

С. Г. МИХЛИН

ПРИЛОЖЕНИЯ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
К НЕКОТОРЫМ ПРОБЛЕМАМ МЕХАНИКИ,
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНИКИ

ОГИЗ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА • 1947 • ЛЕНИНГРАД

Очередной выпуск «Физико-математической библиотеки инженера» (первый выпуск — Карман и Био «Математические методы в инженерном деле») предназначается для инженеров — сотрудников научно-исследовательских институтов, конструкторов, аспирантов технических учебных заведений, физиков и механиков. Книга знакомит с основами важного раздела современной математики и с его приложениями.

ИНВ № 33
НЕ БОЛЕЕ 1Й КНИГИ В
ОДНИ РУКИ И 2Х В ДВЕ

**БИБЛИОТЕКА
КОЛОХЗА
ОСКОРКА**

Редактор *Д. А. Райков*. Техн. редактор *С. Н. Ахламов*. Подписано к печати 11/1
1947 г. 19 печ. л. 16,51 авт. л. 17,11 уч.-изд. л. 37.000 тип. зн. в печ. л. А 05391.
Тираж 8.000 экз. Цена книги 8 р. 50 к. Переплет 1 р. 50 к. Заказ № 1311.

3-я типография «Красный пролетарий» треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при
Совете Министров РСФСР. Москва, Краснопролетарская, 16.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
-----------------------	---

ГЛАВА I

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Уравнения типа Фредгольма	9
1. Классификация интегральных уравнений	9
2. Метод последовательных приближений	14
3. Уравнения типа Вольтерра	21
4. Интегральные уравнения с вырожденным ядром	23
5. Общий случай уравнения Фредгольма	26
6. Системы интегральных уравнений	37
7. Применение приближённых формул интегрирования	38
8. Резольвента Фредгольма	42
9. Теоремы Фредгольма	45
10. Уравнения со слабой особенностью	49
§ 2. Симметричные уравнения (теория Гильберта-Шмидта)	51
11. Симметричные ядра. Скалярное произведение	51
12. Ортонормированные системы и ряды Фурье	53
13. Основные теоремы о симметричных уравнениях	59
14. Определение первого характеристического числа по способу Ритца	62
15. Определение первого характеристического числа через следы ядра	67
16. Способ Келлога	73
17. Определение следующих характеристических чисел	78
18. Ядра, сводимые к симметричным	82
19. Решение симметричных интегральных уравнений	82
§ 3. Сингулярные интегральные уравнения	84
20. Главное значение интеграла	84
21. Ядра Коши и Гильберта	89

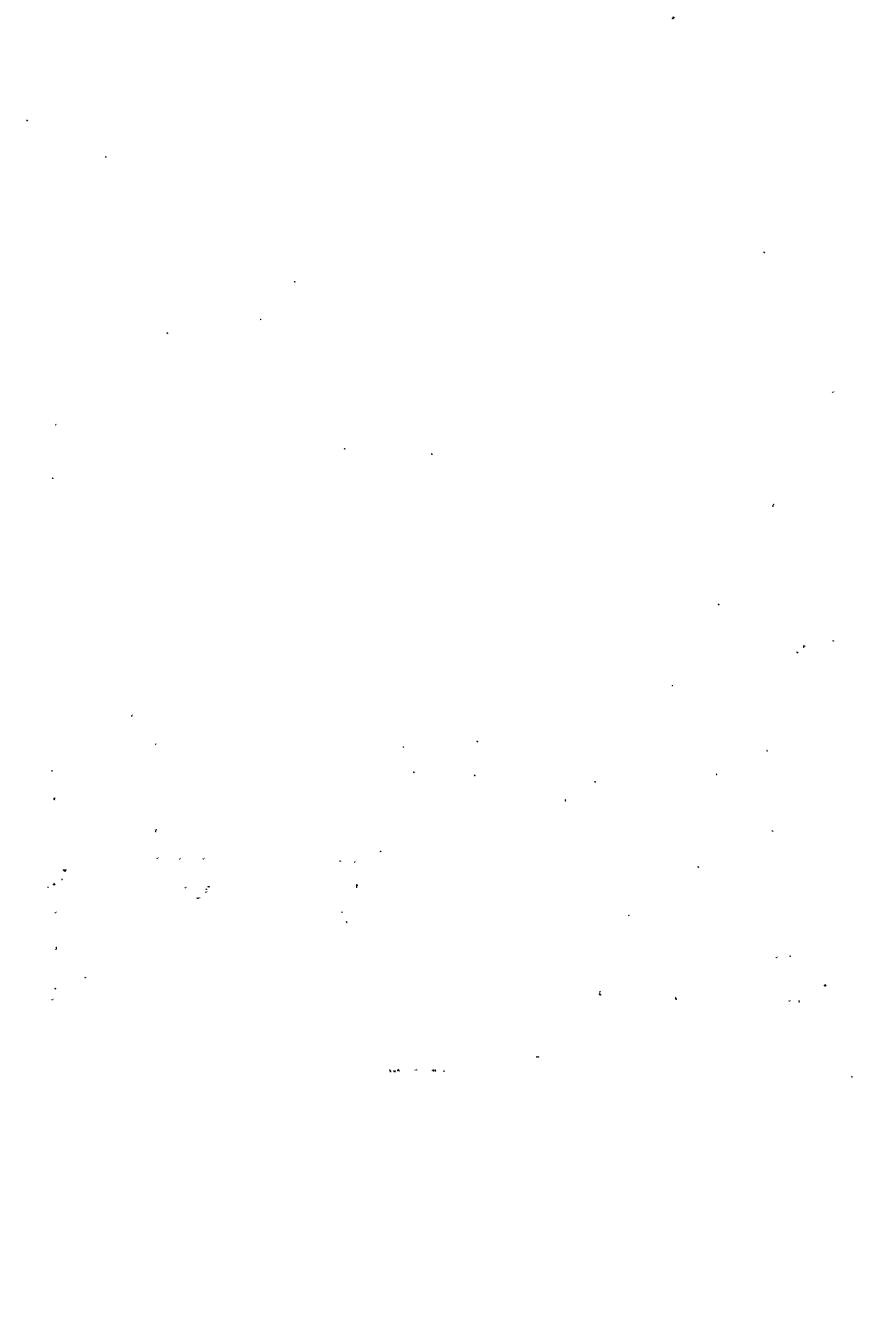
22. Формулы композиции сингулярных интегралов	92
23. Сингулярные интегральные уравнения с ядром Гильберта	95
24. Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши	98
25. Случай незамкнутого связного контура	99
25. Случай незамкнутого несвязного контура	104
27. Системы сингулярных интегральных уравнений	106

ГЛАВА II

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Задача Дирихле и её приложения	107
28. Задача Дирихле для односвязной области	107
29. Пример: конформное отображение внутренности эллипса на круг	111
30. Задача Дирихле для многосвязных областей	115
31. Видоизменённая задача Дирихле и задача Неймана	120
32. Кручение сплошных и полых стержней	122
33. Кручение стержня квадратного сечения	124
34. Задача обтекания	127
35. Обтекание двух эллиптических цилиндров	129
§ 2. Бигармоническое уравнение (применение функции Грина)	136
36. Проблемы, приводящие к бигармоническому уравнению	136
37. Комплексное представление бигармонической функции	140
38. Функция Грина и ядро Шварца	145
39. Сведение первой и третьей задачи к интегральному уравнению	152
40. Исследование интегрального уравнения	157
41. Случай односвязной области	160
42. Софокусное эллиптическое кольцо	163
43. Внешность двух овалов	168
44. О сходимости ряда последовательных приближений	176
§ 3. Обобщённый алгоритм Шварца	184
45. Задача Дирихле для многосвязной области на плоскости	184
46. Случай трёхмерной области	190
47. Обобщённый алгоритм Шварца	192
48. Обтекание крыла самолёта воздушным потоком вблизи поверхности земли	197
49. Применение к задачам теории упругости	199
50. Эксцентрическое круговое кольцо, равномерно сжатое по внешней окружности	206

§ 4. Некоторые применения интегралов, аналогичных потенциалам	209
51. Применение интегралов типа Коши в плоской теории упругости (уравнения Н. И. Мусхелишвили)	209
52. Упругая плоскость с бесконечным рядом вырезов	216
53. Уравнения Лауричелла	222
54. Задача Дирихле для колебательного уравнения	228
55. Тепловые потенциалы и их применение	232
56. Сходимость последовательных приближений	238
§ 5. Применение интегральных уравнений к теории колебаний	241
57. Задача о собственных колебаниях струны	241
58. Колебание струны, плотность которой меняется по линейному закону	245
59. Функция влияния (функция Грина)	248
60. Крутильные колебания стержней. Учёт сосредоточенных масс	254
61. Устойчивость сжатого стержня. (Продольный изгиб стержня)	256
§ 6. Некоторые применения теории сингулярных интегральных уравнений	259
62. Задача Гильберта	259
63. Задача Гильберта для полуплоскости	262
64. Задача о соприкосании двух упругих полуплоскостей	266
65. Давление жесткого штампа на упругую полуплоскость	273
66. Случай нескольких штампов	276
67. Смешанная задача теории упругости	278
68. Случай области, рационально отображаемой на круг	283
69. Задача об обтекании дуги заданной формы	288
Литература	299
Предметный указатель	303



ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние два-три десятилетия появилось много работ, в которых задачи, важные как теоретически, так и для приложений, решаются методом интегральных уравнений.

Достаточно, например, отметить работы по статической теории упругости и по задаче обтекания в гидродинамике. Известно также, какую важную роль играет метод интегральных уравнений в теории колебаний, в задачах об устойчивости сжатых стержней и во многих других задачах.

Мне кажется, что назрела необходимость в систематизации обширного материала по приложениям интегральных уравнений, который накопился в журнальной литературе в указанный период. Попыткой такой систематизации и является настоящая книга.

Книга состоит из двух глав, не одинаковых по величине. Первая глава содержит основные факты теории интегральных уравнений, а также методы приближённого их решения. Особое место занимает в этой главе теория сингулярных интегральных уравнений, содержащих главное значение интеграла. Достаточно хорошо разработанная, имеющая многочисленные и весьма плодотворные приложения, она, тем не менее, до сих пор не нашла своего места в курсах интегральных уравнений. Я счёл необходимым дать здесь краткое изложение основ этой теории.

Значительная часть первой главы содержит вещи, излагаемые обычно в курсах интегральных уравнений. Как правило, в таких случаях я излагаю только результат, отсылая читателя за доказательством к соответствующим курсам.

Везде, где это представлялось возможным, результаты теории иллюстрируются численными примерами.

Вторая глава, значительно превосходящая первую по объёму, посвящена приложениям. Перечень задач, решаемых во второй главе, ясен из оглавления. Здесь отмечу, что я остановил своё внимание преимущественно на задачах теории упругости и гидродинамики. В этом сказались не только личные вкусы автора, но и то, что в этих двух областях приложения интегральных уравнений наиболее многочисленны. Далее, я ограничиваюсь преимущественно линейными и плоскими задачами. Метод интегральных уравнений часто упрекают, и не без известных оснований, в недостаточной эффективности. Этот упрёк особенно справедлив по отношению к трёхмерным задачам. Желая ограничиться теми случаями, когда возможно получить эффективное решение, я был вынужден отказаться от рассмотрения пространственных задач.

За всякие указания недочётов буду весьма признателен.

Ленинград
Июль 1944 г.

С. Михлин

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. УРАВНЕНИЯ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА

1. Классификация интегральных уравнений. Многочисленные задачи механики, математической физики и техники приводят к рассмотрению уравнений вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная функция. Эти уравнения называются *интегральными*, так как неизвестная функция содержится в них под знаком интеграла.

Мы не будем здесь приводить этих задач, так как большое их число будет разобрано во второй главе, и приступим непосредственно к изучению самих уравнений.

Входящие в интегральное уравнение (1) известные элементы носят следующие названия: функция $f(x)$ называется правой частью, функция $K(x, s)$ — ядром, и численный множитель λ — параметром уравнения. Вводить параметр не обязательно; его можно всегда сделать равным единице, если обозначить произведение $\lambda K(x, s)$ через $K_1(x, s)$ и рассматривать $K_1(x, s)$ как новое ядро. Мы увидим, однако, что введение этого параметра оказывается очень полезным при изучении интегральных уравнений.

Мы будем считать, что пределы a и b — конечные постоянные.

Заметим, что параметр λ и функции $\varphi(x)$, $K(x, s)$ и $f(x)$ могут принимать как действительные, так и комплексные значения.

Характер интегрального уравнения в существенном определяется свойствами его ядра. В приложениях часто приходится иметь дело с непрерывным ядром, но встречаются и разрывные ядра. Мы будем рассматривать следующие три типа интегральных уравнений:

1. Если ядро $K(x, s)$ непрерывно при $a \leq x \leq b$ и $a \leq s \leq b$ или, по крайней мере, если разрывы ядра таковы, что двойной интеграл

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)| dx ds,$$

имеет конечное значение, то мы будем называть уравнение (1) *уравнением типа Фредгольма*.

2. Если ядро имеет вид

$$K(x, s) = \frac{H(x, s)}{|x - s|^\alpha},$$

где $H(x, s)$ ограничена, а α — постоянная, удовлетворяющая неравенствам

$$0 < \alpha < 1,$$

то мы будем называть уравнение (1) *уравнением со слабой особенностью*.

3. К третьему типу интегральных уравнений мы придём, если будем рассматривать ядра вида

$$K(x, s) = \frac{A(x, s)}{x - s},$$

где числитель $A(x, s)$ — дифференцируемая функция от x и s ¹⁾. В этом случае интеграл

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = \int_a^b \frac{A(x, s)}{x - s} \varphi(s) ds,$$

входящий в уравнение (1), расходится. Однако, при весьма широких предположениях относительно функции $\varphi(x)$

¹⁾ Это допущение можно заменить менее сильным.

существует главное значение этого интеграла, т. е. предел ¹⁾):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x-\epsilon} K(x, s) \varphi(s) ds + \int_{x+\epsilon}^b K(x, s) \varphi(s) ds \right).$$

Если теперь в уравнении (1) понимать расходящийся интеграл в смысле его главного значения, то мы приходим к третьему типу интегральных уравнений, которые мы будем называть *сингулярными*.

Приведём несколько примеров.

а) Уравнение

$$\varphi(x) - \int_0^1 (x^2 + s^2) \varphi(s) ds = x^2$$

— типа Фредгольма, так как его ядро $K(x, s) = x^2 + s^2$ непрерывно при $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$. В этом уравнении $\lambda = 1$, $f(x) = x^2$.

б) Уравнение

$$\varphi(x) - \int_0^l \ln|x-s| \varphi(s) ds = f(x)$$

— также фредгольмовское, так как, хотя его ядро терпит разрыв при $x=s$, но двойной интеграл

$$\int_0^l \int_0^l \ln^2|x-s| dx ds$$

конечен.

в) Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x \frac{\varphi(s)}{(x-s)^\alpha} ds = f(x); \quad 0 < \alpha < 1. \quad (*)$$

Пусть $f(x)$ определена и, скажем, непрерывна в промежутке $0 \leq x \leq a$. Тогда наше уравнение имеет смысл рассматривать в этом промежутке. Оно подходит под

¹⁾ Подробнее о понятии главного значения интеграла см. § 3, пп. 20 и 21.

общий вид (Г), хотя это и не так очевидно, как в первых двух примерах. Чтобы убедиться в том, что уравнение (*), действительно, подходит под тип (1), положим

$$K(x, s) = \begin{cases} (x-s)^{-\alpha}, & s \leq x, \\ 0, & s > x. \end{cases}$$

Теперь уравнение (*) записывается в виде (1):

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^a K(x, s) \varphi(s) ds = f(x).$$

Уравнение (*) — со слабой особенностью; оно будет одновременно и фредгольмовским, если $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, так как тогда двойной интеграл

$$\int_0^a \int_0^a K^2(x, s) dx ds = \int_0^a dx \int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{2\alpha}} = \frac{\pi^{2-2\alpha}}{(1-2\alpha)^2 - 2\alpha}$$

конечен.

г) Уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} \varphi(s) ds = f(x),$$

в котором интеграл понимается в смысле его главного значения, — сингулярное, так как его ядро можно представить в виде

$$\frac{1}{x-s} (x-s) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2},$$

а функция

$$(x-s) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2}$$

непрерывна и дифференцируема в промежутке $0 < x < 2\pi$.

По поводу нашей классификации необходимо заметить следующее. Прежде всего, она — неполная; можно указать многие типы интегральных уравнений, не подходящие под перечисленные три. Мы, однако, ограничиваемся только этими тремя, как особо важными для приложений. Далее, различие между уравнениями типа Фред-

гольма и уравнениями со слабой особенностью не очень существенно. За некоторыми исключениями, важнейшие результаты теории совпадают для уравнений обоих типов.

В ряде случаев приходится рассматривать интегральные уравнения, в которых неизвестная функция определена не на отрезке оси x , а на некоторой кривой, плоской или пространственной, или на области, двух- или трёхмерной. Первый случай не представляет ничего нового: достаточно в качестве независимой переменной ввести длину дуги кривой или иной параметр, определяющий положение точки на кривой, и мы приходим к рассмотренному уже типу уравнений.

Если неизвестная функция определена в n -мерной области Ω (в случаях, интересных для приложений, n обычно равняется двум или трём, вообще же n может быть любым), то вместо (1) мы будем иметь дело с уравнением

$$\varphi(M) - \lambda \int_{\Omega} K(M, M_1) \varphi(M_1) dM_1 = f(M), \quad (2)$$

где M и M_1 — точки области Ω , а dM_1 — элемент области. Попреежнему будем называть λ параметром, функцию $K(M, M_1)$ — ядром и $f(M)$ — правой частью интегрального уравнения (2). Классифицировать уравнения типа (2) мы будем следующим образом.

Если интеграл

$$\iint_{\Omega} |K^2(M, M_1)| dM dM_1$$

имеет конечное значение, то мы отнесём уравнение (2) к типу Фредгольма. В частности, уравнение (2) будет фредгольмовским, если ядро непрерывно или хотя бы ограничено.

Обозначим через r расстояние между точками M и M_1 . Мы отнесём уравнение (2) к типу уравнений со слабой особенностью, если его ядро имеет вид

$$K(M, M_1) = \frac{H(M, M_1)}{r^{\alpha}},$$

где $H(M, M_1)$ — ограниченная функция и α лежит в пределах $0 < \alpha < n$.

Можно дать определение и сингулярного интегрального уравнения с несколькими независимыми переменными. Мы этого делать не будем, потому что такие уравнения менее интересны для приложений.

Интегральное уравнение называется *однородным*, если его правая часть тождественно равна нулю. Однородное уравнение, следовательно, имеет вид

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = 0, \quad (3)$$

или, соответственно,

$$\varphi(M) - \lambda \int_{\Omega} K(M, M_1) \varphi(M_1) dM_1 = 0. \quad (4)$$

Если правая часть не равна тождественно нулю, то уравнение называется *неоднородным*.

Теория, а также практические методы решения уравнений Фредгольма и уравнений со слабой особенностью полностью совпадают для случаев как одной, так и нескольких независимых переменных. Мы будем поэтому рассматривать в ближайших параграфах только уравнения с одной независимой переменной. Сформулировать полученные результаты для случая нескольких независимых переменных не составит никакого труда.

Уравнения вида (1) и (2) называются *интегральными уравнениями второго рода*, в отличие от *уравнений первого рода*, которые имеют вид

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad (5)$$

или, в случае нескольких переменных,

$$\int_{\Omega} K(M, M_1) \varphi(M_1) dM_1 = f(M). \quad (6)$$

Большое значение для приложений имеют сингулярные уравнения первого рода; уравнения Фредгольма первого рода в этом плане значительно менее интересны, и мы ими не будем заниматься.

2. Метод последовательных приближений. Приступим к решению интегральных уравнений. В пунктах 2—9 этого

параграфа мы будем рассматривать только уравнения типа Фредгольма.

Будем искать решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (1)$$

методом последовательных приближений. С этой целью перепишем уравнение (1) в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds. \quad (2)$$

В качестве нулевого приближения возьмём правую часть уравнения:

$$\varphi_0(x) = f(x).$$

Нулевое приближение подставим в правую часть уравнения (2) и полученный результат примем за первое приближение:

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_0(s) ds.$$

Первое приближение опять подставим в правую часть уравнения (2), и т. д. Вообще, если получено n -е приближение $\varphi_n(x)$, то за $(n+1)$ -е приближение мы примем результат подстановки $\varphi_n(x)$ в правую часть уравнения (2). Таким образом, последовательные приближения определяются рекуррентным соотношением

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_n(s) ds. \quad (3)$$

Если последовательные приближения равномерно стремятся к некоторому пределу, то этот предел и есть решение уравнения (2); если этот предел не существует, то применять метод последовательных приближений, очевидно, не имеет смысла.

Допустим, что ядро ограничено, т. е. существует такая постоянная A , что

$$|K(x, s)| < A$$

при всех значениях x и s . Нетрудно доказать тогда, что последовательные приближения равномерно сходятся при всех комплексных значениях λ , лежащих внутри круга

$$|\lambda| < \frac{1}{A(b-a)} \quad (4)$$

комплексной плоскости λ . Справедливо, однако, более сильное предложение:

Теорема. Если однократный интеграл

$$\int_a^b |K^2(x, s)| ds$$

ограничен некоторой постоянной C_1 при всех значениях x :

$$\int_a^b |K^2(x, s)| ds < C_1, \quad (5)$$

то последовательные приближения равномерно сходятся при всех значениях λ , лежащих внутри круга

$$|\lambda| < \frac{1}{B}; \quad B^2 = \int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)| dx ds. \quad (6)$$

Предел последовательных приближений есть решение уравнения (1), и это решение — единственное.

Доказательство этой теоремы мы приведём несколько ниже.

Если интеграл (5) неограничен, но двойной интеграл

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)| dx ds$$

имеет конечное значение, то последовательные приближения хотя и могут расходиться в обычном смысле, сходятся, однако, в некотором обобщённом смысле (так называемая сходимость в среднем), и их обобщённый предел даёт решение, и притом единственное, уравнения (1). Рамки нашей книги не позволяют остановиться на этом подробнее.

Изучим детальнее структуру последовательных приближений. Очевидно,

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) ds.$$

Далее

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_1(s) ds = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) ds + \lambda^2 \int_a^b K(x, t) dt \int_a^b K(t, s) f(s) ds. \end{aligned}$$

В двойном интеграле изменим порядок интегрирования. Обозначая для краткости

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t) K(t, s) dt,$$

получим:

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, s) f(s) ds.$$

Точно так же найдём:

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, s) f(s) ds + \\ &+ \lambda^3 \int_a^b K_3(x, s) f(s) ds, \end{aligned}$$

где

$$K_3(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_2(t, s) dt,$$

и вообще

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^n \lambda^m \int_a^b K_m(x, s) f(s) ds; \quad (7)$$

$K_m(x, s)$ определяется рекуррентным соотношением

$$K_1(x, s) = K(x, s); \quad K_m(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_{m-1}(t, s) dt. \quad (8)$$

Функция $K_m(x, s)$ называется *m-м итерированным ядром* по отношению к данному ядру. Можно легко доказать, что итерированные ядра удовлетворяют соотношению более общему, чем (8):

$$K_m(x, s) = \int_a^b K_r(x, t) K_{m-r}(t, s) dt, \quad (9)$$

где r — любое натуральное число, меньшее m .

Допуская, что последовательные приближения сходятся, и переходя в (7) к пределу, мы получаем решение интегрального уравнения (1) в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(x, s) f(s) ds. \quad (10)$$

Выясним быстроту сходимости последовательных приближений. Обозначим через C_m верхнюю грань интеграла

$$\int_a^b |K_m(x, s)|^2 ds$$

и найдём оценку величины C_m . В формуле (9) положим $r = m - 1$; тогда

$$K_m(x, s) = \int_a^b K_{m-1}(x, t) K(t, s) dt. \quad (8_1)$$

Применим к написанному интегралу неравенство Шварца:

$$|K_m(x, s)|^2 < \int_a^b |K_{m-1}(x, t)|^2 dt \int_a^b |K(t, s)|^2 dt.$$

Проинтегрировав это неравенство по s , получим:

$$\int_a^b |K_m(x, s)|^2 ds < B^2 \int_a^b |K_{m-1}(x, t)|^2 dt < B^2 C_{m-1}.$$

Беря верхнюю грань интеграла слева, найдём:

$$C_m < B^2 C_{m-1}.$$

Из этого рекуррентного неравенства непосредственно следует искомая оценка:

$$C_m \leq B^{2m-2} C_1. \quad (11)$$

Введём в рассмотрение величину

$$D = \sqrt{\int_a^b |f^2(s)| ds}. \quad (12)$$

К общему члену ряда (10) применим неравенство Шварца:

$$\left| \int_a^b K_m(x, s) f(s) ds \right|^2 \leq \int_a^b |K_m^2(x, s)| ds \cdot \int_a^b |f(s)|^2 ds \leq C_1 D^2 B^{2m-2}.$$

Отсюда следует, что общий член ряда (10) меньше, чем величина

$$D \sqrt{C_1} |\lambda|^m B^{m-1},$$

так что ряд (10) сходится быстрее прогрессии со знаменателем $|\lambda|B$. Из сказанного вытекает справедливость сформулированной выше теоремы.

Если в ряде (10) ограничиться членами, содержащими степени λ до n -й, то, как легко видеть, ошибка не будет превосходить величины

$$D \sqrt{C_1} \frac{|\lambda|^{n+1} B^n}{1 - |\lambda|B}. \quad (13)$$

Рассмотрим для примера уравнение

$$\varphi(x) - 0,1 \int_0^1 K(x, s) \varphi(s) ds = 1; \quad K(x, s) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq s), \\ s & (s \leq x \leq 1). \end{cases}$$

Здесь $\lambda = 0,1$, $B = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $C_1 = \frac{1}{3}$, и последовательные приближения сходятся. Далее, очевидно, $D = 1$. Найдём приближённое решение, ограничиваясь двумя приближениями. При этом в ряде (10) остаются три члена, и ошибка не превосходит

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{0,1^3 \cdot \frac{1}{6}}{1 - \frac{0,1}{\sqrt{6}}} \approx 0,0001.$$

Имеем:

$$\varphi_0(x) = 1,$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \frac{x}{10} - \frac{x^2}{20},$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \frac{131}{3000}x - \frac{101}{200}x^2 - \frac{x^3}{6000} + \frac{x^4}{24000}.$$

Если мы положим приближённо $\varphi(x) = \varphi_2(x)$, то с погрешностью, меньшей чем 0,0001, будем иметь:

$$\varphi(x) = 1 + \frac{131}{3000}x - \frac{101}{200}x^2 - \frac{x^3}{6000} + \frac{x^4}{24000}.$$

Изменим в ряде (10) порядок суммирования и интегрирования¹⁾. Тогда

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b f(s) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m K_m(x, s) ds.$$

Введём обозначение

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s). \quad (14)$$

Функция $\Gamma(x, s; \lambda)$ называется *резольвентой* уравнения (1). С её помощью решение записывается в особо компактной форме:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b f(s) \Gamma(x, s; \lambda) ds. \quad (15)$$

Эта формула позволяет сразу написать решение интегрального уравнения (1), если предварительно вычислена его резольвента.

Пользуясь формулами (8) и (8₁), легко доказать, что резольвента удовлетворяет двум интегральным уравнениям:

$$\Gamma(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda \int_a^b K(x, t) \Gamma(t, s; \lambda) dt, \quad (16)$$

$$\Gamma(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda \int_a^b K(t, s) \Gamma(x, t; \lambda) dt. \quad (17)$$

¹⁾ Законность этой перестановки легко доказать.

До сих пор резольвента была определена при $|\lambda| < \frac{1}{B}$. Введём теперь следующее определение:

Будем говорить, что при данном λ интегральное уравнение (1) имеет резольвенту $\Gamma(x, s; \lambda)$, если существует функция $\Gamma(x, s; \lambda)$, удовлетворяющая уравнениям (16) и (17).

Если резольвента существует при некотором λ , то при этом λ уравнение (1) имеет единственное решение, и это решение даётся формулой (15). Доказательство этой теоремы читатель может найти в курсах интегральных уравнений, указанных в списке литературы в конце книги.

В п. 8 мы приведём выражение резольвенты, годное для всех значений λ , для которых резольвента существует.

В заключение сделаем следующее замечание практического характера. Метод последовательных приближений приводит к рядам, которые, как правило, не суммируются в конечном виде. На практике метод последовательных приближений может дать только приближённое решение интегрального уравнения; как правило, в тех случаях, когда ряд (10) удаётся просуммировать в конечном виде, оказывается возможным с помощью того или иного специального приёма решить интегральное уравнение, не прибегая к общей теории.

3. Уравнения типа Вольтерра. Некоторые задачи математической физики приводят к рассмотрению уравнений Фредгольма частного вида, называемых уравнениями *Вольтерра*. Так мы будем называть уравнения, ядра которых ограничены и при $s > x$ тождественно равны нулю. В этих условиях в интеграле

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$$

подинтегральная функция равна нулю при $x < s \leq b$, и указанный интеграл равен

$$\int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds.$$

Таким образом, интегральное уравнение типа Вольтерра имеет вид:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (1)$$

Важной особенностью этих уравнений является то, что для них метод последовательных приближений приводит к сходящемуся ряду, каково бы ни было значение λ .

Можно рассматривать уравнения Вольтерра, ядра которых не ограничены, но имеют слабую особенность. Эти уравнения имеют вид

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x \frac{H(x, s)}{(x-s)^\alpha} \varphi(s) ds = f(x), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2)$$

Как нетрудно показать, для этих уравнений последовательные приближения также сходятся при любом λ , хотя и несколько медленнее.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x e^{x-s} \varphi(s) ds = f(x). \quad (3)$$

Составим итерированные ядра и резольвенту. Имеем:

$$K_2(x, s) = \int_s^x e^{x-t} e^{t-s} dt = (x-s) e^{x-s}.$$

Точно так же найдём:

$$K_3(x, s) = \frac{(x-s)^2}{2!} e^{x-s},$$

и вообще

$$K_m(x, s) = \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!} e^{x-s}.$$

Теперь

$$\Gamma(x, s; \lambda) = e^{x-s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1} (x-s)^{m-1}}{(m-1)!} = e^{(\lambda+1)(x-s)}. \quad (4)$$

Эта формула верна при $s \leq x$; при $s > x$, очевидно, $\Gamma(x, s; \lambda) \equiv 0$.

По формуле (15) п. 2 получаем решение в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{(\lambda+1)(x-s)} f(s) ds. \quad (5)$$

Ряд последовательных приближений удалось просуммировать в конечном виде.

Заметим, что интегральное уравнение (3) сводится к очень простому дифференциальному. В самом деле, дифференцируя (3), мы получим:

$$\varphi'(x) - \lambda \varphi(x) - \lambda \int_0^x e^{x-s} \varphi(s) ds = f'(x). \quad (6)$$

Исключая интеграл из (3) и (6), получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка с неизвестной $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) - (\lambda + 1) \varphi(x) = f'(x) - f(x).$$

Интегрируя его при начальном условии $\varphi(0) = f(0)^1$, мы придём к решению (5).

Уравнения, сходные с (3), но значительно более сложные, Вольтерра рассматривал в своих работах по теории наследственности.

4. Интегральные уравнения с вырожденным ядром.

Существует очень важный класс интегральных уравнений, которые просто решаются путём сведения к системе алгебраических уравнений. Будем называть ядро *вырожденным*, если оно представляет собой сумму конечного числа слагаемых, каждое из которых, в свою очередь, есть произведение двух множителей, причём один из них зависит только от x , а другой — только от s . Вырожденное ядро имеет, следовательно, вид

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n a_i(x) b_i(s), \quad (1)$$

а интегральное уравнение с вырожденным ядром представляется в следующей форме:

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^n a_i(x) \int_a^b b_i(s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (2)$$

Функции $a_i(x)$ можно считать линейно независимыми; в противном случае число слагаемых в (1) можно уменьшить. Точно так же можно считать независимыми и функции $b_i(s)$.

¹⁾ Мы получаем это начальное условие, положив в (3) $x=0$,

Интегральное уравнение с вырожденным ядром решается следующим образом. Обозначим

$$c_i = \int_a^b b_i(x) \varphi(s) ds. \quad (3)$$

Величины c_i суть постоянные, неизвестные, так как неизвестна функция $\varphi(x)$. Из уравнения (2) мы получаем теперь

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i a_i(x), \quad (4)$$

и дело сводится к определению постоянных c_i . С этой целью подставим выражение (4) в интегральное уравнение (2). После простых преобразований мы получим:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \left\{ c_i - \int_a^b b_i(s) \left[f(s) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k a_k(s) \right] ds \right\} = 0.$$

Так как функции $a_i(x)$ линейно независимы, то из последнего равенства следует:

$$c_i - \int_a^b b_i(s) \left[f(s) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k a_k(s) \right] ds = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Обозначим ещё для краткости

$$\int_a^b b_i(s) f(s) ds = f_i, \quad \int_a^b b_i(s) a_k(s) ds = a_{ik}.$$

Тогда

$$c_i - \lambda \sum_{k=1}^n a_{ik} c_k = f_i; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Для определения постоянных c_i мы получили систему линейных алгебраических уравнений. Решив её, мы тем самым решим и уравнение (2); его решение даётся формулой (4). Наоборот, если система (5) неразрешима, то не имеет решения и интегральное уравнение.

Определитель системы (5) равен

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Это — полином от λ степени не выше n ; он не равен тождественно нулю, так как при $\lambda=0$ он обращается в единицу. Отсюда следует, что существует не более n различных значений λ , при которых $D(\lambda)=0$. При этих значениях λ система (5), а с ней и интегральное уравнение (2), либо неразрешима, либо имеет бесчисленное множество решений. При всех остальных значениях λ интегральное уравнение разрешимо и имеет единственное решение.

Заметим, что систему (5) можно написать, не прибегая к подстановке выражения (4) в уравнение. Достаточно умножить равенство (4) на $a_k(x)$, $k=1, 2, \dots, n$, и проинтегрировать в пределах от a до b . Изменив обозначение i на k и наоборот, мы получим систему (5).

Пример. Пусть дано уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (x+s)\varphi(s) ds = f(x).$$

Его решение имеет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda (c_1 x + c_2).$$

Для определения постоянных c_1 и c_2 мы по указанному выше методу получаем систему:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)c_1 - \lambda c_2 &= f_1, \\ -\frac{\lambda}{3}c_1 + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)c_2 &= f_2, \end{aligned}$$

где

$$f_1 = \int_0^1 f(s) ds, \quad f_2 = \int_0^1 s f(s) ds.$$

Определитель этой системы, равный $-\frac{\lambda^2}{12} - \lambda + 1$, обращается в нуль при двух значениях λ :

$$\lambda_1 = -6 + 4\sqrt{3}, \quad \lambda_2 = -6 - 4\sqrt{3}.$$

Если λ отлично от λ_1 и λ_2 , то наше уравнение имеет единственное решение:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{6(\lambda - 2)(x + s) - 12xs - 4\lambda}{\lambda^2 + 12\lambda - 12} f(s) ds.$$

При $\lambda = \lambda_1$ или $\lambda = \lambda_2$ наше интегральное уравнение, вообще говоря, неразрешимо. Читатель легко найдёт условия, которым следует подчинить функцию $f(x)$, чтобы решение существовало и при этих исключительных значениях λ , а также вид общего решения.

Рассмотрим ещё уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos s \varphi(s) ds = f(x).$$

Полагая

$$\int_0^{2\pi} \varphi(s) \cos s ds = c,$$

имеем:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda c \sin x.$$

Умножим последнее равенство на $\cos x$ и проинтегрируем в пределах от 0 до 2π . Мы получим тогда

$$c = \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$$

и, следовательно,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos s f(s) ds.$$

5. Общий случай уравнения Фредгольма. Решение уравнения Фредгольма в общем случае можно свести к решению уравнения с вырожденным ядром. Это можно выполнить многими способами. Пусть, например, ядро $K(x, s)$

непрерывно. По известной теореме Вейерштрасса, его можно аппроксимировать с любой степенью точности некоторым полиномом $P(x, s)$. Выберем этот полином так, чтобы

$$|K(x, s) - P(x, s)| < \frac{1}{|\lambda|(b-a)}. \quad (1)$$

Обозначим

$$K(x, s) - P(x, s) = K'(x, s),$$

так что

$$K(x, s) = K'(x, s) + P(x, s); \quad |K'(x, s)| < \frac{1}{|\lambda|(b-a)}. \quad (2)$$

Перепишем теперь интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

в виде

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K'(x, s) \varphi(s) ds = f(x) + \lambda \int_a^b P(x, s) \varphi(s) ds. \quad (3)$$

Выражение в правой части (3) будем временно считать известным. Тогда уравнение (3) можно рассматривать как интегральное уравнение с ядром $K'(x, s)$, параметром λ и правой частью

$$f(x) + \lambda \int_a^b P(x, s) \varphi(s) ds.$$

Из (2) видно, что ядро уравнения (3) ограничено и что имеет место неравенство (4) п. 2. В таком случае уравнение (3) можно решить методом последовательных приближений; существует резольвента

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m'(x, s)^1,$$

¹⁾ $K_m'(x, s)$ — итерированные ядра, полученные из ядра $K'(x, s)$.

и решение уравнения (2) можно написать по формуле (15) п. 2:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b P(x, s) \varphi(s) ds + \\ + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) \left[f(t) + \lambda \int_a^b P(t, s) \varphi(s) ds \right] dt.$$

Введём обозначения:

$$f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) f(t) dt = F(x), \quad (4)$$

$$P(x, s) + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) P(t, s) dt = K^n(x, s). \quad (5)$$

Тогда последнее равенство принимает вид

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K^n(x, s) \varphi(s) ds = F(x). \quad (6)$$

Это — интегральное уравнение с неизвестной $\varphi(s)$, эквивалентное уравнению (3). Докажем, что его ядро $K^n(x, s)$ — вырожденное. В самом деле, $P(x, s)$ — полином. Расположим его по степеням x :

$$P(x, s) = \sum_{i=1}^n x^i b_i(s).$$

Далее,

$$\int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) P(t, s) dt = \sum_{i=1}^n b_i(s) \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) t^i dt.$$

Введя теперь обозначение

$$x^i + \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) t^i dt = a_i(x),$$

мы можем написать:

$$K^n(x, s) = \sum_{i=1}^n a_i(x) b_i(s),$$

и ядро $K^n(x, s)$ — действительно вырожденное. Способом,

указанным в п. 4, мы сведём интегральное уравнение (6) к системе линейных алгебраических уравнений.

Если ядро $K(x, s)$ — разрывное, то воспользоваться теоремой Вейерштрасса невозможно. В этом случае мы можем поступить следующим образом. Напишем разложение ядра $K(x, s)$ в двойной ряд Фурье, например, по косинусам кратных дуг:

$$K(x, s) \sim \sum_{i, k=1}^{\infty} A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a}. \quad (7)$$

Мы не предполагаем при этом, что ряд Фурье сходится. Обозначим теперь

$$\sum_{i, k=1}^n A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a} = P(x, s), \quad (8)$$

$$K(x, s) - P(x, s) = K''(x, s). \quad (9)$$

Опять перепишем данное интегральное уравнение в виде (3) и будем рассматривать правую часть, как известную. Докажем, что уравнение (3) разрешимо по методу последовательных приближений, если только n достаточно велико.

Ядру $K''(x, s)$ отвечает следующий ряд Фурье:

$$\begin{aligned} K''(x, s) \sim & \sum_{i=1}^n \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a} + \\ & + \sum_{i=n+1}^n \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a} + \\ & + \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a}. \end{aligned}$$

Введём обозначение

$$\int_a^b \int_a^b |K''(x, s)|^2 dx ds = B''^2.$$

В силу равенства Парсеваля,

$$B'^2 = \frac{(b-a)^2}{4} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{k=n+1}^{\infty} |A_{ik}|^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^n |A_{ik}|^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |A_{ik}|^2 \right\}. \quad (10)$$

Ряд (10) есть остаток сходящегося ряда

$$\frac{(b-a)^2}{4} \sum_{i,k=1}^{\infty} |A_{ik}|^2,$$

и при n достаточно большом его сумма может быть сделана сколь угодно малой. Выберем n так, чтобы выполнялось неравенство

$$B' < \frac{1}{|\lambda|}.$$

По теореме п. 2 уравнение (3) разрешимо методом последовательных приближений. Дальнейшие рассуждения повторяются без изменений; функции $a_i(x)$ и $b_i(s)$ определяются формулами:

$$a_i(x) = \cos \frac{i\pi x}{b-a} + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) \cos \frac{i\pi t}{b-a} dt,$$

$$b_i(s) = \sum_{k=1}^n A_{ik} \cos \frac{k\pi s}{b-a}.$$

Указанные два способа не являются, конечно, единственно возможными; мы сведём общее уравнение Фредгольма к уравнению с вырожденным ядром, если каким-либо способом разобьём ядро на два слагаемых:

$$K(x, s) = P(x, s) + K'(x, s), \quad (11)$$

из которых первое имеет характер вырожденного ядра, а второе удовлетворяет неравенству

$$B'^2 = \int_a^b \int_a^b |K'(x, s)|^2 dx ds < \frac{1}{|\lambda|}.$$

На практике изложенный нами приём применяется в такой упрощённой форме.

Пусть разбиение (11) таково, что

$$\int_a^b |K'(x, s)|^2 ds \leq C', \quad (12)$$

где C' — достаточно малая постоянная. Допуская, что данное интегральное уравнение имеет решение, мы видим, что интеграл

$$\int_a^b K'(x, s) \varphi(s) ds$$

также очень мал. Действительно, в силу неравенства Шварца,

$$\left| \int_a^b K'(x, s) \varphi(s) ds \right|^2 \leq \int_a^b |K'(x, s)|^2 ds \int_a^b |\varphi^2(s)| ds < \\ < C' \int_a^b |\varphi^2(s)| ds.$$

Отбросив эту малую величину, мы вместо уравнения (3) сразу получаем уравнение с вырожденным ядром:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b P(x, s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (13)$$

Дело, следовательно, сводится к тому, что мы, не меняя правой части уравнения, заменяем в нём ядро близким вырожденным, причём степень близости ядер определяется величиной C' .

При этом возникает вопрос: как влияет на решение уравнения такая замена ядра? Ответ на этот вопрос даёт следующая

Теорема. Пусть уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

имеет решение, какова бы ни была правая часть $f(x)$. Пусть $P_n(x, s)$, $n=1, 2, \dots$ — последовательность ядер, таких, что

интегралы

$$\int_a^b |K(x, s) - P_n(x, s)|^2 ds$$

стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ равномерно в промежутке $a < x < b$. Тогда

а) при n достаточно большом уравнения

$$\varphi_n(x) - \lambda \int_a^b P_n(x, s) \varphi_n(s) ds = f(x)$$

разрешимы;

б) функции $\varphi_n(x)$ равномерно стремятся к $\psi(x)$ при $n \rightarrow \infty$ в промежутке $a < x < b$.

Рассмотрим следующий пример. Решение задачи Дирихле для конечной плоской области, ограниченной контуром L , может быть сведено к решению интегрального уравнения¹⁾

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mu(\tau) d\tau = f(t). \quad (14)$$

Здесь t и τ — значения параметра, определяющего положение точки на кривой L ; r — расстояние между точками, отвечающими этим значениям параметра; ν —

внешняя нормаль к L в точке τ ; $d\tau$ — элемент дуги L ; наконец, $\mu(t)$ — неизвестная, $f(t)$ — заданная функция.

В главе II будет доказано, что уравнение (14) имеет решение, какова бы ни была функция $f(t)$.

Решим приближённо уравнение (14), предполагая, что контур — эллипс с полуосями a и b (черт. 1). Его параметрические уравнения суть

$$x = a \cos \tau, \quad y = b \sin \tau;$$

параметр τ меняется в пределах от 0 до 2π . Вычислим

¹⁾ См. гл. II, п. 28.

ядро уравнения. Прежде всего

$$r^2 = a^2 (\cos t - \cos \tau)^2 + b^2 (\sin t - \sin \tau)^2 = \\ = 4a^2 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \left(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2} \right),$$

где $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса. Далее,

$$\cos(\nu, r) d\sigma = [\cos(\nu, x) \cos(r, x) + \cos(\nu, y) \cos(r, y)] d\sigma = \\ = \frac{1}{r} [a (\cos t - \cos \tau) dy - b (\sin t - \sin \tau) dx] = \\ = \frac{ab}{r} [\cos \tau (\cos t - \cos \tau) + \sin \tau (\sin t - \sin \tau)] d\tau = \\ = -\frac{2ab}{r} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} d\tau.$$

Теперь

$$\frac{\cos(\nu, r)}{r} d\tau = -\frac{b}{2a} \frac{d\tau}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2}} = \\ = -\frac{b}{2a} \left(1 + \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2} + \varepsilon^4 \cos^4 \frac{t+\tau}{2} + \dots \right). \quad (15)$$



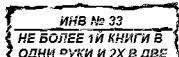
Ограничиваясь в написанной прогрессии конечным числом членов, мы тем самым заменим ядро нашего уравнения вырожденным. После этого решить уравнение уже нетрудно. Мы проведём дальнейшие вычисления, предполагая, что эксцентриситет мал, так что можно ограничиться членами, содержащими ε^2 .

Нам предстоит, таким образом, решить уравнение

$$\mu(t) + \frac{b}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \left(1 + \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2} \right) \mu(\tau) d\tau = f(t).$$

Заменяя $\cos^2 \frac{t+\tau}{2}$ через $\frac{1}{2} [1 + \cos(t+\tau)]$, получим:

$$\mu(t) + \int_0^{2\pi} (\alpha + \beta \cos t \cos \tau - \beta \sin t \sin \tau) \mu(\tau) d\tau = f(t). \quad (16)$$



Здесь мы обозначили

$$a = \frac{b}{2\pi a} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right), \quad \beta = \frac{b\varepsilon^2}{4\pi a},$$

Из (16) следует, что

$$\mu(t) = f(t) - c_1 - c_2 \cos t - c_3 \sin t, \quad (17)$$

где

$$c_1 = a \int_0^{2\pi} \mu(\tau) d\tau, \quad c_2 = \beta \int_0^{2\pi} \mu(\tau) \cos \tau d\tau, \quad c_3 = -\beta \int_0^{2\pi} \mu(\tau) \sin \tau d\tau.$$

Умножив (17) соответственно на α , на $\beta \cos t$ и на $-\beta \sin t$ и проинтегрировав в пределах от 0 до 2π , мы получим следующие уравнения для неизвестных c_1, c_2, c_3 :

$$\begin{aligned} c_1 &= f_1 - 2\pi\alpha c_1; \\ c_2 &= f_2 - \pi\beta c_2; \\ c_3 &= f_3 + \pi\beta c_3, \end{aligned}$$

где

$$f_1 = \alpha \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau; \quad f_2 = \beta \int_0^{2\pi} f(\tau) \cos \tau d\tau; \quad f_3 = -\beta \int_0^{2\pi} f(\tau) \sin \tau d\tau.$$

Отсюда находим:

$$c_1 = \frac{f_1}{1 + 2\pi\alpha}; \quad c_2 = \frac{f_2}{1 + \pi\beta}; \quad c_3 = \frac{f_3}{1 - \pi\beta}. \quad (18)$$

Нетрудно получить, пользуясь тем же приёмом, и более точное решение. Достаточно в разложении ядра сохранить более высокие степени ε . Можно получить и точное решение, но в виде бесконечного ряда. Чтобы получить это решение, поступим следующим образом. Разложим функцию

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta}$$

в ряд Фурье. Эта функция — чётная; кроме того, она не изменяется при замене θ на $\theta + \pi$. Отсюда легко заключить, что её ряд Фурье имеет вид

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2k\theta, \quad (19)$$

ИЛИ

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta} = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{2ik\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{-2ik\theta}.$$

Отсюда, по известным формулам,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

$$\frac{a_k}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{2ik\theta} d\theta}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta}, \quad k \geq 1.$$

Чтобы вычислить последний интеграл, положим $e^{i\theta} = z$. После элементарных преобразований получим:

$$\frac{a_k}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{4z^{2k+1} dz}{4z^4 - \varepsilon^2(z^2 + 1)^2},$$

где γ — окружность $|z|=1$. Внутри γ лежат полюсы подынтегральной функции

$$z_1 = \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}; \quad z_2 = -z_1 = -\frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Вычеты в полюсах z_1 и z_2 одинаковые и равны

$$\frac{\varepsilon^{2k}}{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})^{2k}}.$$

Отсюда находим:

$$a_k = \frac{2\varepsilon^{2k}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})^{2k}}, \quad k \geq 1.$$

Искомое разложение имеет вид:

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^{2k} \cos 2k\theta \right].$$

Теперь

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t + \tau}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^{2k} \cos k(t + \tau) \right] =$$

$$= \frac{a}{b} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{a + b} \right)^{2k} (\cos kt \cos k\tau - \sin kt \sin k\tau) \right],$$

где c есть половина фокусного расстояния эллипса, и наше интегральное уравнение принимает вид

$$\mu(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{a + b} \right)^{2k} \cos kt \int_0^{2\pi} \mu(\tau) \cos k\tau d\tau -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c}{a + b} \right)^{2k} \sin kt \int_0^{2\pi} \mu(\tau) \sin k\tau d\tau = f(t). \quad (20)$$

Обозначим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\tau) d\tau = A_0, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\tau) \cos k\tau d\tau = A_k,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\tau) \sin k\tau d\tau = B_k.$$

Тогда, как это следует из (20),

$$\mu(t) = f(t) - A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{a + b} \right)^{2k} (A_k \cos kt - B_k \sin kt). \quad (21)$$

Умножая (21) соответственно на $\frac{1}{2\pi}$, $\frac{\cos kt}{\pi}$ и $\frac{\sin kt}{\pi}$ и интегрируя, найдём:

$$A_0 = \frac{1}{2} F_0, \quad A_k = \frac{(\pi + b)^{2k} F_k}{(a + b)^{2k} + c^{2k}}, \quad B_k = \frac{(a + b)^{2k} F_k}{(a + b)^{2k} - c^{2k}}, \quad (22)$$

где через F_0 , F_k и F'_k обозначены коэффициенты Фурье функции $f(t)$:

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau, & F_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \cos k\tau d\tau, \\ F'_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \sin k\tau d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

В случае окружности $c=0$, и решение имеет вид

$$\mu(t) = f(t) - A_0 = f(t) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau. \quad (24)$$

Проще, однако, получить это последнее решение непосредственно. Действительно, для окружности $a=b$, $\varepsilon=0$, и уравнение (14) превращается в следующее:

$$\mu(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\tau) d\tau = f(t). \quad (25)$$

Отсюда

$$\mu(t) = f(t) - c, \quad c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\tau) d\tau.$$

Интегрируя последнее равенство в пределах $(0, 2\pi)$, найдём:

$$c = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau,$$

что и приводит нас к формуле (24).

б. Системы интегральных уравнений. В приложениях часто встречаются системы интегральных уравнений. Такая система имеет вид

$$\varphi_i(x) - \lambda \sum_{k=1}^n \int_a^b K_{ik}(x, s) \varphi_k(s) ds = f_i(x), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Теория, а также методы решения систем интегральных уравнений — те же, что и для одного уравнения. Так,

последовательные приближения сходятся при малых λ , в частности, если λ удовлетворяет неравенству

$$|\lambda| < \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n \int_a^b \int_a^b |K_{ik}(x, s)|^2 dx ds \right\}^{-1} \quad (2)$$

и интегралы

$$\int_a^b |K_{ik}(x, s)|^2 ds$$

ограничены. Если ядра $K_{ik}(x, s)$ — вырожденные, система (1) сводится к системе линейных алгебраических уравнений. В общем случае система (1) сводится к системе с вырожденными ядрами посредством методов, изложенных в п. 5.

Систему интегральных уравнений можно преобразовать в одно уравнение следующим образом. Будем рассматривать переменные x и s , изменяющиеся в промежутке $(nb - (n-1)a, nb)$, длина которого в n раз превосходит длину начального промежутка (a, b) . Определим функций $\Phi(x)$, $F(x)$, $K(x, s)$ в указанном промежутке формулами:

$$\Phi(x) = \varphi_i(x - (i-1)(b-a)),$$

если $(i-1)b - (i-2)a < x < ib - (i-1)a$,

$$F(x) = f_i(x - (i-1)(b-a)),$$

если $(i-1)b - (i-2)a < x < ib - (i-1)a$,

$$K(x, s) =$$

$= K_{ik}(x - (i-1)(b-a), s - (k-1)(b-a)),$

если

$$(i-1)b - (i-2)a < x < ib - (i-1)a,$$

$$(k-1)b - (k-2)a < s < kb - (k-1)a.$$

При таком определении система (1) принимает вид одного уравнения

$$\Phi(x) - \lambda \int_a^{nb - (n-1)a} K(x, s) \Phi(s) ds = F(x). \quad (3)$$

7. Применение приближённых формул интегрирования. Замена данного ядра вырожденным позволяет найти решение в виде формулы, годной во всём промежутке

$a < x < b$ и при любом значении параметра λ . Серьёзным недостатком этого способа является необходимость вычисления квадратур, иногда довольно сложных и в значительном числе. Этот же недостаток присущ и методу последовательных приближений. Мы изложим здесь метод решения интегральных уравнений, не требующий вычисления квадратур.

Пусть в уравнении

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (1)$$

ядро $K(x, s)$ и правая часть $f(x)$ непрерывны при $a < x < b$, $a < s < b$. Тогда $\varphi(x)$ также непрерывна. Интеграл

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$$

заменяем конечной суммой по одной из приближённых формул механических квадратур, например, по формуле прямоугольников:

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds \approx h \sum_{k=1}^n K(x, x_k) \varphi(x_k),$$

где

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh;$$

В приближённом равенстве

$$\varphi(x) - \lambda h \sum_{k=1}^n K(x, x_k) \varphi(x_k) = f(x)$$

заменяем x через x_1, x_2, \dots, x_n . Мы получим тогда систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$:

$$\varphi(x_i) - \lambda h \sum_{k=1}^n K(x_i, x_k) \varphi(x_k) = f(x_i), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Решив эту систему, мы найдём приближённые значения неизвестной $\varphi(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n . Воспользо-

вавшись какой-либо из формул интерполирования, мы получим приближённое выражение $\varphi(x)$ во всём промежутке.

Проще всего, впрочем, получить приближённую формулу из самого интегрального уравнения: заменив в нём интеграл конечной суммой, получим приближённое значение

$$\varphi(x) \approx f(x) + \lambda h \sum_{k=1}^n K(x, x_k) \varphi(x_k).$$

Вместо формулы прямоугольников можно, конечно, воспользоваться и другими формулами квадратур. Значительно более точные результаты получаются при пользовании формулой Симпсона или, ещё лучше, Гаусса.

Когда $n \rightarrow \infty$, полученное указанным способом приближённое значение $\varphi(x)$ имеет пределом решение интегрального уравнения (1), если только это решение существует и единственное. Доказательство этого можно найти, например, в курсе Ловитта [5] или Привалова [7].

Решим указанным способом уравнение (14) п. 5 для эллипса. Чтобы можно было все вычисления провести до конца, зададим численные значения величин a и b . Зададимся также определённым видом функции $f(t)$. Пусть, например,

$$a = 5, \quad b = 3, \quad f(t) = x^2 + y^2 = 25 \cos^2 t + 9 \sin^2 t.$$

Наше уравнение имеет (приближённо) вид

$$\mu(t) + 0,10 \int_0^{2\pi} \mu(\tau) \frac{d\tau}{1 - 0,64 \cos^2 \frac{t+\tau}{2}} = 25 \cos^2 t + 9 \sin^2 t,$$

или, если воспользоваться периодичностью функции $\mu(t)$,

$$\mu(t) + \int_{-\pi}^{\pi} \mu(\tau) \frac{d\tau}{6,8 - 3,2 \cos(t+\tau)} = 25 - 16 \sin^2 t. \quad (3)$$

Правая часть принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно начала координат. Нетрудно

установить, исходя из формул (23) п. 5, что этим же свойством обладает и $\mu(t)$, т. е. что

$$\mu(\pi - t) = \mu(-t) = \mu(t). \quad (4)$$

Очевидно также, что $\mu(t)$ имеет период 2π . Таким образом, нам достаточно будет определить $\mu(t)$ в промежутке $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Возьмём $n=12$, так что $h = \frac{\pi}{6}$. Обозначим для краткости

$$\mu(0) = y_1, \quad \mu\left(\frac{\pi}{6}\right) = y_2, \quad \mu\left(\frac{\pi}{3}\right) = y_3, \quad \mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_4.$$

Система (2) в нашем случае имеет вид

$$\left. \begin{aligned} 1,19y_1 + 0,35y_2 + 0,31y_3 + 0,15y_4 &= 25, \\ 0,18y_1 + 1,34y_2 + 0,32y_3 + 0,16y_4 &= 21, \\ 0,16y_1 + 0,32y_2 + 1,34y_3 + 0,18y_4 &= 13, \\ 0,15y_1 + 0,31y_2 + 0,35y_3 + 1,19y_4 &= 9. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Её решение

$$y_1 = 16,04, \quad y_2 = 12,27, \quad y_3 = 4,73, \quad y_4 = 0,95.$$

Интерполировать в нашем примере лучше всего с помощью ряда Фурье, потому что функция $\mu(t)$ — периодическая. Так как $\mu(t)$ удовлетворяет соотношениям (4), то её ряд Фурье имеет вид

$$\mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2kt.$$

Зная четыре значения функции $\mu(t)$, мы можем вычислить четыре коэффициента a_0, a_1, a_2, a_3 . Обычным способом находим

$$a_0 = 8,50, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 7,54, \quad a_3 = 0.$$

Отбрасывая остальные члены ряда, имеем:

$$\mu(t) \approx 8,50 + 7,54 \cos 2t. \quad (6)$$

Сравним (6) с точным решением, полученным в п. 5, формулы (21) — (23). В нашем случае

$$f(t) = 25 - 16 \sin^3 t = 17 + 8 \cos 2t,$$

так что $F_0 = 17$, $F_2 = 8$; а все остальные коэффициенты Фурье равны нулю. По формулам (22) п. 5

$$A_0 = 8,50, \quad A_2 = 7,53.$$

Остальные коэффициенты A_k и все B_k равны нулю. Таким образом,

$$\mu(t) = 8,50 + 7,53 \cos 2t.$$

Приближённое решение (6), как мы видим, практически совпадает с точным; максимальная относительная погрешность получается при $t = \frac{\pi}{2}$ и составляет около 1%. При $t = 0$ относительная погрешность меньше, чем 0,07%.

8. Резольвента Фредгольма. Если метод, описанный в предыдущем пункте, применить к интегральному уравнению резольвенты [см. уравнение (16) п. 2]:

$$\Gamma(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda \int_a^b K(x, t) \Gamma(t, s; \lambda) dt$$

и затем выполнить предельный переход по $n \rightarrow \infty$, то получается выражение резольвенты в виде отношения двух степенных рядов

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \frac{D(x, s; \lambda)}{D(\lambda)}. \quad (1)$$

Здесь $D(x, s; \lambda)$ и $D(\lambda)$ — степенные ряды:

$$D(x, s; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, s) \lambda^n, \quad (2)$$

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c_n \lambda^n, \quad (3)$$

коэффициенты которых определяются формулами

$$B_0(x, s) = K(x, s),$$

$$B_n(x, s) = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, s) & K(x, t_1) & K(x, t_2) & \dots & K(x, t_n) \\ K(t_1, s) & K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \dots & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, s) & K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) & \dots & K(t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, s) & K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \dots dt_n, \quad (4)$$

$$c_0 = 1,$$

$$c_n = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \dots & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) & \dots & K(t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \dots dt_n. \quad (5)$$

Функцию $D(\lambda)$ называют *определителем Фредгольма*, а $D(x, s; \lambda)$ — *первым минором Фредгольма*¹⁾.

Фредгольм, впервые получивший эти ряды, доказал, что если ядро $K(x, s)$ ограничено, то они сходятся на всей бесконечной плоскости λ и, следовательно, представляют целые функции от λ . Доказательство Фредгольма основано на замечательной теореме Адамара об оценке определителей²⁾. Т. Карлеман доказал, что ряды (2) и (3) представляют целые функции от λ уже при одном только предположении, что интеграл

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)| dx ds$$

имеет конечное значение³⁾.

Легко доказать, что функция $\Gamma(x, s; \lambda)$, определяемая формулами (1) — (5), удовлетворяет не только уравнению (16), но и уравнению (17) п. 2.

1) Фредгольм ввёл понятие миноров любого порядка. Это — ряды, сходные по структуре с рядами (2) и (3). Нам они здесь не понадобятся, и в этой книге мы их рассматривать не будем.

2) Теорема Адамара и доказательство Фредгольма обычно приводятся в курсах интегральных уравнений. См., например, [2], [5] и [7].

3) Доказательство теоремы Карлемана см. [15а] и [27п]. Сходимость рядов (2) и (3) можно доказать и в более общих предположениях.

Формулы (1) — (5) определяют резольвенту на всей плоскости λ , а не только в круге $|\lambda| < \frac{1}{B}$. При этом $\Gamma(x, s; \lambda)$, как частное двух целых функций, есть функция мероморфная. Полюсами резольвенты могут быть только нули $D(\lambda)$. В курсах интегральных уравнений доказывается и обратное предложение: нули $D(\lambda)$ суть полюсы резольвенты.

В соответствии со сказанным в п. 2 мы можем теперь утверждать, что для всех значений λ , не являющихся полюсами резольвенты, интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

имеет одно и только одно решение, которое представляется формулой (15) п. 2:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds.$$

Несколько забегая вперёд, заметим, что при значениях λ , являющихся полюсами резольвенты, интегральное уравнение, вообще говоря, неразрешимо. Относящиеся к этому результаты будут подробно сформулированы в следующем пункте.

Вычисление коэффициентов $B_n(x, s)$ и C_n по формулам (4) и (5) практически почти неосуществимо, так как требует вычисления многократных интегралов от определителей высоких порядков. Однако, из этих формул легко выводятся два рекуррентных соотношения, с помощью которых вычислять коэффициенты не многим труднее, чем вычислять последовательные приближения. Эти соотношения таковы:

$$\left. \begin{aligned} c_n &= \int_a^b B_{n-1}(s, s) ds, \\ B_n(x, s) &= c_n K(x, s) - n \int_a^b K(x, t) B_{n-1}(t, s) dt. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Зная коэффициент $B_0(x, s) = K(x, s)$, мы по формулам (6) найдём последовательно c_1, B_1, c_2, B_2 и т. д.

Пример. Найдём резольвенту ядра

$$K(x, s) = x + s.$$

Имеем $c_0 = 1$, $B_0(x, s) = x + s$. Далее,

$$c_1 = \int_0^1 2s \, ds = 1,$$

$$B_1(x, s) = x + s - \int_0^1 (x+t)(t+s) \, dt = \frac{1}{2}(x+s) - xs - \frac{1}{3},$$

$$c_2 = \int_0^1 \left(s - s^3 - \frac{1}{3} \right) ds = -\frac{1}{6},$$

$$B_2(x, s) = -\frac{1}{6}(x+s) - 2 \int_0^1 (x+t) \left[\frac{1}{2}(t+s) - ts - \frac{1}{3} \right] dt = 0.$$

Раз $B_2(x, s) \equiv 0$, то, как это видно из формул (6), коэффициенты c_3, c_4, \dots , B_3, B_4, \dots обращаются в нуль, и мы получаем:

$$D(x, s; \lambda) = x + s - \left[\frac{1}{2}(x+s) - xs - \frac{1}{3} \right] \lambda,$$

$$D(\lambda) = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12},$$

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \frac{x + s - \left[\frac{1}{2}(x+s) - xs - \frac{1}{3} \right] \lambda}{1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}}.$$

9. Теоремы Фредгольма. Мы уже видели, что интегральное уравнение, вообще говоря, не решается в замкнутой форме. Как правило, при решении интегрального уравнения приходится прибегать к приближённым методам. При этом, как было отмечено в пп. 5 и 7, мы можем с уверенностью применять приближённые методы только в том случае, когда разрешимость уравнения установлена заранее, причём имеется в виду разрешимость при любой правой части. Важное значение приобретает поэтому анализ уравнения, предшествующий его

разрешению. Этот анализ можно в каждом случае провести, пользуясь общими теоремами об интегральных уравнениях, установленными Фредгольмом. Таких теорем — четыре. Мы только формулируем их; доказательства читатель найдёт в курсах интегральных уравнений.

Условимся в следующей терминологии. Значения λ , для которых существует резольвента уравнения Фредгольма, будем называть *правильными*, а значения λ , для которых резольвента не существует, — *характеристическими* или *фундаментальными*¹⁾. Обратные величины характеристических чисел называются *собственными числами уравнения*. Характеристические числа совпадают с полюсами резольвенты или, что то же, с нулями определителя Фредгольма.

Первая теорема Фредгольма нам уже, в сущности, известна. Она состоит в следующем:

Теорема 1. Если значение λ — правильное, то интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (1)$$

имеет одно и только одно решение, какова бы ни была правая часть $f(x)$; это решение даёт формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds. \quad (2)$$

Отметим очевидное следствие из теоремы 1: если λ — правильное, то однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = 0 \quad (3)$$

имеет только тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0$.

¹⁾ Если рассматривать уравнения более общие, чем фредгольмовские, то определение несколько меняется. Значения λ , для которых резольвента не существует, называются точками спектра; характеристическими числами называются те точки спектра, при которых уравнение может иметь более одного решения. В случае уравнения Фредгольма все точки спектра — характеристические; в этом, собственно, и состоит вторая теорема Фредгольма (см. ниже).

