И. М. МИЛИН

ОДНОЛИСТНЫЕ ФУНКЦИИ И ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

517.2
М 60
УДК 517.5

Однолистные функции и ортонормированные системы. И. М. Милин, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1971.

Книга посвящена методу исследования однолистных функций с помощью ортонормированных систем. Для однолистных функций в круге этим методом излагаются многие из последних результатов советских и зарубежных математиков по проблеме коэффициентов. Для однолистных функций в конечносвязных областях отыскиваются условия однолистности и области значений различных функционалов.

Рис. 4, библ.— 76 назв.

Исаак Моисеевич Милин

ОДНОЛИСТНЫЕ ФУНКЦИИ
И ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

М., 1971 г., 256 стр. с илл.

Редактор *В. М. Гринберг*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова* Корректор *И. Я. Кришталь*

Сдано в набор 6/IV 1971 г. Подписано к печати 22/VII 1971 г. Бумага 84×108¹/₃₂. Физ. печ. л. 8. Условн. печ. л. 13,44. Уч.-изд. л. 12,11. Тираж 4 000 экз. Т-12353. Цена книги 1 руб. Заказ 1968.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Москва, М-54, Валовая, 28.
Отпечатано во 2-ой типографии изд-ва «Наука». Зак. 2754

2-2-3
154-71

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Однолистные функции, т. е. регулярные или мероморфные функции, принимающие в различных точках области различные значения, с геометрической точки зрения являются наиболее простыми аналитическими функциями. При их исследовании возникают вопросы о критериях однолистности аналитических функций и о влиянии этого свойства на другие свойства функций.

В книге исследование однолистных функций в этом плане ведется с помощью ортонормированных систем. В первой части, состоящей из трех глав, рассматриваются однолистные функции в односвязной области. Здесь главное внимание обращено на поведение тейлоровских коэффициентов однолистных функций, для чего в первой главе изучаются свойства специальной системы функций, а во второй — находятся точные мажоранты и асимптотические равенства для коэффициентов сложной функции экспоненциального вида. Повышенный интерес к этому вопросу, несомненно, вызывается проблемой коэффициентов. Во второй части книги исследуются однолистные функции в конечносвязной области, содержащей бесконечно удаленную точку. В главе 4 строится так называемая лорановская система функций, играющая для произвольной конечносвязной области такую же роль, какую играет система $\{z^n\}$ для кругового кольца. Пятая глава является аналогом первой, а последняя посвящена приложениям, причем основное внимание уделяется задачам по отысканию области значений различных функционалов. Поскольку изложение второй части книги независимо от первой, то читатели могут после введения сразу перейти к главе 4.

Автор выражает признательность Г. В. Кузьминой, внимательно прочитавшей рукопись и сделавшей ряд замечаний, а также А. З. Гриншпану и В. И. Милину, оказавшим большую помощь при подготовке рукописи к печати.

ВВЕДЕНИЕ

1°. Конечносвязная область и классы функций

Пусть B — конечносвязная область плоскости z, содержащая бесконечно удаленную точку, с границей Γ, состоящей из m замкнутых, взаимно внешних аналитических кривых Жордана $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(m)}$; $\overline{B} = B \cup \Gamma$; $G(z, \infty; B)$ — функция Грина для области B с полюсом в $z = \infty$, а $H(z, \infty; B)$ — сопряженная с ней в области B гармоническая функция. Критической точкой функции Грина называется точка $z \in \overline{B}$, в которой обращается в нуль производная от многозначной аналитической функции

$$S(z) = G(z, \infty; B) + iH(z, \infty; B). \tag{1}$$

Известно (Уолш [1], стр. 86—90), что для такой области функция Грина $G(z, \infty; B)$ имеет ровно $m-1$ критических точек с учетом их кратности, лежащих внутри области B. При любом действительном $\rho \in [1, \infty)$ линия уровня Γ_ρ функции Грина, т. е.

$$\Gamma_\rho = \{z : G(z, \infty; B) = \ln \rho\}, \ \Gamma_1 = \Gamma, \tag{2}$$

состоит не более чем из m замкнутых, взаимно внешних аналитических кривых Жордана, если критические точки $G(z, \infty; B)$ не лежат на ней. В последнем случае линия уровня Γ_ρ состоит не более чем из m замкнутых кривых Жордана, взаимно внешних, за исключением критических точек, каждая из которых принадлежит нескольким кривым. При значениях параметра ρ, достаточно близких к 1, линии уровня Γ_ρ состоят точно из m аналитических контуров $\Gamma_\rho^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, m$), причем внутри каждого контура $\Gamma_\rho^{(\nu)}$ лежит строго одна граничная кривая $\Gamma^{(\nu)}$. Когда ρ возрастает и переменная линия уровня пересекает критическую

точку или несколько таких точек общей кратности p, то число ее компонент уменьшается точно на p. Когда ρ достаточно велико, линия уровня Γ_ρ представляет собой замкнутую аналитическую кривую Жордана, внутренности которой принадлежит граница Γ области B.

Обозначим область, содержащую бесконечно удаленную точку и ограниченную линией уровня Γ_ρ $(1 \leqslant \rho < \infty)$, через B_ρ:

$$B_\rho = \{z : G(z, \infty; B) > \ln \rho\}, \quad B_1 = B, \tag{3}$$

а дополнение замыкания $\overline{B}_\rho$ — через b_ρ, полагая $b_1 = b$. Для любых двух значений ρ из промежутка $[1, \infty)$ имеем

$$B_{\rho_2} \supset \overline{B}_{\rho_1}, \qquad \rho_2 < \rho_1. \tag{4}$$

Будем именовать кольцевым множеством $B_{r,R}$ $(1 \leqslant r < R)$ множество точек $z \in B$, ограниченное двумя линиями уровня Γ_r и Γ_R, т. е.

$$B_{r,R} = \{z : \ln r < G(z, \infty; B) < \ln R\} \tag{5}$$

(если $R = \infty$, то линия уровня Γ_R вырождается в бесконечно удаленную точку). Множество $B_{1,R}$ $(1 < R)$ будем называть граничным кольцевым множеством. Когда R близко к 1, граничное кольцевое множество $B_{1,R}$ является объединением m двухсвязных областей; когда R достаточно велико, $B_{1,R}$ — — $(m+1)$-связная область. Множество $B_{1,\infty}$ представляет собой область B с выколотой бесконечно удаленной точкой.

В частном случае внешность единичной окружности будем обозначать через B^0:

$$B^0 = \{z : |z| > 1\},$$

а внутренность — через K^0:

$$K^0 = \{z : |z| < 1\}.$$

Для области B^0 функция Грина $G(z, \infty; B) = \ln |z|$, а поэтому ее линии уровня Γ_ρ суть концентрические окружности $|z| = \rho$ $(\rho \geqslant 1)$ с центром в начале. Соответственно упрощаются область B_ρ, множество $B_{r,R}$ и т. д.

Рассматриваются следующие классы функций:

$L^2(B)$ — класс функций, регулярных и с интегрируемым квадратом модуля в области B;

$l^2(B)$ — подкласс $L^2(B)$ функций, имеющих в области B однозначный интеграл;

$\sigma(B)$ — класс функций $f(z)$, регулярных в области B, $f(\infty)=0$, с конечной площадью образа B, т. е. для которых $f'(z)\in l^2(B)$;

$\Sigma(B)$ — класс мероморфных и однолистных в области B функций $F(z)$, имеющих полюс в бесконечно удаленной точке и лорановское разложение в ее окрестности вида

$$F(z)=z+\alpha_0+\alpha_1 z^{-1}+\ldots; \tag{6}$$

$\tilde{\Sigma}(B)$ — подкласс $\Sigma(B)$ функций $F(z)$, отображающих B на области без внешних точек и с нулевой площадью границы;

Σ и $\tilde{\Sigma}$ — классы функций соответственно $\Sigma(B^0)$ и $\tilde{\Sigma}(B^0)$;

Σ_M — подкласс функций $F(z)\in\Sigma$, удовлетворяющих в области B^0 условию $|F(z)|>M$ $(0\leqslant M\leqslant 1)$;

S — класс регулярных и однолистных в единичном круге функций $f(z)$, нормированных разложением

$$f(z)=z+c_2z^2+\ldots; \tag{7}$$

S_M — подкласс функций $f(z)\in S$, удовлетворяющих в единичном круге условию $|f(z)|<M$ $(M\geqslant 1)$;

σ — класс функций $\sigma(B^0)$. Кроме того, для функций, регулярных в $|z|<1$, σ обозначает класс функций $\omega(z)=c_1z+c_2z^2+\ldots$, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2<\infty$.

Некоторые другие классы вводятся позднее.

2°. Ортонормированные системы и функции области

Систему регулярных в B функций $\{g_n(z)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ будем называть ортонормированной в области B, если при любых k и n $(k, n=1,2,\ldots)$ выполняется равенство

$$(g_k, \overline{g}_n)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_B g_k(z)\,\overline{g_n(z)}\,d\sigma=\delta_{kn},$$

где δ_{kn} — символ Кронекера, а $d\sigma$ — элемент площади. В дальнейшем рассматриваются ортонормированные системы, составленные из функций класса $l^2(B)$. Поскольку каждая функция $g(z)\in l^2(B)$ представима в области B в виде $g(z)=f'(z)$, где $f(z)\in\sigma(B)$, то условие ортонормированности в классе $l^2(B)$

системы $\{f'_n(z)\}$ перепишется так:

$$(f'_k, \overline{f'_n}) = \frac{1}{\pi} \iint_B f'_k(z) \overline{f'_n(z)}\, d\sigma = \delta_{kn} \quad (k, n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Ортонормированная в области B система функций $\{f'_n(z)\}$ называется полной в классе $l^2(B)$, если для любой функции $f'(z) \in l^2(B)$ имеет место разложение в равномерно сходящийся внутри B ряд Фурье в системе $\{f'_n(z)\}$:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f'_n(z), \qquad \lambda_n = (f', \overline{f'_n}) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Если $\{f'_n(z)\}$ — полная ортонормированная система в $l^2(B)$, то для каждой функции $f'(z) \in l^2(B)$ выполняется равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \iint_B |f'(z)|^2\, d\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2, \tag{10}$$

где λ_n — коэффициенты Фурье функции $f'(z)$ в системе $\{f'_n(z)\}$. Для каждой ортонормированной системы в $l^2(B)$ справедлива теорема Рисса — Фишера (Бергман [3], стр. 7—8).

Полезно заметить, что для любых двух функций $f'(z)$ и $g'(z)$ из класса $l^2(B)$ двойной интеграл по области $\iint_B f'(z)\, \overline{g'}(z)\, d\sigma$ имеет также и контурное представление (см., например, Г. М. Голузин [7], стр. 225):

$$\iint_B f'(z) \overline{g'(z)}\, d\sigma = \frac{1}{2i} \int_\Gamma f'(z) \overline{g(z)}\, dz, \tag{11}$$

причем интеграл в правой части понимается так:

$$\frac{1}{2i} \int_\Gamma f'(z) \overline{g(z)}\, dz = \lim_{\rho \to 1} \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_\rho} f'(z) \overline{g(z)}\, dz \tag{12}$$

(здесь и далее, если не сделано особой оговорки, интегрирование по границе области производится в положительном направлении относительно этой области).

Это становится ясным, если применить формулу Грина к контурному интегралу $\frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_\rho} f'(z)\overline{g(z)}dz$. В самом деле, имеем

$$\frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_\rho} f'(z)\overline{g(z)}\,dz = \iint\limits_{B_\rho} f'(z)\overline{g'(z)}\,d\sigma, \qquad 1<\rho<\infty, \quad (13)$$

и, устремляя $\rho \to 1$, получим требуемое. Равенство (11) позволяет заменить условие (8) ортонормированности системы $\{f'_n(z)\}$ из класса $l^2(B)$ равносильным условием

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f'_k(z)\overline{f_n(z)}\,dz = \delta_{kn} \qquad (k, n = 1, 2, \ldots), \quad (14)$$

дающим возможность распространить критерий ортонормированности и на мероморфные функции (Шиффер [2]).

Бергман [1, 2] доказал, что существует бесчисленное множество ортонормированных систем в области B, полных в классе $l^2(B)$, но для всех таких систем $\{f'_n(z)\}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z)\overline{f'_n(\zeta)}, \qquad z, \zeta \in B, \quad (15)$$

сходится равномерно внутри B по двум переменным к одной и той же функции области $K_*(z, \bar{\zeta})$, которая названа им керн-функцией (ядерной функцией) области B в классе $l^2(B)$. Следовательно, по определению

$$K_*(z, \bar{\zeta}) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z)\overline{f'_n(\zeta)}, \qquad z, \zeta \in B. \quad (16)$$

Так как условие ортонормированности функций (8)(или (14)) отличается от общепринятого наличием в левой части (8) множителя $1/\pi$, то и $K_*(z, \bar{\zeta})$, определенная равенством (16), отличается от ядерной функции Бергмана $K_0(z, \bar{\zeta})$, т. е.

$$K_*(z, \bar{\zeta}) = \pi K_0(z, \bar{\zeta}). \quad (17)$$

Ядерная функция $K_*(z, \bar{\zeta})$, регулярная от z и $\bar{\zeta}$ в области B, обладает интересными свойствами и играет важную роль в теории конформных отображений, так как она тесно связана

с некоторыми функциями, однолистно отображающими область B на канонические области.

Помимо ядерной функции $K_*(z, \overline{\zeta})$ введем в рассмотрение еще некоторые функции области. Согласно теореме Кёбе [1] существует и единственна с точностью до произвольного слагаемого функция области $j_\theta(z) \in \tilde{\Sigma}(B)$, $\theta \in [0, \pi)$, отображающая область B на плоскость с прямолинейными разрезами наклона θ к вещественной оси.

Кроме того, известно (см., например, Г. М. Голузин [7], стр. 219), что при любых заданных $\zeta \in B$ $(\zeta \neq \infty)$ и $\theta \in [0, \pi)$ существует и единственна функция $j_\theta(z, \zeta) \in \tilde{\Sigma}(B)$, $j_\theta(\zeta, \zeta) = 0$, которая отображает B на плоскость с m разрезами по дугам логарифмических спиралей наклона θ к лучу, исходящему из начала. С ее помощью при $\zeta \neq \infty$ конструируются еще две функции области $R(z, \zeta)$ и $P(z, \overline{\zeta})$:

$$\begin{aligned} R(z, \zeta) &= \frac{1}{2} \ln \frac{(z-\zeta)^2}{j_{\pi/2}(z, \zeta) \cdot j_0(z, \zeta)}, \\ P(z, \overline{\zeta}) &= \frac{1}{2} \ln \frac{j_{\pi/2}(z, \zeta)}{j_0(z, \zeta)} \end{aligned} \tag{18}$$

(берется та ветвь логарифмической функции, которая при $z = \infty$ обращается в нуль). При $\zeta = \infty$ полагаем $R(z, \infty) = P(z, \infty) \equiv 0$, когда $z \in B$.

Так как рассматриваемая область B ограничена аналитическими кривыми Жордана, то функции $j_\theta(z)$, $j_\theta(z, \zeta)$, $R(z, \zeta)$ и $P(z, \overline{\zeta})$ регулярны по z на границе Γ области B.

Далее, назовем тейлоровской системой функций для области B систему функций $\{\varphi_n(z)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющую условиям:

а) функции $\varphi_n(z)$ регулярны в замкнутой области $\overline{B}$ и имеют в окрестности $z = \infty$ тейлоровское разложение вида

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_{nk} z^{-k}, \qquad a_{nn} > 0; \tag{19}$$

б) производные функции $\varphi_n'(z)$ образуют ортонормированную систему в области B, полную в $l^2(B)$.

Будем называть сопряженной системой функций (с тейлоровской системой для области B) систему функций $\{\Phi_n(z)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющую условиям:

а) функции $\Phi_n(z)$ регулярны в замкнутой области $\overline{B}$, за исключением полюса порядка n в бесконечно удаленной точке, и их лорановские разложения в окрестности $z=\infty$ не содержат свободного члена;

б) на каждой граничной кривой $\Gamma^{(\nu)}$ $(\nu=1, 2, \ldots, m)$ выполняется соотношение

$$\Phi_n(z)=\overline{\varphi_n(z)}+k_{n\nu}, \tag{20}$$

где $k_{n\nu}$ — константа.

Наконец, лорановской системой для области B будем называть систему пар функций $\{\varphi_n(z), \Phi_n(z)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Ее существование и единственность доказываются в главе 4.

Для области B^0 введенные функции области имеют весьма простой вид, именно:

$$\left.\begin{aligned}
&K_*(z,\bar{\zeta})=\frac{1}{(1-z\bar{\zeta})^2},\\
&j_\theta(z)=z+e^{2i\theta}z^{-1},\ j_\theta(z,\ \zeta)=(z-\zeta)\left(1-\frac{1}{z\bar{\zeta}}\right)e^{2i\theta},\\
&R(z,\zeta)=0,\ P(z,\bar{\zeta})=\ln\frac{1}{(1-z\bar{\zeta})^{-1}},\\
&\varphi_n(z)=\frac{1}{\sqrt{n}}\ z^{-n},\ \Phi_n(z)=\frac{1}{\sqrt{n}}\ z^n.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

ЧАСТЬ I

ОДНОЛИСТНЫЕ ФУНКЦИИ В ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

ГЛАВА 1

СИСТЕМА ФУНКЦИЙ $\{A_n(z)\}$

§ 1. Связь с полиномами Фабера

Возьмем произвольную функцию $F(z) \in \Sigma$ и произвольное конечное значение $\zeta \in B^0$ и образуем функцию от аргумента z:

$$\ln \frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}, \tag{1.1}$$

где берется та ветвь многозначной функции, которая при $z=\infty$ обращается в нуль. Если $\zeta=\infty$, то полагаем функцию тождественно равной нулю. В силу однолистности $F(z)$ эта функция регулярна в области B^0, и поэтому в $|z|>1$ имеет место разложение

$$\ln \frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\zeta)\, z^{-n}. \tag{1.2}$$

Поскольку такое разложение единственно, то тем самым в области B^0 определены однозначные функции $A_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$, образующие систему $\{A_n(z)\}$. Заметим, что функции $F(z) \in \Sigma$ и $F(z)+\text{const} \in \Sigma$ порождают одну и ту же систему $\{A_n(z)\}$, а поэтому всегда можно считать, если нужно, что система $\{A_n(z)\}$ порождена функцией $F(z) \in \Sigma_0$.

Теперь возьмем нечетную функцию $F_2(z)=\sqrt{F(z^2)} \in \Sigma_0$, когда $F(z) \in \Sigma_0$, и таким же образом определим систему функций $\{a_n(z)\}$, именно:

$$\ln \frac{z-\zeta}{F_2(z)-F_2(\zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\zeta)\, z^{-n}. \tag{1.3}$$

Меняя в формуле (1.3) ζ и z на $-\zeta$ и $-z$, получим

$$\ln\frac{z-\zeta}{F_2(z)-F_2(\zeta)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n(-\zeta)z^{-n}.$$

Сравнивая коэффициенты в последних двух разложениях, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &a_{2n-1}(-z)=-a_{2n-1}(z),\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (n=1,2,\ldots).\\ &a_{2n}(-z)=a_{2n}(z)\end{aligned}\right\}\qquad(1.4)$$

Если в формуле (1.3) заменить ζ на $-\zeta$ и полученное равенство сложить с исходным и вычесть из него, то, учитывая (1.4), придем к равенствам

$$\ln\frac{z^2-\zeta^2}{F(z^2)-F(\zeta^2)}=2\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}(\zeta)z^{-2n},\qquad(1.5а)$$

$$\ln\frac{z-\zeta}{F_2(z)-F_2(\zeta)}\cdot\frac{F_2(z)+F_2(\zeta)}{z+\zeta}=2\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}(\zeta)z^{-(2n-1)},\qquad(1.5б)$$

откуда и из (1.2) вытекает связь

$$A_n(z^2)=2a_{2n}(z)\qquad(n=1,2,\ldots).\qquad(1.6)$$

Для функций $A_n(z)$ $(n=1,2,\ldots)$ по формуле Коши имеем следующее интегральное представление:

$$A_n(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\ln\frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}z^{n-1}\,dz,$$

где $\rho\in(1,\infty)$, а $\zeta\in B^0$. Так как подынтегральная функция регулярна относительно параметра ζ в области B^0, то и функции $A_n(\zeta)$ регулярны в B^0. Их разложения в ряд Тейлора около $z=\infty$ пусть обозначены

$$A_n(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}z^{-k}\qquad(n=1,2,\ldots).\qquad(1.7)$$

Из симметричности функции (1.1) относительно z и ζ вытекает симметричность матрицы $\|\alpha_{nk}\|$, т. е.

$$\alpha_{nk}=\alpha_{kn}\qquad(n,\ k=1,2,\ldots).\qquad(1.8)$$

Установим теперь связь $A_n(z)$ с полиномами Фабера.

Пусть $w=F(z)\in\Sigma$. Обратная функция $z=\Phi(w)$ имеет простой полюс в точке $w=\infty$ и лорановское разложение в ее окрестности вида

$$\Phi(w)=w+\beta_0+\beta_1 w^{-1}+\ldots$$

Известно (см., например, А. И. Маркушевич [1], стр. 114), что полиномом Фабера $\mathcal{F}_n(w)$ $(n=1,2,\ldots)$ называется сумма членов с неотрицательными степенями w в разложении функции $[\Phi(w)]^n$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. При любом конечном w значения полиномов Фабера $\mathcal{F}_n(w)$ можно получить с помощью производящей функции $F'(z)(F(z)-w)^{-1}$ (см., например, В. И. Смирнов и Н. А. Лебедев [1], стр. 127—131), регулярной в некоторой окрестности $z=\infty$. В этой окрестности имеет место разложение

$$\frac{F'(z)}{F(z)-w}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n(w)\,z^{-(n+1)},\qquad \mathcal{F}_0(w)=1,\tag{1.9}$$

или, после интегрирования,

$$\ln\frac{z}{F(z)-w}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathcal{F}_n(w)\,z^{-n}.\tag{1.10}$$

Из (1.9) сравнением коэффициентов при одинаковых степенях z с учетом (6) получим

$$\begin{gathered}\mathcal{F}_1(w)=-(\alpha_0-w),\\ (\alpha_0-w)\mathcal{F}_1(w)+\mathcal{F}_2(w)=-2\alpha_1,\\ \alpha_1\mathcal{F}_1(w)+(\alpha_0-w)\mathcal{F}_2(w)+\mathcal{F}_3(w)=-3\alpha_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_{n-2}\mathcal{F}_1(w)+\alpha_{n-3}\mathcal{F}_2(w)+\ldots+\mathcal{F}_n(w)=-n\alpha_{n-1},\end{gathered}$$

откуда найдем явное выражение для $\mathcal{F}_n(w)$ $(n=2,3,\ldots)$:

$$\mathcal{F}_n(w)=\begin{vmatrix}1 & 0 & \ldots & 0 & -(\alpha_0-w)\\ \alpha_0-w & 1 & \ldots & 0 & -2\alpha_1\\ \alpha_1 & \alpha_0-w & \ldots & 0 & -3\alpha_2\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \ldots & \alpha_0-w & -n\alpha_{n-1}\end{vmatrix}.\tag{1.11}$$

Если в равенстве (1.10) положить $w = F(\zeta)$, $\zeta \in B^0$, а (1.2) переписать в виде

$$\ln \frac{z}{F(z) - F(\zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\zeta) z^{-n} + \ln \frac{1}{1 - \zeta z^{-1}},$$

то единственность разложения регулярной функции в ряд Тейлора около $z = \infty$ приведет к результату

$$\mathcal{F}_n(F(z)) = z^n + nA_n(z) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.12}$$

Равенства (1.12) дают искомую связь $A_n(z)$ с полиномами Фабера. Они позволяют определить систему $\{A_n(z)\}$ не только для однолистной функции $F(z) \in \Sigma$, но и для любой функции $F(z)$, заданной формально разложением около $z = \infty$ вида (6). Кроме того, (1.12) полезны также для исследования граничных значений функций $A_n(z)$. В самом деле, так как $\mathcal{F}_n(w)$ — полином, то в любой точке ζ единичной окружности, в которой имеется предельное значение изнутри области B^0 для $F(z)$, существует и предельное значение для функций $A_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Более глубокие свойства систем $\{A_n(z)\}$ находятся с помощью теорем площадей.

§ 2. Теоремы площадей

Введем предварительно некоторые обозначения. Образ области B^0 при отображении функцией $F(z) \in \Sigma$ будем обозначать через D, а образ окружности $|z| = \rho$ при любом $\rho \in (1, \infty)$ — через C_ρ. Легко проверить, что для области D с полюсом в бесконечно удаленной точке функция Грина $G(w, \infty; D) = \ln |\Phi(w)|$, а поэтому C_ρ является линией уровня функции Грина, т. е.

$$C_\rho = \{w : G(w, \infty; D) = \ln \rho\}.$$

При каждом $\rho \in (1, \infty)$ линия уровня C_ρ ограничивает область D_ρ, содержащую бесконечно удаленную точку, и область d_ρ, являющуюся дополнением замыкания $\overline{D}_\rho$ до w-плоскости. Ясно, что для любых $\rho_1 > \rho_2 > 1$ имеет место строгое включение

$$D_{\rho_2} \supset \overline{D}_{\rho_1}, \qquad \overline{d}_{\rho_2} \subset d_{\rho_1}. \tag{1.13}$$

Далее, условимся обозначать площадь дополнения d_ρ через $\sigma(d_\rho)$ или $\sigma(C_\rho)$. Площадь $\sigma(C_\rho)$ обладает очевидными свойствами:

$$\text{а) } \sigma(C_\rho) > 0, \qquad 1 < \rho < \infty, \tag{1.14а}$$

$$\text{б) } \sigma(C_{\rho_2}) < \sigma(C_{\rho_1}), \qquad 1 < \rho_2 < \rho_1, \tag{1.14б}$$

из которых следует существование неотрицательного предела

$$\lim_{\rho \to 1} \sigma(C_\rho) = \sigma^*(F) \geqslant 0. \tag{1.15}$$

При этом, если $\sigma^*(F) = 0$, то функция $F(z) \in \tilde{\Sigma}$, ибо в этом случае область D не имеет внешних точек и площадь границы δD равна нулю, а если $\sigma^*(F) > 0$, то $F(z) \overline{\in} \tilde{\Sigma}$, что легко доказывается от противного.

Свойство однолистных отображений оставлять непокрытой часть плоскости w неотрицательной площади известно под названием принципа площадей (Бибербах [1]). Аналитическое выражение этого принципа в терминах коэффициентов лорановского разложения (6) составляет содержание так называемой внешней теоремы площадей (Гронуолл [1]), занимающей видное место в теории однолистных функций.

В этом параграфе выводятся некоторые обобщения внешней теоремы площадей, геометрический смысл которых состоит в том, что утверждается неотрицательность площади области, получаемой в результате отображения дополнения d_ρ, $\rho > 1$, как с помощью регулярной функции, так и другими способами.

Теорема 1.1 *). *Пусть $w = F(z) \in \Sigma$, а $Q(w)$ — произвольная функция, отличная от постоянной, регулярная на дополнении d_{ρ_0}, $\rho_0 > 1$. Пусть лорановское разложение функции $Q(F(z))$, регулярной в кольце $1 < |z| < \rho_0$, имеет вид*

$$Q(F(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n z^n + \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n z^{-n}. \tag{1.16}$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|\lambda_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n\,|\Lambda_n|^2. \tag{1.17}$$

*) См. Н. А. Лебедев и И. М. Милин [1].

Знак равенства имеет место в том и только в том случае, если $F(z) \in \tilde{\Sigma}$.

Возьмем любое $\rho \in (1, \rho_0)$. Область d_ρ целиком лежит в области d_{ρ_0}, а поэтому функция $Q(w)$ регулярна в $\bar{d}_\rho$ и отображает ее на риманову поверхность, границу которой обозначим L_ρ, а площадь — через $\sigma(L_\rho)$. Когда z описывает окружность $|z| = \rho$, точка $w = F(z)$ описывает кривую C_ρ, а точка $Q(w) = Q(F(z))$ — границу L_ρ. Поскольку аффикс текущей точки кривой L_ρ задан рядом Лорана (1.16), то для площади римановой поверхности $\sigma(L_\rho)$ с помощью формулы Грина получим выражение

$$\sigma(L_\rho) = \iint\limits_{d_\rho} |Q'(w)|^2 \, d\sigma = \frac{1}{2i} \int\limits_{C_\rho} \overline{Q(w)} \, Q'(w) \, dw =$$

$$= \frac{1}{2i} \int\limits_{|z|=\rho} \overline{Q(F(z))} \, dQ(F(z)) =$$

$$= \pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} n |\Lambda_n|^2 \rho^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} n |\lambda_n|^2 \rho^{-2n} \right). \qquad (1.18)$$

Так как $Q'(w) \not\equiv 0$ ($Q'(w)$ может иметь лишь конечное число нулей в $\bar{d}_\rho$) и, кроме того, имеется включение (1.13), то площадь $\sigma(L_\rho)$ обладает следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned} &\text{а) } \sigma(L_\rho) > 0, \qquad 1 < \rho < \rho_0; \\ &\text{б) } \sigma(L_{\rho_2}) < \sigma(L_{\rho_1}), \quad 1 < \rho_2 < \rho_1 < \rho_0; \\ &\text{в) } \lim_{\rho \to 1} \sigma(L_\rho) = \pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} n |\Lambda_n|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n |\lambda_n|^2 \right) \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.19)$$

Из свойства (1.19в) получаем неравенство (1.17). Выясним возможность знака равенства в (1.17).

Пусть $F(z) \in \tilde{\Sigma}$. Составим неравенство

$$\sigma(L_\rho) = \iint\limits_{d_\rho} |Q'(w)|^2 \, d\sigma \leqslant M_\rho^2 \, \sigma(C_\rho),$$

где M_ρ — максимум $|Q'(w)|$ в области $\bar{d}_\rho$. Устремляя ρ к 1 и пользуясь включением (1.13), в пределе получим

$$\lim_{\rho \to 1} \sigma(L_\rho) \leqslant M_\rho^2 \, \sigma^*(F),$$

откуда и следует знак равенства в (1.17), ибо для $F(z)\in\tilde{\Sigma}$ обязательно $\sigma^*(F)=0$.

Теперь пусть $F(z)\in\Sigma$, но $F(z)\overline{\in}\tilde{\Sigma}$. Тогда $\sigma^*(F)>0$ и поэтому возможно представление

$$\sigma^*(F)=\pi r^2>0.$$

Обозначим нули функции $Q'(w)$, лежащие в области $\overline{d}_\rho$, через $w_1, w_2, \ldots, w_k$ $(0\leqslant k<\infty)$. Выберем столь малое ε, чтобы разность $r^2-k\varepsilon^2$ была положительна, и удалим из области d_ρ все ее пересечения с замкнутыми круговыми ε-окрестностями нулей функции $Q'(w)$. Полученное таким образом из области d_ρ множество обозначим через $d_{\rho,\varepsilon}$. Так как по свойству (1.14б) $\sigma(C_\rho)>\sigma^*(F)=\pi r^2$, то

$$\sigma(d_{\rho,\varepsilon})\geqslant\sigma(C_\rho)-\pi k\varepsilon^2>\pi(r^2-k\varepsilon^2)>0.$$

Следовательно, функция $Q'(w)$ регулярна в замкнутой области $\overline{d}_{\rho,\varepsilon}$ и не имеет в ней нулей. Отсюда сразу вытекает неравенство

$$\sigma(L_\rho)=\iint\limits_{d_\rho}|Q'(w)|^2\,d\sigma\geqslant\iint\limits_{d_{\rho,\varepsilon}}|Q'(w)|^2\,d\sigma\geqslant m^2_{\rho,\varepsilon}\,\sigma(d_{\rho,\varepsilon}),$$

где $m_{\rho,\varepsilon}$ — минимум $|Q'(w)|$ в области $\overline{d}_{\rho,\varepsilon}$. Совершив в последнем неравенстве предельный переход при $\rho\to1$, убедимся, что $\lim\limits_{\rho\to1}\sigma(L_\rho)>0$, и, значит, в (1.17) имеет место строгое неравенство. Теорема доказана.

Следствие (внешняя теорема площадей). *Для любой функции $F(z)\in\Sigma$ выполняется неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty}n|\alpha_n|^2\leqslant1. \tag{1.20}$$

Знак равенства имеет место только для функций $F(z)\in\tilde{\Sigma}$.

Сформулированная внешняя теорема площадей получается из теоремы 1.1, если взять $Q(w)=w$.

Лемма 1.1 (Правиц [1]). *Пусть Γ — замкнутая аналитическая кривая Жордана, ограничивающая конечную область B. Пусть R и Φ — полярные координаты, а $g(R)$ — непрерывная, неотрицательная и строго возрастающая функция от R на Γ.*

Тогда

$$\int_{\Gamma} g(R)\, d\Phi > 0. \tag{1.21}$$

Для доказательства введем новую систему полярных координат R^* и Φ^* по формулам

$$R^* = \sqrt{g(R)},$$
$$\Phi^* = \Phi.$$

Нетрудно видеть, что при таком преобразовании кривая Γ перейдет в замкнутую кривую Жордана Γ^*, ограничивающую конечную область B^* и, что особенно важно, с тем же направлением обхода. Поэтому будем иметь

$$\int_{\Gamma} g(R)\, d\Phi = \int_{\Gamma^*} R^{*2}\, d\Phi^*. \tag{1.22}$$

Но интеграл в правой части написанного равенства есть, как известно, удвоенная площадь области B^*, а последняя обязательно положительна, ибо B^* — непустое открытое множество.

С помощью леммы 1.1, Правиц [1] доказал теорему площадей для однолистных функций, которая в несколько измененной редакции приводится ниже.

Теорема 1.2. *Пусть $F(z) \in \Sigma$, а $\Omega(R)$ — такая функция полярного радиуса R (с полюсом в начале), что $R\Omega'(R)$ — непрерывная, неотрицательная и строго возрастающая функция от R на дополнении d_{ρ_0}, $\rho_0 > 1$.*

Тогда при любом $\rho \in (1, \rho_0)$ справедливо неравенство:

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Omega\left(|F(\rho e^{i\varphi})|\right) d\varphi\right] > 0. \tag{1.23}$$

Если принять линию уровня C_ρ за контур Γ, а $R\Omega'(R)$ обозначить через $g(R)$, то условия леммы 1.1 будут выполнены. Следовательно, по ее заключению будем иметь

$$\int_{C_\rho} R\Omega'(R)\, d\Phi > 0, \tag{1.24}$$

где интеграл взят в положительном направлении относительно дополнения d_ρ.

Теперь из дифференциального уравнения Коши—Римана в полярных координатах

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=\frac{\rho}{R}\frac{\partial R}{\partial\rho},$$

где $z=\rho e^{i\varphi}$, а $F(z)=Re^{i\Phi}$, можно найти элемент $d\Phi$:

$$d\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}d\varphi=\frac{\rho}{R}\frac{\partial R}{\partial\rho}d\varphi$$

и ввести это выражение в интеграл (1.24). В результате получим:

$$\int\limits_{C_\rho} R\Omega'(R)\,d\Phi=\rho\frac{d}{d\rho}\int\limits_0^{2\pi}\Omega\left(|F(\rho e^{i\varphi})|\right)d\varphi>0, \qquad (1.25)$$

откуда и выводим (1.23).

Следствие. *Для функции $F(z)\in\Sigma_0$ при любом $\lambda>0$ имеем*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-\lambda)\,|D_n(\lambda)|^2\leqslant\lambda, \qquad (1.26)$$

где обозначено

$$\left(\frac{F(z)}{z}\right)^\lambda=\sum_{n=0}^{\infty}D_n(\lambda)\,z^{-n}, \qquad D_0(\lambda)=1.$$

Знак равенства в (1.26) *реализуется только функциями* $F(z)\in\tilde{\Sigma}_0$.

Чтобы применить для доказательства теорему 1.2, выберем $\Omega(R)=\frac{1}{2\lambda}R^{2\lambda}$. Тогда $g(R)=R\Omega'(R)=R^{2\lambda}$ является непрерывной, неотрицательной и строго возрастающей функцией R при $R\geqslant 0$, и по заключению теоремы 1.2 справедливо неравенство

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|F(\rho e^{i\varphi})|^{2\lambda}d\varphi\right]>0, \qquad \rho>1. \qquad (1.27)$$

Так как $F(z)\in\Sigma_0$ не имеет нулей в области B^0, то функция $\left(\frac{F(z)}{z}\right)^\lambda=\exp\left\{\lambda\ln\frac{F(z)}{z}\right\}$ регулярна в $|z|>1$ и поэтому

при $\rho > 1$ имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(z)|^{2\lambda}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho^{2\lambda}\left|\left(\frac{F(z)}{z}\right)^{\lambda}\right|^2 d\varphi =$$

$$= \rho^{2\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}|D_n(\lambda)|^2\rho^{-2n}, \quad z=\rho e^{i\varphi}.$$

Теперь из (1.27) при любом $\rho > 1$ получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2\lambda-2n)\,|D_n(\lambda)|^2\rho^{-2n} > 0,$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-\lambda)\,|D_n(\lambda)|^2\rho^{-2n} < \lambda,$$

откуда с помощью предельного перехода при $\rho \longrightarrow 1$ и выводится (1.26).

Утверждение о знаке равенства в (1.26) доказывается аналогично тому, как это сделано в теореме 1.1, поскольку левая часть используемого неравенства (1.27) согласно (1.25) и (1.22) имеет смысл площади области d_ρ^*, получаемой из дополнения d_ρ преобразованием в полярной системе координат

$$R^* = R^\lambda,$$
$$\theta^* = \theta.$$

В связи с неравенствами (1.17) и (1.23) заметим без доказательства (его можно найти в работе Правица [1]), что при выполнении условий теорем 1.1 и 1.2 имеет место более общее неравенство

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Omega\left(|Q(F(\rho e^{i\varphi}))|\right)d\varphi\right] > 0,$$

из которого в частном случае $\Omega(R) = R^2$ вытекает неравенство (1.17), а при $Q(w) = w$ следует теорема 1.2.

При этом обращает на себя внимание тот факт, что подынтегральная функция $\Omega(|Q(w)|)$ во всех случаях оказывается субгармонической в области d_{ρ_0}.

Действительно, функция $\ln R = \ln|Q(w)|$ субгармонична в d_{ρ_0} (хотя и разрывна в нулях $Q(w)$), а $\Omega(R)$ по условию предполагается возрастающей выпуклой функцией от $\ln R$. Поэтому сложная функция $\Omega(|Q(w)|)$, будучи непрерывной, также субгармонична в области d_{ρ_0} (см., например, А. Ф. Тиман, В. Н. Трофимов [1], стр. 186—187).

Неслучайность этого факта недавно установил Нехари [1]. Приведем результаты Нехари с небольшими изменениями, сохраняя при выводе основные идеи автора.

Теорема 1.3. *Если $F(z) \in \Sigma$ и $S(w)$ — непрерывная субгармоническая функция на дополнении d_{ρ_0}, $\rho_0 > 1$, то среднее значение*

$$H(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(F(\rho e^{i\varphi}))\, d\varphi$$

является неубывающей выпуклой функцией от $\ln \rho$ в промежутке $1 < \rho < \rho_0$. Следовательно, для дифференцируемых $H(\rho)$ выполняется неравенство

$$H'(\rho) \geqslant 0, \tag{1.28}$$

причем знак равенства в (1.28) при $\rho = \rho' \in (1, \rho_0)$ реализуется только функциями $S(w)$, гармоническими в области $d_{\rho'}$.

Сначала покажем, что для любой функции $U(w)$, гармонической в области d_{ρ_0}, (1.28) выполняется со знаком равенства. В самом деле, так как d_{ρ_0} — односвязная область, то $U(w)$ может быть представлена как реальная часть некоторой функции $T(w)$, регулярной в d_{ρ_0}:

$$U(w) = \operatorname{Re} T(w).$$

Сложная функция $T(F(z))$ будет регулярной в кольце $1 < |z| < \rho_0$ и поэтому, в силу интегральной теоремы Коши, будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho_2} \frac{T(F(z))}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho_1} \frac{T(F(z))}{z}\, dz, \qquad 1 < \rho_2 < \rho_1 < \rho_0.$$

Из последних двух равенств следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(F(\rho e^{i\varphi}))\, d\varphi = \text{const}, \qquad 1 < \rho < \rho_0, \tag{1.28a}$$

т. е. требуемое предложение.

Теперь для заданной субгармонической функции $S(w)$ докажем монотонность $H(\rho)$, т. е. неравенство

$$H(\rho_2) \leqslant H(\rho_1), \tag{1.28б}$$

для произвольных $\rho_2 < \rho_1$ из промежутка $(1, \rho_0)$.

Для этого введем в рассмотрение функцию $U(w)$ гармоническую внутри области d_{ρ_1} и непрерывную в ее замыкании с граничными значениями на C_{ρ_1}, равными $S(w)$. Это возможно, поскольку решение задачи Дирихле существует и единственно. Для $U(w)$ на основании (1.28а) будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(F(\rho_2 e^{i\varphi}))\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(F(\rho_1 e^{i\varphi}))\,d\varphi.$$

Далее рассмотрим разность $S(w) - U(w)$. Она также является субгармонической функцией в d_{ρ_1} и принимает на границе C_{ρ_1} значения, равные нулю. По принципу максимума для субгармонических функций всюду в области d_{ρ_1}

$$S(w) \leqslant U(w)$$

со знаком равенства в какой-нибудь точке $w \in d_{\rho_1}$ только при тождественном совпадении $S(w)$ с $U(w)$ в d_{ρ_1}. Отсюда и из последнего равенства вытекает (1.28б), причем равенство в нем имеет место только тогда, когда $S(w)$ гармонична в d_{ρ_1}.

Что касается выпуклости $H(\rho)$ как функции от $\ln\rho$, то для субгармонических в кольце функций $S(F(z))$ это свойство хорошо известно под названием теоремы Рисса о выпуклости (см., например, А. Ф. Тиман, В. Н. Трофимов [1], стр. 194).

Наконец, если функция $S(w)$ при каком-либо $\rho' \in (1, \rho_0)$ реализует равенство в (1.28), т. е. $H'(\rho') = 0$, то условие выпуклости для дифференцируемой $H(\rho)$:

$$\rho_2 H'(\rho_2) \leqslant \rho' H'(\rho'), \qquad 1 < \rho_2 < \rho' < \rho_0,$$

и неравенство (1.28) при $1 < \rho < \rho'$ приведут к тождеству в (1.28б) при $1 < \rho_2 < \rho'$, что имеет место только в том случае, если функция $S(w)$ гармоническая в области d_{ρ_1}. Теорема доказана.

В частных случаях из теоремы 1.3 вытекают удобные для приложений теоремы площадей, одну из которых сформулируем в виде следствия.

Следствие. *Пусть $F(z)\in\Sigma$ и функция $Q(w)$ удовлетворяет условиям:*

а) *аналитична на дополнении $d_{\rho_0}(\rho_0>1)$ за исключением конечного числа точек;*

б) *функция $|Q(w)|$ однозначна и непрерывна в d_{ρ_0}.*

Тогда

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|Q(F(\rho e^{i\varphi}))|^2\,d\varphi\right]\geqslant 0. \qquad (1.28в)$$

Положим $S(w)=|Q(w)|^2$. Так как функция $|Q(w)|$ однозначна и непрерывна в области d_{ρ_0}, то функция $S(w)$ в d_{ρ_0} субгармонична. По теореме 1.3 среднее значение

$$H(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|Q(F(\rho e^{i\varphi}))|^2\,d\varphi$$

является выпуклой функцией от $\ln\rho$ в $(1,\ \rho_0)$. Поскольку при неисключительных значениях $\rho\in(1,\ \rho_0)$ $H(\rho)$ дифференцируема, то производная

$$\frac{dH(\rho)}{d\ln\rho}=\rho H'(\rho)$$

в промежутке $(1,\ \rho_0)$ не убывает. Учитывая еще (1.28), приходим к выводу, что существует неотрицательный предел величины $H'(\rho)$ при $\rho\to 1$, т. е. получаем (1.28в).

Кроме рассмотренных теорем следует отметить еще весьма общую теорему площадей Н. А. Лебедева [2], при выводе которой используется принцип площадей для дополнения до расширенной плоскости объединения нескольких неналегающих однолистных областей.

§ 3. Ортонормированность системы $\{\sqrt{n}A_n'(z)\}$

Лемма 1.2. *Для системы $\{A_n(z)\}$, порожденной любой функцией $F(z)\in\Sigma$, справедливо неравенство*

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{B^0}\left|\sum_{n=1}^{N}x_nA_n'(z)\right|^2 d\sigma=\sum_{k=1}^{\infty}k\left|\sum_{n=1}^{N}x_n\alpha_{nk}\right|^2\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{|x_n|^2}{n}, \qquad (1.29)$$

где $\{x_n\}$ $(n=1, 2, \ldots, N;\ N\geqslant 1)$ — *произвольная система комплексных чисел. Знак равенства в* (1.29) *для ненулевой системы* $\{x_n\}$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $F(z)\in\tilde{\Sigma}$.

Пусть заданы любая функция $F(z)\in\Sigma$ и произвольная ненулевая система чисел $\{x_n\}_1^N$ (для нулевой системы $\{x_n\}$ (1.29) тривиально). Образуем функцию

$$Q(w)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}x_n\mathcal{F}_n(w),$$

где $\mathcal{F}_n(w)$ $(n=1, 2, \ldots, N)$ — полиномы Фабера, порожденные функцией $F(z)$ согласно (1.11). Функция $Q(w)$ является полиномом степени не выше N и отлична от постоянной. Следовательно, $Q(w)$ регулярна на дополнении d_ρ с любым $\rho>1$. Сложная функция $Q(F(z))$ регулярна в кольце $1<|z|<\infty$ и в силу (1.12) может быть представлена в виде

$$Q(F(z))=\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n}{n}z^n+\sum_{n=1}^{N}x_nA_n(z).$$

Если вспомнить для функций $A_n(z)$ разложение в ряд Тейлора (1.7), то из последнего равенства найдется лорановское разложение $Q(F(z))$ в кольце $1<|z|<\infty$

$$Q(F(z))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n}z^n+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}x_n\alpha_{nk}\right)z^{-k}.$$

Остается применить теорему 1.1 и лемма 1.2 будет доказана.

Замечание. Неравенство (1.29) выведено одновременно Поммеренке [2], Дженкинсом [1] и И. М. Милиным [1]. Из (1.29) с помощью неравенства Коши вытекают неравенства

$$\left|\sum_{k,\,n=1}^{N}\alpha_{nk}x_nx_k\right|\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{|x_n|^2}{n}\qquad(N=1, 2, \ldots),\quad(1.30)$$

впервые полученные Грунским [1] как необходимые и достаточные условия однолистности $F(z)$ в $|z|>1$.

Теорема 1.4*). *Для каждой системы $\{A_n(z)\}$, порожденной функцией $F(z)\in\tilde{\Sigma}$, система $\{\sqrt{n}A'_n(z)\}$ является полной ортонормированной системой функций в $l^2(B^0)$.*

Фиксируем произвольное n $(n=1, 2, \ldots)$ и положим $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=0$, $x_n=1$. По лемме 1.2 будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{B^0}|A'_n(z)|^2\,d\sigma=\sum_{k=1}^{\infty}k\,|\alpha_{nk}|^2=\frac{1}{n}. \tag{1.31}$$

Теперь фиксируем n и m $(n, m=1, 2, \ldots;\ m\neq n)$ и положим $x_n=1$, $x_m=e^{i\theta}$, $\theta\in[0, 2\pi)$, а остальные $x_\nu=0$. Снова применяя лемму 1.2 и учитывая уже доказанную часть (1.31), получим

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\theta}\cdot\frac{1}{\pi}\iint\limits_{B^0}A'_n(z)\,\overline{A'_m(z)}\,d\sigma\right]=0,$$

откуда ввиду произвольности числа $\theta\in[0, 2\pi)$ вытекает ортогональность системы $\{A'_n(z)\}$:

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{B^0}A'_n(z)\overline{A'_m(z)}\,d\sigma=\sum_{k=1}^{\infty}k\alpha_{nk}\bar{\alpha}_{mk}=0,\qquad m\neq n. \tag{1.32}$$

Равенства (1.31) и (1.32) выражают ортонормированность системы $\{\sqrt{n}A'_n(z)\}$ в области B^0. Докажем ее полноту в классе $l^2(B^0)$. Для этого прежде всего, используя (1.7), напишем разложения функций $\sqrt{n}A'_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ в ряд Тейлора около $z=\infty$:

$$\sqrt{n}A'_n(z)=-\sqrt{n}\sum_{k=1}^{\infty}k\alpha_{nk}z^{-(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{nk}\alpha_{nk}\left[-\sqrt{k}z^{-(k+1)}\right]. \tag{1.33}$$

Но несложно проверить, что для области B^0 система функций $\varphi'_k(z)=-\sqrt{k}z^{-(k+1)}$ $(k=1, 2, \ldots)$ является полной ортонормированной системой в $l^2(B^0)$, и, следовательно, равенства (1.33) можно рассматривать как разложения функций $\sqrt{n}A'_n(z)\in l^2(B^0)$ в ряд Фурье в системе $\{\varphi'_n(z)\}$. Поскольку матрица коэффициентов Фурье $\{\sqrt{nk}\alpha_{nk}\}$ функций

*) См. И. М. Милин [1].

$\sqrt{n}A'_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ в системе $\{\varphi'_k(z)\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ в силу (1.8) симметрическая, то и ортонормированная система $\{\sqrt{n}A'_n(z)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ полна в классе $l^2(B^0)$ (В. И. Смирнов [1], стр. 182—183). Теорема доказана.

Следствие. *Если система $\{A_n(z)\}$ порождена функцией $F(z)\in\tilde{\Sigma}$, то любая функция*

$$\omega(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n}\in\sigma$$

разлагается по системе $\{A_n(z)\}$ в равномерно сходящийся внутри B^0 ряд

$$\left.\begin{aligned}\omega(z)&=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n A_n(z),\\ \lambda_n&=\frac{n}{\pi}\iint\limits_{B^0}\omega'(z)\overline{A'_n(z)}\,d\sigma\qquad(n=1, 2, \ldots).\end{aligned}\right\}\quad(1.34)$$

При этом имеет место формула площадей

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda_n|^2}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}n\,|c_n|^2. \tag{1.35}$$

Из определения класса $\sigma=\sigma(B^0)$ следует, что функция $\omega'(z)\in l^2(B^0)$. Тогда в силу полноты системы $\{\sqrt{n}A'_n(z)\}$ $\omega'(z)$ разлагается в ряд Фурье

$$\omega'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n A'_n(z),$$

$$\lambda_n=\frac{n}{\pi}\iint\limits_{B^0}\omega'(z)\overline{A'_n(z)}\,d\sigma,$$

сходящийся равномерно внутри области B^0. Интегрируя это разложение, получим (1.34).

Далее, равенство Парсеваля (10) дает

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{B^0}|\omega'(z)|^2\,d\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda_n|^2}{n}.$$

Но левая часть этого равенства есть деленная на π площадь образа B^0 при отображении функцией $\omega(z)$, которая, как

известно, вычисляется по формуле

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{B^0} |\omega'(z)|^2\, d\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|^2.$$

Из последних двух равенств получается формула (1.35).

Согласно общей теории ортонормированных систем функций для систем $\{\sqrt{n}\,A_n'(z)\}$, порожденных функциями $F(z)\in\tilde{\Sigma}$, должно выполняться тождество (16) с конкретной ядерной функцией для области B^0, именно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nA_n'(z)\,\overline{A_n'(\zeta)} = \frac{1}{(1-z\bar{\zeta})^2}, \qquad z,\ \zeta\in B^0. \tag{1.36}$$

Интегрируя (1.36), получим другое тождество:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nA_n(z)\,\overline{A_n(\zeta)} = \ln\frac{1}{1-(z\bar{\zeta})^{-1}}, \tag{1.37}$$

для $F(z)\in\tilde{\Sigma}$ и любых z и ζ из внешности единичного круга. Тождества (1.36) и (1.37) можно весьма успешно использовать при исследовании однолистных функций из $\tilde{\Sigma}$. А поскольку нетрудно доказать (Г. М. Голузин [7], стр. 56), что подкласс $\tilde{\Sigma}$ является всюду плотным в классе Σ в том смысле, что всякую функцию $F(z)\in\Sigma$ можно равномерно аппроксимировать внутри области B^0 функциями из $\tilde{\Sigma}$, то полученные при исследовании результаты удастся распространить и на весь класс Σ.

Однако есть и другая возможность, которой и будем следовать в дальнейшем: пытаться найти для любых систем $\{A_n(z)\}$ свойства, в каком-то смысле близкие замечательным свойствам ортонормированных систем. Например, из (1.37) и (1.36) при $\zeta=z$ вытекают равенства для $F(z)\in\tilde{\Sigma}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|A_n(z)|^2 = \ln\frac{1}{1-|z|^{-2}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|A_n'(z)|^2 = \frac{1}{(|z|^2-1)^2},$$

которые распространяются нижеследующей теоремой и на весь класс Σ, но с заменой знака $=$ на знак $\leqslant$.

Теорема 1.5. *Для любой системы $\{A_n(z)\}$, порожденной функцией $F(z)\in\Sigma$, при каждом $\nu=0,1,\ldots$ в области B^0 выполняется неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|A_n^{(\nu)}(z)|^2 \leqslant \left.\frac{\partial^{2\nu}\ln\dfrac{1}{1-(z\bar{\zeta})^{-1}}}{\partial z^{\nu}\,\partial\bar{\zeta}^{\nu}}\right|_{\zeta=z}. \tag{1.38}$$

В частности, при $\nu=0,1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|A_n(z)|^2 \leqslant \ln\frac{1}{1-r^2}, \quad |z|=\frac{1}{r}>1, \tag{1.39}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|A_n'(z)|^2 \leqslant \frac{1}{(\rho^2-1)^2}, \quad |z|=\rho>1. \tag{1.40}$$

Знак равенства в (1.38) *при конечном $z\in B^0$ имеет место только для функций $F(z)\in\bar{\Sigma}$.*

Докажем сначала теорему при $\nu=0$. Для этого фиксируем произвольное конечное $\zeta\in B^0$ (при $z=\infty$ заключение теоремы очевидно) и рассмотрим любую ветвь функции

$$Q(w)=\ln\frac{1}{w-F(\zeta)}.$$

Эта функция регулярна в области d_ρ, $\rho=|\zeta|$, так как $F(\zeta)$ — граничная точка дополнения d_ρ. Лорановское разложение сложной функции $Q(F(z))$ в кольце $1<|z|<\rho$ получим, исходя из тождества

$$\ln\frac{1}{F(z)-F(\zeta)}=\ln\frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}+\ln\frac{1}{z-\zeta}. \tag{1.41}$$

Первое слагаемое в (1.41) — функция, регулярная в $|z|>1$, и потому разлагается по отрицательным степеням z согласно (1.2), а второе слагаемое — регулярная функция в круге $|z|<\rho$ и разлагается известным образом по положительным степеням z. Так что (1.41) перепишется в виде

$$\ln\frac{1}{F(z)-F(\zeta)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\zeta^{-n}z^{n}-\ln(-\zeta)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\zeta)\,z^{-n}, \tag{1.42}$$

откуда по теореме 1.1 получится неравенство (1.39) вместе с замечанием о знаке равенства.

С помощью выведенного неравенства (1.39) убеждаемся в том, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\zeta) z^{-n}$ сходится равномерно по двум переменным z и ζ внутри B^0. Действительно, для всякой замкнутой подобласти $\overline{B}_\rho^0 = \{z : |z| \geqslant \rho\}$, $\rho > 1$, учитывая (1.39), будем иметь

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} A_k(\zeta) z^{-k}\right| \leqslant \left(\sum_{k=n}^{\infty} k |A_k(\zeta)|^2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} |z|^{-2k}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\ln \frac{1}{1-\rho^{-2}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} \rho^{-2k}\right)^{1/2} = o(1) \quad (n \to \infty),$$

что уже достаточно для равномерной сходимости.

Теперь возьмем целое $\nu \geqslant 1$, снова фиксируем конечное $\zeta \in B^0$ и рассмотрим функцию

$$Q(w) = \left[\ln \frac{1}{w - F(\zeta)}\right]_\zeta^{(\nu)}.$$

Полагая $|\zeta| = \rho > 1$, убеждаемся в том, что функция $Q(w)$ регулярна на дополнении d_ρ и отлична от постоянной. В самом деле, написанная частная производная ν-го порядка по ζ есть полином точно степени ν относительно $\frac{1}{w - F(\zeta)}$, ибо коэффициент у старшего члена полинома равен $(\nu-1)! [F'(\zeta)]^\nu$ и ввиду однолистности $F(\zeta)$ отличен от нуля.

Сложная функция $Q(F(z))$ регулярна в кольце $1 < |z| < \rho$, и ее разложение в ряд Лорана будем искать из тождества (1.41) дифференцированием его ν раз по аргументу ζ:

$$\left[\ln \frac{1}{F(z) - F(\zeta)}\right]_\zeta^{(\nu)} = \left[\ln \frac{z-\zeta}{F(z) - F(\zeta)}\right]_\zeta^{(\nu)} + \left[\ln \frac{1}{z-\zeta}\right]_\zeta^{(\nu)}.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\zeta) z^{-n}$ сходится равномерно по двум переменным z и ζ внутри области B^0, то по теореме Вейерштрасса равенство (1.2) можно сколько угодно раз почленно дифференцировать по каждой из переменных. Если продифференцировать (1.2) ν раз по ζ, то из последнего тождества

найдем наконец разложение $Q(F(z))$ в ряд Лорана

$$\left[\ln\frac{1}{F(z)-F(\zeta)}\right]_\zeta^{(\nu)}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(\nu)}(\zeta)z^{-n}+$$
$$+\left[\ln\left(-\frac{1}{\zeta}\right)\right]^{(\nu)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[\zeta^{-n}]^{(\nu)}z^n,$$

а вместе с ним по теореме 1.1 получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left|A_n^{(\nu)}(\zeta)\right|^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|[\zeta^{-n}]^{(\nu)}\right|^2,$$

что после несложных преобразований совпадает с (1.38) и тем доказывает теорему.

Следствие. *Если система $\{A_n(z)\}$ порождена функцией $F(z)\in\Sigma$ и последовательность чисел $\{x_n\}$ удовлетворяет условию $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|x_n|^2<\infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x_nA_n^{(\nu)}(z)$ $(\nu=0,1,\ldots)$ сходится абсолютно и равномерно внутри области B^0.*

Теорема 1.6. *Для любой системы $\{a_n(z)\}$, порожденной нечетной функцией $F(z)\in\Sigma$, при каждом $\nu=0,1,\ldots$ в области B^0 выполняются неравенства*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\left|a_{2n-1}^{(\nu)}(z)\right|^2\leqslant\left.\frac{\partial^{2\nu}\frac{1}{2}\ln\frac{z\bar\zeta+1}{z\bar\zeta-1}}{\partial z^\nu\partial\bar\zeta^\nu}\right|_{\zeta=z},\tag{1.43}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}2n\left|a_{2n}^{(\nu)}(z)\right|^2\leqslant\left.\frac{\partial^{2\nu}\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-(z\bar\zeta)^{-2}}}{\partial z^\nu\partial\bar\zeta^\nu}\right|_{\zeta=z}.\tag{1.44}$$

Знак равенства в (1.43) и (1.44) при конечном $z\in B^0$ реализуется только нечетными функциями $F(z)\in\tilde\Sigma$.

Отметим лишь особенности в доказательстве этой теоремы по отношению к предыдущей. При любом конечном $\zeta\in B^0$ для вывода неравенства (1.43) выбирается функция

$$Q_1(w)=\left[\ln\frac{w+F(\zeta)}{w-F(\zeta)}\right]_\zeta^{(\nu)},$$

а для вывода (1.44)

$$Q_2(w)=\left[\ln\frac{1}{(w-F(\zeta))(w+F(\zeta))}\right]_{\zeta}^{(\nu)},$$

каждая из которых регулярна на дополнении d_ρ, $\rho=|\zeta|$, так как $F(\zeta)$ и $-F(\zeta)$ суть граничные точки области d_ρ. Затем находят разложения сложных функций $Q_1(F(z))$ и $Q_2(F(z))$ в ряд Лорана в кольце $1<|z|<\rho$ и с помощью теоремы площадей 1.1 получают требуемое.

Конечно, с помощью теоремы площадей можно получить и другие неравенства для систем $\{A_n(z)\}$, полезные при исследовании однолистных функций классов S и Σ. Однако, чтобы не повторяться, это будет сделано сразу для конечносвязной области в главе 5, а здесь лишь выделены такие результаты, которые используются в главе 3 для анализа коэффициентов однолистных функций.

§ 4. Простейшие приложения систем $\{A_n(z)\}$

В этом параграфе ставится цель показать, что с помощью систем $\{A_n(z)\}$ весьма просто и элементарно получаются многие результаты теории однолистных функций, касающиеся искажений при отображении однолистными функциями из классов Σ и S, границ роста этих функций, условий однолистности и т. д. Все приложения систем $\{A_n(z)\}$, касающиеся коэффициентов однолистных функций, собраны в третьей главе.

Теорема 1.7 (Лёвнер [1]). *Пусть $F(z)\in\Sigma$. Тогда при любом значении $z=\zeta\in B^0$ имеем*

$$1-r^2\leqslant|F'(\zeta)|\leqslant\frac{1}{1-r^2},\qquad |\zeta|=\frac{1}{r}. \tag{1.45}$$

Верхняя граница в (1.45) *при конечном ζ достигается только для функций $F(z)=\dfrac{z-\zeta}{1-(z\bar\zeta)^{-1}}+\mathrm{const}$, отображающих B^0 на плоскость w с разрезом по дуге окружности с центром в точке $w=F(\zeta)$, а нижняя — только для функций $F(z)=z+\dfrac{\zeta}{\bar\zeta}z^{-1}+\mathrm{const}$, отображающих B^0 на плоскость с разрезом по отрезку луча, исходящего из точки $F(\zeta)$.*

При заданном конечном $\zeta \in B^0$ положим в разложении (1.2) $z=\zeta$. Тогда будем иметь

$$\ln F'(\zeta) = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\zeta)\,\zeta^{-n}. \tag{1.46}$$

Из (1.46) с помощью неравенства Коши и с учетом оценки (1.39) получим

$$|\ln F'(\zeta)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |A_n(\zeta)\,\zeta^{-n}| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,|A_n(\zeta)|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,|\zeta|^{-2n}\right)^{1/2} \leqslant \ln\frac{1}{1-r^2}, \tag{1.47}$$

откуда и следует (1.45).

Для достижения нижней границы в (1.45) надо иметь знак равенства во всех соотношениях (1.47) и нужно, чтобы выполнялось условие $\ln|F'(\zeta)| = -|\ln F'(\zeta)|$, а это возможно в том и только в том случае, если

$$A_n(\zeta) = \frac{1}{n}\,\bar{\zeta}^{-n} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Но для такой системы $\{A_n(z)\}$ из (1.2) будем иметь

$$\ln\frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)} = \ln\frac{1}{1-(\bar{\zeta}z)^{-1}},$$

а из этого равенства уже находим $F(z) = z + \frac{\zeta}{\bar{\zeta}}\,z^{-1} + \text{const}$.

Замечание о достижении верхней границы доказывается аналогично.

Теорема 1.8. *Пусть $f(z) \in S$. Тогда при любом z, $|z| = r < 1$, имеем*

$$\frac{1-r}{1+r} \leqslant \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1+r}{1-r}, \tag{1.48}$$

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}, \tag{1.49}$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}. \tag{1.50}$$

Знак равенства при $z \neq 0$ в каждом из соотношений реализуется только функцией вида

$$f_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{-i\theta}z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-i(n-1)\theta}z^n, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad (1.51)$$

отображающей $|z| < 1$ на плоскость с разрезом по лучу радиального направления, исходящему из точки $-\frac{1}{4}e^{i\theta}$.

Для доказательства (1.48) по функции $f(z) \in S$ построим функцию $F(z) = \frac{1}{f(z^{-1})} \in \Sigma_0$ и составим тождество

$$\frac{z^2 f'(z^2)}{f(z^2)} = \frac{\zeta^2 F'(\zeta^2)}{F(\zeta^2)} = \frac{\zeta F_2'(\zeta)}{F_2(\zeta)}, \quad (1.52)$$

где $F_2(z) = \sqrt{F(z^2)} \in \Sigma_0$, $\zeta = \frac{1}{z} \in B^0$. Тождество (1.52) позволяет свести оценку (1.48) к оценке $\frac{\zeta F_2'(\zeta)}{F_2(\zeta)}$. Для отыскания последней найдем $\ln \frac{\zeta F_2'(\zeta)}{F_2(\zeta)}$, положив в разложении (1.56) $z = \zeta$, т. е.

$$\ln \frac{\zeta F_2'(\zeta)}{F_2(\zeta)} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}(\zeta)\zeta^{-(2n-1)}. \quad (1.53)$$

Применяя неравенство Коши и оценку (1.43) при $\nu = 0$, из (1.53) получим

$$\left|\ln \frac{\zeta F_2'(\zeta)}{F_2(\zeta)}\right| \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n-1}(\zeta)\zeta^{-(2n-1)}| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)|a_{2n-1}(\zeta)|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}|\zeta|^{-2(2n-1)}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \ln \frac{1+r^2}{1-r^2}. \quad (1.54)$$

Из (1.52) и (1.54) выводим (1.48). Нижняя граница в (1.48) достигается тогда и только тогда, когда имеет место знак равенства во всех соотношениях (1.54) и, кроме того,

выполняется условие

$$\ln\left|\frac{\zeta F_2'(\zeta)}{F_2(\zeta)}\right| = -\left|\ln\frac{\zeta F_2'(\zeta)}{F_2(\zeta)}\right|,$$

что приводит к равенствам

$$a_{2n-1}(\zeta) = \frac{1}{2n-1}\bar{\zeta}^{-(2n-1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Для такой системы $\{a_n(z)\}$ из (1.5б) будем иметь

$$\ln\frac{z-\zeta}{F_2(z)-F_2(\zeta)}\cdot\frac{F_2(z)+F_2(\zeta)}{z+\zeta} = \ln\frac{1-\frac{1}{\bar{\zeta}z}}{1+\frac{1}{\bar{\zeta}z}},$$

откуда получаем $F_2(z) = z - \frac{\zeta}{\bar{\zeta}}\frac{1}{z}$, т. е. (1.51). Таким же путем находятся экстремальные функции для верхней границы в (1.48).

Для получения оценки сверху в (1.49) также начнем с тождества при прежних обозначениях

$$\frac{f(z^2)}{z^2} = \frac{\zeta^2}{F(\zeta^2)} = \left[\frac{\zeta}{F_2(\zeta)}\right]^2, \quad \zeta = \frac{1}{z} \in B^0. \tag{1.55}$$

Далее, положив в разложении (1.3) $z = -\zeta$, получим

$$\ln\frac{\zeta}{F_2(\zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n(\zeta)\zeta^{-n}. \tag{1.56}$$

Снова применяя неравенство Коши и оценку (1.39), получим требуемое, а проследив при этом за возможностью знака равенства, придем к функции (1.51).

