf{B}} \nabla p_0 + \mathbf{B}_0 \nabla \tilde{p}^{(1)} = 0, \quad (13.10)$$

а  $\tilde{p}^{(2)}$  — часть, которую мы вычислим в дальнейшем.

Введем также величину  $\zeta$ , определив ее соотношением

$$\tilde{p}^{(2)} = -\rho_0 \zeta. \quad (13.11)$$

Здесь и далее штрих означает производную по координате  $a$ , так что  $p'_0 \equiv \partial p_0 / \partial a$ . Согласно (13.10),  $a$ -я контравариантная компонента возмущенного магнитного поля  $\tilde{B}^a$  выражается через  $\zeta$  следующим образом:

$$\tilde{B}^a = \mathbf{V}_0 \nabla \zeta. \quad (13.12)$$

Используя (13.12) и условие  $\text{div } \tilde{\mathbf{B}} = 0$ , а также учитывая предположения о вытянутости возмущений вдоль силовых линий (см. гл. 5) и сильном магнитном поле (см. гл. 6), находим

$$\tilde{B}^0 = (i/m) (\mathbf{V}_0 \nabla \zeta)'. \quad (13.13)$$

С помощью (13.12), (13.13) и выражений для  $g_{ik}$  из гл. 6 находим связь  $\tilde{\alpha}$  с  $\zeta$ :

$$\tilde{\alpha} = \frac{ica}{4\pi m R} \Delta_{\perp} \left( \mu \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \zeta. \quad (13.14)$$

В правой части (13.14) пренебрежено членами, связанными с угловой зависимостью компонент метрического тензора  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$ . Эти члены можно восстановить, обратившись к гл. 6. Они важны только при довольно большом давлении плазмы,  $\beta > (a/R)^{4/3}$ . В данной главе мы полагаем  $\beta < (a/R)^{4/3}$ .

Подставляя (13.14) в (13.5) и учитывая (13.9) и (13.11), приводим уравнение (13.5) к виду

$$\begin{aligned} & \left( \mu \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \Delta_{\perp} \left( \mu \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \zeta - \\ & - \frac{4\pi p'_0 m^2 R^2}{B_0^4 a^2} \left[ \zeta (B_0^2 + 8\pi p_0)' + \frac{i}{m} \zeta' \frac{\partial B_0^2}{\partial \theta} \right] + \delta = 0, \quad (13.15) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \delta = & \frac{4\pi m^2 R^2}{B_0^4 a^2} \left[ \tilde{p}^{(2)} (B_0^2 + 8\pi p_0)' + \frac{i}{m} \frac{\partial \tilde{p}^{(2)}}{\partial a} \frac{\partial B_0^2}{\partial \theta} - \right. \\ & \left. - \frac{4\pi i m R}{a B_0^2} \left[ \text{rot} \left( \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \overleftrightarrow{\nabla \pi} \right) \right]_{\varphi} \right]. \quad (13.16) \end{aligned}$$

Нижний индекс  $\varphi$  в (13.16) означает  $\varphi$ -ю ковариантную компоненту ротора. Величина  $\tilde{\delta}$  включает в себя инерционные и «дрейфовые» эффекты. В пренебрежении  $\tilde{\delta}$  уравнение (13.15) представляет собой уравнение желобковой неустойчивости с равным нулю инкрементом [ср. с уравнением (5.30)].

Подставляя в (13.15)  $\zeta$  и  $\tilde{\delta}$  в виде суммы (13.3), приходим к следующим трем уравнениям, соответствующим  $m$ -й и  $m \pm 1$ -й фурье-гармоникам (13.15):

$$-\gamma_0 \Delta_{\perp} \gamma_0 \zeta_0 - \frac{4\pi\rho'_0 m^2 R^2}{B_s^4 a^2} \times \\ \times \left\{ \zeta_0 \left[ (B_0^2 + 8\pi\rho_0)' \right]_0 + \tilde{\varepsilon} \right\} + \delta_0 = 0; \quad (13.17)$$

$$-\gamma_{\pm 1}^2 \Delta_{\perp} \zeta_{\pm 1} - \frac{4\pi\rho'_0 m^2 R^2}{B_s^4 a^2} \times \\ \times \left[ \zeta_0 (B_0^2)'_{\pm 1} + \frac{i}{m} \zeta'_0 \left( \frac{\partial B_0^2}{\partial \theta} \right)_{\pm 1} \right] = 0, \quad (13.18)$$

где индексы 0 и  $\pm 1$  у стационарных величин означают нулевую и ( $\pm 1$ )-ю фурье-компоненты этих величин, а функция  $\tilde{\varepsilon}$  имеет вид

$$\tilde{\varepsilon} = \zeta_{+1} (B_0^2)'_{-1} + \zeta_{-1} (B_0^2)'_{+1} + \frac{i}{m} \left[ \zeta'_{+1} \left( \frac{\partial B_0^2}{\partial \theta} \right)_{-1} + \right. \\ \left. + \zeta'_{-1} \left( \frac{\partial B_0^2}{\partial \theta} \right)_{+1} \right]. \quad (13.19)$$

Величина  $B_s \equiv \Phi'/2\pi a$  — среднее продольное магнитное поле (см. гл. 6);  $\gamma_l = (m + l)\mu - n$ ;  $l = 0, \pm 1$ .

В уравнении (13.18) пренебрежено членами  $\delta_{\pm 1}$ , что будет оправдано в последующем. В силу предположения о почти желобковом характере возмущений,  $m\mu \approx n$ , следует считать  $|\gamma_0| \ll |\gamma_{\pm 1}|$ .

Заметим, что величина  $\gamma_0$  связана с продольным волновым числом

$$k_{\parallel} = (m - nq)/qR \quad (13.20)$$

соотношением

$$\gamma_0 = k_{\parallel} R. \quad (13.21)$$

Согласно гл. 6,  $\gamma_0$  можно представить также в виде

$$\gamma_0 = m\mu' x, \quad (13.22)$$

где  $x = a - a_0$ , а точка  $a_0$  соответствует положению рациональной магнитной поверхности, на которой  $m\mu(a_0) = n$ .

С помощью формул гл. 6 находим

$$\begin{aligned} (B_0^2)'_{\pm 1} &= B_s^2/R; \\ (\partial B_0^2/\partial\theta)_{\pm 1} &= \pm iaB_s^2/R; \end{aligned} \quad (13.23)$$

$$[(B_0^2 + 8\pi\rho_0)']_0 = -(2/a) B_0^2 (1 - q^2) - 8\pi\rho_0' q^2, \quad (13.24)$$

где  $B_0 \equiv \chi'/2\pi R$  — среднее азимутальное магнитное поле;  $q \equiv 1/\mu$  — «коэффициент запаса» токамака.

Используя (13.18), (13.23), выражаем  $\tilde{\varepsilon}$  через  $\zeta_0$ :

$$\tilde{\varepsilon} = 8\pi\rho_0' q^2 \zeta_0. \quad (13.25)$$

Приведем к более простому виду также выражение для  $\delta_0$ . Вклад в  $\tilde{\delta}_0$  членов с поперечной инерцией и магнитной вязкостью [см. уравнение (13.16)] достаточно учесть в нулевом приближении по тороидальности, т. е. в приближении прямого цилиндра. В этом приближении имеем

$$[\text{rot}(\rho d\mathbf{V}/dt + \nabla \overleftarrow{\pi})]_{\Phi} = -\frac{iR\rho_0}{m} \omega(\omega - \omega_{pi}^*) \Delta_{\perp} \xi, \quad (13.26)$$

где  $\rho_0 = Mn$  — плотность массы;  $\omega_{pi}^* = mcT_{0i}\kappa_p/e_i aBs$  — ионная дрейфовая частота по градиенту давления,  $\kappa_p = \partial \ln \rho_{0i}/\partial a$ , а  $\xi = \xi^a$  —  $a$ -я контравариантная компонента вектора поперечного смещения плазмы  $\xi_{\perp}$ , определенного соотношением

$$-i\omega \xi_{\perp} = c [\mathbf{E}, \mathbf{B}_0]/B_0^2. \quad (13.27)$$

Заметим, что из (13.27) и уравнения Максвелла  $\tilde{\mathbf{B}} = - (ic/\omega) \text{rot } \mathbf{E}$  следует

$$\tilde{\mathbf{B}} = \text{rot} [\xi_{\perp}, \mathbf{V}_0] - (ic/\omega) \text{rot} \mathbf{E}_{\parallel}, \quad (13.28)$$

где  $\mathbf{E}_{\parallel} \equiv \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\perp}$  — продольная компонента возмущенного электрического поля. Взяв  $a$ -ю контравариантную компоненту уравнения (13.28), получаем

$$\tilde{B}^a = \mathbf{V}_0 \nabla \xi - (ic/\omega) (\text{rot} \tilde{\mathbf{E}}_{\parallel})^a. \quad (13.29)$$

Из сравнения (13.29) с (13.12) видно, что в приближении идеальной магнитной гидродинамики, когда  $E_{\parallel} = 0$  (см. гл. 3), введенная выше величина  $\xi$  совпадает с «радиальным» смещением плазмы  $\xi$ . Здесь мы, однако, полагаем  $\mathbf{E}_{\parallel} \neq 0$ , так что  $\xi \neq \xi$ .

Возвращаясь к уравнению (13.16), заметим, что, как будет видно из дальнейшего, в выражении для  $\tilde{p}^{(2)}$  достаточно учитывать лишь гармоники с  $m \pm 1$ , т. е.  $\tilde{p}_{\pm 1}^{(2)}$ . При этом с использованием (15.23) для соответствующей части  $\delta_0$  получается

$$\begin{aligned} \delta_0 [\tilde{p}^{(2)}] = & \frac{4\pi m^2 R}{B_s^2 a^2} \left[ \tilde{p}_{+1}^{(2)} + \tilde{p}_{-1}^{(2)} + \right. \\ & \left. + \frac{a}{m} \frac{\partial}{\partial a} (\tilde{p}_{+1}^{(2)} - \tilde{p}_{-1}^{(2)}) \right]. \end{aligned} \quad (13.30)$$

С учетом (13.25), (13.26), (13.30) уравнение (13.17) принимает вид

$$\begin{aligned} c_A^2 k_{\parallel} \Delta_{\perp} k_{\parallel} \zeta_0 - \frac{2\rho'_0 \mu^2}{\rho_0 a R^2} (1 - q^2) \zeta_0 - \omega (\omega - \omega_{pi}^*) \Delta_{\perp} \xi_0 - \\ - \frac{m^2}{Ra^2 \rho_0} \left[ \tilde{p}_{+1}^{(2)} + \tilde{p}_{-1}^{(2)} + \frac{a}{m} \frac{\partial}{\partial a} (\tilde{p}_{+1}^{(2)} - \tilde{p}_{-1}^{(2)}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (13.31)$$

В пренебрежении членами с  $\omega$  и  $\tilde{p}^{(2)}$  это уравнение означает

$$x \Delta_{\perp} x \zeta_0 - \frac{8\pi \rho'_0 \mu^2}{a B_s^2 \mu'^2} (1 - q^2) \zeta_0 = 0, \quad (13.32)$$

что находится в соответствии с результатами гидромагнитного приближения гл. 5, 6, касающимися границы желобковой неустойчивости.

При учете членов с  $\omega$ , но в пренебрежении  $E_{\parallel}$  (т. е. отличием  $\xi$  от  $\zeta$ ) и членами с  $\tilde{p}^{(2)}$  уравнение (13.31) переходит в следующее:

$$c_A^2 k_{\parallel} \Delta_{\perp} k_{\parallel} \zeta_0 - \frac{2\rho_0' \mu^2}{\rho_0 a R^2} (1 - q^2) \zeta_0 - \omega (\omega - \omega_{pi}^*) \Delta_{\perp} \zeta_0 = 0. \quad (13.33)$$

Это уравнение описывает желобковую неустойчивость с  $|\omega| \neq 0$  в случае, если не удовлетворяется критерий Сайдема — Мерсье [см. (2.52), (6.69)], а в противном случае — альфвеновские волны, модифицированные широм и кривизной силовых линий.

Отметим еще один важный частный случай уравнения (13.31), соответствующий малому ширю,  $k_{\parallel} \approx \text{const}$ , и возмущениям вида  $\exp(i k_a a)$ :

$$\omega (\omega - \omega_{pi}^*) \xi_0 - c_A^2 k_{\parallel}^2 \zeta = \frac{m^2}{a^2 k_{\perp}^2 R \rho_0} \times \\ \times \left[ \left( 1 - i \frac{ak_a}{m} \right) \tilde{p}_{-1}^{(2)} + \left( 1 + i \frac{ak_a}{m} \right) \tilde{p}_{+1}^{(2)} \right], \quad (13.34)$$

где  $k_{\perp}^2 = k_a^2 + m^2/a^2$ . Если, кроме того,  $k_a \gg k_b \equiv m/a$ , то вместо (13.34) имеем

$$\omega (\omega - \omega_{pi}^*) \xi_0 - c_A^2 k_{\parallel}^2 \zeta = - (im/ak_{\perp} R \rho_0) (\tilde{p}_{-1}^{(2)} - \tilde{p}_{+1}^{(2)}). \quad (13.35)$$

В дальнейшем рассмотрим эффекты, связанные с конечным  $\tilde{p}^{(2)}$ , а также с отличием между  $\xi$  и  $\zeta$ .

### § 13.3. Альфвеновские неустойчивости плазмы токамака в приближении двухжидкостной недиссипативной гидродинамики

В этом параграфе будем пренебрегать кинетическими и диссипативными эффектами. Плазму будем описывать с помощью системы уравнений двухжидкостной недиссипативной гидродинамики.

Ионную компоненту характеризуем плотностью  $n$ , давлением  $p_i$  и скоростью  $\mathbf{V}_i$ , удовлетворяющими уравнениям непрерывности, теплового баланса и движения:

$$\left. \begin{aligned} \partial n / \partial t + \operatorname{div} n \mathbf{V}_i &= 0; \\ \partial p_i / \partial t + \mathbf{V}_i \nabla p_i + \gamma_i p_i \operatorname{div} \mathbf{V}_i + \\ &+ (\gamma_i - 1) \operatorname{div} \mathbf{q}_i = 0; \\ M_i n d\mathbf{V}_i / dt = -\nabla p_i - \nabla \overset{\leftarrow}{\pi}_i + e_i n (\mathbf{E} + \\ &+ [\mathbf{V}_i / c, \mathbf{B}]). \end{aligned} \right\} \quad (13.36)$$

Здесь  $\gamma_i$  — некоторый эффективный показатель адиабаты, отличный от единицы,  $\gamma_i \neq 1$ ;  $\mathbf{q}_i = (5/2) (cp_i / e_i B^2) \times \times [\mathbf{B} \nabla T_i]$  — «косой» поток тепла (см. гл. 7 книги [II]); тензор ионной вязкости  $\overset{\leftarrow}{\pi}_i$  содержит только недиссипативную часть, т. е. соответствует так называемой косой вязкости (см. гл. 7 книги [III]); производная  $d_i / dt$  имеет обычный смысл  $\partial / \partial t + \mathbf{V}_i \nabla$ .

Электронную теплопроводность вдоль силовых линий считаем бесконечно большой. В этом приближении уравнение теплового баланса электронов сводится к условию постоянства электронной температуры  $T_e$  вдоль силовой линии:

$$\mathbf{B} \nabla T_e = 0. \quad (13.37)$$

В уравнении движения электронов, в отличие от (13.36), пренебрегаем инерцией и косой вязкостью

$$0 = -\nabla p_e + e_e n (\mathbf{E} + [\mathbf{V}_e / c, \mathbf{B}]). \quad (13.38)$$

Необходимую нам связь  $\tilde{p}$  и  $\mathbf{E}$  с  $\zeta$  получим следующим образом. Исходим из того, что

$$\tilde{p} = \tilde{p}_i + \tilde{n} T_0 + n_0 \tilde{T}_e. \quad (13.39)$$

(Равновесные температуры электронов и ионов считаем одинаковыми,  $T_{0e} = T_{0i} = T_0$ .) Выражение для  $\tilde{T}_e$  находится непосредственно с помощью формулы (13.37)

$$\tilde{T}_{e,0} = T'_0 \zeta_0; \quad \tilde{T}_{e,\pm 1} = -T'_0 \zeta_{\pm 1}. \quad (13.40)$$



Вычисление  $n$  и  $p_i$  производится с помощью уравнений непрерывности и баланса тепла (13.36). Заменяем в этих уравнениях производные по времени на  $(-i\omega)$ , исключаем из них поперечную скорость и после линеаризации приводим их к виду

$$\left. \begin{aligned} \tilde{n} &= -\xi_{\perp} \nabla n_0 - n_0 [(1 - \omega_{pi}^*/\omega) \operatorname{div} \xi_{\perp} + \operatorname{div} \xi_{\parallel}], \\ \tilde{p}_i &= -\xi_{\perp} \nabla p_{0i} - \gamma_i p_{0i} \times \\ &\times [(1 - (\omega_{pi}^* + \omega_{Ti})/\omega) \operatorname{div} \xi_{\perp} + \operatorname{div} \xi_{\parallel}], \end{aligned} \right\} \quad (13.41)$$

где

$$\xi_{\parallel} = (i/\omega) \mathbf{B}_0 (\mathbf{V}_i \mathbf{B}_0) / B_0^2; \quad \omega_T = mcT'_0 / (e_i a B_s).$$

Заметим, что в выражении для возмущенной плотности ионов мы пренебрегли вкладом поперечной инерции и косо́й магнитной вязкости (ср. с гл. 7 книги [II]). При учете этого вклада вместо первого уравнения (13.41) мы имели бы

$$\begin{aligned} \tilde{n}_a &= -\xi_{\perp} \nabla n_0 - n_0 [(1 - \omega_{pi}^*/\omega) \operatorname{div} \xi_{\perp} + \operatorname{div} \xi_{\parallel}] + \\ &+ \frac{e_i n_0}{M_i \omega_{Bi}^2} \left( 1 - \frac{\omega_{pi}^*}{\omega} \right) \frac{\omega_a B_s}{mc} \nabla_{\perp}^2 \xi. \end{aligned} \quad (13.41')$$

При получении (13.40) использовалось соотношение

$$\operatorname{div} \xi_{\perp} = -\xi_{\perp} \nabla \ln B_0^2, \quad (13.42)$$

вытекающее из (13.37). Заметим также, что члены в правой части соотношения (13.42) малы по сравнению с членами в левой, так что приближенно

$$\partial \xi^a / \partial \theta \approx -a \xi^a / \partial a. \quad (13.43)$$

Поэтому (13.42) означает также

$$\operatorname{div} \xi_{\perp} = - (2\xi_0/R) (\cos \theta + (ak_a/m) \sin \theta) \exp [i (m \theta - n \varphi + k_a a)]. \quad (13.44)$$

Теперь выразим через возмущенное давление  $\mathbf{E}_{\parallel}$  и  $\xi_{\parallel}$ . Из продольной компоненты уравнения (13.38) находим

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \nabla_{\parallel} p_e / e_e n, \quad (13.45)$$

где  $\nabla_{\parallel} = (\mathbf{V}_0 / B_0^2) \mathbf{B} \nabla$ . Уравнение для  $\xi_{\parallel}$ , в соответствии с (13.36), (13.38), можно представить в виде

$$\rho_0 \omega^2 \xi_{\parallel} = \nabla_{\parallel} \tilde{p}. \quad (13.46)$$

При получении (13.46) было использовано также приближенное соотношение

$$(\mathbf{V}_i \nabla) V_{i\parallel} + (\nabla \overleftrightarrow{\pi})_{\parallel} / \rho_0 = 0, \quad (13.47)$$

получающееся при подстановке сюда явного вида  $\overleftrightarrow{\pi}$  (см. подробнее гл. 7 книги [III]).

Решаем приведенную выше систему уравнений последовательными приближениями, полагая  $\tilde{X}_0 \gg \tilde{X}_{\pm 1}$ . В пренебрежении малыми членами порядка  $k_{\perp}^2 \rho_i^2$  для  $\tilde{X}_0$  получаются соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{n}_0 &= -\xi_0 n'_0 + \lambda_1 (\xi_0 - \zeta_0); \\ \tilde{p}_{i,0} &= -\xi_0 \rho'_0 i + \lambda_2 (\xi_0 - \zeta_0); \\ \xi_{\parallel,0} &= \lambda_3 (\xi_0 - \zeta_0), E_{\parallel 0} = \lambda_4 (\xi_0 - \zeta_0); \\ &(\xi_0 - \zeta_0) D_0 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.48)$$

где  $\lambda_{1,2,3,4}$  — некоторые коэффициенты, явный вид которых нам не важен, а величина  $D_0$  имеет вид

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \omega^2 (\omega + \omega_{ni}) - k_{\parallel}^2 c_s^2 [\omega + \omega_{ni} - (2\omega_{ni} + \\ &\quad + \omega_{Ti}) / (1 + \gamma_i)]; \\ c_s^2 &= (1 + \gamma_i) T_0 / M_i. \end{aligned} \right\} \quad (13.49)$$

Соотношения (13.49) удовлетворяются в двух случаях: при  $D_0 = 0$  и при  $D_0 \neq 0$ . Решение с  $D_0 = 0$  соответствует потенциальному приближению, обсуждавшемуся в гл. 7, 8 книги [III]. Ниже мы рассмотрим другую возможность:  $D_0 \neq 0$ . При этом

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \zeta_0; \tilde{n}_0 = -\zeta_0 n'_0; \tilde{p}_{i,0} = -\zeta_0 \rho'_0 i, \\ \xi_{\parallel,0} &= E_{\parallel,0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.50)$$

В следующем приближении по тороидальности с помощью уравнений (13.41), (13.46) находим

$$\tilde{p}_{\pm 1}^{(2)} = -(\rho_0/R) c_{\parallel} \left( \xi_0 \mp \frac{a}{m} \xi_0' \right); \quad \tilde{p}_0^{(2)} = 0, \quad (13.51)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_{\parallel} &= -\frac{\omega}{2D_1} [(\omega - \omega_{pi}^*)^2 + \gamma_i (\omega + \omega_{ni}) (\omega - \omega_{pi} - \omega_{Ti})]; \\ D_1 &= \omega^2 (\omega + \omega_n) - \frac{k_1^2 c_s^2}{\mu/R} [\omega + \omega_n - (2\omega_n + \omega_T)/(1 + \gamma_i)]. \end{aligned} \right\} \quad (13.52)$$

При получении этих результатов было учтено соотношение

$$(\operatorname{div} \xi_{\perp})_{\pm 1} = -\left( \xi_0 \mp \frac{a}{m} \xi_0' \right) / R, \quad (13.53)$$

вытекающее из (13.44).

Как видно из (13.51), функция  $\tilde{p}^{(2)}$  не имеет  $m$ -й фурье-гармоники,  $\tilde{p}_0^{(2)} = 0$ . Это оправдывает наши приближенные формулы (13.18), (13.30).

Подставляя (13.51) в (13.31), получаем искомое уравнение малых колебаний в приближении двухжидкостной недиссипативной гидродинамики

$$\begin{aligned} x \Delta_{\perp} (x \xi_0) - \frac{4\pi\rho_0}{a^2 B_s^2} \left( \frac{\mu}{\mu'} \right)^2 \left[ 2a\kappa_p (1 - q^2) \xi_0 + \right. \\ \left. + (c_{\perp} + 2q^2 c_{\parallel}) \frac{a^2}{m^2} \Delta_{\perp} \xi_0 \right] = 0, \end{aligned} \quad (13.54)$$

где 
$$c_{\perp} = \frac{\rho_0}{\rho_0 k_1^2} \omega (\omega - \omega_{pi}^*).$$

Учитывая результаты гл. 5, 6, заключаем, что уравнение (13.54) с  $c_{\perp} = c_{\parallel} = 0$  не имеет собственных решений, если удовлетворяется критерий Сайдема — Мерсье:

$$\frac{1}{4} \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^2 - \frac{8\pi\rho_0'}{aB_s^2} (q^2 - 1) > 0. \quad (13.55)$$

Учет  $c_{\perp}$ ,  $c_{\parallel}$  не меняет этого вывода, в чем можно убедиться переходом от координатного представления в волновое (ср. с гл. 5). Условие (13.55) является вместе с тем и условием отсутствия желобковой (гидромагнитной) неустой-

чивости. Поэтому, считая плазму гидромагнитно устойчивой и интересуясь возможностью развития других неустойчивостей, а именно, описываемых уравнением (13.54), мы должны исследовать несобственные решения этого уравнения. Физически такие решения соответствуют возмущениям, возбуждаемым в некоторый начальный момент времени. При такой постановке задача об устойчивости сводится к решению локального дисперсионного уравнения и к нахождению области локализации возмущения (см. подробнее гл. 12 книги [III]).