Допустим, что однородное уравнение (3) имеет нетривиальные решения; по теореме 1, это возможно только тогда, когда значение λ — характеристическое. Если $\varphi_1(x)$ — решение уравнения (3), то $c\varphi_1(x)$, где c — произвольная постоянная, также является решением; если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ суть два таких решения, то решением является и их сумма $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$. Таким образом, если $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ удовлетворяют однородному уравнению (3), то любая их линейная комбинация

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$$

тоже ему удовлетворяет. Таким образом, если однородное интегральное уравнение имеет хотя бы одно нетривиальное (отличное от тождественного нуля) решение, то оно имеет бесчисленное множество их. Нетривиальные решения однородного интегрального уравнения называются *собственными* или *фундаментальными функциями ядра* $K(x, s)$ (или уравнения), соответствующими данному характеристическому числу.

Теорема 2. *Каждому характеристическому числу соответствует по крайней мере одна собственная функция. Число линейно независимых собственных функций, отвечающих данному характеристическому числу, конечно.*

Прежде чем сформулировать остальные две теоремы Фредгольма, введём новое понятие, играющее важную роль в теории интегральных уравнений. Ядро $\overline{K}(s, x)$, полученное из данного ядра $K(x, s)$ перестановкой аргументов и заменой на комплексно-сопряжённое, называется *сопряжённым* с данным ядром; уравнение

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b \overline{K}(s, x) \psi(s) ds = g(x) \quad (4)$$

называется *сопряжённым с уравнением (1)*. Сопряжённое уравнение получается из данного заменой ядра сопряжённым и параметра — комплексно-сопряжённым; правая часть, $g(x)$, совершенно произвольна.

Отметим, что сопряжённость есть свойство взаимное, так что уравнение (1) — сопряжённое с (4).

Если ядро $K(s, x)$ — действительное, то сопряжённое ядро получается просто перестановкой аргументов;

Теорема 3. Если λ_0 есть характеристическое число ядра $K(x, s)$, то $\bar{\lambda}_0$ есть характеристическое число сопряжённого ядра $\overline{K(x, s)}$. Число линейно независимых собственных функций уравнения

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = 0 \quad (3_1)$$

и сопряжённого с ним уравнения

$$\psi(x) - \bar{\lambda}_0 \int_a^b \overline{K(s, x)} \psi(s) ds = 0 \quad (5)$$

— одно и то же.

Две функции $p(x)$ и $q(x)$ называются ортогональными в промежутке (a, b) , если

$$\int_a^b p(x) \overline{q(x)} dx = 0.$$

Если эти функции — действительные, то условие ортогональности упрощается и принимает вид

$$\int_a^b p(x) q(x) dx = 0.$$

С помощью понятия ортогональности мы можем сформулировать четвёртую теорему Фредгольма.

Теорема 4. Пусть λ_0 — характеристическое число ядра $K(x, s)$. Для того чтобы неоднородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (6)$$

имело решение, необходимо и достаточно, чтобы его правая часть $f(x)$ была ортогональна ко всем собственным функциям сопряжённого однородного уравнения

$$\psi(x) - \bar{\lambda}_0 \int_a^b \overline{K(s, x)} \psi(s) ds = 0.$$

Если λ_0 — характеристическое число и уравнение (6) разрешимо, то оно имеет бесчисленное множество реше-

ний. Действительно, пусть $\varphi_0(x)$ — решение уравнения (6). Положим $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \Phi(x)$. Подставив это в (6), мы найдём, что $\Phi(x)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\Phi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s) \Phi(s) ds = 0.$$

По теореме 2 последнее уравнение имеет нетривиальные решения. Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$ — линейно независимые собственные функции этого уравнения. Тогда его общее решение будет

$$\Phi(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_k \varphi_k(x),$$

а общее решение уравнения (6) будет

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_k \varphi_k(x). \quad (7)$$

Из теорем Фредгольма вытекает так называемая альтернатива Фредгольма:

Либо неоднородное уравнение разрешимо, какова бы ни была его правая часть, либо соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальные решения.

Альтернативой Фредгольма чаще всего и пользуются при исследовании интегральных уравнений.

Замечание о сходимости последовательных приближений. Метод последовательных приближений даёт решение в виде ряда, расположенного по степеням λ . Ряд этот, очевидно, сходится внутри некоторого круга $|\lambda| < R$, если в этом круге сходится степенной ряд, представляющий резольвенту. Но из общих теорем теории функций комплексной переменной известно, что этот ряд сходится внутри круга $|\lambda| < |\lambda_1|$, где λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое число. Отсюда следует, что последовательные приближения сходятся в том же круге. Из сказанного вытекает такое следствие:

Если в некотором круге $|\lambda| < R$ нет характеристических чисел, то в этом круге последовательные приближения сходятся.

10. Уравнения со слабой особенностью. Напомним, что уравнением со слабой особенностью мы называем урав-

нение, ядро которого имеет вид

$$K(x, s) = \frac{H(x, s)}{|x-s|^{\alpha}}, \quad (1)$$

где $0 < \alpha < 1$ и $H(x, s)$ — ограниченная функция. Теория этих уравнений почти тождественна с теорией Фредгольма. Теоремы Фредгольма, а следовательно, и альтернатива Фредгольма для этих уравнений остаются в силе¹⁾. Практическое решение уравнений со слабой особенностью основано на том, что все итерированные ядра, начиная с некоторого, будут ограниченными.

Доказательство этого утверждения основано на следующей оценке: пусть $K(x, s)$ и $L(x, s)$ — ядра со слабой особенностью, имеющие оценки

$$|K(x, s)| < \frac{A}{|x-s|^{\alpha}}, \quad |L(x, s)| < \frac{B}{|x-s|^{\beta}},$$

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1.$$

Составим ядро

$$M(x, s) = \int_a^b K(x, t) L(t, s) dt.$$

Для этого ядра справедлива оценка (C — некоторая постоянная)

$$|M(x, s)| < \begin{cases} \frac{C}{|x-s|^{\alpha+\beta+1}}, & \alpha + \beta > 1, \\ C, & \alpha + \beta < 1, \\ C |\ln|x-s||, & \alpha + \beta = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Вывод этой оценки обычно приводится в курсах интегральных уравнений. Из неё легко заключить, что n -е итерированное ядро будет ограниченным, если $n\alpha - (n-1) < 0$, или

$$n > \frac{1}{1-\alpha}. \quad (3)$$

¹⁾ Подробную теорию уравнений со слабой особенностью см. в Э. Гурса [2], Н. М. Гюнтер [3], В. И. Смирнов [8].

Пусть теперь n таково, что ядро $K_n(x, s)$ ограничено. Уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (4)$$

перепишем в виде

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K_2(x, s) \varphi(s) ds + f(x). \quad (5)$$

Правую часть равенства (5) подставим вместо $\varphi(x)$ под интеграл в (4). После простых преобразований мы получим для $\varphi(x)$ новое интегральное уравнение:

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int_a^b K_2(x, s) \varphi(s) ds + f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) ds.$$

Под интеграл вместо $\varphi(x)$ опять подставим правую часть равенства (5), и т. д. Прделав эту операцию n раз, мы получим для $\varphi(x)$ интегральное уравнение с ограниченным ядром:

$$\begin{aligned} & \varphi(x) - \lambda^n \int_a^b K_n(x, s) \varphi(s) ds = \\ & = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) ds + \dots + \lambda^{n-1} \int_a^b K_{n-1}(x, s) f(s) ds, \quad (6) \end{aligned}$$

решать которое можно обычными методами. Уравнения (4) и (6) могут оказаться неэквивалентными. Однако, в практически интересных случаях эту трудность удаётся обойти.

§ 2. СИММЕТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ТЕОРИЯ ГИЛЬБЕРТА-ШМИДТА)

11. Симметричные ядра. Скалярное произведение. *Симметричным* называется ядро, совпадающее со своим сопряжённым. Такое ядро характеризуется тождеством

$$K(x, s) = \overline{K(s, x)}. \quad (1)$$

Если ядро — действительное, то его симметричность определяется равенством

$$K(x, s) = K(s, x). \quad (2)$$

Интегральное уравнение с симметричным ядром называется *симметричным*.

Если ядро симметрично, то, как легко проверить, все его интегрированные ядра также симметричны.

Примеры. Ядра $x + s$, $\ln|x - s|$, $i(x - s)$ — симметричные. Ядро $i(x + s)$ — несимметричное, так как в этом случае

$$\overline{K(s, x)} = -K(x, s).$$

Важную роль в дальнейшем играет понятие скалярного произведения. *Скалярным произведением* (φ, ψ) двух функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называется интеграл

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx. \quad (3)$$

Отметим несколько простых свойств скалярного произведения, непосредственно вытекающих из его определения.

а) Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ суть суммы нескольких слагаемых, то скалярное умножение совершается по правилу умножения многочленов; так, например,

$$(\varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2) = (\varphi_1, \psi_1) + (\varphi_1, \psi_2) + (\varphi_2, \psi_1) + (\varphi_2, \psi_2). \quad (4)$$

б) При перестановке сомножителей скалярное произведение заменяется комплексно-сопряжённым:

$$(\psi, \varphi) = \overline{(\varphi, \psi)}. \quad (5)$$

в) Постоянный множитель при первом сомножителе можно вынести за знак скалярного произведения:

$$(\lambda\varphi, \psi) = \lambda(\varphi, \psi). \quad (6)$$

г) Постоянный множитель при втором сомножителе можно вынести за знак скалярного произведения, предварительно заменив его комплексно-сопряжённым:

$$(\varphi, \lambda\psi) = \overline{\lambda}(\varphi, \psi). \quad (7)$$

д) Скалярное произведение функции на самое себя есть величина неотрицательная:

$$(\varphi, \varphi) = \int_a^b |\varphi^2(x)| dx > 0; \quad (8)$$

оно обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\varphi(x) \equiv 0$ ¹⁾.

Величина $\sqrt{(\varphi, \varphi)}$ называется *нормой* $\varphi(x)$ и обозначается через $\|\varphi\|$.

Функция, норма которой равна единице, называется *нормированной*.

Ортогональность двух функций означает обращение в нуль их скалярного произведения.

Основное свойство симметричных ядер, которое, в сущности, определяет всю теорию симметричных интегральных уравнений, состоит в легко доказываемом тождестве

$$(K\varphi, \psi) = (\varphi, K\psi), \quad (9)$$

где для краткости мы ввели обозначение²⁾:

$$K\varphi = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds. \quad (10)$$

12. Ортонормированные системы и ряды Фурье. Последовательность функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (1)$$

называется *ортгогональной*, если эти функции попарно ортогональны. Мы будем называть последовательность *ортонормированной системой*, если она ортогональная и норма каждой функции равна единице. Если последовательность (1) — ортонормированная, то

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k \end{cases} \quad (2)$$

¹⁾ Точнее, $(\varphi, \varphi) = 0$, если $\varphi(x)$ отлично от нуля только на множестве меры нуль. Так, например, если $\varphi(x)$ не равна нулю только на конечном или счётном множестве точек, то $(\varphi, \varphi) = 0$. Мы не будем отличать таких функций от функций, тождественно равных нулю.

²⁾ Этим обозначением мы будем пользоваться и в дальнейшем.

Всякую ортогональную систему легко превратить в ортонормированную — достаточно каждую функцию разделить на её норму.

Исходя из произвольной ортонормированной системы, можно построить теорию «рядов Фурье», аналогичную теории тригонометрических рядов. Наметим вкратце эту теорию.

Для всякой функции $f(x)$ ¹⁾ можно поставить задачу: подобрать коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ так, чтобы квадратичная погрешность приближённого равенства

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \quad (3)$$

была наименьшей. Квадратичная погрешность, по определению, равна

$$\delta_n = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right|^2 dx.$$

Обозначим

$$a_k = (f, \varphi_k) = \int_a^b f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx. \quad (4)$$

Числа a_k называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ относительно ортонормированной системы (1). Простые преобразования дают:

$$\delta_n = \int_a^b |f(x)|^2 dx + \sum_{k=1}^n |\alpha_k - a_k|^2 - \sum_{k=1}^n |a_k|^2.$$

Отсюда видно, что δ_n будет наименьшей, если $\alpha_k = a_k$, т. е. если в качестве коэффициентов α_k взяты коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Наименьшее значение δ_n равно

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^n |a_k|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |a_k|^2. \quad (5)$$

¹⁾ Относительно $f(x)$ мы предполагаем только, что она сама и её квадрат абсолютно интегрируемы.

Так как эта величина неотрицательна, то

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 < \|f\|^2.$$

Левая часть последнего неравенства есть отрезок ряда с положительными числами

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2,$$

и наше неравенство показывает, что отрезки этого ряда ограничены. Отсюда следует, что указанный ряд сходится, причём имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \|f\|^2, \quad (6)$$

называемое *неравенством Бесселя*.

Заставляя n в приближённом равенстве (3) стремиться к бесконечности, мы приходим к ряду Фурье функции $f(x)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x). \quad (7)$$

Мы будем говорить, что функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье по функциям $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$, если ряд (7), соответствующий этой функции, сходится и его сумма равна $f(x)$. Если $f(x)$ разлагается в ряд Фурье (7), то, как можно доказать, имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \|f\|^2, \quad (8)$$

называемое *равенством Парсеваля*.

Относительно ряда (7) возникают два основных вопроса: при каких условиях этот ряд сходится, и если он сходится, то совпадает ли его сумма с $f(x)$? Первый вопрос представляет в общем случае большие трудности для разрешения, однако в практически важных случаях удаётся получить простые достаточные условия равномерной сходимости ряда Фурье.

Переходим ко второму вопросу. Ортогональную систему будем называть *неполной*, если существует функция, не равная тождественно нулю и ортогональная ко всем функциям системы. В противном случае система называется *полной*. Так, например, система

$$\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots,$$

ортогональная в промежутке $(-\pi, \pi)$, — неполная, так как функция $\varphi(x) \equiv 1$ ортогональна ко всем функциям указанной системы. В теории тригонометрических рядов доказывается, что система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots,$$

ортогональных в промежутке $(-\pi, \pi)$, — полная.

Если система (1) — полная и ряд (7) сходится равномерно, то его сумма равна $f(x)$. Приведём доказательство этого простого и важного предложения. Положим

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) - f(x).$$

Функция $\omega(x)$ ортогональна ко всем функциям $\varphi_k(x)$. Действительно, ряд (7) сходится равномерно, и потому его можно интегрировать почленно. Отсюда и следует, что скалярные произведения (ω, φ_k) равны нулю:

$$(\omega, \varphi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\varphi_n, \varphi_k) - (f, \varphi_k) = a_k - a_k = 0.$$

Но так как система (1) — полная, то $\omega(x) \equiv 0$, и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = f(x).$$

Можно показать, что если система (1) — полная, то для любой функции $f(x)$ неравенство Бесселя переходит в равенство Парсеваля.

В приложениях приходится иметь дело также с рядами Фурье несколько более общей природы. Пусть $r(x)$ —

некоторая неотрицательная функция. Будем говорить, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ортогональны с весом $r(x)$, если

$$\int_a^b r(x) \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = 0. \quad (9)$$

Систему (1) будем называть ортонормированной с весом $r(x)$, если имеют место соотношения

$$\int_a^b r(x) \varphi_i(x) \overline{\varphi_k(x)} dx = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases} \quad (10)$$

Совершенно так же, как и выше, мы приходим к понятию ряда Фурье функции $f(x)$ по системе функций, ортонормированных с некоторым весом. Коэффициенты Фурье определяются по формуле

$$a_k = \int_a^b r(x) f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx; \quad (11)$$

неравенство Бесселя и равенство Парсеваля записываются в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \int_a^b r(x) |f(x)|^2 dx \quad (12)$$

и, соответственно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \int_a^b r(x) |f(x)|^2 dx. \quad (13)$$

Понятие полноты и вытекающие из него следствия переносятся без изменений и на этот случай.

Приведём несколько примеров ортогональных систем.

а) Система $\varphi_k(x) = e^{ikx}$, где k принимает все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$, ортогональна в $(-\pi, \pi)$. Она ненормированная, так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_k(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

Очевидно, система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

— ортонормированная в промежутке $(-\pi, \pi)$.

б) Функция

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots$$

образуют ортогональную систему в промежутке $(0, \pi)$. В том же промежутке образуют ортогональную систему и функции $\sin kx$, $k=1, 2, \dots$

в) Полиномы Лежандра

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ортогональны в промежутке $(-1, 1)$. Они удовлетворяют равенствам

$$\int_{-1}^{+1} P_i(x) P_k(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ \frac{2}{2k+1}, & i = k. \end{cases}$$

г) Полиномы Чебышева

$$T_k(x) = \frac{1}{2^{k-1}} \cos(k \arccos x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ортогональны с весом

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

в промежутке $(-1, 1)$. Их можно нормировать, умножив $T_k(x)$ на величину $\sqrt{\frac{2^{2k-1}}{\pi}}$.

д) Пусть $J_n(x)$ означает функцию Бесселя первого рода индекса n , и пусть $\alpha_{k,n}$ суть её положительные корни. Будем считать, что $n > -1$. Система функций

$$J_n(\alpha_{k,n} x), \quad k = 1, 2, \dots$$

— ортогональная с весом $r(x) = x$ в промежутке $(0, 1)$. Эти функции удовлетворяют соотношениям

$$\int_0^1 x J_n(\alpha_{i,n} x) J_n(\alpha_{k,n} x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ J_{n+1}^2(\alpha_{k,n}), & i = k. \end{cases}$$

Системы а) — д) — полные.

Приведённые нами системы играют важную роль во многих прикладных вопросах. Число примеров таких систем можно значительно увеличить.

13. Основные теоремы о симметричных уравнениях.

Теорема 1. Если ядро $K(x, s)$ — симметричное и не равно тождественно нулю, то оно имеет по крайней мере одно характеристическое число.

Существует несколько доказательств этой важнейшей теоремы; каждое из них служит основой некоторого способа приближённого вычисления характеристических чисел. Эти способы подробно рассматриваются в следующих пунктах. Следует отметить, что для несимметричных ядер теорема 1 неверна: существуют несимметричные уравнения, не имеющие характеристических чисел. Таковы, например, уравнения типа Вольтерра.

Теорема 2. Все характеристические числа симметричного ядра — действительные.

Приведём доказательство этой теоремы. Пусть λ_0 и $\varphi_0(x)$ — характеристическое число и соответствующая ему собственная функция ядра $K(x, s)$. По определению, они удовлетворяют тождеству

$$\varphi_0(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s) \varphi_0(s) ds = 0, \quad (1)$$

или, если воспользоваться обозначением, которое мы ввели в п. 11,

$$\varphi_0(x) - \lambda_0 K \varphi_0 = 0.$$

Умножим это тождество на $\overline{\varphi_0(x)}$ и проинтегрируем по x в пределах от a до b . Мы получим тогда

$$\|\varphi_0(x)\|^2 - \lambda_0 (K \varphi_0, \varphi_0) = 0,$$

откуда

$$\lambda_0 = \frac{\|\varphi_0(x)\|^2}{(K \varphi_0, \varphi_0)}. \quad (2)$$

Числитель в (2) — положительный; далее, по основному свойству симметричного ядра [формула (9) п. 11]

$$(K \varphi_0, \varphi_0) = (\varphi_0, K \varphi_0).$$

Но перестановка множителей в скалярном произведении

равносильна его замене комплексно-сопряжённым числом:

$$(\varphi_0, K\varphi_0) = \overline{(K\varphi_0, \varphi_0)}.$$

Таким образом,

$$(K\varphi_0, \varphi_0) = \overline{(K\varphi_0, \varphi_0)}.$$

Число $(K\varphi_0, \varphi_0)$, равное своему сопряжённому, — действительное, и теперь из (2) следует, что значение λ_0 — также действительное.

Теорема 3. Симметричное ядро тогда и только тогда имеет конечное число характеристических чисел, когда оно вырожденное.

Сформулированные здесь три теоремы имеют простой механический смысл. К симметричным интегральным уравнениям приводятся в ряде случаев задачи о колебаниях упругих систем, причём характеристические числа уравнения оказываются просто связанными с частотами собственных колебаний системы. Первые две теоремы утверждают существование собственных частот. Третья теорема позволяет по виду ядра судить, будет ли спектр частот конечным или бесконечным.

Теорема 4. Собственные функции симметричного ядра, соответствующие различным характеристическим числам, ортогональны.

В связи с теоремой 4 сделаем следующее замечание. Пусть некоторому характеристическому числу соответствуют n линейно независимых собственных функций. Любая их линейная комбинация также есть собственная функция. С помощью простого процесса, известного под названием процесса ортогонализации¹⁾, можно из данных n линейно независимых функций построить n линейных комбинаций, которые будут нормированными и попарно ортогональными, причём данные функции, в свою очередь, суть линейные комбинации вновь построенных. Но в таком случае все собственные функции симметричного ядра можно сделать попарно ортогональными. Действительно, если собственные функции соответствуют одному и тому же характеристическому числу, то они будут ортогональны благодаря

¹⁾ См., например, [3] или [7].

процессу ортогонализации; если же они соответствуют разным характеристическим числам, то они ортогональны в силу теоремы 4. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме:

Теорема 5. *Последовательность собственных функций симметричного ядра можно сделать ортонормированной.*

В последующем мы всегда будем считать, что последовательность собственных функций симметричного ядра — ортонормированная, в соответствии с теоремой 5. Условимся ещё, выписывая последовательность характеристических чисел, повторять каждое из них столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных функций. Мы можем тогда считать, что каждому характеристическому числу соответствует только одна собственная функция; при этом среди характеристических чисел могут оказаться равные. Условимся также нумеровать характеристические числа в порядке возрастания их абсолютных величин. Таким образом, если λ_m и λ_n — два характеристических числа и $m < n$; то $|\lambda_m| < |\lambda_n|$.

Теорема 6. (Гильберта-Шмидта). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ — характеристические числа симметричного ядра $K(x, s)$ и $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ — соответствующие фундаментальные функции. Пусть, далее, $h(x)$ — функция, квадрат которой абсолютно интегрируем в промежутке (a, b) . Если интеграл

$$\int_a^b |K^2(x, s)| ds$$

ограничен, то функция

$$f(x) = Kh = \int_a^b K(x, s) h(s) ds \quad (3)$$

разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по ортонормированной системе функций $\varphi_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x); \quad f_n = (f, \varphi_n).$$

Коэффициенты Фурье f_n функции $f(x)$ оказываются связанными

с коэффициентами Фурье h_n функции $h(x)$ соотношением

$$f_n = \frac{h_n}{\lambda_n}, \quad h_n = (h, \varphi_n),$$

так что

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n(x). \quad (4)$$

Существенно отметить, что мы здесь не предполагаем ни сходимости ряда Фурье функции $h(x)$, ни полноты ортонормированной системы собственных функций.

14. Определение первого характеристического числа по способу Ритца.

Теорема. Обратная величина абсолютного значения наименьшего (по абсолютному значению) характеристического числа симметричного ядра равна максимуму величины

$$|(K\varphi, \varphi)| = \left| \int_a^b \int_a^b K(x, s) \varphi(x) \overline{\varphi(s)} dx ds \right| \quad (1)$$

при условии

$$(\varphi, \varphi) = \int_a^b |\varphi^2(x)| dx = 1. \quad (2)$$

Доказательство этой теоремы в общем неэлементарно; для непрерывного ядра сравнительно простое доказательство приведено в книге Куранта и Гильберта [4].

Сформулированная нами теорема позволяет воспользоваться прямыми методами вариационного исчисления для нахождения наименьшего характеристического числа. В частности, можно воспользоваться методом Ритца. Выберем какую-либо последовательность функций

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots, \quad (3)$$

которую будем считать полной, придавая термину «полная последовательность» такой смысл: какова бы ни была функция $f(x)$, всегда можно подобрать число n и коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ так, чтобы

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k(x) \right\| < \varepsilon,$$

где ε — любое положительное число. Иначе говоря, мы называем последовательность (3) полной, если можно подобрать коэффициенты α_k и число n так, чтобы средняя квадратичная погрешность приближённого равенства

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k(x)$$

была сколь угодно малой. В частности, в качестве последовательности (3) можно взять любую полную ортонормированную последовательность. Положим в (1)

$$\varphi(x) = a_1 \psi_1(x) + a_2 \psi_2(x) + \dots + a_n \psi_n(x),$$

где a_1, a_2, \dots, a_n — произвольные коэффициенты, подчинённые условию, что $(\varphi, \varphi) = 1$. Это условие принимает вид

$$\sum_{i,k=1}^n a_i \bar{a}_k (\psi_i, \psi_k) = 1, \quad (4)$$

а выражение (1) переходит в следующее:

$$|(K\varphi, \varphi)| = \left| \sum_{i,k=1}^n A_{ik} a_i \bar{a}_k \right|,$$

где

$$A_{ik} = \int_a^b \int_a^b K(x, s) \psi_i(x) \overline{\psi_k(s)} dx ds.$$

В силу симметричности ядра, $A_{ik} = \bar{A}_{ki}$.

Будем искать максимум выражения (5) при условии (4). Это — обычная задача на максимум функции многих переменных. Решив её и вычислив максимум величины (5), мы тем самым найдём приближённое значение абсолютной величины наименьшего характеристического числа. Можно доказать, что таким образом мы получим приближённое значение с избытком и что оно стремится к точному значению при $n \rightarrow \infty$.

Отметим несколько случаев, когда задача может быть упрощена.

а) Если ядро $K(x, s)$ — действительное и функции $\psi_i(x)$ также выбраны действительными, то можно ограничиться

рассмотрением только действительных коэффициентов a_k .
Вместо (4) и (5) мы получаем выражения

$$\sum_{i, k=1}^n a_i a_k (\psi_i, \psi_k) = 1, \quad (4_1)$$

$$|(K\psi, \psi)| = \left| \sum_{i, k=1}^n A_{ik} a_i a_k \right|, \quad (5_1)$$

причём

$$A_{ik} = \int_a^b \int_a^b K(x, s) \psi_i(x) \psi_k(s) dx ds.$$

Случай действительного ядра — наиболее важный для интересующих нас приложений. Этим случаем мы здесь и ограничимся.

б) Если последовательность (3) — ортонормированная, то равенство (4₁) принимает более простой вид

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1.$$

в) Особенно упрощается задача, если известно, что выражение $(K\psi, \psi)$ принимает только положительные значения¹⁾. В этом случае нужно решить задачу о максимуме квадратичной формы

$$(K\psi, \psi) = \sum_{i, k=1}^n A_{ik} a_i a_k$$

при условии (4₁). Формула (2) п. 13 показывает, что в рассматриваемом случае характеристические числа положительны и решение задачи о максимуме формы (5₁) сразу даёт искомое приближённое значение характеристического числа.

По методу неопределённых множителей Лагранжа максимум формы (5₁) находится следующим образом. Обозначим

$$F = \sum_{i, k=1}^n A_{ik} a_i a_k, \quad \Phi = F - \sigma \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad (6)$$

¹⁾ Ядра, обладающие этим свойством, называются *положительными*.

где σ — неопределённый множитель. Экстремальные значения переменных a_i определяются из уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial a_i} - 2\sigma a_i = 0,$$

или, в раскрытом виде,

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} a_k - \sigma a_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Система (7) — линейная однородная. Коэффициенты a_i не равны одновременно нулю, так как $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, поэтому определитель системы (7) должен равняться нулю, и мы получаем уравнение для неизвестной σ :

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \sigma & A_{12} & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \sigma & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{nn} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Умножая (7) на a_i , суммируя по всем i и пользуясь тем, что $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, мы найдём, что $\sigma = F$. При этом под F следует, очевидно, понимать её экстремальное значение. Очевидно также, что максимальное значение F равно наибольшему из корней уравнения (8).

Решение уравнения (8) значительно упрощается, если воспользоваться методом акад. А. Н. Крылова для раскрытия определителя в левой части¹⁾.

Вместе с характеристическим числом бывает важно определить и соответствующую собственную функцию. Эта задача значительно сложнее, чем задача определения

¹⁾ Подробно об этом методе см. статью А. Н. Крылова «О численном решении уравнения, которым определяются частоты малых колебаний материальной системы». Известия АН СССР. Отдел математических и естественных наук, 1931, № 4.

характеристического числа. Она просто решается, однако, если заранее известно, что найденному нами характеристическому числу отвечает только одна собственная функция. В этом случае достаточно найти a_1, a_2, \dots, a_n из системы (7); выражение

$$\sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x)$$

приближённо равно искомой собственной функции.

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s) \varphi(s) ds = 0,$$

где

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{x} x(x-s), & x \leq s \\ \frac{1}{x} s(x-x), & x \geq s \end{cases} \quad (x > 1). \quad (9)$$

К этому уравнению мы приходим при решении одной из задач теории теплопроводности. Можно доказать, что ядро (9) — положительное. За последовательность (3) примем ортонормированную в $(0, 1)$ последовательность

$$\psi_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x, \quad k = 1, 2, \dots$$

Найдём приближённые значения наименьшего характеристического числа, полагая $n = 2, 3, 4$. Примем для определённости $\lambda = 2$. Для коэффициентов A_{ik} легко получим:

$$A_{ik} = \frac{(-1)^{i+k}}{ik\pi^2}, \quad i \neq k; \quad A_{ii} = \frac{2}{i^2\pi^2}.$$

Беря $n = 2$, мы будем решать задачу о максимуме квадратичной формы

$$F = \frac{1}{\pi^2} \left(2a_1^2 - a_1 a_2 + \frac{1}{2} a_2^2 \right)$$

при условии $a_1^2 + a_2^2 = 1$. Уравнение (8) принимает в нашем случае вид ($\tau = \sigma\pi^2$)

$$\begin{vmatrix} 2 - \tau & -1 \\ -1 & 2 - 4\tau \end{vmatrix} = 0$$

или $4\tau^2 - 10\tau + 3 = 0$. Большой корень этого уравнения $\tau \approx 2,15$. Отсюда

$$\lambda_1 \approx \frac{\pi^2}{2,15} \approx 4,59.$$

Беря $n = 3$, мы получим для $\tau = \pi^2$ уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\tau & -1 & 1 \\ -1 & 2-4\tau & -1 \\ 1 & -1 & 2-9\tau \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$18\tau_3 - 49\tau^2 + 21\tau - 2 = 0,$$

наибольший корень которого равен 2,24. Это даёт для λ_1 значение $\lambda_1 \approx 4,40$.

Взяв $n = 4$, мы придём к уравнению

$$\begin{vmatrix} 2-\tau & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2-4\tau & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2-9\tau & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2-16\tau \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$576\tau^4 - 1640\tau^3 + 819\tau^2 - 120\tau + 5 = 0.$$

Наибольший его корень равен 2,258, что даёт $\lambda_1 \approx 4,377$. Более точное значение λ_1 , полученное другим способом, равно 4,117.

15. Определение первого характеристического числа через следы ядра. В формуле Гильберта-Шмидта (4) п. 13 положим $h(s) = K(s, t)$. Мы получим тогда

$$K_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n(t)}{\lambda_n} \varphi_n(x),$$

где $\omega_n(t)$ суть коэффициенты Фурье ядра $K(x, t)$ относительно системы его собственных функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$. Нетрудно вычислить эти коэффициенты. По формулам для коэффициентов Фурье

$$\omega_n(t) = \int_a^b K(x, t) \overline{\varphi_n(x)} dx$$

или, так как ядро симметрично,

$$\omega_n(t) = \int_a^b \overline{K(t, x)} \overline{\varphi_n(x)} dx.$$

Но $\varphi_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t) dt.$$

Заменяв обозначение x на t и наоборот, мы отсюда найдём:

$$\int_a^b K(t, x) \varphi_n(x) dx = \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(t),$$

и, окончательно, $\omega_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} \overline{\varphi_n(t)}$. Теперь

$$K_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n^2}. \quad (1)$$

Аналогично найдём

$$K_3(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n^3},$$

и вообще

$$K_m(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n^m}. \quad (2)$$

Чтобы получить, например, формулу для $K_2(x, t)$, можно применить опять формулу Гильберта-Шмидта, положив в ней $h(s) = K_2(s, t)$. При этом следует учесть, что по формуле (1) n -ый коэффициент Фурье ядра $K_2(x, t)$ равен $\frac{1}{\lambda_n^2} \overline{\varphi_n(t)}$.

Можно доказать, что ряд (2) сходится равномерно по обоим переменным x, t , если $m \geq 3$ и выполнено условие, которое мы обычно принимаем:

$$\int_a^b |K(x, t)| dt < C, \quad C = \text{const.}$$

Что касается ряда (1), то он сходится равномерно по каждой из переменных x и t , когда значение второй переменной фиксировано. Это вытекает из теоремы Гильберта-Шмидта.

Ряд (2) называется *билинейным рядом* ядра $K_m(x, t)$ ¹⁾.

Введём следующее понятие. Интеграл

$$A_m = \int_a^b K_m(x, x) dx$$

будем называть m -ым следом ядра $K(x, s)$. Если ядро — симметричное, то его следы просто связаны с характеристическими числами, а именно

$$A_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m}, \quad m \geq 2. \quad (3)$$

Формулу (3) легко получить, положив в (2) $t=x$ и проинтегрировав в пределах от a до b . При этом необходимо учесть, что собственные функции нормированы, так что

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx = 1.$$

Следы с чётными индексами все положительны, так как

$$A_{2m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{2m}}, \quad (4)$$

а характеристические числа λ_n — действительные.

Заметим ещё, что

$$A_{2m} = \int_a^b \int_a^b |K_m(x, t)|^2 dx dt. \quad (5)$$

¹⁾ Можно построить билинейный ряд и для ядра $K(x, s)$. Он имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n}.$$

Ряд (*), вообще говоря, расходится. Можно доказать, однако, что он сходится в среднем к $K(x, s)$. Если ряд (*) сходится равномерно по x и по s , то его сумма равна ядру $K(x, s)$.

Действительно, по формуле (8) п. 2

$$K_{2m}(x, s) = \int_a^b K_m(x, t) K_m(t, s) dt,$$

или, в силу симметричности ядра,

$$K_{2m}(x, s) = \int_a^b K_m(x, t) \overline{K_m(s, t)} dt.$$

Отсюда

$$K_{2m}(x, x) = \int_a^b |K_m(x, t)|^2 dt.$$

Интегрируя последнее равенство по x , мы и получим формулу (5).

Покажем, как можно найти наименьшее характеристическое число, зная следы ядра. Пусть числу λ_1 соответствует p линейно независимых собственных функций, а числу $-\lambda_1$, если оно тоже характеристическое, соответствует q линейно независимых собственных функций, так что в ряде (4) член, содержащий λ_1^{2m} , входит $r = p + q$ раз. Перепишем (4) в виде

$$A_{2m} = \frac{r}{\lambda_1^{2m}} (1 + \epsilon_m), \quad (6)$$

где через ϵ_m обозначена величина

$$\epsilon_m = \sum_{n=r+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{2m}.$$

Пользуясь тем, что $|\lambda_n| > |\lambda_1|$ при $n > r$, легко можно доказать, что $\epsilon_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Теперь из (6) следует:

$$\lambda_1^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}; \quad \lambda_1^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{1}{A_{2m}}}. \quad (7)$$

Из (6) получаются также приближённые формулы, годные при достаточно большом m :

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}; \quad |\lambda_1| \approx \frac{2m\sqrt{r}}{2m\sqrt{A_{2m}}}. \quad (7_1)$$

Из (3) можно получить формулу, дающую λ_1 вместе со знаком:

$$\lambda_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m+1/\sqrt{A_{2m+1}}}, \quad (8)$$

и соответствующую приближённую формулу

$$\lambda_1 \approx \frac{2m+1/\sqrt{r}}{2m+1/\sqrt{A_{2m+1}}}. \quad (8_1)$$

Пользование формулой (8₁) можно рекомендовать только тогда, когда знак λ_1 другим способом определить не удаётся.

Из формулы (6) следует

$$|\lambda_1| = \frac{2m\sqrt{r(1+\varepsilon_m)}}{2m/A_{2m}} > \sqrt{\frac{r}{A_{2m}}}.$$

Таким образом, вторая из формул (7₁) даёт значение $|\lambda_1|$ с недостатком. Первая формула (7₁) даёт значение $|\lambda_1|$ с избытком. Действительно, очевидно, $\varepsilon_m > \varepsilon_{m+1}$, и поэтому

$$\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}} = \lambda_1^2 \frac{1+\varepsilon_m}{1+\varepsilon_{m+1}} > \lambda_1^2.$$

Возьмём в качестве примера рассмотренное в предшествующем пункте ядро

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-s), & x \leq s, \\ \frac{1}{2}s(2-x), & x > s. \end{cases}$$

Вычислим его второе итерированное ядро. Это позволит нам определить следы A_2 и A_4 . Так как $K(x, s)$ симметрично, то достаточно найти $K_2(x, s)$ только при $s < x$. Имеем

$$\begin{aligned} K_2(x, s) &= \int_0^1 K(x, t) K(t, s) dt = \frac{1}{4} \int_0^s (2-x)(2-s)t^2 dt + \\ &+ \frac{1}{4} \int_s^x t(2-t)s(2-x) dt + \frac{1}{4} \int_x^1 xs(2-t)^2 dt = \\ &= \frac{1}{12} [-s^3(2-x) + s(x^3 - 6x^2 + 7x)] \quad (s < x). \end{aligned}$$

Значения $K_2(x, s)$ при $x < s$ мы получим, переставив в последнем выражении аргументы x и s :

$$K_2(x, s) = \frac{1}{12} [-x^3(2-s) + x(s^3 - 6s^2 + 7s)] \quad (x < s).$$

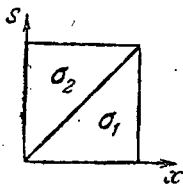
Это вытекает из симметричности ядра $K_2(x, s)$.

Вычислим следы A_2 и A_4 . По формуле (5)

$$A_2 = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, s) dx ds.$$

Знак абсолютной величины можно опустить, так как ядро $K(x, s)$ — действительное. Последнюю формулу несколько преобразуем. Её можно представить в виде

$$A_2 = \int_{\sigma} K^2(x, s) dx ds,$$



где σ — квадрат $0 \leq x \leq 1, 0 \leq s \leq 1$ (черт. 2). Проведя диагональ $x=s$, разобьём σ на два треугольника σ_1 и σ_2 , так что

$$\text{Черт. 2.} \quad A_2 = \int_{\sigma_1} K^2(x, s) dx ds + \int_{\sigma_2} K^2(x, s) dx ds.$$

Но в силу симметричности $K(x, s)$ интегралы по σ_1 и σ_2 совпадают; поэтому

$$A_2 = 2 \int_{\sigma_1} K^2(x, s) dx ds = 2 \int_0^1 dx \int_0^x K^2(x, s) ds.$$

И вообще

$$A_{2m} = 2 \int_0^1 dx \int_0^x K_m^2(x, s) ds.$$

В нашем примере

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^x s^2 (2-x)^2 ds = \frac{11}{180}.$$

Точно так же

$$A_4 = \frac{1}{72} \int_0^1 dx \int_0^x [-s^3(2-x) + s(x^3 - 6x^2 + 7x)]^2 ds = \frac{113}{32400}.$$

Во второй из формул (7₁) положим $m=2$. Тогда¹⁾

$$|\lambda_1| \approx \frac{1}{\sqrt[4]{A_4}}$$

или, так как $\lambda_1 > 0$ (см. п. 14),

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[4]{A_4}} = 4,115.$$

Это даёт нам приближённое значение λ_1 с недостатком, очень близкое к точному. Мы видим, что формула (7₁) даёт гораздо более точный результат, чем способ Ритца. Хороший результат получается также, если воспользоваться первой из формул (7₁). Именно, полагая в ней $m=1$, получим значение λ с избытком.

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{\overline{A_2}}{A_4}} = 4,186.$$

16. Способ Келлога. Келлог предложил изящный и удобный, хотя и не вполне надёжный, способ определения характеристического числа симметричного ядра. Способ Келлога состоит в следующем. Возьмём произвольную функцию $\omega(x)$ и, исходя из неё, построим последовательность

$$\left. \begin{aligned} \omega_1(x) &= \int_a^b K(x, s) \omega(s) ds, \\ \omega_2(x) &= \int_a^b K(x, s) \omega_1(s) ds, \\ &\dots \dots \dots \\ \omega_n(x) &= \int_a^b K(x, s) \omega_{n-1}(s) ds, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sqrt[4]{\|\omega_n\|}} = \mu, \quad (2)$$

¹⁾ Можно доказать, что в нашем примере $r=1$.

вообще говоря, существует и равен абсолютной величине одного из характеристических чисел ядра $K(x, s)$. Далее, существует предельная функция

$$\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_{2n}(x)}{\|\omega_{2n}\|}, \quad (3)$$

которая при некоторых условиях представляет собой собственную функцию ядра $K(x, s)$, соответствующую характеристическому числу $+\mu$ или $-\mu$. Напомним, что нормой произвольной функции $f(x)$ мы называем величину

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f^2(x)| dx}.$$

Выясним, в каких условиях метод Келлога даёт положительный результат. Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ — собственные функции ядра $K(x, s)$, и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ — соответствующие им характеристические числа. Может случиться, что $\omega(x)$ ортогональна ко всем функциям $\varphi_i(x)$. В этом случае, как показывает формула Гильберта-Шмидта,

$$\omega_1(x) = \int_a^b K(x, s) \omega(s) ds = 0,$$

и все члены последовательности (1) обращаются в нуль. В этом случае способ Келлога ничего не даёт. Пусть теперь $\omega(x)$ ортогональна не ко всем функциям $\varphi_i(x)$. Обозначим через $\varphi_r(x)$ первую из собственных функций, к которой $\omega(x)$ не ортогональна. Формула Гильберта-Шмидта даёт теперь

$$\omega_1(x) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} \varphi_k(x), \quad a_r \neq 0,$$

где $a_k = (\omega, \varphi_k)$ — коэффициенты Фурье функции $\omega(x)$ относительно ортонормированной системы $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$. Повторно применив ту же формулу Гильберта-Шмидта, получим:

$$\omega_n(x) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k^n} \varphi_k(x). \quad (4)$$

Из (4) следует, что

$$\|\omega_n\| = \sqrt{\sum_{k=r}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{\lambda_k^{2n}}}. \quad (5)$$

Докажем это. Формула (4) показывает, что коэффициенты Фурье функции $\omega_n(x)$ относительно функций $\psi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ равны $\frac{a_k}{\lambda_k^n}$. Умножим теперь (4) на $\overline{\omega_n(x)}$ и проинтегрируем. Вспоминая определение нормы, получим:

$$\|\omega_n\|^2 = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k^n} (\varphi_k, \omega_n).$$

Но $(\varphi_k, \omega_n) = \overline{(\omega_n, \varphi_k)}$, а скалярное произведение (ω_n, φ_k) есть k -ый коэффициент Фурье $\omega_n(x)$ и равен $\frac{a_k}{\lambda_k^n}$. Подставив это в последнее равенство, получим формулу (5).

Может случиться, что числу λ_r соответствует не одна, а несколько собственных функций. Далее, может оказаться, что $-\lambda_r$ также есть характеристическое число. В таком случае ряд (5) будет содержать несколько членов с знаменателем λ_r^{2n} . Пусть это будут члены с индексами $r, r+1, \dots, r'$. Обозначим

$$A^2 = |a_r|^2 + |a_{r+1}|^2 + \dots + |a_{r'}|^2.$$

Величина A отлична от нуля, так как $a_r \neq 0$. Перепишем теперь формулу (5) в виде

$$\|\omega_n\| = \frac{A}{|\lambda_r|^n} \sqrt{1 + \alpha_n},$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{A} \sum_{k=r'+1}^{\infty} |a_k|^2 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_k}\right)^{2n}.$$

Нетрудно доказать, что $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$: Извлекая корень n -ой степени и переходя к пределу, получим:

$$\frac{1}{|\lambda_r|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|\omega_n\|}.$$

Составим теперь отношение

$$\frac{\omega_{2n}(x)}{\|\omega_{2n}\|} = \frac{\lambda_r^{2n}}{A\sqrt{1+\alpha_{2n}}} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{a_k \varphi_k(x)}{\lambda_k^{2n}}.$$

Выделив в сумме члены, содержащие λ_r^{2n} в знаменателе, получим:

$$\frac{\omega_{2n}(x)}{\|\omega_{2n}\|} = \sum_{k=r}^{r'} \frac{a_k \varphi_k(x)}{A\sqrt{1+\alpha_n}} + \frac{1}{A\sqrt{1+\alpha_n}} \sum_{k=r'+1}^{\infty} a_k \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_k}\right)^{2n} \varphi_k(x).$$

Легко доказать, что при $n \rightarrow \infty$ вторая сумма стремится к нулю. Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_{2n}(x)}{\|\omega_{2n}\|} = \sum_{k=r}^{r'} \frac{a_k}{A} \varphi_k(x). \quad (6)$$

Допустим теперь, что из двух чисел λ_r и $-\lambda_r$ только одно — характеристическое. Тогда сумма в (6) есть линейная комбинация собственных функций, отвечающих числу λ_r (или $-\lambda_r$), и, следовательно, сама есть собственная функция, отвечающая тому же числу. При этом указанная сумма не равна тождественно нулю, потому что функции $\varphi_r(x), \varphi_{r+1}(x), \dots, \varphi_{r'}(x)$ линейно независимы и $a_r \neq 0$.

Если $\omega(x)$ не ортогональна к $\varphi_r(x)$, то по способу Келлога определится наименьшее характеристическое число и соответствующая ему собственная функция.

Если хорошо выбрать исходную функцию $\omega(x)$, то можно добиться сравнительной простоты вычислений. В этом большое преимущество метода Келлога. Существенный его недостаток заключается в том, что нам заранее неизвестно, не будет ли $\omega(x)$ ортогональна к некоторым соб-

ственным функциям, и остаётся неизвестным, которое из характеристических чисел удалось определить.

Заметим, что абсолютную величину характеристического числа можно определить также по формуле

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\omega_n\|}{\|\omega_{n+1}\|}. \quad (2_1)$$

Если вместо (2) и (2₁) взять соответствующие приближённые формулы

$$\mu \approx \sqrt[n]{\frac{1}{\|\omega_n\|}}, \quad (7)$$

$$\mu \approx \frac{\|\omega_n\|}{\|\omega_{n+1}\|}, \quad (7_1)$$

то формула (7) даёт значение μ с избытком. О формуле (7₁) ничего в этом смысле сказать нельзя.

Для иллюстрации метода Келлога возьмём то же ядро, которое мы рассматривали в предыдущих пунктах:

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2} x(2-s) & (x \leq s), \\ \frac{1}{2} s(2-x) & (s > x). \end{cases} \quad (8)$$

Было уже указано, что характеристические числа этого ядра положительны. Далее, можно доказать, что каждому характеристическому числу отвечает только одна собственная функция. Метод Келлога даёт возможность эту функцию определить.

Положим $\omega(x) = x$. Для вычисления $\omega_n(x)$ нам понадобятся значения интеграла

$$\int_0^1 K(x, s) s^n ds.$$

Простое вычисление даёт:

$$\int_0^1 K(x, s) s^n ds = \frac{(n+3)x}{2(n+1)(n+2)} - \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \quad (9)$$

Теперь,

$$\omega_1(x) = \int_0^1 K(x, s) s ds = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{6}; \quad \|\omega_1\| = 0,1371;$$

$$\omega_2(x) = \int_0^1 K(x, s) \omega_1(s) ds = \frac{31x}{360} - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{120}; \quad \|\omega_2\| = 0,2723;$$

$$\begin{aligned} \omega_3(x) &= \int_0^1 K(x, s) \omega_2(s) ds = \\ &= \frac{1}{360} \left(\frac{160x}{21} - \frac{31x^3}{6} + x^5 - \frac{x^7}{14} \right); \quad \|\omega_3\| = 0,0080083. \end{aligned}$$

В формуле (7) положим $n=3$. Мы получим тогда $\mu \approx 4,998$. Так как характеристические числа ядра $K(x, s)$ положительны, то $\lambda_1 = \mu \approx 4,998$. Формула (7₁) даёт $\lambda_1 \approx 3,400$.

Было указано, что каждому характеристическому числу ядра (8) отвечает только одна собственная функция. В таком случае мы можем положить, в соответствии с формулой (6),

$$\varphi_1(x) \approx M \frac{\omega_3(x)}{\|\omega_3(x)\|}, \quad M = \frac{A}{a_1}.$$

Величина M определяется из требования, чтобы $\varphi_1(x)$ была нормирована. Тогда, очевидно, можно положить $M=1$, и

$$\varphi_1(x) = 2,643x - 1,724x^3 + 0,347x^5 - 0,025x^7. \quad (10)$$

17. Определение следующих характеристических чисел.

Если характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и соответствующие собственные функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ известны, то можно определить следующее характеристическое число λ_{n+1} и соответствующую ему собственную функцию $\varphi_{n+1}(x)$. Способы определения λ_{n+1} и $\varphi_{n+1}(x)$ могут быть основаны на следующих двух теоремах.

Теорема 1. Абсолютная величина характеристического числа λ_{n+1} ядра $K(x, s)$ есть величина, обратная максимуму

интеграла

$$|(K\varphi, \varphi)| = \left| \int_a^b \int_a^b K(x, s) \varphi(x) \overline{\varphi(s)} dx ds \right| \quad (1)$$

при условиях

$$(\varphi, \varphi) = 1, (\varphi, \varphi_1) = 0, (\varphi, \varphi_2) = 0, \dots, (\varphi, \varphi_n) = 0. \quad (2)$$

Теорема 2. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ есть последовательность всех характеристических чисел ядра $K(x, s)$ и $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ — соответствующие им ортонормированные собственные функции. Тогда λ_{n+1} есть наименьшее по абсолютной величине характеристическое число ядра

$$K^{(n)}(x, s) = K(x, s) - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k}, \quad (3)$$

а $\varphi_{n+1}(x)$ — собственная функция ядра $K^{(n)}(x, s)$, отвечающая характеристическому числу λ_{n+1} .

На практике пользоваться этими теоремами затруднительно, потому что не всегда удаётся определить собственные функции с достаточной степенью точности.

Укажем приём, при помощи которого можно определять характеристические числа, начиная со второго, без использования собственных функций. Для определённости допустим, что нам известно λ_1 и требуется найти λ_2 . Составим разность

$$\begin{aligned} B_{2m} &= A_{2m}^2 - A_4^m = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{2m}} \right)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{4m}} = \\ &= 2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\lambda_k^{2m} \lambda_n^{2m}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Допустим для простоты, что характеристические числа λ_1 и λ_2 — простые и что $-\lambda_1, -\lambda_2$ не суть характеристические числа. Тогда при m достаточно большом преобладающим в сумме (4) будет слагаемое $\frac{1}{\lambda_1^{2m} \lambda_2^{2m}}$; остальные слагаемые будут по сравнению с ним исчезающе малы.

Мы получаем тогда из (4) следующее приближённое равенство:

$$\frac{1}{\lambda_1^{2m} \lambda_2^{2m}} \approx \frac{B_{2m}}{2}, \quad (5)$$

и отсюда

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt[2m]{\frac{2}{B_{2m}}}. \quad (6)$$

Если λ_1 известно точно, то формула (6) даёт приближённое значение $|\lambda_2|$ с недостатком.

Исходя из формулы (4), легко получить также формулу, дающую значение $|\lambda_2|$ с избытком:

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt{\frac{B_{2m}}{B_{2m+2}}}. \quad (7)$$

Приближённым формулам (6) и (7) соответствуют точные предельные формулы

$$|\lambda_2| = \frac{1}{|\lambda_1|} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2^m \sqrt{B_{2m}}} = \frac{1}{|\lambda_1|} \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{B_{2m}}{B_{2m+2}}}. \quad (8)$$

Для примера вычислим второе характеристическое число многократно нами рассмотренного ядра

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2} x(2-s) & (x \leq s), \\ \frac{1}{2} s(2-x) & (s \leq x). \end{cases}$$

В этом случае

$$B_2 = A_2^2 - A_4 = \frac{1}{4050}.$$

Возьмём $\lambda_1 = 4,115$ (см. п. 15). Тогда, полагая в формуле (6) $m=1$, получим

$$\lambda_2 = \frac{1}{4,115} \sqrt{8100} = 21,87.$$

Более точное значение $\lambda_2 = 22,2\dots$

В качестве второго примера вычислим первые два корня функции Бесселя нулевого индекса $J_0(x)$. Квад-

раты этих корней суть характеристические числа симметричного ядра

$$L(x, s) = \begin{cases} -\sqrt{xs} \ln s & (x \leq s), \\ -\sqrt{xs} \ln x & (x > s) \end{cases}$$

(пределы интегрирования $a=0$, $b=1$).

Вычислим прежде всего второе итерированное ядро $L_2(x, s)$. Пусть $x > s$. Тогда

$$\begin{aligned} L_2(x, s) &= \int_0^s L(x, t)L(t, s) dt + \int_s^x L(x, t)L(t, s) dt + \\ &\quad + \int_x^1 L(x, t)L(t, s) dt = \\ &= \sqrt{xs} \left\{ \int_0^s t \ln x \ln s dt + \int_s^x t \ln x \ln t dt + \int_x^1 t \ln^2 t dt \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{xs}}{4} [(x^2 + s^2) \ln x + 1 - x^2]. \end{aligned}$$

Теперь простые вычисления дают:

$$A_2 = \frac{1}{32}, \quad A_4 = \frac{11}{12238}, \quad B_2 = \frac{1}{12238}.$$

Полагая приближённо

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[4]{A_4}}, \quad \lambda_2 \approx \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{2}{B_2}},$$

будем иметь:

$$\lambda_1 \approx 5,7813, \quad \lambda_2 \approx 27,117.$$

Извлекая корень, мы найдём первые два корня функции Бесселя с недостатком:

$$\alpha_1 \approx 2,4044, \quad \alpha_2 \approx 5,2702.$$

Более точные значения этих корней, взятые из таблицы¹⁾:

$$\alpha_1 = 2,4048, \quad \alpha_2 = 5,5200.$$

¹⁾ Р. О. Кузьмин. Бесселевы функции. ГТТИ, 1933.

Формулы, аналогичные (8), можно построить, исходя из тех же соображений, и для характеристических чисел с большими номерами. Так, например, для λ_3 нетрудно найти приближённую формулу

$$|\lambda_3| \approx \frac{1}{|\lambda_1^2 \lambda_2|} \sqrt[2m]{\frac{8}{B_{2m}^2 - 2B_{4m}}}. \quad (9)$$

Эта формула верна при тех же предположениях, что и формула (8).

18. Ядра, сводимые к симметричным. Если ядро $K(x, s)$ имеет вид

$$K(x, s) = r(s)L(x, s), \quad (1)$$

где $r(s) \geq 0$ и $L(x, s)$ вещественно и симметрично, так что $L(x, s) = \overline{L(s, x)}$, то уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (2)$$

легко преобразуется в уравнение с симметричным ядром. Умножим обе части уравнения на $\sqrt{r(x)}$ и введём новую неизвестную функцию $\psi(x) = \sqrt{r(x)} \varphi(x)$. Для этой функции мы получаем интегральное уравнение

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b \sqrt{r(x)r(s)} L(x, s) \psi(s) ds = \sqrt{r(x)} f(x), \quad (3)$$

ядро которого уже симметрично.

Ядра типа (1) часто встречаются в приложениях.

19. Решение симметричных интегральных уравнений. Симметричное интегральное уравнение есть частный случай уравнения Фредгольма, и решение симметричных уравнений может быть основано на общей теории. Здесь, однако, вопрос ставится по иному: ставя задачу о решении симметричного интегрального уравнения, мы будем предполагать, что нам известны все характеристические числа и собственные функции ядра. В этих условиях уравнение решается очень просто.

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad (1)$$

ядро которого симметрично. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ — его характеристические числа, а $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ — соответствующие собственные функции. Обозначим через a_n коэффициенты Фурье неизвестной функции $\varphi(x)$ по отношению к ортонормированной системе $\varphi_n(x)$:

$$a_n = (\varphi, \varphi_n) = \int_a^b \varphi(x) \overline{\varphi_n(x)} dx. \quad (2)$$

По формуле Гильберта-Шмидта (п. 13, теорема 6)

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} \varphi_n(x).$$

Из уравнения (1) теперь следует, что

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} \varphi_n(x), \quad (3)$$

и остаётся только определить коэффициенты a_n . С этой целью умножим обе части равенства (3) на $\overline{\varphi_m(x)}$ и проинтегрируем в пределах от a до b . Так как последовательность $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ ортонормированная, то после интегрирования останется только один член, индекс которого $n=m$. По определению коэффициентов a_n получим:

$$a_m = f_m + \frac{\lambda}{\lambda_m} a_m; \quad f_m = (f, \varphi_m). \quad (4)$$

Если λ — не характеристическое число, то из (4) мы сразу находим значение a_m :

$$a_m = \frac{\lambda_m f_m}{\lambda_m - \lambda}. \quad (5)$$

Подставив его в (3), мы получим решение в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x). \quad (6)$$

Можно доказать, что ряд в (6) сходится абсолютно и равномерно.

Пусть теперь λ — характеристическое число. Тогда оно встречается в последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ и притом, может быть, несколько раз. Пусть $\lambda = \lambda_r = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_{r'}$. Для индексов m , отличных от $r, r+1, \dots, r'$, коэффициенты a_m определяются по той же формуле (5). Если же m равно одному из этих чисел, то равенство (4) принимает вид $f_m = 0$, $m = r, r+1, \dots, r'$. Таким образом, при λ характеристическом уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть ортогональна к соответствующим этому числу собственным функциям. Если это условие выполнено, то решение даётся той же формулой (6); коэффициенты, имеющие неопределённую форму $\frac{0}{0}$, можно здесь заменить произвольными числами.

§ 3. СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

20. Главное значение интеграла. Обычное определение; трактующее интеграл как предел интегральных сумм, пригодно только для функций ограниченных. Если же подинтегральная функция неограниченна, мы вводим понятие «несобственного интеграла». Напомним его содержание.

Пусть функция $f(x)$, определённая на отрезке $a \leq x \leq b$, не ограничена в окрестности точки c этого отрезка, но интегрируема на каждом из отрезков $a \leq x \leq c - \epsilon'$ и $c + \epsilon'' \leq x \leq b$, как бы ни были малы положительные числа ϵ' и ϵ'' . Составим сумму

$$\int_a^{c-\epsilon'} f(x) dx + \int_{c+\epsilon''}^b f(x) dx. \quad (1)$$

Если эта сумма имеет предел, когда ϵ' и ϵ'' стремятся

к нулю независимо друг от друга, то указанный предел и называют несобственным интегралом функции $f(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\epsilon' \rightarrow 0 \\ \epsilon'' \rightarrow 0}} \left[\int_a^{c-\epsilon'} f(x) dx + \int_{c+\epsilon''}^b f(x) dx \right]. \quad (2)$$

Может случиться, что сумма (1) не имеет предела, когда ϵ' и ϵ'' независимо друг от друга стремятся к нулю, но предел существует, если ϵ' и ϵ'' при своём стремлении к нулю связаны некоторым соотношением. Рассмотрим, например, функцию $f(x) = \frac{1}{x-c}$, $a < c < b$. Имеем:

$$\int_a^{c-\epsilon'} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\epsilon''}^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a} + \ln \frac{\epsilon'}{\epsilon''}. \quad (3)$$

Когда ϵ' и ϵ'' стремятся к нулю, величина (3) не стремится к пределу, так как отношение $\frac{\epsilon'}{\epsilon''}$ может при этом меняться как угодно. Однако, если мы свяжем ϵ' и ϵ'' , например, соотношением $\epsilon' = k\epsilon''$, где k — положительная постоянная, то сумма (3) будет иметь предел, равный

$$\ln \frac{b-c}{c-a} + \ln k.$$

В частности, если мы положим $\epsilon' = \epsilon'' = \epsilon$, то получим

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\epsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\epsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right] = \ln \frac{b-c}{c-a}. \quad (4)$$

Введём теперь следующее определение.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $a \leq x \leq b$ и интегрируема на каждом из отрезков $a \leq x \leq c - \epsilon$ и $c + \epsilon \leq x \leq b$, как бы ни было мало положительное число ϵ . Главным значением интеграла от функции $f(x)$ в промежутке $a \leq x \leq b$ мы будем называть предел (если он существует)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right]. \quad (5)$$

Понятие главного значения и самый термин введены Коши. Мы будем часто вместо «главное значение интеграла» говорить «*сингулярный интеграл*»¹⁾.

Мы будем обозначать главное значение интеграла обычным символом

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Употребительны также символы

$$V.P. \int_a^b f(x) dx; \quad \overset{*}{\int}_a^b f(x) dx; \quad \overset{*b}{\int}_a^b f(x) dx;$$

в них, однако, особой необходимости нет.

Заметим, что главное значение интеграла совпадает с обычным (собственным или несобственным) интегралом, если этот последний существует.

Укажем теперь широкий и важный для приложений класс интегралов, главное значение которых существует.

Прежде всего, из равенства (4) следует, что существует сингулярный интеграл

$$\int_a^b \frac{dt}{t-x} = \ln \frac{b-x}{x-a}, \quad a < x < b. \quad (6)$$

Пусть теперь $f(x)$ означает функцию, удовлетворяющую так называемому условию Липшица с показателем α . Это условие состоит в следующем: существуют постоянные K и α , $0 < \alpha \leq 1$, такие, что для всякой пары точек x' , x'' , лежащих в промежутке $a \leq x \leq b$, выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < K |x' - x''|^\alpha. \quad (7)$$

Класс функций, удовлетворяющих условию Липшица с показателем α , мы будем обозначать символом $Lip \alpha$; то

¹⁾ Иногда (например, в работах И. И. Привалова) употребляется термин «особый интеграл».

обстоятельство, что функция $f(x)$ принадлежит классу $\text{Lip } \alpha$, мы будем обозначать так:

$$f(x) \in \text{Lip } \alpha.$$

Если $f(x)$ имеет в промежутке $a < x < b$ ограниченную производную, то $f(x) \in \text{Lip } 1$. Это непосредственно вытекает из формулы Лагранжа о конечных приращениях.

Теорема 1. Если $f(x) \in \text{Lip } \alpha$, то сингулярный интеграл

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t-x} dt \quad (8)$$

существует для всех x в промежутке $a < x < b$.

Доказательство очень просто. Представим интеграл (8) в виде

$$\int_a^b \frac{f(t) - f(x)}{t-x} dt + f(x) \int_a^b \frac{dt}{t-x}.$$

В первом интеграле подинтегральная функция имеет оценку

$$\left| \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \right| < K |t-x|^{\alpha-1}.$$

Этот интеграл существует как несобственный при $\alpha < 1$ и как собственный при $\alpha = 1$. Второй же интеграл существует в силу формулы (6).

Понятие главного значения легко распространяется и на контурные интегралы. Имея в виду приложения, мы сформулируем это понятие для интегралов функций комплексной переменной. Пусть L — гладкая кривая (замкнутая или незамкнутая) с непрерывной кривизной, и c — комплексная координата некоторой точки на L . Вырежем точку c кружком радиуса ε с центром в этой точке. Оставшуюся часть контура обозначим через L_ε . Допустим, что функция $f(z)$ интегрируема по L_ε , каково бы ни было положительное число ε . Главным значением интеграла, или сингуляр-

ным интегралом, функции $f(z)$ по контуру L мы назовём предел (если он существует)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L_\epsilon} f(z) dz,$$

и будем его обозначать символом

$$\int_L f(z) dz.$$

Будем говорить, что функция $f(z)$ удовлетворяет на кривой L условию Липшица с показателем α , и обозначать это $f(z) \in \text{Lip } \alpha$, если для любых точек z', z'' кривой L выполняется неравенство

$$|f(z') - f(z'')| < K |z' - z''|^\alpha, \quad (9)$$

где K и α — некоторые положительные постоянные и $0 < \alpha \leq 1$. Справедлива теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 2. Если $f(z) \in \text{Lip } \alpha$, то сингулярный интеграл

$$\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (10)$$

существует для всех точек z кривой L , кроме, может быть, её концов.

При изменении x в промежутках $a < x < b$ интеграл (8) будет функцией от x . Обозначим

$$f_1(x) = \int_a^b \frac{f(t)}{t-x} dt.$$

Относительно $f_1(x)$ справедлива следующая теорема¹⁾.

Теорема 3 (И. И. Привалова). Если $f(x) \in \text{Lip } \alpha$, $\alpha < 1$, то во всяком замкнутом промежутке $a_1 \leq x \leq b_1$, где $a_1 > a$ и $b_1 < b$, имеем: $f_1(x) \in \text{Lip } \alpha$; если же $f(x) \in \text{Lip } 1$, то в том же промежутке $a_1 \leq x \leq b_1$ имеем: $f_1(x) \in \text{Lip } \beta$, где β — любое положительное число, меньшее единицы.

¹⁾ См., например, Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, изд. 6. ГТТИ, 1940.

Аналогичная теорема верна и для интегралов (10). При этом, если контур L — замкнутый, то

$$f_1(z) = \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

принадлежит классу $\text{Lip } \alpha'$ или, соответственно, $\text{Lip } \beta$ на всём контуре L .

Как следствие вышеприведённых теорем получается следующая теорема, которую мы, чтобы не повторяться, сформулируем только для интеграла (8), хотя она верна и для интеграла (10).

Теорема 4. Пусть $f(x) \in \text{Lip } \alpha$ в промежутке $a \leq x \leq b$. Пусть

$$f_1(x) = \int_a^b \frac{f(t)}{t-x} dt,$$

$$f_2(x) = \int_a^b \frac{f_1(t)}{t-x} dt,$$

.....

$$f_n(x) = \int_a^b \frac{f_{n-1}(t)}{t-x} dt,$$

.....