К сожалению, оценку снизу для $|f(z)|$ таким путем не удается получить и приходится прибегнуть к известному приему, состоящему в том, что вместе с $f(z) \in S$ вводится в рассмотрение функция $g(z) \in S$ по формуле

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+t}{1+\bar{t}z}\right) - f(t)}{f'(t)(1-|t|^2)}, \qquad |t| < 1.$$

Затем замечается связь

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{g(-t)}{(-t)g'(-t)}(1-|t|^2)^{-1}$$

и с помощью (1.48) выводится левое неравенство (1.49) (см., например, Г. М. Голузин [7], стр. 113).

Наконец, неравенство (1.50) получается перемножением неравенств (1.48) и (1.49). Теорема доказана.

Аналогично теоремам 1.7 и 1.8 доказываются для $F(z) \in \Sigma$ и нечетных $F_2(z) \in \Sigma$ неравенства

$$1-r^2 \leqslant \left|\frac{F(z_2)-F(z_1)}{z_2-z_1}\right| \leqslant \frac{1}{1-r^2}, \qquad |z_1|=|z_2|=\frac{1}{r}>1, \tag{1.57}$$

$$\frac{1-r^2}{1+r^2} \leqslant \left|\frac{F_2(z_2)-F_2(z_1)}{F_2(z_2)+F_2(z_1)}\,\frac{z_2+z_1}{z_2-z_1}\right| \leqslant \frac{1+r^2}{1-r^2}, \tag{1.58}$$

первое из которых называют теоремой искажения хорд при однолистных отображениях (Г. М. Голузин [3]), а второе — теоремой искажения центрального угла (И. Е. Базилевич [3]). Некоторые другие результаты теории однолистных функций типа теорем искажения, а также условия однолистности могут быть получены как частный случай теорем главы 6 для однолистных функций в конечносвязной области.

ГЛАВА 2

ТЕЙЛОРОВСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Предположим, что функция $\Omega(w)$ задана формально рядом Тейлора

$$\Omega(w) = \Omega_0 + \Omega_1 w + \Omega_2 w^2 + \ldots, \tag{2.1}$$

а функция $w = \omega(z)$ определяется формальным разложением

$$\omega(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots, \tag{2.2}$$

коэффициенты которого $b_1, b_2, \ldots$ — произвольные комплексные числа. Сложная функция $\Omega(\omega(z))$ образуется формальной подстановкой ряда (2.2) в ряд (2.1):

$$\Omega(\omega(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \Omega_k [\omega(z)]^k = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots, \tag{2.3}$$

и при фиксированных Ω_k $(k = 0, 1, \ldots)$ ее коэффициенты B_n являются функциями n комплексных переменных $b_1, b_2, \ldots, b_n$:

$$B_n = B_n(b_1, b_2, \ldots, b_n) \ (n = 1, 2, \ldots), \ B_0 = \Omega_0. \tag{2.4}$$

Для приложений желательно иметь точные мажоранты для $|B_n|$ и различных средних из коэффициентов. Для однолистных функций $f(z) \in S$ и $F(z) \in \Sigma$ особенно полезно решение этой задачи в частном случае $\Omega(w) = e^w$, ибо свойство однолистности сравнительно просто проявляется в виде ограничений на коэффициенты функций $\ln \frac{f(z)}{z}$ и $\ln \frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}$. Глава 2 и посвящена этой задаче.

§ 1. Неравенства для коэффициентов сложной функции общего вида

Пусть $\Omega_k \geqslant 0$ $(k=1, 2, \ldots)$ и среди функций $\omega(z)$ выделена функция $\tilde{\omega}(z)$ с положительными коэффициентами ряда Тейлора (2.2), т. е.

$$\tilde{\omega}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k z^k, \quad \tilde{b}_k > 0. \tag{2.5}$$

Тогда имеет место

Лемма 2.1. *Для тейлоровских коэффициентов сложной функции $B_n(b_1, b_2 \ldots, b_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ при любых комплексных a'_k и a''_k $(k=1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющих условию*

$$a'_k a''_k = \frac{b_k}{\tilde{b}_k}, \tag{2.6}$$

и любых положительных p и q $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ выполняется неравенство

$$|B_n(b_1, b_2, \ldots, b_n)| \leqslant$$
$$\leqslant B_n^{1/p}(\tilde{b}_1|a'_1|^p, \ldots, \tilde{b}_n|a'_n|^p) B_n^{1/q}(\tilde{b}_1|a''_1|^q, \ldots, \tilde{b}_n|a''_n|^q). \tag{2.7}$$

Знак равенства имеет место, если

$$b_k = |b_k|\eta^k, \quad |\eta| = 1,$$
$$|a'_k|^p = |a''_k|^q = \frac{|b_k|}{\tilde{b}_k}.$$

Для доказательства представим b_k в виде

$$b_k = \tilde{b}_k \frac{b_k}{\tilde{b}_k} = \tilde{b}_k a_k$$

и, следовательно,

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k a_k z^k.$$

Тогда коэффициенты сложной функции B_n можно представить следующим образом:

$$B_n(\tilde{b}_1 a_1, \tilde{b}_2 a_2, \ldots, \tilde{b}_n a_n) = \sum_{\nu} \alpha_{n,\nu} U_{n,\nu}(a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{2.8}$$

где $U_{n,\nu}=U_{n,\nu}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — некоторые произведения целых степеней чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с единичными коэффициентами, именно:

$$U_{n,\nu}=\prod_{k=1}^{n} a_k^{n_k}\ (n_k\geqslant 0),\quad \sum_{k=1}^{n} kn_k=n, \tag{2.9}$$

а $\alpha_{n,\nu}$ не зависят от a_k и неотрицательны. Например,

$$B_4=(\Omega_1\tilde{b}_4)\,a_4+(\Omega_2 2\tilde{b}_1\tilde{b}_3)\,a_1a_3+(\Omega_2\tilde{b}_2^2)\,a_2^2+$$
$$+(\Omega_3 3\tilde{b}_1^2\tilde{b}_2)\,a_1^2a_2+(\Omega_4\tilde{b}_1^4)\,a_1^4.$$

Из (2.9) легко усматриваются используемые в дальнейшем свойства величин $U_{n,\nu}$:

при любых комплексных a_k' и a_k'' $(k=1, 2, \ldots, n)$

$$U_{n,\nu}(a_1'', \ldots, a_n')\,U_{n,\nu}(a_1'', \ldots, a_n'')=U_{n,\nu}(a_1'a_1'', \ldots, a_n'a_n''); \tag{2.10}$$

при любом вещественном λ

$$|U_{n,\nu}(a_1, a_2, \ldots, a_n)|^{\lambda}=U_{n,\nu}(|a_1|^{\lambda}, |a_2|^{\lambda}, \ldots, |a_n|^{\lambda}); \tag{2.11}$$

при всяком t

$$U_{n,\nu}(a_1t, a_2t^2, \ldots, a_nt^n)=t^n U_{n,\nu}(a_1, a_2, \ldots, a_n); \tag{2.12}$$

при $a_k=1$ $U_{n,\nu}(1, 1, \ldots, 1)=1$.

Теперь каждое $a_k=\dfrac{b_k}{\tilde{b}_k}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ согласно (2.6) разложим на два множителя a_k' и a_k'' и с помощью свойства (2.10) из представления (2.8) получим

$$B_n(b_1, b_2, \ldots, b_n)=\sum_{\nu}\alpha_{n,\nu}U_{n,\nu}(a_1, a_2, \ldots, a_n)=$$
$$=\sum_{\nu}\alpha_{n,\nu}U_{n,\nu}(a_1', \ldots, a_n')\cdot U_{n,\nu}(a_1'', \ldots, a_n'').$$

Неравенство Гёльдера при заданных в условии леммы p и q, примененное к правой части последнего равенства, приведет к результату

$$|B_n|\leqslant\sum_{\nu}\alpha_{n,\nu}^{1/p}|U_{n,\nu}(a_1', \ldots, a_n')|\,\alpha_{n,\nu}^{1/q}|U_{n,\nu}(a_1'', \ldots, a_n'')|\leqslant$$
$$\leqslant\Big(\sum_{\nu}\alpha_{n,\nu}|U_{n,\nu}(a_1', \ldots a_n')|^p\Big)^{1/p}\times$$
$$\times\Big(\sum_{\nu}\alpha_{n,\nu}|U_{n,\nu}(a_1'', \ldots, a_n'')|^q\Big)^{1/q}. \tag{2.13}$$

Если еще учесть свойство (2.11), то (2.13) перепишется так:

$$|B_n| \leqslant \left(\sum_\nu \alpha_{n,\nu} U_{n,\nu}(|a_1'|^p, \ldots, |a_n'|^p)\right)^{1/p} \times$$
$$\times \left(\sum_\nu \alpha_{n,\nu} U_{n,\nu}(|a_1''|^q, \ldots, |a_n''|^q)\right)^{1/q},$$

где правая часть уже совпадает с правой частью (2.7) в силу представления (2.8).

Заключение леммы о знаке равенства в (2.7) просто проверяется, если воспользоваться тождеством при всяком t

$$B_n(b_1 t, b_2 t^2, \ldots, b_n t^n) = t^n B_n(b_1, b_2, \ldots, b_n). \quad (2.14)$$

Из леммы 2.1 вытекает

Теорема 2.1. *Для тейлоровских коэффициентов сложной функции $B_n(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ при любом значении $p > 1$ справедливо неравенство*

$$B_n(b_1, \ldots, b_n)| \leqslant B_n^{1-1/p}(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n) \times$$
$$\times B_n^{1/p}\left(\bar{b}_1 \left|\frac{b_1}{\bar{b}_1}\right|^p, \ldots, \bar{b}_n \left|\frac{b_n}{\bar{b}_n}\right|^p\right). \quad (2.15)$$

Знак равенства в (2.15) имеет место в том случае, если

$$b_k = \bar{b}_k c^k \quad (k=1, 2, \ldots, n), \quad (2.16)$$

где c — произвольное комплексное число, а при $\Omega_k \neq 0$ и $B_n \neq 0$, и только в этом случае.

Положив в условии леммы 2.1 $a_k' = b_k/\bar{b}_k$, $a_k'' = 1$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, из (2.7) получим (2.15). Тождество (2.14) снова помогает убедиться в том, что для чисел $b_k = \bar{b}_k c^k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ левая и правая части (2.15) равны.

Если же $\Omega_k \neq 0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, то, возвращаясь к доказательству неравенства (2.7), прежде всего замечаем, что в формуле (2.8) для всех ν $\alpha_{n,\nu} > 0$, ибо в этом случае $\alpha_{n,\nu}$ состоит только из положительных множителей. А тогда для наличия знака равенства в (2.15) или, что то же самое, в (2.13) при $a_k' = b_k/\bar{b}_k = a_k$, $a_k'' = 1$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ необходимо и достаточно, чтобы при всех ν

$$U_{n,\nu}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \text{const}.$$

Поскольку среди величин $U_{n,\nu}$ всегда имеются a_n, $a_{n-1}a_1$, $a_{n-2}a_1^2$, ..., a_1^n, то последние условия можно выразить равенствами

$$a_n = a_{n-1}a_1 = a_{n-2}a_1^2 = \ldots = a_1^n,$$

откуда с учетом $B_n \neq 0$ и следует (2.16), ибо при $B_n \neq 0$ и $a_1 \neq 0$.

Приведенное доказательство предложено Н. А. Лебедевым (Н. А. Лебедев и И. М. Милин [2]) для $\Omega(w) = e^w$, $\tilde{\omega}(z) = \ln \frac{1}{1-z}$ и $p = 2$.

Далее выведем из теоремы 2.1 полезное следствие, предварительно для краткости записи введя обозначения: $\{\psi(z)\}_n$ — коэффициент при z^n в разложении $\psi(z)$ около $z = 0$,

$$\tilde{B}_n = B_n(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\omega_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \left| \frac{b_n}{\tilde{b}_n} \right|^p z^n.$$

Теорема 2.2. *Если тейлоровские коэффициенты функций $\Omega(w)$ и $\omega(z)$ при каком-либо $p > 1$ удовлетворяют условиям*

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \left| \frac{b_k}{\tilde{b}_k} \right|^p = \sigma < \infty, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \sigma^k < \infty, \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

то выполняется неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_n \left| \frac{B_n}{\tilde{B}_n} \right|^p \leqslant \Omega\left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \left| \frac{b_n}{\tilde{b}_n} \right|^p \right). \tag{2.18}$$

Знак равенства при $\Omega_k \geqslant 0$ имеет место для

$$b_k = \tilde{b}_k c^k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.19}$$

с произвольным значением c, удовлетворяющим (2.17), а при $\Omega_k > 0$ и только в этом случае.

Согласно теореме 2.1 при каждом $n=1, 2, \ldots$ и $p>1$ имеем

$$\frac{|B_n|^p}{\tilde{B}_n^{p-1}} \leqslant B_n\left(\tilde{b}_1\left|\frac{b_1}{\tilde{b}_1}\right|^p, \ldots, \tilde{b}_n\left|\frac{b_n}{\tilde{b}_n}\right|^p\right). \tag{2.20}$$

Суммируя (2.20) от 1 до любого N, получим

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|B_n|^p}{\tilde{B}_n^{p-1}} \leqslant \sum_{n=1}^{N} B_n\left(\tilde{b}_1\left|\frac{b_1}{\tilde{b}_1}\right|^p, \ldots, \tilde{b}_n\left|\frac{b_n}{\tilde{b}_n}\right|^p\right).$$

Но ввиду условий (2.17) функция $\omega_p(z)$ регулярна в единичном круге и ограничена в нем:

$$|\omega_p(z)| \leqslant \sigma, \qquad |z| \leqslant 1,$$

а функция $\Omega(w)$ регулярна в круге $|w|<\sigma$.

Поэтому сложная функция

$$\Omega(\omega_p(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(\tilde{b}_1\left|\frac{b_1}{\tilde{b}_1}\right|^p, \ldots, \tilde{b}_n\left|\frac{b_n}{\tilde{b}_n}\right|^p\right) z^n$$

регулярна в $|z|<1$. Ее тейлоровские коэффициенты неотрицательны, поскольку таковы коэффициенты Ω_k и $\tilde{b}_k\left|\frac{b_k}{\tilde{b}_k}\right|^p$ $(k=1, 2, \ldots)$, а частичные суммы $\sum\limits_{n=0}^{N} B_n$ равномерно ограничены, ибо

$$\sum_{n=0}^{N} B_n\left(\tilde{b}_1\left|\frac{b_1}{\tilde{b}_1}\right|^p, \ldots, \tilde{b}_n\left|\frac{b_n}{\tilde{b}_n}\right|^p\right) =$$

$$= \Omega_0 + \sum_{k=1}^{N} \Omega_k \sum_{n=k}^{N} \{[\omega_p(z)]^k\}_n \leqslant \sum_{k=0}^{N} \Omega_k [\omega_p(1)]^k \leqslant \Omega(\sigma).$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n\left(\tilde{b}_1\left|\frac{b_1}{\tilde{b}_1}\right|^p, \ldots, \tilde{b}_n\left|\frac{b_n}{\tilde{b}_n}\right|^p\right)$ сходится, и по второй теореме Абеля будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(\tilde{b}_1\left|\frac{b_1}{\tilde{b}_1}\right|^p, \ldots, \tilde{b}_n\left|\frac{b_n}{\tilde{b}_n}\right|^p\right) = \lim_{r\to 1} \Omega(\omega_p(r)) = \Omega(\sigma).$$

Остается совершить предельный переход при $N \to \infty$, и неравенство (2.18) будет доказано.

Чтобы в (2.18) иметь знак равенства, надо при каждом $n = 1, 2, \ldots$ иметь знак равенства в (2.20), а для этого согласно теореме 2.1 достаточно задать b_k формулой (2.19). При $\Omega_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ это и необходимо, ибо при $b_k = 0$ такое утверждение тривиально, а если хотя бы один коэффициент $b_N \neq 0$, то будут положительны все коэффициенты $B_n\left(\tilde{b}_1 \left|\frac{b_1}{\tilde{b}_1}\right|^p, \ldots, \tilde{b}_n \left|\frac{b_n}{\tilde{b}_n}\right|^p\right)$ при $n = kN$ и, следовательно, для тех же номеров n будут отличны от нуля коэффициенты $B_n = B_n(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, что по теореме 2.1 делает условие (2.19) и необходимым.

Замечание к теоремам 2.1 и 2.2. Неравенства (2.15) и (2.18) верны и при $p = 1$. В этом случае формулы (2.16) и (2.19) дают соответственно значения коэффициентов b_k, достаточные для наличия в (2.15) и (2.18) знака равенства.

§ 2. Неравенства для коэффициентов сложной функции экспоненциального вида

Здесь примем обозначения

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k, \tag{2.21}$$

$$\varphi(z) = \exp\{\omega(z)\} = \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k \tag{2.22}$$

и назовем $\varphi(z)$ сложной функцией экспоненциального вида.

Если $\omega(z)$ регулярна в единичном круге, то $\varphi(z)$ регулярна и не обращается в нуль в $|z| < 1$. Среди всех таких функций $\varphi(z)$ приметно выделяется простотой соотношений между тейлоровскими коэффициентами биномиальная функция с положительным показателем λ:

$$\frac{1}{(1-z)^\lambda} = \exp\left\{\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(\lambda) z^k.$$

Для любой функции $\omega(z)$ или, что то же самое, для любой последовательности коэффициентов $\{A_k\}_1^\infty$ из (2.21) будем

учитывать при каждом $n=1, 2, \ldots$ и $\lambda>0$ отклонение системы чисел $\left\{\frac{A_k}{\lambda}\right\}_1^n$ от $\left\{\frac{1}{k}\right\}_1^n$ величинами $\Delta_n(\lambda)$, $\delta_n(\lambda)$ и $\delta_n^+(\lambda)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_n(\lambda)=\Delta_n(\lambda; A_1, A_2, \ldots, A_n)=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{n} k|A_k|^2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\\
&\delta_n(\lambda)=\delta_n(\lambda; A_1, A_2, \ldots, A_n)=\max_{1\leqslant\nu\leqslant n}\{\Delta_\nu(\lambda)\},\\
&\delta_n^+(\lambda)=\delta_n^+(\lambda; A_1, A_2, \ldots, A_n)=\max\{0, \delta_n(\lambda)\}.
\end{aligned}\right\} \quad (2.23)$$

Введем в рассмотрение еще следующие классы функций: δ_λ — класс функций $\omega(z)$, коэффициенты которых при заданном $\lambda>0$ удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n^+(\lambda)=\delta<\infty; \quad (2.24)$$

e^σ, e^{δ_λ} — классы функций $\varphi(z)=\exp\{\omega(z)\}$, где соответственно $\omega(z)\in\sigma$, δ_λ.

В нескольких теоремах § 2 доказывается, что точные оценки $|D_n(A_1, A_2, \ldots, A_n)|$ и различных средних для коэффициентов D_k могут быть получены заменой D_k на $d_k(\lambda)$, если параметр λ выбран так, что $\delta_n(\lambda)=0$. При другом выборе λ мажорирующая величина при оценке линейных комбинаций коэффициентов приобретает множитель $\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda\delta_n^+(\lambda)\right\}$.

Однако здесь же можно убедиться, что такая закономерность имеет место не при всех λ, и в этом главную роль играют свойства биномиальных коэффициентов $d_n(\lambda)$.

Лемма 2.2. *Пусть* $\{A_k\}_1^\infty$ — *произвольная последовательность коэффициентов в* (2.21), *порождающая последовательность* $\{D_k\}_0^\infty$ *формальным разложением* (2.22), *и пусть при любом* $\lambda>0$ *обозначено*

$$\theta_n(\lambda)=\frac{1}{d_n(\lambda+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)}\exp\left\{-\frac{\lambda}{d_n(\lambda+1)}\sum_{\nu=1}^{n}d_{n-\nu}(\lambda)\,\Delta_\nu(\lambda)\right\}$$
$$(n=1, 2, \ldots), \quad (2.25)$$

$\theta_0(\lambda)=1$.

Тогда $\{\theta_n(\lambda)\}$ — *невозрастающая последовательность положительных чисел*

$$\theta_n(\lambda) \leqslant \theta_{n-1}(\lambda) \leqslant \ldots \leqslant 1 \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{2.26}$$

Равенство $\theta_n(\lambda)=1$ *при каком-либо* $n \geqslant 1$ *имеет место в том и только в том случае, если*

$$A_k = \frac{\lambda}{k}\eta^k \quad (k=1, 2, \ldots, n), \quad |\eta|=1. \tag{2.27}$$

Исходим из тождества

$$z\varphi'(z) = \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\varphi(z),$$

или в рядах

$$\sum_{k=1}^{\infty} kD_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} kA_k z^k \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k.$$

Сравнивая коэффициенты при z^k $(k=1, 2, \ldots)$ в обеих частях равенства, будем иметь

$$kD_k = a_k \cdot 1 + a_{k-1}D_1 + \ldots + a_1 D_{k-1}, \quad a_k = kA_k, \tag{2.28}$$

откуда с помощью неравенства Коши получим

$$|D_k|^2 \leqslant \frac{1}{k^2}\sum_{\nu=1}^{k} d_{k-\nu}(\lambda)\,|a_\nu|^2 \sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{|D_\nu|^2}{d_\nu(\lambda)} \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{2.29}$$

Фиксируем любое $n \geqslant 1$ и используем неравенство (2.29) при $k=n$ для оценки $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)}$:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)} + \frac{1}{n^2 d_n(\lambda)}\sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(\lambda)\,|a_k|^2 \sum_{k=0}^{n-1}\frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)} =$$

$$= \frac{n+\lambda}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)}\left[\frac{n}{n+\lambda} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} d_{n-k}(\lambda)\,|a_k|^2}{n(n+\lambda)\,d_n(\lambda)}\right].$$

Обозначив величину в скобках через x и применив для нее известное неравенство

$$x \leqslant \exp(x-1), \qquad -\infty < x < \infty,$$

получим при $n \geqslant 1$ следующее соотношение:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)} \leqslant \frac{d_n(\lambda+1)}{d_{n-1}(\lambda+1)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)} \exp\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(\lambda)\,|kA_k|^2}{n(n+\lambda)\,d_n(\lambda)} - \frac{\lambda}{n+\lambda}\right\}. \quad (2.30)$$

Здесь и в дальнейшем используются следующие соотношения:

$$d_n(\lambda) = d_{n+1}(\lambda) + \frac{1-\lambda}{n+1}\, d_n(\lambda),$$

$$d_n(\lambda+1) = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu(\lambda) = \frac{(n+1)\,d_{n+1}(\lambda)}{\lambda}.$$

Теперь преобразуем показатель у экспоненты в (2.30), начав с легко проверяемого тождества для биномиальных коэффициентов

$$kd_{n-k}(\lambda) = nd_{n-k}(\lambda+1) - (\lambda+n)\,d_{n-k-1}(\lambda+1), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

(под d_{-1} везде понимается нуль). Умножив написанные тождества на $k\,|A_k|^2$, просуммируем их по k:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} kd_{n-k}(\lambda)\,k\,|A_k|^2}{n\lambda d_n(\lambda+1)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(\lambda+1)\,k\,|A_k|^2}{\lambda d_n(\lambda+1)} -$$

$$- \frac{(\lambda+n)\sum_{k=1}^{n-1} d_{n-k-1}(\lambda+1)\,k\,|A_k|^2}{n\lambda d_n(\lambda+1)},$$

или

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(\lambda)\,|kA_k|^2}{n(n+\lambda)\,d_n(\lambda)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(\lambda+1)\,k\,|A_k|^2}{\lambda d_n(\lambda+1)} -$$

$$- \frac{\sum_{k=1}^{n-1} d_{n-k-1}(\lambda+1)\,k\,|A_k|^2}{\lambda d_{n-1}(\lambda+1)}. \quad (2.31)$$

Используя при каждом $n \geqslant 1$ еще одно тождество

$$\sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(\lambda+1)\, k\, |A_k|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} d_{n-\nu}(\lambda) \sum_{k=1}^{\nu} k\, |A_k|^2,$$

которое можно получить с помощью преобразования Абеля, из (2.31) будем иметь

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(\lambda)\, |kA_k|^2}{n(n+\lambda)\, d_n(\lambda)} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} d_{n-\nu}(\lambda) \sum_{k=1}^{\nu} k\, |A_k|^2}{\lambda d_n(\lambda+1)} - \frac{\sum_{\nu=1}^{n-1} d_{n-\nu-1}(\lambda) \sum_{k=1}^{\nu} k\, |A_k|^2}{\lambda d_{n-1}(\lambda+1)}.$$

Если в этом равенстве положить $A_k = \frac{\lambda}{k}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ и полученное тождество вычесть из исходного, то придем к результату

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(\lambda)\, |kA_k|^2}{n(n+\lambda)\, d_n(\lambda)} - \frac{\lambda}{n+\lambda} = \frac{\lambda}{d_n(\lambda+1)} \sum_{\nu=1}^{n} d_{n-\nu}(\lambda)\, \Delta_\nu(\lambda) - \frac{\lambda}{d_{n-1}(\lambda+1)} \sum_{\nu=1}^{n-1} d_{n-\nu-1}(\lambda)\, \Delta_\nu(\lambda),$$

нужному для того, чтобы из (2.30) вывести неравенство $\theta_n(\lambda) \leqslant \theta_{n-1}(\lambda)$, т. е. (2.26).

Чтобы при каком-либо $n \geqslant 1$ выполнялось равенство $\theta_n(\lambda) = 1$, необходимо и достаточно при $k = 1, 2, \ldots, n$ иметь знак равенства в (2.29) и в неравенстве $x \leqslant \exp(x-1)$. Последнее сразу дает $|A_k| = \frac{\lambda}{k}$, а равенство в (2.29) приводит к (2.27).

Из доказанной леммы вытекает несколько следствий.

Следствие 1. *При любом* $\lambda > 0$ *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n(\lambda) = \theta(\lambda;\, A_1, A_2, \ldots) \leqslant 1. \tag{2.32}$$

Знак равенства в (2.32) *реализуется только для последовательности* $A_k = \frac{\lambda}{k}\eta^k$ $(k=1, 2, \ldots)$, $|\eta| = 1$.

Следствие 2. *При любом* $\lambda > 0$ *и каждом* $n \geqslant 1$ *величина* $\sum_{k=0}^{n} \frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)}$ *имеет представление*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)} = \theta_n(\lambda)\, d_n(\lambda+1) \exp\left\{\frac{\lambda}{d_n(\lambda+1)} \sum_{\nu=1}^{n} d_{n-\nu}(\lambda)\, \Delta_\nu(\lambda)\right\}, \tag{2.33}$$

в котором $\theta_n(\lambda)$ *удовлетворяет заключению леммы* 2.2.

Следствие 3. *При любом* $\lambda > 0$ *и каждом* $n \geqslant 1$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)} \leqslant \theta_n(\lambda)\, d_n(\lambda+1) \exp\{\lambda\delta_n^+(\lambda)\}. \tag{2.34}$$

Знак равенства в (2.34) *имеет место тогда и только тогда, когда* $|A_k| = \frac{\lambda}{k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Оценка (2.34) следует из представления (2.33) и определения (2.23). В самом деле,

$$\frac{\lambda}{d_n(\lambda+1)} \sum_{\nu=1}^{n} d_{n-\nu}(\lambda)\, \Delta_\nu(\lambda) \leqslant \frac{\lambda d_{n-1}(\lambda+1)}{d_n(\lambda+1)} \delta_n(\lambda) \leqslant \lambda\delta_n^+(\lambda).$$

Чтобы иметь знак равенства в (2.34), надо его иметь в последних двух неравенствах, а для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_2(\lambda) = \ldots = \Delta_n(\lambda) = 0,$$

откуда прямо следует заключение о знаке равенства.

Следствие 4. *При каждом* $n \geqslant 1$ *и любом* $\lambda > 0$ *имеем оценку*

$$\sum_{k=1}^{n} k\,|D_k|^2 < \theta_n(\lambda)\lambda d_n^2(\lambda+1) \exp\{\lambda\delta_n^+(\lambda)\}. \tag{2.35}$$

Напишем тождество

$$\sum_{k=1}^{n} k\,|D_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} k d_k(\lambda) \frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)}.$$

Поскольку при $\lambda > 0$ последовательность чисел $kd_k(\lambda) = \lambda d_{k-1}(\lambda+1)$ возрастающая, то из этого тождества сразу получим оценку

$$\sum_{k=1}^{n} k|D_k|^2 \leqslant \lambda d_{n-1}(\lambda+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)} < \lambda d_n(\lambda+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)},$$

которая с учетом (2.34) дает (2.35).

Полезно заметить, что при $n \to \infty$ порядок роста величины $\sum_{k=1}^{n} k|D_k|^2$, определяемый правой частью оценки (2.35), точный при каждом $\lambda > 0$, ибо для последовательности $A_k = \frac{\lambda}{k}\eta^k$, $|\eta| = 1$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} k|D_k|^2 \sim \frac{1}{2}\lambda d_n^2(\lambda+1) \sim \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\Gamma^2(\lambda+1)}n^{2\lambda}$$

$\left(\text{использовано асимптотическое равенство } d_n(\lambda+1) \sim \sim \frac{n^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right)$.

Хотя следствие 2 из леммы 2.2 позволяет точно оценить любую частичную сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)}$, оценка самой суммы этого ряда с его помощью затруднена, и поэтому для ее получения приходится прибегнуть к теореме 2.2.

Теорема 2.3. *Если тейлоровские коэффициенты A_k в* (2.21) *при $p > 1$ подчинены условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1}|A_k|^p < \infty,$$

то для коэффициентов D_k разложения (2.22) *при любом $\lambda > 0$ выполняется неравенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|D_k|^p}{d_k^{p-1}(\lambda)} \leqslant \exp\left\{\frac{1}{\lambda^{p-1}}\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-1}|A_k|^p\right\}. \qquad (2.36)$$

Знак равенства имеет место в том и только в том случае если $A_k = \frac{\lambda}{k}c^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где c — произвольное комплексное число по модулю меньшее единицы.

Чтобы применить для доказательства теорему 2.2, положим $\Omega(w) = \exp(w)$ и выберем функцию $\tilde{\omega}(z) = \lambda \ln \frac{1}{1-z}$. Тогда в обозначениях теоремы 2.2 будем иметь

$$\tilde{b}_k = \frac{\lambda}{k}, \quad \tilde{B}_k = d_k(\lambda) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что условия теоремы 2.2 выполнены, ибо имеем

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \left| \frac{b_k}{\tilde{b}_k} \right|^p = \frac{1}{\lambda^{p-1}} \sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1} |A_k|^p < \infty,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Omega_k \sigma^k = \exp \sigma < \infty.$$

Тогда заключение теоремы 2.2 доказывает теорему 2.3.

Теперь, опираясь на лемму 2.2, приступим к решению основной задачи § 2 — отысканию точной оценки для $|D_n(A_1, A_2, \ldots, A_n)|$.

Теорема 2.4. *Для тейлоровских коэффициентов разложения* (2.22) *при каждом* $n \geqslant 1$ *и любом* $\lambda > 0$ *выполняется неравенство*

$$|D_n| \leqslant \theta_{n-1}^{1/2}(\lambda)\, d_n(\lambda) \exp\left\{\frac{\lambda}{2d_n(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(\lambda - 1)\, \Delta_k(\lambda)\right\}. \tag{2.37}$$

Знак равенства реализуется для системы коэффициентов (2.27).

Для доказательства теоремы применим неравенство (2.29) при $k = n$, одновременно используя для величины $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)}$ представление (2.33) $\left(\text{при } n = 1, \text{ понимая под } \sum_{\nu=1}^{n-1} d_{n-\nu}(\lambda)\, \Delta_\nu(\lambda) \text{ нуль}\right)$. В результате получим

$$|D_n|^2 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(\lambda)\, |kA_k|^2}{n^2}\, \theta_{n-1}(\lambda)\, d_{n-1}(\lambda + 1) \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{\lambda}{d_{n-1}(\lambda+1)} \sum_{\nu=1}^{n-1} d_{n-\nu-1}(\lambda)\, \Delta_\nu(\lambda)\right\},$$

что с учетом очевидного равенства $d_{n-1}(\lambda+1)=\frac{nd_n(\lambda)}{\lambda}$ перепишется так:

$$|D_n|^2 \leqslant \theta_{n-1}(\lambda)\, d_n^2(\lambda) \exp\left\{\frac{\lambda^2}{nd_n(\lambda)} \sum_{k=1}^{n-1} d_{n-k-1}(\lambda)\, \Delta_k(\lambda)\right\} \times$$
$$\times \frac{\sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(\lambda)\, |kA_k|^2}{n\lambda d_n(\lambda)}.$$

Если обозначить последний множитель через x и применить вновь неравенство $x \leqslant e^{x-1}$, то будем иметь

$$|D_n|^2 \leqslant \theta_{n-1}(\lambda)\, d_n^2(\lambda) \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{\lambda^2 \sum_{k=1}^{n-1} d_{n-k-1}(\lambda)\, \Delta_k(\lambda)}{nd_n(\lambda)} + \frac{\sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(\lambda)\, |kA_k|^2}{n\lambda d_n(\lambda)} - 1\right\}.$$

Проделав над показателем экспоненты несложные преобразования, придем к неравенству (2.37). Проверкой убеждаемся, что система коэффициентов (2.27) реализует знак равенства.

Поскольку в показателе экспоненты в случае $\lambda < 1$ коэффициенты $d_{n-k}(\lambda-1)$ при $k \neq n$ отрицательны, то неравенство (2.37) оказывается эффективным для оценки $|D_n(A_1, A_2, \ldots, A_n)|$ только при $\lambda \geqslant 1$. Ввиду важности для приложений сформулируем для случая $\lambda \geqslant 1$ два следствия из теоремы 2.4.

Следствие 1. *При каждом $n \geqslant 1$ имеем*

$$|D_n| \leqslant \theta_{n-1}^{1/2}(1) \exp\left\{\frac{1}{2}\Delta_n(1)\right\} \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}\Delta_n(1)\right\}. \qquad (2.38)$$

Равенство $|D_n| = \exp\left\{\frac{1}{2}\Delta_n(1)\right\}$ *имеет место только для*

$$A_k = \frac{1}{k}\eta^k \quad (k=1, 2, \ldots, n), \quad |\eta| = 1.$$

Последнее утверждение для $k=1, 2, \ldots, n-1$ следует прямо из леммы 2.2, а для $k=n$ — из наличия знака равенства в (2.29).

Следствие 2. *При любом* $\lambda \geqslant 1$ *и каждом* $n \geqslant 1$ *имеем*

$$|D_n| \leqslant \theta_{n-1}^{1/2}(\lambda)\, d_n(\lambda) \exp\left\{\frac{\lambda d_{n-1}(\lambda)}{2d_n(\lambda)}\, \delta_n(\lambda)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant d_n(\lambda) \exp\left\{\frac{\lambda}{2}\, \delta_n^+(\lambda)\right\}. \qquad (2.39)$$

Равенство $|D_n| = d_n(\lambda) \exp\left\{\frac{\lambda}{2}\, \delta_n^+(\lambda)\right\}$ *реализуется только для системы коэффициентов* (2.27).

Чтобы рассмотреть случай $\lambda < 1$, необходимо предварительно доказать несколько предложений.

Теорема 2.5. *Для тейлоровских коэффициентов разложения* (2.22) *при каждом* $n \geqslant 1$ *и любом* $\lambda > 0$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n} |D_k|^2 \leqslant \exp\{\lambda \delta_n^+(\lambda)\} \sum_{k=0}^{n} d_k^2(\lambda). \qquad (2.40)$$

Знак равенства в (2.40) *имеет место только для системы коэффициентов* (2.27).

Приступая к доказательству, заметим, что при $\lambda \geqslant 1$ заключение теоремы полностью вытекает из следствия 2 предыдущей теоремы с учетом факта неубывания последовательности $\{\delta_n^+(\lambda)\}$.

Если же $\lambda < 1$, то отправляемся от тождества

$$\sum_{k=0}^{n} |D_k|^2 = \sum_{k=0}^{n} d_k(\lambda) \frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)} = d_n(\lambda) \sum_{k=0}^{n} \frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} [d_k(\lambda) - d_{k+1}(\lambda)] \sum_{\nu=0}^{k} \frac{|D_\nu|^2}{d_\nu(\lambda)}.$$

Поскольку при $\lambda < 1$ разности $d_k(\lambda) - d_{k+1}(\lambda) > 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$, то для оценки величины $\sum_{k=0}^{n} |D_k|^2$ можно воспользоваться неравенством (2.34). Тогда получим

$$\sum_{k=0}^{n} |D_k|^2 \leqslant \Bigg[d_n(\lambda)\, d_n(\lambda+1) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} [d_k(\lambda) - d_{k+1}(\lambda)]\, d_k(\lambda+1)\Bigg] \exp\{\lambda \delta_n^+(\lambda)\},$$

где снова использовано неубывание последовательности неотрицательных чисел $\delta_k^+(\lambda)$ и неравенство $\theta_k(\lambda) \leqslant 1$ ($k=1, 2, \ldots, n$).

Остается обратить внимание на тождество для биномиальных коэффициентов

$$d_k(\lambda+1) = \sum_{\nu=0}^{k} d_\nu(\lambda) = \frac{(k+1)\, d_{k+1}(\lambda)}{\lambda} \tag{2.41}$$

чтобы убедиться в совпадении полученного неравенства с требуемым.

Если в (2.40) имеет место знак равенства, то необходимо $\theta_n(\lambda)=1$, а по лемме 2.2 для этого необходимо иметь систему коэффициентов (2.27). Что для этой системы коэффициентов действительно имеет место знак равенства, убеждаемся проверкой, имея в виду для нее соотношения $D_k = d_k(\lambda)$ и $\delta_n^+(\lambda)=0$. Теорема доказана.

Теорему 2.5 естественно дополнить вычислением суммы квадратов биномиальных коэффициентов, точнее, для простоты, ее главной части при $n \to \infty$.

Лемма 2.3. *Для суммы квадратов биномиальных коэффициентов при каждом $n \geqslant 1$ и любом положительном $\lambda \neq 1/2$ имеем оценку*

$$\sum_{k=0}^{n-1} d_k^2(\lambda) \leqslant \begin{cases} \dfrac{n d_n^2(\lambda)}{2\lambda-1}, & \lambda > \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1-\lambda}{1-2\lambda}, & 0 < \lambda < \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.42}$$

С помощью преобразования Абеля образуем тождество

$$\sum_{k=0}^{n-1} d_k^2(\lambda) = d_{n-1}(\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} d_k(\lambda) + \sum_{k=1}^{n-1} [d_{k-1}(\lambda) - d_k(\lambda)] \sum_{\nu=0}^{k-1} d_\nu(\lambda) =$$

$$= \frac{n d_{n-1}(\lambda)\, d_n(\lambda)}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \sum_{k=1}^{n-1} d_{k-1}(\lambda)\, d_k(\lambda),$$

откуда

$$\lambda \sum_{k=0}^{n-1} d_k^2(\lambda) = n d_n^2(\lambda) + (1-\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} d_k(\lambda)\, d_{k+1}(\lambda) \tag{2.43}$$

(использованы равенство (2.41) и соотношение $d_{k-1}(\lambda) - d_k(\lambda) = \frac{1-\lambda}{k} d_{k-1}(\lambda)$).

Из (2.43) при любом $\lambda > 0$ вытекает неравенство

$$(2\lambda - 1)\sum_{k=0}^{n-1} d_k^2(\lambda) \leqslant n d_n^2(\lambda),$$

из которого при $\lambda > 1/2$ следует верхнее соотношение (2.42).

Далее, из тождества (2.43) заменой

$$d_k(\lambda) = d_{k+1}(\lambda) + \frac{1-\lambda}{k+1} d_k(\lambda) \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots)$$

получим

$$\lambda \sum_{k=0}^{n-1} d_k^2(\lambda) = n d_n^2(\lambda) + (1-\lambda)\sum_{k=1}^{n} d_k^2(\lambda) + (1-\lambda)^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_k(\lambda) d_{k+1}(\lambda)}{k+1} =$$

$$= (1-\lambda)\sum_{k=0}^{n-1} d_k^2(\lambda) - (1-\lambda)(1 - d_n^2(\lambda)) + n d_n^2(\lambda) +$$

$$+ (1-\lambda)^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_k(\lambda)\, d_{k+1}(\lambda)}{k+1},$$

откуда

$$(1-2\lambda)\sum_{k=0}^{n-1} d_k^2(\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(1 - d_n^2(\lambda)) - n d_n^2(\lambda) - (1-\lambda)^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_k(\lambda)\, d_{k+1}(\lambda)}{k+1}.$$

Выведенное равенство при $0 < \lambda < 1/2$ доказывает нижнее соотношение (2.42).

Заметим, что при $\lambda = 1/2$ верна оценка

$$\sum_{k=0}^{n-1} d_k^2(\lambda) < a \ln n + b$$

с некоторыми постоянными a и b, однако она в дальнейшем не используется.

Теперь подготовлены все необходимые предложения для получения основной оценки § 2.

Теорема 2.6. *Для тейлоровских коэффициентов разложения* (2.22) *при каждом* $n \geqslant 1$ *и любом* $\lambda > 0$ *справедливы оценки*

$$|D_n| \leqslant \begin{cases} \exp\left\{\frac{\lambda}{2}\delta_n^+(\lambda)\right\} d_n(\lambda), & \lambda \geqslant 1, \quad (2.44а) \\ \frac{2\sqrt{2}\lambda}{2\lambda-1}\exp\left\{\frac{\lambda}{2}\delta_n^+(\lambda)\right\} d_n(\lambda), & \frac{1}{2} < \lambda < 1, \quad (2.44б) \\ \sqrt{\frac{e}{2}}\exp\left\{\frac{1}{4}\delta_n^+\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n^{1/2}}, & \lambda = \frac{1}{2}, \quad (2.44в) \\ \lambda\left[\frac{2e(1-\lambda)}{1-2\lambda}\right]^{1/2}\exp\left\{\frac{\lambda}{2}\delta_n^+(\lambda)\right\}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n}\right)^{1/2}, & 0 < \lambda < \frac{1}{2}. \quad (2.44г) \end{cases}$$

Доказательство теоремы необходимо провести для $0<\lambda<1$, ибо случай $\lambda \geqslant 1$ уже рассмотрен в следствии 2 теоремы 2.4.

Введем в рассмотрение положительный параметр $t \in (0, 1)$, значением которого распорядимся в дальнейшем, и образуем тождество

$$z\varphi'(z) = \frac{z\varphi'(z)}{\varphi^{1-t}(z)}\varphi^{1-t}(z) = \frac{z}{t}[\varphi^t(z)]' \cdot \varphi^{1-t}(z). \qquad (2.45)$$

Для удобства последующей записи обозначим

$$\varphi^t(z) = \exp\left\{t\sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} D_k(t) z^k,$$

$$D_k(t) = D_k(tA_1, tA_2, \ldots, tA_k), \quad D_k(1) = D_k \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Теперь, используя введенное обозначение коэффициентов, запишем тождество (2.45) для рядов Тейлора:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nD_n z^n = \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty} kD_k(t) z^k \sum_{k=0}^{\infty} D_k(1-t) z^k,$$

откуда при каждом $n=1, 2, \ldots$

$$nD_n=\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{n} kD_k(t)\,D_{n-k}(1-t). \tag{2.46}$$

Неравенство Коши, примененное к правой части (2.46), приведет при $n\geqslant 1$ к оценке

$$n\,|D_n|\leqslant\frac{1}{t}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\,|D_k(t)|^2\sum_{k=1}^{n}|D_{n-k}(1-t)|^2\right)^{1/2},$$

или

$$|D_n|\leqslant\frac{1}{t}\left(\sum_{k=1}^{n} k\,|D_k(t)|^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|D_k(1-t)|^2\right)^{1/2}. \tag{2.47}$$

Оценим каждую из сумм в (2.47). По теореме 2.5 при $n\geqslant 2$ с заменой произвольного $\lambda>0$ на $\lambda(1-t)$ имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}|D_k(1-t)|^2\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left\{\lambda(1-t)\,\delta_{n-1}^{+}[\lambda(1-t);\ (1-t)A_1,\ \ldots,(1-t)A_{n-1}]\right\}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{n-1} d_k^2[\lambda(1-t)],$$

где по определению (2.23)

$$\delta_{n-1}[\lambda(1-t);\ (1-t)A_1,\ \ldots,\ (1-t)A_{n-1}]=$$
$$=\max_{1\leqslant\nu\leqslant n-1}\left\{\frac{1}{\lambda^2(1-t)^2}\sum_{k=1}^{\nu}(1-t)^2k\,|A_k|^2-\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}\right\}=$$
$$=\delta_{n-1}(\lambda;\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{n-1})=\delta_{n-1}(\lambda),$$
$$\delta_{n-1}^{+}[\lambda(1-t);\ (1-t)A_1,\ \ldots,\ (1-t)A_{n-1}]=\delta_{n-1}^{+}(\lambda).$$

Тогда последнее неравенство упростится, именно:

$$\sum_{k=0}^{n-1}|D_k(1-t)|^2\leqslant\exp\{\lambda(1-t)\,\delta_{n-1}^{+}(\lambda)\}\sum_{k=0}^{n-1} d_k^2[\lambda(1-t)] \tag{2.48}$$

(оно верно и при $n=1$, если положить $\delta_0^{+}(\lambda)=0$).

Другую сумму в (2.47) оценим с помощью неравенства (2.35) с заменой произвольного $\lambda > 0$ на λt:

$$\sum_{k=1}^{n} k\,|D_k(t)|^2 < \lambda t \exp\{\lambda t \delta_n^+(\lambda t;\ tA_1,\ \ldots,\ tA_n)\}\, d_n^2(1+\lambda t),$$

где по определению (2.23)

$$\delta_n^+(\lambda t;\ tA_1,\ \ldots,\ tA_n) = \delta_n^+(\lambda).$$

Учитывая это равенство, можно последнюю оценку записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} k\,|D_k(t)|^2 < \lambda t \exp\{\lambda t \delta_n^+(\lambda)\}\, d_n^2(1+\lambda t).$$

Из (2.47), (2.48) и последней оценки с учетом неравенства $\delta_{n-1}^+(\lambda) \leqslant \delta_n^+(\lambda)$ при $n \geqslant 1$ будем иметь

$$|D_n| < \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda\delta_n^+(\lambda)\right\} d_n(1+\lambda t)\left[\frac{\lambda}{tn}\sum_{k=0}^{n-1} d_k^2[\lambda(1-t)]\right]^{1/2}. \tag{2.49}$$

Далее рассмотрим раздельно три случая, фигурирующие в теореме.

Случай $1/2 < \lambda < 1$. Выберем t так, чтобы $\lambda(1-t) > 1/2$, и применим для оценки $\sum_{k=0}^{n-1} d_k^2[\lambda(1-t)]$ лемму 2.3. В результате из (2.49) получим

$$|D_n| < \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda\delta_n^+(\lambda)\right\} d_n(1+\lambda t)\, d_n(\lambda-\lambda t) \times \left(\frac{\lambda}{t[2\lambda(1-t)-1]}\right)^{1/2}.$$

Если положить $t = \dfrac{2\lambda-1}{4\lambda}$ и учесть неравенство для биномиальных коэффициентов

$$d_n(1+\lambda t)\, d_n(\lambda-\lambda t) = \sum_{k=0}^{n} d_k(\lambda t) \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu(\lambda-\lambda t-1) =$$

$$= \sum_{k+\nu<n} d_k(\lambda t)\, d_\nu(\lambda-\lambda t-1) +$$

$$+ \sum_{k+\nu>n} d_k(\lambda t)\, d_\nu(\lambda-\lambda t-1) < \sum_{k=0}^{n} d_k(\lambda-1) = d_n(\lambda),$$

то придем к (2.44б). (Здесь использована при $k+\nu>n$ отрицательность $d_\nu(\lambda-\lambda t-1)$).

Случай $\lambda=1/2$. Сначала найдем простую мажоранту для отношения $\frac{d_n(1+\lambda t)}{(\lambda t)^{1/2}}$:

$$\frac{d_n(1+\lambda t)}{(\lambda t)^{1/2}}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\lambda t}{k}\right)}{(\lambda t)^{1/2}}<\frac{\exp\left\{\lambda t\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\}}{(\lambda t)^{1/2}},$$

а затем положим при $n\geqslant 2$

$$t=\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}, \tag{2.50}$$

что доставляет минимум этой мажоранте.

Далее, поскольку $\lambda(1-t)<\frac{1}{2}$, то для оценки $\sum\limits_{k=0}^{n-1}d_k^2[\lambda(1-t)]$ используем нижнюю часть (2.42):

$$\sum_{k=0}^{n-1}d_k^2[\lambda(1-t)]\leqslant\frac{1-\lambda(1-t)}{1-2\lambda(1-t)}<t^{-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Остается в неравенстве (2.49) учесть все найденные оценки, чтобы получить из него (2.44в) при $n\geqslant 2$. Справедливость (2.44в) при $n=1$ легко проверяется.

Случай $0<\lambda<1/2$. Выберем для t прежнее значение по формуле (2.50), но воспользуемся теперь, когда $\lambda(1-t)<\lambda<1/2$, лучшей оценкой для суммы квадратов биномиальных коэффициентов, именно:

$$\sum_{k=0}^{n-1}d_k^2[\lambda(1-t)]<\sum_{k=0}^{n-1}d_k^2(\lambda)\leqslant\frac{1-\lambda}{1-2\lambda}.$$

В результате из того же неравенства (2.49) получим (2.44г) при $n\geqslant 2$, а при $n=1$ оно проверяется. Теорема доказана.

Замечание. Неравенство (2.44а) точное, и знак равенства в нем по следствию 2 теоремы 2.4 имеет место только для системы коэффициентов (2.27). Остальные неравенства

теоремы — неточные. Однако неравенства (2.44б), (2.44. в классе функций e^{δ_λ} точный порядок роста коэффициен. D_n при $n \to \infty$.

Действительно, для неравенства (2.44б) высказанное утверждение очевидно, ибо функция $\varphi_\lambda(z) = (1-z)^{-\lambda} \in e^{\delta_\lambda}$, а у нее $D_n = d_n(\lambda) \sim \frac{n^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$. Для неравенства (2.44г) построить соответствующий пример функции также несложно, поскольку функция

$$\omega_n(z) = \lambda\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\delta}{n}\right)^{1/2} z^n \quad (\delta > 0)$$

принадлежит классу δ_λ (у нее $\delta_k^+(\lambda) \leqslant \delta$ для всех $k \geqslant 1$), а соответствующая функция $\varphi_n(z)$ из класса e^{δ_λ} имеет

$$D_n = A_n = \lambda\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\delta}{n}\right)^{1/2},$$

что в смысле порядка при $n \to \infty$ совпадает с правой частью неравенства (2.44г).

§ 3. Асимптотические равенства для коэффициентов сложной функции экспоненциального вида

У биномиальной функции коэффициенты разложения в ряд Тейлора $d_n(\lambda)$ выделяются также правильным порядком роста этих коэффициентов при $n \to \infty$, именно:

$$d_n(\lambda) \sim \frac{n^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, \qquad \lambda > .$$

Удается установить, что тейлоровские коэффициенты произведения биномиальной функции с показателем $\lambda > 1/2$ на функцию $\varphi(z) \in e^{\sigma}$ при некотором дополнительном условии еще обладают сходной правильностью роста.

Лемма 2.4. *Для любой функции* $\omega(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k \in \sigma$ *имеем*

$$\sum_{k=1}^{n} A_k - \omega(r) = o(1) \qquad (n \to \infty), \tag{2.51}$$

где r связано с n соотношением

$$1-r=\frac{\theta}{n}, \qquad m<\theta<M \tag{2.52}$$

(m и M — положительные постоянные).

Для доказательства представим нужную разность в таком виде:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k-\omega(r)=\sum_{k=1}^{n} A_k(1-r^k)-\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k r^k.$$

Применяя неравенство Коши, будем иметь

$$\left|\sum_{k=1}^{n} A_k-\omega(r)\right|\leqslant\left[\sum_{k=1}^{n} k|A_k|^2(1-r^k)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(1-r^k)\right]^{1/2}+$$
$$+\frac{1}{n}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} k|A_k|^2\sum_{k=n+1}^{\infty} kr^{2k}\right]^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\left[\sum_{k=1}^{\infty} k|A_k|^2(1-r^k)\right]^{1/2}[n(1-r)]^{1/2}+$$
$$+\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} k|A_k|^2\right]^{1/2}\frac{1}{n(1-r)}.$$

Если r выбрано по формуле (2.52), то в силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k|A_k|^2$ и второй теоремы Абеля из последнего неравенства получаем (2.51).

Из леммы 2.4 вытекает известная тауберова теорема для функций $\omega(z)\in\sigma$ (Харди [1], стр. 192).

Лемма 2.5. *Если тейлоровские коэффициенты функции $\omega(z)\in\sigma$ удовлетворяют условию*

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} A_k=O(1) \qquad (n\to\infty), \tag{2.53}$$

то для функции $\varphi(z)=\exp\{\omega(z)\}=\sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k$ при любом $h>1/2$ справедливо асимптотическое равенство

$$\frac{\{\varphi(z)(1-z)^{-h}\}_n}{d_n(h)}-\sum_{k=0}^{n} D_k=o(1) \quad (n\to\infty). \tag{2.54}$$

Приступая к доказательству, заметим тождество

$$\{\varphi(z)(1-z)^{-h}\}_n = \sum_{k=0}^{n} d_{n-k}(h) D_k \tag{2.55}$$

и обозначим этот числитель чезаровского среднего через $S_n^{(h)}$.

Далее напишем для чезаровских средних разного порядка очевидное тождество:

$$\frac{S_n^{(h)}}{d_n(h)} - \frac{S_n^{(h+1)}}{d_n(h+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{d_k(h)}{d_n(h)} - \frac{d_k(h+1)}{d_n(h+1)}\right] D_{n-k} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(h)\, k D_k}{(n+h)\, d_n(h)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} d_{n-k}(h) \sum_{\nu=1}^{k} D_{k-\nu} \nu A_\nu}{(n+h)\, d_n(h)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} S_{n-k}^{(h)} k A_k}{(n+h)\, d_n(h)} \tag{2.56}$$

(использовано соотношение (2.28) и преобразование Абеля).

Неравенство Коши, примененное к правой части (2.56), приведет к оценке

$$\left|\frac{S_n^{(h)}}{d_n(h)} - \frac{S_n^{(h+1)}}{d_n(h+1)}\right| \leqslant \frac{1}{(n+h)\, d_n(h)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |S_k^{(h)}|^2 \sum_{k=1}^{n} k^2 |A_k|^2\right)^{1/2}. \tag{2.57}$$

Чтобы оценить $\sum_{k=0}^{n-1} |S_k^{(h)}|^2$, заметим, что в силу условий леммы выполняется соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} k \left|A_k + \frac{h}{k}\right|^2 - h^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k |A_k|^2 + 2h \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} A_k = O(1) \qquad (n \to \infty),$$

и, следовательно, при $n \to \infty$

$$\delta_n\left(h;\ A_1 + \frac{h}{1},\ A_2 + \frac{h}{2},\ \ldots,\ A_n + \frac{h}{n}\right) = O(1),$$

$$\delta_n^+\left(h;\ A_1 + \frac{h}{1},\ A_2 + \frac{h}{2},\ \ldots,\ A_n + \frac{h}{n}\right) = O(1).$$

Учитывая представление

$$\varphi(z)(1-z)^{-h}=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k+\frac{h}{k}\right)z^k\right\}$$

и применяя к этой функции теорему 2.5, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{n-1}|S_k^{(h)}|^2=O(1)\sum_{k=0}^{n-1}d_k^2(h)\qquad(n\to\infty),\ h>0. \quad (2.58)$$

Но для суммы квадратов биномиальных коэффициентов при $h>1/2$ согласно лемме 2.3 имеем асимптотическое равенство

$$\sum_{k=0}^{n-1}d_k^2(h)=O(1)\,n^{2h-1}\qquad(n\to\infty),$$

что вместе с (2.58) приводит к результату

$$\sum_{k=0}^{n-1}|S_k^{(h)}|^2=O(1)\,n^{2h-1}\qquad(n\to\infty),\ h>\frac{1}{2}. \quad (2.59)$$

Из (2.57) и (2.59) получим при $n\to\infty$

$$\left|\frac{S_n^{(h)}}{d_n(h)}-\frac{S_n^{(h+1)}}{d_n(h+1)}\right|\leqslant\frac{O(1)\cdot n^h}{(n+h)\,d_n(h)}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2|A_k|^2\right)^{1/2},\ h>\frac{1}{2}.$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty}k|A_k|^2$ сходится, а поэтому $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2|A_k|^2\to 0$ при $n\to\infty$, то последнее неравенство можно записать в виде

$$\frac{S_n^{(h)}}{d_n(h)}-\frac{S_n^{(h+1)}}{d_n(h+1)}=o(1)\qquad(n\to\infty),\ h>\frac{1}{2}. \quad (2.60)$$

В частности, при $h=1$ из (2.60) следует:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}kD_k=o(1)\qquad(n\to\infty). \quad (2.61)$$

Теперь рассмотрим разность

$$\sum_{k=0}^{n}D_k-\frac{S_n^{(h)}}{d_n(h)}=\frac{1}{d_n(h)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left[d_n(h)-d_{n-k}(h)\right]kD_k. \quad (2.62)$$

Учитывая тождество (2.41), коэффициенты в (2.62) можно записать так:

$$\frac{1}{k}\left[d_n(h)-d_{n-k}(h)\right]=\frac{1}{k}\left[d_n(h-1)+d_{n-1}(h-1)+\ldots+\right.$$
$$\left.+d_{n-k+1}(h-1)\right],$$

откуда видно, что последовательность $\frac{1}{k}\left[d_n(h)-d_{n-k}(h)\right]$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ при $h\geqslant 2$ невозрастающая, ибо такова последовательность $\{d_{n-k}(h-1)\}$, а поэтому неравенство Абеля дает

$$\left|\sum_{k=0}^{n} D_k-\frac{S_n^{(h)}}{d_n(h)}\right|\leqslant\frac{d_n(h-1)}{d_n(h)}\max_{1\leqslant\nu\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{\nu} kD_k\right|,\qquad h\geqslant 2.$$

Поскольку $\frac{d_n(h-1)}{d_n(h)}=\frac{h-1}{n+h-1}$ и $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kD_k=o(1)$, то из выведенного неравенства при $n\to\infty$ получаем

$$\sum_{k=0}^{n} D_k-\frac{S_n^{(h)}}{d_n(h)}=o(1),\qquad h\geqslant 2. \tag{2.63}$$

Равенства (2.60) и (2.63), рассматриваемые совместно, полностью доказывают лемму.

Леммы 2.4 и 2.5 облегчают доказательство основной теоремы этого параграфа.

Теорема 2.7. *В условиях леммы* 2.5 *при любом* $h>{}^1/_2$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\frac{\{\varphi(z)(1-z)^{-h}\}_n}{d_n(h)}\sim\varphi(r)\sim\exp\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k\right\}\qquad(n\to\infty), \tag{2.64}$$

где r *связано с* n *формулой* (2.52).

Учитывая лемму 2.5 и условие (2.53), достаточно доказать асимптотические равенства

$$\sum_{k=0}^{n} D_k\sim\varphi(r)\sim\exp\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k\right\}\qquad(n\to\infty). \tag{2.65}$$

Докажем сначала вторую часть (2.65), для чего обратим внимание на равенство

$$\frac{\exp\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\right\}}{\varphi(r)} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k - \omega(r)\right\}.$$

Ясно, что с помощью леммы 2.4 получим нужное соотношение.

Теперь при $0 < r < 1$ рассмотрим разность

$$\sum_{k=0}^{n} D_k - \varphi(r) = \sum_{k=0}^{n} D_k(1-r^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} D_k r^k. \qquad (2.66)$$

Первая сумма в правой части (2.66) оценивается с помощью неравенства Абеля, именно:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} D_k(1-r^k)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} kD_k \cdot \frac{1}{k}(1-r^k)\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1-r) \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \left|\sum_{k=1}^{\nu} kD_k\right|, \qquad (2.67)$$

что возможно, ибо последовательность $\frac{1}{k}(1-r^k)$ с ростом k монотонно убывает. Из (2.67) с учетом (2.52) и (2.61) получим

$$\sum_{k=0}^{n} D_k(1-r^k) = o(1) \quad (n \to \infty). \qquad (2.68)$$

Вторую сумму можно оценить, также используя преобразование Абеля. В самом деле,

$$\sum_{k=n+1}^{N} D_k r^k = \sum_{k=n+1}^{N} kD_k \frac{1}{k} r^k =$$

$$= \frac{r^N}{N} \sum_{\nu=n+1}^{N} \nu D_\nu + \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{r^k}{k} - \frac{r^{k+1}}{k+1}\right) \sum_{\nu=n+1}^{k} \nu D_\nu,$$

и поэтому

$$\left|\sum_{k=n+1}^{N} D_k r^k\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k} r^k + \frac{2n+1}{n+1} r^{n+1}\right) \max_{n+1 \leqslant k \leqslant N} \frac{1}{k} \left|\sum_{\nu=n+1}^{k} \nu D_\nu\right|. \quad (2.69)$$

Если r выбрано согласно (2.52), то первый множитель в (2.69) равномерно ограничен по n и N. Действительно,

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k} r^k + \frac{2n+1}{n+1} r^{n+1} < \ln \frac{1}{1-r} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} r^k + 2 <$$
$$< \ln \frac{e^2}{n(1-r)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(1-r^k) \leqslant \ln \frac{e^2}{\theta} + \theta.$$

Второй множитель в (2.69) при $n \to \infty$ стремится к нулю равномерно по N, ибо благодаря (2.61) имеем

$$\max_{n+1 \leqslant k \leqslant N} \frac{1}{k} \left|\sum_{\nu=n+1}^{k} \nu D_\nu\right| \leqslant \max_{n \leqslant k \leqslant N} \frac{1}{k} \left[\left|\sum_{\nu=1}^{k} \nu D_\nu\right| + \left|\sum_{\nu=1}^{n} \nu D_\nu\right|\right] \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sup_{k \geqslant n} \frac{1}{k} \left|\sum_{\nu=1}^{k} \nu D_\nu\right| = o(1) \qquad (n \to \infty).$$

Следовательно, из (2.69) получаем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} D_k r^k = o(1) \qquad (n \to \infty),$$

что вместе с (2.68) дает

$$\sum_{k=0}^{n} D_k - \varphi(r) = o(1) \qquad (n \to \infty). \qquad (2.70)$$

Доказанная ранее вторая часть (2.65) влечет за собой в силу (2.53) ограничение $|\varphi(r)|$ снизу положительной постоянной при достаточно больших n, а это и нужно, чтобы из (2.70) получить первую часть (2.65). Теорема доказана.

Следствие. *Если для функции* $\omega(z) \in \sigma$ *существует предел*

$$\lim_{r \to 1} \operatorname{Re} \omega(r) = U \neq \infty, \tag{2.71}$$

то для функции $\varphi(z) = \exp\{\omega(z)\}$ *при любом* $h > 1/2$ *выполняется асимптотическое равенство*

$$\frac{\{\varphi(z)(1-z)^{-h}\}_n}{d_n(h)} \sim \exp\{U + i \arg \varphi(r)\} \quad (n \to \infty), \tag{2.72}$$

где r *и* n *связаны соотношением* (2.52).

Поскольку из (2.71) и леммы 2.4 вытекает существование предела

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} A_k = U,$$

то тем самым все условия теоремы 2.7 выполнены и асимптотическое равенство (2.72) следует из (2.64).

Кроме того, теорема 2.7 при $h = 1$ может быть полезной для вывода теоремы тауберова типа для ряда $\sum_{k=0}^{\infty} D_k$, ибо из (2.64) при $h = 1$ прямо следует сходимость этого ряда при существовании предела $\varphi(r)$, когда $r \to 1$.

ГЛАВА 3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В теории однолистных функций большое внимание уделяется критериям однолистности, выраженным в терминах коэффициентов разложения этих функций в ряд Тейлора. Здесь, как и в других классах аналитических фуикций, ставится задача коэффициентов: каким необходимым и достаточным условиям должны удовлетворять коэффициенты степенного ряда, например $z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots$, чтобы его сумма принадлежала рассматриваемому классу однолистных функций?

Эта проблема давно уже решена, и в довольно изящной форме, в классе ограниченных функций, в классе функций с положительной вещественной частью, в классе целых функций данного конечного порядка и др. Однако в отношении однолистных функций подобного результата не получилось, были установлены лишь некоторые качественные результаты для областей коэффициентов, подтвердившие чрезвычайную сложность этих областей, их трансцендентный характер.

Поэтому задача коэффициентов для однолистных функций частично стала подменяться задачей нахождения точных оценок отдельных коэффициентов. Но и этот вопрос в классах S, Σ и некоторых других до сих пор полностью не решен.

Так как во многих задачах на экстремум для однолистных функций из класса S экстремальной является функция Кёбе (1.51), то сложилось убеждение, что эта функция будет также экстремальной и в задаче о точных оценках коэффициентов. Впервые Бибербах [2] высказал предположение, что оценка

$$|c_n|\leqslant n \quad (n=2,\ 3,\ \ldots)$$

имеет место для всех функций класса S со знаком равенства только для функции Кёбе. Вследствие своей простой формулировки эта гипотеза привлекла внимание многих математиков.

Правильность гипотезы Бибербаха была подвергнута сомнению в 1933 г. в связи с работой Фекете и Сегё [1], которые, вопреки ожидаемому из геометрических соображений неравенству $|b_{2n-1}| \leqslant 1$ для нечетных функций $f(z) = z + b_3 z^3 + \ldots \in S$, установили для них неравенство

$$\sup |b_5| = \frac{1}{2} + e^{-2/3} > 1.$$

Все результативные работы по проблеме коэффициентов в классе S распадаются на несколько частных направлений, где отыскиваются:

1) точные оценки начальных коэффициентов,

2) асимптотическое поведение коэффициентов,

3) локальные свойства функции Кёбе в пространстве коэффициентов.

В связи с первым направлением заметим, что Бибербах [2] сам доказал свою гипотезу в 1916 г. для $n=2$, Лёвнер [2] доказал ее в 1923 г. для $n=3$, Гарабедян и Шиффер [1] — для $n=4$ в 1955 г. и Педерсон [1] — для $n=6$ в 1968 г. При доказательстве использовались как метод площадей, так и параметрический и вариационные методы.

Основной результат по асимптотическому поведению коэффициентов получен Хейманом [1]. Для любой функции $f(z) \in S$ он доказал неравенство $|c_n| \leqslant n$ для всех достаточно больших n, т. е. для $n > N_f$, со знаком равенства только для функции (1.51). Этот результат усилен в работах И. Е. Базилевича (см. теорему 3.4 и теорему 3.7).

Что касается равномерной по классу оценки коэффициентов, то неравенство $|c_n| < 1{,}243n$ для всех n получено И. М. Милиным [2].

Первые результаты в направлении локальной гипотезы Бибербаха принадлежат Спенсеру [2]. Недавно Гарабедян, Росс и Шиффер [1] доказали, что для чётных номеров n функция Кёбе реализует в классе S строгий локальный максимум модуля коэффициента c_n. Позже при помощи метода вариаций однолистной функции Гарабедян и Шиффер [2] доказали локальную гипотезу Бибербаха для коэффициентов

с нечётными номерами. Эти авторы высказывают мнение, что их результат обещает дальнейший прогресс в общей проблеме коэффициентов, ибо если удастся окружить функцию Кёбе конечной и вполне определенной окрестностью, в которой $|c_n| < n$, кроме функции Кёбе, то можно будет для оставшейся области коэффициентов использовать менее точные оценки. Такой метод был использован Гарабедяном и Шиффером [1] при первоначальном доказательстве оценки $|c_4| \leqslant 4$. Одновременно Бомбиери [1] решил локальную проблему коэффициентов параметрическим методом.