Будем интересоваться возмущениями типа волновых пакетов с волновым числом  $k_a$ , т. е. полагать  $\xi_0(a) \sim \exp(ik_a a)$ . При этом из (13.54) получается локальное дисперсионное уравнение

$$k_{\parallel}^2 c_A^2 + \frac{\rho_0 k_{\perp}^2}{\rho_0 q^2} \left[ 2\alpha x_p (1 - q^2) \frac{k_b^2}{k_{\perp}^2} - (c_{\perp} + 2q^2 c_{\parallel}) \right] = 0. \quad (13.56)$$

Ограничимся рассмотрением возмущений с  $\omega \simeq \omega_* \simeq \simeq k_{\perp} c_s$ ,  $k_a \gg k_b$ . При этом член с  $1 - q^2$ , соответствующий магнитной яме, в уравнении (13.56) не важен, так что (13.56) сводится к виду

$$k_{\parallel}^2 c_A^2 - (c_{\perp} + 2q^2 c_{\parallel}) \rho_0 k_{\perp}^2 / \rho_0 = 0. \quad (13.57)$$

Удобно различать два предельных случая.

1. **Случай малого шира,  $\mu' a / \mu \lesssim \beta^{1/2}$ .** Полагая для оценок  $x \simeq 1/k_{\perp}$ , находим, что при этом условии членом с  $k_{\perp}^2$  в (13.57) можно пренебречь, так что

$$c_{\perp} + 2q^2 c_{\parallel} = 0, \quad (13.58)$$

или в явном виде

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_{pi}^*) \left\{ \omega^2 (\omega + \omega_{pi}^*) - k_{\perp}^2 c_s^2 \left( \omega + \omega_{ni} - \frac{2\omega_{ni} + \omega_{Ti}}{1 + \gamma_i} \right) - \right. \\ \left. - 2q^2 \frac{k_{\perp}^2 \rho_0}{2\rho_0} [\omega - \omega_{pi}^* + \gamma_i (\omega + \omega_{ni})] \right\} + \\ + 2q^2 \frac{\gamma_i \rho_0 k_{\perp}^2}{2\rho_0} \omega_{Ti} (\omega + \omega_{ni}) = 0. \end{aligned} \quad (13.59)$$

Отсюда находим, что при  $\nabla T_0 = 0$  одна из ветвей колебаний имеет частоту  $\omega = \omega_{ni}$ . При этом одна из трех других ветвей также имеет частоту  $\omega = \omega_{ni}$ , если

$$\omega_{ni}^2 = (k_i^2 \rho_0 / 2\rho_0) \gamma_i (1 + 2q^2). \quad (13.60)$$

При таких  $\omega_{ni}$  учет малого  $\nabla T_0 \neq 0$  приводит к квадратному уравнению

$$(\omega - \omega_{ni})^2 = - \frac{4\gamma_i}{4\gamma_i - 1} \frac{q^2 \omega_{ni}^2}{1 + 2q^2} \frac{\partial \ln T_0}{\partial \ln n_0}. \quad (13.61)$$

Видно, что имеет место неустойчивость, если

$$\partial \ln T_0 / \partial \ln n_0 > 0. \quad (13.62)$$

Инкремент колебаний порядка их частоты,  $\text{Im } \omega \simeq \simeq \text{Re } \omega \simeq \omega_n$ . Характерную область локализации находим, оценивая  $k_\theta$  из (13.60) и учитывая  $k_a \simeq 1/x > k_\theta$ :

$$x \lesssim R\rho_i/a, \quad (13.63)$$

где  $\rho_i$  — ларморовский радиус ионов. Для сравнения напомним, что область локализации потенциальной «дрейфовой» неустойчивости плазмы с  $\nabla T_0 \neq 0$  порядка  $x_{\text{потенц}} = \rho_i (R/a) (a\mu')^{-1}$ . Поэтому, в силу сделанного выше предположения о малости  $\mu'$ ,  $x < x_{\text{потенц}}$ . Потенциальная дрейфовая неустойчивость, однако, не развивается, если  $\partial \ln T_0 / \partial \ln n_0 \lesssim 1$  (более точно, если  $\partial \ln T_0 / \partial \ln n_0 < 2$  в случае бесстолкновительной плазмы и  $\partial \ln T_0 / \partial \ln n_0 < 2/3$  — в случае столкновительной (см. гл. 6 и 8 книги [II]).

**2. Случай большого шира,  $\mu'a/\mu > \beta^{1/2}$ .** Уравнение (13.59) и вытекающие из него результаты остаются в силе и при большом шире, однако, при этом  $k_a$  должно быть достаточно большим

$$k_a > m\mu'/\mu\beta^{1/2}. \quad (13.64)$$

Таким  $k_a$  соответствуют возмущения с меньшей, чем (13.63), областью локализации:

$$x \lesssim \frac{\mu\beta^{1/2}}{\mu'a} \frac{R}{a} \rho_i. \quad (13.65)$$

Из требования  $x > \rho_i$  вытекает условие применимости наших результатов

$$\beta^{1/2} > a^2 \mu' / R\mu. \quad (13.66)$$

Кроме того, в случае большого шира уравнение (13.59) описывает еще один класс возмущений, соответствующих полюсу  $c_{II}$ :

$$D_1 = 0. \quad (13.67)$$

Это уравнение формально отличается от дисперсионного уравнения потенциальных возмущений  $D_0 = 0$  только заменой

$$k_{II} \rightarrow k_1. \quad (13.68)$$

Уравнение  $D_0 = 0$  исследовалось ранее (см. § 6.2 книги [II].) Используя результаты, приведенные в [II], заключаем, что возмущения, описываемые уравнением (13.67), неустойчивы, если

$$\partial \ln T_0 / \partial \ln n_0 > 2/3 \quad (13.69)$$

имеется в виду  $\gamma_i = 5/3$ ).

Рассматриваемые возмущения имеют  $k_a$ , заключенное в пределах

$$m/a < k_a < a\mu' / \mu\beta^{1/2}, \quad (13.70)$$

так что их область локализации характеризуется неравенством (13.63). При очень большом шире, когда  $a\mu' \simeq \mu$ ,  $x \simeq x_{\text{потенц.}}$

В заключение отметим, что в возмущениях с  $k_b \gtrsim k_a$ , которые мы не рассматривали, важна роль магнитной ямы. В таких возмущениях магнитная яма является стабилизирующим фактором.

### § 13.4. Кинетические альфвеновские неустойчивости плазмы токамака

Теперь, в отличие от § 13.3, будем описывать плазму кинетически. Исходим из дрейфового кинетического уравнения. В линейном приближении по возмущениям это уравнение можно представить в виде

$$\frac{d\tilde{f}}{dt} + \mathbf{V}_E \nabla f_0 + v_{\parallel} \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{B_0} \nabla f_0 - \frac{ef_0}{T_0} \tilde{\mathbf{E}}_{\parallel} + M \frac{(\varepsilon_{\perp} + v_{\parallel}^2)}{2T_0} f_0 \operatorname{div} \mathbf{V}_E = 0, \quad (13.71)$$

где

$$d/dt = \partial/\partial t + (v_{\parallel} \mathbf{B}_0/B_0 + \mathbf{u}_D) \nabla; \quad (13.72)$$

$$\mathbf{V}_E = c[\mathbf{E}, \mathbf{B}_0]/B_0^2, \quad \mathbf{u}_D = -\frac{\varepsilon_{\perp} + v_{\parallel}^2}{\omega_B} \left[ \nabla \ln B_0, \frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \right]; \quad (13.73)$$

$\tilde{f}$  и  $f_0$  — возмущенная и стационарная части функции распределения;  $\varepsilon_{\perp} = v_{\perp}^2/2$ ;  $v_{\perp}$ ,  $v_{\parallel}$  — поперечная и продольная скорости частицы;  $\omega_B = eB_0/Mc$  — циклотронная частота;  $M$  — масса частицы.

Как и в § 13.2, возмущенное магнитное поле  $\tilde{\mathbf{B}}$  будем выражать через функцию  $\zeta$  [см. соотношения (13.12), (13.13)]. Вместо продольного электрического поля  $E_{\parallel}$  введем возмущенный потенциал  $\psi$ , определив его соотношением

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\parallel} = -(\tilde{\mathbf{B}}_0 \nabla) \psi / B_0. \quad (13.74)$$

Полагаем, что скорость продольного движения частиц не зависит от положения частицы на силовой линии,  $v_{\parallel} = \text{const}$ . При этом исключаются из рассмотрения эффекты, связанные с запертыми частицами (эти эффекты рассмотрим, в частности, в § 13.5).

Возмущенную функцию распределения и электрический потенциал  $\psi$  представляем в виде рядов, аналогичных (13.3). В соответствии с анализом, проведенным в § 13.3, полагаем  $\psi_0 = 0$ . Это означает, что мы исключаем из рассмотрения потенциальные дрейфовые неустойчивости. Тогда из (13.71) получается

$$\tilde{f}_0 = -\zeta_0 f'_0. \quad (13.75)$$

С учетом (13.75) и соотношений (13.23) и (13.53) из уравнения (13.71) находим

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\pm 1} = & -\zeta_{\pm 1} f'_0 - \frac{ef_0}{T_0} \psi_{\pm 1} \left( 1 - \frac{\omega - \hat{\omega}_*}{\omega - k_{\pm 1} v_{\parallel}} \right) + \\ & + \frac{M(\varepsilon_{\perp} + v_{\parallel}^2) f_0}{2T_0 R} \frac{\omega - \hat{\omega}_*}{\omega - k_{\pm 1} v_{\parallel}} \left( \zeta_0 \mp \frac{a}{m} \zeta'_0 \right), \end{aligned} \quad (13.76)$$

где 
$$\hat{\omega}_* \equiv \frac{mc T_0}{ea B_s} \frac{\partial \ln f_0}{\partial a}, \quad k_{+1} \equiv k_1 = -k_{-1}.$$

С помощью (13.76) получаем для

$$\tilde{p}_{\pm 1}^{(2)} = \frac{I_1}{R} \left( \zeta_0 \mp \frac{a}{m} \zeta'_0 \right) + I_2 \psi_{\pm 1}, \quad (13.77)$$

где 
$$\left. \begin{aligned} I_1 = \sum_{e, i} \int dv f_0 \frac{M^2 (\varepsilon_{\perp} + v_{\parallel}^2)^2}{4T} \frac{\omega - \hat{\omega}_*}{\omega - k_{\pm 1} v_{\parallel}}; \\ I_2 = \sum_{e, i} \int dv f_0 \frac{M (\varepsilon_{\perp} + v_{\parallel}^2)}{2T} \frac{\omega - \hat{\omega}_*}{\omega - k_{\pm 1} v_{\parallel}}. \end{aligned} \right\} \quad (13.78)$$

Используя условие квазинейтральности, находим связь между  $\zeta_0$  и  $\psi_{\pm 1}$ :

$$\psi_{\pm 1} = \frac{I_2}{I_3 R} \left( \zeta_0 \mp \frac{a}{R} \zeta'_0 \right), \quad (13.79)$$

где 
$$I_3 = \sum_{e, i} \int \frac{e^2}{T} dv f_0 \left( 1 - \frac{\omega - \hat{\omega}_*}{\omega - k_{\pm 1} v_{\parallel}} \right). \quad (13.80)$$

В результате

$$\tilde{p}_{\pm 1}^{(2)} = \frac{1}{R} \left( I_1 + \frac{I_2^2}{I_3} \right) \left( \zeta_0 \mp \frac{a}{m} \zeta'_0 \right). \quad (13.81)$$

Используя это выражение для  $\tilde{p}_{\pm 1}^{(2)}$ , приходим к уравнению малых колебаний вида (13.54), в котором

$$c_{\parallel} = - (I_1 + I_2^2/I_3)/p_0. \quad (13.82)$$



Как и в § 13.3, ограничимся рассмотрением возмущений с  $k_a > k_b$ . Таким возмущениям соответствует локальное дисперсионное уравнение вида (13.57). Аналогично § 13.3, будем различать случаи малого и большого шира.

**1. Случай малого шира.** При этом имеем дело с дисперсионным уравнением вида (13.58). Ввиду сложности этого уравнения, связанной с трансцендентностью  $c_{\parallel}$  [см. (13.82)], рассмотрим предельный случай малых частот, полагая  $\omega < |k_1|v_{Ti}$ ;  $v_{Ti} = (2T_0/M_i)^{1/2}$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= -\frac{i\sqrt{\pi}n_0T_0}{2|k_1|v_{Ti}} \left\{ \omega - \omega_{ni} \left( 1 + \frac{3}{2}\eta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2i\omega[\omega - \omega_{ni}(1 + \eta)]}{\sqrt{\pi}|k_1|v_{Ti}} \right\}; \\ I_2 &= -\frac{ie_i\sqrt{\pi}n_0}{2|k_1|v_{Ti}} \left[ \omega - \omega_{ni} \left( 1 + \frac{\eta}{2} \right) \right]; \\ I_3 &= 2e^2 n_0/T_0, \end{aligned} \right\} \quad (13.83)$$

где  $\eta \equiv \partial \ln T_0 / \partial \ln n_0$ . Подставляя (13.83) в (13.82) и учитывая явный вид  $c_{\perp}$  [см. (13.54)], с помощью (13.58) находим

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_n \left( 1 + \frac{3}{2}\eta \right) + \\ &+ \frac{i\sqrt{\pi}\omega_n^2\eta}{|k_1|v_{Ti}} \left[ \eta + \frac{1}{q^2} \left( 1 - \frac{q^2}{8} \right) \left( 1 + \frac{3}{2}\eta \right) \right]. \end{aligned} \quad (13.84)$$

Видно, что, как и в гидродинамическом приближении, имеет место нарастание возмущений, если  $\partial \ln T_0 / \partial \ln n_0 > 0$ . Нарастающими являются также возмущения с  $\partial \ln T_0 / \partial \ln n_0 < 0$ . Эти результаты, полученные при  $\omega < k_1 v_{Ti}$ , остаются в силе вплоть до  $\omega \simeq k_1 v_{Ti}$ . Поэтому область локализации кинетической неустойчивости определяется прежней оценочной формулой (13.63).

**2. Случай большого шира.** Кинетические неустойчивости в этом случае аналогичны гидродинамическим, рассмотренным в п. 2 § 13.3. Полосу  $c_{\parallel}$  соответствует дисперсионное уравнение

$$I_3 = 0, \quad (13.85)$$

аналогичное уравнению (13.67) и формально совпадающее с уравнением для потенциальной дрейфовой неустойчивости плазмы с  $\nabla T_0 \neq 0$ , если в нем сделать замену  $k_{\perp} \rightarrow k_{\parallel}$ . Уравнение (13.85) описывает нарастающие возмущения, если

$$\partial \ln T_0 / \partial \ln n_0 > 2 \quad (13.86)$$

или  $\partial \ln T_0 / \partial \ln n_0 < 0$ .

### § 13.5. Обсуждение результатов § 13.3, 13.4

Из § 13.3, 13.4 следует, что в плазме с  $\nabla T_0 \neq 0$ , удерживаемой в тороидальных ловушках, возможно развитие непотенциальных неустойчивостей, связанных с альфвеновскими волнами. Рассмотренные выше неустойчивости имеют порог по давлению плазмы: для неустойчивости необходимо, чтобы  $\beta > \Theta^2$ . При  $\Theta \simeq a/R$  это условие означает  $\beta_J > 1$ , где  $\beta_J = 8 \pi \rho_0 / B_0^2$ .

### § 13.6. Коротковолновые возмущения

**1. Введение.** Теперь, в отличие от § 13.2 — 13.5, рассмотрим возмущения с длиной волны порядка или меньшей ларморовского радиуса ионов,  $k_{\perp} \rho_i \gtrsim 1$ . При этом проиллюстрируем электродинамический подход к исследованию непотенциальных неустойчивостей плазмы токамака, отличный от гидромагнитного подхода, используемого в предыдущих параграфах. Иначе говоря, будем вычислять не возмущенное давление плазмы, что имеет смысл делать только в случае длинноволновых возмущений, а возмущенный ток, — величину, которая непосредственно входит в уравнения Максвелла.

При электродинамическом подходе выявляется важная роль магнитного дрейфа частиц в тороидальном магнитном поле. Скорость магнитного дрейфа частиц в таком поле знакопеременна (имеются в виду пролетные частицы). Это приводит к осцилляторному движению частиц относительно силовых линий магнитного поля. Амплитуда отклонений пролетных частиц от соответствующих силовых линий, обычно называемая размером орбит их дрейфового

движения, одного порядка с радиусом окружностей ларморовского вращения этих частиц. Поэтому в процессах, медленных по сравнению с временем пролета частицы вдоль системы, эффекты конечных орбит дрейфового движения пролетных частиц столь же важны, как и эффекты конечного ларморовского радиуса.

**2. Возмущенная функция распределения.** Исходим из линеаризованного уравнения Больцмана — Власова, которое приводим к виду

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & -\frac{eF}{T} \left[ \psi + i(\omega - \hat{\omega}_*) \int_{-\infty}^t \psi dt' \right] - \zeta \frac{\partial F}{\partial a} - \\ & -\frac{eF}{T} \frac{aB_s}{mc} (\omega - \hat{\omega}_*) (\zeta H_1 + \xi^a H_2) - \\ & -\frac{eF}{T} \frac{aB_s}{mc} (\omega - \hat{\omega}_*) \int_{-\infty}^t \mathbf{V}_D \nabla \zeta dt'. \end{aligned} \quad (13.87)$$

Здесь функции  $H_1$  и  $H_2$  означают

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= 1 - J_0(\xi_{\perp}) \exp[i\xi_{\perp} \sin(\alpha - \lambda)]; \\ H_2 &= \frac{\omega}{\omega_B} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} J_n(\xi_{\perp}) \exp[i\xi_{\perp} \sin(\alpha - \lambda) - in(\alpha - \lambda)], \end{aligned} \right\} (13.88)$$

где  $\alpha = \arccos(v/v_{\perp})$ ;  $\lambda = \arccos(k_a/k_{\perp})$ ;  $\xi_{\perp} = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_B$ , а остальные обозначения ясны из предшествующего.

При вычислении интегралов по  $t'$  в (13.87) учитываем соотношение

$$\begin{aligned} \exp\{-i\omega t' + i\mathbf{k}r(t')\} &= \exp\{-i\omega t + i\mathbf{k}r(t)\} \times \\ &\times \exp\{i\omega(t - t') - i\mathbf{k} \int_{t'}^t \mathbf{v}(t'') dt''\} \end{aligned} \quad (13.89)$$

и то обстоятельство, что, согласно приложению 1 гл. 4, скорость частицы в неоднородном магнитном поле состоит из трех частей: скорости ларморовского вращения  $\tilde{\mathbf{v}}_{\perp}$ , скорости дрейфового движения поперек  $\mathbf{B}_0$  (в приложении 1

гл. 4 эта скорость обозначалась  $\mathbf{V}_{др}$ , а здесь  $\mathbf{V}_D$ ) и скорости продольного движения  $\mathbf{e}_0 v_{\parallel}$ , так что

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}_{\perp} + \mathbf{V}_D + \mathbf{e}_0 v_{\parallel}. \quad (13.90)$$

Вычисление интегралов по  $t'$  при  $\mathbf{V}_D \rightarrow 0$  подробно разъяснялось в гл. 4 книги [II]. Поэтому остановимся только на специфике, связанной с  $\mathbf{V}_D$ .

Учитывая метрику осесимметричного токамака круглого сечения, находим, что вектор  $\mathbf{V}_D$  имеет следующие проекции на направления  $\mathbf{e}_a = \nabla a / |\nabla a|$  и  $\mathbf{e}_b \equiv [\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_a]$ :

$$V_{D,a} = \frac{v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2}{\omega_{Bs} R} \sin \theta; \quad V_{D,b} = \frac{v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2}{\omega_{Bs} R} \cos \theta; \quad (13.91)$$

$\omega_{Bs} = eB_s/Mc$ . Поэтому

$$k\mathbf{V}_D = k_{\perp} \Lambda (v_{\parallel}/qR) \sin(\theta + \lambda), \quad (13.92)$$

где  $\Lambda$  имеет смысл размера орбиты дрейфового движения частицы и определяется соотношением

$$\Lambda = \frac{v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2}{\omega_{Bs} v_{\parallel}} q. \quad (13.93)$$

Интеграл по  $t''$  от  $k\mathbf{V}_D$  [см. (13.89)] вычисляем, используя уравнение продольного движения (более точно — проекцию этого уравнения на направление  $\theta$ ):

$$d\theta/dt = v_{\parallel}/qR. \quad (13.94)$$

При этом получаем

$$i \int_{t'}^t k\mathbf{V}_D dt'' = i \xi_{\parallel} \{ \cos(\theta + \lambda) - \cos[\theta + \lambda - (t - t') v_{\parallel}/qR] \}, \quad (13.95)$$

где  $\xi_{\parallel} = k_{\perp} \Lambda$ . Тогда приходим к задаче вычисления интегралов по  $t'$  от экспоненты, в показателе которой стоит правая часть (13.95). Такого рода экспоненту представляем

в виде набора плоских волн, используя разложение в ряд по функциям Бесселя:

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -i \xi_{\parallel} \cos \left[ \theta + \lambda - \frac{v_{\parallel}}{qR} (t - t') \right] \right\} = \\ & = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(\xi_{\parallel}) \exp \left[ i s \left( \theta + \lambda - \frac{\pi}{2} \right) \right] \exp \left[ -i \frac{v_{\parallel} s}{qR} (t - t') \right]. \end{aligned} \quad (13.96)$$

Дальнейшее вычисление интегралов по  $t'$  в (13.87) производится стандартным образом. При этом

$$\int_{-\infty}^t \psi dt' = i \psi \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s \frac{J_0(\xi_{\perp}) J_s(\xi_{\parallel}) \exp [i \xi_{\perp} \sin(\alpha - \lambda)]}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - s v_{\parallel} / qR}; \quad (13.97)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t \mathbf{V}_D \nabla \zeta dt' = \\ & = -\zeta \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s \frac{J_0(\xi_{\perp}) J_s(\xi_{\parallel}) (s v_{\parallel} / qR) \exp [i \xi_{\perp} \sin(\alpha - \lambda)]}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - s v_{\parallel} / qR}, \end{aligned} \quad (13.98)$$

где

$$c_s = \exp \{ i [\xi_{\parallel} \cos(\theta + \lambda) + s(\theta + \lambda - \pi/2)] \}. \quad (13.99)$$

**3. Дисперсионное уравнение в пренебрежении «спутниками»  $\xi$  и  $\psi$ .** Воспользуемся полученными выше результатами для анализа возмущений, полагая, что  $\xi$  и  $\psi$  зависят от угла  $\psi$  по закону  $\exp(i m \theta)$ , т. е. пренебрегая спутниками этих величин типа  $\exp[i(m+k)\theta]$  с  $k \neq 0$ . Такой подход оправдывается в задачах о коротковолновых возмущениях,  $\xi_{\parallel} \gg 1$ , а в ряде случаев, как будет разъяснено в гл. 14, и в задачах о длинноволновых возмущениях.