Сингулярные интегралы $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ существуют при $a < x < b$; в каждом замкнутом промежутке $a_1 \leq x \leq b_1$, где $a_1 > a$ и $b_1 < b$, имеем: $f_n(x) \in \text{Lip } \alpha$ при $\alpha < 1$ и $f_n(x) \in \text{Lip } \beta$, где β — любое число, меньшее единицы, — если $\alpha = 1$.

21. Ядра Коши и Гильберта. Важная роль, которую играет в ряде прикладных задач понятие сингулярного интеграла, основана на следующей теореме теории функций комплексной переменной.

Теорема. Пусть L — гладкий контур и $\varphi(\zeta)$ — функция точки этого контура, удовлетворяющая условию Липшица с показателем α , $0 \leq \alpha \leq 1$. Если точка z стремится изнутри или, соответственно, извне контура L к точке t этого контура, то интеграл типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (1)$$

стремится к пределу

$$F_i(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta, \quad (2)$$

соответственно

$$F_e(t) = -\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta, \quad (3)$$

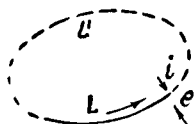
где интеграл в формулах (2) и (3) — сингулярный.

По поводу этой теоремы сделаем несколько замечаний.

Прежде всего предполагается, что контур L обходится в положительном направлении, так что область, им ограниченная, остаётся слева. Индекс i [формула (2)] означает, что $z \rightarrow t$ изнутри области, а индекс e [формула (3)] — что $z \rightarrow t$ извне. Далее, говоря о стремлении точки z к t , мы будем считать, что кривая, описываемая точкой z , не касается контура L , — в противном случае утверждение теоремы может оказаться неверным. Наконец, контур L может состоять из нескольких отдельных кривых.

Мы не приводим доказательства этой теоремы, так как его можно найти в любом курсе теории функций комплексной переменной.

Особо следует отметить случай незамкнутого контура.



Черт. 3.

Если L представляет собой простую дугу (черт. 3), то понятия «изнутри области» и «извне области» теряют смысл, тем не менее формулы (2) и (3) остаются

в силе. Направления i и e определяются следующим образом. Дополним L дугой L' до замкнутого контура, обходимого против часовой стрелки, и пусть D — ограниченная им область. Тогда под i и e в формулах (2) и (3) следует понимать направление изнутри или, соответственно, извне области D .

Выражение

$$\frac{d\zeta}{\zeta - t}, \quad (4)$$

где ζ и t — точки контура L , мы будем называть *ядром Коши*.

Важную роль играет и так называемое *ядро Гильберта*

$$\operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma, \quad (5)$$

где s и σ — действительные переменные, которые меняются в промежутке $[0, 2\pi]$. Ядро Гильберта также связано с теорией аналитических функций. Установим эту связь.

Будем исходить из интеграла Пуассона

$$U(r, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\sigma - s)} d\sigma,$$

выражающего значения гармонической функции $U(r, s)$ внутри круга $r < 1$ через её значения $u(\sigma) = U(1, \sigma)$ на окружности этого круга. Положим $re^{is} = z$, $e^{i\sigma} = \zeta$. Тогда, как легко проверить (γ — окружность $|\sigma| = 1$),

$$U(r, s) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} u(\sigma) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} \right\}.$$

Обозначим через $V(r, s)$ гармоническую функцию, сопряжённую с $U(r, s)$. Функция $V(r, s)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого. Подчиним это слагаемое требованию, чтобы $V(r, s)$ равнялась нулю в центре круга. Тогда

$$U(r, s) + iV(r, s) = \frac{1}{2\pi i} \int u(\sigma) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Пусть теперь $r \rightarrow 1$, так что z стремится к точке окружности γ , оставаясь внутри круга. Пользуясь формулой (2), мы получим после элементарных преобразований

$$v(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma, \quad (6)$$

где $v(s) = V(1, s)$ есть предельное значение гармонической функции $V(r, s)$ на окружности γ .

Формула (6) связывает таким образом предельные значения сопряжённых функций, гармонических внутри круга,

причём сопряжённая функция $V(r, s)$ подчинена условию

$$V(r, s)|_{r=0} = 0. \quad (7)$$

Ядра Гильберта и Коши довольно просто связаны между собой. Пусть L — простой замкнутый контур, гладкий и с непрерывной кривизной. Пусть его параметрические уравнения будут

$$x = x(s), \quad y = y(s).$$

Относительно параметра s допустим, что он меняется в пределах $[0, 2\pi]$. Обозначим $t = x + iy$ и $t(s) = x(s) + iy(s)$. Уравнение контура L можно написать в виде $t = t(s)$. Пусть ζ — точка на L , отвечающая значению σ параметра, так что $\zeta = t(\sigma)$. Тогда нетрудно доказать формулу

$$\frac{d\zeta}{\zeta - t} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + P(s, \sigma) d\sigma, \quad (8)$$

где $P(s, \sigma)$ — непрерывная функция своих аргументов, удовлетворяющая условию Липшица с некоторым положительным показателем.

22. Формулы композиции сингулярных интегралов. Пусть

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta, \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где L — замкнутый контур, безразлично — односвязный или многосвязный. Найдём, как выражается $\varphi_2(t)$ непосредственно через $\varphi(t)$. Рассмотрим интегралы типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

По формуле (2) п. 21

$$f_1(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta, \quad f_{11}(t) = \frac{1}{2} \varphi_1(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta.$$

Отсюда, пользуясь определением $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, имеем:

$$\varphi_1(t) = f_i(t) - \frac{1}{2} \varphi(t), \quad \varphi_2(t) = f_{1i}(t) - \frac{1}{2} \varphi_1(t). \quad (2)$$

Подставим значение $\varphi_1(t)$ из (2) в $f_1(z)$:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_i(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{4\pi i} \int \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3)$$

Первый интеграл в (3) есть интеграл Коши, так как его плотность¹⁾ $f_i(\zeta)$ есть предельное значение функции $f(z)$, регулярной внутри L . Указанный интеграл равен, следовательно, $f(z)$. Второй интеграл в (3) равен, очевидно $\frac{1}{2} f(z)$.

Таким образом, $f_1(z) = \frac{1}{2} f(z)$ и $f_{1i}(t) = \frac{1}{2} f_i(t)$. Теперь из (2) следует:

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2} f_i(t) - \frac{1}{2} \left[f_i(t) - \frac{1}{2} \varphi(t) \right] = \frac{1}{4} \varphi(t).$$

Мы получили формулу Пуанкаре-Бертрана композиции сингулярных интегралов:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \tau} d\zeta = \frac{1}{4} \varphi(t). \quad (4)$$

Заметим, что в двойном сингулярном интеграле нельзя менять порядок интегрирования; так, если изменить порядок интегрирования в (4), то мы получим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(\zeta) d\zeta \int_L \frac{d\tau}{(\zeta - \tau)(\tau - t)},$$

который равен нулю.

¹⁾ Плотностью интеграла типа Коши $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ называется функция $\mu(\zeta)$.

Выведем формулу композиции интегралов с ядром Гильберта. Пусть

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} d\sigma, \\ \varphi_2(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Обозначим через $U(r, s)$, $U_1(r, s)$, $U_2(r, s)$ гармонические внутри круга $r < 1$ функции, значения которых на окружности $r = 1$ равны соответственно $\varphi(s)$, $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$. Тогда $U_1(r, s)$ есть функция, сопряжённая с $U(r, s)$, а $U_2(r, s)$ будет сопряжённой с $U_1(r, s)$.

Из уравнений Коши-Римана нетрудно усмотреть, что

$$U_2(r, s) = -U(r, s) + C, \quad C = \text{const.}$$

В соответствии со сказанным в п. 21, постоянная C определяется из условия $U_2(r, s)|_{r=0} = 0$. Отсюда

$$C = U(r, s)|_{r=0}.$$

Но значение гармонической функции в центре круга равно среднему арифметическому её значений на окружности. Отсюда

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(1, \sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) d\sigma.$$

Теперь

$$U_2(r, s) = -U(r, s) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) d\sigma.$$

Положим в этом равенстве $r = 1$. Так как $U(1, s) = \varphi(s)$, $U_2(1, s) = \varphi_2(s)$, то окончательно

$$\varphi_2(s) = -\varphi(s) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) d\sigma.$$

Заменяя $\varphi_2(s)$, а затем $\varphi_1(s)$ их выражениями в виде сингулярных интегралов, мы получим формулу Гильберта

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta-s}{2} d\theta \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-\theta}{2} d\sigma = \\ = -\varphi(s) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) d\sigma. \end{aligned} \quad (6)$$

Проще обстоит дело с композицией двух интегралов, из которых один — сингулярный, а другой — обыкновенный. Пусть $H(s, \sigma)$ — функция, удовлетворяющая условию Липшица. Тогда в двойном интеграле

$$F(s) = \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta-s}{2} d\theta \int_0^{2\pi} H(\theta, \sigma) d\sigma$$

можно менять порядок интегрирования, и $F(s)$ удовлетворяет условию Липшица. Аналогичная теорема верна и для интегралов с ядром Коши.

23. Сингулярные интегральные уравнения с ядром Гильберта. Мы будем рассматривать уравнения вида

$$a\varphi(s) + \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + \int_0^{2\pi} K(s, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma = f(s), \quad (1)$$

где a и b — постоянные, вообще говоря, комплексные.

Относительно ядра $K(s, \sigma)$ мы примем, что оно удовлетворяет условию Липшица. То же самое мы предположим и о правой части $f(s)$.

Допустим сперва, что $K(s, \sigma) \equiv 0$, так что мы рассматриваем уравнение

$$L\varphi = a\varphi(s) + \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma = f(s). \quad (2)$$

Решается оно следующим способом.

Положим

$$M\omega = a\omega(s) - \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma, \quad (3)$$

где $\omega(\tau)$ — произвольная функция. К обеим частям нашего уравнения применим оператор (3). Мы получим новое уравнение

$$ML\varphi = F(s), \quad F(s) = Mf,$$

которое мы, пользуясь формулой Гильберта, легко приведём к виду

$$(a^2 + b^2)\varphi(s) - \frac{b^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau = F(s). \quad (4)$$

Если $a^2 + b^2 \neq 0$, то это — уравнение Фредгольма с очень простым вырожденным ядром. Можно доказать, что оно эквивалентно уравнению (2). Решая уравнение (4) по методу п. 4, мы получим искомое решение

$$\begin{aligned} \varphi(s) = & \frac{a}{a^2 + b^2} f(s) - \frac{b}{2\pi(a^2 + b^2)} \int_0^{2\pi} f(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\tau + \\ & + \frac{b^2}{2\pi a(a^2 + b^2)} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Если $a^2 + b^2 = 0$, то, как можно доказать, уравнение (2) в общем случае неразрешимо.

Особо отметим случай $a = 0$. Полагая $b = 1$, что, очевидно, не ограничивает общности, мы получим уравнение первого рода

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\tau = f(s). \quad (6)$$

Формула (5) делается в этом случае непригодной; однако уравнение (6) легко решить непосредственно. Заменим в нём буквы σ и s соответственно на θ и σ , умножим обе части уравнения на

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma$$

и проинтегрируем в промежутке $(0, 2\pi)$. Пользуясь формулой Гильберта, получим

$$\varphi(s) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) d\sigma = F(s), \quad F(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma. \quad (7)$$

Это уравнение легко решается. Положим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s) ds = C.$$

Тогда

$$\varphi(s) - C = F(s).$$

Интегрируя это в пределах $(0, 2\pi)$, мы придём к равенству

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(s) ds. \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что оно выполняется всегда, какова бы ни была функция $f(s)$. Постоянная C остаётся произвольной, и мы получаем

$$\varphi(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + C. \quad (9)$$

Подставив это в (6), убеждаемся, что выражение (9) удовлетворяет уравнению тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{2\pi} f(s) ds = 0. \quad (10)$$

Условие (10), таким образом, необходимо и достаточно для того, чтобы уравнение (6) имело решение.

В случае более общего уравнения (1) мы получаем, в результате применения к обеим его частям оператора (3), интегральное уравнение Фредгольма общего вида. К его решению и сводится дело. Можно доказать, что указанное уравнение Фредгольма и уравнение (1) эквивалентны.

Несколько слов скажем в заключение о сингулярном уравнении более общего вида

$$a(s) \varphi(s) + \frac{b(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + \int_0^{2\pi} K(s, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma = f(s) \quad (11)$$

с переменными коэффициентами a и b . Если $a(s)$ и $b(s)$ удовлетворяют условию Липшица, то, применяя к обеим частям уравнения (11) оператор

$$M\omega = a(s)\omega(s) - \frac{b(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma,$$

мы получим интегральное уравнение типа Фредгольма. Оно может, однако, оказаться неэквивалентным уравнению (11).

24. Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши.
Сингулярное уравнение

$$a\varphi(t) + \frac{b}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta = f(t), \quad (1)$$

где a и b — постоянные и L — замкнутый контур¹⁾, также решается очень просто. К обеим частям уравнения (1) применим оператор

$$M\omega = a\omega(t) - \frac{b}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta. \quad (2)$$

Пользуясь формулой Пуанкаре-Бертрана, легко найдём:

$$(a^2 - b^2)\varphi(t) = af(t) - \frac{b}{\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta.$$

Если $a^2 - b^2 \neq 0$, мы получаем:

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta. \quad (3)$$

Подстановка в (1) показывает, что функция (3) действительно удовлетворяет нашему уравнению. Случай $a=0$ на этот раз не представляет исключения.

В случае уравнения более общего вида

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t} dt + \int_L K(t, \zeta)\varphi(\zeta) d\zeta = f(t), \quad (4)$$

$$a^2(t) - b^2(t) \neq 0,$$

¹⁾ Односвязный или многосвязный — безразлично.

применение того же оператора

$$M\omega = a(t)\omega(t) - \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta$$

приводит к уравнению Фредгольма. Если a и b — постоянные, полученное уравнение Фредгольма эквивалентно уравнению (4). В общем случае этот вопрос требует дополнительного исследования.

25. Случай незамкнутого связного контура. Если контур L — незамкнутый, то формула Пуанкаре-Бертрана не имеет места, и метод решения сингулярных уравнений, изложенный в п. 24, оказывается непригодным. Мы применим здесь другой метод, основанный на сведении сингулярного уравнения к так называемой задаче Римана ¹⁾. Заметим, что этот метод применим также, если контур L — замкнутый.

Пусть L — простая гладкая дуга с непрерывно меняющейся кривизной. Рассмотрим уравнение

$$a\varphi(t) + \frac{b}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = f(t). \quad (1)$$

Для простоты допустим, что a и b — постоянные и $a^2 - b^2 \neq 0$.

В качестве новой неизвестной введём интеграл типа Коши с плотностью $\varphi(\zeta)$:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (2)$$

Из формул (2) и (3) п. 21 следует:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= F_i(t) - F_e(t), \\ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta &= F_i(t) + F_e(t). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Подставив это в (1), мы получим следующее равенство:

$$(a + b)F_i(t) - (a - b)F_e(t) = f(t). \quad (4)$$

¹⁾ Этот метод впервые применил Т. Carleman [15 b].

Мы пришли, таким образом, к задаче Римана: найти функцию $F(z)$ по заданному линейному соотношению между её предельными значениями — изнутри и извне контура.

Положим

$$F(z) = \Phi(z) \omega(z) \quad (5)$$

и выберем $\omega(z)$ так, чтобы

$$(a+b)\omega_+(z) = (a-b)\omega_-(z). \quad (6)$$

Функция $\omega(z)$, следовательно, есть решение однородной задачи Римана.

Рассмотрим функцию

$$\omega(z) = \left(\frac{z-a}{z-\beta} \right)^m, \quad (7)$$

где m — некоторая постоянная. Каждая ветвь этой функции регулярна в плоскости, разрезанной вдоль L . Выберем какую-либо её ветвь, например, ту, которая обращается в единицу при $z = \infty$. При обходе против часовой стрелки вокруг точки α $\omega(z)$ приобретает множитель $e^{2\pi im}$. Таким образом,

$$\omega_+(z) = e^{2\pi im} \omega_-(z).$$

Определим теперь число m из условия

$$e^{2\pi im} = \frac{a+b}{a-b}. \quad (8)$$

Тогда функция (7) удовлетворяет уравнению (6). Уравнение (8) определяет число

$$m = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{a+b}{a-b} \quad (9)$$

с точностью до произвольного целого слагаемого. Выберем это слагаемое так, чтобы действительная часть m лежала между нулём и единицей. Для этого достаточно взять значение $\arg \frac{a+b}{a-b}$ между нулём и 2π . При таком выборе числа m обе функции $\omega(z)$ и $\frac{1}{\omega(z)}$ абсолютно интегрируемы вдоль L .

Подставив теперь полученное значение $\varphi(z)$ в (5) и далее в (4), мы получим:

$$\Phi_1(t) - \Phi_2(t) = \frac{f(t)}{a+b} \left(\frac{t-\beta}{t-a} \right)^m. \quad (10)$$

Эта простейшая задача Римана решается очень легко. Именно, формулы (3) показывают, что за $\Phi(z)$ можно принять интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i (a+b)} \int_L \left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-a} \right)^m f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-z}. \quad (11)$$

Теперь

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i (a+b)} \left(\frac{z-a}{z-\beta} \right)^m \int_L \left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-a} \right)^m f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-z}. \quad (12)$$

Решение интегрального уравнения (1) можно найти с помощью первой из формул (3):

$$\psi(t) = \frac{a}{a^2-b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2-b^2)\pi i} \int_L \left(\frac{t-a}{t-\beta} \right)^m \left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-a} \right)^m f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-z}. \quad (13)$$

Решение (13) — не единственное. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим однородное уравнение:

$$a\varphi_0(t) + \frac{b}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta = 0. \quad (14)$$

Применяя тот же приём, положим

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta, \quad (15)$$

$$F_0(z) = \left(\frac{z-a}{z-\beta} \right)^m \Phi_0(z). \quad (16)$$

Заметим, что при $z = \infty$ $F_0(z)$, а, следовательно, и $\Phi_0(z)$ обращаются в нуль. Вместо (10) мы приходим теперь к

следующему уравнению:

$$\Phi_{oi}(t) - \Phi_{oe}(t) = 0. \quad (17)$$

Функция $\Phi_0(z)$ принимает, таким образом, одинаковые значения на дуге L с разных её сторон. Отсюда нетрудно заключить, что $\Phi_0(z)$ регулярна на всей плоскости, кроме, быть может, точек a и b . Наложим требование, чтобы произведение

$$\varphi_0(t) \ln \frac{t-a}{t-\beta}$$

было абсолютно интегрируемо вдоль L . Тогда легко доказать, что β — правильная точка, а a — полюс первого порядка или правильная точка функции $\Phi_0(z)$. Наконец, $\Phi_0(\infty) = 0$. Из всего сказанного следует, что

$$\Phi_0(z) = \frac{c'}{z-a}, \quad c' = \text{const}. \quad (18)$$

Теперь

$$F_0(z) = \frac{c'}{(z-a)^{1-m}(z-\beta)^m},$$

и по первой из формул (3) мы находим решение однородного сингулярного уравнения (14):

$$\varphi_0(t) = \frac{c}{(t-a)^{1-m}(t-\beta)^m}, \quad c = c'(1 - e^{2\pi im}). \quad (19)$$

Общее решение уравнения (1) даётся формулой

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\pi i} \left(\frac{t-a}{t-\beta} \right)^m \int_L \left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-a} \right)^m f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-t} + \\ & + \frac{c}{(t-a)^{1-m}(t-\beta)^m}. \end{aligned} \quad (20)$$

где c — произвольная постоянная. Выбором этой постоянной можно распорядиться так, чтобы $\varphi(t)$ была ограничена в том или ином конце дуги L .

Можно вместо (13) получить другое выражение, в которое a и β входят более симметрично. Положим

$$\Psi(z) = (z-a)^{1-m}(z-\beta)^m F(z), \quad (21)$$

Подставив это в (4), получим:

$$\Psi_t(t) - \Psi_\alpha(t) = \frac{1}{a+b} f(t) (t-\alpha)^{1-m} (t-\beta)^m.$$

Отсюда

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i (a+b)} \int_L \frac{(\zeta-\alpha)^{1-m} (\zeta-\beta)^m f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Теперь нетрудно найти $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2) \pi i (t-\alpha)^{1-m} (t-\beta)^m} \int_L \frac{(\zeta-\alpha)^{1-m} (\zeta-\beta)^m f(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta. \quad (22)$$

Это — частное решение: общее же решение можно представить в виде

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2) \pi i (t-\alpha)^{1-m} (t-\beta)^m} \int_L \frac{(\zeta-\alpha)^{1-m} (\zeta-\beta)^m f(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta + \frac{c}{(t-\alpha)^{1-m} (t-\beta)^m}. \quad (23)$$

Значения постоянной c в (20) и (23) — разные.

Рассмотрим, в частности, уравнение первого рода

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta = f(t). \quad (24)$$

Здесь $a=0$, $b=1$. Далее,

$$m = \frac{1}{2\pi i} \ln(-1) = \frac{1}{2},$$

и формула (20) даёт на этот раз

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{t-\alpha}{t-\beta}} \int_L \sqrt{\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta + \frac{c}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}. \quad (25)$$

Полагая $a=0$ в (23), мы получим решение в другой форме:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i \sqrt{(t-a)(t-\beta)}} \int_L \frac{\sqrt{(\zeta-a)(\zeta-\beta)} f(\zeta) d\zeta}{\zeta-t} + \frac{c}{\sqrt{(t-a)(t-\beta)}}.$$

26. Случай незамкнутого несвязного контура. Пусть теперь контур L состоит из n простых дуг L_1, L_2, \dots, L_n , не имеющих попарно общих точек. Уравнение

$$a\varphi(t) = \frac{b}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta = f(t) \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами a и b решается тем же способом, что и в п. 25. Положив

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta,$$

мы попрежнему получим

$$(a+b)F_i(t) - (a-b)F_e(t) = f(t). \quad (2)$$

Обозначим через α_k и β_k начало и конец дуги L_k . Положим

$$F(z) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{z-\alpha_k}{z-\beta_k} \right)^m \Phi(z), \quad (3)$$

где показатель m определяется той же формулой (9) п. 25. Подставив это в (2), получим:

$$\Phi_i(t) - \Phi_e(t) = \frac{1}{a+b} \prod_{k=1}^n \left(\frac{t-\beta_k}{t-\alpha_k} \right)^m f(t),$$

откуда следует, что можно принять

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i (a+b)} \int_L \prod_{k=1}^n \left(\frac{\zeta-\beta_k}{\zeta-\alpha_k} \right)^m f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-z}, \quad (4)$$

и мы получаем частное решение уравнения (1):

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\pi i} \prod_{k=1}^n \left(\frac{t - \alpha_k}{t - \beta_k} \right)^m \int_L \left(\frac{\zeta - \beta_k}{\zeta - \alpha_k} \right)^m \frac{f(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta. \quad (5)$$

Рассуждая, как в предыдущем пункте, мы найдём, что в случае однородного уравнения соответствующая функция $\Phi_0(z)$ равна

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z - \alpha_k},$$

или, если привести эти дроби к общему знаменателю,

$$\Phi_0(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{\prod_{k=1}^n (z - \alpha_k)}, \quad (6)$$

где $P_{n-1}(z)$ — произвольный полином степени $n - 1$. Теперь легко найти, что решение однородного интегрального уравнения

$$a\varphi_0(t) + \frac{b}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = 0$$

равно

$$\varphi_0(t) = \frac{Q_{n-1}(t)}{\prod_{k=1}^n [(t - \alpha_k)^{1-m} (t - \beta_k)^m]}, \quad (7)$$

где $Q_{n-1}(t)$ — произвольный полином степени $n - 1$. Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\pi i} \prod_{k=1}^n \left(\frac{t - \alpha_k}{t - \beta_k} \right)^m \int_L \left(\frac{\zeta - \beta_k}{\zeta - \alpha_k} \right)^m f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - t} + \frac{Q_{n-1}(t)}{\prod_{k=1}^n [(t - \alpha_k)^{1-m} (t - \beta_k)^m]}. \quad (8)$$

Полином $Q_{n-1}(t)$ можно подобрать так, чтобы $\varphi(t)$ была ограничена в заданных n концах дуг L_1, L_2, \dots, L_n .

27. Системы сингулярных интегральных уравнений. Система сингулярных уравнений с ядром Гильберта имеет вид

$$L_k(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \sum_{j=1}^n \left\{ a_{kj} \varphi_j(s) + \frac{b_{kj}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_j(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + \int_0^{2\pi} K_{kj}(s, \sigma) \varphi_j(\sigma) d\sigma \right\} = f_k(s), \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Её легко можно преобразовать в фредгольмовскую. Достаточно заменить её системой

$$M_k(L_1, L_2, \dots, L_n) = M_k(f_1, f_2, \dots, f_n), \quad (2)$$

где

$$M_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sum_{j=1}^n \left\{ a_{kj} \omega_j(s) - \frac{b_{kj}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_j(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma \right\}. \quad (3)$$

Нетрудно проверить, что система (2) имеет вид

$$\sum_{m=1}^n \left\{ A_{km} \varphi_m(s) + \int_0^{2\pi} K_{km}^*(s, \sigma) \varphi_m(\sigma) d\sigma \right\} = M_k(f_1, f_2, \dots, f_n), \quad (4)$$

где

$$A_{km} = \sum_{j=1}^n (a_{kj} a_{jm} + b_{kj} b_{jm}), \quad (5)$$

и $K_{km}^*(s, \sigma)$ — некоторые новые ядра. Будут ли системы (1) и (4) эквивалентны — вопрос довольно трудный. Его решение можно найти в статье Н. И. Мусхелишвили [28e].

Сказанное без всяких изменений переносится на системы сингулярных уравнений с ядрами Коши, если содержащиеся в системе сингулярные интегралы берутся по замкнутому контуру.

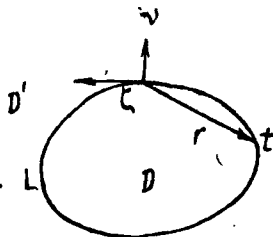
§ 1. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

По многочисленности и разнообразию приложений задача Дирихле занимает исключительное место в математике. К ней непосредственно сводится основная задача в гидродинамике — задача обтекания, далее задачи кручения и изгиба в теории упругости. С нею же тесно связаны основные задачи статической теории упругости как в плоскости, так и в пространстве. С этой же задачей соприкасаются и вопросы теории колебаний. Перечень этот нетрудно было бы продолжить.

В этом параграфе мы изложим методы решения задачи Дирихле, связанные с теорией интегральных уравнений, и некоторые её приложения. Мы будем здесь заниматься только плоской задачей, которая представляет для нас особый интерес как по обилию приложений, так и по большей разработанности и эффективности методов её решения.

Напомним, что задача Дирихле состоит в следующем: найти функцию, гармоническую внутри области, если известны значения этой функции на границе области.

28. Задача Дирихле для односвязной области. Рассмотрим сперва случай конечной области (черт. 4). Обозначим область буквой D , её контур — буквой L . Контур L будем считать гладким, с непрерывной кривизной. Искомую гармоническую функцию обозначим через $U(x, y)$, её заданные на L значения — через $u(t)$, где t — комплексная координата точки контура. Гармоническая в односвязной



Черт. 4.

области функция $U(x, y)$ может быть рассматриваема, как действительная часть некоторой аналитической функции $\varphi(z)$, регулярной в этой области, и мы решим нашу задачу, если найдём функцию $\varphi(z)$. Будем искать эту последнюю в виде интеграла типа Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (1)$$

плотность которого $\mu(\zeta)$ будем считать действительной. Дело сводится к определению $\mu(\zeta)$.

Заставим в формуле (1) точку z стремиться изнутри области к некоторой точке t контура. Пользуясь формулой (2) п. 21, мы получим:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \mu(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta. \quad (2)$$

Отделим в (2) действительные части. Замечая, что $\operatorname{Re}\{\varphi(t)\} = u(t)$, мы найдём:

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = 2u(t)$$

или, так как функция $\mu(\zeta)$ — действительная,

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \operatorname{Im} \left(\frac{d\zeta}{\zeta - t} \right) = 2u(t).$$

Вычислим ядро интеграла. Пусть $\zeta - t = re^{i\theta}$. Тогда

$$\operatorname{Im} \left(\frac{d\zeta}{\zeta - t} \right) = \operatorname{Im} (d \ln(\zeta - t)) = d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} d\sigma,$$

где $d\sigma$ — элемент дуги контура. В силу уравнений Коши-Римана

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{\partial \ln r}{\partial \nu} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \nu} \quad (3).$$

¹⁾ ν — внешняя нормаль к L .

Выберем направление радиуса-вектора r от ζ к t . Тогда, как легко видеть, $\frac{\partial r}{\partial \nu} = -\cos(\nu, r)$, и окончательно

$$\operatorname{Im} \left(\frac{d\zeta}{\zeta - t} \right) = -\frac{\cos(\nu, r)}{r} d\sigma.$$

Если $r \rightarrow 0$, то и $\cos(\nu, r) \rightarrow 0$, и без труда можно доказать, что, в нашем предположении о непрерывной кривизне кривой L , ядро $\frac{\cos(\nu, r)}{r}$ непрерывно. Мы приходим, таким образом, к интегральному уравнению типа Фредгольма с неизвестной $\mu(t)$:

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r} d\sigma = 2u(t). \quad (3)$$

В частном случае, когда контур L представляет собой эллипс, это уравнение было изучено нами в главе I, пп. 5 и 7. Докажем, что уравнение (3) разрешимо и имеет единственное решение, какова бы ни была правая часть. Иначе говоря, докажем, что $\lambda = \frac{1}{\pi}$ не есть характеристическое число ядра $\frac{\cos(\nu, r)}{r}$. В соответствии с альтернативой Фредгольма (п. 9), достаточно доказать, что соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Пусть $u(t) \equiv 0$. Уравнение (3) делается однородным. Пусть $\mu_0(t)$ — какое-либо его решение, так что

$$\mu_0(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \mu_0(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r} d\sigma = 0. \quad (4)$$

Положим (z — точка внутри D)

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (5)$$

Условие $u(t) \equiv 0$ показывает, что $\operatorname{Re}\{\varphi_0(t)\} = 0$, если t — точка на L . По теореме единственности задачи Дирихле, $\operatorname{Re}\{\varphi_0(z)\} \equiv 0$ во всей области D . Теперь из уравнений

Коши-Римана вытекает, что $\varphi_0(z)$ есть чисто мнимая постоянная, $\varphi_0(z) = ia$. Равенству (5) можно придать форму

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu_0(\zeta) - ia}{\zeta - z} d\zeta \equiv 0,$$

причём тождество это справедливо для всякой точки z внутри D . Но тогда, по известной теореме об интегралах Коши, $\mu_0(\zeta) - ia$ есть предельное значение на L некоторой функции $\psi(z)$, регулярной вне L и равной нулю на бесконечности. Мнимая часть этой функции равна на L постоянной a , но тогда $\psi(z) = \text{const}$. Будучи равной нулю при $z = \infty$, $\psi(z) \equiv 0$. Функция $\mu_0(t)$ есть значение $\text{Re}\{\psi(z)\}$ на контуре, а потому $\mu_0(t) \equiv 0$. Наше утверждение доказано.

Раз $\frac{1}{\pi}$ не есть характеристическое число уравнения (3), то к этому уравнению применимы приближённые методы решения, изложенные в пп. 5, 7 и 8.

Решим теперь задачу Дирихле для области D' , внешней по отношению к D . На этот раз $\varphi(z)$ нельзя искать в виде интеграла типа Коши, так как такой интеграл равен нулю при $z = \infty$, в то время как $\varphi(z)$ только ограничена на бесконечности. Будем поэтому искать $\varphi(z)$ в виде суммы интеграла типа Коши и некоторой постоянной, — именно, положим

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_L \mu(\zeta) d\sigma. \quad (6)$$

Плотность $\mu(\zeta)$ будем попрежнему считать действительной. Заставляя z стремиться к точке t контура, мы получим в соответствии с формулой (3) п. 21

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2} \mu(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_L \mu(\zeta) d\sigma.$$

Повторяя прежние рассуждения, мы придём к интегральному уравнению

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) d\sigma = -2u(t). \quad (7)$$

Это уравнение также разрешимо. В этом легко убедиться с помощью рассуждения, сходного с предшествующими.

29. Пример: конформное отображение внутренности эллипса на круг. Как известно, задача Дирихле очень просто решается, если известно конформное отображение области на круг. Обратное, если для некоторой области известно решение задачи Дирихле, то можно найти функцию, конформно отображающую область на круг. Покажем это.

Пусть $w = \omega(z)$ — функция, реализующая конформное отображение области D на круг $|w| < 1$. Пусть, далее, $z = a$ — точка области D , которая переходит в центр круга $w = 0$. Тогда

$$\omega(z) = (z - a)\psi(z), \quad (1)$$

где $\psi(z)$ регулярна и отлична от нуля в D . В таком случае функция

$$\varphi(z) = \ln \psi(z)$$

также регулярна в D . Найдём условия, определяющие функцию $\varphi(z)$.

Если z совпадает с точкой t контура, то

$$|w| = |t - a| |\psi(t)| = 1.$$

Отсюда

$$\operatorname{Re}\{\varphi(t)\} = \ln |\psi(t)| = -\ln |t - a|. \quad (2)$$

Итак, для определения $\varphi(t)$ надо решить задачу Дирихле при $u(t) = -\ln |t - a|$. Найдя $\varphi(t)$, мы уже легко восстановим $\omega(z)$.

Для примера найдём функцию, реализующую конформное отображение внутренности эллипса

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta$$

на круг $|w| < 1$.

Эта задача может быть решена с помощью эллиптических функций. Здесь мы дадим другое решение, пользуясь методом интегральных уравнений.

Потребуем, чтобы центр эллипса перешёл в центр круга. Для функции $\varphi(t)$ мы получаем условие на контуре

$$\operatorname{Re}\{\varphi(t)\} = -\ln |t|.$$

Полагая

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

мы придём к интегральному уравнению [п. 5. формулы (14)–(15)]

$$\mu(t) + \frac{b}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \mu(\zeta) \frac{d\tau}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{\theta + \tau}{2}} = -2 \ln |t|, \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (3)$$

Найдём разложение функции $2 \ln |t|$ в ряд Фурье. Имеем:

$$2 \ln |t| = \ln (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta).$$

Нетрудно проверить тождество

$$\ln (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) = 2 \ln \frac{a+b}{2} + 2 \operatorname{Re} \ln \left(1 + \frac{a-b}{a+b} \sigma^2 \right),$$

где $\sigma = e^{i\theta}$. Разлагая в ряд логарифм в правой части равенства и отделяя вещественную часть, мы получим искомого разложение:

$$\begin{aligned} & \ln (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) = \\ & = 2 \ln \frac{a+b}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^k \cos 2k\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

По формулам (22) п. 5 мы найдём коэффициенты Фурье функции $\mu(t)$:

$$A_0 = -\ln \frac{a+b}{2}, \quad A_{2k} = -\frac{2(-1)^{k-1}}{k} \frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k} + (a-b)^{2k}},$$

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Остальные коэффициенты равны нулю. Теперь

$$\mu(\zeta) = -\ln \frac{a+b}{2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k} + (a-b)^{2k}} \cos 2k\theta \quad (5)$$

и

$$\varphi(z) = -\ln \frac{a+b}{2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k} + (a-b)^{2k}} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\cos 2k\theta}{\zeta - z} d\zeta, \quad (6)$$

причём $\zeta = a \cos \theta + ib \sin \theta$. Вычислим интегралы в (6):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\cos 2k\theta d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2k\theta (-a \sin \theta + ib \cos \theta) d\theta}{a \cos \theta - ib \sin \theta - z}.$$

Полагая $e^{i\theta} = \sigma$, мы приведём этот интеграл к виду

$$\frac{1}{4\pi i} \int_{|\sigma|=1} \frac{(\sigma^{2k} + \sigma^{-2k})[(a+b)\sigma^2 - (a-b)] d\sigma}{(a+b)\sigma^2 - 2c\sigma + (a-b)} \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{1}{2} (I_1 + I_2),$$

где через I_1 и I_2 обозначены интегралы

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \frac{\sigma^{2k-1} [(a+b)\sigma^2 - (a-b)] d\sigma}{(a+b)\sigma^2 - 2c\sigma + (a-b)} \frac{d\sigma}{\sigma},$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \frac{\sigma^{2k-1} [(a+b)\sigma^2 - (a-b)] d\sigma}{(a+b)\sigma^2 - 2c\sigma + (a-b)} \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Подинтегральная функция в I_1 имеет простые полюсы в точках

$$\sigma_1 = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a+b}, \quad \sigma_2 = \frac{z - \sqrt{z^2 - c^2}}{a+b}.$$

Вычеты в этих точках соответственно равны

$$\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a+b} \right)^{2k}, \quad \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - c^2}}{a+b} \right)^{2k}. \quad (7)$$

Докажем, что оба полюса σ_1 и σ_2 лежат внутри круга $|\sigma| < 1$.

Произведение $\sigma_1 \sigma_2$ равно $\frac{a-b}{a+b}$ и, следовательно, меньше единицы. Поэтому необходимо одно из чисел σ_1, σ_2 меньше единицы по модулю. Если бы второе было по модулю больше единицы, то интеграл I_1 равнялся бы

одному из вычетов (7) и был бы нерегулярным внутри эллипса, что очевидно, невозможно¹⁾. Из доказанного следует, что

$$I_1 = \frac{(z + \sqrt{z^2 - c^2})^{2k} + (z - \sqrt{z^2 - c^2})^{2k}}{(a + b)^{2k}}.$$

Для вычисления I_2 положим $\sigma = \frac{1}{\tau}$. Тогда

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\tau^{2k-1} [a + b - (a - b)\tau]}{(a - b)\tau^2 - 2z\tau + (a + b)} d\tau.$$

¹⁾ Приведём прямое доказательство нашего утверждения. Обозначим

$$\frac{z - \sqrt{z^2 - c^2}}{c} = \chi, \quad (*)$$

откуда $z = \frac{c}{2} \left(\chi + \frac{1}{\chi} \right)$. Это преобразование переводит плоскость z , разрезанную вдоль отрезка $(-c, c)$, во внутренность или во внешность окружности $|\chi| = 1$, в зависимости от выбора знака перед корнем. Пусть, например, при выборе знака минус перед корнем мы получим $|\chi| < 1$. Тогда тем более

$$\left| \frac{z - \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b} \right| < 1.$$

Рассмотрим теперь окружность $|\chi| = \frac{a + b}{c}$. Если выполнить преобразование

$$\chi = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{c},$$

то эта окружность перейдёт в заданный нам эллипс

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta.$$

Внутренним точкам эллипса соответствуют при этом точки плоскости χ , для которых $1 < |\chi| < \frac{a + b}{c}$. Таким образом, внутри эллипса

$$\left| \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{c} \right| < \frac{a + b}{c},$$

или

$$\left| \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b} \right| < 1.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, мы найдём, что оба полюса подинтегральной функции лежат вне единичного круга и, следовательно, $I_2 = 0$. Мы получаем, таким образом,

$$\frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{\cos 2k\theta}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2} \frac{(z + \sqrt{z^2 - c^2})^{2k} + (z - \sqrt{z^2 - c^2})^{2k}}{(a + b)^{2k}}. \quad (8)$$

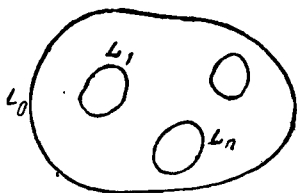
Числитель в правой части, очевидно, есть полином степени $2k$. Обозначим его для краткости через $F_{2k}(z)$. Тогда

$$\varphi(z) = -\ln \frac{a+b}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k} + (a-b)^{2k}} F_{2k}(z), \quad (9)$$

и искомая отображающая функция равна

$$\omega(z) = \frac{2z}{a+b} e^{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k} + (a-b)^{2k}} F_{2k}(z)}. \quad (10)$$

30. Задача Дирихле для многосвязных областей. Пусть D — конечная $(n+1)$ -связная область. Её контур L состоит из $n+1$ замкнутой кривой, которые мы обозначим через L_0, L_1, \dots, L_n , причём индекс нуль мы припишем кривой, ограничивающей область извне (черт. 5).



Черт. 5.

Прежде чем приступить к решению нашей задачи, сделаем одно замечание. Если функция $U(x, y)$ — однозначная и гармоническая в многосвязной области, то сопряжённая с ней функция $V(x, y)$ будет, вообще говоря, многозначной. Выясним характер её многозначности. Пусть ν — направление внешней нормали к L . Обозначим

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \frac{\partial U}{\partial \nu} ds, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

В силу уравнений Коши-Римана $\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$, и

$$\int_{L_k} \frac{\partial V}{\partial \sigma} d\sigma = 2\pi A_k.$$

Но последний интеграл равен приращению $V(x, y)$ при обходе кривой L_k против часовой стрелки. Таким образом, если гармоническая функция однозначна в D , то сопряжённая с ней функция приобретает постоянное приращение $2\pi A_k$ при обходе вокруг каждой из кривых L_1, L_2, \dots, L_n . При том же обходе аналитическая функция $\varphi(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ получает приращение $2\pi i A_k$. Такое же приращение приобретает функция $A_k \ln(z - z_k)$, где z_k — произвольная точка внутри D . Отсюда и следует, что $\varphi(z)$ можно представить в виде

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^n A_k \ln(z - z_k) + \varphi^*(z), \quad (2)$$

где $\varphi^*(z)$ — однозначная функция, регулярная в D .

Задачу Дирихле можно решать следующим образом. Пусть $u(t)$ — заданное на L значение $U(x, y)$. Тогда из (2) следует

$$\operatorname{Re} \{ \varphi^*(t) \} = u(t) - \sum_{k=1}^n A_k \ln |t - z_k|. \quad (3)$$

Однозначную функцию $\varphi^*(z)$ будем искать в виде интеграла типа Коши:

$$\varphi^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (4)$$

с действительной плотностью $\mu(\zeta)$. Повторяя рассуждения предшествующего пункта, мы придём к интегральному уравнению

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r} d\zeta = 2u(t) - 2 \sum_{k=1}^n A_k \ln |t - z_k|. \quad (5)$$

Можно доказать, что $\frac{1}{\pi}$ — характеристическое число ядра $\frac{\cos(\nu, r)}{r}$ и ему соответствует n линейно независимых собственных функций: Коэффициенты A_k найдём из условия, что правая часть в (5) ортогональна к собственным функциям сопряжённого уравнения. После этого уравнение (5) делается разрешимым. Решив его, мы по формулам (4) и (2) найдём решение задачи Дирихле.

Изложенный метод практически мало пригоден, так как требует вычисления собственных функций сопряжённого уравнения. Мы дадим поэтому другой метод, свободный от указанного недостатка.

Обозначим через $a(t, \zeta)$ функцию, равную единице, если точки t и ζ принадлежат одной и той же внутренней кривой L_k , и нулю во всех остальных случаях. Уравнение (5) заменим следующим:

$$\begin{aligned} \mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + a(t, \zeta) \right) \mu(\zeta) d\zeta = \\ = 2u(t) - 2 \sum_{k=1}^n A_k \ln |t - z_k|. \end{aligned} \quad (6)$$

В более подробной записи это уравнение имеет такой вид: если t лежит на L_k , $k=1, 2, \dots, n$, то

$$\begin{aligned} \mu(t) - \frac{1}{\pi} \int \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mu(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{L_k} \mu(\zeta) d\sigma = \\ = 2u(t) - 2 \sum_{k=1}^n A_k \ln |t - z_k|, \end{aligned} \quad (7_1)$$

если же t лежит на L_0 , то

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mu(\zeta) d\zeta = 2u(t) - 2 \sum_{k=1}^n A_k \ln |t - z_k|. \quad (7_2)$$

Можно доказать, что $\frac{1}{\pi}$ не есть характеристическое число уравнения (6). По первой теореме Фредгольма, это

уравнение разрешимо и имеет единственное решение. Решив уравнение (6), мы затем подчиним коэффициенты A_k требованию, чтобы

$$\int_{L_k} \mu(\zeta) d\sigma = 0, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Тогда уравнения (6) и (5) совпадут, и по формулам (4) и (2) мы найдём решение нашей задачи.

Перейдём к случаю бесконечной области. Пусть область D есть внешность n контуров L_1, L_2, \dots, L_n (черт. 6).



Черт. 6.

Формула (2) остаётся в силе, только коэффициенты A_k на этот раз подчинены равенству

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = 0. \quad (9)$$

Если бы равенство (9) не имело места, то гармоническая функция $\operatorname{Re} \{ \varphi(z) \}$ возрастала бы на бесконечности, как

$n |z| \sum_{k=1}^n A_k$, что противоречит определению гармонической функции. Как и в п. 28, $\varphi^*(z)$ не может быть представлена интегралом типа Коши, и мы положим

$$\varphi^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_L \mu(\zeta) d\sigma. \quad (10)$$

Это приведёт нас к уравнению

$$\begin{aligned} \mu(\zeta) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r} d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) d\sigma = \\ = -2u(t) + 2 \sum_{k=1}^n A_k \ln |t - z_k|. \end{aligned} \quad (11)$$

Это уравнение имеет $n-1$ собственную функцию. Условия ортогональности правой части (11) к собственным функциям сопряжённого уравнения вместе с равенством (9) дают систему n уравнений, из которой определяются коэффициенты A_k .

Чтобы освободиться от вычисления собственных функций сопряжённого ядра, поступим так же, как и в случае конечной области. Обозначим через $b(t, \zeta)$ функцию, равную единице, если t и ζ принадлежат одной и той же кривой L_k , $k=1, 2, \dots, n-1$, и нулю в остальных случаях. Уравнение (11) заменим следующим:

$$\begin{aligned} \mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + b(t, \zeta) \right) d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) d\sigma = \\ = -2u(t) + 2 \sum_{k=1}^n A_k \ln |t - z_k| \end{aligned} \quad (12)$$

или, более подробно: если t лежит на L_k , $k=1, 2, \dots, n-1$, то

$$\begin{aligned} \mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r} d\sigma + \frac{1}{\pi} \int_{L_k} \mu(\zeta) d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) d\sigma = \\ = -2u(t) + 2 \sum_{k=1}^n A_k \ln |t - z_k|, \end{aligned} \quad (13_1)$$

если же t лежит на L_n , то

$$\begin{aligned} \mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r} d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) d\sigma = \\ = -2u(t) + 2 \sum_{k=1}^n A_k \ln |t - z_k|. \end{aligned} \quad (13_2)$$

Можно доказать, что уравнение (12) разрешимо при любом значении правой части. Решив его, потребуем, чтобы

$$\int_{L_k} \mu(\zeta) d\sigma = 0, \quad k=1, 2, \dots, n-1. \quad (14)$$

Равенства (9) и (14) образуют систему n линейных уравнений, из которых мы найдём коэффициенты A_k . Если удовлетворены условия (14), то уравнения (11) и (12) совпадают, и функция $\mu(\zeta)$, таким образом нами построенная, приводит нас к решению задачи Дирихле.

31. Видоизменённая задача Дирихле и задача Неймана. Мы будем называть видоизменённой задачей Дирихле следующую задачу: найти аналитическую функцию, регулярную и однозначную в многосвязной области, если на каждой из кривых, составляющих контур, действительная часть этой функции задана с точностью до постоянного слагаемого.

Искомая аналитическая функция $\varphi(z)$ должна, следовательно, на контуре удовлетворять такому условию: если t лежит на кривой L_k , то

$$\operatorname{Re} \{ \varphi(t) \} = f(t) + b_k, \quad (1)$$

где $f(t)$ — заданная функция, а b_k — неопределённые постоянные. Они должны быть определены из условия, что $\varphi(z)$ однозначна в области. Заметим, что одну из постоянных b_k можно зафиксировать как угодно.

Результаты предшествующего пункта позволяют просто решить видоизменённую задачу Дирихле. В случае конечной области (черт. 5) напишем интегральное уравнение

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + a(t, \zeta) \right) \mu(\zeta) d\zeta = 2f(t). \quad (2)$$

В соответствии со сказанным в предыдущем пункте, это уравнение разрешимо, и притом единственным образом. Решим его. Обозначим теперь

$$b_0 = 0, \quad b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \mu(\zeta) d\zeta, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Тогда, если t лежит на L_k ,

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mu(\zeta) d\zeta = 2[f(t) + b_k]. \quad (4)$$

Положим теперь

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (5)$$

Левая часть в (4) равна $2\operatorname{Re} \{ \varphi(t) \}$ (см. п. 28), и из (4) следует, что однозначная функция $\varphi(z)$, регулярная в D ,

удовлетворяет условию (1) и представляет собой, следовательно, решение видоизменённой задачи Дирихле.

Если область — бесконечная, то решение нашей задачи получится, если решить интегральное уравнение

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + b(t, \zeta) \right) \mu(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) d\zeta = -2f(t). \quad (6)$$

Здесь мы положим

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \mu(\zeta) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_L \mu(\zeta) d\zeta, \quad (7)$$

и тогда интеграл (5) даст решение видоизменённой задачи Дирихле для бесконечной области.

К видоизменённой задаче Дирихле сводится ряд задач: задача конформного отображения многосвязных областей, задача кручения полых стержней, задача обтекания и многие другие. К этой же задаче сводится и так называемая задача Неймана.

Задача Неймана состоит в следующем: найти гармоническую в области функцию, если на контуре известны значения её нормальной производной.

Для того, чтобы задача Неймана имела решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_L F(\zeta) d\zeta = 0,$$

где $F(\zeta)$ — заданное значение нормальной производной от искомой функции. Доказательство этого хорошо известного предложения приводится в курсах математической физики.

Пусть $U(x, y)$ — искомая функция, и $F(\zeta)$ — заданное значение её нормальной производной на контуре. Пусть, далее, $V(x, y)$ — функция, сопряжённая с $U(x, y)$, и $\varphi(z) = U + iV$.

Как было указано в предыдущем пункте,

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^n A_k \ln(z - z_k) + \varphi^*(z), \quad (8)$$

где $\zeta^*(z)$ — однозначная функция. На этот раз коэффициенты A_k известны:

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} F(t) d\sigma,$$

и дело сводится только к отысканию однозначной функции $\psi^*(z)$.

Нетрудно найти краевое условие для $\psi^*(z)$. Пусть

$$\psi^*(z) = U^* + iV^*.$$

На контуре L нам известна нормальная производная функции U^* :

$$\frac{\partial U^*}{\partial \nu} = F(t) - \sum_{k=1}^n A_k \frac{\partial \ln |t - z_k|}{\partial \nu} = F^*(t). \quad (9)$$

На кривой L_k возьмём произвольную точку t_k . Тогда на этой кривой имеем

$$V^* = \int_{t_k}^t F^*(\zeta) d\sigma + b_k, \quad (10)$$

где b_k — неопределённая пока постоянная. Функция $-i\psi^*(z) = -V^* - iU^*$ является решением видоизменённой задачи Дирихле с контурным условием (10). Решив эту задачу, мы тем самым решим и задачу Неймана.

32. Кручение сплошных и полых стержней. В теории кручения стержней принимается, что отличны от нуля только составляющие напряжений τ_{xz} и τ_{yz} ¹⁾. Они удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Обозначим через u_x, u_y, u_z составляющие упругих смещений по осям x, y, z . Из уравнений закона Гука можно вывести, что

$$u_x = -\theta yz + \alpha, \quad u_y = \theta xz + \beta, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

¹⁾ Мы считаем, что ось z направлена параллельно образующим стержня.

Здесь θ , α и β — постоянные. Величина θ пропорциональна закручиванию стержня. Далее, из тех же уравнений закона Гука мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \theta y \right), \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \theta x \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Дифференцируя первое уравнение по y , а второе по x и вычитая, получим:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2\mu\theta. \quad (4)$$

Уравнению (1) можно удовлетворить, полагая

$$\tau_{xz} = -\mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \theta y \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \theta x \right). \quad (5)$$

Подставив это в (4), найдём, что $\Delta\varphi = 0$. Функция $\varphi(x, y)$ будет, следовательно, гармонической в области D , получаемой пересечением стержня с плоскостью (x, y) .

Найдём краевые условия для функции φ . На боковой поверхности, а следовательно, и на контуре области D выполняется равенство

$$\tau_{xz} \cos(\nu, x) + \tau_{yz} \cos(\nu, y) = 0, \quad (6)$$

где ν — внешняя нормаль к поверхности. Равенство (6) выражает, что боковая поверхность стержня не подвержена действию внешних сил. Подставив в него выражения (5), мы приведём его к виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(\nu, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(\nu, x) = -\theta [x \cos(\nu, y) - y \cos(\nu, x)].$$

Далее,

$$\cos(\nu, x) = -\cos(\sigma, y) = -\frac{dy}{ds}, \quad \cos(\nu, y) = \cos(\sigma, x) = \frac{dx}{ds}.$$

Отсюда легко следует, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = -\frac{1}{2} \theta \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial \sigma}.$$

Интегрируя по дуге σ , получим окончательно: на контуре L области D

$$\varphi = -\frac{1}{2}\theta(x^2 + y^2) + c, \quad c = \text{const.} \quad (7)$$

Если стержень сплошной, то область D — односвязная. Постоянную c можно зафиксировать как угодно, и функция $\varphi(x, y)$ определяется как решение задачи Дирихле с краевым условием (7). Если же стержень полый, то область D — многосвязная, и постоянная c может иметь различные значения на различных кривых, составляющих контур.

Докажем теперь, что в случае полого стержня функция $\psi(x, y)$, сопряжённая с $\varphi(x, y)$, однозначна в D . По уравнениям Коши-Римана

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Подставив это в (5), получим:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \mu \theta y, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mu \theta x.$$

Сравнивая это с формулами (3), мы видим, что $\psi = \mu u_z + A$, где A — постоянная. Но u_z , как смещение точки стержня, необходимо однозначно. Отсюда следует, что $\psi(x, y)$ также однозначна.

Теперь ясно, что $\varphi(x, y)$ есть решение видоизменённой задачи Дирихле с краевым условием (7).

Заметим, что несколько удобнее определять не $\varphi(x, y)$, а функцию $U(x, y) = -\frac{2}{\theta} \varphi(x, y)$, определяемую контурным условием

$$u = x^2 + y^2 + c. \quad (8)$$

33. Кручение стержня квадратного сечения. Рассмотрим задачу о кручении стержня, сечение которого плоскостью, параллельной образующим, есть квадрат. Оси координат расположим так, как показано на чертеже 7. Для простоты вычислений примем, что сторона квадрата равна двум. Постоянную c в формуле (8) п. 32 положим равной нулю.

Функция $U(x, y)$ удовлетворяет контурному условию

$$U(x, y) = x^2 + y^2.$$

Полагая, как обычно, $U(x, y) = \operatorname{Re} \{ \Phi(z) \}$ и

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

мы получим интегральное уравнение

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r} d\zeta = 2(x^2 + y^2), \quad (1)$$

где $t = x + iy$ есть точка контура квадрата.

В угловых точках контура ядро $\frac{\cos(\nu, r)}{r}$ делается

бесконечным так, что уравнение (1) перестаёт быть фредгольмовским. Однако, доказано (см. [32]), что альтернатива Фредгольма здесь имеет место. Соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение. Отсюда вытекает, что уравнение (1) разрешимо.

Представим наше уравнение в другом виде, более пригодном для численных расчётов. Именно (п. 28),

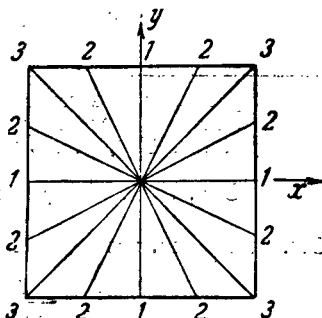
$$-\frac{\cos(\nu, r)}{r} d\zeta = d\theta, \quad (2)$$

где θ — угол между вектором, направленным от ζ к t , с осью x , и уравнение (1) принимает вид

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) d\theta = 2(x^2 + y^2). \quad (3)$$

Уравнение (3) будем решать по методу п. 7, применяя к вычислению интеграла формулу прямоугольников.

Возьмём на контуре квадрата 16 точек, отмеченных на чертеже 7 цифрами 1, 2, 3. Это — точки, одна из коор-



Черт. 7.

динат которых равна ± 1 , а другая равна одному из чисел $0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$. Заметим, что, в силу симметрии краевых условий, значения $\mu(t)$ в точках, симметричных относительно осей x, y или относительно биссектрис координатных углов, равны между собой¹⁾. Таким образом, в точках, отмеченных одинаковыми цифрами, значения $\mu(t)$ совпадают, так что всего будет только три различных значения $\mu(t)$, соответствующих значениям $t_1=1, t_2=1+\frac{1}{2}i, t_3=1+i$. Обозначим

$$\mu(1)=1, \mu\left(1+\frac{1}{2}i\right)=\mu_2, \mu(1+i)=\mu_3. \quad (4)$$

Заменив интеграл в (3) по формуле прямоугольников, получим:

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{16} \mu(t_k) \Delta \theta_k(t) = 2|t|^2. \quad (5)$$

¹⁾ Приведём доказательство этого предложения. Функция $U(y, x)$ — гармоническая и удовлетворяет тому же краевому условию (8) п. 32, что и функция $U(x, y)$. Но тогда $U(y, x) \equiv U(x, y)$. Далее,

$$U(y, x) = \operatorname{Re} \{ \Phi(y + ix) \} = \operatorname{Re} \{ \Phi(i\bar{z}) \} = \operatorname{Re} \{ \overline{\Phi(\bar{i}z)} \}.$$

Отсюда следует, что $\Phi(z) \equiv \overline{\Phi(\bar{i}z)}$, или

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\bar{\zeta} + iz} d\bar{\zeta}.$$

Во втором интеграле заменим ζ через $i\bar{\zeta}'$. В плоскости ζ мы получим тот же контур L , но обходимый в противоположном направлении. Меняя направление обхода и знак интеграла, получим (штрих у ζ' отбрасываем):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(i\bar{\zeta}')}{\bar{\zeta}' - iz} d\bar{\zeta}'.$$

Но представление аналитической функции в виде интеграла типа Коши с действительной плотностью — единственное. Отсюда следует, что $\mu(\zeta) = \mu(i\bar{\zeta})$, т. е. функция $\mu(\zeta)$ принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно биссектрисы первого координатного угла. Аналогично доказывается симметричность $\mu(\zeta)$ и в остальных случаях.

Здесь через t_k обозначены выбранные нами точки, а через $\Delta\theta_k(t)$ — угол, образованный отрезками, соединяющими точки t_k и t_{k+1} с точкой t . Полагая в (5) $t=t_1, t_2, t_3$, мы получим систему трёх уравнений с тремя неизвестными μ_1, μ_2, μ_3 :

$$\left. \begin{aligned} 1,2432 \mu_1 + 0,5000 \mu_2 + 0,2658 \mu_3 &= 2,000, \\ 0,1992 \mu_1 + 1,4273 \mu_2 + 0,3734 \mu_3 &= 2,500, \\ 0,1269 \mu_1 + 0,2508 \mu_2 + 1,1239 \mu_3 &= 4,000. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Величины $\Delta\theta_k(t_i)$ просто определяются по чертежу; при составлении уравнений (6) учтено, что в точках, обозначенных на чертеже одинаковыми цифрами, $\mu(t)$ имеет одинаковые значения.

Решая систему (6), получим:

$$\mu_1 = 0,60, \quad \mu_2 = 0,80, \quad \mu_3 = 3,32. \quad (7)$$

Проинтерполируем функцию μ на каждой из сторон квадрата. Эта функция симметрична, и её можно интерполировать полиномом вида $ax^4 + bx^2 + c$ на сторонах квадрата, параллельных оси x . На двух других сторонах мы получим, очевидно, интерполирующий полином $ay^4 + by^2 + c$ с теми же коэффициентами. Вычисляя коэффициенты, найдём: $a=2,56, b=0,16, c=0,60$ и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \mu(x \pm i) &= 2,56x^4 + 0,16x^2 + 0,60, \\ \mu(\pm 1 + iy) &= 2,56y^4 + 0,16y^2 + 0,60. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Зная $\mu(t)$, нетрудно вычислить $\Phi(z)$, а затем и напряжения τ_{xz} и τ_{yz} .

34. Задача обтекания. Плоская задача обтекания состоит в определении поля скоростей в плоско-параллельном потоке, встречающем на своём пути одно или несколько твёрдых тел, неподвижных или движущихся заданным образом. Скорость потока на бесконечности считается заданной.

Если мы имеем дело с потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости, то задача сводится к определению комплексного потенциала

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (1)$$

где φ — потенциал скоростей, а ψ — функция тока, по заданным краевым условиям. Направим ось x параллельно скорости потока в бесконечности; величину этой скорости обозначим через U . Тогда краевые условия принимают следующий вид:

а) на бесконечности

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [\varphi(x, y) - Uy] = C, \quad (2)$$

б) на границе обтекаемого тела

$$\psi = U_0 y - V_0 x - \frac{\Omega}{2} (x^2 + y^2) + C', \quad (3)$$

где U_0 и V_0 — проекции на оси x и y скорости поступательного движения обтекаемого тела, Ω — угловая скорость его вращения. Величины C и C' — постоянные. Если обтекаемых тел — несколько, то на каждой из границ постоянная C' принимает своё особое значение.

Функция тока $\psi(x, y)$ однозначна, как это видно из формулы (3); что же касается потенциала $\varphi(x, y)$, то он будет однозначным, если область, занятая потоком, — односвязная, иначе говоря, если поток обтекает только одно тело. В случае же нескольких обтекаемых тел потенциал скоростей будет, вообще говоря, многозначным. Величина

$$\Gamma_L = \int_L u_x dx + u_y dy = \int_L d\varphi, \quad (4)$$

где u_x и u_y — составляющие скорости потока, называется циркуляцией по контуру L^1). Если циркуляции по границам L_1, L_2, \dots, L_n равны $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, то

$$\omega = Uz + \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \cdot \ln(z - z_k) + \omega^*(z), \quad (5)$$

где $\omega^*(z)$ — регулярная и однозначная в области потока

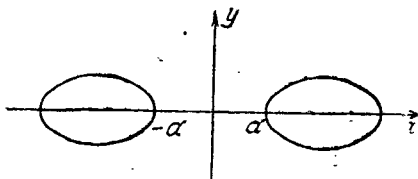
¹⁾ См., например, Н. В. Розе, И. А. Кибель, Н. Е. Кочин. Теоретическая гидромеханика, ч. II, ОНТИ, 1937, или Л. И. Седов. Приложения теории функций комплексного переменного к некоторым задачам плоской гидродинамики, Успехи математических наук, вып. VI, 1939.

функция. На границах обтекаемых тел $w^*(z)$ удовлетворяет условию:

$$\left. \begin{aligned} \text{на } L_k \quad \operatorname{Im}\{w^*(z)\} = & (U_{0k} - U)y - V_{0k}x - \frac{\Omega_k}{2}(x^2 + y^2) - \\ & - \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{2\pi} \ln|z - z_k| + C_k. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В формулах (5) и (6) z_k означают произвольно фиксированную внутри L_k точку. U_{0k} , V_{0k} , Ω_k и C_k означают величины U_0 , V_0 , Ω , C , относящиеся к контуру L_k . Теперь можно функцию $\frac{1}{i}w^*(z)$ найти, как решение видоизменённой задачи Дирихле с граничным условием (6). Решив эту задачу, например, по способу п. 31, мы затем легко уже найдём поле скоростей в потоке.

35. Обтекание двух эллиптических цилиндров. В качестве примера рассмотрим задачу об обтекании двух одинаковых эллипсов с полуосями a и b , расположенных как на черт. 8. Для простоты вычислений примем, что поток — бесциркуляционный, и эллипсы — неподвижные. Примем также, что скорость потока на бесконечности равна U и направлена по оси x . Формула (5) п. 34 принимает вид



Черт. 8.

$$w(z) = Uz + w^*(z). \quad (1)$$

Краевое условие для функции $w(z) = \frac{1}{i}w^*(z)$ будет:

$$\text{на } L_k: \quad \operatorname{Re}\{w(z)\} = -Uy - C_k, \quad k = 1, 2. \quad (2)$$

Положим

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3)$$

В соответствии с п. 31, мы получим для $\mu(\zeta)$ следующее интегральное уравнение:

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + b(t, \zeta) \right) d\zeta = 2Uy, \quad (4)$$

причём функцию $b(t, \zeta)$ мы определяем так:

$$b(t, \zeta) d\zeta = \frac{1}{2} d\tau, \quad (5_1)$$

где τ — параметр, определяющий положение точки эллипса, если t и ζ лежат на одном и том же эллипсе, и

$$b(t, \zeta) d\zeta = 0 \quad (5_2)$$

— в противном случае¹⁾.

Вычислим ядро $\frac{\cos(\nu, r)}{r}$. Введём параметрические уравнения эллипса L_1 :

$$x = a + a + a \cos t, \quad y = b \sin t,$$

и эллипса L_2 :

$$x = -a - a + a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Если точки t и ζ лежат на одном и том же эллипсе, то, повторяя вычисления п. 5, мы найдём:

$$\frac{\cos(\nu, r)}{r} d\zeta = -\frac{b}{2a} \frac{d\tau}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t + \tau}{2}}, \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Если t лежит на L_1 , а ζ — на L_2 , то

$$\frac{\cos(\nu, r)}{r} d\zeta =$$

$$= \frac{b \left[(a + a) \cos \tau - a \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right] d\tau}{2 \left[(a + a)^2 + (a + a) (\cos t - \cos \tau) + a^2 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \left(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t + \tau}{2} \right) \right]}.$$

¹⁾ Интегральное уравнение (4) и функция $b(t, \zeta)$ строятся нами здесь несколько иначе, чем в пп. 30 и 31. Это сделано с целью упростить вычисления; существо дела от этого не меняется.

