МАТЕМАТИКА
НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ
РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А.Н. КОЛМОГОРОВ, С.П. НОВИКОВ
12

ЕВКЛИДОВА КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

МАРКОВСКИЙ ПОДХОД

ИЗДАТЕЛЬСТВО "МИР" МОСКВА

МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А.Н. КОЛМОГОРОВ С.П. НОВИКОВ

12

ЕВКЛИДОВА КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

МАРКОВСКИЙ ПОДХОД

Сборник статей

Перевод с английского
под редакцией
Р. А. МИНЛОСА

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР" МОСКВА 1978

УДК 519.2 + 531.19 + 517

В последние годы интенсивно развивается так называемая марковская стратегия в конструктивной квантовой теории поля. Основная особенность этого подхода состоит в том, что построение моделей квантовых полей и их исследование сводится к построению и изучению некоторых специальных классов марковских случайных полей. В настоящем сборнике помещены переводы важных работ зарубежных ученых в данной области. Среди авторов статей известные ученые — Дж. Глимм, А. Джаффе, Ф. Денлоп, Ч. Ньюман. Тематика работ сборника примыкает к тематике сборника «Конструктивная теория поля» (М., «Мир», 1976) и служит его естественным продолжением и дополнением.

Книга будет интересна научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов университетов, специализирующимся в области математической физики и приложений теории вероятностей и функционального анализа.

Редакция литературы по математическим наукам

Е $\frac{20203-013}{041(01)-78}$ 13—78

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В начале семидесятых годов в конструктивной теории поля было сделано замечательное открытие, породившее бурный и по сию пору не иссякающий поток результатов. Это открытие, принадлежащее Э. Нельсону, и последовавший за ним взрыв («марковская революция» — по выражению экспансивного Б. Саймона, одного из активных ее лидеров) связаны с немаловажной предварительной идеей, обозначаемой словами «евклидово квантовое поле» и заключающейся в переходе к «мнимому времени», т. е. переходе от пространства Минковского к пространству Евклида, последовательно проводимом во всех построениях теории поля. Для возникающего при этом формального объекта — евклидова квантового поля (введенного в работах Ю. Швингера и Т. Накано) — К. Симанзик в конце 60-х годов предложил содержательную интерпретацию как обобщенного случайного поля. Э. Нельсон открыл очень просто и естественно определяемый класс случайных полей, которые при возвращении из евклидова мира в релятивистский приводят к квантовому полю, описываемому аксиомами Вайтмана, и указал для таких полей явную процедуру этого обратного перехода. Среди свойств, характеризующих этот класс случайных полей, наиболее существенным и в то же время самым неожиданным оказалось свойство марковости.

Толчок, данный работой Э. Нельсона, за короткий срок привел к полному переосмыслению с новой точки зрения всего накопленного к тому времени опыта по построению моделей бозонного поля. При этом отчетливо выявились аналогии между задачей построения и исследования квантовых полей и изучением гиббсовских состояний в статистической физике. Уяснение этих связей позволило применить к квантовому полю богатый арсенал средств статистической физики (корреляционные неравенства, кластерные разложения и корреляционные уравнения, так называемую контурную технику, теорему Ли и Янга и т. д.), что и привело к столь удивительному прогрессу. Возникло и мощное обратное воздействие: работы, мотивированные задачами теории поля, чрезвычайно обогатили саму статистическую физику.

На русском языке издано уже два перевода, целиком посвященных этой новой области: книга Б. Саймона «Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля» (М., «Мир», 1977) и сборник статей «Конструктивная теория поля» (М., «Мир», 1977)[1]. Предлагаемый сборник переводов является идейным и тематическим продолжением этих книг. Вот беглый обзор его содержания.

Статья К. Остервальдера и Р. Шрадера (исправленная версия нх прежней работы на эту же тему) относится к формальному евклидову полю и не связана с его марковской интерпретацией. В статье указывается, при каких условиях функции Швингера, задающие это поле, могут быть аналитически продолжены на «комплексные значения времени» так, чтобы на мнимой оси они превратилнсь в функции Вайтмана некоторого квантового поля, а также строится само это аналитическое продолжение. Следующий затем цикл работ Дж. Глимма, А. Джаффе и Т. Спенсера содержит доказательство существования фазового перехода для некоторых моделей поля $P(\varphi)_2$, т. е. существование по меньшей мере двух квантовых полей, определяемых одним и тем же взаимодействием. Эти работы уже целиком следуют марковской стратегни и используют обычный в статистической физике пайерлсовский (или контурный) метод доказательства.

Далее идет трудная (и по технике и по изложению) работа Дж. Глимма и А. Джаффе о перенормировке поля $(\varphi^4)_3$ в конечном объеме. В этой работе, написанной в начале «марковской революции», сочетаются как прежние, «гамильтоновы», так и новые, «марковские», методы. Примененный в этой работе метод индуктивного разложения послужил основой для дальнейших работ по построению полей $P(\varphi)_3$. В следующей статье — Ю. Фрёлиха — доказывается термодинамическая устойчивость двухкомпонентного нейтрального кулоновского газа (а также газа Юкавы) с помощью изоморфизма между этой системой и полевой моделью $:\cos\varphi:_2$. Полученные здесь тонкне результаты служат прекрасной иллюстрацией обратного влияния теории поля на статистическую физику.

Это взаимное влияние двух иаук и переплетение их задач и методов ощутимо прослеживаются в последующих статьях

[1]) Кроме того, в недавно изданном сборнике переводов «Гиббсовские состояния в статистической физике» (М., «Мир», 1978) помещена статья Ю. Фрёлиха, Б. Саймона и Т. Спенсера, где опнсаны очень важные применения методов статистической физики к теории поля. Следует, наконец, упомянуть краткий, но очень содержательный библиографический комментарий работ из новой области, иаписаиный В. А. Малышевым: Вероятностные аспекты квантовой теории поля (в сб. «Итоги науки и техники», т. 14, М., изд. ВИНИТИ, 1977).

сборника: написанном Б. Саймоном кратком обзоре некоторых результатов, относящихся к решеточной аппроксимации квантового поля (прием, при котором непрерывное обобщенное случайное поле приближается имитирующим его обыкновенным дискретным гиббсовским полем, гораздо легче поддающимся изучению), и работах Ф. Денлопа и Ч. Ньюмана и одного Ч. Ньюмана, в которых для возникающих именно таким образом полей устанавливается ряд фактов (теоремы типа теоремы Ли и Янга, корреляционные неравенства и т. д.), известных для гиббсовских полей с более простым пространством спинов.

Р. Минлос

АКСИОМЫ ДЛЯ ЕВКЛИДОВЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА, II[1])

К. Остервальдер[2])

Jefferson Laboratory of Physics, Harvard University, Cambridge, Mass., USA

Р. Шрадер

Institut für Theoretische Physik, Freie Universität Berlin, Berlin

Резюме. Мы приводим новые (необходимые и) достаточные условия для евклидовых функций Грина, обеспечивающие возможность их аналитического продолжения до функций Вайтмана релятивистской теории поля. Эти результаты расширяют и исправляют результаты нашей предыдущей работы.

I. ВВЕДЕНИЕ

Переход к чисто мнимому времени оказался мощным средством и для построения новых, и для изучения уже имеющихся моделей релятивистских квантовых полей[3]). Очевидно, что для того, чтобы этот переход имел смысл, важно знать, как вернуться обратно, к вещественному времени.

В предыдущей работе [12] мы утверждали, что нашли необходимые и достаточные условия для того, чтобы евклидовы функции Грина обладали аналитическими продолжениями, граничные значения которых единственным образом определяют совокупность вайтмановых распределений. Эти условия таковы:

($E0$) Умеренный рост.
($E1$) Евклидова ковариантность.
($E2$) Положительная определенность.
($E3$) Симметричность.
($E4$) Кластерное свойство.

Как оказалось, одна из лемм (лемма 8.8) в [12] не верна (см. замечание 2 ниже), и в настоящее время вопрос о том, являются ли условия ($E0$) — ($E4$) достаточными для того, чтобы гарантировать существование теории Вайтмана, остает-

---

[1]) Konrad Osterwalder, Robert Schrader, Axioms for Euclidean Green's Functions II, *Communications in Mathematical Physics*, **42** (1975), 281—305.

[2]) При частичной финансовой поддержке Национального научного фонда по контракту MPS 73-05037 A01.

[3]) Подтверждение этой мысли читатель может найти в лекциях 1973 г. по конструктивной квантовой теории поля [19], где можно также познакомиться с библиографией и историческим обзором.

ся открытым. Необходимость этих условий не подлежит сомнению. В этой работе мы приводим две различные совокупности достаточных условий.

В § III мы заменяем условие умеренного роста ($E0$) значительно более сильным ограничением на распределения ($E0\breve{}$) и доказываем новую теорему эквивалентности: условия ($E0\breve{}$), ($E1$) — ($E4$) необходимы и достаточны для того, чтобы евклидовы функции Грина определяли теорию Вайтмана. Хотя с помощью условия ($E0\breve{}$) теорема эквивалентности $E \longleftrightarrow R$ восстаиавливается, это новое условие оказывается непригодным для приложений, поскольку его трудно проверять. Поэтому в § IV мы вводим условие ($E0'$), которое только незначительно отличается от первоначального условия ($E0$): вместо умеренного роста мы теперь требуем, чтобы, грубо говоря, порядок распределений $\mathfrak{S}_n$ (т. е. евклидовых функций Грина) возрастал не более чем линейно по n, причем соответствующие оценки должны расти не быстрее, чем $\alpha(n!)^\beta$, при произвольных α и β. Мы называем это условие «условием линейного роста». В предположениях ($E0'$), ($E1$) — ($E4$) мы можем реконструировать теорию Вайтмана, причем для получающихся вайтмановых распределений $\mathfrak{W}_n$ также выполняется условие линейного роста ($R0'$). Построение вайтмановых распределений распадается на два главных этапа: на первом мы аналитически продолжаем евклидовы функции Грина на комплексные значения времени (§ V), а на втором находим оценки для этих аналитических функций, благодаря которым нам удается доказать, что их граничные значения являются распределениями умеренного роста, а именно вайтмановыми распределениями (§ VI). Интересно отметить, что аналитическое продолжение может быть получено с использованием только старого условия умеренного роста ($E0$) и условий ковариантности ($E1$) и положительной определенности ($E2$). И только из-за того, что аналитическое продолжение одной отдельной функции Швингера $\mathfrak{S}_n$ связано с бесконечным числом других функций $\mathfrak{S}_k$, для получения необходимых оценок мы должны накладывать некоторые ограничения на рост порядка $\mathfrak{S}_k$. Введенное нами условие лннейного роста, по-видимому, вполне разумно. Оно заведомо выполняется для всех моделей теории поля, для которых удалось пока установить аксиомы Вайтмана, а недавние результаты Глимма и Джаффе [7] показывают, что они верны также и для модели φ^4_4 при условии, что эта модель существует и ее двухточечная функция является распределением из пространства $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^8)$.

Замечания. 1) В доказательстве леммы 8.8 в [12] сначала усомнился Саймон [16]. Впоследствии один из нас (Р. Ш.)

нашел следующий противоречащий пример: $F(x, y) = \exp(-xy)$, $x > 0$, $y > 0$, является преобразованием Лапласа распределения умеренного роста по каждой переменной в отдельности, но не является таковым по совокупности переменных.

2) Предварительное сообщение о результатах этой работы было сделано одним из нас (К. О.) в летней школе 1973 г. по конструктивной теории поля (Erice), см. [13]. Следует отметить, что в [13] условие ($E0'$) формулировалось как условие линейного роста евклидовых функций Грина, выраженных относительно *разностей переменных*. В настоящей работе условие ($E0'$) относится непосредственно к евклидовым функциям Грина и является поэтому более общим, более естественным и, конечно, более удобным для приложений.

3) Способ построения аналитического продолжения функций Швингера, удовлетворяющих условиям ($E0$), ($E1$) и ($E2$), был найден одновременно с нами Глазером [6], который указал также, в каком отношении эти результаты находятся с его более ранней работой [5], где изучалась связь между положительной определенностью и аналитичностью. Глазер тоже отметил, что для того, чтобы доказать умеренный рост на границе области аналитичности, нужно, видимо, использовать более сильное предположение, чем ($E0$); кроме того, он показал, что условия ($E0$) — ($E4$) приводят к *модифицированной* теории Вайтмана, в которой вакуумные средние являются гиперфункциями, но не обязательно распределениями умеренного роста.

4) Аксиомы Вайтмана являются следствием аксиом Нельсона [11], а значит, в соответствии с [12] из аксиом Нельсона следуют и условия ($E0$) — ($E4$). Кроме того, последние условия легко вывести из аксиом Нельсона непосредственно; решающий момент доказательства состоит в выводе положительной определенности ($E2$) из свойств марковости и инвариантности относительно отражения, см. [19, стр. 104]. По-видимому, условие ($E0'$) связано с нельсоновским условием о шкале пространств, см. [11]. С другой стороны, для того чтобы вывести аксиомы Нельсона из условий ($E0'$), ($E1$) — ($E4$), необходимо ввести дополнительные предположения, см. работы Фрёлиха [3] и Саймона [15]. Аксиомы Нельсона более ограничительны, чем условия ($E0'$), ($E1$)—($E4$), и поэтому приводят к более богатой структуре. Однако они представляются слишком жесткими для того, чтобы использовать их для построения конструктивной теории поля: ни для одной из нетривиальных моделей, построенных до сих пор, не удалось доказать марковское свойство Симанзика и Нельсона (соотношение (1) в [11]).

5) Хотя в этой работе мы занимаемся только теорией одного действительного скалярного поля, эти результаты очевидным образом расширяются на случай теорий счетного числа произвольных спиновых полей, см. [12, гл. 6].

6) С очевидными изменениями сохраняются соответствия между подмножествами аксиом для евклидовых функций Грина и подмножествами аксиом Вайтмана, которые обсуждались в [12].

7) Константинеску и Тальхаймер распространили систему аксиом $(E0)/(E0')$, $(E1)-(E4)$ на поля Джаффе [1].

Благодарности. Мы благодарим проф. А. Джаффе и проф К. Польмайера за полезные обсуждения и проф. В. Глазера за предоставление нам экземпляра его работы до ее опубликования. Мы благодарим также проф. Г.-Ф. Дель Антонио за теплое гостеприимство в Университете Неаполя, где была сделана часть этой работы.

II. ОБОЗНАЧЕНИЯ

В этом разделе мы вводим некоторые (частью новые) обозначения и воспроизводим несколько технических результатов из [12].

Через x здесь обычно обозначается точка в пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \vec{x})$. Точка пространства $\mathbb{R}^{4n}$ обозначается так:

$$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \qquad x_i \in \mathbb{R}^4.$$

Интегралы мы записываем в виде $\int \ldots d^{4n}x$ или просто $\int \ldots d\underline{x}$.

Нам понадобятся следующие открытые множества:

$$\mathbb{R}^4_+ = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x^0 > 0\};$$

$$\mathbb{R}^{4n}_+ = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{4n} \mid x^0_j > 0 \quad \text{для всех} \quad j = 1, \ldots, n\};$$

$$\mathbb{R}^{4n}_< = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{4n} \mid x^0_{j+1} > x^0_j \quad \text{для всех} \quad j = 1, \ldots, n-1\};$$

$$\mathbb{R}^{4n}_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{4n} \mid x_i \neq x_j \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n\};$$

$$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\};$$

$$\mathbb{C}^n_+ = \{(z_1, \ldots, z_n) \mid z_j \in \mathbb{C}_+ \quad \text{для всех} \quad j = 1, \ldots, n\}.$$

В пространстве Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ мы будем использовать следующие нормы:

$$|f|_p = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ |\underline{\alpha}| \leqslant p}} \left|\left(1 + x^2\right)^{p/2} \left(D^{\underline{\alpha}} f\right)(x)\right|, \tag{2.1}$$

где $p \in \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \ldots\}$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Здесь применяются стандартные обозначения для мультииндексов: $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$;

$$|\underline{\alpha}| = \sum_1^m \alpha_i, \quad D^{\underline{\alpha}} = \prod_1^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{\alpha_i}; \quad x^2 = \sum_1^m (x_i)^2.$$

Через $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^{4n})$ мы обозначаем топологическое подпространство пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$, состоящее из всех таких функций, которые вместе со всеми своими производными обращаются в нуль на дополнении $\sim \mathbb{R}_0^{4n}$ множества $\mathbb{R}_0^{4n}$.

Как и в [12], мы обозначаем через $\mathfrak{S}_n(\underline{x})$ евклидовы функции Грина, а через $\mathfrak{W}_n(\underline{x})$ — вайтмановы распределения. Евклидовы функции Грина $S_{n-1}(\underline{\xi})$ и вайтмановы распределения $W_{n-1}(\underline{\xi})$, выраженные относительно разностей переменных, определяются формально как

$$\mathfrak{S}_n(\underline{x}) = S_{n-1}(\underline{\xi}),$$
$$\mathfrak{W}_n(\underline{x}) = W_{n-1}(\underline{\xi})$$

соответственно, где $\xi_k = x_{k+1} - x_k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Аксиомы Вайтмана будут обозначаться следующим образом: ($R0$) Рост распределений, ($R1$) Релятивистская инвариантность, ($R2$) Положительная определенность, ($R3$) Локальная коммутативность, ($R4$) Кластерное свойство и ($R5$) Спектральное условие.

Остальная часть этого раздела понадобится только в § III.

Для открытого множества O в $\mathbb{R}^m$ через $\mathscr{S}(O)$ обозначается подпространство пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ функций с носителем в $\bar{O}$, снабженное индуцированной топологией. Сопряженное пространство топологического факторпространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)/\mathscr{S}(O)$ является полярой $\mathscr{S}(O)$, которую можно отождествить с совокупностью всех распределений умеренного роста с носителем в $\sim O$. Через $\mathscr{S}(\bar{O})$ мы обозначаем совокупность C^∞-функций на O, быстро убывающих вместе со всеми своими производными при $|x| \to \infty$ в O, причем все производные этих функций обладают непрерывным продолжением на замыкание $\bar{O}$ множества O. Введем топологию на $\mathscr{S}(\bar{O})$ при помощи норм

$$|g|_{p,O} = \sup_{\substack{x \in O \\ |\underline{\alpha}| \leqslant p}} \left|(1 + x^2)^{p/2} \left(D^{\underline{\alpha}} g\right)(x)\right|. \tag{2.2}$$

Множество $\mathscr{S}(\bar{O})$ не является, конечно, подпространством пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, но, как показывает следующая лемма, всякий элемент из $\mathscr{S}(\bar{O})$ можно рассматривать как сужение на $\bar{O}$ некоторого элемента из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$.

Лемма 2.1. *Пусть O — открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Тогда подпространство $\mathscr{S}(\bar{O})$ изоморфно факторпространству $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)/\mathscr{S}(\sim\bar{O})$.*

Эта лемма вытекает из того факта, что множество функций f_+ из $\mathscr{S}(\bar{O})$, представляющих собой сужения на $\bar{O}$ функций $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, всюду плотно в $\mathscr{S}(\bar{O})$, и из теоремы Уитни о продолжении, см. Уитни [21], Хёрмандер [9], Владимиров [20], а также лемму 8.1 в [12]. Из теоремы Уитни о продолжении немедленно следует, что нормы

$$\|g\|_{p,O}=\inf_{h\in\mathscr{S}(\sim\bar{O})}|g+h|_p \tag{2.3}$$

эквивалентны нормам (2.2) ($g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$). В частности, если $O=V_+^n\equiv\{\underline{x}\,|\,x_i^0>0$ и $(x_i^0)^2>\vec{x}_i^{\,2}$ для всех $i=1,\ldots,n\}$, то справедлива

Лемма 2.2. *Предположим, что $f_+\in\mathscr{S}(\overline{V_+^n})$ и $p\in\mathbb{Z}_+$. Тогда существует такая функция $g\in\mathscr{S}^{(p)}(\mathbb{R}^{4n})$, что $g(\underline{x})=f_+(\underline{x})$ для $\underline{x}\in\overline{V_+^n}$ и*

$$|f_+|_{p,V_+^n}\leqslant\|g\|_{p,V_+^n}\leqslant\gamma|f_+|_{2p,V_+^n}, \tag{2.4}$$

где $\gamma=\gamma(n,p)=[c2^n(p+1)]^{2p+1}$ для некоторой постоянной c, не зависящей от n и p.

Здесь $\mathscr{S}^{(p)}(\mathbb{R}^{4n})$ является пополнением пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$ относительно топологии, определяемой нормой $|\cdot|_p$. Заметим, что первое неравенство в (2.4) тривиально, а второе представляет собой уточненную форму теоремы Уитни о продолжении и может быть получено с помощью подробного разбора доказательства, приведенного в работе [9]. Детали мы опускаем.

Простым следствием лемм 2.1 и 2.2 является

Лемма 2.3. *Пусть $\hat{W}$ — распределение из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n})$ с носителем в $\overline{V_+^n}$, такое, что для всех $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$*

$$|\hat{W}(f)|\leqslant\omega|f|_p.$$

Тогда $\hat{W}$ определяет распределение также в $\mathscr{S}'(\overline{V_+^n})$ (это распределение мы тоже обозначим через $\hat{W}$), причем для всех

$f_+ \in \mathscr{S}\left(\overline{V_+^n}\right)$

$$|\hat{W}(f_+)| \leqslant w \cdot \gamma |f_+|_{2p,\ \overline{V_+^n}}, \tag{2.5}$$

где γ — величина, введенная в лемме 2.2.

Для $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_+^{4n})$ и $\underline{q} \in \overline{\mathbb{R}_+^{4n}}$ положим

$$\check{f}(\underline{q}) = \int \exp\left[-\sum_{j=1}^{n}\left(q_j^0 x_j^0 - i\vec{q}_j \vec{x}_j\right)\right] f(\underline{x})\, d^{4n}x. \tag{2.6}$$

Из леммы 8.2 работы [12] немедленно вытекает следующая

Лемма 2.4. *Отображение $f \to \check{f}$, определенное равенством (2.6), является непрерывным отображением из $\mathscr{S}(\mathbb{R}_+^{4n})$ в $\mathscr{S}\left(\overline{\mathbb{R}_+^{4n}}\right)$, область значений которого всюду плотна, а ядро тривиально.*

Далее обозначим через $\check{\mathscr{S}}(\mathbb{R}_+^{4n})$ линейное пространство $\mathscr{S}(\mathbb{R}_+^{4n})$, снабженное топологией, определяемой семейством полунорм

$$|f|_p^{\smile} = |\check{f}|_{p,\ \overline{\mathbb{R}_+^{4n}}}, \qquad p = 1, 2, \ldots . \tag{2.7}$$

Заметим, что пространство $\check{\mathscr{S}}(\mathbb{R}_+^{4n})$ не является полным. По лемме 2.4 топология пространства $\check{\mathscr{S}}(\mathbb{R}_+^{4n})$ слабее исходной топологии $\mathscr{S}(\mathbb{R}_+^{4n})$ и, следовательно,

$$\check{\mathscr{S}}'(\mathbb{R}_+^{4n}) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}_+^{4n}). \tag{2.8}$$

III. ИСПРАВЛЕННАЯ ТЕОРЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

В этом разделе мы вводим новое свойство ($E0^{\smile}$) евклидовых функций Грина и доказываем, что условия ($E0^{\smile}$) и ($E1$) — ($E4$) в совокупности эквивалентны обычным аксиомам Вайтмана. Это новое условие таково:

$$(E0^{\smile}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}_n \in \mathscr{S}_0'(\mathbb{R}^{4n}), & \mathfrak{S}_0 = 1 \\ \text{и} & \\ S_{n-1} \in \check{\mathscr{S}}'\left(\mathbb{R}_+^{4(n-1)}\right), & n = 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

Теорема $E \leftrightarrow R$ (исправленная). *Условия* ($E0^{\smile}$), ($E1$) — ($E4$) *для евклидовых функций Грина эквивалентны аксиомам Вайтмана* ($R0$) — ($R5$) *для вайтмановых распределений.*

Хотя условие ($E0^{\smile}$) и восстанавливает теорему эквивалентности $E \longleftrightarrow R$, оно не вполне удовлетворительно с точки зрения приложений. А именно, условие непрерывности S_{n-1} относительно $|\cdot|_p^{\smile}$-норм трудно проверить практически; как мы увидим ниже, из условия ($E0^{\smile}$) немедленно вытекает, что S_{n-1} является преобразованием Фурье — Лапласа распределения $\hat{W}_{n-1}$, носитель которого обладает требуемыми свойствами. С точки зрения конструктивной квантовой теории поля решающими являются результаты следующего раздела.

Обратимся к доказательству теоремы $E \longleftrightarrow R$. Вывод условий ($E0^{\smile}$), ($E1$) — ($E4$) из аксиом Вайтмана получается с помощью рассуждений, проведенных в [12]; в проверке нуждается только дополнительное условие $S_{n-1} \in \check{\mathcal{S}}'\left(\mathbb{R}_+^{4(n-1)}\right)$. Точно так же, как в работе [12, гл. 5], показываем, что если $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}_+^{4n}\right)$, то

$$S_{n-1}(f) = \hat{W}_{n-1}(\check{f}), \tag{3.1}$$

где $\hat{W}_{n-1}$ — преобразование Фурье W_{n-1}, интерпретируемое как распределение в пространстве $\mathcal{S}'\left(\overline{\mathbb{R}_+^{4n}}\right)$; см. также лемму 2.1. Отсюда вытекает, что для некоторого p

$$|S_{n-1}(f)| < |f|_p^{\smile} \tag{3.2}$$

и, следовательно, S_{n-1} является элементом пространства $\check{\mathcal{S}}'\left(\mathbb{R}_+^{4(n-1)}\right)$.

Приведем другое простое доказательство соотношений (3.1), (3.2). Если $\underline{\xi} \in \mathbb{R}_+^{4(n-1)}$, то функция

$$h_{\underline{\xi}}(\underline{q}) = \exp\left[-\sum_{j=1}^{n-1}\left(\xi_j q_j - i\vec{\xi}_j\vec{q}_j\right)\right]$$

является элементом пространства $\mathcal{S}\left(\overline{V_+^{n-1}}\right)$, непрерывно зависящим от $\underline{\xi}$. Поэтому в соответствии с леммой **2.3** мы можем представить $S_{n-1}(\underline{\xi})$ как

$$S_{n-1}(\underline{\xi}) = \hat{W}_{n-1}(h_{\underline{\xi}}). \tag{3.3}$$

Далее, если $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}_+^{4(n-1)}\right)$ имеет компактный носитель, то положим

$$\begin{aligned} S_{n-1}(f) &= \int S_{n-1}(\underline{\xi}) f(\underline{\xi})\, d^{4(n-1)}\xi = \\ &= \int W_{n-1}(h_{\underline{\xi}}) f(\underline{\xi})\, d^{4(n-1)}\xi, \end{aligned} \tag{3.4}$$

причем в правой части этих соотношений используется обычный интеграл Римана. Мы утверждаем, что для рассматриваемых f

$$\int \widehat{W}_{n-1}(h_{\underline{\xi}}) f(\underline{\xi})\, d^{4(n-1)}\xi = \widehat{W}_{n-1}(\check{f}), \tag{3.5}$$

откуда в силу непрерывности равенство (3.1) выполняется для всюду плотного множества в пространстве $\mathscr{S}\left(\mathbb{R}_+^{4(n-1)}\right)$. Для доказательства равенства (3.5) представим $\check{f}$ в виде

$$\check{f}(\underline{q}) = \int h_{\underline{\xi}}(\underline{q})\, f(\underline{\xi})\, d^{4(n-1)}\xi \in \mathscr{S}\left(\overline{V_+^n}\right),$$

а затем воспользуемся тем, что элемент $\check{f}$ в пространстве $\mathscr{S}\left(\overline{V_+^n}\right)$ может быть аппроксимирован римановыми суммами.

Теперь мы покажем, как изменить доказательство теоремы $E \to R$. Выбрав $S_{n-1} \in \check{\mathscr{S}}'\left(\mathbb{R}_+^{4n}\right)$, определим $\widehat{W}_{n-1}$ равенством (3.1). Тем самым распределенне $\widehat{W}_{n-1}$ будет задано на всюду плотном множестве в пространстве $\mathscr{S}\left(\overline{\mathbb{R}_+^{4n}}\right)$ (см. лемму 2.4) н по предположению ($E0\check{}$) оно непрерывно в топологии $\mathscr{S}\left(\overline{\mathbb{R}_+^{4n}}\right)$. Следовательно, $\widehat{W}_{n-1}$ допускает единственное продолжение до распределения в пространстве $\mathscr{S}'\left(\overline{\mathbb{R}_+^{4n}}\right)$. Доказательство остальных аксиом Вайтмана теперь можно провести так же, как в работе [12]. Соотношения (3.3), (3.4) легко проверяются, а из них вытекает, что S_n — действительно евклидовы функции Грина теории Вайтмана, которая таким образом построена.

IV. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ: ДРУГАЯ ТЕОРЕМА РЕКОНСТРУКЦИИ

IV.1. Условие линейного роста и формулировка результатов. Как мы показали в предыдущем разделе, теорему эквивалентности $E \leftrightarrow R$ можно доказать, если ввести свойство ($E0\check{}$) для евклидовых функций Грина. В этом разделе мы покажем, как обойтнсь без свойства ($E0\check{}$) и без $|\cdot|\check{}$-норм.

Говорят, что последовательность $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ положительных чисел *растет факториально*, если существуют такие константы α н β, что для всех $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\sigma_n \leqslant \alpha\,(n!)^{\beta}.$$

Определим теперь то, что мы называем *условием линейного роста* для евклидовых функций Грина.

$$(E0')\quad \begin{cases} \mathfrak{S}_0 = 1,\ \mathfrak{S}_n \in \mathcal{S}'_0(\mathbb{R}^{4n}) \text{ и существуют } s \in \mathbb{Z}_+ \\ \text{и растущая факториально последователь-} \\ \text{ность } \{\sigma_n\}, \text{ такие, что} \\ \qquad |\mathfrak{S}_n(f)| \leqslant \sigma_n |f|_{n\cdot s} \qquad (4.1) \\ \text{для всех } n \in \mathbb{Z}_+,\ f \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{4n}). \end{cases}$$

Несколько более сильным является следующее условие:

$$(E0'')\quad \begin{cases} \mathfrak{S}_0 = 1,\ \mathfrak{S}_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n}) \text{ для всех } n \in \mathbb{Z}_+, \\ \text{и существуют } s \in \mathbb{Z}_+ \text{ и факториально} \\ \text{растущая последовательность } \{\sigma_n\}, \\ \text{такие, что} \\ \qquad |\mathfrak{S}_n(f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_n)| \leqslant \sigma_n \prod_{i=1}^{n} |f_i|_s \qquad (4.2) \\ \text{для всех } n \in \mathbb{Z}_+,\ f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4). \end{cases}$$

Основной результат этой работы заключается в следующей теореме.

Теорема E' (или E'') $\to R'$. a) *Последовательность распределений $\{\mathfrak{S}_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям* ($E0'$) (*или* ($E0''$)) *и* ($E1$) — ($E4$), *является последовательностью евклидовых функций Грина однозначно определенного вайтманова квантового поля.*

b) *Вайтмановы распределения $\{\mathfrak{W}_n\}$ в этой теории удовлетворяют всем аксиомам Вайтмана и, кроме того, условию*

$$(R0')\quad \begin{cases} \textit{существуют } w \in \mathbb{Z}_+ \textit{ и последовательность} \\ \{\omega_n\},\ 0 < \omega_n \leqslant \alpha\beta^{n^2} \textit{ для некоторых констант } \alpha,\ \beta \\ \textit{и для всех } n \in \mathbb{Z}_+, \textit{ такие, что} \\ \qquad |\mathfrak{W}_n(f)| \leqslant \omega_n |f|_{n\cdot w} \qquad (4.3) \\ \textit{для всех } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n}). \end{cases}$$

Замечания. 1. Поскольку из условия ($E0''$) вытекает условие ($E0'$) (см. приложение), достаточно проверить, что $E' \to R'$. Однако стоит отметить, что прямое доказательство теоремы $E'' \to R'$ было бы значительно проще, чем приведенное здесь доказательство теоремы $E' \to R'$. Мы поясним это во введении к § V. Очевидно, что условие ($E0''$) не вытекает из ($E0'$). Не вдаваясь в детали, легко заметить, что, в то время как в условии ($E0''$) требуется, чтобы функции $\mathfrak{S}_n(x_1 \ldots x_n)$ росли не быстрее, чем $\prod_i (1+x_i^2)^{s/2}$, при больших значениях аргументов, в условии ($E0'$) допускается рост порядка $\left(1+\sum_i x_i^2\right)^{ns/2}$ и аналогичное различие имеет место для особенностей функций $\mathfrak{S}_n$ в точках совмещения аргументов.

2. В конструктивной квантовой теории поля условие ($E0''$) выполняется для всех моделей, для которых до сих пор были проверены условия ($E0$) — ($E4$); см. Глимм, Джаффе и Спенсер [8, замечание после теоремы 1.1.8] и Фрёлих [3]. Кроме того, разумно ожидать, что условие ($E0''$) справедливо для моделей, которые могут существовать в реальном мире (с четырехмерным пространством-временем): недавний результат Глимма и Джаффе [7] показывает, что в модели $(\varphi^4)_4$ условие ($E0''$), по существу, должно следовать из того, что $\mathfrak{S}_2$ — элемент пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^8)$.

3. Наши методы не позволяют установить факториальный рост ω_n в условии ($R0'$). С другой стороны, из условий ($R0'$), ($R1$) — ($R5$) в предположении факториального роста ω_n можно вывести условия ($E0'$), ($E1$) — ($E4$), но для σ_n получаются оценки вида $\alpha\beta^{n^2}$. Этот вывод легко получается, если сначала применить оценки (2.4) к h_ξ в соотношении (3.4), а затем воспользоваться рассуждениями из работы [12] вместе с более тонким вариантом леммы 2.2 из [12]. Если бы не было препятствий для доказательства факториального роста оценок σ_n и ω_n, можно было бы снова доказать теорему эквивалентности $E' \leftrightarrow R'$.

IV.2. Доказательство теоремы $E' \to R'$. В этом разделе мы объясняем, как по заданной совокупности евклидовых функций Грина, удовлетворяющих условиям ($E0'$), ($E1$) (евклидова инвариантность) и ($E2$) (положительная определенность), восстановить вайтмановы распределения, и проверяем свойство ($R0'$). Остальные аксиомы Вайтмана можно получить так же, как в [12, § 4.2 — 4.5]. Теоремы, которые формулируются ниже, будут доказаны в последующих разделах.

Существование вайтмановых распределений вытекает из индуктивного построения аналитического продолжения евклидовых функций Грина и оценок для этих аналитических продолжений. Мы предполагаем, что задана последовательность евклидовых функций Грина $\{\mathfrak{S}_n\}$, удовлетворяющих условиям ($E0'$), ($E1$) и ($E2$). Функции Грина, выраженные с помощью разностей переменных, мы обозначаем через S_{n-1}. Исходный шаг нашего индуктивного процесса состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 4.1. (A_0) *Вещественная аналитичность: существуют функции $S_k(\underline{\zeta}) = S_k(\underline{\xi} + i\underline{\eta})$, аналитические в некоторой комплексной окрестности множества $\mathbb{R}_+^{4k}$, такие, что для всех $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^{4k})$*

$$S_k(f) = \int S_k(\underline{\xi})\, f(\underline{\xi})\, d^{4k}\xi. \tag{4.4}$$

(TE_0) *Оценка умеренного роста: функции $S_k(\underline{\xi})$ удовлетворяют неравенствам*

$$| S_k(\underline{\xi}) | \leqslant$$
$$\leqslant \tau_k \left[\left(1 + \max_{1 \leqslant j \leqslant k} |\vec{\xi}_j| \right) \left(1 + \sum_{j=1}^{k} \xi_j^0 \right) \left(1 + \sum_{j=1}^{k} (\xi_j^0)^{-1} \right) \right]^{kt} \tag{4.5}$$

для некоторой факториально растущей числовой последовательности τ_k, некоторого целого положительного t (не зависящего от k) и всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\underline{\xi} \in \mathbb{R}_+^{4k}$.

На r-м шаге индукции мы строим открытые подмножества $C_k^{(r)}$ множества $\mathbb{C}_+^k$ и доказываем следующую теорему.

Теорема 4.2. (A_r) *При фиксированном векторе $\vec{\underline{\xi}} \equiv (\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_k)$ функции $S_k(\underline{\xi}^0 | \vec{\underline{\xi}}) \equiv S_k(\underline{\xi})$ обладают аналитическим продолжением $S_k(\underline{\zeta}^0 | \vec{\underline{\xi}})$ в область $\underline{\zeta}^0 = \underline{\xi}^0 + i\underline{\eta}^0 \in C_k^{(r)}$. Функции $S_k(\underline{\zeta}^0 | \vec{\underline{\xi}})$ непрерывны по переменным $\vec{\underline{\xi}}$.*

(TE_r) *Если $\underline{\zeta}^0 \in C_k^{(r)}$ и $\vec{\underline{\xi}} \in \mathbb{R}^{3k}$, то функции $S_k(\underline{\zeta}^0 | \vec{\underline{\xi}})$ удовлетворяют неравенствам*

$$| S_k(\underline{\zeta}^0 | \vec{\underline{\xi}}) | \leqslant$$
$$\leqslant c_k \left[(1 + \max_j |\vec{\xi}_j|) \left(1 + \sum_j |\zeta_j^0| \right) \left(1 + \sum_j (\operatorname{Re} \zeta_j^0)^{-1} \right) \right]^{kt'} \tag{4.6}$$

для некоторой числовой последовательности c_k, такой, что $c_k \leqslant \alpha\beta^{k^2}$ при некоторых $\alpha, \beta > 0$, некоторого целого положительного t', не зависящего от k и r, и для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Подмножества $C_k^{(r)}$ образуют возрастающую последовательность: $C_k^{(r)} \subset C_k^{(r+1)}$; $C_k^{(0)}$ является просто k-кратным произведением положительной действительной полуоси на себя и, что наиболее важно, объединение $\bigcup_r C_k^{(r)}$ всех этих подмножеств совпадает с множеством $\mathbb{C}_+^k$. Заметим, между прочим, что условие линейного роста (4.2) требуется только для оценки в (TE_r). Для справедливости других результатов достаточно, чтобы выполнялось первоначальное условие умеренного роста ($E0$).

Окончательный результат нашего индуктивного построения содержится в следующей теореме.

Теорема 4.3. *Существуют функции* $S_k(\underline{\zeta}^0 \,|\, \vec{\underline{\xi}})$, *где* $\underline{\zeta}^0 \in \mathbb{C}_+^k$ *и* $\vec{\underline{\xi}} \in \mathbb{R}^{3k}$, *аналитические по переменным* $\underline{\zeta}^0$, *непрерывные по переменным* $\vec{\underline{\xi}}$ *и удовлетворяющие условиям* (4.4) *и* (4.6).

Обычным путем (см. Владимиров [20, стр. 275 и след.]) из теоремы 4.3 выводим, что существуют однозначно определенные распределения $\widehat{W}_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4k})$ с носителем в $\overline{\mathbb{R}_+^{4k}}$, такие, что S_k являются преобразованиями Фурье — Лапласа этих распределений:

$$S_k(\underline{\zeta}^0 \,|\, \vec{\underline{\xi}}) = \int \widehat{W}_k(\underline{q}) \exp\left[-\sum_{j=1}^{k} (\zeta_j^0 q_j^0 - i\vec{\xi}_j \vec{q}_j)\right] d^{4k}q.$$

Точно так же, как в работе [12], мы заключаем, что $\widehat{W}_k$ являются преобразованиями Фурье вайтмановых распределений W_k, выраженных с помощью разностей переменных.

Более того, используя снова соотношение (4.6), находим, что при $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4k})$ величины

$$\begin{aligned} W_k(h) &\equiv \int W_k(\underline{\xi})\, h(\underline{\xi})\, d^{4k}\xi = \\ &= \lim_{\eta_i^0 \to +0} \int S_k(\eta^0 + i\underline{\xi}^0 \,|\, \vec{\underline{\xi}})\, h(\underline{\xi})\, d^{4k}\xi \end{aligned}$$

удовлетворяют неравенствам

$$|W_k(h)| \leqslant w_k' \,|\, h\,|_{kt''} \tag{4.7}$$

для некоторой последовательности $w_k' \leqslant \alpha' (\beta')^{k^2}$ и $t'' = \frac{3t}{2} + 5$; см. Владимиров [20, стр. 275, соотношение (14)].

Остается вывести условие ($R0'$) из неравенств (4.7). Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$ и $h_{x_1}(\underline{\xi}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $\xi_k = x_{k+1} - x_k$ при $k = 1, \ldots, n-1$. Тогда

$$|\mathfrak{W}_n(f)| = \left| \int W_{n-1}(h_{x_1})\, d^4x_1 \right| \leqslant w_{n-1}' \int |h_{x_1}|_{kt''}\, d^4x_1 \leqslant \omega_n |f|_{kt'''}$$

для некоторой новой последовательности $\omega_n \leqslant \alpha'' (\beta'')^{n^2}$ и $t''' = t'' + 4$. Тем самым наше доказательство теоремы $E' \to R'$ завершено.

В остальных разделах мы подробно объясняем индуктивное построение и доказываем теоремы 4.1 и 4.2.

V. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

В этом разделе мы строим аналитическое продолжение евклидовых функций Грина на «действительное время» и доказываем утверждение (A_r) для $r=0, 1, 2, \ldots$. При этом условие линейного роста $(E0')$ не используется; здесь мы предполагаем только, что выполнены условия $(E0)$, $(E1)$ (инвариантность) и $(E2)$ (положительная определенность).

Как мы видели в п. IV. 2, нужно получить аналитическое продолжение $S_k(\underline{\xi}) \equiv S_k(\underline{\xi}^0 \mid \underline{\vec{\xi}})$ только по «временно́й переменной» $\underline{\xi}^0$; «пространственные переменные» $\underline{\vec{\xi}}$ играют роль параметров. При строгом подходе существуют два различных способа обращения с пространственными переменными.

Метод А. Всюду рассматриваем пространственные переменные как аргументы распределений. Точнее, для $f_{ik} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ и $\underline{f}^n = (f_{1n}, \ldots, f_{nn})$ положим

$$S_{n-1}(\underline{\xi}^0 \mid \underline{f}^n) = \int \mathfrak{S}_n(\underline{x}) f_{1n}(\vec{x}_1) \ldots f_{nn}(\vec{x}_n)\, d^{3n}x,$$

где $\xi_i^0 = x_{i+1}^0 - x_i^0$. Положительная определенность будет существенно использоваться в этом и в следующем разделе, поэтому функции $S_{n-1}(\underline{\xi}^0 \mid \underline{f})$ определены так, что они по-прежнему удовлетворяют условию положительной определенности:

$$\sum_{n, m} \int \bar{h}_n(x^0, \underline{\xi}^0) S_{n+m-1}(\overleftarrow{\underline{\xi}^0}, x^0 + x^{0'}, \underline{\xi}^{0'} \mid \theta \underline{f}^n \times \underline{f}^m) \times$$
$$\times h_m(x^{0'}, \underline{\xi}^{0'})\, dx^0\, dx^{0'}\, d\underline{\xi}^0\, d\underline{\xi}^{0'} \geqslant 0$$

для всех конечных последовательностей $\{h_0, h_1, \ldots\}$, $h_0 \in \mathbb{C}$, $h_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^n)$ и для всех $f_{ik} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, где через $\theta \underline{f}^n \times \underline{f}^m$ обозначена функция

$$\bar{f}_{nn}(\vec{x}_1) \ldots \bar{f}_{1n}(\vec{x}_n) f_{1m}(\vec{x}_{n+1}) \ldots f_{mm}(\vec{x}_{n+m})$$

и $\overleftarrow{\underline{\xi}^0} = (\xi_{n-1}^0, \xi_{n-2}^0, \ldots, \xi_1^0)$.

Метод В. Показывается, что $S_k(\underline{\xi}^0 \mid \underline{\vec{\xi}})$ можно рассматривать как непрерывные *функции* пространственных переменных; это делает осреднение излишним.

Схематическое изложение метода А приводится в работе [13]. Этот метод прост главным образом потому, что он позволяет восстанавливать вайтмановы распределения, *не* *пользуясь SO_4-инвариантностью* евклидовых функций Грина. Его недостаток в том, что для получения оценки умеренного роста для аналитического продолжения евклидовых функций Грина приходится ввести ограничение на распределения, несколько более сильное, чем $(E0')$, например $(E0'')$. Хотя условие $(E0'')$, по-видимому, выполняется для всех разумных моделей квантовой теории поля (см. Глимм и Джаффе [7]), с аксиоматической точки зрения предпочтительнее более слабое предположение $(E0')$: помимо того, что оно является более общим, оно не связано с оценкой особенностей при совпадении аргументов евклидовых функций Грина. Все это побуждает нас применить в этой работе более сложный метод B. Расширяя геометрическую аргументацию Глазера [6], мы используем SO_4-инвариантность для доказательства того, что S_k являются действительными аналитическими функциями от *всех* переменных. Затем мы получаем оценку умеренного роста для этих функций, основываясь на их поведении как распределений.

Сначала перечислим некоторые результаты работы [12] в несколько измененных обозначениях. На языке евклидовых функций Грина S_k, выраженных с помощью разностей переменных, условие положительной определенности $(E2)$ означает, что для всех конечных последовательностей $\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$, $f_0 \in \mathbb{C}$, $f_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_+^{4k})$,

$$\sum_{n,m} \int \bar{f}_n(x, \underline{\xi})\, S_{n+m-1}(-\overleftarrow{\theta\underline{\xi}}, -\theta x + x', \underline{\xi}') \times$$
$$\times f_m(x', \underline{\xi}')\, d^4x\, d^4x'\, d^{4(n-1)}\xi\, d^{4(m-1)}\xi' \equiv$$
$$\equiv \sum_{n,m} S_{n+m-1}(f_n, f_m) \geqslant 0, \qquad (5.1)$$

где $\underline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, $\xi' = (\xi'_1, \ldots, \xi'_{m-1})$, $\theta\underline{\xi} = (\theta\xi_1, \ldots, \theta\xi_{n-1})$, $\theta\xi_k = (-\xi_k^0, \vec{\xi}_k)$ и, наконец, $\overleftarrow{\underline{\xi}} = (\xi_{n-1}, \ldots, \xi_1)$.

Так же как в [12], построим гильбертово пространство $\mathscr{H}$, а затем $\mathscr{H}$-значные распределения $\Psi_n(x, \underline{\xi})$, такие, что при $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_+^{4n})$, $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_+^{4m})$

$$\Psi_n(f) = \int \Psi_n(x, \underline{\xi})\, f(x, \underline{\xi})\, d^4x\, d^{4(n-1)}\xi \in \mathscr{H}$$

со скалярным произведением

$$(\Psi_n(f), \Psi_m(g)) = S_{n+m-1}(f, g),$$

или, на языке распределений,

$$(\Psi_n(x, \underline{\xi}), \Psi_m(x', \underline{\xi}')) = S_{n+m-1}(-\overleftarrow{\theta\underline{\xi}}, -\theta x + x', \underline{\xi}'). \qquad (5.2)$$

Множество векторов $\Psi_n(f)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^{4n})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (при $n = 0$, разумеется, $f \in \mathbb{C}$), является тотальным в $\mathcal{H}$.

Используя рассуждения работы [12], можно построить слабо непрерывную полугруппу самосопряженных сжимающих операторов e^{-tH} на $\mathcal{H}$, $t \geqslant 0$, $H = H^* \geqslant 0$, таких, что (на языке распределений)

$$e^{-tH}\Psi_n(x, \underline{\xi}) = \Psi_n((x^0 + t, \vec{x}), \underline{\xi}). \tag{5.3}$$

Кроме того, если $\tau \in \mathbb{C}_+ = (0, \infty) + i\mathbb{R}$, то скалярное произведение

$$(\Psi_n(x, \underline{\xi}), e^{-\tau H}\Psi_m(x', \underline{\xi}')) = \\ = S_{n+m-1}(-\overleftarrow{\theta\underline{\xi}}, (x^0 + x^{0'} + \tau, -\vec{x} + \vec{x}'), \underline{\xi}') \tag{5.4}$$

определяет аналитическое продолжение функций S_{n+m-1} по n-й временно́й переменной: как показано в [12], правая часть тождества (5.4) является аналитической функцией от переменной $z = x^0 + x^{0'} + \tau$ в области $\operatorname{Re} z > 0$ и при этом остается распределением по всем остальным переменным. (Именно в этом месте в работе [12] использовалась неверная лемма 8.8 для построения продолжения сразу по всем временны́м переменным на k-кратное произведение $\mathbb{C}_+$.) Ниже мы воспользуемся тождествами (5.4) и условием евклидовой ковариантности ($E1$) для того, чтобы показать, что $S_k(\underline{\xi})$ является сужением некоторой функции $S_k(\underline{\zeta})$, аналитической в комплексной окрестности множества $\overline{\mathbb{R}_+^{4k}}$, т. е. для доказательства утверждения (A_0).

V.1. Вещественная аналитичность. Введем области

$$\mathbb{R}_+^4(\gamma) = \{x = (x^0, \vec{x}) \mid x^0 > |\vec{x}| \operatorname{tg} \gamma\}$$

и

$$\mathbb{R}_+^{4n}(\gamma) = \{\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_k \in \mathbb{R}_+^4(\gamma), \quad k = 1, \ldots, n\}$$

при условии, что $0 < \gamma < \pi/4$.