Для однолистных функций $F(z) = z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \ldots$ из класса Σ также предполагалось неравенство

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{2}{n+1} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

со знаком равенства для функции

$$F_n(z) = \left[z^{n+1} + 2 + \frac{1}{z^{n+1}}\right]^{\frac{1}{n+1}} = z + \frac{2}{n+1} z^{-n} + \ldots$$

Действительно, Бибербахом [2] была получена оценка $|\alpha_1| \leqslant 1$, а Г. М. Голузин [2] и независимо Шиффер [1] доказали предположение при $n = 2$, т. е. неравенство $|\alpha_2| \leqslant \frac{2}{3}$. Однако И. Е. Базилевич [1] показал, что в подклассе нечетных функций из Σ $\max |\alpha_3| = {}^1/_2 + e^{-6}$, и тем опроверг эту гипотезу. Этот пример показывает как осторожно следует доверять эмпирической правдоподобности в проблемах такого типа.

В главе 3 с помощью свойств систем $\{A_n(z)\}$ выводятся некоторые из упомянутых выше результатов по проблеме коэффициентов, а также доказываются и другие результаты, касающиеся коэффициентов однолистных функций.

§ 1. Неравенства для логарифмических коэффициентов

Пусть функция $f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots \in S$. Обозначим

$$\ln \frac{f(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} 2\gamma_k z^k \tag{3.1}$$

и будем называть числа $2\gamma_k$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ логарифмическими коэффициентами функции $f(z)$. Для них имеет место

Теорема 3.1*). *Логарифмические коэффициенты функции $f(z) \in S$ при каждом $n = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют неравенству*

$$\sum_{k=1}^{n} k\,|\gamma_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \delta, \tag{3.2}$$

где δ — абсолютная константа, для которой имеет место оценка $\delta < 0{,}312$.

По функции $f(\zeta) \in S$ построим $F(z) = \frac{1}{f(\zeta)} \in \Sigma$, $z = \frac{1}{\zeta} \in B^0$, а затем при любом конечном w рассмотрим функцию $\ln \frac{z}{F(z) - w}$ и ее разложение в ряд Тейлора около $z = \infty$. Пусть

$$\ln \frac{z}{F(z) - w} = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(w)\, z^{-k}, \tag{3.3}$$

где $q_k(w)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — полиномы, связанные с полиномами Фабера $\mathcal{F}_k(w)$ согласно (1.10) соотношением

$$q_k(w) = \frac{1}{k} \mathcal{F}_k(w) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.4}$$

Если в равенстве (3.3) положить $w = 0$ и полученное равенство сравнить с разложением (3.1), то будем иметь

$$2\gamma_k = q_k(0) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.5}$$

Поскольку функция $F(z)$ не обращается в нуль в области B^0, то внутренность любой линии уровня $C_\rho = \{w : w = F(z),\ |z| = \rho\}$, $\rho > 1$, содержит точку $w = 0$, а тогда по принципу максимума модуля для субгармонических функций, учитывая (3.5), получим

$$4 \sum_{k=1}^{n} k\,|\gamma_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} k\,|q_k(0)|^2 \leqslant \max_{w \in C_\rho} \sum_{k=1}^{n} k\,|q_k(w)|^2.$$

Но на линии уровня C_ρ $q_k(w) = q_k(F(z))$, $|z| = \rho$, а величина $q_k(F(z))$ связана с функцией $A_k(z)$ в силу (3.4) и (1.12) равенством

$$q_k(F(z)) = \frac{1}{k} z^k + A_k(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.6}$$

---

*) См. И. М. Милин [3].

Теперь из последних двух соотношений с учетом неравенства (1.39) находим

$$\sum_{k=1}^{n} k\,|\gamma_k|^2 \leqslant \frac{1}{4} \max_{|z|=\rho} \sum_{k=1}^{n} k \left| \frac{1}{k} z^k + A_k(z) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \rho^{2k} + \ln \frac{1}{1-r^2} \right), \qquad \rho = \frac{1}{r} > 1.$$

Далее имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \rho^{2k} = \int_1^{\rho^2} \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\,dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \int_1^{\rho^2} \frac{t^n - 1}{t-1}\,dt,$$

откуда при любом $\rho > 1$ получим

$$\sum_{k=1}^{n} k\,|\gamma_k|^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \int_1^{\rho^2} \frac{t^n - 1}{t-1}\,dt + \ln \frac{\rho}{\rho - \rho^{-1}} \right).$$

Положив $\rho^2 = \exp\left\{ \frac{2x}{2n+1} \right\}$, $0 < x < \infty$, и произведя замену переменной интегрирования по формуле $t = \exp\left\{ \frac{2\tau}{2n+1} \right\}$, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} k\,|\gamma_k|^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{2}{2n+1} \int_0^x \frac{e^{\tau} - e^{\frac{\tau}{2n+1}}}{e^{\frac{\tau}{2n+1}} - e^{-\frac{\tau}{2n+1}}}\,d\tau + \frac{x}{2n+1} + \right.$$

$$\left. + \ln \frac{1}{e^{\frac{x}{2n+1}} - e^{-\frac{x}{2n+1}}} \right),$$

а используя для положительных τ и x очевидное неравенство

$$\frac{1}{e^{\frac{\tau}{2n+1}} - e^{-\frac{\tau}{2n+1}}} < \frac{2n+1}{2\tau},$$

получим оценку

$$\sum_{k=1}^{n} k\,|\gamma_k|^2 \leqslant \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \int_0^x \frac{e^{\tau} - e^{\frac{\tau}{2n+1}}}{\tau}\,d\tau + \frac{x}{2n+1} - \ln x + \right.$$

$$\left. + \ln\left(n + \frac{1}{2} \right) \right].$$

Но

$$\int_0^x \frac{e^{\frac{\tau}{2n+1}}-1}{\tau}\,d\tau > \frac{x}{2n+1}$$

и

$$\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-C,$$

где C — постоянная Эйлера, и потому

$$\sum_{k=1}^{n} k\,|\gamma_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\left[\int_0^x \frac{e^{\tau}-1}{\tau}\,d\tau-\ln x-C\right].$$

Выбрав $x=\ln 2$ и проделав простые вычисления, придем к заключению теоремы.

В связи с теоремой 3.1 заметим, что для функции Кёбе $f_\theta(z)=\frac{z}{(1-e^{-i\theta}z)^2}$ коэффициенты $\gamma_k=\frac{1}{k}e^{-ik\theta}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, а поэтому для нее $\sum_{k=1}^{n} k\,|\gamma_k|^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Более того, при каждом $n\geqslant 2$ справедливо неравенство

$$\sup_{f(z)\in S}\sum_{k=1}^{n} k\,|\gamma_k|^2 > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

которое выводится в § 3 настоящей главы.

Теорема 3.1 вместе с результатами второй главы оказывается весьма полезной для получения различных оценок коэффициентов однолистных функций. Особенно интересно поведение сумм $\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{\nu} k\,|\gamma_k|^2$, потому что согласно (2.37) выполнение неравенства

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{\nu} k\,|\gamma_k|^2 \leqslant \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}$$

уже доказывает гипотезу Бибербаха.

Перед формулированием следующей теоремы, являющейся частным случаем одной теоремы Н. А. Лебедева [2], условимся символом $\sigma(\psi(z))$ обозначать площадь образа K^0 (или B^0) при отображении регулярной в K^0 (или B^0) функцией $\psi(z)$. Аналогично символом $\sigma(G)$ будем обозначать площадь области G.

Теорема 3.2. *Если функция* $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ *регулярна и однолистна в области* K^0, *а функция* $F(z)=\gamma z+\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{-k}$ *мероморфна и однолистна в области* B^0 *и при этом*

$$f(K^0)\subset CF(B^0), \tag{3.7}$$

то выполняется неравенство

$$\sigma\left(\ln\frac{f(z)}{z}\right)+\sigma\left(\ln\frac{F(z)}{z}\right)\leqslant 2\pi\ln\left|\frac{\gamma}{c_1}\right|. \tag{3.8}$$

Знак равенства имеет место в том и только в том случае, если площадь дополнения $f(K^0)\cup F(B^0)$ *до расширенной плоскости равна нулю.*

Обозначив для краткости $f(K^0)=G$, $F(B^0)=D$, предположим сначала, что области G и D ограничены замкнутыми аналитическими кривыми Жордана, и введем в плоскости образов w полярную систему координат (R, Φ) с полюсом в начале. Возьмем целое $p\geqslant 1$ и совершим преобразование плоскости w по формуле $(R^{1/p}, \Phi)$. При таком преобразовании области G и D переходят в области G_p и D_p $(G_1=G, D_1=D)$, для которых сохраняется включение

$$G_p\subset CD_p \qquad (p=1, 2, \ldots)$$

и вытекающее из него равенство площадей

$$\sigma(G_p)+\sigma[C(G_p\cup D_p)]=\sigma(CD_p). \tag{3.9}$$

Для нахождения площадей $\sigma(G_p)$ и $\sigma(CD_p)$ рассмотрим однолистные функции с p-кратной симметрией:

$$\sqrt[p]{f(z^p)}=c_1^{1/p}\,(z+a_1z^{p+1}+a_2z^{2p+1}+\ldots), \quad a_k=a_k(p),$$
$$\sqrt[p]{F(z^p)}=\gamma^{1/p}\,(z+b_1z^{-p+1}+b_2z^{-2p+1}+\ldots), \quad b_k=b_k(p).$$

Из геометрического смысла использованных преобразований ясно, что

$$\sigma(G_p)=\sigma\left(\sqrt[p]{f(z^p)}\right)=\pi|c_1|^{2/p}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(np+1)|a_n|^2\right),$$

$$\sigma(CD_p)=\pi|\gamma|^{2/p}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}(np-1)|b_n|^2\right).$$

Теперь при каждом $p=1,2\ldots$ имеем

$$p\left[\sigma(G_p)-\pi|c_1|^{2/p}\right]=\pi|c_1|^{2/p}\left(p^2\sum_{n=1}^{\infty}n\,|a_n|^2+p\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right). \tag{3.10}$$

Но легко заметить связь

$$p^2\sum_{n=1}^{\infty}n\,|a_n|^2=\frac{p^2}{\pi}\sigma\left(\sqrt[p]{\frac{f(z)}{c_1z}}\right)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{K^0}\left|\left(\ln\frac{f(z)}{z}\right)'\right|^2\left|\frac{f(z)}{c_1z}\right|^{2/p}d\sigma,$$

позволяющую (3.10) переписать в виде

$$p\left[\sigma(G_p)-\pi|c_1|^{2/p}\right]=|c_1|^{2/p}\iint\limits_{K^0}\left|\left(\ln\frac{f(z)}{z}\right)'\right|^2\left|\frac{f(z)}{c_1z}\right|^{2/p}d\sigma+$$

$$+\pi p\,|c_1|^{2/p}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2. \tag{3.11}$$

Покажем, что при $p\longrightarrow\infty$ второй член в правой части (3.11) стремится к нулю. В самом деле, из условия теоремы следует ограниченность функции $f(z)$ в $|z|<1$, т. е. $|f(z)|<M$ для $z\in K^0$, а поэтому площадь $\sigma(G_p)<\pi M^{2/p}$. Но тогда, учитывая (3.10), получим оценку

$$p^2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\leqslant p^2\sum_{n=1}^{\infty}n\,|a_n|^2<p\left[\frac{\sigma(G_p)}{\pi|c_1|^{2/p}}-1\right]<$$

$$<p\left[\left(\frac{M}{|c_1|}\right)^{2/p}-1\right]\sim 2\ln\frac{M}{|c_1|}\qquad(p\longrightarrow\infty),$$

откуда будем иметь

$$p\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2=o(1)\qquad(p\longrightarrow\infty).$$

Переходя в (3.11) к пределу при $p \to \infty$, с помощью теоремы Леви (см., например, А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин [1], стр. 299) получим

$$\lim_{p \to \infty} p\left[\sigma(G_p) - \pi |c_1|^{2/p}\right] = \sigma\left(\ln \frac{f(z)}{z}\right).$$

Аналогично найдем

$$\lim_{p \to \infty} p\left[\pi |\gamma|^{2/p} - \sigma(CD_p)\right] = \sigma\left(\ln \frac{F(z)}{z}\right).$$

Наконец, имеем

$$\sigma\left[C(G_p \cup D_p)\right] = \frac{1}{p} \iint\limits_{C(G \cup D)} R^{\frac{2}{p}-1}\, dR\, d\Phi = \frac{1}{p} \iint\limits_{C(G \cup D)} |w|^{\frac{2}{p}-2}\, d\sigma_w.$$

Если теперь переписать равенство площадей (3.9) в виде

$$p\left[\sigma(G_p) - \pi |c_1|^{2/p}\right] + p\left[\pi |\gamma|^{2/p} - \sigma(CD_p)\right] + \\ + p\sigma\left[C(G_p \cup D_p)\right] = \pi p\left(|\gamma|^{2/p} - |c_1|^{2/p}\right)$$

и перейти к пределу при $p \to \infty$, то с учетом последних трех равенств и теоремы Леви будем иметь

$$\sigma\left(\ln \frac{f(z)}{z}\right) + \sigma\left(\ln \frac{F(z)}{z}\right) + \iint\limits_{C(G \cup D)} |w|^{-2}\, d\sigma_w = 2\pi \ln \left|\frac{\gamma}{c_1}\right|. \quad (3.12)$$

Чтобы доказать тождество (3.12) в случае произвольных границ, напишем его для функций $f(rz)$ и $F(r^{-1}z)$, $0 < r < 1$, и перейдем к пределу при $r \to 1$. В результате, учитывая, что интеграл в (3.12) и площадь $C(G \cup D)$ обращаются в нуль одновременно, получим заключение теоремы 3.2.

Следствие. *Для функции $f(z) \in S_M$ имеем*

$$\sigma\left(\ln \frac{f(z)}{z}\right) \leqslant 2\pi \ln M. \quad (3.13)$$

Знак равенства имеет место только для функций, отображающих $|z| < 1$ на круг $|w| < M$ с разрезами нулевой площади.

Поскольку в области K^0 $|f(z)| < M$, то функция $F(z) = Mz$ удовлетворяет условию (3.7) теоремы 3.2. Тогда по заключению теоремы с учетом равенств $c_1 = 1$, $\gamma = M$, $\sigma\left(\ln \frac{F(z)}{z}\right) = 0$

получим неравенство (3.13) вместе с замечанием о знаке равенства.

Приведенное доказательство теоремы 3.2 принадлежит А. З. Гриншпану.

Эту теорему можно также с успехом использовать для анализа коэффициентов функций $\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, регулярных и однолистных в $|z|<1$ и для любых z_1 и z_2 из $|z|<1$, удовлетворяющих условию $\psi(z_1)\psi(z_2)\neq 1$. Такие функции составляют так называемый класс Бибербаха—Эйленберга и порождаются каждой функцией $F(z)\in\Sigma$ (или $f(z)\in S$) простым преобразованием:

$$\psi(z^{-1})=\frac{1-\sqrt{\dfrac{F(z)-u}{F(z)-v}}}{1+\sqrt{\dfrac{F(z)-u}{F(z)-v}}}, \tag{3.14}$$

в котором u и v — различные непринимаемые $F(z)$ значения.

Недавно Гарабедян и Шиффер [2] установили вариационным методом для функций Бибербаха — Эйленберга неравенства, содержащие их логарифмические коэффициенты и сходные по форме с неравенствами Грунского (1.30) для класса Σ. Позднее Хуммель и Шиффер [1], Нехари [1], Поммеренке [4] и Н. А. Лебедев и Е. А. Мамай [1] пришли к этим неравенствам из теорем площадей. Выведем их с помощью теоремы 1.3 Нехари.

Теорема 3.3. *Пусть функция $F(z)\in\Sigma$ и не принимает в $|z|>1$ значений u и v $(u\neq v)$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left|\sum_{n=0}^{m} x_n a_{nk}\right|^2+2\operatorname{Re}\left[\bar{x}_0\sum_{k=0}^{m} x_k a_{0k}\right]\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{|x_k|^2}{k}, \tag{3.15}$$

где $\{x_n\}$ $(n=0,\ 1,\ \ldots,\ m;\ m\geqslant 0)$ — произвольная система комплексных чисел, а коэффициенты a_{nk} определяются разложением

$$\ln\frac{F(z)-F(\zeta)}{z-\zeta}+\ln(v-u)-$$
$$-2\ln\left[\sqrt{\frac{F(z)-u}{z}\cdot\frac{F(\zeta)-v}{\zeta}}+\sqrt{\frac{F(z)-v}{z}\cdot\frac{F(\zeta)-u}{\zeta}}\right]=$$
$$=\sum_{n,\,k=0}^{\infty} a_{nk}z^{-k}\zeta^{-n}\quad\left(a_{00}=\ln\frac{v-u}{4}\right). \tag{3.16}$$

Знак равенства в (3.15) *для ненулевой системы* $\{x_n\}$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $F(z) \in \tilde{\Sigma}$.

Положив

$$h(w) = \sqrt{(w-u)(w-v)},$$

введем в рассмотрение полиномы $\Psi_n(w) = w^{n-1} + \ldots$ с помощью разложения

$$\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)-w}\,\frac{1}{h(F(\zeta))} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n(w)}{\zeta^{n+1}}. \tag{3.17}$$

Далее образуем функции

$$\left.\begin{aligned} &Q_0(w) = 2\ln(\sqrt{w-u} + \sqrt{w-v}) - \ln(v-u) \\ &(Q_0(v) = 0), \\ &Q_1(w) = h(w) \sum_{n=1}^{m} \frac{x_n}{n} \Psi_n(w), \\ &Q(w) = x_0 Q_0(w) + Q_1(w), \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

считая систему чисел $\{x_n\}_0^m$ ненулевой, ибо в противном случае (3.15) тривиально, а x_0 — вещественным, что также не умаляет общности, так как случай комплексного x_0 отсюда вытекает.

Покажем, что $S(w) = [\operatorname{Re} Q(w)]^2$ является непрерывной субгармонической функцией на дополнении d_{Q_0} с любым $\rho_0 > 1$. Для этого, учитывая вид $S(w)$, достаточно доказать ее однозначность в d_{Q_0}, проследив за изменением соответствующих функций при обходе вокруг точек u и v по замкнутому контуру Γ. Так, когда внутренность Γ содержит v и не содержит u, то все составляющие $S(w)$ функции изменяют лишь знак; когда, наоборот, внутренность Γ содержит u и не содержит v, то $Q_0(w)$ изменяется до $-Q_0(w) + 2\pi i$, $Q_1(w)$ до $-Q_1(w)$, $Q(w)$ до $-Q(w) + 2\pi x_0 i$, $\operatorname{Re} Q(w)$ до $-\operatorname{Re} Q(w)$. Если же обе точки с аффиксами u и v лежат внутри контура Γ, то $Q_0(w)$ получает приращение $2\pi i$, а поэтому $Q(w)$ изменяется на чисто мнимую величину $2\pi x_0 i$, и, следовательно, приращение $S(w)$, как и в остальных случаях, равно нулю.

Таким образом, условия теоремы 1.3 выполнены и по ее заключению будем иметь:

$$H'(\rho)=\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(F(\rho e^{i\varphi}))\,d\varphi\right]\geqslant 0 \qquad (1<\rho<\rho_0). \quad (3.19)$$

Но из (3.16) при $\zeta=\infty$ и из сравнения (3.16) с (3.17) в кольце $1<|z|<\infty$ получаем разложения

$$Q_0(F(z))=\ln z-\sum_{k=0}^{\infty} a_{0k}z^{-k}$$

$$h(F(z))\,\Psi_n(F(z))=z^n-n\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}z^{-k} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

откуда

$$Q(F(z))=\sum_{n=1}^{m}\frac{x_n}{n}z^n-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{m}x_n a_{nk}\right)z^{-k}+x_0\ln z$$

и

$$S(F(z))=\left[\operatorname{Re}\left\{\sum_{n=1}^{m}\frac{x_n}{n}z^n-\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^{-k}-b_0+x_0\ln\rho\right\}\right]^2, \quad (3.20)$$

где $z=\rho e^{i\varphi}$ и $b_k=\sum_{n=0}^{m}x_n a_{nk}$ $(k=0,\ 1,\ \ldots)$.

Используя (3.20) для вычисления интеграла в (3.19), получим

$$H'(\rho)=\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{|x_k|^2}{k^2}\rho^{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2\rho^{-2k}+\right.$$

$$\left.+2\left[\operatorname{Re}(x_0\ln\rho-b_0)\right]^2\right\}=\sum_{k=1}^{m}\frac{|x_k|^2}{k}\rho^{2k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}k|b_k|^2\rho^{-(2k+1)}-$$

$$-\frac{2}{\rho}\operatorname{Re}[x_0 b_0]+\frac{2x_0^2}{\rho}\ln\rho\geqslant 0,$$

что и приведет к (3.15), если устремить ρ к единице.

Получить из теоремы 1.3 также утверждение о знаке равенства в (3.15) нельзя, ибо эта теорема сформулирована для более общего класса функций $S(w)$. Доказательство этого утверждения имеется в работе Поммеренке [4] и не

приводится, поскольку само заключение в дальнейшем не используется.

Следствие (Гарабедян и Шиффер [2]). *Если $F(z)\in\Sigma$ и в $|z|>1$ не принимает значений u и v ($u\neq v$), то*

$$\operatorname{Re}\sum_{k,\,n=0}^{m} a_{nk}x_n x_k \leqslant \sum_{k=1}^{m}\frac{|x_k|^2}{k} \quad (m=1,\ 2,\ \ldots) \tag{3.21}$$

для произвольной системы комплексных чисел $\{x_k\}_1^m$, вещественного x_0 и коэффициентов a_{nk} из (3.16).

Обозначим левую и правую часть в (3.21) соответственно через A и B, а второе слагаемое в левой части (3.15) через $2C$. Тогда очевидны преобразования

$$A=C+\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{n=0}^{m}a_{nk}x_n\right)x_k\right]\leqslant$$
$$\leqslant C+B^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{m}k\left|\sum_{n=0}^{m}a_{nk}x_n\right|^2\right)^{1/2}. \tag{3.22}$$

Отсюда и из (3.15) будем иметь

$$A\leqslant C+[B(B-2C)]^{1/2}\leqslant B,$$

т. е. (3.21).

Замечание. Гарабедян и Шиффер [2] доказали также следующий результат: если для $F(z)\in\Sigma$ и достаточно большого ρ значения u и v выбраны так, что

1) $F(z)\neq v$ в $|z|>1$,

2) все нули функции

$$\sum_{k=-m}^{m}x_k z^k \qquad (x_{-k}=x_k,\ \operatorname{Im}x_0=0) \tag{3.23}$$

лежат на $|z|=1$,

3) $u\neq v$ является корнем уравнения

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\sum_{k=-m}^{m}x_k z^k\sqrt{\frac{F(z)-v}{F(z)-u}}\,\frac{dz}{z}=0, \tag{3.24}$$

то неравенство (3.21) выполняется.

Кроме того, если вместо (3.23) при $l < m$ все нули $\sum_{k=-l}^{l} x_k z^k$ лежат на единичной окружности и x_k $(k = l+1, \ldots, m)$ достаточно малы, то при выборе в качестве u одного из l меньших по модулю корней уравнения (3.24), (3.21) также остается верным.

Неравенство (3.21) позволило его авторам решить локальную проблему Бибербаха для коэффициентов с нечетными номерами.

Для функций класса S, быстро растущих при приближении к единичной окружности, И. Е. Базилевич [7] установил неравенство, оценивающее близость логарифмических коэффициентов этих функций и функции Кёбе. Чтобы вывести это неравенство, нужна

Лемма 3.1. *Если функция $f(z) \in S$ и отлична от $f_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{-i\theta}z)^2}$, то при каждом $\varphi \in [0, 2\pi)$ величина*

$$\frac{|f(re^{i\varphi})|}{r}(1-r)^2 \tag{3.25}$$

строго убывает с возрастанием r $(0 < r < 1)$. Для $f_\theta(z)$ при $\varphi = \theta$ эта величина тождественно равна 1, а при $\varphi \neq \theta$ также строго убывает.

Будем исходить из тождества

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} = r \frac{\partial \ln |f(re^{i\varphi})|}{\partial r}, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Для его левой части имеется оценка (1.48), точная только для $f_\theta(z)$, за счет которой получим для $f(z) \neq f_\theta(z)$

$$\frac{\partial}{\partial r} \ln |f(re^{i\varphi})| < \frac{1+r}{r(1-r)},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\ln \frac{|f(re^{i\varphi})|}{r}(1-r)^2\right] < 0.$$

Последнее неравенство доказывает заключение леммы для $f(z) \neq f_\theta(z)$. Если же $f(z) = f_\theta(z)$, то заключение легко проверяется.

В дальнейшем для функций $f(z)$, регулярных в $|z| < 1$, будем обозначать

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = M(r, f), \qquad 0 < r < 1.$$

Следствие 1. *Для любой функции $f(z) \in S$ существует предел*

$$\lim_{r \to 1} M(r, f)(1-r)^2 = \alpha \leqslant 1. \tag{3.26}$$

Равенство $\alpha = 1$ имеет место только для функции $f_\theta(z)$ с любым $\theta \in [0, 2\pi)$.

Из леммы 3.1 вытекает более сильное утверждение, что величина $M(r, f) r^{-1} (1-r)^2$ для функции $f(z) \neq f_\theta(z)$ строго убывает с возрастанием r и поэтому стремится к пределу $\alpha < 1$, когда $r \to 1$. Действительно, пусть даны положительные $r_1 < r_2 < 1$. Выберем $\varphi_2 \in [0, 2\pi)$ из условия $|f(r_2 e^{i\varphi_2})| = M(r_2, f)$ и с помощью леммы 3.1 составим неравенство

$$\frac{M(r_1, f)}{r_1}(1-r_1)^2 \geqslant \frac{|f(r_1 e^{i\varphi_2})|}{r_1}(1-r_1)^2 > \frac{|f(r_2 e^{i\varphi_2})|}{r_2}(1-r_2)^2 = \frac{M(r_2, f)}{r_2}(1-r_2)^2,$$

которое и выражает высказанное утверждение. Для $f(z) = f_\theta(z)$ величина $M(r, f) r^{-1} (1-r)^2 \equiv 1$.

Следствие 2. *Для любой функции $f(z) \in S$ существует радиус наибольшего роста функции, т. е. такое $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, что*

$$\lim_{r \to 1} |f(re^{i\varphi_0})|(1-r)^2 = \alpha. \tag{3.27}$$

Если же $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $\varphi \neq \varphi_0$, то

$$\lim_{r \to 1} |f(re^{i\varphi})|(1-r)^2 = 0. \tag{3.28}$$

Будем считать $\alpha \neq 0$, ибо в противном случае равенства (3.27) и (3.28) тривиально следуют из (3.26). Возьмем произвольную последовательность $r_n \to 1$ при $n \to \infty$ и выберем $\varphi_n \in [0, 2\pi)$ так, чтобы

$$|f(r_n e^{i\varphi_n})| = M(r_n, f).$$

По следствию 1 существует предел

$$\lim_{r_n \to 1} \frac{|f(r_n e^{i\varphi_n})|}{r_n}(1-r_n)^2 = \alpha,$$

а по лемме 3.1 для фиксированного $r \in (0, 1)$ при достаточно больших n выполняется неравенство

$$\frac{|f(re^{i\varphi_n})|}{r}(1-r)^2 \geqslant \frac{|f(r_n e^{i\varphi_n})|}{r_n}(1-r_n)^2. \tag{3.29}$$

Пусть φ_0 — предельная точка для последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\varphi_{n_k} \to \varphi_0$ при $n_k \to \infty$. Переходя в (3.29) к пределу при $n = n_k \to \infty$, получим

$$\frac{|f(re^{i\varphi_0})|}{r}(1-r)^2 \geqslant \alpha,$$

а с учетом неравенства $|f(re^{i\varphi_0})| \leqslant M(r, f)$ будем иметь

$$\frac{M(r, f)}{r}(1-r)^2 \geqslant \frac{|f(re^{i\varphi_0})|}{r}(1-r)^2 \geqslant \alpha.$$

Остается снова перейти к пределу при $r \to 1$, чтобы получить (3.27).

Если же $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $\varphi \neq \varphi_0$, то применим к функции $F(\zeta) = \frac{1}{f(z)} \in \Sigma$, $\zeta = \frac{1}{z} \in B^0$, теорему искажения хорд Г. М. Голузина, т. е. неравенство (1.57), в точках $z_1 = re^{i\varphi_0}$ и $z_2 = re^{i\varphi}$. В результате получим

$$\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})} - \frac{1}{f(re^{i\varphi_0})}\right| \geqslant \frac{1-r^2}{r}|e^{i\varphi} - e^{i\varphi_0}|,$$

или

$$\frac{r}{|f(re^{i\varphi})|(1-r)^2} + \frac{r}{|f(re^{i\varphi_0})|(1-r)^2} \geqslant \frac{1+r}{1-r}|e^{i\varphi} - e^{i\varphi_0}|,$$

откуда, если перейти к пределу при $r \to 1$, и следует (3.28).

Приведенные выше результаты распространяются и на класс p-листных в среднем функций и были получены Хейманом [1]. Результаты такого типа ранее доказаны Спенсером [1].

Теорема 3.4 (И. Е. Базилевич [7]). *Если функция $f(z) \in S$ и $\lim\limits_{r \to 1} M(r, f)(1-r)^2 = \alpha > 0$, то ее логарифмические коэффициенты удовлетворяют неравенству*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left|\gamma_k - \frac{1}{k}t_0^k\right|^2 \leqslant \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\alpha}, \tag{3.30}$$

где $t_0 = e^{-i\varphi_0}$, а φ_0 определено равенством (3.27).

По данной в теореме функции $f(z) \in S$ построим функцию $F(\zeta) = \frac{1}{f(z)} \in \Sigma_0$, $\zeta = z^{-1} \in B^0$, и для порожденной ею системы

$\{A_n(\zeta)\}$ составим тождество при любом $\zeta \in B^0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left| A_n(\zeta) - \frac{1}{n} \bar{\zeta}^{-n} \right|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n |A_n(\zeta)|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\zeta) \zeta^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\zeta|^{-2n}. \quad (3.31)$$

Первый член в правой части (3.31) оценивается с помощью (1.39), второй согласно (1.2) имеет тождественное представление

$$-2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\zeta) \zeta^{-n} = 2 \ln |F'(\zeta)|,$$

а третья сумма в (3.31) есть $\ln(1-|\zeta|^{-2})^{-1}$. Учитывая сказанное, из (3.31) получим неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left| A_n(\zeta) - \frac{1}{n} \bar{\zeta}^{-n} \right|^2 \leqslant 2 \ln \frac{|F'(\zeta)|}{1-|\zeta|^{-2}} \quad (3.32)$$

при любом ζ из внешности единичного круга.

Теперь пусть $\zeta = \rho t_0$, $\rho > 1$. Для правой части в (3.32) имеем

$$2 \ln \frac{|F'(\zeta)|}{1-|\zeta|^{-2}} = 2 \ln \frac{|z|^2 |f'(z)|}{(1-|z|^2)|f(z)|^2} \leqslant 2 \ln \frac{r^2 M(r, f')}{(1-r^2)|f(z)|^2}, \quad (3.33)$$

где $z = rz_0$, $z_0 = e^{i\varphi_0}$, $0 < r < 1$. По следствию 2 леммы 3.1 существует

$$\lim_{r \to 1} |f(z)| (1-r)^2 = \alpha,$$

а по теореме об асимптотическом поведении производных (И. Е. Базилевич [5]) существует и такой предел:

$$\lim_{r \to 1} M(r, f') \frac{(1-r)^3}{1+r} = \alpha,$$

откуда получаем

$$\lim_{r \to 1} 2 \ln \frac{r^2 M(r, f')}{(1-r^2)|f(z)|^2} = 2 \ln \frac{1}{\alpha}. \quad (3.34)$$

Ясно, что при $r \to 1$ величина $\zeta \to t_0$, и так как $f(z) \to \infty$, то $F(\zeta) \to 0$. Но тогда из соотношения (3.6) заключаем, что существуют предельные значения $A_n(t_0)$ $(n=1, 2, \ldots)$. Переходя к пределу в (3.32) при $\zeta \to t_0$ вдоль радиуса и учитывая (3.33) и (3.34), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left| A_n(t_0) - \frac{1}{n} t_0^n \right|^2 \leqslant 2 \ln \frac{1}{\alpha}. \tag{3.35}$$

Но из (3.6) и (3.5) легко находим связь между предельными значениями $A_n(t_0)$ $(n=1, 2, \ldots)$ и логарифмическими коэффициентами $2\gamma_n$, именно:

$$2\gamma_n = \frac{1}{n} t_0^n + A_n(t_0) \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

используя которую в (3.35) придем к (3.30).

Замечание. И. Е. Базилевич [6] доказал, что знак равенства в (3.30) имеет место для таких функций $f(z) \in S$, для которых $\frac{1}{f(z)}$ отображает круг $|z| < 1$ на всю плоскость с аналитическим разрезом, выходящим из начала координат.

§ 2. Асимптотическое поведение коэффициентов

Неравенство (3.30) вместе с соотношением (3.27) уже определяют при $n \to \infty$ асимптотическое поведение коэффициентов функции $f(z) \in S$ в случае $\alpha > 0$. Для нахождения асимптотики коэффициентов в более простом случае $\alpha = 0$ нужна еще

Лемма 3.2. *При каждом $\lambda > 1/4$ для коэффициентов функции $\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}$, $f(z) \in S$, справедливо неравенство*

$$\frac{\left| \left\{ \left(\frac{f(z)}{z} \right)^{\lambda} \right\}_n \right|}{d_n(2\lambda)} < A(\lambda, t) \frac{M^{\frac{\lambda t}{2}}\left(r, \frac{f}{r}\right)}{r^n d_n^{1/2}(1+2\lambda t)} \quad (n=1, 2, \ldots), \tag{3.36}$$

где положительные числа $r \in (0, 1)$ и $t \in \left(1 - \frac{1}{2\lambda}, 1 - \frac{1}{4\lambda}\right)$ — любые, а постоянная $A(\lambda, t)$ вычисляется по формуле

$$A(\lambda, t) = \left(\frac{2\lambda}{t[4\lambda(1-t)-1]} \right)^{1/2} \exp\{\lambda\delta\}$$

(δ — *константа из теоремы* 3.1).

Возьмем любое $r \in (0, 1)$, построим функцию $\frac{f(rz)}{r} \in S$ и для нее при $h > 1/4$ обозначим

$$\left(\frac{f(rz)}{rz}\right)^h = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k,$$

где

$$D_k = \left\{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^h\right\}_k r^k, \qquad A_k = 2h\gamma_k r^k \qquad (k = 1, 2, \ldots). \quad (3.37)$$

Найдем оценку $|D_n(A_1, A_2, \ldots, A_n)|$, содержащую $M(r, f)$. Для этого действуя, как при доказательстве теоремы 2.6, придем к основному неравенству (2.47), в правой части которого вторую сумму оценим с помощью (2.48), а первую — другим способом. Именно:

$$\sum_{k=1}^{n} k\,|D_k(t)|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k d_k(\lambda t) \frac{|D_k(t)|^2}{d_k(\lambda t)} < \lambda t d_n (1 + \lambda t) \sum_{k=1}^{n} \frac{|D_k(t)|^2}{d_k(\lambda t)}, \quad \lambda > 0.$$

Но оценку $\sum_{k=1}^{n} \frac{|D_k(t)|^2}{d_k(\lambda t)}$ можно получить из неравенства (2.36) при $p = 2$, ибо, как следует из его доказательства, оно верно и для частичных сумм, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|D_k(t)|^2}{d_k(\lambda t)} \leqslant \exp\left\{\frac{t}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} k\,|A_k|^2\right\}.$$

Из последних двух неравенств при $n = 1, 2, \ldots$ и $\lambda > 0$ будет иметь

$$\sum_{k=1}^{n} k\,|D_k(t)|^2 < \lambda t d_n (1 + \lambda t) \exp\left\{\frac{t}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} k\,|A_k|^2\right\}. \quad (3.38)$$

Неравенства (2.47), (2.48) и (3.38) приводят к оценке

$$|D_n| < \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda\delta_n^+(\lambda)\right\} d_n(1+\lambda t)\left[\frac{\lambda}{tn}\sum_{k=0}^{n-1} d_k^2[\lambda(1-t)]\right]^{1/2} \times$$
$$\times \frac{\exp\left\{\frac{t}{2\lambda}\sum_{k=1}^{n} k\,|A_k|^2\right\}}{d_n^{1/2}(1+\lambda t)}$$

Теперь будем считать $\lambda > 1/2$, выберем t из условия. $1 > \lambda(1-t) > 1/2$, т. е. $1-\frac{1}{\lambda} < t < 1-\frac{1}{2\lambda}$, и применим лемму 2.3 для оценки $\sum_{k=0}^{n-1} d_k^2[\lambda(1-t)]$. Тогда из последней оценки с учетом ранее доказанного неравенства для биномиальных коэффициентов

$$d_n(1+\lambda t)\cdot d_n(\lambda-\lambda t) < d_n(\lambda)$$

получим

$$|D_n| < \left(\frac{\lambda}{t[2\lambda(1-t)-1]}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda\delta_n^+(\lambda)\right\} d_n(\lambda)\times$$
$$\times \frac{\exp\left\{\frac{t}{2\lambda}\sum_{k=1}^{n} k\,|A_k|^2\right\}}{d_n^{1/2}(1+\lambda t)}. \qquad (3.39)$$

Если в (3.39) положить $\lambda = 2h$, заменить A_k и D_k по формулам (3.37) и заметить, что в силу теоремы 3.1 верна оценка

$$\delta_n^+(2h) \leqslant \delta_n^+(2h;\ 2h\gamma_1,\ 2h\gamma_2,\ \ldots,\ 2h\gamma_n) =$$
$$= \delta_n^+(1;\ \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_n) \leqslant \delta,$$

то из (3.39) будем иметь

$$\frac{\left|\left\{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^h\right\}_n\right|}{d_n(2h)} < A(h,\ t)\,\frac{\exp\left\{ht\sum_{k=1}^{n} k\,|\gamma_k|^2 r^{2k}\right\}}{r^n\cdot d_n^{1/2}(1+2ht)}.$$

Но по следствию из теоремы 3.2 для функции $\frac{f(rz)}{r}$ выполняется неравенство (3.13):

$$\sigma\left(\ln\frac{f(rz)}{rz}\right)=4\pi\sum_{k=1}^{\infty}k\,|\gamma_k|^2r^{2k}\leqslant 2\pi\ln M\left(r,\ \frac{f}{r}\right),$$

что вместе с предыдущим неравенством после замены h на λ дает (3.36). Лемма доказана.

Теперь можно сформулировать основной результат этого параграфа, выведенный ранее другим путем Хейманом [3] для функций, p-листных в среднем по окружности. Чтобы не усложнять запись, асимптотическое равенство $x_n\sim 0$ $(n\to\infty)$ понимается как $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Теорема 3.5. *Для функции $f(z)\in S$ при любом $\lambda>1/4$ выполняется асимптотическое равенство*

$$\frac{\left\{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}\right\}_n}{d_n(2\lambda)}\sim\alpha^{\lambda}\exp\{i\,[\lambda\arg f(re^{i\varphi_0})-(n+\lambda)\varphi_0]\}\quad(n\to\infty),\tag{3.40}$$

где α и φ_0 определены равенствами (3.26) *и* (3.27), *а r связано с n соотношением*

$$1-r=\frac{\theta}{n},\qquad m_1<\theta<m_2\tag{3.41}$$

(m_1 *и* m_2 — *положительные постоянные*).

Сначала рассмотрим случай $\alpha>0$ и будем считать, что $\varphi_0=0$, ибо в противном случае вместо $f(z)$ достаточно рассмотреть функцию $e^{-i\varphi_0}f(e^{i\varphi_0}z)\in S$.

Образовав очевидное тождество

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}=\frac{1}{(1-z)^{2\lambda}}\left[\frac{f(z)}{z}(1-z)^2\right]^{\lambda}$$

и обозначив

$$\omega(z)=\ln\left[\frac{f(z)}{z}(1-z)^2\right]^{\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}A_kz^k,\qquad A_k=2\lambda\left(\gamma_k-\frac{1}{k}\right),$$

$$\varphi(z)=\left[\frac{f(z)}{z}(1-z)^2\right]^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}D_kz^k,$$

достигнем представления

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda} = \varphi(z)(1-z)^{-h}, \qquad h = 2\lambda. \tag{3.42}$$

Докажем, что тейлоровские коэффициенты функции $\omega(z)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.7, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,|A_k|^2 < \infty, \tag{3.43а}$$

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} A_k = O(1) \qquad (n \to \infty). \tag{3.43б}$$

Неравенство (3.43а) прямо следует из теоремы 3.4. В самом деле, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,|A_k|^2 = 4\lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\left|\gamma_k - \frac{1}{k}\right|^2 \leqslant 2\lambda^2 \ln\frac{1}{\alpha} < \infty.$$

Асимптотическое равенство (3.43б) можно вывести из тождества

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k = \lambda \ln\frac{|f(r)|}{r}(1-r)^2. \tag{3.44}$$

Действительно, при выполнении (3.43а) по лемме 2.4, если r связано с n соотношением (3.41), имеем

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} A_k - \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k = o(1) \qquad (n \to \infty),$$

а в силу (3.27) и (3.44) существует предел

$$\lim_{r\to 1} \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k = \lambda \ln \alpha,$$

что вместе дает

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} A_k = \lambda \ln \alpha.$$

Это равенство и гарантирует выполнение условия (3.43б).

По заключению теоремы 2.7 имеет место асимптотическое равенство

$$\frac{\{\varphi(z)(1-z)^{-h}\}_n}{d_n(h)} \sim \varphi(r) = \left|\frac{f(r)}{r}(1-r)^2\right|^{\lambda} \exp\{i\lambda \arg f(r)\} \qquad (n \to \infty),$$

из которого с учетом (3.42) и (3.27) выводится (3.40).

Теперь пусть $\alpha = 0$. Согласно лемме 3.2 справедливо неравенство

$$\frac{\left|\left\{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}\right\}_n\right|}{d_n(2\lambda)} < A(\lambda, t)\frac{\left[M\left(r, \frac{f}{r}\right)(1-r)^2\right]^{\frac{\lambda t}{2}}}{r^n d_n^{1/2}(1+2\lambda t)(1-r)^{\lambda t}},$$

в котором положительные числа $t \in \left(1-\frac{1}{2\lambda}, 1-\frac{1}{4\lambda}\right)$ и $r \in (0, 1)$ — любые. Положим $1-r = 1/n$ и перейдем к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$. В результате, учитывая (3.26) и асимптотическое равенство для биномиальных коэффициентов

$$d_n(1+2\lambda t) \sim \frac{n^{2\lambda t}}{\Gamma(1+2\lambda t)} \qquad (n \to \infty),$$

получим (3.40). Теорема доказана.

Следствие 1 (Хейман [3]). *Для любой функции* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S$ *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{n} = \alpha \leqslant 1, \tag{3.45}$$

и поэтому выполняется неравенство $|c_n| \leqslant n$ *при* $n > N_f$.

Чтобы получить это следствие, достаточно в условии теоремы 3.5 положить $\lambda = 1$ и учесть, что равенство $\alpha = 1$ имеет место только для функции $f_\theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-i(n-1)\theta} z^n \in S$.

Следствие 2. *Для любой функции* $f(z) \in S$ *существует предел*

$$\lim_{r\to 1}\left[(1-r^2)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|\,d\varphi\right] = \alpha. \tag{3.46}$$

Выразив среднеинтегральный модуль в (3.46) через коэффициенты нечетной однолистной функции $\sqrt{f(z^2)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)} z^{2k-1}$, именно:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n^{(2)}|^2 r^{2n-1}, \quad 0 < r < 1,$$

напишем тождество

$$(1-r^2)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|d\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (|c_n^{(2)}|^2 - |c_{n-1}^{(2)}|^2)\, r^{2n-1}$$

$$(c_0^{(2)} = 0).$$

Далее найдем частичную сумму S_n ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (|c_k^{(2)}|^2 - |c_{k-1}^{(2)}|^2)$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (|c_k^{(2)}|^2 - |c_{k-1}^{(2)}|^2) = |c_n^{(2)}|^2.$$

Согласно теореме 3.5 при $\lambda = 1/2$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} |c_n^{(2)}|^2 = \alpha, \tag{3.47}$$

откуда с помощью второй теоремы Абеля и следует (3.46).

Это следствие также выведено Хейманом [1].

Следствие 3. *Для функции $f(z) \in S$, у которой $\alpha > 0$, имеем*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} k|\gamma_k|^2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = \ln\frac{\alpha}{\theta(1)} \leqslant \frac{1}{2}\ln\alpha, \tag{3.48}$$

где $\theta(1) = \theta(1;\ \gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ определено соотношением (2.32).

Если ввести обозначение

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}^{(2)} z^n,$$

то из (3.1) будем иметь

$$\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k z^k\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}c_{k+1}^{(2)}z^k.$$

Для тейлоровских коэффициентов γ_k и $c_k^{(2)}$ тождество (2.25) при $\lambda=1$ дает

$$\theta_{n-1}(1)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|c_k^{(2)}|^2\exp\left\{-\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\nu}\left(k|\gamma_k|^2-\frac{1}{k}\right)\right\},$$

или

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\nu}\left(k|\gamma_k|^2-\frac{1}{k}\right)=\ln\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|c_k^{(2)}|^2}{\theta_{n-1}(1)n}\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Но согласно (3.47) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|c_k^{(2)}|^2}{n}=\alpha,$$

что с учетом (2.32) позволяет перейти к пределу в написанном равенстве и получить соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\nu}\left(k|\gamma_k|^2-\frac{1}{k}\right)=\ln\frac{\alpha}{\theta(1)}.\qquad(3.49)$$

Далее при любом $n\geqslant 1$ составим тождество

$$\sum_{k=1}^{n}k|\gamma_k|^2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}k\left|\gamma_k-\frac{1}{k}t_0^k\right|^2+$$
$$+\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n}\left(2\gamma_k\bar{t}_0^k-\frac{2}{k}\right),\qquad(3.50)$$

где $t_0=e^{-i\varphi_0}$. Замечая, что

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\left(2\gamma_k\bar{t}_0^k-\frac{2}{k}\right)r^k=\ln\frac{|f(e^{i\varphi_0}r)|}{r}(1-r)^2,$$

и учитывая (3.27), находим

$$\lim_{r\to 1}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\left(2\gamma_k\bar{t}_0^k-\frac{2}{k}\right)r^k=\ln\alpha.$$

Поскольку в силу теоремы 3.4 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\left|2\gamma_k\bar{t}_0^k-\frac{2}{k}\right|^2$ сходится, то с помощью леммы 2.4 получим

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n}\left(2\gamma_k\bar{t}_0^k-\frac{2}{k}\right)=\ln\alpha.$$

Переходя к пределу в тождестве (3.50) при $n\to\infty$, будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}k|\gamma_k|^2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}k\left|\gamma_k-\frac{1}{k}t_0^k\right|^2+\ln\alpha. \quad (3.51)$$

Из (3.49), (3.51) и (3.30) вытекает (3.48).

Заметим*), что при $\alpha>0$ теорему 3.5, как следует из ее доказательства, можно распространить на функции $\psi(z)$ вида

$$\psi(z)=f(z)\cdot g(z),$$

где $f(z)\in S$, а $g(z)=\exp\{\omega(z)\}$, $\omega(z)\in\sigma$ и $\lim\limits_{r\to 1}|g(re^{i\varphi_0})|=$ $=|g(e^{i\varphi_0})|$.

Кроме того, в случае $\alpha>0$ имеет место более сильная

Теорема 3.6. *Если функция $f(z)\in S$ и $\lim\limits_{r\to 1}M(r,f)\times$ $\times(1-r)^2=\alpha>0$, то справедливо асимптотическое равенство*

$$\frac{\left\{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}(1-e^{-i\varphi_0}z)^{-t}\right\}_n}{d_n(2\lambda+t)}\sim$$
$$\sim\alpha^{\lambda}\exp\{i[\lambda\arg f(re^{i\varphi_0})-(n+\lambda)\varphi_0]\}\qquad(n\to\infty), \quad (3.52)$$

где φ_0 определено равенством (3.27), *r связано с n соотношением* (3.41), *а вещественные λ и t удовлетворяют условию* $2\lambda+t>1/2$.

---

*) См. И. М. Милин [6].

Считая, что $\varphi_0 = 0$, ибо иначе вместо $f(z)$ достаточно рассмотреть функцию $e^{-i\varphi_0} f(e^{i\varphi_0} z) \in S$, образуем тождество

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}(1-z)^{-t} = \frac{1}{(1-z)^{2\lambda+t}}\left[\frac{f(z)}{z}(1-z)^2\right]^{\lambda}.$$

В обозначениях предыдущей теоремы тождество примет вид

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}(1-z)^{-t} = \varphi(z)(1-z)^{-h}, \qquad h = 2\lambda + t. \quad (3.53)$$

Далее воспользуемся уже доказанным в теореме 3.5 утверждением о том, что тейлоровские коэффициенты функции $\omega(z) = \ln \varphi(z)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.7, и применим эту теорему. По ее заключению будем иметь

$$\frac{\{\varphi(z)(1-z)^{-h}\}_n}{d_n(h)} \sim \varphi(r) = \left|\frac{f(r)}{r}(1-r)^2\right|^{\lambda} \exp\{i\lambda \arg f(r)\}$$
$$(n \to \infty),$$

что с учетом (3.53) и (3.27) дает (3.52).

Следствие. *Для функции $f(z) \in S$, у которой $\alpha > 0$, при $\lambda > 3/4$ имеем*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left\{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}\right\}_n\right| - \left|\left\{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}\right\}_{n-1}\right|}{d_n(2\lambda-1)} = \alpha^{\lambda}. \quad (3.54)$$

Применив к функции $f(z)$ теорему 3.6 при $t = -1$ и $\lambda > 3/4$, получим при $n \to \infty$

$$\frac{\left\{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}\right\}_n - e^{-i\varphi_0}\left\{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}\right\}_{n-1}}{d_n(2\lambda-1)} \sim$$
$$\sim \alpha^{\lambda} \exp\{i[\lambda \arg f(re^{i\varphi_0}) - (n+\lambda)\varphi_0]\}.$$

Если к той же функции $f(z)$ применить еще соотношение (3.40) с тем же самым λ, то из совместного рассмотрения обоих асимптотических равенств будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left\{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}\right\}_n\right| - \left|\left\{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}\right\}_{n-1}\right| e^{i\varepsilon_n}}{d_n(2\lambda-1)} = \alpha^{\lambda}, \quad (3.55)$$

где ε_n обозначает соответствующую разность аргументов.

Теперь для получения (3.54) остается лишь использовать в (3.55) стремление к пределу вещественной и мнимой частей. Следствие доказано.

Пример функции из класса S

$$f(z)=\frac{z}{1-2z\cos\theta+z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}z^n,\quad 0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

у которой $\alpha=0$, показывает, что соотношение (3.54) при $\alpha=0$ становится неверным.

В заключение параграфа отметим, что в подклассе $S^*(\alpha)$ таких функций $f(z)\in S$ с одной и той же константой α, для которых $\frac{1}{f(z)}$ отображает круг $|z|<1$ на всю плоскость с аналитическим разрезом, выходящим из начала, результат Хеймана (3.45) усилен И. Е. Базилевичем [7]. Им доказана

Теорема 3.7. *Если функция $f(z)=z+c_2z^2+\ldots$ принадлежит подклассу $S^*(\alpha)$, $\alpha>0$, то ее коэффициенты удовлетворяют неравенству*

$$|c_n|\leqslant\alpha n+A_f\sqrt{\ln n}+B_f\quad(n=2,3,\ldots),\tag{3.56}$$

в котором A_f и B_f — постоянные, зависящие лишь от первых трех коэффициентов разложения функции $f(z)$ в окрестности полюса.

По данной функции $f(z)\in S^*(\alpha)$ найдем функцию $F_2(\zeta)=[f(z^2)]^{-1/2}\in\Sigma_0$, $\zeta=z^{-1}\in B^0$, и для порожденной ею системы $\{a_n(\zeta)\}$ образуем тождество при любом $\zeta\in B^0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)|\rho^2a'_{2n-1}(\zeta)-\bar{\zeta}^{-(2n-2)}|^2=\rho^4\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)|a'_{2n-1}(\zeta)|^2-$$
$$-2\rho^2\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)a'_{2n-1}(\zeta)\zeta^{-(2n-2)}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)|\zeta|^{-2(2n-2)},\qquad|\zeta|=\rho=\frac{1}{r}>1.\tag{3.57}$$

Оценка для первой суммы в правой части (3.57) получается из неравенства (1.43) при $\nu=1$, именно:

$$\rho^4\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)|a'_{2n-1}(\zeta)|^2\leqslant\frac{1+r^4}{(1-r^4)^2},\quad|\zeta|=\frac{1}{r}>1.\tag{3.58}$$

Второй член в (3.57) можно найти из разложения (1.5б). Для этого продифференцируем тождество (1.5б) по z и ζ, применяя в правой части почленное дифференцирование ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}(\zeta) z^{-(2n-1)}$. По теореме Вейерштрасса это возможно, ибо ряд в силу оценки (1.43) сходится равномерно по двум переменным z и ζ внутри области B^0. В итоге получим

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\,a'_{2n-1}(\zeta)\,z^{-2n}=\frac{F_2'(z)\,F_2'(\zeta)}{[F_2(z)-F_2(\zeta)]^2}-$$
$$-\frac{1}{(z-\zeta)^2}+\frac{F_2'(z)\,F_2'(\zeta)}{[F_2(z)+F_2(\zeta)]^2}-\frac{1}{(z+\zeta)^2},$$

а положив $z=\zeta$, будем иметь

$$2\rho^2\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\,a'_{2n-1}(\zeta)\,\zeta^{-(2n-2)}=\frac{\rho^2}{6}\zeta^2\{F_2(\zeta),\zeta\}+$$
$$+\frac{\rho^2}{4}\left(\left[\frac{\zeta F_2'(\zeta)}{F_2(\zeta)}\right]^2-1\right),\qquad(3.59)$$

где символом $\{F_2(\zeta),\zeta\}$ обозначена производная Шварца

$$\{F_2(\zeta),\zeta\}=\left(\frac{F_2''(\zeta)}{F_2'(\zeta)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{F_2''(\zeta)}{F_2'(\zeta)}\right)^2.$$

Учитывая (3.58), (3.59) и равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\,|\zeta|^{-2(2n-2)}=\frac{1+r^4}{(1-r^4)^2},\quad |\zeta|=\frac{1}{r}>1,$$

из (3.57) получим неравенство при любом $\zeta\in B^0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\left|\rho^2 a'_{2n-1}(\zeta)-\bar{\zeta}^{-(2n-2)}\right|^2\leqslant 2\,\frac{1+r^4}{(1-r^4)^2}-$$
$$-\operatorname{Re}\left[\frac{\rho^2}{6}\zeta^2\{F_2(\zeta),\zeta\}+\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\zeta F_2'(\zeta)}{F_2(\zeta)}\right)^2-\frac{\rho^2}{4}\right].\qquad(3.60)$$

Поскольку $f(z)\in S^*(\alpha)$, то существует такое t_1, $|t_1|=1$, что $F_2(t_1)=0$. Для упрощения вычислений при переходе к пределу в (3.60) при $\zeta\to t_1$ будем считать $t_1=1$ и

используем следующее разложение функции $f_2(z)=\sqrt{f(z^2)}=$ $=\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}z^{2n-1}$ в окрестности полюса $z=1$:

$$f_2(z)=\frac{\sqrt{\alpha}\,z}{1-z^2}\left[1+B_1(1-z^2)+B_2(1-z^2)^2+\ldots\right]. \qquad (3.61)$$

Здесь, как показал И. Е. Базилевич [6], $B_1=bi$ — мнимое число.

Найдем правую часть (3.60) при $\zeta=\rho=1/r>1$. С помощью разложения (3.61) при $r\to 1$ получим

$$\operatorname{Re}\frac{\rho^2}{6}\zeta^2\{F_2(\zeta),\ \zeta\}=\operatorname{Re}\frac{\rho^2}{6}z^2\{f_2(z),\ z\}=\frac{1}{4}-4\operatorname{Re}B_2+o(1),$$

$$\operatorname{Re}\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\zeta F_2'(\zeta)}{F_2(\zeta)}\right)^2=\operatorname{Re}\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{zf_2'(z)}{f_2(z)}\right)^2=\frac{1}{4r^2}\frac{(1+r^2)^4}{(1-r^4)^2}-$$
$$-3b^2-4\operatorname{Re}B_2+o(1),$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\,|\,\rho^2a_{2n-1}'(\rho)-r^{2n-2}\,|^2\leqslant 3b^2+8\operatorname{Re}B_2+o(1). \qquad (3.62)$$

Теперь заметим, что из соотношения (1.12) между функциями $a_n(\zeta)$ и полиномами Фабера, порожденными одной и той же функцией $F_2(\zeta)$, вытекает равенство производных

$$\frac{1}{n}\mathcal{F}_n'(F_2(\zeta))\cdot F_2'(\zeta)=\zeta^{n-1}+a_n'(\zeta)\quad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

из которого легко следует существование предельных значений $a_n'(1)$. В самом деле, так как $f(z)\in S^*(\alpha)$, то существует и предельное значение $F_2'(1)=2/\sqrt{\alpha}$, а поэтому из последнего равенства заключаем:

$$\frac{1}{n}\mathcal{F}_n'(0)\frac{2}{\sqrt{\alpha}}=1+a_n'(1)\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (3.63)$$

Переходя в (3.62) к пределу при $\rho=r^{-1}\to 1$, получим основное неравенство для вывода (3.56):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\,|\,a_{2n-1}'(1)-1\,|^2\leqslant B<\infty, \qquad (3.64)$$

где $B=3b^2+8\operatorname{Re}B_2$.

Далее из соотношения $f(z^2)=f_2^2(z)$ имеем

$$c_n=b_1b_{2n-1}+b_2b_{2n-3}+\ldots+b_{2n-1}b_1 \quad (n=2,\ 3,\ \ldots). \tag{3.65}$$

Но коэффициенты b_{2n-1} можно выразить через $a'_{2n-1}(1)$, используя разложение

$$\frac{1}{F_2(\zeta)-w}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathcal{F}'_n(w)\,\zeta^{-n},$$

получающееся из (1.10) дифференцированием по w. Действительно, полагая в этом тождестве $w=0$, получим равенство коэффициентов

$$b_{2n-1}=\frac{1}{2n-1}\mathcal{F}'_{2n-1}(0),$$

которое вместе с (3.63) дает

$$b_{2n-1}=\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\left[1+a'_{2n-1}(1)\right] \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Подставляя найденные выражения для коэффициентов b_{2k-1} $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ в формулу (3.65), получим

$$c_n=\frac{\alpha}{4}\left[n+2\sum_{k=1}^{n}a'_{2k-1}(1)+\sum_{k=1}^{n}a'_{2k-1}(1)\,a'_{2n-(2k-1)}(1)\right]$$
$$(n=2,\ 3,\ \ldots),$$

откуда

$$|c_n|\leqslant\frac{\alpha}{4}\left[n+2\sum_{k=1}^{n}|a'_{2k-1}(1)|+\sum_{k=1}^{n}|a'_{2k-1}(1)|^2\right],$$

или

$$|c_n|\leqslant\alpha n+\alpha\sum_{k=1}^{n}|a'_{2k-1}(1)-1|+\frac{\alpha}{4}\sum_{k=1}^{n}|a'_{2k-1}(1)-1|^2.$$

Наконец, с помощью основного неравенства (3.64) будем иметь

$$|c_n|\leqslant\alpha n+\alpha\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)|a'_{2k-1}(1)-1|^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\right)^{1/2}+$$
$$+\frac{\alpha}{4}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)|a'_{2k-1}(1)-1|^2\leqslant$$
$$\leqslant\alpha n+\alpha\sqrt{B}\left(2+\frac{1}{2}\ln n\right)^{1/2}+\frac{\alpha}{4}B,$$

что уже и доказывает (3.56). Нетрудно заметить, что B_f и A_f зависят лишь от первых трех коэффициентов разложения $f(z)$ в окрестности полюса.

§ 3. Оценки коэффициентов

Впервые правильный порядок роста коэффициентов однолистных функций из класса S нашел Литтлвуд, доказав неравенство $|c_n| < en$. Идея Литтлвуда состояла в сведении оценки коэффициентов к оценке среднеинтегрального модуля. На этом пути результат Литтлвуда улучшался Ландау [1], И. Е. Базилевичем [2], Г. М. Голузиным [4], пока И. Е. Базилевич [3] и независимо И. М. Милин (Н. А. Лебедев и И. М. Милин [1]) не исчерпали возможности этого метода, получив асимптотически точную оценку среднего модуля и соответствующую ей оценку коэффициентов $|c_n| < \frac{e}{2} n + \mathrm{const}$. Далее И. Е. Базилевич [4] вместо среднего модуля использовал лучшую мажоранту для $|c_n|$ в виде некоторой частичной суммы, за счет чего достиг результата

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{f(z)\in S} \frac{|c_n|}{n} < 1{,}304.$$

Используя неравенство (1.39), удается улучшить общую оценку коэффициентов в классе S.

Теорема 3.8. *Для коэффициентов функции* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S$ *имеет место оценка*

$$|c_n| < 1{,}243n \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{3.66}$$

По функции $f(\zeta) \in S$ образуем $F(z) = \frac{1}{f(\zeta)} \in \Sigma_0$, $z = \frac{1}{\zeta} \in B^0$, после чего при любом конечном w рассмотрим функцию $\frac{z}{F(z) - w}$ и ее разложение в ряд Тейлора около $z = \infty$. Обозначим

$$\frac{z}{F(z) - w} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(w) z^{-n}. \tag{3.67}$$

Ясно, что коэффициенты $P_n(w)$ $(n=0, 1, \ldots)$ являются полиномами точно степени n относительно w, ибо согласно (1.10) $P_n(w)$ связаны с полиномами Фабера равенством

$$P_{n-1}(w)=\frac{1}{n}\mathcal{F}'_n(w) \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Если в равенстве (3.67) положить $w=0$, то сравнением коэффициентов при z^{-n} в обеих частях равенства найдем исходное представление для тейлоровских коэффициентов функции $f(z)$, именно:

$$c_n=P_{n-1}(0) \qquad (n=2, 3, \ldots).$$

Поскольку функция $F(z)$ не обращается в нуль в области B^0, то внутренность любой линии уровня $C_\rho=\{w\colon w=F(z), |z|=\rho\}$, $\rho>1$, содержит точку $w=0$. Тогда, по принципу максимума модуля для аналитических функций, будем иметь при $n=2, 3, \ldots$

$$|c_n|=|P_{n-1}(0)|\leqslant\max_{w\in C_\rho}|P_{n-1}(w)|=\max_{|\zeta|=\rho}|P_{n-1}(F(\zeta))|. \quad (3.68)$$

Теперь потенцируем равенство (1.2), вводя при этом систему функций $\{D_n(\zeta)\}$:

$$\frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\zeta)z^{-n}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}D_n(\zeta)z^{-n}. \quad (3.69)$$

Умножая это равенство на $\frac{z}{z-\zeta}$, получим

$$\frac{z}{F(z)-F(\zeta)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\zeta^n\sum_{k=0}^{n}D_k(\zeta)\zeta^{-k}\right)z^{-n}$$

Если в равенстве (3.67) положить $w=F(\zeta)$, где ζ — произвольное конечное значение из области B^0, то в силу единственности разложения регулярной функции в ряд Тейлора из (3.67) и последнего равенства найдем

$$P_{n-1}(F(\zeta))=\zeta^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}D_k(\zeta)\zeta^{-k} \qquad (n=2, 3, \ldots),$$

что вместе с (3.68) приведет к неравенству

$$|c_n|\leqslant\rho^{n-1}\max_{|\zeta|=\rho}\left|\sum_{k=0}^{n-1}D_k(\zeta)\zeta^{-k}\right| \qquad \rho>1. \quad (3.70)$$

Несмотря на то, что правая часть в (3.70) строго убывает с уменьшением ρ, ибо полином $P_n(w)$ при $n \geqslant 1$ не является постоянной, будем считать $\rho \in (1, \infty)$ любым и для оценки модуля суммы в (3.70) воспользуемся неравенством Коши. Тогда при $n = 2, 3, \ldots$ будем иметь

$$|c_n| \leqslant \rho^{n-1} \max_{|\zeta|=\rho} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |D_k(\zeta)|^2 \cdot \frac{1-r^{2n}}{1-r^2} \right)^{1/2}, \quad \rho = \frac{1}{r} > 1. \tag{3.71}$$

Но из соотношения (2.36) при $p=2$ и $\lambda=1$ и из (1.39) следует неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} |D_k(\zeta)|^2 \leqslant \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k |A_k(\zeta)|^2 \right\} \leqslant \frac{1}{1-r^2}, \quad |\zeta| = \frac{1}{r} > 1, \tag{3.72}$$

совместное рассмотрение которого с (3.71) приводит к оценке

$$|c_n| < \frac{\sqrt{1-r^{2n}}}{r^{n-1}(1-r^2)}, \quad 0 < r < 1.$$

Положив $r^{2n} = e^{-x}$, $0 < x < \infty$, получим

$$|c_n| < \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x} \cdot \frac{\frac{x}{n}}{e^{\frac{x}{2n}} - e^{-\frac{x}{2n}}} n.$$

Наконец, используя для $x \in (0, \infty)$ очевидное неравенство

$$\frac{x/n}{e^{\frac{x}{2n}} - e^{-\frac{x}{2n}}} < 1,$$

придем к оценке

$$|c_n| < \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x} n \quad (n = 2, 3, \ldots), \quad x \in (0, \infty).$$

Выбрав $x = 1{,}6$, докажем неравенство (3.66).

Опираясь на теорему 3.1, можно без труда найти оценку роста коэффициентов функции $\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}$, правда, точную в смысле порядка лишь при $\lambda > 1/4$.

Теорема 3.9. *Для функции $f(z) \in S$ при любом $\lambda > 0$ имеем*

$$\left|\left\{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}\right\}_n\right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \exp\{\lambda\delta\}\, d_n(2\lambda), & \lambda \geqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{4\sqrt{2}\,\lambda}{4\lambda-1} \exp\{\lambda\delta\}\, d_n(2\lambda), & \frac{1}{4} < \lambda < \frac{1}{2}, \\ \frac{\sqrt{e}}{2} \exp\left\{\frac{1}{4}\delta\right\} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n^{1/2}}, & \lambda = \frac{1}{4}, \\ 2\lambda \left[\frac{2e(1-2\lambda)}{1-4\lambda}\right]^{1/2} \exp\{\lambda\delta\} \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n}\right)^{1/2}, & 0 < \lambda < \frac{1}{4}, \end{cases} \tag{3.73}$$

где δ — константа из теоремы 3.1.