Наконец, если t лежит на L_2 , а ζ — на L_1 , то

$$\begin{aligned} & \frac{\cos(\nu, r)}{r} d\zeta = \\ & = \frac{b \left[(a+a) \cos \tau + a \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right] d\tau}{2 \left[(a+a)^2 - (a+a) (\cos t - \cos \tau) + a^2 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \left(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2} \right) \right]}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ значения $\mu(t)$ на контурах L_1 и L_2 . Уравнение (4) можно представить, как систему с неизвестными $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$:

$$\left. \begin{aligned} & \mu_1(t) - \frac{b}{2a\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_1(\tau) d\tau}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2}} + \\ & + \frac{b}{2a\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left(\gamma \cos \tau - \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) \mu_2(\tau) d\tau}{\gamma^2 + \gamma (\cos t - \cos \tau) + \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \left(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2} \right)} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(\tau) d\tau = 2bU \sin t, \\ & \mu_2(t) - \frac{b}{2a\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left(\gamma \cos \tau + \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) \mu_1(\tau) d\tau}{\gamma^2 + \gamma (\cos t - \cos \tau) + \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \left(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2} \right)} \\ & - \frac{b}{2a\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_2(\tau) d\tau}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_2(\tau) d\tau = 2bU \sin t. \end{aligned} \right\} (6)$$

Мы здесь обозначили для краткости

$$\gamma = \frac{a + a}{a}.$$

Очевидно,

$$\gamma > 1.$$

Разлагая ядра в ряды Фурье и сохраняя конечное число их членов, мы сведём систему (6) к вырожденной, которую решить уже нетрудно.

Мы разберём здесь более подробно случай, когда γ достаточно велико, т. е. расстояние между обтекаемыми эллипсами велико сравнительно с их размерами. В этом случае мы можем приближённо положить, сохраняя члены, содержащие $\frac{1}{\gamma}$ и $\frac{1}{\gamma^2}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma \cos \tau - \sin^2 \frac{t-\tau}{2}}{\gamma^2 + \gamma (\cos t - \cos \tau) + \sin^2 \frac{t-\tau}{2} (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2})} = \\ & = \frac{\cos \tau}{\gamma} + \frac{\cos 2\tau}{2\gamma^2} - \frac{\cos(t+\tau)}{2\gamma^2}, \\ & \frac{\gamma \cos \tau + \sin^2 \frac{t-\tau}{2}}{\gamma^2 + \gamma (\cos t - \cos \tau) + \sin^2 \frac{t-\tau}{2} (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2})} = \\ & = \frac{\cos \tau}{\gamma} - \frac{\cos 2\tau}{2\gamma^2} + \frac{\cos(t+\tau)}{2\gamma^2}. \end{aligned}$$

Далее, как было установлено в п. 5,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2}} = \\ & = \frac{a}{b} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{a+b} \right)^{2k} (\cos kt \cos k\tau - \sin kt \sin k\tau). \right] \end{aligned}$$

Теперь система (6) записывается в виде

$$\begin{aligned}
 \mu_1(t) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k} & \left[\cos kt \int_0^{2\pi} \mu_1(\tau) \cos k\tau d\tau - \right. \\
 & \left. - \sin kt \int_0^{2\pi} \mu_1(\tau) \sin k\tau d\tau \right] + \frac{b}{2a\gamma\pi} \int_0^{2\pi} \mu_2(\tau) \cos \tau d\tau + \\
 + \frac{b}{4a\gamma^2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_2(\tau) \cos 2\tau d\tau - \frac{b}{4a\gamma^2\pi} \cos t \int_0^{2\pi} \mu_2(\tau) \cos \tau d\tau + \\
 & + \frac{b}{4a\gamma^2\pi} \sin t \int_0^{2\pi} \mu_2(\tau) \sin \tau d\tau = 2bU \sin t; \\
 \mu_2(t) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k} & \left[\cos kt \int_0^{2\pi} \mu_1(\tau) \cos k\tau d\tau - \right. \\
 & \left. - \sin kt \int_0^{2\pi} \mu_1(\tau) \sin k\tau d\tau \right] - \frac{b}{2a\gamma\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(\tau) \cos \tau d\tau + \\
 + \frac{b}{4a\gamma^2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(\tau) \cos 2\tau d\tau - \frac{b}{4a\gamma^2\pi} \cos t \int_0^{2\pi} \mu_1(\tau) \cos \tau d\tau + \\
 & + \frac{b}{4a\gamma^2\pi} \sin t \int_0^{2\pi} \mu_1(\tau) \sin \tau d\tau = 2bU \sin t.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Разложим $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ в ряды Фурье:

$$\mu_1(t) = A_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(1)} \cos kt + B_k^{(1)} \sin kt,$$

$$\mu_2(t) = A_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(2)} \cos kt + B_k^{(2)} \sin kt.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & A_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(1)} \cos kt + B_k^{(1)} \sin kt) - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{a+b} \right)^{2k} (A_k^{(1)} \cos kt - B_k^{(1)} \sin kt) + \\
 & + \frac{bA_1^{(2)}}{2a\gamma} + \frac{bA_2^{(2)}}{4a\gamma^2} - \frac{bA_1^{(2)}}{4a\gamma^2} \cos t - \frac{bB_1^{(2)}}{4a\gamma^2} \sin t = 2bU \sin t, \\
 & A_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(2)} \cos kt + B_k^{(2)} \sin kt) - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{a+b} \right)^{2k} (A_k^{(2)} \cos kt - B_k^{(2)} \sin kt) - \\
 & - \frac{bA_1^{(1)}}{2a\gamma} + \frac{bA_2^{(1)}}{4a\gamma^2} - \frac{bA_1^{(1)}}{4a\gamma^2} \cos t - \frac{bB_1^{(1)}}{4a\gamma^2} \sin t = 2bU \sin t.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Приравнявая коэффициенты Фурье справа и слева в (8), найдём, что отличны от нуля только коэффициенты $B_1^{(1)}$ и $B_1^{(2)}$, которые определяются из уравнений

$$\begin{aligned}
 B_1^{(1)} \left(1 + \frac{c^2}{(a+b)^2} \right) - \frac{b}{4a\gamma^2} B_1^{(2)} &= 2bU, \\
 -\frac{b}{4a\gamma^2} B_1^{(1)} + \left(1 + \frac{c^2}{(a+b)^2} \right) B_1^{(2)} &= 2bU.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$B_1^{(1)} = B_1^{(2)} = \frac{8ab(a+b)\gamma^2 U}{8a^2\gamma^2 - b(a+b)}$$

и, следовательно,

$$\mu_1(t) = \mu_2(t) = \frac{8ab(a+b)\gamma^2 U}{8a^2\gamma^2 - b(a+b)} \sin t. \tag{9}$$

Теперь

$$\frac{1}{i} w^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\mu_1(\tau)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\mu_2(\tau)}{\zeta - z} d\tau,$$

ИЛИ

$$\frac{1}{l} w^*(z) = \frac{1}{2\pi l} \frac{8ab(a+b)\gamma^2 U}{8a^2\gamma^2 - b(a+b)} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\sin \tau (-a \sin \tau + lb \cos \tau) d\tau}{a + a + a \cos \tau + lb \sin \tau - z} + \int_0^{2\pi} \frac{\sin \tau (-a \sin \tau + lb \cos \tau) d\tau}{-(a+a) + a \cos \tau + lb \sin \tau - z} \right\}. \quad (10)$$

Вычислим интегралы в (10). Обозначив в первом интеграле $z - (a + \alpha) = z'$, а во втором $z + a + \alpha = z'$, мы придём к интегралу

$$I(z') = \frac{1}{2\pi l} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \tau (-a \sin \tau + lb \cos \tau)}{a \cos \tau + lb \sin \tau - z'} d\tau.$$

Положим $e^{i\tau} = \sigma$. Тогда

$$I(z') = \frac{1}{2l} \left\{ \frac{1}{2\pi l} \int_{|\sigma|=1} \frac{(a+b)\sigma^2 - (a-b)}{(a+b)\sigma^2 - 2z'\sigma + a-b} d\sigma - \frac{1}{2\pi l} \int_{|\sigma|=1} \frac{(a+b)\sigma^2 - (a-b)}{(a+b)\sigma^2 - 2z'\sigma + a-b} \frac{d\sigma}{\sigma^2} \right\} = I_1 - I_2.$$

Корни знаменателя подинтегральной функции в I_1 суть

$$\sigma_1 = \frac{z' + \sqrt{z'^2 - c^2}}{a+b}, \quad \sigma_2 = \frac{z' - \sqrt{z'^2 - c^2}}{a+b}.$$

Выберем то значение корня, которое положительно при бесконечно больших положительных z' . Тогда, повторяя рассуждения п. 29 (см. сноску на стр. 114), мы найдём, что внутри круга $|\sigma| < 1$ лежит один корень σ_2 . Теперь нетрудно найти, что

$$I_1 = \frac{z' - \sqrt{z'^2 - c^2}}{2l(a+b)}.$$

Точно так же найдём

$$I_2 = -\frac{z' - \sqrt{z'^2 - c^2}}{2l(a-b)},$$

и, следовательно,

$$I(z') = \frac{a}{l(a^2 - b^2)} (z' - \sqrt{z'^2 - c^2}).$$

Окончательно

$$\frac{1}{i} w^*(z) = \frac{8a^2 b \gamma^2 U}{i(a-b)[8a^2 \gamma^2 - b(a-b)]} \left(2z - \sqrt{(z-a-\alpha)^2 - c^2} - \sqrt{(z+a+\alpha)^2 - c^2} \right) \quad (11)$$

и

$$w(z) = Uz + \frac{8a^2 b \gamma^2 U}{(a-b)[8a^2 \gamma^2 - b(a-b)]} \left(2z - \sqrt{(z-a-\alpha)^2 - c^2} - \sqrt{(z+a+\alpha)^2 - c^2} \right). \quad (12)$$

Если в формуле (12) считать величину $z' = z - a - \alpha$ фиксированной и устремить α к бесконечности, то получится известное выражение комплексного потенциала, соответствующего обтеканию одного эллиптического цилиндра:

$$w(z') = Uz' + \frac{bU}{a-b} (z' - \sqrt{z'^2 - c^2}).$$

При больших α наличие второго цилиндра меняет скорости в точках вблизи первого цилиндра на величины порядка γ^{-2} .

§ 2. БИГАРМОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ (ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА).

36. Проблемы, приводящие к бигармоническому уравнению.

а) Плоская задача теории упругости. Мы говорим о плоской деформации, если упругие смещения происходят только в плоскостях, параллельных плоскости (x, y) , и составляющие смещений не зависят от z . Обозначая через u_x, u_y компоненты смещений, через $\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y$ — компоненты напряжений, мы можем написать систему дифференциальных уравнений плоской задачи теории упругости¹⁾:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_x = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \sigma_y = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}. \quad (2)$$

¹⁾ Уравнения (1) соответствуют случаю, когда тело не подвержено действию объемных сил. См. Н. И. Мусхелишвили [28а].

Здесь λ и μ — коэффициенты Ляме, и

$$\theta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}. \quad (3)$$

Число неизвестных функций в системе (1) — (2) можно довести до одной. Именно, уравнениям (1) можно удовлетворить, полагая

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Функция $W(x, y)$ называется функцией напряжений или функцией Эри. Подставив выражения (4) в (2) и исключив u_x и u_y , мы найдём, что функция Эри удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 W = \Delta(\Delta W) = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0. \quad (5)$$

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости сводится к интегрированию бигармонического уравнения при соответствующих краевых условиях.

Выясним, каковы эти условия. Наиболее просто они формулируются, если на границе упругой области заданы смещения её точек. В этом случае, обозначая контур упругой области через L , имеем:

$$\text{на } L \quad u_x = g_1(t), \quad u_y = g_2(t), \quad (6)$$

где t — параметр, определяющий положение точки на L , а $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — данные функции.

Пусть теперь даны внешние усилия, приложенные к контуру L . Обозначая их составляющие через X_v и Y_v , мы имеем на основании известных формул механики деформируемых сред

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos(\nu, x) + \tau_{xy} \cos(\nu, y) &= X_v, \\ \tau_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_y \cos(\nu, y) &= Y_v. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь ν — внешняя нормаль к контуру L . Заметим, что

$$\cos(\nu, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(\nu, y) = -\frac{dx}{ds},$$

где s — длина дуги контура.

Подставив в (7) выражения напряжений через функцию Эри, мы получим

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) = X_v, \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) = -Y_v,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= - \int Y_v ds + C_1 = f_1(s) + C_1, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \int X_v ds + C_2 = f_2(s) + C_2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Равенства (8) и представляют собой граничные условия нашей задачи в случае, когда заданы усилия, приложенные к контуру. Если контур L —односвязный, то постоянные C_1 и C_2 можно фиксировать как угодно, если же контур L —многосвязный, то C_1 и C_2 могут иметь разные значения на разных кривых, составляющих L . В этом случае они должны быть определены из требования однозначности смещений. В этом смысле плоская задача теории упругости аналогична видоизменённой задаче Дирихле.

Указанные типы граничных условий—не единственные.

Ниже, в соответствующих местах, мы укажем некоторые новые типы краевых условий.

Задачи, соответствующие условиям (6) и (8), мы будем называть первой и, соответственно, второй основной би-гармонической задачей¹⁾.

б) Установившееся плоское движение вязкой несжимаемой жидкости. Уравнения Навье-Стокса²⁾ в этом случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \nu \Delta v_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \nu \Delta v_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

¹⁾ В книге Н. И. Мусхелишвили [28а] первой называется краевая задача теории упругости с условием (8).

²⁾ См. Н. В. Розе, И. А. Кибель, Н. Е. Кочин. Теоретическая гидромеханика, ч. II, ОНТИ, 1937.

Здесь v_x и v_y — составляющие скорости, p — давление, ρ — плотность жидкости, ν — коэффициент вязкости. Уравнения (9) написаны в предположении, что объёмные силы отсутствуют.

Третье из уравнений (9) показывает, что существует потенциал скоростей Φ :

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (10)$$

Подставив это в первые два уравнения и исключив p , мы найдём уравнение, которому удовлетворяет потенциал скоростей:

$$\Delta^2 \Phi = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial y} \right). \quad (11)$$

Если в уравнениях (9) пренебречь инерционными членами, то правая часть в (11) исчезнет и мы найдём, что Φ удовлетворяет бигармоническому уравнению.

В теории вязкой жидкости принимается, что вязкая жидкость, соприкасающаяся с твёрдым телом, прилипает к нему, так что скорости твёрдого тела и соприкасающихся с ним частиц жидкости совпадают. Отсюда легко вывести краевые условия в задаче обтекания. Если поток вязкой жидкости обтекает одно или несколько тел, которые мы для простоты примем неподвижными, то на границе этих тел

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \quad (12)$$

Если ось x направить параллельно скорости потока в бесконечности, а величину этой скорости обозначить через U , то условие на бесконечности имеет вид

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} [\Phi(x, y) - Uy] = C, \quad C = \text{const}. \quad (13)$$

Ниже мы увидим, что задача обтекания безграничным потоком одного твёрдого тела неразрешима, если пренебречь инерционными членами. В этом состоит так называемый парадокс Стокса.

37. Комплексное представление бигармонической функции. Всякая бигармоническая функция $W(x, y)$ (т. е. интеграл бигармонического уравнения) может быть выражена через две аналитические функции комплексной переменной $z = x + iy$. Это можно сделать следующим образом.

Функция $P(x, y) = \Delta W$ — гармоническая, так как $\Delta P = \Delta^2 W = 0$. Пусть $Q(x, y)$ — сопряжённая с $P(x, y)$ функция. Обозначим $P + iQ = 4\varphi'(z)$. Функция

$$\varphi(z) = p(x, y) + iq(x, y) = \frac{1}{4} \int (P + iQ) dz$$

есть аналитическая функция от z . Легко проверить простым вычислением, что $\Delta(W - px - qy) = 0$, т. е. что функция $p_1(x, y) = W - px - qy$ гармоническая. Полагая $p_1(x, y) = \operatorname{Re} \{\chi(z)\}$ и замечая, что $px + qy = \operatorname{Re} \{\bar{z}\varphi(z)\}$, мы приходим к формуле Гурса, дающей искомое выражение бигармонической функции через аналитические функции комплексной переменной $\varphi(z)$ и $\chi(z)$:

$$W(x, y) = \operatorname{Re} \{\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\}. \quad (1)$$

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z) = \chi'(z)$ мы будем называть функциями Гурса.

По заданной функции $W(x, y)$ функции Гурса определяются не вполне однозначно. Именно, $\varphi'(z)$ определяется с точностью до чисто мнимого постоянного слагаемого, и, следовательно, $\varphi(z)$ определяется с точностью до слагаемого вида $i\alpha z + \beta$, где α — действительная, а β — комплексная постоянная. Функция $\psi(z)$ также определяется не вполне точно, но это для дальнейшего менее существенно.

Из формулы Гурса легко получаются две важные формулы, в окончательном виде установленные акад. Н. И. Мусхелишвили. Первая из них даёт выражение производных бигармонической функции через функции Гурса:

$$\frac{\partial W}{\partial x} + i \frac{\partial W}{\partial y} = \varphi(z) + z \overline{\psi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \quad (2)$$

где

$$\psi(z) = \chi'(z). \quad (3)$$

Вторая формула относится к плоской задаче теории упругости; она даёт выражение смещений через функции Гурса и имеет вид

$$2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \quad (4)$$

Здесь обозначено

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}.$$

Заметим, что $\kappa > 1$. Формулы (2) и (4) легко получить из формулы Гурса и уравнений (2) и (4) п. 36.

Отметим ещё две формулы, связывающие напряжения с функциями Гурса:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \{ \varphi'(z) \}, \quad (5)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 [\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)]. \quad (6)$$

Формулы (2) и (4) позволяют свести основные задачи плоской теории упругости к краевым задачам теории аналитических функций. Первая задача сводится к построению аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющих на контуре области равенству

$$\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 2\mu(g_1 + ig_2). \quad (7)$$

Во второй задаче нужно построить аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющие контурному равенству

$$\text{на } L_k \quad \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f_1 + if_2 + b_k, \quad b_k = \text{const}. \quad (8)$$

Здесь

$$f_1 + if_2 = i \int_{s_0}^s (X_s + iY_s) ds, \quad (9)$$

где X_s и Y_s суть составляющие внешних сил, приложенных к контуру, по осям x и y . Постоянные b_k должны быть определены так, чтобы смещения оказались однозначными.

К этой же краевой задаче, но без произвола в задании правой части¹⁾, сводится задача обтекания в гидродинамике вязкой жидкости.

¹⁾ И, следовательно, без дополнительных требований типа однозначности смещений.

Полезно заметить, что равенство (8) можно рассматривать, как частный случай равенства (7) при $\kappa = -1$.

Иногда бывает полезно предварительно отобразить конформно область, заполненную упругой средой или вязкой жидкостью, на некоторую другую область. Формулы (7) и (8) тогда несколько меняются. Пусть $z = \omega(\sigma)$ — отображающая функция. Обозначим

$$\varphi(z) = \varphi(\omega(\sigma)) = \Phi(\sigma); \quad \psi(z) = \psi(\omega(\sigma)) = \Psi(\sigma).$$

Тогда равенства (7) и (8) заменяются следующими:

$$\kappa \Phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\Phi'(\sigma)} - \overline{\Psi(\sigma)} = 2\mu (g_1 + i g_2) \quad (10)$$

и

$$\Phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\Phi'(\sigma)} + \overline{\Psi(\sigma)} = f_1 + i f_2 + b_k. \quad (11)$$

Выясним теперь аналитический характер функций Гурса. Если область, заполненная упругой средой, — конечная односвязная и к ней не приложены сосредоточенные силы или моменты, то $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ просто регулярны в области. Точно так же $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в односвязной конечной области, заполненной вязкой жидкостью, если в области нет источников или стоков.

Займёмся теперь случаем многосвязной области. Контур её, как обычно, обозначим через L , составляющие его внутренние кривые — через L_1, L_2, \dots, L_n ; кривую, ограничивающую область извне (если область — конечная), — через L_0 . Самую область обозначим буквой D .

Рассмотрим ограничения, которые необходимо наложить на поведение функций Гурса в плоской задаче теории упругости. Из формулы (4) п. 36 видно, что $P(x, y) = \Delta W = \sigma_x + \tau_y$.

Напряжения, так же, как и смещения, суть функции однозначные. Отсюда следует, что $P(x, y)$ однозначна. При этом $Q(x, y)$ будет приобретать постоянное приращение при обходе каждой из внутренних кривых L_1, L_2, \dots, L_k против часовой стрелки. Обозначим указанное приращение через $8\pi A_k$. Тогда при указанном обходе функция $\varphi'(z)$ приобретает приращение, равное $2\pi i A_k$. Если z_k —

точка внутри кривой L_k , то при том же обходе функция $A_k \ln(z - z_k)$ тоже приобретает приращение $2\pi i A_k$. Отсюда следует, что

$$\varphi'(z) = \sum_{k=1}^n A_k \ln(z - z_k) + f(z), \quad (12)$$

где $f(z)$ — функция, регулярная в D , и A_k — действительные постоянные. Нетрудно видеть, что неопределённый интеграл

$$\int f(z) dz$$

также может содержать логарифмические слагаемые, поэтому, интегрируя равенство (10), мы получим

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^n A_k z \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^n B_k \ln(z - z_k) + \varphi^*(z). \quad (13)$$

В этой формуле $\varphi^*(z)$ — однозначная функция, регулярная в D ; B_k — комплексные постоянные, A_k , как мы видели выше, — действительные постоянные.

Обратимся к функции $\psi(z)$. Формула (12) показывает, что $\varphi''(z)$ однозначна. Теперь из (6) вытекает, что $\psi'(z)$ также однозначна, а её неопределённый интеграл содержит логарифмические члены:

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^n C_k \ln(z - z_k) + \psi^*(z), \quad (14)$$

где $\psi^*(z)$ — регулярная в D функция.

При выводе формул (13) и (14) мы воспользовались только однозначностью напряжений. Выясним, какие ограничения налагает на коэффициенты A_k, B_k, C_k требование однозначности смещений. Формула (4) показывает, что при обходе кривой L_k сумма $2\mu(u_x + iu_y)$ приобретает приращение

$$2\pi i [(x+1) A_k z + x B_k + \bar{C}_k].$$

Эта величина равна нулю, так как смещения однозначны.

Отсюда следует, что

$$A_k = 0, \quad C_k = -x \bar{B}_k, \quad (15)$$

и мы получаем окончательно следующие выражения для функций Гурса в плоской задаче теории упругости:

$$\left. \begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{k=1}^n B_k \ln(z - z_k) + \psi^*(z), \\ \psi(z) &= -\kappa \sum_{k=1}^n \bar{B}_k \ln(z - z_k) + \psi^*(z). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Коэффициенты B_k имеют простой механический смысл:

$$B_k = -\frac{X_k + iY_k}{2\pi(1 + \kappa)}, \quad (17)$$

где X_k и Y_k суть составляющие главного вектора внешних сил, приложенных к кривой L_k . Во второй основной задаче эти коэффициенты известны в силу краевых условий, в первой же они остаются неизвестными.

Несколько иной характер имеет многозначность функций Гурса в гидродинамике вязкой жидкости. Здесь необходимо потребовать однозначность скоростей, т. е. однозначность производных бигармонической функции. Формула (13) остаётся в силе. Далее, из формулы (4) видно, что при обходе кривой L_k против часовой стрелки $\psi(z)$ приобретает приращение, равное $2\pi i \bar{B}_k$, и, следовательно,

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^n \bar{B}_k \ln(z - z_k) + \psi^*(z), \quad (18)$$

где $\psi^*(z)$ регулярна в D .

Сформулируем, наряду с первой и второй основными задачами, ещё одну, которую мы будем называть третьей бигармонической задачей: найти бигармоническую функцию по заданным на контуре области первым производным, допуская, что эти её производные, а также первые производные её функций Гурса однозначны в рассматриваемой области.

В третьей задаче мы, следовательно, допускаем, что функции Гурса могут быть представлены в виде (16). Заметим, что для односвязной области вторая и третья задачи совпадают.

Можно доказать, что каждая из трёх сформулированных нами задач имеет единственное решение¹⁾.

Указанный выше парадокс Стокса есть непосредственное следствие единственности решения третьей задачи. Действительно, если жидкость обтекает только одно тело, то заполненная жидкостью область — односвязная, функции Гурса однозначны и задача обтекания совпадает с третьей задачей, которую нужно ставить при следующих условиях: первые производные искомой функции равны нулю на границе и ограничены на бесконечности²⁾. По теореме единственности, искомая бигармоническая функция равна тождественно постоянной. Но тогда её производные, т. е. скорости, тождественно равны нулю, и получается, что вязкая жидкость, обтекающая твёрдое тело, находится в покое.

Если вязкая жидкость обтекает несколько твёрдых тел, то можно получить решение, пользуясь произвольностью коэффициентов A_k . В этом случае задача обтекания имеет единственное решение только тогда, когда область — двухсвязная; если же связность области больше двух, то решений — бесчисленное множество.

38. Функция Грина и ядро Шварца. Пусть D — конечная область плоскости $z = x + iy$, односвязная или многосвязная, и пусть z и $\zeta = \xi + i\eta$ — произвольные точки области D . Обозначим через r расстояние между этими точками: $r = |z - \zeta|$. Как известно, функцией Грина области D называют функцию $G(x, y; \xi, \eta)$ двух точек этой области, обладающую следующими свойствами:

$$a) \quad G(x, y; \xi, \eta) = g(x, y; \xi, \eta) - \ln r, \quad (1)$$

где $g(x, y; \xi, \eta)$ — гармоническая в D функция от ξ и η при фиксированных x и y ;

б) если точка $\zeta = \xi + i\eta$ принадлежит контуру области D , то

$$G(x, y; \xi, \eta) = 0. \quad (2)$$

¹⁾ См. [27].

²⁾ Последнее следует из того, что на бесконечности $v_x = U$, $v_y = 0$.

Функцию $g(x, y; \xi, \eta)$ можно построить, решив задачу Дирихле при краевом условии: на контуре L области D $g = \ln r$.

Из свойств а) и б) вытекает симметричность функции Грина:

$$G(x, y; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y). \quad (3)$$

С помощью функции Грина решается в замкнутой форме задача Дирихле: если $U(x, y)$ — гармоническая в D функция, равная $u(\zeta)$ в точке ζ контура, то

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L u(\zeta) \frac{\partial G}{\partial \nu} d\sigma, \quad d\sigma = |d\zeta|, \quad (4)$$

где на этот раз ν обозначает внутреннюю нормаль к L в точке ζ .

Из симметричности функции Грина вытекает, что она является гармонической функцией не только от ξ и η , но также от x и y во всей области D , кроме точки (ξ, η) .

Введём важное для дальнейшего понятие комплексной функции Грина. Будем рассматривать $G(x, y; \xi, \eta)$ как функцию комплексных переменных ζ и z , и соответственно этому будем обозначать её через $G(z; \zeta)$. Построим функцию $H(z; \zeta)$, сопряжённую с $G(z; \zeta)$ относительно переменных x и y . Можно, например, положить

$$H(z; \zeta) = \int_a^z -\frac{\partial G}{\partial y} dx + \frac{\partial G}{\partial x} dy, \quad (5)$$

где a — произвольная, но фиксированная точка внутри области D . Функция $H(z; \zeta)$ — действительная многозначная функция своих аргументов. Для одной из её ветвей имеет место тождество

$$H(a; \zeta) \equiv 0. \quad (6)$$

Комплексной функцией Грина мы называем функцию

$$M(z; \zeta) = G(z; \zeta) + iH(z; \zeta). \quad (7)$$

$M(z; \zeta)$ — аналитическая, но нерегулярная в D функция от z и неаналитическая функция переменной ζ .

Комплексная функция Грина многозначна, так как она содержит слагаемое $-\ln(\zeta - z)$. Кроме того, если область D многосвязна, эта функция меняет своё значение при обходе в плоскости z вокруг любого внутреннего контура области. Обозначим попережнему через L_0 внешний, а через L_1, L_2, \dots, L_n — внутренние контуры области D . При обходе вокруг L_k против часовой стрелки функция $H(z; \zeta)$ приобретает некоторое приращение, которое, вообще говоря, будет функцией от ζ . Обозначим его через $2\pi b_k(\zeta)$:

$$b_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} -\frac{\partial G}{\partial y} dx + \frac{\partial G}{\partial x} dy.$$

Здесь $\zeta = \xi + i\eta$ — внутренняя точка области D и $z = x + iy$ — точка кривой L_k . Обозначим через n направление внутренней нормали к L_k в точке z и положим $|dz| = ds$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \cos(s, x) = -\cos(n, y), \\ \frac{dy}{ds} &= \cos(s, y) = \cos(n, x), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$b_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \frac{\partial G}{\partial n} ds. \quad (8)$$

При обходе вокруг L_k против часовой стрелки комплексная функция приобретает приращение, равное $2\pi i b_k(\zeta)$. То же самое приращение приобретает при таком же обходе функция $b_k(\zeta) \ln(z - z_k)$, где z_k — произвольная фиксированная внутри L_k точка. Таким образом, комплексная функция Грина может быть представлена в следующей форме:

$$M(z; \zeta) = M_0(z; \zeta) + \sum_{k=1}^n b_k(\zeta) \ln(z - z_k) - \ln(\zeta - z), \quad (9)$$

где $M_0(z; \zeta)$ — регулярная в D функция от z . Отметим, что, как функция от ζ , $M_0(z; \zeta)$ однозначна.

Докажем, что $b_k(\zeta)$ — гармоническая в D функция от ξ и η , равная единице на L_k и нулю на L_j , $j = 0, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$.

Заменим в (8) ζ на z и z на ζ . Соответственно этому заменим n на ν и ds на $d\zeta$. Мы получим тогда

$$b_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \frac{\partial G}{\partial \nu} d\zeta.$$

Введём в рассмотрение функцию $\delta_k(\zeta)$ точки ζ контура L , полагая

$$\delta_k(\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \zeta \text{ лежит на } L_k, \\ 0, & \text{если } \zeta \text{ лежит на } L_j, j \neq k. \end{cases} \quad (10)$$

Тогда $b_k(z)$ можно представить в виде

$$b_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \delta_k(\zeta) \frac{\partial G}{\partial \nu} d\zeta. \quad (11)$$

Сравнивая это с (4), мы убеждаемся в справедливости нашего предложения.

Пусть теперь в формуле (9) z означает внутреннюю точку области D , ζ — точку контура L и ν — внутреннюю нормаль к L в точке ζ . Положим

$$\frac{\partial b_k(\zeta)}{\partial \nu} = a_k(\zeta) \quad (12)$$

и

$$\frac{\partial M(z; \zeta)}{\partial \nu} = T(z; \zeta). \quad (13)$$

Дифференцируя (9) по ν , получим:

$$T(z; \zeta) = \frac{\partial M_0(z; \zeta)}{\partial \nu} + \sum_{k=1}^n a_k(\zeta) \ln(z - z_k) - \frac{1}{\zeta - z} \frac{\partial \zeta}{\partial \nu}. \quad (14)$$

Функцию $T(z; \zeta)$ мы будем называть ядром Шварца области D . Установим его важнейшие свойства.

Ядро Шварца — аналитическая в D функция переменной z , многозначная, если область D — многосвязная. При обходе вокруг L_k против часовой стрелки она приобретает приращение, равное $2\pi i a_k(\zeta)$. Далее, $T(z; \zeta)$ — одно-

значая и неаналитическая функция от ζ . Действительная часть ядра Шварца есть нормальная производная функции Грина. Одна из ветвей её мнимой части тождественно равна нулю при $z=a$:

$$\operatorname{Im} \{ T(a; \zeta) \} \equiv 0. \quad (15)$$

Пусть $f(\zeta)$ — непрерывная вещественная функция точки контура L . Рассмотрим интеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L f(\zeta) T(z; \zeta) d\zeta. \quad (16)$$

$\Phi(z)$ — аналитическая функция от z . Из формулы (4) видно, что её действительная часть однозначна в D и на контуре равна $f(\zeta)$. Далее, формула (15) показывает, что одна из ветвей мнимой части $\Phi(z)$ равна нулю при $z=a$. Формула (16), таким образом, восстанавливает аналитическую функцию по контурным значениям её действительной части, если только эта действительная часть однозначна.

Пусть $F(z) = u(z) + iv(z)$ — аналитическая функция, не имеющая внутри D особых точек. Допустим ещё, что её действительная часть $u(z)$ однозначна в D и непрерывна вплоть до контура. Как мы уже видели, интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_L u(\zeta) T(z; \zeta) d\zeta$$

есть аналитическая функция от z , действительная часть которой равна $u(z)$. Такая функция может отличаться от $F(\cdot)$ только на мнимую постоянную. Одна из ветвей мнимой части последнего интеграла равна нулю при $z=a$. Отсюда легко усмотреть, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_L u(\zeta) T(z; \zeta) d\zeta = F(z) - iv(a). \quad (17)$$

В этой формуле $v(a)$ — значение в точке a одной из ветвей функции $v(z)$.

Если гармоническая в D функция $u(z)$ однозначна, то сопряжённая с ней функция $v(z)$ будет, вообще говоря, многозначной. Формула (17) даст возможность по кон-

турным значениям $u(z)$ вычислить приращение, приобретаемое $v(z)$ при обходе кривой L против часовой стрелки. Это приращение, очевидно, равно

$$\int_L u(\zeta) a_k(\zeta) d\zeta. \quad (18)$$

Если однозначна и непрерывна вплоть до контура мнимая часть $v(z)$, то справедлива формула, аналогичная формуле (17):

$$\frac{1}{2\pi} \int_L v(\zeta) T(z; \zeta) d\sigma = \frac{1}{i} F(z) - \frac{1}{i} u(a). \quad (17_1)$$

При этом приращение действительной части $F(z)$ при обходе кривой L_k против часовой стрелки равно интегралу

$$- \int_L v(\zeta) a_k(\zeta) d\zeta. \quad (19)$$

Если $F(z)$ однозначна, то интегралы (18) и (19) равны нулю. Отсюда легко получить формулы, справедливые для любой аналитической функции, регулярной в D и непрерывной вплоть до контура:

$$\int_L F(\zeta) a_k(\zeta) d\zeta = 0, \quad (20)$$

$$\int_L \overline{F(\zeta)} a_k(\zeta) d\sigma = 0. \quad (21)$$

Для однозначной функции $F(z)$, регулярной в D , верны одновременно формулы (17) и (17₁). Умножая (17₁) на i и затем складывая и вычитая результат из (17), мы получим две важные для всего дальнейшего формулы:

$$\frac{1}{4\pi} \int_L F(\zeta) T(z; \zeta) d\sigma = F(z) - \frac{1}{2} F(a), \quad (22)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_L \overline{F(\zeta)} T(z; \zeta) d\sigma = \frac{1}{2} \overline{F(a)}. \quad (23)$$

Подчеркнем, что формулы (22) и (23) имеют место только для функции $F(z)$, регулярной и, следовательно, однозначной в D .

Отметим частный случай формулы (22), который получается при $F(z) \equiv 1$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_L T(z; \zeta) d\zeta \equiv 1. \quad (24)$$

Комплексная функция Грина обладает свойством, которое мы назовём инвариантностью относительно конформного преобразования. Состоит оно в следующем.

Пусть функция $t = \varepsilon(z)$ отображает область D плоскости z на область D' плоскости t и пусть $M'(t; \tau)$ — комплексная функция Грина области D' . Тогда комплексная функция Грина области D определяется формулой ¹⁾

$$M(z; \zeta) = M'(\varepsilon(z); \varepsilon(\zeta)). \quad (25)$$

Дифференцируя обе части последнего равенства по нормали, мы найдём соотношение между ядрами Шварца областей D и D' :

$$T(z; \zeta) d\zeta = T'(\varepsilon(z); \varepsilon(\zeta)) d\zeta', \quad d\zeta' = |d\tau|. \quad (26)$$

В заключение сформулируем некоторые теоремы, относящиеся к ядру Шварца и необходимые нам для дальнейшего.

Теорема 1. Пусть $f(\zeta)$ — функция точки контура L , непрерывная и имеющая t непрерывных производных по σ на контуре L . Пусть, кроме того, угол между нормалью ν и осью ξ также непрерывен и имеет t производных по σ . Тогда функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L f(\zeta) T(z; \zeta) d\zeta$$

непрерывна и $t-1$ раз дифференцируема на L .

Теорема 2. Пусть угол между нормалью ν и осью ξ непрерывен и имеет t производных по σ на всём контуре L . Тогда справедлива формула

$$\frac{1}{4\pi} T(z; \zeta) d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + P(z; \zeta) d\zeta, \quad (27)$$

¹⁾ Доказательство формулы (25) см. в [27d], стр. 20.

где функция $P(z; \zeta)$, если отвлечься от её логарифмических особенностей, непрерывна вплоть до контура и $m-1$ раз дифференцируема на контуре по z .

Теорема 3. Тождество

$$g(\zeta) = h(\zeta), \quad (28)$$

где ζ — точка контура L и функции $g(\zeta)$ и $h(\zeta)$ непрерывны, эквивалентно системе тождеств

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_L g(\zeta) T(z; \zeta) d\zeta &= \frac{1}{4\pi} \int_L h(\zeta) T(z; \zeta) d\zeta, \\ \frac{1}{4\pi} \int_L \overline{g(\zeta)} T(z; \zeta) d\zeta &= \frac{1}{4\pi} \int_L \overline{h(\zeta)} T(z; \zeta) d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Доказательство этих теорем читатель найдёт в [27d].

39. Сведение первой и третьей задачи к интегральному уравнению. В п. 37 было установлено, что первая и третья бигармонические задачи сводятся к следующей краевой задаче теории функций комплексной переменной.

Найти аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ не имеют особых точек внутри области D ;
- 2) $\varphi'(z)$ однозначна в D ;
- 3) на контуре L области D имеет место равенство

$$\kappa\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\psi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = g(\zeta), \quad (1)$$

где κ — постоянная, а $g(\zeta)$ — заданная непрерывная и однозначная функция точки контура. Мы будем считать эту функцию достаточно гладкой.

В первой задаче

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}; \quad g(\zeta) = 2\mu(u_x + iu_y),$$

в третьей же надо положить

$$\kappa = -1, \quad g(\zeta) = -f(\zeta) - b_2.$$

Область D будем считать конечной.

Приступим к решению сформулированной нами краевой задачи.

Часто бывает полезно конформно отобразить область D на некоторую область D^* . Пусть $z = \omega(t)$ — функция, реализующая это отображение. Обозначим

$$\varphi(\omega(t)) = \Phi(t), \quad \psi(\omega(t)) = \Psi(t).$$

Далее, пусть $\zeta = \omega(\tau)$ и $G(t) = g(\omega(t))$. Дело сводится к нахождению $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ по краевому условию

$$\Phi(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = G(\tau), \quad (1)$$

которое должно быть выполнено на контуре γ области D^* . Заметим, что $\Phi'(t)$ однозначна в D^* . Отсюда следует, что функция $\chi\Phi(t) - \overline{\Psi(t)}$ также однозначна в D^* .

Действительно, из однозначности $\Phi'(t)$ и $G(t)$ следует, что $\chi\Phi(t) - \Psi(t)$ однозначна на контуре. Отсюда следует, что эта функция однозначна и внутри области, где $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ не имеют особых точек.

По теореме 3 п. 38, равенство (1) эквивалентно следующим двум:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \left\{ \chi\Phi(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\Phi'(\tau)} - \overline{\Psi(\tau)} \right\} T(t, \tau) d\tau = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} G(\tau) T(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \left\{ \chi\overline{\Phi(\tau)} - \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}} \Phi'(\tau) - \Psi(\tau) \right\} T(t, \tau) d\tau = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \overline{G(\tau)} T(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь γ — контур области D^* ; $T(t, \tau)$ — ядро Шварца этой области.

Равенства (2) и (3) можно упростить. Положим

$$\Phi(t) = p + iq, \quad \Psi(t) = p_1 + iq_1.$$

Гармонические функции $\chi p - p_1 = \operatorname{Re} \{ \chi\Phi(t) - \overline{\Psi(t)} \}$ и $\chi q + q_1 = \operatorname{Im} \{ \chi\Phi(t) - \overline{\Psi(t)} \}$ однозначны в D^* . К ним

можно применить формулы (17) и (17₁) п. 38. Так как

$$xp - p_1 = \operatorname{Re} \{ x\Phi(t) - \Psi(t) \}, \quad xq + q_1 = \operatorname{Im} \{ x\Phi(t) + \Psi(t) \},$$

то, по указанным формулам,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} (xp - p_1) T(t, \tau) d\sigma &= x\Phi(t) - \Psi(t) - i [xq(a) - q_1(a)], \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} (xq + q_1) T(t, \tau) d\sigma &= \frac{1}{i} [x\Phi(t) + \Psi(t)] - \\ &\quad - \frac{1}{i} [xp(a) + p_1(a)]. \end{aligned}$$

Умножим второе равенство на i . Складывая и вычитая его из первого, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} [x\Phi(\tau) - \overline{\Psi(\tau)}] T(t, \tau) d\sigma &= x\Phi(t) - \frac{1}{2} [x\Phi(a) + \Psi(a)], \\ \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} [x\overline{\Phi(\tau)} - \Psi(\tau)] T(t, \tau) d\sigma &= -\Psi(t) + \frac{1}{2} [x\overline{\Phi(a)} + \overline{\Psi(a)}]. \end{aligned}$$

Так как $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ определены с точностью до постоянного слагаемого, то мы можем положить

$$x\Phi(a) + \overline{\Psi(a)} = 0.$$

Подставляя теперь последние два равенства в (2) и (3) и обозначая для краткости

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} G(\tau) T(t, \tau) d\sigma = A(t), \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \overline{G(\tau)} T(t, \tau) d\sigma = -B(t), \quad (4)$$

мы получим

$$x\Phi(t) - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\Phi'(\tau)} T(t, \tau) d\sigma = A(t), \quad (5)$$

$$\Psi(t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)} \Phi'(\tau) T(t, \tau) d\sigma = B(t). \quad (6)$$

Равенство (6) непосредственно определяет $\Psi(t)$, если известна $\Phi'(\tau)$. Обратимся поэтому к уравнению (5). Перепишем его следующим образом:

$$x\Phi(t) - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) \overline{\Phi'(\tau)} d\sigma - \frac{\omega(t)}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\Phi'(\tau)}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) d\sigma = A(t). \quad (7)$$

Функция $\frac{\Phi'(\tau)}{\omega'(\tau)}$ регулярна в D^* , и по формуле (23) п. 38 имеем

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}} T(t, \tau) d\sigma = \frac{1}{2} \frac{\overline{\Phi'(a)}}{\overline{\omega'(a)}}.$$

Подставив это в (7) и дифференцируя по t , получим:

$$x\Phi'(t) - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) \right] \overline{\Phi'(\tau)} d\sigma - \frac{1}{2} \omega'(t) \frac{\overline{\Phi'(a)}}{\overline{\omega'(a)}} = A'(t). \quad (8)$$

Определим постоянную l из уравнения

$$l - \frac{1}{2x} \bar{l} = \frac{1}{2x} \frac{\overline{\Phi'(a)}}{\overline{\omega'(a)}} \quad (9)$$

и положим

$$\Phi'(t) = \vartheta(t) + l\omega'(t). \quad (10)$$

Подставив это в (8), мы получим уравнение для новой неизвестной $\vartheta(t)$:

$$x\vartheta(t) - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) \right] \overline{\vartheta(\tau)} d\sigma = A'(t). \quad (11)$$

Будем считать контур γ достаточно гладким. Тогда $A(t)$ и $\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) \right]$ непрерывны вплоть до кон-

тура. Допустим, что t стремится к некоторой точке τ_0 контура. Переходя в (11) к пределу, мы получим интегральное уравнение

$$\vartheta(\tau_0) - \frac{1}{4\pi\kappa} \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(\tau_0)}{\omega'(\tau)} T(\tau_0, \tau) \right] \overline{\vartheta(\tau)} d\sigma = \frac{1}{\kappa} A'(\tau_0), \quad (12)$$

в котором неизвестной является контурное значение функции $\vartheta(\tau)$, регулярной в D^* .

Уравнение (12) можно упростить. С этой целью воспользуемся формулой (14) п. 38, из которой легко усмотреть, что

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) \right] = K(t, \tau) - \frac{\omega'(t)}{4\pi} \sum_{k=1}^n a_k(\tau) \ln(t - t_k),$$

где $K(t; \tau)$ — регулярная в D^* функция от t , и t_k — точка внутри γ_k , где γ_k — отображение L_k . Далее, функция $\frac{\vartheta(t)}{\omega'(t)}$ регулярна в D^* и, по формуле (21) п. 38,

$$\int_{\gamma} a_k(\tau) \frac{\overline{\vartheta(\tau)}}{\omega'(\tau)} d\sigma = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Теперь для $\vartheta(\tau)$ получается уравнение

$$\vartheta(\tau_0) - \frac{1}{\kappa} \int_{\gamma} K(\tau_0, \tau) \overline{\vartheta(\tau)} d\sigma = \frac{1}{\kappa} A'(\tau_0). \quad (13)$$

Интегральное уравнение (13) — не фредгольмовское, так как под интеграл входит $\overline{\vartheta(\tau)}$, а не $\vartheta(\tau)$. Однако его можно свести к системе двух уравнений типа Фредгольма, если отделить действительные и мнимые части и принять в качестве неизвестных $\operatorname{Re}\{\vartheta(\tau)\}$ и $\operatorname{Im}\{\vartheta(\tau)\}$. Отсюда

следует, что к уравнению (13) применима альтернатива Фредгольма.

40. Исследование интегрального уравнения. Заметим прежде всего, что правая часть уравнения (13) п. 39 однозначна в D^* . Действительно, в силу формулы (14) п. 38,

$$A'(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} G(\tau) \frac{\partial T(t, \tau)}{\partial t} d\tau = \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} G(\tau) \frac{\partial^2 M_0(t, \tau)}{\partial v \partial t} d\tau + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{G(\tau)}{(\tau - t)^2} \frac{\partial \tau}{\partial v} d\tau + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - t_k} \int_{\gamma} a_k(\tau) G(\tau) d\tau,$$

и все три члена справа однозначны и регулярны в D^* .

Допустим теперь, что уравнение (13) п. 39 решено и контурные значения $\vartheta(\tau)$ определены. То же уравнение даёт тогда аналитическое продолжение $\vartheta(t)$ внутрь области, именно

$$\vartheta(t) = \frac{1}{x} A'(t) + \frac{1}{x} \int_{\gamma} K(t, \tau) \overline{\vartheta(\tau)} d\tau.$$

Определим теперь постоянную l в формуле (9) п. 39. Положим в (10) п. 39 $t = a$ и перейдём к сопряжённым. Мы получим тогда $\overline{\Phi'(a)} = \overline{\vartheta(a)} + \bar{l} \overline{\omega'(a)}$. Подставив это в формулу (9) п. 39, мы получим уравнение для определения l :

$$x l - \bar{l} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}}. \quad (1)$$

В первой задаче $x > 1$, и l однозначно определяется из уравнения (1). В третьей задаче $x = -1$, и уравнение (1) переходит в следующее:

$$l + \bar{l} = -\frac{1}{2} \frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}}. \quad (2)$$

Для того чтобы в третьей задаче постоянная l могла быть определена, необходимо и достаточно, чтобы вели-

часть $\frac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}$ была действительной. Если это условие выполнено, то

$$\operatorname{Re}(l) = -\frac{1}{4} \frac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}, \quad (2)$$

мнимая же часть l остаётся произвольной. Функция $\Phi'(t)$ определяется с точностью до слагаемого вида $i\alpha\omega'(t)$, где α — действительная постоянная.

Найдя $\Phi'(t)$, мы по формулам (5) и (6) п. 39 найдём $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$, и легко проверить, что эти функции дают решение нашей задачи.

Условие, что $\frac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}$ должна быть действительной, эквивалентно следующему¹⁾:

$$\int_L f_1 dx + f_2 dy = 0. \quad (3)$$

Докажем это. В третьей задаче

$$\kappa = -1, \quad g(\zeta) = -(f_1 + if_2),$$

и уравнение (12) п. 39 принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \vartheta(\tau_0) + \int_L K(\tau_0, \tau) \overline{\vartheta(\tau)} d\tau &= \lim_{t \rightarrow \tau_0} \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} F(\tau) \frac{\partial \Gamma(t, \tau)}{\partial t} d\tau, \\ F(\tau) &= f_1 + if_2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Решим вспомогательную задачу: найти аналитические функции $R(t)$ и $S(t)$, не имеющие особых точек внутри D^* , с однозначной $R'(t)$, удовлетворяющие на γ равенству

$$R(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{R'(\tau)} + S(\tau) = F(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{2} \frac{\overline{\vartheta(a)}}{\omega'(a)}. \quad (5)$$

Поступая с этим равенством так же, как с равенством

¹⁾ В задаче II равенство (3) означает, что главный момент внешних сил, приложенных к контуру L , равен нулю. См Н. И. Мусхелишвили [28a].

(1) п. 39, мы найдём:

$$S(t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)} R'(\tau) T(t, \tau) d\mathfrak{z} = \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \overline{F(\tau)} T(t, \tau) d\mathfrak{z} + \frac{\overline{\omega(a)}}{2} \frac{\overline{\vartheta(a)}}{\omega'(a)}, \quad (6)$$

$$R(t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{R'(\tau)} T(t, \tau) d\mathfrak{z} = \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} F(\tau) T(t, \tau) d\mathfrak{z} - \frac{\omega(a)}{4} \frac{\overline{\vartheta(a)}}{\omega'(a)} + \frac{\omega(t)}{2} \frac{\overline{\vartheta(a)}}{\omega'(a)}, \quad (7)$$

$$R'(t) + \int_{\gamma} K(t, \tau) \overline{R'(\tau)} d\mathfrak{z} + \frac{\omega'(t)}{2} \frac{\overline{R'(a)}}{\omega'(a)} = \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} F(\tau) \frac{\partial T(t, \tau)}{\partial T} d\mathfrak{z} + \frac{\omega'(t)}{2} \frac{\overline{\vartheta(a)}}{\omega'(a)}. \quad (8)$$

Сравнивая (8) и (4), мы видим, что уравнению (8) удовлетворяет $R'(t) = \vartheta(t)$. Определив таким образом $R'(t)$, мы из уравнений (6) и (7) найдём $R(t)$ и $S(t)$.

Таким образом, решение вспомогательной задачи существует. Обозначим теперь $R(t) = r(z)$, $S(t) = s(z)$, где $z = \omega(t)$. Положим, далее,

$$s(z) = t'(z), \quad \operatorname{Re}\{\bar{z}r(z) + t(z)\} = w^*.$$

Тогда равенство (5) принимает вид [см. формулу (2) п. 37]

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} + i \frac{\partial w^*}{\partial y} = f_1 + if_2 + \frac{1}{2} z \frac{\overline{\vartheta(a)}}{\omega'(a)}.$$

Умножим это на $d\bar{z}$, проинтегрируем по L и возьмём в обеих сторонах полученного равенства действительные части. Мы получим тогда

$$\int_L dw^* = \int_L f_1 dx + f_2 dy - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\omega'(a)} \right) \int_L (y dx - x dy).$$

Но интеграл слева равен, очевидно, нулю, а второй интеграл справа — удвоенной площади S области D . Отсюда

$$\operatorname{Im} \left(-\frac{\vartheta(\bar{a})}{\omega'(a)} \right) = \frac{1}{S} \int_L f_1 dx + f_2 dy,$$

и наше утверждение доказано.

Все рассуждения этого пункта основаны на допущении, что интегральное уравнение (13) п. 39 разрешимо. Докажем теперь, что это допущение справедливо, — именно, что указанное уравнение разрешимо, какова бы ни была правая часть.

В конце п. 39 было отмечено, что к уравнению (13) п. 39 применима альтернатива Фредгольма. Нам достаточно поэтому доказать, что соответствующее однородное уравнение имеет единственное решение $\vartheta(\tau) \equiv 0$.

Положим $g(\zeta) \equiv 0$. Тогда $A'(t) \equiv 0$, и уравнение (13) п. 39 делается однородным. Пусть $\vartheta_0(\tau_0)$ — какое-либо его решение.

Отметим, что в третьей задаче (при $\kappa = -1$) величина $\frac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}$ будет действительной, так как условие (3), очевидно, выполняется при $f_1 + if \equiv 0$. По известной нам $\vartheta_0(\tau)$ мы найдём соответствующие функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, решающие первую или третью задачу с нулевыми краевыми условиями. Пользуясь теоремой единственности, легко установить, что $\varphi'_0(z) \equiv 0$ в первой задаче и $\varphi'_0(z) = Ci$ (C — действительная постоянная) в третьей задаче. В обоих случаях формулы (9) и (10) п. 39 дают $\vartheta_0(z) \equiv 0$. Разрешимость интегрального уравнения (13) п. 39 тем самым доказана.

Решив третью бигармоническую задачу, мы сможем решить и вторую задачу, т. е. задачу теории упругости при заданных внешних силах, действующих на контуре. Как это сделать, мы покажем ниже на примерах.

Сходным образом решаются задачи теории упругости и в случае бесконечной области. В п. 43 мы на примере покажем, какие изменения претерпевает при этом изложенный выше метод. Здесь мы заметим только, что условие (3) не необходимо, если область D — бесконечная.

41. Случай односвязной области. Выясним, как преобразуется интегральное уравнение (13) п. 39 в случае, когда

область D — односвязная. Пусть функция $z = \omega(t)$ конформно отображает круг $|t| < 1$ на область D . Положим ещё $\zeta = \omega(\tau)$. Для круга $|t| < 1$ ядро Шварца, как известно, есть

$$T(t, \tau) = \frac{\tau + t}{\tau - t}. \quad (1)$$

Уравнение (5) п. 39 принимает следующий вид:

$$\chi \Phi(t) - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\Phi'(\tau)} \frac{\tau + t}{\tau - t} d\zeta = \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} G(\tau) \frac{\tau + t}{\tau - t} d\zeta.$$

Замечая, что на окружности γ $d\zeta = \frac{d\tau}{i\tau}$, мы легко приведём последнее уравнение к виду

$$\chi \Phi(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\tau - t} d\tau + C' = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G(\tau)}{\tau - t} d\tau + C'', \quad (2)$$

где C' и C'' — постоянные, равные

$$C' = \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\Phi'(\tau)} d\zeta, \quad C'' = -\frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} G(\tau) d\zeta.$$

Прибавим и отнимем $\omega(t)$ в числителе интеграла в левой части уравнения (2). Мы получим тогда

$$\begin{aligned} \chi \Phi(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)(\tau - t)} \overline{\Phi'(\tau)} d\tau - \frac{\omega(t)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + C' = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G(\tau)}{\tau - t} d\tau + C''. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее, по формуле (23) п. 38

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)} \frac{\tau + t}{\tau - t} d\zeta + \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} = \frac{\overline{\Phi'(0)}}{\omega'(0)},$$

и уравнение (3) принимает вид

$$\kappa \Phi(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)(\tau - t)} \Phi'(\tau) d\tau - \frac{\omega(t) \overline{\Phi'(0)}}{\omega'(0)} + C' = \\ = A(t) + C''. \quad (4)$$

На этот раз мы обозначили

$$A(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} G(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Продифференцируем (4) и положим, как в п. 40,

$$\Phi'(t) = \vartheta(t) + l\omega'(t),$$

где l определяется равенством

$$l = \frac{1}{\kappa} \frac{\overline{\Phi'(0)}}{\omega'(0)}.$$

Мы приходим тогда к уравнению

$$\vartheta(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(t) - \omega(\tau)}{\omega'(\tau)(\tau - t)} \right] \overline{\vartheta(\tau)} d\tau = A'(t). \quad (5)$$

Если в этом равенстве под t понимать точку контура и под $A'(t)$ контурное значение этой функции, то оно представляет собой интегральное уравнение для неизвестной $\vartheta(t)$. Это уравнение было получено Н. И. Мусхелишвили.

Отметим важную особенность уравнения Н. И. Мусхелишвили. Если отображающая функция $\omega(t)$ — рациональная, то ядро уравнения (3) — вырожденное. Действительно, пусть $\omega(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$, где $p(t)$ и $q(t)$ — полиномы. Тогда

$$\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\tau - t} = \frac{p(\tau)q(t) - p(t)q(\tau)}{(\tau - t)q(t)q(\tau)}.$$

Числитель обращается в нуль при $\tau = t$ и потому делится нацело на $\tau - t$. Частное от этого деления есть полином от t и τ . Мы запишем его в виде

$$\frac{p(\tau)q'(t) - p'(t)q(\tau)}{\tau - t} = \sum_{k=1}^N t^k q_k(\tau).$$

Теперь ядро уравнения (3) имеет вид

$$\frac{1}{\omega'(\tau)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\tau - t} \right] = \sum_{k=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{t^k}{q(t)} \right) \frac{q_k(\tau)}{q(\tau) \omega'(\tau)}, \quad (6)$$

и ясно, что это ядро — вырожденное. Теперь, по доказанному в п. 4, уравнение (3) решается в конечном виде.

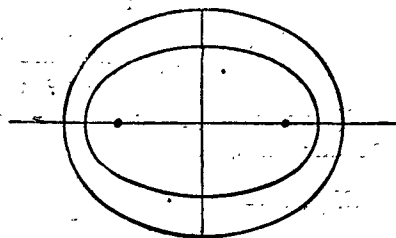
Мы получаем, таким образом, теорему Н. И. Мусхелишвили: если круг отображается на область D рациональной функции W , то основные задачи теории упругости для этой области решаются в конечном виде.

42. Софокусное эллиптическое кольцо. Рассмотрим кольцо, ограниченное софокусными эллипсами

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{a_0^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 - c^2} = 1,$$

причём $a_0 > a_1$ (черт. 9). Пусть к контуру кольца приложены внешние силы, распределение которых нам известно. Для простоты допустим, что главный вектор внешних сил, приложенных к каждому эллипсу в отдельности, равен нулю. В этом случае функции Гурса $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ однозначны в кольце (п. 37).



Черт. 9.

Интегрируя составляющие внешних сил по дуге, мы получим значения производных функций напряжений; они определяются при этом с точностью до постоянных слагаемых, различных на L_0 и L_1 . Зафиксируем их как-нибудь на L_0 ; на L_1 они пока остаются неопределёнными. Обозначим через $f(z)$ величину

$$f(z) = i \int (X_1 + iY_1) ds.$$

Тогда функции Гурса удовлетворяют контурному равенству

$$\varphi(\zeta) + \zeta \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\varphi(\zeta)} = \begin{cases} f(\zeta) & \text{на } L_0, \\ f(\zeta) + C & \text{на } L_1, \end{cases} \quad (1)$$

Софокусное эллиптическое кольцо очень просто отображается на круговое с помощью функции

$$z = \omega(t) = \frac{c}{2} \left(t \sqrt{\rho_0 \rho_1} + \frac{1}{t \sqrt{\rho_0 \rho_1}} \right), \quad (2)$$

где

$$\rho_0 = \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 - c^2}}{c}, \quad \rho_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - c^2}}{c}.$$

При этом L_0 и L_1 переходят соответственно в окружности

$$|t| = \frac{1}{\sqrt{q}}, \quad |t| = \sqrt{q}; \quad q = \frac{\rho_1}{\rho_0}. \quad (3)$$

Окружности эти обозначим через γ_0 и γ_1 .

Обозначим теперь

$$\zeta = \omega(\tau), \quad \varphi(\omega(t)) = \Phi(t), \quad \psi(\omega(t)) = \Psi(t), \quad f(\omega(t)) = F(t).$$

Кроме того, обозначим через B величину, равную нулю на γ_1 и C на γ_2 . Преобразуя переменные в (1), получим

$$\Phi(\tau) + \frac{\tau \sqrt{\rho_0 \rho_1} + \frac{1}{\tau \sqrt{\rho_0 \rho_1}}}{\sqrt{\rho_0 \rho_1} - \frac{1}{\tau \sqrt{\rho_0 \rho_1}}} \overline{\Phi'(\tau)} + \Psi(\tau) = F(\tau) + B. \quad (4)$$

Для кругового кольца комплексная функция Грина известна¹⁾, именно

$$\begin{aligned} M(t, \tau) = & -\frac{1}{4} \ln q + \left(\frac{1}{2} + \frac{\ln |\tau|}{\ln q} \right) \ln t + \frac{1}{2} \ln \tau - \ln(\tau - t) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - q^{2n} \frac{t}{\tau} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - q^{2n} \frac{\tau}{t} \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - q^{2n-1} t \bar{\tau} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{q^{2n-1}}{t \bar{\tau}} \right) - \alpha(\tau), \quad (5) \end{aligned}$$

¹⁾ См., например, [4] и [24]. Выражение комплексной функции Грина в [4] содержит ошибку.

где $\alpha(\tau)$ следует определить так, чтобы в некоторой точке a кругового кольца мнимая часть $M(t, \tau)$ обратилась в нуль.

Из (5) вытекает следующее выражение ядра Шварца:

$$\begin{aligned} T(t, \tau) = & \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{2} + \frac{\ln|\tau|}{\ln q} \right) \ln t - \frac{1}{\tau-t} \frac{\partial \tau}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{2} \ln \tau - \alpha(\tau) \right) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n} \frac{t}{\tau}} \frac{t}{\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial v} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n} \frac{\tau}{t}} \frac{1}{t} \frac{\partial \tau}{\partial v} - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{1 - q^{2n-1} \frac{t}{\tau}} t \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial v} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{1 - \frac{q^{2n-1n}}{t\bar{\tau}}} \frac{1}{t\bar{\tau}^2} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial v}. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что функция

$$\frac{1}{2} + \frac{\ln|\tau|}{\ln q} = b_1(\tau)$$

— гармоническая в кольце, равна нулю на внешней окружности кольца и единице на внутренней; её нормальная производная, которую мы, в соответствии с п. 38, обозначим через $a_1(\tau)$, ортогональна ко всякой функции, регулярной в кольце.

Формулу (6) несколько преобразуем. Прежде всего,

$$\frac{\partial \tau}{\partial v} d\tau = id\tau, \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial v} d\bar{\tau} = -id\bar{\tau}.$$

Выделим теперь в (6) члены, содержащие разность $t - \tau$ в знаменателе. Рассмотрим первые слагаемые в третьей и четвёртой сумме:

$$\begin{aligned} A = & - \frac{q}{1 - qt\bar{\tau}} t \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial v} + \frac{q}{1 - \frac{q}{t\bar{\tau}}} \frac{1}{t\bar{\tau}^2} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial v} = \\ = & iq \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial v} \left(\frac{t}{1 - qt\bar{\tau}} - \frac{1}{\tau(t\bar{\tau} - q)} \right). \end{aligned}$$

На окружности γ_1 $\bar{\tau} = \frac{q}{\tau}$ и, следовательно,

$$A = -\frac{iq^2}{\tau^2} \frac{d\tau}{d\sigma} \left(\frac{t\tau}{\tau - q^2 t} - \frac{\tau^2}{q^2(t - \tau)} \right) = -i \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{q^2 t}{\tau(\tau - q^2 t)} \right] \frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Точно так же найдём, что на γ_0 , где $\bar{\tau} = \frac{1}{q\tau}$,

$$A = -i \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{t}{\tau(t - q^2 \tau)} \right] \frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Введём функцию $p(t, \tau)$, полагая

$$p(t, \tau) = \begin{cases} \frac{iq^2 t}{\tau(\tau - q^2 t)} & \text{на } \gamma_1, \\ \frac{iq^2 t}{\tau(t - q^2 \tau)} & \text{на } \gamma_0. \end{cases} \quad (7)$$

Тогда

$$A = \frac{1}{i(\tau - t)} \frac{d\tau}{d\sigma} + p(t, \tau) \frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} T(t, \tau) &= a_1(\tau) \ln t + \frac{2}{i(\tau - t)} \frac{d\tau}{d\sigma} + p(t, \tau) \frac{d\tau}{d\sigma} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{2} \ln \tau - \alpha(\tau) \right) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{\tau - q^{2n} t} \frac{t}{\tau} \frac{d\tau}{d\sigma} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{t - q^{2n} \tau} \frac{d\tau}{d\sigma} + \\ &+ i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n+1} t}{1 - q^{2n+1} t \bar{\tau}} \frac{d\bar{\tau}}{d\sigma} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n+1}}{\bar{\tau}(t\bar{\tau} - q^{2n+1})} \frac{d\bar{\tau}}{d\sigma}. \end{aligned} \quad (8)$$

Составим теперь ядро $K(t, \tau)$. Имеем

$$\omega(\tau) - \omega(t) = \frac{c(\tau - t) \rho_0 \rho_1 t \tau - 1}{2\sqrt{\rho_0 \rho_1} t \tau}.$$

Отсюда

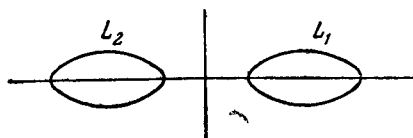
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) \right] = & - \frac{\omega'(t)}{\omega'(\tau)} a_1(\tau) \ln t + \\ & + \frac{2}{i} \frac{\bar{\tau}^2}{t^2 (\rho_0 \rho_1 \bar{\tau}^2 - 1)} \frac{d\bar{\tau}}{d\sigma} + \frac{(\tau - t) (\rho_0 \rho_1 t \tau - 1) \bar{\tau}^2}{t^2 (\rho_0 \rho_1 \bar{\tau}^2 - 1)} a_1(\tau) + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(\tau - t) (\rho_0 \rho_1 t \tau - 1) \bar{\tau}^2}{t \tau (\rho_0 \rho_1 \bar{\tau}^2 - 1)} p(t, \tau) \right] \frac{d\tau}{d\sigma} + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(\tau - t) (\rho_0 \rho_1 t \tau - 1) \bar{\tau}^2}{t \tau (\rho_0 \rho_1 \bar{\tau}^2 - 1)} \right] \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{2} \ln \tau - \alpha(\tau) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(\tau - t) (\rho_0 \rho_1 t \tau - 1) \bar{\tau}^2}{t \tau (\rho_0 \rho_1 \bar{\tau}^2 - 1)} \left[-i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} t}{\tau (\tau - q^{2n} t)} \frac{d\tau}{d\sigma} + \right. \right. \\ & \left. \left. + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{t - q^{2n} \tau} \frac{d\tau}{d\sigma} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n+1} t}{1 - q^{2n+1} t \bar{\tau}} \frac{d\bar{\tau}}{d\sigma} - \right. \right. \\ & \left. \left. - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n+1}}{\bar{\tau} (t \bar{\tau} - q^{2n+1})} \frac{d\bar{\tau}}{d\sigma} \right] \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} K(t, \tau) d\sigma = & \frac{1}{2\pi i} \frac{\bar{\tau}^2}{t^2 (\rho_0 \rho_1 \bar{\tau}^2 - 1)} d\bar{\tau} + \\ & + \frac{1}{4\pi} \frac{(\tau - t) (\rho_0 \rho_1 t \tau - 1) \bar{\tau}^2}{t^2 \tau (\rho_0 \rho_1 \bar{\tau}^2 - 1)} a_1(\tau) d\sigma + \\ & + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(\tau - t) (\rho_0 \rho_1 t \tau - 1) \bar{\tau}^2}{t \tau (\rho_0 \rho_1 \bar{\tau}^2 - 1)} p(t, \tau) \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(\tau - t) (\rho_0 \rho_1 t \tau - 1) \bar{\tau}^2}{t \tau (\rho_0 \rho_1 \bar{\tau}^2 - 1)} \right] \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{2} \ln \tau - \alpha(\tau) \right) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(\tau - t) (\rho_0 \rho_1 t \tau - 1) \bar{\tau}^2}{t \tau (\rho_0 \rho_1 \bar{\tau}^2 - 1)} \left[-i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} t d\tau}{\tau (\tau - q^{2n} t)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} d\tau}{t - q^{2n} \tau} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n+1} t d\bar{\tau}}{1 - q^{2n+1} t \bar{\tau}} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n+1} d\bar{\tau}}{\bar{\tau} (t \bar{\tau} - q^{2n+1})} \right] \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Разложим $K(t, \tau)$ в ряд Лорана по t . Сохраняя в этом ряде конечное число членов, мы приближённо заменим ядро $K(t, \tau)$ вырожденным. Тем самым мы получим приближённое решение нашей задачи.