Вычислим  $\text{div} \mathbf{j}_\perp$  и возмущенные плотности заряда. Результаты представим в виде

$$\text{div} \mathbf{j}_\perp = \frac{aB_s k_\perp^2}{4\pi i m c} \varepsilon_{11} \zeta + \frac{\omega}{4\pi i} k_\perp^2 \varepsilon_{10} \psi; \quad (13.100)$$

$$\sum_{\alpha=e, i} e_\alpha n_\alpha = -\frac{k_\perp^2}{4\pi} \frac{aB_s \omega}{m c} \varepsilon_{01} \zeta - \frac{k_\perp^2}{4\pi} \varepsilon_{00} \psi, \quad (13.101)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \sum_{e, i} \frac{1}{k_\perp^2 d^2} \left( 1 - \frac{\omega_*}{\omega} \right) \left[ 1 - I_0 \exp(-z) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{J_0^2(\xi_\perp) J_s^2(\xi_\parallel) (sv_\parallel/qR)^2}{\omega - k_\parallel v_\parallel - sv_\parallel/qR} \right\rangle \right]; \\ \varepsilon_{10} = \varepsilon_{01} &= \sum_{e, i} \frac{1}{k_\perp^2 d^2} \left( 1 - \frac{\omega_*}{\omega} \right) \left[ 1 - I_0 \exp(-z) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{J_0^2(\xi_\perp) J_s^2(\xi_\parallel) (sv_\parallel/qR)}{\omega - k_\parallel v_\parallel - sv_\parallel/qR} \right\rangle \right]; \\ \varepsilon_{00} &= \sum_{e, i} \frac{1}{k_\perp^2 d^2} \left( 1 - \frac{\omega_*}{\omega} \right) \times \\ &\quad \times \left[ 1 - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{\omega J_0^2(\xi_\perp) J_s^2(\xi_\parallel)}{\omega - k_\parallel v_\parallel - sv_\parallel/qR} \right\rangle \right]. \end{aligned} \right\} \quad (13.102)$$

Здесь символ  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по максвелловскому распределению скоростей;  $z = k_\perp^2 T/M \omega_B^2$ ; для простоты положено  $\nabla T = 0$ , так что  $\omega_* \sim \nabla n_0$ .

Учитывая уравнение Максвелла (12.70) и условие квазинейтральности, приходим к дисперсионному уравнению

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - c^2 k_\parallel^2 / \omega^2, & \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{01} & \varepsilon_{00} \end{vmatrix} = 0, \quad (13.103)$$

где  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{01}$ ,  $\varepsilon_{10}$ ,  $\varepsilon_{00}$  определены соотношениями (13.102).

С помощью указанных соотношений можно выяснить роль эффектов конечных орбит. Видно, что эти эффекты

важны, если только  $k_{\parallel} \lesssim 1/qR$ . (Заметим, что к такого рода возмущениям относятся и рассмотренные в § 13.2 — 13.4.) Если же  $k_{\parallel} \gg 1/qR$ , то, полагая в правых частях равенств (13.102)  $v_{\parallel}/qR \rightarrow 0$ , находим, что суммы по  $s$  в выражениях  $\varepsilon_{11}$  и  $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{10}$  исчезают вместе с  $v_{\parallel}/qR$ , а аналогичная сумма в выражении для  $\varepsilon_{00}$  дает единицу,  $\sum_s J_s^2(\xi_{\parallel}) = 1$ .

Таким образом, все три выражения для  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  в (13.102) приобретают такой же вид, как и в случае магнитного поля прямого цилиндра. Этим, в частности, оправдывается приближенный подход, которому мы следовали в § 12.4, а также в § 11.9, 11.10, где эффектами конечных орбит пренебрегались.

**4. Коротковолновые возмущения с  $k_{\parallel} \ll 1/qR$ .** В связи со сказанным выше рассмотрим возмущения с  $k_{\parallel} \ll 1/qR$ , когда эффекты конечных орбит проявляются особенно сильно. Пренебрегая членами порядка  $(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})qR/v_{\parallel}$ , находим, что в этом случае выражения для  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{01} = \varepsilon_{10} &= \sum_{e, i} \frac{1}{k_{\perp}^2 d^2} \left( 1 - \frac{\omega_*}{\omega} \right) \times \\ &\times [1 - \langle J_0^2(\xi_{\perp}) J_0^2(\xi_{\parallel}) \rangle]; \\ \varepsilon_{00} &= \sum_{e, i} \frac{1}{k_{\perp}^2 d^2} \left( 1 - \frac{\omega_*}{\omega} \right) \left[ 1 - \left\langle \frac{\omega J_0^2(\xi_{\perp}) J_0^2(\xi_{\parallel})}{\omega - k_{\parallel}v_{\parallel}} \right\rangle \right]. \end{aligned} \right\} (13.104)$$

Полагая  $k_{\parallel}v_{Ti} \ll \omega \ll k_{\parallel}v_{Te}$ ;  $\xi_{\perp} > 1$ ;  $\xi_{\parallel} > 1$ , из (13.103), (13.104) получаем закон дисперсии для возмущений с  $\omega < \omega_*$ :

$$\omega = \frac{\omega_{ne} \langle J_0^2(\xi_{\perp}) J_0^2(\xi_{\parallel}) \rangle}{2 + \omega_{ne}^2/k_{\parallel}^2 c_A^2 z_i} \quad (13.105)$$

Заметим, что в случае прямого магнитного поля вместо (13.105) имеется закон дисперсии (см. гл. 14 книги [II])

$$\omega = \omega^{(0)} \equiv \frac{\omega_{ne} \langle J_0^2(\xi_{\perp}) \rangle}{2 + \omega_{ne}^2/k_{\parallel}^2 c_A^2 z_i} \quad (13.106)$$

Поскольку при  $(\xi_{\perp}, \xi_{\parallel}) > 1$   $J_0^2(\xi_{\perp}) \sim J_0^2(\xi_{\parallel}) \sim 1/k_{\perp}$ , характер зависимости  $\omega(k_{\perp})$ , вытекающий из (13.105), существенно иной, чем в случае прямого магнитного поля. В частности, при  $k_a \simeq m/a$  из (13.105) следует, что  $\omega(k_{\perp})$  убывает с ростом  $k_{\perp}$ , тогда как при тех же условиях  $\omega^{(0)}$  не зависит от  $k_{\perp}$ .

### § 13.7. Альфвеновские неустойчивости, вызываемые группой быстрых частиц

**1. Введение.** Выше при исследовании неустойчивостей распределение частиц по скоростям предполагалось максвелловским, соответствующим некоторой температуре  $T$ , общей для всех частиц того или иного сорта (электронов или ионов). Однако представляют интерес также неустойчивости, вызываемые группами быстрых частиц, т. е. таких, энергия которых велика по сравнению с температурой основной компоненты плазмы.

Роль быстрых частиц в реальных условиях могут играть ионы, образующиеся при ионизации быстрых нейтральных частиц, инжектируемых в плазму, ионы и электроны, ускоренные при ВЧ-нагреве плазмы, быстрые  $\alpha$ -частицы, рождающиеся при термоядерном синтезе, надтепловые частицы радиационных поясов Земли и т. п. В гл. 14 — 18 будут разобраны примеры раскачки колебаний быстрыми частицами в условиях геометрии токамака и магнитосферы. В отличие от этого, в настоящем параграфе отметим некоторые более простые результаты, получаемые в приближении магнитного поля с прямыми силовыми линиями (п. 2) и с винтовыми (п. 3). При этом ограничимся случаем альфвеновских неустойчивостей. Магнитно-звуковые неустойчивости рассмотрим в § 13.8.

**2. Возбуждение альфвеновских волн быстрыми ионами в приближении прямых силовых линий магнитного поля.** Приближение прямых силовых линий оправдывается, если параметр  $\beta$  достаточно велик по сравнению с  $a/R$ . В случае возмущений с  $k_{\perp} \rho \ll 1$  для этого должно быть  $\beta > (a/R) \times (k_{\perp} \rho)^{-2}$ , а при  $k_{\perp} \rho \gtrsim 1$  достаточно  $\beta > a/R$ . Инкремент нарастания альфвеновских колебаний в этом приближении вычислялся А. А. Кожевниковым, автором и О. А. Похотеловым. Он растет с увеличением  $k_{\perp} \rho$  (в области  $k_{\perp} \rho < 1$ ) и достигает максимального значения  $\gamma \simeq \gamma_{\max} \simeq \beta_{SA}/a$



при  $k_{\perp} \rho \simeq 1$ . При больших значениях параметра  $k_{\perp} \rho$  инкремент убывает как  $(k_{\perp} \rho)^{-2}$ .

**3. Возбуждение альфвеновских волн быстрыми ионами в условиях винтового магнитного поля.** Такая задача исследовалась Б. И. Меерсоном, автором и О.А. Похотеловым. В частности, было выяснено, что при  $\beta (k_{\perp} \rho)^2 \ll a/R \ll \beta$  максимальный инкремент нарастания альфвеновских волн имеет порядок  $\gamma_{\max} \simeq (a/\beta R)^{1/2} c_A/R$ , так что с увеличением кривизны поля инкремент нарастания увеличивается (ср. с п. 2).

### § 13.8. Магнитно-звуковые неустойчивости, вызываемые группой быстрых частиц

**1. Градиентная («дрейфовая») раскачка быстрыми частицами магнитно-звуковых колебаний.** Если диамагнитная («дрейфовая») скорость быстрых ионов  $V_*$  сравнима со скоростью Альфвена, т. е. если  $\rho/a \gtrsim c_A/v$ , то градиентные эффекты необходимо учитывать не только при рассмотрении альфвеновских волн, но и в случае быстрых магнитно-звуковых волн. Анализ градиентной раскачки быстрыми ионами магнитно-звуковых волн впервые провели Хасегава (в связи с проблемой интерпретации природы геомагнитных пульсаций) и автор (в связи с проблемой неустойчивостей, вызываемых  $\alpha$ -частицами в термоядерных реакторах). Было выяснено, что при указанном выше условии инкремент  $\gamma \simeq \beta R \omega$ , где параметр  $\beta$  определяется давлением быстрых частиц, а  $R \omega = c_A k_{\perp}$  — частота быстрых магнитно-звуковых волн (предполагается  $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$ ).

**2. Дрейфово-зеркальная неустойчивость.** В неоднородной плазме конечного давления с анизотропным распределением частиц по скоростям ( $T_{\perp} > T_{\parallel}$ ) с магнитно-звуковыми ветвями колебаний связан еще один тип неустойчивости — так называемая дрейфово-зеркальная неустойчивость. Такого рода неустойчивость исследовалась Хасегавой, а затем автором, О. А. Похотеловым, Н. М. Рыжовым и В. А. Супруненко, а также О. А. Похотеловым и В. А. Пилипенко. В частности, при

$$F \sim v_{\perp}^2 \exp(-Mv_{\perp}^2/2 T_{\perp} - Mv_{\parallel}^2/2 T_{\parallel})$$

для развития дрейфово-зеркальной неустойчивости необходимо  $T_{\perp}/T_{\parallel} > 2/3 + 1/3 \beta$ , где  $\beta_{\perp}$  определяется поперечным давлением плазмы. При этом условия частота и инкремент возмущений порядка градиентной частоты,  $\gamma \simeq \text{Re } \omega \simeq \omega_{*}$ .

### § 13.9. Микронеустойчивости потока плазмы большого давления с неоднородным профилем скорости

Выше отмечались неустойчивости, обусловленные градиентами плотности и температуры основной компоненты плазмы, а также наличием групп быстрых частиц с неоднородной плотностью и температурой. Если плазма движется вдоль магнитного поля со скоростью, профиль которой неоднороден ( $\mathbf{V}_0 \parallel \mathbf{B}_0, \nabla V_0 \perp \mathbf{B}_0$ ), то для получения полной картины неустойчивостей такой плазмы необходимо рассмотрение также неустойчивостей, обусловленных градиентом скорости.

Вопрос о неустойчивостях плазмы с неоднородным профилем скорости первоначально возник в связи с проблемами астрофизики. Исследование этого вопроса в рамках идеальной гидродинамики выявило неустойчивость, получившую название *неустойчивости типа Кельвина — Гельмгольца*. Дальнейшее развитие исследования неустойчивостей плазмы с неоднородным профилем скорости получили в связи с лабораторными экспериментами с очень разреженной плазмой, в частности экспериментами на  $Q$ -машинах. При этом был выявлен новый класс неустойчивостей, обусловленных градиентом скорости. Эти неустойчивости относятся к числу неустойчивостей дрейфового типа. Они связаны с раскачкой потенциальных возмущений и существуют лишь при  $\beta \ll 1$ .

В связи с термоядерными, а также геофизическими и астрофизическими проблемами важны также исследования электромагнитных (непотенциальных) неустойчивостей дрейфового типа, обусловленных градиентом скорости, поскольку в соответствующих проблемах приходится иметь дело с плазмой конечного и большого давления ( $\beta \gtrsim 1$ ), а в этих условиях потенциальное приближение, вообще говоря, неприменимо.

Анализ непотенциальных неустойчивостей дрейфового типа плазмы с  $\nabla V_0 \neq 0$  провели Добровольный, В. А. Клименко и автор. Этот анализ выявил возможность существования обширного семейства таких неустойчивостей, связанных с альфвеновскими и медленными магнитно-звуковыми ветвями колебаний. Характерные инкременты таких неустойчивостей порядка  $\gamma \simeq k_{\perp} \rho_i d V_0/dx$ . Нарастающие возмущения сильно вытянуты вдоль силовых линий, так что  $k_{\parallel}/k_{\perp} \simeq (1/\omega_{Bi}) dV_0/dx$ . Такого рода неустойчивости могут быть важны, например, в случае инжекции быстрых нейтральных частиц в тороидальные ловушки с пространственной магнитной осью, обсуждавшиеся в гл. 7.

### Библиографический обзор к гл. 13

1. **Mikhailovsky A. B.** «Drift» instabilities distorting the magnetic surfaces of tokamak-type toroidal systems. — «Nucl. Fusion», 1973, v. 13, p. 259.  
Этой работе мы следовали в § 13.2—13.5.
2. **Шафранов В. Д.** Равновесие плазмы в магнитном поле. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, с. 92.  
В работе [2] приведены гидромагнитные уравнения с анизотропным давлением, используемые нами в § 3.2.
3. **Mikhajlovskij A. B., Fridman A. M.** The role of finite orbit effects in the theory of short wave non-potential oscillations in a tokamak plasma. — «Nucl. Fusion», 1976, v. 16, p. 837.  
Работе [3] мы следовали в § 13.6.
4. **Kozhevnikov A. A., Mikhailovsky A. B., Pokhotelov O. A.** The role of protons of the radiation belts in the generation of Pc 3—5. — «Planet. and Space Sci.», 1976, v. 24, p. 465.
5. **Меерсон Б. И., Михайловский А. Б., Похотелов О. А.** Микро-неустойчивости плазмы большого давления в винтовом магнитном поле, вызываемые группой быстрых ионов. — Препринт ИАЭ-2757. М., 1976.  
В работах [4, 5] исследовались неустойчивости, отмеченные в § 13.7.
6. **Hasegawa A.** Drift-wave instabilities in the magnetosphere. — «Phys. Rev. Lett.», 1971, v. 27, p. 11.
7. **Михайловский А. Б.** О «дрейфовых» термоядерных неустойчивостях. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1975, т. 68, с. 1772.
8. **Hasegawa A.** Drift mirror instability in the magnetosphere. — «Phys. Fluids», 1969, v. 12, p. 2642.
9. **Дрейфово-зеркальная неустойчивость в плазме конечного давления с горячими электронами.** — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 82. Авт.: Михайловский А. Б., Похотелов О. А., Рыжов Н. М., Супруненко В. А.

10. Похотелов О. А., Пилипенко В. А. К теории дрейфово-зеркальной неустойчивости магнитосферной плазмы. — «Геомагнетизм и аэрономия», 1976, т. 16, с. 504.  
В работах [6—10] см. о неустойчивостях, отмеченных в § 13.8.
11. Dobrowolny M. Kelvin-Helmholtz instability in a high- $\beta$  collisionless plasma. — «Phys. Fluids», 1972, v. 15, p. 2263.
12. Клименко В. А., Михайловский А. Б. Микронеустойчивости потока плазмы большого давления с неоднородным профилем скорости. — Препринт ИАЭ-2691. М., 1976.  
В работах [11, 12] исследовались неустойчивости плазмы  $\nabla V_0 \neq 0$  (см. § 13.9).

## Глава 14

### НЕУСТОЙЧИВОСТИ АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН В ТОКАМАКЕ С ИНЖЕКЦИЕЙ НЕЙТРАЛЬНЫХ АТОМОВ

#### § 14.1. Введение

В связи с инжекцией в токамак пучка быстрых нейтральных атомов в целях получения плазмы с термоядерными параметрами необходимо исследовать неустойчивости, причиной которых может быть пучок быстрых ионов, образующихся в плазме при ионизации быстрых атомов. В этой главе рассмотрим возможность раскачки быстрыми ионами гидромагнитных волн.

Известно, что гидромагнитное приближение предсказывает три типа волн: альфвеновские, быстрые магнитно-звуковые и медленные магнитно-звуковые, называемые также *ионно-звуковыми*. Быстрые и медленные магнитно-звуковые волны слабо чувствительны к геометрии магнитного поля, так что их раскачку можно изучать в рамках приближения однородного магнитного поля. Предполагаем, что скорость пучка  $V$  меньше скорости Альфвена  $c_A$ . При этом раскачка быстрых магнитно-звуковых колебаний исключается. Кроме того, примем температуру электронов и основной компоненты ионов равными,  $T_e = T_i$ , что исключает ветвь медленных магнитно-звуковых колебаний, которые, хотя и предсказываются идеальной гидродинамикой, но в действительности являются сильнозатухающими из-за большого числа резонансных ионов. Поэтому нам необходимо рассмотреть лишь ветвь альфвеновских волн.

Метод рассмотрения альфвеновских волн в тороидальной геометрии магнитного поля был изложен в гл. 13. В § 14.2 воспользуемся им и получим дисперсионное уравнение для интересующей нас задачи о возбуждении альфвеновских волн в осесимметричном токамаке круглого сечения. В § 14.3 исследуем это дисперсионное уравнение и покажем возможность нарастания альфвеновских волн при наличии пучка ионов со скоростью  $v_{Ti} < V < c_A$ . Результаты § 14.2, 14.3 обсуждаются в § 14.4. Некоторые другие результаты рассматриваются в § 14.5.

### § 14.2. Вывод дисперсионного уравнения

Исходим из уравнения малых колебаний (13.31). Пренебрегаем в нем отличием  $\xi_0$  от  $\zeta_0$  (т. е. продольным электрическим полем), а также опускаем в нем члены порядка  $\omega_{pi}^*/\omega$  и члены, содержащие  $\rho_0'$ , что оправдывается последующими результатами. Пренебрегаем широм, благодаря чему радиальную зависимость можно выбрать в виде  $\exp(ik_x a)$  [ср. с гл. 13]. Дополнительно к этому примем, что радиальная длина волны возмущений мала по сравнению с длиной волны вдоль малого азимута,  $k_x \gg m/a$  (такие возмущения, согласно гл. 2, менее всего чувствительны к шире). При указанных предположениях уравнение (13.31) принимает вид

$$(\omega^2 - c_A^2 k_{\parallel}^2) \xi_0 + \frac{im}{k_x a R \rho_0} (\tilde{\rho}_{-1} - \tilde{\rho}_{+1}) = 0. \quad (14.1)$$

Слагаемое с  $\tilde{\rho}_{\pm 1}$  описывает тороидальный эффект. В пренебрежении этим слагаемым уравнение (14.1) дает хорошо известное дисперсионное уравнение альфвеновских волн

$$\omega^2 = c_A^2 k_{\parallel}^2. \quad (14.2)$$

Нашей дальнейшей целью будет выяснение роли тороидальной поправки в альфвеновских волнах, связанной с возмущением давления быстрых ионов  $\tilde{\rho}_{\pm 1}$ . Индекс тильда над  $\rho_{\pm 1}$  и другими величинами всюду ниже (где это возможно) опускается.

Выражение для  $\rho_{\pm 1}$  в случае максвелловского распределения частиц по скоростям вычислялось в § 13.4. Теперь

обобщим этот результат на случай произвольных распределений, полагая, однако,  $E_{\parallel} = 0$ . При этом исходим из выражения для возмущенной функции распределения вида (4.9), пренебрегая в нем слагаемым, содержащим  $B_{\parallel}$ , что можно сделать хотя бы потому, что этот эффект порядка  $\beta$ , которое мы считаем малым. Кроме того, в правой части (4.9) опускаем слагаемое  $\xi_{\perp} \nabla F$ , что правомерно в такой же степени, как и сделанное выше пренебрежение членами с  $\rho_0'$  в уравнении (13.31). Таким образом,

$$f = -i\omega (\partial F / \partial \varepsilon) \int_{-\infty}^t [(v_{\parallel}^2 - v_{\perp}^2 / 2) \mathbf{e}_0 (\mathbf{e}_0 \nabla) \xi_{\perp} + (v_{\perp}^2 / 2) \operatorname{div} \xi_{\perp}] dt'. \quad (14.3)$$

Учитываем, что  $\mathbf{e}_0 (\mathbf{e}_0 \nabla) \xi = \operatorname{div} \xi / 2$  (полагается  $\xi \equiv \xi_{\perp}$ ) и тот факт, что, согласно гл. 13, для осесимметричного токамака круглого сечения

$$\operatorname{div} \xi = - (2/R) [\xi_0 \cos \theta - i (a/m) \xi_0' \sin \theta]. \quad (14.4)$$

В результате приводим (14.3) к виду

$$f = i (\omega/R) (\partial F / \partial \varepsilon) \int_{-\infty}^t (v_{\perp}^2 / 2 + v_{\parallel}^2) [\xi_0 \cos \theta - i (a/m) \xi_0' \sin \theta] dt'. \quad (14.5)$$

В силу сказанного,  $\xi_0'$  заменяем  $ik_x \xi_0$  и, учитывая  $k_x \gg \gg m/a$ , пренебрегаем в подынтегральном выражении (14.5) слагаемым  $\xi_0 \cos \theta$ . Приближенно полагаем  $\xi_0 [\mathbf{r}(t), t] \sim \sim \exp(-i\omega t)$ , тем самым пренебрегая слабой зависимостью  $\xi_0$  от координаты вдоль силовой линии, что можно сделать ввиду предполагаемой малости  $k_{\parallel}$ . Кроме того, считаем все интересующие нас быстрые частицы пролетными и пренебрегаем изменением их продольной и поперечной скоростей при их движении вдоль магнитного поля. При этом слагаемое  $v_{\perp}^2 / 2 + v_{\parallel}^2$  можно вынести за знак интеграла по  $t'$ . Тогда (14.5) преобразуется к виду

$$f = -\frac{i\omega}{R} \frac{ak_x}{m} \xi_0 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \left( \frac{v_{\perp}^2}{2} + v_{\parallel}^2 \right) \int_{-\infty}^t \exp[-i\omega(t'-t)] \times \times \sin \theta(t') dt'. \quad (14.6)$$

Из дрейфовых уравнений (см. приложение 1 к гл. 4) находим

$$\theta(t') = \theta(t) + (v_{\parallel}/qR)(t' - t), \quad (14.7)$$

где  $q$  — коэффициент запаса токамака (см., например, гл. 13). Используя (14.7), проводим в (14.6) интегрирование по  $t'$ , в результате чего

$$f = \frac{i\omega}{2R} \frac{ak_x}{m} \xi_0 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \left( \frac{v_{\perp}^2}{2} + v_{\parallel}^2 \right) \left( \frac{\exp(i\theta)}{\omega - v_{\parallel}/qR} - \frac{\exp(-i\theta)}{\omega + v_{\parallel}/qR} \right). \quad (14.8)$$

С помощью (14.8) получаем

$$\begin{aligned} p_{\pm 1} &\equiv (p_{\perp} + p_{\parallel})_{\pm 1}/2 = 1/2 \int M(v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2) f_{\pm 1} dv = \\ &= \mp \frac{i\omega}{4R} \frac{ak_x}{m} \xi_0 \int \frac{M(v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2)^2}{\omega \pm v_{\parallel}/qR} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \frac{B_0}{v_{\parallel}} d\mu d\varepsilon, \end{aligned} \quad (14.9)$$

где  $M$  — масса быстрых ионов;  $\mu = v_{\perp}^2/2 B_0$ , а функция  $F$  предполагается нормированной соотношением  $\int (B_0/v_{\parallel}) F d\mu d\varepsilon = N_1$ , где  $N_1$  — плотность быстрых ионов.