Очевидно, что $\mathbb{R}_+^4(\gamma)$ — наибольший конус в $\mathbb{R}_+^4$, который остается в $\mathbb{R}_+^4$ после произвольного поворота $\mathcal{R}(a, \varphi)$ вокруг оси a, проходящей через начало, на угол $\varphi \leqslant \gamma$. Евклидова ковариантность означает, что для любых $\underline{\xi} \in \mathbb{R}_+^{4k}(\gamma)$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant \gamma$

$$S_k(\mathcal{R}(a, \varphi)\underline{\xi}) = S_k(\underline{\xi}), \tag{5.5}$$

где $\mathcal{R}(a, \varphi)\underline{\xi} = (\mathcal{R}(a, \varphi)\xi_1, \ldots, \mathcal{R}(a, \varphi)\xi_k)$.

При фиксированном $\gamma \in (0, \pi/4)$ обозначим через $e_\mu = e_\mu(\gamma)$, $\mu = 1, \ldots, 4$, четыре линейно независимых вектора из конуса $\mathbb{R}^4_+(\pi/2 - \gamma)$, двойственного конусу $\mathbb{R}^4_+(\gamma)$. Тогда существуют такие повороты $\mathscr{R}_\mu = \mathscr{R}(a_\mu, \varphi_\mu)$, где $0 \leqslant \varphi_\mu < \gamma$, что

$$\mathscr{R}_\mu e_\mu = (1, 0, 0, 0). \tag{5.6}$$

Далее, зафиксируем $\overset{0}{\underline{\xi}} \in \mathbb{R}^{4k}_+(\gamma)$ и $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_k)$, где $u_i = (u_i^1, u_i^2, u_i^3, u_i^4)$, $u_i^\mu \in [0, \infty)$. Обозначим через $\underline{u} \cdot e$ вектор $\left(\sum_1^4 u_1^\mu e_\mu, \ldots, \sum_1^4 u_k^\mu e_\mu\right)$ в $\mathbb{R}^{4k}_+(\pi/2 - \gamma)$ и будем рассматривать

$$S_k(\overset{0}{\underline{\xi}} + \underline{u} \cdot e)$$

как распределение относительно переменных u_n^μ. Из условия (5.5) вытекает, что при $\mu = 1, \ldots, 4$

$$S_k(\overset{0}{\underline{\xi}} + \underline{u} \cdot e) = S_k(\mathscr{R}_\mu \overset{0}{\underline{\xi}} + u\mathscr{R}_\mu e), \tag{5.7}$$

где через $\mathscr{R}_\mu e$ обозначены четыре вектора $\mathscr{R}_\mu e_\nu$, $\nu = 1, \ldots, 4$. На основании равенств (5.4) и (5.6) правая часть соотношения (5.7) может быть аналитически продолжена на $\mathbb{C}_+$ по каждой переменной u_i^μ, $i = 1, \ldots, k$ (каждый раз по какой-нибудь одной), оставаясь при этом распределением по всем остальным переменным u. Теперь перейдем к переменным $s_i^\mu = \ln u_i^\mu$ и положим $\hat{T}(s_1^1, \ldots, s_k^4) = S_k(\overset{0}{\underline{\xi}} + \underline{u} \cdot e)$. Рассуждая так же, как выше, можно найти функции

$$T_{i\mu}(s_1^1, \ldots, r_i^\mu, \ldots, s_k^4),$$

которые являются аналитическими по переменным $r_i^\mu = s_i^\mu + it_i^\mu$, $|t_i^\mu| < \pi/2$, и принимают значения в пространстве $\mathscr{D}'$ как функции от переменных $s_1^1, \ldots, s_i^{\mu-1}, s_i^{\mu+1}, \ldots, s_k^4$. Все $T_{i\mu}$ являются аналитическими продолжениями одного и того же распределения $\hat{T}$. Из теоремы Мальгранжа — Цернера (см. Эпштейн [2]), в которой рассматривается вырожденный случай хорошо известной теоремы о трубчатых областях (см., например, Владимиров [20, стр. 322]), теперь следует, что существует функция

$$T(\underline{r}) = T(r_1^1, \ldots, r_k^4),$$

аналитическая в выпуклой оболочке $\mathcal{T}$ объединения всех плоских труб

$$\mathcal{T}_{i\mu}=\{r_1^1, \ldots, r_k^4 \,|\, |\operatorname{Im} r_i^\mu| < \pi/2, \ r_j^\nu = 0 \text{ при } \nu \neq \mu \text{ или } j \neq i\}$$

и такая, что T является продолжением всех $T_{i\mu}$. Находим, что $\mathcal{T}=\left\{r_1^1, \ldots, r_k^4 \,\middle|\, \sum\limits_{i,\mu} |\operatorname{Im} r_i^\mu| < \pi/2\right\}$. Возвращаясь снова к переменным u_i^μ и к S, мы видим, что тем самым доказано, что существует функция

$$S_k(\underline{\overset{0}{\xi}} + \underline{w} \cdot e), \tag{5.8}$$

аналитическая в

$$\left\{\underline{w} \,\middle|\, \sum_{i,\mu} |\arg w_i^\mu| < \pi/2\right\},$$

сужение которой на действительную область изменения аргументов является распределением $S_k(\underline{\overset{0}{\xi}} + \underline{u} \cdot e)$, в котором $\underline{\overset{0}{\xi}}$ и $e_1, \ldots, e_4$ играют роль фиксированных параметров. Отсюда немедленно вытекает утверждение (A_0).

Теперь мы выведем оценку размера полученной выше области аналитичности функции $S_k(\underline{\zeta})$, которая понадобится в § VI. 1, где мы устанавливаем оценку (TE_0).

Лемма 5.1. *При фиксированном значении* $\underline{\xi} \in \mathbb{R}_+^{4k}$ *функция* $S_k(\underline{\xi} + \underline{\zeta})$ *аналитична в полидиске*

$$\Gamma(\underline{\xi}) = \{\underline{\zeta} \,|\, |\zeta_i^\mu| \leqslant \rho \ \textit{при} \ 1 \leqslant i \leqslant k, \ 1 \leqslant \mu \leqslant 4\},$$

где

$$\rho = \frac{c}{k}\left(1 + \max_{1 \leqslant j \leqslant k} |\vec{\xi}_j|\right)^{-1} \left(1 + \sum_j (\xi_j^0)^{-1}\right)^{-2} \tag{5.9}$$

для некоторой постоянной $c \in (0, 1)$, *не зависящей от* k *и* $\underline{\xi}$.

Доказательство. При заданном $\underline{\xi}$ определим γ и $\underline{\overset{0}{\xi}}$ соотношениями

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \min_{1 \leqslant j \leqslant k} \xi_j^0 / |\vec{\xi}_j|,$$

$$\underline{\overset{0}{\xi}} = (\overset{0}{\xi}_1, \ldots, \overset{0}{\xi}_k), \qquad \overset{0}{\xi}_i = \left(\frac{1}{2}\xi_i^0, \vec{\xi}_i\right), \ 1 \leqslant i \leqslant k,$$

и выберем векторы $e_1, \ldots, e_4$ следующим образом:

$$\begin{aligned} e_1 &= (2\operatorname{ctg}\gamma, 1, 1, 1),\\ e_2 &= (2\operatorname{ctg}\gamma, 1, -1, -1),\\ e_3 &= (2\operatorname{ctg}\gamma, -1, 1, -1),\\ e_4 &= (2\operatorname{ctg}\gamma, -1, -1, 1). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Очевидно, что $0 < \gamma < \pi/4$, $\overset{0}{\underline{\xi}} \in \mathbb{R}_+^{4k}(\gamma)$, $e_\mu \in \mathbb{R}_+^{4k}(\pi/2 - \gamma)$ и векторы $e_1, \ldots, e_4$ линейно независимы. Из (5.11) вытекает, что

$$\begin{aligned} (1, 0, 0, 0) &= 2^{-3}\operatorname{tg}\gamma\,(e_1 + e_2 + e_3 + e_4),\\ (0, 1, 0, 0) &= 2^{-2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4),\\ (0, 0, 1, 0) &= 2^{-2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4),\\ (0, 0, 0, 1) &= 2^{-2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4) \end{aligned} \tag{5.11$'$}$$

и

$$\xi_i = \overset{0}{\xi}_i + 2^{-4}\xi_i^0\operatorname{tg}\gamma \cdot \sum_{\mu=1}^{4} e_\mu,$$

$$\begin{aligned} \xi_i + \zeta_i &= \overset{0}{\xi}_i + \sum_{\mu=1}^{4}\left(2^{-4}\xi_i^0\operatorname{tg}\gamma + 2^{-3}\operatorname{tg}\gamma\zeta_i^0 + 2^{-2}\sum_{r=1}^{4}\sigma_{r\mu}\zeta_i^r\right)e_\mu \equiv\\ &\equiv \overset{0}{\xi}_i + \sum_{\mu=1}^{4} w_i^\mu e_\mu, \end{aligned} \tag{5.12}$$

где величины $\sigma_{r\mu}$ прииимают значения $+1$ или -1 и могут быть найдены из соотношений (5.11)$'$. Из (5.8) следует, что функция $S_k(\underline{\xi} + \underline{\zeta})$ аналитична для тех значений $\underline{\zeta}$, которые удовлетворяют неравенству $\sum_{i,\mu}|\arg w_i^\mu| < \pi/2$. Поэтому достаточно предположить, что $|\arg w_i^\mu| < \pi/2^3k$ для всех i и μ, а это вытекает из неравенства

$$\frac{|\operatorname{Im} w_i^\mu|}{|\operatorname{Re} w_i^\mu|} < \frac{\pi}{2^3k}. \tag{5.13}$$

Из соотношеиий (5.12) можно найти w_i^μ как функции от ζ_i^μ; при этом (5.13) выполняется, если ζ_i^μ удовлетворяют неравенству

$$|\zeta_i^\mu| < \frac{\pi}{2^3k}\cdot 2^{-5}\xi_i^0\operatorname{tg}\gamma.$$

Из соотношений (5.10) вытекает, что $\operatorname{tg}\gamma < {}^1/_2\operatorname{tg}2\gamma = {}^1/_2\min\limits_{1\leqslant j\leqslant k}(\xi_j^0/|\vec{\xi}_j|)$ и, следовательно, функция $S_k(\underline{\xi} + \underline{\zeta})$ аналитична, если

$$|\zeta_i^\mu| < \frac{\pi}{2^9 \cdot k}\, \xi_i^0 \min_j \left(\xi_j^0 / |\vec{\xi}_j|\right). \tag{5.14}$$

Таким образом, лемма 5.1 доказана, причем $c = 2^{-9}\pi$.

V.2. К вещественному миру. Установив вещественную аналитичность функций $S_k(\underline{\xi})$, мы приступаем теперь к построению аналитического продолжения $S_k(\underline{\zeta}^0 | \vec{\underline{\xi}})$ функции S_k по временны́м переменным на n-кратное произведение $\mathbb{C}_+$. (Заметим, что переменные $i\zeta_n^0$ в действительности являются временны́ми, поэтому на границе $\mathbb{C}_+$ мы придем к *вещественному* времени.) Наш метод заключается в последовательной проверке следующих утверждений:

(A_N) Существуют аналитические продолжения $S_k(\underline{\zeta}^0 | \vec{\underline{\xi}})$ функций $S_k(\underline{\xi}^0 | \vec{\underline{\xi}})$, непрерывные по переменным $\vec{\underline{\xi}} \in \mathbb{R}^{3k}$ и аналитичные по переменным $\underline{\zeta}^0 \in C_k^{(N)} \subset \mathbb{C}_+^k$. Области $C_k^{(N)}$ при $N = 1, 2, \ldots$ являются оболочками голоморфности областей

$$\hat{C}_k^{(N)} \equiv \bigcup_{n=1}^{k} \{(\overleftarrow{\underline{\zeta}^0}, x^0 + x^{0'} + z, \underline{\zeta}^{0'}) \,|\, (x^0, \underline{\zeta}^0) \in D_n^{(N-1)}, (x^{0'}, \underline{\zeta}^{0'}) \in$$
$$\in D_{k-n+1}^{(N-1)}, z \in \mathbb{C}_+\}. \tag{5.15}$$

(P_N) Существуют $\mathscr{H}$-значные функции

$$\Psi_n(x^0, \underline{\zeta}^0 | \vec{x}, \vec{\underline{\xi}}),$$

определенные при $(\vec{x}, \vec{\underline{\xi}}) \in \mathbb{R}^{3n}$ и $(x^0, \underline{\zeta}^0) \in D_n^{(N)} \subset (0, \infty) \times \mathbb{C}_+^{n-1}$, где при $N = 1, 2, \ldots$

$$D_n^{(N)} = \{(x^0, \underline{\zeta}^0) \,|\, x^0 > 0, \quad (\overleftarrow{\underline{\zeta}^0}, 2x^0, \underline{\zeta}^0) \in C_{2n-1}^{(N)}\}, \tag{5.16}$$

скалярные произведения которых задаются равенствами

$$(\Psi_n(x^0, \underline{\zeta}^0 | \vec{x}, \vec{\xi}), \Psi_m(x^{0'}, \underline{\zeta}^{0'} | \vec{x}', \vec{\underline{\xi}}')) =$$
$$= S_{n+m-1}(\overleftarrow{\underline{\zeta}^0}, x^0 + x^{0'}, \underline{\zeta}^{0'} | -\overleftarrow{\vec{\underline{\xi}}}, -\vec{x} + \vec{x}', \vec{\underline{\xi}}). \tag{5.17}$$

Заметим, что переход от $N-1$ к N происходит в равенствах (5.15), где области $C_k^{(N)}$ определяются через области $D_n^{(N-1)}$. Позже мы покажем, что $\bigcup_N C_k^{(N)} = \mathbb{C}_+^k$, чем и завершим построеиие аналитического продолжения.

В оставшейся части этого раздела пространственные переменные рассматриваются только как параметры, поэтому мы их совсем исключим из наших формул. Непрерывность относительно этих переменных на каждом шаге будет очевидна. Кроме того, мы будем опускать верхний индекс 0, так что через $\underline{\zeta}$ теперь будет обозначаться вектор $(\zeta_1^0, \ldots, \zeta_k^0)$, и т. д.

Начиная рассуждения по индукции, положим

$$C_k^{(0)} = \{\underline{\zeta} \mid \arg \zeta_i = 0,\ i = 1, \ldots, k\}, \tag{5.18}$$

$$D_n^{(0)} = \{(x, \underline{\zeta}) \mid x > 0,\ \arg \zeta_i = 0,\ i = 1, \ldots, n-1\}. \tag{5.19}$$

Тогда утверждение (A_0) вытекает из результатов п. V. 1. Далее, (P_0) вытекает из (A_0) и соотношений (5.2). Заметим, что равенство (5.2) понималось в смысле распределений, в то время как в (P_0) утверждается, что оно выполняется и как равенство функций, т. е поточечно. Чтобы это доказать, применим правую и левую части соотношения (5.2) к двум функциям $f_\nu \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_+^{4n})$, $g_\nu \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_+^{4n})$, которые стремятся к δ-функциям при $\nu \to \infty$, и перейдем к пределу.

Предположим теперь, что (A_N) и (P_N) выполняются при $0 \leqslant N \leqslant M-1$, и докажем утверждения (A_M) и (P_M).

Согласно (P_{M-1}), можно положить

$$S_{n+m-1}(\underline{\zeta}, x + x' + \underline{z}, \underline{\zeta}') = (\Psi_n(x, \underline{\zeta}), e^{-zH}\Psi_m(x', \underline{\zeta}'))$$

при $(x, \underline{\zeta}) \in D_n^{(M-1)}$ и $(x', \underline{\zeta}') \in D_m^{(M-1)}$; тем самым определены аналитические продолжения функций S_k, $k = n+m-1$, на $\hat{C}_k^{(M)}$ и, следовательно, поскольку $C_k^{(M)}$ является оболочкой голоморфности для $\hat{C}_k^{(M)}$, определены аналитические продолжения S_k в $C_k^{(M)}$. Утверждение (A_M) доказано.

Далее, выберем точку $(\overset{0}{x}, \overset{0}{\underline{\zeta}}) \in D_n^{(M)}$, где $D_n^{(M)}$ — область, определенная соотношением (5.16), и заметим, что вместе с точкой $(\overset{0}{x}, \overset{0}{\underline{\zeta}})$ области $D_n^{(M)}$ прииадлежит целый конус точек вида $(x, \underline{\zeta})$, где $x > 0$, $|\arg \zeta_i| \leqslant |\arg \overset{0}{\zeta}_i|$, $i = 1, \ldots, n-1$. Поэтому мы можем найти такие точки $\xi_i \in (0, \infty)$ и числа $r_i > 0$, что весь полидиск

$$P = \{(x, \underline{\zeta}) \mid x = \overset{0}{x},\ |\zeta_i - \xi_i| < r_i,\ i = 1, \ldots, n-1\}$$

лежит в области $D_n^{(M)}$ и $(\overset{0}{x}, \overset{0}{\underline{\zeta}}) \in P$; см. рис. 1.

Введем теперь вектор $\Psi_n(\overset{0}{x}, \overset{0}{\underline{\zeta}})$ при помощи соотношения

$$\Psi_n(\overset{0}{x}, \overset{0}{\underline{\zeta}}) = \lim_{t\to\infty} \sum_{|\underline{\alpha}|\leqslant t} \frac{(\overset{0}{\underline{\zeta}} - \underline{\xi})^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!}\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \underline{\xi}^{\underline{\alpha}}}\Psi_n\right)(\overset{0}{x}, \underline{\xi}), \qquad (5.20)$$

где производные вектора Ψ_n берутся в смысле сильной топологии гильбертова пространства. Правая часть (5.20) сходится по норме, поскольку

$$\left\| \sum_{t<|\alpha|} \frac{(\overset{0}{\underline{\zeta}} - \underline{\xi})^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!}\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \underline{\xi}^{\underline{\alpha}}}\Psi_n\right)(\overset{0}{x}, \underline{\xi}) \right\|^2 =$$

$$= \sum_{\substack{t\leqslant|\alpha| \\ t<|\beta|}} \frac{(\overset{0}{\underline{\zeta}} - \underline{\xi})^{\underline{\alpha}}}{\underline{\alpha}!}\,\frac{(\overset{0}{\underline{\zeta}} - \underline{\xi})^{\underline{\beta}}}{\underline{\beta}!}\,\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \underline{\xi}^{\underline{\alpha}}}\,\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \underline{\xi}'^{\underline{\beta}}}\,S_{2n-1}(\overleftarrow{\underline{\xi}}, 2\overset{0}{x}, \underline{\xi}')\Big|_{\underline{\xi}=\underline{\xi}'}, \qquad (5.21)$$

а правая часть (5.21) в точности совпадает с остаточным членом разложения Тейлора функции $S_{2n-1}(\overleftarrow{\overset{0}{\underline{\zeta}}}, 2\overset{0}{x}, \overset{0}{\underline{\zeta}})$ в окрестности точки $(\overleftarrow{\underline{\xi}}, 2\overset{0}{x}, \underline{\xi})$ и поэтому стремится к нулю, когда

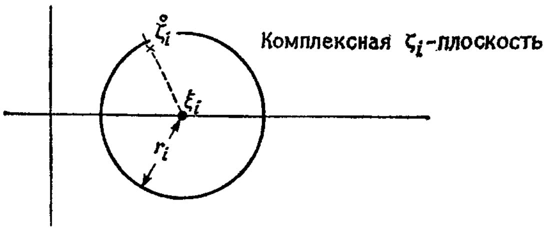


Рис. 1.

t стремится к бесконечности. Соотношение (5.17) является простым следствием равенства (5.20). Утверждение (P_M) доказано.

Наконец, докажем, что $\bigcup_N C_k^{(N)} = \mathbb{C}_+^k$. Этот факт вытекает из следующего более сильного результата, который понадобится нам в п. VI. 2.

Лемма 5.2. *Для всех* $N, n, k \in \mathbb{Z}_+$

(а) *область* $D_n^{(N)}$ *содержит множество*

$$\{(x, \underline{\zeta}) \mid x > 0,\ |\arg \zeta_i| < \rho(i, N),\ 1 \leqslant i \leqslant n-1\};$$

(b) *область* $C_k^{(N)}$ *содержит множество*

$$\{\underline{\zeta}\,|\,|\arg\zeta_i|<\rho(i,\,N),\ 1\leqslant i\leqslant k\},$$

где

$$\rho(i,\,N)=\frac{\pi}{2}\left[1-2^{-N}\sum_{t=0}^{i-1}\binom{N}{t}\right]$$

и

$$\sum_{t=0}^{i-1}\binom{N}{t}=2^N\quad\textit{при}\quad i>N.$$

Доказательство. По построению, преобразование $\zeta_i=e^{w_i}=e^{u_i+iv_i}$ переводит области $C_k^{(N)}$ и $D_n^{(N)}$ в трубчатые области. Пусть $c_k^{(N)}$ и $d_n^{(N)}$ — *замыкания оснований этих трубчатых областей*:

$$\begin{aligned} c_k^{(N)}&=\{\underline{v}\,|\,v_i=\operatorname{Im}w_i,\ 1\leqslant i\leqslant k,\ (e^{w_1},\,\ldots,\,e^{w_k})\in C_k^{(N)}\}^-;\\ d_n^{(N)}&=\{(0,\,\underline{v})\,|\,v_i=\operatorname{Im}w_i,\ 1\leqslant i\leqslant n-1,\\ &\qquad\qquad (e^{u_0},\,e^{w_1},\,\ldots,\,e^{w_{n-1}})\in D_n^{(N)}\}^-. \end{aligned}\tag{5.22}$$

Заметим, что $c_k^{(N)}$ и $d_n^{(N)}$ являются подмножествами соответственно множеств $[-\pi/2,\,\pi/2]^k$ и $[-\pi/2,\,\pi/2]^n$. Из определений (5.15), (5.16), (5.18), (5.19) и из теоремы о трубчатых областях вытекает, что при $r=1,\,2,\,\ldots$

$$\begin{aligned} c_k^{(N)}&=\text{выпуклая оболочка множества}\\ &\{\underline{v}\,|\,\underline{v}=(-\overleftarrow{\underline{v}}',\,v,\,\underline{v}''),\ \text{где}\ (0,\,\underline{v}')\in d_n^{(N-1)},\ (0,\,\underline{v}'')\in d_{k-n+1}^{(N-1)},\\ &\qquad\qquad |v|\leqslant\pi/2\}, \end{aligned}\tag{5.23}$$

$$d_n^{(N)}=\{(0,\,\underline{v})\,|\,(-\overleftarrow{\underline{v}},\,0,\,\underline{v})\in c_{2n-1}^{(N)}\}\tag{5.24}$$

и

$$c_k^{(0)}=\{(0,\,\ldots,\,0)\},\qquad d_n^{(0)}=\{(0,\,\ldots,\,0)\}.\tag{5.25}$$

Отметим, что все множества $c_k^{(N)}$ и $d_k^{(N)}$ выпуклы. Более того, если $(v_1,\,\ldots,\,v_k)\in c_k^{(N)}$ (или $d_k^{(N)}$), то весь гиперпрямоугольник с вершинами $(\pm v_1,\,\ldots,\,\pm v_k)$ также содержится в $c_k^{(N)}$ (соответственно в $d_k^{(N)}$).

Для доказательства леммы 5.2 покажем методом индукции, что точки $(0,\,v_1,\,\ldots,\,v_{n-1})$, где $|v_i|=\rho(i,\,N)$, принадлежат $d_n^{(N)}$. Тем самым будет доказано утверждение (a); часть (b) вытекает из утверждения (a) и равенства $S_k(\underline{\zeta})=(\Omega,\,\Psi_{k+1}(x,\,\underline{\zeta}))$.

Сначала построим функции h_i^N, $i=1, 2, \ldots, N=1, 2, \ldots$, такие, что для всех $s\geqslant 0$ и $t\geqslant 1$

$$w^N(s, t)\equiv(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{t}, h_1^N, h_2^N, \ldots, h_s^N)\in d_{t+s}^{(N)}. \tag{5.26}$$

Выберем $h_i^0=0$ для всех i. В силу условий (5.25) $w^0(s, t)\in d_{t+s}^{(0)}$. Предположим теперь, что для всех $i\geqslant 1$ и $N=1, \ldots, M$ уже построены h_i^N, для которых выполнены соотношения (5.26). Тогда в силу выбора (5.23) точки

$$(-h_s^M, \ldots, -h_2^M, -h_1^M, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2t-1}, \pi/2, h_1^M, \ldots, h_{s-1}^{M})$$

и

$$(-h_{s-1}^M, \ldots, -h_1^M, -\pi/2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2t-1}, h_1^M, h_2^M, \ldots, h_s^M)$$

принадлежат множеству $c_{2(s+t)-1}^{(M+1)}$. Поскольку это множество выпукло, ему принадлежит и точка

$$\Big(-\frac{1}{2}(h_s^M+h_{s-1}^M), \ldots, -\frac{1}{2}(h_2^M+h_1^M), -\frac{1}{2}\Big(h_1^M+\frac{\pi}{2}\Big), \underbrace{0, \ldots, 0}_{2t-1},$$
$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2}+h_1^M\Big), \frac{1}{2}(h_1^M+h_2^M), \ldots, \frac{1}{2}(h_{s-1}^M+h_s^M)\Big).$$

Это означает (в соответствии с условием (5.24)), что точки $w^{M+1}(s, t)$, определяемые равенством (5.26), при

$$\begin{aligned} h_i^0&=0, & i&=1, 2, \ldots, \\ h_1^{M+1}&=\frac{1}{2}\Big(h_1^M+\frac{\pi}{2}\Big), \\ h_i^{M+1}&=\frac{1}{2}(h_i^M+h_{i-1}^M), & i&=2, 3, \ldots, \end{aligned} \tag{5.27}$$

также принадлежат множеству $d_{t+s}^{(M+1)}$.

Равенства (5.27) примем в качестве индуктивного определения величин h_i^N. Простое вычисление показывает, что из этих равенств величины h_i^N могут быть получены в виде

$$h_i^N=\frac{\pi}{2}\left[1-2^{-N}\sum_{t=0}^{i-1}\binom{N}{t}\right]=\rho(i, N).$$

Тогда из определения (5.26) вытекает, что, в частности все точки

$$w^N(n-1, 1)=(0, h_1^N, \ldots, h_{n-1}^N)$$

принадлежат множеству $d_n^{(N)}$. Доказательство леммы 5.2 завершено.

Заметим для дальнейшего, что $\rho(i, N) \geqslant \frac{\pi}{2}(1-2^{-N/2}\gamma_i)$, где

$$\gamma_i = \max_{N \geqslant 1} 2^{-N/2} \sum_{t=0}^{i-1} \binom{N}{t}. \tag{5.28}$$

Таким образом, из части (b) леммы 5.2 вытекает

Следствие 5.3. *В множестве $C_k^{(N)}$ содержится множество*

$$\left\{ \underline{\zeta} \,|\, |\arg \zeta_i| < \max\left\{0, \frac{\pi}{2}(1-2^{-N/2}\gamma_i)\right\},\ 1 \leqslant i \leqslant k \right\}.$$

VI. ОЦЕНКА УМЕРЕННОГО РОСТА

В этом разделе мы выводим оценки (4.6) для аналитического продолжения $S_k(\underline{\zeta}^0 | \vec{\underline{\xi}})$ евклидовых функций Грина. Только на этой стадии рассуждений нам приходится использовать условие линейного роста. Отметим, что использование условия $(E0'')$ вместо $(E0')$ значительно упростило бы и укоротило наши рассуждения.

Сначала мы выведем из условия $(E0')$ оценку умеренного роста (4.5) для вещественно аналитических функций $S_k(\underline{\xi})$. Это наиболее сложная часть этого раздела; ей посвящается п. VI. 1. Оценка (4.6) для аналитического продолжения $S_k(\underline{\zeta}^0 | \vec{\underline{\xi}})$ будет доказана по индукции в п. VI. 2.

VI. 1. От распределений к функциям. На первый взгляд может показаться, что получение оценки типа (4.5) из условия $(E0')$ и из того факта, что функционалы $S_k(f)$ задаются посредством обычных интегралов Римана $\int S_k(\underline{\xi}) f(\underline{\xi})\, d\xi$, где $S_k(\underline{\xi}) \in C^\infty$, является задачей довольно тривиальной. Однако, как видно из следующего примера, для того, чтобы доказать утверждение (4.5), необходима более подробная информация относительно функций $S_k(\underline{\xi})$. Пусть $T(x) \in \underset{0}{C^\infty}$ — положительное приближение функции $T(x)$, которая определяется как e^x для $x \in [n, n+e^{-2n}]$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и 0 для остальных x. Тогда $\left| \int T(x) f(x)\, dx \right| \leqslant \sup_x |f(x)|$ для всех $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, но $T(x)$ не удовлетворяет полиномиальной оценке.

В п. V. 1 мы построили функцию $S_k(\underline{\xi}+\underline{\zeta})$, аналитическую в полидиске $\Gamma(\underline{\xi})=\left\{\underline{\zeta}\,\middle|\,|\zeta_i^{\mu}|<\rho\right\}$, где ρ — функция от $\underline{\xi}\in\mathbb{R}_+^{4k}$, см. (5.9). По теореме о среднем для гармонических функций (см., например, Стейн, Вейс [18])

$$S_k(\underline{\xi}+\underline{\zeta})=|\Omega_7|^{-k}\int\limits_{\Omega_7} S_k(\underline{\xi}+\underline{\zeta}+\underline{rz})\,d\Omega(\underline{z}), \tag{6.1}$$

где через Ω_7 обозначена единичная сфера в пространстве $\mathbb{C}^4$: $\Omega_7=\left\{z\in\mathbb{C}^4\,\middle|\,|z|^2=\sum\limits_{\mu=1}^{4}|z^{\mu}|^2=1\right\}$, а через $|\Omega_7|=\frac{2}{4!}\pi^4$ — площадь поверхности этой сферы; $d\Omega(\underline{z})=\prod\limits_{i=1}^{k}d\Omega(z_i)$, где $d\Omega(z_i)$ — элемент поверхности сферы Ω_7. Далее, $\underline{rz}=(r_1z_1,\ \ldots,\ r_kz_k)$, причем $r_i>0$ таковы, что $|\zeta_i|+r_i<\rho$. Здесь и дальше $\underline{\xi}$ и $\rho=\rho(\underline{\xi})$ *фиксированы*. Заметим, что ρ всегда меньше единицы. Пусть теперь $h(\cdot)$ — положительная C^{∞}-функция с носителем в $[^1/_2,\ 1]$, такая, что для некоторых $c>0$, $p>1$

$$|h|_n\leqslant c\,(n!)^p \quad \text{и} \quad \int h(r)\,r^7\,dr=1. \tag{6.2}$$

Такая функция h существует (для любого $p>1$) по теореме Карлемана — Мандельбройта — Островского; см., например, Мандельбройт [10]. [Выберем, например, $h(x)=\mathrm{const}\times\times\exp[-(x-{}^1/_2)^{-\beta}]\cdot\exp[-(1-x)^{-\beta}]$, где $\beta>1/(p-1)$.] Для $z\in\mathbb{C}^4$ положим

$$g_\rho(z)=|\Omega_7|^{-1/2}(8\rho^{-1})^8\,h(8\rho^{-1}|z|),$$
$$k_\rho(z)=\int g_\rho(z-z')\,g_\rho(z')\,d^8z',$$
$$k_\rho(z,\ y')=\int g_\rho(z-z')\,g_\rho(z')\,d^4x',$$

где $d^8z'\equiv d^4x'd^4y'$, $z'=x'+iy'$. Следовательно,

$$\operatorname{supp}k_\rho\in\{z\in\mathbb{C}^4\,|\,|z|<\rho/4\}$$

и (6.3)

$$\int k_\rho(z)\,d^8z=1.$$

Заметим, что k_ρ является функцией только от $|z|$. Поэтому, комбинируя соотношения (6.1) и (6.3) и вводя обозначение

$k_\rho(\underline{z}) = \prod\limits_i k_\rho(z_i)$, получаем, что при $|\zeta_i| < \rho/2$, $i = 1, \ldots, k$,

$$S_k(\underline{\xi} + \underline{\zeta}) = \int S_k(\underline{\xi} + \underline{\zeta} + \underline{z})\, k_\rho(\underline{z})\, d^{8k}z. \tag{6.4}$$

В соответствии с теоремой Фубини порядок интегрирования в правой части (6.4) произволен. Поэтому мы можем ввести величину

$$T_k(\underline{\xi} + \underline{\zeta}) = \int S_k(\underline{\xi} + \underline{\zeta} + \underline{x})\, k_\rho(\underline{x} + i\underline{y}, \underline{y}')\, d^{4k}x \tag{6.5}$$

и переписать равенство (6.4) в виде

$$S_k(\underline{\xi} + \underline{\zeta}) = \int T_k(\underline{\xi} + \underline{\zeta} + i\underline{y})\, d^{4k}y\, d^{4k}y'. \tag{6.6}$$

(Заметим, что через k_ρ величина T_k зависит также от $\underline{y}$ и $\underline{y}'$.) Наконец, принимая во внимание свойства носителей функций k_ρ и g_ρ, мы найдем, что интегрирование в правой части (6.6) распространяется только на область, где $|y_i| < \rho/4$, $|y_i'| < \rho/8$, и, таким образом,

$$|S_k(\underline{\xi})| \leqslant \sup_{\substack{|y_i| < \rho/4, \\ |y_i'| < \rho/8}} |T_k(\underline{\xi} + i\underline{y})|. \tag{6.7}$$

Остальная часть этого раздела посвящается выводу оценки для T_k, которая в совокупности с неравенством (6.7) даст нам возможность получить оценку умеренного роста (4.5).

Основная идея этого вывода проста. Как видно из определения (6.5), $T_k(\underline{\xi})$ является регуляризацией (распределения) S_k. Точно так же, как и S_k, T_k удовлетворяет некоторому свойству положительной определенности; другими словами, функция $T_k(\underline{\xi})$ может быть записана в виде скалярного произведения (Ψ_1, Ψ_2) двух векторов из пространства $\mathscr{H}$. Поэтому скалярное произведение $(\Psi_1, e^{-zH}\Psi_2)$ задает аналитическое продолжение функции $T_k(\underline{\xi})$ по *одной* переменной (так же, как в п. V. 1), ограниченное по абсолютной величине произведением $\|\Psi_1\| \cdot \|\Psi_2\|$. Оценки для $\|\Psi_i\|$ получаются из условия $(E0')$. Повторяя эту процедуру $4k$ раз, мы получим аналитические продолжения функции $T_k(\underline{\xi})$ по $4k$ линейно независимым направлениям. Затем в результате аналитического пополнения мы придем к функции $T_k(\underline{\xi} + \underline{\zeta})$, абсолютное значение которой можно оценить при помощи принципа максимума. После этого, учитывая неравенство (6.7), получим оценку (4.5) для $S_k(\underline{\xi})$.

Для заданного $\underline{\xi} \in \mathbb{R}_+^{4k}$ введем снова величины $\overset{0}{\underline{\xi}}$, γ, $\mathscr{R}_\mu \in SO_4$ и векторы $e_1, \ldots, e_4$ посредством равенств (5.6), (5.10), (5.11). Мы используем обозначения $g_\rho(\mathscr{R}_\mu x + iy) = g_\rho(x + iy)$, $k_\rho(\mathscr{R}_\mu x + iy, y') = k_\rho(x + iy, y')$ и пишем просто $g_\rho(x)$ и $k_\rho(x)$ вместо $g_\rho(x + iy)$ и $k_\rho(x + iy, y')$ соответственно. Из свойства евклидовой ковариантности и определения (6.5) вытекает, что для всех $u_i^\nu \geqslant 0$ и $1 \leqslant n \leqslant k$, $1 \leqslant \mu \leqslant 4$

$$\begin{aligned} T_k(\overset{0}{\underline{\xi}} + \underline{u}e) &= T_k(\mathscr{R}_\mu \overset{0}{\underline{\xi}} + \underline{u}\mathscr{R}_\mu e) = \\ &= \int S_k(\underline{\xi})\, k_\rho(\underline{\xi} - \mathscr{R}_\mu \overset{0}{\underline{\xi}} - \underline{u}\mathscr{R}_\mu e)\, d^{4k}\xi = \\ &= \int k_\rho(-\theta\overleftarrow{\underline{\xi}} - \underline{\lambda})\, g_\rho(-\theta x - \lambda_n) \cdot S_k(-\theta\overleftarrow{\underline{\xi}}, -\theta x + x', \underline{\xi}') \times \\ &\quad \times g_\rho(x')\, k_\rho(\underline{\xi}' - \underline{\lambda}')\, d^{4(n-1)}\xi\, d^{4(k-n)}\xi'\, d^4x\, d^4x'. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Здесь $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ и $\underline{\lambda}' = (\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_k)$, причем $\lambda_i = \mathscr{R}_\mu \overset{0}{\xi}_i + u_i \mathscr{R}_\mu e \in \mathbb{R}^4$ и $1 \leqslant n \leqslant k$. Для дальнейшего заметим, что

$$\begin{aligned} (\lambda_i)^2 &= \Big(\overset{0}{\xi}_i + \sum_\mu u_i^\mu e_\mu\Big)^2 \leqslant \\ &\leqslant 2\overset{0}{\xi}{}_i^2 + 2(4\operatorname{ctg}^2\gamma + 3)\Big(\sum_\mu u_i^\mu\Big)^2 \leqslant \\ &\text{в силу (5.11)} \\ &\leqslant \mathrm{const} \cdot \rho^{-2}\Big(\overset{0}{\xi}{}_i^2 + \Big(\sum_\mu u_i^\mu\Big)^2\Big), \end{aligned} \tag{6.9}$$

поскольку из соотношений (5.9) и (5.10) вытекает, что $\operatorname{ctg}\gamma \leqslant 2(1 + \operatorname{ctg} 2\gamma) \leqslant 2c\rho^{-1}$.

Соотношения (6.8) можно рассматривать как представление функции $T_\rho(\overset{0}{\underline{\xi}} + \underline{u}e)$ в виде скалярного произведения (Ψ_1, Ψ_2) двух векторов

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \int \Psi_n(x, \underline{\xi})\, g_\rho(-\theta x - \lambda_n) \prod_{i=1}^{n-1} k_\rho(-\theta\xi_{n-i} - \lambda_i)\, dx\, d\xi, \\ \Psi_2 &= \int \Psi_{k-n+1}(x', \underline{\xi}')\, g_\rho(x') \prod_{i=1}^{k-n} k_\rho(\xi_i' - \lambda_{n+i})\, dx'\, d\xi'. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Так же как в п. V. 1, находим аналитическое продолжение функции T_k по переменной u_n^μ, помещая $e^{-iv_n^\mu H}$ между Ψ_1 и Ψ_2:

для $\underline{w} \in \mathcal{P}_{n\mu}$, где

$$\mathcal{P}_{n\mu} \equiv \{\underline{w} \in \mathbb{C}^{4k} \mid |\arg w_n^\mu| < \pi/2, \arg w_i^\nu = 0 \text{ для } i \neq n \text{ или/и } \nu \neq \mu\},$$

$$T_k(\overset{0}{\underline{\xi}} + \underline{w}e) = \left(\Psi_1, e^{-iv_n^\mu H}\Psi_2\right) \text{ и} \tag{6.11}$$

$$|T_k(\overset{0}{\underline{\xi}} + \underline{w}e)| \leqslant \|\Psi_1\| \cdot \|\Psi_2\| \text{ равномерно по } v_n^\mu.$$

Мы отложим пока доказательство того, что из условия ($E0'$) вытекает, что для некоторой факториально растущей последовательности σ_n

$$\|\Psi_1\| \leqslant \sigma_n \rho^{-n(s+8)} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)^{ns/2} \tag{6.12}$$

и аналогичное неравенство с заменой n на $k-n+1$ и $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ на $\sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i^2$ имеет место для $\|\Psi_2\|$. Комбинируя неравенства (6.9) и (6.12) и используя их для оценки правой части неравенства (6.11), получаем, что для $\underline{w} \in \mathcal{P}_{n\mu}$

$$|T_k(\overset{0}{\underline{\xi}} + \underline{w}e)| \leqslant \sigma_k' \rho^{-2k(s+8)} \left(1 + \sum_i \overset{0}{\xi}{}_i^2\right)^{ks/2} \Big|1 + \sum_{i,\nu} w_i^\nu\Big|^{ks}, \tag{6.13}$$

где последовательность σ_k' снова растет факториально. Эта оценка равномерна по параметрам $\underline{y}$, $\underline{y}'$, от которых зависит и функция T_k. Для того чтобы получить последний множитель выражения, стоящего в правой части (6.13), мы воспользовались тем, что $1 + \sum u_i^\nu \leqslant \left|1 + \sum w_i^\nu\right|$. Теперь мы можем рассмотреть функции

$$R_k^{n\mu}(\underline{r}) \equiv \left(1 + \sum w_i^\nu\right)^{-ks} T_k(\overset{0}{\underline{\xi}} + \underline{w}e),$$

где $r_i^\nu = \ln w_i^\nu$, которые аналитичны в трубчатой области $\mathcal{T}_{n\mu} = \{\underline{r} \mid |\operatorname{Im} r_n^\mu| < \pi/2, \operatorname{Im} r_i^\nu = 0$ при $i \neq n$ или/и $\nu \neq \mu\}$ и модули которых равномерно ограничены в этой области величиной

$$\sigma_k' \rho^{-2k(s+8)} \left(1 + \sum_i \overset{0}{\xi}{}_i^2\right)^{ks/2}. \tag{6.14}$$

Если $\operatorname{Im} \underline{r} = 0$, то все функции $R_k^{n\mu}(\underline{r})$ равны между собой независимо от n и μ (а именно, они равны $\left(1 + \sum u_i^\nu\right)^{-ks} \times$ $\times T_k(\overset{0}{\underline{\xi}} + \underline{u}e)$). Следовательно, применима теорема Мальгранжа — Цернера и существует функция $R_k(\underline{r})$, аналитическая в выпуклой оболочке $\mathcal{T}$ области $\overset{0}{\mathcal{T}} = \bigcup_{n,\mu} \mathcal{T}_{n\mu}$, которая является продолжением всех функций $R_k^{n\mu}(\underline{r})$. Мы утверждаем, что $|R_k(\underline{r})|$ тоже ограничен величиной (6.14) для всех $\underline{r}$ из $\mathcal{T}$. Для доказательства допустим, что функция $R_k(\underline{r})$ в некоторой точке $\overset{0}{\underline{r}} \in \mathcal{T} \sim \overset{0}{\mathcal{T}}$ принимает значение A, которое она не принимает в области $\overset{0}{\mathcal{T}}$. Тогда функция $(R_k(\underline{r}) - A)^{-1}$ аналитична в открытой окрестности $\hat{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}$ области $\overset{0}{\mathcal{T}}$, но не аналитична во всей $\mathcal{T}$. Это невозможно, поскольку $\mathcal{T}$ является оболочкой голоморфности области $\hat{\mathcal{T}}$. Следовательно,

$$\sup_{\underline{r}\in\mathcal{T}} |R_k(\underline{r})| = \sup_{\underline{r}\in\overset{0}{\mathcal{T}}} |R_k(\underline{r})|, \tag{6.15}$$

и утверждение доказано. Функция

$$T_k(\overset{0}{\underline{\xi}} + \underline{we}) = \left(1 + \sum w_i^\nu\right)^{ks} R_k(\ln \underline{w})$$

аналитически продолжает функцию $T_k(\overset{0}{\xi} + \underline{u}e)$ в область $\mathcal{D} = \left\{\underline{w} \,\middle|\, \sum_{i,\nu} |\arg w_i^\nu| < \pi/2\right\}$ и для всех $\underline{w} \in \mathcal{D}$ удовлетворяет неравенству (6.13).

Теперь вернемся к неравенству (6.7) и воспользуемся соотношением (5.12): $\underline{\xi} + i\underline{y} = \overset{0}{\underline{\xi}} + \underline{we}$, где

$$w_i^\mu = 2^{-4}\xi_i^0 \operatorname{tg}\gamma + i\left(2^{-3}\operatorname{tg}\gamma\, y_i^0 + 2^{-2}\sum_{r=1}^{3} \sigma_{r\mu} y_i^r\right),$$

и если $\operatorname{tg}\gamma \leqslant 1$, $|y_i^0| < \rho/4$, $|y_i^r| < \rho/4$, то

$$|w_i^\mu| \leqslant (\xi_i^0 + \rho)/4.$$

Заметим, кроме того, что $(\overset{0}{\xi}_l)^2 = [(1/2)\overset{0}{\xi}_l]^2 + \vec{\xi}_l^{\,2} < (\xi_l)^2$. Следовательно, из неравенств (6.13), (6.7) и (5.9) получаем

$$|S_k(\xi)| \leqslant \sigma'_k \rho^{-2k(s+8)} \left(1 + \sum_l (\xi_l)^2\right)^{ks/2} \left(1 + \sum_l \xi_l^0 + k\rho\right)^{ks} \leqslant$$

$$\leqslant \tau_k \left[\left(1 + \max_{1\leqslant j\leqslant k} |\vec{\xi}_j|\right)\left(1 + \sum_1^k \xi_j^0\right)\left(1 + \sum_j^k (\xi_j^0)^{-1}\right)\right]^{kt} \tag{6.16}$$

для некоторой факториально растущей последовательности τ_k и $t=5(s+8)$. Неравенство (6.16) представляет собой оценку умеренного роста (4.5).

Остается получить оценки (6.12) для $\|\Psi_1\|$ и $\|\Psi_2\|$. Из соотношений (6.10) и (5.2) вытекает, что

$$\|\Psi_1\|^2=\int g_\rho(-\theta x-\lambda_n)\prod_{i=1}^{n-1} k_\rho(-\theta\xi_i-\lambda_i)\,S_{2n-1}(-\overleftarrow{\theta\underline{\xi}}, -\theta x+x', \underline{\xi}')\times$$

$$\times g_\rho(-\theta x'-\lambda_n)\prod_{i=1}^{n-1} k_\rho(-\theta\xi'_{n-i}-\lambda_i)\,dx\,dx'\,d\xi\,d\xi'=$$

$$=\int g_\rho(-x_n-\lambda_n)\prod_{i=1}^{n-1} k_\rho(x_{i+1}-x_i-\lambda_i)\,\mathfrak{S}_{2n}(x_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots, y_1)\times$$

$$\times g_\rho(-\theta y_n-\lambda_n)\prod_{i=1}^{n-1} k_\rho(-\theta(y_i-y_{i+1})-\lambda_i)\,dx\,dy\leqslant$$

$$\leqslant \sigma_{2n}\cdot \sup_{\substack{x,\, y,\\ |\alpha|+|\beta|\leqslant 2ns}}\Bigg|\Big(1+\sum_i x_i^2+\sum_i y_i^2\Big)^{ns} D_x^{\underline{\alpha}} g_\rho(x_n-\lambda_n)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n-1} k_\rho(x_i-x_{i+1}-\lambda_i)\cdot D_y^{\underline{\beta}} g_\rho(y_n-\lambda_n)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n-1} k_\rho(y_i-y_{i+1}-\lambda_i)\Bigg|. \qquad (6.17)$$

Согласно (6.3), функция, от которой берется верхняя грань в последнем неравенстве, является ненулевой только тогда, когда

$|x_n-\lambda_n|<\rho/8$, $|x_i-x_{i+1}-\lambda_i|<\rho/4$ при $i=1, \ldots, n-1$,

и аналогичные неравенства выполняются для y_i. Отсюда вытекает, что $|x_n|<|\lambda_n|+\rho/8$, $|x_i|<\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|+(n-1)\rho/4$ и (поскольку величина $(n-1)\rho/4$ всегда меньше 1)

$$1+\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\sum_{i=1}^{n} y_i^2\leqslant 8n^2\Big(1+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\Big). \qquad (6.18)$$

Кроме того, из условий (6.2), (6.3) вытекает, что для некоторого $c>0$

$$\sup|D^\alpha g_\rho|+\sup|D^\alpha k_\rho|<c(|\alpha|!)^p(8\rho^{-1})^{|\alpha|+8}.$$

Отсюда и из соотношений (6.17), (6.18) вытекает утверждение (6.12).

Тем самым вывод оценки умеренного роста (4.5) завершен.

VI. 2. Оценки для аналитического продолжения. В этом разделе мы доказываем справедливость оценок умеренного роста (TE_k) для $k \in \mathbb{Z}_+$. По существу, мы будем повторять рассуждения из п. V. 2, но в применении к оценкам аналитических функций $S_k(\underline{\zeta}^0 \mid \vec{\underline{\xi}})$. Нашим главным средством будет принцип максимума, см. (6.15). Для того чтобы устранить пространственные переменные $\vec{\underline{\xi}}$, рассмотрим банахово пространство $\mathscr{B}_{p,n}$ всех непрерывных функций на $\mathbb{R}^{3n}$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_p = \sup_{\vec{\underline{\xi}} \in \mathbb{R}^{3n}} \left|(1 + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\vec{\xi}_i|)^{-p} f(\vec{\underline{\xi}})\right| < \infty. \tag{6.19}$$

Тогда $S_k(\underline{\xi}^0 \mid \cdot)$ — вещественные аналитические функции переменных $\underline{\xi}^0$ при $\xi_i^0 > 0$ со значениями в $\mathscr{B}_{kt,k}$. В соответствии с условием (4.5)

$$\|S_k(\underline{\xi}^0 \mid \cdot)\|_{kt} \leqslant \alpha k^{\beta k}\left[\left(\frac{1+\sum \xi_j^0}{k}\right)\left(\frac{1+\sum (\xi_j^0)^{-1}}{k}\right)\right]^{kt} \tag{6.20}$$

для некоторых констант $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Вместо $S_k(\underline{\xi}^0 \mid \cdot)$ мы пишем просто $S_k(\underline{\xi}^0)$ или $S_k(\underline{\xi})$.