Недостаток места не позволяет нам более подробно остановиться на этом приближённом решении. Заметим только следующее. Решая интегральное уравнение, мы получим $\Phi'(t)$ в виде ряда Лорана (конечного, если ядро (9) заменено вырожденным). Теперь постоянную C в формуле (1) подберём так, чтобы исчез член в выражении $\Phi'(t)$, содержащий $\frac{1}{t}$. При таком выборе $\Phi(t)$, а следовательно, и $\varphi(z)$ будет однозначной. Этим будет обеспечена однозначность смещений.



Черт. 10.

43. Внешность двух овалов.

В настоящем пункте мы поставим и решим вторую задачу теории упругости для области D , получаемой из бесконечной плоскости удалением из неё двух сильно вытянутых овалов (черт. 10).

Для простоты будем считать, что главный вектор внешних сил, приложенных к каждой из кривых L_1 и L_2 , равен нулю. Нам предстоит тогда найти функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, регулярные вне вырезов L_1 и L_2 и удовлетворяющие краевому условию

$$\varphi(\zeta) + \zeta \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = \begin{cases} f(\zeta) & \text{на } L_1, \\ f(\zeta) + C & \text{на } L_2. \end{cases} \quad (1)$$

Относительно формы овалов L_1 и L_2 мы сделаем допущение, направленное к тому, чтобы упростить решение нашей задачи.

Плоскость, разрезанная вдоль отрезков $(-b, -a)$ и (a, b) действительной оси, отображается на круговое кольцо

$$\sqrt{q} < t < \frac{1}{\sqrt{q}}$$

с помощью функции

$$t = \exp \left\{ \frac{\pi b}{K'} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \right\}^1. \quad (2)$$

Здесь положено

$$q = e^{-\frac{2\pi K}{K'}}, \quad K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}$$

и, наконец, $k = \frac{a}{b}$, $k' = \sqrt{1-k^2}$. За овалы L_1 и L_2 мы примем кривые, в которые при отображении (2) переходят окружности $|t| = q_1^{-\frac{1}{2}}$ и $|t| = q_1^{\frac{1}{2}}$, где q_1 — число, большее q и достаточно к нему близкое. Функция (2) отображает область D на круговое кольцо

$$q_1^{-\frac{1}{2}} < |t| < q_1^{\frac{1}{2}}.$$

Решая уравнение (2) относительно z , мы получим

$$z = \omega(t) = a \operatorname{sn} \left(\frac{K'}{\pi} \ln t \right),$$

где sn — эллиптическая функция Якоби. Полагая в (1) $\zeta = \omega(t)$ и пользуясь обычными нашими обозначениями, мы придём к такому же краевому условию, как и в предыдущем пункте:

$$\Phi(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = \begin{cases} F(\tau) & \text{на } \gamma_1, \\ F(\tau) + C & \text{на } \gamma_2; \end{cases} \quad (3)$$

¹⁾ См., например, [24]. Мы пользуемся здесь обозначением $\exp u = e^u$.

через γ_1 и γ_2 обозначены окружности $|\tau| = q_1^{-\frac{1}{2}}$ и $|\tau| = q_1^{\frac{1}{2}}$. Обычным способом мы получаем уравнения

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\Phi'(\tau)} T(t, \tau) d\sigma &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} F(t) T(t, \tau) d\sigma + \frac{C}{4\pi} \int_{\gamma_2} T(t, \tau) d\sigma, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Psi(t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}} \Phi'(\tau) T(t, \tau) d\sigma &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \overline{F(\tau)} T(t, \tau) d\sigma + \frac{\overline{C}}{4\pi} \int_{\gamma_2} T(t, \tau) d\sigma. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь Γ обозначает полный контур кругового кольца.

Как и в общем случае, уравнение (5) определяет непосредственно $\Psi(t)$, если $\Phi'(t)$ известна, и достаточно изучить только уравнение (4).

Заметим теперь следующее. Так как область D — бесконечная, то функция $z = \omega(t)$ обращается внутри кольца в бесконечность (именно $\omega(-1) = \infty$) и, следовательно, нерегулярна в нём. Если мы выполним над уравнением (5) то же преобразование, которое мы использовали в п. 39, то придём в конечном счёте к уравнению [см. (11) п. 39]

$$\vartheta(t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) \right] \overline{\vartheta(\tau)} d\sigma = A'(t). \quad (6)$$

Однако, решив его, мы не решим нашей задачи. Действительно, определив из (6) контурные значения $\vartheta(\tau)$, мы с помощью того же уравнения (6) аналитически продолжим $\vartheta(t)$ внутрь кольца. При этом, благодаря наличию под интегралом слагаемого $-\omega(t)$, $\vartheta(t)$ окажется, вообще говоря, нерегулярной в кольце и потому не пригодной для решения задачи теории упругости.

Мы преобразуем уравнение (4) следующим образом. Положим в нём $t = -1$ и полученный результат вычтём

из (4). Мы получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \Phi(t) - \Phi(-1) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} [T(t, \tau) - T(-1, \tau)] \overline{\Phi'(\tau)} d\tau = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} F(\tau) [T(t, \tau) - T(-1, \tau)] d\tau + \\ + \frac{C}{4\pi} \int_{\Gamma} [T(t, \tau) - T(-1, \tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

В числителе подинтегрального выражения слева вычтем и прибавим $\omega(t)$. Отметим, что

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} [T(t, \tau) - T(-1, \tau)] \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)} d\tau = 0. \quad (8)$$

Действительно, функция $\frac{\Phi'(t)}{\omega'(t)}$ регулярна в кольце, и по формуле (23) п. 37

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} T(t, \tau) \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)} d\tau = \frac{1}{2} \frac{\overline{\Phi'(a)}}{\omega'(a)}.$$

Это тождественно верно при любом t внутри кольца. В частности, при $t = -1$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} T(-1, \tau) \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)} d\tau = \frac{1}{2} \frac{\overline{\Phi'(a)}}{\omega'(a)}.$$

Вычитая это из предыдущего равенства, получим равенство (8).

Теперь равенство (7) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi(t) - \Phi(-1) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)} [T(t, \tau) - T(-1, \tau)] \overline{\Phi'(\tau)} d\tau = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} F(\tau) [T(t, \tau) - T(-1, \tau)] d\tau + \\ + \frac{C}{4\pi} \int_{\Gamma} [T(t, \tau) - T(-1, \tau)] d\tau. \end{aligned}$$

В этом равенстве ядро интеграла слева регулярно в кольце. Дифференцируя по t , получим:

$$\begin{aligned} \Phi'(t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)} [T(t, \tau) - T(-1, \tau)] \right\} \overline{\Phi'(\tau)} d\tau = \\ = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} F(\tau) T(t, \tau) d\tau + \frac{C}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_0} T(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Ядро Шварца $T(t, \tau)$ для кругового кольца определяется формулой (8) п. 42, в которой нужно только заменить q через q_1 .

Так же, как и в случае конечной области, можно в (9) слева отбросить под интегралом член, содержащий функцию

$$a_1(\tau) \ln t = \frac{d}{d\nu} \left(\frac{1}{2} + \frac{\ln |\tau|}{\ln q_1} \right) \ln t.$$

Оставшуюся часть ядра обозначим через $K(t, \tau)$. Мы приходим теперь к уравнению с неизвестной $\Phi'(t)$:

$$\begin{aligned} \Phi'(t) + \int_{\Gamma} K(t, \tau) \overline{\Phi'(\tau)} d\tau = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} F(\tau) T(t, \tau) d\tau + \\ + \frac{C}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_0} T(t, \tau) d\tau; \end{aligned} \quad (10)$$

ядро которого регулярно, как функция от t , внутри Γ .
Обозначим

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} F(\tau) T(t, \tau) d\tau = A(t).$$

Второй интеграл справа в (10) вычисляется очень просто. Действительно, интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} T(t, \tau) d\tau$$

есть аналитическая внутри Γ функция, вещественная часть которой равна единице на γ_2 и нулю на γ_1 . Этим условиям удовлетворяет функция

$$\frac{\ln t}{\ln q_1} + \frac{1}{2},$$

и последний интеграл может от неё отличаться только на чисто мнимую постоянную:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} T(t, \tau) d\tau = \frac{\ln t}{\ln q_1} + \frac{1}{2} + i\alpha. \quad (11)$$

Подставим это в (10). Полагая, что $t \rightarrow \tau_0$, где τ_0 — точка на Γ , мы получим интегральное уравнение

$$\Phi'(\tau_0) + \int_{\Gamma} K(\tau_0, \tau) \overline{\Phi'(\tau_0)} d\tau = A'(\tau_0) + \frac{C}{2\tau_0 \ln q_1}. \quad (12)$$

Так же, как и в случае конечной области, можно доказать, что уравнение (12) всегда разрешимо. Решив его, следует выбрать C так, чтобы в ряде Лорана функции $\Phi'(t)$ отсутствовал член, содержащий $\frac{1}{t}$. Тогда $\Phi(t)$ будет однозначной в кольце, и наша задача будет решена.

Для того, чтобы практически решить уравнение (12), можно разложить $K(t, \tau)$ в ряд Лорана и удержать в этом ряду конечное число членов. В статьях [24] и [25] уравнение (12) решено для того случая, когда q и q_1 очень малы, так что можно пренебречь степенями этих чисел выше первой. В качестве $f(\zeta)$ в указанных статьях фигурирует функция

$$f(\zeta) = \frac{h}{2} [(1+n)\zeta + (1-n)\bar{\zeta}], \quad (13)$$

где h и n — постоянные. К этому случаю сводится задача о давлении земли на кровлю двух горных выработок.

Приведём вкратце это решение. Мы не будем здесь проводить вычислений детально, а большей частью будем давать только их результаты. Прежде всего $\omega(t)$ разлагается внутри Γ в ряд

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \frac{\pi b}{K'} \left[-\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{q^m}{1+q^m} \left(t^m - \frac{1}{t^m} \right) \right] \\ &= -\frac{\pi b}{K'(t+1)} + \omega_0(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Далее, полагая в (13) $\zeta = \omega(\tau)$, мы получим

$$F(\tau) = \frac{h}{2} (1+n) \omega(\tau) + \frac{h}{2} (1-n) \overline{\omega(\tau)}$$

и

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{h}{2} (1+n) \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \omega_0(\tau) T(t, \tau) d\zeta + \\ &+ \frac{h}{2} (1-n) \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \overline{\omega_0(\tau)} T(t, \tau) d\zeta - \\ &- \frac{bh}{8K'} \left\{ (1+n) \int_{\Gamma} \frac{1}{1+\tau} T(t, \tau) d\zeta + (1-n) \int_{\Gamma} \frac{1}{1+\bar{\tau}} T(t, \tau) d\zeta \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Функция $\omega_0(t)$ регулярна внутри Γ , и первые два интеграла в (15) берутся непосредственно на основании формул (22) и (23) п. 38. Сложнее вычисление двух других интегралов. Выполнив эти вычисления и сохраняя только низшие члены, получим выражение правой части в (12)

$$\begin{aligned} A'(t) + \frac{C}{2t \ln q_1} &= -\frac{h \cdot h}{2K'} \left\{ [(1+n)q + (1-n)q_1] + \right. \\ &+ [(1+n)q + (1-n)q_1] \frac{1}{t} - 2[(1+n)q^2 + (1-n)q_1^2] t - \\ &- 2[(1+n)q^3 + (1-n)q_1^3] \frac{1}{t^3} + 3[(1+n)q^3 + (1-n)q_1^3] t^3 + \\ &\left. + 3[(1+n)q^3 + (1-n)q_1^3] \frac{1}{t^3} + \frac{1-C_0}{t \ln q_1} \right\}; \quad C_0 = \frac{CK'}{h\pi b}. \end{aligned} \quad (16)$$

Сохраняя в ядре $K(t, \tau)$ только низшие члены, мы заменим (12) уравнением с вырожденным ядром

$$\begin{aligned} & \Phi'(\tau_0) + \frac{ib}{4K'_0} \int_{\Gamma} \left(\frac{2q}{\tau+1} + \frac{q_1^2}{\tau(\tau+1)} \right) \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)} d\tau - \\ & - \frac{ib}{4K'_1} \int_{\Gamma_1} \frac{q_1^2}{\tau^2(\tau+1)} \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)} d\tau - \frac{ib}{4K'_0 \ln q_1} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{\tau+1} - \frac{1}{2} + q\tau - \right. \\ & \left. - \frac{q}{\tau} - q^2\tau^2 + \frac{q^2}{\tau^3} + q^3\tau^3 - \frac{q^3}{\tau^3} \right) \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\tau \omega'(\tau)} d\tau - \frac{ib}{4K'_0 \tau_0^2} \int_{\Gamma} \left(\frac{2q(1-q)}{\tau(\tau+1)} - \right. \\ & \left. - \frac{2q^2(1-q)}{\tau^2(\tau+1)} + \frac{2q^3}{\tau^3(\tau+1)} + \frac{qq^2}{\tau^2} + \frac{q^2\tau}{\tau+1} \right) \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)} d\tau + \\ & + \frac{ib}{4K'_0 \tau_0^2} \int_{\Gamma_1} \frac{qq_1^2}{\tau^2} \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)} d\tau + \frac{ib}{4K'_0 \tau_0^3} \int_{\Gamma} \left(\frac{4q^2(1-q)}{\tau(\tau+1)} - \right. \\ & \left. - \frac{4q^3}{\tau^2(\tau+1)} \right) \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)} d\tau - \frac{ib}{4K'_0} \int_{\Gamma} \frac{6q^3}{\tau(\tau+1)} \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)} d\tau = B(\tau_0). \quad (17) \end{aligned}$$

Через $B(\tau_0)$ мы для краткости обозначили величину (16). Из уравнения (17) видно, что

$$\Phi'(\tau_0) = B(\tau_0) + D_0 + \frac{D_1}{\tau_0} + \frac{D_2}{\tau_0^2} + \frac{D_3}{\tau_0^3} + \frac{D_4}{\tau_0^4}. \quad (18)$$

Подставив это в (17) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях τ_0 , мы получим систему пяти уравнений с неизвестными D_0, \dots, D_4 . К ним нужно присоединить шестое уравнение

$$D_1 - \frac{\hbar\pi b}{2K'_0 \ln q_1} (1 - C_0) = 0,$$

выражающее тот факт, что $\Phi'(t)$ не содержит члена с $\frac{1}{t}$.

Решив указанную систему, найдём

$$D_0 = D_2 = D_3 = D_4 = 0,$$

$$D_1 = \frac{\hbar^2 b^2 q}{4aK'_0(1+k)q_1 \ln q_1} [(1+n)q + (1-n)q_1],$$

$$C_0 = 1 - \frac{\pi^3 b q [(1+n)q + (1-n)q_1]}{2aK'^2(1+k)q_1}.$$

Отсюда приближённое решение уравнения (12) будет:

$$\begin{aligned} \Phi'(t) = -\frac{h\pi b}{2K'} \left\{ [(1+n)q + (1-n)q_1] \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) - \right. \\ \left. - 2 [(1+n)q^2 + (1-n)q_1^2] \left(t + \frac{1}{t^3}\right) + \right. \\ \left. + 3 [(1+n)q^3 + (1-n)q_1^3] \left(t^3 + \frac{1}{t^5}\right) \right\}. \end{aligned}$$

44. О сходимости ряда последовательных приближений. Интегральное уравнение (13) п. 39, как мы уже отмечаем, равносильно системе двух уравнений типа Фредгольма. Чтобы построить эту систему, положим

$$\left. \begin{aligned} \vartheta(\tau) = p(\tau) + iq(\tau), \quad K(\tau_0, \tau) = R(\tau_0, \tau) + iS(\tau_0, \tau), \\ \frac{1}{x} A'(\tau) = A_1(\tau) + iA_2(\tau); \quad \frac{1}{x} = \lambda. \end{aligned} \right\} (1)$$

Отделяя теперь в (13) п. 39 действительную и мнимую части, мы получим указанную систему:

$$\left. \begin{aligned} p(\tau_0) - \lambda \int_{\gamma} \{R(\tau_0, \tau)p(\tau) + S(\tau_0, \tau)q(\tau)\} d\tau = A_1(\tau_0), \\ q(\tau_0) - \lambda \int_{\gamma} \{S(\tau_0, \tau)p(\tau) - R(\tau_0, \tau)q(\tau)\} d\tau = A_2(\tau_0). \end{aligned} \right\} (2)$$

Относительно системы (2) мы докажем следующую теорему¹⁾.

Теорема 1. *Характеристические числа системы (2) все — действительные и по абсолютной величине больше единицы.*

Альтернатива Фредгольма позволяет нам заменить предложение, сформулированное в теореме 1, следующим, которое мы и будем доказывать.

¹⁾ Для случая односвязной области эта теорема доказана Д. И. Шерманом [37e], однако его доказательство просто переносится и на случай многосвязной области.

Если λ — либо комплексное, либо не превосходящее по абсолютной величине единицы действительное число, то одна родная система

$$\left. \begin{aligned} p(\tau_0) - \lambda \int_{\gamma} [R(\tau_0, \tau) p(\tau) + S(\tau_0, \tau) q(\tau)] d\tau &= 0, \\ q(\tau_0) - \lambda \int_{\gamma} [S(\tau_0, \tau) p(\tau) - R(\tau_0, \tau) q(\tau)] d\tau &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

имеет только тривиальное решение $p(\tau) \equiv 0$, $q(\tau) \equiv 0$.

Рассмотрим сперва случай действительного λ . Тогда $|\lambda| < 1$. Умножим второе уравнение (3) на i и сложим с первым. Обозначим ещё $p(\tau) + iq(\tau) = \vartheta(\tau)$. Тогда

$$\vartheta(\tau_0) - \lambda \int_{\gamma} K(\tau_0, \tau) \overline{\vartheta(\tau)} d\tau = 0. \quad (4)$$

Могут представиться следующие возможности.

а) $0 < \lambda < 1$. Уравнение (2) тогда отвечает первой бигармонической задаче при нулевых смещениях на контуре и при коэффициенте $\kappa = \frac{1}{\lambda}$. По доказанному в п. 40, уравнение (4), а с ним и система (3) имеет только тривиальное решение.

б) $\lambda = -1$. Уравнение (4) отвечает третьей бигармонической задаче с нулевыми значениями производных искомой бигармонической функции на контуре, и указанное уравнение опять имеет только тривиальное решение.

в) Если $-1 < \lambda < 0$ или $\lambda = 1$, положим $\lambda = -\lambda^*$, $\vartheta(\tau) = i\vartheta^*(\tau)$. Уравнение (4), по сокращении на i , переходит в следующее:

$$\vartheta^*(\tau_0) - \lambda^* \int_{\gamma} K(\tau_0, \tau) \overline{\vartheta^*(\tau)} d\tau = 0. \quad (5)$$

Здесь либо $0 < \lambda^* < 1$, либо $\lambda^* = -1$. В силу сказанного в а) и б) уравнение (5) имеет только тривиальное решение $\vartheta^*(\tau) = 0$. Но тогда $\vartheta(\tau) \equiv 0$, $p(\tau) = q(\tau) \equiv 0$.

Пусть теперь число λ — комплексное: $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ и $\lambda_2 \neq 0$. Функции $p(\tau)$ и $q(\tau)$, удовлетворяющие системе (3), будут в этом случае также, вообще говоря, комплексными. Положим $p(\tau) = p_1(\tau) + ip_2(\tau)$, $q(\tau) = q_1(\tau) + iq_2(\tau)$. Отде-

лив в (3) действительные и мнимые части, мы придём к системе четырёх интегральных уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 p_1(\tau_0) - \lambda_1 \int_{\gamma} [R(\tau_0, \tau) p_1(\tau) + S(\tau_0, \tau) q_1(\tau)] d\tau + \\
 + \lambda_2 \int_{\gamma} [R(\tau_0, \tau) p_2(\tau) + S(\tau_0, \tau) q_2(\tau)] d\tau = 0, \\
 p_2(\tau_0) - \lambda_2 \int_{\gamma} [R(\tau_0, \tau) p_1(\tau) + S(\tau_0, \tau) q_1(\tau)] d\tau - \\
 - \lambda_1 \int_{\gamma} [R(\tau_0, \tau) p_2(\tau) + S(\tau_0, \tau) q_2(\tau)] d\tau = 0, \\
 q_1(\tau_0) - \lambda_1 \int_{\gamma} [S(\tau_0, \tau) p_1(\tau) - R(\tau_0, \tau) q_1(\tau)] d\tau + \\
 + \lambda_2 \int_{\gamma} [S(\tau_0, \tau) p_2(\tau) - R(\tau_0, \tau) q_2(\tau)] d\tau = 0, \\
 q_2(\tau_0) - \lambda_2 \int_{\gamma} [S(\tau_0, \tau) p_1(\tau) - R(\tau_0, \tau) q_1(\tau)] d\tau - \\
 - \lambda_1 \int_{\gamma} [S(\tau_0, \tau) p_2(\tau) - R(\tau_0, \tau) q_2(\tau)] d\tau = 0.
 \end{aligned} \right\} (6)$$

Третье и четвёртое уравнения этой системы умножим на i и сложим соответственно с первым и вторым. Введя теперь обозначения

$$p_1(\tau) + iq_1(\tau) = \vartheta_1(\tau), \quad p_2(\tau) + iq_2(\tau) = \vartheta_2(\tau),$$

мы получим

$$\left. \begin{aligned}
 \vartheta_1(\tau_0) - \lambda_1 \int_{\gamma} K(\tau_0, \tau) \overline{\vartheta_1(\tau)} d\tau + \lambda_2 \int_{\gamma} K(\tau_0, \tau) \overline{\vartheta_2(\tau)} d\tau = 0, \\
 \vartheta_2(\tau_0) - \lambda_2 \int_{\gamma} K(\tau_0, \tau) \overline{\vartheta_1(\tau)} d\tau - \lambda_1 \int_{\gamma} K(\tau_0, \tau) \overline{\vartheta_2(\tau)} d\tau = 0.
 \end{aligned} \right\} (7)$$

Исследуем более подробно систему (7). Ядро $K(t, \tau)$ регулярно в области D^* ; отсюда следует, что функции $\vartheta_1(\tau_0)$ и $\vartheta_2(\tau_0)$, удовлетворяющие системе (7), аналитически продолжимы внутрь D^* и в этой области регулярны. Но в таком случае они ортогональны к функциям $a_k(\tau)$.

Вспомогательную формулу (п. 39)

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) \right] = K(t, \tau) - \frac{\omega'(t)}{4\pi} \sum_{k=1}^n a_k'(t) \ln(t - t_k),$$

мы убедимся, что

$$\int_{\gamma} K(t, \tau) \overline{\vartheta_j(\tau)} d\tau = \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) \right] \overline{\vartheta_j(\tau)} d\tau, \\ j=1, 2.$$

Подставим это в (7) и полученные равенства, пользуясь аналитическим продолжением, запишем для внутренней точки t области D^* :

$$\vartheta_1(t) - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) \right] [\lambda_1 \overline{\vartheta_1(\tau)} - \lambda_2 \overline{\vartheta_2(\tau)}] d\tau = 0,$$

$$\vartheta_2(t) - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) \right] [\lambda_2 \overline{\vartheta_1(\tau)} + \lambda_1 \overline{\vartheta_2(\tau)}] d\tau = 0.$$

Обозначим через $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ неопределённые интегралы от $\vartheta_1(t)$ и $\vartheta_2(t)$. Проинтегрируем последние равенства по t . Выбрав подходящим образом произвольные постоянные, с точностью до которых определены $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$, мы получим

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(t) - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) [\lambda_1 \overline{\theta_1'(\tau)} - \lambda_2 \overline{\theta_2'(\tau)}] d\tau &= 0, \\ \theta_2(t) - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) [\lambda_2 \overline{\theta_1'(\tau)} + \lambda_1 \overline{\theta_2'(\tau)}] d\tau &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Последние равенства можно упростить. Действительно, по формуле (23) п. 38

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\lambda_1 \overline{\theta_1'(\tau)} - \lambda_2 \overline{\theta_2'(\tau)}}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) d\tau = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1 \overline{\theta_1'(a)} - \lambda_2 \overline{\theta_2'(a)}}{\omega'(a)}, \quad (9)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\lambda_2 \overline{\theta_1'(\tau)} + \lambda_1 \overline{\theta_2'(\tau)}}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) d\tau = \frac{1}{2} \frac{\lambda_2 \overline{\theta_1'(a)} + \lambda_1 \overline{\theta_2'(a)}}{\omega'(a)}. \quad (10)$$

Постоянные в правых частях (9) и (10) обозначим через k_1 и k_2 . Теперь уравнения (8) можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(t) - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) [\lambda_1 \overline{\theta_1'(\tau)} - \lambda_2 \overline{\theta_2'(\tau)}] d\tau + \\ + k_1 \omega(t) = 0, \\ \theta_2(t) - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) [\lambda_2 \overline{\theta_1'(\tau)} + \lambda_1 \overline{\theta_2'(\tau)}] d\tau + \\ + k_2 \omega(t) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Примем, что $\omega(a) = 0$. Этим определяется только ветвь ор начала в плоскости t . Определим теперь две новые аналитические функции $\Psi_1(t)$ и $\Psi_2(t)$ с помощью формул

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(t) - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) [\lambda_1 \theta_1'(\tau) - \lambda_2 \theta_2'(\tau)] d\tau = 0, \\ \Psi_2(t) - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)} T(t, \tau) [\lambda_2 \theta_1'(\tau) + \lambda_1 \theta_2'(\tau)] d\tau = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Непосредственно можно проверить, что функции $\theta_1(t) + \overline{\Psi_1(t)}$ и $\theta_2(t) + \overline{\Psi_2(t)}$ однозначны в D^* . Далее, из (11) и (12) следует, что на γ выполняются равенства

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} [\lambda_1 \overline{\theta_1'(\tau)} - \lambda_2 \overline{\theta_2'(\tau)}] + \overline{\Psi_1(\tau)} + k_1 \omega(\tau) = 0, \\ \theta_2(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} [\lambda_2 \overline{\theta_1'(\tau)} + \lambda_1 \overline{\theta_2'(\tau)}] + \overline{\Psi_2(\tau)} + k_2 \omega(\tau) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В этом можно сразу убедиться, применив к каждому из равенств (13) теорему 3 п. 38. Мы получим тогда соотношения (11) и (12).

Положим

$$\theta_j(t) = \Phi_j(t) + a_j \omega(t), \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

и подберём a_1 и a_2 так, чтобы в (13) исчезли члены, содержащие $\omega(t)$. Для этого a_1 и a_2 должны удовлетворять системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_1 - \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + k_1 = 0, \\ a_2 + \lambda_2 \bar{a}_1 - \lambda_1 \bar{a}_2 + k_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Нетрудно проверить, что при $\lambda_2 \neq 0$ эта система разрешима.

Вернёмся к переменной z , полагая $\omega(t) = z$ и $\omega(\tau) = \zeta$. Обозначим

$$\Phi_j(t) = \varphi_j(z), \quad \Psi_j(t) = \psi_j(z),$$

Теперь равенства (13) принимают вид

$$\varphi_1(\zeta) - \zeta[\lambda_1 \overline{\varphi_1'(\zeta)} - \lambda_2 \overline{\varphi_2'(\zeta)}] + \overline{\psi_1(\zeta)} = 0,$$

$$\varphi_2(\zeta) - \zeta[\lambda_2 \overline{\varphi_1'(\zeta)} + \lambda_1 \overline{\varphi_2'(\zeta)}] + \overline{\psi_2(\zeta)} = 0.$$

Складывая и вычитая последние равенства, получим:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\zeta) - (\lambda_1 + \lambda_2) \overline{\zeta \varphi_1'(\zeta)} + \overline{\psi_1(\zeta)} &= \\ &= -\varphi_2(\zeta) + (\lambda_1 - \lambda_2) \overline{\zeta \varphi_2'(\zeta)} - \overline{\psi_2(\zeta)}, \\ \varphi_1(\zeta) - (\lambda_1 - \lambda_2) \overline{\zeta \varphi_1'(\zeta)} + \overline{\psi_1(\zeta)} &= \\ &= \varphi_2(\zeta) - (\lambda_1 + \lambda_2) \overline{\zeta \varphi_2'(\zeta)} + \overline{\psi_2(\zeta)}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Равенства (16) имеют место на контуре L .

Введём в рассмотрение действительные функции $u_1^1(x, y), v_1^1(x, y), \dots, v_2^2(x, y)$, определённые в области D соотношениями

$$u_1^1 + iv_1^1 = \varphi_1(z) - (\lambda_1 + \lambda_2) z \overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)},$$

$$u_2^1 + iv_2^1 = \varphi_1(z) - (\lambda_1 - \lambda_2) z \overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)},$$

$$u_1^2 + iv_1^2 = -\varphi_2(z) + (\lambda_1 - \lambda_2) z \overline{\varphi_2'(z)} - \overline{\psi_2(z)},$$

$$u_2^2 + iv_2^2 = \varphi_2(z) - (\lambda_1 + \lambda_2) z \overline{\varphi_2'(z)} + \overline{\psi_2(z)}.$$

В этих обозначениях равенства (16) записываются так:

$$\text{на } L \quad u_1^1 + iv_1^1 = u_1^2 + iv_1^2; \quad u_2^1 + iv_2^1 = u_2^2 + iv_2^2. \quad (17)$$

Введём, далее, обозначения

$$\varphi_1(z) = p^1 + iq^1, \quad \varphi_2(z) = p^2 + iq^2.$$

Нетрудно установить справедливость следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1^1}{\partial x} + \frac{\partial v_1^1}{\partial y} &= 2(1-\lambda_1-\lambda_2) \frac{\partial p^1}{\partial x}; & \frac{\partial v_1^1}{\partial x} - \frac{\partial u_1^1}{\partial y} &= 2(1+\lambda_1+\lambda_2) \frac{\partial q^1}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_2^1}{\partial x} + \frac{\partial v_2^1}{\partial y} &= 2(1-\lambda_1+\lambda_2) \frac{\partial p^1}{\partial y}; & \frac{\partial v_2^1}{\partial x} - \frac{\partial u_2^1}{\partial y} &= 2(1+\lambda_1-\lambda_2) \frac{\partial q^1}{\partial y}, \\ \frac{\partial u_1^2}{\partial x} + \frac{\partial v_1^2}{\partial y} &= -2(1-\lambda_1+\lambda_2) \frac{\partial p^2}{\partial x}; & \frac{\partial v_1^2}{\partial x} - \frac{\partial u_1^2}{\partial y} &= -2(1+\lambda_1-\lambda_2) \frac{\partial q^2}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_2^2}{\partial x} + \frac{\partial v_2^2}{\partial y} &= 2(1-\lambda_1-\lambda_2) \frac{\partial p^2}{\partial y}; & \frac{\partial v_2^2}{\partial x} - \frac{\partial u_2^2}{\partial y} &= 2(1+\lambda_1+\lambda_2) \frac{\partial q^2}{\partial y}. \end{aligned} \right\} (18)$$

Из (17), очевидно, вытекает справедливость следующих тождеств:

$$\left. \begin{aligned} \int_L \left[-\left(\frac{\partial p^1}{\partial x} u_1^1 + \frac{\partial q^1}{\partial x} v_1^1 \right) dy + \left(\frac{\partial p^1}{\partial x} v_1^1 - \frac{\partial q^1}{\partial x} u_1^1 \right) dx \right] &= \\ = \int_L \left[-\left(\frac{\partial p^1}{\partial x} u_2^1 + \frac{\partial q^1}{\partial x} v_2^1 \right) dy + \left(\frac{\partial p^1}{\partial x} v_2^1 - \frac{\partial q^1}{\partial x} u_2^1 \right) dx \right], \\ \int_L \left[-\left(\frac{\partial p^2}{\partial x} u_1^2 + \frac{\partial q^2}{\partial x} v_1^2 \right) dy + \left(\frac{\partial p^2}{\partial x} v_1^2 - \frac{\partial q^2}{\partial x} u_1^2 \right) dx \right] &= \\ = \int_L \left[-\left(\frac{\partial p^2}{\partial x} u_2^2 + \frac{\partial q^2}{\partial x} v_2^2 \right) dy + \left(\frac{\partial p^2}{\partial x} v_2^2 - \frac{\partial q^2}{\partial x} u_2^2 \right) dx \right], \\ \int_i \left[-\left(\frac{\partial p^1}{\partial x} u_2^1 + \frac{\partial q^1}{\partial x} v_2^1 \right) dy + \left(\frac{\partial p^1}{\partial x} v_2^1 - \frac{\partial q^1}{\partial x} u_2^1 \right) dx \right] &= \\ = \int_L \left[-\left(\frac{\partial p^1}{\partial x} u_2^2 + \frac{\partial q^1}{\partial x} v_2^2 \right) dy + \left(\frac{\partial p^1}{\partial x} v_2^2 - \frac{\partial q^1}{\partial x} u_2^2 \right) dx \right], \\ \int_i \left[-\left(\frac{\partial p^2}{\partial x} u_2^1 + \frac{\partial q^2}{\partial x} v_2^1 \right) dy + \left(\frac{\partial p^2}{\partial x} v_2^1 - \frac{\partial q^2}{\partial x} u_2^1 \right) dx \right] &= \\ = \int_L \left[-\left(\frac{\partial p^2}{\partial x} u_2^2 + \frac{\partial q^2}{\partial x} v_2^2 \right) dy + \left(\frac{\partial p^2}{\partial x} v_2^2 - \frac{\partial q^2}{\partial x} u_2^2 \right) dx \right]. \end{aligned} \right\} (19)$$

Интегралы в (19) преобразуем по формуле Грина в двойные. Введём обозначения:

$$\iint_D \left(\frac{\partial p^j}{\partial x}\right)^2 dx dy = A_j, \quad \iint_D \left(\frac{\partial q^j}{\partial x}\right)^2 dx dy = B_j, \quad j=1, 2, \quad (20)$$

$$\iint_D \frac{\partial p^1}{\partial x} \frac{\partial p^2}{\partial x} dx dy = A_{12}, \quad \iint_D \frac{\partial q^1}{\partial x} \frac{\partial q^2}{\partial x} dx dy = B_{12}. \quad (21)$$

Пользуясь тождествами (18) и уравнениями Коши-Римана для функций p^j и q^j , получим из (19):

$$(1 + \lambda_1 + \lambda_2) A_1 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) B_1 = \\ = -(1 + \lambda_1 - \lambda_2) A_{12} - (1 - \lambda_1 + \lambda_2) B_{12},$$

$$(1 + \lambda_1 - \lambda_2) A_1 + (1 - \lambda_1 + \lambda_2) B_1 = \\ = (1 + \lambda_1 + \lambda_2) A_{12} + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) B_{12},$$

$$(1 + \lambda_1 + \lambda_2) A_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) B_2 = \\ = (1 + \lambda_1 - \lambda_2) A_{12} + (1 - \lambda_1 + \lambda_2) B_{12},$$

$$(1 + \lambda_1 - \lambda_2) A_2 + (1 - \lambda_1 + \lambda_2) B_2 = \\ = -(1 + \lambda_1 + \lambda_2) A_{12} - (1 - \lambda_1 - \lambda_2) B_{12}.$$

Исключая отсюда A_{12} и B_{12} , мы получим

$$2\lambda_2(A_1 + A_2) = 0, \quad 2\lambda_1(B_1 + B_2) = 0.$$

Так как числа A_j, B_j — неотрицательные, а $\lambda_2 \neq 0$, то

$$A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0.$$

Но в таком случае

$$\frac{\partial p^1}{\partial x} = \frac{\partial p^2}{\partial x} = \frac{\partial q^1}{\partial x} = \frac{\partial q^2}{\partial x} \equiv 0,$$

и, следовательно,

$$\varphi_1'(z) = \varphi_2'(z) \equiv 0.$$

Переходя опять к переменной t , $z = \omega(t)$, мы найдём, что

$$\Phi_1'(t) = \Phi_2'(t) \equiv 0,$$

или

$$\theta_1'(t) + a_1 \omega'(t) \equiv 0, \quad \theta_2'(t) + a_2 \omega'(t) \equiv 0.$$

Определив отсюда числа k_1 и k_2 [формулы (9) и (10)] и подставив их в (15), найдём $a_1 = a_2 = 0$ и, следовательно, $\theta'_1(t) = \theta'_2(t) \equiv 0$. Вспомнив теперь, что

$$\theta'_j(t) = \vartheta_j(t) = p_j + iq_j,$$

мы убеждаемся, что $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 \equiv 0$, и система (3) в случае комплексного λ имеет только тривиальное решение. Теорема 1 доказана полностью.

Теорема 2. *Ряд последовательных приближений для уравнения (13) п. 39 сходится.*

Параметр λ в уравнении (13) п. 39 — действительный и по абсолютной величине не превосходит единицы. Указанное уравнение при действительных λ эквивалентно системе (3), для которой все точки круга $|\lambda| \leq 1$ не характеристические. Решение системы (13) п. 39 в этом круге разлагается в ряд Тэйлора по степеням λ . Это равносильно тому, что ряд последовательных приближений для системы (3), или, что то же, для уравнения (13) п. 39, сходится.

Следует отметить, что применение на практике метода последовательных приближений затрудняется тем, что при этом необходимо вычислять большое количество квадратур.

§ 3. ОБОБЩЁННЫЙ АЛГОРИФМ ШВАРЦА

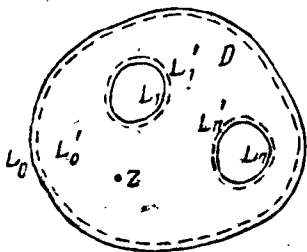
45. Задача Дирихле для многосвязной области на плоскости. Пусть D — многосвязная плоская область, которую мы сперва предположим конечной. Как и выше, мы обозначим ограничивающие её кривые через L_0, L_1, \dots, L_n , причём L_0 будет у нас обозначать кривую, ограничивающую область извне. Обозначим, далее, через D_0 область, лежащую внутри L_0 , и через D_k — область, лежащую вне L_k , $k=1, 2, \dots, n$. Очевидно, область D является частью каждой из областей D_0, D_1, \dots, D_n .

Пусть $U(x, y)$ — гармоническая в D функция и $V(x, y)$ — её сопряжённая. Обозначим $U(x, y) + iV(x, y) = \varphi(z)$. В п. 30 было показано, что $\varphi(z)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(z) = \varphi^*(z) + \sum_{k=1}^n A_k \ln(z - z_k), \quad (1)$$

где $\varphi^*(z)$ — регулярная в D функция, A_k — действительные коэффициенты и z_k — фиксированные точки внутри L_k .

Докажем, что $\varphi^*(z)$ можно представить в виде суммы функций, каждая из которых регулярна в D_k . Возьмём в D произвольную точку z . Проведём внутри D кривые L'_0, L'_1, \dots, L'_n , близкие соответственно к кривым L_0, L_1, \dots, L_n , так, чтобы точка z оказалась внутри области, ограниченной кривыми L'_0, L'_1, \dots, L'_n (черт. 11). Сово-



Черт. 11.

купность этих кривых, обходимых в положительном направлении, обозначим через L' . Теперь, по формуле Коши,

$$\varphi^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{\varphi^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^n \int_{L'_k} \frac{\varphi^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (2)$$

Функция

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'_k} \frac{\varphi^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad k=0, 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

регулярна внутри L'_0 ($k=0$) или вне L'_k ($k=1, 2, \dots, n$). Но кривые L'_k можно взять как угодно близко к L_k . Отсюда следует, что $\varphi_k(z)$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$) аналитически продолжима во всю область D_k . Так как

$$\varphi^*(z) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(z), \quad (4)$$

то наше утверждение доказано. Обозначим

$$U_k(x, y) = \operatorname{Re} \{ \varphi_k(z) \}.$$

Тогда из (1) и (4) следует представление функции, гармонической в D , в виде

$$U(x, y) = \sum_{k=0}^n U_k(x, y) + \sum_{k=1}^n A_k \ln |z - z_k|, \quad (5)$$

где функция $U_k(x, y)$ — гармоническая в D_k . Функции $U_k(x, y)$ в формуле (5) не определяются единственным образом; действительно, к каждой из них можно прибавить постоянную a_k , если только

$$a_0 + a_1 + \dots + a_k = 0.$$

Допустим теперь, что мы умеем сравнительно просто решать задачу Дирихле для каждой из областей D_k . Как мы покажем, решение задачи Дирихле для области D можно свести к решению некоторой, также сравнительно простой, системы интегральных уравнений.

Обозначим через $u_k(\zeta)$ значение функции $U_k(x, y)$ на контуре L_k . Величины $u_k(\zeta)$ мы и примем за неизвестные нашей задачи. Раз решение задачи Дирихле для областей нам известно, то мы можем считать известными функции Грина этих областей $G_k(z; \zeta)$. При этом

$$U_k(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} u_k(\zeta) \frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial \nu} d\sigma. \quad (6)$$

Пусть $f_k(\zeta)$ — значение искомой функции $U(x, y)$ на кривой L_k . В формуле (5) будем под $z = x + iy$ понимать точку кривой L_m . На этой кривой $U(x, y) = f_m(z)$, $U_m(x, y) = u_m(z)$, а значения остальных функций $U_k(x, y)$ определяются формулой (6). Теперь формула (5) даёт:

$$\begin{aligned} \text{на } L_m \quad u_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} u_k(\zeta) \frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial \nu} d\sigma = \\ = f_m(z) - \sum_{k=1}^n A_k \ln |z - z_k|. \end{aligned} \quad (7)$$

Равенства (7) образуют систему интегральных уравнений типа Фредгольма с неизвестными $u_k(\zeta)$, $k=0, 1, \dots, n$. Коэффициенты A_k будем пока считать произвольными.

Система (7) неразрешима, если правая её часть задана произвольно. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать, что соответствующая однородная система:

$$\text{на } L_m \quad u_m(z) + \sum_{k \neq m} \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} u_k(\zeta) \frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial \nu} d\sigma = 0 \quad (8)$$

имеет нетривиальные решения. Отметим тождество

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial v} d\zeta \equiv 1, \quad (9)$$

означающее, что гармоническая функция, равная единице на контуре, равна единице тождественно. Из (9) непосредственно вытекает, что однородная система (8) имеет решение $u_m(z) = \alpha_m$, где α_m — постоянные, сумма которых равна нулю.

Систему (7) нетрудно изменить так, чтобы она стала разрешимой. Пусть $l_k(\zeta)$ — функции, подчинённые условию

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L_k} l_k(\zeta) d\zeta = 1, \quad (10)$$

а в остальном — произвольные. Заменяем систему (7) следующей:

$$\begin{aligned} \text{на } L_m \quad u_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} u_k(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial v} - l_k(\zeta) \right] d\zeta = \\ = f_m(z) - \sum_{k=1}^n A_k \ln |z - z_k|. \end{aligned} \quad (11)$$

Докажем теперь, что система (11) разрешима, какова бы ни была её правая часть. В соответствии с альтернативой Фредгольма рассмотрим однородную систему:

$$\text{на } L_m \quad v_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} v_k(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial v} - l_k(\zeta) \right] d\zeta = 0. \quad (12)$$

Пусть $v_0(z), v_1(z), \dots, v_n(z)$ — некоторое решение этой системы. Обозначим через a_m постоянные

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} v_k(\zeta) l_k(\zeta) d\zeta.$$

В этих обозначениях система (12) принимает вид

$$\text{на } L_m \quad v_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} \frac{\partial G_k}{\partial v} v_k(\zeta) d\zeta = a_m. \quad (13)$$

Величину $v_m(z)$, которая определяется с помощью системы (12) на кривой L_m , будем рассматривать, как

контурное значение функции, гармонической в D_m . Эту функцию будем обозначать символом $V_m(z)$. Очевидно, что функция, сопряжённая с $V_m(z)$, однозначна в D_m , так как область D_m — односвязная. Составим функцию

$$V(z) = \sum_{m=0}^n V_m(z).$$

Эта функция — гармоническая в D ; сопряжённая с ней функция однозначна в D . Формула (13) показывает, что функция $V(z)$ принимает на каждой из кривых L_m постоянное значение, равное a_m . Докажем, исходя из этого, что $V(z) = \text{const}$.

Введём в рассмотрение функции $b_m(z)$ и $a_m(z)$ [см. п. 38, формулы (10) — (12)]. Положим ещё $b_0(z) \equiv 1$. Нетрудно видеть, что

$$V(z) = a_0 b_0(z) + \sum_{k=1}^n (a_k - a_0) b_k(z). \quad (14)$$

Условия однозначности $V(z)$ состоят в выполнении тождеств

$$\int_L V(\zeta) a_k(\zeta) d\zeta = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Заметим, что тождество (15) верно и при $k=0$, так как тогда $b_0(\zeta) \equiv 1$ и $a_k(\zeta) = 0$. Умножим теперь (15) на a_0 при $k=0$ и на $a_k - a_0$ при $k > 0$ и полученные равенства сложим. Пользуясь формулой (14), получим

$$\int_L V(\zeta) \frac{\partial V(\zeta)}{\partial \nu} d\zeta = 0.$$

Но, как доказывается в теории потенциала, если $V(z)$ — гармоническая в D функция, то (ν — внутренняя нормаль)

$$\int_L V \frac{\partial V}{\partial \nu} d\zeta = - \int_D \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad V(z) = \text{const}.$$

Нетрудно убедиться теперь, что функции $V_m(z)$ также постоянны. В самом деле,

$$V_m(z) = V(z) - \sum_{k \neq m} V_k(z).$$

Так как $V(z)$ — постоянная, то все слагаемые справа суть функции, гармонические внутри L_m , и, следовательно, $V_m(z)$ — гармоническая внутри L_m функция. Но $V_m(z)$ гармонична вне L_m по определению. Таким образом, оказывается, что $V_m(z)$ гармонична на всей плоскости. По теореме Лиувилля, $V_m(z) = \text{const}$.

Подставим теперь в (12) постоянные вместо $v_k(z)$. Пользуясь соотношениями (9) и (10), мы получим сразу $v_k(z) \equiv 0$.

Отсюда следует, что система (11) разрешима.

Покажем теперь, как с помощью этой системы можно решить задачу Дирихле. Решим систему (11), заменив в ней правые части сперва на $f_m(z)$, затем на $\ln|z - z_k|$. Соответствующие решения обозначим через $W_m(z)$ и $W_{km}(z)$. Тогда решением системы (11) будет

$$U_m(z) = W_m(z) - \sum_{k=1}^n A_k W_{km}(z).$$

Постоянные A_k , которые до сих пор оставались неопределёнными, подчиним требованию, чтобы суммы

$$A = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} U_k(\zeta) l_k(\zeta) d\zeta$$

были одинаковы для всех значений $m=0, 1, \dots, n$. Это даст систему $n+1$ уравнения с $n+1$ неизвестными A, A_1, A_2, \dots, A_n . Найдя эти неизвестные, мы получим решение задачи Дирихле в виде

$$U(z) = \sum_{k=0}^n U_k(z) + \sum_{k=1}^n A_k \ln|z - z_k| - A. \quad (16)$$

Значительно проще решается видоизменённая задача Дирихле. В этом случае $A_k = 0$ и $U = \sum_{k=0}^n U_k$. Функции $U_k(z)$

можно определить из системы:

на L_m

$$U_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} U_k(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial \nu} - l_k(\zeta) \right] d\zeta = f_m(z). \quad (17)$$

Величины

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} U_k(\zeta) l_k(\zeta) d\zeta$$

и дают значения постоянных, которые нужно вычесть из $f_m(z)$ в соответствии с постановкой задачи.

46. Случай трёхмерной области. Тот же приём, и притом в значительно более простом виде, можно применить к решению задачи Дирихле в пространстве. Пусть эта задача поставлена для области D , граница которой состоит из нескольких отдельных поверхностей S_1, \dots, S_n . Обозначим через D_m ту из двух областей, ограниченных поверхностью S_m , внутри которой содержится область D . Функция $U(M)^1$, гармоническая в D , может быть представлена в виде суммы функций, гармонических в D_m . Это сразу следует из формулы Грина, которую мы можем представить в виде

$$U(M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^n \iint_{S_m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \nu} - U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} \right) dS = \sum_{m=1}^n U_m(M), \quad (1)$$

и очевидно, что функция

$$U_m(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \nu} - U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} \right) dS \quad (2)$$

— гармоническая в D .

Представление $U(M)$ в виде

$$U(M) = \sum_{m=1}^n U_m(M) \quad (3)$$

¹⁾ Через M мы обозначим здесь переменную точку пространства.

— единственное. Чтобы доказать это, допустим, что существует ещё одно представление

$$U(M) = \sum_{m=1}^n U'_m(M),$$

где $U'_m(M)$ — функция, гармоническая в D_m . Вычитая это из (3) и полагая для краткости $U_m - U'_m = V_m$, найдём:

$$\sum_{m=1}^n V_m = 0.$$

Запишем это равенство в виде

$$V_m = - \sum_{k \neq m} V_k.$$

Левая часть этого равенства гармонична вне S_m , а правая — внутри S_m . Но в таком случае $V_m(M)$ оказывается гармонической во всём пространстве, и, следовательно, равной нулю. Этим единственность представления (3) доказана.

Обозначим через $f_m(M)$ заданное на поверхности S_m значение искомой функции $U(M)$. Допустим, что мы умеем решать задачу Дирихле для каждой из областей D_m , и пусть $G_m(M, M_1)$ — функция этой области. Рассуждая так же, как и в предыдущем пункте, мы легко придём к следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} u_m(M) + \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq m} \iint_{S_k} u_k(M_1) \frac{\partial G_k(M, M_1)}{\partial \nu} dS = \\ = f_m(M), \quad m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

В отличие от случая плоской задачи, система (4) всегда имеет решение. В самом деле, пусть $v_1(\cdot), \dots, v_n(\cdot)$ удовлетворяют однородной системе

$$v_m(M) + \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq m} \iint_{S_k} v_k(M) \frac{\partial G_k(M, M_1)}{\partial \nu} dS = 0. \quad (5)$$

Обозначим через $V_m(M)$ гармоническую в D_m функцию, равную $v_m(M)$ на S_m .

Сравнивая системы (5) и (4), мы видим, что функция

$$V(M) = \sum_{m=1}^n V_m(M)$$

— гармоническая в D и равная нулю на её границе. Но тогда $V(M) \equiv 0$, и так как представление (3) единственно, то $V_m(M) \equiv 0$. Таким образом, однородная система (5) имеет только тривиальное решение; в силу альтернативы Фредгольма, неоднородная система (4) всегда имеет решение, которое, очевидно, приводит нас к решению задачи Дирихле для области D .

47. Обобщённый алгоритм Шварца. Вернёмся к плоской задаче (п. 45). Для простоты допустим, что область D — бесконечная, так что контур L_0 отсутствует. Примем за $l_k(\zeta)$ функции

$$l_k(\zeta) = \left. \frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial v} \right|_{z=\infty}, \quad (1)$$

так что система (17) принимает вид:

$$\begin{aligned} \text{на } L_m \quad u_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} u_k(\zeta) \left[\frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial v} - \frac{\partial G(\infty, \zeta)}{\partial v} \right] ds = \\ = f_m(z), \quad m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

Допустим, что кривые L_k достаточно удалены друг от друга. Тогда, как легко видеть, ядра системы (2) будут малы, и очевидно (см. п. 2), что система (2) разрешима по методу последовательных приближений.

Проанализируем подробнее алгоритм последовательных приближений для системы (2). С этой целью поступим следующим образом. Введём параметр λ в уравнение (2). Мы получим новое уравнение:

$$\begin{aligned} \text{на } L_m \quad u_m(z) + \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} u_k(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z, \zeta)}{\partial v} - \frac{\partial G(\infty, \zeta)}{\partial v} \right] d\zeta = \\ = f_m(z), \quad m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

Его решение будем искать в виде

$$u_m(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \lambda^r u_{mr}(z). \quad (4)$$

Подставим это в (3). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ слева и справа, мы получим следующие рекуррентные формулы:

$$\left. \begin{aligned} u_{m0}(z) &= f_m(z), \\ u_{mr}(z) &= \sum_{k \neq m} \frac{1}{2\pi} \int \int_L u_{k, r-1}(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial v} - \frac{\partial G_k(\infty, \zeta)}{\partial v} \right] d\zeta. \end{aligned} \right\} (5)$$

Полагая теперь в (4) $\lambda=1$, мы найдём решение уравнения (2).

Формулы (5) определяют функцию $u_{mr}(z)$ только на кривой L_m . Пусть теперь z означает произвольную точку области D_m . Символом $U_{mr}(z)$ мы будем обозначать гармоническую в D_m функцию, значения которой на контуре этой области определяются формулами (5). Очевидно, что внутри D_m

$$U_{mr}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_m} u_{mr}(\zeta) \frac{\partial G_m(z; \zeta)}{\partial v} d\zeta,$$

и формулы (5) можно представить в таком виде:

$$\text{на } L_m \quad U_{m0}(z) = f_m(z), \quad U_{mr}(z) = \sum_{k \neq m} [U_{k, r-1}(z) - U_{k, r-1}(\infty)]. \quad (6)$$

Как показывают формулы (6), члены ряда (4) можно построить следующим образом.

В качестве нулевого приближения мы строим гармонические в D_m функции $U_{m0}(z)$, контурные значения которых совпадают с заданными функциями $f_m(z)$.

Если построены функции $U_{m0}(z), \dots, U_{m, r-1}(z)$, то $U_{mr}(z)$ определяется так: из функций $U_{k, r-1}(z)$, $k \neq m$, вычитаются их значения на бесконечности, полученные разности вычисляются на кривой L_m и затем суммируются по всем k , не равным m . В результате мы получаем значения функции $U_{mr}(z)$ на контуре L_m и далее с помощью соответствующей функции Грина мы находим эту функцию $U_{mr}(z)$ во всей области D_m . Искомая гармоническая в D функция $U(z)$ равна сумме ряда

$$U(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \sum_{m=1}^n U_{mr}(z). \quad (7)$$

Изложенный нами процесс по идее сходен с знакопеременным алгоритмом Шварца; мы будем называть его обобщённым алгоритмом Шварца.

Обобщённый алгоритм Шварца делается особенно простым в том случае, когда область D двухсвязная. Мы можем считать, что $f_2(\zeta) \equiv 0$. Для этого достаточно из искомой функции $U(z)$ вычесть функцию $U'(z)$, гармоническую в D_2 и равную $f_2(z)$ на L_2 . Формулы (6) дают теперь:

$$\left. \begin{array}{l} \text{на } L_1 \quad U_{10}(z) = f(z), \quad U_{1r}(z) = U_{2, r-1}(z) - U_{2, r-1}(\infty), \\ \text{на } L_2 \quad U_{20}(z) = 0, \quad U_{2r}(z) = U_{1, r-1}(z) - U_{1, r-1}(\infty). \end{array} \right\} (8)$$

Из формул (8) следует, что $U_{1r}(z)$ при r нечётном и $U_{2r}(z)$ при r чётном тождественно равны нулю. Обозначим теперь для краткости

$$U_{1r}(z) = U_r(z), \quad U_{2r}(z) = V_r(z).$$

Тогда

$$U(z) = U_0(z) - V_1(z) + U_2(z) - V_3(z) + \dots \quad (9)$$

Без существенных изменений применяется обобщённый алгоритм Шварца и в случае конечной многосвязной области. Достаточно функцию $l_0(\zeta)$ заменить нулём. Можно принять также

$$l_0(\zeta) = \frac{\partial G_0(a, \zeta)}{\partial v},$$

где a — произвольная точка внутри D .

В случае трёхмерной области обобщённый алгоритм Шварца упрощается. В уравнение (4) п. 46 введём параметр λ и напишем уравнение в виде:

$$\text{на } S_m \quad u_m(M) + \frac{\lambda}{4\pi} \sum_{k \neq m} \iint_{S_k} u_k(M_1) \frac{\partial G_k(M, M_1)}{\partial v} dS = f_m(M). \quad (10)$$

Решение его будем искать в виде

$$u_m(M) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \lambda^r u_{mr}(M). \quad (11)$$

Мы придём тогда к рекуррентным формулам:

$$\left. \begin{aligned} u_{m0}(M) &= f_m(M), \\ u_{mr}(M) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq m} \int_{S_k} u_{k,r-1}(M_1) \frac{\partial G(M, M_1)}{\partial \nu} dS. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Если M будет теперь означать внутреннюю точку области D_m , то под $U_{mr}(M)$ мы будем понимать гармоническую в D_m функцию, значения которой на S_m определяются из (12). Но в таком случае

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S_k} u_{k,r-1}(M_1) \frac{\partial G_k(M, M_1)}{\partial \nu} dS = U_{k,r-1}(M),$$

и соотношения (12) принимают более простой вид:

$$\text{на } S_m \quad U_{m0}(M) = f_m(M), \quad U_{mr}(M) = \sum_{k \neq m} U_{k,r-1}(M). \quad (13)$$

Как это очевидно следует из формул (13), последовательные приближения строятся так: нулевым приближением служат функции $U_{m0}(M)$, $m=1, 2, \dots, n$, гармонические в D_m и равные $f_m(M)$ на поверхностях S_m . Если приближения $U_{m0}(M)$, $U_{m1}(M), \dots, U_{m,r-1}(M)$ построены, то $U_{mr}(M)$ определяется как гармоническая в D_m функция, которая на поверхности S_m равна сумме

$$\sum_{k \neq m} U_{k,r-1}(M).$$

Обобщённый алгоритм Шварца приводит к сходящемуся ряду, какова бы ни была область D .

Доказательство этой теоремы можно найти в статье С. Л. Соболева [34]. Мы ограничимся здесь случаем двухсвязной трёхмерной области, для которого доказательство элементарно.

Как было уже отмечено, наш алгоритм совпадает с алгоритмом последовательных приближений для системы интегральных уравнений¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \text{на } S_1 \quad u_1(M) + \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} u_2(M_1) \frac{\partial G_2(M, M_1)}{\partial \nu} dS &= f_1(M), \\ \text{на } S_2 \quad u_2(M) + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} u_1(M_1) \frac{\partial G_1(M, M_1)}{\partial \nu} dS &= f_2(M). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

¹⁾ Мы пишем здесь эту систему для интересующего нас случая двухсвязной области.

Рассмотрим однородную систему интегральных уравнений, содержащих параметр λ :

$$\left. \begin{aligned} \text{на } S_1 \quad v_1(M) + \frac{\lambda}{4\pi} \iint_{S_2} v_2(M_1) \frac{\partial G(M, M_1)}{\partial \nu} dS &= 0, \\ \text{на } S_2 \quad v_1(M) + \frac{\lambda}{4\pi} \iint_{S_1} v_1(M_1) \frac{\partial G_1(M, M)}{\partial \nu} dS &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Докажем, что характеристические числа этой системы по модулю больше единицы. В силу доказанного в п. 5, отсюда будет следовать сходимость алгоритма последовательных приближений для системы (14).

Если M — внутренняя точка области D_m ($m=1, 2$), то под $U_1(M)$, $U_2(M)$ будем, как и выше, понимать гармонические в D_1, D_2 функции, значения которых на S_1 , соответственно S_2 , определяются из системы (15). Тогда эта система может быть записана так:

$$\left. \begin{aligned} \text{на } S_1 \quad U_1(M) + \lambda U_2(M) &= 0, \\ \text{на } S_2 \quad U_2(M) + \lambda U_1(M) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Функции $U_1(M)$ и $U_2(M)$ могут быть комплексными, тем не менее теорема о максимуме модуля остаётся для них справедливой¹⁾. Обозначим через A_k максимум $|U_k(M)|$ и

¹⁾ Пусть на S_1 $|U_1(M)| \leq K$. Тогда внутри D_1

$$|U_1(M)| = \frac{1}{4\pi} \left| \iint_{S_1} U_1(M_1) \frac{\partial G_1(M, M_1)}{\partial \nu} dS \right| \leq \frac{K}{4\pi} \iint_{S_1} \left| \frac{\partial G_1(M, M_1)}{\partial \nu} \right| dS.$$

Но нормальная производная функции Грина положительна внутри области. Отсюда

$$|U_1(M)| \leq \frac{K}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\partial G(M, M_1)}{\partial \nu} dS.$$

Далее, интеграл

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\partial G(M, M_1)}{\partial \nu} dS$$

есть гармоническая в D_1 функция, равная единице на S_1 . Эта функция

через N_k — ту точку поверхности S_k , в которой $|U_k| = A_k$. В первом из уравнений (16) положим $M = N_1$, а во втором $M = N_2$. Теперь из этих уравнений следует

$$|\lambda| = \frac{A_1}{|U_2(N_1)|} = \frac{A_1}{|U_1(N_2)|}.$$

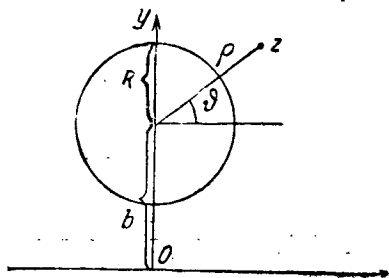
Отсюда

$$|\lambda|^2 = \frac{A_1}{|U_2(N_1)|} \cdot \frac{A_2}{|U_1(N_2)|}. \quad (17)$$

Оба множителя справа больше единицы, так как области D_1 и D_2 — бесконечные, функции U_1 и U_2 , гармонические в этих областях, отличны от тождественных постоянных, а в таком случае значение гармонической функции во внутренней точке строго меньше, чем её максимум на границе. Окончательно, $|\lambda_1| > 1$, что и требовалось доказать.

Наше доказательство сходимости обобщённого алгоритма Шварца остаётся в силе и тогда, когда область D — конечная. В этом случае одна из областей, например D_1 , — конечная, а другая — бесконечная. Тогда в формуле (17) первый множитель справа не меньше единицы, а второй строго больше единицы. Попрежнему $|\lambda| > 1$, и этого достаточно для сходимости нашего алгоритма.

48. Обтекание крыла аэроплана воздушным потоком вблизи поверхности земли. Для простоты вычислений примем, что крыло — круглого сечения. Оси координат выберем, как показано на чертеже 12. Будем считать, что крыло движется в направлении оси x с постоянной скоростью U ; скорость частиц воздуха на бесконечности примем равной нулю. Наконец, примем, что движение — бесциркуляционное. Функция тока $\psi(x, y)$ ре-



Черт. 12.

внутри D_1 равна единице, если область D — конечная, и меньше единицы, если эта область — бесконечная. Окончательно

$$|U_1(M)| \leq K$$

во всей области D_1 .