Подставляя (14.9) в (14.1), получаем искомое дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} \omega^2 - c_A^2 k_{\parallel}^2 + \frac{\omega}{4R^2 \rho_0} \int M(\mu B_0 + v_{\parallel}^2)^2 \left( \frac{1}{\omega - v_{\parallel}/qR} + \frac{1}{\omega + v_{\parallel}/qR} \right) \times \\ \times \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \frac{B_0}{v_{\parallel}} d\mu d\varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (14.10)$$

### § 14.3. Исследование дисперсионного уравнения

**1. Неустойчивость пучка с малым разбросом по скоростям.** Пусть  $F = N_1 (V_{\parallel}/B_s) \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$ , где  $V_{\parallel} = [2(\varepsilon_0 - \mu_0 B_s)]^{1/2}$ .

Рассмотрим колебания с  $\text{Re} \omega \approx c_A k_{\parallel} \approx V_{\parallel}/qR$ . При этом из (14.10) по аналогии с теорией обычной пучковой неустой-

чивости (см. гл. 1 книги [I]) находим выражение для инкремента альфвеновских волн

$$\text{Im } \omega = \frac{V\sqrt{3}}{4} \left( q^2 \frac{N_1 M}{\rho_0} \right)^{1/3} \frac{V_{\parallel}}{qR} \left( 1 + \frac{V_{\perp}^2}{2V_{\parallel}^2} \right)^{2/3}. \quad (14.11)$$

При  $q \simeq 1$  и  $V_{\perp} \simeq V_{\parallel}$  условие пренебрежения разбросом пучка по скоростям означает

$$\delta V_{\parallel} / V_{\parallel} < (N_1 / N_0)^{1/3}, \quad (14.12)$$

где  $N_0 \equiv \rho_0 / M$  — плотность основной компоненты плазмы.

При наличии шира величина  $k_{\parallel}$  является функцией радиальной координаты, так что, согласно гл. 2,

$$k_{\parallel}(a) = k_{\parallel}(a_0) + \frac{a-a_0}{a} \frac{m}{a} \Theta, \quad (14.13)$$

где  $\Theta$  — шир;  $a_0$  — радиальная координата, около которой локализовано возмущение. Учитывая результаты гл. 12 книги [II], заключаем, что в рассмотренной выше неустойчивости изменением  $k_{\parallel}$  можно пренебречь, если

$$\frac{a-a_0}{a_0} < \frac{V_{\parallel}}{c_A} \frac{a}{m\Theta R} \left( \frac{N_1}{N_0} \right)^{1/3}. \quad (14.14)$$

Эта оценка определяет радиальный размер локализации нарастающих альфвеновских возмущений. При типичном для токамака значении  $\Theta \simeq a/R$  и небольших  $m$ ,  $m \simeq 1$  (на пределе применимости нашего приближения  $m \gg 1$ ) из (14.14) следует

$$\frac{a-a_0}{a_0} < \frac{V_{\parallel}}{c_A} \left( \frac{N_1}{N_0} \right)^{1/3}. \quad (14.15)$$

**2. Неустойчивость пучка с размытым распределением по скоростям.** Пусть частицы пучка имеют одну и ту же поперечную энергию, так что  $F = (N_0/B_s) \delta(\mu - \mu_0) F(\varepsilon)$ . Полагаем, что пучок имеет достаточно большой разброс по скоростям, так что удовлетворяется условие, обратное (14.12):

$$\delta\varepsilon/\varepsilon_0 > (N_1/N_0)^{1/3}. \quad (14.16)$$



В этом случае с помощью (14.10) находим, что инкремент альфвеновских волн с  $\text{Re} \omega = k_{\parallel} c_A$  определяется выражением

$$\text{Im} \omega = \frac{\pi}{8} \frac{MN_1}{\rho_0} \frac{a}{R} (\mu_0 B_s + q^2 R^2 \omega^2)^2 \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon = \bar{\varepsilon}}, \quad (14.17)$$

где  $\bar{\varepsilon} = \mu_0 B_s + q^2 R^2 \omega^2 / 2$ . Инкремент (14.17) положителен, т. е. имеет место неустойчивость, если

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon = \bar{\varepsilon}} > 0. \quad (14.18)$$

При большом разбросе продольных скоростей, когда  $\delta \varepsilon \simeq \varepsilon_0$ ,

$$\text{Im} \omega \simeq \frac{N_1}{N_0} \frac{q V_{\parallel}}{R}. \quad (14.19)$$

Область локализации таких нарастающих возмущений определяется условием, аналогичным (14.15):

$$(a - a_0) / a < V_{\parallel} / c_A. \quad (14.20)$$

**3. Устойчивость пучка с изотропным распределением по скоростям.** Пусть в плазме имеется группа быстрых частиц с изотропным распределением по скоростям, так что  $F = F(\varepsilon)$ . Учитывая в (14.10) только мнимую часть интеграла, обусловленную резонансным взаимодействием частиц с волной, выполняем интегрирование по  $\mu$  и получаем

$$\text{Im} \omega = \frac{\pi}{8} \frac{MN_1}{\rho_0} \frac{q}{R} \int_{(\omega q R)^2 / 2}^{\infty} \left( \varepsilon + \frac{\omega^2 q^2 R^2}{2} \right)^2 \frac{\partial F(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} d\varepsilon. \quad (14.21)$$

Интегрируя по частям, убеждаемся, что при любом  $F(\varepsilon)$   $\text{Im} \omega < 0$ , что соответствует затуханию колебаний.

### § 14.4. Обсуждение результатов § 14.2, 14.3

Проведенный выше анализ позволил выявить класс неустойчивостей ионного пучка, представляющих собой своеобразный гибрид пучковых и гидромагнитных неустойчивостей. Частота таких пучково-гидромагнитных неустойчивостей порядка обратного пролетного времени ионов пучка вдоль большого азимута токамака, а отношение инкремента к частоте — порядка корня кубического из отношения плотностей пучка и плазмы в случае пучка с малым разбросом по продольным скоростям и порядка отношения этих плотностей в случае сильноразмытого распределения по скоростям. Раскачиваемая ветвь колебаний представляет собой альфвеновские волны, локализованные вблизи рациональных магнитных поверхностей.

Рассмотренная выше неустойчивость чувствительна к разбросу быстрых ионов по углам в пространстве скоростей. При изотропном распределении быстрых ионов по скоростям она не имеет места.

### § 14.5. Некоторые другие результаты

**1. Возбуждение альфвеновских волн быстрыми ионами в токамаке с некруглым сечением.** Этот вопрос исследовался в работах, выполненных В. А. Мазуром, В. М. Бардаковым и автором. Наиболее подробно были изучены длинноволновые возмущения  $(k_{\perp}\rho, k_{\perp}\Lambda) \ll 1$ , аналогичные рассмотренным в § 14.2 — 14.4. Было показано, что, в отличие от случая токамака круглого сечения, где раскачка длинноволновых возмущений обусловлена резонансом типа  $\omega = v_{\parallel}(k_{\parallel} \pm 1/qR)$  (см., например, § 14.2), в токамаке некруглого сечения раскачка таких возмущений возможна также при резонансах типа  $\omega = v_{\parallel}[k_{\parallel} \pm (1 \pm p/qR)]$ , где  $p$  — номер гармоники в разложении функции магнитной поверхности как функции малого радиуса (случай  $p = 2$  соответствует учету эллиптичности, а  $p = 3$  — треугольности магнитных поверхностей, см., например, гл. 7).

**2. Возбуждение коротковолновых альфвеновских колебаний.** Изложенный в § 14.2 — 14.4 гидромагнитный подход позволяет рассмотреть лишь длинноволновую часть спектра альфвеновских колебаний, т. е. возмущений, с поперечной длиной волны, большей по сравнению с ларморов-

ским радиусом высокоэнергичных ионов и размером их отклонений от силовых линий, обусловленных знакопеременным магнитным дрейфом (размером орбит дрейфового движения, см. § 13.6). Для выяснения вопроса о возбуждении коротковолновых альфвеновских колебаний можно использовать электродинамический подход, изложенный в § 13.6. В рамках такого подхода эта задача исследовалась в работах К. О. Бизли, Д. Г. Ломинадзе и автора. При таком подходе получаем следующее выражение для инкремента нарастания возмущений с  $\text{Re} \omega = k_{\parallel} c_A$ :

$$\gamma = \frac{1}{2\varepsilon_{11}^{(0)}} \frac{4\pi e^2}{M\omega_B^2} \left\langle \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_0^2(\xi_{\perp}) \frac{s^2 J_s^2(\xi_{\parallel})}{\xi_{\parallel}^2} \frac{(v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2)^2}{R^2} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{k_b}{\omega \omega_B} \frac{\partial F}{\partial a} \right) \delta \left[ \omega - \left( k_{\parallel} + \frac{s}{qR} \right) v_{\parallel} \right] \right\rangle, \quad (14.22)$$

где  $\varepsilon_{11}^{(0)} = c^2/c_A^2$  [см. с (13.102)].

Из (14.22) следует, в частности, что  $\delta$ -функциональное распределение ионов, устойчивое по отношению к длинноволновым возмущениям (см. п. 3 § 14.3), может стать неустойчивым, если поперечная длина волны возмущений сравнима с размером орбит дрейфового движения быстрых ионов.

Используя (14.22), можно показать, что при конечном отношении направленной скорости продольного пучка  $V$  к скорости Альфвена  $c_A$  возможна раскачка двух физически различных типов колебаний ( $\omega = |k_{\parallel}| c_A$  и  $\omega = -|k_{\parallel}| c_A$ ), соответствующих двум знакам отношения  $\omega/k_{\parallel} V$ . При этом инкременты возмущений с  $\omega/k_{\parallel} V < 0$  оказываются большими, чем при  $\omega/k_{\parallel} V > 0$ .

Еще один результат, вытекающий из (14.22), состоит в том, что при длинах волн, сравнимых с размером орбит дрейфового движения, возможно резонансное взаимодействие типа  $\omega = v_{\parallel} (k_{\parallel} + s/qR)$  с  $|s| = 1, 2, \dots$ , тогда как в длинноволновом приближении, рассмотренном в § 14.2 — 14.4, обнаруживается лишь резонанс типа  $|s| = 1$ .

Согласно (14.22), инкременты, соответствующие резонансам с  $|s| > 1$ , имеют максимум при некотором конечном значении параметра  $k_{\perp} V q / \omega_B$ . При больших значениях этого параметра инкременты, соответствующие как случаю  $|s| > 1$ , так и случаю  $|s| = 1$ , убывают.

**3. Стабилизация альфвеновских неустойчивостей.** Изучение стабилизации альфвеновских неустойчивостей было начато Розенблютом и Резерфордом, которые учли столкновительную диссипацию на запертых электронах и шир магнитного поля. Рассмотрев собственные колебания, эти авторы пришли к выводу, что возбуждение альфвеновских колебаний быстрыми ионами может иметь место только в узкой приосевой области токамака.

А. В. Тимофеев обратил внимание на аналогию задачи об альфвеновских волнах в неоднородной плазме задаче об устойчивости неоднородных течений плазмы и жидкости. Основываясь на этом, он отметил, что нарастающие собственные колебания, найденные Розенблютом и Резерфордом, представляющие собой сочетание длинноволновых колебаний с коротковолновыми, формально сходны с неустойчивостью пуазейлева течения. Кроме того, он установил, что уравнения малых колебаний, полученные указанными авторами, допускают также решения типа волн ван Кампена — Кейза, частота которых определяется «локальным» дисперсионным уравнением типа (14.10). Пространственный масштаб этих несобственных возмущений, возникающих в некоторый начальный момент времени, уменьшается, вследствие этого, согласно А. В. Тимофееву, в игру вступает эффект «вязкости», связанный с запертыми электронами, приводящий к затуханию возмущений. В рамках такого подхода плазму следует считать неустойчивой, если до того, как начнет сказываться «вязкость», возмущения успеют нарасти до столь больших амплитуд, что в их эволюцию вмешаются нелинейные эффекты. В целом из такого рода анализа вытекает, что в задаче о возбуждении быстрыми ионами альфвеновских волн должны учитываться как «локальные» возмущения типа (14.10), так и возмущения типа «собственных колебаний», рассмотренные Розенблютом и Резерфордом.

В. А. Мазуром и автором было обращено внимание на важность учета сжимаемости газа запертых электронов. Этот эффект способствует стабилизации альфвеновских неустойчивостей, хотя и недостаточен для полной стабилизации при большой плотности быстрых ионов.

Стабилизация альфвеновских неустойчивостей в токамаке с инжекцией быстрых нейтральных атомов рассмотрена также в работе В. А. Мазура, автора, А. Л. Френкеля

и И. Г. Шухмана, в которой наряду с этим сформулированы общие представления о неустойчивостях несобственных колебаний. Из этой работы вытекает, что вследствие неустойчивостей, связанных с раскачкой несобственных колебаний, плазма в токамаке с инжекцией должна быть более неустойчивой, чем это следует из отмеченной выше работы Розенблюта и Резерфорда.

**4. Нелинейные эффекты, сопровождающие развитие альфвеновских неустойчивостей.** При взаимодействии с альфвеновскими волнами может иметь место релаксация скоростного распределения быстрых ионов. В квазилинейном приближении такого рода релаксацию изучали В. М. Кулыгин, автор, А. И. Пятак, А. М. Фридман и Е. С. Цапелкин, а в приближении одной волны — автор, А. И. Пятак и А. М. Фридман. Из этих исследований вытекает, что взаимодействие частиц с волнами приводит к релаксации частиц более быстрой, чем релаксация из-за кулоновских столкновений. Обобщение некоторых результатов этих работ на случай токамака с некруговым сечением было сделано в работе В. М. Бардакова и автора.

#### Библиографический обзор к гл. 14

1. **Михайловский А. Б.** Гидромагнитная пучковая неустойчивость в токамаке с инжекцией нейтральных атомов. — «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 72.  
Этой работе мы следовали в § 14.2—14.4.  
Возбуждение альфвеновских волн в токамаке с инжекцией нейтральных атомов исследовалось также в работах [2—11].
2. **Мазур В. А., Михайловский А. Б.** Возбуждение альфвеновских волн быстрыми ионами в токамаке с некруглым сечением. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 172.
3. **Бизли К. О., Ломинадзе Д. Г., Михайловский А. Б.** Возбуждение коротковолновых альфвеновских колебаний высокоэнергичными ионами в токамаке. — Препринт ИАЭ-2552. М., 1975; «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 170.
4. **Бизли К. О., Ломинадзе Д. Г., Михайловский А. Б.** Неустойчивость альфвеновских волн в двухкомпонентном токамаке. — Препринт ИАЭ-2615. М., 1976.
5. **Квазилинейная** релаксация пучка быстрых ионов в токамаке. Препринт ИАЭ-2631. М., 1976; «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1976, т. 70, с. 2152. Авт.: Кулыгин В. М., Михайловский А. Б., Пятак А. И., Фридман А. М., Цапелкин Е. С.
6. **Михайловский А. Б., Пятак А. И., Фридман А. М.** К нелинейной теории возбуждения альфвеновских волн в токамаке. — Препринт ИАЭ-2651. М., 1976; «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 922.

7. Бардаков В. М., Михайловский А. Б. Коллективные процессы при инжекции быстрых нейтральных атомов в токамак некруглого сечения. — Препринт ИАЭ-2687. М., 1976; «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 220.
8. Rosenbluth M. N., Rutherford P. H. Excitation of Alfvén waves by high-energy ions in a tokamak. — «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 34, p. 1428.
9. Тимофеев А. В. К теории устойчивости альфвеновских колебаний неоднородной плазмы. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 510.
10. Мазур В. А., Михайловский А. Б. Стабилизация неустойчивости альфвеновских волн в двухкомпонентном токамаке. Препринт ИАЭ-2650. М., 1976; «Ядерный синтез», 1977, т. 17, с. 193.
11. Неустойчивости несобственных колебаний и их роль в проблеме токамака с инжекцией нейтралов. — Препринт ИАЭ-2693. М., 1976. Авт.: Мазур В. А., Михайловский А. Б., Френкель А. Л., Шухман И. Г.

## Глава 15

### ГРАДИЕНТНЫЕ (ДРЕЙФОВЫЕ) ТЕРМОЯДЕРНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

#### § 15.1. Введение

Заряженные продукты термоядерных реакций, в том числе  $\alpha$ -частицы, могут служить причиной неустойчивостей плазмы. Такие неустойчивости называют *термоядерными*. В книге [1] отмечались термоядерные неустойчивости однородной плазмы в однородном магнитном поле. Они обусловлены немаксвелловским распределением  $\alpha$ -частиц по скоростям. Ниже рассмотрим некоторые типы градиентных (дрейфовых) термоядерных неустойчивостей, т. е. таких, причиной которых служит пространственный градиент функции распределения  $\alpha$ -частиц. При этом ограничимся только анализом неустойчивостей, связанных с альфвеновскими волнами. Заметим, что при достаточно большом градиенте (т. е. при не слишком малом отношении ларморовского радиуса  $\alpha$ -частиц к размеру неоднородности пространственного распределения  $\alpha$ -частиц) возможны также градиентные термоядерные неустойчивости, связанные с быстрыми магнитно-звуковыми колебаниями (см. об этом работы, указанные в библиографическом обзоре к данной главе.)

Как отмечалось в гл. 13, 14, в процессах взаимодействия частиц с альфвеновскими волнами важную роль играет искривленность силовых линий равновесного магнитного поля. В рамках гидродинамического подхода, излагавшегося в гл. 13, это предполагает учет сателлитной части возмущенного давления, а следовательно, и сателлитной части возмущенной функции распределения. Получению выражения для возмущенной функции распределения с учетом градиентных членов посвящен § 15.2. При этом излагается процедура обобщения гидромагнитного предела возмущенной функции распределения на область градиентных (дрейфовых) частот. Такой подход до некоторой степени является альтернативой методу дрейфового кинетического уравнения, изложенному в § 13.4.

В случае пролетных частиц, обсуждавшемся в гл. 13, 14, при учете искривленности силовых линий равновесного магнитного поля обнаруживается эффект, состоящий в том, что частица, движущаяся в магнитном поле знакопеременной кривизны и в поле возмущения с продольным волновым числом  $k_{\parallel}$ , ведет себя так, как если бы она двигалась в прямом магнитном поле и в поле возмущения с эффективным продольным волновым числом  $k_{\parallel \text{эфф}}$  отличным от  $k_{\parallel}$ . В частности, в случае геометрии осесимметричного токамака круглого сечения  $k_{\parallel \text{эфф}} = k_{\parallel} \pm 1/qR$ , так что в резонансе с альфвеновской волной оказываются частицы, продольная скорость которых удовлетворяет соотношению  $c_A k_{\parallel} = v_{\parallel} (k_{\parallel} \pm 1/qR)$ . В гл. 13, 14 мы рассматривали частицы со скоростями малыми по сравнению с альфвеновской,  $v_{\parallel} \ll c_A$ , так что резонанс мог осуществляться только в случае возмущений с  $k_{\parallel} \ll 1/qR$ , что и предполагалось в указанных главах. Скорости же термоядерных  $\alpha$ -частиц велики по сравнению с альфвеновскими,  $v_{\parallel} > c_A$ . Поэтому при рассмотрении взаимодействия с альфвеновскими волнами пролетных  $\alpha$ -частиц следует полагать  $k_{\parallel}$  конечным и таким, что  $|k_{\parallel} \pm 1/qR| < 1/qR$ . Это и делается в § 15.3, где обнаруживается градиентная (дрейфовая) раскачка альфвеновских волн пролетными  $\alpha$ -частицами.

К раскачке альфвеновских волн могут приводить не только пролетные, но и запертые  $\alpha$ -частицы. Исследованию этого процесса посвящен § 15.4.

В данной главе рассматриваются только возмущения с поперечной длиной волны, большой по сравнению с лар-

морковским радиусом  $\alpha$ -частиц и с размером орбит их дрейфового движения. Более общие результаты содержатся в гл. 17, а также в работах, отмеченных в конце данной главы.

Продольная неоднородность магнитного поля может влиять не только на низкочастотные резонансы частиц с волнами, но и на циклотронные. Этот вопрос, важный для проблемы термоядерных неустойчивостей, обсуждается в гл. 18.

### § 15.2. Возмущенная функция распределения с учетом градиентных членов

Пренебрегая ларморовскими осцилляциями, исходим из выражения для возмущенной функции распределения вида (4.5). В § 4.2 мы свели уравнение (4.5) к (4.9), воспользовавшись соотношением (4.8). Заметим, что при получении соотношения (4.8) предполагалось  $d/dt = \partial/\partial t + v_{\parallel} \mathbf{e}_0 \nabla$ . Иначе говоря, скорость равновесного движения частицы, усредненная по ларморовским осцилляциям, при получении (4.8) полагалась равной  $v_{\parallel} \mathbf{e}_0$  — скорости движения вдоль магнитного поля. Однако, согласно приложению 1 к гл. 4, усредненная скорость частицы содержит также часть, соответствующую дрейфу частицы под действием кривизны и неоднородности магнитного поля  $\mathbf{V}_{\text{др}}$ , определенную соотношением (П4.19). Отсюда ясно, что более точным, чем (4.8), является соотношение

$$\left( \mathbf{V}_{\perp}' + v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}'_{\perp}}{B_0} \right) \nabla F = \frac{d}{dt} (\xi_{\perp} \nabla F) - (\mathbf{V}_{\text{др}} \nabla) (\xi_{\perp} \nabla F). \quad (15.1)$$

Подставляя этот результат в (4.5), приходим к уравнению, более точному, чем (4.9):

$$\begin{aligned} f_1 = & -(\xi_{\perp} \nabla F + \mu \frac{\partial F}{\partial \mu} \frac{B'_{\parallel}}{B_0}) - i\omega \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \int_{-\infty}^t \left\{ \left( v_{\parallel}^2 - \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \mathbf{e}_0 \nabla_0 \xi_{\perp} + \right. \\ & \left. + \frac{v_{\perp}^2}{2} \operatorname{div} \xi_{\perp} \right\} dt' + \int_{-\infty}^t \frac{1}{\omega_B} \left( \left[ \mathbf{e}_0, \frac{v_{\perp}^2}{2} \nabla \ln B_0 + v_{\parallel}^2 \nabla_0 \mathbf{e}_0 \right] \nabla \right) \times \\ & \times (\xi_{\perp} \nabla F) dt', \end{aligned} \quad (15.2)$$



Отсюда с использованием соотношений, приведенных в гл. 13, 14, для случая осесимметричного токамака круглого сечения в необходимом для нас приближении получается [ср. с (14.5)]

$$f = \frac{i\omega}{R} \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{m}{a\omega\omega_B} \frac{\partial F}{\partial a} \right) \int_{-\infty}^t \left( \frac{v_{\perp}^2}{2} + v_{\parallel}^2 \right) \times \\ \times \left( \cos \theta + \frac{ak_x}{m} \sin \theta \right) \xi_0 dt'. \quad (15.3)$$

Входящие сюда члены с  $\partial F/\partial a$  учитывают градиентные (дрейфовые) эффекты. С этими членами связаны неустойчивости, обсуждаемые в § 15.3, 15.4.