Пусть $f(z)$ — произвольная функция из класса S. При $h > 0$ обозначим

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^h = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k,$$

где коэффициенты A_k связаны с логарифмическими коэффициентами $f(z)$ соотношением

$$A_k = 2h\gamma_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Возьмем $\lambda = 2h$ и применим для оценки коэффициентов $D_n(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ теорему 2.6. Тогда по заключению этой теоремы получим (3.73) с заменой λ на h, ибо согласно теореме 3.1 имеем

$$\delta_n^+(\lambda) = \delta_n^+(2h;\, 2h\gamma_1, \ldots, 2h\gamma_n) = \delta_n^+(1;\, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \leqslant \delta.$$

Следствие. *Для коэффициентов нечетной функции $f_2(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+1}^{(2)} z^{2n+1} \in S$ имеет место оценка*

$$|c_n^{(2)}| < 1{,}17 \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

В самом деле, если $f_2(z) \in S$, то $f(z) = f_2^2(\sqrt{z}) \in S$. Тогда из тождества

$$\frac{f_2(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \left(\frac{f(z)}{z}\right)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}^{(2)} z^n$$

с помощью теоремы 3.9 при $\lambda = 1/2$ выводим

$$|c_{n+1}^{(2)}| \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}\delta\right\} d_n(1) < 1{,}17.$$

Оценка роста (3.73) без указания коэффициентов в ней получена Хейманом [3] для функций, p-листных в среднем по площади. При $\lambda \leqslant 1/4$ эта оценка улучшена Поммеренке [1]. В частности, из его результатов для $f(z) \in S$ при $\lambda < 1/4$ следует асимптотическое равенство

$$\left\{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda}\right\}_n = o(n^{-1/2}) \qquad (n \to \infty).$$

В связи с теоремой 3.9 заметим также, что для функций $f_p(z) = \sqrt[p]{f(z^p)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}^{(p)} z^{np+1} \in S$ $(p = 1, 2, \ldots)$ с p-кратной симметрией вращения имелась гипотеза Сегё

$$|c_n^{(p)}| = \left|\left\{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}_{n-1}\right| = O\left(n^{\frac{2}{p}-1}\right). \tag{3.74}$$

Эта гипотеза была подтверждена неравенствами $|c_n| < en$ (Литтлвуд [1]), $|c_n^{(2)}| \leqslant A$ (Литтлвуд и Пэли [1]) и $|c_n^{(3)}| \leqslant An^{-1/3}$, где A — абсолютная постоянная (В. И. Левин [1]). Однако, несмотря на эти успехи, Литтлвуд [2] построил пример функции $f_p(z) \in S$, для которой при достаточно больших p (3.74) не выполняется.

Поэтому небезынтересно подчеркнуть, что среднее арифметическое модулей первых n коэффициентов функции $f_p(z) \in S$ удовлетворяет (3.74), т. е. при любом $p = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |c_k^{(p)}| < An^{\frac{2}{p}-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.75}$$

Действительно, если $f_p(z) \in S$, то $f(z) = f_p^p(z^{1/p}) \in S$. Поэтому имеем тождество

$$\ln \frac{f_p(z^{1/p})}{z^{1/p}} = \frac{1}{p} \ln \frac{f(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{p} \gamma_k z^k,$$

или, после потенцирования,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}^{(p)} z^k = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{p} \gamma_k z^k\right\}.$$

Отсюда следует:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |c_{k+1}^{(p)}| \leqslant \exp\left\{\frac{2}{p} \sum_{k=1}^{n-1} |\gamma_k|\right\} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Но сумма в показателе легко оценивается с помощью неравенства Коши и теоремы 3.1, именно:

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\gamma_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n-1} k |\gamma_k|^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)^{1/2} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{\delta}{2} < \ln n + \frac{\delta + 2C}{2}$$

(C — постоянная Эйлера). Из последних двух неравенств вытекает (3.75) при $A = \exp\left\{\frac{\delta + 2C}{p}\right\}$.

Что касается нечетных однолистных функций, то здесь предполагалось неравенство $|c_n^{(2)}| \leqslant 1$, пока Фекете и Сегё [1] для $n = 3$, а Шеффер и Спенсер [1] для каждого $n > 2$ не доказали, что

$$\sup_{f_2(z) \in S} |c_n^{(2)}| = A_n > 1.$$

Отсюда и из неравенства (2.38) попутно вытекает соотношение

$$\sup_{f(z) \in S} \sum_{k=1}^{n} k |\gamma_k|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2 \ln A_{n+1},$$

дополняющее ранее установленное неравенство (3.2).

Г. М. Голузин [3] обратил внимание на меньший порядок относительного роста соседних коэффициентов функций из

класса S. Им было получено неравенство

$$||c_{n+1}|-|c_n||<An^{1/4}\ln n, \qquad n\geqslant 2,$$

где A — абсолютная постоянная. Эта оценка позднее была улучшена Бернацким [1]:

$$||c_{n+1}|-|c_n||<A(\ln n)^{3/2}, \qquad n\geqslant 2,$$

а затем Хейман [4] получил точный в смысле порядка результат

$$||c_{n+1}|-|c_n||<A \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{3.76}$$

который сравнительно просто выводится с указанием оценки для постоянной A с помощью неравенства (1.39).

Теорема 3.10*). *Для коэффициентов функции* $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S$ *при каждом* $n=1, 2, \ldots$ *справедливо неравенство* (3.76), *где* $A<9$.

По функции $f(\zeta)\in S$ построим, как обычно, функцию $F(z)\in\Sigma$:

$$F(z)=\frac{1}{f(1/z)}, \qquad z\in B^0.$$

Положим

$$\rho=\frac{1}{r}=1+\frac{1}{n} \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{3.77}$$

выберем какое-либо значение ζ на окружности $|z|=\rho$ из условия

$$|F(\zeta)|=\min_{|z|=\rho}|F(z)| \tag{3.78}$$

и образуем функцию $(1-\zeta/z)f'(1/z)$.

Формула Коши для тейлоровских коэффициентов этой функции дает

$$(n+1)c_{n+1}-nc_n\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)f'\left(\frac{1}{z}\right)z^n\frac{dz}{z}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\left(1-\frac{F(\zeta)}{F(z)}\right)^2\frac{zF'(z)}{F(z)-F(\zeta)}\cdot\frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}z^n\frac{dz}{z}. \tag{3.79}$$

---

*) См. И. М. Милин [5].

Под знаком интеграла в (3.79) функции $\frac{zF'(z)}{F(z)-F(\zeta)}$ и $\frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}$ можно заменить n-ми частичными суммами их разложений в ряд Тейлора около $z=\infty$. Из (1.2) найдем разложение первой функции, именно:

$$\frac{zF'(z)}{F(z)-F(\zeta)}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta^k+kA_k(\zeta))\,z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(\zeta^k+kA_k(\zeta))\,z^{-k},$$

а для разложения второй используем (3.69). Тогда (3.79) перепишется так:

$$(n+1)\,c_{n+1}-nc_n\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\left(1-\frac{F(\zeta)}{F(z)}\right)^2\sum_{k=0}^{n}(\zeta^k+kA_k(\zeta))\,z^{-k}\sum_{k=0}^{n}D_k(\zeta)\,z^{-k}\,z^n\,\frac{dz}{z}.$$

Отсюда с учетом (3.77) получаем исходное неравенство

$$\Big||c_{n+1}|-|c_n|\Big|\leqslant\frac{1}{n+1}\,\frac{\rho^n}{2\pi}\times$$

$$\times\int\limits_{|z|=\rho}\left|\left(1-\frac{F(\zeta)}{F(z)}\right)^2\sum_{k=0}^{n}(\zeta^k+kA_k(\zeta))z^{-k}\sum_{k=0}^{n}D_k(\zeta)\,z^{-k}\,\frac{dz}{z}\right|. \tag{3.80}$$

Но на окружности $|z|=\rho$ в силу (3.78) $\left|1-\frac{F(\zeta)}{F(z)}\right|\leqslant 2$, а поэтому из (3.80) с помощью неравенства Буняковского будем иметь

$$\Big||c_{n+1}|-|c_n|\Big|\leqslant\frac{4\rho^n}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}|\zeta^k+kA_k(\zeta)|^2r^{2k}\sum_{k=0}^{n}|D_k(\zeta)|^2r^{2k}\right)^{1/2}.$$

Далее, очевидно,

$$|\zeta^k+kA_k(\zeta)|^2\leqslant 2\rho^{2k}+2k^2\,|A_k(\zeta)|^2,$$

и, следовательно, можно последнее соотношение представить в виде

$$\Big||c_{n+1}|-|c_n|\Big|\leqslant\frac{4\sqrt{2}\rho^n}{n+1}\Bigg[(n+1)\sum_{k=0}^{n}|D_k(\zeta)|^2+$$
$$+r^2\sum_{k=1}^{n+1}k^2|A_k(\zeta)|^2\sum_{k=0}^{n}|D_k(\zeta)|^2\Bigg]^{1/2}. \qquad (3.81)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках (3.81) оценим с помощью неравенства (3.72), а для оценки второго воспользуемся тождеством (2.33) при $\lambda=1$, именно:

$$\sum_{k=0}^{n}|D_k(\zeta)|^2=\theta_n(1)(n+1)\exp\Bigg\{\sum_{k=1}^{n+1}k|A_k(\zeta)|^2-$$
$$-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}+1-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}k^2|A_k(\zeta)|^2\Bigg\}.$$

Отсюда найдем оценку второго слагаемого, если учтем лемму 2.2 и очевидное неравенство $x\exp(1-x)\leqslant 1$ для $x=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}k^2|A_k(\zeta)|^2$. В результате из (3.81) получим

$$\Big||c_{n+1}|-|c_n|\Big|\leqslant\frac{4\sqrt{2}\rho^n}{n+1}\times$$
$$\times\left[\frac{n+1}{1-r^2}+r^2(n+1)^2\exp\left\{\sum_{k=1}^{n+1}k|A_k(\zeta)|^2-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right\}\right]^{1/2}.$$

Согласно (1.39) $\sum_{k=1}^{\infty}k|A_k(\zeta)|^2\leqslant\ln\frac{1}{1-r^2}$, а $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}>$ $>\ln(n+1)+C$ (C — постоянная Эйлера), поэтому имеем

$$\Big||c_{n+1}|-|c_n|\Big|\leqslant\frac{4\sqrt{2}\rho^n}{n+1}(1+r^2e^{-C})^{1/2}\left(\frac{n+1}{1-r^2}\right)^{1/2}<$$
$$<4e(1+e^{-C})^{1/2}.$$

Это неравенство дает для постоянной A оценку $A<14$. Нужная оценка получается аналогичным образом, если

исходить из тождества

$$\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)f'\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{zF'(z)}{F(z)}\frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}-\frac{1}{z}f'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}F(\zeta),$$

и может быть улучшена дополнительными вычислениями. Теорема доказана.

Добавим к теореме 3.10, что лучшая оценка для постоянной A, $A<4{,}26$, получена Л. П. Ильиной [1].

В подклассе нечетных функций $f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}z^{2n+1}\in S$ также Г. М. Голузиным [5] впервые установлено неравенство

$$||c_{n+1}|-|c_n||\leqslant An^{-\frac{1}{4}}\ln n \qquad (n=2,\ 3,\ \ldots),$$

оценивающее близость модулей соседних коэффициентов в этом подклассе. Далее Лукас [1] доказал, что

$$||c_{n+1}|-|c_n||=O(n^{-\beta}), \qquad \beta=\sqrt{2}-1.$$

Ясно, что наибольшее из возможных $\beta\leqslant 1/2$, ибо у функции $f(z)=\frac{z}{(1-z^4)^{1/2}}$ имеем $||c_{n+1}|-|c_n||=O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$. С помощью неравенств (2.38) и (3.30) можно доказать, что для каждой нечетной функции $f_2(z)$, у которой

$$\lim_{r\to 1}(1-r^2)M(r,\ f_2)=\sqrt{\alpha}>0,$$

последнее соотношение выполняется с $\beta=1/2$, т. е. справедлива оценка

$$||c_{n+1}|-|c_n||<\alpha^{-\frac{1}{4}}n^{-\frac{1}{2}} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

§ 4. Локальная проблема коэффициентов

Поскольку длительное время не удается ни доказать, ни опровергнуть гипотезу Бибербаха во всем классе однолистных нормированных функций, то стали решать эту проблему в малой окрестности функции Кёбе $f_0(z)=z(1-z)^{-2}$. При этом для описания близости $f(z)=z+c_2z^2+\ldots\in S$ к $f_0(z)$ использовались различные метрики и в том числе $|c_2-2|$. Ведь если у последовательности функций $f_k(z)=$

$=z+c_2^{(k)}z^2+\ldots\in S$ при $k\to\infty$ $c_2^{(k)}\to 2$, то эта последовательность сходится к $f_0(z)$ равномерно внутри круга $|z|<1$ и потому $c_n^{(k)}\to n$ $(n=2, 3, \ldots)$. В самом деле, из внешней теоремы площадей (1.20) вытекает, что $f_0(z)$ — единственная функция в классе S, у которой $c_2=2$. В силу компактности семейства S отсюда следует, что внутри $|z|<1$ $f_k(z)\rightrightarrows f_0(z)$.

Более того, легко даже оценить сверху $|c_n-n|$ через $|c_2-2|$. С этой целью, обозначив разложения

$$f(z)=z+c_2z^2+\ldots\in S$$

$$[f(z^2)]^{1/2}=z+b_1z^3+b_2z^5+\ldots,\quad b_1=\frac{c_2}{2},$$

$$[f(z^2)]^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{z}+\beta_1z+\beta_2z^3+\ldots,\quad \beta_1=-b_1,$$

составим тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k\sum_{k=0}^{\infty}\beta_kz^k=1$$

и вытекающее из него равенство для коэффициентов

$$b_n\cdot 1+b_{n-1}\beta_1+\ldots+b_1\beta_{n-1}+1\cdot\beta_n=0.$$

Отсюда

$$|b_n-b_{n-1}b_1|\leqslant\max_{0\leqslant k\leqslant n-2}|b_k|\cdot\left(\sum_{k=2}^{n}(2k+1)|\beta_k|^2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2k+1}\right)^{1/2},$$

что с учетом известных результатов для нечетных однолистных функций (равномерной ограниченности их коэффициентов для класса S и внешней теоремы площадей для Σ) дает

$$|b_n-b_{n-1}b_1|\leqslant K_n'(1-|b_1|^2)^{1/2}$$

и потому

$$|b_n-b_1^n|\leqslant K_n''(1-|b_1|^2)^{1/2},$$

где $K_n'=A\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2k+1}\right)^{1/2}$, A — абсолютная постоянная и $K_n''=(n-1)K_n'$.

Остается использовать очевидное тождество для коэффициентов

$$c_n = nb_1^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - b_1^k)(b_{n-1-k} + b_1^{n-1-k})$$

и получим сходную с приведенной у Хуммеля [1] связь окрестностей

$$|c_n - n| \leqslant K_n (2 - |c_2|)^{1/2} + L_n |c_2 - 2|$$

(K_n и L_n зависят только от n).

Как уже отмечалось ранее, локальная проблема коэффициентов решена одновременно Бомбиери [1] и Гарабедяном и Шиффером [2]. Приведем решение этой проблемы, следуя Гарабедяну и Шифферу [2].

Теорема 3.11. *Если* $f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots \in S$ *достаточно близка к функции Кёбе* $f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$, *например, если*

$$|c_2 - 2| < \varepsilon_n$$

для достаточно малого $\varepsilon_n > 0$, *то*

$$\operatorname{Re} c_n \leqslant n \qquad (n \geqslant 2).$$

Знак равенства имеет место только для функции $f_0(z)$.

Прежде всего заметим, что в формулировке теоремы $\operatorname{Re} c_n$ можно заменить $|c_n|$, ибо из первого следует второе за счет малого поворота единичного круга. При этом изменится лишь утверждение о знаке равенства.

Доказательство теоремы проведем раздельно для четных и нечетных номеров. Пусть сначала $n = 2m$, $m \geqslant 1$. Рассмотрим производящую функцию

$$M(z, \zeta) = \ln \left[\frac{\sqrt{f(z^2)} - \sqrt{f(\zeta^2)}}{\sqrt{f(z^2)} + \sqrt{f(\zeta^2)}} \cdot \frac{z+\zeta}{z-\zeta} \right] =$$

$$= \sum_{k,\, l=1}^{\infty} a_{2k-1,2l-1} z^{2k-1} \zeta^{2l-1}$$

и по ее коэффициентам построим квадратичную форму

$$P=\sum_{k,\ l=1}^{m} a_{2k-1,\ 2l-1}\, x_{2k-1}\, x_{2l-1}.$$

Так как $a_{2k-1,\ 2l-1}$ — многочлены от коэффициентов функции $f(z)$, то и квадратичная форма является многочленом от коэффициентов $c_2, c_3, \ldots, c_{2m}$ и чисел $x_1, x_3, \ldots, x_{2m-1}$, т. е. $P=P(c, x)$, где для краткости записи использованы векторные обозначения

$$c=(c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_{2m}),$$
$$x=(x_1,\ x_3,\ \ldots,\ x_{2m-1}).$$

Пусть $c^0=(2, 3, \ldots, 2m)$, $c-c^0=\delta c=(\delta c_2, \delta c_3, \ldots, \delta c_{2m})$, $x_{2k-1}=\lambda_{2k-1}+\delta\lambda_{2k-1}$, причем $\lambda_{2k-1}=\operatorname{Re} x_{2k-1} (k=1, 2, \ldots m)$, $x^0=(\lambda_1,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_{2m-1})$, $x-x^0=\delta\lambda$.

Представим функцию $P(c, x)$ в окрестности точки (c^0, x^0) по формуле Тейлора

$$P(c,\ x)=P(c^0,\ x^0)+\sum_{k=2}^{2m}\frac{\partial P}{\partial c_k}\delta c_k+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial P}{\partial x_{2k-1}}\delta\lambda_{2k-1}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k,\ l=2}^{2m}\frac{\partial^2 P}{\partial c_k \partial c_l}\delta c_k \delta c_l+\frac{1}{2}\sum_{k,\ l=1}^{m}\frac{\partial^2 P}{\partial x_{2k-1}\partial x_{2l-1}}\delta\lambda_{2k-1}\delta\lambda_{2l-1}+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=2}^{2m}\frac{\partial^2 P}{\partial x_{2k-1}\partial c_l}\delta c_l\right)\delta\lambda_{2k-1}+o(|\delta c|^2+|\delta\lambda|^2),$$

причем все частные производные вычислены в точке (c^0, x^0).

Учитывая равенства

$$P(c^0,\ x^0)=\sum_{k=1}^{m}\frac{2}{2k-1}\lambda_{2k-1}^2,$$
$$\frac{\partial P(c^0,\ x^0)}{\partial x_{2k-1}}=\frac{4}{2k-1}\lambda_{2k-1},$$
$$\frac{\partial^2 P(c^0,\ x^0)}{\partial x_{2k-1}\partial x_{2l-1}}=\begin{cases}\dfrac{4}{2k-1}, & l=k\\ 0, & l\neq k,\end{cases}$$

получим

$$P(c, x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{2}{2k-1} \lambda_{2k-1}^2 + \sum_{k=2}^{2m} \frac{\partial P}{\partial c_k} \delta c_k +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k, l=2}^{2m} \frac{\partial^2 P}{\partial c_k \partial c_l} \delta c_k \delta c_l + 4 \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{2k-1}}{2k-1} \delta\lambda_{2k-1} +$$
$$+ 2 \sum_{k=1}^{m} \frac{(\delta\lambda_{2k-1})^2}{2k-1} + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=2}^{2m} \frac{\partial^2 P}{\partial x_{2k-1} \partial c_l} \delta c_l \right) \delta\lambda_{2k-1} +$$
$$+ o(|\delta c|^2 + |\delta\lambda|^2).$$

Поскольку производящая функция $M(z, \zeta)$ отличается от функции (1.5б), построенной для $F_2(z) = [f(z^{-2})]^{-\frac{1}{2}}$, лишь знаком, то с учетом (1.7) будем иметь

$$a_{2k-1,\, 2l-1} = -2\alpha_{2k-1,\, 2l-1}.$$

Но в таком случае неравенство Грунского (1.30) для величины P дает

$$\operatorname{Re} P(c, x) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{m} \frac{|x_{2k-1}|^2}{2k-1},$$

или

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=2}^{2m} \frac{\partial P}{\partial c_k} \delta c_k + \frac{1}{2} \sum_{k, l=2}^{2m} \frac{\partial^2 P}{\partial c_k \partial c_l} \delta c_k \delta c_l + 4 \sum_{k=1}^{m} \frac{(\delta\lambda_{2k-1})^2}{2k-1} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=2}^{2m} \frac{\partial^2 P}{\partial x_{2k-1} \partial c_l} \delta c_l \right) \delta\lambda_{2k-1} + o(|\delta c|^2 + |\delta\lambda|^2) \right\} \leqslant 0.$$

Здесь естественно чисто мнимые числа $\delta\lambda_{2k-1}$ выбрать оптимальным образом, именно:

$$\delta\lambda_{2k-1} = -\frac{(2k-1)\, i}{8} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{l=2}^{2m} \frac{\partial^2 P}{\partial x_{2k-1} \partial c_l} \delta c_l \right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Тогда придем к неравенству

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=2}^{2m}\frac{\partial P}{\partial c_k}\delta c_k+\frac{1}{2}\sum_{k,\,l=2}^{2m}\frac{\partial^2 P}{\partial c_k\partial c_l}\,\delta c_k\delta c_l-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{m}(2k-1)\left[\frac{1}{2}\sum_{l=2}^{2m}\frac{\partial^2 P}{\partial x_{2k-1}\partial c_l}\delta c_l\right]^2+o\left(|\delta c|^2\right)\right\}\leqslant 0. \quad (3.82)$$

Чтобы найти все члены этого неравенства, воспользуемся интегральным представлением квадратичной формы:

$$P(c,\,x)=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{|z|=r}\int\limits_{|\zeta|=r}M(z,\,\zeta)\,X(z)\,X(\zeta)\,\frac{dz}{z}\,\frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (3.83)$$

$$X(z)=\sum_{k=-(m-1)}^{m}x_{2k-1}z^{-(2k-1)},\qquad x_{-(2k-1)}=\bar{x}_{2k-1}.$$

Затем разложим функцию $M(z,\,\zeta)$ по степеням $\delta f(z)=f(z)-$ $-f_0(z)$ и $\delta f(\zeta)$

$$M(z,\,\zeta)=\ln\frac{1+z\zeta}{1-z\zeta}+$$

$$+\frac{(1-z^2)(1-\zeta^2)}{2(1+z\zeta)(z-\zeta)}\left[\frac{1-z^2}{z}\,\delta f(z^2)-\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\,\delta f(\zeta^2)\right]-$$

$$-\frac{(1-z^2)(1-\zeta^2)}{8(1+z\zeta)(z-\zeta)}\left[\frac{(1-z^2)^3}{z^3}\,[\delta f(z^2)]^2-\frac{(1-\zeta^2)^3}{\zeta^3}\,[\delta f(\zeta^2)]^2\right]-$$

$$-\frac{(1-z^2)^2(1-\zeta^2)^2}{8(1+z\zeta)^2(z-\zeta)^2}\left[\frac{1-z^2}{z}\,\delta f(z^2)-\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\,\delta f(\zeta^2)\right]^2-$$

$$-\frac{(1-z^2)(1-\zeta^2)}{2(1-z\zeta)(z+\zeta)}\left[\frac{1-z^2}{z}\,\delta f(z^2)+\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\,\delta f(\zeta^2)\right]+$$

$$+\frac{(1-z^2)(1-\zeta^2)}{8(1-z\zeta)(z+\zeta)}\left[\frac{(1-z^2)^3}{z^3}\,[\delta f(z^2)]^2+\frac{(1-\zeta^2)^3}{\zeta^3}\,[\delta f(\zeta^2)]^2\right]+$$

$$+\frac{(1-z^2)^2(1-\zeta^2)^2}{8(1-z\zeta)^2(z+\zeta)^2}\left[\frac{1-z^2}{z}\,\delta f(z^2)+\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\,\delta f(\zeta^2)\right]^2+\ldots$$

С помощью (3.82), (3.83) и этого разложения после соответствующего контурного интегрирования получим

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\delta f(z^2)\,\frac{\Lambda^2(z)(1-z^2)^3}{z^2(1+z^2)}\,\frac{dz}{z}+\frac{1}{4}\sum_{k=-(m-1)}^{m}(2k-1)\times\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\delta f(z^2)\,\frac{\Lambda(z)(1-z^2)^3}{z^2(1+z^2)}\,z^{2k-1}\frac{dz}{z}\right)^2+$$

$$\left.+\frac{1}{16\pi i}\int\limits_{|z|=r}[\delta f(z^2)]^2\,d\left[\left(\frac{\Lambda(z)}{z^2}\right)^2\frac{(1-z^2)^6}{(1+z^2)^2}\right]+o\left(|\delta c|^2\right)\right\}\leqslant 0,$$

где $\Lambda(z)=X(z)$ при $x_{2k-1}=\lambda_{2k-1}$ $(k=1, 2, \ldots, m)$. Отсюда, положив

$$\Lambda(z)=\frac{1+z^2}{z}T_{2l-1}(z)=\frac{1+z^2}{z}\,\frac{z^{-(2l-1)}-z^{2l-1}}{z^{-1}-z}\quad (l=1, 2, \ldots, m)$$

и учитывая равенство

$$\sum_{k=-(m-1)}^{m}(2k-1)z^{2k-1}\zeta^{2k-1}=$$
$$=-(z\zeta)^{-(2m-1)}\left[\frac{2m+1}{1-z^2\zeta^2}-\frac{2}{(1-z^2\zeta^2)^2}\right]+$$
$$+\frac{(2m-1)(z\zeta)^{2m+3}-(2m+1)(z\zeta)^{2m+1}}{(1-z^2\zeta^2)^2}$$

будем иметь

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\delta f(z^2)\frac{(1+z^2)(1-z^2)^3}{z^4}T_{2l-1}^2(z)\frac{dz}{z}+\right.$$
$$+\frac{1}{16\pi i}\int\limits_{|z|=r}[\delta f(z^2)]^2\,d\left[\frac{T_{2l-1}^2(z)(1-z^2)^6}{z^6}\right]-$$
$$-\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|z|=r}\int\limits_{|\zeta|=r}\delta f(z^2)\delta f(\zeta^2)\frac{(1-z^2)^3(1-\zeta^2)^3}{(z\zeta)^{2m+2}}T_{2l-1}(z)T_{2l-1}(\zeta)\times$$
$$\left.\times\left[\frac{2m+1}{1-z^2\zeta^2}-\frac{2}{(1-z^2\zeta^2)^2}\right]\frac{dz}{z}\,\frac{d\zeta}{\zeta}+o(|\delta c|^2)\right\}\leqslant 0.$$

Суммируя эти неравенства по l от 1 до m и используя тождества

$$\sum_{l=1}^{m}T_{2l-1}(z)T_{2l-1}(\zeta)=\frac{z\zeta}{(1-z^2)(1-\zeta^2)}\times$$
$$\times\left[\frac{(z\zeta)^{-(2m-1)}-(z\zeta)^{2m+1}}{1-z^2\zeta^2}-\frac{z^{2m+1}\zeta^{-(2m-1)}-z^{-(2m-1)}\zeta^{2m+1}}{z^2-\zeta^2}\right],$$
$$\sum_{l=1}^{m}T_{2l-1}^2(z)=\frac{z^4}{(1-z^2)^3(1+z^2)}\left[\frac{1}{z^{4m}}-\frac{2m}{z^2}+2mz^2-z^{4m}\right],$$

получим оценку

$$\operatorname{Re}\delta c_{2m} \leqslant \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{|z|=r}[\delta f(z^2)]^2\frac{(1-z^2)^2}{z^{4m+2}}\frac{dz}{z}+\right.$$
$$+\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|z|=r}\int\limits_{|\zeta|=r}\delta f(z^2)\,\delta f(\zeta^2)\frac{(1-z^2)^2(1-\zeta^2)^2}{(z\zeta)^{4m}}\times$$
$$\left.\times\left[\frac{2m+1}{(1-z^2\zeta^2)^2}-\frac{2}{(1-z^2\zeta^2)^3}\right]\frac{dz}{z}\frac{d\zeta}{\zeta}+o(|\delta c|^2)\right\}.$$

Если еще обозначить

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Re}(\delta c_k-\delta c_{k-1})&=a_k,\\ i\operatorname{Im}(\delta c_k-\delta c_{k-1})&=b_k,\end{aligned}\right\}\tag{3.84}$$

так что

$$(1-z^2)\,\delta f(z^2)=\sum_{k=2}^{\infty}(a_k+b_k)\,z^{2k},$$

то вычисление оставшихся контурных интегралов приведет оценку к виду

$$\operatorname{Re}\delta c_{2m}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{\nu+k=2m+1}a_\nu a_k+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{2m-2}(\nu+1)(2m-1-\nu)(a_{2m-\nu}-a_{2m-\nu-1})^2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\nu+k=2m+1}b_\nu b_k+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{2m-2}(\nu+1)(2m-1-\nu)(b_{2m-\nu}-b_{2m-\nu-1})^2+o(|\delta c|^2).\tag{3.85}$$

Хотя левая часть неравенства тождественно равна $\operatorname{Re}\delta c_{2m}$, посредством небольшого изменения выбираемых параметров λ_{2k-1} ее можно заменить величиной $\operatorname{Re}\delta c_{2m}$ плюс некоторая линейная комбинация от $\operatorname{Re}\delta c_2, \ldots, \operatorname{Re}\delta c_{2m-1}$ с коэффициентами нужного знака. А тогда за счет выбора ε_{2m} можно добиться такой малости величин $\delta c_2, \ldots, \delta c_{2m}$, чтобы действительные части δc_k порождали отрицательное слагаемое в правой части (3.85).

Поскольку квадратичная форма в (3.85) относительно чисто мнимых переменных $b_2, b_3, \ldots, b_{2m}$ положительно определенная, что вытекает при $m \geqslant 2$ из тождества

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu+k=2m+1} b_\nu b_k +$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{2m-2}(\nu+1)(2m-1-\nu)(b_{2m-\nu}-b_{2m-\nu-1})^2 =$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{m-2}\left[4b_{k+2}b_{2m-1-k}+(2m-1-2k)\sum_{\nu=k}^{2m-2-k}(b_{2m-\nu}-b_{2m-\nu-1})^2\right]+$$
$$+\frac{(b_{m+1}-b_m)^2}{4}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{m-2}\left[(2m-1-2k)(b_{k+2}-b_{k+1})^2+\right.$$
$$+(2m-1-2k)(b_{2m-k}-b_{2m-1-k})^2+\frac{8b_{2m-1-k}^2}{2m-1-k}+$$
$$\left.+(2m-1-2k)\sum_{\nu=k+1}^{2m-3-k}\left(b_{2m-\nu}-b_{2m-\nu-1}-\frac{2b_{2m-1-k}}{2m-1-2k}\right)^2\right]+$$
$$+\frac{(b_{m+1}-b_m)^2}{4},$$

то указанная вариация вектора $(\lambda_1, \lambda_3, \ldots, \lambda_{2m-1})$ не изменит ее положительной определенности. Поэтому, как только какая-нибудь из достаточно малых величин $\delta c_2, \ldots, \delta c_{2m}$ отлична от нуля, из (3.85) получаем

$$\operatorname{Re}\delta c_{2m} < 0,$$

чем и завершается доказательство в случае четных номеров.

Пусть теперь задано $n=2m+1$, $m \geqslant 1$. Положив в (3.16) $F(z)=[f(z^{-1})]^{-1}$ и $v=0$, рассмотрим производящую функцию

$$M(z, \zeta, u)=$$
$$=\ln\frac{\sqrt{1-uf(z)}-\sqrt{1-uf(\zeta)}}{[\sqrt{1-uf(z)}+\sqrt{1-uf(\zeta)}](z-\zeta)}=\sum_{k,\,l=0}^{\infty}a_{kl}z^k\zeta^l, \qquad (3.16a)$$

где $a_{00}=\ln\left(-\frac{u}{4}\right)$, а остальные a_{kl} — многочлены от коэффициентов $c_2, c_3, \ldots, c_{k+l+1}$ и параметра u.

Эта функция порождает квадратичную форму

$$P=\sum_{k,\,l=0}^{m} a_{kl}x_kx_l,$$

которая зависит от $2m$ начальных коэффициентов $f(z)$, величины u и чисел $x_0, x_1, \ldots, x_m$, т. е.

$$P=P(c, x, u),$$
$$c=(c_2, c_3, \ldots, c_{2m+1}),$$
$$x=(x_0, x_1, \ldots, x_m).$$

Для характеристики квадратичной формы важно отметить, что произведение $u\frac{\partial P}{\partial u}$ представляет собой полный квадрат многочлена степени m относительно u, коэффициенты которого суть целые рациональные функции от $c_2, c_3, \ldots, c_{2m+1}$ и $x_0, x_1, \ldots, x_m$. Такой результат получается сразу, если ввести в рассмотрение рациональную функцию

$$X(z)=\sum_{k=-m}^{m} x_kz^{-k} \qquad (x_{-k}=\bar{x}_k)$$

и с ее помощью величину P представить по интегральной формуле (3.83), ибо из (3.83) следует, что

$$\frac{\partial P}{\partial u}=\frac{1}{u}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{X(z)}{\sqrt{1-uf(z)}}\frac{dz}{z}\right]^2.$$

Имея в виду в дальнейшем доказательстве применить неравенство Гарабедяна—Шиффера (3.21), возьмем комплексные числа $x_k=\lambda_k+\delta\lambda_k$ и параметр u, удовлетворяющие условиям:

а) действительные части λ_k $(k=0, 1, \ldots, m)$ таковы, что все корни уравнения

$$\Lambda(z)=\sum_{k=-m}^{m}\lambda_kz^{-k}=0 \qquad (\lambda_{-k}=\lambda_k)$$

лежат на единичной окружности и просты за исключением корня $z=-1$ второй кратности;

б) чисто мнимые части $\delta\lambda_k$ $(k=1, 2, \ldots, m;\ \delta\lambda_0=0)$ достаточно малы;

в) параметр u обращает в нуль производную $\frac{\partial P}{\partial u}$ и среди ее нулей $u(c, x)$ выбирается по следующим мотивам.

По условию теоремы функция $f(z)$ достаточно близка к функции Кёбе $f_0(z)$, откуда вытекает достаточная близость векторов $c=(c_2, c_3, \ldots, c_{2m+1})$ и $c^0=(2, 3, \ldots, 2m+1)$. Но, для функции Кёбе при выбранном $\lambda=(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $u=-4$ является нулем производной $\frac{\partial P}{\partial u}$ и поэтому можно взять $u(c^0, \lambda)=-4$. В самом деле, формула для $\frac{\partial P}{\partial u}$ дает

$$\frac{\partial P}{\partial u}(c^0, \lambda, -4)=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{1-z}{1+z}\Lambda(z)\frac{dz}{z}\right]^2=$$
$$=-\frac{1}{4}[\Lambda(-1)]^2=0.$$

Поэтому при выборе $u(c, x)$ остановимся на том нуле $\frac{\partial P}{\partial u}$, который стремится к -4, когда $c\to c^0$ и $x\to\lambda$.

При выполнении условий а) и б) в случае $\lambda_m\neq 0$ все нули функции $X(z)$ также лежат на окружности $|z|=1$ в силу их непрерывной зависимости от коэффициентов x_k и свойства $X(z)=\overline{X}(\bar{z}^{-1})$.

Тогда, согласно замечанию к следствию из теоремы 3.3 для функции $f(z)$ неравенство (3.21) выполняется. Если же $\lambda_l\neq 0$, а $\lambda_{l+1}=\ldots=\lambda_m=0$, то можно лишь утверждать, что вследствие малости $\delta\lambda_k$ $(k=1, 2, \ldots, l)$ все нули функции $\sum\limits_{k=-l}^{l} x_k z^{-k}$ лежат на $|z|=1$. Но по тому же замечанию при малых $\delta\lambda_k$ $(k=l+1, \ldots, m)$ и указанном выборе u неравенство (3.21) остается верным.

Учитывая сказанное, применим неравенство (3.21):

$$\operatorname{Re} P(c, x, u)\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}|x_k|^2=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\lambda_k^2-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\delta\lambda_k^2. \quad (3.21а)$$

Как и ранее представим величину P в окрестности точки $c=c^0$, $x=\lambda$ по формуле Тейлора, используя векторные обозначения

$$c-c^0=\delta c=(\delta c_2, \delta c_3, \ldots, \delta c_{2m+1}),$$
$$x-\lambda=\delta\lambda=(0, \delta\lambda_1, \ldots, \delta\lambda_m).$$

Имеем:

$$P(c, x, u(c, x)) = P(c^0, \lambda, -4) + \sum_{k=2}^{2m+1} \frac{\partial P}{\partial c_k} \delta c_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial x_k} \delta\lambda_k +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k,l=2}^{2m+1} \frac{\partial^2 P}{\partial c_k \partial c_l} \delta c_k \delta c_l + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{m} \frac{\partial^2 P}{\partial x_k \partial x_l} \delta\lambda_k \delta\lambda_l +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=2}^{2m+1} \frac{\partial^2 P}{\partial x_k \partial c_l} \delta c_l \right) \delta\lambda_k + o(|\delta c|^2 + |\delta\lambda|^2),$$

где все частные производные вычислены при $c = c^0$, $x = \lambda$, $u = -4$ и учтено, что при этих значениях величина $\frac{\partial P}{\partial u}$ и все ее частные производные первого порядка равны нулю.

Принимая во внимание, что

$$P(c^0, \lambda, -4) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \lambda_k^2,$$
$$\frac{\partial P}{\partial x_k}(c^0, \lambda, -4) = \frac{2}{k} \lambda_k,$$
$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_k \partial x_l}(c^0, \lambda, -4) = \begin{cases} \frac{2}{k}, & l = k, \\ 0, & l \neq k, \end{cases}$$

получим

$$P(c, x, u) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \lambda_k^2 + \sum_{k=2}^{2m+1} \frac{\partial P}{\partial c_k} \delta c_k +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k,l=2}^{2m+1} \frac{\partial^2 P}{\partial c_k \partial c_l} \delta c_k \delta c_l + 2 \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \lambda_k \delta\lambda_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \delta\lambda_k^2 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=2}^{2m+1} \frac{\partial^2 P}{\partial x_k \partial x_l} \delta c_l \right) \delta\lambda_k + o(|\delta c|^2 + |\delta\lambda|^2).$$

Так как для неравенства (3.21а) требуется $\operatorname{Re} P$, то чисто мнимые слагаемые здесь можно опустить. Если, кроме того, выбрать оптимальным образом $\delta\lambda_k$, положив

$$\delta\lambda_k = -\frac{ki}{2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{l=2}^{2m+1} \frac{\partial^2 P}{\partial x_k \partial c_l} \delta c_l \right\}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

то из (3.21а) придем к неравенству

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=2}^{2m+1}\frac{\partial P}{\partial c_k}\delta c_k+\frac{1}{2}\sum_{k,l=2}^{2m+1}\frac{\partial^2 P}{\partial c_k\partial c_l}\delta c_k\delta c_l-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}k\left(\frac{1}{2}\sum_{l=2}^{2m+1}\frac{\partial^2 P}{\partial x_k\partial c_l}\delta c_l\right)^2+o(|\delta c|^2)\right\}\leqslant 0, \quad (3.82а)$$

в котором все функции вычислены при $c=c^0$, $x=\lambda$, $u=-4$.

Как и в случае четных номеров, разложим предварительно производящую функцию (3.16а) по степеням $\delta f(z)=f(z)-$ $-f_0(z)$ и $\delta f(\zeta)$, полагая сразу для упрощения вычислений $u=-4$. Так как

$$\sqrt{1-uf(z)}=\sqrt{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2+4\delta f(z)}=$$
$$=\frac{1+z}{1-z}+2\frac{1-z}{1+z}\delta f-2\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^3\delta f^2+\ldots,$$

то

$$M(z,\zeta,-4)=\ln\frac{1}{1-z\zeta}+$$
$$+\frac{(1-z)(1-\zeta)}{z-\zeta}\left[\frac{1-z}{1+z}\delta f(z)-\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\delta f(\zeta)\right]-$$
$$-\frac{(1-z)(1-\zeta)}{1-z\zeta}\left[\frac{1-z}{1+z}\delta f(z)+\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\delta f(\zeta)\right]-$$
$$-\frac{(1-z)^2(1-\zeta)^2}{2(z-\zeta)^2}\left[\frac{1-z}{1+z}\delta f(z)-\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\delta f(\zeta)\right]^2+$$
$$+\frac{(1-z)^2(1-\zeta)^2}{2(1-z\zeta)^2}\left[\frac{1-z}{1+z}\delta f(z)+\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\delta f(\zeta)\right]^2-$$
$$-\frac{(1-z)(1-\zeta)}{z-\zeta}\left[\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^3[\delta f(z)]^2-\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^3[\delta f(\zeta)]^2\right]+$$
$$+\frac{(1-z)(1-\zeta)}{1-z\zeta}\left[\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^3[\delta f(z)]^2+\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^3[\delta f(\zeta)]^2\right]+\ldots$$

Отсюда, из (3.83) и (3.82а) после соответствующего

контурного интегрирования будем иметь:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\delta f(z)\frac{(1-z)^3}{1+z}\frac{\Lambda(z)^2}{z}\frac{dz}{z}+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=-m}^{m}k\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\delta f(z)\frac{(1-z)^3}{1+z}\frac{\Lambda(z)}{z}z^k\frac{dz}{z}\right)^2+$$
$$\left.+\frac{1}{8\pi i}\int\limits_{|z|=r}[\delta f(z)]^2\,d\left[\frac{(1-z)^6}{(1+z)^2}\frac{\Lambda(z)^2}{z^2}\right]+o(|\delta c|^2)\right\}\leqslant 0.$$

В этом неравенстве положим

$$\Lambda(z)=\frac{(1+z)^2}{z}T_l(z)=\frac{(1+z)^2}{z}\frac{z^{-l}-z^l}{z^{-1}-z}\qquad(1\leqslant l\leqslant m),$$

что допустимо, ибо эта функция удовлетворяет условию а), и просуммируем по l от 1 до m.

В результате придем к оценке

$$\operatorname{Re}\delta c_{2m+1}\leqslant\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{|z|=r}[\delta f(z)]^2\frac{(1-z)^2}{z^{2m+2}}\frac{dz}{z}+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|z|=r}\int\limits_{|\zeta|=r}\delta f(z)\,\delta f(\zeta)\frac{(1-z)^2(1-\zeta)^2}{(z\zeta)^{2m+1}}\times$$
$$\left.\times\left[\frac{m+1}{(1-z\zeta)^2}-\frac{1}{(1-z\zeta)^3}\right]\frac{dz}{z}\frac{d\zeta}{\zeta}+o(|\delta c|^2)\right\},$$

или в терминах коэффициентов a_k и b_k (см. стр. 114)

$$\operatorname{Re}\delta c_{2m+1}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{\nu+k=2m+2}a_\nu a_k+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{2m-1}(\nu+1)(2m-\nu)(a_{2m-\nu+1}-a_{2m-\nu})^2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\nu+k=2m+2}b_\nu b_k+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{2m-1}(\nu+1)(2m-\nu)(b_{2m-\nu+1}-b_{2m-\nu})^2+o(|\delta c|^2).\quad(3.85а)$$

Дальнейший анализ (3.85а) аналогичен анализу (3.85) и при достаточно малом $|\delta c|$ приводит к неравенству

$$\operatorname{Re} \delta c_{2m+1} \leqslant 0$$

со знаком равенства только для $f_0(z)$. Теорема доказана.

§ 5. Рост коэффициентов ограниченных функций

В классе S_M ограниченных однолистных функций $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ Сивирскому [1] удалось найти точные границы всех коэффициентов при небольших M. Они имеют вид

$$|c_n| \leqslant \frac{2}{n-1}\left(1 - \frac{1}{M^{n-1}}\right), \qquad n \geqslant 2,$$

при $1 < M \leqslant M_n$.

Поскольку в общем случае эта задача трудна, то возникает вопрос о порядке роста этих коэффициентов при $n \to \infty$. Здесь очевидным является результат

$$|c_n| = o(n^{-1/2}) \qquad (n \to \infty),$$

ибо площадь образа $|z| < 1$ при отображении функцией $f(z)$ не превосходит πM^2, а выражается через коэффициенты по формуле $\sigma(f) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2$.

Для однолистных функций $F(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{-n}$ из класса Σ вопрос о порядке роста коэффициентов рассматривается по той же причине. Вследствие внешней теоремы площадей (1.20) также тривиальным является равенство

$$|\alpha_n| = o(n^{-1/2}) \qquad (n \to \infty),$$

оправдывающее в какой-то мере рассмотрение класса Σ вместе с S_M.

Более сильные результаты в этом направлении, излагаемые ниже в лемме 3.3 и ее следствиях, принадлежат Клуни и Поммеренке [1].

Лемма 3.3. *Если функция* $F(z) \in \Sigma$, *то при любом* $r = \frac{1}{\rho} \in (0, 1)$ *имеем*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F'(\rho e^{i\varphi})| \, d\varphi < \frac{A}{(1-r)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{300}}}, \tag{3.86}$$

где A — *абсолютная постоянная.*

Возьмем произвольное число $t > 0$ и с помощью неравенств сначала Гёльдера, а затем Буняковского оценим интеграл в левой части (3.86), т. е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F'(\rho e^{i\varphi})| \, d\varphi \leqslant \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F'(\rho e^{i\varphi})|^{1+t} \, d\varphi \right)^{\frac{1}{1+t}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F'(\rho e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi \right)^{\frac{1}{2(1+t)}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F'(\rho e^{i\varphi})|^{2t} \, d\varphi \right)^{\frac{1}{2(1+t)}}. \tag{3.87}$$

Оценка первого интеграла в правой части (3.87) получается легко за счет внешней теоремы площадей (1.20). В самом деле, если ввести разложение $F(z) = z + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{-k}$, то будем иметь

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F'(\rho e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\alpha_k|^2 r^{2k+2} < \frac{A_1}{1-r}, \tag{3.88}$$

где использовано еще неравенство $kr^k < \frac{1}{e(1-r)}$. Труднее найти мажоранту для второго интеграла в (3.87). С этой целью прежде всего рассмотрим функцию $[F'(z)]^t$, регулярную в $|z| > 1$, ибо $F'(z) \neq 0$ в области B^0. Пусть

$$[F'(z)]^t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} \qquad (a_0 = 1), \ z \in B^0.$$

Тогда для второго интеграла имеем представление

$$\psi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F'(\rho e^{i\varphi})|^{2t} \, d\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}.$$

Из очевидного тождества

$$\psi''(r)+\frac{1}{r}\psi'(r)=4\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_k|^2r^{2k-2}$$

получим неравенство

$$\psi''(r)\leqslant 4\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_k|^2r^{2k-2},\qquad 0<r<1. \tag{3.89}$$

Правую часть (3.89) оценим следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_k|^2r^{2k+2}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=\rho}\left|\frac{d}{dz}[F'(z)]^t\right|^2d\varphi=$$
$$=\frac{t^2}{2\pi}\int\limits_{|z|=\rho}\left|\frac{F''(z)}{F'(z)}\right|^2|F'(z)|^{2t}\,d\varphi\leqslant\left(\max_{|z|=\rho}\left|\frac{F''(z)}{F'(z)}\right|\right)^2t^2\psi(r).$$

Но Г. М. Голузиным [7] (см. стр. 139) найдена область значений величины $\left|\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right|$ в классе Σ. Она содержится в круге

$$\left|\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right|\leqslant\frac{8|z|^2-2}{|z|^2-1}<\frac{3r}{1-r}+8,\quad |z|=\rho=\frac{1}{r}>1.$$

Учитывая это, из последних двух неравенств получим

$$\psi''(r)<4t^2\left(\frac{3}{1-r}+\frac{8}{r}\right)^2\psi(r). \tag{3.90}$$

Теперь возьмем произвольное $r_0\in(0,1)$ и будем считать $0<t<1/2$. Заметив, что благодаря неравенствам Гельдера и Буняковского

$$\psi(r)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=\rho}|F'(z)|\,d\varphi\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=\rho}|F'(z)|^2\,d\varphi\right)^{1/2}<$$
$$<\frac{\sqrt{A_1}}{(1-r)^{1/2}},$$

проинтегрируем (3.90) в промежутке $[r_0, r]$. В итоге придем к неравенству

$$\psi'(r)<36t^2\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\psi(x)\,dx}{(1-x)^2}+\frac{A_2}{(1-r)^{1/2}}\leqslant\frac{A_2}{(1-r)^{1/2}}+\frac{36t^2\psi(r)}{1-r},$$

из которого с учетом $\psi(r) \geqslant \psi(0) = 1$ следует:

$$\frac{\psi'(r)}{\psi(r)} < \frac{A_2}{(1-r)^{1/2}} + \frac{36t^2}{1-r}. \tag{3.91}$$

Наконец, интегрирование (3.91) от r_0 до r дает

$$\psi(r) < \frac{A_3}{(1-r)^{36t^2}}.$$

Отсюда и из (3.88) и (3.87) будем иметь

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F'(\rho e^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant \frac{A_4}{(1-r)^{\frac{1+36t^2}{2(1+t)}}},$$

а положив $t = 1/72$, докажем и (3.86).

Следствие 1. *Для коэффициентов функции* $F(z) = z + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{-k} \in \Sigma$ *имеем*

$$|\alpha_n| = O\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{300}}\right) \quad (n \to \infty). \tag{3.92}$$

Из интегрального представления коэффициентов разложения в ряд Тейлора около $z = \infty$ функции $F'(z)$ найдем

$$n|\alpha_n| \leqslant \rho^{n+1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F'(\rho e^{i\varphi})|\, d\varphi \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad \rho > 1,$$

что вместе с (3.86) дает при любом $r \in (0, 1)$

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{An^{-1}}{r^{n+1}(1-r)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{300}}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Положив $1 - r = 1/n$, получим (3.92).

Следствие 2. *Для коэффициентов функции* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in S_M$ *имеем*

$$|c_n| = O\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{300}}\right). \tag{3.93}$$

Снова из интегрального представления коэффициентов функции $f'(z)$ получим

$$n|c_n| \leqslant \frac{1}{r^{n-1}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})|\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} \left| \frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} \right| |f^2(z)|\, d\varphi \quad (n=2,\ 3,\ \ldots),\quad 0<r<1.$$

Теперь по функции $f(z) \in S_M$ построим функцию

$$F(\zeta) = [f(z)]^{-1} \in \Sigma, \qquad \zeta = z^{-1},$$

для которой

$$F'(\zeta) = \frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)}, \qquad \zeta = \frac{1}{z} \in B^0,$$

и тогда из последнего неравенства с помощью леммы 3.3 и оценки $|f(z)| < M$ для $z \in K^0$ выведем (3.93).

В противоположном направлении впервые Литтлвуд [2] дал пример ограниченной однолистной функции, чьи коэффициенты при некотором $\beta > 0$ не удовлетворяют асимптотическому равенству

$$|c_n| = O(n^{\beta-1}).$$

Затем Клуни [1] построил пример однолистной функции из класса Σ, у которой

$$|\alpha_n| > n^{\gamma-1} \qquad (\gamma = 0{,}02)$$

для бесконечно многих номеров n. Недавно Поммеренке [3] улучшил эти результаты и для ограниченных однолистных функций, и для класса Σ. Приведем их, заимствуя доказательство у автора.

Теорема 3.12. *Для каждого $m = 1, 2, \ldots$ существует функция $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{m\nu+1} z^{m\nu+1}$ с неотрицательными коэффициентами, регулярная и однолистная в $|z| < 1$ и с $|f(z)| < 1$, причем*

$$|a_n| > n^{0{,}17-1} \tag{3.94}$$

для бесконечно многих $n = m\nu + 1$.

Для доказательства введем в рассмотрение регулярную в $|z|<1$ функцию $h(z)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} &\text{а) } \operatorname{Re} h(z)>0, \ |z|<1; \\ &\text{б) } h(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \gg 0; \\ &\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n}=\lambda<\infty. \end{aligned} \tag{3.95}$$

(Запись $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n \gg \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n$ означает, что $x_n \geqslant y_n$ для всех $n=0,1, \ldots$).

Тогда при любом $k=0, 1, \ldots$ и целом $q \geqslant 3$ функция

$$\varphi_k(z)=z e^{-\frac{\lambda}{mq^k}} \exp\left\{\frac{1}{mq^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} z^{mnq^k}\right\}, \tag{3.96}$$

очевидно, регулярна в единичном круге и обладает свойствами:

1) $\varphi_k(z)$ однолистна и звездообразна в $|z|<1$, что следует из (3.95а), (3.96) и тождества

$$\frac{z\varphi_k'(z)}{\varphi_k(z)}=h(z^{mq^k});$$

$$\begin{aligned} &2) \ |\varphi_k(z)|<1 \quad \text{в} \quad |z|<1; \\ &3) \ \varphi_k(z) \gg e^{-\frac{\lambda}{mq^k}}\left(z+\frac{c_1}{mq^k} z^{mq^k+1}\right). \end{aligned} \tag{3.97}$$

С помощью $\varphi_k(z)$ образуем последовательность функций $\{f_k(z)\}$, положив

$$\begin{aligned} &f_0(z)=z, \\ &f_{k+1}(z)=f_k(\varphi_k(z)) \qquad (k=0, 1, \ldots). \end{aligned} \tag{3.98}$$

Учитывая свойства $\varphi_k(z)$, по индукции заключаем, что функции $f_k(z)$ регулярны и однолистны в $|z|<1$ и имеют неотрицательные тейлоровские коэффициенты. Более того, используя следствия из (3.97)

$$\varphi_k(z) \gg e^{-\frac{\lambda}{mq^k}} z, \quad \varphi_k'(z) \gg e^{-\frac{\lambda}{mq^k}}(1+c_1 z^{mq^k})$$

и тождество

$$f'_{k+1}(z) = \varphi'_k(z) f'_k(\varphi_k(z)),$$

получим

$$f'_{k+1}(z) \gg e^{-\frac{\lambda}{mq^k}} (1 + c_1 z^{mq^k}) f'_k\left(e^{-\frac{\lambda}{mq^k}} z\right),$$

откуда с учетом $f'_0(z) \equiv 1$ найдем оценку снизу для коэффициентов $f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} z^n$:

$$f'_k(z) \gg \exp\left\{-\frac{\lambda q}{m(q-1)}(1-q^{-k})\right\} \times$$
$$\times \prod_{l=0}^{k-1}\left(1 + c_1 z^{mq^l} \exp\left\{-\frac{\lambda}{q-1}(1-q^{l-k+1})\right\}\right). \quad (3.99)$$

В частности, (3.99) дает

$$a_{k1} = f'_k(0) \gg \exp\left\{-\frac{\lambda q}{m(q-1)}\right\} \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

что вместе с подчиненностью $f_{k+1}(z)$ функции $f_k(z)$, вытекающей из (3.98), обеспечивает существование предела

$$f(z) = \lim_{k \to \infty} f_k(z). \quad (3.100)$$

По известному признаку сходимости однолистных функций (см., например, Г. М. Голузин [7], стр. 56) функция $f(z)$ регулярна и однолистна в $|z| < 1$. Кроме того, $|f(z)| < 1$ в $|z| < 1$ и разложение $f(z)$ в ряд Тейлора около $z = 0$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m\nu+1} z^{m\nu+1} \gg 0,$$

ибо с таким же свойством сконструированы функции $\varphi_k(z)$ и $f_k(z)$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

Покажем теперь, что при специальном выборе числа q и функции $h(z)$, удовлетворяющей (3.95), соответствующая предельная функция $f(z)$ будет требуемой.

С этой целью при помощи (3.98) и (3.97) прежде всего выведем соотношение

$$f_{k+1}(z) = f_k(\varphi_k(z)) \gg a_{kn} [\varphi_k(z)]^n \gg$$
$$\gg a_{kn} e^{-\frac{\lambda n}{mq^k}} \left(z^n + \frac{nc_1}{mq^k} z^{mq^k+n}\right). \quad (3.101)$$

Далее, положив

$$n_k = m(1+q+\ldots+q^{k-1})+1 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots), \qquad n_0=1,$$

и заметив связь

$$n_{k+1} = n_k + mq^k,$$

из (3.101) при $n=n_k$ получим

$$n_{k+1}a_{k+1,\,n_k+1} \geqslant \exp\left\{-\frac{\lambda}{q-1}-\frac{\lambda}{mq^k}\right\}\frac{qc_1}{q-1}(1-q^{-k-1})n_k a_{k,n_k}.$$

Отсюда по индукции придем к неравенству

$$n_\mu a_{\mu,\,n_\mu} \geqslant A_1\left(\frac{qc_1}{q-1}\exp\left\{-\frac{\lambda}{q-1}\right\}\right)^\mu \quad (\mu=1,\ 2,\ \ldots), \tag{3.102}$$

где $A_1>0$ и зависит лишь от m, q и λ.

Полагая в (3.101) $n=n_\mu$ и сравнивая коэффициенты при z^{n_μ}, будем иметь

$$a_{k+1,\,n_\mu} \geqslant e^{-\frac{\lambda n_\mu}{mq^k}} a_{k,\,n_\mu},$$

а используя (3.102) и это неравенство многократно при $k \geqslant \mu$, достигнем усиления (3.102):

$$n_\mu a_{k,\,n_\mu} \geqslant A_2\left(\frac{qc_1}{q-1}\exp\left\{-\frac{\lambda}{q-1}\right\}\right)^\mu \quad (k \geqslant \mu), \tag{3.103}$$

где $A_2 = A_2(m,\ q,\ \lambda)$.

Наконец, переходя к пределу в (3.103) при $k\to\infty$, получим

$$n_\mu a_{n_\mu} \geqslant A_2\left(\frac{qc_1}{q-1}\exp\left\{-\frac{\lambda}{q-1}\right\}\right)^\mu,$$

или

$$a_{n_\mu} \geqslant A_3 n_\mu^{\alpha-1}, \tag{3.104}$$

где $A_3 = A_3(m,\ q,\ \lambda)$ и

$$\alpha = \frac{\ln\left[\frac{c_1 q}{q-1}\exp\left\{-\frac{\lambda}{q-1}\right\}\right]}{\ln q}.$$

Чтобы завершить доказательство теоремы, выберем функцию $h(z)$ следующим образом:

$$h(z)=1+\frac{4}{\tau^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\tau}{n^2}z^n,$$

где параметр $\tau\in(0,\ \pi)$. Эта функция непрерывна в $|z|\leqslant 1$ и

$$\operatorname{Re} h(e^{i\theta})=1+\frac{4}{\tau^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\tau}{n^2}\cos n\theta=\begin{cases}2\pi\tau^{-2}(\tau-|\theta|), & |\theta|\leqslant\tau,\\ 0, & \tau\leqslant|\theta|\leqslant\pi.\end{cases}$$

Следовательно, все условия (3.95) выполнены. Для функции $h(z)$ имеем

$$c_1=\frac{4}{\tau^2}(1-\cos\tau),\qquad \lambda=\frac{4}{\tau^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\tau}{n^3}.$$

Выбрав $\tau=\pi/3$, $q=13$, после несложных вычислений получим $c_1=18/\pi^2$, $\lambda<2{,}93$ и потому $\alpha>0{,}17$. Отсюда и из (3.104) следует (3.94). Теорема доказана.

Следствие. *Для каждого $m=1,\ 2,\ \ldots$ существует функция $F(z)=z+\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_{m\nu-1}z^{-m\nu+1}\in\Sigma$, у которой*

$$|\alpha_n|>n^{0,17-1} \tag{3.105}$$

для бесконечно многих $n=m\nu-1$.

Пусть сначала $m\geqslant 2$. Согласно теореме 3.12 существует однолистная в единичном круге функция $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{2m\nu+1}z^{2m\nu+1}$, $|f(z)|<1$ в $|z|<1$, с неотрицательными коэффициентами a_n, удовлетворяющими (3.94) для бесконечно многих $n=2m\nu+1$.

Поскольку функция

$$R(w)=w^{-1}+\frac{1}{m-1}w^{m-1}$$

однолистна в круге $|w|<1$, что видно из тождества

$$R(w)-R(w_1)=(w-w_1)\left[\frac{1}{m-1}\sum_{k=0}^{m-2}w_1^k w^{m-2-k}-\frac{1}{w_1 w}\right],$$

то сложная функция

$$F(z)=a_1R\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)=a_1\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{-1}+\frac{a_1}{m-1}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{m-1}$$

мероморфна и однолистна во внешности единичного круга. Ее разложение в ряд Лорана около $z=\infty$ имеет вид

$$F(z)=z\left(1+a_1^{-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{2\nu m+1}z^{-2\nu m}\right)^{-1}+$$
$$+\frac{a_1}{m-1}z^{-m+1}\left(a_1+\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{2\nu m+1}z^{-2\nu m}\right)^{m-1}=$$
$$=z+\sum_{\nu=1}^{\infty}b_{2\nu m-1}z^{-2\nu m+1}+\sum_{\nu=0}^{\infty}b_{(2\nu+1)m-1}z^{-(2\nu+1)m+1}.$$

Таким образом, $F(z)\in\Sigma$ и имеет требуемую форму лорановского разложения. Учитывая для рядов с неотрицательными коэффициентами очевидную оценку

$$\left(a_1+\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{2\nu m+1}z^{-2\nu m}\right)^{m-1}\geqslant a_1^{m-1}+(m-1)a_1^{m-2}\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{2\nu m+1}z^{-2\nu m},$$

будем иметь

$$b_{(2\nu+1)m-1}\geqslant a_1^{m-1}a_{2\nu m+1}\qquad(\nu=1,\ 2,\ \ldots),$$

что и дает (3.105).

Если же следствие верно для какого-нибудь $m\geqslant 2$, то оно верно и для случая $m=1$.

В заключение параграфа приведем один результат для ограниченных функций из класса Бибербаха—Эйленберга, принадлежащий Н. А. Лебедеву [2].

Теорема 3.13. *Пусть функция $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$ регулярна и однолистна в области K^0 и для любых $z_1, z_2\in K^0$ удовлетворяет условию*

$$f(z_1)\cdot f(z_2)\neq 1.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\leqslant 1. \tag{3.106}$$

Знак равенства имеет место только для функций

$$f(z)=\frac{\eta z}{R\pm\sqrt{R^2-1}\,i\eta z},\ R\geqslant 1,\ |\eta|=1.$$

Построив функцию $F(\zeta)=[f(z)]^{-1}$, $\zeta=z^{-1}\in B^0$, убеждаемся в выполнении условия (3.7) теоремы 3.2. Тогда по заключению теоремы 3.2 имеем

$$\sigma\left(\ln\frac{f(z)}{z}\right)\leqslant\pi\ln|c_1|^{-2},$$

ибо $\gamma=c_1^{-1}$ и $\sigma\left(\ln\frac{F(\zeta)}{\zeta}\right)=\sigma\left(\ln\frac{f(z)}{z}\right)$.

Если обозначить разложение

$$\ln\frac{f(z)}{c_1z}=\sum_{k=1}^{\infty}A_kz^k,$$

то

$$\sigma\left(\ln\frac{f(z)}{z}\right)=\sigma\left(\ln\frac{f(z)}{c_1z}\right)=\pi\sum_{k=1}^{\infty}k|A_k|^2,$$

а поэтому исходное неравенство перепишется в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty}k|A_k|^2\leqslant\ln|c_1|^{-2}.$$

Теперь по теореме 2.3 при $p=2$ будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|c_n|^2}{d_{n-1}(\lambda)}\leqslant|c_1|^2\exp\left\{\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}k|A_k|^2\right\}\leqslant|c_1|^{2-\frac{2}{\lambda}},\quad\lambda>0,\tag{3.107}$$

откуда при $\lambda=1$ и следует (3.106). Чтобы иметь знак равенства в (3.106), надо его иметь везде в (3.107) при $\lambda=1$, а это имеет место только для функций $f(z)=\dfrac{\eta z}{R\pm\sqrt{R^2-1}\,i\eta z}$.

Теорема доказана. Это доказательство принадлежит А. З. Гринштану.

ЧАСТЬ II

ОДНОЛИСТНЫЕ ФУНКЦИИ В КОНЕЧНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

ГЛАВА 4

ЛОРАНОВСКАЯ СИСТЕМА ФУНКЦИЙ

§ 1. Существование и единственность лорановской системы

1°. Система пар функций $\{\zeta_n(z), \eta_n(z)\}$

Для любой конечносвязной области B^*, содержащей бесконечно удаленную точку (граница которой не содержит вырожденных континуумов), Кёбе [1] доказал существование и единственность функции $j_\theta(z) \in \Sigma(B^*)$, $\alpha_0 = 0$, отображающей область B^* на плоскость с прямолинейными разрезами наклона θ $(0 \leqslant \theta < \pi)$ к вещественной оси.

Грунский [1] обобщил этот результат, доказав, что для каждого полинома $P(z)$ степени n $(n = 1, 2, \ldots)$ существует и единственна функция вида $P(z) + f(z)$, где $f(z)$ регулярна в B^*, $f(\infty) = 0$, которая граничные континуумы $\Gamma^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ преобразует в отрезки параллельных прямых заданного наклона к вещественной оси. Из этой теоремы им же было получено важное следствие:

для данной области B^* существует и единственна система пар функций $\{\zeta_n(z), \eta_n(z)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) функции $\zeta_n(z)$ и $\eta_n(z)$ регулярны в области B^*, за исключением полюса в точке $z = \infty$ для $\eta_n(z)$;

б) в окрестности $z = \infty$ имеют место разложения

$$\left.\begin{aligned} \zeta_n(z) &= c_{n1}z^{-1} + c_{n2}z^{-2} + \ldots, \\ \eta_n(z) &= z^n + b_{n1}z^{-1} + b_{n2}z^{-2} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

в) на граничных континуумах $\Gamma^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ выполняются равенства

$$\eta_n(z) = \overline{\zeta_n(z)} + k'_{n\nu} \tag{4.2}$$

где $k'_{n\nu}$ — постоянная, своя для каждого граничного континуума и зависящая от номера n.

Сформулируем применительно к области B, определенной во введении, некоторые свойства системы пар $\{\zeta_n(z), \eta_n(z)\}$, установленные Грунским [1] и Шиффером [3].

Свойство 1. *Функции $\zeta_n(z)$ и $\eta_n(z)$ регулярны на границе Γ области B, и для них имеют место соотношения при $k, n = 1, 2, \ldots$*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \overline{\zeta_k(z)}\, d\zeta_n(z) = n\bar{c}_{kn}, \\ &\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \overline{\zeta_k(z)}\, d\eta_n(z) = 0, \\ &\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \overline{\eta_k(z)}\, d\eta_n(z) = -nc_{kn}, \\ &\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \overline{\eta_k(z)}\, d\zeta_n(z) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Свойство 2. *Любая конечная подсистема функций из $\{\zeta_n(z)\}$ линейно независима в области B.*

Свойство 3. *Матрица $\|kc_{nk}\|$ — эрмитовская матрица, а соответствующая ей форма Эрмита положительно определенная.*

Свойство 4. *Матрица $\|kb_{nk}\|$ — симметрическая.*

Свойство 5. *Функции $P(z, \bar{\zeta})$ и $R(z, \zeta)$ являются производящими для систем $\left\{\frac{1}{n}\overline{\zeta_n(\zeta)}\right\}$ и $\left\{\frac{1}{n}(\eta_n(\zeta) - \zeta^n)\right\}$, т. е. в окрестности $z = \infty$ при любом $\zeta \in B$ имеют место разложения*

$$\left.\begin{aligned} P(z, \bar{\zeta}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\overline{\zeta_n(\zeta)}\, z^{-n}, \\ R(z, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[\eta_n(\zeta) - \zeta^n]\, z^{-n}. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

2°. Построение и единственность тейлоровской системы

Теорема 4.1. *Если для данной области B существует тейлоровская система функций, то она единственна.*

Предположив противное, будем иметь по крайней мере две различные тейлоровские системы для области B: $\{\varphi_n(z)\}$ и $\{f_n(z)\}$. Поскольку системы производных $\{\varphi_n'(z)\}$ и $\{f_n'(z)\}$ являются полными ортонормированными системами в $l^2(B)$, то в силу единственности ядерной функции для области B в классе $l^2(B)$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(z)\overline{\varphi_n'(\zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)\overline{f_n'(\zeta)} \quad z,\ \zeta \in B,$$

где оба ряда сходятся равномерно по z и ζ внутри области B.