Допустим, что уже доказано, что условием $S_k(\underline{\zeta} \mid \cdot) \equiv S_k(\underline{\zeta})$ задается вещественная аналитическая функция из $C_k^{(N)}$ в $\mathscr{B}_{kt,k}$. Положим

$$S_{k,\varepsilon}(\underline{\zeta}) = \left(\frac{1+\sum(\zeta_i+\varepsilon)}{k}\right)^{-kt}(k^{-1}+\varepsilon^{-1})^{-kt} S_k(\underline{\zeta}+\underline{\varepsilon}), \tag{6.21}$$

где через $\underline{\varepsilon}$ обозначен вектор $(\varepsilon, \ldots, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Далее, пусть $k = n + m - 1$, $(x, \underline{\zeta}) \in D_n^{(N)}$; $(x, \underline{\zeta}') \in D_m^{(N)}$ и $z = x + iy \in \mathbb{C}_+$. Тогда из условия (P_N), соотношения (5.17) и определения (6.19) норм $\|\cdot\|_p$ немедленно вытекает неравенство Шварца

$$\|S_k(\overleftarrow{\underline{\zeta}}, 2x, \underline{\zeta}')\|_{kt} \leqslant$$

$$\leqslant (\|S_{2n-1}(\overleftarrow{\underline{\zeta}}, 2x, \underline{\zeta})\|_{(2n-1)t} \cdot \|S_{2m-1}(\overleftarrow{\underline{\zeta}}', 2x, \underline{\zeta}')\|_{(2m-1)t})^{1/2}. \tag{6.22}$$

Неравенство (6.22) справедливо также для $S_{\cdot,\varepsilon}$: при $k=n+m-1$

$$\|S_{k,\varepsilon}(\overleftarrow{\bar{\underline{\zeta}}}, 2z, \underline{\zeta}')\|_{kt} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\|S_{2n-1,\varepsilon}(\overleftarrow{\bar{\underline{\zeta}}}, 2x, \underline{\zeta})\|_{(2n-1)t} \cdot \|S_{2m-1,\varepsilon}(\overleftarrow{\bar{\underline{\zeta}}'}, 2x, \underline{\zeta}')\|_{(2m-1)t}\right)^{1/2}. \quad (6.23)$$

Для того чтобы из (6.22) получить (6.23), нужно только доказать, что при условиях $\operatorname{Re}\zeta_i > 0$, $\operatorname{Re}\zeta_i' > 0$, $x > 0$

$$\left|k^{-1}\left(1+\sum_1^{n-1}\bar{\zeta}_i+2z+\sum_1^{m-1}\zeta_i'\right)\right|^{2k} \geqslant$$

$$\geqslant \left[(2n-1)^{-1}\left(1+2\sum_1^{n-1}\operatorname{Re}\zeta_i+2x\right)\right]^{2n-1} \times$$

$$\times \left[(2m-1)^{-1}\left(1+2\sum_1^{m-1}\operatorname{Re}\zeta_i'+2x\right)\right]^{2m-1} \quad (6.24)$$

и

$$(k^{-1}+\varepsilon^{-1})^{2k} \geqslant [(2n-1)^{-1}+\varepsilon^{-1}]^{2n-1}\,[(2m-1)^{-1}+\varepsilon^{-1}]^{2m-1}. \quad (6.25)$$

Очевидно, неравенство (6.24) будет получено, если мы сможем показать, что

$$\left|k^{-1}\left(1+\sum_1^{n-1}\operatorname{Re}\zeta_i+2x+\sum_1^{m-1}\operatorname{Re}\zeta_i'\right)\right|^{2k} \geqslant$$

$$\geqslant \text{правой части неравенства (6.24)}. \quad (6.26)$$

Каждое из неравенств (6.25) и (6.26) можно записать в виде

$$\left(\frac{A+B}{r+s}\right)^{r+s} \geqslant \left(\frac{A}{r}\right)^r \left(\frac{B}{s}\right)^s \quad (6.27)$$

при положительных A и B; неравенство (6.27) вытекает из выпуклости функции $f(x)=\ln x$.

Далее, мы утверждаем, что если $\underline{\zeta} \in C_k^{(N)}$, то

$$\|S_{k,\varepsilon}(\underline{\zeta})\|_{kt} \leqslant \alpha k^{\beta k}\cdot 2^{\beta k N}, \quad (6.28)$$

где α и β — константы, входящие в неравенство (6.20). Соотношение (6.28) докажем по индукции. При $N=0$ оно вытекает из неравенства (6.20). Теперь предположим, что неравенство (6.28) уже доказано для $N=0, 1, \ldots, M$ и для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\varepsilon > 0$. Тогда если $(x, \underline{\zeta}) \in D_n^{(M)}$, $(x, \underline{\zeta}') \in D_m^{(M)}$, $z = x+iy \in \mathbb{C}_+$, $k=n+m-1$, то из неравенства (6.23) и предположения индукции вытекает, что

$$\|S_{k,\varepsilon}(\underline{\zeta},\ 2z,\ \underline{\zeta}')\|_{kt}\leqslant$$
$$\leqslant\left[\alpha(2n-1)^{\beta(2n-1)}2^{\beta(2n-1)M}\cdot\alpha(2m-1)^{\beta(2m-1)}2^{\beta(2m-1)M}\right]^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\alpha k^{\beta k}\cdot 2^{\beta k(M+1)}. \quad (6.29)$$

Поскольку $C_k^{(M+1)}$ является оболочкой голоморфности для области

$$\hat{C}_k^{(M+1)}=\bigcup_{n+m-1=k}\{(\overleftarrow{\underline{\zeta}},\ 2z,\ \underline{\zeta}')\,|\,(x,\ \underline{\zeta})\in D_n^{(M)},\ (x,\ \underline{\zeta}')\in D_m^{(M)},$$
$$z=x+iy\in\mathbb{C}_+\},$$

то для доказательства справедливости неравенства (6.28) при $N=M+1$ можно воспользоваться принципом максимума (см. (6.15) и, например, Владимиров [20, стр. 176]). Сначала мы проводим рассуждения поточечно, т. е. при фиксированных значениях пространственных переменных $\vec{\underline{\xi}}$, а затем переходим к нормам $\|\cdot\|_{kt}$.

Наш последний шаг состоит в том, чтобы исключить N из правой части неравенства (6.28). (Заметим, что правая часть (4.6) также не зависит от N.) При фиксированном $\underline{\zeta}\in\mathbb{C}_+^k$ мы хотим найти такое $N=N(\underline{\zeta})$, что $\underline{\zeta}\in C_k^{(N)}$. Выберем s так, чтобы $|\arg\zeta_r|\leqslant|\arg\zeta_s|$ при всех $1\leqslant r\leqslant k$. Тогда

$$|\arg\zeta_s|+\arcsin\frac{\operatorname{Re}\zeta_s}{|\zeta_s|}=\pi/2,$$

следовательно,

$$|\arg\zeta_s|\leqslant\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\operatorname{Re}\zeta_s}{\zeta_s}\cdot\frac{2}{\pi}\right).$$

Выберем целое $N=N(\underline{\zeta})$ так, чтобы

$$2^{-N/2}\gamma_k\leqslant\frac{\operatorname{Re}\zeta_s}{|\zeta_s|}\cdot\frac{2}{\pi}\leqslant 2^{-(N-1)/2}\gamma_k, \quad (6.30)$$

где γ_k определяется равенством (5.28). Тогда, согласно следствию 5.3, $\underline{\zeta}\in C_k^{(N)}$. Подставляя неравенство (6.30) в (6.28), получаем, что

$$\|S_{k,\varepsilon}(\underline{\zeta}^0)\|_{kt}\leqslant\alpha k^{\beta k}\left[\frac{\gamma_k\pi}{\sqrt{2}}\,\frac{|\zeta_s^0|}{\operatorname{Re}\zeta_s^0}\right]^{2\beta k}\leqslant$$
$$\leqslant\alpha k^{\beta k}\left[\frac{\gamma_k\pi}{\sqrt{2}}\right]^{2\beta k}\left[\left(1+\sum|\zeta_i^0|\right)\left(1+\sum(\operatorname{Re}\zeta_i^0)^{-1}\right)\right]^{2\beta k}.$$

Комбинируя этот результат с определением (6.21), выбирая $\varepsilon=\frac{1}{2}\min\limits_i\operatorname{Re}\zeta_i^0$ и затем освобождаясь от нормы $\|\cdot\|_{kt}$, получаем, что при $\underline{\zeta}^0 \in \mathbb{C}_+^k$, $\vec{\underline{\xi}} \in \mathbb{R}^{3k}$

$$\| S_k(\underline{\zeta}^0) \|_{kt} \leqslant \left| \frac{1+\sum \zeta_i^0}{k} \right|^{kt} (k^{-1}+\varepsilon^{-1})^{kt} \| S_{k,\varepsilon}(\underline{\zeta}^0 - \underline{\varepsilon}) \|_{kt}$$

и

$$| S_k(\zeta^0 | \vec{\underline{\xi}}) | \leqslant c_k (1 + \max_i |\vec{\xi}_i|)^{kt} \times$$
$$\times \left[\left(1+\sum |\zeta_i^0|\right)\left(1+\sum (\operatorname{Re} \xi_i^0)^{-1}\right)\right]^{(2\beta+t)k}, \qquad (6.31)$$

где $c_k = \alpha k^{(\beta - t)k} (\gamma_k \pi)^{2\beta k} 2^{(t-\beta)k}$. Из определения (5.28) легко выводится, что $\gamma_k < c^k$ для некоторого $c > 1$ и, следовательно, $c_k < ab^{k^2}$ для некоторых констант a, $b > 0$. Неравенство (6.31) представляет собой искомую оценку умеренного роста (4.6) при $t' = 2\beta + t$.

ПРИЛОЖЕНИЕ
(НАПИСАННОЕ СТЕФЕНОМ САММЕРСОМ)

Теорема. *Из условия* ($E0''$) *вытекает условие* ($E0'$).

Доказательство. Мы докажем эквивалентное утверждение, состоящее в том, что если $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и

$$| T(f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_n) | \leqslant \prod_{k=1}^{n} | f_k |_r \qquad (\text{П.1})$$

для всех $f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и некоторого фиксированного r, то

$$| T(g) | \leqslant c^n | g |_{n \cdot t} \qquad (\text{П.2})$$

для всех $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, некоторой фиксированной константы c, не зависящей от n и g, и для $t = 2r + 7$.

Воспользуемся эрмитовым разложением для T; см. Шварц [14]. (Эрмитово разложение можно применять и для доказательства теоремы о ядре; см. Саймон [17].) Запишем $H_{\underline{i}}$ в виде $H_{i_1} \otimes H_{i_2} \ldots \otimes H_{i_n}$, где H_i есть i-я функция Эрмита; получим

$$T(g) = \sum_{\underline{i}} \tau_{\underline{i}} \gamma_{\underline{i}},$$

где $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_n)$, $i_k \in \mathbb{Z}_+$ и $\tau_{\underline{i}} = T(H_{\underline{i}})$, $\gamma_{\underline{i}} = \int H_{\underline{i}}(x) g(x) d^n x$.

Положим $(1 + \underline{i}) \equiv \prod_{k=1}^{n} (1 + i_k)$. Тогда

$$| T(g) | \leqslant \sum_{\underline{i}} (1+\underline{i})^{-2} | (1+\underline{i})^{-s} \tau_{\underline{i}} | | (1+\underline{i})^{s+2} \gamma_{\underline{i}} | \leqslant$$
$$\leqslant c_1^n \sup_{\underline{i}} | (1+\underline{i})^{-s} \tau_{\underline{i}} | \cdot \sup | (1+\underline{i})^{s+2} \gamma_{\underline{i}} |, \qquad (\text{П.8})$$

где $c_1^n = \sum_{\underline{i}} (1+\underline{i})^{-2} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} (1+i)^{-2}\right)^n$. Для завершения доказательства необходимо определить s так, чтобы величина $|(1+\underline{i})^{-s} \tau_{\underline{i}}|$ была равномерно ограничена по $\underline{i}$.

Введем $a_k^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_k \mp \partial_k)$; получим $a_k^+ H_{i_k} = \sqrt{1+i_k}\, H_{i_k+1}$ и $a_k^- H_{i_k} = \sqrt{i_k}\, H_{i_k-1}$, $a_k^- a_k^+ H_{i_k} = (1+i_k) H_{i_k} = (1 + x_k^2 - \partial_k^2) H_{i_k}$. Далее (отбросим пока индекс k),

$$|H_i|_r = \sup_{\alpha \leqslant r} \left\| (1+x^2)^{r/2} \partial^\alpha H_i \right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \sup_{\substack{\alpha \leqslant r \\ \beta \leqslant r+1}} \left\| x^\beta \partial^\alpha H_i \right\|_2 \leqslant$$

(неравенство Соболева)

$$\leqslant c_3 \sup_{(2r+1 \text{ сомножителей } a^+ \text{ или } a^-)} \| a^{\pm} \ldots a^{\pm} H_i \|_2 \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \sqrt{(i+1)(i+2)\ldots(i+2r+1)} \leqslant c_4 (1+i)^{r+1}. \quad (\text{П.4})$$

Здесь и в дальнейшем через c_m обозначаются константы, которые зависят *только* от r. Из неравенств (П.1) и (П.4) получаем, что

$$|\tau_{\underline{i}}| = |T(H_{\underline{i}})| \leqslant \prod_k |H_{i_k}|_r \leqslant c_4^n (1+\underline{i})^{r+1}. \quad (\text{П.5})$$

Выбирая $s = r+1$, оценим второй сомножитель в неравенстве (П.3) через c_4^n. Окончательно

$$\left|(1+\underline{i})^{s+2} \gamma_{\underline{i}}\right| = \left| \int \left(\prod_k (1 + x_k^2 - \partial_k^2)^{s+2} H_{i_k}(x_k) \right) g(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_5^n \sup_{x \in R^4} \left| (1+x^2)^{n/2} \sum_{k=1}^{n} (1 + x_k^2 - \partial_k^2)^{s+2} g(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_6^n \sup_{\substack{x \in R^n \\ |\underline{\alpha}| \leqslant 2(s+2)\cdot n}} \left| (1+x^2)^{n(1/2+s+2)} D^{\underline{\alpha}} g(x) \right| \leqslant c_6^n |g|_{nl}, \quad (\text{П.6})$$

где $l = 2s+5 = 2r+7$ и

$$c_5^n = \left| \int (1+x^2)^{-n/2} H_{\underline{i}}(x)\, d^n x \right| \leqslant \| H_{\underline{i}} \|_2 \left(\int (1+x^2)^{-n} d^n x \right)^{1/2}.$$

Подставляя в это неравенство (П.5) и (П.6), получаем утверждение (П.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Constantinescu F., Thalheimer W., Euclidean Green's functions for Jaffe fields, *Commun. math. Phys.*, 38 (1974), 299—316.
2. Epstein H., Some analytic properties of scattering amplitudes in quantum field theory. In: Chretien M., Deser S. (Eds.), Brandeis lectures 1965, v. I, Gordon and Breach, New York, 1966. [Русский перевод в книге: Хепп К., Эпштейн А., Аналитические свойства амплитуд рассеяния в локальной квантовой теории поля, Атомиздат, М., 1971.]
3. Fröhlich J., Schwinger functions and their generating functionals, *Helv. Phys. Acta*, 47 (1974), 265.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции, вып. 2, Пространства основных и обобщенных функций, Физматгиз, М., 1959.
5. Glaser V., The positivity condition in momentum space, в сб. Проблемы теоретической физики, «Наука», М., 1969.
6. Glaser V., On the equivalence of the Euclidean and Wightman formulations of field theory, *Commun. math. Phys.*, **37** (1974), 257.
7. Glimm J., Jaffe A., A remark on the existence of φ_4^4, *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974), 440—441.
8. Glimm J., Jaffe A., Spencer T., The Wightman axioms and particle structure in the $P(\varphi)_2$ quantum field model, *Ann. Math.*, **100** (1974), 585.
9. Hörmander L., On the division of distributions by polynomials, *Arkiv Mat.*, **3** (1958), 555. [Русский перевод в сб. *Математика*, 3 : 5 (1959), 117—130.]
10. Mandelbrojt S., Séries adhérentes, régularisation des suites, applications, Gauthier-Villars, Paris, 1952. [Русский перевод: Мандельбройт С., Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, ИЛ, М., 1955.]
11. Nelson E., Construction of quantum fields from Markoff fields, *J. Funct. Anal.*, **12** (1973), 97.
12. Osterwalder K., Schrader R., Axioms for Euclidean Green's functions, *Commun. math. Phys.*, **31** (1973), 83.
13. Osterwalder K., Euclidean Green's functions and Wightman distributions. In: Velo G., Wightman A. S. (Eds.), Constructive quantum field theory, Lecture notes in physics, Springer, Berlin — Heidelberg — New York, 1973. [Русский перевод в сб. Конструктивная теория поля, «Мир», М., 1977.]
14. Schwartz L., Théorie des distributions, p. 260, Hermann, Paris, 1966.
15. Simon B., Positivity of the Hamiltonian semigroup and the construction of Euclidean region fields, *Helv. Phys. Acta*, **46** (1973), 686.
16. Simon B., Private communication.
17. Simon B., Distributions and their hermite expansions, *J. Math. Phys.*, **12** (1971), 140.
18. Stein M., Weiss G., Fourier analysis on Euclidean spaces, p. 38, Princeton University Press, 1971. [Русский перевод: Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, стр. 49, «Мир», М., 1974.]
19. Velo G., Wightman A. S. (Eds.), Constructive quantum field theory, Lecture notes in physics, Springer, Berlin — Heidelberg — New York, 1973. [Частичный русский перевод: Конструктивная теория поля, «Мир», М., 1977.]
20. Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, «Наука», М., 1964.
21. Whitney H., Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 63.

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В МОДЕЛЯХ φ_2^4 КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ[1]

Дж. Глимм[2]
Rockefeller University, New York, N. Y., USA

А. Джаффе[3] и *Т. Спенсер*[3]
Harvard University, Cambridge, Mass., USA

Резюме. Установлено существование фазовых переходов для квантовых полей в двумерном пространстве-времени с взаимодействием $\lambda\varphi^4 + m_0^2\varphi^2$ при $m_0^2/\lambda \ll 1$.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе мы приведем прямое доказательство существования фазовых переходов в квантовой теории поля. Мы рассматриваем здесь простейшее взаимодействие, для которого ожидается фазовый переход, а именно, возмущение свободного поля массы m_0 с помощью полинома

$$\lambda\varphi^4 + {}^1/_2 m_0^2\varphi^2, \quad m_0^2/\lambda \ll 1. \tag{1.1}$$

Приводимое здесь полное доказательство относится к случаю, когда размерность d пространства-времени равна 2. Эти же методы в принципе применимы к произвольной модели $P(\varphi)_2$ без обрезания с четным полиномом взаимодействия.

Для того чтобы определить взаимодействие (1.1) при $d = 2$, мы введем виково упорядочение. Обозначим через $:P:_{m_0}$ полином, полученный из P с помощью викова упорядочения относительно ковариационного оператора $\left(-\Delta + m_0^2\right)^{-1}$. Применяя операцию растяжения поля (scaling) и повторное виково упорядочение, мы придем к эквивалентной модели

---

[1]) James Glimm, Arthur Jaffe, Thomas Spencer, Phase Transitions for φ_2^4 Quantum Fields, *Communications in Mathematical Physics*, **45** (1975), 203—216. Представлено на Международном коллоквиуме по математическим методам квантовой теории поля, Марсель, 23—27 июня 1975 г.

[2]) При частичной финансовой поддержке Национального научного фонда по контракту MPS 74-13252.

[3]) При частичной финансовой поддержке Национального научного фонда по контракту MPS 73-05037.

с голой массой $O(\sigma^{-1})$ и взаимодействием следующего вида:

$$:P(\varphi):_{\sigma^{-1}} = :(\varphi^2 - \sigma^2)^2/\sigma^2:_{\sigma^{-1}}, \quad \sigma \gg 1, \tag{1.2}$$

которое мы и будем изучать; см. [13]. Наличие у полинома (1.2) двух различных минимумов, разделенных большим барьером, наводит на мысль о возможности фазовых переходов у поля с таким взаимодействием. Две чистые фазы — это основные состояния, локализованные (в φ-пространстве) вблизи двух минимумов $\varphi = \pm\sigma$.

В рассматриваемом нами случае полином $P(\varphi)$ инвариантен относительно преобразования симметрии $\varphi \to -\varphi$, которое переводит чистые фазы одну в другую. Отметим, однако, что вопрос о нарушении симметрии не исчерпывает всей проблемы существования фазовых переходов. Мы думаем, что в теории поля фазовые переходы существуют у некоторых моделей $P(\varphi)_2$, не обладающих никакой группой симметрии, как, например, в случае взаимодействия

$$\sigma^2 P(\varphi) = (\varphi^2 - \sigma^2)^4 - \varepsilon\varphi^3 - \mu\varphi$$

при $\sigma \gg 1$, $\varepsilon \ll 1$ и $\mu = \mu(\varepsilon, \sigma)$, точно так же как в статистической механике происходят фазовые переходы без нарушеиия симметрии [11].

Метод, который мы используем здесь для изучения взаимодействия (1.2), состоит в обобщении φ^j-оценок [3, 8, 2, 6, 5], с тем чтобы оценить возмущения мер, соответствующих основным состояниям поля с этим взаимодействием. Эти оценки вытекают из условия положительиой определенности в аксиоматике Остервальдера — Шрадера и условия евклидовой инвариантности модели в совокупности с оценками удельной энергии (энергии на единицу объема) в вакуумном состоянии, которые будут доказаны в § 2. Существование дальнего порядка (фазовые переходы и нарушение симметрии) доказывается с помощью одного из вариаитов рассуждения Пайерлса, обычно используемого в статистической механике. В качестве следствия мы получаем, что модель φ^4 с полиномом взаимодействия (1.2) и граничными условиями Дирихле имеет более одиого вакуума при $\sigma \gg 1$. Фазы разделяются добавлением внешиего поля $\mu\varphi$ к $P(\varphi)$ в (1.2).

В отдельной работе [7] [1]) мы выведем кластерное разложение для взаимодействия (1.2), обобщающее аналогичное разложение, полученное нами для случая малой константы

[1]) Следующая статья в этом сборнике. — *Прим. ред.*

связи. Кластерное разложение позволяет ввести граничные условия (отличные от нулевых условий Дирихле), которые и приводят к двум разным чистым фазам. Для каждой из чистых фаз мы получаем, исходя из кластерного разложения, полевую модель, удовлетворяющую аксиомам Вайтмана, с единственным вакуумом и щелью в спектре масс. Бесспорно, было бы интересно с помощью кластерного разложения выявить многочастичную структуру модели (1.2).

В отличие от нашего детального изучения, основанного на кластерном разложении, эта статья содержит простое и непосредственное доказательство существования фазовых переходов. Другой подход к проблеме фазовых переходов был анонсирован в [1], однако доказательство в печати не появилось.

Мы введем сейчас несколько обозначений и поясним рассуждение Пайерлса. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ — квадрат с центром в начале координат, и пусть Δ_Λ — оператор Лапласа с граничными условиями Дирихле на границе $\partial\Lambda$ квадрата Λ. Пусть $d\varphi_{\varepsilon,\Lambda}$ — гауссова мера в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ со средним нуль и ковариацией $(-\Delta_\Lambda+\varepsilon^2)^{-1}$. Пусть

$$V(\Lambda)=\int_\Lambda :P(\varphi(x)):dx, \tag{1.3}$$

где $:P:$ обозначает виково упорядочение по отношению к ковариации $(-\Delta_\Lambda+\varepsilon^2)^{-1}$. Положим

$$\langle A\rangle=\lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{R}^2}\frac{\int A(\varphi)\,e^{-V(\Lambda)}\,d\varphi_{\varepsilon,\Lambda}}{\int e^{-V(\Lambda)}\,d\varphi_{\varepsilon,\Lambda}}, \tag{1.4}$$

и чтобы взаимодействие P, определяемое формулой (1.2), было эквивалентно (1.1), выберем также $\varepsilon=\sigma^{-1}$.

В случае полинома P, заданного формулой (1.2), к которому добавлен линейный член, для функционалов A вида

$$A=\int\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_r)\,v(x_1,\ldots,x_r)\,dx,\quad v\in\mathcal{S},$$

предел при $\Lambda\nearrow\mathbb{R}^2$ существует. Он существует также для $A=\exp Q$, где Q определяется формулой (1.9), равно как и для

$$A=\prod\chi_\pm(\Delta_j),$$

которое определяется ниже,

Для каждого единичного квадрата решетки $\Delta = \Delta_j$ с центром в точке $j \in \mathbb{Z}^2$ определим усредненное поле

$$\varphi(\Delta) = \int_\Delta \varphi(x)\, dx.$$

По существу, $\varphi(\Delta)$ является низшим моментом поля в Δ, и поэтому следует ожидать, что величиной $\varphi(\Delta)$ характеризуются фазовые переходы в Δ. Введем функцию локализации усредненного поля

$$\chi_{(a,\, b)}(\Delta) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \varphi(\Delta) \in (a,\, b), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для разделения фаз и доказательства существования дальнего порядка мы будем использовать функции

$$\chi_+ = \chi_{(0,\, \infty)} \quad \text{и} \quad \chi_- = \chi_{(-\infty,\, 0)}.$$

Квадраты решетки Δ_i, Δ_j являются соседними, если $|i - j| = 1$. Пусть $\mathcal{N}$ — некоторый набор, состоящий из пар соседних квадратов, и $|\mathcal{N}|$ обозначает мощность $\mathcal{N}$. Допустим, что существует такая константа $K > 0$, что для всех $\mathcal{N}$

$$\Big\langle \prod_{(\Delta,\, \Delta') \in \mathcal{N}} \chi_-(\Delta)\, \chi_+(\Delta') \Big\rangle \leqslant e^{-K|\mathcal{N}|}. \tag{1.5}$$

Теорема 1.1. *Рассмотрим модель $P(\varphi)_2$ квантовой теории поля, определенную равенствами* (1.3) — (1.4). *Если* (1.5) *выполнено при достаточно большом K и всех $\mathcal{N}$, то для любых двух квадратов решетки Δ_i и Δ_j*

$$\langle \chi_+(\Delta_i)\, \chi_-(\Delta_j) \rangle \leqslant 1/8.$$

Следствие 1. *Если поле φ обладает симметрией $\varphi \to -\varphi$ (например, если полином P и граничные условия являются четными), то $\langle \chi_\pm(\Delta) \rangle = {}^1/_2$. В этом случае*

$$|\langle \chi_+(\Delta_i)\, \chi_-(\Delta_j) \rangle - \langle \chi_+(\Delta_i) \rangle \langle \chi_-(\Delta_j) \rangle| \geqslant 1/8,$$

что и означает существование дальнего порядка.

Для того чтобы установить нарушение симметрии, рассмотрим модель

$$:P(\varphi,\, \mu): = :(\varphi^2 - \sigma^2)^2/\sigma^2: - \mu\varphi = :P(\varphi): - \mu\varphi, \tag{1.6}$$

где $:P:$ задано равенством (1.2). Оценки в этой статье равномерны при $0 \leqslant \mu < \sigma^{-2}$. Мы получим тогда

Следствие 2. *Для взаимодействия, определенного равенствами* (1.3), (1.4) *и* (1.6),

$$\lim_{\mu \searrow 0} \langle \chi_+ (\Delta) \rangle_\mu > 0{,}8.$$

Доказательство. При $\mu \neq 0$, как вытекает из теоремы Ли — Янга [12], модель $:P(\varphi, \mu):$ обладает единственным вакуумом. Поэтому при $\operatorname{dist}(\Delta, \Delta') \to \infty$

$$\langle \chi_+ (\Delta) \chi_- (\Delta') \rangle_\mu \to \langle \chi_+ (\Delta) \rangle_\mu \langle \chi_- (\Delta') \rangle_\mu = \langle \chi_+ (\Delta) \rangle_\mu (1 - \langle \chi_+ (\Delta) \rangle_\mu),$$

где мы воспользовались кластерным свойством и трансляционной инвариантностью. Таким образом, по теореме 1.1

$$\langle \chi_+ (\Delta) \rangle_\mu (1 - \langle \chi_+ (\Delta) \rangle_\mu) \leqslant {}^1/_8,$$

что дает $\langle \chi_+ (\Delta) \rangle_\mu > 0{,}8$. Согласно неравенствам ФКЖ, среднее $\langle \chi_+ (\Delta) \rangle_\mu$ монотонно по μ при $\mu \searrow 0$. Поэтому $\lim\limits_{\mu \searrow 0} \langle \chi_+ (\Delta) \rangle_\mu$ существует и превосходит $0{,}8 > {}^1/_2$.

Теорема 1.2. *Пусть задана константа K, и пусть модель квантового поля φ^4 определяется равенствами* (1.3), (1.4) *и* (1.6). *Тогда при достаточно большом σ оценка* (1.5) *выполнена для любого набора $\mathcal{N}$ пар соседних квадратов.*

Доказательство теоремы 1.1. Пусть Λ_0 — квадрат с центром в начале координат, содержащий Δ_i, Δ_j и выбранный достаточно большим (в зависимости от i и j), так что

$$2 + \operatorname{dist}(\Delta_i, \Delta_j) \leqslant {}^1/_9 |\partial\Lambda_0| \leqslant \operatorname{dist}(\partial\Lambda_0, \{\Delta_i, \Delta_j\}). \tag{1.7}$$

Конфигурация в Λ_0 определяется как отображение множества единичных квадратов, принадлежащих Λ_0, в множество из двух элементов ± 1. При заданной конфигурации c подмножество $Y \subset c^{-1}(+1)$ называется $(+)$-связным, если любые два единичных квадрата из Y могут быть соединены с помощью пути, составленного из соседних квадратов, принадлежащих к Y. Определение $(-)$-связности аналогично. Каждая конфигурация приводит к разложению Λ_0 на $(+)$- и $(-)$-связные компоненты $\{X_k(c)\}$. Пусть X_i и X_j — компоненты, содержащие Δ_i и Δ_j соответственно. Пусть γ_i — внешний контур границы ∂X_i. С точки зрения используемой техники, γ_i удобно определить как границу той компоненты множества $\mathbb{R}^2 \setminus X_i$, которая содержит бесконечно удаленную точку. По меньшей мере один из контуров γ_i или γ_j должен отделять Δ_i от Δ_j. Предполагая, что таким контуром является γ_i, введем обозначение $\gamma = \gamma_i \setminus \partial\Lambda_0$, т. е. γ — часть γ_i, не содержащаяся в $\partial\Lambda_0$.

Обозначим через $|\gamma|$ длину γ; мы утверждаем, что

$$|\gamma_i| + \operatorname{dist}(\gamma, \{\Delta_i, \Delta_j\}) \leqslant 11|\gamma|. \tag{1.8}$$

Если $\gamma_i \cap \partial\Lambda_0 = \varnothing$, то доказывать нечего, поскольку контур наименьшей длины с данным радиусом ($\geqslant \operatorname{dist}(\gamma, \{\Delta_i, \Delta_j\})$) есть квадрат, и в этом случае его длина в восемь раз больше радиуса. Предположим теперь, что $\gamma_i \cap \partial\Lambda_0 \neq \varnothing$. Тогда, согласно (1.7),

$$\operatorname{dist}(\gamma, \{\Delta_i, \Delta_j\}) \leqslant {}^1/_2 \operatorname{dist}(\Delta_i, \Delta_j) \leqslant {}^1/_{18}|\partial\Lambda_0| \leqslant$$
$$\leqslant {}^1/_2 \operatorname{dist}(\partial\Lambda_0, \{\Delta_i, \Delta_j\}) \leqslant {}^1/_2|\gamma|.$$

Поэтому

$$|\gamma_i| + \operatorname{dist}(\gamma, \{\Delta_i, \Delta_j\}) \leqslant |\gamma| + |\partial\Lambda_0| + {}^1/_2|\gamma| \leqslant 11|\gamma|.$$

Так как

$$\prod_{\Delta \subset \Lambda_0} (\chi_+(\Delta) + \chi_-(\Delta)) = 1,$$

имеем

$$\langle \chi_+(\Delta_i)\chi_-(\Delta_j)\rangle = \sum_c{}' \langle \chi_+(\Delta_i)\chi_-(\Delta_j) \prod_\Delta \chi_{c(\Delta)}(\Delta)\rangle,$$

где $\sum_c{}'$ — сумма по конфигурациям c, для которых $c(\Delta_i) = 1$, $c(\Delta_j) = -1$, а в произведении $\prod_\Delta$ опущены множители, соответствующие Δ_i и Δ_j. Пусть $\gamma = \gamma(c)$ определено так же, как и выше, и $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\gamma)$ — множество пар соседних квадратов, примыкающих к границе γ. Тогда

$$\langle \chi_+(\Delta_i)\chi_-(\Delta_j)\rangle = \sum_\gamma \sum_{\{c:\, \gamma(c)=\gamma\}} \Big\langle \chi_+(\Delta_i)\chi_-(\Delta_j) \prod_\Delta \chi_{c(\Delta)}(\Delta)\Big\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \sum_\gamma \Big\langle \chi_+(\Delta_i)\chi_-(\Delta_j) \prod_{\Delta, \Delta' \in \mathcal{N}(\gamma)} \chi_+(\Delta)\chi_-(\Delta')\Big\rangle \leqslant \sum_\gamma e^{-K|\gamma|}.$$

Суммирование по γ происходит по контурам γ_i, окружающим Δ_i и отделяющим Δ_i от Δ_j. Существует не более $3^{|\gamma_i|}$ таких контуров длины $|\gamma_i|$ с фиксированной начальной точкой. В качестве начальной точки мы выберем точку контура γ_i, лежащую на линии (i, j) $(i, j \in \mathbb{Z}^2)$ и ближайшую к i. При фиксированном $|\gamma_i|$ ее можно выбрать не более чем $11|\gamma|$ способами ввиду неравенства (1.8). Поэтому $\langle \chi_+(\Delta_i)\chi_-(\Delta_j)\rangle < {}^1/_8$ для достаточно большого K.

Для того чтобы доказать теорему 1.2, изучим возмущения евклидова поля с рассматриваемым выше взаимодействием, которые задаются полиномами вида

$$Q(\xi, X) \equiv \sum_{\nu=1}^{4} Q_\nu(\xi^{(\nu)}, X), \tag{1.9}$$

где

$$Q_1(\xi^{(1)}, X) = \sigma^{-1} \sum_{\Delta_j \subset X} \xi_j^{(1)} \int_{\Delta_j} (:\varphi^2(x): - \sigma^2)\, dx, \tag{1.10}$$

$$Q_2(\xi^{(2)}, X) = (\ln \sigma)^{-1} \sum_{\Delta_j \subset X} \xi_j^{(2)} \int_{\Delta_j} :\varphi^2(x) - \varphi(\Delta_j)^2:\, dx, \tag{1.11}$$

$$Q_3(\xi^{(3)}, X) = \sum_{\substack{\Delta_i,\, \Delta_j \subset X \\ |i-j|=1}} \xi_{ij}^{(3)} (\varphi(\Delta_i) - \varphi(\Delta_j)), \tag{1.12}$$

$$Q_4(\xi^{(4)}, \varkappa, \varkappa', X) = \sigma^{-4} (\varkappa + 1)^{\delta} \sum_{\Delta_j \subset X} \xi_j^{(4)} \sum_{j=1}^{4} \int_{\Delta_i} :\varphi_\varkappa^j(x) - \varphi_{\varkappa'}^j(x):\, dx. \tag{1.13}$$

В формуле (1.13) $\varkappa$ и $\varkappa'$ обозначают параметры ультрафиолетового обрезания и при этом

$$0 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa' \leqslant \infty, \quad \varkappa < \infty.$$

При $\varkappa = 0$ викова степень $:\varphi_\varkappa^j: \equiv 0$. Пусть $|X|$ обозначает площадь подмножества $X \subset \mathbb{R}^2$. Нашу основную техническую оценку дает следующая теорема, которая будет доказана в § 3.

Теорема 1.3. *Существуют константа* K_1 *и число* $\delta > 0$, *такие, что для всех* Q, *определенных равенствами* (1.9)—(1.13), *где* $|\xi_\alpha^{(\beta)}| \leqslant 1$, *и для среднего* $\langle \cdot \rangle$, *задаваемого равенствами* (1.2)—(1.4) *и* (1.6) *с достаточно большим* σ, *справедливо неравенство*

$$|\langle e^{Q(\xi, X)} \rangle| \leqslant e^{K_1 (\log \sigma)^2 |X|}. \tag{1.14}$$

Доказательство теоремы 1.2 в предположении, что доказана теорема 1.3. Для каждой пары $(\Delta_i, \Delta_j) \in \mathscr{N}$ запишем произведение

$$\chi_+(\Delta_i)\chi_-(\Delta_j) = (\chi_{(0,\, \sigma/2)} + \chi_{(\sigma/2,\, \infty)})(\chi_{(-\infty,\, -\sigma/2)} + \chi_{(-\sigma/2,\, 0)})$$

как сумму четырех членов. Мы хотим при любом четном M оценить каждый из этих членов выражениями вида $[\sigma^{-1} Q_\nu(\varphi)]^M$, $\nu = 1, 2, 3$. Используя формулу Коши для производных по переменной ξ так же, как в [2], получим

$$\sigma^{-M} \langle Q_\nu^M \rangle = \sigma^{-M} \left[\frac{d}{d\xi^{(\nu)}} \right]^M \langle e^Q \rangle \leqslant \frac{M!\, \sigma^{-M}}{2\pi} \cdot \left| \oint \frac{\langle e^Q \rangle}{[\xi^\nu]^{M+1}}\, d\xi \right|. \tag{1.15}$$

В каждом случае мы выбираем $M = 2[\sigma/8]$ для того, чтобы получить наилучшую оценку. Здесь $[x]$ обозначает целую часть x.

Так, например, слагаемое $\chi_{(\sigma/2,\ \infty)}(\Delta_i)\chi_{(-\infty,\ -\sigma/2)}(\Delta_j)$ мы оцениваем сверху величиной

$$[\sigma^{-1}(\varphi(\Delta_i)-\varphi(\Delta_j))]^M=\sigma^{-M}\left[\frac{d}{d\xi_{ij}^{(3)}}\right]^M e^{Q_3}\bigg|_{\xi=0}.$$

Каждое из оставшихся трех слагаемых ограничено сверху либо $\chi_{(0,\ \sigma/2)}(\Delta_i)$, либо $\chi_{(-\sigma/2,\ 0)}(\Delta_j)$. Заметим, что на носителе функционала $\chi_{(0,\ \sigma/2)}(\Delta)$ выполнены неравенства

$$\chi_{(0,\ \sigma/2)}(\Delta)\leqslant 1\leqslant\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{\varphi(\Delta)}{\sigma}\right)^2\right]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{4}{3}\sigma^{-2}\left[\sigma^2-\int\limits_\Delta :\varphi(x)^2:\,dx\right]+$$
$$+\frac{4}{3}\sigma^{-2}\left[\int\limits_\Delta :\varphi(x)^2:\,dx-:\varphi(\Delta)^2:+O(\ln\sigma)\right].$$

Здесь $O(\ln\sigma)$ — константа, возникающая при виковом упорядочении. Поскольку $\sigma^{-2}O(\ln\sigma)\to 0$, то для достаточно больших σ либо

$$\chi_{(0,\ \sigma/2)}(\Delta_i)\leqslant\sigma^{-M}\left[\frac{4}{\sigma}\left(\int\limits_{\Delta_i} :\varphi(x)^2:\,dx-\sigma^2\right)\right]^M,$$

либо

$$\chi_{(0,\ \sigma/2)}(\Delta_i)\leqslant\sigma^{-2M}\left[4\int\limits_{\Delta_i} :\varphi(x)^2:\,dx-:\varphi(\Delta)^2:\right]^M.$$

Сомножитель $\chi_{(-\sigma/2,\ 0)}(\Delta_j)$ ограничен таким же выражением, в котором Δ_i заменено на Δ_j.

Теперь мы можем применить (1.15) к каждой паре квадратов. Так как отдельный квадрат Δ_i входит в Q_1 или Q_2 не более чем в четырех парах $(\Delta_i,\ \Delta_j)\in\mathcal{N}$, факториалы оцениваются выражениями

$$(4M!)^{|\mathcal{N}|/4}\leqslant([\sigma]!)^{|\mathcal{N}|/4}.$$

Теперь теорема вытекает из оценок

$$\left\langle\prod\chi_+(\Delta_i)\chi_-(\Delta_j)\right\rangle\leqslant e^{O(\log\sigma)^2|\mathcal{N}|}[[\sigma]!\,\sigma^{-\sigma}]^{|\mathcal{N}|/4}\leqslant$$
$$\leqslant e^{O(\log\sigma)^2|\mathcal{N}|}e^{-\sigma|\mathcal{N}|/4}.$$

В последней строке мы воспользовались формулой Стирлинга (для $n=[\sigma]$)

$$n!\leqslant(2\pi n)^{1/2}(n/e)^n.$$

Заметим, что слабо растущий множитель $\exp(O(\ln^2\sigma))$, приходящийся на один квадрат в оценке теоремы 1.3, подавляется быстро убывающим сомножителем $\exp[-O(\sigma)]$.

2. ОЦЕНКИ УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ВАКУУМНОГО СОСТОЯНИЯ

В этом параграфе мы оценим сверху и снизу удельную энергию вакуумного состояния. Верхняя оценка проще, и мы рассмотрим ее первой. Пусть $|\partial\Lambda|$ обозначает длину границы Λ.

Предложение 2.1. *Существует константа $O(1)$, не зависящая от σ и Λ и такая, что*

$$e^{-O(1)|\Lambda|} \leqslant \int e^{-V(\Lambda)}\, d\varphi_{\sigma^{-1},\,\Lambda} \tag{2.1}$$

для всех областей Λ, удовлетворяющих оценке $\sigma|\partial\Lambda| \leqslant |\Lambda|$.

Доказательство. В пространстве обобщенных функций φ рассмотрим преобразование сдвига на функцию $\sigma f(x)$, где

$$0 \leqslant f(x) = \sigma^{-2}\int\limits_{\Lambda}(-\Delta_\Lambda + \sigma^{-2})^{-1}(x, y)\, dy \leqslant 1.$$

(Заметим, что функция Грина в случае граничных условий Дирихле меньше функции Грина для свободных граничных условий [1]).) Ввиду выпуклости экспоненты,

$$\int e^{W}\, d\varphi \geqslant \exp\left(\int W\, d\varphi\right).$$

Следовательно, для упорядоченного по Вику полинома $W(\varphi)$ без свободного члена

$$\int W\, d\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \int e^{W}\, d\varphi \geqslant 1.$$

Таким образом, нам необходимо лишь вычислить константу в показателе, возникающую после сдвига. Цель преобразования сдвига состоит в уничтожении главного члена $O(\sigma^2|\Lambda|)$. При этом возникает константа, связанная с $V(\Lambda)$, и константа, связанная с преобразованием меры $d\varphi \to d(\varphi + \sigma f)$. Константа, связанная с взаимодействием $V(\Lambda)$, определенным формулой (1.3), равна

$$\int\limits_{\Lambda} P(\sigma f(x))\, dx = \sigma^2\int\limits_{\Lambda}(f(x)^2 - 1)^2\, dx \leqslant 2\sigma^2\int\limits_{\Lambda}(1 - f(x))\, dx =$$

$$= 2\int\limits_{\Lambda\times\Lambda}\left[(-\Delta + \sigma^{-2})^{-1} - (-\Delta_\Lambda + \sigma^{-2})^{-1}\right](x, y)\, dx\, dy +$$

$$+ 2\int\limits_{R^2\setminus\Lambda}\int\limits_{\Lambda}(-\Delta + \sigma^{-2})^{-1}(x, y)\, dx\, dy.$$

[1]) То есть функции Грина для оператора $(-\Delta + \sigma^{-2})$ во всем пространстве $\mathbb{R}^2$. — *Прим. перев.*

В первом слагаемом, поскольку операторы Δ и Δ_Λ совпадают везде, за исключением $\partial\Lambda$, ядро под знаком интеграла дает ненулевой вклад только вблизи границы $\partial\Lambda$. Приняв за единицу длины σ^{-1}, легко показать, что это слагаемое имеет порядок $O(\sigma|\partial\Lambda|)$. Во втором слагаемом интегрирование проводится по одной переменной внутри, а по другой — вне Λ. Вновь переходя к масштабу σ^{-1}, получаем, что второе слагаемое дает вклад порядка $O(\sigma|\partial\Lambda|)$. Таким образом,

$$\int_\Lambda P(\sigma f(x))\,dx \leqslant O(\sigma|\partial\Lambda|) \leqslant O(|\Lambda|),$$

где последнее неравенство следует из нашего предположения относительно области Λ.

Константа, связанная с преобразованием гауссовой меры $d\varphi_{\sigma^{-1},\Lambda}$, равна

$$\frac{1}{2}\sigma^2\langle f, (-\Delta_\Lambda + \sigma^{-2}) f\rangle = \frac{1}{2}\int_\Lambda f(x)\,dx = O(|\Lambda|),$$

и доказательство для случая $\mu = 0$ завершено. Для того чтобы закончить доказательство при $\mu > 0$, воспользуемся неравенством Гриффитса

$$\frac{d}{d\mu}\int e^{-[V(\Lambda)-\mu\varphi(\Lambda)]}\,d\varphi \geqslant 0.$$

Нижняя оценка удельной энергии вакуумного состояния связаиа с возмущенным евклидовым полем

$$\int e^{-[V(\Lambda)+Q(\xi,\Lambda)]}\,d\varphi_{\sigma^{-1},\Lambda}. \tag{2.2}$$

Эта оценка, которая медленно растет при $\sigma \to \infty$ (см. теорему 1.3), будет достаточна для целей настоящей работы. Оценки, равномерные относительно σ, можно найти в [7]. Согласно неравенству Шварца, достаточно отдельно доказать оценки

$$\int e^{4Q_\nu}\,d\varphi_{\sigma^{-1},\Lambda} \leqslant e^{O(1)|\Lambda|}, \qquad \nu = 2, 3, \tag{2.3}$$

$$\int e^{-2V(\Lambda)} e^{4Q_\nu}\,d\varphi_{\sigma^{-1},\Lambda} \leqslant e^{O(1)\ln^2\sigma|\Lambda|}, \qquad \nu = 1, 4. \tag{2.4}$$

Предложение 2.2. *Существует константа* $O(1)$, *не зависящая от* σ *и* Λ *и такая, что выполнены неравенства* (2.3) *и* (2.4).

Доказательство. Основной момент доказательства состоит в том, что подавляются низкочастотные моды полиномов Q_2 и Q_3 и тем самым в ковариацию вводится некоторая эффективная масса. С технической стороны, эта идея проявляется в следующем факте: оператор Лапласа в ограниченной области с граничными условиями Неймана имеет в качестве наименьшего собственного значения $\lambda_1 = 0$, а его следующее собственное значение λ_2 строго положительно. Собственное подпространство, отвечающее $\lambda_1 = 0$, есть пространство функций, постоянных на каждой связной компоненте рассматриваемой ограниченной области.

Мы запишем Q_3 (и $\xi^{(3)}$) в виде суммы четырех членов так, чтобы в каждом отдельном члене любой из квадратов решетки Δ участвовал только один раз в сумме по парам ближайших соседей. Согласно неравенству Гёльдера, достаточно рассмотреть один такой член. Пусть $\mathcal{N} = \{(\Delta, \Delta')\}$ — соответствующее множество пар соседних квадратов решетки, и пусть $\Delta_{\mathcal{N}}$ — оператор Лапласа с условиями Неймана на

$$\bigcup_{(\Delta,\, \Delta') \in \mathcal{N}} \partial (\Delta \cup \Delta').$$

Пусть $d\varphi_{\mathcal{N}}$ — гауссовская мера с ковариацией $(-\Delta_{\mathcal{N}} + \sigma^{-2})^{-1}$. Как следует из теории обусловленности [10] и свойства факторизации меры $d\varphi_{\mathcal{N}}$ в направлениях, перпендикулярных линиям границы [1]), достаточно рассмотреть отдельную пару квадратов решетки. Требуемая оценка сводится к неравенству

$$\int e^{16 \operatorname{Re} \xi (\varphi(\Delta) - \varphi(\Delta'))} d\varphi_{\mathcal{N}} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left[\frac{1}{2} (16 \operatorname{Re} \xi)^2 \langle \chi, (-\Delta_{\mathcal{N}} + \sigma^{-2})^{-1} \chi \rangle\right] = O(1),$$

где $\chi = \chi_\Delta - \chi_{\Delta'}$ есть разность индикаторных функций квадратов Δ и Δ'. Для того чтобы получить оценку $O(1)$, не зависящую от σ, мы используем тот факт, что χ ортогональна к функциям, постоянным на $\Delta \cup \Delta'$, и поэтому наименьшее собственное значение $\lambda_1 = 0$ оператора $\Delta_{\mathcal{N}}$ не вносит вклад в скалярное произведение.