### § 15.3. Градиентная (дрейфовая) раскачка альфвеновских волн пролетными $\alpha$ -частицами

Рассмотрим пролетные  $\alpha$ -частицы, полагая, что они движутся вдоль силовых линий магнитного поля с неизменной скоростью. При этом аналогично (14.7) имеем

$$\left. \begin{aligned} \theta(t') &= \theta(t) + (v_{\parallel}/qR)(t' - t); \\ \varphi(t') &= \varphi(t) + (v_{\parallel}/R)(t' - t), \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

где  $\varphi$  — циклическая координата по большому азимуту тора. Полагая  $\xi_0(\theta, \varphi, t) \sim \exp[i(m\theta - n\varphi - \omega t)]$  и вводя продольную компоненту волнового вектора  $k_{\parallel} \equiv (m - nq)/qR$ , с помощью (15.4) проводим в (5.3) интегрирование по  $t'$ , после чего получаем

$$f = \frac{i\omega}{2R} \xi_0 \left( \frac{v_{\perp}^2}{2} + v_{\parallel}^2 \right) \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{m}{a\omega\omega_B} \frac{\partial F}{\partial a} \right) \times \\ \times \left[ \frac{(ak_x/m - i) \exp(i\theta)}{\omega - v_{\parallel}(k_{\parallel} + 1/qR)} - \frac{(ak_x/m + i) \exp(-i\theta)}{\omega - v_{\parallel}(k_{\parallel} - 1/qR)} \right]. \quad (15.5)$$

Далее, действуя аналогично § 14.2, получаем дисперсионное уравнение [ср. с (14.10)]:

$$\omega^2 - c_A^2 k_{\parallel}^2 + \frac{\omega}{4R^2 \rho_0} \int M \left( \frac{v_{\perp}^2}{2} + v_{\parallel}^2 \right)^2 \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{m}{a\omega_B} \frac{\partial F}{\partial a} \right) \times \\ \times \left[ \frac{1}{\omega - v_{\parallel} (k_{\parallel} + 1/qR)} + \frac{1}{\omega - v_{\parallel} (k_{\parallel} - 1/qR)} \right] dv = 0. \quad (15.6)$$

Видно, что резонансными являются частицы, продольная скорость которых  $v_{\parallel}$  удовлетворяет соотношению

$$\omega = v_{\parallel} (k_{\parallel} \pm 1/qR). \quad (15.7)$$

В случае термоядерных  $\alpha$ -частиц их скорость велика по сравнению с альфвеновской,  $v_{\parallel} \gg c_A$ . При этом соотношение (15.7) удовлетворяется, если

$$|k_{\parallel}| \approx 1/qR, \quad |k_{\parallel} \pm 1/qR| \ll 1/qR. \quad (15.8)$$

При таком  $k_{\parallel}$  частота альфвеновских волн приближенно равна

$$\omega \approx c_A/qR \equiv B_{\theta}/a \quad (4 \pi \rho_0)^{1/2}. \quad (15.9)$$

Заметим, что частоты такого порядка фигурируют также в теории винтовой неустойчивости [ср. (15.9) с (9.13), (9.15)].

Учитывая  $v_{\parallel} \gg c_A$  и соотношения (15.8), из (15.6) находим, что возмущения с  $\text{Re} \omega = c_A/qR$  имеют инкремент

$$\gamma = \frac{\pi q}{8 \rho_0 R} \frac{1}{|qRk_{\parallel} - 1|} \int_{\varepsilon_{\parallel}}^{\infty} M (\varepsilon + \varepsilon_{\parallel})^2 \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{mqR}{ac_A \omega_B} \frac{\partial F}{\partial a} \right) \times \\ \times (2\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon, \quad (15.10)$$

где  $\varepsilon_{\parallel} \equiv c_A^2/2 (qRk_{\parallel} - 1)^2$  означает продольную энергию резонансных частиц на единицу массы;  $\varepsilon_{\parallel} = v_{\parallel}^2_{\text{рез}}/2$ . В выражении (15.10) предполагается, что распределение  $\alpha$ -частиц по скоростям изотропно, так что  $F = F(\varepsilon, a)$  с нормировкой

$$\int_0^{\infty} F(2\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon = N_{\alpha}, \quad (15.11)$$

где  $N_\alpha$  — плотность  $\alpha$ -частиц.

Интегрируя по частям в (15.10), можно убедиться, что при  $\partial F/\partial a = 0$  мнимая часть частоты отрицательна,  $\gamma < 0$ , т. е. колебания затухают (ср. с п. 3 § 14.3). Поэтому неустойчивость возможна лишь благодаря градиентному (дрейфовому) эффекту. При  $\delta$ -функциональном распределении  $\alpha$ -частиц по энергиям ( $F = \delta(\varepsilon - \varepsilon_\alpha) N_\alpha(a) \times (2\varepsilon_\alpha)^{-1/2}$ ) из выражения (15.10) получается

$$\gamma = -\frac{\pi q}{4\rho_0 R} \frac{N_\alpha M(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\parallel)}{|qRk_\parallel - 1|} \left[ 1 - \frac{mqR\kappa_n(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\parallel)}{2ac_A \omega_B} \right], \quad (15.12)$$

где  $\kappa_n \equiv \partial \ln N_\alpha / \partial a$ . Вытекающее отсюда условие неустойчивости ( $\gamma > 0$ ) качественно означает

$$m\rho_\alpha/a \gtrsim ac_A/v_\alpha qR, \quad (15.13)$$

где  $\rho_\alpha = v_\alpha/\omega_B$  — ларморовский радиус  $\alpha$ -частиц;  $v_\alpha$  — их скорость.

Инкремент возмущений (15.12) растет с уменьшением  $|qRk_\parallel - 1|$ , однако вместе с  $|qRk_\parallel - 1|$  уменьшается и характерный радиальный масштаб возмущения. Поэтому комбинация  $D \simeq \gamma^2 x^2/R\omega$ , характеризующая коэффициенты переноса, с изменением  $|qRk_\parallel - 1|$  остается неизменной.

Полагая  $\varepsilon_\parallel \simeq \varepsilon_\alpha$ , с помощью (15.12) приходим к оценке

$$\gamma \simeq (3/8) \pi \beta_\alpha R \omega, \quad (15.14)$$

где  $\beta_\alpha = (16/3) \varepsilon_\alpha M N_\alpha / B_s^2$  — отношение давления  $\alpha$ -частиц к давлению магнитного поля.

Результаты, близкие к (15.12), (15.14), получаются также и при других распределениях по скоростям. Например, при максвелловском распределении:

$$\left. \begin{aligned} \gamma = & -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{N_\alpha T_\alpha (1 - \omega_*/\omega) \exp(-M\varepsilon_\parallel/T_\alpha)}{\rho_0 R v_{T\alpha} |k_\parallel qR - 1|} \times \\ & \times \left( 1 + \frac{M\varepsilon_\parallel}{T_\alpha} + \frac{M^2 \varepsilon_\parallel^2}{T_\alpha^2} \right); \\ v_{T\alpha} = & (2T_\alpha/M)^{1/2}, \quad \omega_* = mT_\alpha \kappa_n / a M \omega_B. \end{aligned} \right\} \quad (15.15)$$

При  $|k_{\parallel} qR - 1| \simeq c_A/v_{T\alpha}$  отсюда следует оценка вида (15.14), но с другим, несколько меньшим, численным коэффициентом.

### § 15.4. Градиентная (дрейфовая) раскачка альфвеновских волн запертыми $\alpha$ -частицами

Дисперсионное уравнение, описывающее раскачку альфвеновских волн запертыми  $\alpha$ -частицами, получим аналогично § 14.3, 15.3, а именно, вычисляя возмущенное давление запертых  $\alpha$ -частиц как функцию смещения  $\xi$  и подставляя результат в уравнение малых колебаний (14.1).

Исходное выражение (15.3) для возмущенной функции распределения справедливо и в случае запертых частиц. Упрощаем это выражение, замечая, что для запертых частиц  $v_{\parallel}^2 \ll v_{\perp}^2$ ,  $v_{\perp}^2/2 \approx \varepsilon = \text{const}$ . Интеграл по  $t'$  в (15.3) записываем в виде среднего по замкнутой траектории запертых частиц (ср. с гл. 4, 11), так что

$$f = - \frac{\omega \varepsilon \exp [i(m-s)\vartheta - n\varphi] \xi_0}{2R(\omega - \bar{\omega}_D)} \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{m}{a\omega\omega_B} \frac{\partial F}{\partial a} \right) \times \\ \times \overline{\{\cos \theta + (ak_x/m) \sin \theta\} \exp(i s \theta)}, \quad (15.16)$$

где  $\bar{\omega}_D \equiv (\varepsilon m/a\omega_B R) \overline{\cos \theta}$  — средняя частота магнитного дрейфа, а символ  $\overline{(\dots)}$  означает

$$(\dots) = \oint (\dots) d\theta/v_{\parallel} (\oint d\theta/v_{\parallel})^{-1}. \quad (15.17)$$

При получении (15.16) мы выделили в выражении для  $\xi = \xi_0 \exp [i(m\theta - n\varphi)]$  «желобковый» множитель  $\exp [i(m-s)\theta - i n\varphi]$  и вынесли его за знак интеграла, полагая, что возмущение локализовано около рациональной магнитной поверхности, такой, что  $m - s - nq \approx 0$ . Число  $s = 0, \pm 1, \pm 2$  и т. д. означает число волн, укладываемых на длине тора. Случай  $s = 0$  соответствует почти желобковым альфвеновским волнам с частотой  $\omega \ll c_A/qR$ , а  $s = 1$  — волнам частоты  $\omega \approx c_A/qR$ , рассмотренным в § 15.3. При  $s \geq 1$  число  $s$  для рассматриваемых нами возмущений, локализованных около рациональных магнитных поверхностей, с точностью до множителя совпадает с продольным волновым числом,  $s = k_{\parallel} qR$ .

Заметим, что при получении (15.16) мы следовали приближению  $\omega\tau \ll 1$  (см. п. 3 § 11.2), где  $\tau$  — период осцилляций частиц между «пробками» магнитного поля токамака, иначе называемый «баунс-периодом» (от bounce — отскок). Тем самым мы учитываем только резонансы типа  $\omega = \bar{\omega}_D$ . Дополнительные типы резонансов, связанные с конечным  $\omega\tau$ , в случае потенциальных возмущений, обсуждались в гл. 11, а в задаче о раскачке  $\alpha$ -частицами альфвеновских волн — в работах, указанных в конце данной главы.

Используя (15.16), вычисляем возмущенное давление. Согласно определению (13.6), возмущенное давление равно полусумме поперечного и продольного возмущенных давлений  $p = (p_{\perp} + p_{\parallel})/2$ . Так как в случае запертых частиц  $p_{\parallel} \ll p_{\perp}$ , то приближенно  $p = p_{\perp}/2$ . С учетом этого связь между возмущенным давлением и возмущенной функцией распределения запертых частиц запишется в виде

$$p = (1/2) \int M \epsilon f B d\mu d\epsilon / |v_{\parallel}|. \quad (15.18)$$

С учетом (15.16) и (15.18) из (14.1) получается дисперсионное уравнение

$$\omega^2 - c_A^2 k_{\parallel}^2 + \frac{\omega}{8\pi R^2 \rho_0} \int \frac{B_s d\mu d\epsilon M \epsilon^2}{\omega - \bar{\omega}_D} \left( \frac{\partial F}{\partial \epsilon} + \frac{m}{a\omega\omega_B} \frac{\partial F}{\partial a} \right) \times \\ \times \oint \frac{a\theta}{v_{\parallel}} |\sin(\lambda + \theta) \exp(i s \theta)|^2 = 0, \quad (15.19)$$

где  $\lambda = \arctg(m/ak_x)$ . Далее учитываем, что движение частиц вдоль силовых линий магнитного поля токамака  $B_0 = B_s [1 + (a/R) \cos \theta]$  происходит со скоростью

$$v_{\parallel} = (2\epsilon)^{1/2} \left[ 1 - \frac{\mu B_s}{\epsilon} \left( 1 + \frac{a}{R} \cos \theta \right) \right]^{1/2}. \quad (15.20)$$

Вместо переменной  $\mu$  вводим переменную  $\kappa$ , определив ее соотношением

$$\kappa^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{R}{a} \left( 1 - \frac{\mu B_s}{\epsilon} \right) \right]. \quad (15.21)$$

Тогда уравнение (15.19) записывается в виде

$$\begin{aligned}
 & \omega^2 - k_{\parallel}^2 c_A^2 + \\
 & + \left( \frac{a}{R} \right)^{1/2} \frac{\omega}{4\pi R^2 \rho_0} \int \frac{M \varepsilon^{5/2} d\varepsilon d\kappa^2}{K(\kappa) (\omega - \bar{\omega}_D)} \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{m}{a\omega_B \omega} \frac{\partial F}{\partial a} \right) \times \\
 & \times Q_s(\lambda, \kappa) = 0; \quad (15.22)
 \end{aligned}$$

$$Q_s(\lambda, \kappa) = \left| \int_{\theta_0}^{\lambda + \theta} \frac{d\theta \sin(\lambda + \theta) \exp(is\theta)}{(2\kappa^2 - 1 - \cos \theta)^{1/2}} \right|^2. \quad (15.23)$$

Здесь  $K(\kappa)$  — полный эллиптический интеграл первого рода;  $\theta_0$  определяется соотношением  $1 + \cos \theta_0 = 2\kappa^2$ ; интегрирование по  $\kappa$  ведется в пределах от 0 до 1, такой интервал  $\kappa$  соответствует запертым частицам. Величина  $\bar{\omega}_D$  как функция  $\kappa$  имеет вид

$$\bar{\omega}_D = - \frac{\varepsilon m}{a\omega_B R} \left[ \frac{2E(\kappa)}{K(\kappa)} - 1 \right], \quad (15.24)$$

где  $E(\kappa)$  — полный эллиптический интеграл второго рода.

Согласно (15.22), резонанс частиц с волной имеет место при частотах порядка частоты магнитного дрейфа  $\omega \simeq -\varepsilon m / \omega_B R a$ . При этом условии производная  $\partial F / \partial \varepsilon$  мала по сравнению с  $(m/a\omega_B) \partial F / \partial a$  как  $a/R$ . Поэтому в левой части равенства (15.22) ею можно пренебречь. Тогда из (15.22) получается при  $\text{Re} \omega = c_A k_{\parallel}$  выражение для инкремента

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \left( \frac{a}{R} \right)^{1/2} \frac{1}{8R^2 \rho_0} \frac{mM}{a\omega_B \omega} \int \frac{\varepsilon^{5/2} d\varepsilon d\kappa^2}{K(\kappa)} \frac{\partial F}{\partial a} \times \\
 & \times Q_s(\lambda, \kappa) \delta(\omega - \bar{\omega}_D). \quad (15.25)
 \end{aligned}$$

При изотропном моноэнергетическом распределении  $\alpha$ -частиц это выражение сводится к следующему:

$$\gamma = \sigma (R/a)^{1/2} \beta_{\alpha} c_A^2 / R^2 \omega; \quad (15.26)$$

$$\sigma = \frac{3}{16 \sqrt{2}} \frac{\partial \ln N_{\alpha}}{\partial \ln a^2} \left[ \frac{\kappa}{K(\kappa)} \frac{Q_s(\lambda, \kappa)}{|\partial(E/K)/\partial \kappa|} \right]_{\kappa=\kappa_0}, \quad (15.27)$$

где  $\kappa_0$  удовлетворяет соотношению

$$2E(\kappa_0)/K(\kappa_0) - 1 = \omega\omega_B R a / m\varepsilon_\alpha. \quad (15.28)$$

Согласно (15.28), при заданной частоте  $\omega$  раскачиваемые возмущения являются тем более длинноволновыми, т. е. обладают тем меньшими  $m$ , чем больше левая часть (15.28). Максимум левой части равенства (15.28) достигается при малых  $\kappa_0$ ,  $\kappa_0 \ll 1$ , что соответствует сильно запертым  $\alpha$ -частицам. При малых  $\kappa$  функция  $Q_s(\lambda, \kappa)$  не зависит от  $s$  и  $\kappa$  и определяется выражением

$$Q_s(\lambda, \kappa) = (1/2) \pi^2 \sin^2 \lambda, \quad (15.29)$$

а  $\sigma$  означает

$$\sigma = \frac{3\pi^2}{32\sqrt{2}} \frac{\partial \ln N_\alpha}{\partial \ln a^2} \sin^2 \lambda. \quad (15.30)$$

Условие резонанса (15.28) при этом принимает простой вид

$$\omega = m\varepsilon_\alpha / a\omega_B R. \quad (15.31)$$

Из (15.31) и  $\text{Re}\omega = k_{\parallel} c_A$  при  $k_{\parallel} = 1/qR$  следует оценка для характерного волнового числа по малому азимуту тора

$$m\rho_\alpha/a \simeq c_A^*/v_\alpha \quad (15.32)$$

(оценки производятся при  $q \simeq 1$ ).

Общий качественный вывод, вытекающий из проведенного выше анализа, состоит в том, что запертые  $\alpha$ -частицы могут раскачивать альфвеновские волны с частотой  $\text{Re}\omega \simeq \simeq c_A/R$ , поперечными длинами волн порядка  $\lambda_{\perp} \simeq \rho_\alpha v_\alpha / c_A$  и инкрементом  $\text{Im}\omega$ , таким, что

$$\text{Im}\omega / \text{Re}\omega \simeq (R/a)^{1/2} \beta_\alpha. \quad (15.33)$$

Как видно, инкремент тем больше, чем больше давление  $\alpha$ -частиц. Видно также, что при одних и тех же  $\text{Re}\omega$  и  $\kappa$  инкремент нарастания колебаний, обусловленный запертыми  $\alpha$ -частицами, несколько больше, чем инкремент от пролетных частиц.

## Библиографический обзор к гл. 15

1. Михайловский А. Б. О «дрейфовых» термоядерных неустойчивостях. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1975, т. 68, с. 1772. Этой работе мы следовали в данной главе. Вопросам взаимодействия  $\alpha$ -частиц с альфвеновскими волнами в условиях реактора-токамака посвящены также работы [2—7].
2. Бизли К. О., Ломинадзе Д. Г., Михайловский А. Б. Возбуждение коротковолновых альфвеновских колебаний высокоэнергичными ионами в токамаке. — Препринт ИАЭ-2552. М., 1975; «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 170.
3. Rosenbluth M. N., Rutherford P. H. Excitation of Alfvén waves by high-energy ions in a tokamak. — «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 34, p. 1428.
4. Михайловский А. Б., Пятак А. И., Фридман А. М. Квазилинейная теория сателлитного взаимодействия  $\alpha$ -частиц с альфвеновскими волнами в токамаке. — Препринт ИАЭ-2655. М., 1976; «Докл. АН СССР», 1976, т. 229, с. 829.
5. Михайловский А. Б., Френкель А. Л. К теории «дрейфовых» термоядерных неустойчивостей реактора-токамака. — Препринт ИАЭ-2684. М., 1976; «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 1219.
6. Каладзе Т. Д., Михайловский А. Б. Возбуждение альфвеновских волн запертыми  $\alpha$ -частицами в реакторе-токамаке. — Препринт ИАЭ-2679. М., 1976; «Ядерный синтез», 1977, т. 17, с. 411.
7. Термоядерные альфвеновские неустойчивости в токамаке-реакторе. Препринт ИАЭ-2682. М., 1976; «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 487. Авт.: Беликов В. С., Колесниченко Я. И., Михайловский А. Б., Яворский В. А.

## Глава 16

СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ  
АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН  
С ЗАПЕРТЫМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

## § 16.1. Введение

Выше (в гл. 13 — 15) мы исследовали взаимодействие альфвеновских волн с ионами. Теперь рассмотрим роль электронов.

В условиях, представляющих интерес для проблемы управляемого термоядерного синтеза, тепловая скорость электронов велика по сравнению с альфвеновской скоростью,  $v_{Te} > c_A$ . Из этого следует, что доля пролетных электронов, которые могут резонансно взаимодействовать с альфвеновскими волнами, мала. Пример такого взаимодействия был рассмотрен в §12.2. Поэтому при исследовании



электронной раскачки (или затухания) альфвеновских волн более интересным оказывается взаимодействие с ними не пролетных, а запертых электронов.

Здесь мы ограничимся изучением столкновительного взаимодействия альфвеновских волн с запертыми электронами, обусловленного кулоновскими соударениями последних с ионами и пролетными электронами. При этом следует иметь в виду, что запертые электроны могут взаимодействовать с альфвеновскими волнами также бесстолкновительным (резонансным) образом, причем возможны как продольный, так и поперечный резонансы (см. гл. 11). Однако вследствие  $v_{Te} > c_A$  продольный резонанс реализуется только для электронов со скоростями существенно меньшими  $v_{Te}$ . Что касается поперечного резонанса, связанного со средним магнитным дрейфом запертых электронов, то при  $\omega \gtrsim \omega_*$  он приводит к эффектам, малым как  $\exp(-R/a)$ .

В данной главе, как и в § 13.4, но в отличие от гл. 14, 15, наряду с эффектом сжимаемости учитывается эффект сателлитной части продольного электрического поля ( $p_{\pm 1} \neq 0$ ,  $E_{\parallel, \pm 1} \neq 0$ ). Вместе с тем, как и в § 13.4 и гл. 14, 15, здесь пренебрегается основной гармоникой продольного электрического поля,  $E_{\parallel, 0} = 0$ . Учет  $E_{\parallel, 0}$ , в ряде задач оказывающийся необходимым, производится в работах, отмеченных в конце данной главы.

Выводу общего выражения для мнимой части частоты альфвеновских волн посвящены § 16.2 — 16.4. Остальные три параграфа этой главы касаются приложений теории, развитой в § 16.2 — 16.4, к задачам о неустойчивостях токамака с инжекцией быстрых нейтральных атомов (§ 16.5), о термоядерных неустойчивостях (§ 16.6) и о градиентной раскачке альфвеновских волн (§ 16.7).

### § 16.2. Преобразование уравнения малых колебаний

Исходим из уравнения малых колебаний (15.34). В пренебрежении  $E_{\parallel, 0}$  имеем  $\xi_0 = \zeta_0$ . При этом (15.34) переписывается в виде

$$Q_0(\omega) \zeta = (k_b/k_{\perp} R \rho_0) (p_{+1} \exp(-i\alpha) - p_{-1} \exp(i\alpha)), \quad (16.1)$$

где  $\alpha = \arctg(k_b/k_a)$ ,

$$Q_0(\omega) = \omega(\omega - \omega_{pi}^*) - c_A^2 k_{\parallel}^2. \quad (16.2)$$

Возмущенное давление  $p_{\pm 1}$  состоит из ионной и электронной частей:

$$p_{\pm 1} = p_{i, \pm 1} + p_{e, \pm 1}. \quad (16.3)$$

Ионная часть возмущенного давления определяется вторым уравнением (13.41) и в интересующем нас приближении имеет вид

$$p_{i, \pm 1} = -p'_{0i} \xi_{\pm 1}. \quad (16.4)$$

В правую часть (16.4) входит  $\xi_{\pm 1}$  — сателлитная часть возмущенного смещения  $\xi$ . Чтобы выразить  $\xi_{\pm 1}$  через  $\zeta$ , воспользуемся сателлитной частью уравнения квазиэлектронейтральности

$$n_{i, \pm 1} = n_{e, \pm 1}. \quad (16.5)$$

Выражение для  $n_{i, \pm 1}$  находим с помощью первого уравнения (13.41):

$$n_{i, \pm 1} = -N'_0 \xi_{\pm 1} \mp i N_0 (1 - \omega_{pi}^*/\omega) (k_{\perp}/k_b R) \zeta_0 \times \\ \times \exp(\pm i\alpha). \quad (16.6)$$

Чтобы сделать систему уравнений (16.1) — (16.6) замкнутой, необходимо дополнить ее уравнениями для электронов.

Электроны описываем с помощью дрейфового кинетического уравнения типа (13.71), дополненного в правой части столкновительным членом. В терминах  $\zeta$  и  $\psi$  (потенциал  $\psi$  возмущенного продольного электрического поля  $E_{\parallel}$  определен соотношением (13.74)) это уравнение записывается в виде

$$\frac{d_e f_e}{dt} = -F'_e \frac{d_e \zeta}{dt} - \frac{e_e}{T_e} F_e \frac{d_e \psi}{dt} - \frac{e_e F_e}{T_e} \psi (\omega - \hat{\omega}_e^*) - \\ - i (\omega - \hat{\omega}_e^*) \frac{M_e}{R} \frac{F_e}{T_e} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2) \frac{k_{\perp}}{k_b} \zeta \sin(\theta + \alpha) + C_e(f_e), \quad (16.7)$$

где  $C_e$  — столкновительный член, а остальные обозначения были разъяснены в § 13.4.