Дважды интегрируя это равенство, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\overline{f_n(\zeta)}, \tag{4.5}$$

где оба ряда также сходятся равномерно внутри B по z и ζ.

Пусть разложения функций $\varphi_n(z)$ и $f_n(z)$ в ряд Тейлора в окрестности $z=\infty$ обозначены так:

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_{nk} z^{-k},$$

$$f_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_{nk}' z^{-k}.$$

Сравнивая коэффициенты при z^{-1} в тейлоровских разложениях около $z=\infty$ обеих частей равенства (4.5), получим

$$a_{11}\overline{\varphi_1(\zeta)} = a_{11}'\overline{f_1(\zeta)}.$$

Так как последнее равенство имеет место при каждом $\zeta \in B$, числа a_{11} и a_{11}' положительны, а функции $\varphi_1'(z)$ и $f_1'(z)$ имеют одинаковую норму, то $\varphi_1(z) \equiv f_1(z)$, $z \in B$. Теперь в равенстве (4.5) суммирование можно производить от $n=2$ до $n=\infty$. Тогда по индукции будем иметь $\varphi_n(z) \equiv f_n(z)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, $z \in B$, что и доказывает теорему.

Для построения тейлоровской системы функций нужна вспомогательная теорема.

Лемма 4.1. *Если функция $f(z) \in \sigma(B)$ и в окрестности бесконечно удаленной точки имеет разложение*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{-n},$$

то

$$\frac{1}{\pi} \iint_B f'(z) \overline{\zeta_n'(z)} \, d\sigma = n d_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.6}$$

Прежде всего заметим, что интеграл в (4.6) сходится, ибо $f'(z) \in l^2(B)$ по определению класса $\sigma(B)$, а $\zeta_n'(z) \in l^2(B)$ в силу регулярности функций $\zeta_n(z)$ в замкнутой области $\overline{B}$ (свойство 1 системы пар $\{\zeta_n(z), \eta_n(z)\}$).

Затем предположим, что функция $f(z)$ непрерывна на границе Γ области B. Тогда, используя равенства (11) (стр. 8) и (4.2), непрерывность $f(z)$ на границе Γ и теорему о вычетах, будем иметь

$$\frac{1}{\pi} \iint_B f'(z) \overline{\zeta_n'(z)} \, d\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) \, d\overline{\zeta_n(z)} =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) \, d\eta_n(z) = n d_n.$$

Тот же результат получается и для всякой функции $f(z) \in \sigma(B)$, так как ее производную $f'(z) \in l^2(B)$ можно аппроксимировать в среднем по области B функциями из класса $l^2(B)$, непрерывными на границе области (Фаррелл [1]). В самом деле, пусть последовательность функций $f_k'(z) \in l^2(B)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и непрерывных на Γ сходится к $f'(z)$ в среднем по области B. Тогда эта последовательность регулярных функций сходится к $f'(z)$ и равномерно внутри B. Поэтому при фиксированном n $(n = 1, 2, \ldots)$ по всякому $\varepsilon > 0$ найдется такое целое $N > 0$, что при $k > N$ будем иметь

$$\left.\begin{aligned} |n d_n - n d_n^{(k)}| &< \varepsilon, \\ \frac{1}{\pi} \iint_B |f'(z) - f_k'(z)|^2 \, d\sigma &< \varepsilon^2, \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

где для функций $f_k(z)$ $(k=1, 2, \ldots)$ в окрестности $z=\infty$ предполагается разложение

$$f_k(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{(k)} z^{-n}.$$

Второе из неравенств (4.7) с помощью неравенства Буняковского сразу приводит к оценке

$$\left|\frac{1}{\pi}\iint_B f'(z)\,\overline{\zeta_n'(z)}\,d\sigma-\frac{1}{\pi}\iint_B f_k'(z)\,\overline{\zeta_n'(z)}\,d\sigma\right|<$$

$$<\left[\frac{1}{\pi}\iint_B |\zeta_n'(z)|^2\,d\sigma\right]^{1/2}\varepsilon, \quad k>N.$$

Но функции $f_k(z)\in\sigma(B)$ и непрерывны на границе Γ, ибо непрерывны на Γ их производные, а поэтому соотношение (4.6) для них выполняется, что вместе с последней оценкой и первым неравенством (4.7) в силу произвольности ε доказывает лемму 4.1 для любой функции $f(z)\in\sigma(B)$.

Теорема 4.2. *Система функций* $\{\varphi_n(z)\}$, *заданная формулами*

$$\varphi_1(z)=\frac{\zeta_1(z)}{\sqrt{c_{11}}},$$

$$\varphi_n(z)=\frac{1}{\sqrt{n\Delta_{n-1,\,n-1}\,\Delta_{nn}}}\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1,\,n-1} & \zeta_1(z)\\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2,\,n-1} & \zeta_2(z)\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ c_{n-1,\,1} & c_{n-1,\,2} & \ldots & c_{n-1,\,n-1} & \zeta_{n-1}(z)\\ c_{n1} & c_{n,\,2} & \ldots & c_{n,\,n-1} & \zeta_n(z)\end{vmatrix} \tag{4.8}$$

$(n=2, 3, \ldots)$,

$$\Delta_{nn}=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n}\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn}\end{vmatrix} \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

является тейлоровской системой функций для области B.

Из (11) (стр. 8) и первого равенства (4.3) выводим

$$(\zeta'_k, \overline{\zeta}'_n) = nc_{kn} \qquad (k, n = 1, 2, \ldots), \tag{4.9}$$

откуда для определителя Грама системы функций $\zeta'_1(z)$, $\zeta'_2(z)$, ..., $\zeta'_n(z)$ получаем выражение при $n = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{vmatrix} (\zeta'_1, \overline{\zeta}'_1) & (\zeta'_1, \overline{\zeta}'_2) & \ldots & (\zeta'_1, \overline{\zeta}'_n) \\ (\zeta'_2, \overline{\zeta}'_1) & (\zeta'_2, \overline{\zeta}'_2) & \ldots & (\zeta'_2, \overline{\zeta}'_n) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ (\zeta'_n, \overline{\zeta}'_1) & (\zeta'_n, \overline{\zeta}'_2) & \ldots & (\zeta'_n, \overline{\zeta}'_n) \end{vmatrix} = n! \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4.10}$$

Но по свойству 2 системы пар $\{\zeta_n(z), \eta_n(z)\}$ функции $\zeta'_1(z)$, $\zeta'_2(z)$, ..., $\zeta'_n(z)$ линейно независимы, а поэтому определитель Грама, составленный для них, больше нуля, что в силу (4.10) приводит к неравенству

$$\Delta_{nn} > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.11}$$

Ясно, что функции $\varphi_n(z)$ регулярны в замкнутой области $\overline{B}$, ибо этим свойством обладают функции $\zeta_n(z)$. Кроме того, разложение функций $\varphi_n(z)$ в ряд Тейлора в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$\varphi_n(z) = \left(\frac{\Delta_{nn}}{n\Delta_{n-1,\,n-1}}\right)^{1/2} z^{-n} + \ldots \qquad (n = 1, 2, \ldots; \ \Delta_{00} = 1),$$

и, следовательно, система функций $\{\varphi_n(z)\}$ благодаря (4.11) удовлетворяет условию а) определения тейлоровской системы для области B.

Ортонормированность в области B системы производных $\{\varphi'_n(z)\}$ прямо следует из равенств (4.8), так как после их дифференцирования, учитывая (4.9) и (4.10), получим известные формулы ортогонализации Грама—Шмидта (см., например, Бергман [3], стр. 1—5).

Остается доказать полноту системы $\{\varphi'_n(z)\}$ в $l^2(B)$. Для этого возьмем произвольную функцию $f'(z) \in l^2(B)$

и построим для нее ряд Фурье в ортонормированной системе $\{\varphi_n'(z)\}$:

$$f'(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k'(z),$$

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi} \iint_B f'(z) \overline{\varphi_k'(z)}\, d\sigma \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

По теореме Рисса—Фишера ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k'(z)$ сходится равномерно внутри области B, а его сумма $f_1'(z)$ принадлежит $l^2(B)$ и имеет числа λ_k своими коэффициентами Фурье в системе $\{\varphi_n'(z)\}$, т. е.

$$f_1'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k'(z),$$

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi} \iint_B f_1'(z) \overline{\varphi_k'(z)}\, d\sigma \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Пусть функции $f(z)$ и $f_1(z)$ имеют в окрестности бесконечно удаленной точки разложения

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{-n}, \qquad f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n' z^{-n}.$$

Выразим коэффициенты Фурье λ_k через коэффициенты разложения в ряд Тейлора, используя для этого линейную зависимость функций $\varphi_k(z)$ от $\zeta_1(z), \zeta_2(z), \ldots, \zeta_k(z)$, именно:

$$\varphi_k(z) = \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_{k\nu} \zeta_\nu(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где

$$\gamma_{kk} = \left(\frac{\Delta_{k-1,\, k-1}}{k\Delta_{kk}}\right)^{1/2} > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ \Delta_{00} = 1). \tag{4.12}$$

Теперь непосредственным вычислением с помощью леммы 4.1 получим

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi} \iint_B f'(z)\, \overline{\varphi_k'(z)}\, d\sigma = \sum_{\nu=1}^{k} \overline{\gamma}_{k\nu} \nu\, d_\nu.$$

Фиксировав n, рассмотрим систему n линейных уравнений относительно $d_1, 2d_2, \ldots, nd_n$:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \bar{\gamma}_{11} d_1, \\
\lambda_2 &= \bar{\gamma}_{21} d_1 + \bar{\gamma}_{22}\, 2d_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda_n &= \bar{\gamma}_{n1} d_1 + \bar{\gamma}_{n2}\, 2d_2 + \ldots + \bar{\gamma}_{nn}\, nd_n.
\end{aligned}$$

Поскольку определитель этой системы в силу неравенств (4.12) отличен от нуля, то система имеет единственное решение, а поэтому $d_n = d'_n$. Следовательно, функции $f(z)$ и $f_1(z)$ тождественны, ибо они совпадают в окрестности $z = \infty$, и для $f'(z)$ имеет место разложение в равномерно сходящийся внутри B ряд Фурье в системе $\{\varphi'_n(z)\}$. Теорема доказана.

Таким образом, для данной области B теоремы 4.1 и 4.2 устанавливают существование и единственность тейлоровской системы.

Следствие. *Любая регулярная в области B функция с конечной площадью образа B, имеющая около $z = \infty$ разложение вида*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{-k},$$

разлагается в ряд по тейлоровской системе функций

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(z), \tag{4.13}$$

сходящийся абсолютно и равномерно внутри B. При этом такое разложение единственно, а коэффициенты разложения λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ и площадь $\sigma(f)$ образа B вычисляются по формулам

$$\lambda_1 = (f', \bar{\varphi}'_1) = \frac{d_1}{a_{11}},$$

$$\lambda_n = (f', \bar{\varphi}'_n) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & d_1 \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & 0 & d_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{n-1,n} & d_n \end{vmatrix}}{a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}} \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{4.14}$$

$$\sigma(f) = \iint_B |f'(z)|^2\, d\sigma = \pi \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2. \tag{4.15}$$

Пусть $f(z)$ — произвольная функция, указанная в теореме. Тогда $f(z) \in \sigma(B)$, а $f'(z) \in l^2(B)$. Поскольку система $\{\varphi_n'(z)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ является полной ортонормированной системой в $l^2(B)$, то функция $f'(z)$ разлагается в ряд Фурье по системе $\{\varphi_n'(z)\}$:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n'(z),$$

$$\lambda_n = (f', \overline{\varphi_n'})$$

который сходится абсолютно и равномерно внутри области B. Интегрируя написанное равенство, получим разложение (4.13), причем ряд справа в (4.13) также сходится равномерно внутри B. Абсолютная сходимость этого ряда следует из сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(z)|^2$ (сходимость последнего ряда вытекает из равномерной внутри B сходимости ряда (15) по двум переменным). Формула (4.15) для площади образа B получается из условия замкнутости для функции $f'(z)$ в системе $\{\varphi_n'(z)\}$. Наконец, сравнивая коэффициенты разложения в ряд Тейлора около $z=\infty$ в равенстве (4.13), получим формулы (4.14). Единственность выражения коэффициентов λ_n $(n=1, 2, \ldots)$ через $d_1, d_2, \ldots, d_n$ доказывает единственность разложения функции $f(z)$ в равномерно сходящийся внутри B ряд по тейлоровской системе.

Замечание. Вопрос о разложении функций в ряд по тейлоровской системе исследуется в § 3. Следствие приведено лишь из методических соображений.

Рассмотрим несколько примеров разложений, используемых в дальнейшем.

Пример 1. Найти для функций $\zeta_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ разложение в ряд по тейлоровской системе функций.

Коэффициенты разложения λ_k найдем по (4.14) и лемме 4.1:

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi} \iint_B \zeta_n'(z) \overline{\varphi_k'(z)}\, d\sigma = \frac{1}{\pi} \overline{\iint_B \varphi_k'(z) \overline{\zeta_n'(z)}\, d\sigma} = n\bar{a}_{kn},$$

где n фиксированно, а $k=1, 2, \ldots$. Так как при $k > n$ $a_{kn}=0$, то получим

$$\zeta_n(z) = n\left[\bar{a}_{1n}\varphi_1(z) + \bar{a}_{2n}\varphi_2(z) + \ldots + \bar{a}_{nn}\varphi_n(z)\right]. \quad (4.16)$$

Сравнивая в (4.16) коэффициенты при $z^{-\nu}$ ($\nu=1, 2, \ldots$) в разложениях около $z=\infty$ обеих частей равенства, будем иметь

$$c_{n\nu}=n\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{kn}a_{k\nu} \qquad (n,\ \nu=1,\ 2,\ \ldots). \tag{4.17}$$

Кроме того, из (4.16) можно получить для функций тейлоровской системы $\varphi_n(z)$ ($n=1, 2, \ldots$) выражение через функции $\zeta_1(z), \zeta_2(z), \ldots, \zeta_n(z)$, более удобное, чем (4.8). Именно:

$$\varphi_1(z)=\frac{\zeta_1(z)}{a_{11}},$$

$$\varphi_n(z)=\frac{\begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & \ldots & 0 & \zeta_1(z) \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \ldots & 0 & \frac{1}{2}\zeta_2(z) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \ldots & \bar{a}_{n-1,\,n} & \frac{1}{n}\zeta_n(z) \end{vmatrix}}{a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{nn}} \qquad (n=2,\ 3,\ \ldots). \tag{4.18}$$

Пример 2. Разложить функции области $P(z, \bar{\zeta})$ и $R(z, \zeta)$, определенные равенствами (18), в ряд по тейлоровской системе.

Функция $P(z, \bar{\zeta})$ при каждом $\zeta\in B$ регулярна в $\bar{B}$ и поэтому принадлежит классу $\sigma(B)$. По следствию из теоремы 4.2 для функции $P(z, \bar{\zeta})$ имеет место разложение в ряд по тейлоровской системе

$$P(z,\ \bar{\zeta})=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(z),$$

где коэффициенты λ_n найдутся по формулам (4.14), если вместо чисел d_k ($k=1, 2, \ldots, n$) подставить согласно (4.4) $\frac{1}{k}\overline{\zeta_k(z)}$. Но из (4.18) следует, что точно по таким же формулам найдутся функции $\overline{\varphi_n(\zeta)}$, а поэтому $\lambda_n=\overline{\varphi_n(\zeta)}$ и для функции $P(z, \bar{\zeta})$ разложение принимает вид

$$P(z,\ \bar{\zeta})=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\varphi_n(\zeta)}\,\varphi_n(z), \qquad z,\ \zeta\in B. \tag{4.19}$$

Ряд справа в (4.19) может быть получен интегрированием ряда (15) на стр. 9, а поэтому он сходится абсолютно и равномерно по двум переменным z и ζ внутри области B, а его сумму $P(z, \bar{\zeta})$ естественно назвать интегральной ядерной функцией для области B в классе $l^2(B)$.

Функция $R(z, \zeta)$ при каждом $\zeta \in B$ также регулярна в замкнутой области $\bar{B}$ и согласно (4.4) имеет около $z=\infty$ разложение

$$R(z, \zeta)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\eta_n(\zeta)-\zeta^n\right] z^{-n}.$$

Если ввести обозначение для $z \in B$

$$r_n(z)=\frac{1}{n}\left[\eta_n(z)-z^n\right] \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots), \tag{4.20}$$

то последнее разложение перепишется так:

$$R(z, \zeta)=\sum_{n=1}^{\infty} r_n(\zeta) z^{-n}.$$

Заметим, что функции $r_n(z)$ регулярны в $\bar{B}$ и $r_n(\infty)=0$.

По следствию из теоремы 4.2 $R(z, \zeta)$ при фиксированном $\zeta \in B$ разлагается в ряд по тейлоровской системе

$$R(z, \zeta)=\sum_{n=1}^{\infty} h_n(\zeta) \varphi_n(z), \tag{4.21}$$

сходящийся абсолютно и равномерно внутри B. Коэффициенты разложения $h_n(\zeta)$ найдутся по формулам (4.14):

$$h_1(\zeta)=\frac{r_1(\zeta)}{a_{11}},$$

$$h_n(\zeta)=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & r_1(\zeta) \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & 0 & r_2(\zeta) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{n-1,n} & r_n(\zeta) \end{vmatrix}}{a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}} \qquad (n=2,\ 3,\ \ldots), \tag{4.22}$$

и являются, следовательно, регулярными функциями в $\bar{B}$.

Пример 3. В классе функций $f(z)$, регулярных в данной области B и имеющих заданное начало разложения

в ряд Тейлора около $z=\infty$

$$d_1z^{-1}+d_2z^{-2}+\ldots+d_nz^{-n} \qquad (n\geqslant 1), \tag{4.23}$$

найти функцию с минимальной площадью образа B, т. е. минимизирующую интеграл $\iint\limits_B |f'(z)|^2\,d\sigma$.

Очевидно, достаточно рассматривать лишь функции с конечной площадью образа B, т. е. из класса $\sigma(B)$. Рассмотрим функцию

$$f_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k(z),$$

где λ_k вычислены по формулам (4.14) через заданные коэффициенты $d_1, d_2, \ldots, d_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Функция $f_n(z)$ регулярна в области B и имеет заданное начало разложения в окрестности $z=\infty$, так как первые n коэффициентов этого разложения однозначно определяются через коэффициенты Фурье $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Площадь образа B при отображении функцией $f_n(z)$ будет равна

$$\sigma(f_n)=\pi\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2.$$

Теперь возьмем произвольную функцию $f(z)\in\sigma(B)$ с заданным началом разложения около $z=\infty$ (4.23). По следствию из теоремы 4.2 для $f(z)$ имеет место разложение

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k(z),$$

в котором первые n коэффициентов λ_k, также вычисленные по формулам (4.14) через заданные числа $d_1, d_2, \ldots, d_k$, совпадают с коэффициентами разложения $f_n(z)$. Поэтому площадь образа B при отображении функцией $f(z)$ представится так:

$$\sigma(f)=\pi\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2=\sigma(f_n)+\pi\sum_{k=n+1}^{\infty}|\lambda_k|^2,$$

откуда следует $\sigma(f)\geqslant\sigma(f_n)$, и знак равенства имеет место только тогда, когда все $\lambda_k=0$ $(k=n+1, n+2, \ldots)$, т. е. когда $f(z)\equiv f_n(z)$.

Полагая, в частности, $d_1 = d_2 = \ldots = d_{n-1} = 0$, $d_n = 1$, получим последовательность экстремальных функций

$$f_n(z) = \frac{1}{a_{nn}} \varphi_n(z),$$

отличающихся лишь постоянными множителями от функций тейлоровской системы для области B. Поэтому ясно, что система производных $\{f_n'(z)\}$ будет ортогональной в области B и последующая ее нормализация приведет к ортонормированной системе $\{\varphi_n'(z)\}$, полной в классе $l^2(B)$.

Бергман [1] доказал существование полных ортонормированных систем в классе $l^2(B)$ именно таким путем, т. е. решая экстремальную задачу, изложенную в примере 3, и тем самым он доказал существование тейлоровской системы функций.

Уолш и Девис [1] рассматривали полные ортонормированные системы функций в $L^2(B)$, обладающие характерным для функций тейлоровской системы началом разложения в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки.

3°. Построение и единственность сопряженной системы

Теорема 4.3. *Система функций $\Phi_n(z)$, заданная формулами*

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \frac{\eta_1(z)}{a_{11}}, \\ \Phi_n(z) &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & \eta_1(z) \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & 0 & \frac{1}{2}\eta_2(z) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{n-1,n} & \frac{1}{n}\eta_n(z) \end{vmatrix}}{a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}} \quad (n=2, 3, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

является единственной сопряженной системой функций для области B.

Из (4.20) для функций $\eta_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ получаем тождественное представление в области B:

$$\eta_n(z) = z^n + nr_n(z) \tag{4.25}$$

где функции $r_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ регулярны в $\overline{B}$ и $r_n(\infty) = 0$.

Подставляя (4.25) в (4.24), будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(z)=\frac{z}{a_{11}}+\frac{r_1(z)}{a_{11}},\\
&\Phi_n(z)=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & z\\ a_{12} & a_{22} & \dots & 0 & \frac{1}{2}z^2\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{n-1,n} & \frac{1}{n}z^n \end{vmatrix}}{a_{11}a_{22}\dots a_{nn}}+\\
&+\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & r_1(z)\\ a_{12} & a_{22} & \dots & 0 & r_2(z)\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{n-1,n} & r_n(z) \end{vmatrix}}{a_{11}a_{22}\dots a_{nn}}\quad (n=2,\ 3,\ \dots).
\end{aligned}\right\}\tag{4.26}$$

Первое слагаемое в формулах (4.26) есть полином степени n, который обозначим через $P_n(z)$ $(n=1,\ 2,\ \dots)$, $P_n(0)=0$, и сохраним это обозначение в дальнейшем, а второе слагаемое согласно (4.22)—функция $h_n(z)$, регулярная в замкнутой области $\bar{B}$, $h_n(\infty)=0$. Таким образом, имеем

$$\Phi_n(z)=P_n(z)+h_n(z)\qquad (n=1,\ 2,\ \dots).\tag{4.27}$$

Из (4.27) заключаем, что функции $\Phi_n(z)$ регулярны в замкнутой области $\bar{B}$, за исключением полюса порядка n в точке $z=\infty$, и их лорановские разложения в окрестности $z=\infty$ не содержат свободного члена, т. е. функции $\Phi_n(z)$ удовлетворяют условию а) определения сопряженной системы для области B (см. стр. 11).

Остается доказать, что для функций $\Phi_n(z)$ на границе области B выполняется соотношение (20), в котором $\varphi_n(z)$ — функции тейлоровской системы. Сравнивая формулы (4.18) и (4.24), замечаем, что функции $\varphi_n(z)$ и $\Phi_n(z)$ $(n=1,\ 2,\ \dots)$ выражаются соответственно через $\zeta_1(z),\ \zeta_2(z),\ \dots,\ \zeta_n(z)$ и $\eta_1(z),\ \eta_2(z),\ \dots,\ \eta_n(z)$ линейными формами с сопряженными

коэффициентами. Но на каждой граничной кривой $\Gamma^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, m$) согласно (4.2) имеет место равенство

$$\eta_n(z) = \overline{\zeta_n(z)} + k'_{n\nu},$$

а потому на $\Gamma^{(\nu)}$ будем также иметь

$$\Phi_n(z) = \overline{\varphi_n(z)} + k_{n\nu} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $k_{n\nu}$ — постоянная.

Следовательно, система функций $\{\Phi_n(z)\}$, заданная формулами (4.24), является сопряженной системой функций для области B. Если допустить существование другой сопряженной системы $\{\Phi_n^*(z)\}$ (помня о единственности тейлоровской системы для области B), то придем к тому, что разность $\Phi_n(z) - \Phi_n^*(z)$ ($n = 1, 2, \ldots$), являясь регулярной функцией на границе области B, должна иметь на каждой граничной кривой $\Gamma^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, m$) постоянное значение, а это возможно лишь в том случае, если эта разность есть константа всюду в области B. Но лорановское разложение функций сопряженной системы в окрестности $z = \infty$ не содержит свободного члена, а поэтому эта константа должна быть нулем, т. е. $\Phi_n(z) \equiv \Phi_n^*(z)$.

Таким образом, из теорем 4.1, 4.2 и 4.3 заключаем, что для данной области B тейлоровская и лорановская системы функций существуют и единственны.

Для односвязных областей конструкция функций лорановской системы весьма проста. Так, если область B есть внешность единичного круга, то

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} z^{-n},$$

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} z^n.$$

Если B — односвязная область, содержащая бесконечно удаленную точку и ограниченная аналитическим контуром, то

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} [F(z)]^{-n},$$

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} [F(z)]^n + A_n,$$

где $F(z)$ — однолистная функция, $F(\infty)=\infty$, $F'(\infty)>0$, конформно отображающая область B на внешность единичной окружности, а A_n — постоянная для нормирования $\Phi_n(z)$.

Для многосвязных областей такой зависимости не имеется, так как невозможно многосвязную область отобразить однолистно и конформно на внешность единичной окружности.

§ 2. Свойства функций лорановской системы

В этом параграфе излагаются лишь некоторые свойства функций лорановской системы, необходимые для исследования в §§ 3 и 4 рядов типа Тейлора и Лорана.

1°. Биортогональность на границе области

Теорема 4.4. *Для функций лорановской системы на границе* Γ *области* B *имеют место равенства*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \overline{\varphi_k(z)}\,d\varphi_n(z)=\delta_{kn},\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi_k(z)\,d\varphi_n(z)=0; \tag{4.28а}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \overline{\Phi_k(z)}\,d\Phi_n(z)=-\delta_{kn},\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Phi_k(z)\,d\Phi_n(z)=0; \tag{4.28б}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \overline{\varphi_k(z)}\,d\Phi_n(z)=0,\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi_k(z)\,d\Phi_n(z)=-\delta_{kn}. \tag{4.28в}$$

Поскольку по определению тейлоровской системы производные функции $\{\varphi_n'(z)\}$ образуют ортонормированную систему в области B, то первое из равенств (4.28а) согласно (14) является просто условием ее ортонормированности, а второе — выполняется потому, что подынтегральная функция регулярна в B и имеет в точке $z=\infty$ нуль по крайней мере кратности три.

Первое равенство в (4.28б) получается из (4.28а) и соотношения (20). Именно:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \overline{\Phi_k(z)}\,d\Phi_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi_k(z)\,d\overline{\varphi_n(z)}=$$

$$=\overline{-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \overline{\varphi_k(z)}\,d\varphi_n(z)}=-\delta_{kn}\qquad (k,\ n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Это равенство выражает собой обобщенную ортонормированность в области B производных $\{\Phi_n'(z)\}$ сопряженной системы функций. Все остальные равенства вытекают из уже доказанных и условия сопряженности на границе области (20).

Следствие 1. *Каждая из производных функций сопряженной системы* $\Phi_n'(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ *ортогональна на границе области* B *любой функции* $f(z) \in \sigma(B)$, *т. е.*

$$\int_\Gamma \Phi_n'(z)\overline{f(z)}\,dz = 0. \tag{4.29}$$

Пусть $f(z)$ — произвольная функция из класса $\sigma(B)$. Покажем сначала, что интеграл в (4.29) имеет конечное значение. Для этого возьмем какое-нибудь граничное кольцевое множество $B_{1,R}$ $(1 < R < \infty)$ и с помощью формулы Грина установим равенство

$$\frac{1}{2i}\int_\Gamma \Phi_n'(z)\overline{f(z)}\,dz = \frac{1}{2i}\int_{\Gamma_R} \Phi_n'(z)\overline{f(z)}\,dz + \iint_{B_{1,R}} \Phi_n'(z)\overline{f'(z)}\,d\sigma. \tag{4.30}$$

Так как $f(z) \in \sigma(B)$, а $\Phi_n(z)$ регулярна на замыкании $\overline{B}_{1,R}$, то написанный двойной интеграл сходится, а поэтому и контурный интеграл в левой части равенства имеет конечное значение.

Теперь разложим функцию $f(z)$ в равномерно сходящийся внутри B ряд по тейлоровской системе

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(z)$$

и обозначим частичные суммы этого ряда через $f_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Для каждой частичной суммы $f_k(z)$ по теореме 4.4 равенство (4.29) выполняется, а тогда, учитывая (4.30), оно имеет место и для функции $f(z)$, ибо последовательность $f_k(z)$ $(k=1, 2, \ldots)$ сходится к $f(z)$ равномерно внутри области B, а производные $f_k'(z)$ аппроксимируют $f'(z)$ в среднем по области B.

Следствие 2. *Для полиномов* $P_n(z)$ *и функций* $h_n(z)$ (см. (4.27)) *при любых* n *и* k $(n, k = 1, 2, \ldots)$ *имеет место равенство*

$$\frac{1}{\pi}\iint_B P_k'(z)\overline{P_n'(z)}\,d\sigma + \frac{1}{\pi}\iint_B h_k'(z)\overline{h_n'(z)}\,d\sigma = \delta_{kn}. \tag{4.31}$$

Используя первое из равенств (4.28б), соотношения (4.27), (4.29) и (20), будем иметь

$$\delta_{kn}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\overline{\Phi_n(z)}\,d\Phi_k(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Phi_k'(z)\,[\overline{P_n(z)}+\overline{h_n(z)}]\,dz=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[P_k'(z)+h_k'(z)]\,\overline{P_n(z)}\,dz=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}P_k'(z)\overline{P_n(z)}\,dz-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}h_k'(z)\,[\overline{\Phi_n(z)}-\overline{h_n(z)}]\,dz=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}P_k'(z)\,\overline{P_n(z)}\,dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}h_k'(z)\,\overline{h_n(z)}\,dz\qquad(k,\ n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Если к последним двум интегралам применить формулу Грина, то получим (4.31).

2°. Оценки для полиномов $P_n(z)$

При исследовании функций, регулярных или мероморфных в конечносвязных областях, весьма полезным является предложение, основанное на принципе максимума модуля для аналитических функций и обобщающее известную лемму Шварца для единичного круга:

Лемма 4.2. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области $B_{1,\infty}$, а на границе Γ области B непрерывна и ограничена по модулю числом M. Пусть в точке $z=\infty$ функция $f(z)$ имеет одно из двух:*

а) *нуль кратности n*

или

б) *полюс порядка n.*

Тогда справедливо соответственно одно из неравенств:

а) $$|f(z)|\leqslant M\rho^{-n},\ z\in\overline{B},\tag{4.32а}$$

или

б) $$|f(z)|\leqslant M\rho^{n},\ z\in B_{1,\infty}\cup\Gamma,\tag{4.32б}$$

где $\rho=\exp\{G(z,\ \infty;\ B)\}$.

Предположим, что функция $f(z)$ имеет в бесконечно удаленной точке нуль кратности n. Рассмотрим функцию

$$\psi(z)=f(z)\exp\{n\,S(z)\},$$

где $S(z)$ определена равенством (1) на стр. 5 и является многозначной аналитической функцией в области B с логарифмической особенностью в точке $z=\infty$. Функция $\psi(z)$ аналитична во всех конечных точках области B, возможно, не однозначна, но ее модуль однозначен в силу однозначности в области B функции Грина $G(z, \infty; B)=\operatorname{Re} S(z)$. Поскольку в бесконечно удаленной точке $f(z)$ имеет нуль кратности n, а любой элемент функции $\exp\{nS(z)\}$ имеет полюс порядка n, то функция $\psi(z)$ аналитична и в точке $z=\infty$.

Следовательно, $|\psi(z)|$ является однозначной непрерывной функцией в $\overline{B}$. Тогда по принципу максимума модуля для аналитических функций будем иметь при $z \in \overline{B}$

$$|\psi(z)|=|f(z)|\rho^n \leqslant \max_{z \in \Gamma} |\psi(z)| \leqslant M,$$

откуда и получается оценка (4.32 а) (при $z=\infty$ левую часть последнего неравенства следует понимать как предел при $|z| \to \infty$).

Если же функция $f(z)$ имеет в точке $z=\infty$ полюс порядка n, то надо рассмотреть функцию

$$\psi(z)=f(z)\exp\{-nS(z)\},$$

и принцип максимума модуля для аналитических функций, примененный к ней, приведет к оценке (4.32 б). Лемма доказана.

Условимся в последующих оценках величину $\exp\{G(z, \infty; B)\}$ обозначать через $\rho=\rho(z)$, не делая каждый раз соответствующего пояснения.

Теорема 4.5. *Для полиномов $P'_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ при каждом z из замкнутой области $\overline{B}$ с выколотой точкой $z=\infty$ справедливо неравенство*

$$|P'_n(z)| \leqslant M(\varepsilon)(1+\varepsilon)^{n-1}\rho^{n-1}, \quad z \in B_{1,\infty} \cup \Gamma, \tag{4.33}$$

где ε — произвольное положительное число, а $M(\varepsilon)$ зависит лишь от ε.

Из равенства (4.31), полагая $k=n$ $(n=1, 2, \ldots)$, будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\iint_b |P'_n(z)|^2 d\sigma \leqslant 1,$$

откуда следует равномерная ограниченность системы полиномов $\{P'_n(z)\}$ внутри множества b (b состоит из m односвязных областей, ограниченных аналитическими контурами $\Gamma^{(\nu)}$).

Поскольку m-связная область B ограничена замкнутыми взаимно внешними аналитическими кривыми Жордана $\Gamma^{(\nu)}$ ($\nu=1, 2, \ldots, m$), то на границе Γ нет критических точек функции Грина $G(z, \infty; B)$. Поэтому ее можно аналитически продолжить через Γ в область B', $B' \supset \overline{B}$, граница которой Γ' является линией уровня функции $G(z, \infty; B)$ с параметром $\rho' \in (0, 1)$ и состоит из m аналитических контуров $\Gamma'^{(\nu)}$ ($\nu=1, 2, \ldots, m$), лежащих внутри соответствующих граничных компонент $\Gamma^{(\nu)}$ (Уолш [1], стр. 86—90).

Очевидно, что функции Грина с полюсом в бесконечно удаленной точке для областей B' и B связаны соотношением

$$G(z, \infty; B') = G(z, \infty; B) + \ln\frac{1}{\rho'}, \quad 0 < \rho' < 1. \tag{4.34}$$

Кроме того, ясно, что увеличение параметра ρ' ($\rho' < 1$) не меняет вышеуказанных свойств области B'.

Но на границе Γ' области B' в силу равномерной ограниченности полиномов $P'_n(z)$ ($n=1, 2, \ldots$) выполняется неравенство

$$|P'_n(z)| \leqslant M,$$

где M — некоторая постоянная, зависящая только от ρ', а тогда по лемме 4.2 в замкнутой области B' с выколотой точкой $z=\infty$ для полиномов $P'_n(z)$ имеем оценку

$$|P'_n(z)| \leqslant M \exp\{(n-1)\, G(z, \infty; B')\}, \qquad z \in B'_{1,\infty} \cup \Gamma'.$$

Используя связь (4.34) между функциями Грина и включение $\overline{B} \subset B'$, из последнего неравенства получим

$$|P'_n(z)| \leqslant M \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{n-1}.$$

Положив здесь $1/\rho' = 1+\varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число, придем к (4.33).

Следствие. *Для производных* ν-*го порядка* ($\nu=1, 2, \ldots$) *от полиномов* $P_n(z)$ *при любом* $z \in B_{1,\infty} \cup \Gamma$ *имеет место*

асимптотическая оценка

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|P_n^{(\nu)}(z)|^{1/n}\leqslant\rho, \tag{4.35}$$

равномерная на каждом ограниченном множестве из замкнутой области $\overline{B}$.

При $\nu=1$ оценка (4.35) и ее равномерность на указанном множестве прямо следуют из неравенства (4.33). При фиксированном $\nu>1$ этот результат получается следующим образом: из равномерной ограниченности внутри множества b системы полиномов $\{P_n'(z)\}$ вытекает равномерная ограниченность внутри b производных ν-го порядка от них, а этого достаточно для получения неравенства, аналогичного (4.33), из которого и следует требуемый результат.

Перед изложением следующей теоремы условимся еще в одном обозначении.

Ранее уже упоминалось, что функция Грина для области B с полюсом в бесконечно удаленной точке имеет ровно $m-1$ критических точек (с учетом их кратности), лежащих внутри области B. Пусть это будут точки $z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}$, если область многосвязна, а если B односвязна, то критических точек нет в области B. Через каждую критическую точку z_ν ($\nu=1, 2, \ldots, m-1$) проходит некоторая линия уровня функции Грина с параметром $\rho(z_\nu)$. Обозначим через ρ_0 для многосвязной области B наибольшее из чисел $\rho(z_\nu)$ ($\nu=1, 2, \ldots, m-1$), а если B односвязна, то положим ρ_0 равным единице, т. е.

$$\rho_0=\begin{cases}\max\limits_{1\leqslant\nu\leqslant m-1}\rho(z_\nu), & m\geqslant 2\\ 1, & m=1.\end{cases}$$

Линия уровня Γ_{ρ_0} в случае односвязной области совпадает с ее границей, а для многосвязных областей линия Γ_{ρ_0} обязательно состоит из нескольких контуров Жордана, связанных между собой общими критическими точками, и характерна тем, что при сколь угодно малой ее деформации, вызванной увеличением параметра ρ_0, она преобразуется в одну замкнутую аналитическую кривую Жордана.

Далее, обозначим через R_0 число ρ_0, если точка $z=0$ лежит на или внутри линии уровня Γ_{ρ_0}, т. е. в замыкании

$\bar{b}_{\rho_0}$, а в противном случае — число $\rho(0)$. Таким образом,

$$R_0 = \begin{cases} \rho_0, & 0 \in \bar{b}_{\rho_0}, \\ \rho(0), & 0 \in B_{\rho_0}. \end{cases} \tag{4.36}$$

Очевидно, что $R_0 \geqslant \rho_0$. Линия уровня Γ_{R_0} при $R_0 = \rho_0$ уже описана выше, а если $R_0 > \rho_0$, то Γ_{R_0} — простая замкнутая аналитическая кривая. В любом случае точка $z = 0$ лежит на или внутри линии уровня Γ_{R_0}, т. е. в замыкании $\bar{b}_{R_0}$. Наконец, в любом случае замыкание $\bar{b}_{R_0}$ — связное множество.

Теорема 4.6. *Для полиномов $P_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ при любом конечном z имеем оценку*

$$|P_n(z)| \leqslant \begin{cases} M(1+\varepsilon)^n \rho^n, & z \in B_{R_0, \infty}, \\ M(1+\varepsilon)^n R_0^n, & z \in \bar{b}_{R_0}, \end{cases} \tag{4.37}$$

где ε — произвольное положительное число, M зависит лишь от ε, а R_0 определено равенством (4.36).

Для производных $P_n'(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ на линии уровня Γ_{R_0} согласно (4.33) выполняется неравенство

$$|P_n'(z)| \leqslant M(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n R_0^n,$$

которое по принципу максимума модуля имеет место и внутри Γ_{R_0}.

Так как все полиномы $P_n(z)$ в точке $z = 0$ обращаются в нуль, а сама точка $z = 0$ принадлежит связному замыканию $\bar{b}_{R_0}$, на котором выполняется это неравенство, то, интегрируя его, получим

$$|P_n(z)| \leqslant M_1(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n R_0^n, \qquad z \in \bar{b}_{R_0}.$$

Чтобы получить вторую часть неравенства (4.37), надо к полиному $P_n(z)$ применить лемму 4.2 в области B_{R_0}, на границе которой Γ_{R_0} выполняется нижнее неравенство (4.37).

3°. Свойства функций области $R(z, \zeta)$ и $P(z, \bar{\zeta})$

Напомним определения функций $R(z, \zeta)$ и $P(z, \bar{\zeta})$. При каждом фиксированном $\zeta \in B$ $(\zeta \neq \infty)$ функции $R(z, \zeta)$ и $P(z, \bar{\zeta})$ задаются в области B равенствами (18), в которых функции $j_0(z, \zeta)$ и $j_{\pi/2}(z, \zeta)$ принадлежат классу $\Sigma(B)$,

обращаются в нуль в точке $z=\zeta$, т. е.

$$j_0(\zeta, \zeta)=j_{\pi/2}(\zeta, \zeta)=0, \tag{4.38}$$

и отображают однолистно заданную область B соответственно на плоскость с радиальными разрезами и на плоскость с разрезами по дугам концентрических окружностей с центром в начале. При $\zeta=\infty$ $P(z, \infty)=R(z, \infty)\equiv 0$, когда $z\in B$. Соберем в одном месте нужные для дальнейшего свойства функций $R(z, \zeta)$ и $P(z, \bar{\zeta})$.

Свойство 1. *При фиксированном $\zeta\in B$ функции $R(z, \zeta)$ и $P(z, \bar{\zeta})$ регулярны в замкнутой области $\bar{B}$ по аргументу z, а при фиксированном $z\in B$ они регулярны в $\bar{B}$ соответственно по аргументам ζ и $\bar{\zeta}$. В окрестности бесконечно удаленной точки для них имеют место разложения в ряд Тейлора*

$$R(z, \zeta)=\sum_{n=1}^{\infty} r_n(\zeta) z^{-n},$$

$$P(z, \bar{\zeta})=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \overline{\zeta_n(z)} z^{-n}$$

и в двойной степенной ряд

$$R(z, \zeta)=\sum_{n, k=1}^{\infty} \frac{1}{n} b_{nk} \zeta^{-k} z^{-n},$$

$$P(z, \bar{\zeta})=\sum_{n, k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{c}_{nk} \bar{\zeta}^{-k} z^{-n}.$$

Обе функции удовлетворяют уравнениям симметрии

$$\begin{aligned} R(z, \zeta)&=R(\zeta, z), \\ P(z, \bar{\zeta})&=\overline{P(\zeta, \bar{z})}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Это вытекает из свойств системы пар $\{\zeta_n(z), \eta_n(z)\}$.

Свойство 2. *Для каждого фиксированного ζ из области B_r $(1<r<\infty)$ функции $R(z, \zeta)$ и $P(z, \bar{\zeta})$ аналитически продолжимы через границу Γ области B в одну и ту же m-связную область $B^*(r)$, $B^*(r)\supset B$, ограниченную замкнутыми аналитическими кривыми Жордана.*

Пусть задана произвольная область B_r, $1 < r < \infty$. Обозначим внешность кривой $\Gamma^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, m$) через $B^{(\nu)}$, а функцию Грина для области $B^{(\nu)}$ с полюсом в бесконечно удаленной точке через $G(z, \infty; B^{(\nu)})$. Линии уровня функции $G(z, \infty; B^{(\nu)})$ условимся обозначать через $\Gamma_\rho^{(\nu)}(B^{(\nu)})$, $1 \leqslant \rho < \infty$, чтобы отличать их от компонент линии уровня функции Грина $G(z, \infty; B)$.

Поскольку односвязная область $B^{(\nu)}$ ограничена замкнутой аналитической кривой Жордана $\Gamma^{(\nu)}$, то на $\Gamma^{(\nu)}$ нет критических точек функции Грина $G(z, \infty; B^{(\nu)})$, а потому ее можно аналитически продолжить через границу $\Gamma^{(\nu)}$ в область $B_{\rho_\nu}^{(\nu)} \supset \overline{B}^{(\nu)}$, граница которой $\Gamma_{\rho_\nu}^{(\nu)}(B^{(\nu)})$ является линией уровня функции $G(z, \infty; B^{(\nu)})$ с параметром $\rho_\nu \in (0, 1)$ и представляет собой замкнутую аналитическую кривую Жордана, лежащую внутри $\Gamma^{(\nu)}$.

При $\rho \longrightarrow 1$ линии уровня $\Gamma_\rho^{(\nu)}(B^{(\nu)})$ равномерно аппроксимируют граничную кривую $\Gamma^{(\nu)}$, а поэтому всегда можно выбрать такое число ρ:

$$1 < \rho < \min_{1 \leqslant \nu \leqslant m} \left\{ \frac{1}{\rho_\nu} \right\}, \tag{4.40}$$

чтобы при всех ν ($\nu = 1, 2, \ldots, m$) линия уровня $\Gamma_\rho^{(\nu)}(B^{(\nu)})$:

а) не пересекалась с замыканием заданной области $\overline{B}_r$;

б) не пересекалась с граничными кривыми $\Gamma^{(\mu)}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, m$) области B;

в) содержала внутри себя из всех граничных компонент $\Gamma^{(\mu)}$ только кривую $\Gamma^{(\nu)}$.

Ясно, что каждое число $\rho > 1$ и достаточно близкое к единице удовлетворяет поставленным требованиям. Пусть произвольно выбрано одно из таких чисел ρ. Тогда линия уровня $\Gamma_{1/\rho}^{(\nu)}(B^{(\nu)})$ в силу условия (4.40) лежит в области $B_{\rho_\nu}^{(\nu)}$ и представляет собой замкнутую аналитическую кривую Жордана (см. рис. 1).

Функция $\psi_\nu(z) = \exp\{G(z, \infty; B^{(\nu)}) + iH(z, \infty; B^{(\nu)})\}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, m$), где $H(z, \infty; B^{(\nu)})$ — сопряженная с $G(z, \infty; B^{(\nu)})$ гармоническая функция, отображает однолистно область $B^{(\nu)}$ на внешность единичной окружности и аналитически продолжима через границу $\Gamma^{(\nu)}$ в область, ограниченную кривой $\Gamma_{1/\rho}^{(\nu)}(B^{(\nu)})$. Функция $\psi_\nu(z)$ отображает

двухсвязную область, ограниченную кривыми $\Gamma_{\rho}^{(\nu)}(B^{(\nu)})$ и $\Gamma_{1/\rho}^{(\nu)}(B^{(\nu)})$, однолистно на круговое кольцо плоскости t с центром в начале и радиусами соответственно ρ и $1/\rho$ и устанавливает в этой двухсвязной области симметрию точек относительно аналитической кривой $\Gamma^{(\nu)}$ $(\nu=1, 2, \ldots, m)$. Именно для каждой точки z^* из указанной двухсвязной области, лежащей внутри $\Gamma^{(\nu)}$, имеется единственная точка z

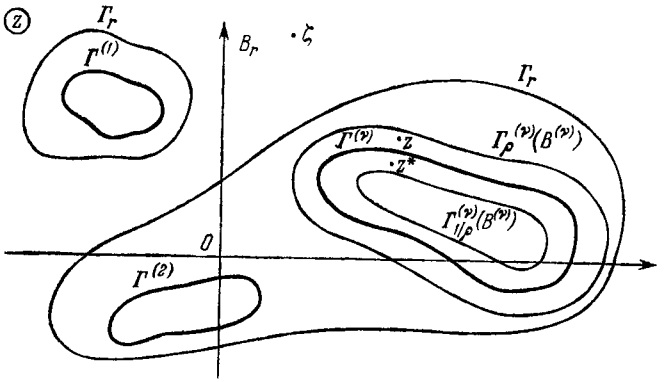

Рис. 1.

из этой области, лежащая вне $\Gamma^{(\nu)}$ и именуемая симметричной для z^* относительно кривой $\Gamma^{(\nu)}$. Симметричные точки z^* и z являются прообразами точек t^* и t, симметричных относительно единичной окружности.

Обозначим m-связную область, содержащую $z=\infty$ и ограниченную кривыми $\Gamma_{1/\rho}^{(\nu)}(B^{(\nu)})$ $(\nu=1, 2, \ldots, m)$, через $B^*(r)$. Очевидно, что $B^* \supset B$ и ограничена замкнутыми аналитическими кривыми Жордана.

Теперь возьмем произвольное значение $\zeta \in B_r$ и докажем, что функции $R(z, \zeta)$ и $P(z, \bar{\zeta})$ можно аналитически продолжить в область B^*. Для этого рассмотрим функции $j_0(z, \zeta)$ и $j_{\pi/2}(z, \zeta)$, из которых по формулам (18) сконструированы функции $R(z, \zeta)$ и $P(z, \bar{\zeta})$.

Если $\zeta=\infty$, то $R(z, \zeta)$ и $P(z, \bar{\zeta})$ тождественно равны нулю в области B и, значит, регулярны по z в области B^*. Поэтому будем считать $\zeta \in B_r$ фиксированным и конечным.

Функции $j_0(z, \zeta)$ и $j_{\pi/2}(z, \zeta)$ переводят точку $z=\infty$ в бесконечно удаленную точку плоскости w, а точку $z=\zeta$ — в нуль и в силу своей однолистности значения ∞ и 0 ни в каких других точках области $\bar{B}$ не принимают. Обозначим образ граничной кривой $\Gamma^{(\nu)}$ при отображении функциями $j_0(z, \zeta)$ и $j_{\pi/2}(z, \zeta)$ через $C^{(\nu)}$, а образ линии $\Gamma_\rho^{(\nu)}(B^{(\nu)})$ — через

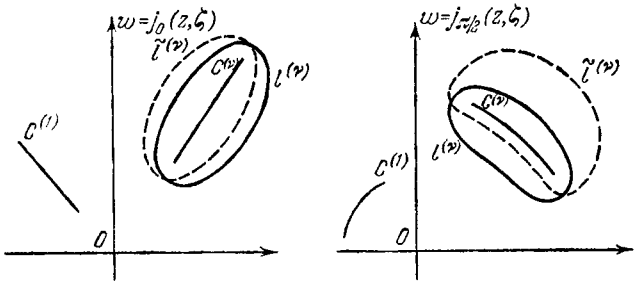

Рис. 2.

$l^{(\nu)}$ (одинаково для обеих функций, чтобы не вводить лишних обозначений). Здесь $l^{(\nu)}$ $(\nu=1, 2, \ldots, m)$ — замкнутая аналитическая кривая Жордана, внутренность которой и сама $l^{(\nu)}$ не содержит точку $w=0$ (и, конечно, точку $w=\infty$), так как точка $z=\zeta$ не принадлежит замкнутой кольцевой области, ограниченной линиями $\Gamma_\rho^{(\nu)}(B^{(\nu)})$ и $\Gamma^{(\nu)}$ (см. рис. 2).

По обобщенному принципу симметрии функции $j_0(z, \zeta)$ и $j_{\pi/2}(z, \zeta)$ аналитически продолжимы через кривые $\Gamma^{(\nu)}$ $(\nu=1, 2, \ldots, m)$ в область B^*. При этом образы двух симметричных относительно $\Gamma^{(\nu)}$ колец, ограниченных соответственно линиями $\Gamma^{(\nu)}$, $\Gamma_\rho^{(\nu)}(B^{(\nu)})$ и $\Gamma^{(\nu)}$, $\Gamma_{1/\rho}^{(\nu)}(B^{(\nu)})$, будут симметричны относительно $C^{(\nu)}$. А так как замкнутая внутренность $l^{(\nu)}$ не содержит точек $w=0$ и $w=\infty$, то и замкнутая внутренность симметричной ей относительно $C^{(\nu)}$ кривой $\tilde{l}^{(\nu)}$ также не содержит этих точек.

Следовательно, функции $j_0(z, \zeta)$ и $j_{\pi/2}(z, \zeta)$ и в расширенной области B^* принимают значения ∞ и 0 только в точках $z=\infty$ и $z=\zeta$ соответственно. Поэтому

функции

$$\frac{j_{\pi/2}(z, \zeta)}{j_0(z, \zeta)}, \quad \frac{(z-\zeta)^2}{j_{\pi/2}(z, \zeta)\, j_0(z, \zeta)}$$

регулярны в области B^* (даже в $\overline{B}^*$) и выпускают в ней значение нуль. Если к тому же учесть, что приращения аргументов этих функций при обходе каждой граничной кривой области B^* равны нулю (так как кривая $\tilde{l}^{(\nu)}$ и ее внутренность не содержат начала), то придем к выводу, что функции $R(z, \zeta)$ и $P(z, \overline{\zeta})$ регулярны в области B^*.

Свойство 3. *По совокупности аргументов функции $R(z, \zeta)$ и $P(z, \overline{\zeta})$ регулярны в бицилиндрических областях $\overline{B}\times\overline{E}$ и $\overline{E}\times\overline{B}$, где $\overline{E}$ — произвольная замкнутая подобласть B.*

Приступая к доказательству, заметим, что под регулярностью функций в бицилиндрических областях $\overline{B}\times\overline{E}$ и $\overline{E}\times\overline{B}$ понимается регулярность в произведении более широких открытых областей, содержащих соответственно $\overline{B}$ и $\overline{E}$. В качестве области, содержащей множество $\overline{E}$, всегда можно выбрать область B_r $(1 < r < \infty)$, ограниченную линией уровня Γ_r. С учетом (4.39) третье свойство равносильно утверждению: для любой области B_r найдется область $B^* \supset \overline{B}$, удовлетворяющая двум условиям:

а) при каждом фиксированном $\zeta \in B_r$ функции $R(z, \zeta)$ и $P(z, \overline{\zeta})$ регулярны по z в области B^*;

б) при каждом фиксированном $z \in B^*$ функция $R(z, \zeta)$ регулярна по ζ, а $P(z, \overline{\zeta})$ — по $\overline{\zeta}$ в области B_r.

По заданной области B_r построим, как при доказательстве второго свойства, область $B^* \supset \overline{B}$, ограниченную линиями $\Gamma_{1/2}^{(\nu)}(B^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$. Тогда согласно свойству 2 для этой области B^* условие а) автоматически выполняется. Покажем, что б) также имеет место, причем раздельно рассмотрим случаи, когда точка z лежит на границе Γ области B и когда точка $z \in B^*$, но лежит вне области $\overline{B}$ (если $z \in B$, то по свойству 1 условие б) заведомо выполняется).

1) Точка z лежит на границе Γ области B.

Пусть фиксировано произвольное $z' \in \Gamma$. Значения функций $R(z', \zeta)$ и $P(z', \overline{\zeta})$ при каждом значении аргумента $\zeta \in B_r$

задаются с помощью пределов

$$R(z', \zeta) = \lim_{n\to\infty} R(z_n, \zeta),$$

$$P(z', \overline{\zeta}) = \lim_{n\to\infty} P(z_n, \overline{\zeta}),$$

где z_n — последовательность точек из области B, сходящаяся к граничной точке z'. Существование пределов вытекает из регулярности функций $R(z, \zeta)$ и $P(z, \overline{\zeta})$ по аргументу z в замкнутой области $\overline{B}$.

Докажем, что последовательности функций $\{R(z_n, \zeta)\}$ и $\{P(z_n, \overline{\zeta})\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ сходятся равномерно к предельным функциям внутри области B_r. Учитывая уравнения симметрии (4.39), можно считать заданными граничное значение второго аргумента ζ' и последовательность точек $\zeta_n \to \zeta'$ из области B, а вместо функций $R(z', \zeta)$, $P(z', \overline{\zeta})$ рассматривать функции

$$\left.\begin{aligned} R(z, \zeta') &= \lim_{n\to\infty} R(z, \zeta_n), \\ P(z, \overline{\zeta}') &= \lim_{n\to\infty} P(z, \overline{\zeta}_n) \end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

и доказывать равномерную сходимость по z внутри области B_r последовательностей функций $\{R(z, \zeta_n)\}$ и $\{P(z, \overline{\zeta}_n)\}$.

Кроме того, поскольку последовательность точек $\zeta_n \in B$ сходится к граничной точке ζ', то замкнутой области $\overline{B}_r$ может принадлежать лишь конечное число точек этой последовательности, отбрасывание которых не влияет на сходимость изучаемых последовательностей функций. Поэтому будем полагать, что все точки сходящейся последовательности $\{\zeta_n\}$ лежат вне замыкания $\overline{B}_r$.

Рассмотрим две последовательности функций: $\left\{\frac{1}{j_0(z, \zeta_n)}\right\}$ и $\left\{\frac{1}{j_{\pi/2}(z, \zeta_n)}\right\}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Каждая функция из этих последовательностей регулярна и однолистна в некоторой области $B_{r'}$, $1 < r' < r$, содержащей замыкание $\overline{B}_r$, так как функции $j_0(z, \zeta_n)$ и $j_{\pi/2}(z, \zeta_n)$ обращаются в нуль только в точке $z = \zeta_n$, которая лежит вне $\overline{B}_r$,

а последовательность точек $\{\zeta_n\}$ сходится к граничной точке области B.

Разложения функций $\frac{1}{j_0(z, \zeta_n)}$ и $\frac{1}{j_{\pi/2}(z, \zeta_n)}$ в ряд Тейлора в окрестности $z=\infty$ имеют вид

$$z^{-1}+c_2z^{-2}+\ldots, \tag{4.42}$$

что вытекает из принадлежности $j_0(z, \zeta_n)$ и $j_{\pi/2}(z, \zeta_n)$ классу $\Sigma(B)$.

Но известно, что нормированное согласно (4.42) семейство регулярных и однолистных в области $B_{r'}$ функций компактно в $B_{r'}$ (см., например, Г. М. Голузин [7], стр. 23), а потому и равномерно ограничено внутри $B_{r'}$, а в замкнутой области $\overline{B}_r \subset B_{r'}$ ограничено. Следовательно, в замкнутой области $\overline{B}_r$ имеем неравенства

$$0<m<|j_0(z, \zeta_n)|,$$
$$0<m<|j_{\pi/2}(z, \zeta_n)|,$$

где m — постоянная.

Далее, функции $\frac{1}{j_0(z, \zeta_n)}$ и $\frac{1}{j_{\pi/2}(z, \zeta_n)}$, будучи регулярными и однолистными в области B_r, тем самым регулярны и однолистны в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, т. е. во внешности некоторой окружности радиуса R.

Но тогда по известной теореме Кёбе [1] о покрытиях образ $|z|>R$ при отображении каждой из этих функций содержит круг радиуса $\frac{1}{4R}$, а потому на границе Γ_r области B_r и подавно будут иметь место неравенства

$$|j_0(z, \zeta_n)|<M,$$
$$|j_{\pi/2}(z, \zeta_n)|<M,$$

где $M=4R$.

Из оценок сверху и снизу функций $j_0(z, \zeta_n)$ и $j_{\pi/2}(z, \zeta_n)$ на границе Γ_r заданной области B_r получаем неравенства

$$0<m<|j_0(z, \zeta_n)|<M,$$
$$0<m<|j_{\pi/2}(z, \zeta_n)|<M. \tag{4.43}$$

Функции $R(z, \zeta_n)$ и $P(z, \overline{\zeta}_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ регулярны в области B и тем самым в замкнутой области $\overline{B}_r$. Их дейст-

вительные части согласно (18) определяются по формулам

$$\operatorname{Re} R(z, \zeta_n) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(z-\zeta_n)^2}{j_0(z, \zeta_n)\, j_{\pi/2}(z, \zeta_n)} \right|,$$

$$\operatorname{Re} P(z, \overline{\zeta}_n) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{j_{\pi/2}(z, \zeta_n)}{j_0(z, \zeta_n)} \right|.$$

В силу неравенств (4.43) на границе Γ_r области B_r правые части этих неравенств ограничены сверху и снизу числами, не зависящими от номера n. По принципу максимума для

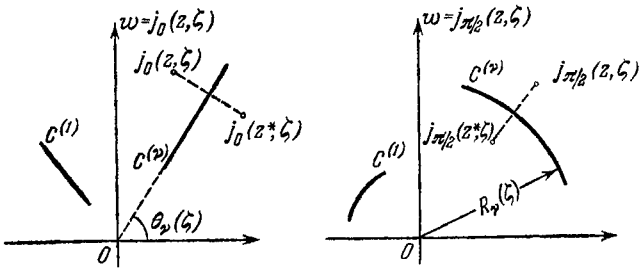

Рис. 3.

гармонических функций эта ограниченность реальных частей функций $R(z, \zeta_n)$ и $P(z, \overline{\zeta}_n)$ будет иметь место и в замкнутой области $\overline{B}_r$, т. е.

$$m_1 < \operatorname{Re} R(z, \zeta_n) < M_1,$$

$$m_1 < \operatorname{Re} P(z, \overline{\zeta}_n) < M_1,$$

где m_1 и M_1 — некоторые постоянные. Отсюда следует, что семейства функций $\{R(z, \zeta_n)\}$ и $\{P(z, \overline{\zeta}_n)\}$ — нормальные в области B_r, а из существования пределов в (4.41) вытекает компактность этих семейств в B_r, а из компактности и (4.41) — равномерная сходимость последовательностей функций $\{R(z, \zeta_n)\}$ и $\{P(z, \overline{\zeta}_n)\}$ внутри области B_r.

Наконец, по теореме Вейерштрасса заключаем, что предельные функции $R(z, \zeta')$ и $P(z, \overline{\zeta'})$ регулярны в области B_r. Больше того, в этом случае функции $R(z, \zeta')$ и $P(z, \overline{\zeta'})$ регулярны во всей области B, ибо подобласть B_r $(1 < r < \infty)$ задавалась произвольной.

2) Точка $z \in B^*$ и лежит вне области $\overline{B}$.

Пусть задано любое z из области B^*, не принадлежащее замыканию $\overline{B}$. Обозначим его через z^*. Точка z^* лежит во внутренности одной из граничных кривых $\Gamma^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ (см. рис. 3).

При любом конечном $\zeta \in B_r$ значения функций $j_0(z^*, \zeta)$ и $j_{\pi/2}(z^*, \zeta)$, образуемые в результате аналитического продолжения через кривую $\Gamma^{(\nu)}$, однозначно найдутся соответственно через $j_0(z, \zeta)$ и $j_{\pi/2}(z, \zeta)$ (точка z симметрична точке z^* относительно $\Gamma^{(\nu)}$) из условия симметрии относительно кривой и окружности. Именно:

$$\left.\begin{aligned} j_0(z^*, \zeta) &= \overline{j_0(z, \zeta)}\, e^{2i\theta_\nu(\zeta)}, \\ j_{\pi/2}(z^*, \zeta) &= \frac{R_\nu^2(\zeta)}{\overline{j_{\pi/2}(z, \zeta)}}, \end{aligned}\right\} \tag{4.44}$$

где $z^* \in B^* \cap b^{(\nu)}$, $\zeta \in B_{r,\infty}$, $R_\nu(\zeta)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ — радиус образа $\Gamma^{(\nu)}$ при отображении функцией $j_{\pi/2}(z, \zeta)$ для фиксированного $\zeta \in B_r$, а $\theta_\nu(\zeta)$ — угол наклона к вещественной оси образа кривой $\Gamma^{(\nu)}$ при отображении функцией $j_0(z, \zeta)$. Угол $\theta_\nu(\zeta)$ определяется с точностью до слагаемого вида $2\pi k$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Из (4.44) для $z^* \in B^* \cap b^{(\nu)}$ и $\zeta \in B_{r,\infty}$ получаем

$$\overline{P(z^*, \overline{\zeta})} = R(z, \zeta) + [\ln R_\nu(\zeta) + i\theta_\nu(\zeta)] - \ln(z - \zeta),$$
$$R(z^*, \zeta) = \overline{P(z, \overline{\zeta})} - [\ln R_\nu(\zeta) + i\theta_\nu(\zeta)] + \ln(z^* - \zeta).$$

Если ввести обозначения

$$K_\nu(\zeta) = \ln R_\nu(\zeta) + i\theta_\nu(\zeta) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m),$$

то последние равенства примут вид

$$\left.\begin{aligned} \overline{P(z^*, \overline{\zeta})} &= R(z, \zeta) + [K_\nu(\zeta) - \ln(z - \zeta)], \\ R(z^*, \zeta) &= \overline{P(z, \overline{\zeta})} - [K_\nu(\zeta) - \ln(z^* - \zeta)]. \end{aligned}\right\} \tag{4.45}$$

Для анализа функций $K_\nu(\zeta)$ полезно напомнить, что на каждой граничной кривой $\Gamma^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ при $\zeta \in B_{1,\infty}$

имеют место соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \ln j_0(z', \zeta) - \overline{\ln j_0(z', \zeta)} &= 2i\theta_\nu(\zeta), \\ \ln j_{\pi/2}(z', \zeta) + \overline{\ln j_{\pi/2}(z', \zeta)} &= 2\ln R_\nu(\zeta), \\ \overline{P(z', \bar{\zeta})} - R(z', \zeta) &= K_\nu(\zeta) - \ln(z' - \zeta), \end{aligned}\right\} \qquad (4.46)$$

выражающие геометрическую сущность отображений области B функциями $j_0(z, \zeta)$ и $j_{\pi/2}(z, \zeta)$. Если фиксировать значение z' на границе $\Gamma^{(\nu)}$, то функции $\overline{P(z', \bar{\zeta})}$ и $R(z', \zeta)$ согласно предыдущему случаю регулярны по аргументу ζ в области B, а поэтому функция $K_\nu(\zeta) - \ln(z' - \zeta)$ при каждом $\nu = 1, 2, \ldots, m$ также регулярна в области B.

Переписав равенства (4.45) еще раз в виде

$$\overline{P(z^*, \bar{\zeta})} = R(z, \zeta) + [K_\nu(\zeta) - \ln(z' - \zeta)] + \ln\frac{z' - \zeta}{z - \zeta},$$

$$R(z^*, \zeta) = \overline{P(z, \bar{\zeta})} - [K_\nu(\zeta) - \ln(z' - \zeta)] + \ln\frac{z^* - \zeta}{z' - \zeta},$$

убеждаемся в том, что функции $R(z^*, \zeta)$ и $\overline{P(z^*, \bar{\zeta})}$ регулярны по ζ в области $B_{r,\infty}$. В точке $\zeta = \infty$ все функции, стоящие в правых частях этих равенств, регулярны, следовательно, $R(z^*, \zeta)$ и $\overline{P(z^*, \bar{\zeta})}$ регулярны по ζ в заданной области B_r. Третье свойство доказано.

Свойство 4. *Частные производные любого порядка от функций $R(z, \zeta)$ и $P(z, \bar{\zeta})$ также регулярны в бицилиндрических областях $\bar{B} \times \bar{E}$ и $\bar{E} \times \bar{B}$, где $\bar{E}$ — произвольная замкнутая подобласть B.*

Это свойство прямо вытекает из предыдущего.

Свойство 5. *При фиксированном $\zeta \in B$ разложения функций $R(z, \zeta)$ и $P(z, \bar{\zeta})$ в ряд по тейлоровской системе имеют вид*

$$R(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\zeta)\varphi_n(z),$$

$$P(z, \bar{\zeta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_n(\zeta)}\varphi_n(z),$$

где оба ряда сходятся абсолютно и первый равномерно по z, а второй — по z и ζ внутри области B.

Это свойство доказано равенствами (4.19) и (4.21).

Замечание. В дальнейшем (следствие 2 теоремы 4.8) и для первого ряда доказывается равномерная сходимость по двум переменным внутри области B.