Для случая $\nu = 2$ достаточно оценить

$$\int e^{4\xi : (\varphi^2(\Delta) - \varphi(\Delta)^2) : / \log \sigma} d\varphi_{\mathcal{N}},$$

где ковариация гауссовой меры $d\varphi_{\mathcal{N}}$ соответствует граничным условиям Неймана на границе $\partial\Delta$ квадрата Δ. Пусть P_Δ —

---

[1]) Имеется в виду разложение меры $d\varphi_N = d\varphi_N^1 \times d\varphi_N^2$, порождаемое разложением пространства $\mathscr{H}_N(\Lambda) = \mathscr{H}_N^1(\Lambda) \oplus \mathscr{H}_N^2(\Lambda)$, где $\mathscr{H}_N(\Lambda)$ — соболевское пространство функций в области $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ со скалярным произведением, задаваемым ядром $(-\Delta_N + 1)^{-1}$, а $\mathscr{H}_N^1(\Lambda) \subset \mathscr{H}_N(\Lambda)$ — подпространство функций, постоянных на линиях, ортогональных границе области Λ. — *Прим. ред.*

ортогональная проекция на подпространство в L^2, порожденное χ_Δ, и пусть

$$A = (\log\sigma)^{-1}\left(-\Delta_{\mathcal{N}} + \sigma^{-2}\right)^{-1}\left(\chi_\Delta - P_\Delta\right).$$

Тогда с помощью стандартных вычислений (см. также [7]) получаем, что

$$\int e^{4\xi : (\varphi^2(\Delta) - \varphi(\Delta^2)) : /\log\sigma}\, d\varphi_{\mathcal{N}} = \left| e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\ln(I-A)} e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr} A} \right| \leqslant e^{\frac{1}{2}\|A\|_2^2},$$

где $\|\cdot\|_2$ — норма Гильберта — Шмидта и где мы воспользовались неравенствами $0 \leqslant A < I$, справедливыми при $\sigma \gg 1$. В самом деле, поскольку $\chi_\Delta - P_\Delta$ аннулирует собственное подпространство оператора $\Delta_{\mathcal{N}}$, соответствующее собственному значению $\lambda_1 = 0$, мы видим, что при больших σ

$$\|A\|_2^2 \leqslant \left(\sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i^{-2}\right) \Big/ \ln^2\sigma < \frac{1}{2}.$$

Это завершает доказательство.

В случае $\nu = 1$ мы замечаем, что при $|\xi| \leqslant 1$

$$-O(1)\,\sigma^2(1 + \ln^2\varkappa) \leqslant :(\varphi_\varkappa^2(x) - \sigma^2)^2: + \xi\sigma : \varphi_\varkappa^2(x) - \sigma^2 :, \tag{2.5}$$

где виково упорядочение проведено относительно ковариации с единичной массой. С помощью стандартных методов удельная энергия вакуумного состояния, отвечающая полиному в правой части, оценивается как $O(\sigma^2 \ln^2\sigma)$; см. [9]. Отсюда, изменяя масштаб длины в σ^{-2} раз, получаем неравенство (2.4) для $\mu = 0$. При $\mu \neq 0$ введем внешнее поле $\mu\varphi$ непосредственно в (2.5). Тогда для достаточно малых μ, избавляясь от викова упорядочения, мы получим нижнюю оценку (2.5), что и завершает доказательство неравенства (2.4). Обсуждение случая $\nu = 4$ мы опускаем.

3. ЛОКАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ГАМИЛЬТОНИАНА

В этом параграфе мы распространим φ^l-оценки на локализованные возмущения типа $Q(\xi, X)$ и тем самым докажем теорему 1.3. Мы сделаем две модификации основных рассуждений [3, 8, 2, 5], относящихся к φ^l-оценкам. Первая состоит в том, что мы рассматриваем такие возмущения евклидова поля, как например, возмущение, задаваемое полиномом

$$\varphi(\Delta)^2 - \int_\Delta :\varphi(x)^2: dx,$$

который, несмотря на то что он локализован в ограниченной области, не может быть записан как локальное возмущение гамильтониана. Во-вторых, используя евклидову инвариантность поля ($\Lambda=\mathbb{R}^2$), мы покажем, что достаточно рассмотреть случай, когда X является достаточно большим прямоугольником. В случае когда X — прямоугольник, мы проведем рассуждения для конечного объема и получим оценки, равномерные по Λ. Это позволит совершить переход к пределу $\Lambda\nearrow\mathbb{R}^2$. Наши φ-оценки имеют вид

$$\pm\varphi(f)\leqslant H+O(1)|\operatorname{supp} f|,$$

что точнее, чем более грубая оценка

$$\pm\varphi(f)\leqslant H+O(1)|\operatorname{diam}\operatorname{supp} f|.$$

При этом из-за того, что можно устранить или добавить часть взаимодействия, связанную с ограниченной областью, нам не понадобится такая оценка величины β_∞ (ср. [8, 2]), которая учитывала бы поверхностные эффекты в поведении энергии вакуумного состояния. (Заметим, что оценки β_∞ малосодержательны ввиду того, что масса σ^{-1} в ковариации мала. Использование условий Дирихле к тому же усложняет эти оценки.)

Пусть

$$H_l(\sigma)=H_{0,l}(\sigma)+\sigma^{-2}\int_{-l}^{l}:(\varphi(x)^2-\sigma^2)^2:dx \tag{3.1}$$

— гамильтониан с граничными условиями Дирихле на линиях $x=\pm l$. Здесь $H_{0,l}(\sigma)$ — свободный гамильтониан с теми же граничными условиями и массой σ^{-1}. Тогда $H_{0,l}(\sigma)$ и $H_l(\sigma)$ действуют в пространстве Фока, соответствующем нулевому моменту времени:

$$\mathcal{F}=L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1),\ d\mu_{0,l}). \tag{3.2}$$

Здесь $d\mu_{0,l}$ — гауссова мера, определяемая тем условием, что вакуумом $\Omega_{0,l}$ для оператора $H_{0,l}$ является функция, тождественно равная 1. Пусть Ω_l — вакуум для $H_l(\sigma)$ и $E_l(\sigma)$ — энергия вакуума Ω_l, так что

$$(H_l(\sigma)-E_l(\sigma))\,\Omega_l=0.$$

Напомним, что $H_l(\sigma)$ является прямой суммой свободного гамильтониана, соответствующего области $|x|\geqslant l$, и оператора с компактной резольвентой, связанного с областью $|x|\leqslant l$, откуда и следует существование вакуума Ω_l.

Лемма 3.1. *Существуют константа, не зависящая от σ, и последовательность $l_i\to\infty$ (возможно, зависящая от σ),* *такие, что при любом* $a \geqslant 0$

$$-E_{l_{i-a}}(\sigma) \leqslant -E_{l_i}(\sigma) + \mathrm{const} \cdot a. \qquad (3.3)$$

Доказательство. Согласно предложению 2.1, существует константа, не зависящая от σ и l и такая, что при достаточно большом l

$$l \leqslant e(l) \equiv -E_l + \mathrm{const} \cdot l. \qquad (3.4)$$

Выберем в качестве l_i какую-нибудь точку, в которой функция e имеет односторонний максимум, так что для положительного $l \leqslant l_i$

$$e(l) \leqslant e(l_i).$$

Поскольку $e(l) \to \infty$ при $l \to \infty$, существует последовательность таких l_i, что $l_i \to \infty$. Это завершает доказательство.

Евклидовым пространством Фока является

$$\mathscr{K} = \mathscr{K}(-l, l) = L^2\left(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^2), d\varphi_{\sigma^{-1}, \Lambda_l}\right),$$

где $\Lambda_l = \mathbb{R} \times [-l, l]$. Для каждого момента времени t имеется естественное вложение J_t: $\mathscr{F} \to \mathscr{K}$, при котором $\mathscr{F}$ переходит в подпространство пространства $\mathscr{K}$, соответствующее моменту t. Введем также пространственно-временные прямоугольники

$$Y_{T, l} = [-T, 0] \times [-l, l], \quad X_{T, l} = [-T, T] \times [-l, l].$$

Для каждого $a \in (-l, l)$ введем пространства Фока

$$\mathscr{F}(a, l) = L^2(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^1), d\mu_{a, l})$$

и

$$\mathscr{K}(-l + 2a, l), \quad a > 0, \quad \mathscr{K}(-l, l - 2a), \quad a > 0.$$

Пространство $\mathscr{K}(-l + 2a, l)$ определяется с помощью условий Дирихле, заданных при $x = l$, а также на симметричной прямой $x = -l + 2a$, полученной отражением линии $x = l$ относительно прямой $x = a$ при $a > 0$. Определение пространства $\mathscr{K}(-l, l - 2a)$, $a > 0$, аналогично. Мера $d\mu_{a, l}$ гауссова, и ее ковариация выписана в явном виде в [5]. Она характеризуется следующим свойством. Пусть I_a — естественное отображение полиномов на пространстве $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^1)$ в обобщенные полиномы на $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$, определяемое формулой

$$I_a \phi(f) = \phi(f \otimes \delta_a).$$

Здесь $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^1)$, а ϕ в левой части является полем (линейной функцией), заданным на $\mathscr{S}'(\mathbb{R}')$, в то время как ϕ в правой части есть поле на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Продолжим I_a на полиномы:

$$I_a(Q(\phi(f_1), \ldots, \phi(f_n))) = Q(I_a(\phi(f_1)), \ldots, I_a(\phi(f_n)));$$

тогда I_a можно рассматривать как отображение отождествления. Таким образом, $d\mu_{a, l}$ характеризуется тем фактом, что I_a изометрично действует из $\mathcal{F}(a, l)$ в $\mathcal{H}(-l+2a, l)$ $(a>0)$ или $\mathcal{H}(-l, l+2a)\,(a<0)$. Мы используем то обстоятельство, что условное математическое ожидание функции на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, измеримой относительно области $a \leqslant x \leqslant l$, $a>0$, при условии, что фиксированы значения поля на прямой $x=a$, не зависит от того, на какой линии в области $x<a$ вводятся граничные условия Дирихле. В частности, эти условные математические ожидания совпадают, если их рассматривать в пространствах $\mathcal{H}(-l+2a, l)$ и $\mathcal{H}(-l, l)$ (см. [5]). Для того чтобы придать смысл этому утверждению, мы отождествим элементы обоих этих пространств, которые измеримы относительно линии $x=a$. Это отождествление, однако, не будет унитарным отображением из одного гильбертова пространства в другое.

Предложение 3.2. *Пусть $l=l_l$ выбрано так, как указано в лемме* 3.1. *Существует константа, не зависящая от ξ, a, σ и i и такая, что для $a \geqslant O(1)\sigma$ и достаточно больших l*

$$\| J_{-2}^{*} e^{-V(Y_2, l)} e^{+Q(\xi, Y_2, a)} J_0 \|_{\mathcal{F}}^2 e^{E_l} \leqslant e^{\text{const}\, a (\ln \sigma)^2}.$$

Доказательство. Пусть

$$A = J_{-2}^{*} e^{-V(Y_2, l)} e^{-Q(\xi, Y_2, a)} J_0,$$

и пусть $\widetilde{Q}(\xi, X_{2,a})$ — сумма $Q(\xi, Y_{2,a})$ и выражения, получающегося из $Q(\xi, Y_{2,a})$ после отражения относительно оси x. Тогда

$$AA^* = J_{-2}^{*} e^{-V(X_2, l)} e^{-\widetilde{Q}(\xi, X_2, a)} J_2.$$

Поскольку оператор AA^* самосопряжен и сохраняет положительность, существует единичный вектор $v \in L_\infty(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1), d\mu_{0,l})$, такой, что

$$\| A \|^2 = \| AA^* \| = \lim_{N\to\infty} \langle v, (AA^*)^N v \rangle_{\mathcal{F}}^{1/N} \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \| v \|_{L_\infty}^{2/N} \langle \Omega_{0,l}, (AA^*)^N \Omega_{0,l} \rangle_{\mathcal{F}}^{1/N} =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \langle \Omega_{0,l}, (AA^*)^N \Omega_{0,l} \rangle_{\mathcal{F}}^{1/N}.$$

Скалярное произведение можно записать в евклидовой форме, что дает

$$\|A\|^2 \leqslant \lim_{N\to\infty} \left(\int e^{-V(X_{2N},\,l)} e^{\widetilde{Q}(\xi,\,X_{2N},\,a)} d\varphi_{\sigma^{-1},\,\Lambda_l}\right)^{1/N} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \left(\int e^{-V(X_{2N},\,l-a)} d\varphi_{\sigma^{-1},\,\Lambda_{l-a}}\right)^{1/N} \times$$

$$\times \left\| I_{-a}^{*} e^{-V(X_{2N},\,a)} e^{\widetilde{Q}(\xi,\,X_{2N},\,a)} I_a \right\|^{1/N} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-E_{l-a}} \lim_{N\to\infty} \|\ldots\|^{1/N} \leqslant e^{O(a)-E_l} \lim_{N\to\infty} \|\ldots\|^{1/N}, \tag{3.5}$$

где мы воспользовались леммой 3.1. Здесь $\|\ldots\|$ — операторная норма из $\mathcal{F}(a,\,l)$ в $\mathcal{F}(-a,\,l)$. Эта норма оценивается с помощью некоторого интеграла. А именно, для векторов $v_{\pm} \in \mathcal{F}(\pm a,\,l)$, согласно неравенству Шварца, имеем

$$\left|\left\langle I_{-a}v_{-},\; e^{-V(X_{2N},\,a)} e^{\widetilde{Q}(\xi,\,X_{2N},\,a)} I_a v_{+}\right\rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|(I_{-a}v_{-})(I_a v_{+})\|_{L^2\left(d\varphi_{\sigma^{-1}},\,\Lambda_l\right)} \left\|e^{-V(X_{2N},\,a)} e^{\widetilde{Q}(\xi,\,X_{2N},\,a)}\right\|_{L^2\left(d\varphi_{\sigma^{-1}},\,\Lambda_l\right)}.$$

Ввиду предложения 2.2, второй сомножитель ограничен экспонентой $\exp[\mathrm{const}\,(\ln\sigma)^2 Na]$. Первый сомножитель мы оцениваем так же, как в [5]. Для $a \geqslant O(1)\,\sigma$ и больших l мы используем оценку гиперсжатия:

$$\int |(I_{-a}v_{-})(I_a v_{+})|^2\, d\varphi_{\sigma^{-1},\,\Lambda_l} \leqslant \prod_{+,\,-} \|I_{\pm a}v_{\pm}\|^2_{L^2\left(d\varphi_{\sigma^{-1}},\,\Lambda_l\right)}.$$

Таким образом, норма $\|\ldots\|$ в (3.5) удовлетворяет оценке

$$\|\ldots\|^{1/N} \leqslant \exp[O(a)(\ln\sigma)^2],$$

что вместе с (3.5) завершает доказательство.

Теорема 3.3. *Предел при* $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^2$ *в* (4.1) *существует для*

$$A = e^{zQ(\xi,\,X)} \quad \text{и} \quad A = \prod_{\Delta_j} \chi_{\pm}(\Delta_j).$$

Доказательство. Мы докажем сходимость для $\exp(zQ)$ в два этапа. Во-первых, в случае, когда введено ультрафиолетовое обрезание ($Q = Q_\varkappa$), существование предела при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^2$ для $A = Q_\varkappa^n$ следует из неравенств Гриффитса. (Ввиду использования условий Дирихле, это рассуждение относится только к случаю поля φ^4.) Далее, разложим $\exp(zQ_\varkappa)$ в ряд по степеням z. Воспользовашнсь почленной сходимостью, а затем (чтобы получить равномерную оценку для суммы)

φ^j-оценкой, мы получаем сходимость для $A = \exp(zQ_\varkappa)$. Далее, снимем ультрафиолетовое обрезание, рассматривая разность $\exp(zQ_\varkappa) - \exp(zQ_{\varkappa'})$ как степенной ряд. Используя предложение 2.2 (а также 3.2), мы получим равномерную оценку этой разности, которая имеет порядок $o(1)$ при $\varkappa, \varkappa' \to \infty$. Здесь мы пользуемся оценкой для Q_4, см [6, гл. 2 и 5].

Для доказательства сходимости в случае $A = \prod \chi_\pm(\Delta)$ заметим, что поскольку при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^2$ сходятся средние $\left\langle \prod_j \exp(i\xi_j\varphi(\Delta)) \right\rangle_\Lambda$, то сходятся и средние $\langle \psi(\varphi(\Delta)) \rangle_\Lambda$, где $\psi^\sim \in L^1$ [1]). Воспользовавшись тем фактом, что $\chi_\pm \leqslant 1$, мы должны лишь доказать, что для некоторой последовательности $\psi_r^\sim \in L^1$

$$\langle |(\chi_+ - \psi_r)(\varphi(\Delta))| \rangle_\Lambda \leqslant \langle (\chi_+ - \psi_r)^2 (\varphi(\Delta)) \rangle_\Lambda^{1/2} \to 0$$

равномерно по Λ. Для того чтобы устранить влияние сингулярностей $\chi_\pm$, достаточно показать, что следующие выражения ограничены равномерно по ξ и Λ:

$$\text{(a)}\ \frac{d^n}{d\xi^n} \langle e^{i\xi\varphi(\Delta)} \rangle_\Lambda, \qquad \text{(b)}\ \xi^n \langle e^{i\xi\varphi(\Delta)} \rangle_\Lambda.$$

Ограниченность величины (a) есть непосредственное следствие φ-оценки. Ограниченность величины (b) устанавливается с помощью интегрирования по частям и предложения 3.2. Например,

$$\langle \xi e^{i\varphi(\Delta)} \rangle_\Lambda = -i \int_\Delta dx \left\langle \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} e^{i\xi\varphi(\Delta)} \right\rangle_\Lambda =$$

$$= -i \int_\Delta dx \left\langle e^{i\xi\varphi(\Delta)} \int dy\, (-\Delta + \sigma^{-2})^{-1}(x, y) : P'(\varphi(y)) : \right\rangle_\Lambda.$$

В оставшейся части статьи мы полагаем $\Lambda = \mathbb{R}^2$. Оценки, установленные в предложении 3.2, переносятся на этот случай, и это доказывает теорему 1.3 для (достаточно длинных) прямоугольников X (ср. [4]). Задача состоит в том, чтобы рассмотреть в качестве X произвольное объединение квадратов решетки. Пусть T_a обозначает сдвиг по времени $(t, x) \to (t + a, x)$, пусть $\mathcal{R}$ — обращение времени $(t, x) \to (-t, x)$, и пусть T_a и $\mathcal{R}$ действуют на функциях евклидова поля $\varphi(t, x)$.

Предложение 3.4. *Пусть A, B и C — функции поля φ, локализованные в интервалах времени* $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ *и*

---

[1]) $\psi^\sim$ обозначает преобразование Фурье функции ψ. — *Прим. ред.*

(0, ∞) *соответственно, и пусть* $B \geqslant 0$. *Тогда*

$$|\langle ABC\rangle| \leqslant \langle C\mathscr{R}\overline{C}\rangle^{1/2} \langle (T_1 A)\mathscr{R}(\overline{T_1 A})\rangle^{1/2} \lim_{N\to\infty} \left\langle \prod_{i=1}^{N} T_{2i}(B\mathscr{R}\overline{B})\right\rangle^{1/2N}.$$

Доказательство. Воспользуемся условием положительной определенности, принадлежащим Остервальдеру и Шрадеру (положительная определенность скалярного произведения в физическом гильбертовом пространстве). Наше утверждение будет тогда следовать из неравенства Шварца и того обстоятельства, что пространство L_∞ плотно в L^2.

Доказательство теоремы 1.3. Пусть $i=(i_0, i_1)\in\mathbb{Z}^2$. При заданном ξ пусть $\xi(i_0, N)$ и $\xi(i, N)$ — мультииндексы, определяемые равенствами

$$\xi(i_0, N)_j = \begin{cases} \xi_i, & \text{если } i_1 = j_1 \text{ и } |i_0 - j_0| \leqslant N, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\xi(i, N)_j = \begin{cases} \xi_i, & \text{если } |i_0 - j_0| \leqslant N \text{ и } |i_1 - j_1| \leqslant N, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим случай $Q_3 = 0$. С помощью последовательного использования предложения 3.4, вначале — в направлении x_0, а затем — после евклидова вращения — в направлении x_1, мы заключаем, что в случае, когда X_N есть прямоугольник $N\times N$, выполняются оценки

$$\langle e^{Q(\xi, X_N)}\rangle \leqslant \prod_{i_0} \lim_{N\to\infty} \langle e^{Q(\xi(i_0, N))}\rangle^{1/N} \leqslant \prod_{i\in X} \lim_{N\to\infty} \langle e^{Q(\xi(i,N))}\rangle^{1/N^2}.$$

По теореме 3.3, выбрав $\Lambda = \Lambda_l = [-l, l]\times\mathbb{R}$, получаем, что

$$\langle e^{Q(\xi(i, N))}\rangle = \lim_{l\to\infty} \langle e^{Q(\xi(i, N))}\rangle_{\Lambda_l}.$$

Для того чтобы записать последнее выражение в терминах, относящихся к пространству Фока, положим

$$A = J_{-2}^{*} e^{-V(Y_2, l)} e^{-Q(\xi(i, N), Y_2, N)} J_0.$$

Тогда

$$\langle e^{Q(\xi(i, N))}\rangle_{\Lambda_l} = \langle \Omega_l A^{N/2} \Omega_l\rangle_{\mathscr{F}} \leqslant \| A\|^{N/2} \leqslant e^{\mathrm{const}\, N^2 (\log\sigma)^2}.$$

Мы применили здесь предложение 3.2 с $a = N$. Комбинируя полученные оценки, находим, что

$$\langle e^{Q(\xi, X)}\rangle \leqslant \prod_{i\in \mathbb{Z}^2\cap X} e^{K_1(\log\sigma)^2} = e^{K_1(\log\sigma)^2 |X|}.$$

В случае $Q_3 \neq 0$ мы проведем те же самые рассуждения с дополнительными преобразованиями отражения, как это сделано в доказательстве предложения 3.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., Построение одномерного квантового поля с помощью непрерывного марковского поля, *Функц. анализ и прилож.*, **7**, вып. 4 (1973).
2. Fröhlich J., Schwinger functions and their generating functionals, II, *Adv. Math.*, 23 (1977), 119—180.
3. Glimm J., Jaffe A., The $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs, IV, *J. Math. Phys.*, **13** (1972), 1558—1584.
4. Glimm J., Jaffe A., On the approach to the critical point, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 22 (1975), 13—26.
5. Glimm J., Jaffe A., φ^j bounds in $P(\varphi)_2$ quantum field models, Proc. of the Colloq. on Math. Methods of Quantum Field Theory, Marseille, June 1975.
6. Glimm J., Jaffe A., Two and three body equations in quantum field models, *Commun. math. Phys.*, **44** (1975), 293—320.
7. Glimm J., Jaffe A., Spencer T., A cluster expansion for the φ_2^4 quantum field theory in the two phase region, I, II, *Ann. Phys.*, **101** (1976), 610—630; 631—669. [Русский перевод в настоящем сб., стр. 65—131.]
8. Guerra F., Rosen L., Simon B., Nelson's symmetry and the infinite volume behavior of the vacuum in $P(\varphi)_2$, *Commun. math. Phys.*, **27** (1972), 10—22.
9. Guerra F., Rosen L., Simon B., The vacuum energy for $P(\varphi)_2$ infinite volume limit and coupling constant dependence, *Commun. math. Phys.*, **29** (1973), 233—247.
10. Guerra F., Rosen L., Simon B., The $P(\varphi)_2$ Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics, *Ann. Math.*, **101** (1975), 111—259.
11. Пирогов С. А., Синай Я. Г., Фазовые переходы первого рода для малых возмущений модели Изинга, *Функц. анализ и прилож.*. **8** (1974), № 1, 25—30.
12. Simon B., Griffiths R., The φ_2^4 field theory as a classical Ising model, *Commun. math. Phys.*, **33** (1973), 145—164.
13. Glimm J., Jaffe A., Spencer T., Existence of phase transitions for φ_2^4 quantum fields, Proc. of the Colloq. on Math. Methods of Quantum Field Theory, Marseille, June 1975.

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД, СВЯЗАННОЕ С ПРИБЛИЖЕНИЕМ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

I. ОПИСАНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ [1])

Дж. Глимм [2])

Rockefeller University, New York, N. Y., USA

А. Джаффе [3])

Harvard University, Cambridge, Mass., USA

Т. Спенсер [2])

Rockefeller University, New York, N. Y., USA

Резюме. В работе вводится разложение в сходящийся ряд для приближенио гауссовской модели квантовой теории поля в миогофазной области. Это разложение включает в себя (1) разложение отиосительно длины границы фаз, (2) кластерное разложение и (3) разложение в ряд теории возмущений с целью выделить основной характер поведения модели. Мы подробно изучаем основное состояние модели $\mathscr{P}(\varphi)_2 = (\lambda\varphi^4-\varphi^2-\mu\varphi)_2$ при $|\mu| \leqslant \lambda^2 \ll 1$. Это основное состояние оказывается близким к класснческому свободному полю, получаемому заменой полинома $\mathscr{P}(\varphi)$ квадратичным полиномом $\mathscr{P}_c(\varphi)$, дающим прнближение среднего поля, который касается полинома $\mathscr{P}$ в точке его абсолютного минимума. Отделение одного из локальных минимумов полиома $\mathscr{P}$ дает одну из чистых фаз (эргодических основных состояний), удовлетворяющих аксиомам Вайтмаиа — Остервальдера — Шрадера для кваитового поля с положнтельной массой. Мы устаиавливаем также аналитичность относительно λ при $\mu = 0$ в области $|\operatorname{Im}\lambda| < \varepsilon \operatorname{Re}\lambda \ll 1$ при $\varepsilon \ll 1$.

I. ФОРМАЛЬНЫЕ ИДЕИ И КАЧЕСТВЕННАЯ КАРТИНА ПРИБЛИЖЕНИЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

В работе [18] [4]) авторы установили следующую теорему о неединственности для квантовых полей. Пусть задан четный полином $:\lambda\mathscr{P}(\varphi)-\varphi^2:$ с голой массой $m=1$, пусть масса, определяющая виково упорядочение, равна 1, а размерность пространства-времени $d=2$. При достаточно малом λ в такой модели имеется фазовый переход. Другими словами, имеется по меньшей мере два вакуумных состояния, отвечающие различным фазам [18]. В настоящей работе мы исследуем

---

[1]) James Glimm, Arthur Jaffe, Thomas Spencer, A Convergent Expansion about Mean Field Theory, I. The Expansion, *Annals of Physics*, **101** (1976), 610—630.

[2]) При частичной фниансовой поддержке Национального научного фонда по контракту MPS 74-13252.

[3]) При частичной фннансовой поддержке Национального научного фонда по контракту MPS 75-21212.

[4]) Предыдущая статья этого сборника. — *Прим. ред.*

разложение в сходящийся ряд для обеих чистых фаз. Для каждой из двух чистых фаз мы докажем справедливость аксиом Вайтмана и Остервальдера — Шрадера, включая аксиому о наличии массовой щели. Мы покажем, что состояние, соответствующее чистой фазе, является приближенно гауссовским (свободным), и приведем оценки для отклонения вакуумного состояния от гауссовского.

Главный член нашего разложения дается приближением среднего поля, которое в данном случае есть прямая сумма двух гауссовских (свободных) полей со средним $\pm\varphi_c = \xi_\pm$ и массой m_c. Начнем с полинома взаимодействия

$$:\mathscr{P}_1(\varphi): = :\lambda\varphi^4 - {}^1/_4\varphi^2 + (64\lambda)^{-1}:, \qquad \lambda \ll 1. \tag{1.1}$$

Заметим, что с помощью изменения масштаба, повторного викова упорядочения и добавления константы семейство полиномов $:\mathscr{P}_1(\varphi):$ можно переписать в виде

$$:\mathscr{P}_2(\varphi): = :\lambda\varphi^4 + {}^1/_2\varphi^2:, \qquad \lambda \gg 1, \tag{1.2}$$

где снова масса викова упорядочения равна 1 (см., например, [17]). Поэтому модель φ^4 с сильной связью (1.2) эквивалентна слабому взаимодействию φ^4 с отрицательным массовым (свободным) членом. Преимущество параметризации (1.1) по сравнению с (1.2) состоит в том, что коэффициент при φ^4 мал по сравнению с массовым членом. Поэтому можно ожидать, что эффекты высшего порядка будут малы для (1.1), но велики, если мы изучаем (1.2). Коэффициенты, обозначенные через λ в (1.1) и (1.2), различны и $\lambda_{(1.2)} \to \infty$ при $\lambda_{(1.1)} \to 0$. Мы будем изучать полиномы $\mathscr{P}_1$ вида (1.1).

Классические значения поля $\varphi_c = \pm(8\lambda)^{-1/2}$ являются минимумами полинома $\mathscr{P}_1(\xi)$, а классическая масса m_c определяется по формуле

$$m_c^2 = \mathscr{P}_1''(\varphi_c) = 1. \tag{1.3}$$

Разлагая полином $:\mathscr{P}_1(\varphi):$ вблизи точки $\varphi_c = \pm(8\lambda)^{-1/2}$, получаем

$$:\mathscr{P}_1(\varphi): = \lambda:(\varphi-\varphi_c)^4: \pm (2\lambda)^{1/2}:(\varphi-\varphi_c)^3: + {}^1/_2:(\varphi-\varphi_c)^2:.$$

Между минимумами $:\mathscr{P}_1(\varphi):=0$ в точках $\varphi = \varphi_c = \pm(8\lambda)^{-1/2}$ у полинома $:\mathscr{P}_1(\varphi):$ имеется высокий потенциальный барьер, поскольку

$$:\mathscr{P}_1(0): = (64\lambda)^{-1} \gg 0.$$

При $\lambda \to 0$ ширина барьера возрастает, поскольку $|\varphi_c(\lambda)| \to \infty$.

Мы покажем, что каждый классический минимум $\varphi_c = \pm(8\lambda)^{-1/2}$ приводит к вакуумному состоянию. Мы выделяем один из минимумов, $\varphi_c = (8\lambda)^{-1/2}$, задавая положительное внешнее поле вне объема Λ, после чего переходим к пределу при неограниченном возрастании объема. Вероятность перехода из одного минимума в другой мала из-за большого барьера в $\mathscr{P}_1(0)$ и из-за того, что велика кинетическая энергия больших локальных флюктуаций и поэтому они невыгодны. При достаточно малом λ наше граничное условие, задаваемое внешним полем, определяет вакуумное состояние, локализованное вблизи среднего $\langle\varphi\rangle \sim (8\lambda)^{-1/2}$. Техническая сторона нашего доказательства отчасти повторяет пайерлсовское доказательство существования фазовых переходов в модели Изинга. Ввиду симметрии, мы получаем также решение со средним $\langle\varphi\rangle \sim -(8\lambda)^{-1/2}$, и два эти решения переходят одно в другое при автоморфизме $\varphi \to -\varphi$.

В нашем разложении комбинируются метод типа пайерлсовского и кластерное разложение, использованное ранее при анализе полей, соответствующих малой константе связи, т. е $\lambda \ll 1$ в (1.2), или большому внешнему полю [15, 16, 27]. В обоих случаях кластерное разложение применялось вдали от области фазовых переходов. В однофазной области кластерное разложение явилось эффективным средством для детального исследования сверхперенормируемых квантовых полей [1, 2, 9, 10, 22, 23], включая описание массового спектра и состояний рассеяния (до некоторого порога) [15, 28, 29], аналитичность по константе связи [16], суммируемость по Борелю рядов теории возмущений [7] и нетривиальность S-матрицы [4, 6, 25]. Пользуясь разложением, которое вводится в этой работе, аналогичные вопросы можно изучать в многофазной области, соответствующей слабой связи ($\lambda \ll 1$ в (1.1)) или (что то же самое) в области большой константы связи ($\lambda \gg 1$ в (1.2)).

В многофазной области должно быть много связанных состояний и резонансов. Отличительная особенность двумерного случая состоит в том, что фазовый переход сопровождается солитонными состояниями [3, 8, 11, 19]. Солитон-антисолитонное состояние должно приводить к непрерывному семейству порогов в вакуумном секторе и возможном здесь спектре связанных состояний. Введение малого внешнего поля разрушает фазовый переход и тем самым должно сделать солитонный сектор неустойчивым. Оно должно перевести это непрерывное семейство (двухсолитонных) состояний в связанные состояния и резонансы.

В частности, отметим, что в двумерной модели Изинга при $T < T_c$ усеченная двухточечная корреляционная функция убывает как $r^{-2}e^{-mr}$ [24, 21], что указывает на непрерывное множество порогов. Для изолированной частицы в двумерном случае, по-видимому, порядок убывания корреляций $r^{-1/2}\exp(-mr)$, как это и предсказывает теория Орнштейна—Цернике, Непрерывное семейство порогов обусловлено тем фактом, что солитоны не образуют связанных состояний. (Соответствующее ферми-поле является свободным полем.) Таким образом, при $T < T_c$ спектр частиц в модели Изиига теряет свою «элементарную частицу», т. е. изолированную кривую типа гиперболы в нижней части ненулевого спектра энергии-импульса.

Отдельный солитон появляется в некотором дополнительном пространстве состояний. Его присутствие можно усмотреть прямо из фермионного решения двумерной модели Изинга [21] с помощью замены используемых в [21] периодических граничных условий антипериодическими. Поскольку общепринято считать, что солитон-антисолитонные пары в модели φ^4 образуют связанные состояния, естественно было бы ожидать наличия в двухфазной модели φ_2^4 элементарной частицы (бозона) и массовой щели, равно как и определенной скорости убывания двухточечной усеченной корреляционной функции. Если возвратиться к модели Изинга, то в ней при внешнем поле $\mu \searrow +0$ естественно ожидать наличия спектра связанных состояний только между m и $2m$ (при $T < T_c$), который плотно заполняет этот отрезок и делается непрерывным при $\mu = 0$.

Рассмотрим теперь качественную картину приближения среднего поля для взаимодействия общего вида

$$\sum_{i=3}^{2n} \lambda_i (\varphi - \varphi_c)^i + \frac{1}{2} m_c^2 (\varphi - \varphi_c)^2 - \mu (\varphi - \varphi_c)$$

с массой викова упорядочения m_c. В области $(|\mu| + \sum |\lambda_i|) \times \times m_c^{-2} \ll 1$ пространства параметров естественно ожидать, что приближение среднего поля оправдано как качественно, так и количественно. С качественной точки зрения, картина, даваемая приближением среднего поля, должна определять топологию гиперповерхности, где происходит фазовый переход. Ветвления (кратные точки) этой гиперповерхности, где в состоянии равновесия сосуществует более двух фаз, должны составлять поверхности меньшего числа измерений. В общем случае в моделях $\mathscr{P}(\varphi)_2$, где степень полинома $\deg \mathscr{P} = 2n$, должны появляться точки ветвления, для которых могут сосуществовать n фаз. Такие особенности на гиперповерхности фазовых переходов должны встречаться в случае $\mathscr{P}(\varphi)_2$ внутри (равно как и вне) области сходимости кластерного разложения. Вне точек ветвления, топологическая структура которых описывается приближением среднего поля, фазовый переход в области сходимости кластерного разложения должен быть в определенном смысле регулярным (вещественно аналитическим). Границы (ребра) гиперповерхности фазовых переходов имеют особое значение: они являются критическими точками. Эти точки должны лежать вне области сходимости кластерного разложения. С количественной точки зрения, справедливость картины, даваемой приближением среднего поля, означает, что ряд теории возмущений по степеням λ_t/m_c^2 является асимптотическим при $\lambda_t/m_c^2 \to 0$.

В качестве частных случаев изложенных выше вопросов укажем следующие две проблемы: (1) доказать существование тройной точки для взаимодействия $\varphi^6 + \lambda\varphi^4 - \sigma\varphi^2$ при $\sigma \gg 1$ и $\lambda = \lambda(\sigma)$ и (2) доказать существование фазовых переходов, не связанных с нарушением симметрии, для взаимодействия $\varphi^6 + \varepsilon\varphi^3 - \sigma\varphi^2 - \mu\varphi$ при $\sigma \gg 1$, $\varepsilon \ll 1$ и $\mu = \mu(\varepsilon, \sigma) \neq 0$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Наше разложеиие будет относиться к моделям $\lambda\mathscr{P}_{\text{чет}}(\varphi) - \varphi^2 - \mu\varphi$ с достаточно малым $\lambda > 0$. Для упрощения обозначений мы ограничимся случаем модели φ^4 в слабом внешнем поле. Зададим вещественный полином взаимодействия

$$\mathscr{P}(\xi) = \lambda\xi^4 - {}^1/_4\xi^2 - \mu\xi - E_c, \tag{2.1a}$$

где

$$0 < \lambda \ll 1, \qquad |\mu| \ll \lambda^2 \qquad \text{и} \qquad \inf_{\xi} \mathscr{P}(\xi) = 0. \tag{2.1b}$$

Взаимодействие в области Λ определим формулой

$$:\mathscr{P}_\Lambda: = \int_\Lambda :\mathscr{P}(\varphi(x)):dx. \tag{2.2}$$

Здесь : : обозначает виково упорядочение, определяемое единичной массой. Пусть $d(\Phi - \mu_b)$ — гауссова мера со средним μ_b и ковариацией

$$C = (-\Delta + 1)^{-1}. \tag{2.3}$$

Наконец, мера, соответствующая взаимодействующему полю в конечном объеме, определяется как

$$d\varphi_\Lambda \equiv \exp\left(-:\mathscr{P}_\Lambda: + {}^1/_2:(\varphi - \mu_b)^2_\Lambda:\right) d(\Phi - \mu_b). \tag{2.4}$$

Отметим, что второе слагаемое под знаком экспоненты в (2.4) приводит к сокращению среднего μ_b и массы для меры

$d(\Phi - \mu_b)$ в области Λ. Однако во внешности Λ остается положительное внешнее поле, которое задает наше граничное условие «$+$» (при $\mu_b > 0$), неизменное при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^2$.

При $\mu = 0$ полином (2.1) имеет два абсолютных минимума в точках $\xi_\pm$:

$$\varphi_c = \xi_+ = -\xi_- = (8\lambda)^{-1/2}. \tag{2.5}$$

При $\mu > 0$ полином $\mathscr{P}$ имеет один абсолютный минимум в точке

$$\varphi_c = \xi_+ = \xi_+(\lambda, \mu) = (8\lambda)^{-1/2} + \mu + O(\mu^2) \tag{2.6a}$$

и локальный минимум в точке

$$\xi_- = \xi_-(\lambda, \mu) = -(8\lambda)^{-1/2} + \mu + O(\mu^2); \tag{2.6b}$$

обе добавки $O(\mu^2)$ в (2.6) ограничены равномерно по λ. В точке абсолютного минимума ξ_+ значение классической массы m_c дается формулой

$$m_c = 1 + (72\lambda)^{1/2}\mu + O(\mu^2). \tag{2.7}$$

Поскольку $m_c \sim 1$, мы в (2.2) — (2.4) пользуемся виковым упорядочением с единичной массой, а также голой массой, равной 1. Заметим, что классическая удельная энергия вакуумного состояния равна

$$E_c = -\left\{(64\lambda)^{-1} + \mu(8\lambda)^{-1/2}\right\} + O(\mu^2). \tag{2.8}$$

Теперь возьмем в качестве Λ квадрат с центром вблизи начала координат и такой, что $\operatorname{dist}(0, \partial\Lambda) \geqslant {}^1/_4 |\Lambda|^{1/2}$. Мы сформулируем сейчас основные результаты, доказываемые с помощью нашего разложения.

Теорема 2.1. *Пусть мера $d\varphi_\Lambda$ определяется так же, как и выше, причем $\mu \geqslant 0$ и $\mu_b = \xi_+$. Для достаточно малых λ пределы функций Швингера при неограниченном возрастании объема*

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = \left\langle \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \right\rangle = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{R}^2} \frac{\int \left(\prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \right) d\varphi_\Lambda}{\int d\varphi_\Lambda} \tag{2.9}$$

существуют в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ и удовлетворяют аксиомам Остервальдера — Шрадера с экспоненциальным кластерным свойством. Соответствующая модель квантового поля удовлетворяет всем аксиомам Вайтмана. Она обладает единственным вакуумом, положительным средним значением поля $\langle\varphi\rangle$ и положительной массой $m(\lambda, \mu) > 0$.

При $\mu \leqslant 0$ и $\mu_b = \xi_-$ справедлив тот же самый результат, за тем лишь исключением, что среднее значение поля $\langle\varphi\rangle$ отрицательно. При $\mu = 0$ два возможных выбора $\mu_b = \xi_\pm$ дают два решения.

Теорема 2.2. *Пусть $0 \leqslant \mu$ и $\mu_b = \xi_+$. Тогда при достаточно малых λ*

$$\langle\varphi(x)\rangle = \xi_+ + O(\lambda^{3/2}), \tag{2.10a}$$

$$\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle - \langle\varphi(x)\rangle\langle\varphi(y)\rangle = C(x-y) + \lambda M_2(x, y), \tag{2.10b}$$

$$\langle\varphi(x_1)\ \dots\ \varphi(x_n)\rangle_T = \lambda^{1/2} M_n(x_1, \dots, x_n), \quad n \geqslant 3, \tag{2.10c}$$

$$\left\langle\left(\int(\varphi(x) - \xi_+) f(x)\, dx\right)^n\right\rangle =$$

$$= (n-1)!!\, C(f, f)^{n/2} + O(\lambda^{1/2})\left(\|f\|_{L_1} + C(f, f)^{1/2}\right)^n. \tag{2.10d}$$

Здесь $C = (-\Delta + 1)^{-1}$ и функции $M_n(x_1, \dots, x_n)$ ограничены и непрерывны по $\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n$, включая $\lambda = 0$. Символ $\langle\cdot\rangle_T$ обозначает усеченное среднее (связную часть среднего $\langle\ \rangle$). По теореме 2.1, M_n являются экспоненциально убывающими функциями разностей аргументов $x_j - x_{j+1}$. Множитель $O(\lambda^{1/2})$ в (2.10d) зависит от n.

При $\mu \leqslant 0$ и $\mu_b = \xi_-$ справедлив тот же результат, если мы заменим ξ_+ на ξ_- в (2.10).

Обобщенные функции Швингера удовлетворяют следующим оценкам локальной регулярности.

Теорема 2.3. *Пусть $0 \leqslant \mu$, $\mu_b = \xi_+$ и λ достаточно мало. Тогда*

$$\left\langle\prod_{i=1}^n :(\varphi(x_i) - \xi_+)^{m_i}:\right\rangle_T = \left\langle\prod_{i=1}^n :\psi(x_i)^{m_i}:\right\rangle_{0,T} + \lambda^{1/2} N_n(x_1, \dots, x_n), \tag{2.11}$$

где $\langle\cdot\rangle_0$ обозначает среднее значение по гауссовой мере со средним нуль и ковариацией $C = (-\Delta + 1)^{-1}$. Как и ранее, функции $N_n(x_1, \dots, x_n)$ ограничены и непрерывны по переменным $\lambda, x_1, \dots, x_n$, включая $\lambda = 0$, и являются экспоненциально убывающими функциями разностей аргументов $x_j - x_{j+1}$.

Теорема 2.4. *В предположениях теоремы 2.1 существует мера $d\varphi$ на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, такая, что*

$$\langle\varphi(x_1)\ \dots\ \varphi(x_n)\rangle = \int \varphi(x_1)\ \dots\ \varphi(x_n)\, d\varphi; \tag{2.12}$$

при этом мера $d\varphi$ эргодична относительно пространственных или временных трансляций.

Замечание 1. Оценки (2.10)—(2.11) выражают в точной форме утверждения о малости отклонения (при $\lambda \to 0$) меры $d\varphi$ от гауссовой меры со средним ξ_+ или ξ_- и ковариацией $C = (-\Delta + 1)^{-1}$.

Замечание 2. Оценка (2.10b) показывает, что $d\langle\varphi\rangle/d\mu = 1 + O(\lambda)$. Интегрирование по μ дает

$$\langle\varphi\rangle_\mu = \langle\varphi\rangle_{\mu=0} + \mu + O(\lambda\mu), \tag{2.13}$$

где $\langle\varphi\rangle_{\mu=0}$ положительно либо отрицательно в соответствии с тем, положительны или отрицательны μ и μ_b.

Теорема 2.5. *Функции Швингера* (2.9) *при* $\mu \equiv 0$ *являются аналитическими функциями* λ *внутри сектора*

$$|\operatorname{Im} \lambda| \leqslant \varepsilon \operatorname{Re} \lambda \ll 1, \tag{2.14}$$

где ε *достаточно мало.*

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЛИНЫ ГРАНИЦЫ ФАЗ

До конца первой части работы мы выпишем разложение, с помощью которого доказываются сформулированные результаты. Во второй части мы докажем сходимость нашего разложения и тем самым приведенные здесь теоремы. Вводимое разложение включает в себя три основных элемента: разложение относительно длины границы фаз, которое приводится в этом параграфе, кластерное разложение (§ 5) и асимптотическое разложение (§ 6). Разложение относительно длины границы фаз мотивировано низкотемпературными разложениями, разработанными в статистической механике и впервые примененными Пайерлсом в 1936 г. [26]. Для того чтобы получить отображение полевых переменных $\varphi(x)$ на изинговы спиновые переменные σ_i, мы разбиваем пространство-время $\mathbb{R}^2$ на единичные квадраты Δ_i, центры которых находятся в точках решетки $i \in \mathbb{Z}^2$. Границами отдельного квадрата Δ_i служат (единичные) ребра решетки (сдвинутой относительно $\mathbb{Z}^2$ на $(1/2, 1/2)$). Пусть $\sigma(\cdot)$ — функция на $\mathbb{R}^2$, которая постоянна на каждом из квадратов решетки и принимает только значения $\pm$. Другими словами,

$$\sigma_i \equiv \sigma(\Delta_i) \equiv \sigma(x), \quad i \in \mathbb{Z}^2, \quad x \in \Delta_i. \tag{3.1}$$

Мы наложим «плюсовые» граничные условия для σ_i, а именно

$$\sigma_i = + \quad \text{для} \quad \Delta_i \not\subset \Lambda. \tag{3.2}$$

Конфигурация спиновых переменных

$$\Sigma = \{\sigma_i\} \tag{3.3}$$

принадлежит $2^{|\Lambda|}$-мерному пространству состояний. Каждой конфигурации Σ взаимно однозначно соответствует множество ребер решетки, на которых разрывна функция $\sigma(x)$. Мы назовем это множество ребер решетки пайерлсовским контуром или границей фаз и также обозначим его через Σ. Граница фаз Σ в силу постоянных граничных условий «+» является объединением замкнутых кривых, и мы обозначим через $|\Sigma|$ суммарную длину этих кривых.

Рассмотрим теперь усредненное поле в квадрате Δ (низкочастотное поле в Δ), которое определяется формулой

$$\varphi(\Delta) \equiv \int\limits_{\Delta} \varphi(x)\,dx \equiv \bar{\varphi}(x), \quad x \in \Delta. \tag{3.4a}$$

С помощью формулы

$$\delta\varphi(x) = \varphi(x) - \bar{\varphi}(x) \tag{3.4b}$$

определим поле флюктуаций, которое будет использовано в следующих параграфах для оценки отклонения поля φ от его среднего значения $\bar{\varphi}$.

Идея, на которой основано разложение относительно длины границы, заключается в том, что мы выбираем $\sigma_i = \operatorname{sgn}\varphi(\Delta_i)$ и записываем $d\varphi_\Lambda$ в виде суммы $2^{|\Lambda|}$ мер $d\varphi_{\Lambda,\Sigma}$. Здесь $d\varphi_{\Lambda,\Sigma}$ обозначает сужение меры $d\varphi_\Lambda$ на подмножество реализаций с фиксированным $\Sigma = \{\sigma_i\}$.

По соображениям технического характера нам удобно провести сглаживание в этом определении меры $d\varphi_{\Lambda,\Sigma}$. Пусть $\chi_\pm$ — гладкое разбиение единицы над $\mathbb{R}^1$, определяемое равенствами

$$\begin{gathered} \chi_+(\xi) = \pi^{-1/2}\int\limits_0^\infty e^{-(\xi-z)^2}\,dz = \chi_-(-\xi), \\ \chi_+(\xi) + \chi_-(\xi) = 1. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Положим

$$\chi_\Sigma = \prod_{\Delta_i \subset \Lambda} \chi_{\sigma_i}(\varphi(\Delta_i)) \tag{3.6}$$

и заметим, что

$$\sum_{\{\sigma_i\}} \chi_\Sigma = 1.$$

Разложение относительно длины границы есть просто тождество

$$d\varphi_\Lambda = \sum_{\{\sigma_i\}} d\varphi_{\Lambda,\Sigma}, \tag{3.7}$$

где $d\varphi_{\Lambda,\Sigma} = \chi_\Sigma \, d\varphi_\Lambda$.