шаёт видоизменённую задачу Дирихле со следующими условиями на границе ¹⁾:

$$\text{на окружности } |z - b| = R, \quad \psi = Uy + C', \quad C' = \text{const}, \quad (1)$$

$$\text{на оси } x \quad \psi = 0. \quad (2)$$

К этой задаче применим обобщённый алгоритм Шварца. Через L_1 обозначим контур сечения крыла, через L_2 — ось x . Тогда D_1 будет представлять собой плоскость с круговым вырезом, а D_2 — верхнюю полуплоскость. Мы можем воспользоваться непосредственно формулой (9) п. 47, так как $\psi = 0$ на L_2 :

$$\psi(x, y) = U_0(x, y) - V_1(x, y) + U_2(x, y) - V_3(x, y) + \dots \quad (3)$$

Функция $U_0(x, y)$ — гармоническая в D_1 , равная на окружности L_1 величине $Uy = UR \sin \vartheta$ ²⁾. Нетрудно видеть, что этим условиям удовлетворяет функция

$$U_0(x, y) = \frac{UR^2 \sin \vartheta}{\rho} = \frac{UR^2 (y - b)}{x^2 + (y - b)^2}.$$

На бесконечности $U_0(x, y) = 0$, а на оси x

$$U_0(x, 0) = -\frac{UR^2 b}{x^2 + b^2}.$$

Теперь $V_1(x, y)$ определяется, как гармоническая в верхней полуплоскости функция, которая на границе полуплоскости обращается в $-\frac{UbR^2}{x^2 + b^2}$. По известной формуле

$$V_1(x, y) = -\frac{UbR^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(\xi^2 + b^2)[(\xi - x)^2 + y^2]} = -\frac{UR^2 (y + b)}{x^2 + (y + b)^2}.$$

Контурные значения следующего приближения мы получим, вычтя из $V_1(x, y)$ её величину на бесконечности и вычислив значение полученной разности на окружности L_1 . Так как на бесконечности $V_1(x, y) = 0$, то контурные значения $U_2(x, y)$ равны просто значениям $V_1(x, y)$ на L_1 :

$$\text{на } L_1 \quad U_2(x, y) = -\frac{UR^2 \cdot 2b + R \sin \vartheta}{R^2 + 4b^2 + 4bR \sin \vartheta}.$$

¹⁾ См. п. 34.

²⁾ Обозначения чертежа 13. Постоянную C' мы отбрасываем, как несущественную при решении видоизменённой задачи Дирихле.

Теперь по формуле Пуассона

$$U_2(x, y) = -\frac{UR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2b + R \sin \theta}{R^2 + 4b^2 + 4bR \sin \theta} \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos(\theta - \nu)} d\theta =$$

$$= -UR^2 \frac{2b[x^2 + (y-b)^2] + R^2(y-b)}{R^4 + 4b^2[x^2 + (y-b)^2] + 4bR^2(y-b)}.$$

Ограничиваясь полученными приближениями, имеем

$$\psi(x, y) = U_0(x, y) - V_1(x, y) + U_2(x, y) = UR^2 \left\{ \frac{y-b}{x^2 + (y-b)^2} + \frac{y+b}{x^2 + (y+b)^2} - \frac{2b[x^2 + (y-b)^2] + R^2(y-b)}{R^4 + 4b^2[x^2 + (y-b)^2] + 4bR^2(y-b)} \right\}. \quad (4)$$

49. Применение к задачам теории упругости. Обобщённый алгоритм Шварца и связанная с ним система интегральных уравнений, могут быть использованы не только в задачах, относящихся к уравнению Лапласа, но и каждый раз, когда решается краевая задача для уравнения эллиптического типа в случае многосвязной области. Поясним это на примере плоской задачи теории упругости. Ограничимся случаем конечной многосвязной области. Случай бесконечной области рассматривается аналогично.

Итак, пусть ставится задача об определении напряжённого состояния в многосвязной области D , ограниченной изнутри контурами L_1, L_2, \dots, L_n и извне — контуром L_0 . Эта задача, как мы знаем (п. 37), сводится к нахождению бигармонической в D функции по данным на контуре значениям её производных. Именно, обозначим составляющие по осям x, y внешних сил, приложенных к контуру L_k , через $X_{k\nu}$ и $Y_{k\nu}$, а искомую бигармоническую функцию — через W . Тогда

$$\text{на } L_k \quad \frac{\partial W}{\partial x} + i \frac{\partial W}{\partial y} = i \int_{s_0}^s (X_{k\nu} + iY_{k\nu}) ds + B_k =$$

$$= f_k(z) + B_k, \quad k=0, 1, 2, \dots, n; \quad (1)$$

z — комплексная координата точки контура.

В формуле (1) B_k — постоянные. Одна из постоянных B_k может быть выбрана произвольно, и тогда остальные определяются из условия однозначности смещений. Мы будем считать, что главный вектор и главный момент сил,

приложенных к каждой из кривых, равны нулю. Этого всегда можно добиться.

Обозначим через D_0 область, лежащую внутри L_0 , и через D_k — область, лежащую вне L_k , $k=1, 2, \dots, n$. Можно легко доказать, что при выполнении только что сформулированного условия функцию W можно представить в виде суммы бигармонических функций

$$W = W_0 + W_1 + \dots + W_n, \quad (2)$$

причём каждая функция W_k регулярна в соответствующей области D_k . Допустим теперь, что мы умеем решать задачу теории упругости для каждой из областей D_k . Если нам будут известны значения величины

$$\frac{\partial W_k}{\partial x} + i \frac{\partial W_k}{\partial y} = g_k(z)$$

на соответствующей кривой L_k , то, решив указанную задачу в каждой из областей D_k , мы найдём функции W_k , а следовательно, и W . Тем самым будет решена задача теории упругости для нашей многосвязной области D . Дело сводится к построению величин $g_k(z)$.

Сделаем несколько предварительных замечаний.

1. Подробный анализ, которого мы здесь приводить не будем¹⁾, приводит к следующему результату: пусть D — односвязная область и L — её контур. Пусть, далее, U — бигармоническая в D функция, и пусть на контуре L

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = g(z).$$

Тогда в любой внутренней точке области D

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = \int_L [M_1(x, y; \zeta) g(\zeta) + M_2(x, y; \zeta) \overline{g(\zeta)}] d\zeta, \quad (3)$$

где M_1 и M_2 — функции непрерывные, пока точка (x, y) остаётся внутри области, а точка ζ — на её контуре; эти функции полностью определяются областью D . Для крат-

¹⁾ См. [37b], стр. 5—8.

кости будем обозначать интеграл в правой части (3) через $M(z; g)$, так что

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = M(z; g). \quad (3_1)$$

Оператор M , соответствующий области D_k , будем обозначать через $M_k(z; g)$, так что, в частности,

$$\frac{\partial W_k}{\partial x} + i \frac{\partial W_k}{\partial y} = M_k(z; g_k). \quad (4)$$

2. Если $g(z) \equiv g = \text{const}$, то из теоремы единственности решения задачи теории упругости вытекает, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \equiv g.$$

Отсюда следует, что

$$\text{при } g(\zeta) \equiv g = \text{const}, \quad M(z; g) \equiv g. \quad (5)$$

3. Так как функции W_k — бигармонические в односвязных областях, то соответствующие им смещения однозначны. Но тогда, в силу формулы (2), автоматически будут однозначны и смещения, соответствующие функции W . А priori ясно, что функция (2) не может удовлетворять контурному условию (1) при произвольных значениях постоянных B_k , ибо, как уже было отмечено, при произвольном их выборе смещения, вообще говоря, многозначны. Мы будем поэтому ставить нашу задачу так: функцию W мы будем искать в виде (2); при этом мы будем добиваться, чтобы W удовлетворяла контурному условию

$$\text{на } L_k \quad \frac{\partial W}{\partial x} + i \frac{\partial W}{\partial y} = f_k(z) \quad (6)$$

с точностью до постоянного слагаемого, которое может быть различным на различных контурах.

Нетрудно теперь составить систему интегральных уравнений для неизвестных $g_k(\zeta)$. Именно, на кривой L_m

$$\frac{\partial W_m}{\partial x} + i \frac{\partial W_m}{\partial y} = g_m(z).$$

Далее, если $k \neq m$, то L_m лежит внутри области D_k , и по формуле (4)

$$\text{на } L_m \quad \frac{\partial W_k}{\partial x} + i \frac{\partial W_k}{\partial y} = M_k(z; g_k),$$

где z означает точку на L_m . Используя формулы (2) и (5), мы получаем интересующую нас систему:

$$\text{на } L_m \quad g_m(z) + \sum_{k \neq m} M_k(z, g_k) = f_m(z), \quad m=0, 1, \dots, n. \quad (7)$$

Как и в случае плоской задачи Дирихле (п. 45), система (7) в общем случае неразрешима. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим однородную систему:

$$\text{на } L_m \quad g_m^{(0)}(z) + \sum_{k \neq m} M_k(z, g_k^{(0)}) = 0. \quad (8)$$

Как это следует из формулы (6), системе (8) удовлетворяют $g_m^{(0)}(z) = a_m = \text{const}$, если только постоянные a_m подчинены единственному условию $a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0$. Таким образом, однородная система (8) имеет нетривиальные (отличные от тождественного нуля) решения, и из альтернативы Фредгольма вытекает неразрешимость системы (7).

Преобразуем теперь систему (7) так, чтобы она стала разрешимой. Введём в рассмотрение интегралы

$$N_k(g) = \int_{L_k} [\alpha_k(\zeta) g(\zeta) + \beta_k(\zeta) \overline{g(\zeta)}] d\zeta, \quad (9)$$

где функции $\alpha_k(\zeta)$ и $\beta_k(\zeta)$ мы подчиним следующим условиям:

- 1) они непрерывны на L_k ;
- 2) $\int_{L_k} \alpha_k(\zeta) d\zeta = 1, \quad \int_{L_k} \beta_k(\zeta) d\zeta = 0.$ (10)

Систему (7) заменим следующей:

$$\begin{aligned} \text{на } L_m \quad g_m(z) + \sum_{k \neq m} \{M_k(z; g_k) - N_k(g_k)\} = \\ = f_m(z); \quad m=0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (11)$$

Докажем, что система (11) разрешима, каковы бы ни были функции $f_m(z)$. С этой целью рассмотрим соответствующую однородную систему

$$\text{на } L_m \quad g_m^{(0)}(z) + \sum_{k \neq m} \{M_k(z; g_k^{(0)}) - N_k(g_k^{(0)})\} = 0; \quad (12)$$

$$m = 0, 1, \dots, n$$

и докажем, что она имеет только тривиальное решение $g_m^{(0)}(z) = 0$, $m = 0, 1, \dots, n$. Пусть $g_0^{(0)}(z), g_1^{(0)}(z), \dots, g_n^{(0)}(z)$ — какое-либо решение системы (12). Обозначим

$$\sum_{k \neq m} N_k(g_k^{(0)}) = a_m.$$

Величины a_m , очевидно, постоянные. Теперь из (12) следует, что

$$\text{на } L_m \quad g_m^{(0)}(z) + \sum_{k \neq m} M_k(z; g_k^{(0)}) = a_m. \quad (13)$$

Введём в рассмотрение бигармонические в D_m функции $W_m^{(0)}(x, y)$, удовлетворяющие на L_m равенству

$$\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial x} + i \frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial y} = g_m^{(0)}(z).$$

По формуле (4), внутри D_k имеем:

$$\frac{\partial W_k^{(0)}}{\partial x} + i \frac{\partial W_k^{(0)}}{\partial y} = M_k(z; g_k^{(0)}).$$

Положим теперь

$$W^{(0)}(x, y) = \sum_{m=0}^n W_m^{(0)}(x, y). \quad (14)$$

Функция $W^{(0)}(x, y)$ — бигармоническая в многосвязной области D ; так как она распадается на сумму функций, бигармонических в односвязных областях, то ей отвечают однозначные в D смещения. Из (13) следует, что

$$\text{на } L_m \quad \frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} + i \frac{\partial W^{(0)}}{\partial y} = a_m. \quad (15)$$

Из формулы (1) следует, что

$$X_{v,k} + iY_{v,k} = \frac{1}{i} \frac{df_k(z)}{ds}.$$

Применяя это к равенству (15), где $f_k(z) = a_k = \text{const}$, находим: $X_{k\nu} = Y_{k\nu} = 0$. Итак, бигармоническая функция $W^{(0)}$ соответствует напряжённому состоянию в многосвязной области D , контур которой свободен от действия внешних сил. По теореме единственности, соответствующие напряжения тождественно равны нулю. Соответствующая бигармоническая функция $W^{(0)}$ тогда будет линейной [см. формулы (4) п. 36], и

$$\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} + i \frac{\partial W^{(0)}}{\partial y} \equiv \text{const.}$$

Докажем, что постоянны также и величины

$$\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial x} + i \frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial y}; \quad m=0, 1, \dots, n. \quad \bullet$$

По формуле Гурса (1) п. 37

$$W^{(0)} = \text{Re} \{ \bar{z} \zeta(z) + \chi(z) \}, \quad W_m^{(0)} = \text{Re} \{ \bar{z} \varphi_m(z) + \chi_m(z) \};$$

при этом, очевидно,

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^n \varphi_m(z), \quad \chi(z) = \sum_{m=0}^n \chi_m(z). \quad (16)$$

Повторив вывод формулы Гурса для функции $W^{(0)}(x, y)$ и учитывая, что эта функция — линейная, мы легко найдём, что $\varphi(z) = i\alpha z + \beta$, где α — действительная, а β — комплексная постоянная. Точно так же мы найдём, что $\chi(z) = \gamma z + \delta$, где γ и δ — постоянные.

Докажем, что аналогичный вид имеют и функции $\varphi_m(z)$, $\chi_m(z)$. Первое из равенств (16) продифференцируем по z и результат представим в виде

$$\varphi'_m(z) = i\alpha - \sum_{k \neq m} \varphi'_k(z).$$

Левая часть равенства, $\varphi'_m(z)$, регулярна вне L_m , а правая часть — внутри L_m . Но тогда $\varphi'_m(z)$ регулярна на всей плоскости. По теореме Лиувилля, $\varphi_m(z)$ есть величина постоянная. Она должна быть чисто мнимой, в противном случае $W_m^{(0)}$ имела бы производные, неограниченные на бесконечности. Обозначив эту постоянную через $i\alpha_m$, получим

$\varphi'_m(z) = i\alpha_m$ и $\varphi_m(z) = i\alpha_m z + \beta_m$. Аналогично найдём, что $\chi'_m(z) = \gamma_m z + \delta_m$. Применяя формулу Н. И. Мусхелишвили

$$\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial x} + i \frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial y} = \varphi_m(z) + \overline{z\varphi_m(z)} + \overline{\psi_m(z)}, \quad \psi_m(z) = \chi'_m(z),$$

мы найдём, что

$$\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial x} + i \frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial y} = \beta_m + \overline{\gamma_m} = \text{const.}$$

Отсюда, очевидно, следует, что $g_m^{(0)}(z) \equiv \text{const.}$

Итак, решения однородной системы (12) суть постоянные. В таком случае, по формуле (5), $M_k(z; g_k^{(0)}) = g_k^{(0)}$. Далее, из формул (9) — (10) следует также, что $N_k(g_k^{(0)}) = g_k^{(0)}$. Подставив это в (12), мы найдём, что $g_m^{(0)}(z) \equiv 0$, т. е. однородная система (12) имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма, система (11) разрешима.

Решив систему (11), мы тем самым решим и задачу теории упругости для области D . В самом деле, пусть $g_m(z)$ — решение указанной системы. Обозначим

$$\sum_{k \neq m} N_k(g_k) = B_m.$$

Тогда

$$\text{на } L_m \quad g_m(z) + \sum_{k \neq m} M_k(z; g_k) = f_m(z) + B_m. \quad (17)$$

Пусть $W_m(x, y)$ будет бигармоническая в D_m функция, удовлетворяющая на контуре L_m равенству

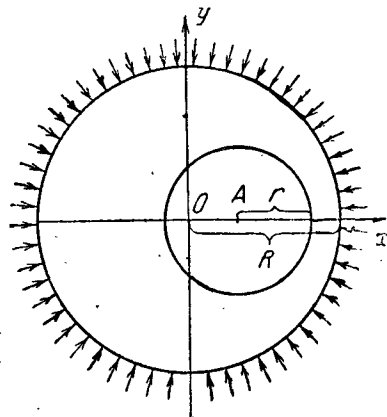
$$\frac{\partial W_m}{\partial x} + i \frac{\partial W_m}{\partial y} = g_m(z),$$

и пусть $W = W_0 + W_1 + \dots + W_n$. Функция $W(x, y)$ есть сумма бигармонических функций, регулярных каждая в своей односвязной области, и формула (17) показывает, что эта функция удовлетворяет условию (1). Наша задача тем самым решена.

В качестве $N_k(g)$ можно, в частности, взять

$$\begin{aligned} N_k(g) &= M_k(\infty; g), \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ N_0(g) &= M_0(a, g), \end{aligned}$$

где a — произвольная точка внутри L_0 . Если контуры L_0, L_1, \dots, L_n достаточно удалены друг от друга, то непосредственно очевидно, что ядра интегралов в системе (11) будут малы, и эта система будет разрешима по методу последовательных приближений. Так же, как и в задаче Дирихле, мы приходим здесь к обобщённому алгоритму Шварца¹⁾. В следующем пункте мы покажем его применение на одной частной задаче.



Черт. 13.

центрами — через a . Область D_0 есть круг $|z| < R$, область D_1 — внешность круга $|z - a| > r$.

Условия на границе области таковы: на внутренней окружности L_2 $\frac{\partial W}{\partial x} + i \frac{\partial W}{\partial y} = f_2(z) = 0$; на внешней окружности, подверженной постоянному нормальному давлению, которое мы обозначим через $-p$,

$$X_\nu = -p \cos(\nu, x) = -p \frac{dy}{ds}, \quad Y_\nu = -p \cos(\nu, y) = p \frac{dx}{ds}.$$

Отсюда следует, что на L_1 ...

$$\frac{\partial W}{\partial x} + i \frac{\partial W}{\partial y} = f_1(z) = i \int (X_\nu + i Y_\nu) ds = -pz. \quad (1)$$

¹⁾ В уже цитированной статье С. Л. Соболева [34] доказано, что и в задачах теории упругости обобщённый алгоритм Шварца всегда приводит к сходящемуся ряду.

²⁾ Эту задачу можно решить и более элементарными средствами. Мы приводим её здесь, как иллюстрацию метода. Менее элементарный пример применения нашего алгоритма читатель найдёт в [27b].

Постоянную интегрирования мы отбрасываем, как несущественную при использовании обобщённого алгоритма Шварца.

Решения задачи теории упругости для областей D_0 и D_1 вполне элементарны и хорошо известны. Введя функции Гурса $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, связанные с $W(x, y)$ формулой

$$\frac{\partial W}{\partial x} + i \frac{\partial W}{\partial y} = \varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \quad (2)$$

имеем¹⁾ для области D_0 :

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - a_1 z - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{f_0(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{R^2 [\varphi'(z) - a_1]}{z}, \\ a_1 &= \frac{1}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{f_0(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и для области D_1

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta} d\zeta - z\varphi'(z). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В формулах (3) и (4) $f_0(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$ обозначают значения величины (2) соответственно на контурах L_0 и L_1 .

В нашей задаче $f_1(\zeta) = 0$, и мы можем, по аналогии с формулой (9) п. 47, написать решение в виде

$$W(x, y) = W_1(x, y) - W_2(x, y) + W_3(x, y) - \dots, \quad (5)$$

где W_{2k+1} суть функции, бигармонические в D_0 , а W_{2k} — бигармонические в D_1 .

Введём, в соответствии с формулой (2), аналитические функции $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ так, что

$$\frac{\partial W_k}{\partial x} + i \frac{\partial W_k}{\partial y} = \varphi_k(z) + z \overline{\varphi_k'(z)} + \overline{\psi_k(z)}.$$

¹⁾ См. Н. И. Мусхелишвили [28а]. Формулы эти нетрудно получить, исходя из результатов п. 41.

Условимся ещё через ζ обозначать точку контура L_0 или L_1 .

Первое приближение, $W_1(x, y)$, удовлетворяет на L_0 контурному условию

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} + i \frac{\partial W_1}{\partial y} = f_1(\zeta) = -p\zeta.$$

Подставив это в (3) и произведя вычисления, мы легко получим, что

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} + i \frac{\partial W_1}{\partial y} = -pz \quad (6)$$

внутри D_0 . Далее, на контуре L_1 величина $\frac{\partial W_2}{\partial x} + i \frac{\partial W_2}{\partial y}$ совпадает с $\frac{\partial W_1}{\partial x} + i \frac{\partial W_1}{\partial y}$; таким образом,

$$\text{на } L_1 \quad \frac{\partial W_2}{\partial x} + i \frac{\partial W_2}{\partial y} = -p\zeta.$$

Подставив это вместо $f(\zeta)$ в формулы (4), мы получим после простых вычислений

$$\varphi_2(z) = 0, \quad \psi_2(z) = -\frac{pr^2}{z-a} - ap$$

и, следовательно, внутри D_1

$$\frac{\partial W_2}{\partial x} + i \frac{\partial W_2}{\partial y} = -\frac{pr^2}{z-a} - ap. \quad (7)$$

Контурные значения величины $\frac{\partial W_3}{\partial x} + i \frac{\partial W_3}{\partial y}$ мы найдём, вычтя из величины (7) её значение на бесконечности и вычислив полученную разность на L_0 . Мы получим тогда

$$\frac{\partial W_3}{\partial x} + i \frac{\partial W_3}{\partial y} = -\frac{pr^2}{\bar{\zeta}-a} = -\frac{pr^2\zeta}{R^2 - a\bar{\zeta}},$$

так как на окружности L_0 $\bar{\zeta} = \frac{R^2}{\zeta}$. Обращаясь опять к формулам (3), мы найдём:

$$\varphi_3(z) = -\frac{pr^2(R^2 + az)z}{2R^2(R^2 - az)},$$

$$\psi_3(z) = \frac{pr^2(2a-z)}{(R^2 - az)^2},$$

и отсюда

$$\frac{\partial W_3}{\partial x} + i \frac{\partial W_3}{\partial y} = -pr^2 \left[\frac{(R^2 + az)z}{2R^2(R^2 - az)} + \frac{z}{2R^2} - \frac{zR^2}{(R^2 - az)^2} - \frac{a(2a - \bar{z})}{(R^2 - a\bar{z})^2} \right]. \quad (8)$$

Столь же просто вычисляются и следующие приближения. Нетрудно видеть, что величины

$$\frac{\partial W_k}{\partial x} + i \frac{\partial W_k}{\partial y}$$

быстро убывают. Даже в том случае, когда окружности касаются ($a = R - r$), указанные величины убывают, как члены прогрессии со знаменателями $\frac{r}{R}$. Если же величина a мала, так что кольцо близко к концентрическому, то убывание происходит как в прогрессии со знаменателем $\frac{r^2}{R^2}$.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ, АНАЛОГИЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛАМ.

51. Применение интегралов Коши в плоской теории упругости (уравнения Н. И. Мусхелишвили). Ограничимся для простоты случаем, когда упругая среда заполняет конечную односвязную область. Обозначим эту область через D , её контур — через L . Как мы уже знаем, задача состоит в определении аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, регулярных в области D и удовлетворяющих на контуре L условию

$$\varphi(\zeta) + \zeta \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta), \quad (1)$$

где $f(\zeta)$ — известная непрерывная функция точки контура L . Мы будем считать её достаточно гладкой.

Условие (1) нам будет удобнее представить в несколько иной форме, а именно — мы заменим все входящие в него величины сопряжёнными:

$$\overline{\varphi(\zeta)} + \bar{\zeta} \psi'(\zeta) + \psi(\zeta) = \overline{f(\zeta)}. \quad (2)$$

Для решения нашей задачи поступим следующим образом. Введём в рассмотрение область D' , лежащую вне L .

Пусть z' — произвольная точка этой области. Умножим обе части равенства (2) на

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta - z'}$$

и проинтегрируем по L . Так как $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в D , а точка z' лежит вне D , то, в силу известных свойств интеграла Коши, имеют место тождества

$$\text{a) } \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \equiv 0, \quad \text{b) } \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta \equiv 0, \quad \text{c) } \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta \equiv 0. \quad (3)$$

Пользуясь тождеством (3, c), мы получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta - z'} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\zeta} \varphi'(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta = A(z'), \quad (4)$$

где

$$A(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta. \quad (5)$$

Преобразуем уравнение (4). В тождестве (3, a) заменим все величины сопряжёнными, тождество (3, b) умножим на $-\overline{z'}$; оба полученные таким образом равенства сложим с (4). Мы придём к уравнению

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\varphi(\zeta)} \left(\frac{d\zeta}{\zeta - z'} - \frac{d\overline{\zeta}}{\zeta - \overline{z'}} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\zeta} - \overline{z'}}{\zeta - z'} \varphi'(\zeta) d\zeta = A(z').$$

Последний интеграл можно взять по частям, и мы получим уравнение, не содержащее $\varphi'(\zeta)$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\varphi(\zeta)} \left(\frac{d\zeta}{\zeta - z'} - \frac{d\overline{\zeta}}{\zeta - \overline{z'}} \right) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(\zeta) d \frac{\overline{\zeta} - \overline{z'}}{\zeta - z'} = A(z'). \quad (6)$$

Пусть теперь $z' \rightarrow t$, где t — точка контура L . По формуле (3) п. 21 мы легко получим:

$$\lim_{z' \rightarrow t} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta - z'} d\zeta = -\frac{1}{2} \overline{\varphi(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta - t} d\zeta,$$

$$\lim_{z' \rightarrow t} \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta - \overline{z'}} d\overline{\zeta} \right) = -\frac{1}{2} \overline{\varphi(t)} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta - t} d\overline{\zeta}.$$

Напомним, что в этих формулах интегралы справа—сингулярные.

Что касается третьего члена формулы (6), то в нём можно перейти к пределу под знаком интеграла.

Действительно, положим $\zeta - z' = r'e^{i\vartheta}$. Тогда

$$d \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}'}{\zeta - z'} = -2ie^{-2i\vartheta} d\vartheta,$$

что представляет собой величину, непрерывную при любом расположении точек z' и ζ , если только контур L — гладкий. Но раз подинтегральная функция непрерывна, можно перейти к пределу под знаком интеграла. Выполнив предельный переход, мы получим интегральное уравнение:

$$\overline{\varphi(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\varphi(\zeta)} d \ln \frac{\bar{\zeta} - \bar{t}}{\zeta - t} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(\zeta) d \frac{\bar{\zeta} - \bar{t}}{\zeta - t} = A(t).$$

Полагая $\zeta - t = re^{i\vartheta}$, мы приведём это уравнение к виду

$$\overline{\varphi(t)} - \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\varphi(\zeta)} d\vartheta - \frac{1}{\pi} \int_L \varphi(\zeta) e^{-2i\vartheta} d\vartheta = A(t). \quad (7)$$

Если контур L гладкий, то $d\vartheta$ будет непрерывной функцией точек t и ζ . Полагая $\varphi(t) = p(t) + iq(t)$ и отделяя в (7) действительные и мнимые части, мы получим систему двух интегральных уравнений типа Фредгольма. Отсюда следует, что для уравнения (7) имеет место альтернатива Фредгольма.

Уравнение (7) было получено Н. И. Мусхелишвили [28b, c], рассуждения которого мы здесь воспроизвели.

Займёмся исследованием уравнения (7). Прежде всего докажем, что любое его решение аналитически продолжимо с контура L во всю область D . Проследив за выводом уравнения (7), мы легко убедимся, что его можно представить в виде

$$\lim_{z' \rightarrow t} \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta} - \bar{z}'} d\bar{\zeta} - \frac{\bar{z}'}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)} + \bar{\zeta} \varphi'(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta \right\} = 0. \quad (8)$$

При этом во втором интеграле под $\psi'(z)$ следует понимать производную от $\varphi(\zeta)$, вычисленную вдоль контура L . Положим теперь

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta &= i\Phi(z'), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)} + \overline{\zeta}\psi'(\zeta) - \overline{f(\zeta)}}{\zeta - z'} d\zeta &= -i\Psi(z'). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Равенство (8) переходит в следующее:

$$\overline{\Phi(t)} + t\Phi'(t) + \Psi(t) = 0. \quad (10)$$

Функции $\Phi(z')$ и $\Psi(z')$ регулярны в D' , и равенство (10) показывает, что они дают решение плоской задачи теории упругости для области D' в предположении, что контур области свободен от действия внешних сил. Но тогда, по теореме о единственности решения плоской задачи¹⁾,

$$\Phi(z') = \alpha z' + \beta, \quad \Psi(z') = -\overline{\beta},$$

где α — действительная, а β — комплексная постоянная. Формулы (9) показывают, что $\Phi(\infty) = \Psi(\infty) = 0$. Но тогда $\alpha = \beta = 0$, и

$$\Phi(z') \equiv 0, \quad \Psi(z') \equiv 0.$$

Первое тождество показывает, что функция $\varphi(\zeta)$, удовлетворяющая уравнению (7), аналитически продолжима внутрь во всю область D ; из второго тождества следует, что в ту же область аналитически продолжима и функция

$$\psi(\zeta) = -\overline{\varphi(\zeta)} - \overline{\zeta}\psi'(\zeta) + \overline{f(\zeta)}.$$

Итак, решив уравнение (7), мы найдём контурные значения обеих искомым функций Гурса. Значения их внутри области можно теперь найти, хотя бы по формуле Коши. Таким образом, решив уравнение (7), мы тем самым решим и задачу теории упругости.

¹⁾ См. Н. И. Мусхелишвили [28а], стр. 111.

Нетрудно, однако, показать, что уравнение (7) в общем случае неразрешимо. В самом деле, если главный момент внешних сил не равен нулю, иначе говоря, если

$$\operatorname{Re} \int_L \overline{f(\zeta)} d\zeta \neq 0,$$

то задача теории упругости не имеет решения. Но тогда не имеет решения и уравнение (7). Соответствующее однородное уравнение

$$\overline{\varphi_0(t)} - \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\varphi_0(\zeta)} d\vartheta - \frac{1}{\pi} \int_L \varphi_0(\zeta) e^{-2i\vartheta} d\zeta = 0 \quad (11)$$

имеет нетривиальное решение. Таким решением, и притом единственным, является функция

$$\varphi_0(t) = \alpha t + \beta \quad (12)$$

(α — действительная, а β — комплексная постоянная), соответствующая плоской задаче теории упругости при отсутствии внешних сил.

Можно указать такое видоизменение уравнения (7), при котором оно делается разрешимым и даёт решение задачи теории упругости, если только главный момент внешних сил, приложенных к контуру L , равен нулю¹⁾.

Поместим начало координат внутри D . К левой части уравнения (7) прибавим выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\overline{\zeta}^2} d\overline{\zeta} \right). \quad (13)$$

Указанное уравнение заменится следующим:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(t)} - \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\varphi(\zeta)} d\vartheta - \frac{1}{\pi} \int_L \varphi(\zeta) e^{-2i\vartheta} d\vartheta + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\overline{\zeta}^2} d\overline{\zeta} \right) = A(t). \quad (14) \end{aligned}$$

¹⁾ См. [37d].

Исследуем уравнение (14). Прежде всего докажем, что всякое его решение аналитически продолжимо во всю область D . Достаточно положить на этот раз

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta = i\Phi(z'),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)} + \bar{\zeta}\varphi'(\zeta) - \overline{f(\zeta)}}{\zeta - z'} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta^2} d\bar{\zeta} \right) = -i\Phi(z').$$

Рассуждая аналогично предыдущему, мы найдём, что

$$\Phi(z') \equiv 0, \quad \Psi(z') \equiv 0.$$

Первое равенство и показывает, что $\varphi(\zeta)$ аналитически продолжима в область D .

Допустим теперь, что главный момент внешних сил, приложенных к контуру L , равен нулю. В таком случае [см. п. 40, формула (3)]

$$\operatorname{Re} \int_L f(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} = 0. \quad (15)$$

Докажем, что при этом условии любое решение уравнения (14) обращает в нуль каждый из интегралов в (13).

Запишем в развёрнутом виде равенство $\Psi(z') = 0$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)} + \bar{\zeta}\varphi'(\zeta) - \overline{f(\zeta)}}{\zeta - z'} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta^2} d\bar{\zeta} \right) = 0. \quad (16)$$

Разложим левую часть в (16) в ряд Лорана вокруг бесконечно удалённой точки и приравняем нулю [в силу тождества (16)] свободный член этого ряда и коэффициент

при $\frac{1}{z}$. Мы получим тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta = 0, \quad (17_1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_L [\overline{\varphi(\zeta)} + \overline{\zeta} \varphi'(\zeta)] d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{f(\zeta)} d\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta^2} d\overline{\zeta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (17_2)$$

Равенство (17₁) показывает, что первый из интегралов в (13) равен нулю. Обратимся к равенству (17₂). Интегрируя по частям, имеем $\int_L \overline{\zeta} \varphi'(\zeta) d\zeta = - \int_L \varphi(\zeta) d\overline{\zeta}$.

Подставим это в (17):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_L (\overline{\varphi(\zeta)} d\zeta - \varphi(\zeta) d\overline{\zeta}) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{f(\zeta)} d\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta^2} d\overline{\zeta} \right) = 0. \end{aligned}$$

Первое слагаемое, очевидно, вещественное; второе, вследствие равенства (15), также вещественное, а третье — чисто мнимое. Но тогда третье слагаемое равно нулю, т. е. равен нулю второй интеграл в (13):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta^2} d\overline{\zeta} \right) = 0. \quad (17_3)$$

Докажем теперь, что уравнение (14) разрешимо, какова бы ни была его правая часть. В соответствии с альтернативой Фредгольма, достаточно доказать, что однородное уравнение

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_0(t)} - \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\varphi_0(\zeta)} d\vartheta - \frac{1}{\pi} \int_L \varphi_0(\zeta) e^{-2i\vartheta} d\vartheta + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + \frac{\overline{\varphi_0(\zeta)}}{\zeta^2} d\overline{\zeta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

имеет только тривиальное решение $\varphi_0(t) \equiv 0$.

Уравнение (18) получается из (14) при $f(\zeta) \equiv 0$. Условие (15) здесь, очевидно, выполнено, и потому для любого решения уравнения (18) имеют место равенства (17₁) и (17₂). Последние два члена в (18) пропадают, и это уравнение совпадает с (11). Решение его даётся тогда формулой (12). Подставив теперь выражение (12) в (17₁) и (17₂) и вспоминая, что α — действительное число, мы найдём, что $\alpha = \beta = 0$ и, следовательно, $\varphi_0(t) \equiv 0$. Тем самым разрешимость уравнения (14) доказана.

Пусть теперь выполнено условие (15), необходимое для того, чтобы задача теории упругости имела решение. Нетрудно показать, что тогда решение уравнения (14) приводит к решению нашей задачи. В самом деле, функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая уравнению (14), обращает в нуль выражение (13). Тогда уравнение (14) переходит в (7), относительно которого доказано, что его решение приводит к решению задачи теории упругости.

Относительно изложенного в этом пункте метода сделаем следующие замечания:

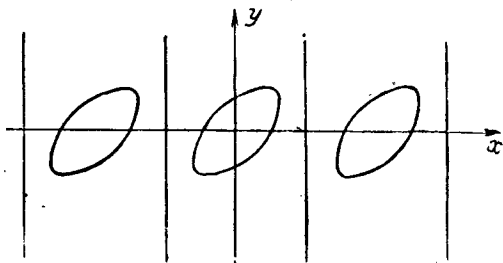
1. Вид интегральных уравнений (7) и (14) не меняется при переходе к многосвязным областям. Однако исследование этого уравнения резко усложняется. Подробный анализ для случая многосвязных областей содержится в цитированной статье Д. И. Шермана [37d].

2. Если контур L имеет угловые точки, то уравнения (7) и (14) не сводятся к фредгольмовским. Несмотря на это, теоремы Фредгольма остаются в силе для этих уравнений. Подробно об этом см. статью Л. Г. Магнарадзе [26a].

В своих статьях [37f,g] Д. И. Шерман применил метод интегралов типа Коши также и к случаям неоднородных и неанзотропных упругих сред.

52. Упругая плоскость с бесконечным рядом вырезов. Применение интегралов типа Коши позволяет решить следующую интересную задачу. Пусть упругая среда заполняет всю плоскость, за исключением бесконечного ряда одинаковых и периодически расположенных вырезов (черт. 14). Допустим далее, что все эти вырезы подвержены действию одинаковых внешних сил. Поставим задачу об определении напряжений в упругой среде при указанных условиях.

Примем, что главный вектор внешних сил, приложенных к каждому вырезу в отдельности, равен нулю. Как обычно, задача сводится к определению аналитических



Черт. 14.

функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющих на каждом вырезу условию

$$\varphi(\zeta) + \zeta \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta) + C, \quad (1)$$

где $f(\zeta)$ — заданная функция. Очевидно, что на всех контурах вырезов $f(\zeta)$ принимает в соответствующих точках одинаковые значения. Что касается постоянной C , то, как мы увидим ниже, она имеет одно и то же значение на всех контурах.

Напряжения и смещения в нашей задаче суть периодические функции от x с периодом a . Выясним, как изменяются $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ при замене x на $x+a$ или, что то же, при замене z на $z+a$.

Вспользуемся формулами (5), (6) и (7) п. 37:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \{ \varphi'(z) \}, \quad (5,37)$$

$$\sigma_y = \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 [\overline{z\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}], \quad (6,37)$$

$$2\mu(u_x + iu_y) = x\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \quad (7,37)$$

Первая из написанных формул показывает, что $\operatorname{Re} \{ \varphi'(z) \}$ не меняется при замене z на $z+a$. Отсюда следует, что $\varphi''(z)$ имеет период a . Действительно, пусть $\operatorname{Re} \{ \varphi'(z) \} = p(x, y)$. Тогда $p(x+a, y) = p(x, y)$. Дифференцируя это тождество, имеем

$$\frac{\partial p(x+a, y)}{\partial x} = \frac{\partial p(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial p(x+a, y)}{\partial y} = \frac{\partial p(x, y)}{\partial y}.$$

Далее

$$\psi''(z) = \frac{\partial p}{\partial x} - i \frac{\partial p}{\partial y},$$

и периодичность $\psi''(z)$ непосредственно следует из только что написанных тождеств.

Интегрируя тождество

$$\psi''(z+a) \equiv \psi''(z),$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \psi'(z+a) &= \psi'(z) + i\alpha, \\ \psi(z+a) &= \psi(z) + i\alpha z + \beta, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где α и β — некоторые постоянные. Постоянная α необходимо действительная, так как действительная часть $\psi'(z)$ не меняется при замене z на $z+a$.

Обратимся к формуле (6) п. 37. При замене z на $z+a$ её левая часть не изменяется. Отсюда

$$(\bar{z}+a)\psi''(z+a) + \psi'(z+a) = \bar{z}\psi''(z) + \psi'(z),$$

и, в силу периодичности функции $\psi''(z)$,

$$\psi'(z+a) = \psi'(z) - \alpha\psi''(z).$$

Интегрируя последнее равенство, найдём:

$$\psi(z+a) = \psi(z) - \alpha\psi'(z) + \gamma, \quad (3)$$

где γ — некоторая постоянная.

Заменим теперь z на $z+a$ в формуле (7) п. 37 и подставим вместо $\psi(z+a)$, $\psi'(z+a)$ и $\psi(z+a)$ их значения из (2) и (3). Используя периодичность смещений, мы легко найдём, что $\alpha=0$ и $\gamma=\beta a$. Таким образом, $\psi'(z)$ имеет период a , а $\psi(z)$ изменяется на постоянную β . Изменение $\psi(z)$ даёт формулой (3).

Положим

$$\varphi_0(z) = \psi(z) - \beta z, \quad (4)$$

$$\psi_0(z) = \psi(z) + \alpha\psi'(z) - \bar{\beta}az. \quad (5)$$

Функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, очевидно, периодические, с периодом a , и формулы (4) и (5) дают выражение $\psi(z)$ и $\psi'(z)$ через две периодические функции.

Нетрудно показать, что члены, содержащие постоянную β , определяют равномерное всестороннее растяжение или сжатие, величина которого равна $\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\beta)$. Если мы примем, что при $y \rightarrow \infty$ напряжения стремятся к нулю, то необходимо положить $\operatorname{Re}(\beta) = 0$. Мнимую часть β также можно считать равной нулю, потому что она не влияет на напряжения. Окончательно $\beta = 0$, и мы имеем

$$\varphi(z) = \varphi_0(z), \quad \psi(z) = \psi_0(z) - z\varphi_0'(z), \quad (6)$$

где $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ — периодические функции с периодом a . Мы будем считать их ограниченными при $y \rightarrow \pm\infty$, тогда при $y \rightarrow \pm\infty$ напряжения будут стремиться к нулю.

Заменяя в (1) функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ по формулам (6), мы получим контурное условие для новых функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$:

$$\varphi_0(\zeta) + (\zeta - \bar{\zeta}) \overline{\varphi_0'(\zeta)} + \overline{\psi_0(\zeta)} = f(\zeta) + C.$$

Так как все слагаемые, входящие в последнее равенство, — периодические, то C имеет одно и то же значение на всех контурах. Мы можем теперь, пользуясь произволом в определении C , положить $C = 0$. Окончательно задача сводится к нахождению периодических функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, удовлетворяющих контурному условию:

$$\varphi_0(\zeta) + (\zeta - \bar{\zeta}) \overline{\varphi_0'(\zeta)} + \overline{\psi_0(\zeta)} = f(\zeta). \quad (7)$$

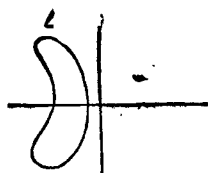
Обычным способом можно доказать, что с точностью до постоянных слагаемых $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ определяются единственным образом.

Положим теперь

$$e^{\frac{2\pi iz}{a}} = t, \quad z = \frac{a}{2\pi i} \ln t. \quad (8)$$

Преобразование (8) переводит полосу $0 < \operatorname{Re}(z) < a$ в плоскость t , разрезанную вдоль действительной положительной полуоси, а вырез, расположенный в указанной полосе, — в некоторую конечную область, не содержащую начала координат (черт. 15). Через L обозначим контур

этой области. Функция $\Phi(t) = \varphi_0 \left(\frac{a}{2\pi i} \ln t \right)$ регулярна в разрезанной t -плоскости вне контура L . Но, будучи периодической относительно z , эта функция принимает одинаковые значения в геометрически совпадающих точках разреза и, следовательно, непрерывным образом продолжима через разрез. Но тогда, как известно¹⁾, она аналитически продолжима через разрез и регулярна во всей области плоскости t , лежащей вне L . То же, конечно, относится и к функции



Черт. 15,

функции $\Psi(t) = \psi_0 \left(\frac{a}{2\pi i} \ln t \right)$. Дело сводится, таким образом, к нахождению двух функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$, регулярных вне L . Контурное условие для этих функций мы получим, положив в (7) $\xi = \frac{a}{2\pi i} \ln \tau$:

$$\Phi(\tau) - 2\bar{\tau} \ln |\tau| \overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = F(\tau), \quad F(\tau) = f \left(\frac{a}{2\pi i} \ln \tau \right). \quad (9)$$

Было отмечено, что $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ определяются с точностью до постоянного слагаемого. Зафиксируем это слагаемое требованием, чтобы $\Psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Для решения нашей задачи применим тот же приём, что и в предыдущем пункте. В равенстве (9) заменим все члены сопряжёнными; далее, умножим его на $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\tau}{\tau - t'}$, где t' — точка внутри L , и проинтегрируем по L . Мы получим тогда:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\Phi(\tau)}}{\tau - t'} d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\tau \ln |\tau| \overline{\Phi'(\tau)}}{\tau - t'} d\tau &= A(t'), \\ A(t') &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\tau)}{\tau - t'} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Так как функция $\Phi(t)$ регулярна вне L , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi(\tau)}{\tau - t'} d\tau = \Phi(\infty).$$

¹⁾ См., например, И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного.

Пусть c — фиксированная точка внутри L . Положим в последнем тождестве $t' = c$. Вычитая, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi(\tau)}{\tau - t'} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi(\tau)}{\tau - c} d\tau = 0. \quad (11)$$

Дифференцируя и затем интегрируя по частям, мы получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi'(\tau)}{\tau - t'} d\tau = 0. \quad (12)$$

В тождестве (11) заменим все члены сопряжёнными, тождество (12) умножим на $-2t' \ln |t'|$ и оба результата сложим с (10). Интеграл, содержащий $\Phi'(\tau)$, возьмём по частям. Наконец, к левой части уравнения прибавим величину $\frac{i}{2\pi} \overline{\ln t'} \operatorname{Re} \left\{ \int_L \frac{\Phi(\tau)}{(\tau - c)^2} d\tau \right\}$. Полагая, далее, что $t' \rightarrow \tau_0$, где τ_0 — точка контура L , мы получим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \overline{\Phi(\tau_0)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\Phi(\tau)} d \ln \frac{\tau - \tau_0}{\tau - \tau_0} - \frac{2}{\pi i} \int_L \Phi(\tau) d \frac{\tau \ln |\tau| - \tau_0 \ln |\tau_0|}{\tau - \tau_0} + \\ + \frac{i}{2\pi} \overline{\ln t'} \operatorname{Re} \left\{ \int_L \frac{\Phi(\tau)}{(\tau - c)^2} d\tau \right\} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\Phi(\tau)}}{\tau - c} d\tau = A(\tau_0), \quad (13) \end{aligned}$$

эквивалентное системе двух уравнений Фредгольма¹⁾.

Мы не станем здесь анализировать уравнение (13), — это делается почти буквально так же, как в предыдущем пункте, — и сформулируем только результат:

1. Функция $\Phi(\tau_0)$, удовлетворяющая уравнению (13), аналитически продолжима во всю внешность кривой L ; при этом она на бесконечности ограничена.

2. Если $\Phi(\tau_0)$ удовлетворяет уравнению (13), то функция

$$\Psi(\tau_0) = \overline{F(\tau_0)} - \overline{\Phi(\tau_0)} + 2\tau \ln |\tau_0| \Phi'(\tau_0) \quad (14)$$

аналитически продолжима во всю внешность кривой L и равна нулю на бесконечности.

¹⁾ Мы получим эту систему, если отделим в (13) действительные и мнимые части и введём в качестве неизвестных

$$\operatorname{Re} \{ \Phi(\tau_0) \} \text{ и } \operatorname{Im} \{ \Phi(\tau_0) \}.$$

3. Уравнение (13) разрешимо, какова бы ни была функция $F(t)$.

Из сказанного ясно, что функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$, определяемые уравнениями (13) и (14) и последующим аналитическим продолжением, решают поставленную нами задачу.

53. Уравнения Лауричелла. Метод интегральных уравнений в плоской задаче теории упругости был впервые применён в 1908 г. Лауричелла (*G. Lauricella*) [23]. Однако, его уравнения и особенно их вывод были довольно громоздки и неудобны. Д. И. Шерман [37] представил уравнения Лауричелла в комплексной форме и дал новый, гораздо более простой, их вывод. В новой форме эти уравнения оказались сравнительно простыми — проще уравнений Н. И. Мусхелишвили (п. 51), чрезвычайно близких к ним.

В этом пункте мы воспроизведём вывод Д. И. Шермана, ограничиваясь случаем односвязной конечной области.

В этом случае задача состоит, как мы уже знаем, в определении двух функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, регулярных в области D , заполненной упругой средой, и удовлетворяющих на контуре L этой области условию

$$\varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta), \quad (1)$$

где $f(\zeta)$ — заданная непрерывная функция, которую мы будем считать достаточно гладкой. Напомним, что $f(\zeta)$ необходимо удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \int_L f(\zeta) d\zeta = 0, \quad (2)$$

выражающему, что главный момент внешних сил, приложенных к L , равен нулю.

Будем искать $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в виде интегралов типа Коши следующего вида:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (3)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\zeta \overline{\omega(\zeta)}}{(\zeta - z)^2} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\zeta) d\bar{\zeta}}{\zeta - z}, \quad (4)$$

где $\omega(\zeta)$ — неизвестная функция, которая должна быть определена на контуре L .

Составим из (3) и (4) выражение $\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$ и устремим z к некоторой точке t контура L . Пользуясь формулами предельных значений интегралов типа Коши, мы сразу получим интегральное уравнение для неизвестной $\omega(t)$ ¹⁾:

$$\omega(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(\zeta) d \ln \frac{\zeta-t}{\bar{\zeta}-\bar{t}} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(\zeta)} d \frac{\zeta-t}{\bar{\zeta}-\bar{t}} = f(t). \quad (5)$$

Это и есть уравнение Лауричелла в комплексной форме.

Можно доказать, что уравнение (5) в общем случае неразрешимо. Чтобы сделать его разрешимым, прибавим к его левой части величину

$$b \left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{\bar{t}-\bar{a}} + \frac{t-a}{(\bar{t}-\bar{a})^2} \right),$$

где a — внутренняя точка области D и

$$b = \frac{1}{\pi i} \operatorname{Re} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta-a)^2} d\zeta. \quad (6)$$

Положим ещё $\zeta - t = re^{i\theta}$. Уравнение (6) заменяется следующим:

$$\begin{aligned} \omega(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \omega(\zeta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\omega(\zeta)} e^{2i\theta} d\theta + \\ + \left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{\bar{t}-\bar{a}} + \frac{t-a}{(\bar{t}-\bar{a})^2} \right) \frac{1}{\pi i} \operatorname{Re} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta-a)^2} d\zeta = f(t). \quad (7) \end{aligned}$$

Исследуем уравнение (7). Докажем прежде всего, что всякое его решение обращает в нуль величину b . С этой целью вернёмся к функциям $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

Продельвая в обратном порядке выкладки, которые нас привели к уравнению (5), мы представим (7) в виде

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} + b \left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{\bar{t}-\bar{a}} + \frac{t-a}{(\bar{t}-\bar{a})^2} \right) = f(t).$$

¹⁾ Мы опускаем здесь детали преобразований, так как они почти буквально совпадают с преобразованиями в п. 51.

Умножим теперь это равенство на $d\bar{t}$ и проинтегрируем по L . После несложных преобразований мы получим

$$\int_L (\varphi(t) d\bar{t} - \overline{\varphi(t)} dt) + b \int_L \left(\frac{d\bar{t}}{t-a} + \frac{dt}{\bar{t}-\bar{a}} \right) + 2\pi i b = \int_L f(t) d\bar{t}.$$

Из (6) видно, что величина b — чисто мнимая. Тогда, очевидно, действительная часть слева в последнем равенстве есть $2\pi i b$, справа же она равна нулю по условию (2). Таким образом, $b = 0$.

Из доказанного следует, что всякое решение уравнения (7) удовлетворяет, вместе с тем, уравнению (5). Подставив указанное решение в (3) и (4), мы придём к решению задачи теории упругости.

Докажем теперь, что уравнение (7) разрешимо. В соответствии с альтернативой Фредгольма, достаточно доказать, что однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Положим $f(t) \equiv 0$. Мы придём тогда к однородному уравнению

$$\begin{aligned} \omega_0(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \omega_0(\zeta) d\bar{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\omega_0(\zeta)} e^{2i\vartheta} d\bar{\zeta} + \\ + \frac{1}{\pi i} b_0 \left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{\bar{t}-\bar{a}} + \frac{t-a}{(\bar{t}-\bar{a})^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$b_0 = \frac{1}{\pi i} \operatorname{Re} \int_L \frac{\omega_0(\zeta)}{(\zeta-a)^2} d\zeta. \quad (9)$$

По доказанному, $b_0 = 0$. Положим теперь, в соответствии с формулами (3) и (4),

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_0(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta, \quad (10)$$

$$\psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega_0(\zeta)}}{\zeta-z} d\bar{\zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{\zeta} \omega_0(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_0(\zeta) d\bar{\zeta}}{\zeta-z}. \quad (11)$$

Из уравнения (8) мы получим, учтя, что $b_0 = 0$:

$$\varphi_0(t) + t \overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = 0.$$

Последнее равенство показывает, что $\varphi_0(t)$ и $\psi_0(t)$ решают плоскую задачу теории упругости в предположении, что контур L свободен от напряжений. По теореме единственности,

$$\varphi_0(z) = \alpha z + \beta, \quad \psi_0(z) = -\overline{\beta},$$

где α — действительная, а β — комплексная постоянная.

Нетрудно видеть, что $\alpha = 0$. Действительно, $b_0 = 0$. Но из (9) и (10) следует, что

$$0 = b_0 = 2i \operatorname{Im} \{ \varphi_0'(a) \} = 2i\alpha.$$

Таким образом,

$$\varphi_0(z) = \beta, \quad \psi_0(z) = -\overline{\beta}.$$

В выражении (11) второй интеграл возьмём по частям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\zeta} \omega_0(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{d(\overline{\zeta} \omega_0(\zeta))}{\zeta - z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\zeta} \omega_0'(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_0(\zeta) d\overline{\zeta}}{\zeta - z}. \end{aligned}$$

Подставим это в (11):

$$\psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega_0(\zeta)} - \overline{\zeta} \omega_0'(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (11_1)$$

Имея в виду значения $\varphi_0(z) = \beta$ и $\psi_0(z) = -\overline{\beta}$, мы получим из (9) и (11₁):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_0(\zeta) - \beta}{\zeta - z} d\zeta \equiv 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega_0(\zeta)} - \overline{\zeta} \omega_0'(\zeta) + \overline{\beta}}{\zeta - z} d\zeta \equiv 0.$$

Отсюда видно, что $\omega_0(\zeta) - \beta$ и $\overline{\omega_0(\zeta)} - \overline{\zeta} \omega_0'(\zeta) + \overline{\beta}$ суть контурные значения аналитических функций, регулярных вне L и равных нулю на бесконечности. Обозначим их через $i\delta(z)$ и $i\varepsilon(z)$, так что

$$\left. \begin{aligned} i\delta(\zeta) &= \omega_0(\zeta) - \beta, \\ i\varepsilon(\zeta) &= \overline{\omega_0(\zeta)} - \overline{\zeta} \omega_0'(\zeta) + \overline{\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Исключим из этих равенств $\omega_0(\zeta)$:

$$\overline{\delta(\zeta)} + \overline{\zeta} \delta'(\zeta) + \varepsilon(\zeta) + 2i\bar{\beta} = 0.$$

Функции $\delta(z)$ и $\varepsilon(z) + 2i\bar{\beta}$ дают решение однородной (т. е. при отсутствии внешних сил) задачи теории упругости для области, лежащей вне L . По теореме единственности, $\delta(z) = i\alpha'z + \beta'$, $\varepsilon(z) + 2i\bar{\beta} = -\bar{\beta}'$. Но $\delta(z)$ регулярна вне L и равна нулю на бесконечности. Отсюда $\alpha' = \beta' = 0$, $\delta(z) \equiv 0$, и так как $\varepsilon(\infty) = 0$, то $\beta = 0$. Теперь из (12) следует, что $\omega_0(\zeta) = i\bar{\delta}(\zeta) + \beta \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Несколько слов скажем об уравнении (5) Лауричелла. Мы уже отметили, что в общем случае оно неразрешимо. Нетрудно, однако, доказать (на чём мы не останавливаемся), что условие (2) необходимо и достаточно для его разрешимости.

Применим уравнение (5) к случаю, когда область D ограничена эллипсом [371]. Пусть параметрические уравнения этого эллипса будут

$$\xi = a \cos \theta, \quad \eta = b \sin \theta, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Положим

$$\zeta = \frac{c}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right), \quad (13)$$

где $\sigma = \rho e^{i\varphi}$, а постоянные ρ ($\rho > 1$) и c определены равенствами

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}; \quad \rho = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$$

Преобразование (13) переводит эллипс в окружность $|\sigma| = \rho$. Эту окружность обозначим буквой γ . Положим ещё

$$t = \frac{c}{2} \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right). \quad (14)$$

Подставим (13) и (14) в (5); обозначим также

$$\omega(\zeta) = \omega^*(\sigma), \quad f(t) = f^*(\tau).$$

мы придём тогда к уравнению

$$\omega^*(\tau) + \frac{1}{2\pi l} \int_{\gamma} \omega^*(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \frac{1}{\tau}} - \frac{1}{2\pi l} \int_{\gamma} \omega^*(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \frac{\rho^4}{\tau}} -$$

$$- \frac{\rho^4 - 1}{2\pi l} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega^*(\sigma)}}{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma - \frac{\rho^4}{\tau}} = f^*(\tau). \quad (15)$$

Разложим $\omega^*(\tau)$ и $f^*(\tau)$ в ряды Фурье, или, что то же, в ряды по степеням τ , и пусть

$$\omega^*(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \tau^k, \quad f^*(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \tau^k.$$

Подставим это в (15) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях τ . Мы получим тогда систему уравнений с неизвестными a_k :

$$2a_0 = A_0,$$

$$a_k + a_{-k} \rho^{-4k} + (\rho^4 - 1) k \bar{a}_{-k} \rho^{-2(k+1)} = A_k,$$

$$a_k + a_{-k} = A_{-k}; \quad k=1, 2, \dots$$

Первое уравнение определяет a_0 . Из двух других исключим a_{-k} . Мы получим тогда уравнение с одной неизвестной a_k :

$$(1 - \rho^{-4k}) a_k + \rho^{-2(k+1)} (\rho^4 - 1) k \bar{a}_k = A_k - \rho^{-4k} A_{-k}.$$

Отсюда можно найти a_k для всех значений k , кроме $k=1$. При $k=1$ последнее уравнение даёт

$$a_1 + \bar{a}_1 = \frac{A_1 - \rho^{-4} A_{-1}}{1 - \rho^{-4}}.$$

Первая часть последнего равенства должна быть действительной. Можно легко проверить, что это последнее условие совпадает с условием (2). Считая его выполненным, мы найдём:

$$\operatorname{Re}(a_1) = \frac{1}{2} \frac{A_1 - \rho^{-4} A_{-1}}{1 - \rho^{-4}}.$$

Мнимую часть a_1 можно выбрать произвольно.

Зная a_k при $k > 1$, мы найдём a_{-k} по формуле

$$a_{-k} = A_{-k} - a_k.$$

Теперь $\omega^*(\sigma) = \omega(\zeta)$ известна. Займёмся вычислением $\varphi(z)$. Положим в формуле (3)

$$z = \frac{c}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right), \quad \zeta = \frac{c}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right).$$

Так как z лежит внутри L , то, как нетрудно убедиться, $1 < |\lambda| < \rho$. Формула (3) даёт тогда

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega^*(\sigma)(\sigma^2 - 1)}{\sigma(\sigma - \lambda) \left(\sigma - \frac{1}{\lambda} \right)} d\sigma = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{a_k}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma^{k-1}(\sigma^2 - 1)}{(\sigma - \lambda) \left(\sigma - \frac{1}{\lambda} \right)} d\sigma. \end{aligned}$$

При $k < 0$ подинтегральные функции регулярны вне γ и обращаются в нуль на бесконечности, как σ^{k-1} . По известной теореме Коши, соответствующие интегралы равны нулю. При $k=0$ подинтегральная функция также регулярна вне γ , но на бесконечности её вычет равен единице. Соответствующий интеграл равен единице. Наконец, при $k > 0$ подинтегральная функция имеет внутри γ простые полюсы $\sigma = \lambda$ и $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ с вычетами λ^k и λ^{-k} соответственно. Это даёт нам

$$\varphi(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\lambda^k + \lambda^{-k}).$$

Выражая λ через z , мы получим разложение $\varphi(z)$ в ряд по полиномам:

$$\varphi(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{c^k} [(z + \sqrt{z^2 - c^2})^k + (z - \sqrt{z^2 - c^2})^k]. \quad (16)$$

54. Задача Дирихле для колебательного уравнения. Колебательное уравнение

$$\Delta U + k^2 U = 0 \quad (1)$$

(Δ — оператор Лапласа) играет большую роль во многих вопросах математической физики. В частности, оно фигурирует в задаче о стационарных электромагнитных колебаниях. Мы рассмотрим здесь задачу Дирихле для

уравнения (1), причём ограничимся случаем плоской одно-
связной конечной области. Более общую постановку про-
блем, относящихся к колебательному уравнению, читатель
найдёт в работах В. Д. Купрадзе [20] и В. Штернберга [38].

Нетрудно видеть, что при некоторых k задача Дирихле
для уравнения (1) неразрешима. Чтобы доказать это, за-
метим следующее. Пусть $f(\sigma)$ (σ — длина дуги) есть зна-
чение функции $U(x, y)$ на контуре L области D . Задача
Дирихле состоит в определении функции $U(x, y)$, удо-
влетворяющей данному уравнению (1), по значениям $f(\sigma)$.
Пусть $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина области D . По фор-
муле Грина

$$U(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_D \Delta U(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_L f(\sigma) \frac{\partial G}{\partial \nu} d\sigma,$$

или, в силу уравнения (1),

$$U(x, y) - \frac{k^2}{2\pi} \iint_D G(x, y; \xi, \eta) U(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_L f(\sigma) \frac{\partial G}{\partial \nu} d\sigma. \quad (2)$$

Равенство (2) есть интегральное уравнение типа Фред-
гольма для неизвестной $U(x, y)$ с параметром $\frac{k^2}{2\pi}$ и с яд-
ром $G(x, y; \xi, \eta)$. Ядро это симметричное и невырожден-
ное, поэтому существует бесконечное множество харак-
теристических значений λ или, что то же, значений k^2 ,
для которых уравнение (2) неразрешимо. Эти значения
 k^2 — действительные. Докажем, что они положительные
(и, следовательно, значения k — действительные). Пусть
 $\lambda_n = \frac{k_n^2}{2\pi}$ — характеристическое число и $U_n(x, y)$ — соот-
ветствующая собственная функция. По определению, имеет
место тождество

$$U_n(x, y) - \frac{k_n^2}{2\pi} \iint_D G(x, y; \xi, \eta) U_n(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0. \quad (3)$$

Сравнивая это с уравнением (2), мы видим, что $U_n(x, y)$

обращается в нуль на контуре L , а внутри области удовлетворяет уравнению

$$\Delta U_n + k_n^2 U_n = 0. \quad (4)$$

По формуле Грина

$$\begin{aligned} & \iint_D U_n \Delta U_n \, dx \, dy = \\ & = - \iint_D \left[\left(\frac{\partial U_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_n}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy + \int_L U \frac{\partial U}{\partial \nu} \, ds. \end{aligned}$$

Но контурный интеграл равен нулю, так как $U=0$ на L . Далее, $\Delta U_n = -k_n^2 U_n$. Теперь из последнего равенства следует

$$k_n^2 = \frac{\iint_D \left[\left(\frac{\partial U_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_n}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy}{\iint_D U_n^2(x, y) \, dx \, dy} > 0.$$

То обстоятельство, что числа k_n — действительные, просто интерпретируется физически: k_n есть величина, пропорциональная частоте собственных колебаний среды, заполняющей область D .

Мы будем здесь рассматривать задачу Дирихле, предполагая, что $k \neq k_n$.

Один из способов решения задачи Дирихле нами, в сущности, уже указан. Именно, эта задача сведена к интегральному уравнению (2). Этим уравнением удобно пользоваться, если известны функция Грина и её собственные функции $U_n(x, y)$; в этом случае уравнение (2) решается по способу п. 19. Однако, областей, для которых собственные функции $U_n(x, y)$ построены, немного, и в общем случае полезно иметь интегральное уравнение с более простым ядром.

Такое уравнение можно построить с помощью так называемого обобщённого потенциала двойного слоя

$$U(x, y) = \int_L \mu(\tau) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{1}{2l} H_0^{(2)}(kr) \right] d\tau, \quad (5)$$

где $H_0^{(2)}$ — функция Ганкеля второго рода¹⁾, r — расстояние

¹⁾ См., например, Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции.

от точки (x, y) до точки σ контура и ν — внешняя нормаль к контуру. Обозначим, как обычно, индексами i и e пределы при стремлении к контуру изнутри или, соответственно, извне области D . Тогда можно доказать, что справедливы формулы, известные для логарифмического потенциала:

$$\left. \begin{aligned} U_i(x, y) &= -\mu(s) + \int_L \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{1}{2i} H_0^{(2)}(kr) \right] d\sigma, \\ U_e(x, y) &= \mu(s) + \int_L \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{1}{2i} H_0^{(2)}(kr) \right] d\sigma, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_i &= \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_e. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Здесь через s обозначена точка контура, к которой стремится точка (x, y) , и через n — внешняя нормаль к контуру в точке s . Далее, как внутри, так и вне L $U(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1).

Если мы будем искать решение задачи Дирихле в виде потенциала (5), то формула (6) приведёт нас к интегральному уравнению типа Фредгольма относительно $\mu(s)$:

$$\mu(s) - \int_L \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{1}{2i} H_0^{(2)}(kr) \right] d\sigma = -f(s). \quad (7)$$

Подробное исследование, которого мы здесь не приводим, показывает, что, помимо значений k_n , для которых задача Дирихле не имеет решения, существуют ещё исключительные значения $k = k'_n$, при которых неразрешимо уравнение (7). Решение задачи Дирихле для значений k'_n также может быть получено с помощью потенциалов. Изложение этих вопросов читатель найдёт в уже цитированных статьях В. Д. Купрадзе. Мы здесь отметим только, что числа k'_n — действительные. Отсюда, в частности, следует, что интегральное уравнение (7) разрешимо при всех комплексных значениях k .

В случае действительного k можно построить интегральное уравнение, решающее задачу Дирихле для уравнения (1) и имеющее решение при всех $k \neq k_n$, т. е. при всех k , для которых сама задача Дирихле разрешима. Вывод этих уравнений основан на формуле, дающей об-

щий вид интеграла уравнения (1)¹). Эта формула при k действительном имеет следующий вид:

$$U(x, y) = \varphi(z) + \overline{\varphi(\bar{z})} + \int_0^z H(z, \bar{z}, \lambda, k) \varphi(\lambda) d\lambda + \\ + \int_0^{\bar{z}} H(\bar{z}, z, \lambda, k) \overline{\varphi(\lambda)} d\lambda. \quad (8)$$

Здесь $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\varphi(z)$ — аналитическая функция; наконец,

$$H(z, \bar{z}, \lambda, k) = -\frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{\bar{z}}{z-\lambda}} J_1(k \sqrt{\bar{z}(z-\lambda)}); \quad (9)$$

J_1 — функция Бесселя первого рода индекса 1.