4°. Оценки для функций лорановской системы

Теорема 4.7. *Для функций тейлоровской системы* $\{\varphi_n(z)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ *при каждом* $z \in \overline{B}$ *справедливо неравенство*

$$|\varphi_n^{(\nu)}(z)| \leqslant M_\nu (1+\varepsilon)^n \rho^{-(n+\nu)}, \tag{4.47}$$

где ε — *произвольное положительное число, а* M_ν *зависит лишь от* ν $(\nu=0, 1, \ldots)$ *и* ε.

Фиксируем произвольное $\zeta \in B$ и рассмотрим функцию $P(z, \overline{\zeta})$ от аргумента z. По свойству 1 функция $P(z, \overline{\zeta})$ регулярна в замкнутой области $\overline{B}$, а по свойству 5 ее разложение в ряд по тейлоровской системе имеет вид

$$P(z, \overline{\zeta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_n(\zeta)}\, \varphi_n(z).$$

Для коэффициентов $\overline{\varphi_n(\zeta)}$ этого разложения по формулам (4.14) с учетом (11) имеем интегральное представление

$$\overline{\varphi_n(\zeta)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma P(z, \overline{\zeta})\, d\,\overline{\varphi_n(z)}. \tag{4.48}$$

Так как функция $P(z, \overline{\zeta})$ непрерывна на границе Γ области B, то интеграл в (4.48) можно брать непосредственно по границе Γ. Но на Γ выполняется соотношение (20), с помощью которого (4.48) преобразовывается к виду

$$\overline{\varphi_n(\zeta)} = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma P(z, \overline{\zeta})\, \Phi_n'(z)\, dz.$$

В последнем равенстве подынтегральная функция регулярна в области $B_{1,\infty}$ и непрерывна на Γ (даже регулярна), а поэтому интегрирование по границе Γ можно заменить интегрированием по линии уровня Γ_ρ, $1 < \rho < \infty$ (заметим, что ρ никак не связано с фиксированным значением $\zeta \in B$).

Следовательно, имеем

$$\overline{\varphi_n(\zeta)} = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho} P(z, \overline{\zeta})\,\Phi_n'(z)\,dz.$$

Дифференцируя тождество (4.27), получим

$$\Phi_n'(z) = P_n'(z) + h_n'(z),$$

где функция $h_n'(z)$ регулярна в $\overline{B}$ и имеет в точке $z=\infty$ по крайней мере двукратный нуль. Теперь из последних двух равенств и интегральной теоремы Коши для многосвязных областей (или теоремы о вычетах) получим

$$\overline{\varphi_n(\zeta)} = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho} P(z, \overline{\zeta})\,P_n'(z)\,dz. \tag{4.49}$$

Пользуясь регулярностью функции $P(z, \overline{\zeta})$ по аргументу $\overline{\zeta}$ в области B, продифференцируем равенство (4.49) ν раз по $\overline{\zeta}$ ($\nu=1, 2, \ldots$). В результате будем иметь

$$\overline{\varphi_n^{(\nu)}(\zeta)} = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho} P_{\overline{\zeta}}^{(\nu)}(z, \overline{\zeta})\,P_n'(z)\,dz. \tag{4.50}$$

По свойствам 3 и 4 функции $P(z, \overline{\zeta})$ и $P_{\overline{\zeta}}^{(\nu)}(z, \overline{\zeta})$ регулярны по совокупности аргументов z и $\overline{\zeta}$ в бицилиндрической области $\overline{B}_\rho \times \overline{B}$, а тогда по фундаментальной теореме Хартогса (см., например, Б. В. Шабат [1] (стр. 280)) они непрерывны в этой области и, следовательно, ограничены. Таким образом, для $z \in \Gamma_\rho$ и $\zeta \in \overline{B}$ имеем

$$\left|P_{\overline{\zeta}}^{(\nu)}(z, \overline{\zeta})\right| \leqslant A_\nu(\rho) \qquad (\nu=0, 1, \ldots),$$

где под $P_{\overline{\zeta}}^{(0)}(z, \overline{\zeta})$ понимается сама функция $P(z, \overline{\zeta})$.

Из (4.49) и (4.50), учитывая оценки (4.33) и последнюю, получим

$$\left|\varphi_n^{(\nu)}(\zeta)\right| \leqslant \frac{l_\rho}{2\pi} A_\nu(\rho)\, M(\varepsilon_1)(1+\varepsilon_1)^n \rho^n, \tag{4.51}$$

где l_ρ — длина линии уровня Γ_ρ.

Оценка (4.51), в которой правая часть не зависит от ζ, верная для любого $\zeta \in B$, в силу непрерывности функций $\varphi_n^{(\nu)}(\zeta)$ в замкнутой области $\overline{B}$ будет иметь место и на границе Γ области B.

Теперь по любому заданному $\varepsilon > 0$, пользуясь произвольностью чисел $\varepsilon_1 > 0$ и ρ $(1 < \rho < \infty)$, положим

$$1 + \varepsilon_1 = (1 + \varepsilon)^{1/2},$$
$$\rho = (1 + \varepsilon)^{1/2}.$$

Тогда на границе Γ из (4.51) получим неравенство

$$\left| \varphi_n^{(\nu)}(z) \right| \leqslant M_\nu(\varepsilon)(1 + \varepsilon)^n.$$

Учитывая, что функция $\varphi_n^{(\nu)}(z)$ имеет в точке $z = \infty$ нуль точно $(n + \nu)$-й кратности, по лемме 4.2 получим оценку (4.47), в которой под числом ρ уже понимается, как обычно, $\exp\{G(z, \infty; B)\}$.

Теорема 4.8. *Для функций сопряженной системы* $\{\Phi_n(z)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *при любом конечном* $z \in \overline{B}$ *выполняются неравенства*

$$|\Phi_n(z)| \leqslant \begin{cases} M(1 + \varepsilon)^n \rho^n, & z \in B_{R_0, \infty}, \\ M(1 + \varepsilon)^n R_0^n, & z \in \overline{B}_{1, R_0}, \end{cases} \tag{4.52}$$

$$|\Phi_n'(z)| \leqslant M(1 + \varepsilon)^{n-1} \rho^{n-1}, \tag{4.53}$$

где ε — *произвольное положительное число,* M *зависит лишь от* ε, *а* R_0 *определено равенством* (4.36).

Фиксируем произвольное $\zeta \in B$ и рассмотрим функцию $R(z, \zeta)$. По свойству 1 функция $R(z, \zeta)$ регулярна в замкнутой области $\overline{B}$, а по свойству 5 ее разложение в ряд по тейлоровской системе имеет вид

$$R(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\zeta) \varphi_n(z).$$

Для коэффициентов разложения $h_n(\zeta)$ по формулам (4.14) с учетом (11) имеем интегральное представление

$$h_n(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(z, \zeta)\, d\overline{\varphi_n(z)}.$$

Повторяя все выкладки доказательства теоремы 4.7, придем к выводу, что на границе Γ области B имеет место неравенство

$$\left| h_n^{(\nu)}(z) \right| \leqslant m_\nu(\varepsilon)(1 + \varepsilon)^n, \tag{4.54}$$

где $m_\nu(\varepsilon)$ — постоянная, зависящая только от ν и ε. В частности, при $\nu=0$ и $\nu=1$ получаем оценки для $z\in\Gamma$:

$$\left.\begin{aligned} |h_n(z)| &\leqslant m_0(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n, \\ |h_n'(z)| &\leqslant m_1(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n. \end{aligned}\right\} \tag{4.55}$$

По принципу максимума модуля для аналитических функций неравенства (4.54) и (4.55), верные на границе Γ, выполняются и в замкнутой области $\overline{B}$.

Из тождества (4.27) и неравенств (4.55), (4.33), (4.37) вытекают оценки (4.52) и (4.53).

Следствие 1. *Для производных ν-го порядка ($\nu=1, 2, \ldots$) от функций сопряженной системы при любом $z\in B_{1,\infty}\cup\Gamma$ имеет место асимптотическая оценка*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\Phi_n^{(\nu)}(z)|^{1/n}\leqslant\rho, \tag{4.56}$$

равномерная на каждом ограниченном множестве из $\overline{B}$.

Это утверждение непосредственно следует из тождества (4.27), неравенств (4.35) и (4.54).

Следствие 2 (дополнение к свойству 5 функции $R(z, \zeta)$). *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n(\zeta)\varphi_n(z)$ сходится равномерно по двум переменным z и ζ внутри области B.*

Пусть задано произвольное замкнутое множество $\overline{E}\subset B$. Возьмем любую область B_r ($1<r<\infty$), содержащую множество E. Когда z и ζ принадлежат $\overline{B}_r$, то для общего члена рассматриваемого ряда в силу неравенств (4.47) и 4.55) имеем оценку

$$(|h_n(\zeta)\varphi_n(z)|\leqslant m_0(\varepsilon)M_0(\varepsilon)(1+\varepsilon)^{2n}r^{-n}\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots),$$

из которой и вытекает требуемое заключение, если взять ε достаточно малым.

В заключение параграфа приведем без доказательства легко выводимые простейшие геометрические свойства функций лорановской системы, именно:

1) при конформном отображении области B функцией $F(z)\in\Sigma(B)$ на область D, ограниченную замкнутыми аналитическими кривыми Жордана, между функциями лорановских

систем областей B и D выполняются соотношения

$$\varphi_n(F(z);\ D) \equiv \varphi_n(z;\ B),$$

$$\Phi_n(F(z);\ D) \equiv \Phi_n(z;\ B) + A_n,$$

где A_n — постоянные;

2) при любом $\theta \in [0,\ \pi)$ функция

$$\Phi_n(z) + e^{2i\theta}\varphi_n(z) \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

преобразует граничные кривые $\Gamma^{(\nu)}$ $(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ в отрезки параллельных прямых наклона θ к вещественной оси;

3) функция $w = \Phi_1(z)$ однолистно отображает область B на бесконечную область плоскости w, ограниченную выпуклыми аналитическими кривыми (Шиффер [4]);

4) функция $\dfrac{\varphi_1'(z)}{\Phi_1'(z)}$ отображает область B на $2m$-листный единичный круг.

§ 3. Разложение в ряд по тейлоровской системе

1°. Равномерная сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(z)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n'(z)$

Теорема 4.9. *Пусть дана произвольная последовательность чисел* $\{\lambda_n\}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, *для которой*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |\lambda_n|^{1/n} = r, \qquad 0 \leqslant r \leqslant \infty. \tag{4.57}$$

Пусть образованы ряд по тейлоровской системе функций и ряд по производным этой системы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(z), \tag{4.58}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n'(z). \tag{4.59}$$

Тогда:

1) *если* $r=\infty$, *то на любой линии уровня* Γ_ρ, $1\leqslant\rho<\infty$, *ряды* (4.58) *и* (4.59) *не могут сходиться равномерно*;

2) *если* $1\leqslant r<\infty$, *то ряды* (4.58) *и* (4.59) *сходятся абсолютно и равномерно внутри области* B_r, *но на любой линии уровня* Γ_ρ, $1\leqslant\rho<r$, *если и сходятся, то неравномерно*;

3) *если* $r<1$, *то ряды* (4.58) *и* (4.59) *сходятся абсолютно и равномерно в замкнутой области* $\overline{B}$.

Рассмотрим сначала ряд (4.58).

Случай $r=\infty$. Предположим противное, т. е. на некоторой линии уровня Γ_ρ, $1\leqslant\rho<\infty$, ряд (4.58) сходится равномерно. Обозначив его сумму через $f(z)$, будем иметь

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k(z).$$

Помножив это разложение на $\Phi_n'(z)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ и интегрируя обе части нового равенства по линии уровня Γ_ρ, придем после почленного интегрирования в правой части к равенству

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}f(z)\,\Phi_n'(z)\,dz=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\varphi_k(z)\Phi_n'(z)\,dz. \quad (4.60)$$

Учитывая регулярность функций $\varphi_k(z)$ тейлоровской системы в замкнутой области $\overline{B}$, а также регулярность функций $\Phi_n(z)$ в $\overline{B}$ с выколотой точкой $z=\infty$, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\varphi_k(z)\Phi_n'(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\varphi_k(z)\,d\Phi_n(z)=-\delta_{kn}$$

$$(k,\ n=1,\ 2,\ \ldots)$$

(использованы интегральная теорема Коши для многосвязных областей и равенство (4.28в)). Теперь (4.60) преобразуется к виду

$$\lambda_n=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho}f(z)\,\Phi_n'(z)\,dz, \quad (4.61)$$

Так как $f(z)$ непрерывна на Γ_ρ, а для $\Phi_n'(z)$ имеем оценку (4.53), то из (4.61) получим

$$|\lambda_n| \leqslant A(1+\varepsilon)^n \rho^n \quad (n=1, 2, \ldots),$$

где ε — произвольное положительное число, а A зависит только от ε. Это неравенство противоречит условию $r=\infty$.

Случай $1 \leqslant r < \infty$. Возьмем произвольное число r_1: $r < r_1 < \infty$. По теореме 4.7 для функций тейлоровской системы в замкнутой области $\overline{B}_{r_1}$ выполняется неравенство

$$|\varphi_n(z)| \leqslant M_0(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n r_1^{-n},$$

а из условия (4.57) вытекает оценка

$$|\lambda_n| \leqslant A(1+\varepsilon)^n r^n, \tag{4.62}$$

где A зависит лишь от ε. Последние неравенства позволяют оценить общий член ряда (4.58) для $z \in \overline{B}_{r_1}$. Именно:

$$|\lambda_n \varphi_n(z)| \leqslant A M_0 \left[(1+\varepsilon)^2 \frac{r}{r_1}\right]^n.$$

Очевидно, что, пользуясь произвольностью положительного числа ε, можно достигнуть неравенства

$$(1+\varepsilon)^2 \frac{r}{r_1} = q < 1,$$

откуда и следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (4.58) внутри области B_r. Невозможность равномерной сходимости ряда (4.58) на линии уровня Γ_ρ, $1 \leqslant \rho < r$, доказывается так же, как в предыдущем случае.

Случай $r < 1$. Для функций тейлоровской системы по теореме 4.7 в $\overline{B}$ имеем оценку

$$|\varphi_n(z)| \leqslant M_0(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n,$$

из которой, согласно (4.62), и вытекает абсолютная и равномерная сходимость ряда (4.58) в $\overline{B}$.

Анализ сходимости ряда (4.59) аналогичный.

2°. Разложение в ряд по тейлоровской системе

Теорема 4.10. *Любая функция $f(z)$, регулярная в области B_r, $1 \leqslant r < \infty$, с тейлоровским разложением*

около $z=\infty$ *вида*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{-k} \tag{4.63}$$

разлагается в ряд по тейлоровской системе функций

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(z),$$

сходящийся абсолютно и равномерно внутри области B_r.

При этом такое разложение единственно, а коэффициенты разложения λ_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ *вычисляются по формулам*

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho} f(z)\,d\Phi_1(z)=\frac{d_1}{a_{11}}, \qquad r<\rho<\infty,\\ &\lambda_n=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho} f(z)\,d\Phi_n(z)=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & d_1\\ a_{12} & a_{22} & \ldots & 0 & d_2\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{n-1,n} & d_n \end{vmatrix}}{a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{nn}}\\ &\qquad\qquad (n=2,\ 3\ \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{4.64}$$

и удовлетворяют неравенству

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\lambda_n|^{1/n}\leqslant r. \tag{4.65}$$

Если функция $f(z)$ *регулярна в области* B_r, $1<r<\infty$, *но не регулярна ни в какой более широкой области* $B_{r'}$, $1<r'<r$, *то в* (4.65) *имеет место знак равенства.*

Если функция $f(z)$ *регулярна во всей области* B, *то площадь образа* B *(конечная или бесконечная) при отображении функцией* $f(z)$ *вычисляется по формуле*

$$\sigma(f)=\iint\limits_B |f'(z)|^2\,d\sigma=\pi\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2. \tag{4.66}$$

Пусть задана произвольная функция $f(z)$, регулярная в области B_r, $1\leqslant r<\infty$. Найдем по интегральным формулам (4.64) числа λ_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ и построим формально ряд по тейлоровской системе

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(z). \tag{4.67}$$

Заметим, что значение интеграла $\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho} f(z)\,\Phi_n'(z)\,dz$, определяющего λ_n, не зависит от выбора параметра $\rho\in(r,\infty)$, так как подынтегральная функция регулярна в области $B_{r,\infty}$. Кроме того, исходя из тождества $\Phi_n'(z)=P_n'(z)+h_n'(z)$, получим для чисел λ_n формулу

$$\lambda_n=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho} f(z)\,P_n'(z)\,dz,\qquad r<\rho<\infty,$$

где $P_n'(z)$ согласно (4.26) имеют вид

$$P_n'(z)=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 1\\ a_{12} & a_{22} & \dots & 0 & z\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{n-1,n} & z^{n-1}\end{vmatrix}}{a_{1n}\,a_{22}\,\dots\,a_{nn}}\quad (n=2,\ 3,\ \dots),$$

$$P_1'(z)=\frac{1}{a_{11}}. \tag{4.68}$$

Вычисляя интеграл в формуле для λ_n по теореме о вычетах (учитывая при этом равенства (4.63) и (4.68)), придем к формулам (4.64), выражающим λ_n линейно через d_1, d_2, ..., d_n.

Теперь оценим коэффициенты λ_n ряда (4.67). Из интегральных формул (4.64) с учетом оценки (4.53) будем иметь при $n=1,\ 2,\ \dots$

$$|\lambda_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho}|f(z)|\,|\Phi_n'(z)|\,|dz|\leqslant A(\rho)\,M(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n\rho^n,$$

откуда в силу произвольности чисел $\varepsilon>0$ и $\rho\in(r,\infty)$ получим оценку (4.65). Но тогда по теореме 4.9 ряд (4.67) сходится абсолютно и равномерно внутри области B_r. Обозначим его сумму, регулярную в области B_r, через $f_1(z)$, т. е.

$$f_1(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k(z),$$

и докажем тождественность функций $f_1(z)$ и $f(z)$. Умножив это разложение на $\Phi_n'(z)$ и интегрируя обе части нового равенства по линии уровня Γ_ρ, $r<\rho<\infty$, придем после

почленного интегрирования с учетом (4.28в) к равенству

$$\lambda_n = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\rho} f_1(z)\, d\Phi_n(z).$$

Если обозначить коэффициенты тейлоровского разложения функции $f_1(z)$ около $z=\infty$ через $d'_1, d'_2, \ldots$, то отсюда с помощью теоремы о вычетах получим формулы (4.64), выражающие коэффициенты λ_n $(n=1, 2, \ldots)$ линейно через $d'_1, d'_2, \ldots, d'_n$. Фиксируя n, замечаем, что одной и той же системе n линейных уравнений удовлетворяют коэффициенты $d_1, d_2, \ldots, d_n$ и $d'_1, d'_2, \ldots, d'_n$. Но легко видеть, что определитель этой системы отличен от нуля, а поэтому $d_n = d'_n$, и, следовательно, $f(z) \equiv f_1(z)$.

Единственность для $f(z)$ разложения в ряд по тейлоровской системе функций в области B_r прямо следует из сравнения тейлоровских коэффициентов разложений обеих частей равенства $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(z)$ около $z=\infty$, дающего для λ_n неинтегральные формулы (4.64).

Если же функция $f(z)$ регулярна в области B_r, $1 < r < \infty$, но не регулярна ни в какой более широкой области, ограниченной линией уровня $\Gamma_{r'}$, то должно иметь место равенство в (4.65), ибо в противном случае по теореме 4.9 пришли бы к равномерной сходимости ряда (4.67) в некоторой области $B_{r'}$, $1 < r' < r$, откуда следовала бы регулярность его суммы, т. е. функции $f(z)$, в области $B_{r'}$, что противоречит условию.

Наконец, если функция $f(z)$ регулярна во всей области B и имеет конечную площадь образа B, т. е. $f'(z) \in l^2(B)$, то формула (4.66) уже доказана равенством (4.15), а если интеграл $\iint\limits_B |f'(z)|^2 d\sigma$ расходится, то должен расходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$, так как из его сходимости по теореме Рисса—Фишера следует принадлежность функции $f'(z)$ классу $l^2(B)$. В последнем случае именно в таком смысле и понимается равенство (4.66). Теорема доказана.

Следствие. *Производная любой функции $f(z)$, регулярной в области B_r, $1 \leqslant r < \infty$, с тейлоровским разложением*

около $z=\infty$ вида (4.63) *разлагается в ряд по производным тейлоровской системы функций*

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n'(z),$$

сходящийся абсолютно и равномерно внутри B_r.

При этом такое разложение единственно, а коэффициенты разложения λ_n вычисляются по формулам (4.64) *и удовлетворяют неравенству* (4.65).

Все заключения этого следствия прямо вытекают из теоремы 4.10, за исключением абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n'(z)$. Последнее следует из оценок (4.65) и (4.47) при $\nu=1$.

Приведем несколько примеров разложения функций в ряд по тейлоровской системе, используемых в следующей главе.

Пример 1. При фиксированном $\zeta\in B_{R_0,\infty}$ разложить функции

$$f_1(z,\zeta)=\ln\frac{z}{z-\zeta}$$

и

$$f_2(z,\zeta)=\ln\frac{z}{z-\zeta}+R(z,\zeta)$$

в ряд по тейлоровской системе.

Если обозначить

$$r(\zeta)=\exp\{G(\zeta,\ \infty;\ B)\},\qquad R_0<r<\infty,\tag{4.69}$$

то ясно, что функция $f_1(z,\zeta)$ регулярна в области B_r, ибо B_r — односвязная область, не содержащая точек $z=0$ и $z=\zeta$. Поэтому по теореме 4.10 функция $f_1(z,\zeta)$ разлагается в области B_r в ряд по тейлоровской системе

$$f_1(z,\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(z).$$

Поскольку $f_1(z,\zeta)$ имеет в окрестности $z=\infty$ тейлоровское разложение $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\zeta^n z^{-n}$, то коэффициенты λ_n $(n=1,2,\ldots)$

можно определить по формулам (4.64):

$$\lambda_1 = \frac{\zeta}{a_{11}},$$

$$\lambda_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \zeta \\ a_{12} & a_{22} & \dots & 0 & \frac{1}{2}\zeta^2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{n-1,n} & \frac{1}{n}\zeta^n \end{vmatrix}}{a_{11}\ a_{22}\ \dots\ a_{nn}} \qquad (n=2, 3, \dots).$$

Сравнивая написанные формулы и (4.26), замечаем, что $\lambda_n = P_n(\zeta)$. Таким образом, разложение функции $f_1(z, \zeta)$ для $\zeta \in B_{R_0, \infty}$ и $z \in B_{r(\zeta)}$ имеет вид

$$f_1(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\zeta)\, \varphi_n(z). \tag{4.70}$$

Далее, функция $f_2(z, \zeta)$ также регулярна в области B_r, так как $R(z, \zeta)$ регулярна во всей области B, и ее разложение в ряд по тейлоровской системе в области B_r получим из (4.70) и (4.21):

$$f_2(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(\zeta) + h_n(\zeta)]\, \varphi_n(z).$$

Учитывая тождество (4.27), для $\zeta \in B_{R_0, \infty}$ окончательно получим

$$f_2(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\zeta)\, \varphi_n(z). \tag{4.71}$$

Пример 2. При любых фиксированных ν ($\nu = 1, 2, \dots$) и $\zeta \in B$ ($\zeta \neq \infty$) разложить функцию

$$f_\nu(z, \zeta) = \frac{(\nu-1)!}{(z-\zeta)^\nu}$$

в ряд по тейлоровской системе функций.

Снова вводя обозначение (4.69), убеждаемся в том, что функция $f_\nu(z, \zeta)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) регулярна в области B_r, а потому разлагается в этой области (по теореме 4.10) в ряд по тейлоровской системе. Коэффициенты разложения λ_n

найдем по интегральным формулам (4.64):

$$\lambda_n = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{(\nu-1)!}{(z-\zeta)^\nu} \Phi'_n(z)\, dz, \qquad r < \rho < \infty.$$

Используя, как обычно, тождество (4.27), перепишем это равенство в виде

$$\lambda_n = -\frac{(\nu-1)!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{P'_n(z)}{(z-\zeta)^\nu}\, dz, \qquad r < \rho < \infty.$$

Если написать для полиномов $P'_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ интегральную формулу Коши

$$P'_n(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{P'_n(z)}{z-\zeta}\, dz$$

(точка $z=\zeta$ лежит внутри одной из компонент линии уровня Γ_ρ, а интегрирование ведется в положительном направлении относительно области B_ρ) и сравнить ее с выражением для λ_n, то получим

$$\lambda_n = P_n^{(\nu)}(\zeta) \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Учитывая, что при $\nu > 1$ $P_j^{(\nu)}(\zeta) \equiv 0$ $(j=1, 2, \ldots, \nu-1)$, будем иметь для функции $f_\nu(z, \zeta)$ $(\nu=1, 2, \ldots)$ следующее разложение в ряд по тейлоровской системе $(\zeta \neq \infty)$:

$$f_\nu(z, \zeta) = \sum_{n=\nu}^{\infty} P_n^{(\nu)}(\zeta)\, \varphi_n(z), \qquad z \in B_{r(\zeta)}. \tag{4.72}$$

Если заданное значение ζ принадлежит замкнутому дополнению области B, т. е. $\bar{b}$, то разложение (4.72) имеет место во всей области B.

В частности, полагая $\nu=1$, из (4.72) получим

$$\frac{1}{z-\zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(\zeta)\, \varphi_n(z), \qquad z \in B_{r(\zeta)}.$$

Дифференцируя это тождество по z, получим для производной функции разложение в ряд по производным тейлоровской системы

$$-\frac{1}{(z-\zeta)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(\zeta)\, \varphi'_n(z), \qquad z \in B_{r(\zeta)}. \tag{4.73}$$

Пример 3. Разложить в ряд по тейлоровской системе функцию

$$F_\nu(z, \zeta) = \frac{(\nu-1)!}{(z-\zeta)^\nu} + R_\zeta^{(\nu)}(z, \zeta)$$

при любых заданных ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) и $\zeta \in B$ ($\zeta \neq \infty$).

По свойству 5 функций области $R(z, \zeta)$ и $P(z, \bar{\zeta})$ (и замечанию к нему) при любом фиксированном $\zeta \in B$ разложение функции $R(z, \zeta)$ в ряд по тейлоровской системе имеет вид

$$R(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\zeta)\varphi_n(z),$$

где ряд справа сходится равномерно по двум переменным z и ζ внутри области B. Применяя теорему Вейерштрасса, продифференцируем последнее равенство ν раз ($\nu = 1, 2, \ldots$) по ζ. В результате получим

$$R_\zeta^{(\nu)}(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(\nu)}(\zeta)\varphi_n(z), \tag{4.74}$$

причем написанный ряд также сходится равномерно по z и ζ внутри области B. При фиксированном $\zeta \in B$ равенство (4.74) является разложением функции $R_\zeta^{(\nu)}(z, \zeta)$ в ряд по тейлоровской системе в области B, ибо по теореме 4.10 такое равномерно сходящееся разложение единственно.

Теперь из (4.72) и (4.74) будем иметь при $\zeta \neq \infty$

$$F_\nu(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} [P_n^{(\nu)}(\zeta) + h_n^{(\nu)}(\zeta)]\varphi_n(z), \qquad z \in B_{r(\zeta)}.$$

Снова используя тождество (4.27), окончательно получим

$$F_\nu(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(\nu)}(\zeta)\varphi_n(z), \qquad z \in B_{r(\zeta)}. \tag{4.75}$$

Полагая в (4.75) $\nu = 1$, будем иметь

$$\frac{1}{z-\zeta} + R'_\zeta(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi'_n(\zeta)\varphi_n(z), \qquad z \in B_{r(\zeta)}.$$

Дифференцируя выведенное равенство по z, получим для производной функции разложение в ряд по производным

тейлоровской системы

$$R''_{z\zeta}(z, \zeta) - \frac{1}{(z-\zeta)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi'_n(\zeta)\, \varphi'_n(z), \qquad z \in B_{r(\zeta)}. \quad (4.76)$$

Замечание. Во всех разобранных примерах рассматриваемые функции имели неустранимую особенность в точке $z=\zeta$ на границе области $B_{r(\zeta)}$, а поэтому коэффициенты разложений (4.70), (4.71), (4.72) и (4.75) реализуют знак равенства в (4.65).

§ 4. Разложение в ряд типа Лорана

1°. Равномерная сходимость ряда типа Лорана

Теорема 4.11. *Пусть дана произвольная последовательность чисел Λ_n $(n=1, 2, \ldots)$, для которой*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\Lambda_n|^{1/n} = \frac{1}{R}, \qquad 0 \leqslant R \leqslant \infty. \quad (4.77)$$

Пусть образован ряд по производным сопряженной системы функций для области B:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \Phi'_n(z). \quad (4.78)$$

Тогда:

1) *если $R \leqslant 1$, то на любой линии уровня Γ_ρ, $1 < \rho < \infty$, ряд (4.78) не может сходиться равномерно;*

2) *если $1 < R < \infty$, то ряд (4.78) сходится абсолютно и равномерно на каждом замкнутом граничном кольцевом множестве $\overline{B}_{1,\rho}$, $1 < \rho < R$, но на любой линии уровня Γ_ρ, $R < \rho < \infty$, если и сходится, то неравномерно;*

3) *если $R = \infty$, то ряд (4.78) сходится абсолютно и равномерно на каждом ограниченном множестве из замкнутой области $\overline{B}$.*

Случай $R \leqslant 1$. Предположив противное, на некоторой линии уровня Γ_ρ, $1 < \rho < \infty$, будем иметь равенство

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k \Phi'_k(z),$$

где в силу равномерной сходимости ряда на Γ_ρ функция $f(z)$ непрерывна на линии уровня Γ_ρ. Умножив это равенство на $\varphi_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ и интегрируя обе части нового равенства по линии уровня Γ_ρ, придем после почленного интегрирования в правой части к равенству

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho} f(z)\,\varphi_n(z)\,dz=\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\varphi_n(z)\,\Phi_k'(z)\,dz.$$

Учитывая регулярность произведения $\varphi_n(z)\,\Phi_k'(z)$ в области $B_{1,\infty}$ и на границе Γ, а также формулу (4.28в), получим

$$\Lambda_n=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho} f(z)\,\varphi_n(z)\,dz \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Так как $f(z)$ непрерывна на Γ_ρ, а для $\varphi_n(z)$ имеем оценку (4.47), то отсюда легко оцениваем $|\Lambda_n|$:

$$|\Lambda_n|\leqslant A(\varepsilon)\,(1+\varepsilon)^n\,\rho^{-n}.$$

Последнее неравенство приводит к результату

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\Lambda_n|^{1/n}\leqslant\frac{1}{\rho}<1,$$

который противоречит условию $R\leqslant 1$.

Случай $1<R<\infty$. Возьмем произвольное число ρ: $1<\rho<R$. По теореме 4.8 для функций $\Phi_n'(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ на замкнутом кольцевом множестве $\overline{B}_{1,\rho}$ имеем равномерную оценку

$$|\Phi_n'(z)|\leqslant M(\varepsilon)\,(1+\varepsilon)^n\,\rho^n \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

а из условия (4.77) для коэффициентов Λ_n имеем неравенство

$$|\Lambda_n|\leqslant A(\varepsilon)\,(1+\varepsilon)^n\,R^{-n} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Тогда для членов ряда (4.78) из последних неравенств получим оценку

$$|\Lambda_n\Phi_n'(z)|\leqslant A(\varepsilon)\,M(\varepsilon)\,(1+\varepsilon)^{2n}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n.$$

Поскольку $\rho < R$, то можно выбрать столь малое $\varepsilon > 0$, что будет выполняться неравенство

$$(1+\varepsilon)^2 \frac{\rho}{R} = q < 1,$$

которое и достаточно для абсолютной и равномерной сходимости ряда (4.78) на множестве $\overline{B}_{1,\rho}$. Невозможность равномерной сходимости ряда на любой линии уровня Γ_ρ, $R < \rho < \infty$, доказывается так же, как в первом случае.

Случай $R = \infty$. Доказательство ничем не отличается от рассмотренного во втором случае.

Следствие 1. *В обозначениях теоремы* 4.11, *если* $R > 1$, *то сумма ряда* (4.78) *является регулярной функцией на граничном кольцевом множестве* $B_{1,R}$ *и непрерывна на границе* Γ *области* B. *Кроме того, сумма ряда* (4.78) *на множестве* $B_{1,R}$ *имеет однозначную первообразную, также непрерывную на границе* Γ.

Регулярность суммы ряда (4.78) на множестве $B_{1,R}$ и ее непрерывность на границе Γ вытекают из равномерной сходимости этого ряда на каждом замкнутом кольцевом множестве $\overline{B}_{1,\rho}$, $1 < \rho < R$. Напомним, что граничное кольцевое множество $B_{1,R}$ при конечном R состоит из стольких областей, сколько компонент имеет линия уровня Γ_R (а их всегда не более m), а при $R = \infty$ множество $B_{1,R}$ представляет собой область B с выколотой точкой $z = \infty$.

Так как ряд (4.78) сходится равномерно внутри каждой из областей, составляющих граничное кольцевое множество $B_{1,R}$, то из конструкции ряда усматриваем, что его сумма имеет однозначную первообразную в слагаемых областях, т. е. на множестве $B_{1,R}$. Непрерывность первообразной на границе Γ области B следует из непрерывности суммы ряда (4.78) на границе Γ.

Следствие 2. *Пусть дана последовательность чисел* Λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, *для которой*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\Lambda_n|^{1/n} = \frac{1}{R},$$

и образован ряд по сопряженной системе функций

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \Phi_n(z). \tag{4.79}$$

Пусть выполняется условие

$$R > R_0, \tag{4.80}$$

где R_0 определено равенством (4.36).

Тогда ряд (4.79) *сходится абсолютно и равномерно на каждом замкнутом граничном множестве $\overline{B}_{1,\rho}$, $1 < \rho < R$. Если R конечно, то на любой линии уровня Γ_ρ, $R < \rho < \infty$, ряд* (4.79) *не может сходиться равномерно.*

Абсолютная и равномерная сходимость ряда (4.79) на каждом множестве $\overline{B}_{1,\rho}$, $1 < \rho < R$, вытекает из оценки (4.52). Если допустить при конечном R равномерную сходимость ряда (4.79) на некоторой линии уровня Γ_ρ с параметром ρ большим, чем R, то из теоремы Вейерштрасса будет следовать равномерная сходимость этого ряда и внутри множества $B_{1,\rho}$, что приведет к равномерной сходимости ряда из производных (4.78) на линиях уровня, лежащих вне кольцевого множества $B_{1,R}$, а это противоречит утверждению теоремы 4.11.

Теорема 4.12. *Пусть даны две последовательности чисел $\{\Lambda_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, для которых*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\Lambda_n|^{1/n} = \frac{1}{R}, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} |\lambda_n|^{1/n} = r, \tag{4.81}$$

и образован ряд типа Лорана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \Phi_n'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n'(z). \tag{4.82}$$

Пусть числа R и r удовлетворяют условиям

$$R > 1, \qquad r < R. \tag{4.83}$$

Тогда ряд (4.82) *сходится абсолютно и равномерно внутри кольцевого множества $B_{r,R}$ (если $r < 1$, то полагаем $B_{r,R} = B_{1,R}$), а на любой линии уровня Γ_ρ $(\rho > 1)$, расположенной вне $\overline{B}_{r,R}$, если и сходится, то неравномерно. При нарушении хотя бы одного из условий* (4.83) *не существует в области B кольцевого множества, ограниченного двумя различными линиями уровня функции Грина $G(z, \infty; B)$, внутри которого ряд* (4.82) *сходился бы равномерно.*

Все утверждения теоремы прямо следуют из сопоставления заключений теорем 4.9 и 4.11.

2°. Разложение в ряд типа Лорана

Лемма 4.3. *Пусть дан ряд по производным сопряженной системы* $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \Phi_n'(z)$, *коэффициенты которого удовлетворяют условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\Lambda_n|^{1/n} = \frac{1}{R} < 1. \tag{4.84}$$

Тогда для любой функции $f(z) \in \sigma(B)$ *имеет место равенство*

$$\int_{\Gamma} \overline{f(z)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \Phi_n'(z)\right] dz = 0. \tag{4.85}$$

Предположим сначала, что функция $f(z)$ непрерывна на границе Γ области B. В этом случае интегрирование в (4.85) можно производить непосредственно по границе Γ области B. Но по теореме 4.11 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \Phi_n'(z)$ при условии (4.84) сходится равномерно на Γ, а поэтому в (4.85) возможно почленное интегрирование. А так как по следствию 1 из теоремы 4.4 для $f(z) \in \sigma(B)$

$$\int_{\Gamma} \overline{f(z)}\, \Phi_n'(z)\, dz = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

то равенство (4.85) действительно имеет место.

Если же $f(z)$ — любая функция класса $\sigma(B)$, то, обозначив сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \Phi_n'(z)$ через $\psi'(z)$, с помощью формулы Грина при $\rho \in (1, R)$ установим равенство

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \overline{f(z)}\, \psi'(z)\, dz = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_\rho} \overline{f(z)}\, \psi'(z)\, dz + \\ + \iint_{B_{1,\rho}} \overline{f'(z)}\, \psi'(z)\, d\sigma. \tag{4.86}$$

Поскольку $f(z) \in \sigma(B)$, а функция $\psi'(z)$ непрерывна на замкнутом множестве $\overline{B}_{1,\rho}$, то написанный двойной интеграл сходится, а тогда и контурный интеграл в левой части равенства имеет конечное значение.

Но каждую функцию $f(z) \in \sigma(B)$ можно аппроксимировать равномерно внутри области B функциями $f_k(z)$ $(k=1, 2, \ldots)$ того же класса, но непрерывными на границе Γ. При этом производные $f_k'(z)$ будут аппроксимировать производную $f'(z)$ в среднем по области B. В самом деле, разложив функцию $f(z)$ в ряд по тейлоровской системе, возьмем в качестве функций $f_k(z)$ $(k=1, 2, \ldots)$ частичные суммы этого ряда $\sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \varphi_\nu(z)$, которые удовлетворяют всем требованиям аппроксимации.

Так как для каждой из функций $f_k(z)$ $(k=1, 2, \ldots)$ по доказанному равенство (4.85) выполняется, то благодаря (4.86) оно имеет место и для функции $f(z)$.

Перед формулированием основной теоремы о разложении в ряд типа Лорана введем следующее обозначение. Для любой функции $\psi(z)$, регулярной на каком-нибудь граничном кольцевом множестве $B_{1,R}$ $(R>1)$, положим

$$\sigma^*(\psi) = \frac{i}{2} \int_\Gamma \overline{\psi(z)}\, \psi'(z)\, dz = \lim_{\rho \to 1} \frac{i}{2} \int_{\Gamma_\rho} \overline{\psi(z)}\, \psi'(z)\, dz. \quad (4.87)$$

Покажем, что предел в (4.87) существует и всегда является действительным числом или $-\infty$. Действительно, по формуле Грина при $\rho \in (1, R)$ имеем

$$\frac{i}{2} \int_\Gamma \overline{\psi(z)}\, \psi'(z)\, dz = \frac{i}{2} \int_{\Gamma_\rho} \overline{\psi(z)}\, \psi'(z)\, dz - \iint_{B_{1,\rho}} |\psi'(z)|^2\, d\sigma.$$

Анализируя это равенство, замечаем, что контурный интеграл в его правой части всегда является действительным числом, а поэтому, если двойной интеграл сходится, то величина $\sigma^*(\psi)$ имеет действительное значение, а если двойной интеграл расходится, то $\sigma^*(\psi)$ принимает бесконечное значение отрицательного знака.

Если функция $\psi(z)$ регулярна во всей области B, то величина $\sigma^*(\psi)$ равна площади образа B при отображении функцией $\psi(z)$, взятой со знаком минус, т. е.

$$\sigma^*(\psi) = -\sigma(\psi) = -\iint_B |\psi'(z)|^2\, d\sigma.$$

Если же функция $\psi(z)$ регулярна во всей области B, за исключением конечного числа особых точек, $\sigma^*(\psi)$ именуется внешней площадью функции $\psi(z)$ в области B (см., например, Ю. Е. Аленицын [1]).

Теорема 4.13. *Производная любой функции $\psi(z)$, регулярной на кольцевом множестве $B_{r,R}$ $(1 \leqslant r < R)$, разлагается в ряд типа Лорана*

$$\psi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \Phi_n'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n'(z), \tag{4.88}$$

сходящийся абсолютно и равномерно внутри $B_{r,R}$.

При этом такое разложение единственно, а коэффициенты разложения Λ_n и λ_n $(n=1,2,\ldots)$ определяются по формулам

$$\Lambda_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \psi(z)\, d\varphi_n(z), \qquad r < \rho < R, \tag{4.89а}$$

$$\lambda_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \psi(z)\, d\Phi_n(z), \qquad r < \rho < R, \tag{4.89б}$$

и удовлетворяют неравенствам

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\Lambda_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{R}, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} |\lambda_n|^{1/n} \leqslant r. \tag{4.90}$$

Если функция $\psi(z)$ регулярна на кольцевом множестве $B_{r,R}$ $(1 < r < R < \infty)$, но производная $\psi'(z)$ не регулярна ни на каком более широком кольцевом множестве из B по параметрам r или R (или по обоим), то для коэффициентов разложения Λ_n и λ_n $(n=1,2,\ldots)$ в соответствующем неравенстве (4.90) (или в обоих) имеет место знак равенства.

Если функция $\psi(z)$ регулярна на граничном кольцевом множестве $B_{1,R}$ $(R > 1)$, то величина $\sigma^*(\psi)$ (конечная или нет) вычисляется по формуле

$$\sigma^*(\psi) = \pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\Lambda_n|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \right). \tag{4.91}$$

Пусть задана произвольная функция $\psi(z)$, регулярная на кольцевом множестве $B_{r,R}$ $(1 \leqslant r < R)$. Найдем по формулам (4.89а) и (4.89б) коэффициенты Λ_n и λ_n $(n=1,2,\ldots)$

и построим формально ряд типа Лорана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \Phi_n'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n'(z). \tag{4.92}$$

Покажем, что область равномерной сходимости ряда (4.92) содержит кольцевое множество $B_{r,R}$. Для этого оценим коэффициенты Λ_n и λ_n $(n=1, 2, \ldots)$, используя независимость контурных интегралов в (4.89а) и (4.89б) от параметра $\rho \in (r, R)$, неравенства (4.47) и (4.53), а также непрерывность функции $\psi(z)$ на $B_{r,R}$. При любом $n=1, 2, \ldots$ и $\rho \in (r, R)$ имеем

$$|\Lambda_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\rho} |\psi(z)| |\varphi_n'(z)| |dz| \leqslant A(\rho) M_1(\varepsilon) (1+\varepsilon)^n \rho^{-n},$$

$$|\lambda_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\rho} |\psi(z)| |\Phi_n'(z)| |dz| \leqslant A(\rho) M(\varepsilon) (1+\varepsilon)^n \rho^n,$$

где ε — произвольное положительное число, а

$$A(\rho) = \frac{l_\rho}{2\pi} \max_{z \in \Gamma_\rho} |\psi(z)|.$$

Из этих неравенств получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\Lambda_n|^{1/n} \leqslant (1+\varepsilon)\frac{1}{\rho}, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} |\lambda_n|^{1/n} \leqslant (1+\varepsilon)\rho,$$

откуда в силу произвольности чисел $\varepsilon > 0$ и $\rho \in (r, R)$ вытекают оценки (4.90).

Но тогда по теореме 4.12 ряд (4.92) сходится абсолютно и равномерно внутри кольцевого множества $B_{r,R}$. Следовательно, сумма этого ряда является регулярной функцией на $B_{r,R}$, имеющей на этом кольцевом множестве однозначную первообразную (что видно из конструкции самого ряда). Поэтому обозначим сумму ряда (4.92) через $\psi_*'(z)$, т. е.

$$\psi_*'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k \Phi_k'(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k'(z), \quad z \in B_{r,R}.$$

Умножив обе части этого равенства на каждую из функций $\varphi_n(z)$ и $\Phi_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ и проинтегрировав каждое

из полученных равенств по линии уровня Γ_ρ, $r<\rho<R$, применяя при этом в правой части почленное интегрирование, а затем формулы биортогональности на границе Γ (4.28а), (4.28б) и (4.28в), а в левой части применяя интегрирование по частям, придем к формулам

$$\left.\begin{aligned}\Lambda_n&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\psi_*(z)\,d\varphi_n(z),\\ \lambda_n&=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\psi_*(z)\,d\Phi_n(z).\end{aligned}\right\}\tag{4.93}$$

Из (4.89а), (4.89б) и (4.93) при $n=1, 2, \ldots$ и $\rho\in(r, R)$ получим

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{\Gamma_\rho}[\psi(z)-\psi_*(z)]\,\varphi_n'(z)\,dz=0,\\ &\int\limits_{\Gamma_\rho}[\psi(z)-\psi_*(z)]\,\Phi_n'(z)\,dz=0.\end{aligned}\right\}\tag{4.94}$$

Теперь рассмотрим разность функций $\psi'(z)-\psi_*'(z)$. Эта разность регулярна на $B_{r,R}$, и ее значение в произвольной точке $\zeta\in B_{r,R}$ можно найти с помощью интегральной формулы Коши:

$$\psi'(\zeta)-\psi_*'(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R'}}\frac{\psi(z)-\psi_*(z)}{(z-\zeta)^2}\,dz+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{r'}}\frac{\psi(z)-\psi_*(z)}{(z-\zeta)^2}\,dz,\tag{4.95}$$

где R' и r' выбраны достаточно близкими соответственно к R и r и удовлетворяют неравенству $r<r'<R'<R$.

Докажем, что каждый из интегралов в (4.95) равен нулю для $\zeta\in B_{r',R'}$. Чтобы найти значение первого интеграла, заметим, что функция $\frac{1}{z-\zeta}$ при фиксированном $\zeta\in B_{r',R'}$ регулярна в области B_ρ с некоторым $\rho<R'$. Поэтому она разлагается в ряд по тейлоровской системе, а ее производная — в ряд по системе $\{\varphi_n'(z)\}$, сходящийся равномерно

внутри области B_ρ (следствие из теоремы 4.10), т. е.

$$\frac{1}{(z-\zeta)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{(1)}\varphi_n'(z).$$

Используя это разложение и (4.94), будем иметь для $\zeta\in B_{r',R'}$

$$\int\limits_{\Gamma_{R'}}\frac{\psi(z)-\psi_*(z)}{(z-\zeta)^2}dz=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{(1)}\int\limits_{\Gamma_{R'}}[\psi(z)-\psi_*(z)]\,\varphi_n'(z)\,dz=0.$$

Анализируя второй из интегралов в (4.95), замечаем, что интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{r'}}\frac{\psi(z)-\psi_*(z)}{z-\zeta}dz$$

определяет в области $B_{r'}$ регулярную функцию от аргумента ζ, которую по теореме 4.10 можно разложить в ряд по тейлоровской системе

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{r'}}\frac{\psi(z)-\psi_*(z)}{z-\zeta}dz=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{(2)}\varphi_n(\zeta),$$

сходящийся равномерно внутри области $B_{r'}$. Продифференцировав это разложение по ζ, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{r'}}\frac{\psi(z)-\psi_*(z)}{(z-\zeta)^2}dz=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{(2)}\varphi_n'(\zeta).$$

Из (4.95) теперь следует равенство

$$\psi'(\zeta)-\psi_*'(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{(2)}\varphi_n'(\zeta),\quad \zeta\in B_{r'},$$

доказывающее, что функция $\psi'(z)-\psi_*'(z)$ аналитически продолжима из $B_{r',R'}$ в $B_{r'}$. Но тогда коэффициенты разложения $\lambda_n^{(2)}$ можно найти по интегральным формулам (4.64):

$$\lambda_n^{(2)}=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\rho}[\psi(z)-\psi_*(z)]\,\Phi_n'(z)\,dz,$$

откуда и из (4.94) будем иметь $\lambda_n^{(2)}=0$ $(n=1, 2, \ldots)$, т. е. $\psi'(z)\equiv\psi_*'(z)$.

Таким образом, уже получено разложение производной $\psi'(z)$ в ряд типа Лорана (4.88), сходящийся абсолютно и равномерно внутри $B_{r,R}$, а также формулы (4.89а), (4.89б) и оценки (4.90) для коэффициентов разложения. Единственность разложения в равномерно сходящийся внутри $B_{r,R}$ ряд типа Лорана следует из (4.93).

Если функция $\psi(z)$ регулярна на $B_{r,R}$ $(1<r<R<\infty)$, но производная $\psi'(z)$ не регулярна ни на каком более широком кольцевом множестве из B, например по параметру R, то в первом соотношении (4.90) должен быть знак равенства, ибо в противном случае ряд типа Лорана (4.88) по теореме 4.12 равномерно сходился бы на более широком кольцевом множестве и, следовательно, функция $\psi'(z)$ могла быть аналитически продолжена на более широкое кольцевое множество по параметру R, что противоречит условию.

Остается доказать соотношение (4.91) для функции $\psi(z)$, регулярной на граничном кольцевом множестве $B_{1,R}$ $(R>1)$. Введем обозначения:

$$F'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_n\Phi_n'(z),\qquad f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n'(z),$$

где в силу оценок (4.90) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Lambda_n\Phi_n'(z)$ сходится равномерно на каждом замкнутом граничном кольцевом множестве $\overline{B}_{1,\rho}$, $1<\rho<R$, а его сумма $F'(z)$ (а также $F(z)$) регулярна на множестве $B_{1,R}$ и непрерывна на границе Γ области B; ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n'(z)$ сходится равномерно внутри области B, а его сумма $f'(z)$ (и $f(z)$) регулярна во всей области B (теоремы 4.11 и 4.9). Согласно (4.88) на граничном кольцевом множестве $B_{1,R}$ имеем равенство

$$\psi'(z)=F'(z)+f'(z). \tag{4.96}$$

Теперь предположим, что величина $\sigma^*(\psi)$ имеет конечное значение, что равносильно сходимости двойного интеграла $\iint\limits_{B_{1,\rho}}|\psi'(z)|^2\,d\sigma$, $1<\rho<R$. Поскольку интеграл $\iint\limits_{B_{1,\rho}}|F'(z)|^2\,d\sigma$

сходится, так как $F'(z)$ непрерывна на границе Γ области B, то из равенства (4.96) заключаем, что то же имеет место и для двойного интеграла $\iint\limits_{B_{1,\rho}} |f'(z)|^2\, d\sigma$, а это достаточно для принадлежности производной $f'(z)$ классу $l^2(B)$, а самой функции $f(z)$ — классу $\sigma(B)$ (при соответствующей нормировке в точке $z=\infty$). Учитывая (4.96), будем иметь

$$\sigma^*(\psi) = \frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma} \left[\overline{F(z)+f(z)}\right]\left[F'(z)+f'(z)\right] dz =$$

$$= \frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma} \overline{F(z)}\, F'(z)\, dz + \frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma} \overline{f(z)}\, f'(z)\, dz +$$

$$+ \frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma} \overline{f(z)}\, F'(z)\, dz + \frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma} \overline{F(z)}\, f'(z)\, dz.$$

По лемме 4.3 последние два интеграла в написанном равенстве равны нулю, а поэтому

$$\sigma^*(\psi) = \frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma} \overline{F(z)}\, F'(z)\, dz + \frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma} \overline{f(z)}\, f'(z)\, dz. \quad (4.97)$$

Далее имеем

$$\frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma} \overline{F(z)}\, F'(z)\, dz = \frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma} \overline{F(z)}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \Phi_n'(z)\right) dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \cdot \frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma} \overline{F(z)}\, \Phi_n'(z)\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \cdot \overline{\frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma} F(z)\, \varphi_n'(z)\, dz}.$$

(Использовано соотношение (20) на границе Γ.) Интеграл $\int\limits_{\Gamma} F(z)\, \varphi_n'(z)\, dz$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ можно найти, применяя интегрирование по частям и формулу (4.28в):

$$\frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma} F(z)\, \varphi_n'(z)\, dz = -\frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma} \varphi_n(z)\, F'(z)\, dz =$$

$$= -\frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma} \varphi_n(z)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k \Phi_k'(z)\right) dz =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k \frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma} \varphi_n(z)\, \Phi_k'(z)\, dz = \pi\Lambda_n.$$

Следовательно,

$$\sigma^*(F)=\frac{i}{2}\int_{\Gamma}\overline{F(z)}F'(z)\,dz=\pi\sum_{n=1}^{\infty}|\Lambda_n|^2.$$

Значение второго интеграла в (4.97) легко найти, если учесть, что функция $f(z)$ принадлежит классу $\sigma(B)$. Действительно, согласно (11) и (4.66) будем иметь

$$\sigma^*(f)=\frac{i}{2}\int_{\Gamma}\overline{f(z)}f'(z)\,dz=-\pi\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2.$$

Из (4.97) и формул для $\sigma^*(F)$ и $\sigma^*(f)$ получим соотношение (4.91), в котором оба ряда сходятся.

Если же $\sigma^*(\psi)=-\infty$, то аналогично предыдущему докажем расходимость интеграла $\iint\limits_B|f'(z)|^2\,d\sigma$, что равносильно расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2$, а так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Lambda_n|^2$ всегда сходится, то в (4.91) обе части равенства принимают бесконечное значение одинакового знака, но только в таком смысле и утверждается в этом случае справедливость формулы. Теорема доказана.

3°. Разложение в ряд по лорановской системе

Из теоремы 4.13 легко вытекает следующая теорема о разложении функций в ряд по лорановской системе.

Теорема 4.14. *Любая функция $\psi(z)$, регулярная в области $B_{r,R}$ $(1\leqslant r<R;\ R>R_0)$, разлагается в ряд по лорановской системе*

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_n\Phi_n(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(z)+c, \tag{4.98}$$

сходящийся абсолютно и равномерно внутри $B_{r,R}$.

При этом такое разложение единственно, а коэффициенты разложения Λ_n и λ_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ определяются соответственно по формулам (4.89а) *и* (4.89б) *и удовлетворяют неравенствам* (4.90).

Если функция $\psi(z)$ регулярна в области $B_{r,\infty}$ и имеет около $z=\infty$ лорановское разложение вида

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}D_nz^n+D_0+\sum_{n=1}^{\infty}d_nz^{-n},$$

то коэффициенты разложения (4.98) *выражаются через* D_0, D_n *и* d_n $(n=1, 2, \ldots)$ *по формулам*

$$\left.\begin{aligned}
&c=D_0,\\
&\Lambda_n=\sum_{k=n}^{\infty} k a_{nk} D_k,\\
&\lambda_1=\frac{d_1-\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{k1} D_k}{a_{11}},\\
&\lambda_n=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & d_1-\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{k1} D_k\\ a_{12} & a_{22} & \ldots & 0 & d_2-\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{k2} D_k\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{n-1,n} & d_n-\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{kn} D_k \end{vmatrix}}{a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{nn}}\quad (n=2,3,\ldots).
\end{aligned}\right\}\quad (4.99)$$

Прежде всего заметим, что кольцевое множество $B_{r,R}$ действительно является областью, так как линия уровня Γ_R при $R>R_0$ (R_0 определено равенством (4.36)) является простой замкнутой аналитической кривой, внутри которой расположена линия уровня Γ_r.

По теореме 4.13 производная $\psi'(z)$ разлагается в ряд типа Лорана (4.88), сходящийся равномерно внутри области $B_{r,R}$. Коэффициенты разложения (4.88) определяются по формулам (4.89а) и (4.89б) и удовлетворяют неравенствам (4.90). В силу первого из них по следствию 2 из теоремы 4.11 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \Phi_n(z)$ сходится абсолютно и равномерно внутри области $B_{r,R}$ (он равномерно сходится даже на границе Γ области B), а в силу второго — по теореме 4.9 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(z)$ сходится абсолютно и равномерно внутри области B_r и, значит, подавно внутри области $B_{r,R}$.

Остается только фиксировать точку $z_0 \in B_{r,R}$ и проинтегрировать равенство (4.88) от точки z_0 до произвольной

точки $z \in B_{r,R}$, после чего получим разложение (4.98). Единственность разложения (4.98) следует из единственности разложения (4.88).

Если же функция $\psi(z)$ регулярна в области $B_{r,\infty}$, то, поделив обе части равенства (4.98) на z и проинтегрировав полученное равенство по окружности достаточно большого радиуса, найдем значение постоянной c, а из интегрального представления коэффициентов Λ_n и λ_n $(n=1, 2, \ldots)$ с помощью теоремы о вычетах получим формулы (4.99).

4° Примеры разложения

Пример 1. Даны функции от z при фиксированном $\zeta \in B$ $(\zeta \neq \infty)$:

$$\psi_1(z) = \ln(z-\zeta),$$

$$\psi_2(z) = R(z, \zeta) - \ln(z-\zeta) = -\frac{1}{2}\ln j_{\pi/2}(z, \zeta)\, j_0(z, \zeta).$$

Разложить производные функции в ряд типа Лорана на граничном кольцевом множестве.

Если обозначить $\exp\{G(\zeta, \infty; B)\}$ через $R(\zeta)$, т. е.

$$R = R(\zeta) = \exp\{G(\zeta, \infty; B)\},$$

то ясно, что при фиксированном $\zeta \in B$ любая ветвь функции $\psi_1(z)$ регулярна во внутренности линии уровня Γ_R

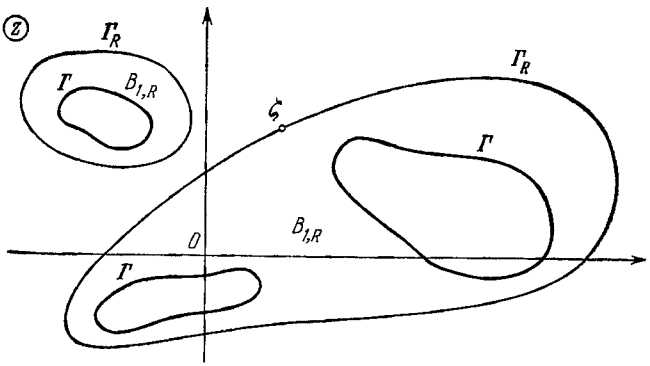

Рис. 4.

и тем самым на граничном кольцевом множестве $B_{1,R}$ $(R > 1)$ (см. рис. 4). По теореме 4.13 производная $\psi_1'(z)$ разлагается в ряд типа Лорана (4.88), коэффициенты

которого определяются по формулам (4.89а) и (4.89б). Применяя интегрирование по частям на линии уровня Γ_ρ, $1<\rho<R$, получим при $n=1, 2, \ldots$

$$\Lambda_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\psi_1(z)\,d\varphi_n(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\varphi_n(z)\,\psi_1'(z)\,dz=$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{\varphi_n(z)}{z-\zeta}\,dz=-\varphi_n(\zeta),$$

$$\lambda_n=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\psi_1(z)\,d\Phi_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{\Phi_n(z)}{z-\zeta}\,dz=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{P_n(z)+h_n(z)}{z-\zeta}\,dz=h_n(\zeta).$$

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$\frac{1}{z-\zeta}=\sum_{n=1}^{\infty}-\varphi_n(\zeta)\,\Phi_n'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}h_n(\zeta)\,\varphi_n'(z). \qquad (4.100)$$

Функция $\psi_2(z)$ также регулярна на граничном кольцевом множестве $B_{1,R}$, так как $R(z,\zeta)$ регулярна в $\overline{B}$, а поэтому производная $\psi_2'(z)$ также разлагается в ряд типа Лорана (4.88). Учитывая разложение (4.21), получим следующее разложение производной $R_z'(z,\zeta)$ в ряд по системе $\{\varphi_n'(z)\}$:

$$R_z'(z,\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(\zeta)\,\varphi_n'(z).$$

Теперь можно написать искомое разложение производной $\psi_2'(z)$ в ряд типа Лорана на множестве $B_{1,R}$. Имеино:

$$R_z'(z,\zeta)-\frac{1}{z-\zeta}=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\zeta)\,\Phi_n'(z). \qquad (4.101)$$

Пример 2. При любых фиксированных $\nu=1, 2, \ldots$ и $\zeta\in B$ разложить производную от функции

$$\psi_\nu(z)=\frac{(\nu-1)!}{(z-\zeta)^\nu}$$

в ряд типа Лорана на некотором граничном кольцевом множестве.

Снова вводя величину $R=R(\zeta)=\exp\{G(\zeta, \infty; B)\}$, убеждаемся в том, что функция $\psi_\nu(z)$ $(\nu=1, 2, \ldots)$ регулярна на граничном кольцевом множестве $B_{1,R}$ $(R>1)$, а поэтому на этом множестве ее производная разлагается по теореме 4.13 в ряд типа Лорана. Коэффициенты разложения Λ_n $(n=1, 2, \ldots)$ найдем по формуле (4.89а), именно:

$$\Lambda_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{(\nu-1)!}{(z-\zeta)^\nu}\varphi_n'(z)\,dz, \qquad 1<\rho<R. \tag{4.102}$$

Так как функция $\varphi_n'(z)$ регулярна в $\overline{B}_\rho$, то по интегральной формуле Коши при $n=1, 2, \ldots$ будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{\varphi_n'(z)}{z-\zeta}\,dz=\varphi_n'(\zeta).$$

Дифференцируя равенство $\nu-1$ раз по ζ, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{(\nu-1)!}{(z-\zeta)^\nu}\varphi_n'(z)\,dz=\varphi_n^{(\nu)}(\zeta). \tag{4.103}$$

Из (4.102) и (4.103) находим Λ_n $(n=1, 2, \ldots)$:

$$\Lambda_n=\varphi_n^{(\nu)}(\zeta).$$

Коэффициенты разложения (4.88) λ_n $(n=1, 2, \ldots)$ найдем по формуле (4.89б):

$$\lambda_n=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{(\nu-1)!}{(z-\zeta)^\nu}\Phi_n'(z)\,dz, \qquad 1<\rho<R,$$

а с помощью тождества (4.27) перепишем λ_n в виде

$$\lambda_n=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{(\nu-1)!}{(z-\zeta)^\nu}P_n'(z)\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{(\nu-1)!}{(z-\zeta)^\nu}h_n'(z)\,dz.$$

Поскольку полиномы $P_n'(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ регулярны в замкнутой внутренности линии уровня Γ_ρ, т. е. на множестве $\overline{b}_\rho$, а точка $z=\zeta$ не принадлежит $\overline{b}_\rho$, то первый из интегралов равен нулю, а второй интеграл найдем аналогично интегралу в (4.102) с помощью интегральной формулы Коши. В результате при $n=1, 2, \ldots$ будем иметь

$$\lambda_n=-h_n^{(\nu)}(\zeta).$$

Таким образом, искомое разложение на множестве $B_{1,R}$ имеет вид

$$-\frac{\nu!}{(z-\zeta)^{\nu+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^{(\nu)}(\zeta)\,\Phi_n'(z)-\sum_{n=1}^{\infty}h_n^{(\nu)}(\zeta)\,\varphi_n'(z). \quad (4.104)$$

В частности, при $\nu=1$ имеем

$$\frac{1}{(z-\zeta)^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n'(\zeta)\,\Phi_n'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}h_n'(\zeta)\,\varphi_n'(z). \quad (4.105)$$

Пример 3. При любых фиксированных $\nu=1, 2, \ldots$ и $\zeta\in B$ разложить производную от функции

$$[R(z,\zeta)-\ln(z-\zeta)]_{\zeta}^{(\nu)} \quad (4.106)$$

в ряд типа Лорана.

Функция (4.106) регулярна на граничном кольцевом множестве $B_{1,R}$ $(R=R(\zeta)>1)$, и ее разложение в ряд типа Лорана найдем из (4.74) и (4.104):

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[R_{\zeta}^{(\nu)}(z,\zeta)+\frac{(\nu-1)!}{(z-\zeta)^{\nu}}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^{(\nu)}(\zeta)\,\Phi_n'(z). \quad (4.107)$$

Замечание. Во всех разобранных примерах производные рассматриваемых функций имели полюс в точке $z=\zeta$ на границе области $B_{1,R}$ $(R=\exp\{G(\zeta,\infty;B)\})$, а поэтому для коэффициентов Λ_n разложений (4.100) и (4.104) в (4.90) должен иметь место знак равенства.

ГЛАВА 5

СИСТЕМА ФУНКЦИЙ $\{C_n(z)\}$

§ 1. Простейшие свойства системы $\{C_n(z)\}$

1°. Определение и регулярность функций $C_n(z)$

Возьмем произвольную функцию $F(z) \in \Sigma(B)$ и произвольное значение $\zeta \in B$ и образуем функцию от аргумента z:

$$\ln \frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}, \tag{5.1}$$

выбирая при конечном ζ ту ветвь многозначной функции, которая при $z=\infty$ обращается в нуль, а при $\zeta=\infty$ полагая функцию тождественно равной нулю. В силу однолистности $F(z)$ эта функция регулярна в области B и поэтому в окрестности бесконечно удаленной точки разлагается в ряд Тейлора

$$\ln \frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\zeta) z^{-n}. \tag{5.2}$$

Поскольку такое разложение единственно, то тем самым в области B определены однозначные функции $A_n(\zeta)$ $(n=1, 2, \ldots)$, для которых по формуле Коши имеем интегральное представление

$$A_n(\zeta) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_\rho} \ln \frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)} z^{n-1}\, dz \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{5.3}$$

где $\rho \in (1, \infty)$, а $\zeta \in B$. Так как подынтегральная функция регулярна относительно параметра ζ в области B, то и функции $A_n(\zeta)$ $(n=1, 2, \ldots)$ регулярны в B. Их разложения

около $z=\infty$ будем обозначать так:

$$A_n(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}z^{-k} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.4}$$

Из симметричности функции (5.1) относительно переменных z и ζ вытекает симметричность матрицы $\|\alpha_{nk}\|$, т. е.

$$\alpha_{nk}=\alpha_{kn} \qquad (n,\ k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.5}$$

Далее, функция $F(z)\in\Sigma(B)$ разложением (1.10) порождает полиномы Фабера $\mathcal{F}_n(w)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, связь которых с функциями $A_n(z)$ выведена в главе 1 и имеет вид

$$\mathcal{F}_n(F(z))=z^n+nA_n(z) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.6}$$

Из (1.11) и (5.6) получаем явную зависимость $A_n(z)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ от функции $F(z)$, именно:

$$A_1(z)=F(z)-\alpha_0-z,$$

$$nA_n(z)=$$

$$=\left.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -(\alpha_0-F(z)) \\ \alpha_0-F(z) & 1 & 0 & \ldots & 0 & -2\alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0-F(z) & 1 & \ldots & 0 & -3\alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-4} & \ldots & \alpha_0-F(z) & -n\alpha_{n-1} \end{vmatrix}\right\} -z^n$$

$$(n=2,\ 3,\ \ldots). \tag{5.7}$$

Снова возьмем произвольную функцию $F(z)\in\Sigma(B)$ и при любом фиксированном $\zeta\in B$ рассмотрим функцию $g(z,\ \zeta)$:

$$g(z,\ \zeta)=\ln\frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}-R(z,\ \zeta)=\ln\frac{\sqrt{j_{\pi/2}(z,\ \zeta)\,j_0(z,\ \zeta)}}{F(z)-F(\zeta)}, \tag{5.8}$$

где $R(z,\ \zeta)$ определена равенством (18). Функция $g(z,\ \zeta)$ регулярна по z в B, а как функция двух переменных симметрична по z и ζ в области B, ибо таковы функции $\ln\frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}$ и $R(z,\ \zeta)$ (последняя согласно (4.39)). Обозначим

тейлоровское разложение функции $g(z, \zeta)$ в окрестности $z=\infty$ так:

$$g(z, \zeta)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n(\zeta) z^{-n}. \tag{5.9}$$

Из (5.9), (5.8), (5.2), (4.4) и (4.20) получим соотношение между функциями $A_n(z)$ и $B_n(z)$:

$$B_n(z)=A_n(z)-r_n(z) \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{5.10}$$

Формула (5.10) позволяет сформулировать простейшие свойства системы $\{B_n(z)\}$:

1) Функции $B_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ регулярны в области B и в окрестности бесконечно удаленной точки имеют тейлоровские разложения вида

$$B_n(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_{nk}-\frac{1}{n} b_{nk}\right) z^{-k}. \tag{5.11}$$

Равенство (5.11) следует из (5.10), (5.4) и свойства 1 функции $R(z, \zeta)$ (см. стр. 154).