Отметим, что в случае более общей модели $\mathscr{P}(\varphi)$ полином $\mathscr{P}$ может иметь $\deg \mathscr{P}/2$ минимумов и могут существовать $\deg \mathscr{P}/2$ равновесных фаз. В этом случае мы будем рассматривать спины с $\deg \mathscr{P}/2 = 2s+1$ компонентами, т. е. в каждом из узлов решетки спин может принимать значения

$$\sigma = -s, \ -s+1, \ \ldots, \ s-1, \ s. \tag{3.8}$$

Таким образом, здесь имеется аналогия с моделью Изинга «спина s», частный случай которой ($s = {}^1/_2$) рассматривается в этой работе.

4. СДВИГИ ПОЛЯ φ

Для каждой спиновой конфигурации Σ мы будем рассматривать сдвиг поля $\varphi(x)$ на функцию $g(x) = g(x, \Sigma)$. Мы выберем функцию g так, чтобы среднее значение сдвинутого поля

$$\psi(x) = \varphi(x) - g(x) \tag{4.1}$$

относительно меры $d\varphi_{\Lambda,\Sigma}$ было мало. Если пренебречь изменением кинетической энергии, то следовало бы произвести сдвиг для каждого из квадратов Δ_i так, чтобы прийти к одному из минимумов $\xi_\pm$ полинома $\mathscr{P}(\xi)$. Таким образом, мы определим внешнее поле

$$h(x) = \sigma(x)\,\xi_+. \tag{4.2}$$

Классическая намагниченность (порождаемая введением внешнего поля $h(x)$) задается равенством

$$g_c(x) = \left(\eta\,(-\Delta+\eta)^{-1} h\right)(x) = \xi_+ + \eta\,(-\Delta+\eta)^{-1}\left(h - \xi_+\right). \tag{4.3}$$

Для удобства мы выберем $\eta \neq 1$ равным малой константе, не зависящей от λ, которая будет определена ниже. Сдвиг на функцию $g_c(x)$ повлек бы за собой некоторые технические неудобства, поскольку $g_c(x)$ имеет экспоненциально убывающий «хвост». Поэтому мы модифицируем определение (4.3), выбрав C_0^∞-функцию $\zeta(x)$, удовлетворяющую неравенствам $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1$ и условиям

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0, & |x| > {}^1/_2, \\ 1, & |x| \leqslant {}^1/_4. \end{cases}$$

При некотором заданном масштабе длины L определим приближенную классическую намагниченность формулой

$$g(x) = \eta_\zeta \int (-\Delta + \eta)^{-1} (x - y)\, \zeta((x - y)/L)\, h(y)\, dy, \tag{4.4}$$

где

$$\eta_\zeta^{-1} = \int (-\Delta + \eta)^{-1} (y)\, \zeta(y/L)\, dy.$$

Лемма 4.1. *Пусть* $\operatorname{dist}(x, y) \geqslant L/2$. *Тогда* $g(x)$ *и* $(-\Delta + \eta)(g - g_c)(x)$ *не зависят от значений внешнего поля* $h(y)$ *в точке* y. *В частности, если* $\operatorname{dist}(x, \Sigma) \geqslant L/2$, *то*

$$g(x) = h(x) \quad \text{и} \quad (-\Delta + \eta)(g - g_c)(x) = 0. \tag{4.5}$$

Доказательство. Локальный характер зависимости функций $g(x)$ и $(-\Delta + \eta)(g - g_c)(x)$ от поля h вытекает из локализованности ядра $(-\Delta + \eta)^{-1}\zeta$ в (4.4). Кроме того, равенство $(-\Delta + \eta)\, g_c(x) = \eta h(x)$ также локально, откуда и следует (4.5).

Поскольку $g(x) = h(x)$ при $\operatorname{dist}(x, \Sigma) \geqslant L/2$, то масштаб длины L служит верхней оценкой для ширины границы фаз. Мы будем использовать L в качестве характеристической длины для эффектов, связанных с границей фаз.

Пусть $d\psi_a$ обозначает гауссову меру со средним нуль и ковариацией $(-\Delta + a)^{-1}$.

Лемма 4.2. *Пусть* ψ *задано равенствами* (4.1) *и* (4.4). *Тогда*

$$d\varphi_{\Lambda, \Sigma} = \chi_\Sigma e^{-F} \exp\Big(-:\mathcal{P}_\Lambda(\varphi): + \\ + \frac{\eta}{2} \int_\Lambda :(\varphi - h)^2: dx + \frac{1 - \eta}{2} \int_\Lambda :\psi^2: dx\Big)\, d\psi_1, \tag{4.6}$$

где

$$F = F(\Sigma) = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

и[1])

$$F_1 = \frac{\eta}{2} \int (h - g)^2\, dx + \frac{1}{2} \int (\nabla g)^2\, dx, \tag{4.7a}$$

$$F_2 = \frac{1 - \eta}{2} \int_{\sim\Lambda} (g - \xi_+)^2\, dx, \tag{4.7b}$$

$$F_3 = \int \psi(x) (-\Delta + \eta)(g - g_c)\, dx, \tag{4.7c}$$

$$F_4 = (1 - \eta) \int_{\sim\Lambda} \psi(x) \big(g(x) - \xi_+\big)\, dx. \tag{4.7d}$$

---

[1]) Здесь и ниже $\sim$ употребляется вместо знака теоретико-множественной разности; $\sim\Lambda$ обозначает дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus \Lambda$. — *Прим. перев.*

Для упрощения обозначений положим

$$V(W, \Sigma) = :\mathscr{P}_{\Lambda\cap W}(\varphi): - \frac{\eta}{2} \int_{\Lambda\cap W} :(\varphi - h)^2: dx - \\ - \frac{1-\eta}{2} \int_{\Lambda\cap W} :\psi^2: dx \tag{4.8a}$$

и

$$Q(W, \Sigma) = V(W, \Sigma) + F(W, \Sigma), \tag{4.8b}$$

где $F(W, \Sigma)$ *получается при сужении области интегрирования в* (4.7a) *и* (4.7c) *с* $\mathbb{R}^2$ *до* W, *а в* (4.7b) *и* (4.7d) — *с* $\mathbb{R}^2 \sim \Lambda$ *до* $W \sim \Lambda$. *Таким образом, в* (4.8) *и до конца данной работы зависимость от* Λ *не указывается в обозначениях. Положим, кроме того,* $Q(\Sigma) = Q(\mathbb{R}^2, \Sigma)$. *По лемме* 4.1, *если*

$$\operatorname{dist}(\partial W, \Sigma) \geqslant L/2, \tag{4.8c}$$

то

$$Q(W, \Sigma) = Q(W, \Sigma \cap W). \tag{4.8d}$$

Поскольку мы имеем дело с величиной $Q(W, \Sigma)$ *лишь при условии, что выполнено* (4.8c), *то всегда имеет место равенство* (4.8d), *которое выражает свойство локальности* Q. *В этих обозначениях* (4.6) *принимает вид*

$$d\varphi_{\Lambda, \Sigma} = \chi_\Sigma e^{-Q(\Sigma)}\, d\psi_1. \tag{4.9}$$

Доказательство. Основное тождество для сдвигов гауссовой меры $d\psi_1$ имеет вид

$$d(\psi + f)_1 = \exp(-{}^1/_2 \langle f, (-\Delta + 1) f\rangle - \langle \psi, (-\Delta + 1) f\rangle)\, d\psi_1. \tag{4.10}$$

Следовательно,

$$d\psi_1 = d(\varphi - g)_1 = d(\varphi - \xi_+ + \xi_+ - g)_1 = \\ = \exp\Big(-{}^1/_2 \big\langle (\xi_+ - g), (-\Delta + 1)(\xi_+ - g)\big\rangle - \\ - \big\langle (\varphi - \xi_+), (-\Delta + 1)(\xi_+ - g)\big\rangle\Big)\, d(\varphi - \xi_+)_1.$$

Сравнение с (2.4) и (4.6) приводит к тождеству

$$F = \frac{\eta}{2} \int_\Lambda :(\varphi - h)^2: dx + \frac{1-\eta}{2} \int_\Lambda :(\varphi - g)^2: dx - \\ - \frac{1}{2} \int_\Lambda :(\varphi - \xi_+)^2: dx - {}^1/_2 \big\langle (\xi_+ - g), (-\Delta + 1)(\xi_+ - g)\big\rangle - \\ - \big\langle (\varphi - \xi_+), (-\Delta + 1)(\xi_+ - g)\big\rangle.$$

Линейный по ψ член в F имеет вид

$$\int_\Lambda \psi\big[-\eta h - (1 - \eta) g + \xi_+\big] dx + \int \psi\big[-\xi_+ + (-\Delta + 1) g\big] dx$$

и, ввиду (4.3) и тождества $h \equiv \xi_+$ на $\sim\Lambda$, равен сумме

$$(1-\eta)\int_{\sim\Lambda}\psi(g-\xi_+)\,dx+\int\psi(-\Delta+\eta)(g-g_c)\,dx.$$

Член из F, не зависящий от ψ, равен

$$\int_{\Lambda}\left\langle\left(\frac{1}{2}\eta h^2+\frac{1-\eta}{2}\right)g^2-\frac{1}{2}\xi_+^2\right\rangle dx-$$
$$-{}^1\!/_2\langle(\xi_+-g),\,(-\Delta+1)(\xi_+-g)\rangle+\langle\xi_+,\,(-\Delta+1)(\xi_+-g)\rangle+$$
$$+(1-\eta)\int_{\sim\Lambda}g(g-\xi_+)\,dx+\int g(-\Delta+\eta)(g-g_0)\,dx=$$
$$=\frac{1-\eta}{2}\int_{\sim\Lambda}(\xi_+-g)^2\,dx+{}^1\!/_2\eta\langle\eta-g,\,h-g\rangle+{}^1\!/_2\langle\nabla g,\,\nabla g\rangle.$$

5. КЛАСТЕРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Кластерное разложение позволяет перейти к пределу $\Lambda\nearrow\mathbb{R}^2$. Для того чтобы установить сходимость кластерного разложения, мы введем масштаб длины локализации $l\gg m_c^{-1}\approx m^{-1}\approx 1$. Поскольку масштаб длины L, введенный в предыдущем параграфе, является оценкой для ширины границы фаз, мы выберем также $l\ll L$, чтобы выделить структуру чистой фазы. Итак, мы выбираем

$$1\ll l\ll L. \tag{5.1}$$

Мы будем рассматривать разложение для ребер l-решетки, которые ограничивают l-квадраты с вершинами в соседних узлах решетки $l\mathbb{Z}^2$. Пусть $\mathscr{B}$ — множество всех ребер l-решетки и Γ — подмножество $\mathscr{B}$ с $|\Gamma|$ элементами. Пусть

$$C_\Gamma=(-\Delta_\Gamma+1)^{-1}, \tag{5.2}$$

где Δ_Γ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$ с нулевыми граичными условиями Дирихле на Γ.

Для каждой спиновой конфигурации Σ мы определим подмножество $\mathscr{B}(\Sigma)$ множества $\mathscr{B}$, для которого будет проводиться кластерное разложение [16]. Мы проведем интерполяцию между свободными граничными условиями и граничыми условиями Дирихле, введя параметр $s_b\in[0,\,1]$ для каждого $b\in\mathscr{B}(\Sigma)$. Пусть $s=\{s_b\}$ и

$$C(s)=\sum_{\Gamma\subset\mathscr{B}(\Sigma)}\Big(\prod_{b\in\Gamma^c}s_b\Big)\Big(\prod_{b\in\Gamma}(1-s_b)\Big)C_\Gamma, \tag{5.3}$$

где

$$\Gamma^c = \mathscr{B}(\Sigma) \setminus \Gamma.$$

Пусть $d\psi(s)$ обозначает гауссову меру со средним нуль и ковариацией $C(s)$. Тогда значение $s_b = 0$ соответствует нулевому условию Дирихле на ребре l-решетки b, а $s_b = 1$ означает, что условие Дирихле на ребре b не задается. Если $s_b = 0$ на Γ, то мы будем называть Γ контуром Дирихле. Положим

$$s_\Gamma = \{s_b\colon\ b \in \Gamma\},$$

$$ds_{\Gamma^c} = \prod_{b \in \Gamma^c} ds_b \Big|_{s_\Gamma = 0},$$

$$\partial_s^\Gamma = \prod_{b \in \Gamma} (\partial/\partial s_b).$$

Идея кластерного разложения состоит в том, чтобы применить основную теорему анализа по каждому из переменных s_b, где $b \in \mathscr{B}(\Sigma)$:

$$F(s_b = 1) = F(s_b = 0) + \int_0^1 ds_b\, \partial_{s_b} F(s). \tag{5.4}$$

Таким образом мы получим следующую основную формулу:

$$d\varphi_{\Lambda,\Sigma} = \sum_{\Gamma \subset \mathscr{B}(\Sigma)} d\varphi_{\Lambda,\Sigma,\Gamma}, \tag{5.5}$$

где

$$d\varphi_{\Lambda,\Sigma,\Gamma} = \int ds_{\Gamma^c} \partial_s^{\Gamma^c} \int \chi_\Sigma e^{-Q(\mathbb{R}^2,\Sigma)}\, d\psi(s). \tag{5.6}$$

Здесь χ и Q определяются соотношениями (3.6) и (4.8). Отметим, что по определению меры ds_{Γ^c} в равенстве (5.6) $s_b = 0$ при $b \in \Gamma$. Напомним, что указание на зависимость величины $Q(\mathbb{R}^2, \Sigma)$ от Λ опущено; см. (4.8).

Теперь осталось определить множество ребер l-решетки $\mathscr{B}(\Sigma)$, на котором проводится кластерное разложение. Мы выберем в качестве $\mathscr{B}(\Sigma)$ множество «островов» спинов «+» или спинов «—», отделенных от границы фаз полосой ширины не меньше L. Тогда можно ожидать, что мера $d\varphi_{\Lambda,\Sigma}$ будет приближенно гауссовой со средним $\approx \xi_\sigma$. Точнее, положим

$$X = X(\Sigma) = \{\Delta_i\colon \operatorname{dist}(i, \Sigma) \geqslant L\}, \tag{5.7}$$

и

$$\mathscr{B}(\Sigma) = \mathscr{B} \cap X. \tag{5.8}$$

Разложение (5.5)—(5.6) будет применяться к статистической сумме

$$Z(\Lambda)=\int d\varphi_\Lambda=\sum_\Sigma \sum_{\Gamma\subset\mathscr{B}(\Sigma)} \int d\varphi_{\Lambda,\,\Sigma,\,\Gamma} \tag{5.9}$$

либо к среднему

$$\begin{aligned}\langle A\rangle &= Z(\Lambda)^{-1}\int A(\varphi)\,d\varphi_\Lambda = \\ &= Z(\Lambda)^{-1}\sum_\Sigma \sum_{\Gamma\subset\mathscr{B}(\Sigma)} \int A\,d\varphi_{\Lambda,\,\Sigma,\,\Gamma}.\end{aligned} \tag{5.10}$$

В оставшейся части работы мы будем изучать величины (5.9) и (5.10).

Удобно обобщить определения (5.7), (5.8) и положить

$$X_r^{\pm}=\{\Delta_i\colon \sigma_i=\pm,\ \operatorname{dist}(i,\ \Sigma)\geqslant rL\}, \tag{5.11}$$

$$X_r=X_r^+\cup X_r^-,\qquad X_r^0=\mathbb{R}^2\setminus X_r. \tag{5.12}$$

Как правило, мы будем опускать нижний индекс, когда он равен 1. Положим, кроме того,

$$\mathscr{B}(\Sigma,\ Y)=\mathscr{B}(\Sigma)\cap Y=\mathscr{B}\cap X\cap Y. \tag{5.13}$$

6. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Мы проведем асимптотическое разложение для среднего $\langle A\rangle_\Lambda=\int A\,d\varphi_\Lambda$ как функции параметра λ, а затем воспользуемся этим разложением, чтобы выделить основной вклад в это среднее при $\lambda\to 0$. Асимптотическое разложение должно предшествовать разложению относительно границы фаз, а также кластерному разложению.

Положим

$$A(\varphi-\xi_+)\equiv\prod_{i=1}^{n} :(\varphi(x)-\xi_+)^{m_i}\colon f_i(x)\,dx, \tag{6.1}$$

где : : обозначает виково упорядочение по отношению к оператору $(-\Delta+1)^{-1}$.

Чтобы уточнить зависимость оценок от f, введем норму $|||A|||$ на множестве функций вида (6.1). В случае когда $\operatorname{supp} f_i\subset\Delta_i$, где Δ_i — единичный квадрат решетки, положим

$$N(\Delta,\ A)=\left\{\sum m_i\colon \Delta_i=\Delta\right\},$$

$$N(A)=\sum_\Delta N(\Delta,\ A)=\sum_i m_i.$$

Выбрав некоторую константу K, положим

$$|||A||| = e^{KIN(A)} \left(\prod_{\Delta} N(\Delta, A)!\right) \left(\prod_{i} \|f_i\|_{L_2(\Delta_i)}\right). \tag{6.2}$$

Для функций f_i общего вида с произвольными носителями норма $|||A|||$ определяется по линейности как сумма норм по квадратам $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, соответствующим локализованным функциям A.

Теорема 6.1. *Пусть* $0 \leqslant \mu$, $\mu_b = \xi_+$, $r \in Z_+$ *и* A *имеет описанный выше вид. Тогда существуют константы* $\alpha_j(A, \Lambda, \lambda, \mu)$ *и конечная сумма функций* A_k *вида* (6.1), *такие, что*

$$\int A\, d\varphi_\Lambda = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j \lambda^{j/2} \int d\varphi_\Lambda + \lambda^{(r+1)/2} \int \sum_k A_k\, d\varphi_\Lambda.$$

Здесь α_j *и* A_k — *функции, непрерывные по* $\lambda \in [0, \lambda_0]$ *равномерно относительно* Λ, *которые сходятся к пределам при* $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^2$, *когда* λ_0 *достаточно мало. При этом в определении* (6.1) *допускается, что* $f_i = \delta(x - a_i)$ *в том случае, когда все* a_i *различны.*

Мы покажем позднее, что для функций A вида (6.1) предел $\lim \int A\, d\varphi_\Lambda / \int d\varphi_\Lambda$ существует при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^2$. Таким образом, теорема 6.1 показывает, что

$$\int A\, d\varphi = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{R}^2} \frac{\int A\, d\varphi_\Lambda}{\int d\varphi_\Lambda} = \sum \alpha_j \lambda^{j/2} + O\left(\lambda^{(r+1)/2}\right). \tag{6.3}$$

Обобщим это асимптотическое разложение с помощью интегрирования по частям в функциональном пространстве (пространстве реализаций). Прежде чем интегрировать по частям, выберем новую переменную $\psi = \varphi - \xi_+$. Тем самым мы делаем сдвиг в пространстве функций φ на постоянную функцию $g = g_0 = h = \xi_+$, и (6.1) принимает вид

$$A = A(\psi) = \prod_{i=1}^{n} \int :\psi(x)^{m_i}: f_i(x)\, dx. \tag{6.4}$$

Функция F из формулы (4.6) равна 0 и, таким образом,

$$\int A\, d\varphi_\Lambda = \int A(\psi)\, e^{-V}\, d\psi_1, \tag{6.5}$$

где

$$V = \int_\Lambda V(x)\, dx, \tag{6.6}$$

$$V(x) = \lambda :\psi(x)^4: + \alpha \cdot (2\lambda)^{1/2} :\psi(x)^3: + \beta\lambda^{5/2} :\psi(x)^2:. \tag{6.7}$$

Прямое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} \alpha &= (8\lambda)^{1/2}\,\xi_+ = 1 + O\left(\lambda^{1/2}\mu\right), \\ \beta &= (18)^{1/2}\,\mu\lambda^{-2}\alpha^{-1} = (18)^{1/2}\,\mu\lambda^{-2} + O\left(\mu^2\lambda^{-3/2}\right) = O(1), \end{aligned} \tag{6.8}$$

и, следовательно, коэффициенты в формуле для V малы при малых λ. Заметим, что если $\mu = 0$, то $\alpha = 1$ и $\beta = 0$.

Формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int :\psi(x)^m: R(\psi)\,d\varphi_\Lambda = \int\int C(x-y)\left[:\psi(x)^{m-1}: \frac{\delta R}{\delta\psi(y)} - R\frac{\delta V}{\delta\psi(y)}\right] dy\,d\varphi_\Lambda. \tag{6.9}$$

Здесь

$$\frac{\delta V}{\delta\psi(y)} = 4\lambda :\psi(y)^3: + \alpha(18\lambda)^{1/2} :\psi(y)^2: + 2\beta\lambda^{5/2}\psi(y). \tag{6.10}$$

Для того чтобы обобщить асимптотический ряд (6.3), мы применим формулу (6.9) для интегрирования по частям каждого сомножителя $:\psi(x)^m:$ в подынтегральном выражении в $\int A\,d\varphi_\Lambda$. После этого мы еще раз проинтегрируем по частям каждую степень ψ, возникшую в результате первого интегрирования, и продолжим этот процесс по индукции до тех пор, пока либо (i) подынтегральное выражение не станет константой, либо (ii) в подынтегральном выражении не возникнет коэффициент $O\left(\lambda^{(r+1)/2}\right)$, а каждая из виковых степеней не будет иметь степень $\leqslant \deg \mathscr{P}$. В конце мы проведем обратное преобразование от функций ψ к функциям φ. Таким образом мы заменим A на сумму $\sum A_k$ плюс постоянные члены.

Постоянные слагаемые, входящие в полученное разложение (т. е. α_j), имеют ряд интересных свойств. Во-первых, заметим, что

$$\alpha_0 = \int A(\psi)\,d\psi, \tag{6.11}$$

где $d\psi$ — гауссова мера со средним нуль и ковариацией $(-\Delta + 1)^{-1}$. Поэтому члены разложения, не зависящие от λ, равны среднему значению $A(\psi)$ относительно свободного поля.

Члены α_j при $j > 0$ можно интерпретировать в терминах фейнмановских диаграмм. В частности, асимптотический ряд $\sum \alpha_j\lambda^{j/2}$ в точности равен обычному ряду теории возмущений для $\langle A(\psi)\rangle$, где плотность взаимодействия равна (6.7). (В случае граничных условий «—» мы поменяем знак у кубического члена в (6.7) и возьмем $\psi = \varphi - \xi_-$.) В частном случае, когда

$$A = \varphi(x) - \xi_+ = \psi(x), \tag{6.12a}$$

имеем

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \tag{6.12b}$$

Явное вычисление коэффициента α_3 (в случае $\Lambda = R^2$) показывает, что

$$\alpha_3 = 144\sqrt{2}\int C(x)^3\,dx - 864\sqrt{2}\int C(x)\,C(y)\,C(x-y)^2\,dx\,dy. \tag{6.13}$$

Мы воспользовались здесь тем фактом, что $\int C(x)\,dx = 1$. В общепринятых обозначениях α_3 представляется с помощью диаграмм теории возмущений:

$\alpha_3 =$ 

Численное значение α_3 можно найти из (6.13). В качестве следствия теоремы 6.1 получаем, что

$$\langle\varphi(x)\rangle = \xi_+ + \alpha_3\lambda^{3/2} + O(\lambda^2) = \varphi_c + \alpha_3\lambda^{3/2} + O(\lambda^2). \tag{6.14}$$

Таким образом, $\alpha_3\lambda^{3/2}$ служит первой «квантовой поправкой» к классическому среднему φ_c.

Применим наши оценки к функциям A, которые возникают в проведенном выше асимптотическом разложении. Без потери общности можно считать, что $m_l \leqslant 4$.

Теорема 6.2. *Рассмотрим функцию A вида* (6.1), *где $m_l \leqslant 4$. Тогда для достаточно малого λ*

$$\left|\int A\,d\varphi_\Lambda\right| \leqslant |||A|||\left(1 + \lambda^{-N(A)/2}e^{-O(\lambda^{-1/2})}\right)\int d\varphi_\Lambda. \tag{6.15}$$

Теоремы 2.2, 2.3 и 6.1 вытекают из теоремы 6.2 и предшествующего обсуждения. Кроме того, из теоремы 6.2 вытекают равномерные по λ оценки функций Швингера (2.9) и (2.12). Для того чтобы получить не зависящие от λ оценки, которые требуются в теоремах 2.2 и 2.3, с помощью оценки (6.15), в которую входит зависящая от l (и, следовательно, от λ) норма $|||A|||$, необходимо прежде всего выполнить асимптотическое разложение, описанное в этом параграфе, до членов с достаточно большой степенью $\lambda^{1/2}$. Окончательные оценки будут равномерны по λ при фиксированном $N(A)$ и равномерны по $N(A)$ при фиксированном (малом) λ.

7. ФАКТОРИЗАЦИЯ И ЧАСТИЧНОЕ СУММИРОВАНИЕ

Мы просуммируем части разложения (5.10), вынося за скобки и сокращая вклады, даваемые вакуумной энергией. Пусть $\mathscr{L}(A)$ обозначает локализацию A, т. е. множество квадратов решетки Δ_i, дающих вклад в (6.1), и пусть $\mathscr{L}(A) \subset W \cap \Lambda$. Положим

$$R''(A, W, \Sigma, \Gamma) = \int_0^1 ds_{\Gamma^c} \partial^{\Gamma^c \cap \mathscr{B}(\Sigma, W)} \int \chi_\Sigma A e^{-Q(W, \Sigma)} \, d\psi(s) \tag{7.1}$$

и

$$Z''(W, \Sigma, \Gamma) = R''(A = I, W, \Sigma, \Gamma). \tag{7.2}$$

Тогда (5.10) можно записать в виде

$$\langle A \rangle = Z(\Lambda)^{-1} \sum_{\Sigma} \sum_{\Gamma \subset \mathscr{B}(\Sigma)} R''(A, \mathbb{R}^2, \Sigma, \Gamma). \tag{7.3}$$

Теперь для каждого члена в (7.3) произведем факторизацию (т. е. разложение на множители). Пусть $\{Y_1, \ldots, Y_\nu\}$ обозначает множество связных компонент дополнения $\mathbb{R}^2 \sim \Gamma$. При $s_\Gamma = 0$ ковариация $C(s)$, введенная в (5.3), является прямой суммой по компонентам Y_i, т. е. разложение в прямую сумму

$$L_2(\mathbb{R}^2) = \sum_{i=1}^{\nu} L_2(Y_i)$$

приводит оператор $C(S)$. Следовательно, мера $d\psi(s)$ в (7.1) разлагается в произведение мер. Мы увидим сейчас, что подынтегральная функция также допускает аналогичное разложение.

Для удобства возьмем A в (6.1) локализованным, так что $\operatorname{supp} f_i \subset \Delta_i$. Общий случай получается суммированием по локализациям. При указанном ограничении функция A разлагается в произведение.

Благодаря тому, что контур Дирихле Γ по построению отделен от границы фаз Σ, мы можем применить лемму 4.1 и следующие за ней рассуждения и представить $Q(\mathbb{R}^2, \Sigma)$ в виде суммы локальных членов:

$$Q(\mathbb{R}^2, \Sigma) = \sum_{i=1}^{\nu} Q(Y_i, \Sigma \cap Y_i). \tag{7.4}$$

Наконец, полагая

$$\chi_{\Sigma \cap Y_i} = \prod_{\Delta_j \subset Y_i} \chi_{\sigma_j}(\varphi(\Delta_j)),$$

мы получаем, что

$$\chi_\Sigma = \sum_{i=1}^{\nu} \chi_{\Sigma \cap Y_i}. \tag{7.5}$$

Таким образом, подынтегральное выражение в (7.1) факторизуется, как это утверждалось выше, и

$$R''(A, \mathbb{R}^2, \Sigma, \Gamma) = \prod_{i=1}^{\nu} R''(A_i, Y_i, \Sigma \cap Y_i, \Gamma \cap Y_i). \tag{7.6}$$

Теперь обратимся к частичному суммированию. Зафиксируем Σ и Γ в (5.6) и (7.3) и определим $Y = Y(\Gamma)$ как замыкание объединения всех компонент Y_i, которые содержат элементы локализации функции A вида (6.1):

$$Y = \bigcup_i \{Y_i\colon \operatorname{supp} f_j \subset Y_i \text{ при некотором } j\}.$$

Положим, кроме того,

$$\partial Y^\pm = \partial Y \cap X^\pm;$$

тогда каждое из множеств ∂Y, ∂Y^+ и ∂Y^- состоит из конечного числа неперекрывающихся замкнутых контуров.

Применяя (7.3) — (7.6), отделим интегралы, содержащие A, от интегралов, дающих статистическую сумму для множества $\sim Y$. Первое частичное суммирование мы проводим, полагая $Y = Y(\Gamma)$ фиксированным и суммируя по всем контурам Дирихле Γ, совместимым с $Y = Y(\Gamma)$. Это условие мы назовем ограничением на суммирование по Γ. Таким образом, мы рассматриваем представление

$$\sum_{\{\Gamma \subset \mathscr{B}(\Sigma)\colon Y(\Gamma) = Y\}} R''(A, \mathbb{R}^2, \Sigma, \Gamma) =$$

$$= \sum_{\{\Gamma \subset \mathscr{B}(\Sigma)\colon Y(\Gamma) = Y\}} R''(A, Y, \Sigma \cap Y, \Gamma \cap Y)\, Z''(\sim Y, \Sigma \sim Y, \Gamma \sim Y). \tag{7.7}$$

Сумма (7.7) с описанным ограничением разлагается на внутреннюю сумму по $\mathscr{B}(\Sigma, Y)$ и внешнюю сумму по $\mathscr{B}(\Sigma, \sim Y)$. Внутренняя сумма равна

$$R'(A, Y, \Sigma \cap Y) = \sum_{\{\Gamma \subset \mathscr{B}(\Sigma, Y)\colon Y(\Gamma) = Y\}} R''(A, Y, \Sigma \cap Y, \Gamma \cap Y), \tag{7.8}$$

а внешняя —

$$Z'(\sim Y, \Sigma \sim Y) = \sum_{\{\Gamma \subset \mathscr{B}(\Sigma, \sim Y):\ \Gamma \supset \partial Y\}} Z''(\sim Y, \Sigma \sim Y, \Gamma \sim Y). \qquad (7.9)$$

Внешнюю сумму можно вычислить точно, если воспользоваться представлением (5.5). В самом деле, (7.9) совпадает со статистической суммой

$$Z'(\sim Y, \Sigma \sim Y, \partial Y) \equiv \int e^{-Q(\sim Y, \Sigma \sim Y)} \chi_{\Sigma \sim Y}\, d\psi_{\partial Y}, \qquad (7.10)$$

где индекс ∂Y в обозначении меры означает наличие условий Дирихле. Таким образом, мы можем записать (7.3) в виде

$$\langle A \rangle = \sum_{\Sigma} \sum_{\partial Y} R'(A, Y, \Sigma \cap Y) \frac{Z'(\sim Y, \Sigma \sim Y, \partial Y)}{Z(\mathbb{R}^2, \varnothing, \varnothing)}. \qquad (7.11)$$

Пусть $N(W)$ — множество квадратов решетки, отстоящих не далее чем на L от множества W. Второе частичное суммирование проводится по Σ. Мы фиксируем ∂Y^+ и ∂Y^- $(\partial Y^{\pm} = \partial Y \cap X^{\pm})$, и тем самым условие

$$\Sigma \restriction N(\partial Y^{\pm}) = \pm \qquad (7.12)$$

вводит ограничение на суммирование по Σ. С этим ограничением сумма по Σ с помощью разделения, производимого $N(\partial Y)$, также разлагается на внутреннюю и внешнюю суммы. Мы полагаем

$$R(A, Y, \partial Y^{\pm}) = \sum_{\{\Sigma \cap Y:\ \sigma_l \restriction N(\partial Y^{\pm}) = \pm\}} R'(A, Y, \Sigma \cap Y) \qquad (7.13)$$

и для заданной пары непересекающихся множеств (N^+, N^-)

$$Z(Y, N^+, N^-, \Gamma) = \sum_{\{\Sigma \cap Y:\ \sigma_l \restriction N^{\pm} = \pm\}} Z'(Y, \Sigma \cap Y, \Gamma \cap Y). \qquad (7.14)$$

В частности,

$$Z(Y, N(\partial Y^+), N(\partial Y^-), \partial Y) =$$

$$= \sum_{\{\Sigma \cap Y:\ N(\partial Y^{\pm}) = \pm\}} \int e^{-Q(Y, \Sigma \cap Y)} \chi_{\Sigma \cap Y}\, d\psi_{\partial Y} \qquad (7.15)$$

и (7.11) принимает вид

$$\langle A \rangle = \sum_{\partial Y^{\pm}} R(A, Y, \partial Y^{\pm}) \frac{Z(\sim Y, N(\partial Y^+), N(\partial Y^-), \partial Y)}{Z(\Lambda, \varnothing, \varnothing, \varnothing)}. \qquad (7.16)$$

Мы снова можем вычислить внешнюю сумму в (7.15). Будем говорить, что Σ совместима с парой $N^{\pm}$, если $\sigma \restriction N^{\pm} = \pm$.

Лемма 7.1. *Пусть A — функция переменной φ. Для любых двух конфигураций Σ_1, Σ_2, совместимых с $N(\Gamma^{\pm})$,*

$$\int Ae^{-Q(Y,\Sigma_1)}\,d\psi_\Gamma=\int Ae^{-Q(Y,\Sigma_2)}\,d\psi_\Gamma. \tag{7.17}$$

Доказательство. Выразим Q и $d\psi_\Gamma$ через φ. Если мы аппроксимируем граничные условия Дирихле введением большой локальной массы $\delta m^2(x)$, сконцентрированной в малой окрестности Γ, то увидим, что правая и левая части последнего равенства примут вид

$$\frac{\int A\exp\left(-\int\delta m^2(x):(\varphi(x)-g_i(x))^2:dx\right)d\varphi_{\Lambda\cap Y}}{\int\exp\left(-\int\delta m^2(x):\psi(x)^2:dx\right)d\psi_1}, \tag{7.18}$$

$i=1,\ 2$. Вблизи Γ из условия совместимости и леммы 4.1 следует, что $g_1=g_2$. Поскольку $\delta m^2(x)$ сосредоточено вблизи Γ, два выражения (7.18) совпадают.

Пусть $d\varphi_{Y\cap\Lambda,\Gamma}$ обозначает меру $\exp[-Q(Y,\Sigma)]\,d\psi_\Gamma$ в (7.17). Эту меру можно представить аналогично (2.4) как гауссову меру с ненулевыми условиями Дирихле $\varphi=\pm\xi$ на $\Gamma^{\pm}$, помноженную на экспоненту, содержащую $\mathscr{P}(\varphi)$-взаимодействие. Тогда (7.14) примет вид

$$Z(Y,N^+,N^-,\Gamma)=$$
$$=\int\Big[\prod_{\Delta\subset N^+}\chi_+(\varphi(\Delta))\Big]\Big[\prod_{\Delta\subset N^-}\chi_-(\varphi(\Delta))\Big]d\varphi_{Y\cap\Lambda,\Gamma'}. \tag{7.19}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Brydges D., Cluster expansions for fermion fields by the time-dependent Hamiltonian approach, *J. Math. Phys.* (to appear).
2. Cooper A. and Rosen L., The Weakly Coupled Yukawa$_2$ Field Theory: Cluster Expansion and Wightman Axioms, Preprint Univ. of Toronto, Canada, 1975.
3. Dashen R., Hasslacher B., and Neveu A., Nonperturbative methods and extended Hadron models in field theory, I, II, III. *Phys. Rev. D.*, **10** (1974), 4114—4141.
4. Dimock J., The $\mathscr{P}(\varphi)_2$ Green's Functions: Asymptotic Perturbation Expansion. Preprint.
5. Dimock J. and Glimm J., Measures on the Schwartz distribution space and applications to quantum field theory, *Adv. Math.*, **12** (1974), 58—83.
6. Eckmann J.-P., Epstein H. and Fröhlich J., Asymptotic perturbation expansion for the S-matrix and the definition of time ordered functions in relativistic quantum field models, Preprint Univ of Geneva, 1975.
7. Eckmann J.-P., Magnen J., and Sénéor R., Decay properties and Borel summability for the Schwinger functions in $\mathscr{P}(\varphi_2)$-theories, *Commun. math. Phys.*, 39 (1975), 251—271.

8. Faddeev L., Quantization of Solitons, IAS preprint.
9. Feldman J. and Osterwalder K., The Wightman axioms and the mass gap for weakly coupled φ_3^4, *Ann. Phys.*, 97 (1976), 80—135.
10. Feldman J. and Osterwalder K., The construction of $\lambda\varphi_3^4$ quantum field models. In: Proceedings of Marseille Conference, June 1975.

11a. Fröhlich J., New super selection sectors (Soliton-states) in two dimensional Bose quantum field models, *Commun. math. Phys.*, 47 (1976), 269—310.

11b. Fröhlich J. and Simon B., Pure States for General $P(\varphi)_2$ Theories: Construction, Regularity, and Variational Equality, *Ann. Math.*, ser. 2, 5 (1977), 493—526.

12. Glimm J. and Jaffe A., A $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs, I, *Phys. Rev.*, 176 (1968), 1945—1951.
13. Glimm J. and Jaffe A., The $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs, III, The physical vacuum, *Act. Math.*, 125 (1970), 203—267.
14. Glimm J. and Jaffe A., The Yukawa$_2$ quantum field theory without cutoffs, *J. Functional Anal.*, 7 (1971), 323—357.
15. Glimm J., Jaffe A., and Spencer T., The Wightman axioms and particle structure in the $\mathcal{P}(\varphi)_2$ quantum field model, *Ann. Math.*, **100** (1974), 585—632.
16. Glimm J., Jaffe A., and Spencer T., The particle structure of the weakly coupled $\mathcal{P}(\varphi)_2$ model and other applications of high temperature expansions. Part II, The cluster expansion, In: Constructive quantum field theory (Velo G. and Wightman A., Eds.), Lecture notes in Physics, v. 25, Springer-Verlag, Berlin, 1973. [Русский перевод в сб. Конструктивная теория поля, «Мир», М., 1977, стр. 219—258.]
17. Glimm J., Jaffe A., and Spencer T., Existence of phase transitions for quantum fields, 1975 Marseille conference.
18. Glimm J., Jaffe A., and Spencer T., Phase transition for φ_2^4 quantum fields, *Commun. math. Phys.*, 45 (1975), 203—216. [Русский перевод в настоящем сб., стр. 46—64.]
19. Goldstone J. and Jackiw R., Quantization of nonlinear waves, *Phys. Rev. D*, 11 (1975), 1486—1498.
20. Guerra F., Rosen L., and Simon B., The $\mathcal{P}(\varphi)_2$ Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics, *Ann. Math.*, **101** (1975), 111—259.
21. Lieb E., Mattis D., and Schultz T., Two-dimensional Ising model as a soluble problem of many fermions, *Rev. Mod. Phys.*, **36** (1964), 856—871.
22. Magnen J. and Sénéor R., The infinite volume limit of the φ_3^4 model, *Ann. Inst. Henri Roincaré* 24, № 2 (1976), 95—519.
23. Magnen J. and Sénéor R., The Wightman axioms for the weakly coupled Yukawa model in two dimensions, *Commun. math. Phys.*, **51** (1976), 297—318.
24. McCoy B. and Wu T. T., The Two-Dimensional Ising Model, Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1973.
25. Osterwalder K. and Sénéor R., The scattering matrix is nontrivial for weakly coupled $\mathcal{P}(\varphi)_2$ models, *Helv. Phys. Acta.* (to appear).
26. Peierls R., Ising's model of ferromagnetism, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 32 (1936), 477—481.
27. Spencer T., A mass gap for the $\mathcal{P}(\varphi)_2$ quantum field model with a strong external field, *Commun. math. Phys.*, 39 (1974), 63—76.
28. Spencer T., The decay of the Bethe-Salpeter kernel in $\mathcal{P}(\varphi)_2$ quantum field models, *Commun. Math. Phys.*, 44 (1975), 143—164.
29. Spencer T. and Zirilli F., Scattering states and bound states in $\lambda\mathcal{P}(\varphi)_2$, *Commun. math. Phys.*, 49 (1976), 1—16.

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД, СВЯЗАННОЕ С ПРИБЛИЖЕНИЕМ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

II. СХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЯ[1]

Дж. Глимм[2]

Rockefeller University, New York, N. Y.

А. Джаффе[3]

Harvard University, Cambridge, Mass.

Т. Спенсер[2]

Rockefeller University, New York, N. Y.

Резюме. В этой статье мы доказываем сходимость кластерного разложения, связанного с приближением среднего поля и описанного в предыдущей работе, а также устанавливаем свойство экспоиенциального убывания корреляций в чистых фазах, выделяемых граничными условиями определенного типа.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Общая схема оценок. В этой работе доказывается сходимость кластерного разложения, связанного с приближением среднего поля. Это разложение, введениое в части I (ссылки на нее помечаются цифрой I), имеет вид

$$\langle A\rangle = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{R}^2} Z(\Lambda)^{-1} \sum_{\Sigma, \Gamma} \int A \, d\varphi_{\Lambda, \Sigma, \Gamma}; \tag{1.1.1}$$

см. (I. 5.10). Здесь суммирование проводится по границам фаз Σ и контурам Дирихле Γ, а A является функцией поля φ.

Для каждого из членов разложения существование предела при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^2$ обусловлено двумя причинами. Первая связана с гауссовским приближением. Вдали от границы фаз, т. е. в области X вида (I. 5.7), взаимодействие V имеет вид

$$V(x) = :\lambda\psi(x)^4: \pm (2\lambda)^{1/2} \alpha :\psi(x)^3: + \lambda^{5/2}\beta :\psi(x)^2: \tag{1.1.2}$$

с коэффициентами $O(\lambda^{1/2})$. Таким образом, $e^{-V} d\psi_1$ является малым возмущением основного состояния, описываемого

---

[1]) James Glimm, Arthur Jaffe, and Thomas Spencer, A Convergent Expansion about Mean Field Theory, II. Convergence of the Expansion, *Annals of Physics*, **101** (1976), 631—669.

[2]) При частичной финансовой поддержке Национального научного фонда по контракту MPS 74—13252.

[3]) При частичной финансовой поддержке Национального научного фонда по контракту MPS 75—21212.

гауссовской мерой $d\psi_1$ со средним нуль и массой 1. Аппроксимация меры $e^{-V}\,d\psi_1$ мерой $d\psi_1$ в (1.1.1) сходится благодаря коэффициентам λ, $\lambda^{1/2}$ и $\lambda^{3/2}$ в (1.1.2).

Вторая причина сходимости — наличие границы фаз Σ. При малых λ существование такой границы означает, что у значений поля φ имеются большие флюктуации. В самом деле, вероятность того, что $|\varphi| \leqslant |32\lambda|^{-1/2}$, очень мала из-за потенциального барьера $\mathscr{P}(0) = O(\lambda^{-1})$ у плотности энергии $\mathscr{P}(\xi)$ вблизи $\xi = 0$. Эта малая вероятность имеет порядок $\exp[-O(\lambda^{-1})]$. Это означает, что в случае, когда возникает граница фаз Σ, поле меняется (с большой вероятностью) от значений порядка $\lambda^{-1/2}$ по одну сторону границы Σ до $-\lambda^{-1/2}$ по другую сторону. Такая флюктуация приводит к большим значениям производной $\nabla\varphi$, что дает в результате малый сомножитель $\exp[-O(\nabla\varphi)^2] = \exp[-O(\lambda^{-1})]$, возникающий из градиентного члена в выражении для евклидова действия; см. п. 2.4.

С каждой из причин, обусловливающих сходимость, естественным образом связан свой масштаб длины. Для анализа флюктуаций поля используются единичные квадраты, а квадраты со стороной l выбираются так, чтобы на этом расстоянии пропадала зависимость между значениями поля в гауссовском приближении. Поскольку $m \approx m_c \approx 1$, мы получим экспоненциальное убывание корреляций в X для основного гауссовского состояния, если выберем

$$l = |\log\lambda|^{1/4} \gg 1. \tag{1.1.3}$$

Такой выбор l дает величину связи между не примыкающими друг к другу квадратами на l-решетке не более

$$e^{-m_c l} \ll 1$$

(ср. с [15, 16] [1]), где $m_c = m_0 \gg 1$ и $l = 1$, так что по-прежнему $m_c\, l \gg 1$).

Параметр L, выбранный как

$$L = |\log\lambda|^2 \gg l, \tag{1.1.4}$$

определяется таким образом, чтобы функциональные производные $\delta/\delta\psi$ [2]), которые приводят к чистой экспоненте под интегралом в (I. 6.5) при $x \in X^0 = \mathbb{R}^2 \setminus X$, возникали только на большом расстоянии $L/2$. Мы выбираем L большим, чтобы компенсировать то обстоятельство, что при $x \in X^0$

---

[1]) Литература приведена в части I.

[2]) См. формулу (I. 6.9). — *Прим. перев.*

коэффициенты полинома V не являются малыми. Таким образом, L служит верхней оценкой для масштаба расстояний, на которых гауссовское приближение испытывает влияние границы фаз.

Следующая оценка является ключевой в доказательстве сходимости:

$$\left| \int A \, d\varphi_{\Lambda, \Sigma, \Gamma} \right| \leqslant \exp\left(a\lambda^{1/2} |\Lambda| - \delta l \, |\Gamma^c| - \delta\lambda^{-1/2} |\Sigma|\right), \quad (1.1.5)$$

где a, δ — константы, не зависящие от λ, Λ, Σ. Эту оценку мы докажем в § 3. Основная идея ее вывода заключается в следующем. С помощью интегрирования по частям в формуле (I. 5.6) приведем ее к сумме членов вида

$$\int ARe^{-Q} \chi'_\Sigma \, d\psi(s).$$

Здесь R — полином по переменной ψ, получаемый в результате применения операции дифференцирования $\delta/\delta\psi$ к e^{-Q}, а χ'_Σ обозначает либо χ_Σ, либо какую-нибудь из возможных здесь производных функционала χ_Σ. Полином R имеет коэффициенты порядка $|\lambda|^{1/2}$, поскольку таков порядок коэффициентов в выражении для V внутри X, где и локализованы функциональные производные. Согласно неравенству Гёльдера, выписанное выше выражение ограничено произведением

$$\left| \int (AR)^q \, d\psi(s) \right|^{1/q} \left[\int e^{-pQ} (\chi'_\Sigma)^p \, d\psi(s) \right]^{1/p}. \quad (1.1.6)$$

Ради наглядности рассмотрим случай, когда границы фаз отсутствуют, т. е. $\Sigma = \{\sigma_i = 1\}$, и когда нет производных, т. е. $\chi'_\Sigma = \chi_\Sigma$. Мы выберем p близким к 1, не зависящим от λ и таким, что соответствующее q является большим четным целым числом. Первый сомножитель в (1.1.6) есть просто гауссовский интеграл, который ограничен величиной $O\left(e^{-\delta l |\Gamma^c|}\right)$, как и в [16]. Ключевой оценкой для второго сомножителя служит оценка удельной энергии вакуума, равномерная при $\lambda \searrow 0$. Переводя в экспоненту часть (единичной) массы, относящейся к $d\psi_1$, мы получим требуемую оценку вакуумной энергии в виде

$$\int \exp\left(-p\left[V(\Lambda) + \frac{1-\eta}{2} \int_\Lambda :\psi:^2(x) \, dx\right]\right) d\psi_{(\eta p + 1 - p)} \leqslant$$
$$\leqslant \exp(\text{const} \, |\Lambda|).$$

При фиксированном обрезании $\varkappa$ по импульсам и фиксированном $\eta > 0$ показатель экспоненты под знаком интеграла (как функция поля $\varphi_\varkappa(x)$)

$$:P(\varphi_\varkappa(x)): - \eta :(\varphi_\varkappa(x) - \xi_+)^2: \qquad (1.1.7)$$

не является равномерно ограниченным снизу при $\lambda \searrow 0$. В самом деле, если $\varphi_\varkappa(x) \approx -\xi_+$, то (1.1.7) приближенно равно $-\eta(2\xi_+)^2 = (-\eta/2)\lambda^{-1}$. Чтобы получить равномерную оценку выражения (1.1.7), мы должны рассмотреть вклад сомножителя χ_Σ, который и приводит к положительности усредненного поля. В дополнение к этому необходимо включить два члена, учитывающих погрешности. Первая из них возникает из-за того, что χ_+ не равно в точности величине (I. 2.5), а есть лишь ее «сглаженная локализация». Вторая погрешность учитывается членом $\zeta :\delta\varphi^2:$, где ζ мало, и связана с отклонением поля $\varphi(x)$ от усредненного поля $\bar\varphi$, вызванным множителем χ_+. В теореме 3.1.1 доказывается, что

$$:P(\varphi_\varkappa(x)): - \eta :(\varphi_\varkappa(x) - \xi_+)^2: - \log\chi_+(\bar\varphi) \geqslant$$
$$\geqslant b\log^2\varkappa - \zeta :(\delta\varphi_\varkappa)^2:(x). \qquad (1.1.8)$$

Здесь $\zeta > 0$ — заданное число, $\eta \leqslant \eta(\zeta)$ выбирается достаточно малым, а $b = b(\zeta)$ — большим. Константы η, b, ζ не зависят, однако, от λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, а ζ выбирается таким образом, чтобы оценка

$$\int \exp\left(4\zeta :\delta\varphi_\varkappa^2(\Lambda):\right) d\varphi_\varepsilon \leqslant e^{O(1)|\Lambda|} \qquad (1.1.9)$$

выполнялась равномерно относительно импульсного обрезания $\varkappa$ и массы $\varepsilon > 0$. Эта оценка будет получена в следующем пункте; она опирается на то, что, в силу ортогональности $\delta\varphi(x)$ к нулевой гармонике, выполнено неравенство

$$\int_\Delta \delta\varphi^2(x)\,dx \leqslant \pi^{-2}\int_\Delta (\nabla\varphi)^2(x)\,dx.$$

1.2. Оценка функций Швингера. В этом пункте мы приведем две оценки, на которых основано доказательство теоремы I. 6.2.