Мы решим, очевидно, задачу Дирихле, если найдём функцию $\varphi(z)$, входящую в формулу (8). Будем искать эту функцию в виде интеграла типа Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (10)$$

плотность которого будем считать действительной. Повторяя рассуждения п. 28, мы придём к интегральному уравнению

$$\mu(t) + \int_L K(t, \zeta) \mu(\zeta) d\zeta = 2f(s). \quad (11)$$

Здесь

$$K(t, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos(\nu, r)}{r} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_0^t \frac{H(t, \bar{t}, \lambda, k)}{\zeta - \lambda} d\lambda \right\}. \quad (12)$$

Далее, t — точка контура L , соответствующая значению s параметра, $r = |t - \zeta|$ и ν — направление внешней нормали к L в точке ζ . Повторяя рассуждения п. 28, мы легко докажем, что при $k \neq k_n$ уравнение (11) разрешимо. Найдя из этого уравнения $\mu(t)$, мы с помощью формул (10) и (9) получим решение нашей задачи.

55. Тепловые потенциалы и их применение. В этом пункте мы будем заниматься уравнением теплопроводности. Огра-

¹) Вывод этой формулы см. в [10]. Мы несколько изменили обозначения указанной статьи.

ничиваясь случаем, когда температура зависит, кроме времени, только от двух координат, мы можем уравнение теплопроводности записать в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (1)$$

Простейшая краевая задача, связанная с этим уравнением, следующая: найти интеграл уравнения (1), непрерывный вместе со своими первыми и вторыми производными во всех точках (x, y) некоторой области D и во все моменты времени, следующие за начальным. Искомый интеграл должен удовлетворять условиям:

а) начальному

$$\text{при } t=0 \quad U=F(x, y); \quad (2)$$

б) краевому

$$\text{на контуре } L \text{ области } D \quad U=f(s, t). \quad (3)$$

Мы будем называть эту задачу задачей Дирихле для уравнения (1).

Данные функции $F(x, y)$ и $f(s, t)$ мы будем считать достаточно гладкими.

К сформулированной только что задаче сводится, например, исследование движения вязкой жидкости в длинной трубе постоянного сечения.

Будем считать, что скорости частиц жидкости направлены вдоль трубы. Таким образом, если мы направим ось z параллельно трубе, то отлична от нуля только составляющая скорости по направлению z . Далее, мы примем, что указанная скорость не зависит от z . Тогда, как известно¹⁾, указанная скорость удовлетворяет уравнению (1). Очевидно, что её достаточно определить в одном каком-либо сечении трубы. Это сечение и будет областью D . Чтобы определить скорости в любой момент времени, необходимо задать их распределение в начальный момент. Обозначив через $F(x, y)$ скорость в точке (x, y) при $t=0$, мы приходим к условию (2). Далее, вязкая жидкость прилипает к стенкам трубы. Отсюда следует, что на контуре

¹⁾ См. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. II.

сечения скорость равна нулю; краевое условие (3) в нашем случае принимает вид:

$$\text{на } L \quad U(s, t) = 0.$$

Сформулированную нами выше краевую задачу можно свести к некоторому интегральному уравнению, если воспользоваться так называемыми тепловыми потенциалами. Мы перечислим вкратце их определение и основные свойства; подробное изложение теории тепловых потенциалов можно найти, например, в [6].

Обозначим через σ значение параметра, определяющего положение точки на L , а также и самую точку; через ν обозначим внешнюю нормаль к L в точке σ . Далее, через r обозначим расстояние от точки σ до точки (x, y) ; отрезок, соединяющий их, будем считать направленным от точки σ к точке (x, y) .

Пусть $\mu(\sigma, t)$ — функция, определённая, когда $t \geq 0$ и σ лежит на L . Мы будем считать, что $\mu(\sigma, t) = 0$ при $t = 0$ и что она достаточно гладкая. Тепловым потенциалом двойного слоя мы будем называть интеграл

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{t - \tau} \frac{\partial}{\partial \nu} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma, \quad (4)$$

определённый для точек, лежащих как внутри, так и вне контура L . Потенциал (4) можно также представить в виде

$$U(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\nu, r) d\sigma. \quad (5)$$

Для этого достаточно выполнить дифференцирование под знаком интеграла.

Функция $\mu(\sigma, \tau)$ называется плотностью потенциала. Отметим следующие свойства потенциала (4).

1) Как внутри, так и вне L $U(x, y)$ непрерывна вместе со своими производными любого порядка и удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности [уравнению (1)].

2) При $t = 0$ потенциал (4) равен нулю.

3) Если точка (x, y) стремится к точке σ контура, то потенциал (4) стремится к предельным значениям, которые

определяются формулами

$$W_i = -\mu(s, t) + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\nu, r) d\sigma, \quad (6)$$

$$W_e = \mu(s, t) + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\nu, r) d\sigma. \quad (7)$$

4) Нормальная производная потенциала (4) непрерывна при переходе через контур.

Займёмся решением задачи Дирихле для теплового уравнения. Нетрудно найти интеграл этого уравнения, удовлетворяющий начальному условию (2): для этого достаточно определить $F(x, y)$ на всей плоскости (x, y) , полагая, например, $F(x, y) = 0$ вне L , и тогда указанное частное решение даётся известной формулой

$$U_0(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta) e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}} d\xi d\eta,$$

или, учитывая, что $F(x, y) = 0$ вне L ,

$$U(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_D F(\xi, \eta) e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}} d\xi d\eta. \quad (8)$$

Решение задачи Дирихле будем искать в виде

$$U(x, y, t) = U_0(x, y, t) + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\nu, r) d\sigma. \quad (9)$$

Из свойств (1) и (2) теплового потенциала двойного слоя следует, что функция (9) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и начальному условию (2). Остаётся подобрать плотность $\mu(\sigma, \tau)$ так, чтобы удовлетворит краевому условию (3).

Пусть точка (x, y) стремится к точке s контура. Используя краевое условие (3) и формулу (6), мы получим интегральное уравнение с неизвестной $\mu(\sigma, \tau)$:

$$\begin{aligned} \mu(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\tau, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\nu, r) d\sigma = \\ = -g(s, t), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$g(s, t) = f(s, t) - \lim_{(x, y) \rightarrow s} U_0(x, y, t).$$

В следующем пункте мы дадим доказательство разрешимости полученного нами интегрального уравнения. Здесь же мы сделаем следующие замечания.

1. С помощью того же теплового потенциала можно решить задачу Дирихле и в том случае, когда область расположена вне контура L . Решение попрежнему берётся в виде (9). Полагая, что (x, y) стремится к точке s , мы теперь должны воспользоваться формулой (7), и это приведёт нас к интегральному уравнению так называемой внешней задачи Дирихле:

$$\mu(t) + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\nu, r) d\sigma = g(s, t). \quad (11)$$

2. В теории распространения тепла важную роль играет краевая задача, в которой условие (3) заменено следующим:

$$\text{на } L \quad \frac{\partial U}{\partial \nu} + h(\sigma) U_0 = f(\sigma, \tau), \quad (12)$$

где $h(\sigma)$ — некоторая непрерывная положительная функция. К этой задаче сводится исследование температуры в длинном цилиндре, теряющем (или получающем) тепло в окружающую среду, причём температура этой среды вблизи цилиндра известна в любой момент времени. Эта задача может быть решена с помощью теплового потенциала простого слоя, который имеет вид

$$V(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\rho(\sigma, \tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma. \quad (13)$$

Как и в случае потенциала двойного слоя, мы будем считать плотность $\rho(\sigma, \tau)$ достаточно гладкой и равной нулю при $\tau=0$. Потенциал (13) удовлетворяет уравнению теплопроводности; он равен нулю при $t=0$ и непрерывен при переходе через контур. Его нормальная производная терпит скачок при переходе через контур; именно, обозначая через n внешнюю нормаль к L в точке s , имеем:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i = \rho(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\rho(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(r, n) d\sigma, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e = & -\rho(s, t) - \\ & - \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\rho(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(r, n) d\sigma. \end{aligned} \quad (15)$$

Решая краевую задачу с условием (12), мы будем искать U в виде

$$U(x, y, t) = U_0(x, y, t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\rho(\sigma, \tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma, \quad (16)$$

где U_0 определяется формулой (8). Используя формулы (14) и (15), мы получим интегральное уравнение для неизвестной $\rho(\sigma, \tau)$:

$$\begin{aligned} & \pm \rho(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\rho(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(r, n) d\sigma + \\ & + \frac{h(s)}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\rho(\sigma, \tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma = f(s, t) - \frac{\partial U_0}{\partial n} - h(s)U_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Знак плюс отвечает случаю внутренней области, знак минус — случаю внешней области.

3. Интегральные уравнения (10), (11) и (17) сохраняют свой вид и тогда, когда область D — многосвязная.

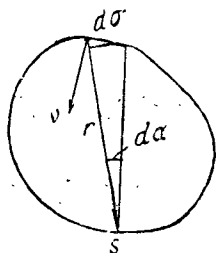
4. Положим

$$\frac{\cos(r, \nu)}{r} d\sigma = d\alpha. \quad (18)$$

Нетрудно видеть, что $d\alpha$ есть угол, образованный двумя бесконечно близкими радиусами-векторами, проведенными из точки s к концам дуги $d\sigma$ (черт. 16). Уравнение (10) можно записать в виде

$$\mu(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(\tau - t)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r^2 d\alpha = -g(s, t). \quad (19)$$

В таком виде наше интегральное уравнение сохраняет смысл и тогда, когда контур L негладкий. Достаточно предположить только, что интеграл



Черт. 16.

$$\int_L |d\alpha| = \int_L \frac{|\cos(\nu, r)|}{r} d\sigma$$

имеет конечное значение.

5. Тепловые потенциалы для трёхмерного пространства определяются следующими формулами¹⁾:

потенциал простого слоя

$$V(x, y, z, t) = \int_0^t d\tau \int_S \frac{\rho(\sigma, \tau)}{[4\pi(t-\tau)]^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma; \quad (20)$$

потенциал двойного слоя

$$U(x, y, z, t) = \int_0^t d\tau \int_S \frac{\mu(\sigma, \tau)}{[4\pi(t-\tau)]^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial \nu} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma. \quad (21)$$

С помощью этих потенциалов можно основные краевые задачи свести к интегральным уравнениям так же, как это было нами сделано в плоской задаче.

56. Сходимость последовательных приближений. В монографии Г. М. Мюнтца [6] доказано, что уравнения (10) и

¹⁾ См. [8].

(11) п. 53 можно решать методом последовательных приближений. При этом предполагается, что контур L — гладкий и имеет непрерывную кривизну. Мы дадим в настоящем пункте доказательство сходимости последовательных приближений, в предположении, что контур L — выпуклый, но не обязательно гладкий. Полученные нами оценки быстроты сходимости будут хуже, чем у Мюнтца. Мы приведём, однако, эти худшие оценки, так как негладкие контуры, в частности многоугольные, часто встречаются на практике.

Уравнение (10) п. 55, а также уравнение, сопряжённое с уравнением (11) п. 55, суть частные случаи более общего уравнения

$$\mu(s, t) - \frac{\lambda}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r^2 d\alpha = g(s, t) \quad (1)$$

при $\lambda = \pm 1$. Докажем, что последовательные приближения для уравнения (1) сходятся, если контур L — выпуклый и $|\lambda| \leq 1$.

В соответствии с методом последовательных приближений положим

$$\mu(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mu_n(s, t). \quad (2)$$

Подставив это в (1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ , мы получим рекуррентные соотношения, которые позволяют найти функции $\mu_n(s, t)$:

$$\left. \begin{aligned} \mu_0(s, t) &= g(s, t), \\ \mu_n(s, t) &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu_{n-1}(s, t)}{(\tau-t)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r^2 d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Пусть $|g(s, t)| = |\mu_0(s, t)| \leq A_0$, где A_0 — некоторая постоянная. Допустим, далее, что $|\mu_{n-1}(s, t)| \leq A_{n-1}$, A_{n-1} — также постоянная, и найдём оценку для $|\mu_n(s, t)|$.

Имеем, очевидно,

$$|\mu_n(s, t)| \leq \frac{A_{n-1}}{4\pi a^2} \int_L d\alpha \int_0^t \frac{r^2}{(\tau-t)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Сделав замену

$$\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)} = z,$$

легко найдём:

$$\frac{1}{4a^2} \int_0^t \frac{r^2}{(\tau-t)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau = e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}$$

и, следовательно,

$$|\mu_n(s, t)| \leq \frac{A_{n-1}}{\pi} \int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} d\alpha.$$

Далее,

$$\frac{1}{\pi} \int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} d\alpha < \frac{1}{\pi} \int_L d\alpha = \frac{\Omega(s)}{\pi}. \quad (4)$$

Здесь через $\Omega(s)$ мы обозначили угол, под которым контур виден из точки s . Очевидно, $\Omega(s) = \pi$ в точках, где существует определённая касательная, и (так как контур выпуклый) $\Omega(s) < \pi$ в угловых точках. Во всяком случае

$$\frac{1}{\pi} \int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} d\alpha < 1.$$

Положим

$$q(t_0) = \max_{0 \leq t \leq t_0} \frac{1}{\pi} \int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} d\alpha. \quad (5)$$

Очевидно, $q(t_0) < 1$, каково бы ни было t_0 , и

$$|\mu_n(s, t)| < q(t_0) A_{n-1}, \quad t \leq t_0. \quad (6)$$

Желая рассматривать последовательные приближения при некотором t , мы зафиксируем какое-либо t_0 , $t_0 > t$.

Пользуясь неравенством (6), мы найдём:

$$|\mu_n(s, t)| < A_0 q^n(t_0). \quad (7)$$

Из последней оценки следует сходимость последовательных приближений, равномерная при $0 \leq t \leq t_0$.

Если контур L — гладкий, с непрерывной кривизной, то оценка $|\mu_n(s, t)|$ такова¹⁾:

$$|\mu_n(s, t)| < \frac{A_0 (pt)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}. \quad (8)$$

Здесь Γ — эйлерова функция, а постоянная p зависит от вида контура.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

57. Задача о собственных колебаниях струны. Рассмотрим неоднородную струну длины l , которая в положении равновесия занимает отрезок $(0, l)$ оси абсцисс и находится под действием натяжения T . Концы струны будем считать закреплёнными. Пусть на струну действует распределённая сила $F(x, t)$. Под этим мы понимаем, что в момент времени t к участку струны $(x, x + dx)$ приложена сила, равная $F(x, t)dx$. Будем считать, далее, что эта сила перпендикулярна к струне. Уравнение поперечных колебаний струны, как известно, имеет вид

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t), \quad (1)$$

где $\rho(x)$ — плотность струны в точке с абсциссой x .

Кроме уравнения (1), отклонение $u(x, t)$ струны от положения равновесия должно удовлетворять ещё условиям:

а) краевым

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (2)$$

выражающим, что концы струны закреплены;

¹⁾ См. [6].

б) начальным

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi(x), \quad (3)$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ суть начальная скорость и начальное отклонение струны в начальный момент,

Чтобы найти собственные колебания струны, решим сперва вспомогательную задачу. Найдём форму струны, концы которой закреплены и которая находится в равновесии под действием распределённой силы $F(x)$. Уравнение (1) переходит в этом случае в уравнение равновесия струны

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{T}F(x) = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим частный случай, когда вся струна, за исключением одной её точки $x=s$, свободна от нагрузки, а в точке s приложена сосредоточенная сила, численно равная единице. В нашем случае $F(x) = 0$ при $x \neq s$; на каждом из участков $0 \leq x < s$ и $s < x \leq l$ уравнение (4) имеет вид

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

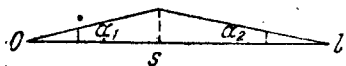
откуда

$$u = \alpha_1 x + \beta_1 \quad \text{при } 0 \leq x < s,$$

$$u = \alpha_2 x + \beta_2 \quad \text{при } s < x \leq l.$$

Последние уравнения показывают, что на каждом из участков $(0, s)$ и (s, l) струна имеет прямолинейную форму (черт. 17).

Так как концы струны закреплены, то имеют место равенства (2). Пользуясь ими, найдём, что $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = -\alpha_2 l$, и, следовательно,



Черт. 17.

$$u = \begin{cases} \alpha_1 x & (0 \leq x < s), \\ \alpha_2 (x - l) & (s < x \leq l). \end{cases}$$

Остаётся найти коэффициенты α_1 и α_2 . Для этого заметим прежде всего, что при $x=s$ струна непрерывна и оба выражения для u должны в этой точке совпасть.

Это даёт нам

$$\alpha_1 s = -\alpha_2 (l - s). \quad (5)$$

Далее сумма вертикальных проекций натяжения обоих участков струны должна равняться единице — величине силы, приложенной в точке s :

$$T(\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2) = 1,$$

или, так как углы γ_1 и γ_2 малы,

$$T(\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2) = 1.$$

Но $\operatorname{tg} \gamma_1 = \alpha_1$, $\operatorname{tg} \gamma_2 = -\alpha_2$. Отсюда

$$T(\alpha_1 - \alpha_2) = 1. \quad (6)$$

Определив α_1 и α_2 из уравнений (5) и (6) и подставив их в (4), получим

$$u = \begin{cases} \frac{x(l-s)}{lT} & (0 \leq x \leq s), \\ \frac{s(l-x)}{lT} & (s \leq x \leq l). \end{cases}$$

Введём обозначение

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{x(l-s)}{l} & (0 \leq x \leq s), \\ \frac{s(l-x)}{l} & (s \leq x \leq l). \end{cases} \quad (7)$$

Тогда

$$u = \frac{1}{T} G(x, s). \quad (8)$$

Для дальнейшего важно отметить симметричность функции $G(x, s)$:

$$G(x, s) \equiv G(s, x). \quad (9)$$

Теперь нетрудно найти форму равновесия струны под действием произвольной распределённой силы $F(x)$. В самом деле, если в точке s приложена сила, равная не единице, а некоторой величине F , то соответствующее отклонение будет равно

$$u = \frac{F}{T} G(x, s).$$

Пусть теперь в точках s_1, s_2, \dots, s_n струны будут приложены силы F_1, F_2, \dots, F_n . Тогда

$$u = \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{T} G(x, s_k).$$

Переходя в этом равенстве к пределу, мы найдём, что в случае распределённой силы

$$u = \frac{1}{T} \int_0^l G(x, s) F(s) ds. \quad (10)$$

Из формулы (10) легко получить уравнение колебаний струны. Для этого достаточно, по принципу Даламбера, к силе $F(s) ds$, действующей на участок ds струны, прибавить «силу инерции» — $\rho(s) ds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Мы получим тогда

$$u(x, t) = \frac{1}{T} \int_0^l G(x, s) F(s) ds - \frac{1}{T} \int_0^l \rho(s) G(x, s) \frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial t^2} ds \quad (11)$$

— интегро-дифференциальное уравнение колебаний закреплённой струны, которое эквивалентно совокупности дифференциального уравнения (1) и краевых условий (2). Сила F может зависеть от времени, — тогда в уравнении (11) надо писать $F(s, t)$ вместо $F(s)$. Если $F(s, t) \equiv 0$, то мы получим интегро-дифференциальное уравнение свободных колебаний закреплённой струны

$$u(x, t) = -\frac{1}{T} \int_0^l \rho(s) G(x, s) \frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial t^2} ds. \quad (12)$$

Будем искать периодические решения этого уравнения, именно, положим

$$u(x, t) = v(x) \sin(\nu t + \varepsilon). \quad (13)$$

Подставив это в (12), мы найдём, что $v(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(x) - \frac{\nu^2}{T} \int_0^l \rho(s) G(x, s) v(s) ds = 0. \quad (14)$$

Если струна — однородная, то $\rho(x) = \rho = \text{const}$. В этом случае $v(x)$ удовлетворяет симметричному интегральному уравнению

$$v(x) - \mu \int_0^l G(x, s) v(s) ds = 0; \quad \mu = \frac{v^2 \rho}{T}. \quad (15)$$

В общем случае уравнение (14) — несимметричное. Его, однако, легко сделать симметричным (см. п. 18), если умножить его на $\sqrt{\rho(x)}$ и положить

$$v(x) \sqrt{\rho(x)} = \varphi(x), \quad G(x, s) \sqrt{\rho(x) \rho(s)} = K(x, s).$$

Мы получим тогда уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^l K(x, s) \varphi(s) ds = 0; \quad \lambda = \frac{v^2}{T}, \quad (16)$$

ядро которого симметрично.

Если мы найдём характеристические числа λ_n уравнения (16), то найдём также и частоты собственных колебаний струны, равные

$$\frac{\nu_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda_n T}.$$

Соответствующие собственные функции определяют форму струны, колеблющейся с частотой $\frac{\nu_n}{2\pi}$:

$$v_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\rho(x)}}.$$

Собственные функции и характеристические числа симметричного уравнения (16) могут быть определены методами, изложенными в § 1 главы I.

58. Колебания струны, плотность которой меняется по линейному закону. Для определённости вычислений будем считать, что $l=1$ и плотность $\rho(x)$ меняется по закону:

$$\rho(x) = \rho_0 (1+x). \quad (1)$$

Тогда уравнение (14) п. 57 принимает вид

$$v(x) - \frac{v^2 \rho_0}{T} \int_0^1 (1+s) G(x, s) v(s) ds = 0.$$

Умножим это уравнение на $\sqrt{1+x}$ и положим

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \sqrt{1+x} v(x), \\ K(x, s) &= \sqrt{(1+x)(1+s)} G(x, s); \\ \lambda &= \frac{v^2 p_0}{T}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s) \varphi(s) ds = 0. \quad (3)$$

Заметим, что в нашем примере

$$G(x, s) = \begin{cases} x(1-s) & (0 \leq x \leq s), \\ s(1-x) & (s \leq x \leq 1). \end{cases}$$

Найдём частоту основного тона. Для этого достаточно определить первое характеристическое число уравнения (3). Воспользуемся с этой целью методом п. 15, дающим выражение λ_1 через следы ядра. По формуле (5) п. 15

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, s) dx ds = \int_0^1 \int_0^1 (1+x)(1+s) G^2(x, s) dx ds = \\ &= 2 \int_0^1 (1+x)(1-x)^2 dx \int_0^x (1+s)s^2 ds = \frac{127}{5040}. \end{aligned}$$

Во второй приближённой формуле (7₁) п. 15

$$|\lambda_1| \approx \frac{1}{2m \sqrt{A_{2m}}}$$

положим $m=1$. Из физического смысла величины λ_1 ясно, что $\lambda_1 > 0$. Мы получим тогда

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{A_2}} = 6,300$$

и, следовательно,

$$v_1 = \sqrt{\frac{T\lambda_1}{\rho_0}} = 2,510 \sqrt{\frac{T}{\rho_0}}.$$

Чтобы получить более точное значение λ_1 , вычислим второе итерированное ядро

$$\begin{aligned} K_2(x, s) &= \int_0^1 K(x, t) K(t, s) dt = \\ &= \sqrt{(1+x)(1+s)} \int_0^1 (1+t) G(x, t) G(t, s) dt. \end{aligned}$$

Вычислим ядро $K_2(x, s)$, предполагая, что $x > s$. При $x < s$ ядро $K_2(x, s)$ определится тогда из условия, что оно симметрично. Промежуток интегрирования $(0, 1)$ разобьём на три: от нуля до s , от s до x и от x до 1. Пользуясь определением $G(x, s)$, мы получим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1+t) G(x, t) G(t, s) dt &= \int_0^s (1+t) t^2 (1-x)(1-s) dt + \\ &+ \int_s^x t(1-t^2) s(1-x) dt + \int_x^1 (1+t)(1-t)^2 xs dt = \\ &= \frac{5}{12} xs - \frac{x^2 s}{2} - \frac{s^3}{6} + \frac{xs^3}{6} - \frac{s^4}{12} + \frac{x^4 s}{12} + \frac{xs^4}{12}. \end{aligned}$$

Отсюда, при $x > s$,

$$K_2(x, s) = \frac{\sqrt{(1+x)(1+s)}}{12} (5xs - 6x^2s - 2s^3 + 2xs^3 - s^4 + x^4s + xs^4).$$

Значение $K(x, s)$ при $x < s$ мы получим простой перестановкой аргументов x и s : при $x < s$

$$K_2(x, s) = \frac{\sqrt{(1+x)(1+s)}}{12} (5xs - 6xs^2 - 2x^3 + 2x^3s - x^4 + xs^4 + x^4s).$$

Теперь

$$A_4 = \int_0^1 \int_0^1 K_2^2(x, s) dx ds = 2 \int_0^1 dx \int_0^x K_2^2(x, s) ds = 0,0006154.$$

Во второй формуле (7₁) п. 15 положим теперь $m=2$. Тогда

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{A_4}} = 6,349.$$

Это — значение λ_1 с недостатком. Мы получим значение с избытком, взяв первую из формул (7₁) п. 15, которая для $\lambda_1 > 0$ имеет вид

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}.$$

Положим в этой формуле $m=1$. Тогда

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{A_2}{A_4}} = 6,398.$$

Точное значение λ_1 заключено между числами 6,349 и 6,398. Интересно отметить, что даже сравнительно грубая формула

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{A_2}}$$

дала значение λ_1 с ошибкой, меньшей чем в 2⁰/₀.

Имея значения A_2 и A_4 , мы можем вычислить и второе характеристическое число λ_2 , пользуясь для этого приближённой формулой (6) п. 17:

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt{\frac{2}{B_{2m}}}, \quad B_{2m} = A_{2m}^2 - A_{4m}.$$

Полагая $m=1$ и замечая, что $\lambda_2 > 0$, имеем:

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{2}{A_2^2 - A_4}} = 49,9.$$

59. Функция влияния (функция Грина). Подробное изложение вопросов, связанных с понятием функции влияния, читатель найдёт во многих широко известных курсах. Укажем, например, книги Куранта и Гильберта [4],

В. И. Смирнова [8], И. И. Привалова [7]. Поэтому мы здесь ограничимся только определением функции влияния и её основными свойствами.

Начнём с простейшего случая. Пусть дан обыкновенный линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$L(y) = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y, \quad (1)$$

где $p(x) > 0$. Будем рассматривать функции $y(x)$, которые на концах заданного интервала (a, b) удовлетворяют условиям

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, \quad (2)$$

а внутри интервала сами непрерывны и имеют непрерывную первую производную. Вторую производную $y''(x)$ подчиним единственному условию, чтобы $L(y)$ имел смысл. Допустим, что ни одна из этих функций, кроме функции $y(x) \equiv 0$, не обращает в нуль оператора $L(y)$. Иначе говоря, мы допускаем, что единственный интеграл уравнения

$$L(y) = 0, \quad (3)$$

удовлетворяющий условиям (2) и непрерывный вместе со своей производной, есть $y \equiv 0$. Функцией влияния, или функцией Грина, оператора $L(y)$ при краевых условиях (2) называется функция двух переменных $G(x, s)$, обладающая следующими свойствами:

- 1) $G(x, s)$ непрерывна при $a < x < b$ и $a < s < b$.
- 2) В каждом из интервалов $a < x < s$ и $s < x < b$ производные $\frac{\partial G(x, s)}{\partial x}$ и $\frac{\partial G(x, s)}{\partial s}$ непрерывны.
- 3) В точке $x = s$ производная $\frac{\partial G(x, s)}{\partial s}$ терпит скачок, определяемый формулой

$$\frac{\partial G(x, s)}{\partial s} \Big|_{x=s+0} - \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} \Big|_{x=s-0} = \frac{1}{p(s)}. \quad (4)$$

- 4) При s фиксированном $G(x, s)$ удовлетворяет уравнению (3)

$$L(G) = 0$$

в каждом из интервалов $a < x < s$ и $s < x < b$.

5) Как функция от x , $G(x, s)$ удовлетворяет краевым условиям (2).

Функцию Грина можно построить следующим образом.

Построим интегралы $u(x)$ и $v(x)$ уравнения (3), удовлетворяющие условиям Коши

$$u(a) = \beta, \quad u'(a) = -\alpha,$$

$$v(a) = \delta, \quad v'(a) = -\gamma.$$

Очевидно, $u(x)$ удовлетворяет также первому, а $v(x)$ — второму из краевых условий (2). Интегралы $u(x)$ и $v(x)$ — линейно независимые, в противном случае существовал бы интеграл уравнения (3), удовлетворяющий обоим краевым условиям (2), а это противоречит нашему допущению.

Из теории линейных дифференциальных уравнений известно тождество

$$p(x) [u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] = -c. \quad (5)$$

Постоянная c отлична от нуля, в противном случае $u(x)$ и $v(x)$ были бы линейно зависимы.

Построив интегралы $u(x)$ и $v(x)$, мы можем сразу написать выражение функции Грина, именно

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{u(x)v(s)}{c} & (a < x < s), \\ \frac{u(s)v(x)}{c} & (s < x < b). \end{cases} \quad (6)$$

Нетрудно проверить, что функция (6) обладает свойствами 1 — 5, положенными в определение функции Грина.

Из формулы (6) непосредственно следует, что $G(x, s)$ есть функция симметричная, т. е.

$$G(x, s) \equiv G(s, x). \quad (7)$$

Действительно, пусть, например, $x < s$. Тогда $G(x, s) = \frac{1}{c} u(x)v(s)$. Вычисляя $G(s, x)$, мы должны взять нижнюю строку в (6), так как первый аргумент, s , больше второго. Но тогда

$$G(s, x) = \frac{1}{c} u(x)v(s) = G(x, s).$$

Второе существенное для приложений свойство функции Грина выражается следующей теоремой:

Интеграл неоднородного уравнения

$$L(y) = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = f(x), \quad (8)$$

удовлетворяющий крайним условиям (2), определяется формулой

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds. \quad (9)$$

Решение (9) — единственное.

Доказательство этой теоремы читатель найдёт в цитированных в начале этого пункта курсах.

Нетрудно убедиться в том, что функция $G(x, s)$, построенная в п. 57, есть функция влияния оператора $L(y) = y''$ при крайних условиях $y(0) = y(l) = 0$.

Формула (9) позволяет дать простую и полезную интерпретацию функции влияния. Будем в уравнении (8) трактовать $f(x)$ как распределённую силу, а $y(x)$ — как вызываемое этой силой смещение точки x относительно положения равновесия. В таком случае $G(x, s)$ есть смещение точки x , вызванное сосредоточенной силой величины единица, приложенной в точке s . Действительно, допустим, что на участке $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ действует распределённая сила $f(x)$ такая, что её главный вектор равен единице:

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f(x) dx = 1. \quad (10)$$

Пусть участки $(a, s - \varepsilon)$ и $(s + \varepsilon, b)$ свободны от действия сил, так что на этих участках $f(x) = 0$. В формуле (9) интегралы по участкам $(a, s - \varepsilon)$ и $(s + \varepsilon, b)$ исчезают, и мы имеем

$$y(x) = \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} G(x, t) f(t) dt.$$

Считая, что $f(t) > 0$, мы можем применить теорему о среднем значении интеграла:

$$y(x) = G(x, s') \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f(t) dt = G(x, s'), \quad s - \varepsilon < s' < s + \varepsilon.$$

Беря $\varepsilon \rightarrow 0$, мы придём к сосредоточенной силе, приложенной в точке s и равной единице в силу равенства (10). При этом $s' \rightarrow s$ и, так как $G(x, s)$ непрерывна, то в пределе

$$y(x) = G(x, s),$$

что и требовалось доказать.

В проблемах теории колебаний и теории устойчивости часто приходится решать следующую задачу. Дано дифференциальное уравнение

$$L(y) + \lambda r(x)y = 0 \quad (11)$$

или, более подробно,

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)] y = 0,$$

где $r(x)$ — непрерывная положительная функция и λ — численный параметр, величина которого заранее не дана. Требуется найти те значения λ , при которых существует интеграл уравнения (11), непрерывный и имеющий непрерывную производную, не равный тождественно нулю и удовлетворяющий краевым условиям (2). Зная функцию Грина, мы можем с помощью формулы (9) свести указанную задачу к отысканию характеристических чисел интегрального уравнения с симметричным ядром. Для этого заметим, что уравнение (11) переходит в (8), если положить $f(x) = \lambda r(x)y(x)$. Так как искомый интеграл удовлетворяет условиям (2), то можно применить формулу (9):

$$y(x) = \lambda \int_a^b r(s) G(x, s) y(s) ds. \quad (12)$$

Равенство (12) есть однородное интегральное уравнение с неизвестной $y(x)$ и параметром λ ; за исключением того случая, когда $r(x) = \text{const}$, оно несимметричное. Чтобы преобразовать его в симметричное, умножим обе его части на $\sqrt{r(x)}$ и положим

$$\sqrt{r(x)} y(x) = \varphi(x), \quad \sqrt{r(x)r(s)} G(x, s) = K(x, s).$$

Мы получим тогда уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = 0, \quad (13)$$

ядро которого уже симметрично. Очевидно, что характеристические числа этого уравнения и суть искомые значения λ .

Полезно заметить, что все характеристические числа уравнения (13)—простые, т. е. каждому из них соответствует только одна собственная функция. Чтобы убедиться в этом, допустим, что характеристическому числу λ' соответствуют линейно независимые собственные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Составим функции

$$v_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{r(x)}}, \quad v_2(x) = \frac{\varphi_2(x)}{\sqrt{r(x)}}.$$

Эти функции удовлетворяют интегральному уравнению (12) при $\lambda = \lambda'$. Отсюда следует, что они удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению

$$L(y) + \lambda' r(x)y = 0$$

и крайвым условиям (2). Обратим внимание на первое из этих условий:

$$\alpha y_1(a) + \beta y_1'(a) = 0, \quad \alpha y_2(a) + \beta y_2'(a) = 0.$$

Так как числа α и β не равны нулю одновременно, то

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Написанный определитель есть значение определителя Вронского интегралов $y_1(x)$ и $y_2(x)$ при $x=a$. Будучи равным нулю в одной точке, он равен нулю тождественно. Отсюда следует, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы. Но тогда $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ также линейно зависимы, вопреки предположению.

Понятие функции влияния распространяется на уравнения более высокого порядка и с большим числом независимых переменных. Так, например, функция Грина для уравнения Лапласа определяется, как функция двух точек

области, M и M_1 , имеющая логарифмическую особенность¹⁾ при $M=M_1$, гармоническая при $M \neq M_1$ и равная нулю на контуре области. Эта функция была нами использована в § 2 этой главы и в п. 54.

60. Крутильные колебания стержней. Учёт сосредоточенных масс. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[GI_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] - I_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь θ —угол закручивания, I_m —погонный момент инерции стержня относительно оси жёсткости, GI_p —жёсткость крыла на кручение. Будём рассматривать периодические колебания стержня, один конец которого, $x=0$, жёстко заделан, а другой конец, $x=l$, свободен. Условия на концах стержня будут

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \quad \text{при } x=0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x=l. \end{aligned} \quad (2)$$

Отыскивая периодические решения, положим

$$\theta(x, t) = e^{i\omega t} \vartheta(x).$$

Подставив это в (1), найдём, что $\vartheta(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[GI_p \frac{d\vartheta}{dx} \right] + \lambda I_m \vartheta = 0; \quad \lambda = \nu^2. \quad (3)$$

Из (2) вытекают краевые условия, которым удовлетворяет $\vartheta(x)$:

$$\vartheta(0) = 0; \quad \vartheta'(l) = 0. \quad (4)$$

Очевидно, интерес представляют только функции $\vartheta(x)$, отличные от тождественного нуля: если $\vartheta(x) \equiv 0$, то и $\theta(x, t) \equiv 0$, и колебаний на самом деле нет. Мы приходим, таким образом, к частному случаю задачи, сформулированной в прошлом пункте: нужно найти значения λ , при которых $\vartheta(x)$, удовлетворяющая уравнению (3) и условиям (4), отлична от тождественного нуля. Как мы уже знаем, эта задача сводится к интегральному уравнению.

¹⁾ Мы рассматриваем случай двух независимых переменных.

Построим соответствующую функцию Грина. Обозначим её через $H(x, s)$. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[GI_p \frac{dy}{dx} \right] = 0.$$

Это уравнение имеет линейно независимые интегралы

$$u(x) = \int_0^x \frac{dx}{GI_p}, \quad v(x) = 1,$$

удовлетворяющие условиям $u(0) = 0$, $v'(l) = 0$. При этом, в нашем случае $p(x) = GI_p$, и

$$p(x) [uv' - vu'] = -1.$$

Отсюда $c = 1$ [формула (5) п. 59] и, следовательно,

$$H(x, s) = \begin{cases} \int_0^x \frac{dx}{GI_p} & (0 \leq x \leq s) \\ \int_0^s \frac{dx}{GI_p} & (s \leq x \leq l). \end{cases} \quad (5)$$

Интегральное уравнение для $\Phi(x)$ имеет вид

$$\Phi(x) - \lambda \int_0^l H(x, s) I_m(s) \Phi(s) ds = 0. \quad (6)$$

Умножив его на $\sqrt{I_m(x)}$ и введя соответствующие обозначения, мы преобразуем его в уравнение с симметричным ядром.

Уравнение (6) выведено в предположении, что момент инерции $I_m(x)$ меняется вдоль стержня непрерывно. Может, однако, случиться, что стержень несёт на себе сосредоточенные массы. Тогда вид уравнения (6) меняется. В частности, если имеется n сосредоточенных масс с моментами инерции I_1, I_2, \dots, I_n , расположенные в точках s_1, s_2, \dots, s_n стержня, то вместо (6) имеем:

$$\Phi(x) - \lambda \int_0^l H(x, s) I_m(s) \Phi(s) ds - \lambda \sum_{k=1}^n H(x, s_k) I_k \Phi(s_k). \quad (7)$$

Можно показать, что теория Гильберта-Шмидта полностью распространяется на уравнения типа (7). В работах И. В. Анањева [9] и А. И. Комай [16] даны приложения уравнений типа (7) к задаче колебания крыла с сосредоточенными грузами. Для вычисления частот авторы используют главным образом метод Келлога.

61. Устойчивость сжатого стержня. (Продольный изгиб стержня.) Уравнение изогнутой упругой линии стержня, как известно, имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left[EI \frac{dy}{dx} \right] = M,$$

где M и I — изгибающий момент и момент инерции в сечении с абсциссой x , E — модуль Юнга. Рассмотрим случай, когда стержень сжимается силами, приложенными к его концам. Обозначим величину каждой из этих сил через P . Тогда $M = -Py$, и уравнение изогнутой оси будет

$$\frac{d}{dx} \left[EI \frac{dy}{dx} \right] + Py = 0. \quad (1)$$

Концы стержня не смещаются в направлении, перпендикулярном к стержню, поэтому, обозначая длину стержня через l , имеем

$$y(0) = y(l) = 0. \quad (2)$$

Разделим уравнение (1) на E и положим $\frac{P}{E} = \lambda$. Тогда

$$\frac{d}{dx} \left[I \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0. \quad (3)$$

Обозначим через $G(x, s)$ функцию Грина оператора

$$\frac{d}{dx} \left[I \frac{dy}{dx} \right],$$

соответствующую крайним условиям (2). Тогда (см. п. 59)

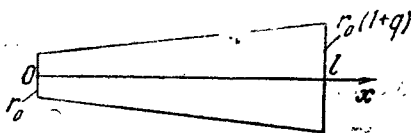
$$y(x) - \lambda \int_0^l G(x, s) y(s) ds = 0. \quad (4)$$

Таким образом, прогиб $y(x)$ сжатого стержня удовлетворяет однородному интегральному уравнению с симметричным ядром. При произвольно взятой силе P число $\lambda = \frac{P}{E}$ не будет характеристическим, и $y(x) \equiv 0$. Иначе говоря, произ-

вольной взятой сжимающая сила оставляет стержень прямым. Только в том случае, когда $P = \lambda_n E$, где E — характеристическое число уравнения (4), $y(x)$ может быть отлично от нуля, и стержень искривляется — теряет устойчивость.

В задаче о продольном изгибе важно определить наименьшую силу P , при которой стержень теряет устойчивость. Эта так называемая критическая сила равна произведению модуля Юнга на наименьшее характеристическое число уравнения (4). Достаточной для практических целей можно считать приближённую формулу, дающую λ_1 с недостатком:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &\approx \frac{1}{\sqrt{A_2}}; \\ A_2 &= \int_0^l \int_0^l G^2(x, s) dx ds. \end{aligned} \right\} (5)$$



Черт. 18.

Найдём для примера критическую силу для стержня, имеющего форму усечённого конуса. Обозначим радиусы через r_0 и $r_0(1+q)$ (черт. 18). Тогда радиус сечения с абсциссой x будет $r_0\left(1 + \frac{qx}{l}\right)$, а момент инерции этого сечения

$$I = \frac{\gamma r_0^4}{2} (1 + \alpha x)^4, \quad (6)$$

где γ — плотность стержня и $\alpha = \frac{q}{l}$. Уравнение (4) перепишем в виде

$$\frac{d}{dx} \left[(1 + \alpha x)^4 \frac{dy}{dx} \right] + \mu y = 0; \quad \mu = \frac{2\lambda}{\gamma r_0^4}. \quad (7)$$

Если $G(x, s)$ есть функция Грина оператора

$$\frac{d}{dx} \left[(1 + \alpha x)^4 \frac{dy}{dx} \right]$$

при краевых условиях (2), то $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(x) - \mu \int_0^l G(x, s) y(s) ds = 0. \quad (8)$$

Нам предстоит определить его наименьшее характеристическое число.

Найдём функцию Грина $G(x, s)$. Уравнение

$$\frac{d}{dx} \left[(1 + \alpha x)^4 \frac{dv}{dx} \right] = 0$$

имеет общий интеграл

$$y = C_1 + \frac{C_2}{(1 + \alpha x)^3}.$$

Условию $y(0) = 0$ удовлетворяет интеграл

$$u(x) = 1 - \frac{1}{(1 + \alpha x)^3},$$

а условию $y(l) = 0$ — интеграл

$$v(x) = \frac{1}{(1 + \alpha x)^3} - \frac{1}{(1 + \alpha l)^3}.$$

Далее,

$$c = -p(x) [u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] = 3\alpha \left(1 - \frac{1}{(1 + \alpha l)^3} \right),$$

и мы получаем выражение функции Грина:

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{c} \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha x)^3} \right] \left[\frac{1}{(1 + \alpha s)^3} - \frac{1}{(1 + \alpha l)^3} \right] & (0 \leq x \leq s), \\ \frac{1}{c} \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha s)^3} \right] \left[\frac{1}{(1 + \alpha x)^3} - \frac{1}{(1 + \alpha l)^3} \right] & (s \leq x \leq l). \end{cases}$$

Наименьшее характеристическое число μ уравнения (8) определяется приближённой формулой

$$\frac{1}{\mu^2} \approx \int_0^l \int_0^l G^2(x, s) dx ds = 2 \int_0^l dx \int_0^x G^2(x, s) ds.$$

Написанный интеграл вычисляется совершенно элементарно. Формула, однако, получается довольно громоздкая. Имея в виду упростить её, мы ограничимся случаем, когда величина q мала и можно отбросить члены, содер-

жащие q в степени выше первой. Произведя вычисления в этом упрощающем предположении, получим:

$$\frac{1}{\mu_1^2} = \mu^2 \left(\frac{1}{90} - \frac{2}{45} q \right). \quad (9)$$

Отсюда легко найдём критическую силу P . Замечая, что $\lambda = I_0 \mu$, где I_0 — момент инерций сечения $x=0$, мы найдём выражение критической силы в виде

$$P = E \lambda_1^2 = \frac{\sqrt{90} E I_0}{l^2} (1 + 2q) = \frac{9,487 E I_0}{l^2} (1 + 2q). \quad (10)$$

Если положить $q=0$, то получится стержень постоянного сечения. Формула (10) даёт в этом случае величину критической силы

$$P = \frac{9,487 E I_0}{l^2}$$

Точное значение критической силы, как известно, в этом случае равно

$$\frac{\pi^2 E I_0}{l^2} = \frac{9,897 E I_0}{l^2}$$

Приближённое значение отличается от точного меньше, чем на 5%.

Тот же приём сведения к интегральным уравнениям позволяет найти критическую силу и в более сложных случаях. В частности, к интегральным уравнениям можно свести задачу об устойчивости упругой пластинки под действием сил, направления которых лежат в плоскости пластинки [18]. Н. В. Зволинский в своей статье [14] решает с помощью интегральных уравнений задачу об устойчивости цилиндрической оболочки. В двух последних случаях ядро оказывается несимметричным, но оно принадлежит к классу так называемых симметризуемых, для которых справедлива теорема о существовании действительного характеристического числа.

§ 6. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

62. Задача Гильберта. Мы будем рассматривать следующую задачу. Найти функцию, гармоническую в некоторой плоской области D , предполагая, что на одних частях

контура даны значения искомой функции, а на других — значения её нормальной производной¹⁾.

Обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2n-1}$ дуги контура, на которых дана искомая гармоническая функция $U(x, y)$, и пусть на этих дугах

$$U = f(s), \quad (1)$$

где s — длина дуги контура. Далее, через $\gamma_2, \gamma_4, \dots, \gamma_{2n}$ мы обозначим те дуги контура, на которых дана нормальная производная, и пусть на этих дугах

$$\frac{\partial U}{\partial n} = f_1(s), \quad (2)$$

где n — внешняя нормаль к контуру. Задача заключается в отыскании функции $U(x, y)$, гармонической в области и удовлетворяющей на контуре равенствам (1) и (2).

Обозначим через α_k и β_k начало и конец дуги γ_{2k} . Тогда очевидно, β_k и α_{k+1} суть начало и конец дуги γ_{2k+1} . Мы не будем предполагать заранее, что $U(x, y)$ непрерывна в точках α_k и β_k . Тогда, как мы увидим, задача Гильберта допускает бесчисленное множество решений, зависящее от некоторых параметров. Выбором этих параметров можно распорядиться так, чтобы $U(x, y)$ была непрерывной.

Преобразуем условие (2). Обозначим через $V(x, y)$ функцию, сопряжённую с $U(x, y)$. В силу уравнений Коши-Римана,

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Отсюда мы можем определить значения $V(x, y)$ на дугах γ_{2k} :

$$\text{на } \gamma_{2k} \quad V(x, y) = \int_{\alpha_k}^s \frac{\partial V}{\partial s} ds + C_k = \int_{\alpha_k}^s f_1(s) ds + C_k.$$

Обозначим

$$\int_{\alpha_k}^s f_1(s) ds = f^*(s).$$

¹⁾ Эта задача представляет собой частный случай общей задачи Гильберта, в которой разбивается гармоническая функция при условии, что на контуре известна линейная комбинация самой функции и её нормальной производной.

Теперь задача Гильберта может быть сформулирована так: найти аналитическую в области D функцию, если на одних частях контура даны значения её действительной, а на других — мнимой части:

$$\left. \begin{array}{l} \text{на } \gamma_{2k-1} \\ \text{на } \gamma_{2k} \end{array} \right\} \begin{array}{l} U=f(s), \\ V=f^*(s)+C_k, \end{array} \quad (3)$$

где C_k — произвольные постоянные.

Положим $U+iV=\varphi(z)$ и пусть $T(z; \zeta)$ — ядро Шварца области (см. п. 38). Тогда

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_E u(s) T(z; \zeta) d\zeta + iC, \quad (4)$$

где C — некоторая постоянная; L — контур области D . Очевидно, функция $\varphi(z)$ будет известна, и наша задача будет решена, если мы найдём значения $u(z)$ на дугах γ_k .

Интеграл в (4) разобьём на два: один, распротранённый по дугам $\gamma_1, \gamma_3, \dots, \gamma_{2n-1}$, и второй, распротранённый по дугам $\gamma_2, \gamma_4, \dots, \gamma_n$. В силу условия (1), первый интеграл есть величина известная, он равен

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_{2k-1}} f(s) T(z; \zeta) d\zeta.$$

Для краткости обозначим этот интеграл через $\omega(z)$, так что

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_{2k}} u(s) T(z; \zeta) d\zeta + \omega(z) + iC.$$

Пусть t — точка некоторой дуги γ_m , соответствующая длине дуги s . В последнем равенстве перейдём к пределу, полагая $z \rightarrow t$. Чтобы выполнить предельный переход в интеграле справа, воспользуемся формулой (27) п. 38:

$$\frac{1}{2\pi} T(z; \zeta) d\zeta = \frac{1}{\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + P(z; \zeta) d\zeta.$$

Теперь

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_{2k}} \frac{U(s) d\zeta}{\zeta - z} + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_{2k}} U(s) P(z; \zeta) d\zeta + \omega(z) + iC.$$

Во втором члене можно перейти к пределу под знаком интеграла, так как функция $P(z; \zeta)$ непрерывна. Первый член есть интеграл типа Коши, и его предел определяется по формуле (2) п. 21. Таким образом, имеем:

$$\varphi(t) = U(s) + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_{sk}} \frac{U(\sigma) d\zeta}{\zeta - t} + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_{sk}} U(\sigma) P(t; \zeta) d\zeta + \omega(t) + iC.$$

Отделим в этом равенстве мнимые части и воспользуемся условием (3). Мы получим тогда

$$\begin{aligned} \text{на } \gamma_{am}: \quad & -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_{sk}} U(\sigma) \operatorname{Re} \left(\frac{d\zeta}{\zeta - t} \right) + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_{sk}} U(\sigma) \operatorname{Im} \{ P(t; \zeta) \} d\zeta = \\ & = f^*(s) - \operatorname{Im} \{ \omega(t) \} + C_m; \quad C_m = C_m - C. \end{aligned} \quad (5)$$

Равенство (5) — есть сингулярное интегральное уравнение, неизвестная которого есть значение $U(x, y)$ на дугах γ_{am} . Решив это уравнение, мы найдём $U(x, y)$ с помощью формулы (4). Способом, изложенным в п. 26, можно уравнение (5) свести к уравнению Фредгольма. Однако, исследование и решение этого уравнения в общем случае представляет значительные трудности. Мы ограничимся поэтому простейшим и в то же время достаточно интересным для приложений случаем; когда область D есть полуплоскость. Этому случаю будет посвящён следующий пункт.

63. Задача Гильберта для полуплоскости. Ядро Шварца для полуплоскости легко построить. Для этого воспользуемся формулой (26) п. 38.

Ядро Шварца для круга хорошо известно и равно

$$\frac{1}{2\pi} T(t, \tau) d\tau' = \frac{1}{2\pi} \frac{\tau + t}{\tau - t} d\tau',$$

где t — точка внутри круга, τ — точка окружности и $d\tau' = |d\tau|$. Функция, отображающая единичный круг на верхнюю полуплоскость $y > 0$, имеет вид

$$z = \frac{z - i}{z + i}, \quad \tau = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}.$$

По формуле (26) п. 38

$$\frac{1}{2\pi} T(z; \zeta) dz = \frac{1}{\pi i} \frac{\zeta z + 1}{\zeta - z} \frac{|d\zeta|}{|\zeta + i|^2}.$$

Если положим $\zeta = \xi + i\eta$, то на границе полуплоскости $\eta = 0$ и $\zeta = \xi$. Отсюда

$$\frac{1}{2\pi} T(z; \zeta) dz = \frac{1}{\pi i} \frac{\xi z + 1}{\xi - z} \frac{d\xi}{\xi^2 + 1} \quad (1)$$

или

$$\frac{1}{2\pi} T(z; \zeta) dz = \frac{1}{\pi i} \frac{d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{\pi i} \frac{\xi d\xi}{\xi^2 + 1}.$$

Формула (4) п. 62 принимает следующий вид:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) \frac{d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) \frac{\xi d\xi}{\xi^2 + 1} + iC; \quad u(\xi) = U(\xi, 0).$$

Второй интеграл есть величина постоянная. Обозначая той же буквой C величину

$$C = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) \frac{\xi d\xi}{\xi^2 + 1},$$

мы представим интеграл Шварца в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi) d\xi}{\xi - z} + iC. \quad (2)$$

Для простоты допустим, что отрезки $\gamma_2, \gamma_4, \dots, \gamma_n$ — все конечные, так что на частях границы полуплоскости, уходящих в бесконечность, задана функция $U(\xi, 0) = f(\xi)$.

Пусть t — точка на одном из отрезков γ_{jk} . В формуле (2) положим $z \rightarrow t$. Повторяя рассуждения п. 62, мы придём к сингулярному интегральному уравнению

$$\text{на } \gamma_m \quad -\frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_m} u(\xi) \operatorname{Re} \left(\frac{d\xi}{\xi - t} \right) = f^*(t) - \operatorname{Im} \{ \varphi(t) \} + C'_m.$$

Смысл обозначений — тот же, что и в п. 62.

Наше уравнение можно упростить. Прежде всего, величины $\xi, t, d\xi$ — действительные, поэтому символ Re мож-

но опустить. Обозначим ещё для краткости

$$f^*(t) - \operatorname{Im} \{ \omega(t) \} + C'_m = -B(t).$$

Мы приходим тогда к уравнению

$$\frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_m} u(\xi) \frac{d\xi}{\xi - t} = B(t). \quad (3)$$

Это уравнение можно решить по способу, изложенному в п. 26. Мы используем здесь этот способ, слегка видоизменив его так, как это сделано в конце п. 25.

Пусть z — произвольная точка комплексной плоскости. Положим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_m} u(\xi) \frac{d\xi}{\xi - z}. \quad (4)$$

Пользуясь теоремой о предельных значениях интеграла типа Коши, мы получим:

$$\text{на } \gamma_{2m} \quad F_i(t) + F_e(t) = iB(t). \quad (5)$$

Введём новую неизвестную $\Phi(z)$, полагая

$$\Phi(z) = \sqrt{\prod_{k=1}^n (z - \alpha_k)(\beta_k - z)} F(z). \quad (6)$$

Радикал в формуле (6) имеет разные знаки по разные стороны отрезков γ_{2m} . Отсюда легко найти, что $\Phi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\text{на } \gamma_{2m} \quad \Phi_i(t) - \Phi_e(t) = iB(t) \sqrt{\prod_{k=1}^n (t - \alpha_k)(\beta_k - t)}. \quad (7)$$

Одно из решений этого уравнения есть

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_m} B(\xi) \sqrt{\prod_{k=1}^n (\xi - \alpha_k)(\beta_k - \xi)} \frac{d\xi}{\xi - z},$$

и, следовательно,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\prod_{k=1}^n (z - \alpha_k)(\beta_k - z)}} \times \\ \times \int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_m} B(\xi) \sqrt{\prod_{k=1}^n (\xi - \alpha_k)(\beta_k - \xi)} \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Отсюда мы найдём $u(t)$, пользуясь формулой

$$u(t) = F_i(t) - F_e(t),$$

которая в нашем случае даёт:

на γ_{2n}

$$u(t) = \frac{1}{\pi \sqrt{\prod_{k=1}^n (t - \alpha_k)(\beta_k - t)}} \times$$

$$\times \int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_{2n}} \beta(\xi) \sqrt{\prod_{k=1}^n (\xi - \alpha_k)(\beta_k - \xi)} \frac{d\xi}{\xi - t}. \quad (8)$$

Общее решение мы получим, прибавив к этому $u_0(t)$ — решение однородного уравнения

на γ_{2n}

$$\frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_{2n}} u_0(\xi) \frac{d\xi}{\xi - t} = 0.$$

Полагая

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_{2n}} u_0(\xi) \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{\Phi_0(z)}{\sqrt{\prod_{k=1}^n (z - \alpha_k)(\beta_k - z)}},$$

мы получим

$$\Phi_{0i}(t) - \Phi_{0e}(t) = 0.$$

Отсюда следует, что $\Phi_0(t)$ однозначна на всей плоскости. С помощью рассуждений, аналогичных проведенным в п. 25, мы легко убедимся, что $\Phi_0(t)$ есть произвольный полином степени $n-1$. Обозначая его через $\frac{1}{2} Q_{n-1}(t)$, имеем:

$$u_0(t) = F_{0i}(t) - F_{0e}(t) = \frac{Q_{n-1}(t)}{\sqrt{\prod_{k=1}^n (t - \alpha_k)(\beta_k - t)}}. \quad (9)$$

Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \text{на } \gamma_{2m} \quad u(t) = & \frac{1}{\pi \sqrt{\prod_{k=1}^n (t - \alpha_k)(\beta_k - t)}} \times \\
 & \times \int_{\gamma_2 + \dots + \gamma_m} B(\xi) \sqrt{\prod_{k=1}^n (\xi - \alpha_k)(\beta_k - \xi)} \frac{d\xi}{\xi - t} + \\
 & + \frac{Q_{n-1}(t)}{\sqrt{\prod_{k=1}^n (t - \alpha_k)(\beta_k - t)}}.
 \end{aligned} \quad (10)$$

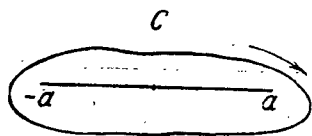
Коэффициенты полинома $Q_{n-1}(t)$ должны быть взяты действительными, так как функция $u(t)$ — действительная.

Формула (10) содержит $2n$ произвольных постоянных: n постоянных C'_m , содержащихся в $B(\xi)$, и n коэффициентов полинома $Q_{n-1}(t)$. Их можно определить, задавая те или иные дополнительные условия. В частности, можно

их подобрать так, чтобы $u(t)$ была непрерывна в точках α_k и β_k .

64. Задача о соприкосновении двух упругих полуплоскостей.

Пусть даны две упругие среды, из которых одна заполняет верхнюю, а другая — нижнюю полуплоскость (черт. 19). Допустим,



Черт. 19.

что полуплоскости соприкасаются вдоль полупрямых $x < -a$ и $x > a$, причём трение отсутствует. На участке $-a < x < a$ находится бесконечно узкая щель, разделяющая обе полуплоскости. К обеим полуплоскостям со стороны щели приложены одинаковые нормальные растягивающие усилия интенсивности h , равномерно распределённые вдоль границы щели. Наконец, будем считать, что на бесконечности напряжения равны нулю. Требуется найти поле напряжений в обеих полуплоскостях. Обозначим через $\sigma_x^1, \tau_{xy}^1, \sigma_x^2$ напряжения, через u_x^1, v_x^1 — смещения в верхней полуплоскости, через λ_1 и μ_1 — её коэффициенты Ламе.

Наконец, положим

$$x_1 = \frac{\lambda_1 + 3\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}.$$

Те же величины, относящиеся к нижней полуплоскости, будем снабжать индексом 2. Будем обозначать также через $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$, соответственно, $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$ функции Гурса для верхней, соответственно нижней, полуплоскости. Выясним краевые условия нашей задачи.

Прежде всего, вдоль всей оси

$$\tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^2 = 0, \quad y = 0, \quad (1)$$

Действительно, на участках $|x| > a$, где полуплоскости соприкасаются, трения нет и касательные напряжения отсутствуют; на участке же $|x| < a$ приложены только нормальные усилия и касательные напряжения опять-таки отсутствуют. Далее, на участке $|x| < a$, по условию, действуют нормальные растягивающие усилия интенсивности h . Это даёт нам следующую группу условий:

$$\sigma_y^1 = h, \quad \sigma_y^2 = h, \quad y = 0, \quad |x| < a. \quad (2)$$

Наконец, на участках соприкасания упругих сред вертикальные нормальные напряжения и вертикальные смещения должны быть одинаковыми для обеих сред. Это приводит нас к последней группе условий:

$$\sigma_y^1 = \sigma_y^2, \quad y = 0, \quad |x| > a; \quad (3)$$

$$u_y^1 = u_y^2, \quad y = 0, \quad |x| > a. \quad (4)$$

Решая нашу задачу, мы заменим краевые условия (3) и (4) следующими:

$$u_y^1 = 0, \quad u_y^2 = 0, \quad y = 0, \quad |x| > a. \quad (5)$$

Условие (4) при этом, очевидно, не нарушается. Что же касается условия (3), то, как мы в конечном счёте убедимся, оно также окажется выполненным.

Введение условий (5) вместо (3) и (4) позволяет нам рассматривать отдельно верхнюю и нижнюю полуплос-

кости. Так, для верхней полуплоскости мы имеем следующие краевые условия:

$$\tau_{xy}^1 = 0, \quad y = 0; \quad (6)$$

$$\sigma_y^1 = h, \quad y = 0, \quad |x| > a; \quad (7)$$

$$u_y^1 = 0, \quad y = 0, \quad |x| > a. \quad (8)$$

Те же условия имеют место и для нижней полуплоскости. Поэтому мы в дальнейшем будем опускать индексы 1 и 2.

Обратимся к функциям Гурса $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. По формулам (8) и (9) п. 37, на прямой $y = 0$

$$\overline{\varphi(z)} + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = i \int (X_v + iY_v) ds. \quad (9)$$

По известным формулам

$$X_v = \sigma_x \cos(\nu, x) + \tau_{xy} \cos(\nu, y),$$

$$Y_v = \tau_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_y \cos(\nu, y),$$

где ν — внешняя нормаль к контуру. Мы рассматриваем верхнюю полуплоскость, поэтому ν направлена в сторону отрицательных y , так что $\cos(\nu, x) = 0$, $\cos(\nu, y) = -1$. Учтя теперь условие (6), мы получим $X_v = 0$, $Y_v = -\sigma_y$. Далее, $ds = dx$. Подставив всё это в (9), мы получим:

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \int \sigma_y dx, \quad y = 0.$$

Но при $y = 0$, $z = x = \bar{z}$, и последнему равенству мы вправе придать вид

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \int \sigma_y dx, \quad y = 0. \quad (10)$$

Обозначим

$$z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \theta(z). \quad (11)$$

Функция $\theta(z)$ регулярна в верхней полуплоскости. Из (10) следует

$$\varphi(z) + \overline{\theta(z)} = \int \sigma_y dx. \quad (12)$$

Правая часть последнего равенства — величина действительная. Отсюда следует, что и левая часть — действительная, т. е.

$$\text{Im}\{\varphi(z)\} = \text{Im}\{\theta(z)\}, \quad y = 0.$$

Но тогда гармонические функции $\text{Im}\{\varphi(z)\}$ и $\text{Im}\{\theta(z)\}$, будучи равными на границе полуплоскости, равны повсюду,

и, следовательно, аналитические функции $\varphi(z)$ и $\theta(z)$ могут отличаться на действительную постоянную. Но $\varphi(z)$ вообще определяется только с точностью до постоянной, поэтому мы вправе положить

$$\varphi(z) \equiv \theta(z).$$

Подставив это в (12) и дифференцируя по x , получим:

$$\operatorname{Re}\{\varphi'(z)\} = \frac{1}{2}\sigma_y, \quad y=0. \quad (13)$$

Используя условие (7), имеем:

$$\operatorname{Re}\{\varphi'(z)\} = \frac{h}{2}, \quad y=0, \quad |x| < a. \quad (14)$$

Займёмся условием (8). По формуле (4) п. 37,

$$2\mu(u_x + iu_y) = x\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}.$$

Положим в этой формуле $y=0$. Тогда $z=\bar{z}$, и

$$2\mu(\bar{u}_x + iu_y) = x\varphi(z) - \overline{\psi(z)}.$$

Отделяя мнимые части и пользуясь условием (8), мы получим

$$\operatorname{Im}\{\varphi(z)\} = 0, \quad y=0, \quad |x| > a.$$

родифференцировав это равенство по x , получим:

$$\operatorname{Im}\{\varphi'(z)\} = 0, \quad y=0, \quad |x| > a. \quad (15)$$

Условия (14) и (15) показывают, что функция $\varphi'(z)$ есть решение задачи Гильберта.

Положим $\Phi(z) = \frac{1}{i}\varphi'(z)$. Условия (14) и (15) переходят в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}\{\Phi(z)\} &= 0, & y=0, & |x| > a, \\ \operatorname{Im}\{\Phi(z)\} &= -\frac{h}{2}, & y=0, & |x| < a. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

В нашем случае есть только один отрезок $\gamma_2(-a, a)$. Далее, $\omega(t) \equiv 0$, $f^*(s) = -\frac{h}{2}$ и, следовательно, $B(t) = -\frac{h}{2} + C_1$. Величину $-\frac{h}{2} + C_1$ обозначим через B . Теперь

по формуле (10) п. 63 мы найдём:

при $y=0$, $|t| < a$

$$\operatorname{Re} \{\Phi(t)\} = \frac{B}{\pi \sqrt{a^2 - t^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi}{\xi - t} + \frac{A}{\sqrt{a^2 - t^2}}. \quad (17)$$

Вычислим интеграл в (17). Мы несколько упростим его, умножив и разделив на i и приведя его этим к виду

$$\frac{B}{\pi \sqrt{t^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{\xi^2 - a^2} d\xi}{\xi - t}.$$

Выберем ту ветвь корня, которая на бесконечности имеет разложение

$$\sqrt{z^2 - a^2} = z - \frac{a^2}{2iz} + \dots$$

Рассмотрим интеграл типа Коши:

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sqrt{\xi^2 - a^2}}{\xi - z} d\xi.$$

Контур C изображён на черт. 19; точка z лежит вне C . Прибавим и вычтем ζ в числителе подинтегральной функции. Мы получим тогда

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sqrt{\xi^2 - a^2} - \zeta}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta}{\xi - z} d\xi.$$

Второй интеграл равен нулю, так как функция $\frac{\zeta}{\xi - z}$ регулярна внутри C . Далее, функция $\sqrt{\xi^2 - a^2} - \zeta$ регулярна вне C и равна нулю на бесконечности. Первый интеграл, следовательно, есть интеграл Коши, а потому

$$\chi(z) = \sqrt{z^2 - a^2} - z.$$

Контур C эквивалентен дважды обходимому отрезку $(-a, a)$. Сверху и снизу отрезка корень имеет разные знаки, так что

$$\chi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{\xi^2 - a^2}}{\xi - z} d\xi.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{\xi^2 - a^2}}{\xi - z} d\xi = \sqrt{z^2 - a^2} - z.$$

По теореме о предельных значениях интеграла типа Коши,

$$\frac{1}{i t} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{\xi^2 - a^2}}{\xi - t} d\xi = \frac{1}{2} [\chi_i(t) + \chi_e(t)] = -t.$$

Подставив это в (17), получим:

при $y=0$ и $|t| < a$ $\operatorname{Re}\{\Phi(t)\} = -\frac{Bt i}{\sqrt{t^2 - a^2}} + \frac{A}{\sqrt{t^2 - a^2}}. \quad (18)$

Докажем, что $A=0$. Положим $\psi'(z) = p + iq$; тогда $\Phi(z) = q - ip$. По формуле (5) п. 37

$$p = \frac{1}{4} (\sigma_x + \sigma_y).$$

В нашей задаче, очевидно, σ_x и σ_y одинаковы в точках, симметричных относительно оси y . Отсюда следует, что

$$p(x, y) = p(-x, y),$$

т. е. $p(x, y)$ — чётная функция от x . Но тогда

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

— также чётная функция от x , а функция

$$q(x, 0) = \int_a^x \frac{\partial q(x, 0)}{\partial x} dx + q(0, 0)$$

— либо нечётная, либо отличается от нечётной на постоянную. По формуле (18)

$$q(t, 0) = \operatorname{Re}\{\Phi(t)\} = -\frac{Bt i}{\sqrt{t^2 - a^2}} + \frac{A}{\sqrt{t^2 - a^2}}, \quad |t| < a.$$

Отсюда

$$q(-t, 0) = \frac{Bt i}{\sqrt{t^2 - a^2}} + \frac{A}{\sqrt{t^2 - a^2}}.$$

Сумма

$$q(t, 0) + q(-t, 0) = \frac{2A}{\sqrt{t^2 - a^2}}$$

может быть постоянной только при $A=0$.