2) Матрица $\left\|\alpha_{nk}-\frac{1}{n} b_{nk}\right\|$ — симметрическая. Это следует из (5.5) и свойства 4 системы пар $\{\zeta_n(z), \eta_n(z)\}$.

3) Функции $B_n(z)$ связаны с полиномами Фабера $\mathcal{F}_n(w)$ равенствами

$$\mathcal{F}_n(F(z))=\eta_n(z)+nB_n(z). \tag{5.12}$$

Эта связь получается из (5.6), (5.10) и (4.20).

Теперь введем в рассмотрение систему функций $\{C_n(z)\}$. По теореме 4.10 функция $g(z, \zeta)$ при фиксированном $\zeta \in B$ разлагается в ряд по тейлоровской системе

$$g(z, \zeta)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n(\zeta) \varphi_n(z), \tag{5.13}$$

сходящийся абсолютно и равномерно внутри B. В силу единственности такого разложения равенством (5.13) определены в области B однозначные функции $C_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$, которые найдем по формулам (4.64):

$$C_n(\zeta)=\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_\rho} g(z, \zeta)\, d\Phi_n(z), \qquad 1<\rho<\infty, \tag{5.14}$$

или

$$\left.\begin{aligned} C_1(z) &= \frac{B_1(z)}{a_{11}}, \\ C_n(z) &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & B_1(z) \\ a_{12} & a_{22} & \dots & 0 & B_2(z) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{n-1,n} & B_n(z) \end{vmatrix}}{a_{11}\ a_{22}\ \dots\ a_{nn}} \quad (n=2, 3, \dots). \end{aligned}\right\} \quad (5.15)$$

Формулы (5.15) (или (5.14)) доказывают регулярность функций $C_n(z)$ $(n=1, 2, \dots)$ в области B. Их разложения в ряд Тейлора около $z=\infty$ и в ряд по тейлоровской системе функций в области B обозначим так:

$$\begin{aligned} C_n(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{nk} z^{-k}, \\ C_n(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{nk} \varphi_k(z), \end{aligned} \quad (5.16)$$

и сохраним это обозначение в дальнейшем. Докажем симметричность матрицы $\|\lambda_{nk}\|$. Согласно (5.14) и (4.64) для $n, k=1, 2, \dots$ имеем

$$\lambda_{nk} = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma_\rho} \int\limits_{\Gamma_\rho} g(z, \zeta)\, d\Phi_n(z)\, d\Phi_k(\zeta), \qquad 1 < \rho < \infty,$$

откуда ввиду симметричности функции $g(z, \zeta)$ следует, что

$$\lambda_{nk} = \lambda_{kn}. \quad (5.17)$$

Аналогично докажем, что разложение функций $B_n(z)$ $(n=1, 2, \dots)$ в ряд по тейлоровской системе имеет вид

$$B_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{kn} \varphi_k(z), \qquad z \in B. \quad (5.18)$$

Замечание. Полезно подчеркнуть, что не только однолистная функция $F(z) \in \Sigma(B)$ с помощью разложения (5.13) порождает систему регулярных в области B функций $C_n(z)$, но и любая регулярная в $B_{1,\infty}$ функция $F(z)$ с лорановским разложением около $z=\infty$ вида (6). При этом остаются

в силе формулы (5.14), (5.15), (5.17) и (5.18), но только в (5.14) интегрирование следует производить по линии уровня Γ_ρ с достаточно большим ρ, ибо функция $g(z, \zeta)$ при фиксированном $\zeta \in B$ будет регулярной в этом случае не во всей области B, а в некоторой подобласти B_r, $1 < r < \infty$. Более того, если функция $F(z)$ даже формально задана разложением около $z = \infty$ вида (6), то и тогда функции $A_n(z)$ можно формально определить равенствами (5.6) или (5.7), функции $B_n(z)$ — равенством (5.11), а функции $C_n(z)$ — с помощью формул (5.15).

Конечно, для формально определенных своими разложениями около $z = \infty$ функций $A_n(z)$, $B_n(z)$ и $C_n(z)$ ничего нельзя сказать об их регулярности в области B или даже в окрестности бесконечно удаленной точки. Но если $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} |\alpha_n|^{1/n} \neq \infty$, то эти функции будут регулярны в некоторой окрестности $z = \infty$.

2°. Связь с обобщенными полиномами Фабера

Пусть $w = F(z)$ — произвольная функция класса $\Sigma(B)$, а $\mathcal{F}_n(w)$ — полиномы Фабера, порожденные этой функцией. Производящая функция для полиномов Фабера $\ln \frac{z}{F(z) - w}$ регулярна в некоторой области B_r, $1 \leqslant r < \infty$, и по теореме 4.10 разлагается в ряд по тейлоровской системе

$$\ln \frac{z}{F(z) - w} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(w)\, \varphi_n(z),$$

коэффициенты которого $Q_n(w)$ с учетом (1.10) найдутся по формулам (4.64):

$$\left.\begin{aligned} Q_1(w) &= \frac{\mathcal{F}_1(w)}{a_{11}}, \\ Q_n(w) &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \mathcal{F}_1(w) \\ a_{12} & a_{22} & \dots & 0 & \frac{1}{2}\mathcal{F}_2(w) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{n-1,\,n} & \frac{1}{n}\mathcal{F}_n(w) \end{vmatrix}}{a_{11}\ a_{22}\ \dots\ a_{nn}} \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned}\right\} \quad (5.19)$$

Следовательно, $Q_n(w)$ $(n=1, 2, \ldots)$ являются полиномами степени n вида

$$Q_n(w)=\frac{1}{na_{nn}}w^n+\ldots+\text{const},$$

которые будем именовать обобщенными полиномами Фабера.

Если полиномы Фабера $\mathcal{F}_n(w)$ полностью определяются заданной функцией $F(z)\in\Sigma(B)$, точнее, лорановским разложением (6), то обобщенные полиномы $Q_n(w)$ существенно зависят от рассматриваемой области B (и, конечно, от разложения (6)), что видно из формул (5.19).

Когда область B есть внешность единичной окружности, то полиномы $Q_n(w)$ лишь множителем отличаются от полиномов $\mathcal{F}_n(w)$:

$$Q_n(w)=\frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{F}_n(w) \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Полагая в формулах (5.19) $w=F(z)$, где $F(z)\in\Sigma(B)$, и учитывая равенства (5.12), (5.15) и (4.24), будем иметь

$$Q_n(F(z))=\Phi_n(z)+C_n(z), \quad z\in B. \tag{5.20}$$

Равенство (5.20), связывающее функции $C_n(z)$ с обобщенными полиномами Фабера, аналогично в некотором смысле равенству (5.6), которое связывает между собой функции $A_n(z)$ и полиномы Фабера. Заметим, наконец, что равенство (5.20), если в нем разложить функцию $C_n(z)$ в ряд по тейлоровской системе, является разложением сложной функции $Q_n(F(z))$ в ряд по лорановской системе.

Как и в первой главе при исследовании систем $\{A_n(z)\}$, более глубокие свойства систем $\{C_n(z)\}$ находятся с помощью принципа площадей, выраженного аналитически посредством формулы (4.91).

§ 2. Теоремы площадей

Пусть $w=F(z)\in\Sigma(B)$. Условимся обозначать образ области B при отображении функцией $F(z)$ через D, а функцию Грина для области D с полюсом в $w=\infty$ — через $G(w, \infty; D)$. Функции $G(z, \infty; B)$ и $G(w, \infty; D)$ связаны-

соотношением

$$G(w, \infty; D) = G(z, \infty; B), \qquad w = F(z). \tag{5.21}$$

Границу области D будем обозначать через C, а линии уровня функции Грина $G(w, \infty; D)$ — через C_ρ, т. е.

$$C_\rho = \{w : G(w, \infty; D) = \ln \rho\}, \qquad 1 < \rho < \infty.$$

При любом действительном $\rho \in (1, \infty)$, если линия уровня C_ρ не проходит через критические точки функции $G(w, \infty; D)$, она состоит не более чем из m замкнутых, взаимно внешних аналитических кривых Жордана, а если критическая точка или точки лежат на ней, то линия C_ρ также состоит не более чем из m замкнутых кривых Жордана, связанных между собой критическими точками. При каждом $\rho \in (1, \infty)$ линия уровня C_ρ ограничивает область D_ρ, содержащую бесконечно удаленную точку, и множество d_ρ, являющееся внутренностью линии C_ρ.

Для любых двух значений параметра ρ из промежутка $(1, \infty)$, удовлетворяющих неравенству $\rho_2 < \rho_1$, имеют место включения

$$D_{\rho_2} \supset \overline{D}_{\rho_1}, \qquad \overline{d}_{\rho_2} \subset d_{\rho_1}. \tag{5.22}$$

Ясно, что при однолистном отображении области B на область D посредством функции $F(z)$ линии уровня Γ_ρ и области B_ρ, $1 < \rho < \infty$, переходят соответственно в линии уровня C_ρ и области D_ρ, а образ кольцевого множества $B_{1,\rho}$, обозначаемый через $D_{1,\rho}$, является частью множества d_ρ. Множество d_ρ, $1 < \rho < \infty$, является суммой не более чем m односвязных областей $d_\rho^{(\nu)}$, из которых каждая пара не имеет общих точек. Суммарную площадь d_ρ обозначим через $\sigma(d_\rho)$ или $\sigma(C_\rho)$.

Площадь $\sigma(C_\rho)$ обладает следующими свойствами:

а) $$\sigma(C_\rho) > 0, \qquad 1 < \rho < \infty; \tag{5.23а}$$

б) $$\sigma(C_{\rho_2}) < \sigma(C_{\rho_1}), \qquad 1 < \rho_2 < \rho_1 < \infty; \tag{5.23б}$$

в) $$\lim_{\rho \to 1} \sigma(C_\rho) = \sigma^*(F) \geqslant 0. \tag{5.23в}$$

Первое свойство очевидно, а второе вытекает из включения (5.22). Докажем третье свойство.

Согласно определению (4.87) величины $\sigma^*(F)$, именуемой в данном случае внешней площадью функции $F(z)$ в

области B, имеем

$$\sigma^*(F)=\frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma}\overline{F(z)}F'(z)\,dz=\lim_{\rho\to 1}\frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma_\rho}\overline{F(z)}F'(z)\,dz=$$

$$=\lim_{\rho\to 1}\frac{i}{2}\int\limits_{C_\rho}\overline{w}\,dw=\lim_{\rho\to 1}\sigma(C_\rho).$$

В силу неравенств (5.23б) и (5.23а) написанный предел существует и неотрицателен, что и доказывает соотношение (5.23в).

Полезно подчеркнуть, что в терминах внешней площади $\sigma^*(F)$ просто выражается условие принадлежности функции $F(z)$ классу $\tilde{\Sigma}(B)$. Именно справедливо следующее утверждение: для принадлежности функции $F(z)\in\Sigma(B)$ подклассу $\tilde{\Sigma}(B)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\sigma^*(F)=0. \tag{5.24}$$

Действительно, если функция $F(z)\in\tilde{\Sigma}(B)$, то область D не имеет внешних точек в плоскости w, а граница C области D имеет нулевую площадь. Это значит, что для всякого $\varepsilon>0$ каждый граничный континуум $C^{(\nu)}$ ($\nu=1, 2, \ldots, m$) можно заключить в односвязную область таким образом, что сумма площадей всех этих областей будет меньше ε. Но тогда, выбрав достаточно близкое к единице значение параметра ρ, будем иметь неравенство $\sigma(C_\rho)<\varepsilon$, откуда с учетом (5.23а) и (5.23в) следует равенство нулю внешней площади функции $F(z)$ в области B. Достаточность условия (5.24) очевидна.

Лемма 5.1. *Пусть* $w=F(z)\in\Sigma(B)$, *а* $Q(w)$ — *произвольная функция, регулярная на множестве* $d_R=\bigcup\limits_{\nu=1}^{p}d_R^{(\nu)}$, $R>1$, *и отличная от постоянной в каждой из областей* $d_R^{(\nu)}$ ($\nu=1, 2, \ldots, p$; $1\leqslant p\leqslant m$).

Тогда для сложной функции $\psi(z)=Q(F(z))$ *выполняется неравенство*

$$\sigma^*(\psi)\geqslant 0, \tag{5.25}$$

и знак равенства имеет место в том и только в том случае, если $F(z)\in\tilde{\Sigma}$.

Поскольку функция $F(z)$ отображает граничное кольцевое множество $B_{1,R}$ z-плоскости на множество $D_{1,R}$ плоскости w, являющееся частью d_R, то функция $\psi(z)$ регулярна на множестве $B_{1,R}$. Тогда по определению (4.87) величина $\sigma^*(\psi)$ найдется по формуле

$$\sigma^*(\psi)=\frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma}\overline{\psi(z)}\,\psi'(z)\,dz=\lim_{\rho\to 1}\frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma_\rho}\overline{\psi(z)}\,d\psi(z).$$

Преобразуем последний из написанных интегралов. При $\rho\in(1,\ R)$ имеем

$$\frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma_\rho}\overline{\psi(z)}\,d\psi(z)=\frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma_\rho}\overline{Q(F(z))}\,dQ(F(z))=\frac{i}{2}\int\limits_{C_\rho}\overline{Q(w)}dQ(w).$$

Применив формулу Грина к интегралу $\frac{i}{2}\int\limits_{C_\rho}\overline{Q(w)}\,dQ(w)$, получим

$$\frac{i}{2}\int\limits_{C_\rho}\overline{Q(w)}\,dQ(w)=\iint\limits_{d_\rho}|Q'(w)|^2\,d\sigma,$$

и, следовательно,

$$\frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma_\rho}\overline{\psi(z)}\,d\psi(z)=\iint\limits_{d_\rho}|Q'(w)|^2\,d\sigma,\qquad 1<\rho<R.$$

Возвращаясь к формуле для величины $\sigma^*(\psi)$, будем иметь равенство

$$\sigma^*(\psi)=\lim_{\rho\to 1}\iint\limits_{d_\rho}|Q'(w)|^2\,d\sigma, \tag{5.26}$$

которое и доказывает неравенство (5.25) (существование конечного предела в (5.26) прямо следует из включения (5.22) или из общих свойств величины $\sigma^*(\psi)$).

Заключение о возможности знака равенства в соотношении (5.25) доказывается аналогично тому, как это сделано в теореме 1.1.

Теорема 5.1. *Пусть* $w=F(z)\in\Sigma(B)$, *а* $Q(w)$ — *произвольная функция, регулярная на множестве* $d_R=\bigcup\limits_{\nu=1}^{p}d_R^{(\nu)}$,

$R > 1$, и отличная от постоянной в каждой из областей $d_R^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, p$).

Пусть производная от регулярной на граничном кольцевом множестве $B_{1,R}$ функции $\psi(z) = Q(F(z))$ разложена согласно теореме 4.13 в ряд типа Лорана

$$\psi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \Phi_n'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n'(z).$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\Lambda_n|^2. \tag{5.27}$$

Знак равенства имеет место в том и только в том случае, если $F(z) \in \tilde{\Sigma}(B)$.

По теореме 4.13 величина $\sigma^*(\psi)$ вычисляется по формуле

$$\sigma^*(\psi) = \pi\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\Lambda_n|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2\right).$$

Но по лемме 5.1 $\sigma^*(\psi) \geqslant 0$, откуда и следует неравенство (5.27). Знак равенства в (5.27) имеет место тогда и только тогда, когда $\sigma^*(\psi) = 0$, а по лемме 5.1 это имеет место только для $F(z) \in \tilde{\Sigma}(B)$.

Замечание. Если в условиях леммы 5.1 или теоремы 5.1 допустить функции $Q(w)$, принимающие постоянные значения в одной или нескольких областях $d_R^{(\nu)}$, то неравенства (5.25), (5.27) сохраняются. Но в этом случае знак равенства реализуется не только функциями $F(z) \in \tilde{\Sigma}(B)$.

Укажем простейшее применение теоремы 5.1.

Теорема 5.2 (внешняя теорема площадей). *Для любой функции $F(z) \in \Sigma(B)$ выполняется неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \leqslant a_{11}^2, \tag{5.28}$$

где λ_n ($n = 1, 2, \ldots$) вычисляются через коэффициенты α_n ($n = 1, 2, \ldots$) лорановского разложения функции $F(z)$

около $z=\infty$ *по формулам*

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1=\frac{\alpha_1-b_{11}}{a_{11}},\\
&\lambda_n=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \alpha_1-b_{11}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & 0 & \alpha_2-b_{12}\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{n-1,\,n} & \alpha_n-b_{1n}\end{vmatrix}}{a_{11}\ a_{22}\ \dots\ a_{nn}}\ (n=2,\ 3,\ \dots).
\end{aligned}\right\}\quad(5.29)$$

Знак равенства в (5.28) *имеет место тогда и только тогда, когда* $F(z)\in\tilde{\Sigma}(B)$.

Каждая функция $F(z)\in\Sigma(B)$ регулярна в области B, за исключением простого полюса в точке $z=\infty$, а поэтому по теореме 4.14 она разлагается в ряд по лорановской системе функций для области B

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_n\Phi_n(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(z)+c,$$

сходящийся абсолютно и равномерно внутри области $B_{1,\infty}$. Выразив коэффициенты этого разложения по формулам (4.99) через коэффициенты разложения (6), получим

$$F(z)=a_{11}\Phi_1(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(z)+\alpha_0,\qquad(5.30)$$

где λ_n определяются по формулам (5.29).

Дифференцируя равенство (5.30), будем иметь разложение производной $F'(z)$ в ряд типа Лорана на граничном кольцевом множестве $B_{1,\infty}$:

$$F'(z)=a_{11}\Phi_1'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n'(z).$$

Теперь к заданной в теореме функции $F(z)$ применим теорему 5.1, выбирая $Q(w)=w$. Тогда $\psi(z)=Q(F(z))=F(z)$, а $\psi'(z)=F'(z)$. Но производная $F'(z)$ уже разложена в ряд типа Лорана в области $B_{1,\infty}$, а поэтому по заключению теоремы 5.1 получим требуемое утверждение.

Замечание. Если область B есть внешность единичной окружности, то при n, $k=1, 2, \ldots$ согласно (21) и (4.1)

$$b_{nk}=0,\ a_{nk}=\begin{cases} 0, & k\neq n,\\ \dfrac{1}{\sqrt{n}}, & k=n,\end{cases}$$

а поэтому $\lambda_n=\sqrt{n}\,\alpha_n$ и неравенство (5.28) примет вид (1.20).

Следствие (Грётш [1]). *Для функций $F(z)\in\Sigma(B)$ имеем точную оценку*

$$|\alpha_1|\leqslant a_{11}^2+|b_{11}|. \tag{5.31}$$

Знак равенства имеет место только для функции

$$a_{11}\left[\Phi_1(z)+e^{2i\theta}\varphi_1(z)\right]+\mathrm{const},\quad \theta=\frac{1}{2}\arg b_{11},$$

однолистно отображающей область B на плоскость с прямолинейными разрезами наклона θ к вещественной оси.

Оценка (5.31) сразу следует из теоремы 5.2, если в левой части неравенства (5.28) сохранить лишь один член $|\lambda_1|^2$, значение которого взять из (5.29).

Знак равенства в (5.31) может иметь место лишь в том случае, если при $n\geqslant 2$ $\lambda_n=0$ и $|\lambda_1|=a_{11}$, т. е. разложение $F(z)$ в ряд по лорановской системе должно иметь вид

$$F(z)=a_{11}\Phi_1(z)+a_{11}e^{2i\theta}\varphi_1(z)+\alpha_0,\ 0\leqslant\theta<\pi.$$

Учитывая (20), на каждой граничной кривой $\Gamma^{(\nu)}$ ($\nu=1, 2, \ldots, m$) будем иметь

$$\operatorname{Im}\left[e^{-i\theta}F(z)\right]=a_{11}\operatorname{Im}\left[e^{-i\theta}\overline{\varphi_1(z)}+e^{i\theta}\varphi_1(z)+e^{-i\theta}k_{1\nu}\right]=$$
$$=a_{11}\operatorname{Im}\left[e^{-i\theta}k_{1\nu}\right]=\mathrm{const}.$$

Функция $F(z)$ регулярна в области $\overline{B}$, за исключением простого полюса в бесконечно удаленной точке, и согласно последнему равенству образы граничных кривых $\Gamma^{(\nu)}$ ($\nu=1, 2, \ldots, m$) при отображении функцией $F(z)$ лежат на параллельных прямых наклона θ к вещественной оси. Тогда, взяв произвольную точку $w=a$, не лежащую на указанных прямых, замечаем, что приращение аргумента $F(z)-a$ при обходе границы Γ равно нулю и, следовательно, по

принципу аргумента функция $F(z)$ принимает значение a ровно один раз. Этого достаточно для однолистности функции $F(z)$ в области B. Поскольку ее разложение в ряд Лорана удовлетворяет условию (6), то $F(z) \in \Sigma(B)$.

Но коэффициент α_1 у функций $F(z)$ такого вида выражается так

$$\alpha_1 = e^{2i\theta} a_{11}^2 + b_{11},$$

и для достижения знака равенства в (5.31) надо, чтобы $\theta = \frac{1}{2} \arg b_{11}$. Следствие доказано.

Аналогично можно получить известный результат о максимуме внешней площади для функций $F(z)$ из класса $\Sigma(B)$. Этот максимум равен πa_{11}^2 и реализуется функцией $F(z) = a_{11}\Phi_1(z) \in \Sigma(B)$.

Отметим, что для однолистных функций в многосвязной области ранее Мешковский [1—3] получил аналог внешней теоремы площадей (1.20) (а также ряд теорем искажения), а Ю. Е. Аленицын [1] обобщил результат Мешковского на функции более общего вида. Кроме того, Н. А. Лебедев [3] и Л. Л. Громова и Н. А. Лебедев [1, 2] доказали теоремы площадей для нескольких неналегающих конечно-связных областей, обобщающие теорему 5.1.

§ 3. Ортонормированность системы $\{C'_n(z)\}$

1°. Основные неравенства

Теорема 5.3. *Для системы $\{C_n(z)\}$, порожденной любой функцией $F(z) \in \Sigma(B)$, в области B выполняется неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n(z)|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(z)|^2 = P(z, \bar{z}). \qquad (5.32)$$

Знак равенства в (5.32) *при конечном z реализуется только функциями $F(z) \in \tilde{\Sigma}(B)$.*

Пусть задана любая функция $F(z) \in \Sigma(B)$. Фиксируем произвольное конечное значение $\zeta \in B$ и рассмотрим функцию

$$Q(w) = \ln \frac{1}{w - F(\zeta)}.$$

Если, используя (5.21), обозначить

$$\exp\{G(\zeta, \infty; B)\} = \exp\{G(F(\zeta), \infty; D)\} = R, \ R > 1, \quad (5.33)$$

то ясно, что любая ветвь функции $Q(w)$ регулярна на множестве d_R и, конечно, отлична от постоянной в каждой из областей, составляющих это множество. Чтобы применить теорему 5.1, надо разложить производную от функции

$$\psi(z)=Q(F(z))=\ln\frac{1}{F(z)-F(\zeta)}$$

в ряд типа Лорана на граничном кольцевом множестве $B_{1,R}$. Сделаем это элементарными преобразованиями, пользуясь единственностью такого равномерно сходящегося разложения.

Исходим из тождества

$$\ln\frac{1}{F(z)-F(\zeta)}=\left[\ln\frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}-R(z,\ \zeta)\right]+$$
$$+[R(z,\ \zeta)-\ln(z-\zeta)]. \quad (5.34)$$

Первое слагаемое в (5.34) согласно определению (5.8) есть регулярная в области B функция $g(z,\ \zeta)$, а поэтому равенство (5.34) перепишется так:

$$\ln\frac{1}{F(z)-F(\zeta)}=g(z,\ \zeta)+[R(z,\ \zeta)-\ln(z-\zeta)]. \quad (5.35)$$

Функция $g(z,\ \zeta)$ при фиксированном $\zeta\in B$ равенством (5.13) уже разложена в ряд по тейлоровской системе, так что, продифференцировав это равенство по z, получим разложение производной $g_z'(z,\ \zeta)$ в ряд по системе $\{\varphi_n'(z)\}$:

$$g_z'(z,\ \zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(\zeta)\,\varphi_n'(z).$$

Производная от второго слагаемого в (5.34) разложена в ряд типа Лорана на граничном кольцевом множестве $B_{1,R}$ равенством (4.101), именно:

$$[R(z,\ \zeta)-\ln(z-\zeta)]_z'=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\zeta)\,\Phi_n'(z).$$

Используя последние два равенства, получим искомое разложение производной $\psi'(z)$ в ряд типа Лорана на множестве $B_{1,R}$:

$$\psi'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\zeta)\,\Phi_n'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(\zeta)\,\varphi_n'(z).$$

По заключению теоремы 5.1 с учетом (4.19) получим утверждение теоремы при конечном z. Если же $z=\infty$, то соотношение (5.32) выполняется со знаком равенства для любой системы $\{C_n(z)\}$, ибо $C_n(\infty)=0$ и $\varphi_n(\infty)=0$.

Следствие. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(\zeta)\,\varphi_n(z) \tag{5.36}$$

сходится равномерно по двум переменным z и ζ внутри области B.

По свойству 5 функции $P(z, \bar{\zeta})$ (глава 4, § 2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(z)|^2$ сходится равномерно внутри области B, а поэтому для всякой замкнутой подобласти $\bar{B}_r$, $1<r<\infty$, по любому $\varepsilon>0$ найдется такое целое N, что при $n>N$ будет выполняться неравенство

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\varphi_k(z)|^2 < \varepsilon^2, \quad z \in \bar{B}_r.$$

Тогда, учитывая это неравенство и (5.32), будем иметь при $n>N$

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} C_k(\zeta)\,\varphi_k(z)\right| \leqslant \left(\sum_{k=n}^{\infty} |C_k(\zeta)|^2 \sum_{k=n}^{\infty} |\varphi_k(z)|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{P(\zeta, \bar{\zeta})}\,\varepsilon; \quad z, \zeta \in \bar{B}_r.$$

Но функция $P(z, \bar{z})$ непрерывна в B и, следовательно, в подобласти $\bar{B}_r$ ограничена, а этого достаточно для равномерной сходимости ряда (5.36) по z и ζ внутри области B.

Теорема 5.4. *Для системы $\{C_n(z)\}$, порожденной любой функцией $F(z) \in \Sigma(B)$, и произвольной ненулевой системы чисел $\{x_k\}$ ($k=0, 1, \ldots, N$; $N \geqslant 0$) в области B справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{k=0}^{N} x_k C_n^{(k)}(z)\right|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{k=0}^{N} x_k \varphi_n^{(k)}(z)\right|^2. \tag{5.37}$$

Знак равенства в (5.37) при конечном $z \in B$ имеет место в том и только в том случае, если $F(z) \in \tilde{\Sigma}(B)$.

Возьмем произвольное конечное значение $\zeta \in B$ и образуем функцию от аргумента w:

$$Q(w) = \sum_{k=0}^{N} x_k \left[\ln \frac{1}{w - F(\zeta)}\right]_{\zeta}^{(k)}.$$

Любая ветвь функции $Q(w)$ регулярна на множестве d_R, где параметр R введен равенством (5.33), и отлична от постоянной в каждой из областей, составляющих это множество, так как частные производные по ζ порядка $k \geqslant 1$ от функции $\ln \frac{1}{w - F(\zeta)}$ являются полиномами точно степени k относительно $\frac{1}{w - F(\zeta)}$ (коэффициент у старшего члена полинома отличен от нуля в силу однолистности функции $F(z)$).

Сложная функция $\psi(z) = Q(F(z))$ регулярна на граничном кольцевом множестве $B_{1,R}$, и разложение ее производной $\psi'(z)$ в ряд типа Лорана будем искать с помощью тождества (5.35). Для этого продифференцируем тождество (5.35) k раз по аргументу ζ:

$$\left[\ln \frac{1}{F(z) - F(\zeta)}\right]_{\zeta}^{(k)} = g_{\zeta}^{(k)}(z, \zeta) + [R(z, \zeta) - \ln(z - \zeta)]_{\zeta}^{(k)}, \quad (5.38)$$

имея в виду, что все функции в равенстве (5.35) регулярны по совокупности аргументов, когда z изменяется на множестве $B_{1,R'}$, $1 < R' < R$, а ζ изменяется в некоторой достаточно малой окрестности заданного значения $\zeta \in B$.

Из (5.38) получим для функции $\psi(z)$ тождественное представление на $B_{1,R}$:

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{N} x_k g_{\zeta}^{(k)}(z, \zeta) + \sum_{k=0}^{N} x_k [R(z, \zeta) - \ln(z - \zeta)]_{\zeta}^{(k)}. \quad (5.39)$$

По следствию из теоремы 5.3 в разложении (5.13) функции $g(z, \zeta)$ ряд сходится равномерно по двум переменным z и ζ внутри области B, а поэтому по теореме Вейерштрасса равенство (5.13) можно сколько угодно раз дифференцировать по каждой из переменных, применяя в правой части почленное дифференцирование.

Продифференцировав (5.13) k раз по ζ и один раз по z, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial z} g_{\zeta}^{(k)}(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(k)}(\zeta) \varphi_n'(z), \quad z, \zeta \in B.$$

Производная по z от функции $[R(z, \zeta) - \ln(z-\zeta)]_{\zeta}^{(k)}$ уже разложена на $B_{1,R}$ в ряд типа Лорана равенствами (4.101) и (4.107), именно:

$$\frac{\partial}{\partial z}[R(z, \zeta) - \ln(z-\zeta)]_{\zeta}^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(k)}(\zeta) \Phi_n'(z) \ (k = 0, 1, \ldots, N).$$

Из (5.39) и последних двух равенств найдем разложение производной $\psi'(z)$ в ряд типа Лорана на граничном кольцевом множестве $B_{1,R}$:

$$\psi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} x_k \varphi_n^{(k)}(\zeta) \right) \Phi_n'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} x_k C_n^{(k)}(\zeta) \right) \varphi_n'(z). \tag{5.40}$$

Применяя теорему 5.1, получим заключение теоремы при конечном $z \in B$. При $z = \infty$ соотношение (5.37) обращается в тривиальное равенство.

Замечание. Правая часть в соотношении (5.37) тождественно выражается через частные производные интегральной ядерной функции $P(z, \bar{\zeta})$, именно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{N} x_k \varphi_n^{(k)}(z) \right|^2 = \sum_{k, \nu=0}^{N} x_k \bar{x}_\nu \frac{\partial^{k+\nu}}{\partial z^k \partial \bar{\zeta}^\nu} P(z, \bar{\zeta}) \Big|_{\zeta=z}, \tag{5.41}$$

что следует из разложения (4.19) функции $P(z, \bar{\zeta})$.

Теорема 5.5. *Для системы $\{C_n(z)\}$, порожденной любой функцией $F(z) \in \Sigma(B)$, и произвольной системы чисел $\{x_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, N;\ N \geqslant 1)$ при заданных значениях $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$ из области B и фиксированном $\nu = 0, 1, \ldots$ выполняется неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{N} x_k C_n^{(\nu)}(\zeta_k) \right|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{N} x_k \varphi_n^{(\nu)}(\zeta_k) \right|^2. \tag{5.42}$$

Знак равенства в (5.42) *имеет место для каждой функции $F(z) \in \bar{\Sigma}(B)$.*

Естественно считать все значения ζ_k $(k=1, 2, \ldots, N)$ конечными, ибо в противном случае в силу равенства $C_n^{(\nu)}(\infty)=\varphi_n^{(\nu)}(\infty)=0$ задача свелась бы к доказательству неравенства (5.42) с заменой N на N', где $N'<N$.

Введем обозначение

$$R=\min_{1\leqslant k\leqslant N}\left(\exp\{G(\zeta_k,\ \infty;\ B)\}=\exp\{G(F(\zeta_k),\ \infty;\ D)\}\right),$$
$$R>1, \tag{5.43}$$

и рассмотрим функцию от аргумента w:

$$Q(w)=\sum_{k=1}^{N} x_k\left[\ln\frac{1}{w-F(\zeta_k)}\right]_{\zeta}^{(\nu)}$$

(выбор ветвей логарифмов не имеет значения).

Функция $Q(w)$ регулярна на множестве d_R, так как все значения $F(\zeta_k)$ лежат внутри или на границе области D_R, дополняющей множество $\bar{d}_R$ до полной w-плоскости. Но нельзя уже утверждать, что функция $Q(w)$ отлична от постоянной в каждой из областей, составляющих множество d_R. И это не только потому, что допускается нулевая система чисел $\{x_k\}$. В самом деле, для равных между собой ζ_k можно выбрать такую ненулевую систему $\{x_k\}$, что полученная функция $Q(w)$ будет тождественно равна нулю на d_R.

Образовав сложную функцию $\psi(z)=Q(F(z))$, разложение ее производной $\psi'(z)$ в ряд типа Лорана на множестве $B_{1,R}$ найдем так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, именно:

$$\psi'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\varphi_n^{(\nu)}(\zeta_k)\right)\Phi_n'(z)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{N} x_k C_n^{(\nu)}(\zeta_k)\right)\varphi_n'(z).$$

Теперь по теореме 5.1 с учетом замечания к ней получим утверждение теоремы.

Замечание. В неравенствах (5.32) и (5.37) при любом конечном z из области B правые части строго положительны. То же самое имеет место и в неравенстве (5.42) при дополнительном условии, что система чисел $\{x_k\}$

ненулевая и заданные точки ζ_k $(k=1, 2, \ldots, N)$ конечны и различны.

Действительно, предположив противное, т. е. что правая часть одного из неравенств обращается в нуль, получили бы равенство нулю левой его части, а отсюда следовало бы, что в разложении соответствующей функции $\psi'(z)$ в ряд типа Лорана на множестве $B_{1,R}$ все коэффициенты равны нулю, т. е. $\psi'(z)=0$. Но производная $\psi'(z)$ является произведением двух множителей: $Q'_w(F(z))$ и $F'(z)$, из которых первый не может быть тождественно равен нулю на $B_{1,R}$ по условиям теоремы, а второй — в силу однолистности функции $F(z)$.

2°. Ортонормированность системы $\{C'_n(z)\}$

Лемма 5.2. *Для системы $\{C_n(z)\}$, порожденной любой функцией $F(z)\in\Sigma(B)$, справедливо неравенство*

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_B\left|\sum_{n=1}^{N}x_kC'_n(z)\right|^2d\sigma\leqslant\sum_{n=1}^{N}|x_n|^2, \tag{5.44}$$

где $\{x_n\}$ $(n=1, 2, \ldots, N;\ N\geqslant 1)$ — произвольная система комплексных чисел.

Знак равенства в (5.44) для ненулевой системы $\{x_n\}$ имеет место тогда и только тогда, когда $F(z)\in\tilde{\Sigma}(B)$.

Пусть заданы любая функция $F(z)\in\Sigma(B)$ и произвольная система чисел $\{x_n\}$ $(n=1, 2, \ldots, N)$. Образуем функцию

$$Q(w)=\sum_{n=1}^{N}x_nQ_n(w),$$

где $Q_n(w)$ — обобщенные полиномы Фабера, порожденные функцией $F(z)$ по формулам (5.19).

Функция $Q(w)$ является полиномом степени не выше N и потому регулярна на множестве d_R с любым $R>1$. Для сложной функции $\psi(z)=Q(F(z))$ согласно (5.20) имеем тождественное в области $B_{1,\infty}$ представление

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{N}x_n\Phi_n(z)+\sum_{n=1}^{N}x_nC_n(z). \tag{5.45}$$

Обозначим второе слагаемое в (5.45) через $f(z)$ и разложим функцию $f(z)$ согласно теореме 4.10 в ряд по тей-

лоровской системе

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(z), \qquad z\in B. \tag{5.46}$$

Подставляя (5.46) в (5.45), получим разложение функции $\psi(z)$ в ряд по лорановской системе в области $B_{1,\infty}$:

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{N}x_n\Phi_n(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(z).$$

Дифференцирование этого равенства дает разложение производной $\psi'(z)$ в ряд типа Лорана на множестве $B_{1,\infty}$:

$$\psi'(z)=\sum_{n=1}^{N}x_n\Phi_n'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n'(z).$$

По теореме 5.1 с учетом замечания к ней выводим неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2\leqslant\sum_{n=1}^{N}|x_n|^2, \tag{5.47}$$

причем если $\{x_n\}$ $(n=1, 2, \ldots, N)$ — ненулевая система чисел, то функция $Q(w)$ отлична от постоянной, а потому знак равенства в (5.47) имеет место тогда и только тогда, когда $F(z)\in\tilde{\Sigma}(B)$.

Неравенство (5.47) обеспечивает сходимость ряда в левой части (5.47), а тогда по теореме Рисса — Фишера производная $f'(z)$ принадлежит классу $l^2(B)$ и в силу равенства Парсеваля будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_B\left|\sum_{n=1}^{N}x_nC_n'(z)\right|^2d\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2.$$

Из последнего равенства и (5.47) получим утверждение леммы.

Теорема 5.6. *Для системы $\{C_n(z)\}$, порожденной каждой функцией $F(z)\in\tilde{\Sigma}(B)$, система производных $\{C_n'(z)\}$ является полной ортонормированной системой функций в $l^2(B)$.*

Пусть $F(z)\in\tilde{\Sigma}(B)$. Фиксируем произвольное n и положим

$$x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=0, \qquad x_n=1.$$

По лемме 5.2 будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_B |C_n'(z)|^2 d\sigma = 1 \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.48}$$

Ортогональность системы $\{C_n'(z)\}$ в области B доказывается так же, как это сделано в теореме 1.3 при доказательстве ортогональности системы $\{A_n'(z)\}$.

Следовательно, система производных $\{C_n'(z)\}$ является ортонормированной системой функций в области B. Но поскольку система $\{\varphi_n'(z)\}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ является полной ортонормированной системой в $l^2(B)$, а матрица коэффициентов Фурье λ_{nk} $(n,\ k=1,\ 2,\ \ldots)$ функций $C_n'(z)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ в системе $\{\varphi_k'(z)\}$ согласно (5.17) — симметрическая, то и ортонормированная система функций $\{C_n'(z)\}$ полна в классе $l^2(B)$ (В. И. Смирнов [1], стр. 182—183).

Ортонормированность системы $\{C_n'(z)\}$, порожденной каждой функцией $F(z)\in\tilde{\Sigma}(B)$, упрощает использование этих систем при исследовании функций класса $\tilde{\Sigma}(B)$, а так как класс $\tilde{\Sigma}(B)$ всюду плотен в $\Sigma(B)$, то и при исследовании функций всего класса $\Sigma(B)$.

§ 4. Экстремальные системы $\{C_n(z)\}$

1°. Случай произвольной области B

Для приложений полезно доказать существование систем $\{C_n(z)\}$ с некоторыми экстремальными свойствами.

Лемма 5.3. *Если для двух функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ из класса $\Sigma(B)$ порождаемые ими системы $\{C_n(z;\ F_1)\}$ и $\{C_n(z;\ F_2)\}$ совпадают при некотором значении $z=\zeta_0\in B_{1,\infty}$, т. е.*

$$C_n(\zeta_0;\ F_1) = C_n(\zeta_0;\ F_2) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots), \tag{5.49}$$

то функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ отличаются лишь постоянным слагаемым.

Образуем по формуле (5.8) для каждой из функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ функцию $g(z,\ \zeta)$ при $\zeta=\zeta_0$ и разложим последнюю в ряд по тейлоровской системе. Согласно (5.13) для $z\in B$

будем иметь

$$\left.\begin{aligned} g(z,\ \zeta_0;\ F_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\zeta_0;\ F_1)\,\varphi_n(z), \\ g(z,\ \zeta_0;\ F_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\zeta_0;\ F_2)\,\varphi_n(z). \end{aligned}\right\} \tag{5.50}$$

Из (5.49) и (5.50) вытекает, что функции $g(z,\ \zeta_0;\ F_1)$ и $g(z,\ \zeta_0;\ F_2)$ тождественны в области B:

$$g(z,\ \zeta_0;\ F_1) \equiv g(z,\ \zeta_0;\ F_2). \tag{5.51}$$

Но согласно определению функции $g(z,\ \zeta)$ имеем

$$g(z,\ \zeta_0;\ F_1) = \ln\frac{z-\zeta_0}{F_1(z)-F_1(\zeta_0)} - R(z,\ \zeta_0),$$

$$g(z,\ \zeta_0;\ F_2) = \ln\frac{z-\zeta_0}{F_2(z)-F_2(\zeta_0)} - R(z,\ \zeta_0),$$

откуда, учитывая (5.51), получим $F_2(z)-F_1(z) \equiv \text{const}$.

Теорема 5.7. *Пусть заданы любые* $\zeta \in B_{1,\infty}$ *и* $\theta \in [0,\ \pi)$. *Тогда все решения системы уравнений*

$$C_n(\zeta) = e^{2i\theta}\overline{\varphi_n(\zeta)} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{5.52}$$

относительно $F(z) \in \Sigma(B)$, *порождающих системы* $\{C_n(z)\}$, *даются формулой*

$$F(z) = j_\theta(z,\ \zeta) + \text{const}, \tag{5.53}$$

где $j_\theta(z,\ \zeta)$ — *функция области, определенная во введении.*

Прежде всего возьмем функцию $j_\theta(z,\ \zeta)$ и покажем, что порождаемая ею система $\{C_n(z)\}$ удовлетворяет уравнениям (5.52). Для этого при заданном $\zeta \in B_{1,\infty}$ для функции $j_\theta(z,\ \zeta)$ по формуле (5.8) образуем функцию $g(z,\ \zeta)$:

$$g(z,\ \zeta) = \ln\frac{z-\zeta}{j_\theta(z,\ \zeta)-j_\theta(\zeta,\ \zeta)} - R(z,\ \zeta) = \ln\frac{z-\zeta}{j_\theta(z,\ \zeta)} - R(z,\ \zeta).$$

Но функция $j_\theta(z,\ \zeta)$ связана с функциями $R(z,\ \zeta)$ и $P(z,\ \bar{\zeta})$ зависимостью (см., например, Г. М. Голузин [7], стр. 220)

$$\ln\frac{z-\zeta}{j_\theta(z,\ \zeta)} = R(z,\ \zeta) + e^{2i\theta}P(z,\ \bar{\zeta}), \tag{5.54}$$

учитывая которую для $z \in B$ получим

$$g(z,\ \zeta) = e^{2i\theta}P(z,\ \bar{\zeta}).$$

Разложив функции $g(z, \zeta)$ и $P(z, \overline{\zeta})$ по формулам (5.13) и (4.19) соответственно в ряд по тейлоровской системе, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(\zeta)\varphi_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2i\theta}\overline{\varphi_n(\zeta)}\varphi_n(z),$$

откуда, в силу единственности разложения регулярных функций в ряд по тейлоровской системе, и следуют равенства (5.52) для функции $j_\theta(z, \zeta)$. Очевидно, что и для функции $F(z) = j_\theta(z, \zeta) + \text{const}$ равенства (5.52) также имеют место, ибо любые две функции из класса $\Sigma(B)$, отличающиеся лишь постоянным слагаемым, порождают одну и ту же систему $\{C_n(z)\}$.

Теперь пусть $F_1(z) \in \Sigma(B)$ — любая функция, для которой выполняются равенства (5.52). Тогда системы $\{C_n(z; F_1)\}$ и $\{C_n(z; j_\theta)\}$ совпадают при $z = \zeta \in B_{1,\infty}$, а поэтому порождающие их функции $F_1(z)$ и $j_\theta(z)$ по лемме 5.3 отличаются лишь на постоянную.

Следствие. *При заданном* $\theta \in (0, \pi)$ *не существует такой функции* $F(z) \in \Sigma(B)$, *для которой равенства* (5.52) *при всех* n $(n = 1, 2, \ldots)$ *выполнялись бы в двух различных точках из области* $B_{1,\infty}$.

Предположим противное, т. е. для некоторой функции $F(z) \in \Sigma(B)$ равенства (5.52) имеют место в двух различных точках ζ_1 и ζ_2 из $B_{1,\infty}$. Тогда по заключению теоремы 5.7 должно быть

$$F(z) = j_\theta(z, \zeta_1) + c_1,$$
$$F(z) = j_\theta(z, \zeta_2) + c_2,$$

откуда следует равенство

$$j_\theta(z, \zeta_2) = j_\theta(z, \zeta_1) + c_3.$$

Постоянная c_3 не равна нулю, так как однолистные функции $j_\theta(z, \zeta_2)$ и $j_\theta(z, \zeta_1)$ имеют нули в разных точках области $B_{1,\infty}$, но она не может быть и отличной от нуля, ибо в противном случае функция $j_\theta(z, \zeta_1)$ отображала бы область B на плоскость с m разрезами по дугам логарифмических спиралей с асимптотическими точками в начале и в точке $z = -c_3$, а это невозможно.

Теорема 5.8. *Для любой последовательности комплексных чисел* $\{x_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$, *для которой*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, \tag{5.55}$$

существует функция $F(z) \in \Sigma(B)$ *такая, что порождаемая ею система функций* $\{C_n(z)\}$ *при всех* $z \in B$ *удовлетворяет равенству*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n C_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n \varphi_n(z). \tag{5.56}$$

Предполагая заданную последовательность $\{x_n\}$ ненулевой, ибо в противном случае равенство (5.56) удовлетворялось бы для любой функции $F(z) \in \Sigma(B)$, выберем целое N произвольно, но так, чтобы конечная система чисел $\{x_n\}$ $(n=1, 2, \ldots, N)$ была уже ненулевой, и поставим следующую экстремальную задачу.

Для заданной ненулевой системы чисел $\{y_n\}$ $(n=1, 2, \ldots, N)$ рассматривается величина

$$I = \operatorname{Re} \sum_{n,\, k=1}^{N} nk\alpha_{nk} y_n y_k,$$

где α_{nk} порождены функцией $F(z) \in \Sigma(B)$ с помощью разложения (5.4).

Величина I остается ограниченной, когда $F(z)$ пробегает весь класс $\Sigma(B)$, и не зависит от α_0. В силу компактности семейства $\Sigma(B)$ в области $B_{1,\infty}$ (при условии, например, $\alpha_0 = 0$) существует по крайней мере одна функция $F(z) \in \Sigma(B)$, для которой I достигает наибольшего значения. Будем искать уравнение, которому удовлетворяет эта экстремальная функция.

Повторяя рассуждения Шиффера [3] при решении аналогичной задачи, придем к тому, что для полиномов Фабера $\mathcal{F}_n(w)$ $(n=1, 2, \ldots, N)$, порожденных экстремальной функцией $F(z) \in \Sigma(B)$, в области $B_{1,\infty}$ имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{N} y_k \mathcal{F}_k(F(z)) = \sum_{k=1}^{N} y_k \eta_k(z) + \sum_{k=1}^{N} \bar{y}_k \zeta_k(z). \tag{5.57}$$

Но для полиномов Фабера $\mathcal{F}_k(F(z))$ $(k=1, 2, \ldots)$ в области B имеем тождественное представление (5.12),

учитывая которое из (5.57) получим

$$\sum_{k=1}^{N} k y_k B_k(z) = \sum_{k=1}^{N} \bar{y}_k \zeta_k(z), \qquad z \in B. \tag{5.58}$$

Функции $B_k(z)$ и $\zeta_k(z)$ $(k=1, 2, \ldots)$ можно выразить линейно соответственно через $C_1(z)$, $C_2(z)$, $\ldots$, $C_k(z)$ и $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\ldots$, $\varphi_k(z)$ с помощью формул (5.15) и (4.16), именно:

$$\begin{aligned} B_k(z) &= \sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu k} C_\nu(z), \\ \zeta_k(z) &= k \sum_{\nu=1}^{k} \bar{a}_{\nu k} \varphi_\nu(z). \end{aligned} \tag{5.59}$$

Подставляя (5.59) в (5.58), будем иметь

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\sum_{k=\nu}^{N} k a_{\nu k} y_k \right) C_\nu(z) = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\sum_{k=\nu}^{N} k \bar{a}_{\nu k} \bar{y}_k \right) \varphi_\nu(z). \tag{5.60}$$

Пользуясь произвольностью ненулевой системы чисел $\{y_k\}$ $(k=1, 2, \ldots, N)$, выберем y_k так, чтобы выполнялось N равенств

$$\sum_{k=\nu}^{N} k a_{\nu k} y_k = x_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N),$$

что возможно, ибо эта система имеет определитель, отличный от нуля, и по условию система чисел $\{x_n\}$ $(n=1, 2, \ldots, N)$ ненулевая.

Тогда равенство (5.60) перепишется так:

$$\sum_{n=1}^{N} x_n C_n(z) = \sum_{n=1}^{N} \bar{x}_n \varphi_n(z), \qquad z \in B. \tag{5.61}$$

Тем самым уже доказано, что для любой ненулевой системы комплексных чисел $\{x_n\}$ $(n=1, 2, \ldots, N)$ существует по крайней мере одна функция из класса $\Sigma(B)$, для которой при каждом $z \in B$ выполняется соотношение (5.61). Чтобы получить (5.56), остается совершить предельный переход.

Для этого, прежде всего, заметим, что ряд в правой части (5.56) по теореме 4.9 сходится равномерно внутри

области B, и обозначим его сумму через $f(z)$:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{x}_n\varphi_n(z), \qquad z\in B. \tag{5.62}$$

Во-вторых, зададим произвольное $\varepsilon>0$ и выберем такое целое $N=N(\varepsilon)$, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{k=N}^{\infty}|x_k|^2<\varepsilon^2, \tag{5.63}$$

что можно сделать в силу условия (5.55). Теперь фиксируем произвольное $z\in B_{1,\infty}$ и оценим остаток ряда в (5 62). Учитывая (5.63), при $n\geqslant N$ будем иметь

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}\bar{x}_k\varphi_k(z)\right|\leqslant\left(\sum_{k=n}^{\infty}|x_k|^2\sum_{k=n}^{\infty}|\varphi_k(z)|^2\right)^{1/2}\leqslant\varepsilon\sqrt{P(z,\bar{z})} \tag{5.64}$$

$\left(\text{использовано равенство } \sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k(z)|^2=P(z,\bar{z})\right)$.

Далее заметим, что ряд в левой части (5.55) по теореме 5.3 также сходится равномерно внутри области B, а его остаток при $n\geqslant N(\varepsilon)$ для любой $F(z)\in\Sigma(B)$ оценивается аналогично с помощью неравенств (5.32) и (5.63)

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}x_kC_k(z)\right|\leqslant\varepsilon\sqrt{P(z,\bar{z})}. \tag{5.65}$$

Заменим в равенстве (5.61) N на ν и будем придавать ν значения 1, 2, ... (считая для простоты, что уже x_1 отличен от нуля). Тогда образуется последовательность экстремальных функций $F_\nu(z)$ ($\nu=1, 2, \ldots$) из класса $\Sigma(B)$, для каждой из которых порожденная ею система $\{C_n(z;\ F_\nu)\}$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{k=1}^{\nu}x_kC_k(z;\ F_\nu)=\sum_{k=1}^{\nu}\bar{x}_k\varphi_k(z), \qquad z\in B. \tag{5 66}$$

Используя оценки (5.64), (5.65) и равенство (5.66), при $\nu\geqslant N(\varepsilon)$ будем иметь

$$\left|f(z)-\sum_{k=1}^{\infty}x_kC_k(z;\ F_\nu)\right|<2\varepsilon\sqrt{P(z,\bar{z})}. \tag{5.67}$$

Поскольку семейство функций $\Sigma(B)$ компактно в области $B_{1,\infty}$ (считая $\alpha_0=0$), то из последовательности $\{F_\nu(z)\}$

($\nu = 1, 2, \ldots$) можно выделить частичную последовательность $\{F_{\nu_m}(z)\}$ ($m = 1, 2, \ldots$), сходящуюся равномерно внутри области $B_{1,\infty}$ к некоторой функции $F(z)$ из класса $\Sigma(B)$. Для этой функции систему $\{C_n(z;\ F)\}$ будем обозначать просто через $\{C_n(z)\}$.

Из определения системы $\{C_n(z)\}$ или из формулы (5.20) следует, что при фиксированном $n = 1, 2, \ldots$ в заданной точке $z \in B$ справедливо равенство

$$\lim_{m\to\infty} C_n(z;\ F_{\nu_m}) = C_n(z) \tag{5.68}$$

равномерно относительно z внутри $B_{1,\infty}$ (и даже внутри B).

Наконец, напишем тождество при $m = 1, 2, \ldots$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k C_k(z) - \sum_{k=1}^{\infty} x_k C_k(z; F_{\nu_m}) =$$
$$= \left[\sum_{k=1}^{N} x_k C_k(z) - \sum_{k=1}^{N} x_k C_k(z; F_{\nu_m})\right] +$$
$$+ \left[\sum_{k=N+1}^{\infty} x_k C_k(z) - \sum_{k=N+1}^{\infty} x_k C_k(z;\ F_{\nu_m})\right]. \tag{5.69}$$

Для второго слагаемого в (5.69) можно использовать оценку (5.65), а для первого — по заданному $\varepsilon > 0$ в силу (5.68) существует такое целое $N_1 = N_1(\varepsilon)$, что при $m \geqslant N_1$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{N} x_k C_k(z) - \sum_{k=1}^{N} x_k C_k(z;\ F_{\nu_m})\right| < \varepsilon\sqrt{P(z,\ \bar{z})}. \tag{5.70}$$

Из (5.69), (5.70) и (5.65) при $m \geqslant N_1(\varepsilon)$ вытекает оценка

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k C_k(z) - \sum_{k=1}^{\infty} x_k C_k(z;\ F_{\nu_m})\right| < 3\varepsilon\sqrt{P(z,\ \bar{z})},$$

которая совместно с оценкой (5.67) приводит к неравенству

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k C_k(z) - f(z)\right| < 5\varepsilon\sqrt{P(z,\ \bar{z})}.$$

Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$ отсюда следует равенство (5.56) для предельной функции $F(z) \in \Sigma(B)$ в каждой точке $z \in B_{1,\infty}$. В точке $z = \infty$ равенство (5.56) выполняется для каждой функции из класса $\Sigma(B)$, значит, и для предельной. Теорема доказана.

2°. Случай симметричной области B^+

Введем в рассмотрение область B^+, отличающуюся от области B, определенной во введении, только тем, что каждая ее граничная кривая $\Gamma^{(\nu)}$ $(\nu=1, 2, \ldots, m)$ симметрична относительно вещественной оси.

В дальнейшем будут использованы следующие специфические свойства области B^+:

1) Функции лорановской системы $\{\varphi_n(z), \Phi_n(z)\}$ и системы пар $\{\zeta_n(z), \eta_n(z)\}$ в симметричных точках z и $\bar{z}$ из области B^+ принимают сопряженные значения, т. е.

$$\varphi_n(\bar{z})=\overline{\varphi_n(z)}, \qquad \Phi_n(\bar{z})=\overline{\Phi_n(z)}; \tag{5.71а}$$

$$\zeta_n(\bar{z})=\overline{\zeta_n(z)}, \qquad \eta_n(\bar{z})=\overline{\eta_n(z)} \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{5.71б}$$

Докажем сначала первое из равенств (5.71а). Поскольку область B^+ симметрична относительно вещественной оси, то функции $\overline{\varphi_n(\bar{z})}$ $(n=1, 2, \ldots)$ определены при каждом $z\in B^+$ и регулярны в области B^+. Проверкой убеждаемся, что система функций $\{\overline{\varphi_n(\bar{z})}\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ удовлетворяет условиям, определяющим тейлоровскую систему функций для области B^+.

Поэтому в силу единственности тейлоровской системы получим

$$\overline{\varphi_n(\bar{z})}=\varphi_n(z) \quad (n=1,2,\ldots).$$

Аналогично доказываются второе равенство (5.71 а) и равенства (5.71б).

2) Элементы матриц $\|a_{nk}\|$, $\|b_{nk}\|$, $\|c_{nk}\|$ — действительные числа.

Это свойство сразу вытекает из (5.71а) и (5.71б).

3) Функции $j_0(z)$ и $j_0(z, \zeta)$ при действительном $\zeta\in B^+$ отображают область B^+ на плоскость с m разрезами по отрезкам вещественной оси. При этом между ними имеет место соотношение

$$j_0(z)-j_0(\zeta)=j_0(z, \zeta). \tag{5.72}$$

Напомним, что функция $j_0(z)=a_{11}[\Phi_1(z)+\varphi_1(z)]$ отображает однолистно область B^+ на плоскость с m конечными прямолинейными разрезами, параллельными вещественной оси. Ввиду симметричности области B^+ функция $\overline{j_0(z}$

определена при каждом $z \in B^+$, принадлежит классу $\Sigma(B^+)$ и совершает такое же однолистное отображение, как и $j_0(z)$. Так как лорановские разложения обеих функций около $z=\infty$ не содержат свободных членов, то в силу единственности указанного отображения получим

$$j_0(\bar{z}) = \overline{j_0(z)}, \qquad z \in B^+. \tag{5.73}$$

Поскольку на каждой граничной кривой $\Gamma^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ для любой точки z имеется симметричная $\bar{z}$, то с помощью (5.73) устанавливаем симметричность относительно вещественной оси каждого из m граничных прямолинейных разрезов, что возможно только в том случае, если разрезы лежат на вещественной оси. Аналогично доказывается это свойство и для функции $j_0(z, \zeta)$ при вещественном значении $\zeta \in B^+$.

Теперь возьмем произвольное действительное $\zeta \in B^+$ и сравним функции $j_0(z) - j_0(\zeta)$ и $j_0(z, \zeta)$. Так как по (5.73) $j_0(\zeta)$ действительно, то обе функции однолистно отображают область B^+ на плоскость с m разрезами по отрезкам вещественной оси, т. е. на плоскость с радиальными разрезами. При этом обе функции принадлежат классу $\Sigma(B^+)$ и заданную точку $z = \zeta \in B^+$ переводят в нуль.

Но описанное однолистное конформное отображение области B^+ на плоскость с радиальными разрезами единственно, откуда и следует равенство (5.72).

Теорема 5.9. *Функция $j_0(z) \in \Sigma(B^+)$ порождает систему функций $\{C_n(z)\}$, для которой при каждом $n = 1, 2, \ldots$ в области B^+ выполняется равенство*

$$C_n(z) = \varphi_n(z). \tag{5.74}$$

Если равенство (5.74) *имеет место при каждом $n = 1, 2, \ldots$ для $F(z) \in \Sigma(B^+)$ хотя бы в одной точке $z \in B^+_{1,\infty}$, то*

$$F(z) = j_0(z) + \text{const}. \tag{5.75}$$

Возьмем произвольное действительное $\zeta \in B^+$ и для $j_0(z)$ образуем по формуле (5.8) функцию $g(z, \zeta)$:

$$g(z, \zeta) = \ln \frac{z - \zeta}{j_0(z) - j_0(\zeta)} - R(z, \zeta) = \ln \frac{z - \zeta}{j_0(z, \zeta)} - R(z, \zeta) \tag{5.76}$$

(использовано равенство (5.72)).

Разность, стоящая в правой части (5.76), легко находится из равенства (5.54), если положить в нем $\theta=0$, именно:

$$\ln\frac{z-\zeta}{j_0(z,\zeta)}-R(z,\zeta)=P(z,\overline{\zeta}).$$

Учитывая это, из (5.76) получим равенство

$$g(z,\zeta)=P(z,\overline{\zeta})$$

для всех $z\in B^+$ и действительных значений $\zeta\in B^+$.

Разлагая $g(z,\zeta)$ и $P(z,\overline{\zeta})$ в ряд по тейлоровской системе функций по формулам соответственно (5.13) и (4.19), будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n(\zeta)\varphi_n(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\varphi_n(\zeta)}\,\varphi_n(z);\qquad z,\ \zeta\in B^+,\ \operatorname{Im}\zeta=0.$$

Снова используя единственность разложения в ряд по тейлоровской системе, из последнего равенства получим

$$C_n(\zeta)=\overline{\varphi_n(\zeta)}\qquad(n=1,\ 2,\ldots),\tag{5.77}$$

где $\zeta\in B^+$ и $\operatorname{Im}\zeta=0$.

По свойству 1) области B^+ из (5.77) получим (5.74) при действительных значениях аргумента, а так как функции $C_n(z)$ и $\varphi_n(z)$ $(n=1,\ 2,\ldots)$ регулярны в области B^+, то (5.74) выполняется при каждом $z\in B^+$. Если же равенство (5.74) при каждом $n=1,\ 2,\ldots$ выполняется для какой-либо функции $F(z)\in\Sigma(B^+)$ хотя бы при одном значении $z=\zeta_0\in B^+_{1,\infty}$, то будем иметь

$$C_n(\zeta_0;\ F)=C_n(\zeta_0;\ j_0).$$

Применяя лемму 5.3, получим отсюда требуемое равенство (5.75).

Теорема 5.10. *Пусть заданы любые* $\zeta\in B^+_{1,\infty}$ и $\theta\in[0,\pi)$. *Тогда все решения системы уравнений*

$$C_n(\zeta)=e^{2i\theta}\varphi_n(\zeta)\qquad(n=1,\ 2,\ldots)\tag{5.78}$$

относительно функций $F(z)\in\Sigma(B^+)$, *порождающих системы* $\{C_n(z)\}$, *даются в виде:*

1) $\operatorname{Im}\zeta=0$

$$F(z)=\begin{cases} j_0(z)+\text{const}, & \theta=0,\\ j_\theta(z,\ \zeta)+\text{const}, & \theta\neq0;\end{cases}\tag{5.79}$$

2) $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$

$$F(z)=\begin{cases} j_0(z)+\text{const}, & \theta=0, \\ \text{нет решений}, & \theta\neq 0. \end{cases} \tag{5.80}$$

Пусть сначала $\operatorname{Im}\zeta=0$. Тогда при $\theta=0$ (5.79) следует из теоремы 5.9. Если же $\theta\neq 0$, то перепишем (5.78) так:

$$C_n(\zeta)=e^{2i\theta}\,\overline{\varphi_n(\zeta)} \qquad (n=1,\ 2,\ldots),$$

что возможно, так как $\varphi_n(\zeta)$ — действительные числа. Но по теореме 5.7 для области B и, следовательно, для области B^+ это равенство имеет место только для функций $F(z)=$ $=j_\theta(z,\ \zeta)+\text{const}$, что и доказывает формулу (5.79).

Заметим, что при $\operatorname{Im}\zeta=0$ и $\theta=0$ согласно (5.72) оба решения в (5.79) совпадают, а поэтому для $\operatorname{Im}\zeta=0$ все решения (5.78) можно написать в виде

$$F(z)=j_\theta(z,\ \zeta)+\text{const}. \tag{5.81}$$

Пусть теперь $\operatorname{Im}\zeta\neq 0$. Тогда при $\theta=0$ (5.80) получается снова по теореме 5.9. Остается рассмотреть нетривиальный случай $\theta\neq 0$.

Предположим противное (5.80), т. е. существует некоторая функция $F(z)\in\Sigma(B^+)$, для которой выполняется равенство (5.78) при $n=1,\ 2,\ldots$ Для этой функции $F(z)$ при заданном $\zeta\in B^+_{1,\infty}$, $\operatorname{Im}\zeta\neq 0$, образуем по формуле (5.8) функцию $g(z,\ \zeta)$. Учитывая (5.78), будем иметь

$$g(z,\ \zeta)=\ln\frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}-R(z,\ \zeta)=e^{2i\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\zeta)\,\varphi_n(z).$$

По свойству 1) области B^+ можно написать равенство

$$\varphi_n(\zeta)=\overline{\varphi_n(\bar\zeta)} \qquad (n=1,\ 2\ldots), \tag{5.82}$$

используя которое в разложении $g(z,\ \zeta)$ и имея в виду равенство (4.19) для функции $P(z,\ \bar\zeta)$, получим

$$\ln\frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}-R(z,\ \zeta)=e^{2i\theta}P(z,\ \zeta). \tag{5.83}$$

Положим в этом равенстве $z=\bar\zeta$:

$$\ln\frac{\bar\zeta-\zeta}{F(\bar\zeta)-F(\zeta)}-R(\bar\zeta,\ \zeta)=e^{2i\theta}P(\bar\zeta,\ \zeta),$$

и по (4.19) с учетом (5.82) преобразуем $P(\bar{\zeta}, \zeta)$:

$$P(\bar{\zeta}, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_n(\bar{\zeta})}\, \varphi_n(\bar{\zeta}) = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(\zeta)|^2 = P(\zeta, \bar{\zeta}).$$

Тогда предпоследнее равенство перепишется так:

$$\ln \frac{\bar{\zeta}-\zeta}{F(\bar{\zeta})-F(\zeta)} - R(\bar{\zeta}, \zeta) = e^{2i\theta} P(\zeta, \bar{\zeta}). \tag{5.84}$$

Теперь по формуле (5.8) образуем функцию $g(z, \bar{\zeta})$ и разложим ее в ряд по тейлоровской системе

$$\ln \frac{z-\bar{\zeta}}{F(z)-F(\bar{\zeta})} - R(z, \bar{\zeta}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\bar{\zeta})\, \varphi_n(z). \tag{5.85}$$

Положив в равенстве (5.85) $z=\zeta$ и учитывая симметричность функции $R(z, \zeta)$, из (5.85) получим

$$\ln \frac{\zeta-\bar{\zeta}}{F(\zeta)-F(\bar{\zeta})} - R(\bar{\zeta}, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\bar{\zeta})\, \varphi_n(\zeta). \tag{5.86}$$

Сравнивая (5.84) и (5.86), придем к равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(\bar{\zeta})\, \varphi_n(\zeta) = e^{2i\theta} P(\zeta, \bar{\zeta}). \tag{5.87}$$

С другой стороны, модуль левой части в (5.87) легко оценивается с помощью неравенства (5.32), именно:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} C_n(\bar{\zeta})\, \varphi_n(\zeta)\right| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |C_n(\bar{\zeta})|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(\zeta)|^2\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(\zeta)|^2 = P(\zeta, \bar{\zeta}). \tag{5.88}$$

Из (5.87) и (5.88) заключаем, что в (5.88) должен иметь место знак равенства во всех неравенствах, что с учетом аргумента правой части в (5.87) приводит к соотношению

$$C_n(\bar{\zeta}) = e^{2i\theta}\, \overline{\varphi_n(\zeta)} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Теперь равенство (5.85) перепишется так:

$$\ln \frac{z-\bar{\zeta}}{F(z)-F(\bar{\zeta})} - R(z, \bar{\zeta}) = e^{2i\theta} P(z, \zeta). \tag{5.89}$$

Так как функции $R(z, \zeta)$ и $P(z, \bar{\zeta})$ при фиксированном $\zeta \in B^+$ регулярны по z в замкнутой области $\bar{B}^+$, то из (5.89) выводим, что такой же будет и функция $F(z)$. Но на каждой граничной кривой $\Gamma^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ имеет место соотношение (4.46), используя которое в (5.83) и (5.89) для $z \in \Gamma^{(\nu)}$ получим

$$\left.\begin{aligned} \ln \frac{1}{F(z)-F(\zeta)} &= \overline{P(z, \bar{\zeta})} + e^{2i\theta} P(z, \zeta) + \text{const}, \\ \ln \frac{1}{F(z)-F(\bar{\zeta})} &= \overline{P(z, \zeta)} + e^{2i\theta} P(z, \bar{\zeta}) + \text{const}. \end{aligned}\right\} \quad (5.90)$$

Умножив обе части (5.90) на $e^{-i\theta}$ и заметив после этого сопряженность правых частей, на каждой граничной кривой $\Gamma^{(\nu)}$ будем иметь

$$e^{-i\theta} \ln [F(z) - F(\zeta)] = \overline{e^{-i\theta} \ln [F(z) - F(\bar{\zeta})]} + \text{const}. \quad (5.91)$$

Но равенство (5.91) уже противоречиво, ибо, взяв производную от обеих частей вдоль кривой $\Gamma^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$, сразу получим

$$\left| \frac{F(z)-F(\zeta)}{F(z)-F(\bar{\zeta})} \right| = 1, \qquad z \in \Gamma^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m),$$

а приравняв реальные части в (5.91) и используя последний результат, придем к выводу, что $F(z) \equiv \text{const}$, что невозможно. Теорема доказана.