Предложение 1.2.1. *Пусть A имеет вид* (I. 6.1). *Существует такое $\delta > 0$, что при достаточно малом λ*

$$|R(A, Y, \partial Y^\pm)| \leqslant \lambda^{-N(A)/2}\, |||A|||\, e^{-\delta|Y\cap\Lambda|/l}. \qquad (1.2.1)$$

Если $\partial Y^- = \varnothing$, то в случае, когда $N > 0$, множитель $\lambda^{-N/2}$ можно заменить выражением

$$\left(1 + \lambda^{-N/2} e^{-O(\lambda^{-1/2})}\right).$$

Замечание. Растущий множитель $\lambda^{-N/2}$ возникает из-за того, что $\varphi(x)$ можно локализовать вблизи ξ_-, т. е. вблизи отрицательной потенциальной ямы.

Предложение 1.2.2. *Пусть λ выбрано достаточно малым. Положим $N^{\pm}=N(\partial Y^{\pm})$. Существует такая константа $c<\infty$, что*

$$\left|\frac{Z(\sim Y, N^+, N^-, \partial Y)}{Z(\mathbb{R}^2, \varnothing, \varnothing, \varnothing)}\right| \leqslant \exp\left(c\lambda^{1/2}\left(|Y\cap\Lambda|+|N|+l^2|\partial Y|\right)\right). \quad (1.2.2)$$

При этом если $N^- \neq \varnothing$, то можно, сохранив неравенство, умножить его правую часть на $\exp\left[-O\left(\lambda^{-1/2}\right)\right]$.

Замечание. Множитель $\exp\left[-O\left(\lambda^{-1/2}\right)\right]$ появляется из-за малой вероятности возникновения границы фаз.

Доказательство теоремы I.6.2. Как видно из простых комбинаторных рассуждений (см. [16]), существует не более $\exp[O(r/l^2)]$ способов выбрать Y так, что $|Y|=r$. При фиксированном ∂Y существует не более $2^{|Y|/l^2}$ способов выбора ∂Y^+ и ∂Y^-. Поэтому ряд (I.7.15) мажорируется величиной

$$|||A|||\left(1+\lambda^{-N/2}e^{-O\left(\lambda^{-1/2}\right)}\right)\sum_{r=1}^{\infty}e^{-\delta r/l}\leqslant$$
$$\leqslant |||A|||\, O(l^2)\left(1+\lambda^{-N/2}e^{-O\left(\lambda^{-1/2}\right)}\right).$$

Сомножитель $O(l^2)$ можно включить в $|||A|||$, увеличив константу K в (I.6.2), что и завершает доказательство.

2. ОЦЕНКИ ДЛЯ ФЛЮКТУАЦИЙ

2.1. Импульсное обрезание. Введем теперь оператор импульсного обрезания (сглаживания) $\rho_\varkappa$: $f\to f_\varkappa$. Для того чтобы понятие локализации в пространственно-временных квадратах Δ сохраннло смысл как до, так и после сглаживания, нам потребуется, чтобы этот оператор обрезания обладал такими свойствами:

(i) $\rho_\varkappa \to I$ при $\varkappa\to\infty$;
(ii) $\rho_\varkappa$ самосопряжен,
(iii) если $x\in\Delta$, то $(\rho_\varkappa f)(x)$ зависит только от $f(y)$ при $y\in\Delta$;
(iv) $\rho_\varkappa e_\Delta = e_\Delta$, где e_Δ — характеристическая функция квадрата Δ.

Мы добьемся выполнения этих свойств, если определим $\rho_\varkappa$ с помощью симметричного неотрицательного ядра $\rho'_\varkappa(x, y)$, т. е.

$$f_\varkappa(x) = \int \rho'_\varkappa(x, y) f(y)\, dy, \tag{2.1.1}$$

где при всех Δ

$$\int\limits_\Delta \rho'_\varkappa(x, y)\, dx = e_\Delta(y) = \int\limits_\Delta \rho'_\varkappa(y, x)\, dx. \tag{2.1.2}$$

При этом свойства (ii) — (iv) будут выполнены. Чтобы построить ядро $\rho'_\varkappa$, выберем сначала четную положительную C^∞-функцию $w(t)$ с носителем в интервале $[-{}^1/_2, {}^1/_2]$ и интегралом, равным 1. Определим $\rho_\varkappa(x) = \varkappa^2 w(\varkappa x_0)\, w(\varkappa x_1)$, где $x = (x_0, x_1)$, как приближенную меру Дирака. При $x \in \Delta$ обозначим через $x_\Delta^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, четыре точки (включая $x \equiv x_\Delta^{(1)}$), получаемые отражением относительно двух ближайших к x сторон квадрата Δ. Затем положим

$$\rho'_\varkappa(x, y) = \sum_\Delta \sum_{i=1}^{4} \rho_\varkappa\left(x_\Delta^{(i)} - y\right) e_\Delta(x)\, e_\Delta(y). \tag{2.1.3}$$

Проверим, что

$$\int\limits_\Delta \rho'_\varkappa(x, y)\, dx = \sum_{i=1}^{4} \int \rho_\varkappa\left(x_\Delta^{(i)} - y\right) e_\Delta(y)\, dx =$$
$$= \int \rho_\varkappa(x - y)\, e_\Delta(y)\, dx = e_\Delta(y).$$

Аналогично,

$$\int\limits_\Delta \rho'_\varkappa(y, x)\, dx = e_\Delta(y)$$

и, следовательно, имеет место (2.1.2). Неравенство

$$\left\| \left(f_\varkappa - f\right) e_\Delta \right\|_{L_p(\Delta)} \leqslant O(\varkappa^{-\varepsilon}) \| f \|_S \tag{2.1.4}$$

представляет собой точное выражение свойства (i). Здесь $2 \leqslant p < \infty$ и $\| f \|_S$ обозначает соболевскую норму в пространстве функций, частные производные которых принадлежат пространству $L_{p'}(\Delta)$. Если $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} f, \partial\Delta) \geqslant \varkappa^{-1}$, то оператор $\rho_\varkappa$ есть оператор свертки и (2.1.4) получается, например, переходом к преобразованию Фурье. Пусть $\partial = \{x \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Delta) \leqslant \varkappa^{-1}\}$. Согласно неравенству Гёльдера, при $p' > p$

$$\| f \|_{L_p(\partial)} \leqslant \varkappa^{-\varepsilon} \| f \|_{L_{p'}(\partial)},$$

что и доказывает (2.1.4).

Константа викова упорядочения для обрезанного поля $\varphi_\varkappa$ равна

$$c_\varkappa(x) = \int \varphi_\varkappa(x)^2 \, d\Phi =$$
$$= \int \rho_\varkappa(x, y) \rho_\varkappa(x, z) C(y - z) \, dy \, dz = (\rho_\varkappa C \rho_\varkappa)(x, x). \quad (2.1.5)$$

Кроме того,

$$c_\varkappa(x) \leqslant O(\ln \varkappa), \quad (2.1.6)$$

поскольку

$$c_\varkappa(x) \leqslant \sup_y \int \rho_\varkappa(x, z) C(y - z) \, dz \leqslant$$
$$\leqslant 4 \sup_y \int \rho_\varkappa(y - z) C(z) \, dz = O(\ln \varkappa).$$

Наконец, заметим, что в операторной норме в $L_2(\Delta)$

$$\| e_\Delta \rho_\varkappa e_\Delta \| \leqslant 4. \quad (2.1.7)$$

Мы воспользовались здесь определением (2.1.3) и тем фактом, что оператор свертки с $\rho_\varkappa(x)$ имеет иорму 1. Таким образом,

$$\int_\Delta |f_\varkappa|^2 \, dx \leqslant 16 \int_\Delta |f|^2 \, dx. \quad (2.1.8)$$

2.2. Случай переменной массы. В этом параграфе мы рассмотрим ковариационный оператор для гауссовой меры, у которой масса зависит от точки пространства. Пусть $\omega(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$0 < \omega(x) \leqslant 1, \quad \inf \omega(x) = \omega > 0, \quad (2.2.1)$$

и пусть $1 - \omega(x)$ — функция с компактным носителем. В приводимой ниже формуле (2.2.2) $\omega(x)^{1/2}$ нграет роль массы. Рассмотрим меру

$$d\psi_\omega(s) = Z^{-1} \exp\left(\frac{1}{2} \int (1 - \omega(x)) :\psi(x)^2: dx\right) d\psi_1(s), \quad (2.2.2)$$

где

$$Z = \int \exp\left(\frac{1}{2} \int (1 - \omega(x)) :\psi(x)^2: dx\right) d\psi_1(s). \quad (2.2.3)$$

Ввиду неравенства Иенсена, $Z \neq 0$. В самом деле,

$$\int e^V \, d\psi \geqslant e^{\int V \, d\psi},$$

и поэтому

$$Z^{-1} \leqslant \exp\left[O(1) \int (1 - \omega) \, dx\right]. \quad (2.2.4)$$

Таким образом, $d\psi_\omega(s)$ есть гауссова мера со средним нуль и ковариацией

$$C_\omega(s) = \sum_{j=0}^{\infty} C(s)^{1/2}\left[C(s)^{1/2}(1-\omega)C(s)^{1/2}\right]^j C(s)^{1/2} = \\ = \left[C(s)^{-1} - (1-\omega)^{-1}\right]. \tag{2.2.5}$$

Сходимость ряда вытекает из того факта, что $0 \leqslant 1 - \omega(x) \leqslant \leqslant 1 - \omega < 1$ и $\|C(s)\| \leqslant 1$. При $s = 1$

$$(-\Delta + 1 - \omega(x))^{-1} = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} (-\Delta + 1)^{-1/2}\left[(-\Delta+1)^{-1/2}(1-\omega)(-\Delta+1)^{-1/2}\right]^j(-\Delta+1)^{-1/2}. \tag{2.2.6}$$

Пусть Δ_N — оператор Лапласа с нулевым условием Неймана на некотором множестве линий решетки в $\mathbb{R}^2$, и пусть

$$C_\omega(s, t) = (1-t)\,C_\omega(s) + t\,(-\Delta_N + \omega)^{-1}. \tag{2.2.7}$$

Заметим, что

$$-\Delta_N \leqslant -\Delta_\Gamma; \tag{2.2.8}$$

таким образом,

$$C(s) \leqslant (-\Delta_N + 1)^{-1} \tag{2.2.9}$$

и ввиду (2.2.5)

$$C_\omega(s) \leqslant C_{\omega}(s) \leqslant (-\Delta_N + \omega)^{-1}, \tag{2.2.10}$$

где

$$C_{\omega}(s) = \left[C(s)^{-1} - (1-\omega)\right]^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt} C_\omega(s, t) = (-\Delta_N + \omega)^{-1} - C_\omega(s) \geqslant 0. \tag{2.2.11}$$

2.3. Поле флюктуаций. В этом пункте мы оценим поле флюктуаций $\delta\varphi(x)$ и его сдвиг $\delta\psi(x) = \delta\varphi(x) - \delta g(x)$. Здесь $g(x)$ — приближенное классическое значение намагниченности (I. 4.4). Мы воспользуемся теорией обусловленности [20] и начнем с прямого доказательства неравенства обусловленности.

Предложение 2.3.1. *Пусть V — фиксированный (не зависящий от s и t) полином по переменной ψ, и пусть $:V:$ обозначает его виково упорядочение с переменной ковариацией $C_\omega(s, t)$. Тогда*

$$\int e^{-:V:}\, d\psi_\omega(s, t) \tag{2.3.1}$$

есть возрастающая функция s и t.

Доказательство. Мы проведем доказательство только для случая переменной t. Пусть $Z(s, t)$ обозначает интеграл (2.3.1). Тогда

$$\frac{dZ(s, t)}{dt} = -\int e^{-:V:} \frac{d:V:}{dt} d\psi_\omega(s, t) + \int e^{-:V:} \frac{d}{dt} d\psi_\omega(s, t) =$$
$$= \int \left(-\frac{d:V:}{dt} + \frac{1}{2}\Delta_\psi \cdot \frac{dC_\omega(s, t)}{dt}\right) e^{-:V:} d\psi_\omega(s, t),$$

где, как и в [16],

$$\Delta_\psi \cdot K \equiv \int K(x, y) \frac{\delta^2}{\delta\psi(x)\,\delta\psi(y)}\, dx\, dy.$$

Член $-d:V:/dt$ сокращается с $2^{-1}(\Delta_\psi \cdot dC_\omega/dt):V:$. Следовательно,

$$\frac{dZ(s, t)}{dt} = \frac{1}{2}\int \left[\int \frac{\delta:V:}{\delta\psi(x)} \frac{d}{dt} c(x, y) \frac{\delta:V:}{\delta\psi(y)}\, dx\, dy\right] e^{-:V:} d\psi_\omega(s, t).$$

Здесь $c(x, y)$ обозначает ядро оператора $C_\omega(s, t)$. Ввиду равенства (2.2.11) $dC_\omega/dt \geqslant 0$; таким образом, dc/dt есть положительная билинейная форма и квадратная скобка под знаком внешнего интеграла неотрицательна. Следовательно, Z возрастает по t.

Предложение 2.3.2. *Пусть* $\zeta \leqslant \pi^2/32$. *Существует константа* K (*не зависящая от* ω, ω, s, t, ζ, $\varkappa$), *такая, что*

$$\int \exp\left(\int_Y \zeta :(\delta\psi_\varkappa)^2: dx\right) d\psi_\omega(s, t) \leqslant \exp(K\zeta^2 |Y|).$$

Доказательство. Мы можем предположить, что виково упорядочение в показателе экспоненты проводится с ковариацией $C_\omega(s, t)$. В самом деле, изменение $s = 1 \to s \leqslant 1$ уменьшает виковы вычеты и увеличивает интеграл. Последующие замены $t = 0 \to t \geqslant 0$ и $\omega = 1 \to \omega \leqslant 1$ монотонны, но в обратном направлении, и поэтому достаточно проверить нашу оценку в случае виковой константы с $\omega = 0$, $t = 1$. В этом случае мы используем тот факт, что $\delta\psi_\varkappa$ ортогонально к постоянной функции e_Δ, и получаем, что изменение виковой константы имеет порядок $O(\zeta\,|Y|)$. Поэтому применимо предложение 2.3.1. Выберем в качестве Δ_N оператор с условиями Неймана на всех ребрах единичной решетки. Тогда значение $t = 1$ дает верхнюю оценку. Однако при $t = 1$ интеграл разлагается в произведение по единичным квадратам решетки, и поэтому достаточно рассмотреть отдельный квадрат.

Пусть P_Δ обозначает проекцию в L_2 на вектор e_Δ. Интеграл, соответствующий отдельному квадрату решетки, равен

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\ln(1-A)-\frac{1}{2}\operatorname{tr}A\right),$$

где A определяется равенством

$$A=\zeta\left[-\Delta_N+\omega\right]^{-1}\left[\rho_\varkappa^2-P_\Delta\right].$$

Последняя экспонента не превосходит $\exp(\mathrm{const}\,\|A\|^2)$, если $\|A\|\leqslant 1/2$. Поскольку $\rho_\varkappa^2-P_\Delta$ переводит в нуль основное состояние e_Δ оператора Δ_N и $-\Delta_N\upharpoonright\{e_\Delta\}^\perp\geqslant\pi^2$, обратный оператор $[-\Delta_N+\omega]^{-1}$ равномерно ограничен при $0\leqslant\omega\leqslant 1$. Более того, поскольку $\|\rho_\varkappa\|^2\leqslant 16$, условие $\|A\|\leqslant 1/2$ выполняется при $\zeta\leqslant\pi^2/32$. Равномерная по ω оценка нормы Гильберта — Шмидта выводится аналогичным образом. (К сожалению, оценка $\|A\|\leqslant 1-\varepsilon$ пропущена в [18].)

Напомним, что $\psi=\varphi-g$, и положим $\delta g=g(x)-\int\limits_\Delta g(x)\,dx$, $x\in\Delta$.

Предложение 2.3.3. *Пусть* $\zeta\leqslant\pi^2/64$. *Существует константа* K (*не зависящая от* ω, ω, s, t, ζ, $\varkappa$), *такая, что*

$$\int\exp\left(\int\limits_Y\zeta:(\delta\varphi_\varkappa)^2:dx\right)d\psi_\omega(s,t)\leqslant\exp\left(\zeta^2K\int\limits_Y(1+|\nabla g|^2)\,dx\right).$$

Доказательство. Напишем разложение

$$:\delta\varphi_\varkappa(x)^2:=:\delta\psi_\varkappa(x)^2:+2\,\delta\psi_\varkappa(x)\,\delta g_\varkappa(x)+\delta g_\varkappa(x)^2. \tag{2.3.2}$$

Мы утверждаем, что

$$(16)^{-1}\int\limits_Y(\delta g_\varkappa)^2\,dx\leqslant\int\limits_Y(\delta g)^2\,dx\leqslant\pi^{-2}\int\limits_Y(\nabla g)^2\,dx. \tag{2.3.3}$$

Первое неравенство вытекает из оценки (2.1.8), тогда как второе следует из оценки

$$\pi\leqslant-\Delta_N\upharpoonright(\{e_\Delta\}^\perp),$$

как и в доказательстве предложения 2.3.2.

Неравенство Шварца позволяет рассмотреть отдельно члены $:\delta\psi^2:$ и $\delta\psi$ из разложения (2.3.2) с заменой ζ на 2ζ. Интеграл с $:\delta\psi^2:$ ограничен, согласно предложению 2.3.2.

Интеграл с $\delta\psi$ можно явно вычислить:

$$\exp\left[8\zeta^2 \int\limits_{Y\times Y} \delta g_\varkappa(x)\,(\rho_\varkappa^* C\rho_\varkappa)(x,\ y)\,\delta g_\varkappa(y)\,dx\,dy\right] \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[O(1)\,\zeta^2 \int\limits_Y (\nabla g)^2\,dx\right]. \qquad (2.3.4)$$

Здесь $\rho_\varkappa$ — оператор импульсного обрезания и $C = C_\omega(s,\ t)$. Мы воспользовались в (2.3.4) оценкой

$$0 \leqslant E\rho_\varkappa C\rho_\varkappa E \leqslant E\rho_\varkappa(-\Delta_N)^{-1}\rho_\varkappa E \leqslant (4/\pi)^2 E,$$

справедливой на подпространстве $\{e_\Delta\}^\perp$. Здесь E — оператор умножения на характеристическую функцию множества Y.

2.4. Границы фаз: главный член. Возникновение границы фаз ($\Sigma \neq \varnothing$) отражается на сомножителе $\exp(-F)$ в формуле (I. 4.6), определяющей основную меру $d\varphi_{\Lambda,\Sigma}$. Этот сомножитель учитывает увеличение кинетической энергии $|\nabla g|^2$ в плотности взаимодействия, возникающее от замены переменных $\varphi \to \psi = \varphi - g$.

Функции F_i в формулах (I. 4.7) при условии, что $\operatorname{dist}(\partial Y,\ \Sigma) \geqslant L/2$, являются локальными. Локальность, если воспользоваться обозначением (I. 4.8d), означает, что

$$F_i(Y,\ \Sigma) = F_i(Y,\ \Sigma \cap Y)$$

не зависит от $\Sigma \sim Y$ (см. также лемму I. 4.1). Основной вклад в F вносит слагаемое F_1, которое мы теперь оценим с помощью длины $|\Sigma(Y)|$ границ фаз в Y.

Предложение 2.4.1. *Пусть $\partial Y \subset X$. Тогда*

$$\lambda^{-1}|4\ln\lambda|^{-4}|X^0 \cap Y| \leqslant (\xi_+ - \xi_-)^2 |\Sigma \cap Y| \leqslant 12\eta^{-1} F_1(Y,\ \Sigma). \qquad (2.4.1)$$

Доказательство. Первое неравенство вытекает из определения (I. 5.12) множества X^0. Для каждого сегмента $\gamma \subset \Sigma \cap Y$ обозначим через $X^0(\gamma)$ множество точек, отстоящих от γ на расстояние не больше L. Тогда

$$X^0 \cap Y \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Sigma \cap Y} X^0(\gamma).$$

Действительно, если $\Delta \subset X^0$, то, согласно определению X^0, $\Delta \subset X^0(\gamma)$ при некотором $\gamma \in \Sigma$. Более того, если вдобавок $\Delta \subset Y$, то $\gamma \subset Y$, поскольку из включения $\partial Y \subset X$ вытекает, что $\partial Y \cap X^0 = \varnothing$. Таким образом,

$$(2L)^{-2}|X^0 \cap Y| \leqslant |\Sigma \cap Y|. \qquad \mathbf{(2.4.2)}$$

Так как $L = (\ln \lambda)^2$ и поскольку каждый скачок имеет размер $\xi_+ - \xi_- = (2\lambda)^{-1/2} + O(\mu)$, первое из доказываемых неравенств выполнено.

Для того чтобы доказать второе неравенство, заметим, что

$$g(x) - g(x') = \int_{x'}^{x} \nabla g \, ds,$$

где $x \in \Delta$, $x' \in \Delta'$ и Δ, Δ' — соседние квадраты с общим ребром γ. Проведем интегрирование вдоль линий, параллельных сторонам квадратов Δ, Δ'. По неравенству треугольника и неравенству Шварца

$$|h(x) - h(x')|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (|h(x) - g(x)| + |g(x) - g(x')| + |g(x') - h(x')|)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 3\left(|h(x) - g(x)|^2 + |h(x') - g(x')|^2 + \int_{x'}^{x} |\nabla g|^2 \, ds\right).$$

Теперь мы проинтегрируем по парам квадратов Δ, Δ' и просуммируем по множеству $\mathscr{N}(Y)$ пар соседних квадратов из Y. Так как

$$\sum_{\mathscr{N}(Y)} (h(\Delta) - h(\Delta'))^2 = (\xi_+ - \xi_-)^2 |\Sigma \cap Y|, \tag{2.4.3}$$

второе неравенство вытекает из (I. 4.7а).

2.5. Границы фаз: оценки погрешностей. В предыдущем пункте мы обнаружили, что

$$e^{-F_1(Y)} \leqslant e^{-a\eta\lambda^{-1} |\Sigma \cap Y|} \tag{2.5.1}$$

с некоторой константой a. Теперь мы рассмотрим члены F_2, F_3 и F_4, учитывающие погрешности. Основные результаты содержатся в двух оценках.

Предложение 2.5.1. *Пусть $\partial Y \subset X$, ∂Y является контуром Дирихле и мера $d\psi_\omega(s)$ задана формулой* (2.2.2). *Пусть* $0 < \eta_0 \leqslant 1$, *и пусть* $\lambda \leqslant \lambda(\eta_0, \omega)$ *достаточно мало. Тогда*

$$\int e^{-O\left(\eta_0^{-1}\right) F_3(Y)} \, d\psi_\omega(s) \leqslant e^{\lambda F_1(Y)}. \tag{2.5.2}$$

Предложение 2.5.2. *Допустим, что выполняются условия предложения* 2.5.1 *и, кроме того,* $0 \leqslant \zeta < \pi^2/2^7$, $\omega \upharpoonright \sim \Lambda = 1$, *параметр p превосходит* 1 *и* $Y_t \subset Y \cap \Lambda$. *Тогда существует такая константа K (не зависящая от* ω, ω, s, t, p, ζ, $\varkappa$, η, η_0), *что*

$$\int \exp\left[\zeta \int\limits_{Y_t} :\delta\varphi_\varkappa^2(x):\, dx - pF_4(Y)\right] d\psi_\omega(s) \leqslant$$
$$\leqslant \exp(K(|Y_t| + \zeta F_1(Y))) \exp(p^2(1-\eta) F_2(Y)). \qquad (2.5.3)$$

Лемма 2.5.3. *Пусть* $0 < \eta_0 \leqslant \eta \leqslant 1$, *и пусть* $\lambda \leqslant \lambda(\eta_0)$ *выбрано достаточно малым. Тогда*

$$0 \leqslant \eta_\zeta - \eta \leqslant \lambda^2. \qquad (2.5.4)$$

Доказательство. Напомним, что $\zeta = \zeta(x)$ введено ранее, после формулы (I. 4.3). Поскольку $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$,

$$\eta_\zeta - \eta = \eta\eta_\zeta(\eta^{-1} - \eta_\zeta^{-1}) =$$
$$= \eta\eta_\zeta \int (-\Delta + \eta)^{-1}(x)(1 - \zeta(x/L))\, dx \geqslant 0.$$

Интегрирование здесь проводится на самом деле по тем x, для которых $|x| \geqslant L/4$, и поэтому

$$\eta_\zeta - \eta \leqslant \eta_\zeta\eta \int\limits_{|x| \geqslant L/4} (-\Delta + \eta)^{-1}(x)\, dx \leqslant O(e^{-\eta L/4}) \leqslant O(\lambda^2);$$

в последнем неравенстве λ должно быть мало, поскольку $L = |\ln \lambda|^2$.

Лемма 2.5.4. *Пусть* $0 < \eta_0 \leqslant \eta \leqslant 1$, *и пусть* $\lambda \leqslant \lambda(\eta_0)$ *достаточно мало. Тогда*

$$\|g - g_c\|_\infty + \|\nabla(g - g_c)\|_\infty \leqslant \lambda. \qquad (2.5.5)$$

Доказательство. Оценим разность $g - g_c$. Имеем

$$(g - g_c)(x) = (\eta_\zeta - \eta)\left((-\Delta + \eta)^{-1} h\right)(x) +$$
$$+ \eta_\zeta \int (-\Delta + \eta)^{-1}(x - y)\left[\zeta\left(\frac{x-y}{L}\right) - 1\right] h(y)\, dy.$$

Таким образом,

$$\|g - g_c\|_\infty \leqslant (\eta_\zeta - \eta)\left\|(-\Delta + \eta)^{-1} h\right\|_\infty +$$
$$+ \text{const}\, \|h\|_\infty\, \eta_\zeta\eta^{-1}(1 + \eta L^2)\, e^{-(\eta^{1/2}L/4)}. \qquad (2.5.6)$$

Ввиду леммы **2.5.3** и оценки

$$\|(-\Delta + \eta)^{-1} h\|_\infty \leqslant \eta^{-1}\|h\|_\infty \leqslant \text{const}\, \eta_0^{-1}\lambda^{-1/2}$$

первый член в (2.5.6) ограничен величиной $\lambda/4$ при малых λ. Что касается второго члена, то мы, следуя доказательству леммы 2.5.3, оценим его при малых λ величиной

$$\mathrm{const}\,\lambda^{-1/2}\eta_0^{-1}\lambda^2 < \lambda/4,$$

откуда $\|g - g_c\| \leqslant \lambda/2$. Норму $\|\nabla(g - g_c)\|_\infty$ можно оценить аналогично, используя тот факт, что $\nabla(-\Delta + \eta)^{-1}$ — ограниченный оператор из L_∞ в L_∞.

Доказательство предложения 2.5.1. Представим $Y = \bigcup_{i=1}^{\nu} Y_i$ как объединение связных компонент. Обе части неравенства (2.5.2) разлагаются в произведения по компонентам Y_i, поэтому без ограничения общности можно считать Y связным. Тогда ∂Y состоит из конечного числа замкнутых кривых, и каждая компонента связности дополнения $\mathbb{R}^2 \sim Y$ в качестве своей границы имеет ровно одну из этих кривых. В этом случае $\Sigma \cap Y$ представляет собой набор границ фаз в $\mathbb{R}^2$, который определяет новый выбор значений спинов, и этот новый выбор согласуется с конфигурацией $\{\sigma_i\} = \Sigma$ в Y. Определим h_Y, $g_{Y,c}$ и g_Y так же, как в § I.4, воспользовавшись $\Sigma \cap Y$ вместо Σ. По лемме I.4.1

$$(-\Delta + \eta)(g_Y - g_{Y,c}) = \begin{cases} (-\Delta + \eta)(g - g_c) & \text{на} \quad Y, \\ 0 & \text{на} \ \sim Y. \end{cases} \tag{2.5.7}$$

Поэтому

$$F_3(Y) = \langle \psi, (-\Delta + \eta)(g_Y - g_{Y,c}) \rangle$$

и

$$\int e^{aF_3(Y)}\, d\psi_\omega(s) = \exp\left[2^{-1}a^2 \|C_\omega(s)^{1/2}(-\Delta + \eta)(g_Y - g_{Y,c})\|^2\right]. \tag{2.5.8}$$

Так как

$$C_\omega(s) \leqslant (-\Delta + \omega)^{-1},$$

(2.5.8) мажорируется величиной

$$\exp\left[2^{-1}a^2\omega^{-1}\langle g_Y - g_{Y,c}, (-\Delta + \eta)(g_Y - g_{Y,c})\rangle\right].$$

Согласно (2.5.1) и лемме 2.5.4, скалярное произведение здесь ограничено величиной $2\lambda^2 |X^0 \cap Y|$, что ввиду предложения 2.4.1 завершает доказательство.

Доказательство предложения 2.5.2. Согласно теории обусловленности, мы можем положить $t = 1$, с тем чтобы интеграл разлагался в произведение. Сомножители, ассоциированные с квадратами $\Delta \subset Y_t$, ограничены ввиду предложения 2.3.3, поскольку F_4 в них не входит. В случае квадратов $\Delta \not\subset \Lambda$ в интеграл не войдет $\delta\varphi$, поскольку $Y_t \subset \Lambda$, а также не войдет ω, поскольку $\omega=1$ на $\sim\Lambda$. Таким образом,

$$\int e^{-pF_1(Y)}\,d\psi_\omega(s,\ t=1)=$$
$$=\exp\left(\frac{1}{2}p^2(1-\eta)^2\int_{\sim\Lambda}(g-\xi_+)(-\Delta_N+1)^{-1}(g-\xi_+)\,dx\right)\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left(p^2(1-\eta)F_2(Y)\right).$$

2.6. Локализация спинов. Мы приведем некоторые простые оценки функций $\chi_\pm$, задающих локализацию значений спинов и введенных в (I. 3.5). В действительности мы будем оценивать функции вида

$$\chi_{a,b}(\xi)=\pi^{-1/2}\int_a^b e^{-(\xi-z)^2}\,dz,$$

которые можно использовать для локализации значений спинов в моделях с полиномами взаимодействия более общего вида.

Лемма 2.6.1. *Пусть* $\theta<1$. *Существует такая константа* $K=K(\theta)$, *что*

$$\chi_{a,b}(\xi)\leqslant Ke^{-\theta(\xi-a)^2},\quad \xi\leqslant a, \tag{2.6.1}$$
$$\chi_{a,b}(\xi)\geqslant 1-K\left[e^{-\theta(\xi-a)^2}+e^{-\theta(\xi-b)^2}\right],\quad a\leqslant\xi\leqslant b, \tag{2.6.2}$$
$$\chi_{a,b}(\xi)\leqslant Ke^{-\theta(\xi-b)^2},\quad b<\xi. \tag{2.6.3}$$

Доказательство. При $\xi\leqslant a$ (и аналогично при $\xi>b$)

$$\chi_{a,b}(\xi)\leqslant e^{-\theta(\xi-a)^2}\pi^{-1/2}\int_a^b e^{-(1-\theta)(\xi-z)^2}\,dz\leqslant(1-\theta)^{-1/2}e^{-\theta(\xi-a)^2}.$$

При $a\leqslant\xi\leqslant b$ мы полагаем $\chi_{a,b}=1-\chi_{-\infty,a}-\chi_{b,\infty}$ и используем предыдущую выкладку.

Лемма 2.6.2. *При* $\theta<1$ *существует такая константа* $K=K_\theta<\infty$, *что для всех целых* $n\geqslant 1$

$$\left|\frac{d^n}{d\xi^n}\chi_{a,b}(\xi)\right|\leqslant Kn!\left(e^{-\theta(\xi-a)^2}+e^{-\theta(\xi-b)^2}\right).$$

Доказательство. При $0<\eta<1$ мы получаем из интегральной формулы Коши оценку

$$\left|\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-(\xi-z)^2}\right|\leqslant Kn!e^{-\eta(\xi-z)^2}$$

при вещественных ξ, z. Для $\xi \leqslant a$ или $\xi > b$ требуемая оценка выводится отсюда, как и в лемме 2.6.1. При $a \leqslant \xi \leqslant b$ мы пользуемся тождеством

$$\frac{d^n}{d\xi^n}\chi_{a,b} = -\frac{d^n}{d\xi^n}(\chi_{-\infty,a} + \chi_{b,\infty}),$$

а затем поступаем так же, как выше.

3. ОЦЕНКА ВАКУУМНОЙ ЭНЕРГИИ

3.1. Нижняя оценка викова упорядочения. В этом пункте мы рассматриваем полином взаимодействия

$$:\mathscr{P}(\varphi_\varkappa(x)): = \lambda :\varphi_\varkappa(x)^4: - {}^1/_4 :\varphi_\varkappa(x)^2: - \mu\varphi_\varkappa(x) - E_c \quad (3.1.1)$$

при ограничениях: $0 < \lambda \leqslant {}^1/_2$, $0 \leqslant \mu \leqslant \lambda^2$, $E_c = -(64\lambda)^{-1} + O(\lambda^2)$, где виково упорядочение проводится по отношению к ковариации $(-\Delta + 1)^{-1}$. По поводу дальнейших деталей см. § I. 2.

Теорема 3.1.1. *Пусть* $\eta \leqslant 10^{-2}$ *и* $81\eta \leqslant \zeta$. *Тогда существует такая константа* $b = b(\zeta)$, *что для любого полинома* $:\mathscr{P}(\varphi_\varkappa(x)):$ *описанного выше вида, любого* $x \in \Delta$ *и любого* Σ

$$:\mathscr{P}(\varphi_\varkappa(x)): - \eta :(\varphi_\varkappa(x) - h(x))^2: - \ln\chi_{\sigma(\Delta)}(\bar\varphi(\Delta)) \geqslant$$
$$\geqslant -b(\zeta)\ln^2\varkappa - \zeta :\delta\varphi_\varkappa(x)^2:. \quad (3.1.2)$$

Доказательство. Определим функцию τ равенством

$$\tau(x) = :\mathscr{P}(\varphi_\varkappa(x)): - \eta :(\varphi_\varkappa(x) - h)^2: + \zeta :\delta\varphi_\varkappa(x)^2: =$$
$$= \mathscr{P}(\varphi_\varkappa(x)) - \eta(\varphi_\varkappa(x) - h)^2 + \zeta\delta\varphi_\varkappa(x)^2 - 6\lambda c_\varkappa\varphi_\varkappa^2 +$$
$$+ 3\lambda c_\varkappa^2 + \eta c_\varkappa - \zeta\delta c_\varkappa,$$

где $c_\varkappa$ и $\delta c_\varkappa = O(\ln\varkappa)$ — константы викова упорядочения, содержащиеся в членах с $\varphi_\varkappa(x)$ и $\delta\varphi_\varkappa(x)$ соответственно. Мы установим оценку

$$\tau(x) - \ln\chi_{\sigma(\Delta)}(\Delta) \geqslant -O(1)\ln^2\varkappa, \quad (3.1.3)$$

из которой вытекает утверждение теоремы.

Заметим, что при каждом $\varepsilon > 0$ имеет место оценка (с учетом того, что $\mu\lambda \leqslant \lambda^3 \leqslant \lambda^2$)

$$\lambda(6c_\varkappa + \varepsilon/4)\varphi_\varkappa^2 + \varepsilon\mu\lambda\varphi_\varkappa \leqslant \varepsilon\lambda^2\varphi_\varkappa^4 + (2\varepsilon)^{-1}(6c_\varkappa + \varepsilon/4)^2 + 2\varepsilon\lambda^3 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\lambda^2\varphi_\varkappa^4 + O(\varepsilon^{-1})\ln^2\varkappa.$$

Аналогично, $|\varepsilon\lambda E_c| \leqslant O(1)$, и поэтому

$$\tau(x) \geqslant (1 - \varepsilon\lambda)\mathscr{P}(\varphi_\varkappa(x)) - \eta(\varphi_\varkappa - h)^2 + \zeta(\delta\varphi_\varkappa)^2 - O(\varepsilon^{-1})\ln^2\varkappa. \quad (3.1.4)$$

Зафиксируем теперь $x \in \Delta$ и зададимся конкретными значениями средних $h(\Delta)$ и $\varphi(\Delta)$. Это выделит нам ряд частных случаев, для которых мы должны доказывать (3.1.3). Мы рассмотрим подробно случай $h(\Delta) = -\xi_+$. Оценки для $h(\Delta) = \xi_+$ будут точно такими же, если мы всюду в них поменяем местами ξ_+ и $-\xi_+$.

Случай 1. $h(\Delta) = -\xi_+$ и $|\varphi_\varkappa(x) - \xi_+| > \xi_+/3$. В этом случае $h(\Delta)$ локализовано в одной из ям W-образного потенциала, тогда как $\varphi_\varkappa(x)$ локализовано вне другой ямы. Запишем $\mathscr{P}(\xi)$ в виде

$$\mathscr{P}(\xi) = \lambda\left(\xi - (8\lambda)^{-1/2}\right)^2\left(\xi + (8\lambda)^{-1/2}\right)^2 - \mu\xi - \delta E_c,$$

где $\delta E_c = E_c(\mu) - E_c(\mu = 0)$ — сдвиг в классической плотности энергии для $\mu > 0$. В силу (I.2.8)

$$|\delta E_c| \leqslant O\left(\lambda^{1/2}\right).$$

Используя (I.2.6), мы видим, что если $|\xi - \xi_+| > \xi_+/3$, то для некоторого $\delta > 0$

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\xi) &\geqslant \delta(\xi + \xi_+)^2 - O(\lambda)(\xi - \xi_-) - O(\lambda) \geqslant \\ &\geqslant \delta(1 - \varepsilon\lambda)(\xi + \xi_+)^2 - O(\varepsilon^{-1}).\end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (3.1.4), получаем

$$\begin{aligned}\tau &\geqslant [\delta(1 - \varepsilon\lambda)^2 - \eta](\varphi_\varkappa(x) + \xi_+)^2 + \zeta(\delta\varphi_\varkappa)^2 - O(\varepsilon^{-1})\ln^2\varkappa \geqslant \\ &\geqslant O(\varepsilon^{-1})\ln^2\varkappa. \qquad (3.1.5)\end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы выбрали $\varepsilon = 10^{-3}$ и $\eta < 10^{-2}$ так, что коэффициент при $(\varphi + \xi_+)^2$ положителен. Поскольку $\chi_\sigma \leqslant 1$ и $-\ln\chi_\sigma \geqslant 0$, мы приходим к (3.1.3).

Случай 2. $h(\Delta) = -\xi_+$, $|\varphi_\varkappa(x) - \xi_+| \leqslant \xi_+/3$. В этом случае h и $\varphi_\varkappa(x)$ локализованы в различных ямах. Напомним, что $\varphi_\varkappa(x) = \bar{\varphi}_\varkappa(x) + \delta\varphi_\varkappa(x)$; следовательно, в области, где $|\varphi_\varkappa - \xi_+| \leqslant \xi_+/3$, либо (a) $\delta\varphi_\varkappa \geqslant \xi_+/3$, либо (b) $\bar{\varphi} \geqslant \xi_+/3$.

Подслучай (*a*). Оценим снизу правую часть (3.1.4), выбросив из нее положительный член $\mathscr{P}(\varphi_\varkappa)$. Тогда

$$\tau \geqslant -\eta(\varphi_\varkappa + \xi_+)^2 + \zeta(\delta\varphi_\varkappa)^2 - O(\varepsilon^{-1})\ln^2\varkappa.$$

Воспользовавшись тем, что $(\varphi_\varkappa - \xi_+)^2 \leqslant \xi_+^2/9$, получаем

$$(\varphi_\varkappa + \xi_+)^2 \leqslant 3(\varphi_\varkappa - \xi_+)^2 + 6\xi_+^2 \leqslant 9\xi_+^2.$$

Таким образом, при $\eta \leqslant \zeta/81$

$$\begin{aligned}\tau &\geqslant -9\eta\xi_+^2 + \zeta(\delta\varphi_\varkappa)^2 - O(\varepsilon^{-1})\ln^2\varkappa \geqslant \\ &\geqslant (9^{-1}\zeta - 9\eta)\xi_+^2 - O(\varepsilon^{-1})\ln^2\varkappa \geqslant \\ &\geqslant -O(\varepsilon^{-1})\ln^2\varkappa. \qquad (3.1.6)\end{aligned}$$

Подслучай (*b*). Оценим снизу левую часть (3.1.4) (воспользовавшись тем, что $\mathscr{P}(\varphi_\varkappa) \geqslant 0$):

$$\begin{aligned}\tau &\geqslant -\eta(\varphi_\varkappa + \xi_+)^2 + \zeta(\delta\varphi_\varkappa)^2 - O(\varepsilon^{-1})\ln^2\varkappa \geqslant \\ &\geqslant -2\eta(\bar\varphi + \xi_+)^2 + (\zeta - 2\eta)(\delta\varphi_\varkappa)^2 - O(\varepsilon^{-1})\ln^2\varkappa. \qquad (3.1.7)\end{aligned}$$

Заметим, что ввиду условия (b)

$$(\bar\varphi + \xi_+)^2 \leqslant 2O(\bar\varphi^2).$$

Таким образом, при $\eta \leqslant \zeta/2$

$$\tau \geqslant -4\eta O(\bar\varphi^2) - O(\varepsilon^{-1})\ln^2\varkappa. \qquad (3.1.8)$$

Воспользуемся теперь леммой 2.6.1 и тем фактом, что χ_σ и $\varphi_\varkappa$ локализованы в различных ямах. Тогда при $\theta < 1$

$$-\ln\chi_{\sigma(\Delta)} \geqslant \theta\bar\varphi^2 - O(1).$$

Выберем $\eta < 1/80$ и $\theta \geqslant 1/2$. Тогда

$$\tau - \ln\chi_{\sigma(\Delta)} \geqslant -O(\varepsilon^{-1})\ln^2\varkappa. \qquad (3.1.9)$$

Оценки (3.1.5), (3.1.6) и (3.1.9) доказывают неравенство (3.1.3) и тем самым теорему 3.1.1.

Теперь мы получим более сильную оценку для викова упорядочения, заменив χ_σ ее производной χ'_σ некоторого порядка. В этом случае $\chi'_\sigma(\bar\varphi)$ имеет максимум вблизи границы области локализации, т. е. вблизи $\bar\varphi = 0$. Однако эта область близка к относительному максимуму $\mathscr{P}(0) = O(\lambda^{-1})$ нашего W-образного потенциала $\mathscr{P}$. Пусть $n(\Delta)$ обозначает порядок рассматриваемой производной χ_σ в Δ.

Теорема 3.1.2. *Пусть* $\zeta > 0$. *Существуют такие константы* $a = a(\zeta) > 0$ *и* $b = b(\zeta)$, *что для* $\mathscr{P}$, η, σ *и* χ, *о которых говорится в теореме* 3.1.1, *и* $n(\Delta) > 0$

$$\begin{aligned}&:\mathscr{P}(\varphi_\varkappa(x)): - \eta :(\varphi_\varkappa(x) - h(x))^2: - \ln|\chi'_{\sigma(\Delta)}(\bar\varphi(\Delta))| \geqslant \\ &\qquad \geqslant a\lambda^{-1} - b\ln^2\varkappa - \zeta :\delta\varphi_\varkappa(x)^2: - \ln(n(\Delta)!). \qquad (3.1.10)\end{aligned}$$

Доказательство. Мы модифицируем здесь доказательство теоремы 3.1.1. Как и выше, достаточно разобрать подробно случай $h(\Delta) = -\xi_+$.

Случай 1. $h(\Delta) = -\xi_+$ и $|\varphi_\varkappa(x) - \xi_+| \geqslant \xi_+/3$. Как и в (3.1.5), существует константа $a_1 > 0$, не зависящая от λ, μ, η, $\varkappa$ и такая, что

$$\tau \geqslant a_1(\varphi_\varkappa + \xi_+)^2 + \zeta(\delta\varphi_\varkappa)^2 - O(1)\ln^2\varkappa. \tag{3.1.11}$$

Рассмотрим два подслучая:

$$\text{(i) } |\varphi_\varkappa(x) + \xi_+| \geqslant \xi_+/3, \qquad \text{(ii) } |\varphi_\varkappa(x) + \xi_+| \leqslant \xi_+/3.$$

В подслучае (i)

$$\tau \geqslant a_1\xi_+^2/9 - O(1)\ln^2\varkappa \geqslant a\lambda^{-1} - O(1)\ln^2\varkappa. \tag{3.1.12}$$

В подслучае (ii) либо

$$\text{(a) } |\delta\varphi_\varkappa| \geqslant \xi_+/3, \text{ либо (b) } |\bar{\varphi}| \geqslant \xi_+/3.$$

Если имеет место (a), то

$$\tau \geqslant \zeta\xi_+^2/9 - O(1)\ln^2\varkappa \geqslant a\lambda^{-1} - O(1)\ln^2\varkappa. \tag{3.1.13}$$

Если имеет место (b), то, по лемме 2.6.2, при $\theta < 1$

$$\begin{aligned} -\ln|\chi'_{\sigma(\Delta)}| &\geqslant \theta\bar{\varphi}^2 - O(1) - \ln(n!) \geqslant \\ &\geqslant \theta\xi_+^2/9 - O(1) - \ln(n!), \end{aligned}$$

где $n = n(\Delta)$ — порядок производной χ в Δ. Таким образом,

$$\tau - \ln\left|\chi'_{\sigma(\Delta)}\right| \geqslant a\lambda^{-1} - O(1) - \ln(n!). \tag{3.1.14}$$

Случай 2. $h(\Delta) = -\xi_+$, $|\varphi_\varkappa(x) - \xi_+| \leqslant \xi_+/3$. Здесь либо

$$\text{(a) } \delta\varphi_\varkappa \geqslant \xi_+/3, \text{ либо (b) } \bar{\varphi} \geqslant \xi_+/3.$$

Подслучай (a) рассматривается так же, как в теореме 3.1.1, а подслучай (b) — по аналогии с подслучаем (b) случая 1, разобранным выше. Это завершает доказательство для всех возможных случаев.

3.2. Вакуумная энергия. Основной технической оценкой в этом параграфе является оценка вакуумной энергии. При заданных Σ и $n(\Delta)$ пусть X' — объединение квадратов решетки Δ, в которых проводится дифференцирование функций χ_Δ, другими словами, для которых $n(\Delta) \neq 0$. Для произвольного множества Y пусть

$$Y_c = Y \cap (X^0 \cup X') \cap \Lambda \quad \text{и} \quad Y_d = (Y \sim Y_c) \cap \Lambda$$

обозначают соответственно области сходимости и слабой расходимости в оценках для вакуумной энергии.

Теорема 3.2.1. *Пусть $\eta > 0$ достаточно мало. Существуют строго положительные константы $a = a(\eta)$, $b = b(\eta)$ и $c = c(\eta)$ со следующим свойством. Пусть $Q(Y)$ определяется формулой* (I. 4.8). *Пусть $1 \leqslant p \leqslant 1 + \eta/30$. Тогда*

$$\int e^{-pQ(Y)} | \chi'_{\Sigma \cap Y} |^p \, d\psi_1(s) \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{\Delta \subset Y} (n(\Delta)!) \exp\left[-aF_1 - b\lambda^{-1/2} | Y_c | + c\lambda^{1/2} | Y_d |\right].$$

Идея доказательства состоит в том, чтобы выразить высокочастотный остаток $\delta V_\varkappa \equiv V - V_\varkappa$ через переменные ψ, а затем применить к $V_\varkappa \equiv V(\varphi_\varkappa)$ неравенства, доказанные в теоремах 3.1.1 и 3.1.2. Получаемая в результате оценка, хотя и полезна, является, однако, слишком грубой, и может быть улучшена, если учесть эффекты первого порядка теории возмущений по Y_d. В этой части доказательства возмущение V выражается через значения поля ψ. Вначале мы подробно изучим свойства коэффициентов при степенях ψ в выражениях для V и $\delta V_\varkappa$. Записывая

$$V(\Delta) = \sum_{j=0}^{4} \int_\Delta k_j(x) :\psi^j(x):_1 \, dx, \tag{3.2.1}$$

где $: :_1$ обозначает виково упорядочение с единичной массой, находим, что

$$k_4 = \lambda, \quad k_3 = 4\lambda g, \quad k_2 = {}^3/_4 (8\lambda g^2 - 1),$$
$$k_1 = {}^1/_2 g (8\lambda g^2 - 1) - \mu - \eta (g - h),$$
$$k_0 = g^2 (\lambda g^2 - {}^1/_4) - E_c - \mu g - {}^1/_2 \eta (g - h)^2.$$

Лемма 3.2.2. *Выполняются следующие оценки:*

$$| k_j(x) | \leqslant O(\lambda^{1/2}) + O(1) | g(x) - h(x) |, \quad j > 0,$$
$$| k_0(x) | \leqslant O(\lambda) + O(1) | g(x) - h(x) |^2,$$
$$| k_j(x) | \leqslant O(\lambda^{1/2}) \text{ на } X.$$

Доказательство. Заметим, что ввиду (I. 2.6) и (I. 4.2)

$$\| g \|_\infty \leqslant \| h \|_\infty \leqslant O(\lambda^{-1/2}). \tag{3.2.2}$$

Поэтому $| k_4(x) |$ и $| k_3(x) |$ имеют порядок $O(\lambda^{1/2})$. Покажем теперь, что

$$| 8\lambda g(x)^2 - 1 | \leqslant O(\lambda) + O(\lambda^{1/2}) | g(x) - h(x) |. \tag{3.2.3}$$

В самом деле, на основании (I. 2.6) и неравенств $0 \leqslant \mu \leqslant \lambda^2$

$$8\lambda h(x)^2 = 1 + O(\lambda).$$

Таким образом, согласно (3.2.2),

$$8\lambda g^2 - 1 = 8\lambda (g-h)(g+h) + O(\lambda) \leqslant O\left(\lambda^{1/2}\right)|g-h| + O(\lambda),$$

что доказывает (3.2.3). Используя неравенства (3.2.2) и (3.2.3), мы получаем требуемые оценки для $|k_2(x)|$, $|k_3(x)|$. Ввиду (I. 2.6)

$$E_c + (64\lambda)^{-1} = O\left(\mu\lambda^{-1/2}\right) \leqslant O(\lambda).$$

Поэтому

$$g^2\left(\lambda g^2 - \frac{1}{4}\right) - E_c = (64\lambda)^{-1}(8\lambda g^2 - 1)^2 + O(\lambda);$$

воспользовавшись еще раз неравенством (3.2.3), мы оцениваем $|k_0(x)|$, что и завершает доказательство.