Разобьем  $f_e$  на две части:

$$f_e = f^{(1)} + f^{(2)}, \quad (16.8)$$

полагая [ср. с (13.75), (13.76)]

$$f^{(1)} = -F'_e \zeta - \frac{e_e}{T_e} F_e \psi. \quad (16.9)$$

При этом  $f^{(2)}$  удовлетворяет уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial \theta} - inq \right) f^{(2)} = \frac{qR}{v_{\parallel}} \left\{ i\omega f^{(2)} + C_e(f^{(2)}) - i(\omega - \hat{\omega}_e^*) F_e \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{e_e}{T_e} \psi + \frac{E}{T_e R} \frac{k_{\perp}}{k_b} \zeta \sin(\theta + \alpha) \right] \right\}, \quad (16.10)$$

где  $E = M_e v^2/2$  — энергия электрона. Предполагается, что  $f^{(2)}$  отлично от нуля только для запертых электронов; поэтому в (16.10) опущены малые члены порядка  $v_{\parallel}^2/v^2$ .

С учетом (16.8), (16.9) имеем

$$p_{e, \pm 1} = -e_e N_0 \frac{\omega a B_s}{mc} \xi_{\pm 1} + p_{e, \pm 1}^t; \quad (16.11)$$

$$n_{e, \pm 1} = -\frac{e_e N_0}{T_e} \frac{\omega a B_s}{mc} \xi_{\pm 1} + n_{e, \pm 1}^t. \quad (16.12)$$

Индексы « $t$ » в правых частях равенств означают вклады, связанные с запертыми (trapped) частицами. Наличие членов с  $\xi_{\pm 1}$  обусловлено тем, что мы воспользовались соотношением

$$\psi_{\pm 1} = (\omega a B_s / mc) \xi_{\pm 1}, \quad (16.13)$$

вытекающим, например, из  $(m \pm 1)$ -х гармоник уравнений (13.29) и (13.74).

С помощью (16.5), (16.6) и (16.12) находим связь  $\xi_{\pm 1}$  с  $\zeta$  и возмущенной плотностью запертых электронов:

$$\xi_{\pm 1} = \pm \frac{i T_e c k_{\perp} (\omega - \omega_{pi}^*)}{e_e R B_s (\omega - \omega_{ne}) \omega} \zeta \exp(\pm i\alpha) + \frac{m c T_e n_{e, \pm 1}^t}{e_e a B_s N_0 (\omega - \omega_{ne})}. \quad (16.14)$$

С учетом этого соотношения и уравнений (16.3), (16.4) и (16.11) приводим (16.1) к виду

$$Q_0(\omega) \zeta = \frac{ik_b}{k_{\perp} R \rho_0} \left\{ p_{e,+1}^t \exp(-i\alpha) - p_{e,-1}^t \exp(i\alpha) - \right. \\ \left. - \frac{\omega - \omega_{pi}^*}{\omega - \omega_{ne}} T_e [n_{e,+1}^t \exp(-i\alpha) - n_{e,-1}^t \exp(i\alpha)] \right\}. \quad (16.15)$$

Здесь опущены несущественные для нас вещественные члены.

Чтобы вычислить возмущения давления и плотности запертых электронов, входящих в (16.15), необходимо решить кинетическое уравнение (16.10). Этому посвящен следующий параграф.

### § 16.3. Решение кинетического уравнения для запертых электронов

Выражая с помощью (16.13) и (16.14)  $\psi$  через  $\zeta$  и подставляя результат в уравнение (16.10), преобразуем последнее к виду

$$\left( \frac{\partial}{\partial \theta} - inq \right) f^{(2)} = \frac{qR}{v_{\parallel}} [i\omega f^{(2)} + C_e(f^{(2)}) - i(\omega - \hat{\omega}_e^*) \times \\ \times g F_e(k_{\perp}/k_b R) \zeta \sin(\theta + \alpha)], \quad (16.16)$$

где

$$g = E/T_e - 2(\omega - \omega_{pi}^*)/(\omega - \omega_{ne}). \quad (16.17)$$

В (16.16) пренебрежено частью  $\psi$ , пропорциональной возмущенной плотности запертых электронов, так как учет ее в этом уравнении означал бы учет эффектов, малых как квадрат числа запертых электронов.

Полагаем период обращения запертых электронов малым по сравнению с периодом колебаний поля и временем столкновений. При этом уравнение (16.16) можно решать разложением в ряд по малому параметру  $1/v_{\parallel}$ , так что

$$f^{(2)} = f_0^{(2)} + f_1^{(2)} + \dots \quad (16.18)$$

Члены нулевого порядка уравнения (16.16) дают

$$f_0^{(2)} = \exp(inq\theta) H, \quad (16.19)$$

где  $H$  — некоторая величина, не зависящая от  $\theta$ . Уравнение для  $f_1^{(2)}$  имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - inq\right) f_1^{(2)} = \frac{qR}{v_{\parallel}} \{ \dots \}, \quad (16.20)$$

где в фигурных скобках правой части стоит то же, что и в (16.16), но с заменой  $f^{(2)}$  правой частью (16.19). Умножая обе части равенства (16.20) на  $\exp(-inq\theta)$  и интегрируя по  $\theta$ , получаем соотношение

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{v_{\parallel}} \left[ i\omega H + C_e(H) - i(\omega - \hat{\omega}_e^*) g F_e \times \right. \\ \left. \times \frac{k_{\perp}}{k_b R} \zeta \sin(\theta + \alpha) \exp(-inq\theta) \right] = 0, \quad (16.21)$$

означающее условие ортогональности правой части (16.20) решению нулевого приближения.

Вводя величину  $h$ , связанную с  $H$  соотношением

$$H = (ak_{\perp}/mR) \zeta_0 F h \exp[i(-n\phi + k_a a)], \quad (16.22)$$

из (16.21) получаем

$$\omega h - i\bar{C}_e(h) = (\omega - \hat{\omega}_e^*) g \overline{\sin(\theta + \alpha) \exp(is\theta)}, \quad (16.23)$$

где черта сверху означает среднее по траектории запертой частицы, определенное соотношением (15.17).

Величина  $\bar{C}_e$  имеет вид дифференциального оператора второго порядка

$$\bar{C}(h) = 2\bar{v} \left( \frac{T_e}{E} \right)^{3/2} \frac{1}{L(\lambda)} \frac{\partial}{\partial\lambda} \left[ D(\lambda) \frac{\partial h}{\partial\lambda} \right], \quad (16.24)$$

где

$$L(\lambda) = (8/\sqrt{2\varepsilon}) K(\sqrt{1-\xi}); \quad (16.25)$$

$$D(\lambda) = (8\sqrt{2\varepsilon}/B_s^2) [E(\sqrt{1-\xi}) - \xi K(\sqrt{1-\xi})]; \quad (16.26)$$

$$\lambda = M_e v_{\perp}^2 / 2BE; \quad \varepsilon \equiv a/R. \quad (16.27)$$

Параметр  $\xi$  связан с  $\lambda$  соотношением

$$\lambda = [1 + \varepsilon (2\xi - 1)] / B_s, \quad (16.28)$$

а  $\bar{\nu}$  имеет смысл частоты столкновений электрона энергии  $E$  и определено соотношением

$$\bar{\nu} = \nu [1 + G(\sqrt{E/T_e})], \quad (16.29)$$

где

$$\nu = \omega_{pe}^2 e^2 M_e^{1/2} (2 T_e)^{-3/2} \Lambda; \quad (16.30)$$

$$G(z) = (z\sqrt{\pi})^{-1} \exp(-z^2) + (2/\sqrt{\pi}) (1 - 1/2z^2) \int_0^z \exp(-t^2) dt; \quad (16.31)$$

$\omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 N_0 / M_e$  — квадрат электронной плазменной частоты;  $\Lambda$  — кулоновский логарифм.

Потребуем, чтобы функция  $h(\xi)$  обращалась в нуль на границе между запертыми и пролетными частицами, т. е.

$$h(\xi)|_{\xi=0} = 0. \quad (16.32)$$

Это одно из граничных условий уравнения (16.23). Второе граничное условие получается из требования, чтобы для сильнозапертых частиц производная  $h(\xi)$  не обращалась в бесконечность

$$(\partial h / \partial \xi)|_{\xi=1} < \infty. \quad (16.33)$$

Мы интересуемся случаем редких столкновений,  $\omega \gg v_e R/a$ . В пренебрежении столкновениями из (16.23) следует

$$h = h^{(0)} \equiv (1 - \hat{\omega}_e^*/\omega) g \overline{\sin(\theta + \alpha) \exp(is\theta)}, \quad (16.34)$$

где верхний индекс нуль у  $h$  означает нулевое приближение по столкновениям.

Решение (16.34), удовлетворяя требованию (16.33), не удовлетворяет, однако, условию (16.32). Поэтому вблизи  $\xi = 0$  это решение необходимо «подправить» учетом столкновений.

В связи с этим ищем решение уравнения (16.23) вблизи  $\xi = 0$  в виде

$$h = h^{(0)} (1 + y). \quad (16.35)$$

При этом для  $y$  получается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + i \frac{\varepsilon \omega}{2v_e} \left( \frac{E}{T_e} \right)^{3/2} \ln \left( \frac{16}{\xi} \right) y = 0 \quad (16.36)$$

с граничными условиями:  $y = -1$  при  $\xi = 0$  и  $y \rightarrow 0$  при удалении  $\xi$  от нуля. С учетом этих граничных условий из (16.36) в квазиклассическом приближении получается

$$y = -\exp \left[ -\int_0^\xi \sigma(\xi') d\xi' \right], \quad (16.37)$$

где

$$\sigma(\xi) = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\varepsilon \omega}{2v} \left( \frac{E}{T} \right)^{3/2} \ln \left( \frac{16}{\xi} \right) \right]^{1/2}. \quad (16.38)$$

Для определенности здесь было предположено  $\omega > 0$ .

Итак, решение кинетического уравнения (16.10) найдено: оно определяется формулами (16.19), (16.22), (16.34), (16.35), (16.37) и (16.38).

### § 16.4. Общее выражение для столкновительной части инкремента нарастания альфвеновских волн

Выражения  $p_{e, \pm 1}^t, n_{e, \pm 1}^t$ , входящие в уравнение малых колебаний (16.15), представляют собой интегралы по скоростям от  $f_{\pm 1}$ , связанные с возмущенной функцией распределения  $f$  соотношениями [см. уравнение (13.3)]

$$f_{\pm 1} = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} f \exp \{ -i [(m \pm 1)\theta - n\varphi + k_a a] \} d\theta. \quad (16.39)$$

Используя эти соотношения, находим связь комбинации из возмущений давления и плотности, содержащейся в (16.15), с величиной  $h$ , определенной равенством (16.22), в результате чего из (16.15) следует дисперсионное уравнение

$$Q_0(\omega) = \frac{T_e (2e)^{1/2}}{\pi M_i R^2} \left\langle \int_0^1 d\xi g h \times \right. \\ \left. \times \overline{\exp(-is\theta) \sin(\alpha + \theta) K(\sqrt{1 - \xi})} \right\rangle, \quad (16.40)$$

где символ  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по максвелловскому распределению,

$$\langle \dots \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dE E^{1/2} \frac{\exp(-E/T_e)}{T_e^{3/2}} (\dots). \quad (16.41)$$

Подставляя в (16.40) функцию  $h$ , определенную соотношениями (16.34), (16.35), (16.37), находим выражение для инкремента нарастания

$$\text{Im } \omega = - \frac{1}{\partial Q_0 / \partial \omega} \frac{T_e (2e)^{1/2}}{\pi M_i R^2} \int_0^1 d\xi \left\langle \left( 1 - \frac{\hat{\omega}_e^*}{\omega} \right) g^2 \times \right. \\ \left. \times \overline{|\exp(is\theta) \sin(\alpha + \theta)|^2} K(\sqrt{1 - \xi}) \text{Im exp} \left[ - \int_0^{2\pi} \sigma(\xi') d\xi' \right] \right\rangle. \quad (16.42)$$



Дальнейшее сводится к вычислению интегралов по  $\xi$  и  $E$ . Результаты зависят от  $s$ . Некоторые конкретные случаи затухания и нарастания альфвеновских возмущений рассмотрены в § 16.5 — 16.7. По порядку величины

$$\text{Im } \omega \simeq - (\varepsilon v_e \omega)^{1/2} \beta. \quad (16.43)$$

### § 16.5. Влияние запертых электронов на альфвеновскую неустойчивость в токамаке с инжекцией нейтронов

В п. 2 § 14.3 была рассмотрена кинетическая раскачка альфвеновских волн быстрыми ионами, образующимися при инжекции в токамак пучка быстрых нейтральных атомов. Эта неустойчивость связана с возмущениями, у которых  $k_{\parallel} < 1/qR$ , что соответствует  $s < 1$ .

При малых  $s$  из (16.42), согласно работе В. А. Мазура и автора, следует

$$\text{Im } \omega = - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^{1/2} \frac{T p_2}{M_i R^2 \omega} (64s^2 \sigma_2 \cos^2 \alpha + \sigma_1 \sin^2 \alpha), \quad (16.44)$$

где  $p_2 = 3,50$  — численный коэффициент, а выражения для  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  имеют вид

$$\sigma_1 = \left( \frac{v_e}{\varepsilon \omega} \right)^{1/2} \left[ \ln 8 \left( \frac{2\varepsilon \omega}{v_e} \right)^{1/2} \right]^{1/2}; \quad (16.45)$$

$$\sigma_2 = \left( \frac{v_e}{\varepsilon \omega} \right)^{1/2} \left[ \ln 8 \left( \frac{2\varepsilon \omega}{v_e} \right)^{1/2} \right]^{-3/2}. \quad (16.46)$$

Сравним электронный декремент затухания (16.44) с ионным инкрементом нарастания (14.19). Рассмотрим возмущения с  $k_x \gg m/a$ , т. е. с  $\alpha \rightarrow 0$ , которые при наличии шира являются наиболее опасными. При этом для примера  $B = 5 \cdot 10^4$  гс;  $N_0 = 10^{14}$  см<sup>-3</sup>;  $T = 5$  кэв;  $a = 50$  см;  $R = 300$  см и при энергии ионов порядка 100 кэв получается критерий стабилизации

$$N_1/N_0 < 0,5 \cdot 10^{-3}. \quad (16.47)$$

### § 16.6. Влияние запертых электронов на градиентные (дрейфовые) термоядерные неустойчивости

Теперь рассмотрим влияние запертых электронов на термоядерные неустойчивости, исследованные в гл. 15: неустойчивость на пролетных  $\alpha$ -частицах (§ 15.3) и неустойчивость на запертых  $\alpha$ -частицах (§ 15.4).

Неустойчивость на пролетных  $\alpha$ -частицах связана с возмущениями, у которых  $k_{\parallel} \approx 1/qR$ , так что  $s \approx 1$ . При таком  $s$  из (16.42), согласно работе автора и А. Л. Френкеля, получается

$$\text{Im } \omega = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/2} \frac{T p_2}{M_i R^2 \omega} \left(\frac{64}{9} \sigma_2 \cos^2 \alpha + \sigma_1 \sin^2 \alpha\right). \quad (16.48)$$

Отсюда вытекает оценка

$$\text{Im } \omega \simeq -\beta (v_e c_A / R)^{1/2}. \quad (16.49)$$

Этот декремент больше, чем инкремент (15.14) при

$$\beta_{\alpha} / \beta < (v_e R / c_A)^{1/2}. \quad (16.50)$$

Для определения порога неустойчивости на запертых  $\alpha$ -частицах, связанной с возмущениями с  $k_{\parallel} < 1/qR$ , следует использовать выражение для электронного декремента вида (16.44).

### § 16.7. Градиентная (дрейфовая) раскачка альфвеновских волн запертыми электронами

В § 16.5, 16.6 при использовании выражения (16.42) для  $\text{Im } \omega$  пренебрегалось градиентными эффектами (считалось  $\omega \gg \omega_*$ ), так что роль запертых электронов сводилась к стабилизации неустойчивостей. При  $\omega \lesssim \omega_*$  электроны могут играть дестабилизирующую роль, приводя к раскачке альфвеновских волн. При  $k_{\parallel} \simeq 1/qR$  условие неустойчивости означает

$$k_{\parallel}^2 \rho_i^2 \beta_J > T_i / T_e. \quad (16.51)$$

Это условие совместимо с условием длинноволновости возмущений  $k_{\perp} \rho_i < 1$ , если

$$\beta_J > T_i/T_e. \quad (16.52)$$

При выполнении критерия неустойчивости (16.51) инкремент возмущений порядка

$$\gamma \simeq \varepsilon^2 \beta_J (v_e c_A / qR)^{1/2}. \quad (16.53)$$

Это — инкремент, обусловленный эффектами сжимаемости и сателлитного поля  $E_{\parallel}$ . Он не мал по сравнению с невычислявшимся выше инкрементом, обусловленным  $E_{\parallel,0}$ , если  $\beta_J \simeq 1/\varepsilon$ , что соответствует предельному  $\beta_J$  по равновесию.

При  $\beta_J \ll \varepsilon^{-1}$  вместо (16.53) следует использовать выражение для инкремента, полученное в работе автора и И. Г. Шухмана (см. также работу Тэнга и др.).

### § 16.8. Взаимодействие запертых электронов с квазинечетными альфвеновскими волнами

Выше шла речь об альфвеновских волнах, в которых смещение плазмы  $\xi$  — четная функция угла  $\theta$ . Это, в соответствии с § 11.11, — четные моды. Автором и И. Г. Шухманом было показано, что существуют также квазинечетные альфвеновские моды. Поперечные волновые числа такого рода возмущений оказываются достаточно большими, так что  $(k_{\perp} \rho_i)^2 > \beta$ . Отношение инкрементов нечетных и четных мод порядка  $\beta (k_{\perp} \rho_i)^{-2}$ .

### § 16.9. Взаимодействие запертых электронов с коротковолновыми возмущениями альфвеновского типа

Наряду с коротковолновыми возмущениями типа (12.83), (13.105) в условиях токамака возможно также существование коротковолновых ветвей колебаний ( $z_i \gg 1$ ) с законом дисперсии

$$\omega^2 = \omega_*^2 + k_{\parallel}^2 c_A^2 z_i. \quad (16.54)$$

В возмущениях такого рода, как и в длинноволновых альфвеновских ( $z_i \ll 1$ ), отличным от нуля является поле  $\mathbf{V}_\perp$ , тогда как  $V_\parallel \approx 0$ .

Взаимодействие колебаний типа (16.54) с запертыми электронами (а также с пролетными) исследовалось автором и А. Г. Морозовым. Было показано, что раскачка таких колебаний может иметь место, если только наряду с градиентом плотности имеется градиент электронной температуры.

### Библиографический обзор к гл. 16

1. Михайловский А. Б. «Дрейфовая» раскачка альфвеновских волн запертыми электронами в токамаке при  $\beta_j \gtrsim 1$ . — «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 378.
2. Михайловский А. Б., Шухман И. Г. Влияние запертых электронов на альфвеновские волны в токамаке. — Препринт ИАЭ-2649. М., 1976; «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1976, т. 71, с. 1817.
3. Мазур В. А., Михайловский А. Б. Стабилизация неустойчивости альфвеновских волн в двухкомпонентном токамаке. — Препринт ИАЭ-2650. М., 1976; «Ядерный синтез», 1977, т. 17, с. 193.
4. Михайловский А. Б., Френкель А. Л. К теории «дрейфовых» термоядерных неустойчивостей. — Препринт ИАЭ-2684. М., 1976. Работам [1—4] мы следовали в § 16.2—16.7 настоящей главы. В этих же работах можно найти более подробное исследование рассмотренных выше вопросов.
5. Finite-beta and resonant-electron effects on trapped-electron instabilities. — «Nucl. Fusion», 1976, v. 16, p. 191. Auth.: Tang W. M., Liu C. S., Rosenbluth M. N., Catto P. J., Callen J. D. Здесь, в частности, рассматривался вопрос о раскачке альфвеновских волн запертыми электронами, обусловленной конечным  $E_{II}$  основной гармонике.
6. Rosenbluth M. N., Ross D. W., Kostomarov D. P. Stability regions of dissipative trapped-ion instability. — «Nucl. Fusion», 1972, v. 12, p. 3.

В этой работе подробно изложена процедура вычисления столкновительной диссипации на запертых частицах. Рассмотрены потенциальные (электростатические) возмущения.

7. Михайловский А. Б., Шухман И. Г. Квазинечетные альфвеновские моды в токамаке и их взаимодействие с запертыми электронами. — Препринт ИАЭ-2707. М., 1976.
8. Михайловский А. Б., Морозов А. Г. Коротковолновые непотенциальные неустойчивости в токамаке при большом давлении плазмы. — Препринт ИАЭ-2686. М., 1976. В [7, 8] можно найти подробное изложение вопросов, отмеченных в § 16.8, 16.9.

## Глава 17

ТЕРМОЯДЕРНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ  
ТОКАМАКА ПРИ НЕМАКСВЕЛЛОВСКОМ  
РАСПРЕДЕЛЕНИИ  $\alpha$ -ЧАСТИЦ ПО СКОРОСТЯМ

## § 17.1. Введение

В § 20.2 книги [1] отмечалось, что  $\alpha$ -частицы с немаксвелловским распределением по скоростям, образующиеся в результате термоядерных реакций, могут возбуждать быстрые магнитно-звуковые волны с частотами, близкими к гармоникам их циклотронной частоты. Инкремент нарастания таких волн по порядку величины равен

$$\gamma \simeq (N_\alpha/N_0)^{1/2} \omega_{B\alpha}, \quad (17.1)$$

где  $N_\alpha$ ,  $N_0$  — плотности  $\alpha$ -частиц и плазмы. Этот результат относится к идеализированному случаю однородного магнитного поля. В применении к тороидальным ловушкам такая идеализация оправдана, если только  $(N_\alpha/N_0)^{1/2} > a/R$ , где  $a$ ,  $R$  — малый и большой радиусы тора. В случае токамака имеет место обратное, а именно:

$$(N_\alpha/N_0)^{1/2} < a/R. \quad (17.2)$$

В связи с этим возникает вопрос исследования раскачки  $\alpha$ -частицами с немонотонным распределением по скоростям быстрых магнитно-звуковых волн в условиях (17.2). На этом пути получены результаты, изложение которых составляет содержание § 17.2.

Вследствие продольной неоднородности магнитного поля токамака немаксвелловский характер распределения  $\alpha$ -частиц может сказываться также и при взаимодействии их с альфвеновскими волнами. При этом, в отличие от гл. 15, неустойчивости обнаруживаются даже в пренебрежении градиентными (дрейфовыми) эффектами. Соответствующие результаты излагаются в § 17.3.

## § 17.2. Циклотронная раскачка быстрых магнитно-звуковых волн

1. Дисперсионное уравнение. Циклотронное взаимодействие  $\alpha$ -частиц с быстрыми магнитно-звуковыми волнами в токамаке описывается дисперсионным уравнением, полученным Т. Д. Каладзе и автором:

$$Q^{(0)} + (\varepsilon_{11}^{(\alpha)})_0 = 0, \quad (17.3)$$

где

$$Q^{(0)} = \varepsilon_{11}^{(0)} - (\omega/ck_{\perp})^2 (\varepsilon_{12}^{(0)})^2 = 0, \quad (17.3')$$

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = -\omega_{pi}^2/\omega^2; \quad \varepsilon_{12}^{(0)} = -\varepsilon_{21}^{(0)} = -i\omega_{pe}^2/\omega\omega_{Be}$$

— компоненты тензора диэлектрической проницаемости «фоновой» плазмы;  $(\varepsilon_{11}^{(\alpha)})_0$  — вклад  $\alpha$ -частиц в компоненту  $\varepsilon_{11}$ , усредненный по соответствующей магнитной поверхности. Общее выражение для  $\varepsilon_{11}^{(\alpha)}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(\alpha)} = & -i \frac{4\pi e^2}{M\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle \int_{-\infty}^t dt' S_n(t, t') v_{\perp} \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}} \frac{n^2 J_n^2(\xi_{\perp})}{\xi_{\perp}^2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (17.4)$$

где символ  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по скоростям, а величина  $S_n(t, t')$  равна [ср. с (13.89), (13.90)]

$$\begin{aligned} S_n(t, t') = & \exp \left\{ i\omega(t-t') - in \int_{t'}^t \omega_B dt'' - \right. \\ & \left. - i \int_{t'}^t k_{\parallel} v_{\parallel} dt'' - i \int_{t'}^t k_{\perp} V_D dt'' \right\}. \end{aligned} \quad (17.5)$$

Нижний индекс нуль в (17.3) означает символ усреднения по магнитной поверхности, так что

$$(\dots)_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta (\dots).$$

Остальные обозначения встречались выше.