ГЛАВА 6

ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Оценки и области значений некоторых функционалов

Лемма 6.1. *Функции области $R(z, \zeta)$, $P(z, \bar{\zeta})$ и их частные производные любого порядка (для последней по z и $\bar{\zeta}$) изменяются непрерывно внутри B при непрерывной деформации заданной области B. Другими словами, для всякой последовательности областей $B^{(n)}$ $(n=1, 2, \ldots)$, равномерно аппроксимирующей область B, последовательности функций $R(z, \zeta; B^{(n)})$, $P(z, \bar{\zeta}; B^{(n)})$ и их частных производных любого порядка сходятся равномерно внутри области B по двум переменным z и ζ к соответствующим функциям области B.*

Пусть имеется произвольная последовательность областей $B^{(n)}$ $(n=1, 2, \ldots)$ (типа области B, определенной во введении), равномерно аппроксимирующая основную область B. Под равномерной аппроксимацией области B областями $B^{(n)}$ здесь понимается следующее: для достаточно больших n между точками границ этих областей Γ и $\Gamma(B^{(n)}) = \bigcup_{\nu=1}^{m} \Gamma^{(\nu)}(B^{(n)})$ можно установить взаимно однозначное и непрерывное соответствие, при котором расстояние между любыми соответствующими точками $z' \in \Gamma^{(\nu)}$ и $z' \in \Gamma^{(\nu)}(B^{(n)})$ $(\nu=1, 2, \ldots, m)$ становится меньше всякого $\delta > 0$.

Пусть, кроме того, задана любая замкнутая подобласть B, например $\bar{B}_r$, $1 < r < \infty$. По свойству 3 функций области $R(z, \zeta)$ и $P(z, \bar{\zeta})$ (см. стр. 158) эти функции регулярны по совокупности аргументов в бицилиндрической области $\bar{B}^* \times \bar{B}_r$,

где B^* — некоторая область, содержащая замыкание $\overline{B}$. Но тогда эти функции и равномерно непрерывны по z и ζ, когда z изменяется в замкнутой области $\overline{B}^*$, а $\zeta \in \overline{B}_r$.

Следовательно, по всякому $\varepsilon > 0$ найдется такое целое $N > 0$, что при $n > N$ будут выполняться условия:

1) Каждая область $B^{(n)}$ содержит некоторую область B_ρ, $1 < \rho < r$, т. е.

$$B^{(n)} \supset B_\rho \supset \overline{B}_r. \tag{6.1}$$

2) Каждая замкнутая область $\overline{B}^{(n)}$ содержится в области B^*, т. е.

$$\overline{B}^{(n)} \subset B^*. \tag{6.2}$$

3) Для каждого $\zeta \in \overline{B}_r$, когда z изменяется на границе $\Gamma(B^{(n)})$ области $B^{(n)}$, а соответствующее значение z' — на границе Γ области B, имеют место неравенства

$$\left.\begin{aligned} |R(z, \zeta) - R(z', \zeta)| &< \frac{\varepsilon}{3}, \\ \left|\overline{P(z, \overline{\zeta})} - \overline{P(z', \overline{\zeta})}\right| &< \frac{\varepsilon}{3}, \\ |\ln(z-\zeta) - \ln(z'-\zeta)| &< \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Последнее из неравенств (6.3) вытекает из того, что при выполнении условий 1) и 2) функция

$$\ln \frac{z-\zeta}{z'-\zeta}$$

регулярна по ζ в замкнутой области $\overline{B}_r$ и если выбрать ту ветвь этой многозначной функции, которая при $\zeta = \infty$ обращается в нуль, то максимум ее модуля в замкнутой области $\overline{B}_r$ становится сколь угодно малым при достаточно малом расстоянии между точками z и z', а оно может быть сделано таким за счет выбора числа $N = N(\varepsilon)$.

Но на каждой граничной кривой $\Gamma^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, m$) согласно (4.46) выполняется соотношение

$$\overline{P(z', \overline{\zeta})} - R(z', \zeta) = K_\nu(\zeta) - \ln(z'-\zeta), \qquad \zeta \in B, \tag{6.4}$$

где функция $K_\nu(\zeta)-\ln(z'-\zeta)$ регулярна по ζ в области B. Из (6.3) и (6.4) при $n>N$ и $z\in\Gamma^{(\nu)}(B^{(n)})$ $(\nu=1, 2, \ldots, m)$ будем иметь

$$\left|\overline{P(z, \bar{\zeta})}-R(z, \zeta)+\ln(z-\zeta)-K_\nu(\zeta)\right|<\varepsilon, \qquad \zeta\in\bar{B}_r. \tag{6.5}$$

С другой стороны, на каждой граничной кривой $\Gamma^{(\nu)}(B^{(n)})$ для функций $R(z, \zeta; B^{(n)})$ и $P(z, \bar{\zeta}; B^{(n)})$ $(n=1, 2, \ldots)$ также выполняется соотношение (4.46), т. е. имеем

$$\overline{P(z, \bar{\zeta}; B^{(n)})}-R(z, \zeta; B^{(n)})+ \\ +\ln(z-\zeta)-K_\nu(\zeta; B^{(n)})=0, \ \zeta\in B^{(n)}. \tag{6.6}$$

Из (6.5) и (6.6), учитывая включение (6.1), при $n>N$ получим

$$\left|\left[\overline{P(z, \bar{\zeta})}-R(z, \zeta)\right]-\left[\overline{P(z, \bar{\zeta}; B^{(n)})}-R(z, \zeta; B^{(n)})\right]- \\ -\left[K_\nu(\zeta)-K_\nu(\zeta; B^{(n)})\right]\right|<\varepsilon,$$

а заменяя модуль в левой части написанного неравенства на модуль реальной и мнимой частей, будем иметь два неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{[P(z, \bar{\zeta})-R(z, \zeta)]-[P(z, \bar{\zeta}; B^{(n)})- \\ &-R(z, \zeta; B^{(n)})]\}-\operatorname{Re}\{K_\nu(\zeta)-K_\nu(\zeta; B^{(n)})\}|<\varepsilon, \\ &\operatorname{Im}\{[P(z, \bar{\zeta})+R(z, \zeta)]-[P(z, \bar{\zeta}; B^{(n)})+ \\ &+R(z, \zeta; B^{(n)})]\}+\operatorname{Im}\{K_\nu(\zeta)-K_\nu(\zeta; B^{(n)})\}|<\varepsilon; \\ &\zeta\in\bar{B}_r, \ z\in\Gamma^{(\nu)}(B^{(n)}) \qquad (\nu=1, 2, \ldots, m). \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Проанализируем первое из неравенств (6.7), имея в виду, что анализ второго неравенства совершенно аналогичен. Для упрощения записи положим

$$\psi_n(z, \zeta)=P(z, \bar{\zeta})-R(z, \zeta)-[P(z, \bar{\zeta}; B^{(n)})-R(z, \zeta; B^{(n)})],$$
$$\gamma_n^{(\nu)}(\zeta)=\operatorname{Re}\{K_\nu(\zeta)-K_\nu(\zeta; B^{(n)})\}$$

и перепишем первое неравенство (6.7) при $n>N$ в новых обозначениях:

$$\left|\operatorname{Re}\psi_n(z, \zeta)-\gamma_n^{(\nu)}(\zeta)\right|<\varepsilon. \tag{6.8}$$

Функция $w=\psi_n(z, \zeta)$ $(n>N)$ при каждом фиксированном значении $\zeta\in\overline{B}_r$ регулярна по z в замкнутой области $\overline{B}^{(n)}$, а на границе этой области удовлетворяет неравенству (6.8). Кроме того, при всех n $(n=1, 2, \ldots)$ имеем

$$\psi_n(\infty, \zeta)=0. \tag{6.9}$$

При каждом $\zeta\in\overline{B}_r$ неравенство (6.8) определяет m вертикальных полос шириной 2ε, симметричных относительно прямых

$$\operatorname{Re} w=\gamma_n^{(\nu)}(\zeta) \quad (\nu=1, 2, \ldots, m),$$

внутри которых лежат образы граничных кривых $\Gamma^{(\nu)}(B^{(n)})$ при отображении функцией $\psi_n(z, \zeta)$.

Взяв произвольное значение $w=a$, не принадлежащее объединению указанных полос, по принципу аргумента установим, что это значение не принимается функцией $\psi_n(z, \zeta)$ в области $B^{(n)}$, и, следовательно, образ области $B^{(n)}$ лежит целиком внутри m вертикальных полос. Но образ $B^{(n)}$ при отображении функцией $\psi_n(z, \zeta)$ — множество связное и содержит точку $w=0$, а поэтому в замкнутой области $\overline{B}^{(n)}$ $(n>N)$ имеем неравенство

$$|\operatorname{Re}\psi_n(z, \zeta)|<2m\varepsilon, \qquad \zeta\in\overline{B}_r.$$

Из этого неравенства с учетом (6.9) и включения (6.1) следует, что последовательность функций $\psi_n(z, \zeta)$ сходится к нулю равномерно по z и ζ в области $\overline{B}_r$, т. е. внутри B.

Проделав аналогичный анализ второго неравенства (6.7), из совместного рассмотрения результатов обоих исследований придем к выводу, что последовательности функций $R(z, \zeta; B^{(n)})$ и $P(z, \overline{\zeta}; B^{(n)})$ сходятся равномерно по z и ζ внутри области B соответственно к функциям $R(z, \zeta)$ и $P(z, \overline{\zeta})$. Применив теорему Вейерштрасса, получим такой же результат для последовательности частных производных любого порядка от функций $R(z, \overline{\zeta}; B^{(n)})$ и $P(z, \overline{\zeta}; B^{(n)})$. Лемма доказана.

Идея доказательства этой леммы заимствована из работы Г. М. Голузина [1].

В качестве первого приложения приведем доказательство основной теоремы искажения в классе $\Sigma(B)$, установленной Грётшем [1].

Теорема 6.1. *Для функций $F(z)\in\Sigma(B)$ при любом значении $z=\zeta\in B$ имеем точную оценку*

$$\ln F'(\zeta)+R(\zeta,\ \zeta)|\leqslant P(\zeta,\ \bar{\zeta}). \tag{6.10}$$

Знак равенства при конечном ζ реализуется только функциями $F(z)=j_\theta(z,\ \zeta)+\mathrm{const}$, $0\leqslant\theta<\pi$. Неравенство (6.10) *при фиксированном $\zeta\in B$ определяет в классе $\Sigma(B)$ область значений величины $\ln F'(\zeta)$.*

Возьмем произвольную функцию $F(z)\in\Sigma(B)$ и любое конечное значение $\zeta\in B$. Образуем по формуле (5.8) функцию $g(z,\ \zeta)$ и разложим ее в ряд по тейлоровской системе функций

$$g(z,\ \zeta)=\ln\frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}-R(z,\ \zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(\zeta)\,\varphi_n(z).$$

Положив в этом равенстве $z=\zeta$, будем иметь

$$\ln F'(\zeta)+R(\zeta,\ \zeta)=-\sum_{n=1}^{\infty}C_n(\zeta)\,\varphi_n(\zeta),\qquad \zeta\in B_{1,\infty}. \tag{6.11}$$

Оценивая модуль правой части в (6.11) с помощью неравенства Коши и используя теорему 5.3, получим

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}C_n(\zeta)\,\varphi_n(\zeta)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|C_n(\zeta)\,\varphi_n(\zeta)|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|C_n(\zeta)|^2\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(\zeta)|^2\right)^{1/2}\leqslant P(\zeta,\ \bar{\zeta}). \tag{6.12}$$

Из (6.11) и (6.12) получается оценка (6.10) при конечном $\zeta\in B$. Если $\zeta=\infty$, то все величины, входящие в (6.10), обращаются в нуль, и тем самым неравенство (6.10) превращается в тождество.

Для наличия знака равенства в (6.10) при конечном $\zeta\in B$ необходимо и достаточно, чтобы имел место знак равенства во всех неравенствах (6.12). Так как $P(\zeta,\ \bar{\zeta})>0$ для $\zeta\in B_{1,\infty}$, то это возможно тогда и только тогда, когда

$$C_n(\zeta)=e^{2i\theta}\,\overline{\varphi_n(\zeta)}\quad(n=1,\ 2,\ \ldots),\qquad 0\leqslant\theta<\pi. \tag{6.13}$$

Но в классе $\Sigma(B)$ равенство (6.13) имеет место по теореме 5.7 для функций $F(z)=j_\theta(z,\ \zeta)+\mathrm{const}$, и только

для них, откуда и следует заключение теоремы о возможности знака равенства в (6.10).

При фиксированном $\zeta \in B$ неравенство (6.10), переписанное в виде

$$|w + R(\zeta, \zeta)| \leqslant P(\zeta, \bar{\zeta}), \tag{6.14}$$

определяет в плоскости w замкнутый круг с центром в точке $w = -R(\zeta, \zeta)$ и радиусом $P(\zeta, \bar{\zeta})$, содержащий значения величины $\ln F'(\zeta)$ для всех функций $F(z) \in \Sigma(B)$. Значение этого функционала для $F(z) = j_\theta(z, \zeta) + \text{const}$ согласно (6.11) и (6.13) выражается так:

$$\ln j'_\theta(\zeta, \zeta) + R(\zeta, \zeta) = -e^{2i\theta} P(\zeta, \bar{\zeta}),$$

т. е. значения $\ln j'_\theta(\zeta, \zeta)$ при изменении θ в промежутке $[0, \pi)$ покрывают полностью окружность, ограничивающую круг (6.14).

Чтобы доказать, что значения $\ln F'(\zeta)$ в классе $\Sigma(B)$ сплошь покрывают круг (6.14), воспользуемся идеей Грётша, изложенной в работе Г. М. Голузина [1].

Будем область B непрерывно расширять, сводя каждую граничную кривую $\Gamma^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, m$) к точке. Образующуюся при этом переменную область обозначим через $B^{(\tau)}$, где τ — параметр, непрерывно изменяющийся в некотором промежутке $[\tau_1, \tau_2)$, так что $B^{(\tau_1)} = B$, а $B^{(\tau_2)}$ представляет собой расширенную плоскость с выключенными m точками.

При фиксированном $\tau \in [\tau_1, \tau_2)$ множество значений функционала $\ln F'(\zeta)$ в классе $\Sigma(B^{(\tau)})$ по доказанному принадлежит кругу

$$|w + R(\zeta, \zeta;\ B^{(\tau)})| \leqslant P(\zeta, \bar{\zeta};\ B^{(\tau)}), \tag{6.15}$$

который является частью круга (6.14), ибо класс функций $\Sigma(B^{(\tau)})$ является подклассом $\Sigma(B)$. Также по доказанному значения величины $\ln j'_\theta(\zeta, \zeta;\ B^{(\tau)})$ при изменении θ в промежутке $[0, \pi)$ покрывают полностью границу круга (6.15). По лемме 6.1 аффикс центра и радиус круга (6.15) являются непрерывными функциями параметра τ (а радиус — даже монотонно убывающая функция), а поэтому при непрерывной деформации области B ограничивающая круг (6.15) окружность будет деформироваться также непрерывно. Но при $\tau \to \tau_2$ радиус круга в (6.15) стремится к нулю, ибо

класс $\Sigma(B^{(\tau_2)})$ будет состоять только из функций $F(z)=z+$ $+\text{const}$. Следовательно, при непрерывном изменении параметра τ в промежутке $[\tau_1, \tau_2)$ непрерывно деформирующаяся окружность (6.15) покроет полностью круг (6.14), за исключением точки $w=0$. Но точке $w=0$, как уже сказано, соответствует функция $F(z)=z+\text{const}$. Теорема доказана.

Теорема 6.2. *Для функций $F(z)\in\Sigma(B)$ при любом значении $z=\zeta\in B$ имеем точную оценку*

$$\left|\{F(\zeta),\ \zeta\}+6R''_{z\zeta}(\zeta,\ \zeta)\right|\leqslant 6K_*(\zeta,\ \overline{\zeta}), \tag{6.16}$$

где символом $\{F(\zeta),\ \zeta\}$ обозначена производная Шварца

$$\{F(\zeta),\ \zeta\}=\left[\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}\right]'-\frac{1}{2}\left[\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}\right]^2,$$

а $K_*(\zeta, \overline{\zeta})$ определена на стр. 9.

Знак равенства в (6.16) *при конечном $\zeta\in B$ и $\theta\in[0,\ \pi)$ имеет место только для функций*

$$F(z)=\frac{a_{11}\left[\Phi'_1(\zeta)+e^{2i\theta}\overline{\varphi'_1(\zeta)}\right](z-\zeta)}{1+\left[R'_\zeta(z,\ \zeta)+e^{2i\theta}P'_{\overline{\zeta}}(z,\ \overline{\zeta})\right](z-\zeta)}+\text{const}. \tag{6.17}$$

При фиксированном $\zeta\in B_{1,\infty}$ неравенство (6.16) *определяет в классе $\Sigma(B)$ область значений производной Шварца.*

Пусть $F(z)$ — произвольная функция класса $\Sigma(B)$. Соответствующую ей функцию $g(z, \zeta)$ при заданном конечном $\zeta\in B$ разложим в ряд по тейлоровской системе и продифференцируем по z и ζ:

$$g''_{z\zeta}(z,\ \zeta)=-\left[\frac{F'(z)F'(\zeta)}{(F(z)-F(\zeta))^2}-\frac{1}{(z-\zeta)^2}+R''_{z\zeta}(z,\ \zeta)\right]=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}C'_n(\zeta)\varphi'_n(z),\qquad z\in B \tag{6.18}$$

(почленное дифференцирование ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n(\zeta)\varphi_n(z)$ возможно ввиду его равномерной сходимости по z и ζ внутри области B).

Положив в равенстве (6.18) $z=\zeta$, будем иметь

$$\{F(\zeta),\ \zeta\}+6R''_{z\zeta}(\zeta,\ \zeta)=-6\sum_{n=1}^{\infty}C'_n(\zeta)\,\varphi'_n(\zeta). \qquad (6.19)$$

Применяя для оценки правой части (6.19) неравенство Коши и используя теорему 5.4 при $N=1$, $x_0=0$ и $x_1=1$, получим

$$\left|\sum_{1}^{\infty}C'_n(\zeta)\,\varphi'_n(\zeta)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|C'_n(\zeta)\,\varphi'_n(\zeta)|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|C'_n(\zeta)|^2\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi'_n(\zeta)|^2\right)^{1/2}\leqslant K_*(\zeta,\ \bar{\zeta}). \qquad (6.20)$$

Из (6.19) и (6.20) получается оценка (6.16) при конечном $\zeta\in B$. А если $\zeta=\infty$, то (6.16) превращается в тривиальное равенство.

Для наличия знака равенства в (6.16) при конечном $\zeta\in B$ необходимо и достаточно, чтобы имел место знак равенства во всех неравенствах (6.20), а это возможно в том и только в том случае (учитывая, что $K_*(\zeta,\ \bar{\zeta})>0$), если

$$C'_n(\zeta)=e^{2i\theta}\,\overline{\varphi'_n(\zeta)}\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots),\ \ 0\leqslant\theta<\pi. \qquad (6.21)$$

Докажем существование по крайней мере одной однолистной функции $F(z)\in\Sigma(B)$, для которой равенство (6.21) выполняется при каждом $n=1,\ 2,\ \ldots$ и заданном $\theta\in[0,\ \pi)$. Для этого выберем такую последовательность комплексных чисел $\{x_n\}$:

$$x_n=e^{-i\theta}\,\varphi'_n(\zeta)\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots),\ \theta\in[0,\ \pi).$$

Ясно, что для этой последовательности выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2=K_*(\zeta,\bar{\zeta})<\infty,$$

и, следовательно, по теореме 5.8 существует функция $F_\theta(z)$ из класса $\Sigma(B)$ такая, что порождаемая ею система функций $\{C_n(z)\}$ для всех $z\in B$ удовлетворяет равенству

$$e^{-i\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi'_n(\zeta)\,C_n(z)=e^{i\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\varphi'_n(\zeta)}\,\varphi_n(z).$$

Продифференцировав это тождество по z, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(\zeta)\, C_n'(z) = e^{2i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_n'(\zeta)}\, \varphi_n'(z). \tag{6.22}$$

Поскольку функция $g''_{z\zeta}(z, \zeta)$ симметрична относительно аргументов z и ζ в области B, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(\zeta)\, C_n'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n'(\zeta)\, \varphi_n'(z),$$

и равенство (6.22) перепишется так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n'(\zeta) \varphi_n'(z) = e^{2i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_n'(\zeta)}\, \varphi_n'(z) = e^{2i\theta} K_*(z, \bar{\zeta}). \tag{6.23}$$

В силу единственности разложения в равномерно сходящийся внутри B ряд по тейлоровской системе из (6.23) получим (6.21) при каждом $n = 1, 2, \ldots$, т. е. для функции $F_\theta(z)$ при любом $\theta \in [0, \pi)$ в неравенстве (6.16) имеет место знак равенства.

Теперь найдем все функции, для которых в (6.16) при заданном конечном $\zeta \in B$ имеет место знак равенства, используя для этого необходимое и достаточное условие (6.21). Имеем

$$\ln \frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)} - R(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\zeta)\, \varphi_n(z).$$

Продифференцировав это разложение по ζ:

$$\frac{F'(\zeta)}{F(z)-F(\zeta)} - \frac{1}{z-\zeta} - R'_\zeta(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n'(\zeta)\, \varphi_n(z),$$

и учитывая условие (6.21), получим уравнение

$$\frac{F'(\zeta)}{F(z)-F(\zeta)} = \frac{1}{z-\zeta} + R'_\zeta(z, \zeta) + e^{2i\theta} P'_{\bar{\zeta}}(z, \bar{\zeta}),$$

откуда искомая функция при выбранном $\theta \in [0, \pi)$ определяется однозначно с точностью до произвольного слагаемого и имеет вид (6.17). Поскольку существование решения системы (6.21) выше уже доказано, то нет необходимости проверять однолистность функции, определенной формулой (6.17).

Для этой функции при любом $\theta \in [0, \pi)$ производная Шварца в заданной точке $\zeta \in B_{1,\infty}$ согласно (6.19) и (6.21) выражается так:

$$\{F(\zeta), \zeta\} + 6R''_{z\zeta}(\zeta, \zeta) = -6e^{2i\theta} K_*(\zeta, \bar{\zeta}),$$

и, следовательно, значения производной Шварца для нее при изменении θ в промежутке $[0, \pi)$ покрывают полностью окружность радиуса $6K_*(\zeta, \bar{\zeta})$ с центром в точке $w = -6R''_{z\zeta}(\zeta, \zeta)$.

С другой стороны, уже доказанное неравенство (6.16), переписанное в виде

$$\left| w + 6R''_{z\zeta}(z, \zeta) \right| \leqslant 6K_*(\zeta, \bar{\zeta}), \tag{6.24}$$

определяет в плоскости w замкнутый круг, содержащий значения производной Шварца для всех функций $F(z) \in \Sigma(B)$.

Чтобы доказать, что значения $\{F(\zeta), \zeta\}$ в классе $\Sigma(B)$ сплошь покрывают круг (6.24), снова применим лемму 6.1 и повторим те же рассуждения, что и в теореме 6.1.

Теоремы 6.1 и 6.2 допускают естественное обобщение.

Теорема 6.3. *Для функций $F(z) \in \Sigma(B)$ при любом значении $z = \zeta \in B$ имеем точную оценку*

$$\left| \sum_{k,\ \nu=0}^{N} x_k x_\nu \frac{\partial^{k+\nu}}{\partial z^k\, \partial \zeta^\nu} g(z, \zeta) \right|_{z=\zeta} \leqslant \left| \sum_{k,\ \nu=0}^{N} x_k \bar{x}_\nu \frac{\partial^{k+\nu}}{\partial z^k\, \partial \bar{\zeta}^\nu} P(z, \bar{\zeta}) \right|_{z=\zeta}, \tag{6.25}$$

где $\{x_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots, N;\ N \geqslant 0)$ — произвольная система комплексных чисел.

При фиксированном $\zeta \in B_{1,\infty}$ и ненулевой системе $\{x_n\}$ неравенство (6.25), *записанное в виде*

$$\left| w + \sum_{k,\ \nu=0}^{N} x_k x_\nu \frac{\partial^{k+\nu}}{\partial z^k\, \partial \zeta^\nu} R(z, \zeta) \right|_{z=\zeta} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k,\ \nu=0}^{N} x_k \bar{x}_\nu \frac{\partial^{k+\nu}}{\partial z^k \partial \bar{\zeta}^\nu} P(z, \bar{\zeta}) \Bigg|_{z=\zeta}, \tag{6.26}$$

определяет в классе $\Sigma(B)$ область значений величины

$$w = \sum_{k,\ \nu=0}^{N} x_k x_\nu \frac{\partial^{k+\nu}}{\partial z^k\, \partial \zeta^\nu} \ln \frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} \Bigg|_{z=\zeta}. \tag{6.27}$$

Пусть задана любая функция $F(z) \in \Sigma(B)$. Если $\zeta = \infty$, то (6.25) очевидно, а поэтому будем считать значение ζ конечным, т. е. $\zeta \in B_{1,\infty}$. По тем же соображениям считаем систему чисел $\{x_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots, N)$ ненулевой.

Для функции $F(z)$ при заданном ζ построим функцию $g(z, \zeta)$, по формуле (5.13) разложим ее в ряд по тейлоровской системе и, пользуясь равномерной сходимостью ряда $\sum_{n=1}^{\infty} C_n(\zeta)\varphi_n(z)$ по z и ζ внутри B, с помощью почленного дифференцирования этого ряда преобразуем величину, стоящую в левой части (6.25) под знаком модуля. В результате получим

$$\sum_{k,\ \nu=0}^{N} x_k x_\nu \frac{\partial^{k+\nu}}{\partial z^k \partial \zeta^\nu} g(z, \zeta)\Big|_{z=\zeta} = \sum_{k,\ \nu=0}^{N} x_k x_\nu \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(\nu)}(\zeta)\varphi_n^{(k)}(\zeta) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{N} x_\nu C_n^{(\nu)}(\zeta) \sum_{k=0}^{N} x_k \varphi_n^{(k)}(\zeta)\right). \qquad (6.28)$$

Оценивая модуль правой части (6.28) с помощью неравенства Коши и используя теорему 5.4 вместе с замечанием к ней, будем иметь

$$\left|\sum_{k,\ \nu=0}^{N} x_k x_\nu \frac{\partial^{k+\nu}}{\partial z^k \partial \zeta^\nu} g(z, \zeta)\Big|_{z=\zeta}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{N} x_k \varphi_n^{(k)}(\zeta)\right|^2 =$$

$$= \sum_{k,\ \nu=0}^{N} x_k \bar{x}_\nu \frac{\partial^{k+\nu}}{\partial z^k \partial \bar{\zeta}^\nu} P(z, \bar{\zeta})\Big|_{z=\zeta},$$

т. е. неравенство (6.25). Чтобы в (6.25) имел место знак равенства, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $n = 1, 2, \ldots$ выполнялось соотношение

$$\sum_{k=0}^{N} x_k C_n^{(k)}(\zeta) = e^{2i\theta} \overline{\sum_{k=0}^{N} x_k \varphi_n^{(k)}(\zeta)}, \quad 0 \leqslant \theta < \pi. \qquad (6.29)$$

Покажем, что существует по крайней мере одна функция $F(z) \in \Sigma(B)$, для которой равенство (6.29) выполняется при каждом $n = 1, 2, \ldots$ с наперед заданным значением $\theta \in [0, \pi)$. Для этого выберем следующую последовательность

чисел $\{y_n\}$:

$$y_n = e^{-i\theta} \sum_{k=0}^{N} x_k \varphi_n^{(k)}(\zeta) \quad (n = 1, 2, \ldots), \ \theta \in [0, \pi).$$

Ясно, что для этой последовательности выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{N} x_k \varphi_n^{(k)}(\zeta) \right|^2 < \infty.$$

Следовательно, по теореме 5.8 существует функция $F_\theta(z) \in \Sigma(B)$ такая, что порождаемая ею система функций $\{C_n(z)\}$ для всех $z \in B$ удовлетворяет равенству

$$e^{-i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} x_k \varphi_n^{(k)}(\zeta) \right) C_n(z) = e^{i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\sum_{k=0}^{N} x_k \varphi_n^{(k)}(\zeta)} \right) \varphi_n(z). \tag{6.30}$$

Учитывая симметричность функции $g(z, \zeta)$ относительно аргументов z и ζ, перепишем равенство (6.30) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} x_k C_n^{(k)}(\zeta) \right) \varphi_n(z) = e^{2i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\sum_{k=0}^{N} x_k \varphi_n^{(k)}(\zeta)} \right) \varphi_n(z),$$

откуда в силу единственности разложения в ряд по тейлоровской системе вытекает для функции $F_\theta(z) \in \Sigma(B)$ равенство (6.29). Тем самым доказана точность оценки (6.25) в случаях, когда система чисел $\{x_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots, N)$ ненулевая и $\zeta \neq \infty$.

Далее, для однолистной функции $F_\theta(z) \in \Sigma(B)$ из (6.28) и (6.29) имеем

$$\sum_{k,\ \nu=0}^{N} x_k x_\nu \frac{\partial^{k+\nu}}{\partial z^k \partial \bar{\zeta}^\nu} g(z, \zeta) \Big|_{z=\zeta} =$$

$$= e^{2i\theta} \sum_{k,\ \nu=0}^{N} x_k \bar{x}_\nu \frac{\partial^{k+\nu}}{\partial z^k \partial \bar{\zeta}^\nu} P(z, \bar{\zeta}) \Big|_{z=\zeta}. \tag{6.31}$$

Из равенства (6.31) с учетом формулы (5.8) находим, что значения величины (6.27), вычисленные для функций $F_\theta(z)$, при изменении θ в промежутке $[0, \pi)$ полностью покрывают окружность, ограничивающую круг (6.26).

Применяя лемму 6.1 и повторяя рассуждения теоремы 6.1, придем к выводу, что значения функционала (6.27) в классе $\Sigma(B)$ покрывают сплошь круг (6.26). Теорема доказана.

Следствие. *Для $F(z)\in\Sigma(B)$ при любом комплексном x в области B имеем точную оценку*

$$\ln F'(z)+x\frac{F''(z)}{F'(z)}+\frac{1}{6}x^2\{F(z),\ z\}+$$
$$+R(z,\ z)+2xR'_z(z,\ z)+x^2R''_{z\zeta}(z,\ z)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant P(z,\ \bar z)+2\operatorname{Re}\{xP'_z(z,\ \bar z)\}+|x|^2P''_{z\bar\zeta}(z,\ \bar z). \quad (6.32)$$

Неравенство (6.32) следует из (6.25), если положить $N=1$, $x_0=1$ и $x_1=x$.

Теперь перейдем к рассмотрению функционалов в классе $\Sigma(B)$, зависящих от нескольких точек области.

Теорема 6.4. *Для функций $F(z)\in\Sigma(B)$ при любых значениях z и ζ из области B справедливо неравенство*

$$\left|\ln\frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}-R(z,\ \zeta)\right|\leqslant\sqrt{P(z,\ \bar z)\,P(\zeta,\ \bar\zeta)}. \quad (6.33)$$

В случае симметричной области B^+ при $z=\bar\zeta$ оценка (6.33) *принимает вид*

$$\left|\ln\frac{\zeta-\bar\zeta}{F(\zeta)-F(\bar\zeta)}-R(\bar\zeta,\ \zeta)\right|\leqslant P(\zeta,\ \bar\zeta), \quad (6.34)$$

и знак равенства в (6.34) *при конечном ζ и любом $\theta\in[0,\pi)$ имеет место только для функций*

$$F(z)=\begin{cases} j_\theta(z,\ \zeta)+\text{const}, & \operatorname{Im}\zeta=0,\\ j_0(z)+\text{const}, & \operatorname{Im}\zeta\neq 0.\end{cases}$$

Для произвольной функции $F(z)\in\Sigma(B)$ построим по формуле (5.8) функцию $g(z,\ \zeta)$ при заданном $\zeta\in B$ и разложим ее в ряд по тейлоровской системе

$$g(z,\ \zeta)=\ln\frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)}-R(z,\ \zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(\zeta)\,\varphi_n(z). \quad (6.35)$$

Оценивая модуль правой части с помощью неравенства Коши и используя (5.32), получим неравенство (6.33).

Если задана симметричная область B^+, то согласно первому свойству таких областей будем иметь

$$P(\bar{\zeta}, \zeta) = P(\zeta, \bar{\zeta}),$$

и потому неравенство (6.34) при любом $\zeta \in B^+$ следует из (6.33).

При действительных значениях $\zeta \in B^+_{1,\infty}$ оценка (6.34) совпадает с оценкой (6.10), а поэтому заключение о ее точности следует из теоремы 6.1. Теперь пусть $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$. Положив в (6.35) $z = \bar{\zeta}$, будем иметь

$$\ln\frac{\bar{\zeta}-\zeta}{F(\bar{\zeta})-F(\zeta)} - R(\bar{\zeta}, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\zeta)\varphi_n(\bar{\zeta}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\zeta)\overline{\varphi_n(\zeta)}. \tag{6.36}$$

Для получения знака равенства в (6.34) необходимо и достаточно, чтобы при оценке модуля правой части (6.36) с помощью неравенств Коши и (5.32) имел место везде знак равенства, что возможно лишь при условии

$$C_n(\zeta) = e^{2i\theta}\varphi_n(\zeta) \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad \theta \in [0, \pi).$$

Но согласно теореме 5.10 последняя система уравнений относительно функций $F(z) \in \Sigma(B^+)$, порождающих системы $\{C_n(z)\}$, имеет решения только при $\theta = 0$, и все они даются в виде $F(z) = j_0(z) + \text{const}$, что и заканчивает доказательство теоремы.

Оценки (6.33) и (6.34) являются аналогами известного неравенства Г. М. Голузина [3] для класса Σ.

Теорема 6.5. *При любых комплексных числах x_k и y_k ($k = 1, 2, \ldots, N$; $N \geqslant 1$) и любых значениях z_k и ζ_k из области B для функций $F(z) \in \Sigma(B)$ выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{k,\nu=1}^{N} x_k y_\nu \ln\frac{z_k-\zeta_\nu}{F(z_k)-F(\zeta_\nu)} - \sum_{k,\nu=1}^{N} x_k y_\nu R(z_k, \zeta_\nu)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k,\nu=1}^{N} P(z_k, \bar{z}_\nu)\, x_k \bar{x}_\nu \sum_{k,\nu=1}^{N} P(\zeta_k, \bar{\zeta}_\nu)\, y_k \bar{y}_\nu}. \tag{6.37}$$

При $x_k = y_k$ *и* $z_k = \zeta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ *неравенство* (6.37) *принимает вид*

$$\left| \sum_{k,\,\nu=1}^{N} y_k y_\nu \ln \frac{\zeta_k - \zeta_\nu}{F(\zeta_k) - F(\zeta_\nu)} - \sum_{k,\,\nu=1}^{N} y_k y_\nu R(\zeta_k, \zeta_\nu) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k,\,\nu=1}^{N} P(\zeta_k, \overline{\zeta}_\nu) y_k \overline{y}_\nu. \qquad (6.38)$$

Неравенство (6.38) *определяет в классе* $\Sigma(B)$ *область значений квадратичной формы*

$$\sum_{k,\,\nu=1}^{N} y_k y_\nu \ln \frac{\zeta_k - \zeta_\nu}{F(\zeta_k) - F(\zeta_\nu)}. \qquad (6.39)$$

Если система чисел $\{y_k\}$ *ненулевая, а точки* ζ_k *конечны и различны, то граничной окружности в* (6.38) *соответствуют только функции, удовлетворяющие в области* B *уравнению*

$$\sum_{k=1}^{N} y_k \ln \frac{z - \zeta_k}{F(z) - F(\zeta_k)} = \sum_{k=1}^{N} y_k R(z, \zeta_k) + e^{2i\theta} \sum_{k=1}^{N} \overline{y}_k P(z, \overline{\zeta}_k) \qquad (6.40)$$

с произвольным значением $\theta \in [0, \pi)$, *а на каждой граничной кривой* $\Gamma^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ — *более простому уравнению*

$$\operatorname{Im} \left\{ e^{-i\theta} \sum_{k=1}^{N} y_k \ln [F(z) - F(\zeta_k)] \right\} = \text{const}. \qquad (6.41)$$

Построим для $F(z) \in \Sigma(B)$ по формуле (5.8) функцию $g(z, \zeta)$. Затем при заданных y_ν и ζ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, N)$ образуем функцию

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{N} y_\nu g(z, \zeta_\nu)$$

и разложим ее в ряд по тейлоровской системе

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{N} y_\nu C_n(\zeta_\nu) \right) \varphi_n(z).$$

Далее рассмотрим величину

$$\sum_{k=1}^{N} x_k f(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{\nu=1}^{N} y_\nu C_n(\zeta_\nu)\right] \left[\sum_{k=1}^{N} x_k \varphi_n(z_k)\right] \quad (6.42)$$

и оценим ее модуль, используя неравенство Коши и теорему 5.5 (неравенство (5.42) при $\nu=0$). Будем иметь

$$\left|\sum_{k=1}^{N} x_k f(z_k)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{\nu=1}^{N} y_\nu C_n(\zeta_\nu) \sum_{k=1}^{N} x_k \varphi_n(z_k)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{\nu=1}^{N} y_\nu C_n(\zeta_\nu)\right|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{N} x_k \varphi_n(z_k)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k,\nu=1}^{N} P(\zeta_k, \overline{\zeta}_\nu) y_k \overline{y}_\nu \sum_{k,\nu=1}^{N} P(z_k, \overline{z}_\nu) x_k \overline{x}_\nu}. \quad (6.43)$$

Но по определению функции $g(z, \zeta)$ величина (6.42) имеет следующее значение:

$$\sum_{k=1}^{N} x_k f(z_k) = \sum_{k,\nu=1}^{N} x_k y_\nu g(z_k, \zeta_\nu) =$$

$$= \sum_{k,\nu=1}^{N} x_k y_\nu \ln \frac{z_k - \zeta_\nu}{F(z_k) - F(\zeta_\nu)} - \sum_{k,\nu=1}^{N} x_k y_\nu R(z_k, \zeta_\nu). \quad (6.44)$$

Из (6.43) и (6.44) следует оценка (6.37) и при $x_k = y_k$, $z_k = \zeta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ — оценка (6.38).

Если правая часть (6.38) равна нулю, то оценка (6.38), как нетрудно видеть, становится точной для любой функции $F(z) \in \Sigma(B)$. Поэтому будем считать, что выполняется условие

$$\sum_{k,\nu=1}^{N} P(\zeta_k, \overline{\zeta}_\nu) y_k \overline{y}_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{N} y_k \varphi_n(\zeta_k)\right|^2 > 0. \quad (6.45)$$

Если система чисел $\{y_k\}$ ненулевая и все точки ζ_k конечны и различны, то условие (6.45) обязательно выполняется (см. замечание к теореме 5.5). В этом случае для наличия знака равенства в (6.38) необходимо и достаточно, чтобы при $x_k = y_k$ и $z_k = \zeta_k$ имел место знак равенства во всех

неравенствах (6.43), а это может быть тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{N} y_k C_n(\zeta_k) = e^{2i\theta} \sum_{k=1}^{N} \overline{y_k \varphi_n(\zeta_k)}, \ \theta \in [0, \pi). \qquad (6.46)$$

Теперь положим

$$x_n = e^{-i\theta} \sum_{k=1}^{N} y_k \varphi_n(\zeta_k) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

и для этой последовательности чисел применим теорему 5.8. По этой теореме существует такая функция $F_\theta(z) \in \Sigma(B)$, для которой в области B выполняется равенство

$$e^{-i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} y_k \varphi_n(\zeta_k) \right) C_n(z) = e^{i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \overline{y_k \varphi_n(\zeta_k)} \right) \varphi_n(z). \qquad (6.47)$$

Из симметричности функции $g(z, \zeta)$, построенной для $F_\theta(z)$, имеем

$$g(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\zeta) \varphi_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\zeta) C_n(z). \qquad (6.48)$$

Используя (6.48) в равенстве (6.47), для $z \in B$ получим

$$e^{-i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{N} y_k C_n(\zeta_k) \right] \varphi_n(z) = e^{i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{N} \overline{y_k \varphi_n(\zeta_k)} \right] \varphi_n(z). \qquad (6.49)$$

В силу единственности разложения функций в ряд по тейлоровской системе из (6.49) вытекает, что для функций $F_\theta(z) \in \Sigma(B)$ при любом $\theta \in [0, \pi)$ справедливо (6.46) при каждом $n = 1, 2, \ldots$, т. е. для этих функций в (6.38) имеет место знак равенства. Вообще, если для какой-нибудь функции $F(z) \in \Sigma(B)$ в соотношении (6.38) имеет место знак равенства, то в силу условий (6.46) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{N} y_k \left[\ln \frac{z - \zeta_k}{F(z) - F(\zeta_k)} - R(z, \zeta_k) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{N} y_k C_n(\zeta_k) \right] \varphi_n(z) =$$

$$= e^{2i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{N} \overline{y_k \varphi_n(\zeta_k)} \right] \varphi_n(z) = e^{2i\theta} \sum_{k=1}^{N} \overline{y}_k P(z, \overline{\zeta}_k). \qquad (6.50)$$

Из (6.50) получим (6.40), а учитывая соотношение между функциями области $R(z, \zeta)$ и $P(z, \bar{\zeta})$ на каждой граничной кривой $\Gamma^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$, из (6.40) выведем (6.41).

Наконец, поскольку для функций $F_\theta(z) \in \Sigma(B)$ выполняется равенство (6.49), то для этих функций значения величины (6.39) при изменении θ в промежутке $[0, \pi)$ полностью покроют окружность, ограничивающую круг (6.38).

Применяя лемму 6.1 и повторяя рассуждения теоремы 6.1, докажем, что замкнутый круг (6.38) является областью значений функционала (6.39) в классе функций $\Sigma(B)$. Теорема доказана.

Неравенства (6.37) и (6.38) являются аналогами соответствующих оценок для функций класса Σ, полученных Н. А. Лебедевым [1] и Г. М. Голузиным [7].

С помощью основных неравенств главы 5 можно было бы получить и другие точные оценки и области значений функционалов в классе $\Sigma(B)$, действуя по схеме, описанной при доказательстве теорем .6.1—6.5. Например, если для $F(z) \in \Sigma(B)$ обозначить

$$U(z, \zeta) = \frac{F'(z)F'(\zeta)}{[F(z) - F(\zeta)]^2} - \frac{1}{(z-\zeta)^2}, \quad l_*(z, \zeta) = R''_{z\zeta}(z, \zeta),$$

то с помощью неравенства (5.42) при $\nu = 1$ легко получить область значений квадратичной формы $\sum\limits_{k, \nu=1}^{N} U(z_k, \zeta_\nu) y_k y_\nu$ (Бергман и Шиффер [1]):

$$\left| \sum_{k, \nu=1}^{N} U(\zeta_k, \zeta_\nu) y_k y_\nu + \sum_{k, \nu=1}^{N} l_*(\zeta_k, \zeta_\nu) y_k y_\nu \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k, \nu=1}^{N} K_*(\zeta_k, \bar{\zeta}_\nu) y_k \bar{y}_\nu,$$

а также уравнение для граничных функций этой области (И. М. Милин [4]):

$$\sum_{k=1}^{N} y_k \frac{F'(\zeta_k)}{F(z) - F(\zeta_k)} =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} y_k \left[\frac{1}{z - \zeta_k} + R'_\zeta(z, \zeta_k) \right] + e^{2i\theta} \sum_{k=1}^{N} \bar{y}_k P'_{\bar{\zeta}}(z, \bar{\zeta}_k).$$

§ 2. Условия однолистности

Предположим, что функция $F(z)$ задана в окрестности бесконечно удаленной точки формально рядом Лорана (6). Тогда функции $A_n(z)$, $B_n(z)$ и $C_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ можно формально определить их разложениями в ряд Тейлора около $z=\infty$. Коэффициенты этих разложений находятся соответственно из формул (5.7), (5.11) и (5.15). Зная коэффициенты γ_{nk} $(n, k=1, 2, \ldots)$ разложения функции $C_n(z)$ в ряд Тейлора около $z=\infty$, по формулам (4.64) найдем коэффициенты λ_{nk} $(n, k=1, 2, \ldots)$ разложения $C_n(z)$ в ряд по тейлоровской системе функций для области B. Коэффициенты λ_{nk} являются целыми рациональными функциями от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$, где $N=n+k-1$.

Условия однолистности наиболее просто выражаются в терминах коэффициентов λ_{nk}.

Теорема 6.6. *Для принадлежности функции $F(z)$, заданной около $z=\infty$ формально лорановским разложением* (6), *классу $\bar{\Sigma}(B)$ необходимо и достаточно, чтобы матрица $\|\lambda_{nk}\|$ $(n, k=1, 2, \ldots)$ была унитарной.*

Необходимость. Если функция $F(z)$ принадлежит классу $\bar{\Sigma}(B)$, то по теореме 5.6 порожденная ею система $\{C_n'(z)\}$ является полной ортонормированной системой функций в $l^2(B)$.

Но числа λ_{nk} $(n, k=1, 2, \ldots)$ согласно (5.16) суть коэффициенты Фурье функций $C_n'(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ в полной ортонормированной системе $\{\varphi_n'(z)\}$, а потому матрица $\|\lambda_{nk}\|$ — унитарная (учтена еще симметричность матрицы $\|\lambda_{nk}\|$).

Достаточность. Если матрица $\|\lambda_{nk}\|$ унитарная, то из равенства (5.16) усматриваем, что система регулярных функций $\{C_n'(z)\}$ ортонормирована в области B, а потому семейства функций $\{C_n'(z)\}$, а также $\{C_n(z)\}$ будут равномерно ограничены внутри области B. Из равномерной ограниченности внутри B системы функций $\{C_n(z)\}$ вытекает, что для любого значения $\zeta \in B$ справедливо неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |C_n(\zeta)|^{1/n} \leqslant 1. \tag{6.51}$$

Теперь заметим, что функция $F(z)$, формально определенная разложением (6), весьма просто связана с функциями $A_1(z)$, $B_1(z)$ и $C_1(z)$, именно:

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= z+\alpha_0+A_1(z), \\ F(z) &= \eta_1(z)+\alpha_0+B_1(z), \\ F(z) &= a_{11}[\Phi_1(z)+C_1(z)]+\alpha_0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.52)$$

Из последней формулы (6.52) заключаем, что функция $F(z)$ регулярна в области $B_{1,\infty}$. Но тогда для функции $F(z)$ можно по формуле (5.8) построить функцию $g(z, \zeta)$ при любом $\zeta \in B$. Эта функция при фиксированном $\zeta \in B$ будет регулярна в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, а поэтому по теореме 4.10 она разлагается в ряд по тейлоровской системе

$$\ln \frac{z-\zeta}{F(z)-F(\zeta)} - R(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\zeta)\, \varphi_n(z), \qquad (6.53)$$

сходящийся абсолютно и равномерно внутри некоторой области B_r, $1 \leqslant r < \infty$. Но при выполнении условия (6.51) по теореме 4.9 ряд в правой части (6.53) сходится равномерно внутри всей области B, а значит, его сумма является регулярной функцией по z во всей области B. Поскольку последнее имеет место при каждом $\zeta \in B$, то функция $F(z)$ однолистна и, следовательно, принадлежит классу $\Sigma(B)$.

Чтобы обнаружить принадлежность $F(z)$ подклассу $\tilde{\Sigma}(B)$, достаточно учесть ортонормированность системы $\{C_n'(z)\}$, ибо по лемме 5.2 она имеет место только для функций $F(z) \in \tilde{\Sigma}(B)$.

Теорема 6.7. *Пусть функция $F(z)$ формально задана около $z=\infty$ лорановским разложением* (6). *Для того чтобы эта функция принадлежала классу $\Sigma(B)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты λ_{nk} $(n, k=1, 2, \ldots)$ формального разложения* (5.16) *удовлетворяли системе неравенств*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{nk}|^2 \leqslant 1 \qquad (n=1, 2, \ldots). \qquad (6.54)$$

При этом, если в (6.54) *имеет место знак равенства хотя бы при одном значении n, то он имеет место и при каждом $n \geqslant 1$ и функция $F(z) \in \tilde{\Sigma}(B)$.*

Если функция $F(z) \in \Sigma(B)$, то функции $C_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ регулярны в области B и согласно лемме 5.2 для них выполняется неравенство

$$\frac{1}{\pi} \iint_B |C_n'(z)|^2 \, d\sigma \leqslant 1. \tag{6.55}$$

Но в силу равенства Парсеваля имеем

$$\frac{1}{\pi} \iint_B |C_n'(z)|^2 \, d\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{nk}|^2,$$

что вместе с неравенством (6.55) дает (6.54). Если при этом окажется, что в (6.54) имеет место знак равенства хотя бы при одном значении n, то при том же n будет знак равенства и в соотношении (6.55), и по лемме 5.2 сделаем вывод, что функция $F(z) \in \tilde{\Sigma}(B)$. Но тогда знак равенства в (6.54) имеет место и при каждом $n=1, 2, \ldots$ Необходимость доказана.

Достаточность условий (6.54) доказывается так же, как и в теореме 6.6. Если же в (6.54) имеет место знак равенства хотя бы при одном n, то аналогично докажем, что функция $F(z)$ принадлежит классу $\tilde{\Sigma}(B)$ и знак равенства имеет место при каждом $n=1, 2, \ldots$

Теорема 6.8. *Пусть функция $F(z)$ формально задана около $z=\infty$ лорановским разложением* (6). *Для того чтобы эта функция принадлежала классу $\Sigma(B)$, необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$\left| \sum_{k,\, n=1}^{N} \lambda_{nk} x_n x_k \right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 \tag{6.56}$$

для любых комплексных чисел x_n $(n=1, 2, \ldots, N)$ и при любом $N \geqslant 1$.

Неравенство (6.56) для каждой функции $F(z) \in \Sigma(B)$ можно вывести из предыдущих теорем, однако сделаем это независимо.

Будем считать заданными произвольную функцию $F(z) \in \Sigma(B)$, число N $(N=1, 2, \ldots)$ и ненулевую систему чисел $\{x_n\}$ $(n=1, 2, \ldots, N)$ (для нулевой системы $\{x_n\}$ (6.56) тривиально).

Рассмотрим две функции $f(z)=\sum_{n=1}^{N} x_n C_n(z)$ и $f_0(z)=\sum_{n=1}^{N} \bar{x}_n \varphi_n(z)$ и найдем скалярное произведение их производных

$$(f', \bar{f}_0')=\frac{1}{\pi}\iint_B \sum_{n=1}^{N} x_n C_n'(z) \sum_{k=1}^{N} x_k \overline{\varphi_k'(z)}\, d\sigma=$$

$$=\sum_{n,\,k=1}^{N} x_n x_k \frac{1}{\pi}\iint_B C_n'(z)\,\overline{\varphi_k'(z)}\, d\sigma=\sum_{n,\,k=1}^{N} \lambda_{nk} x_n x_k. \qquad (6.57)$$

Оценивая левую часть (6.57) с помощью неравенства Буняковского и используя лемму 5.2, будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\iint_B f'(z)\,\overline{f_0'(z)}\, d\sigma\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{\pi}\iint_B |f'(z)|^2 d\sigma \frac{1}{\pi}\iint_B |f_0'(z)|^2 d\sigma\right)^{1/2} \leqslant \sum_{n=1}^{N} |x_n|^2. \qquad (6.58)$$

Из (6.57) и (6.58) следует (6.56). Знак равенства в (6.56) будет иметь место в том и только в том случае, если везде в (6.58) имеет место знак равенства, т. е. при условии

$$f(z)=e^{2i\theta} f_0(z), \qquad \theta \in [0, \pi),$$

или, в развернутом виде,

$$\sum_{n=1}^{N} e^{-i\theta} x_n C_n(z)=\sum_{n=1}^{N} \overline{e^{-i\theta} x_n}\, \varphi_n(z). \qquad (6.59)$$

По теореме 5.8 в классе $\Sigma(B)$ существует по крайней мере одна функция $F_\theta(z)$, для которой равенство (6.59) выполняется для всех $z \in B$. Для функции $F_\theta(z)$ согласно (6.57) имеем

$$\sum_{n,\,k=1}^{N} \lambda_{nk} x_n x_k = e^{2i\theta} \sum_{n=1}^{N} |x_n|^2,$$

откуда следует, что для фиксированной системы $\{x_n\}$ ($n=1, 2, \ldots, N$) при изменении θ в промежутке $[0, \pi)$ зна-

чения квадратичной формы $\sum_{n,\,k=1}^{N} \lambda_{nk} x_n x_k$ для $F_\theta(z)$ полностью покроют окружность с центром в начале и радиусом, равным $\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2$. Итак, необходимость доказана. Более того, доказано, что в классе функций $\Sigma(B)$ оценка (6.56) является точной.

Из справедливости (6.56) для любых комплексных чисел x_n $(n=1, 2, \ldots, N)$ и любого $N \geqslant 1$ получим (6.54), а из (6.54) по заключению теоремы 6.7 получим достаточность.

Замечание. Аналогично выводится неравенство

$$\left| \sum_{k,\,n=1}^{N} \left(\alpha_{nk} - \frac{1}{n} b_{nk} \right) x_n x_k \right| \leqslant \sum_{k,\,n=1}^{N} \frac{1}{n} c_{nk} \bar{x}_n x_k, \qquad (6.60)$$

впервые полученное Грунским [1] как необходимое и достаточное условие однолистности функции $F(z)$ в конечносвязной области B.

Позднее Шиффер [3] получил неравенство (6.60) вариационным методом и доказал его точность. Наконец, Г. М. Голузин [6] вывел оценку (6.60) для функций класса Σ, но уже параметрическим методом.

ЛИТЕРАТУРА

Аленицын Ю. Е.

[1] Конформные отображения многосвязной области на многолистные канонические поверхности, Изв. АН СССР, сер. матем., **28**:3 (1964), 607—644.

[2] Конформные отображения многосвязной области на многолистные поверхности с прямолинейными разрезами, Изв. АН СССР, сер. матем., **29**, № 4 (1965), 887—902.

Базилевич И. Е.

[1] Дополнение к работе «Zum Koeffizientenproblem der schlichten Funktionen» и «Sur les theoremes de Koebe—Bieberbach», Матем. сб., 2 (44):4 (1937), 689—698.

[2] Улучшение оценок коэффициентов однолистных функций, Матем. сб., 22 (64) (1948), 381—390.

[3] О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций, Матем. сб., **28** (70):1 (1951), 147—164.

[4] Об оценке среднего модуля и коэффициентов однолистных функций. Исслед. по совр. пробл. теории функций компл. перем., М., «Наука», 1961, 7—41.

[5] Асимптотическое свойство производных одного класса регулярных в круге функций. Исслед. по совр. пробл. теории функций компл. перем., М., «Наука», 1961, 216—219.

[6] О дисперсии коэффициентов однолистных функций, Матем. сб., **68** (110):4 (1965), 549—560.

[7] Об одном критерии однолистности регулярных функций и дисперсии их коэффициентов, Матем. сб., **74** (116):1 (1967), 133—146.

Бергман (Bergman S.)

[1] Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen; Math. Ann. **86** (1922), 236—271.

[2] Partial differential equations (conformal mapping of muliplyconnected domains); Providence, Brown University (1941).

[3] The kernel function and conformal mapping, Math. Surveys, vol. 5, Amer. Math. Soc., New York (1950).

Бергман и Шиффер (Bergman S. and Schiffer M.)

[1] Kernel functions and conformal mapping, Compositio Math., **8** (1951), 205—249.

Бериацкий (Bierpacki M.)

[1] Sur les coefficients tayloriens des fonctions univalentes, Bull. Acad. polon. sci., Cl. III, **4** (1956), 5—8.

Бибербах (Bieberbach L.)
[1] Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung, Rend. Cir. Mat. di Palermo, **38**, f. 1 (1914), 98—112.
[2] Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitzgsber. Preuss. Akad. Wiss., Phis.—math. Kl., (1916), 940—955.
Бомбиери (Bombieri E.)
[1] On the local maximum property of the Koebe function, Inventiones math., 4, № 1 (1967), 26—67.
Гарабедян, Росси и Шиффер (Garabedian P. R., Ross G. G., and Schiffer M.)
[1] On the Bieberbach conjecture for even n, J. Math. and Mech., **14**, № 6 (1965), 975—989.
Гарабедян, Шиффер (Garabedian P. R., Schiffer M.)
[1] A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, J. Ration. Mech. Anal., **4**, № 3 (1955), 427—465.
[2] The local maximum theorem for the coefficients of univalent functions, Arch. Ration. Mech. and Anal., **26**, № 1 (1967), 1—32.
Голузин Г. М.
[1] О теоремах искажения для конформного отображения многосвязных областей, Матем. сб., 2 (44):1 (1937), 37—64.
[2] Некоторые оценки коэффициентов однолистных функций, Матем. сб., 3 (45):2 (1938), 321—330.
[3] О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций, Матем. сб., 19 (61):2 (1946), 183—202.
[4] О коэффициентах однолистных функций, Матем. сб., 22 (64):3 (1948), 373—380.
[5] О типично вещественных функциях, Матем. сб., 27 (69):2 (1950), 201—218.
[6] К теории однолистных функций, Матем. сб., 29 (71):1 (1951), 197—208.
[7] Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., «Наука» (1966).
Грётш (Grötzsch H.)
[1] Über die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche III, Ber. Vehr. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. phys. Kl., **83** (1931), 283—297.
Громова Л. Л., Лебедев Н. А.
[1] О теоремах площадей для неналегающих конечносвязных областей I, Вестник ЛГУ, № 19 (1968), 44—58.
[2] О теоремах площадей для неналегающих конечносвязных областей II, Вестник ЛГУ, № 1 (1970), 18—29.
Гронуолл (Gronwall T. H.)
[1] Some remarks on conformal representation, Ann. of Math. (2), **16** (1914—1915), 72—76.
Грунский (Grunsky H.)
[1] Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen, Math. Z., **45**, Hf. 1 (1939), 29—61.
Джеикинс (Jenkins I. A.)
[1] Some area theorems and a special coefficient theorem, Illinois J. Math., **8** (1964), 80—99.

Ильина Л. П.
[1] О взаимном росте соседних коэффициентов однолистных функций, Матем. заметки, 4, № 6 (1968), 715—722.
Кёбе (Koebe P.)
[1] Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung IV, Acta Math., 41 (1918), 305—344.
Клуни (Clunie J.)
[1] On schlicht functions, Ann. of Math. (2), 69, № 3 (1959), 511—519.
Клуни и Поммеренке (Clunie J., Pommerenke Ch.)
[1] On the coefficients of univalent functions. Michigan Math. J., 14 (1967), 71—78.
Колмогоров А. Н., Фомин С. В.
[1] Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука» (1968).
Ландау (Landau E.)
[1] Über schlichte Funktionen. Math. Z., 30 (1929), 635—638.
Лебедев Н. А.
[1] Некоторые оценки и задачи на экстремум в теории конформного отображения, ЛГУ, Диссертация (1951).
[2] Приложение принципа площадей к задачам о неналегающих областях, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 60 (1961), 211—231.
[3] Приложение принципа площадей к задачам о неналегающих конечносвязных областях, ДАН СССР, 167, № 1 (1966), 26—29.
Лебедев Н. А., Мамай Л. В.
[1] Обобщение одного неравенства П. Гарабедяна и М. Шиффера, Вестник ЛГУ, № 19 (1970), 41—45.
Лебедев Н. А. и Милин И. М.
[1] О коэффициентах некоторых классов аналитических функций, Матем. сб., 28 (70):2 (1951), 359—400.
[2] Об одном неравенстве, Вестник ЛГУ, № 19 (1965), 157—158.
Левин В. И.
[1] Ein Beitrag zum Koeffizientenproblem der schlichten Funktionen, Math. Z., 38 (1934), 306—311.
Лёвнер (Löwner K.)
[1] Über Extremumsätze bei der konformen Abbildung des Äusseren des Einheitskreises, Math. Z., 3 (1919), 65—77.
[2] Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, Math. Ann., 89 (1923), 103—121.
Литтлвуд (Littlewood J. E.)
[1] On inequalities in the theory of functions, Proc. London Math. Soc., (2), 23 (1925), 481—519.
[2] On the coefficients of schlicht functions, Quart. J. Math., 9 (1938), 14—20.
Литтлвуд и Пэли (Littlewood J. E. and Paley R. E. A. C.)
[1] A proof that an odd schlicht function has bounded coefficients, J. London Math. Soc., 7, pt. 3, № 27 (1932), 167—169.
Лукас (Lucas K. W.)
[1] On successive coefficient of areally mean p-valent functions, J. London Math. Soc., 44, pt. 4 (1969), 631—642.

Маркушевич А. И.
[1] Теория аналитических функций, М., «Наука», т. 2 (1968).
Мешковский (Meschkowski H.)
[1] Einige Extremalprobleme aus der Theorie der konformen Abbildung, Апп. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I. Math., № 117 (1952), 1—12.
[2] Verzerrungssätze für mehrfach zusammehängende Bereiche, Compositio Math., **11** (1953), 44—59.
[3] Verallgemeinerung der Poissonschen Integralformel auf mehrfach zusammenhängende Bereiche, Апп. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I. Math., **166** (1954).
Милин И. М.
[1] Метод площадей в теории однолистных функций, ДАН СССР, **154**, № 2 (1964), 264—267.
[2] Оценка коэффициентов однолистных функций, ДАН СССР, **160**, № 4 (1965), 769—771.
[3] О коэффициентах однолистных функций, ДАН СССР, **176**, № 5 (1967), 1015—1018.
[4] Метод площадей для однолистных функций в конечносвязных областях, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **94** (1968), 90—122.
[5] О соседних коэффициентах однолистных функций, ДАН СССР, **180**, № 6 (1968), 1294—1297.
[6] Теорема регулярности Хеймана для коэффициентов однолистных функций, ДАН СССР, **192**, № 4 (1970).
Нехари (Nehari Z.)
[1] Inequalities for the coefficients of univalent functions, Arch. Ration. Mech. and Anal., **34**, № 4 (1969), 301—330.
Педерсон (Pederson Roger N.)
[1] A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient, Arch. Ration. Mech. and Anal., **31**, № 5 (1968), 331—351.
Поммеренке (Pommerenke Ch.)
[1] Über die Mittelwerte und Koeffizienten multivalenter Funktionen, Math. Апп., **145**, Hf. 3 (1961—1962), 285—296.
[2] Über die Faberschen Polynome schlichter Funktionen, Math. Z., **85** (1964), 197—208.
[3] Relations between the coefficients of a univalent function, Inventiones math., **3** (1967), 1—15.
[4] On the Grunsky inequalities for univalent functions, Arch. Ration. Mech. and Anal., **35**, № 3 (1969), 234—244.
Правиц (Prawitz H.)
[1] Über Mittelwerte analytischer Funktionen, Arkiv. Mat. Astronomi Fysik, **20** A, 6 (1927—1928), 1—12.
Сивирский (Siewierski L.)
[1] Sharp estimation of the coefficients of bounded univalent functions near the identity. Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. math., astron. et phys., **16**, № 7 (1968), 575—576.
Смирнов В. И.
[1] Курс высшей математики, т. 3, ч. 1, М., «Наука» (1967).
Смирнов В. И. и Лебедев Н. А.
[1] Конструктивная теория функций комплексного переменного, М., «Наука» (1964).

Спенсер (Spencer D. C.)
[1] On finitely mean valent functions, II, trans. Amer. Math. Soc., **48** (1940), 418—435.
[2] Some remarks concerning the coefficients of schlicht functions. J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech., 21 (1942), 63—68.
Тиман А. Ф., Трофимов В. Н.
[1] Введение в теорию гармонических функций, М., «Наука» (1968).
Уолш (Walsh J. L.)
[1] Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., ИЛ (1961).
Уолш и Девис (Walsh J. L., Davis P.)
[1] Interpolation and orthonormal systems, Journal d'Analyse Math. **2**, (1952), 1—28.
Фаррелл (Farrell O. J.)
[1] On approximation to an analitic function by polynomials, Bull. of the Amer. Math. Soc., **40** (1934), 908—914.
Фекете и Сегё (Fekete M. and Szegö G.)
[1] Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen, J. London Math. Soc., **8** (1933), 85—89.
Харди (Hardy G. H.)
[1] Расходящиеся ряды, М., ИЛ (1951).
Хейман (Hayman W. K.)
[1] The asymptotic behaviour of p-valent functions, Proc. Lond. Math., Soc. (3), **5** (1955), 257—284.
[2] Bounds for the large coefficients of univalent functions, Ann. Acad. Sci. Fenn., ser. A, 1. Math., № 250 (1958).
[3] Многолистные функции, М., ИЛ (1960).
[4] On successive coefficients of univalent functions, J. London Math., Soc., **38**, pt. 2, № 150 (1963), 228—243.
Хуммель (Hummel T. A.)
[1] Bounds for the coefficient body of univalent functions, Arch. Ration. Mech. and Anal., **36**, № 2 (1970), 128—134.
Хуммель и Шиффер (Hummel T. A. and Schiffer M. M.)
[1] Coefficient inequalities for Bieberbach—Eilenberg functions, Arch. Ration. Mech. and Anal., **32**, № 2 (1969), 87—99.
Шабат Б. В.
[1] Введение в комплексный анализ., М., «Наука» (1969).
Шеффер и Спенсер (Schaeffer A. C. and Spencer D. C.)
[1] The coefficients of schlicht functions, Duke Math. J., **10** (1943), 611—635.
Шиффер (Schiffer M. M.)
[1] Sur un probleme d'extremum de la representation conforme, Bull. Soc. Math. France, **66** (1938), 48—55.
[2] An application of orthonormal functions in the theory of conformal mapping. Amer. J. Math. **70** (1948), 147—156.
[3] Faber polynomials in the theory of univalent functions, Bull. Amer. Math. Soc., **54** (1948), 503—517.
[4] Некоторые новые результаты в теории конформных отображений, Приложение к книге Р. Куранта «Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности», М., ИЛ (1953)