Для данного квадрата решетки $\Delta \subset \Lambda$ основным полиномом, который следует оценить, является полином

$$W(\Delta) = V(\Delta) + \frac{1-\eta}{2}\int_\Delta :\psi^2:_1 dx =$$

$$= \int_\Delta :\mathscr{P}(\varphi):_1 dx - \frac{\eta}{2}\int_\Delta :(\varphi-h)^2:_1 dx; \qquad (3.2.4)$$

при этом полином $W_\varkappa(\Delta)$ определяется заменой в этом выражении φ на $\varphi_\varkappa$. Положим $\delta W_\varkappa(\Delta) = W(\Delta) - W_\varkappa(\Delta)$. Тогда

$$\delta W_\varkappa(\Delta) = \sum_{j=1}^{4}\int_\Delta \hat{k}_j(x)\left(:\psi^j(x): - :\psi^j_\varkappa(x):\right) dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{3}\int_\Delta \delta\hat{k}_j(x, \varkappa) :\psi^j_\varkappa(x): dx, \qquad (3.2.5)$$

где

$$\delta\hat{k}_3 = \lambda(g - g_\varkappa), \quad \delta\hat{k}_2 = 6\lambda\left(g^2 - g_\varkappa^2\right),$$

$$\delta\hat{k}_1 = {}^1/_2 g(8\lambda g^2 - 1) - {}^1/_2 g_\varkappa\left(8\lambda g_\varkappa^2 - 1\right) - \eta(g - g_\varkappa),$$

$$\delta\hat{k}_0 = g^2(\lambda g^2 - {}^1/_4) - g_\varkappa^2\left(\lambda g_\varkappa^2 - {}^1/_4\right) - \mu(g - g_\varkappa) -$$

$$- {}^1/_2\eta\left[(g-h)^2 - (g_\varkappa - h)^2\right],$$

$$\hat{k}_j = k_j, \quad \text{если} \quad j \neq 2, \qquad \hat{k}_2 = 6\lambda g^2 - {}^1/_4 - \eta/2.$$

Лемма 3.2.3. *Для каждого $p < \infty$ существует такая константа $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$, что выполнены следующие оценки:*

$$|\hat{k}_j(x)| \leqslant O(1)(1 + |g-h|) \leqslant O\left(\lambda^{-1/2}\right),$$

$$\|\delta\hat{k}_j\|_{L_p(\Delta)} \leqslant O\left(\lambda^{-1}\varkappa^{\varepsilon}\right),$$

$$\delta\hat{k}_j = 0 \text{ на } X; \quad |\hat{k}_j(x)| \leqslant O(1) \text{ на } X.$$

Доказательство. Оценки для $\hat{k}_l$ являются следствием предыдущей леммы, тогда как L_p-оценки для $\delta\hat{k}_l$ вытекают из (2.1.4). Поскольку $g=h$ на X ввиду (I. 4.5), $k_l=\text{const}$ на квадратах решетки $\Delta\subset X$, и поэтому, в силу свойства (iv), сформулированного в п. 2.1, $\delta\hat{k}_l=0$ на X.

Напомним, что ω, $d\psi_\omega(s)$ и $C_\omega(s)$ определяются формулами (2.2.1) — (2.2.5). Нам потребуется, чтобы для некоторой дробной производной оператора $C_\omega(s)$ выполнялись L_q-оценки, а это следует из разложения в сходящийся ряд Неймана в сочетании с предложениями 7.3, 7.4 из [16]. Действительно,

$$C_\omega(s)=C+C(1-\omega)C_\omega(s), \tag{3.2.6}$$

где C принадлежит введенному в [16] классу ковариационных операторов $\mathscr{C}$, у которых дробные производные лежат в L_q (см. также [2]). После дифференцирования по левым переменным ядра оператора $C_\omega(s)$ (т. е. ядра оператора C в (3.2.6)) мы воспользуемся оценками $0\leqslant 1-\omega\leqslant 1$, неравенством

$$0\leqslant C_\omega(s)\leqslant(-\Delta+\omega^2)^{-1}$$

(понимаемым в смысле поточечного неравенства между ядрами операторов) и тем фактом, что $(-\Delta+\omega^2)^{-1}$ как оператор свертки в пространстве L_1 сохраняет L_q-нормы функций.

Лемма 3.2.4. *Пусть ω, $d\psi_\omega$ и $\delta W_\varkappa$ такие, как описано выше. Существуют положительные константы $K(\omega)$ и δ со следующим свойством. Пусть $\{m(\Delta)\colon \Delta\subset Y\cap\Lambda\}$ — некоторое множество неотрицательных целых чисел, и пусть $\{\varkappa(\Delta)\colon \Delta\subset\subset Y\cap\Lambda\}$ — некоторое множество положительных чисел, удовлетворяющих условию $\varkappa(\Delta)^\delta\geqslant\lambda^{-1}$ при $\Delta\subset X^0$. Тогда*

$$\left|\int\Big[\prod_{\Delta\subset Y\cap\Lambda}\delta W_{\varkappa(\Delta)}(\Delta)^{m(\Delta)}\Big]d\psi_\omega(s)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\prod_{\Delta\subset Y\cap\Lambda}\Big[m(\Delta)!^2\big(K(\omega)\varkappa(\Delta)^{-\delta}\big)^{m(\Delta)}\Big].$$

Доказательство проводится так же, как в [13, 5, 16].

Лемма 3.2.5. *Существует такая константа K, что для некоторого положительного четного целого числа q и для некоторого подмножества Y_t из X*

$$\left|\int\prod_{\Delta\subset Y_t}V(\Delta)^q\,d\psi_1(s)\right|\leqslant\big((q!)^2(K\lambda)^{q/2}\big)^{|Y_t|}. \tag{3.2.7}$$

Доказательство. При $x \in X$, согласно лемме I.4.1, выполнено равенство $g = h$. Поэтому, по лемме 3.2.2, ядра $k_j(x)$ удовлетворяют оценке $\|k_j\|_\infty < O(\lambda^{1/2})$. Следовательно, утверждение леммы вытекает из стандартной оценки сверху

$$\prod_{\Delta \subset Y_t} \left(K_1^q (q!)^2 \sum_{j=1}^{4} \|k_j\|_\infty\right)$$

для левой части неравенства (3.2.7).

Теперь мы выведем теорему 3.2.1 в более слабой форме с заменой $\lambda^{1/2} |Y_d|$ на $|Y_d|$. Чтобы воспользоваться тем фактом, что коэффициенты V имеют порядок $O(\lambda^{1/2})$ в X, и в конечном счете получить усиленную оценку с $O(\lambda^{1/2}) |Y_d|$, утверждаемую теоремой 3.2.1, мы будем возмущать V в каждом из квадратов решетки $\Delta \subset Y_d \subset X$. С этой целью положим

$$V(t, Y) = \sum_{\Delta \subset Y_d} t(\Delta) V(\Delta) + V(Y_c).$$

Пусть $Y_t = \{\Delta: t(\Delta) \neq 0\}$. Поскольку $Y_t \subset Y_d \subset X$, при таком выборе Y_t применима предыдущая лемма.

Лемма 3.2.6. *В условиях теоремы 3.2.1 имеет место оценка*

$$\int e^{-p(F(Y)+V(t,\, Y))} |\chi'_{\Sigma \cap Y}|^p \, d\psi_1(s) \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\prod_{\Delta \subset Y \cap \Lambda} n(\Delta)!\Big) \exp\left(-aF_1(Y) - b\lambda^{-1/2} |Y_c| + O(1) |Y_t|\right).$$

Доказательство. Пусть

$$W(t, Y) = V(t, Y) + \frac{1-\eta}{2} \int_{Y_t} :\psi^2:_1 \, dx.$$

Тогда, полагая $\omega = 1 - p(1-\eta)\chi_{Y_t}$, получаем

$$\int e^{-p(F(Y)+V(t,\, Y))} |\chi'_{\Sigma \cap Y}|^p \, d\psi_1(s) =$$
$$= Z^{-1} \int e^{-p(F(Y)+W(t,\, Y))} |\chi'_{\Sigma \cap Y}|^p \, d\psi_\omega(s) \leqslant$$
$$\leqslant e^{-p(F_1+F_2)} Z^{-1} \left(\int e^{-q'pF} \, d\psi_\omega(s)\right)^{1/q'} \left(\int e^{-pq(F_1+W)} |\chi'_{\Sigma \cap Y}|^{pq} d\psi_\omega(s)\right)^{1/q}. \tag{3.2.8}$$

Здесь q и q' — пара двойственных показателей Гёльдера. Выберем

$$q = 1 + \frac{\eta_0}{10}, \qquad p < 1 + \frac{\eta}{10},$$

так что qp, $q^2p^2 < 1 + \eta/2$ и $pq' = O(\eta_0^{-1})$. Интеграл с F_3 ограничен ввиду предложения 2.5.1, а Z^{-1} ограничено оценкой (2.2.4), что дает

$$\left| \int e^{-p(F+V(t,\,Y))} \left| \chi'_{\Sigma \cap Y} \right|^p d\psi_1(s) \right| \leqslant$$
$$\leqslant e^{-(1-\lambda)F_1 - pF_2} e^{K|Y_t|} \left(\int e^{-pq\left(F_4 + W - \ln\left|\chi'_{\Sigma\cap Y}\right|\right)} d\psi_\omega(s) \right)^{1/q}.$$

Интеграл с W мы оценим, воспользовавшись стандартным доказательством линейной оценки снизу для вакуумной энергии, см. [13, 15]. Основная идея такова. Рассмотрим подмножество реализаций, для которых

$$W(t,\,\Delta) + t(\Delta)\,\zeta :\delta\varphi_\varkappa(\Delta): - \ln\left|\chi'_{\sigma(\Delta)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \inf_\varphi \left[W_\varkappa(t,\,\Delta) + t(\Delta)\,\zeta :\delta\varphi_\varkappa^2(\Delta): - \ln\left|\chi'_{\sigma(\Delta)}\right| - 1\right].$$

На этом множестве для любого положительного четного m справедливо также неравенство

$$1 \leqslant |\,\delta W_\varkappa(t,\,\Delta)\,| \leqslant \delta W_\varkappa(t,\,\Delta)^m.$$

Поэтому, согласно теоремам 3.1.1 и 3.1.2,

$$I(\varkappa,\,\Delta) \equiv \inf_\varphi \left[W_\varkappa(t,\,\Delta) + t(\Delta)\,\zeta :\delta\varphi_\varkappa^2(\Delta): - \ln\left|\chi'_{\sigma(\Delta)}\right|\right] \geqslant$$
$$\geqslant \inf_\varphi \left[t(\Delta) \left(:\mathscr{P}_\Delta(\varphi_\varkappa):_1 - \frac{\eta}{2} \int_\Delta :(\varphi_\varkappa - h)^2: dx + \zeta \int_\Delta :\delta\varphi_\varkappa^2: dx \right) - \right.$$
$$\left. - \ln\left|\chi'_{\sigma(\Delta)}\right| \right] \geqslant \begin{cases} -O(\ln^2 \varkappa), & n(\Delta) = 0, \\ a\lambda^{-1} - O(\ln^2\varkappa) - \ln(n(\Delta)!), & n(\Delta) > 0. \end{cases}$$

Мы выберем $\varkappa_i = 2^i$, где $i = i(\Delta)$ — положительное целое число, зависящее от Δ. Пусть $\sum_i{}'$ обозначает сумму по всем таким $i(\Delta)$, удовлетворяющим условию: $\varkappa_\Delta^{i(\Delta)} \geqslant \lambda^{-1}$, если $\Delta \subset X^0$. Это условие вводится затем, чтобы скомпенсировать расходимость порядка $O(\lambda^{-1})$ в коэффициентах в области X^0.

Тогда можно написать

$$\int e^{-pq\left(F_4+W-\ln|\chi'_\sigma|\right)}\,d\psi_\omega(s)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_i{}'\int d\psi_\omega(s)\Bigl(\prod_{\Delta\subset Y_t}\delta W_{\varkappa_{i(\Delta)}}(t,\,\Delta)^{m_i(\Delta)}\times$$

$$\times\exp\left[-pq\left(I\left(2\varkappa_{i(\Delta)},\,\Delta\right)-\zeta:\delta\varphi^2_\varkappa(\Delta):\right)\right]\Bigr)e^{-pqF_4}\leqslant$$

$$\leqslant\Bigl(\prod_\Delta n(\Delta)!\Bigr)e^{-a\lambda^{-1}|X'\cap Y|}\sum_i{}'\int d\psi_\omega(s)\times$$

$$\times\prod_{\Delta\subset Y_t}\left(\delta W^{m_i(\Delta)}_{\varkappa_{i(\Delta)}}\exp\left[pq\left(O\left(\ln^2\varkappa_{i(\Delta)}\right)+\zeta:\delta\varphi^2_{\varkappa_{i(\Delta)}}(\Delta):\right)\right]\right)e^{-pqF_4}.$$

Сомножитель $e^{pq(\zeta:\delta\varphi^2:-F_4)}$ мы отделим от оставшейся части подынтегрального выражения с помощью неравенства Гёльдера и оценим его, используя предложение 2.5.2. Это дает в качестве оценки сверху для (3.2.8)

$$e^{(-(1-\lambda)+K\zeta)F_1(Y)}e^{K|Y_t|}\Bigl(\prod_\Delta n(\Delta)!\Bigr)e^{-b\lambda^{-1}|X'\cap Y|}\times$$

$$\times\sum_i{}'\Bigl(\int d\psi_\omega(s)\prod_\Delta\delta W^{q'm_i(\Delta)}_{\varkappa_{i(\Delta)}}\Bigr)^{1/q'}e^{O\left(\ln^2\varkappa_{i(\Delta)}\right)}.$$

Здесь в тех случаях, когда $i(\Delta)$ принимает минимальное из возможных значений, $m_{i(\Delta)}$ должно равняться нулю. В остальных случаях мы полагаем

$$m_{i(\Delta)}=\varkappa^{\delta/2}_{i(\Delta)}/q'.$$

Выберем $\zeta<\pi^2/4$ столь малым, чтобы коэффициент при F_1 в написанном выше выражении был ограничен числом $-{}^3/_4$. Каждый из интегралов с δW оценивается при помощи леммы 3.2.4, а для факториалов мы применяли формулу Стирлинга, что приводит к оценке сверху для (3.2.8) вида

$$\exp\left(-{}^3/_4F_1(Y)\right)\exp\left(K|Y_t|-b\lambda^{-1}|X'\cap Y|\right)\times$$

$$\times\Bigl(\prod_\Delta n(\Delta)!\sum_i{}'\prod_{\Delta\subset Y_t}\exp\left(-\varkappa^{\delta/2}_{i(\Delta)}/q'+O\left(\ln^2\varkappa_{i(\Delta)}\right)\right)\Bigr).$$

Здесь имеется в виду, что члены $\varkappa^{\delta/2}_{i(\Delta)}/q'$ выбрасываются из показателей экспоненты в тех случаях, когда $i(\Delta)$ принимает минимальное из возможных значений. Напомним, что при $\Delta\subset X^0$ мы имеем $\varkappa^{\delta/2}_{i(\Delta)}\geqslant\lambda^{1/2}$, и поэтому, согласно предложению 2.4.1,

$$\sum_{t}{}' \ldots \leqslant O(1)^{|Y_t|} \exp\left(O\left(\ln^2(\lambda^{-1})\right)|Y \cap X^0|\right) \leqslant$$
$$\leqslant O(1)^{|Y_t|} \exp\left(\lambda^{1/2} F_1(Y)\right).$$

Подставляя это в предыдущую оценку сверху и используя еще раз предложение 2.4.1, а также определения множеств Y_c и Y_d, мы завершаем доказательство.

Доказательство теоремы 3.2.1. Воспользуемся тождеством

$$e^{-pV(\Delta)} = 1 - pV(\Delta) \int_0^1 e^{-pt(\Delta)V(\Delta)}\, dt.$$

Тогда, полагая $t \equiv \{t(\Delta)\colon \Delta \subset Y_t\}$, имеем

$$\int e^{-pQ(Y)} |\chi'_{\Sigma \cap Y}|^p \, d\psi_1(s) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{Y_t \subset Y_d} \int_0^1 \int \left| \prod_{\Delta \subset Y_d} pV(\Delta) \right| e^{-p[F(Y)+V(t,\,Y)]} |\chi'_{\Sigma \cap Y}|^p \, d\psi_1(s)\, ds\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{Y_t \subset Y_d} \int \left| \prod_{\Delta \subset Y_t} pV(\Delta) \right|^{q'} d\psi_1(s)^{1/q'} \sup_t \left| \int e^{-pq[F(Y)+V(t,\,Y)]} \times \right.$$
$$\left. \times |\chi'_{\Sigma \cap Y}|^{pq} \, d\psi_1(s) \right|^{1/q}. \quad (3.2.9)$$

Здесь $q \approx 1 + \eta_0/30$, так что $pq \leqslant 1 + \eta/10$, а $q' = O\left(\eta_0^{-1}\right)$ — некоторое четное целое число. Поскольку $Y_d \subset X$, то, используя леммы 3.2.5 и 3.2.6, мы оцениваем правую часть (3.2.9) сверху выражениями

$$\sum_{Y_t \subset Y_d} \left(K(\eta_0)\lambda^{1/2}\right)^{|Y_t|} \left(\prod_{\Delta} n(\Delta)!\right) \exp\left(-aF_1 - b\lambda^{-1/2}|Y_c|\right) =$$
$$= \left(\prod_{\Delta} n(\Delta)!\right)\left(\prod_{\Delta \subset Y_d}\left(1 + K(\eta_0)\lambda^{1/2}\right)\right) \exp\left(-aF_1 - b\lambda^{-1/2}|Y_c|\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\prod_{\Delta} n(\Delta)!\right) \exp\left(-aF_1 - b\lambda^{-1/2}|Y_c| + c\lambda^{1/2}|Y_d|\right).$$

Это завершает доказательство.

3.3. Отклонение от гауссова поля. Для того чтобы доказать сходимость кластерного разложения, нам нужна оценка типа (1.1.5). Рассмотрим моном A вида (I. 6.1), локализованный в квадратах решетки Δ_i:

$$A = A(\psi) = \int \prod_i :\psi(x)^{m_i}: f_i(x)\,dx. \tag{3.3.1}$$

Напомним, что $|||A|||$ определяется формулой (I. 6.2).

Теорема 3.3.1. *Существуют положительные константы b, c, d и константа K в* (I. 6.2), *такие, что при всех достаточно малых λ и при любом согласованном выборе Γ, Σ и Y*

$$\left|\partial_s^\Gamma \int e^{-Q(Y)}\chi_\Sigma A\,d\psi_1(s)\right| \leqslant |||A|||\, e^{-dl|\Gamma|} e^{-b\lambda^{-1/2}|X^0\cap Y|} e^{c\lambda^{1/2}|Y\cap\Lambda|}. \tag{3.3.2}$$

Доказательство. Пусть $\mathscr{P}(\Gamma)$ — совокупность всевозможных разбиений множества Γ ребер l-решетки. Как и в [16], левая часть (3.3.2) равна

$$\sum_{\pi\in\mathscr{P}(\Gamma)} \int \left[\prod_{\gamma\in\pi} {}^1/_2\left(\partial_s^\gamma C(s)\right)\cdot\Delta_\psi\right] e^{-Q(Y)}\chi_\Sigma A\,d\psi_1(s). \tag{3.3.3}$$

Мы запишем $\partial_s^\gamma C(s)$ в виде суммы по множеству соответствующих пар узлов l-решетки $j = (j_1, j_2) \in l\mathbb{Z}^4$:

$$\partial_s^\gamma C(s) = \sum_{j_\gamma\in l\mathbb{Z}^4} \partial_s^\gamma C(s, j_\gamma) \equiv \sum_{j_\gamma\in l\mathbb{Z}^4} \chi_{\Delta_{j_{\gamma,1}}} \partial_s^\gamma C(s)\,\chi_{\Delta_{j_{\gamma,2}}}.$$

Здесь $\Delta_{j_{\gamma,1}}$ и $\Delta_{j_{\gamma,2}}$ — квадраты l-решетки. Рассмотрим член, соответствующий разбиению π и набору $J \equiv \{j_\gamma\}_{\gamma\in\pi}$ в сумме, возникающей при подстановке выражения для $\partial_s^\gamma C(s)$ в (3.3.3). Каждый такой член имеет вид

$$\sum{}' \int A'W(\pi, J)\, e^{-Q(Y)}\chi'_\Sigma\,d\psi_1(s), \tag{3.3.4}$$

где сумма $\sum{}'$ распространяется на всевозможные производные линейных сомножителей, входящих в A, а также производные сомножителей $\chi_{\sigma(\Delta)}$, входящих в χ_Σ, и производные экспоненты $e^{-Q(Y)}$. Неравенство Гёльдера дает в качестве оценки для (3.3.4) выражение

$$\sum{}' \|A'W(\pi, J)\|_{p'} \left\|\chi'_\Sigma e^{-Q(Y)}\right\|_p, \tag{3.3.5}$$

где p и p' — двойственные индексы. Применяя теорему 3.2.1, когда $p \approx 1 + \eta/30$, а p' выбрано четным целым числом, второй сомножитель здесь можно оценить произведением

$$\Big(\prod_{\Delta} n(\Delta)!\Big)\exp\big[-aF_1 - b\lambda^{-1/2}|Y_c| + c\lambda^{1/2}|Y_d|\big]. \tag{3.3.6}$$

Для того чтобы оценить первый сомножитель в (3.3.5), мы должны оценить производные оператора $C(s)$, так же как в предложении 8.1 в [16]. Пусть

$$d(j,\ \gamma) = \max\{\operatorname{dist}(j_1,\ b) + \operatorname{dist}(j_2,\ b)\colon b \in \gamma\},$$

и пусть

$$\|f(x,\ y)\|_{L_{q_1,\,q_2}} = \left(\int\left|\int|f(x,\ y)|^{q_2}\,dy\right|^{q_1/q_2}dx\right)^{1/q_1}.$$

Пусть γ^* — кратчайший путь, проходящий через $b \in \gamma$, и пусть $|\gamma^*|$ обозначает его длину.

Лемма 3.3.2. *Пусть* $1 \leqslant q_1,\ q_2 \leqslant q_0 < \infty$. *Существуют константы* $K_6(q_0,\ \gamma)$, $K_7(q_0)$ *и* $\delta > 0$, *такие, что при всех достаточно больших* l (*достаточно малых* λ)

$$\|\partial_s^\gamma C(s)\|_{L_{q_1,\,q_2}(\Delta_{j_1}\times\Delta_{j_2})} \leqslant l^2 K_6(q_0,\ \gamma)\exp(-\delta(d(j,\ \gamma) + |\gamma^*|)) \tag{3.3.7}$$

и

$$\sum_{\pi\in\mathscr{P}(\Gamma)}\prod_{\gamma\in\pi} K_6(q_0,\ \gamma) \leqslant e^{K_7(q_0)|\Gamma|}. \tag{3.3.8}$$

Доказательство. Будем следовать рассуждениям из [16, 27], вводя модификации, которые необходимы из-за использования большого масштаба расстояний и фиксированной голой массы, равной единице. Мы сможем тогда отделить сомножитель $e^{-\delta|\gamma^*|}$ в формуле [16, (8.8)], поскольку в обозначениях работы [16] $|\gamma^*| \leqslant l$ для всех $l \in L(\gamma)$.

Лемма 3.3.3. *Пусть заданы* p *и* p'. *Существуют константа* $K = K(p')$ *в* (I. 6.2), *число* q_0, *о котором говорится в лемме* 3.3.2, *и* $\delta' > 0$, *такие, что при всех достаточно малых* λ

$$\|A'W(\pi,\ J)\|_{p'} \leqslant |\!|\!| A |\!|\!|\, e^{-\delta' l|\Gamma|}e^{l|Y\cap X'|}\times$$
$$\times\prod_{\gamma\in\pi} K_6(q_0,\ \gamma)\, e^{-\delta' d(j_\gamma,\ \gamma)}. \tag{3.3.9}$$

Продолжение доказательства теоремы 3.3.1. Поскольку $Y \cap X' \subset Y_c$, сомножитель $\exp(l|Y\cap X'|)$ подавляется членом $\exp\big(-b\lambda^{-1/2}|Y_c|\big)$ в (3.3.6). Подставим (3.3.6) и (3.3.9) в (3.3.5). Сумма $\sum'$ по производным в (3.3.4) и сумма по выборам локализации J ограничены, как следует из результатов работы [16, леммы 10.1—10.2]. Сумма по разбиениям $\pi \in \mathscr{P}(\Gamma)$ оценивается с помощью (3.3.8).

Доказательство леммы 3.3.3. Модифицируем рассуждения из работы [16, стр. 256 русского перевода]. L_{q_1, q_2}-нормы, входящие в (3.3.7), где $1 \leqslant q_1$, $q_2 \leqslant q_0$, позволяют применить лемму 9.2 из [16] для квадратов l-решетки Δ_{j_γ} площади $l^2 \neq 1$. Другие изменения таковы: (a) множитель $l^2 = |\log\lambda|^{1/2}$ в (3.3.7), возникающий из-за использования больших квадратов решетки, (b) большие коэффициенты при $Q(Y)$ в случае, когда $\Delta_{j_\gamma} \subset X^0$, и (c) еще один множитель l^4, который равен числу единичных квадратов, локализующих $\partial^\gamma C$ при фиксированном $j_\gamma \in l\mathbb{Z}^4$.

Минимальное ненулевое значение, принимаемое $|\gamma^*|$ и $d(j, \gamma)$, равно l. Так как $l^6 e^{-\delta l/2} \to 0$ при $\lambda \to 0$, то множитель l^6 в тех случаях, когда $|\gamma^*|$ либо $d(j, \gamma)$ отличны от нуля, можно отбросить, заменив все малым множителем $e^{-\delta' l|\gamma|}$ с меньшим δ'. Предположим теперь, что $|\gamma^*| = 0 = d(j, \gamma)$. Тогда $|\gamma| \leqslant 4$. Кроме того, $\Delta_j \subset X$ и производная множителя e^{-Q}, локализованная в Δ_j, содержит лишь вклад от V (F_3 и F_4 вкладов не дают). При $\Delta_j \subset X$ коэффициент при V имеет порядок $O(\lambda^{1/2})$ согласно лемме 3.2.2, и, поскольку при малых λ

$$l^6 \lambda^{1/2} \leqslant e^{-4\delta' l} \leqslant e^{-\delta' l|\gamma|},$$

мы получаем в этом случае нужный множитель $e^{-\delta' l|\gamma|}$. Если сужение совпадает с $\chi_{\sigma(\Delta)}$, где Δ — единичный квадрат из Δ_j, то $\Delta \subset Y \cap X'$, и мы воспользуемся неравенством

$$l^6 \leqslant e^{-\delta l|\gamma|} e^{l|\Delta|},$$

т. е. будем использовать вклад от квадрата $\Delta \subset Y \cap X'$ в множитель $\exp(l|Y \cap X'|)$ в (3.3.9). При дифференцировании линейного множителя, входящего в A, мы пользуемся экспонентой e^l из члена $e^{KlN(A)}$ в (I. 6.2) и получаем

$$l^6 \leqslant e^{-\delta' l|\gamma|} e^l.$$

Это показывает, что l^6 компенсируется множителем $e^{-\delta l|\gamma|}$ во всех случаях.

Далее мы рассмотрим коэффициенты порядка $O(\lambda^{-1})$, возникающие при дифференцировании e^{-Q} в квадрате $\Delta \subset X^0$. В этом случае $d(j, \gamma) \geqslant L = |\log\lambda|^2$ и

$$O(\lambda^{-1}) e^{-\delta d(j, \gamma)} \leqslant e^{-\delta d(j, \gamma)/2}.$$

Это дает возможность контролировать изменения, перечисленные выше в пунктах (a) — (c).

Пусть $M(\Delta)$ — число сужений на единичный квадрат Δ [1]. Как и в [16],

$$\|A'W(\pi,J)\|_{p'} \leqslant \prod_i \| f_i\|_{L_2}\prod_\Delta ([p'(N(\Delta)+4M(\Delta))]!)^{1/p'} \times$$

$$\times e^{O(1)(N(\Delta)+M(\Delta))}\prod_{\gamma\in\pi}\left(K_6 e^{-\delta'(d(j,\gamma)+|\gamma|)}\right) e^{l|Y\cap X'|} e^{N(\Delta)}. \quad (3.3.10)$$

Для завершения доказательства мы должны оценить факториалы. Воспользуемся неравенством

$$(p'(N+4M))!^{1/p'} \leqslant e^{\ln p'(N+4M)}(N+4M)! \leqslant$$
$$\leqslant e^{\ln p'(N+4M)} N!\,(4M)^{4M} N^{4M}.$$

Множитель $e^{\ln p' N}$ ограничен экспонентой $e^{K(p')lN}$ из (I.6.2). Из доказательства леммы 10.2 из [16] видно, что

$$\exp\left(M^{3/2}\right) \leqslant e^{O(|\Gamma|)} e^{O\left(\sum_\gamma d(j,\gamma)\right)}.$$

Таким образом, множитель $(4M)^{4M}$ безвреден. Факториал $N!$ снова появится в $|||A|||$, и поэтому нам нужно лишь оценить N^{4M}. Вначале предположим, что $N \leqslant M^{4/3}$. Тогда

$$N^{4M} \leqslant \exp\left(4M\ln\left(M^{4/3}\right)\right) = \exp\left({}^{16}/_3 M\ln M\right) \leqslant$$
$$\leqslant O(1)\exp\left(\delta' M^{3/2}\right).$$

Далее предположим, что $N \geqslant M^{4/3}$. Тогда $M \leqslant N^{3/4}$ и

$$N^{4M} \leqslant \exp\left(4N^{3/4}\ln N\right) \leqslant O(1)\, e^N.$$

Таким образом, факториалы в (3.3.10) можно оценить во всех возможных случаях, что завершает доказательство леммы 3.3.3.

4. СХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЯ

4.1. «Внутренняя» сумма. В этом пункте мы докажем предложение 1.2.1. Запишем

$$\varphi - \xi_+ = (\varphi - g) + (g - \xi_+) = \psi + (g - \xi_+). \quad (4.1.1)$$

Поскольку

$$|g(x) - \xi_+| \leqslant O\left(\lambda^{-1/2}\right),$$

[1] Определение $M(\Delta)$, а также встречающейся ниже величины $N(\Delta)$ см. в [16]. — *Прим. ред.*

мы можем выразить $A(\varphi-\xi_+)=A(\psi+(g-\xi_+))$ как конечную сумму членов C_j, каждый из которых имеет вид (3.3.1), причем

$$\sum |||C_j||| \leqslant \lambda^{-N/2} |||A|||.$$

Применение теоремы 3.3.1 к каждой связной компоненте Y_i множества Y дает

$$|R''(A,\ Y,\ \Sigma,\ \Gamma)| \leqslant |||A|||\, \lambda^{-N/2} e^{-dl|\Gamma^c|} e^{-b\lambda^{-1/2}|X^0\cap Y|} e^{c\lambda^{1/2}|Y\cap\Lambda|}. \tag{4.1.2}$$

Каждый квадрат l-решетки из $X\cap Y$, который не встречается в $\mathscr{L}(A)$, должен содержать по крайней мере одну линию дифференцирования (линию Дирихле) из Γ^c, поскольку в противном случае этот квадрат является такой компонентой, которая дает вклад в отношение статистических сумм в (I.7.11), но не в Y. Таким образом, линии дифференцирования из Γ^c достаточно плотны в $X\cap Y$, что находит отражение в неравенстве

$$2l^2|\Gamma^c| \leqslant |X\cap Y| - Nl^2. \tag{4.1.3}$$

Следовательно,

$$|Y\cap\Lambda| = |Y\cap X^0| + |Y\cap X| \leqslant |Y\cap X^0| + 2l^2|\Gamma^c| + Nl^2. \tag{4.1.4}$$

Комбинируя оценки (4.1.2) и (4.1.4), получаем

$$|R(A,\ Y,\ \partial Y^{\pm})| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda^{-N/2} |||A||| \sum_{\{\Sigma\cap Y,\ \Gamma\}} \exp[-2\delta l^{-1}|Y\cap\Lambda| - b(2\lambda)^{-1/2}|X^0\cap Y|], \tag{4.1.5}$$

где $\delta>0$ не зависит от λ. В правой части неравенства (4.1.5) нет ограничения на суммирование по Γ, а константа K в определении нормы (I. 6.2) выбрана несколько большей, с тем чтобы учесть член Nl^2 в (4.1.4).

Поскольку в $\mathscr{B}(\Sigma,\ Y)$ входит не более $4|Y\cap\Lambda|/l^2$ ребер l-решетки и, следовательно, в сумму по Γ входит не более $2^{4|Y\cap\Lambda|/l^2}$ членов, имеем

$$|R(A,\ Y,\ \partial Y^{\pm})| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda^{-N/2} |||A||| \sum_{\{\Sigma\cap Y\}} \exp[-\delta l^{-1}|Y\cap\Lambda| - b(2\lambda)^{-1/2}|X^0\cap Y|]. \tag{4.1.6}$$

Сумму по $\Sigma\cap Y$ можно оценить, если заметить, что $\Sigma\restriction X^{\pm}=\pm$, и поскольку то же самое справедливо для любого квадрата l-решетки, расположенного вдоль границы $X^{\pm}$, то $\Sigma\cap Y$ однозначно определяется пересечениями $X^0\cap Y$ и $\Sigma\cap(X^0\cap Y)$. При фиксированном $|X^0\cap Y|=r$ имеется 2^r способов выбрать $\Sigma \cap X^0 \cap Y$ и не более $\binom{|Y \cap \Lambda|}{r}$ способов выбрать $X^0 \cap Y$. Таким образом,

$$\sum_{\Sigma \cap Y} \exp\left[-b(2\lambda)^{-1/2} |X^0 \cap Y|\right] \leqslant \sum_{r=0}^{|Y \cap \Lambda|} \binom{|Y \cap \Lambda|}{r} \left(2e^{-b(2\lambda)^{-1/2}}\right)^r =$$

$$= \left(1 + 2e^{-b(2\lambda)^{-1/2}}\right)^{|Y \cap \Lambda|} \leqslant \exp(\lambda |Y \cap \Lambda|).$$

Подстановка этой оценки в (4.1.6) завершает доказательство в случае $\partial Y^- \neq \varnothing$.

Предположим, что $\partial Y^- = \varnothing$. Единственным значением $\Sigma \cap Y$, для которого $X^0 \cap Y = \varnothing$, является $\sigma \equiv 1$ (и, следовательно, $g \equiv \xi_+$). Таким образом, в (4.1.1) отсутствует член $g - \xi_+$, а в (4.1.2) — множитель $\lambda^{-N/2}$. Для всех остальных $\Sigma \cap Y$ мощность $|X^0 \cap Y| \geqslant 1$, и в результате возникает дополнительный обеспечивающий сходимость множитель $\exp\left[-b(2\lambda)^{-1/2}\right]$.

4.2. Отношения статистических сумм. В этом пункте мы докажем обобщение предложения 1.2.2 и распространим оценку (1.2.2) на комплексные значения λ из сектора $|\operatorname{Im} \lambda| \leqslant \leqslant \varepsilon \operatorname{Re} \lambda$. Для заданных множеств A и B обозначим через $A \triangle B = (A \cup B) \sim (A \cap B)$ их симметрическую разность. Для заданных пар $N_i = \{N_i^+, N_i^-\}$ положим

$$N_{\text{plus}} \equiv \{N^+ \cup N^-, \varnothing\}. \tag{4.2.1}$$

Мы всегда будем предполагать, что в выражении для $Z(Y, N, \Gamma)$

$$N(\Gamma^\pm) \subset N^\pm \quad \text{и} \quad \partial Y \subset \Gamma.$$

Теорема 4.2.1. *Предположим, что* $N_2^- = \varnothing$. *Существуют такие константы* c *и* ε, *что при*

$$|\operatorname{Im} \lambda| \leqslant \varepsilon \operatorname{Re} \lambda \leqslant \varepsilon^2, \quad \mu = 0, \tag{4.2.2}$$

равно как и при

$$0 \leqslant \mu \leqslant \lambda^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

имеет место оценка

$$\left| Z(Y, N_1, \Gamma_1) Z(Y, N_2, \Gamma_2)^{-1} \right| \leqslant \exp\left[c |\lambda|^{1/2} \left(|N_{1\,\text{plus}} \triangle N_2| + l^2 |\Gamma_1 \triangle \Gamma_2|\right)\right]. \tag{4.2.3}$$

Если $N_1^- \neq \varnothing \neq N_1^+$, *то правая часть* (4.2.3) *может быть умножена на* $\exp\left(-b|\lambda|^{-1/2}\right)$ *при некотором* $b > 0$.

Замечание. При $N_2 = \Gamma_2 = \Gamma_1 = \varnothing$ и $N_1^- = \Delta$ теорема дает: $\langle \chi_-(\Delta) \rangle \leqslant \exp\left(O\left(-|\lambda|^{-1/2}\right)\right)$, что влечет за собой нарушение симметрии.

Лемма 4.2.2. *Пусть Δ^l — квадрат l-решетки. Пусть $N^l = \{N(\partial\Delta^l), \varnothing\}$ и $\Gamma^l = \partial\Delta^l$. Тогда существует такая константа c, что при тех же λ, что и в теореме 4.2.1,*

$$\left| Z(\Delta^l, N^l, \Gamma^l)^{\pm 1} \right| \leqslant \exp\left(c\lambda^{1/2} l^2\right).$$

Доказательство. По определению,

$$Z(\Delta^l, N^l, \Gamma^l) = \int e^{-V(\Delta^l)} \prod_{\Delta \subset \Delta^l} \chi_+(\Delta)\, d\psi_\Gamma =$$

$$= 1 + \int \left(e^{-V(\Delta^l)} - 1\right)\left(\prod_{\Delta \subset \Delta^l} \chi_+(\Delta)\right) d\psi_\Gamma +$$

$$+ \int \left(\prod_{\Delta \subset \Delta^l} \chi_+(\Delta) - 1\right) d\psi_\Gamma,$$

где V задано формулой (1.1.2). Мы использовали здесь тот факт, что $g \equiv h \equiv \xi_+$ и $F = 0$. По неравенству Гёльдера, которое применяется так же, как в (3.2.9), второй член оценивается величиной $O\left(|\lambda|^{1/2} l^2\right)$. Для того чтобы оценить третий член, заметим, что

$$0 \leqslant 1 - \prod_{\Delta \subset \Delta^l} \chi_+(\Delta) \leqslant \sum_{\Delta \subset \Delta^l} \chi_-(\Delta).$$

Так как

$$\chi_-(\Delta) = -\pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{-\xi_+} e^{-(\psi(\Delta)-a)^2}\, da,$$

то неравенство Шварца дает:

$$\int \chi_-(\Delta)\, d\psi_\Gamma \leqslant \left(\int e^{-2\psi(\Delta)^2}\, d\psi_\Gamma\right)^{1/2} e^{-Q(|\lambda|^{-1})} = e^{-Q(|\lambda|^{-1})},$$

что и завершает доказательство.

Доказательство предложения 1.2.2. Предположим, что теорема 4.2.1 доказана, и воспользуемся ею вместе с леммой 4.2.2 для того, чтобы оценить каждый из сомножителей в правой части следующего равенства:

$$\frac{Z(\sim Y, N^+, N^-, \partial Y)}{Z(\mathbb{R}^2, \varnothing, \varnothing, \varnothing)} = \frac{Z(\sim Y, N^+, N^-, \partial Y)}{Z(\sim Y, N_{\text{plus}}, \partial Y)} \, \frac{Z(\sim Y, N_{\text{plus}}, \partial Y)}{Z(\mathbb{R}^2, \varnothing, \varnothing, \varnothing)}.$$

Первый сомножитель не превосходит

$$\exp\left(2c|\lambda|^{1/2}|N^-| + |\Gamma|\right).$$

Далее, поскольку

$$Z(\sim Y,\ N_{\text{plus}},\ \partial Y) = \frac{Z(\mathbb{R}^2,\ N_{\text{plus}} \cup (Y \cap \Lambda),\ (\Gamma \cup \mathscr{B}(\Lambda \cap Y)))}{\prod\limits_{\Delta^l \subset Y \cap \Lambda} Z(\Delta^l,\ N^l,\ \Gamma^l)} \leqslant$$

$$\leqslant Z(\mathbb{R}^2,\ \varnothing,\ \varnothing,\ \varnothing)\exp\left[2c|\lambda|^{1/2}(|\Lambda \cap Y| + |N| + l^2|\Gamma|)\right],$$

отсюда следует требуемое неравенство (1.2.2) (при новом выборе c). Если $N^- \neq \varnothing$, то по теореме 4.2.1 правую часть можно умножить на $\exp\left(-b|\lambda|^{-1/2}\right)$. Поскольку $\sim Y$ неограничено и, следовательно, пересекает область $\sim\Lambda$, где заданы значения $+$, то условие $N_1^+ \neq \varnothing$, как мы увидим ниже, оказывается излишним.

Теперь мы докажем теорему 4.2.1 в частном случае.

Лемма 4.2.3. *При* $0 \leqslant \mu \leqslant \lambda^2$ *и достаточно малом положительном* λ

$$Z(Y,\ N,\ \Gamma)\, Z(Y,\ N_{\text{plus}},\ \Gamma)^{-1} \leqslant 1.$$

Доказательство. Поскольку Z разлагается в произведение, когда граница ∂Y разбивается на связные компоненты, мы без ограничения общности предположим, что Y связно. Как и в § I.7, введем следующую аппроксимацию меры Дирихле:

$$d\varphi_{Y \cap \Lambda,\, g} = \frac{\exp\left(-\int \delta m^2(x) :(\varphi(x) - g(x))^2 : dx\right) d\varphi_{Y \cap \Lambda}}{\int \exp\left(-\int \delta m^2(x) : \psi(x^2) : dx\right) d\psi_1}, \tag{4.2.4}$$

где $g = g_\Sigma$, Σ совместимо с N, а $\delta m^2(\cdot)$ имеет носитель вблизи Γ. Пусть

$$Z(Y,\ g,\ \mu) = \int d\varphi_{Y \cap \Lambda,\, g}$$

и

$$E_{g,\mu}(A(\varphi)) = Z(Y, g, \mu)^{-1} \int A\, d\varphi_{Y \cap \Lambda,\, g}.$$

Пусть $g' = -g$, $g'' \equiv \xi_+$. Заметим, что при всех x

$$|g(x)| = |g'(x)| \leqslant g''(x), \tag{4.2.5}$$

причем при $x \in \operatorname{supp} \delta m^2$, согласно лемме I.4.1, имеет место равенство. Мы утверждаем, что

$$Z(Y,\ g,\ \mu) \leqslant Z(Y,\ g'',\ \mu). \tag{4.2.6}$$

В самом деле, ввиду (4.2.5) замена $g \to g''$ в (4.2.4) влияет лишь на член $\int \delta m^2(x)\varphi(x)\, g(x)\, dx$. Экспонента от этого члена может быть разложена в степенной ряд. Каждый член в соответствующем разложении для $Z(Y, g, \mu)$ является функцией Швингера для меры $d\varphi_{Y \cap \Lambda}$. По первому неравенству Гриффитса эти функции Швингера возрастают, если сглаживающие (пробные) функции поточечно возрастают. Ввиду (4.2.5) замена $g \to g''$ приводит к возрастанию пробных функций и, следовательно, выполнено (4.2.6).

Поскольку $\prod \chi_+$ монотонно растет, а $\prod \chi_-$ монотонно убывает, из неравенств ФКЖ вытекает, что

$$E_{g,\mu}\left(\left[\prod_{\Delta \subset N^+} \chi_+(\varphi(\Delta))\right]\left[\prod_{\Delta \subset N^-} \chi_-(\varphi(\Delta))\right]\right) \leqslant$$
$$\leqslant E_{g,\mu}\left(\prod_{\Delta \subset N^+} \chi_+(\varphi(\Delta))\right) E_{g,\mu}\left(\prod_{\Delta \subset N^-} \chi_-(\varphi(\Delta))\right). \quad (4.2.7)$$

Дифференцирование по μ и повторное применение неравенств ФКЖ показывает, что $E_{g,\mu}(\prod \chi_+)$ монотонно возрастает по μ. Это утверждение имеет место как при $\mu < 0$, так и при $\mu > 0$, и такое же рассуждение, как и выше, показывает, что $E_{g,\mu}(\prod \chi_+)$ возрастает по g, когда $|g|$ остается фиксированным на $\operatorname{supp} \delta m^2$. Комбинируя эти неравенства с преобразованием симметрии $\varphi \to -\varphi$, $\mu \to -\mu$, мы можем оценить (4.2.7) следующим образом:

$$(4.2.7) \leqslant E_{g'',\mu}\left(\prod_{\Delta \subset N^+} \chi_+(\varphi(\Delta))\right) E_{g,\mu}\left(\prod_{\Delta \subset N^-} \chi_-(\varphi(\Delta))\right) =$$
$$= E_{g'',\mu}\left(\prod_{\Delta \subset N^+} \chi_+(\varphi(\Delta))\right) E_{g',-\mu}\left(\prod_{\Delta \subset N^-} \chi_+(\varphi(\Delta))\right) \leqslant$$
$$\leqslant E_{g'',\mu}\left(\prod_{\Delta \subset N^+} \chi_+(\varphi(\Delta))\right) E_{g'',\mu}\left(\prod_{\Delta \subset N^-} \chi_+(\varphi(\Delta))\right).$$

Затем, снова с помощью неравенств ФКЖ, последнее выражение оценивается величиной

$$E_{g'',\mu}\left(\prod_{\Delta \subset N_{\text{plus}}} \chi_+(\varphi(\Delta))\right).$$

Умножив полученное в результате неравенство на (4.2.6) и перейдя к пределу при $\delta m^2 \to \infty$, $\operatorname{supp} \delta m^2 \to \Gamma$, мы завершим доказательство.

Доказательство теоремы 4.2.1. Доказательство могло бы быть основано на рядах Неймана, обращающих сжимающий оператор, определяемый уравнениями Кирквуда — Зальцбурга. Однако вместо этого мы воспользуемся треугольной структурой уравнений и дадим индуктивное доказательство.

Начнем с того, что наложим условия Дирихле на границе содержащего Γ большого квадрата S диаметра

$$r \geqslant 8(|\Lambda|^2 + |\Gamma_1| + |\Gamma_2|)$$

с центром в начале координат. Допустим, что утверждение теоремы справедливо в случае, когда $\partial S \subset \Gamma$, и выведем его для общего случая. Воспользовавшись определением (I. 5.6) для того, чтобы ввести условия Дирихле на ∂S, и теоремой 3.3.1, чтобы оценить погрешности, можно показать, что

$$|Z(Y, N, \Gamma_i \cup \partial S) - Z(Y, N, \Gamma_i)| \leqslant e^{-2(|\Lambda^2|+|\Gamma_1|+|\Gamma_2|)}. \quad (4.2.8)$$

Для подавления растущего объемного члена $\exp(O(|\lambda|^{1/2})|\Lambda|)$ мы пользуемся малым множителем, возникающим из-за сжатия на больших расстояниях. Кроме того, лемма 4.2.2 в сочетании с утверждением теоремы в частном случае, которое мы предполагаем справедливым, дает

$$|Z(Y, N_2, \Gamma_2 \cup \partial S)^{-1}| \leqslant e^{O(|\lambda|^{1/2})|\Lambda|}.$$

Комбинируя эту оценку с (4.2.8), получаем, что при малых λ

$$\left|Z(Y, N_2, \Gamma_2 \cup \partial S)^{-1} - Z(Y, N_2, \Gamma_2)^{-1}\right| \leqslant e^{-(|\Lambda|^2+|\Gamma_1|+|\Gamma_2|)}.$$

Общий случай вытекает из этих оценок и тождества

$$a^{-1}b = a^{-1}(b - B) + (a^{-1} - A^{-1})B + A^{-1}B,$$

где $a = Z(Y, N_2, \Gamma_2)$, $A = Z(Y, N_2, \Gamma_2 \cup \partial S)$ и т. д.