В пренебрежении вкладом  $\alpha$ -частиц уравнение (17.3) описывает быстрые магнитно-звуковые волны с законом дисперсии

$$\omega^2 = k_{\perp}^2 c_A^2. \quad (17.6)$$

Предполагается  $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$ . Кроме того, используется упрощающее предположение  $\omega \gg \omega_{Bi}$ , так что резонанс типа  $\omega \approx n\omega_{B\alpha}$  реализуется при  $n \gg 1$ . Качественно результаты экстраполируются также на случай  $n \simeq 1$ .

**2. Приближение однородного магнитного поля.** В случае однородного магнитного поля выражение для  $\varepsilon_{11}^{(\alpha)}$  имеет вид

$$\varepsilon_{11}^{(\alpha)} = \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k_{\perp}^2 V_{\alpha}^2} \left[ 1 - \omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_{2n}(2k_{\perp} V_{\alpha}/\omega_{B\alpha})}{\omega - n\omega_{B\alpha}} \right], \quad (17.7)$$

где  $\omega_{p\alpha}^2$  — квадрат ленгмюровской частоты  $\alpha$ -частиц; для простоты здесь принято  $\delta$ -функциональное распределение  $\alpha$ -частиц;  $F \sim \delta(v - V_{\alpha})$ . Полагая в (17.3), (17.7)  $\omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)}$  и  $k_{\perp} = k_{\perp}^{(0)}$ , где  $k_{\perp}^{(0)}$  удовлетворяет соотношению  $\omega^{(0)} = n\omega_{B\alpha} = k_{\perp}^{(0)} c_A$ , получаем квадратное уравнение для добавки  $\omega^{(1)}$ , из которого при  $J_{2n}(2nV_{\alpha}/c_A) < 0$ , следует, что имеет место неустойчивость с инкрементом

$$\frac{\gamma}{\omega_{B\alpha}} = \left( \frac{N_{\alpha}}{2N_0} \right)^{1/2} \frac{nc_A}{V_{\alpha}} \left[ -J_{2n} \left( \frac{2nV_{\alpha}}{c_A} \right) \right]^{1/2}, \quad (17.8)$$

что соответствует оценке (17.1). Это и есть циклотронная термоядерная неустойчивость, связанная с раскачкой быстрых магнитно-звуковых волн.

**3. Стабилизация неустойчивости с инкрементом  $\gamma \sim \sim (N_{\alpha}/N_0)^{1/2}$  в условиях токамака.** Ограничиваясь учетом только пролетных частиц и следуя работе Т. Д. Каладзе и автора, с помощью (17.4) находим, что в условиях осесимметричного токамака круглого сечения [см. (17.3')]

$$(\varepsilon_{11}^{(\alpha)})_0 = - \frac{8e^2 N_{\alpha}}{M\omega k_{\perp}^2 aq} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n\omega_{Bs}| I_n}{\omega - n\omega_{Bs}}, \quad (17.9)$$

где

$$I_n = \frac{1}{N_\alpha} \int_0^\infty F v J_n^2 \left( \frac{k_\perp v}{\omega_{Bs}} \right) dv. \quad (17.10)$$

Из (17.3), (17.9) так же, как и в предыдущем пункте, можно получить квадратное уравнение для  $\omega^{(1)}$ , но теперь такого рода уравнение имеет лишь решения с вещественным  $\omega^{(1)}$ . Это означает, что при условии (17.2) циклотронная термоядерная неустойчивость с  $\gamma \sim (N_\alpha/N_0)^{1/2}$  подавляется.

**4. Циклотронная неустойчивость, вызываемая запертыми  $\alpha$ -частицами.** Согласно работам Т. Д. Каладзе и автора, учет вклада запертых  $\alpha$ -частиц в (17.3) позволяет выявить неустойчивость с инкрементом порядка

$$\gamma \simeq \frac{N_\alpha}{N_0} \left( \frac{c_A}{V_\alpha} \right)^2 \left( \frac{R^2}{a \rho_\alpha} \right)^{1/3} \omega_{Bs}; \quad \rho_\alpha \equiv V_\alpha / \omega_{Bs}, \quad (17.11)$$

что существенно меньше, чем (17.8).

Таким образом, роль термоядерных неустойчивостей, связанных с раскачкой быстрых магнитно-звуковых волн, в условиях токамака меньше, чем в случае однородного магнитного поля. Тем не менее характерные времена, соответствующие инкременту порядка (17.11), существенно меньше характерного времени кулоновской релаксации  $\alpha$ -частиц. Поэтому неустойчивости типа (17.11) должны учитываться при анализе динамики  $\alpha$ -частиц в реакторе токамаке.

**5. Влияние теплового разброса запертых  $\alpha$ -частиц на вызываемую ими циклотронную неустойчивость.** Этот вопрос исследовался Д. Г. Ломинадзе и автором, а также Т. Д. Каладзе, Д. Г. Ломинадзе, автором, А. Р. Хволесом и Л. В. Цамалашвили. В частности, согласно этим исследованиям, при  $F \sim \exp[-(v - V_\alpha)^2/2 v_{T\alpha}^2]$  неустойчивость с инкрементом порядка (17.11) оказывается невозможной, если

$$v_{T\alpha}/c_A \gtrsim 1/n. \quad (17.12)$$



**6. Циклотронная неустойчивость, вызываемая запертыми  $\alpha$ -частицами в плазме токамака эллиптического сечения.** Т. Д. Қаладзе, Д. Г. Ломинадзе, автором и О. А. Похотеловым было показано, что эллиптичность поперечного сечения токамака существенно влияет на инкремент нарастания колебания типа (17.11) при

$$A \equiv (l_1/R) (e^{2\eta} - 1) / q^2 \gtrsim 1, \quad (17.13)$$

где  $\text{th}\eta = (l_2^2 - l_1^2)/(l_1^2 + l_2^2)$ ;  $l_1, l_2$  — малая и большая полуоси эллипса. При этом условии инкремент нарастания оказывается меньше, чем в случае токамака круглого сечения.

### § 17.3. Возбуждение альфвеновских волн $\alpha$ -частицами с немонотонным распределением по скоростям

**1. Возбуждение альфвеновских волн пролетными  $\alpha$ -частицами.** В п. 2 § 14.5 отмечалось, что группа быстрых пролетных частиц с  $\delta$ -функциональным распределением по энергиям может приводить к раскачке альфвеновских колебаний с поперечной длиной волны, сравнимой с ларморовским радиусом этих частиц и размером орбит их дрейфового движения. Этот общий результат имеет отношение и к проблеме  $\alpha$ -частиц.

Количественное рассмотрение такого рода неустойчивости оказывается наиболее простым в предположении  $q \gg 1$ . При этом ларморовский радиус мал по сравнению с размером дрейфовых орбит, так что аргумент  $\xi_{\perp}$  в функции Бесселя, содержащейся в правой части (14.21), можно считать малым. Тогда, согласно работе К. О. Бизли, Д. Г. Ломинадзе и автора, выражение для инкремента нарастания (14.21) сводится к следующему:

$$\gamma = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{N_{\alpha}}{N_0} \frac{M_{\alpha}}{M_0} \frac{q\omega}{\xi_0} \sum_s \frac{J_s(\xi_{\perp}) J'_s(\xi_{\parallel})}{(1+k_{\parallel} qR/s)^2}. \quad (17.14)$$

Здесь  $\xi_0 = k_{\perp} \varepsilon_0^{1/2} / \omega_{Bs}$ ;  $\varepsilon_0$  — энергия  $\alpha$ -частиц на единицу массы; аргумент  $\xi_{\parallel}$  берется при  $v_{\parallel} = \omega / (k + s/qR)$ ;  $M_{\alpha}, M_0$  — масса  $\alpha$ -частиц и средняя масса ионов «фононой»

плазмы. При скоростях ионов, больших по сравнению со скоростью Альфвена,  $(2 \varepsilon_0)^{1/2} > c_A$ , условие резонанса  $\omega = k_{\parallel} c_A = v_{\parallel} (k_{\parallel} + s/qR)$  удовлетворяется, если  $k_{\parallel}$  таково, что для какого-либо  $s=s_0$   $k_{\parallel} \approx -s_0/qR$ . При этом в правой части (17.14) важен только член суммы с номером  $s = s_0$ . Учитывая в (17.14) только этот член, находим, что  $\gamma > 0$  при  $k_{\perp}$ , удовлетворяющих условию:

$$[J_s^2(\xi_{\parallel})]' < 0. \quad (17.15)$$

Это условие альфвеновской неустойчивости аналогично условию циклотронных неустойчивостей плазмы в однородном магнитном поле, обусловленных немаксвелловским распределением по поперечным скоростям, внимание к которым в свое время было привлечено Харрисом (теория такого рода неустойчивостей излагалась в книге [1]). По порядку величины

$$\gamma \simeq (N_{\alpha}/N_0) qV_{\alpha}/R. \quad (17.16)$$

**2. Возбуждение альфвеновских волн запертыми  $\alpha$ -частицами.** Согласно работе Т. Д. Каладзе и автора (см. также работу В. С. Беликова, Я. И. Колесниченко, автора и В. А. Яворского), запертые  $\alpha$ -частицы, как и пролетные, могут приводить к возбуждению альфвеновских волн. При этом инкремент нарастания по порядку величины такой же, как и в случае запертых  $\alpha$ -частиц [см. оценку (17.16)].

**3. Квазилинейная релаксация  $\alpha$ -частиц при их взаимодействии с альфвеновскими волнами.** Исследование этого вопроса было начато автором, А. И. Пятаком и А. М. Фридманом, на примере неустойчивости п. 1 показавшими, что такого рода релаксация должна протекать быстрее, чем кулоновская.

### Библиографический обзор к гл. 17.

1. Каладзе Т. Д., Михайловский А. Б. Циклотронная «термоядерная» неустойчивость в реакторе-токамаке. — «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 238.
2. Ломинадзе Д. Г., Михайловский А. Б. Влияние теплового разброса запертых  $\alpha$ -частиц на циклотронную неустойчивость в реакторе-токамаке. — «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 520.

3. **Циклотронная** неустойчивость запертых  $\alpha$ -частиц в токамаке эллиптического сечения. — Препринт ИАЭ-2664. М., 1976; «Ядерный синтез», 1976, т. 16, с. 465. Авт.: Каладзе Т. Д., Ломинадзе Д. Г., Михайловский А. Б., Похотелов О. А.
4. **Каладзе Т. Д., Михайловский А. Б.** Баунс-эффекты в теории неустойчивостей запертых  $\alpha$ -частиц в реакторе-токамаке. — Препринт ИАЭ-2644. М., 1976; «Ядерный синтез», 1977, т. 17, с. 729.
5. **Численный** анализ магнитозвуковой неустойчивости запертых  $\alpha$ -частиц в реакторе-токамаке. — Препринт ИАЭ-2692. М., 1976. Авт.: Каладзе Т. Д., Ломинадзе Д. Г., Михайловский А. Б., Хволес А. Р., Цамалашвили Л. В.  
В работах [1—5] исследовалась циклотронная раскачка быстрых магнитно-звуковых волн.
6. **Бизли К. О., Ломинадзе Д. Г., Михайловский А. Б.** Возбуждение коротковолновых альфвеновских колебаний высокоэнергичными ионами в токамаке. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 170.
7. **Михайловский А. Б., Пятак А. И., Фридман А. М.** Квазилинейная теория сателлитного взаимодействия  $\alpha$ -частиц с альфвеновскими волнами в токамаке. — «Докл. АН СССР», 1976, т. 229, с. 829.
8. **Каладзе Т. Д., Михайловский А. Б.** Возбуждение альфвеновских волн запертыми  $\alpha$ -частицами в реакторе-токамаке. — Препринт ИАЭ-2679. М., 1976; «Ядерный синтез», 1977, т. 17, с. 411.
9. **Термоядерные альфвеновские неустойчивости** в токамаке-реакторе. Препринт ИАЭ-2682. М., 1976; «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 263. Авт.: Беликов В. С., Колесниченко Я. И., Михайловский А. Б., Яворский В. А.  
В работах [6—9] рассматривалась раскачка альфвеновских волн.

## Глава 18

### НЕУСТОЙЧИВОСТИ МАГНИТОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЫ

#### § 18.1. Введение

Магнитосфера Земли является одним из примеров адиабатических магнитных ловушек. Поэтому изложенные выше представления о неустойчивостях плазмы, удерживаемой в магнитных ловушках, имеют отношение и к задачам о магнитосферной плазме.

Частицы магнитосферной плазмы обладают немаксвелловским распределением по скоростям. Поэтому в магнитосферной плазме может раскачиваться довольно обширное семейство различных типов колебаний. Ниже коснемся только неустойчивостей, для развития которых существенна геометрия магнитного поля, и прежде всего—альфве-

новских неустойчивостей. В § 18.2 изложим метод исследования таких неустойчивостей, а в § 18.3 отметим некоторые конкретные результаты. В § 18.4 рассмотрим влияние геометрии геомагнитного поля на неустойчивости, связанные с быстрыми магнитно-звуковыми волнами.

## § 18.2. Уравнения колебаний альфвеновского типа

**1. Исходное уравнение малых колебаний.** Следуя работе автора и О. А. Похотелова, исходим из следующего уравнения для альфвеновских волн в магнитном поле произвольной геометрии [ср. с уравнением (13.5)]

$$\mathbf{B}_0 \nabla \tilde{\alpha} + \frac{c \nabla \tilde{p}}{B_0^4} [\mathbf{B}_0, \nabla (B_0^2 + 8\pi p_0)] + \\ + \operatorname{div} \left[ \frac{c \mathbf{B}_0}{B_0^2}, \rho_0 \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla \overleftrightarrow{\pi} \right] = 0. \quad (18.1)$$

**2. Равновесное состояние.** Полагаем, что равновесное магнитное поле имеет конфигурацию аксиально-симметричной адиабатической ловушки. Вводим криволинейные координаты  $x^1, x^2, x^3$ , связанные с силовыми линиями и интегральными характеристиками магнитного поля (ср. с п. 1 приложения 1 к гл. 1). Координата  $x^1$  — «радиальная», так что поверхности  $x^1 = \text{const}$  являются дрейфовыми. Координата  $x^2$  полагается циклической с периодом  $2\pi$ , так что направление вектора  $\nabla x^2$  — это направление симметрии. Координата  $x^3$  характеризует расстояние вдоль силовой линии.

В предположениях аксиальной симметрии и полоидального магнитного поля квадрат элемента длины

$$dl^2 = g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + g_{33} (dx^3)^2, \quad (18.2)$$

где  $g_{ik}$  — компоненты метричного тензора. При этих предположениях равновесное магнитное поле имеет только одну отличную от нуля контравариантную компоненту, определяемую соотношением [ср. с (П1.16) и (П2.29)]

$$B_0^3 = \Phi' / 2\pi \sqrt{g}, \quad (18.3)$$

где  $g$  — детерминант метрического тензора;  $\Phi'$  — производная по координате  $x^1$  от магнитного потока  $\Phi$ , протекающего внутри поверхности  $x^1 = \text{const}$ .

Заметим, что в теоретических работах по неустойчивостям магнитосферы магнитное поле часто выбирается в виде [ср. с (П1.19)]

$$\mathbf{B}_0 = [\nabla\alpha, \nabla\beta], \quad (18.4)$$

где  $\alpha, \beta$  — координаты, поперечные к магнитному полю. Из (18.4) в случае аксиальной симметрии следует

$$B_0^3 = 1/\sqrt{g}. \quad (18.5)$$

Из сравнения (18.5) с (18.3) видно, что координаты  $\alpha, \beta$  — это частный случай координат  $x^1, x^2$ , такой, что  $x^1 = \Phi/2\pi$ .

**3. Уравнение малых колебаний при  $k_\perp a \gg 1$ .** Полагая характерные поперечные размеры возмущений малыми по сравнению с размерами неоднородности плазмы и магнитного поля, аналогично § 13.2 приводим уравнение (18.1) к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \Delta_\perp \frac{\partial \zeta}{\partial x^3} + \frac{\omega(\omega - \omega_{*i})}{c_A^2} \Delta_\perp \left( \zeta + \right. \\ \left. + \frac{ct}{\omega} \frac{2\pi}{\Phi'} \psi \right) - \frac{8\pi m^2 \tilde{\rho} \sqrt{g_{11}}}{R} \left( \frac{2\pi}{\Phi'} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (18.6)$$

Часть используемых здесь обозначений была разъяснена в гл. 13, а вновь введенные символы означают следующее:  $\Delta_\perp$  — «поперечный» лапласиан

$$\Delta_\perp \equiv g^{11} \partial^2 / (\partial x^1)^2 - m^2 g^{22}; \quad (18.7)$$

величина  $1/R$  означает кривизну магнитного поля:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \ln g_{33}}{\partial x^1}; \quad (18.8)$$

$\omega_{*i} = N_0^{-1} \int F_i \hat{\omega}_{*i} dv$  — градиентная (дрейфовая) частота ионной компоненты плазмы.

**4. Интегральная форма.** Умножая обе части равенства (18.6) на  $\zeta^*$  и интегрируя результат по объему силовой трубки  $d\tau = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3$ , приходим к соотношению, полученному автором и О. А. Похотеловым:

$$A\omega^2 - B + C + D = 0, \quad (18.9)$$

где

$$A = \int \frac{d\tau}{c_A^2} \left( 1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega} \right) \left( g^{11} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x^1} \right|^2 + m^2 g^{22} |\zeta|^2 \right); \quad (18.10)$$

$$B = \int \frac{d\tau}{g_{33}} \left( g^{11} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^1 \partial x^3} \right|^2 + m^2 g^{22} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x^3} \right|^2 \right); \quad (18.11)$$

$$C = 8\pi m^2 \int d\tau (2\pi/\Phi')^2 \sqrt{g_{11}} \zeta^* \tilde{p}/R; \quad (18.12)$$

$$D = \int \frac{d\tau}{c_A^2} \frac{2\pi c m}{\Phi'} (\omega - \omega_{*i}) \left( g^{11} \frac{\partial \zeta^*}{\partial x^1} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + m^2 g^{22} \zeta^* \psi \right). \quad (18.13)$$

В пренебрежении членами с  $C$  и  $D$  уравнение (18.9) описывает альфвеновские волны с вещественной частотой, определяемой соотношением

$$A\omega^2 - B = 0. \quad (18.14)$$

Члены  $C$  и  $D$  учитывают диссипативные эффекты, обусловленные резонансным взаимодействием частиц с этими волнами (а при наличии высокочастотных шумов — столкновительным взаимодействием, см. ниже). При наличии в соответствующей силовой трубке холодной плазмы достаточно большой плотности  $\psi = 0$ , так что  $D = 0$ . В этом случае диссипация обусловлена сжимаемостью плазмы (слагаемым  $C$ , содержащим  $\tilde{p}$ ). Используя методы, изложенные в гл. 13 — 16, можно найти связь  $\tilde{p}$  с  $\zeta$ , после чего с помощью (18.9) можно найти оценку инкремента нарастания возмущений. При  $\psi \neq 0$  интегральная форма (18.9) должна быть дополнена также уравнением квазинейтральности, позволяющим найти связь между  $\psi$  и  $\zeta$ .

### § 18.3. Некоторые результаты теории возбуждения низкочастотных альфвеновских колебаний в магнитосферной плазме

1. Возбуждение альфвеновских волн при магнитодрейфовом резонансе с быстрыми частицами. Аналогично § 15.4 в случае магнитосферной геометрии, исходя из (18.9) и следуя работе автора и О. А. Похотелова, можно получить, что инкремент нарастания альфвеновских волн из-за магнитодрейфового резонанса с ними быстрых частиц имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{2\pi^2}{A} m^2 M \int d\Phi \left( \frac{2\pi}{\Phi'} \right)^2 \int d\mu d\varepsilon \left( 1 - \frac{\hat{\omega}_*}{\omega} \right) \times \\ & \times \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \delta(\omega - \bar{\omega}_D) v_b \left| \oint \frac{dl}{v_{\parallel}} \frac{(v_{\parallel}^2 + \mu B_0)}{R} \sqrt{g_{11}} \zeta \right|^2; \quad v_b = 1/\tau. \end{aligned} \quad (18.15)$$

Поскольку  $\partial F/\partial \varepsilon < 0$  (предполагается отсутствие направленных вдоль поля потоков заряженных частиц), то нарастание колебаний возможно только при  $\hat{\omega}_*/\omega > 1$ , т. е. при частотах, меньших частоты ларморовского дрейфа соответствующего сорта частиц.

Для нарастания колебаний необходимо также, чтобы средний магнитный дрейф частиц был отличен от нуля и направлен в ту же сторону, что и ларморовский дрейф,  $\bar{\omega}_D/\hat{\omega}_* > 0$ . Это означает, что градиент плотности быстрых частиц (при  $\nabla T = 0$ ) должен быть направлен в ту же сторону, что и средний радиус кривизны, как это имеет место в обычной адиабатической ловушке, заполненной плазмой со спадающей плотностью.

Заметим, что  $\gamma \neq 0$ , если только

$$\oint \frac{dl}{v_{\parallel}} \frac{v_{\parallel}^2 + \mu B_0}{R} \sqrt{g_{11}} \zeta \neq 0. \quad (18.16)$$

Этот интеграл обращается в нуль в простейшем случае поля постоянной кривизны, например для поля с круговыми силовыми линиями (так как в альфвеновских волнах

$\oint \xi dl = 0$ ), но отличен от нуля для продольно-неоднородного магнитного поля, каковым, в частности, является геомагнитное поле. По порядку

$$\gamma / \text{Re} \omega \simeq \beta L^2 / Ra, \quad (18.17)$$

где  $L$  — длина силовой трубки.

**2. Влияние свистов и ионно-циклотронных колебаний на возбуждение альфвеновских волн.** Этот вопрос был рассмотрен автором и О. А. Похотеловым, установившими, что наличие высокочастотных шумов может способствовать нарастанию альфвеновских волн (это связано с «эффективными столкновениями»).

**3. Непотенциальная неустойчивость на запертых электронах в областях магнитосферы с малой плотностью холодной плазмы.** При малой плотности холодной плазмы важным может оказаться учет в альфвеновских волнах возмущения продольного электрического поля (ср. с п. 2 § 16.7). При этом выявляется еще одна разновидность непотенциальных неустойчивостей магнитосферы. Она изучалась автором и О. А. Похотеловым.

#### § 18.4. Циклотронная раскачка быстрых магнитно-звуковых волн

Аналогично § 17.2 в случае поля магнитосферной геометрии может иметь место циклотронная раскачка быстрых магнитно-звуковых волн группой быстрых ионов с немонотонным распределением частиц по скоростям. Согласно вычислениям Т. Д. Каладзе, автора, А. С. Потапова и О. А. Похотелова, инкремент такой раскачки порядка

$$\frac{\gamma}{\omega} \simeq \frac{N_1}{N_0} \left( \frac{n \omega_{Bs}}{\omega_b} \right)^{1/3} \frac{c_A^2}{v_1^2}, \quad (18.18)$$

где  $v_1$  — скорость быстрых ионов;  $N_1$  — их плотность;  $\omega_b = 2 \pi \nu_b$  — «баунс»-частота.