Итак,

$$\operatorname{Re}\{\Phi(t)\} = -\frac{BIt}{\sqrt{t^2 - a^2}}, \quad y=0, \quad |t| < a. \quad (19)$$

Напомним, что $\operatorname{Re}\{\Phi(t)\} = 0$ при $|t| > a$ и $y=0$. Таким образом, $\operatorname{Re}\{\Phi(t)\}$ известна на всей действительной оси.

По формулам (1) и (2) п. 63:

$$\Phi(z) = -\frac{B}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}(\xi - z)} + iC', \quad (20)$$

где C' — действительная постоянная. Чтобы вычислить интеграл в (20), рассмотрим интеграл

$$\rho(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - a^2}(\zeta - z)},$$

где C — контур, изображённый на черт. 19 (стр. 266). Функция $\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - a^2}}$ регулярна вне C и равна единице на бесконечности; по известному свойству интеграла Коши

$$\rho(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1.$$

Заменим контур C эквивалентным ему контуром, состоящим из дважды обходимого отрезка $(-a, a)$. Рассуждая так же, как и при вычислении интеграла (17), мы найдём, что

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}(\xi - z)} = \frac{1}{i} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right),$$

в

$$\Phi(z) = \frac{B}{i} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) + C'i.$$

Теперь

$$\psi'(z) = i\Phi(z) = B \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) - C'.$$

Остаётся определить постоянные B и C' . По предположению, напряжения на бесконечности равны нулю. Отсюда

$$(\sigma_x + \sigma_y)_{z \rightarrow \infty} = 4\operatorname{Re}\{\psi'(\infty)\} = -4C' = 0,$$

и $C' = 0$. Чтобы найти B , обратимся к условию (14). На

отрезке $(-a, a)$ радикал $\sqrt{z^2 - a^2}$ — мнимый, и потому
 при $y=0, -a < x < a$ $\operatorname{Re}\{\varphi'(x)\} = -B$,

что даёт, в силу условия (14), $B = -\frac{h}{2}$. Окончательно

$$\varphi'(z) = -\frac{h}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right). \quad (21)$$

Мы получили решение для верхней полуплоскости, удовлетворяющее краевым условиям (1), (2) и (5). Решая нашу задачу для нижней полуплоскости, мы придём к тому же решению (21), так что $\varphi_1(z) \equiv \varphi_2(z)$. Остаётся проверить, что наше решение удовлетворяет условию (3). Но это непосредственно следует из формулы (13), в силу которой

$$\text{при } y=0 \quad \sigma_y = 2\operatorname{Re}\{\varphi_1'(z)\} = 2\operatorname{Re}\{\varphi_2'(z)\} = \sigma_y^2.$$

Наша задача теперь полностью решена.

65. Давление жёсткого штампа на упругую полуплоскость. Представим себе жёсткий штамп произвольной формы, вдавленный в упругую полуплоскость (черт. 20). Поставим задачу об определении напряжений, обусловленных давлением штампа. Примем следующие допущения:

а) Участки границы $x > a$ и $x < -a$ свободны от напряжений.

б) Штамп вдавлен силами, нормальными к границе.

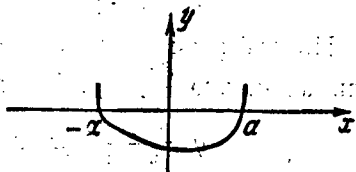
Отсюда следует, что трение под штампом отсутствует.

Указанные допущения позволяют сформулировать крайние условия задачи:

$$1) \quad \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 0, \quad (1)$$

$$2) \quad \sigma_y = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } |x| > a. \quad (2)$$

3) Так как форма штампа известна, то можно считать известными вертикальные смещения точек полуплоскости



Черт. 20.

под штампом. Таким образом,

$$u_y = f(x) \text{ при } y=0 \text{ и } |x| < a, \quad (3)$$

где $f(x)$ — данная функция.

Так же, как и в п. 64, условие (1) позволяет установить следующее ($\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции Гурса):

$$z\varphi'(z) + \psi(z) = \varphi(z), \quad (4)$$

$$\operatorname{Re} \{ \varphi'(z) \} = \frac{1}{2} \sigma_y \text{ при } y=0, \quad (5)$$

$$2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\varphi(z) - \overline{\varphi(z)}. \quad (6)$$

В силу (4), задача сводится к отысканию только функции $\varphi(z)$; соотношения (5) и (6) сводят эту последнюю задачу к задаче Гильберта.

Обозначим

$$\varphi(z) = p_1 + iq_1, \quad \varphi'(z) = p + iq.$$

Условия (2) и (5) дают:

$$p = 0 \text{ при } y=0 \text{ и } |x| > a. \quad (7)$$

Отделяя в (6) мнимые части и пользуясь условием (3), получим:

$$q_1 = \frac{2\mu}{x+1} f(x) \text{ при } y=0 \text{ и } |x| < a.$$

Продифференцируем это равенство по x и примем во внимание, что $\frac{\partial q_1}{\partial x} = q$. Мы получим тогда:

$$q = \frac{2\mu}{x+1} f'(x) \text{ при } y=0 \text{ и } |x| < a. \quad (8)$$

Мы пришли опять к задаче Гильберта. Её можно решить, пользуясь методом п. 63. Мы изберём другой метод, который освободит нас от необходимости вычислять некоторые постоянные.

Допуская, что $\varphi(z)$ ограничена в полуплоскости, мы можем её представить с помощью интеграла Шварца¹⁾

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_1(\xi, 0)}{\xi - z} \frac{1 + \xi z}{1 + \xi^2} d\xi + iC.$$

¹⁾ Ядра Шварца для верхней и нижней полуплоскостей различаются знаками.

Продифференцируем это равенство, а затем проинтегрируем по частям. Учитывая, что $\frac{\partial p_1(\xi, y)}{\partial \xi} = p(\xi, y)$, мы получим

$$\psi'(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(\xi, 0)}{\xi - z} d\xi.$$

Обозначим для краткости $p(\xi, 0) = p(\xi)$. Пользуясь условием (7), мы найдём:

$$\psi'(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{p(\xi) d\xi}{\xi - z}. \quad (9)$$

Пусть теперь $z \rightarrow t$, где t — точка отрезка $(-a, a)$ действительной оси. Так как z лежит в нижней полуплоскости, то

$$\psi'(t) = p(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{p(\xi) d\xi}{\xi - t}.$$

Отделим мнимые части. В силу условия (8), имеем:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(\xi) d\xi}{\xi - t} = \frac{2\mu}{x+1} f'(t). \quad (10)$$

Это — сингулярное уравнение, решение которого можно получить по способу п. 25: именно, преобразуя к нашим обозначениям формулу (26) п. 25, мы получим:

$$p(t) = -\frac{2\mu}{\pi(x+1)\sqrt{a^2-t^2}} \int_{-a}^a \frac{f'(\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi-t} d\xi + \frac{A}{\sqrt{a^2-t^2}}. \quad (11)$$

Постоянную A можно определить, если известен главный вектор P усилий, приложенных к штампу. Действительно,

$$P = \int_{-a}^a \sigma_y(t, 0) dt = 2 \int_{-a}^a p(t) dt.$$

Обозначив для краткости первый член в (11) через $p_0(t)$, имеем, очевидно,

$$\frac{1}{2} P = \int_{-a}^a p_0(t) dt + \pi A,$$

откуда

$$A = \frac{P}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a p_0(t) dt. \quad (12)$$

Отметим частный случай плоского штампа. В этом случае $f(x) = \text{const}$ и

$$p(t) = \frac{P}{2\pi \sqrt{a^2 - t^2}}. \quad (13)$$

Эта формула даёт закон распределения нормальных напряжений под штампом. Далее,

$$\varphi'(z) = -\frac{P}{2\pi^2 i} \int_{-a}^a \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (\xi - z)}.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, положим

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (\xi - z)},$$

где C — контур, изображённый на чертеже 19. Функция $\frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}$ регулярна вне C и равна нулю на бесконечности, поэтому

$$\omega(z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$$

Заменяя контур C дважды проходимым отрезком $(-a, a)$, получим

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (\xi - z)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$

и, следовательно,

$$\varphi'(z) = -\frac{P}{2\pi \sqrt{a^2 - z^2}}. \quad (14)$$

В формуле (14) корень — отрицательный на отрезке $(-a, a)$ снизу.

66. Случай нескольких штампов. В случае, когда на полуплоскость давит несколько штампов, задача принципиально решается так же, как и в случае одного штампа; вычисления, конечно, делаются более сложными.

Обозначим через $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$ участки границы, с которыми соприкасается штамп; совокупность этих участков обозначим через L , а совокупность дополнительных участков границы — через M . Обозначим по-прежнему через $f(x)$ вертикальное смещение под штампом в точке с абсциссой x . Величина $f(x)$ может считаться данной заранее; её аналитическое выражение будет различным на различных участках (α_k, β_k) . Пользуясь обозначениями предшествующего пункта, мы сведём задачу о давлении нескольких штампов к следующей задаче Гильберта:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \{ \varphi'(t) \} &= 0 \text{ на } M, \\ \operatorname{Im} \{ \varphi'(t) \} &= \frac{2\mu}{x+1} f'(t) \text{ на } L, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

причём

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(\xi)}{\xi-z} d\xi = -\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p(\xi)}{\xi-z} d\xi. \quad (2)$$

Вывод этих формул такой же, как в предыдущем пункте. Полагая в (2) $z \rightarrow t$, где t — точка на L , и отделяя мнимые части, мы придём к уравнению

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{p(\xi) d\xi}{\xi-t} = \frac{2\mu}{x+1} f'(t). \quad (3)$$

Его решение можно написать по формуле (8) п. 63, заменив в этой формуле $B(t)$ на $\frac{2\mu}{x+1} f'(t)$:

$$\begin{aligned} \text{на } L \quad p(t) &= -\frac{2\mu}{\pi(x+1)} \sqrt{\prod_{k=1}^n (t-\alpha_k)(\beta_k-t)} \times \\ &\times \int_L \frac{f(\xi) \sqrt{\prod_{k=1}^n (\xi-\alpha_k)(\beta_k-\xi)}}{\xi-t} d\xi + \frac{Q_{n-1}(t)}{\sqrt{\prod_{k=1}^n (t-\alpha_k)(\beta_k-t)}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты полинома $Q_{n-1}(t)$ могут быть определены,

если известны главные векторы сил, приложенных к каждому штампу в отдельности; эти коэффициенты выражаются через гиперэллиптические интегралы.

Если штампы — плоские, то $f(x) = \text{const}$ (постоянные могут быть различными на различных участках (α_k, β_k)), и $f'(x) \equiv 0$. В этом случае

$$p(t) = \frac{Q_{n-1}(t)}{\sqrt{\prod_{k=1}^n (t - \alpha_k)(\beta_k - t)}}. \quad (5)$$

Подставив это в (2), мы легко найдём:

$$\psi'(z) = \frac{Q_{n-1}(z)}{\sqrt{\prod_{k=1}^n (z - \alpha_k)(\beta_k - z)}}. \quad (6)$$

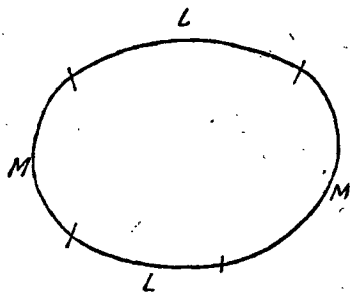
67. Смешанная задача теории упругости. Рассмотрим некоторую плоскую область D , заполненную упругой средой. Мы будем считать область D односвязной (черт. 21). Пусть на части её контура, которую мы обозначим через M , даны смещения точек среды, а на дополнительной части контура, которую мы обозначим через L ,

даны силы, действующие на упругую среду. Задача об определении напряжений в упругой среде при этих условиях и называется смешанной задачей теории упругости.

В дальнейшем будем считать, что контур области D достаточно гладкий.

Введём следующие обозначения. Контур области D обозначим через C , так что $C = L + M$. Далее, L состоит

из нескольких несвязанных между собой дуг, которые мы обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$; комплексные координаты точек, отделяющих эти дуги от дуг M , будем обозначать $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \dots; \alpha_n, \beta_n$. Составляющие внешних сил, приложенных к дугам L , обозначим, как обычно, через X_j и Y_j ; упругие смещения — через u_x и u_y . В силу формул



Черт. 21.

(4), (8) и (9) п. 37, функции Гурса нашей задачи удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$\text{на } M \quad z\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 2\mu(u_x + iu_y), \quad (1)$$

$$\text{на } \gamma_k \quad \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = i \int (X_v + iY_v) ds + C_k. \quad (2)$$

Преобразуем эти условия. Определим функции точки контура $\delta(z)$ и $f(z)$, полагая

$$\delta(z) = \begin{cases} 0 & \text{на } M, \\ x+1 & \text{на } L; \end{cases} \quad (3)$$

$$f(z) = \begin{cases} -i \int (X_v + iY_v) ds & \text{на } L, \\ 2\mu(u_x + iu_y) & \text{на } M. \end{cases} \quad (4)$$

Постоянные, с точностью до которых определяется интеграл

$$\int (X_v + iY_v) ds$$

на каждой из дуг γ_k , можно подобрать так, чтобы $f(z)$ была непрерывной, например, в точках α_k . Наконец, положим ещё

$$C(z) = \begin{cases} -C_k & \text{на } \gamma_k, \\ 0 & \text{на } M. \end{cases} \quad (5)$$

В этих обозначениях условия (1) и (2) можно записать так:

$$z\varphi(z) - \delta(z)\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = f(z) + C(z). \quad (6)$$

Как обычно, существенно определить функцию $\varphi(z)$; после этого можно найти $\psi(z)$, вычислив с помощью (6) её контурные значения, по которым $\psi(z)$ восстанавливается через посредство интеграла Коши или Шварца.

Займёмся нахождением $\varphi(z)$. Умножим обе части равенства (6) на

$$\frac{1}{4\pi} T(z; \zeta) d\zeta,$$

где $T(z; \zeta)$ — ядро Шварца области D и проинтегрируем по контуру C . Повторяя рассуждения п. 39, мы получим

$$\begin{aligned} \chi \varphi(z) - \frac{1}{4\pi} \int_C \lambda(\zeta) \varphi(\zeta) T(z; \zeta) d\zeta - \frac{1}{4\pi} \int_C \zeta \overline{\varphi'(\zeta)} T(z; \zeta) d\zeta = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_C f(\zeta) T(z; \zeta) d\zeta + \frac{1}{4\pi} \int_C C(\zeta) T(z; \zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение (7) можно упростить.

Вспомним тождество (23) п. 38

$$\frac{1}{4\pi} \int_C \overline{F(\zeta)} T(z; \zeta) d\zeta = \frac{1}{2} \overline{F(a)},$$

верное для всякой функции $F(z)$, регулярной в D . В п. 39 было установлено, что $\varphi'(z)$ регулярна в D , и поэтому

$$\frac{1}{4\pi} \int_C \overline{\varphi'(\zeta)} T(z; \zeta) d\zeta = \frac{1}{2} \overline{\varphi'(a)}.$$

Положим в этом тождестве $z=a$. Вычитая, получим:

$$\frac{1}{4\pi} \int_C \overline{\varphi'(\zeta)} \{T(z; \zeta) - T(a, \zeta)\} d\zeta = 0. \quad (8)$$

Тождество (8) умножим на z и вычтем из (7). Третий член слева в (7) преобразуется так:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{4\pi} \int_C \zeta \overline{\varphi'(\zeta)} T(z; \zeta) d\zeta = \\ = - \frac{1}{4\pi} \int_C \overline{\varphi'(\zeta)} \left\{ [(\zeta - z) T(z; \zeta) - z T(a, \zeta)] \frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}} \right\} d\bar{\zeta} = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_C \overline{\varphi'(\zeta)} \frac{d}{d\sigma} \left\{ [(\zeta - z) T(z; \zeta) - z T(a, \zeta)] \frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}} \right\} d\zeta. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, производная $\varphi'(\zeta)$ исключена из уравнения (7). Отметим ещё, что ядро интеграла (9) непрерывно в области D , включая контур. Ядро интеграла (9) будем обозначать через $K(z; \zeta)$.

Обратимся ко второму члену слева в (7). По определению и по формуле (27) п. 38

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_C \delta(\zeta) \varphi(\zeta) T(z; \zeta) d\zeta &= \frac{1+x}{4\pi} \int_L \varphi(\zeta) T(z; \zeta) d\zeta = \\ &= \frac{1+x}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta + \frac{1+x}{4\pi} \int_L \varphi(\zeta) P(z; \zeta) d\sigma. \end{aligned} \quad (10)$$

Переходя к правой части уравнения (7), обозначим

$$\frac{1}{4\pi} \int_C f(\zeta) T(z; \zeta) d\zeta = F(z). \quad (11)$$

Далее, по определению,

$$\frac{1}{4\pi} \int_C C(\zeta) T(z; \zeta) d\zeta = - \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{4\pi} \int_{\gamma_k} T(z; \zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^n C_k F_k(z), \quad (12)$$

где мы обозначили

$$F_k(z) = - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma_k} T(z; \zeta) d\zeta.$$

Формулы (9) и (12) позволяют привести уравнение (7) к следующему виду:

$$\begin{aligned} x\varphi(z) - \frac{1+x}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1+x}{4\pi} \int_L \varphi(\zeta) P(z, \zeta) d\zeta + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_C \overline{\varphi(\zeta)} K(z; \zeta) d\zeta = F(z) + \sum_{k=1}^n C_k F_k(z). \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть теперь $z \rightarrow t$, где t — точка на L . Пользуясь теоремой о предельных значениях интегралов типа Коши, мы получим сингулярное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} (x-1)\varphi(t) - \frac{x+1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta - \frac{x+1}{4\pi} \int_L \varphi(\zeta) P(t, \zeta) d\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_C \overline{\varphi(\zeta)} K(t, \zeta) d\zeta = 2F(t) + 2 \sum_{k=1}^n C_k F_k(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Перенесём второй и третий интегралы направо и полученную таким образом правую часть обозначим через $\Phi(t)$. Тогда

$$(x-1)\varphi(t) - \frac{x+1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta = \Phi(t). \quad (15)$$

Рассматривая временно $\Phi(t)$, как величину известную, мы можем уравнение (15) решить. По формуле (8) п. 26,

$$\begin{aligned} \text{на } L \quad \varphi(t) = & -\frac{x-1}{4x} \Phi(t) - \frac{x+1}{4\pi i} \prod_{k=1}^n \left(\frac{t-\alpha_k}{t-\beta_k} \right)^m \int_L \left(\frac{\zeta-\beta_k}{\zeta-\alpha_k} \right)^m \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta + \\ & + \frac{Q_{n-1}(t)}{\prod_{k=1}^n (t-\alpha_k)^{1-m} (t-\beta_k)^m}; \quad m = \frac{1}{2\pi i} \ln \left(-\frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

Получим это решение требованием, чтобы $\varphi(t)$ была непрерывна в точках α_k . Для этого необходимо и достаточно, чтобы $Q_{n-1}(t) = 0$, и тогда

$$\begin{aligned} \text{на } L \quad \varphi(t) = & -\frac{x-1}{4x} \Phi(t) - \\ & - \frac{x+1}{4\pi i} \prod_{k=1}^n \left(\frac{t-\alpha_k}{t-\beta_k} \right)^m \int_L \left(\frac{\zeta-\beta_k}{\zeta-\alpha_k} \right)^m \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta. \end{aligned} \quad (16)$$

Наметим вкратце дальнейший ход решения. Постоянные C_k , которые до сих пор оставались произвольными, можно выбрать так, чтобы $\varphi(t)$ была непрерывной также и в точках β_k . Подставим эти значения в (13) и (16). Далее, в интеграле $-\frac{1+x}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$ заменим $\varphi(\zeta)$ его выражением из (16). После этого ядро указанного интеграла станет абсолютно интегрируемым. Теперь положим в (13) $z \rightarrow t$, где t на этот раз означает любую точку контура C . Можно выполнить предельный переход под знаком всех интегралов, и это приведёт нас к интегральному уравнению вида

$$x\varphi(t) - \int_C K'(\zeta, t) \varphi(\zeta) d\zeta - \int_C K''(\zeta, t) \overline{\varphi(\zeta)} d\zeta = \Omega(t), \quad (17)$$

где $\Omega(t)$ — известная функция. Отделив в этом уравнении действительные и мнимые части, мы получим систему

двух интегральных уравнений типа Фредгольма. Можно доказать, что эта система, а с ней и уравнение (17), всегда разрешима. Решив уравнение (17), мы найдём контурные значения $\varphi(t)$, и тогда $\varphi(z)$ можно восстановить по её контурным значениям через интеграл Коши.

Решение смешанной задачи теории упругости изложено со всей подробностью в работах Д. И. Шермана [37h,k]. Следует отметить, что уравнение (15) решено в [37h] излишне сложным методом.

68. Случай области, рационально отображаемой на круг. В цитированной выше статье [37h] Д. И. Шерман доказал следующую теорему:

Если область D конформно отображается на круг с помощью рациональной функции, то смешанная задача теории упругости для этой области решается в конечном виде в квадратурах.

Рассуждения Д. И. Шермана во многом совпадают с рассуждениями, которыми пользуется акад. Н. И. Мусхелишвили при доказательстве аналогичной теоремы для основных задач. Мы здесь воспроизведём рассуждения Д. И. Шермана с некоторыми несущественными изменениями.

Пусть $z = \omega(\tau)$ — функция, конформно отображающая область D на круг $|\tau| < 1$. Контур C при этом отображении переходит в окружность $|\tau| = 1$, которую мы будем дальше обозначать через Γ , а совокупности дуг L и M перейдут в некоторые совокупности дуг L' и M' , причём $L' + M' = \Gamma$. Дуги γ_k перейдут в некоторые дуги γ'_k окружности Γ . Концы дуг γ'_k обозначим через α'_k и β'_k . Обозначим ещё

$$\zeta = \omega(\tau), \quad \varphi(\omega(\tau)) = \Phi(\tau), \quad \psi(\omega(\tau)) = \Psi(\tau),$$

$$f(\omega(\tau)) = F(\tau), \quad \delta(\omega(\tau)) = \delta_1(\tau), \quad C(\omega(\tau)) = C_1(\tau).$$

Теперь в формуле (6) п. 67 сделаем замену $\zeta = \omega(\tau)$. Указанная формула принимает следующий вид:

$$\lambda \Phi(\tau) - \delta_1(\tau) \Phi(\tau) - \frac{\omega'(\sigma)}{\omega'(\tau)} \overline{\Psi'(\sigma)} - \overline{\Psi(\sigma)} = F(\tau) + C_1(\tau). \quad (1)$$

По предположению, функция $\omega(\tau)$ — рациональная:

$$\omega(\tau) = \frac{a(\tau)}{b(\tau)},$$

где $a(z)$ и $b(\sigma)$ — полиномы. Отсюда

$$\omega'(z) = \frac{b(\sigma) a'(\sigma) - a(\sigma) b'(\sigma)}{b^2(\sigma)} = \frac{a_1(\sigma)}{b_1(\sigma)},$$

где $a_1(\sigma)$ и $b_1(\sigma)$ — также полиномы. Далее,

$$\overline{\omega'(z)} = \frac{\overline{a_1(\sigma)}}{\overline{b_1(\sigma)}}.$$

Обозначим через $\bar{a}_1(z)$ и $\bar{b}_1(z)$ полиномы, получаемые из $a_1(\sigma)$ и $b_1(\sigma)$ заменой всех их коэффициентов на комплексно сопряжённые. Тогда

$$\overline{a_1(\sigma)} = \bar{a}_1(\bar{\sigma}), \quad \overline{b_1(\sigma)} = \bar{b}_1(\bar{\sigma}).$$

Но так как $|\sigma| = 1$, то $\bar{\sigma} = \frac{1}{\sigma}$, и поэтому

$$\overline{a_1(z)} = \bar{a}_1\left(\frac{1}{z}\right), \quad \overline{b_1(z)} = \bar{b}_1\left(\frac{1}{z}\right).$$

Отсюда видно, что $\overline{\omega'(z)}$ есть рациональная функция от z ; то же можно сказать и о функции $\frac{\omega(z)}{\omega'(z)}$. Будучи рациональной, эта функция может быть представлена, как частное двух полиномов:

$$\frac{\omega(z)}{\omega'(z)} = \frac{\sum_{k=0}^l a_k z^k}{\sum_{k=0}^{l_1} b_k z^k} = \frac{r(z)}{r_1(z)}. \quad (2)$$

Заметим, что полином $r(z)$ не обращается в нуль на Γ — в противном случае $\omega'(z)$ обращалось бы на Γ в нуль, и отображение не было бы конформным. Однако, внутри Γ $r(z)$ может иметь нули. Их число обозначим через l' . Очевидно, $l' < l_1$.

Равенство (1) умножим на

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{r(z)}{z - \tau} dz,$$

где τ — точка внутри Γ , и проинтегрируем по Γ . Вспомогательное определение функций $\delta_1(\sigma)$ и $C_1(\sigma)$, мы получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \chi r(\tau) \Phi(\tau) - \frac{\chi + 1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{r(\sigma) \Phi(\sigma)}{\sigma - \tau} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\rho(\sigma) \overline{\Phi'(\sigma)}}{\sigma - \tau} d\sigma - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{r(\sigma) \overline{\Psi(\sigma)}}{\sigma - \tau} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\sigma) r(\sigma)}{\sigma - \tau} d\sigma + \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{2\pi i} \int_{\Gamma_k'} \frac{r(\sigma)}{\sigma - \tau} d\sigma. \quad (3) \end{aligned}$$

Изучим левую часть в (3). Из известного тождества

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sigma^s d\sigma}{\sigma - \tau} = \begin{cases} \tau^s & (s \geq 0), \\ 0 & (s < 0) \end{cases}$$

следует: если

$$A(\sigma) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s \sigma^s,$$

то

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \frac{A(\sigma)}{\sigma - \tau} d\sigma = \sum_{s=0}^{\infty} A_s \tau^s.$$

Это замечание позволяет просто вычислить последние два интеграла в (3) слева. Пусть

$$\Phi(\tau) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_s \tau^s, \quad \Psi(\tau) = \sum_{s=1}^{\infty} \nu_s \tau^{s-1}.$$

Тогда

$$\rho(\sigma) \overline{\Psi'(\sigma)} = \sum_{s=-\infty}^I \sigma^s \sum_{k=0}^{I-s} (k+1) \bar{\mu}_{k+1} a_{k+s},$$

$$r(\sigma) \overline{\Psi(\sigma)} = \sum_{s=-\infty}^{I_1} \sigma^s \sum_{k=1}^{I_1-s} \bar{\nu}_k b_{k+s}.$$

¹⁾ Мы полагаем, следовательно, $\Psi(0) = 0$. Этого, как известно, можно всегда потребовать заранее.

Теперь очевидно, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\rho(\sigma) \overline{\Phi'(\sigma)}}{\sigma - \tau} d\sigma = \sum_{s=0}^l \tau^s \sum_{k=0}^{l-s} (k+1) \bar{\mu}_{k+1} a_{k+s} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{r(\sigma) \overline{\Psi(\sigma)}}{\sigma - \tau} d\sigma = \sum_{s=0}^{l_1} \tau^s \sum_{k=1}^{l_1-s} \bar{\nu}_k b_{k+s} \quad (5)$$

Коэффициенты в (4) и (5) обозначим соответственно через A_n и B_n . Кроме того, введём ещё обозначения

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\sigma) \overline{r(\sigma)} d\sigma}{\sigma - \tau} = M(\tau), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{r(\sigma)}{\sigma - \tau} d\sigma = r_k(\tau).$$

Подставив всё это в (3), получим:

$$\begin{aligned} & \chi r(\tau) \Phi(\tau) - \frac{\chi+1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{r(\sigma) \Phi(\sigma)}{\sigma - \tau} d\sigma = \\ & = M(\tau) + \sum_{k=1}^n C_k r_k(\tau) - \sum_{s=0}^l A_s \tau^s - \sum_{s=0}^{l_1} B_s \tau^s. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что правая часть уравнения (6) регулярна внутри Γ . Для краткости обозначим её через $N(\tau)$:

$$N(\tau) = M(\tau) + \sum_{k=1}^n C_k r_k(\tau) - \sum_{s=0}^l A_s \tau^s - \sum_{s=0}^{l_1} B_s \tau^s.$$

Пусть теперь $\tau \rightarrow \sigma_0$, где σ_0 — произвольная точка на Γ . Применяя теорему о предельных значениях интеграла Коши, мы, как и в предшествующем пункте, получим сингулярное уравнение

$$(\chi-1) r(\sigma_0) \Phi(\sigma_0) - \frac{\chi+1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{r(\sigma) \Phi(\sigma)}{\sigma - \sigma_0} d\sigma = N(\sigma_0). \quad (7)$$

Это уравнение в существенном совпадает с уравнением

(15) предшествующего пункта, и его решение можно написать по аналогии с формулой (16) п. 67:

$$\text{на } L' \quad r(\sigma_0) \Phi(\sigma_0) = -\frac{x-1}{4x} N(\sigma_0) - \frac{x+1}{4\pi i x} \prod_{k=1}^n \left(\frac{\sigma_0 - \alpha'_k}{\sigma_0 - \beta'_k} \right)^m \int_{L'} \left(\frac{\sigma - \beta'_k}{\sigma - \alpha'_k} \right)^m \frac{N(\sigma)}{\sigma - \sigma_0} d\sigma. \quad (8)$$

Формулу (8) преобразуем. По теореме о предельных значениях интеграла типа Коши имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \left(\frac{\sigma - \beta'_k}{\sigma - \alpha'_k} \right)^m \frac{N(\sigma)}{\sigma - \sigma_0} d\sigma = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_0 - \beta'_k}{\sigma_0 - \alpha'_k} \right)^m N(\sigma_0) + \lim_{\tau \rightarrow \sigma_0} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \left(\frac{\sigma - \beta'_k}{\sigma - \alpha'_k} \right)^m \frac{N(\sigma)}{\sigma - \tau} d\sigma \right\}.$$

Подставив это в (8), получим:

$$\text{на } L' \quad r(\sigma) \Phi(\sigma) = \frac{1}{2x} N(\sigma) - \lim_{\tau \rightarrow \sigma} \left\{ \frac{x+1}{4\pi i x} \prod_{k=1}^n \left(\frac{\tau - \alpha'_k}{\tau - \beta'_k} \right)^m \int_{L'} \left(\frac{\sigma - \beta'_k}{\sigma - \alpha'_k} \right)^m \frac{N(\sigma)}{\sigma - \tau} d\sigma \right\}. \quad (9)$$

Функции в обеих частях равенства (9) — аналитические, регулярные внутри Γ , и эти функции равны на совокупности дуг L' . Принцип аналитического продолжения позволяет утверждать, что указанные функции равны тождественно внутри Γ :

$$r(\tau) \Phi(\tau) = \frac{1}{2x} N(\tau) - \frac{x+1}{4\pi i x} \prod_{k=1}^n \left(\frac{\tau - \alpha'_k}{\tau - \beta'_k} \right)^m \int_{L'} \left(\frac{\sigma - \beta'_k}{\sigma - \alpha'_k} \right)^m \frac{N(\sigma)}{\sigma - \tau} d\sigma. \quad (10)$$

Правая часть формулы (10) содержит $n+l+l_1$ неизвестных постоянных C_k, μ_s, ν_s . Если они будут определены, то формула (10) даст решение нашей задачи. Эти неизвестные можно определить из следующих условий:

- 1) $\Phi(\tau)$ непрерывна в точках β'_k .
- 2) Внутри Γ правая часть в (10) обращается в нуль в тех же точках, что и $r(\tau)$; это необходимо для того, чтобы $\Phi(\tau)$ была регулярна в Γ .
- 3) Коэффициенты Тэйлора справа и слева равны.

4) В равенстве (1) перейдем к сопряженным, умножим на $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \tau}$ и проинтегрируем по Γ . Мы получим тогда

$$\begin{aligned} \Psi(\tau) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)} \Phi'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)} (\sigma - \tau)} d\sigma + \frac{x+1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{\Phi(\sigma)}}{\sigma - \tau} d\sigma - x \overline{\Phi(0)} = \\ = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma - \tau} d\sigma - \sum_{k=1}^n \frac{\overline{C_k}}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{d\sigma}{\sigma - \tau}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставим в (11) вместо $\Phi(\tau)$ её выражение из (8). Приравняв коэффициенты Тэйлора при одинаковых степенях τ справа и слева, мы получим последнюю группу условий.

Всё сказанное приводит к системе линейных уравнений, из которой и определяются искомые постоянные.

69. Задача об обтекании дуги заданной формы. Рассмотрим задачу об обтекании достаточно гладкой незамкнутой дуги AB (черт. 22).

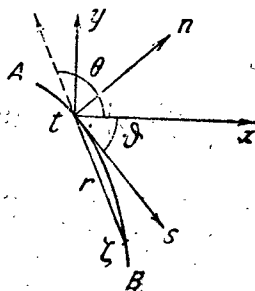
Можно решать эту задачу по методу п. 34, но этот метод приводит, в случае незамкнутого контура, к нефредгольмовскому интегральному уравнению довольно сложной структуры. Будем поэтому решать нашу задачу другим приемом, а именно, покажем, что её можно свести к некоторому сингулярному интегральному уравнению.

В отличие от сказанного в п. 34, будем считать скорость потока на бесконечности направленной как угодно по отношению к оси x . Пусть компоненты скорости потока на бесконечности равны U и V . Тогда комплексный потенциал скоростей $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ удовлетворяет на бесконечности условию

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [w'(z) - (U - iV)] = 0. \quad (1)$$

Дугу AB будем считать неподвижной. Тогда на ней должно выполняться равенство [см. (3) п. 34]

$$\phi = C. \quad (2)$$



Черт. 22.

Наша задача заключается в том, чтобы найти функцию $w(z)$, аналитическую вне дуги AB и удовлетворяющую условиям (1) и (2). В таком виде задача является неопределённой и мы присоединим поэтому ещё дополнительное условие:

Скорость потока в точке на всей дуге AB , кроме, может быть, точки A , — конечная¹⁾.

Обозначим

$$w'(z) - (U - iV) = \omega(z). \quad (3)$$

Функция $\omega(z)$ регулярна вне AB и равна нулю на бесконечности. Найдём условие, которому она удовлетворяет на AB . Обозначим через t комплексную координату произвольной точки C дуги AB и через s — длину дуги AC . Из (2) следует, что на AB $\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0$. Далее

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \operatorname{Im} \left(w'(t) \frac{dt}{ds} \right).$$

Обозначим через ϑ угол между касательной к AB в точке C и осью x . Тогда $\frac{dt}{ds} = e^{i\vartheta}$. Теперь из двух последних равенств следует

$$\operatorname{Im} \{ \omega(t) e^{i\vartheta} \} = V \cos \vartheta - U \sin \vartheta. \quad (4)$$

Функцию $\omega(z)$ будем искать в виде интеграла типа Коши следующего вида:

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{T(\zeta) e^{-i\delta} d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{T(\zeta) d\sigma}{\zeta - z}, \quad (5)$$

где $d\zeta = |d\zeta|$ и δ — угол между касательной к AB в точке ζ и осью x . Функцию $T(\zeta)$ будем предполагать действительной. Интеграл в (5) можно интерпретировать, как сумму элементарных вихрей, распределённых вдоль AB с плотностью $T(\zeta)$. В соответствии с этим М. А. Лаврентьев называет функцию $T(\zeta)$ «вихревой функцией».

¹⁾ См. [21].

Пусть точка z стремится к точке t дуги AB . По теореме о предельных значениях интеграла типа Коши

$$\omega(t) = \pm \frac{1}{2} T(t) e^{-i\theta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{T(\zeta) e^{-i\theta} d\zeta}{\zeta - t}.$$

Подставив это в (4), мы получим сингулярное интегральное уравнение с неизвестной

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{T(\zeta) e^{i(\vartheta - \theta)} d\zeta}{\zeta - t} \right\} = V \cos \vartheta - U \cos \vartheta. \quad (6)$$

Уравнению (6) можно придать несколько иную форму. Обозначим через θ угол, который вектор $t - \zeta$ образует с осью x , а через r — длину этого вектора. Тогда $\zeta - t = -re^{i\theta}$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{T(\zeta) e^{i(\vartheta - \theta)} d\zeta}{\zeta - t} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{AB} \frac{T(\zeta) e^{i(\vartheta - \theta)}}{r} d\zeta \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{AB} \frac{T(\zeta) \cos(\vartheta - \theta)}{r} d\zeta. \end{aligned}$$

Теперь уравнение (6) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{AB} \frac{T(\zeta) \cos(\vartheta - \theta)}{r} d\zeta = V \cos \vartheta - U \sin \vartheta. \quad (6_1)$$

Величина $\vartheta - \theta$ есть угол между направлением вектора $t - \zeta$ и касательной к AB в точке C . Введя угол (r, n) между направлением вектора $t - \zeta$ и нормалью в точке C к дуге AB , имеем:

$$\cos(\vartheta - \theta) = \frac{\sin(r, n)}{r}.$$

Это даёт новую форму уравнения (6):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{AB} \frac{T(\zeta) \sin(r, n)}{r} d\zeta = V \cos \vartheta - U \sin \vartheta. \quad (6_2)$$

Уравнение (6) имеет бесчисленное множество решений. Все они, будучи подставлены в (5), дают $\omega(z)$ (а, следовательно, и скорость потока), конечную везде, кроме, быть может, точек A и B . По принятому нами условию, скорость в точке B должна быть конечной. Но тогда $\omega(z)$ в точке B должна быть конечной, а для этого необходимо, чтобы

в этой точке $T(\zeta)$ обращалась в нуль. Действительно, обозначим комплексные координаты точек A и B через α и β . Именно:

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{T_1(\zeta) - T_1(\beta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{T_1(\beta)}{2\pi i} \ln \frac{\beta - z}{\alpha - z}; \quad T_1(\zeta) = T(\zeta) e^{-i\delta}. \quad (7)$$

Можно доказать, что интеграл в (7) непрерывен при $z \rightarrow \beta$, если в нём под $T(\zeta)$ понимать любое решение уравнения (6)¹⁾. Но в таком случае $\omega(z)$ будет ограниченной при $z = \beta$ тогда и только тогда, когда $T_1(\beta) = 0$, т. е. когда $T(\beta) = 0$. Этому условию мы и будем подчинять решения уравнения (6).

Уравнение (6) в общем случае не решается в конечном виде; М. А. Лаврентьев в цитированной статье [21] развивает метод его приближённого решения. Ниже мы даём точное решение для двух простейших случаев, когда AB есть отрезок прямой или дуга круга²⁾.

а) Пусть AB есть отрезок $(-a, a)$ действительной оси. В этом случае $\vartheta = \delta = 0$, величины ζ и t — действительные, и уравнение (6) упрощается:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{T(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = -V. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) напишем по формуле (26) п. 25:

$$T(t) = \frac{2V}{\pi \sqrt{t^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{\zeta^2 - a^2}}{\zeta - t} d\zeta + \frac{C}{\sqrt{a^2 - t^2}}.$$

Интеграл, входящий в эту формулу, был вычислен в п. 64:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{\zeta^2 - a^2}}{\zeta - t} d\zeta = -it,$$

¹⁾ Доказательство этого можно найти в статье М. А. Лаврентьева [21].

²⁾ В статье [22] М. А. Лаврентьев, Я. И. Секерж-Зенькович и В. М. Шепелев строят систему сингулярных уравнений для задачи обтекания двух дужек и решают её при помощи обобщённого алгоритма Шварца.

и, следовательно,

$$T(t) = \frac{2Vt - C'}{\sqrt{a^2 - t^2}}; \quad C' = -iC. \quad (9)$$

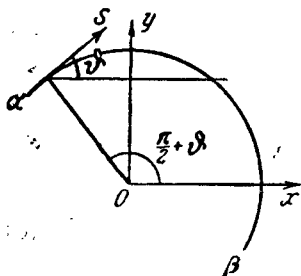
В точке $t=0$ функция $T(t)$ должна обратиться в нуль. Отсюда мы находим $C' = 2aV$, и

$$T(t) = -2V \sqrt{\frac{a-t}{a+t}}. \quad (10)$$

Теперь

$$\omega(z) = -\frac{V}{\pi i} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a-t}{a+t}} \frac{dt}{t-z}. \quad (11)$$

Чтобы вычислить интеграл в (11), положим



Черт. 23.

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \sqrt{\frac{a-t}{a+t}} \frac{dt}{t-z},$$

где C — контур чертежа 19. Имеем:

$$\sqrt{\frac{a-t}{a+t}} = \frac{a-t}{i\sqrt{t^2 - a^2}}.$$

При вычислении $T(t)$ мы выбрали то значение корня, которое на бесконечности имеет разложение

$$\sqrt{t^2 - a^2} = t - \frac{a^2}{2t} + \dots$$

Подставив это в предшествующее равенство, мы найдём, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a-t}{a+t}} = i.$$

Функция $\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}$ регулярна вне C и равна i на бесконечности. Отсюда следует, что

$$\Omega(z) = \sqrt{\frac{a-z}{a+z}} - i.$$

Заменим контур C удвоенным отрезком $(-a, a)$. Учитывая, что $\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}$ имеет разные знаки по разные стороны указанного отрезка, найдём:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a-t}{a+t}} \frac{dt}{t-z} = \sqrt{\frac{a-z}{a+z}} - i$$

и

$$\omega(z) = iV - V \sqrt{\frac{a-z}{a+z}}. \quad (12)$$

Наконец

$$\omega'(z) = U - V \sqrt{\frac{a-z}{a+z}}. \quad (13)$$

б) Пусть теперь AB есть дуга окружности $|\zeta|=1$. Комплексные координаты концов дуги обозначим через α и β . Ось x направим параллельно скорости потока в бесконечности так, что $V=0$. Из чертежа 23 видно, что $\arg t = \vartheta + \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $t = e^{i(\vartheta + \frac{\pi}{2})} = ie^{i\vartheta}$. Точно так же $\zeta = ie^{i\beta}$.

Приведём к простейшему виду интеграл в (6).

Прежде всего, $e^{i(\beta-\vartheta)} = \frac{t}{\zeta}$. Далее,

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{T(\zeta) t d\zeta}{\zeta(\zeta-t)} \right) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta) \operatorname{Re} \left(\frac{t d\zeta}{\zeta(\zeta-t)} \right).$$

С другой стороны,

$$2 \operatorname{Re} \left(\frac{t d\zeta}{\zeta(\zeta-t)} \right) = \frac{t d\zeta}{\zeta(\zeta-t)} + \frac{\bar{t} d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}(\bar{\zeta}-\bar{t})}.$$

Так как на окружности $\bar{t} = \frac{1}{t}$ и $\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$, то после простых вычислений мы получаем:

$$2 \operatorname{Re} \left(\frac{t d\zeta}{\zeta(\zeta-t)} \right) = \frac{\zeta + t d\zeta}{\zeta - t} \frac{1}{\zeta}.$$

Подставив всё это в (6), получим уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta) \frac{\zeta+t}{\zeta-t} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2 \sin \vartheta.$$

Но

$$2 \sin \vartheta = \frac{1}{i} (e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}) = -\left(t + \frac{1}{t}\right),$$

и окончательная форма уравнения будет

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta) \frac{\zeta+t}{\zeta-t} \frac{d\zeta}{\zeta} = -\left(t + \frac{1}{t}\right). \quad (14)$$

Приступим к решению этого уравнения. Рассмотрим интеграл типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (15)$$

Очевидно, $F(z)$ регулярна на всей плоскости, разрезанной вдоль дуги (α, β) , причём

$$F(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = A.$$

Далее, так как ядро

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2d\zeta}{\zeta-z} - \frac{d\zeta}{\zeta}$$

отличается от ядра Коши только постоянным множителем и регулярным слагаемым, то, как легко видеть, для интеграла (15) справедливы такие же теоремы о пределах, что и для интеграла типа Коши:

$$\left. \begin{aligned} F_i(t) &= T(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta) \frac{\zeta+t}{\zeta-t} \frac{d\zeta}{\zeta}, \\ F_e(t) &= -T(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta) \frac{\zeta+t}{\zeta-t} \frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Подставив это в (14), получим:

$$F_i(t) + F_e(t) = -2i \left(t + \frac{1}{t}\right). \quad (17)$$

Положим

$$F(z) \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)} = \Phi(z).$$

Функция $\Phi(z)$ регулярна в разрезанной плоскости, за исключением бесконечно удалённой точки, где она имеет полюс первого порядка. Выберем то значение корня, разложение которого на бесконечности начинается с члена $+z$. Тогда можно написать

$$\Phi(z) = Az + \Phi_0(z),$$

где $\Phi_0(z)$ регулярна при $z = \infty$. Введя в (17) вместо $F(z)$ её выражение через $\Phi(z)$ и учитывая, что по разные стороны дуги $(\alpha; \beta)$ корень имеет разные знаки, мы преобразуем уравнение (17) к виду

$$\Phi_i(t) - \Phi_e(t) = -2i \left(t + \frac{1}{t} \right) \sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}.$$

Но

$$\Phi_i(t) = At + \Phi_{0i}(t), \quad \Phi_e(t) = At + \Phi_{0e}(t).$$

Отсюда

$$\Phi_{0i}(t) - \Phi_{0e}(t) = -2i \left(t + \frac{1}{t} \right) \sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}. \quad (18)$$

Частное решение этого уравнения есть

$$\Phi_0(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z}. \quad (19)$$

Выражение (19) равно нулю при $z = \infty$. Функция же $\Phi_0(z)$, будучи только регулярной на бесконечности, может при $z = \infty$ равняться некоторой постоянной. Общее решение уравнения (17) получится, если к (19) прибавить произвольную постоянную:

$$\Phi_0(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z} + C.$$

Чтобы вычислить последний интеграл, рассмотрим интеграл

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z}.$$

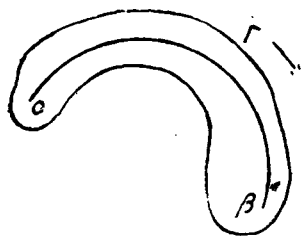
Контур Γ изображён на черт. 24; точка z находится вне Γ . В окрестности точки $\zeta = \infty$ радикал разлагается в ряд Лорана следующего вида:

$$\sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)} = \zeta - \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{(\alpha - \beta)^2}{8\zeta} + \dots$$

Интеграл в выражении $\Omega(z)$ распадается на два. Первый из них представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\{ \zeta \sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)} - \zeta^2 + \frac{(\alpha + \beta)\zeta}{2} + \frac{(\alpha - \beta)^2}{8} \right\} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\zeta^2 - \frac{(\alpha + \beta)\zeta}{2} - \frac{(\alpha - \beta)^2}{8} \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \end{aligned}$$

Во втором интеграле подинтегральная функция регулярна внутри Γ , и интеграл равен нулю. Первый же интеграл есть интеграл Коши. Таким образом



Черт. 24.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta \sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \\ = z \sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)} - z^2 + \\ + \frac{(\alpha + \beta)z}{2} + \frac{(\alpha - \beta)^2}{8}. \end{aligned}$$

Далее, на бесконечности функция

$$\frac{\sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}}{\zeta(\zeta - z)}$$

регулярна и имеет вычет -1 . На конечном расстоянии вне Γ она имеет полюсы в точках $\zeta = 0$ и $\zeta = z$ с вычетами $-\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}$ и $\frac{1}{z} \sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)}$. Учитывая, что Γ обходится

по часовой стрелке, и применяя теорему о вычетах, найдем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\zeta} \sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{z} \sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)} - \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z} - 1.$$

Складывая, получаем:

$$\Omega(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right) \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)} - z^2 + \frac{(\alpha+\beta)z}{2} + \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} - 1 - \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}.$$

Контур Γ можно заменить дважды обходимой дугой (α, β) . Это даст нам

$$\Phi_0(z) = -i\left(z + \frac{1}{z}\right) \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)} + i\left(z^2 - \frac{(\alpha+\beta)z}{2} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} + 1 + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}\right) \quad (20)$$

и, следовательно,

$$\Phi(z) = -i\left(z + \frac{1}{z}\right) \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)} + i\left(z^2 - \frac{\alpha+\beta-2iA}{2}z - \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} + 1 + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}\right). \quad (21)$$

Отсюда

$$F(z) = -i\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}} \left(z^2 - \frac{\alpha+\beta-2iA}{2}z - \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} + 1 + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}\right) - \frac{iC}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}}. \quad (22)$$

Теперь из формул (16) следует

$$T(t) = \frac{1}{2} [F_t(t) - F_e(t)] = \frac{i}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}} \left[t^2 - \frac{\alpha+\beta-2iA}{2}t - \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} + 1 - C + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{t} \right]. \quad (23)$$

Постоянная C определится из условия $T(\beta) = 0$, а постоянная A — из равенства

$$A = -\frac{1}{2i} \int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Теперь

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^\beta \frac{T(\zeta) e^{-i\delta} d\zeta}{\zeta - z} + U = \frac{1}{2\pi} \int_a^\beta \frac{T(\zeta) d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} + U. \quad (24)$$

Интеграл (24) легко вычислить, исходя из интеграла типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{T(\zeta) d\zeta}{\zeta(\zeta - z)},$$

где Γ — контур черт. 24. Мы не будем приводить окончательного выражения $w(z)$ из-за его громоздкости.

ЛИТЕРАТУРА

А. Курсы по теории интегральных уравнений

1. Г. Виарда. Интегральные уравнения, пер. с нем. ГТТИ, 1933.
2. Э. Гурса. Курс математического анализа, т. III, ч. II, пер. с франц. ГТТИ, 1934.
3. Н. М. Гюнтер. Основы математической физики, ч. I. Интегральные уравнения. Изд. Кубуч, Л-д, 1931.
4. Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, т. I, пер. с нем. ГТТИ, 1933; спец. глава III.
5. У. Ловитт. Интегральные уравнения. Пер. с англ. ГТТИ, 1933.
6. Г. М. Мюнтц. Интегральные уравнения. ГТТИ, 1934.
7. И. И. Привалов. Интегральные уравнения, 2-е изд. ГТТИ, 1937.
8. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. IV. ГТТИ, 1941.

В. Литература по приложениям и по отдельным вопросам теории интегральных уравнений

9. И. В. Ананьев. Решение задач о собственных колебаниях крыльев с сосредоточенными массами методом интегральных уравнений. Труды ЦАГИ, № 348, 1938.
10. И. Н. Векуа. Комплексное представление общего решения уравнений стационарной плоской задачи теории упругости. Доклады АН СССР, т. XVI, № 3, 1937.
11. А. Я. Горгидзе. Метод последовательных приближений в применении к плоской задаче теории упругости. Доклады АН СССР, т. IV, № 5—6, 1934.
12. N. Günther. La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématiques. Paris, Gauthier-Villars, 1934.
13. F. H. van-den Dungen. Cours de technique des vibrations. Bruxelles, 1926.
14. Н. В. Зволинский. Приложение метода интегральных уравнений к одной задаче устойчивости цилиндрических оболочек. Труды ЦАГИ, № 320, 1937.
15. T. Carleman. a) Zur Theorie der linearen Integralgleichungen. Math. Zeitschrift, Bd. 9, H. 3/4, 1921.
b) Sur la résolution des certaines équations intégrales. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, t. 16, 1922.
16. А. И. Комай. Совместные колебания крыла с сосредоточенными грузами. Труды ЦАГИ, № 472. 1940.

17. Н. Е. Кочин. а) Плоская задача о глассировании слабо изогнутого контура по поверхности тяжёлой несжимаемой жидкости. Труды ЦАГИ, № 356, 1938.

б) О волновом сопротивлении и подъёмной силе погружённых в жидкость пил. Труды конференции по теории волнового сопротивления. Изд. ЦАГИ, 1937.

18. G. Kraill. Sulla configurazione d'equilibrio instabile d'una piastra elastica sottile. Annali di matematica pura e applicata, s. IV, t. IV, 1927.

19. М. Г. Крейн та Я. Л. Нудельман. Про мінімаксимальні властивості вузлів обертонів віброуючого стрижня. Труды Одеського Держ. Универс., Матем., т. II, 1938.

20. В. Д. Купрадзе. а) Метод интегральных уравнений в теории дифракции. Матем. сборник, т. 41, № 4, стр. 561—581, 1934.

б) Распространение электромагнитных волн в неоднородной среде. Труды Тбил. Мат. ин-та, т. I, стр. 115—123, 1937.

с) К исследованию электромагнитных колебаний в плоском неоднородном поле. Доклады АН СССР, т. XVI, № 3, 1937.

д) Zur Frage der Ausbreitung electromagnetischer Wellen in einem inhomogen ebenen Medium. Compositio Mathematica, vol. 6, fasc. 2, pp. 228-234, 1938.

е) Некоторые новые приложения теории резольвенты к граничным задачам теории потенциала. Доклады АН СССР, т. XXIII, № 1, 1939.

21. М. А. Лаврентьев. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы. Труды ЦАГИ, № 118, 1932.

22. М. А. Лаврентьев, Я. И. Секерж-Зенькович и В. М. Шепелев. К теории бипланной коробки крыльев. Труды ЦАГИ, № 153, 1935.

23. G. Lauricella. Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques écastrées, Acta Mathematica, t. 32, pp. 201—256, 1909.

24. Ц. О. Левина и С. Г. Михлин. К вопросу о расчёте напряжений в междукамерных щеликах. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 91, 1940.

25. Ц. О. Левина. Дополнительные исследования напряжений в междукамерных щеликах. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 108, 1941.

26. Л. Г. Магнарадзе. а) Основные задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками. Труды Тбил. Матем. ин-та, т. III, стр. 43—75, 1938.

б) Некоторые граничные задачи математической физики для поверхностей с угловыми линиями. Труды Тбил. Мат. ин-та, т. VII, стр. 23—45, 1939.

27. С. Г. Михлин. а) Задача Дирихле для областей с несколькими замкнутыми границами. Доклады АН СССР, № 7, стр. 2—7, 1934.

б) О распределении напряжений в полуплоскости с эллиптическим вырезом. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 29, 1934.

с) Метод последовательных приближений в применении к бигармонической проблеме. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 39, 1934.

д) Плоская задача теории упругости. Труды Сейсм. Ин-та АН СССР, № 65, 1935.

- е) Плоская задача теории упругости для неоднородной среды. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 66, 1935.
- ф) Плоская деформация в анизотропной среде. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 76, 1936.
- г) Проблема эквивалентности в теории сингулярных интегральных уравнений. Матем. сборн., т. 3 (45), № 1, стр. 121—141, 1938.
- h) Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. Доклады АН СССР, т. XXIV, № 4, 1939.
- и) Некоторые элементарные краевые задачи для волнового уравнения. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 101, 1940.
- j) Основные краевые задачи для волнового уравнения. Доклады АН СССР, т. XXIX, № 4, 1940.
- к) Примененные преобразования Лапласа к краевым задачам для волнового уравнения. Доклады АН СССР, т. XXXI, № 4, 1941.
- l) О напряжениях в породе над угольным пластом. Изв. ОГН АН СССР, № 7—8, 1942.
- m) Приближенное решение краевых задач для уравнения цилиндрических волн. Изв. ОГН АН СССР, № 11—12, 1942.
- n) О сходимости рядов Фредгольма. Доклады АН СССР, т. XLII, № 9, 1944.
28. Н. И. Мусхелишвили. а) Некоторые задачи теории упругости. Изд. АН СССР, 1935.
- б) Новый общий способ решения основных контурных задач плоской теории упругости. Доклады АН СССР, т. III, № 1, 1934.
- с) Исследование новых интегральных уравнений плоской теории упругости. Доклады АН СССР, т. III, № 2, 1934.
- д) Применения интегралов типа Коши к одному классу сингулярных интегральных уравнений. Труды Тбил. Мат. ин-та, т. X, стр. 1—43, 1941.
- е) Системы сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши. Сообщения АН Грузинской ССР, т. III, № 10, стр. 987—994, 1942.
- ф) Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.
29. Н. И. Мусхелишвили и Д. З. Авазашвили. О решении основных контурных задач теории логарифмического потенциала. Труды Тбил. Матем. ин-та, т. VII, стр. 1—23, 1940.
30. Н. И. Мусхелишвили и Д. А. Квеселава. Сингулярные интегральные уравнения с ядрами типа Коши на разомкнутых контурах. Труды Тбил. Мат. ин-та, т. XI, стр. 141—172, 1942.
31. Я. Л. Нудельман. До теорії стійкості простолнійного стрижня. Труды Одесского Держ. Универс., Матем., т. II, 1938.
32. I. Radon. Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential. Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss. Wien; math.-naturwiss. Klasse, Bd. 128, Abt. IIa, S. 1—23, 1919.
33. Г. Н. Савин. Напряжения в упругой плоскости с бесконечным рядом вырезов. Доклады АН СССР, т. XXIII, стр. 515—519, 1939.
34. С. Л. Соболев. Алгоритм Шварца в теории упругости. Доклады АН СССР, т. IV (XIII), № 6, стр. 236—238, 1936.
35. E. Trefftz. Allgemeine Theorie der Knickung des geraden Stabes. ZAMM, Bd. 3, H. 4, S. 273, 1923.

36. E. Schwerin. Über die Transversalschwingungen von Stäben veränderlichen Querschnitt. Verh. d. 2. Intern. Kongresses f. techn. Mechanik, Zürich, 1926, S. 133—145.

37. Д. И. Шерман. а) Определение напряжений в полуплоскости с эллиптическим вырезом. Труды Сейсм. Ин-та АН СССР, № 53, 1935.

б) Об одном методе решения статической плоской задачи теории упругости для многосвязных областей. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 54, 1935.

в) Некоторые случаи статической задачи теории упругости с осевой симметрией. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 71, 1935.

д) Статические плоские задачи теории упругости. Труды Тбил. Матем. ин-та, т. II, стр. 163—225, 1937.

е) О распределении характеристических чисел интегральных уравнений плоской задачи теории упругости. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 86, 1938.

ф) Статическая плоская задача теории упругости для неоднородных сред. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 86, 1938.

г) Плоская задача теории упругости для анизотропной среды. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 86, 1938.

h) Плоская задача теории упругости со смешанными предельными условиями. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 88, 1938.

и) Об одной задаче теории упругости. Доклады АН СССР, т. XXVII, № 9, 1940.

ж) К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах. Доклады АН СССР, т. XXVIII, № 1, 1940.

к) Смешанная задача статической теории упругости для плоских многосвязных областей. Доклады АН СССР, т. XXVIII, № 1, 1940.

л) О напряжениях в эллиптической пластинке. Доклады АН СССР, т. XXXI, № 4, 1941.

м) Новое решение плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. Доклады АН СССР, т. XXXII, № 5, 1941.

н) Об одной смешанной задаче теории упругости. Прикл. Матем. и Мех., т. VII, № 6, 1943.

о) К вопросу о дифракции упругих волн. Доклады АН СССР, т. XLVIII, № 9, 1945.

38. W. Sternberg. Anwendung der Integralgleichungen in der electromagnetischen Lichttheorie. Compositio Mathematica, vol. 3, pp. 254—275, 1936.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(цифры обозначают страницы)

- Алгоритм Шварца обобщённый 194
Альтернатива Фредгольма 49
- Бесселя неравенство 55
— функции 58
Бертрана-Пуанкаре формула 93
Бигармоническая задача 138
Билинейный ряд 69
- Вихревая функция 289
Влияния функция 249
Вольтерра уравнение 21
Второго рода уравнение 14
Вырожденное ядро 23
- Гильберта задача 259
— ядро 90
— Шмидта теорема 61
Главное значение интеграла 11, 85
Грина функция 145, 150
— комплексная 146
Гурса формула, функция 140
- Давление жёсткого штампа 273
Двойного слоя тепловой потенциал 234
Дирихле задача 32, 107
— видоизменённая 120
— в пространстве 190
— для колебательного уравнения 228
— многосвязной области 115, 184
- Задача бигармоническая 138
— Гильберта 259
— Дирихле, см. Дирихле задача
— Неймана 121
— обтекания 127
— Римана 100
— теории упругостисм. Теория упругости
- Изгиб стержня продольный 256
Интеграл Пуассона 91
— сингулярный (особый) 86
— Шварца 274
Интегралы, аналогичные потенциалам 219
— Коши 210
Интегральные уравнения 9, см. также название уравнения
— системы 37
Итерированное ядро 18
- Келлога способ 73
Колебаний теория 241
Колебания крутильных стержней 254
— струны 241
Комплексная функция Грина 146
Композиция сингулярных интегралов 93
Конформное отображение 111
Коши ядро 90
Коэффициенты Фурье 54
Крутильные колебания стержней 254
Кручение стержней 124
Крыла обтекание 197
- Лежандра полиномы 58
Лишницца условие 86
Лауричелла уравнение 223
- Минор первый Фредгольма 43
Мусхелишвили теорема 163
— уравнение 162, 209
— формулы 140
- Навье-Стокса уравнения 138
Напряжений функция 137
Неймана задача 121
Неравенство Бесселя 55
— Шварца 18
Неоднородное уравнение 14
Неполная ортогональная система 56
Норма 53
Нормированная функция 53
- Обобщённый алгоритм Шварца 194
Обтекание двух цилиндров 129
— дуги заданной формы 288
— крыла самолёта 197
Обтекания задача 127
Однородное уравнение 14
Определитель Фредгольма 43
Ортогонализации процесс 60
Ортогональная последовательность (система) 53
— неполная, полная 56
Ортогональные функции 48
Ортонормированная система 53
Особый интеграл 86
- Парадокс Стокса 139
Парамер уравнения 9, 13
Парсевала равенство 55
Первого рода уравнение 14

- Полиномы Лежандра 58
 — Чебышева 58
 Полная ортогональная система 58
 Положительное ядро 64
 Последовательных приближений метод 14
 Потенциал тепловой 234
 Потенциала плотность 234
 Правая часть уравнения 9, 13
 Правильные значения 46
 Продольный изгиб 256
 Процесс ортогонализации 60
 Пуанкаре-Бертрана формула 91
 Пуассона интеграл 91

 Равенство Парсвала 55
 — Фредгольма 42
 Римана задача 100
 Рунге метод 63
 Ряд билинейный 69
 Ряды Фурье 54

 Скалярное произведение 52
 Симметричное ядро 51
 Симметричное уравнение 52, 59, 82
 Сингулярные уравнения 11, 84, 95, 98, 108, 259
 Сингулярный интеграл 86
 Слабая особенность 10, 49
 След ядра 69
 Смешанная задача теории упругости 278
 Собственные колебания струны 241
 — числа 46
 — функции ядра 47
 Спектра точки 46
 Соприкосание двух полуплоскостей 266
 Стержней крутильные колебания 254
 — продольный изгиб 257
 Стержни полые, сплошные 122
 Стокса парадокс 139
 —Navье уравнения 138
 Струны собственные колебания 241

 Тепловые потенциалы 234
 Теория колебаний 242
 —упругости, задачи 136, 199, 209, 279

 Уравнение, см. название уравнения
 Условие Липшица 86

 Характеристические значения (числа) 46, 67, 79

 Формула, см. соотв. название
 Фредгольма альтернатива 49
 — определитель 43
 — первый минор 43
 — теоремы 45
 — уравнение 10, 27
 Фундаментальные значения 46
 — функции ядра 47
 Функция Бесселя 58
 — вихревая 289
 — влияния 249
 — Грина 145, 150
 — комплексная 146
 — Гурса 143
 — напряжения (Эри) 137
 — нормированная 53
 Фурье коэффициенты 54
 — ряды 54

 Чебышева полиномы 58
 Числа собственные 46

 Циркуляция по контуру 128

 Шварца алгоритм обобщенный 194
 — интеграл 274
 — неравенство 18
 — ядро 148
 Шмидта - Гильберта теорема 61
 Штамп давления 273

 Эри функция 137

 Ядро 9, 13
 — вырожденное 23
 — Гильберта 90
 — итерированное 18
 — Коши 90
 — положительное 64
 — сводимое к симметрическому 82
 — симметрическое 51
 — Шаарца 148