## Библиографический обзор к гл. 18

1. Михайловский А. Б., Похотелов О. А. Новый механизм генерации геомагнитных пульсаций быстрыми ионами. — «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 786.
2. Михайловский А. Б., Похотелов О. А. Влияние свистов и ионно-циклотронных колебаний на раскачку альфвеновских волн в магнитосферной плазме. — «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 1004.
3. Михайловский А. Б., Похотелов О. А. Непотенциальная неустойчивость на запертых электронах в магнитосфере. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 928.  
В работах [1—3] исследовались альфвеновские неустойчивости (см. § 18.2, 18.3).
4. Роль продольной неоднородности магнитного поля в теории циклотронной неустойчивости плазмосферы. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 672. Авт.: Каладзе Т. Д., Михайловский А. Б., Потапов А. С., Похотелов О. А.  
Здесь исследовалась циклотронная раскачка быстрых магнитно-звуковых волн (см. § 18.4).
5. Kozhevnikov A. A., Mikhailovsky A. B., Pokhotelov O. A. The role of protons of the radiation belts in the generation of Pc 3—5. — «Planet. and Space Sci.», 1976, v. 24, p. 465.
6. Southwood D. J. The behaviour of ULF waves and particles in the magnetosphere. — «Planet. and Space Sci.», 1973, v. 21, p. 53.  
В работах [5, 6] обсуждаются вопросы, касающиеся возбуждения альфвеновских волн.

- Адиабатические ловушки 6, 170, 281  
 Адиабатический инвариант 71, 73  
 Аксиально-симметричные ловушки 13  
 $\alpha$ -частицы 252, 272, 275, 278, 279, 280  
 — запертые 258, 272, 278, 280  
 — пролетные 255, 272, 279  
 Альфеновские волны 242, 252, 262, 279, 280  
 — — квазинечетные 273  
 — неустойчивости 221, 242, 251, 252, 255, 271, 281  
 — —, вызываемые быстрыми ионами 238  
 — — кинетические 229  
 — — коротковолновые 248
- Баллонная неустойчивость 10, 17, 20  
 Баллонные члены 111  
 — эффекты 88, 101  
 Бесстолкновительная плазма 46  
 Быстрые ионы 188
- Ветви колебаний 178  
 Винтовая неустойчивость 4, 142, 145  
 — — внутренняя 147  
 Винтовой шнур 111, 118  
 Влияние давления плазмы 118  
 Возмущения коротковолновые 188  
 — — альфеновского типа 273  
 — локальные 78  
 — низкочастотные 165, 173  
 Возмущенное давление 52  
 Выпрямление силовых линий 95, 112  
 Высокоэнергичные ионы 190
- Гидромагнитное описание 41  
 Глубина магнитной ямы 18  
 Гофрирование поля 14  
 Гравитационно-диссипативная неустойчивость 126, 139  
 Гравитационный дрейф 6
- Движение частиц 67  
 Дестабилизация 170  
 Диссипативная неустойчивость 185, 186, 188  
 — — на запертых ионах 185  
 — — — — электронах 186  
 Достаточный критерий устойчивости 90  
 Дрейфово-зеркальная неустойчивость 239
- Желобковая неустойчивость 4, 6, 78, 143  
 Желобковые возмущения 175
- Замкнутые ловушки 26  
 Запертые  $\alpha$ -частицы 258, 278  
 — ионы 185  
 — частицы 180, 190, 210  
 — электроны 186, 188, 262, 266, 271, 272, 273, 286  
 Запирание частиц 194
- Идеально проводящая плазма 142  
 Инжекция нейтральных атомов 242, 271  
 Интегральная форма 284  
 Интегральное соотношение 167  
 Интегрирование по траекториям 50
- Канонические переменные 75  
 — уравнения 74  
 Квадратичная форма 197  
 Квазилинейная релаксация 251, 280  
 Квазинечетные моды 190  
 — альфеновские волны 273  
 Кинетическая теория 50  
 Конвективная неустойчивость 4  
 Конвекция 7  
 Конечная проводимость 126, 158  
 Координаты криволинейные 21, 35  
 — полярные 94  
 Коротковолновая неустойчивость 187  
 — — на запертых электронах 188  
 Коротковолновые возмущения 232, 237, 273  
 Косые «дрейфовые» волны 175, 176  
 Критерий Мерсье 78, 89, 225  
 — Сайдема 26, 225  
 — устойчивости 111, 114  
 Крупномасштабные неустойчивости 142
- Ловушки адиабатические 6, 170, 281  
 — замкнутые 26  
 — мультипольные 18, 182  
 — тороидальные 78, 184
- Магнитная ось 94  
 — — пространственная 110  
 — — токамака 94  
 — — поверхность 30, 35  
 — яма 12, 18, 91, 98  
 Магнитно-дрейфовый резонанс 260, 285  
 Магнитно-звуковые волны 276, 286  
 — неустойчивости 239  
 Магнитные пробки 14  
 Магнитный дрейф 7  
 — момент 69  
 — поток 25  
 — — поперечный 32  
 — — продольный 32, 36  
 Магнитосфера Земли 4  
 Магнитосферная плазма 281, 285  
 Метрические коэффициенты 91, 93,  
 Метрический тензор 22, 111  
 Микронеустойчивости 5, 164  
 — непотенциальные 214  
 — потенциальные 165  
 — электромагнитные 214  
 — электростатические 165  
 Минимум  $B$  14  
 Мультипольные ловушки 18, 182
- Негидромагнитные неустойчивости 5  
 Нелинейные эффекты 251  
 Немаксвелловское распределение 275  
 Немонотонное распределение 279  
 Непотенциальные микронеустойчивости 214  
 Неравенство Шварца 64, 208  
 Неустойчивости альфеновские 221, 242, 251, 252, 255, 271, 281  
 — —, вызываемые быстрыми ионами 238  
 — — кинетические 229  
 — — коротковолновые 248  
 — — градиентные 40  
 — — быстрые 40

- — медленные 40
- коротковолновые диссипативные 188
- крупномасштабные 142
- магнитосферной плазмы 281
- магнитно-звуковые 239
- негидромагнитные 5
- низкочастотные 177
- примесные 191
- термоядерные 252, 272, 275
- — градиентные 252, 272
- электростатические 164
- Неустойчивость баллонная 10, 17, 20
- винтовая 4, 142, 145
- — внутренняя 147
- гравитационно-диссипативная 126, 139
- диссипативная 185
- — на запертых ионах 185
- — — — электронах 186
- дрейфово-зеркальная 239
- желобковая 4, 6, 78, 143
- конвективная, 4
- на запертых частицах 180
- — — — гидродинамического типа 180
- — — — электронах коротковолновая 188
- перестановочная 4
- тиринг-моды 5, 159
- циклотронная 278, 279
- Общие критерии устойчивости 173
- Одножидкостное приближение 40, 44
- Орбиты дрейфового движения 232, 279
- Перестановочная неустойчивость 4
- Перетяжки 7
- Плазма большого давления 78, 110
- термодинамически квазиравновесная 170
- Плоский слой плазмы 141
- Полярные координаты 94
- Поперечная инерция 7
- Потенциальная энергия 61, 62
- Потенциальные микронеустойчивости 164
- Приближение гидромагнитное 40
- длиной плазмы 54, 169
- конечного  $\omega t$  169
- короткой ловушки 51, 54, 56, 168
- одножидкостное 40
- слабоэллиптических сечений 94
- Чу — Голдбергера — Лоу 51, 54
- Приведенная длина 38
- Примесные неустойчивости 191
- Пролетные  $\alpha$ -частицы 225
- частицы 210
- Рациональная магнитная поверхность 30
- Резкая граница 143
- Резонансные частицы 167, 179, 196
- Самостабилизация 104
- Свисты 286
- Стабилизация волн альфвеновских 194
- — косых дрейфовых 194
- в условиях токамака 277
- неустойчивостей альфвеновских 250
- — коротковолновых 209
- неустойчивости диссипативной 212
- — на запертых частицах 205
- Стелларатор 122
- Столкновительное взаимодействие 262
- Тензор давления 47, 48
- Теоремы сравнения 64
- Тепловой разброс 247, 248
- — запертых  $\alpha$ -частиц 278
- — инжектируемых ионов 247
- Термоядерные неустойчивости 252
- — градиентные 252, 272
- Тиринг-моды неустойчивость 5, 159
- Токамак 5, 93, 122, 184, 191, 215, 221, 242, 271, 275, 277
- осесимметричный 93
- — круглого сечения 93, 102, 136
- — некруглого сечения 251
- — эллиптического сечения 122, 279
- Тороидальные ловушки 78, 184
- Треугольность 111, 112, 123
- Углубление магнитной ямы 111
- Уравнение малых колебаний 215, 263, 282
- Условие замыкания токов 24, 36, 77
- Условия равновесия 24, 36, 77
- Усредненный магнитный дрейф 10, 30, 71
- Устойчивость токамака 93
- Форма интегральная 284
- квадратичная 197
- Функция распределения 52, 56, 74
- — возмущенная 52, 165, 199, 233, 254
- Циклотронная неустойчивость 278, 279
- раскачка 276, 286
- Цилиндрический шнур 149
- Цилиндр с однородным током 152
- Частицы быстрые 188
- резонансные 167, 179, 196
- Шнур 26, 31, 88
- Шнур цилиндрический 149
- Электростатические неустойчивости 164
- Эллиптичность 111, 112, 123
- Энергетический метод 39, 49
- Энергия потенциальная 61, 62
- Эффективные столкновения 286
- Эффекты конечных орбит 233

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>Часть I. ПРОСТЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ЖЕЛОБ- КОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В МАГ- НИТНЫХ ЛОВУШКАХ . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>Глава 1. Желобковая неустойчивость плазмы в адиабатиче- ских и мультипольных ловушках . . . . .</b>	<b>6</b>
§ 1.1. Введение . . . . .	6
§ 1.2. Критерий устойчивости плазмы в поле сложной геометрии. Усредненный магнитный дрейф . . . . .	10
§ 1.3. Желобковая неустойчивость плазмы в аксиально- симметричной адиабатической ловушке . . . . .	13
§ 1.4. Устойчивость плазмы в адиабатической ловушке с $\min B$ . . . . .	14
§ 1.5. Стабилизация торцами. Баллонная неустойчивость	17
§ 1.6. Равновесие и устойчивость плазмы в мультиполь- ных ловушках . . . . .	18
<i>Приложение 1.</i> Криволинейные координаты . . . . .	21
<i>Приложение 2.</i> Условия равновесия плазмы в магнитных ловушках без шира . . . . .	24
<b>Глава 2. Желобковая неустойчивость плазмы в замкнутых магнитных ловушках с широм . . . . .</b>	<b>26</b>
§ 2.1. Введение . . . . .	26
§ 2.2. Шир в случае поля цилиндрической симметрии. Критерий Сайдема для плазменного цилиндра	26
§ 2.3. Усредненный магнитный дрейф и шир в случае плазмы, удерживаемой в тороидальной ловушке . . . . .	30
<i>Приложение 1.</i> Подавление широм желобковой неустой- чивости плазмы в поле тяжести. Критерий Сайдема для плазмы в поле тяжести	32
<i>Приложение 2.</i> Криволинейные координаты, связан- ные с магнитными поверхностями	35
<i>Приложение 3.</i> Условия равновесия плазмы в замкнутой ловушке с магнитными поверхностями	36

Глава 3. Энергетический метод исследования желобковой неустойчивости . . . . .	39
§ 3.1. Введение . . . . .	39
§ 3.2. Гидромагнитное описание быстрых градиентных возмущений . . . . .	41
§ 3.3. Энергетический метод . . . . .	49
Глава 4. Кинетическая теория желобковой неустойчивости	50
§ 4.1. Введение . . . . .	50
§ 4.2. Возмущенная функция распределения и возмущенное давление . . . . .	52
§ 4.3. Потенциальная энергия в приближении Чу—Голдбергера—Лоу . . . . .	61
§ 4.4. Потенциальная энергия возмущения плазмы, удерживаемой в «короткой» ловушке . . . . .	62
§ 4.5. Теоремы сравнения . . . . .	64
<i>Приложение 1.</i> Движение частиц в криволинейном магнитном поле . . . . .	67
<i>Приложение 2.</i> Функция распределения и макроскопические параметры стационарного состояния плазмы . . . . .	74
Библиографический обзор к части I	77
<b>Часть II. ТЕОРИЯ ЖЕЛОБКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ БОЛЬШОГО ДАВЛЕНИЯ В ТОРОИДАЛЬНЫХ ЛОВУШКАХ С МАГНИТНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ . . . . .</b>	<b>78</b>
Глава 5. Общие результаты теории желобковой неустойчивости плазмы большого давления в тороидальных ловушках с магнитными поверхностями . . . . .	78
§ 5.1. Введение . . . . .	78
§ 5.2. Исходные уравнения и их упрощение для случая мелкомасштабных, почти желобковых возмущений . . . . .	79
§ 5.3. Уравнение для желобковой части возмущенного смещения . . . . .	85
§ 5.4. Критерий устойчивости плазмы относительно возмущений с $m/k_x \rightarrow 0$ . . . . .	88
§ 5.5. Достаточный критерий отсутствия желобковой неустойчивости . . . . .	90
§ 5.6. Связь средней магнитной ямы с метрическими коэффициентами . . . . .	91
Библиографический обзор к гл. 5 . . . . .	92

<b>Глава 6. Устойчивость токамака при большом давлении плазмы</b>	93
§ 6.1. Введение	93
§ 6.2. Равновесие плазмы в осесимметричном токамаке круглого сечения	93
§ 6.3. Уравнение малых колебаний в случае токамака круглого сечения	98
§ 6.4. Критерий отсутствия желобковой неустойчивости в токамаке при $\beta < (a/R)^{4/3}$	104
§ 6.5. Критерий Мерсье для токамака круглого сечения при $\beta > (a/R)^{4/3}$	105
§ 6.6. Возмущения с произвольными $k_x/k_\perp$ в случае пренебрежимо малого шира	107
<b>Библиографический обзор к гл. 6</b>	109
<b>Глава 7. Самостабилизация плазмы большого давления в ловушках с пространственной магнитной осью</b>	110
§ 7.1. Введение	110
§ 7.2. Критерий устойчивости плазмы вблизи магнитной оси	111
§ 7.3. Компенсация стабилизирующих и дестабилизирующих эффектов, обусловленных давлением плазмы	117
§ 7.4. Влияние давления плазмы на форму магнитных поверхностей и критерий устойчивости, учитывающий это влияние	118
§ 7.5. Эффект самостабилизации плазмы большого давления в ловушках с круглым или почти круглым сечением кожуха	121
§ 7.6. Критерий устойчивости плазмы большого давления в тороидальных ловушках с произвольной формой магнитной оси	124
<b>Библиографический обзор к гл. 7</b>	125
<b>Глава 8. Желобковая неустойчивость плазмы большого давления при конечной проводимости</b>	126
§ 8.1. Введение	126
§ 8.2. Линеаризация гидромагнитных уравнений	127
§ 8.3. Уравнение для желобковой части радиального смещения	132
§ 8.4. Общий критерий устойчивости	135
§ 8.5. Критерий устойчивости для осесимметричного токамака круглого сечения	136
§ 8.6. Обсуждение результатов	139
<i>Приложение.</i> Непотенциальная гравитационно-диссипативная неустойчивость плоского слоя плазмы	139
<b>Библиографический обзор к гл. 8</b>	141

<b>Часть III. КРУПНОМАСШТАБНЫЕ ГИДРОМАГНИТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ</b>	<b>142</b>
Глава 9. Крупномасштабные гидромагнитные неустойчивости идеально проводящей плазмы	142
§ 9.1. Введение	142
§ 9.2. Желобковая неустойчивость плазмы с резкой границей в кривом магнитном поле	143
§ 9.3. Винтовая неустойчивость плазменного шнура со свободной границей при $m = 1$	145
§ 9.4. Внутренняя винтовая неустойчивость моды $m = 1$	147
<i>Приложение 1.</i> Уравнение малых колебаний цилиндрического шнура	149
<i>Приложение 2.</i> Собственные колебания цилиндра с однородным током и однородной плотностью, окруженного проводящим кожухом	152
<i>Приложение 3.</i> Мода $m = 1$ в шнуре с неоднородной плотностью и однородным током	155
Библиографический обзор к гл. 9	158
Глава 10. Крупномасштабные гидромагнитные неустойчивости плазмы при конечной проводимости	158
§ 10.1. Введение	158
§ 10.2. Неустойчивость тиринг-моды	159
Библиографический обзор к гл. 10	163
<b>Часть IV. МИКРОНЕУСТОЙЧИВОСТИ</b>	<b>164</b>
Глава 11. Электростатические (потенциальные) микроустойчивости	164
§ 11.1. Введение	164
§ 11.2. Уравнения для низкочастотных возмущений	164
§ 11.3. Устойчивость термодинамически квазиравновесной плазмы в адиабатической ловушке с $\min B$	170
§ 11.4. Некоторые общие критерии устойчивости плазмы по отношению к низкочастотным возмущениям	173
§ 11.5. Желобковые возмущения и косые «дрейфовые» волны	175
§ 11.6. Неустойчивости запертых частиц гидродинамического типа	180
§ 11.7. Диссипативная неустойчивость на запертых ионах	185
§ 11.8. Диссипативная неустойчивость на запертых электронах	186
§ 11.9. Коротковолновая неустойчивость гидродинамического типа на запертых электронах	187

§ 11.10. Коротковолновые диссипативные неустойчивости на запертых электронах. Взаимодействие быстрых ионов с коротковолновыми возмущениями	188
§ 11.11. Квазинечетные моды в тороидальных ловушках и их взаимодействие с запертыми частицами и группами высокоэнергичных ионов . . . . .	190
§ 11.12. Примесные неустойчивости в токамаке . . . . .	191
<b>Библиографический обзор к гл. 11 . . . . .</b>	<b>192</b>
<b>Глава 12. Стабилизация электростатических микро-неустойчивостей при большом давлении плазмы . . . . .</b>	<b>193</b>
§ 12.1. Введение . . . . .	193
§ 12.2. Стабилизация альфвеновских и косых дрейфовых волн, связанная с запираем резонансных электронов, в плазме конечного давления . . . . .	194
§ 12.3. Стабилизация неустойчивости запертых частиц гидродинамического типа в плазме конечного давления . . . . .	205
§ 12.4. Стабилизация коротковолновых неустойчивостей в токамаке при большом давлении плазмы . . . . .	209
<b>Библиографический обзор к гл. 12 . . . . .</b>	<b>213</b>
<b>Глава 13. Непотенциальные (электромагнитные) микро-неустойчивости . . . . .</b>	<b>214</b>
§ 13.1. Введение . . . . .	214
§ 13.2. Уравнение малых колебаний альфвеновского типа в осесимметричном токамаке круглого сечения . . . . .	215
§ 13.3. Альфвеновские неустойчивости плазмы токамака в приближении двухжидкостной недиссипативной гидродинамики . . . . .	221
§ 13.4. Кинетические альфвеновские неустойчивости плазмы токамака . . . . .	229
§ 13.5. Обсуждение результатов § 13.3, 13.4 . . . . .	232
§ 13.6. Коротковолновые возмущения . . . . .	232
§ 13.7. Альфвеновские неустойчивости, вызываемые группой быстрых частиц . . . . .	238
§ 13.8. Магнитно-звуковые неустойчивости, вызываемые группой быстрых частиц . . . . .	239
§ 13.9. Микро-неустойчивости потока плазмы большого давления с неоднородным профилем скорости . . . . .	240
<b>Библиографический обзор к гл. 13 . . . . .</b>	<b>241</b>
<b>Глава 14. Неустойчивости альфвеновских волн в токамаке с инжекцией нейтральных атомов . . . . .</b>	<b>242</b>
§ 14.1. Введение . . . . .	242
§ 14.2. Вывод дисперсионного уравнения . . . . .	243
§ 14.3. Исследование дисперсионного уравнения . . . . .	245
§ 14.4. Обсуждение результатов § 14.2, 14.3 . . . . .	248
§ 14.5. Некоторые другие результаты . . . . .	248
<b>Библиографический обзор к гл. 14 . . . . .</b>	<b>251</b>



<b>Глава 15. Градиентные (дрейфовые) термоядерные неустойчивости . . . . .</b>	<b>252</b>
§ 15.1. Введение . . . . .	252
§ 15.2. Возмущенная функция распределения с учетом градиентных членов . . . . .	254
§ 15.3. Градиентная (дрейфовая) раскачка альфвеновских волн пролетными $\alpha$ -частицами . . . . .	255
§ 15.4. Градиентная (дрейфовая) раскачка альфвеновских волн запертыми $\alpha$ -частицами . . . . .	258
<b>Библиографический обзор к гл. 15 . . . . .</b>	<b>262</b>
<b>Глава 16. Столкновительное взаимодействие альфвеновских волн с запертыми электронами . . . . .</b>	<b>262</b>
§ 16.1. Введение . . . . .	262
§ 16.2. Преобразование уравнения малых колебаний	263
§ 16.3. Решение кинетического уравнения для запертых электронов . . . . .	266
§ 16.4. Общее выражение для столкновительной части инкремента нарастания альфвеновских волн . . . . .	270
§ 16.5. Влияние запертых электронов на альфвеновскую неустойчивость в токамаке с инжекцией нейтралов	271
§ 16.6. Влияние запертых электронов на градиентные (дрейфовые) термоядерные неустойчивости . . . . .	272
§ 16.7. Градиентная (дрейфовая) раскачка альфвеновских волн запертыми электронами . . . . .	272
§ 16.8. Взаимодействие запертых электронов с квазинечетными альфвеновскими волнами . . . . .	273
§ 16.9. Взаимодействие запертых электронов с коротковолновыми возмущениями альфвеновского типа	273
<b>Библиографический обзор к гл. 16 . . . . .</b>	<b>274</b>
<b>Глава 17. Термоядерные неустойчивости плазмы токамака при немаксвелловском распределении <math>\alpha</math>-частиц по скоростям . . . . .</b>	<b>275</b>
§ 17.1. Введение . . . . .	275
§ 17.2. Циклотронная раскачка быстрых магнитно-звуковых волн . . . . .	276
§ 17.3. Возбуждение альфвеновских волн $\alpha$ -частицами с немонотонным распределением по скоростям	279
<b>Библиографический обзор к гл. 17 . . . . .</b>	<b>280</b>
<b>Глава 18. Неустойчивости магнитосферной плазмы . . . . .</b>	<b>281</b>
§ 18.1. Введение . . . . .	281
§ 18.2. Уравнения колебаний альфвеновского типа	282
§ 18.3. Некоторые результаты теории возбуждения низкочастотных альфвеновских колебаний в магнитосферной плазме . . . . .	285
§ 18.4. Циклотронная раскачка быстрых магнитно-звуковых волн . . . . .	286
<b>Библиографический обзор к гл. 18 . . . . .</b>	<b>287</b>
<b>Алфавитно-предметный указатель . . . . .</b>	<b>288</b>

## SUMMARY

Elementary flute instability theory of plasma in magnetic traps:

- open and multipole traps
- sheared magnetic field
- energetic principle
- kinetic theory

Flute instability theory for high-beta plasma in closed systems:

- general results
- high-beta tokamaks
- systems with spatial magnetic axis
- resistive interchange instability

Large-scale MHD instabilities:

- ideal instabilities
- resistive instabilities

Microinstabilities:

- electrostatic and electromagnetic instabilities
- trapped-particle high-beta instabilities
- neutral injection tokamaks
- thermonuclear instabilities
- magnetospheric plasma

**ИБ № 481**

**Анатолий Борисович Михайловский**

### **НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ**

Редактор *В. Н. Безрукова* Художественный редактор *А. Т. Кирьянов*  
Переплет художника *Е. В. Шворака* Технический редактор *Н. А. Власова*  
Корректор *Н. М. Загудаева*

Сдано в набор 18/III 1977 г. Подписано к печати 30/III 1978 г. Т-06049  
Формат 84×108<sup>1/32</sup>. Бумага тип. № 2 Усл. печ. л. 15,54. Уч.-изд. л. 14,49.  
Тираж 2360 экз. Зак. изд. 75326. Зак. тип. 1917. Цена 2 р. 50 к.

Атомиздат, 103031, Москва, К-31, ул. Жданова, 5

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли.  
г. Москва, И-41, Б. Переяславская, 4б