Предположим теперь, что $\partial S \subset \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subset S$, $Y \subset S$. Мы будем применять двойную индукцию. Сначала проведем возрастающую индукцию по $|Y|$. Если $|Y| = \Delta^l$, то нечего доказывать. Предположим теперь, что теорема верна для всех $Y_0 \subset Y$. Вторая индукция — это убывающая индукция по переменной

$$J = \min\{|\Gamma_1|, |\Gamma_2|\} + \min\{|N_1|, |N_2|\}. \quad (4.2.9)$$

Если J принимает свое максимальное значение, то отношение Z/Z в (4.2.3) не больше единицы, что доказывает теорему в этом случае.

Прежде чем продолжить доказательство, мы сведем все к трем отдельным случаям:

Случай 1. $\Gamma_1 = \Gamma_2$, $N_1^- = \varnothing = N_2^-$.

Случай 2. $N_1^+ = N_2^+$, $N_1^- = \varnothing = N_2^-$.

Случай 3. $\Gamma_1 = \Gamma_2$, $N_2 = N_{1\,\text{plus}}$.

Общий случай выводится из этих трех случаев с помощью разложения

$$\frac{Z(Y,\,N_1,\,\Gamma_1)}{Z(Y,\,N_2,\,\Gamma_2)}=\frac{Z(Y,\,N,\,\Gamma_1)}{Z(Y,\,N_{1\,\mathrm{plus}},\,\Gamma_1)}\cdot\frac{Z(Y,\,N_{1\,\mathrm{plus}},\,\Gamma_1)}{Z(Y,\,N_{1\,\mathrm{plus}}\cup N_2,\,\Gamma_1)}\times$$
$$\times\frac{Z(Y,\,N_{1\,\mathrm{plus}}\cup N_2,\,\Gamma_1)}{Z(Y,\,N_{1\,\mathrm{plus}}\cup N_2,\,\Gamma_2)}\cdot\frac{Z(Y,\,N_{1\,\mathrm{plus}}\cup N_2,\,\Gamma_2)}{Z(Y,\,N_2,\,\Gamma_2)}.$$

Рассмотрим вначале случай 1 и допустим, что теорема доказана во всех трех случаях для меньших Y и для бóльших J. Предположим, что $|N_1|\leqslant|N_2|$. (Случай $|N_1|\geqslant|N_2|$ рассматривается аналогично.) Допустим также, что $N_1\neq N_2$, так как в противном случае (4.2.3) равно 1. Выберем $\Delta\in N_2\sim N_1$ и положим

$$N_3=\{N_3^+,\ N_3^-\}=\{N_1,\,\Delta\}.$$

Тогда

$$\left|1-\frac{Z(Y,\,N_1,\,\Gamma_1)}{Z(Y,\,N_{3\,\mathrm{plus}},\,\Gamma_1)}\right|=\left|\frac{Z(Y,\,N_{3\,\mathrm{plus}},\,\Gamma_1)-Z(Y,\,N_1,\,\Gamma_1)}{Z(Y,\,N_{3\,\mathrm{plus}},\,\Gamma_1)}\right|=$$
$$=\left|\frac{Z(Y,\,N_3,\,\Gamma_1)}{Z(Y,\,N_{3\,\mathrm{plus}},\,\Gamma_1)}\right|. \qquad (4.2.10)$$

Это отношение составляет случай 3, и, поскольку

$$|N_1|=\min\{|N_1|,\ |N_2|\}<\min\{|N_3|,\ |N_{3\,\mathrm{plus}}|\}=|N_1|+1,$$

применимо индуктивное предположение, в силу чего (4.2.10) оценивается экспонентой $\exp\left(-b|\lambda|^{-1/2}/2\right)$. Мы предполагаем здесь, что $N_1\neq\varnothing$. Однако если $N_1=\varnothing$, то и $\Gamma_1\cap\Lambda=\varnothing$ и поэтому $Y\cap(\mathbb{R}^2\setminus\Lambda)\neq\varnothing$. В этом случае мы можем ввести множитель $\exp\left(b-|\lambda|^{-1/2}\right)$ без предположения о том, что $N_1^+\neq\varnothing$. Таким образом, без каких-либо ограничений на N_1 имеем

$$\left[Z(Y,\,N_1,\,\Gamma_1)\,Z(Y,\,N_1\cup\Delta,\,\Gamma_1)^{-1}\right]^{\pm1}\leqslant\exp\left(c|\lambda|^{1/2}\right)$$

при некоторой константе c. Пользуясь этой оценкой и снова предположением индукции, получаем

$$\left|\frac{Z(Y,\,N_1,\,\Gamma_1)}{Z(Y,\,N_2,\,\Gamma_2)}\right|\leqslant\left|\frac{Z(Y,\,N_1,\,\Gamma_1)}{Z(Y,\,N_1\cup\Delta,\,\Gamma_1)}\right|\left|\frac{Z(Y,\,N_1\cup\Delta,\,\Gamma_1)}{Z(Y,\,N_2,\,\Gamma_2)}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left(c|\lambda|^{1/2}|N_1\,\Delta\,N_2|\right),$$

что завершает доказательство для этого случая.

Рассмотрим теперь случай 2. Этот случай предполагает введение условий Дирихле, и используемые здесь методы схожи с методами работы [16]. Мы покажем, что при $b \subset \Gamma_2 \sim \Gamma_1$

$$\left|1 - \frac{Z(\Gamma_1)}{Z(\Gamma_1 \cup b)}\right| = \left|\frac{Z(\Gamma_1 \cup b) - Z(\Gamma_1)}{Z(\Gamma_1 \cup b)}\right| \leqslant O(|\lambda|^{1/2} l^2), \quad (4.2.11)$$

так что

$$|Z(\Gamma_1) Z(\Gamma_2)^{-1}|^{\pm 1} \leqslant (1 + O(|\lambda|^{1/2} l^2)) |Z(\Gamma_1 \cup b) Z(\Gamma_2)^{-1}|^{\pm 1} \leqslant$$
$$\leqslant \exp(c|\lambda|^{1/2} l^2 |\Gamma_1 \triangle \Gamma_2|),$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались предположением индукции и обозначением $Z(\Gamma) = Z(Y, N_1, \Gamma)$. Разложим разность $Z(\Gamma_1 \cup b) - Z(\Gamma_1)$ так же, как в (I. 5.5). Для каждого из членов разложения $Z''(Y, \Sigma, \Gamma)$ обозначим через $W(\Gamma)$ связную компоненту множества $Y \sim \Gamma$, которая содержит b. Каждый член в этом разложении разлагается в произведение

$$Z'' = Z''(Y \sim W, \Sigma \sim W, \Gamma \sim W) Z''(W, \Sigma \cap W, \Gamma \cap W).$$

Как и в § I. 7, суммы по Γ и Σ также разлагаются (при фиксированном ∂W). Частичное суммирование подчинено определенным ограничениям, и для внешней области $Y \sim W$ частичная сумма может быть преобразована так, что получится представление

$$Z(\Gamma_1 \cup b) - Z(\Gamma_1) =$$
$$= \sum_{\partial W^{\pm}} Z(Y \sim W, N_3, \Gamma_3) \sum{}' Z''(W, \Sigma \cap W, \Gamma \cap W), \quad (4.2.12)$$

где

$$N_3^{\pm} = [N_1^{\pm} \cup N(\partial W^{\pm})] \sim W, \qquad \Gamma_3 = (\Gamma_1 \sim W) \cup \partial W.$$

Аналогично, суммирование $\sum'$ по $\Sigma \cap W$ и $\Gamma \cap W$ подчиняется ограничению $(\Sigma \cap W)^{\pm} \supset N_1^{\pm} \cap W$, $\Gamma \supset (\Gamma_1 \cap W) \cup \partial W$ и $W = W(\Gamma)$.

Как и в доказательстве предложения 1.2.1, данном в п. 4.1, имеем

$$\sum{}' |Z''(W, \Sigma \cap W, \Gamma \cap W)| \leqslant c|\lambda|^{1/2} l^2 e^{-2\delta |W|/l}.$$

В самом деле, здесь, как и при выводе (4.1.4), следует воспользоваться тем, что линии дифференцирования плотны в $X \cap W$ (с $N = N(A) = 0$), а дальнейшая сходимость обеспечивается существованием по крайней мере одной производной $\partial/\partial s_b$, в результате чего возникает либо χ'_Δ и, следовательно, сходящийся член $\exp[-O(|\lambda|^{-1/2})]$, либо вершина и, следовательно, сходящийся член $\exp[O(|\lambda|^{1/2})]$. По лемме 4.2.2 та же самая оценка имеет место, если мы умножим правую часть на

$$|Z^*(W)| = \prod_{\Delta^l \subset W} |Z(\Delta^l, N^l, \partial\Delta^l)|.$$

Подстановка в (4.2.12) дает:

$$\left|1 - \frac{Z(\Gamma_1)}{Z(\Gamma_1 \cup b)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c|\lambda|^{1/2} l^2 \sum_{\partial W^\pm} e^{-2\delta|W|/l} \left| Z(Y \sim W, N_3, \Gamma_3) Z^*(W) Z(\Gamma_1 \cup b)^{-1} \right|.$$

Мы запишем произведение $Z(Y \sim W, N_3, \Gamma_3) Z^*(W)$ как статистическую сумму $Z(Y, N_3 \cup W, \Gamma_3 \cup \mathscr{B}(W^*))$. Поскольку $|\Gamma_1 \cup b| > |\Gamma_1|$, а $|N_3 \cup W| \geqslant |N_1|$, то применимо предположение индукции, согласно которому отношение статистических сумм, фигурирующее выше, ограничено величиной $\exp\left[O\left(|\lambda|^{1/2}|W|\right)\right]$.

Для комбинаторных оценок в последней сумме по $\partial W^\pm$ заметим, что поскольку W есть связное объедииение квадратов l-решетки, содержащих b, то выбор W при фиксированном $|W|$ может быть сделаи не более чем $\exp[O(|W|/l^2)]$ способами. В то же время выбор значений $\pm$ для контуров из ∂W также можно сделать не более чем $\exp[O(|W|/l^2)]$ способами. Подставляя эти ограничения в предыдущее неравенство, мы получаем (4.2.11) и завершаем доказательство для случая 2.

Наконец, рассмотрим случай 3. Если $N_1^- = \varnothing$, то нечего доказывать. Если $N_1^+ = \varnothing$, то утверждение теоремы вытекает из леммы 4.2.3 для вещественных констант связи и из симметрии $\psi \to -\psi$ для комплексных констант связи (при $\mu = 0$). Итак, предположим, что $N_1^- \neq \varnothing \neq N_1^+$. (Для того чтобы установить существование массовой щели, эта оставшаяся часть доказательства случая 3 не требуется.) В дополнение к этому предположим без потери общности, что Y связно и, поскольку $Y \subset S$, что Y ограничено. Отсюда следует, что ∂Y имеет единственный внешний контур, представляющий собой простую замкнутую кривую. Эта кривая имеет знак $+$ либо $-$.

Как и в I. 5.5, разложим $Z(Y, N_1, \Gamma_1)$ в сумму члеиов вида $Z''(Y, \Sigma, \Gamma)$. Выберем квадрат на решетке $\Delta \subset Y$ и, зафиксировав его, положим

$$Z^{(\pm)} = \sum\nolimits^{(\pm)} Z'',$$

где $\sum^{(\pm)}$ обозиачает сумму по всем членам Z'', в которые входит замкнутый $(+)$ (соотв. $(-)$)-контур, охватывающий Δ. Заметим, что если внешний контур из Y имеет знак $+$ (соотв. $-$), то $Z = Z^{(+)}$ (соотв. $Z^{(-)}$). Для каждого члена Z''

из $Z^{(\pm)}$ пусть $\gamma^{\pm}=\gamma^{\pm}(\Sigma, \Gamma, \Delta)=\gamma$ есть замкнутый (+) (соотв. (—))-контур наименьшей площади, охватывающий Δ. Пусть W — связная компонента множества $S\sim\Gamma$, прилегающая к γ и лежащая внутри γ. Как видно из условия минимальности контура γ, существует только одна такая компонента и $W\subset Y$. Пусть W' — компонента множества

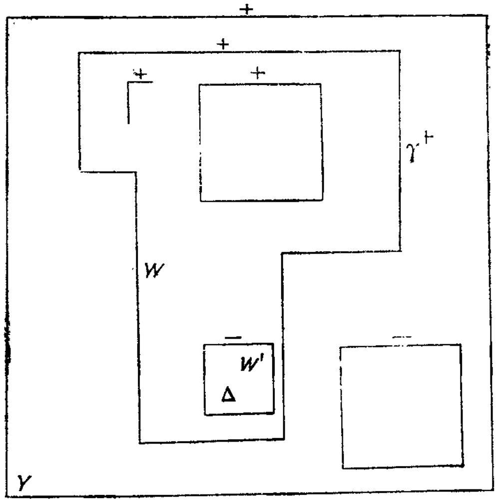


Рис. 1. Показаны области W и W'. Линии означают $\pm$-линии Дирихле, определяющие $\gamma^{\pm}$.

$Y\sim W$, которая содержит Δ_x; если $\Delta\subset W$, то пусть $W'=\varnothing$. Положим далее $U=W\cup W'$ (рис. 1).

Как и ранее,

$$Z''=Z''(Y\sim U, \Sigma\sim U, \Gamma\sim U)\,Z''(W, \Sigma\cap W, \Gamma\cap W)\times \\ \times Z''(W', \Sigma\cap W', \Gamma\cap W'),$$

и так же, как прежде, частичное суммирование приводит к представлению

$$Z^{(\pm)}(Y, N_1, \Gamma_1)= \\ =\sum_{\partial W^{\pm}} Z(Y\sim U, N_3, \Gamma_3)\,R(W)\big(Z-Z^{(\pm)}\big)(W', N_4, \Gamma_4), \quad (4.2.13)$$

где

$$Z-Z^{\pm}=1 \quad \text{при} \quad W'=\varnothing,$$

$$N_3^{\pm}=[N_1^{\pm}\cup N(\partial U^{\pm})]\sim U, \qquad \Gamma_3=(\Gamma_1\sim U)\cup\partial U,$$

$$N_4^{\pm}=[N_1^{\pm}\cup N(\partial W'^{\pm})]\cap W', \qquad \Gamma_4=(\Gamma_1\cap W')\cup\partial W'$$

и $R(W)$ обозначает сумму по области W. В области W' отсутствие $(+)$ (соотв. $(-)$)-контуров, охватывающих Δ, есть то ограничение, которое приводит к разности $Z - Z^{(\pm)}$ в последней формуле. (Заметим, что по определению все контуры являются связными.)

Появление выражений $Z^{(\pm)}$ в правой части (4.2.13) требует некоторого дополнения к нашему предположению индукции. Мы будем предполагать, что

$$\left|Z^{(\pm)}(Y, N_1, \Gamma_1)\, Z(Y, N_{1\,\text{plus}}, \Gamma_1)^{-1}\right| \leqslant e^{-b\,|\lambda|^{-1/2}}, \qquad (4.2.14)$$

где $\Delta = \Delta^{(\pm)} \subset N_1^{(\pm)}$ определяет сумму $Z^{(\pm)}$. Поскольку $Z^{(+)} = Z$ или $Z^{(-)} = Z$ и поскольку $N_1^+ \neq \varnothing \neq N_1^-$, оценка (4.2.14), доказанная по индукции, завершит доказательство для случая 3.

Область W должна пересекать как N_1^-, так и N_1^+. В самом деле, один из знаков приписывается контуру γ, а второй — границе $\partial W'$, если $W' \neq \varnothing$, и квадрату $\Delta^{\mp}$, если $W' = \varnothing$. Мы воспользовались здесь минимальностью контура γ, для того чтобы заключить, что γ и $\partial W'$ имеют противоположные знаки. Таким образом, для каждого члена Z'' в сумме $R(W)$ область сходимости $X^0 \cap W$ не пуста. Далее сходимость следует из того, что линии дифференцирования плотны в $X \cap W$, что приводит к оценке

$$|R(W)| \leqslant e^{-b\,|\lambda|^{-1/2}} e^{-2\delta\,|W|/l},$$

и, как и в случае 2, аналогичное неравенство верно для $\left|R(W)\, Z^*(W)^{-1}\right|$. Подстановка в (4.2.13) дает

$$\left|Z^{(\pm)}(Y, N_1, \Gamma_1)\right| \leqslant e^{-b\,|\lambda|^{-1/2}} \sum_{\partial W^{\pm}} e^{-2\delta\,|W|/l} \times$$
$$\times \left|Z(Y \sim U, N_{3\,\text{plus}}, \Gamma_3)\, Z^*(W)\, Z(W', N_{4\,\text{plus}}, \Gamma_4)\right|. \qquad (4.2.15)$$

Мы применили здесь предположение индукции в областях $Y \sim U$ и W'. Поскольку $W \neq \varnothing$ по построению, эти области заведомо меньше, чем Y. Однако индуктивное предположение в Y применимо и к произведению статистических сумм в правой части (4.2.15). В самом деле, поскольку $X^0 \cap W \neq \varnothing$, в $Z^*(W)$ имеется больше линий Дирихле, чем в $\Gamma_1 \cap W$, что приводит к тем же значениям J, что и в рассмотренных ранее случаях 1 и 2, и к неравенству

$$\left|Z^{\pm}(Y, N_1, \Gamma_1)\, Z(Y, N_{1\,\text{plus}}, \Gamma_1)^{-1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant e^{-b\,|\lambda|^{-1/2}} \sum_{\partial W^{\pm}} e^{[O(|\lambda|^{1/2}) - 2\delta/l]\,|W|}.$$

Подставляя последнее неравенство в (4.2.15) и сочетая его с комбинаторными оценками, как в случае 2, можно оценить сумму по $\partial W^{\pm}$. В этом рассуждении имеется один новый момент, отсутствовавший в случае 2, а именно необходимость выбора отмеченной точки в W. Мы выберем в качестве такой точки первое пересечение контура γ с каким-либо из лучей, начинающихся в $\Delta^{\mp}$. Такой выбор может быть сделан не более чем $|\gamma| \leqslant |W|$ способами. Это завершает доказательство неравенства (4.2.14), а тем самым анализ случая 3 и все доказательство теоремы 4.2.1.

4.3. Экспоненциальное убывание корреляций. Пусть A и B — виковы полиномы вида (I. 6.1), локализованные в областях $\mathscr{L}(A)$ и $\mathscr{L}(B)$ соответственно. Пусть

$$D = \operatorname{dist}(\mathscr{L}(A), \mathscr{L}(B)).$$

Теорема 4.3.1. *Существуют $\delta > 0$ и константа c_{AB}, такие, что при достаточно малых λ равномерно по Λ выполнено неравенство*

$$|\langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle| \leqslant c_{AB} e^{-\delta D}. \tag{4.3.1}$$

Замечание. Непосредственным следствием этой теоремы является единственность вакуума и положительность массы в теореме I. 2.1.

Доказательство. Как и в [16], введем парные переменные φ, $\varphi^{\sim}$ таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle = {}^1\!/_2 \langle (A - A^{\sim})(B - B^{\sim})\rangle. \tag{4.3.2}$$

По отношению к паре переменных φ, $\varphi^{\sim}$ у нас имеются независимые разложения по Σ и по $\Sigma^{\sim}$, и члены в двойном разложении нумеруются парами $\{\Sigma, \Sigma^{\sim}\}$. При заданных $\{\Sigma, \Sigma^{\sim}\}$ определим области X, $X^{\pm}$ и $X^{\sim}$, $X^{\sim\pm}$ так же, как выше (см. § I. 5), а $\mathscr{B}(\Sigma, \Sigma^{\sim})$ — как множество ребер l-решетки в $(X \cap X^{\sim}) \sim (\mathscr{L}(A) \cup \mathscr{L}(B))$. Так же, как и в [16], кластерное разложение в целом симметрично по переменным φ и $\varphi^{\sim}$, и поэтому имеется единый параметр s_b для обоих переменных сразу и единый индекс $\Gamma \subset \mathscr{B}(\Sigma, \Sigma^{\sim})$ для членов разложения. Поскольку разложения по Σ и $\Sigma^{\sim}$ независимы, отдельные члены в этом разложении не инвариантны относительно симметрии $\varphi \longleftrightarrow \varphi^{\sim}$. В частности, рассмотрим четыре типа контуров: $++$, $+-$, $-+$ и $--$; тогда в общем случае

$$\Gamma = \Gamma^{++} \cup \Gamma^{+-} \cup \Gamma^{-+} \cup \Gamma^{--}.$$

В этих обозначениях контуры из Γ^{++} и Γ^{--} сохраняются при симметрии $\varphi \to \varphi^{\sim}$, а контуры из Γ^{+-} и Γ^{-+} переходят один в другой.

Зафиксировав Σ, $\Sigma^{\sim}$ и Γ, определим $\gamma = \gamma(\Sigma, \Sigma^{\sim}, \Gamma)$ как наименьший связный замкнутый $(++)$- либо $(--)$-контур, охватывающий $\mathscr{L}(A)$. Благодаря граничным условиям «$+$», контур γ существует для ненулевых членов в разложении. Пусть $\operatorname{Int}\gamma$ обозначает область, окруженную контуром γ, а W — связную компоненту множества $\operatorname{Int}\gamma \sim \Gamma$, которая примыкает к γ. Пусть W' — компонента дополнения $\mathbb{R}^2 \sim W$, которая содержит $\mathscr{L}(A)$, если $\mathscr{L}(A) \not\subset W$. В противном случае пусть $W' = \varnothing$.

В качестве первого шага доказательства мы фиксируем W и собираем вместе оставшуюся часть разложения. В результате возникает член, который (i) зависит только от ∂W, (ii) факторизуется по отношению к внутренности и внешности γ, (iii) симметричен относительно замены $\varphi \leftrightarrow \varphi^{\sim}$ и (iv) симметричен относительно замены $\varphi \leftarrow \varphi^{\sim}$ в $\operatorname{Int}\gamma$ при том, что значения φ и $\varphi^{\sim}$ остаются фиксированными в $\mathbb{R}^2 \sim \operatorname{Int}\gamma$. Благодаря свойству (iv) и закону вычитания (4.3.2) этот член обращается в нуль, за исключением случая $\mathscr{L}(B) \subset \operatorname{Int}\gamma$, который мы сейчас и рассмотрим. Следовательно, $|W|/l \geqslant D$.

Теперь мы будем действовать так же, как в [16] и в п. 4.2. Суммирование в $\mathbb{R}^2 \sim (W \cup W')$ свободно от ограничений и дает в результате некоторую статистическую сумму, тогда как суммирование в W' включает вклады от A и разность статистических сумм так же, как в (4.2.13). Таким образом, мы получаем

$$|\langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle| \leqslant \sum_{W} |R(W)| \frac{Z(\sim W, N(\partial W), \partial W)}{Z(\Lambda, \varnothing, \varnothing)},$$

где $R(W)$ — сумма, связанная с объемом W. Доказываемая теорема вытекает, так же как в п. 1.2 и [16], из приводимой ниже оценки на $R(W)$.

Лемма 4.3.2. *Существует такое $\delta > 0$, что при достаточно малых λ*

$$|R(W)| \leqslant |||A|||\ |||B|||\ e^{-\delta|W|/l}.$$

Суммирование в W проводится таким же образом, как в доказательстве теоремы 4.2.1.

4.4. Аналитичность и предел при неограниченном возрастании объема. Согласно теореме Ли — Янга и результатам Фрёлиха и Саймона [11b], предел функций Швингера при неограниченном возрастании объема существует и является евклидово-инвариантным при $\mu > 0$. Более того, если A есть произведение операторов поля, то в каждом конечном объеме Λ мы имеем

$$|\langle A\rangle_{\mu_1} - \langle A\rangle_{\mu=0}| = \left|\int_0^{\mu_1} \frac{d}{d\mu} \langle A\rangle (\mu)\, d\mu\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot \mu_1,$$

где константа не зависит от Λ при вещественных μ и λ. Оценка производной в последнем равенстве является непосредственным следствием существования массовой щели, как это сформулировано в теореме 4.3.1.

Таким образом, сходимость к пределу при $\mu \searrow 0$ равномерна по Λ и, следовательно, функции Швингера сходятся для $\mu = 0$ и вещественных λ при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^2$. Для того чтобы получить аналитичность по λ (при $\mu = 0$), мы заметим, что функции Швингера в конечном объеме аналитичны и равномерно по Λ ограничены в области $0 < \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant \varepsilon |\lambda|$.

Применяя теорему Витали, получаем аналитичность в бесконечном объеме. Это завершает доказательство теорем I. 2.1 и I. 2.5.

Сходимость к пределу при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^2$ вытекает также из методов разложения, развитых в этой работе. Поскольку наши методы устанавливают более сильный результат о том, что степенной ряд (I.7.15) сходится почленно и сохраняет смысл в пределе при неограниченном возрастании объема, мы вкратце приведем соответствующие рассуждения. Пусть Δ — квадрат решетки вне Λ, и пусть Δ_t — полоска в Δ ширины t, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Пусть Z_0 обозначает часть суммы Z, зависящую от Λ, и пусть $Z_t = Z_{\Lambda \cup \Delta_t}$. Тогда мы должны показать, что

$$\left| \frac{Z_0(\mathbb{R}^2, N(\Gamma), \Gamma)}{Z_0(\mathbb{R}^2, \varnothing, \varnothing)} - \frac{Z_1(\mathbb{R}^2, N(\Gamma), \Gamma)}{Z_1(\mathbb{R}^2, \varnothing, \varnothing)} \right|$$

экспоненциально мало по отношению к $D = \mathrm{dist}(\Gamma, \Delta)$. Но

$$\frac{d}{dt} \frac{Z_t(\mathbb{R}^2, N(\Gamma), \Gamma)}{Z_t(\mathbb{R}^2, \varnothing, \varnothing)}$$

есть усеченное вакуумное среднее наблюдаемых Γ и $N(\Gamma)$, и здесь применимы методы п. 4.3.

ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ ГАМИЛЬТОНИАНА ПОЛЯ φ_3^4 [1]

Дж. Глимм [2]
Courant Institute of Mathematical Science,
New York University, New York

А. Джаффе [3]
Lyman Laboratory of Physics, Harvard University, Cambridge, Mass.

Резюме. Перенормированный гамильтониан поля φ_3^4 ограничен снизу константой, пропорциональной обьему.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Обсуждение. Мы докажем, что перенормированный φ_3^4-гамильтониан ограничен снизу константой, пропорциональной объему. Перенормировочные константы в нашем гамильтониане $H(g)$ при заданном пространственном обрезании g определяются с помощью теории возмущений; они представляют собой расходящиеся в ультрафиолетовой области вклады в энергию основного состояния и массу покоя физической частицы. После вычитания конечной константы $E(g)$ — вакуумной энергии мы получаем положительный гамильтониан с плотной областью определения. Хорошо известны соответствующие результаты о положительности гамильтониана в моделях $\mathscr{P}(\varphi)_2$ и Юкава$_2$. В дальнейшем теория модели φ_3^4 могла бы развиваться так же, как в случае моделей $\mathscr{P}(\varphi)_2$ и Юкава$_2$. При этом нижняя оценка для $H(g)$ была бы основным шагом на пути к построению самосопряженного гамильтониана $H(g)$, определяющего динамику с конечной скоростью распространения.

Главная трудность при доказательстве положительности заключается в расходимостях. Ультрафиолетовые расходимости становятся все более серьезными с увеличением числа измерений, и в соответствии с этим наше доказательство положительности для φ_3^4-гамильтониана существенно труднее,

---

[1]) James Glimm, Arthur Jaffe, Positivity of the φ_3^4 Hamiltonian, *Fortschritte der Physik*, 21 (1973), 327—376.

[2]) При частичной финансовой поддержке Национального научного фонда по контракту NSFGP 24002.

[3]) При частичной финансовой поддержке Национального научного фонда по контракту NSFGP 31239 X и AFOSR по контракту AF 44620-70-C0030.

чем для двумерных моделей. Единственными «сверхперенормируемыми» бозонными теориями с самодействием являются $\mathscr{P}(\varphi)_2$ и φ_3^4. Следующей по сингулярности моделью с самодействием в трех измерениях является φ_3^6, которая сравнима по трудиости с φ_4^4. Методы настоящей статьи, по-видимому, только частично годятся для таких «перенормируемых, но не сверхперенормируемых» взаимодействий, и мы думаем, что необходимы новые идеи.

Гамильтониан $H(g)$ определяется как предел (при $\varkappa \to \infty$) аппроксимирующих его гамильтонианов $H(g, \varkappa)$ с импульсным обрезанием $\varkappa$. Обрезанные операторы $H(g, \varkappa)$, определенные в пространстве Фока, самосопряжены и ограничены снизу. Первым результатом относительно φ_3^4-гамильтониана явилось доказательство [4] того, что последовательность $\{H(g, \varkappa)\}$ имеет пределом плотно определенный оператор $H(g)$. Область определения $H(g)$ лежит в новом гильбертовом пространстве $\mathscr{F}(g)$, не пересекающемся с пространством Фока. Нефоковские представления полей в пространстве $\mathscr{F}(g)$ изучались Хеппом [9], Фабри [3], Экманом и Остервальдером [2] и Экманом [1].

В настоящей работе мы показываем, что $\{H(g, \varkappa)\}$ ограничены снизу равномерно по $\varkappa$, откуда следует нижняя оценка для $H(g)$. Пусть g — функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $0 \leqslant g \leqslant 1$, и пусть $A(g)$ — мера Лебега множества точек, находящихся на расстоянии не больше 1 от носителя g. Пусть $E(g, \varkappa)$ — вакуумная энергия для $H(g, \varkappa)$, а именно

$$E(g, \varkappa) = \inf \operatorname{spect} H(g, \varkappa). \tag{1.1.1}$$

Теорема 1.1.1. *Существует положительная константа, не зависящая от g и $\varkappa$, такая, что*

$$-\operatorname{const} A(g) \leqslant E(g, \varkappa). \tag{1.1.2}$$

Из работы [4] следует, что при фиксированной функции g константы $E(g, \varkappa)$ равномерно ограничены сверху; можно ожидать, но это еще не доказано, что при $g \to 1$

$$E(g, \varkappa) \leqslant \operatorname{const} A(g). \tag{1.1.3}$$

Оценка (1.1.3) используется в моделях $\mathscr{P}(\varphi)_2$ и Юкава$_2$ при переходе к пределу $g = 1$.

Обрезанный оператор $H(g, \varkappa)$ имеет единственный вакуумный вектор $\Omega(g, \varkappa)$, т.е. $E(g, \varkappa)$ является простым собственным значением $H(g, \varkappa)$. Как видно из доказательства этой единственности [5], $\Omega(g, \varkappa)$ не ортогонален к вакуумному вектору Ω_0 гамильтониана H_0. Поэтому

$$-E(g, \varkappa) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log\langle\Omega_0, \exp(-tH(g, \varkappa))\,\Omega_0\rangle}{t}. \qquad (1.1.4.)$$

Теорема 1.1.1 будет доказана, если показать, что существует константа $O(1)$, не зависящая от g, $\varkappa$ и t и такая, что для $t \geqslant 1$

$$\langle\Omega_0, \exp(-tH(g, \varkappa))\,\Omega_0\rangle \leqslant \exp(O(1)\,tA(g)). \qquad (1.1.5)$$

Доказательство неравенства (1.1.5) опирается на два основных разложения. Первое разложение, для больших импульсов, которое мы будем называть PC-разложением [1]), строится в § 2. Это разложение является перенормированным рядом теории возмущений для $\langle\exp(-tH(g, \varkappa))\rangle$, позволяющим явно проделать перенормировочные сокращения. Одного только PC-разложения недостаточно, так как ряд теории возмущений для $\langle\exp(-tH(g, \varkappa))\rangle$ расходится. Второе разложение, виково разложение, позволяет получить оценку для части взаимодействия, содержащей малые импульсы. Оно основано на оценке викова многочлена

$$-O(\varkappa^2) \leqslant {:}\varphi_\varkappa^4(\mathbf{x}){:}, \qquad (1.1.6)$$

которая следует из формулы ${:}\varphi_\varkappa^4{:} = \varphi_\varkappa^4 - 6\varphi_\varkappa^2\langle\varphi_\varkappa^2\rangle + 3\langle\varphi_\varkappa^2\rangle^2$, где $\langle\varphi_\varkappa^2\rangle = \langle\Omega_0, \varphi_\varkappa(\mathbf{x})^2\,\Omega_0\rangle = O(\varkappa)$. Объединяя эти два разложения, мы докажем (1.1.5).

Основная идея нашего подхода — выполнить PC-разложение для частей гамильтониана, локализованных в достаточно малых пространственных областях и интервалах времени. Затем мы используем (1.1.6) для получения сходящегося ряда для $\exp(-tH)$ в каждой из таких областей и, наконец, покажем, что различные области в существенном независимы. Мы локализуем поля $\varphi(x)$ в H_l или, другими словами, локализуем частицы, участвующие во взаимодействии. В этой конкретной задаче нам необходимо будет локализовать частицы одновременно в конфигурационном и в импульсном пространствах, т. е. в фазовом пространстве. Конечно, такая локализация может быть лишь приближенной, но она задается функцией f, такой, что f и ее преобразование Фурье $f^{\sim}$ быстро убывают. Такую локализацию мы будем называть полиномиальной локализацией в фазовом пространстве. Точный вид функции $\zeta(x, k)$, задающей локализацию, приведен в п. 1.2.

---

[1]) В оригинале: perturbation-contraction expansion. — *Прим. перев.*

Диаметр области локализации ограничен снизу так, как это требуется принципом неопределенности, т. е.

$$O(1) \leqslant \delta x\, \delta p \tag{1.1.7}$$

для каждой координаты положения и импульса частицы. В частности, для больших импульсов, $|p| > M$, мы можем ввести область локализации в конфигурационном пространстве с малым диаметром $O(M^{-1})$. Таким образом, при $M = O(\varkappa)$ минимальный пространственный объем, совместимый с принципом неопределенности, имеет порядок $O(\varkappa^{-s})$, где s — число пространственных измерений. Так как мы будем иметь дело в действительности с локализованным действием, то для временны́х интервалов δt также должно выполняться $O(1) \leqslant \delta E\, \delta t$. Минимальный объем $|\Delta|$ куба Δ локализации в пространстве-времени равен

$$|\Delta| = O((\delta x)^s\, \delta t) = O(\varkappa^{-s-1}). \tag{1.1.8}$$

В формуле (1.1.5) показатель экспоненты $S = O(1)\, tA(g)$ имеет размерность действия. Как следует из теории возмущений, для сверхперенормируемого взаимодействия вакуумная энергия удовлетворяет неравенству

$$|E_\varkappa| \leqslant A(g)\, O(\varkappa^s) \tag{1.1.9}$$

при $\varkappa \to \infty$. Так как вакуумная энергия является наиболее сильно расходящейся перенормировочной константой, оценка S, если пренебречь перенормировочными сокращениями, имеет вид

$$|S_\varkappa| \leqslant tA(g)\, O(\varkappa^s). \tag{1.1.10}$$

Мы покажем, что $S_\varkappa$ приближенно аддитивна:

$$\begin{gathered} S_\varkappa \approx \sum S_\varkappa(\Delta), \\ S_\varkappa(\Delta) \approx (|\Delta|/tA(g))\, S_\varkappa \leqslant O(|\Delta|\, \varkappa^s) \end{gathered} \tag{1.1.11}$$

согласно (1.1.10). Из (1.1.8) мы заключаем тогда, что для кубов Δ минимального объема $S_\varkappa(\Delta) \leqslant O(\varkappa^{-1})$ при $\varkappa \to \infty$. С приближенной аддитивностью $S_\varkappa$ связана приближенная факторизация физического вакуума Ω с множителем $\Omega(\Delta)$ для каждой области Δ. При этом малому вкладу $S(\Delta)$ области Δ в S соответствует тот факт, что в множитель $\Omega(\Delta)$ (и, следовательно, в Ω) дают вклад не более $O(1)$ голых частиц с импульсами, большими $O\left(|\Delta|^{-1/(s+1)}\right)$. Мы используем оценку (1.1.11) вместе со сходимостью PC-разложения в Δ. Эти идеи позволяют доказать (1.1.5), и в принципе они применимы к произвольной сверхперенормируемой теории.

В случае перенормируемых, но не сверхперенормируемых взаимодействий мы приближаемся к самой грани применимости этих идей, и поэтому не очень ясно, насколько они здесь пригодны. Например, вакуумная энергия в этом случае в рамках теории возмущений удовлетворяет неравенству $|E| \leqslant O(A(g)\varkappa^{s+1})$. Поэтому для кубов Δ минимального размера $S_\varkappa(\Delta) \approx O(1)$, и мы теряем контроль над оценками в приведенной выше схеме. Как и в настоящей работе, наиболее трудными представляются те части гамильтониана, в которых взаимодействуют моды с большими и малыми импульсами. (Различные проблемы, связанные с этим, возникают в § 2 и 3.) И действительно, в эту часть гамильтониана H_I входят перенормировки массы, силы поля и заряда. Отметим, однако, что эта часть H_I сверхперенормируема, хотя весь H_I не является таковым[1]).

Наша оценка $\langle\exp(-tH(g,\varkappa))\rangle$ получается с помощью индуктивного алгоритма [6]. На каждом шаге мы оцениваем сверху $\langle\exp(-tH)\rangle$ суммой членов вида

$$\int ds \left\langle TR(s)\exp\left(-\int_0^t d\sigma H(\sigma, s)\right)\right\rangle, \qquad (1.1.12)$$

где $R(s)$ — полином от полей, $H(\sigma, s)$ — зависящий от времени гамильтониан, T — хронологически упорядочивающий оператор по временны́м параметрам s и σ. На каждом шаге или подшаге индукции (1.1.12) заменяется суммой членов такого же типа, ограничивающей (1.1.12) сверху. Для каждого члена индукция продолжается до тех пор, пока $H(\sigma, s)$ не станет равным тождественно нулю. Если $H(\sigma, s) = 0$, то (1.1.12) имеет вид суммы вакуумных фейнмановских диаграмм. Мы определяем наше разложение в § 2 и 3 и оцениваем сумму членов (1.1.12) в § 4, 5 и 6.

1.2. Локализация виковых полиномов. Читателя, не знакомого с математическими свойствами операторов и форм в пространстве Фока, мы отсылаем к работам [7—8]. Определим евклидово поле $\varphi(x)$ для $x \in \mathbb{R}^3$:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2}\int e^{-ikx}\varphi(k)^\wedge\, dk,$$

$$\varphi(k)^\wedge = (k^2+m^2)^{-1/2}\{A(k)^* + A(-k)\}.$$

Здесь евклидовы операторы рождения и уничтожения $A(k)$, $A(k)^*$ удовлетворяют соотношениям $[A(k), \quad A(k')] = 0$,

[1]) Например, φ_4^4. — *Прим. перев.*

$[A(k), A(k')^*] = \delta^3(k - k')$. Введенное евклидово поле в нулевой момент времени сводится к обычному релятивистскому свободному полю в тот же момент времени:

$$\varphi(\mathbf{x}) \equiv \varphi(\mathbf{x}, x_0 = 0) = (2\pi)^{-1} 2^{-1/2} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mu(\mathbf{k})^{-1/2} \times$$
$$\times \{a(\mathbf{k})^* + a(-\mathbf{k})\} d\mathbf{k},$$

что позволяет определить $a(\mathbf{k})$ через $A(k)$. Поэтому $[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')^*] = \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$.

Для подходящих функций ζ на фазовом пространстве $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ определим локализованное евклидово поле $\varphi(\zeta)$:

$$\varphi(\zeta) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{-ikx} \zeta(x, k) \varphi(k)^{\check{}}\, dk\, dx. \qquad (1.2.1)$$

Для викова полинома $:\varphi^j:$ введем j различных импульсных локализаций, но только одну пространственно-временную локализацию. Положим

$$:\varphi^j(\zeta): = (2\pi)^{-3j/2} \int e^{-i\left(\sum_{l=1}^{j} k_l\right) x} \zeta(x, k) : \prod_{l=1}^{j} \varphi^{\check{}}(k_l) : dk\, dx, \qquad (1.2.2)$$

где $\zeta(x, k)$ — функция от $x \in \mathbb{R}^3$ и $k = (k_1, \ldots, k_j) \in \mathbb{R}^{3j}$. Эрмитовость (1.2.2) эквивалентна равенству $\zeta(x, k) = \zeta(x, -k)$. В дальнейшем для удобства выберем массу m равной 1.

Для импульсной локализации выберем произвольно C^∞-функцию η на $\mathbb{R}^1$, лишь бы выполнялись условия

$$\eta(\rho) = 1, \qquad |\rho| \leqslant 1/2,$$
$$0 \leqslant \eta(\rho) \leqslant 1, \qquad 1/2 \leqslant \rho \leqslant 2,$$
$$\eta(\rho) = 0, \qquad 2 \leqslant \rho.$$

Для $k \in \mathbb{R}^3$ и векторного параметра обрезания $\alpha \in (\mathbb{R}^+)^3$ положим

$$\eta_\alpha(k) = \sum_{l=0}^{2} \eta\left(k^{(l)}/\alpha^{(l)}\right), \qquad (1.2.3)$$

где l нумерует компоненты импульса. Положим $\eta\left(k^{(l)}/\alpha^{(l)}\right) = 0$ для $\alpha^{(l)} = 0$. Если $\alpha^{(l)} \leqslant \beta^{(l)}$, то импульсное обрезание

$$\eta_{\alpha, \beta}(k) = \eta_\beta(k) - \eta_\alpha(k) \qquad (1.2.4)$$

дает верхнее и нижнее обрезание в импульсном пространстве. В пространственно-временных кубах $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ локализацию будем осуществлят с помощью характеристической функции χ_Δ. В дальнейшем функция $\zeta(x, k)$ в (1.2.1)—(1.2.2) будет некоторой линейной комбинацией функций вида

$$h(x)\chi_\Delta(x)\prod_{r=1}^{j}\eta_{\alpha_r, \beta_r}(k_r), \tag{1.2.5}$$

где $h(x)$ — пространственно-временное обрезание. Для полинома $:\varphi^j:$ определим

$$\lambda = \max_{l, r}\{\alpha_r^{(l)}, 2\}$$

как максимальную нижнюю границу импульсного обрезания. Удобно ограничить допустимые классы кубов Δ и интервалов $[\alpha^{(l)}, \beta^{(l)}]$. Допустимые кубы будут иметь вид $2^{-j}\Delta_0 + 2^{-j}z$, где $z \in \mathbb{Z}^3$, а Δ_0 — куб объема $|\Delta_0| = 1$ с центром в начале координат. Для пространственно-временного обрезания h определим $\mathrm{vol}(h)$ как число сдвигов $\Delta_0 + z$, $z \in \mathbb{Z}^3$, куба Δ_0, пересекающих носитель h.

Допустимые импульсные обрезания $\alpha^{(l)}$, $\beta^{(l)}$ выбираются из последовательности $\{M_0, M_1, \ldots, \infty\}$, где $M_0 = 0$, M_1 выбирается достаточно большим и

$$M_{j+1} = M_1^{l+\nu} = M_1^{(l+\nu)^j}. \tag{1.2.6}$$

В дальнейшем мы выберем $\nu > 0$ достаточно малым.

Согласно принципу неопределенности, частицы, рожденные полем (1.2.1) или (1.2.2), локализованы в кубе со стороной

$$|\Delta|^{1/3} + M_j^{-1}, \tag{1.2.7}$$

где M_j — нижнее импульсное обрезание для данной частицы, определяющее ее размазывание в пространстве. Если

$$M_j^{-1} \leqslant |\Delta|^{1/3}, \tag{1.2.8}$$

то мы будем называть локализацию собственной, в противном случае — несобственной. Введем локализационное отношение

$$b = \max\{1, |\Delta|^{-1/3} M_j^{-1}\}. \tag{1.2.9}$$

Тогда в обоих случаях — собственном и несобственном — частицы локализованы в кубах со стороной

$$O(1)\, b\, |\Delta|^{1/3}. \tag{1.2.10}$$

Нас интересует также величина эффективного взаимодействия между двумя частицами, локализованными в различных кубах Δ, Δ' и имеющими импульсную локализацию в областях с нижними импульсными обрезаниями M_j, $M_{j'}$. Эта величина выражается в терминах безразмерного расстояния d, определяемого как

$$d = \max\{1, \operatorname{dist}(\Delta, \Delta'), M_l \operatorname{dist}(\Delta, \Delta'), M_{l'} \operatorname{dist}(\Delta, \Delta')\}. \quad (1.2.11)$$

В случае, если оба нижние импульсные обрезания равны нулю, безразмерное расстояние d равно $\max\{1, \operatorname{dist}(\Delta, \Delta')\}$, где $\operatorname{dist}(\Delta, \Delta')$ — евклидово расстояние. Это определение, неоднородное относительно масштаба измерения длины, выбрано нами для того, чтобы подчеркнуть значение d для ультрафиолетового обрезания.

1.3. Перенормированный гамильтониан. Мы будем изучать гамильтонианы вида

$$H(g, \varkappa) = H_0 + \int :\mathcal{P}(\varphi_\varkappa(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})): d\mathbf{x},$$

где $\mathcal{P}$ — взаимодействие четвертой степени плюс контрчлены. В частности, мы получим оценку для $\langle \Omega_0, \exp(-tH(g, \varkappa))\, \Omega_0\rangle$. Удобно связать это выражение с евклидовым полем $\varphi(x)$ из п. 1.2. Тогда мы получим ряд теории возмущений непосредственно в терминах евклидовых фейнмановских пропагаторов $(k^2 + m^2)^{-1}$. Мы используем для этого «релятивистскую формулу Фейнмана — Каца», исследованную Симанзиком [11] и Нельсоном [10]:

$$\begin{aligned}\langle \Omega_0, &\exp(-tH(g, \varkappa))\, \Omega_0\rangle = \\ &= \left\langle \Omega_0, \exp\left(-\int_0^t dx_0 \int d\mathbf{x} :\mathcal{P}(\varphi_\varkappa(x), g(\mathbf{x})):\right) \Omega_0 \right\rangle = \\ &= \langle \Omega_0, \exp(-V)\, \Omega_0\rangle.\end{aligned}$$

Иначе говоря, мы определяем гамильтониан посредством перенормированного евклидова действия $V = V_I + V_C$. При этом V_I и V_C — виковы полиномы от евклидова поля $\varphi(x)$. Величина $\exp(-V)$ допускает интерпретацию в терминах не зависящего от времени гамильтониана при выполнении следующих условий: перенормировочные константы не зависят от времени, пространственно-временное обрезание п. 1.2 имеет вид

$$h(x) = g(\mathbf{x})\, \chi_{[0,\, t]}(x_0) \quad (1.3.1)$$

и импульсное обрезание η п. 1.2 не зависит от времени и от энергии. Мы назовем такое обрезание для V гамильтоновым обрезанием и предположим, что либо $g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, либо $h(x)$ является характеристической функцией объединения сдвигов Δ_0. Наши оценки для $\exp(-V)$ имеют место и в случае, когда $h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. В начале доказательства теоремы 1.1.1 мы будем использовать гамильтоново обрезание, но в индуктивной конструкции мы заменим ζ более общими обрезаниями п. 1.2.

Удобно определить контрчлен V_C несколько иначе, чем это естественно в гамильтоновом формализме. Мы используем перенормировку вакуумной энергии исходя из евклидовых функций Грина

$$\langle \Omega_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \exp(-V) \Omega_0 \rangle.$$

Ниже мы покажем, что перенормировка евклидовых функций Грина отличается от гамильтоновой перенормировки константой перенормировки волновой функции и переходным членом, исчезающим при $t \to \infty$. Отсюда получаются оценки гамильтониана. Преимущество использования контрчленов для евклидовых функций Грина вместо локальных гамильтоновых контрчленов состоит в том, что с их помощью вакуумные диаграммы сокращаются во втором и третьем порядке в нашем разложении $\exp(-V)$.

Для обрезания ζ положим

$$V_I = :\varphi^4(\zeta):. \tag{1.3.2}$$

Тогда вакуумными контрчленами будут

$$\begin{aligned} E_2(\zeta) &= -\frac{1}{2}\langle V_I^2 \rangle_{\Omega_0}, \\ E_3(\zeta) &= \frac{1}{6}\langle V_I^3 \rangle_{\Omega_0}, \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

где среднее берется по евклидову вакууму Ω_0. Если

$$\zeta(x, k) = \zeta_0(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \chi_{[0, t]}(x_0) = h(x) \eta(\mathbf{k}), \tag{1.3.4}$$

то интегралы в (1.3.3) элементарны и могут быть вычислены с помощью теории вычетов, что дает

$$E_2(\zeta) = t\bar{E}_2(\zeta_0) + \Lambda_2(\zeta_0) + T_2(\zeta_0, t), \tag{1.3.5}$$

где $\bar{E}_2$ можно отождествить с гамильтоновым контрчленом во втором порядке, Λ_2 — с перенормировкой волновой функции во втором порядке и $T_2(\zeta_0, t)$ — с переходным членом. Действительно, для обрезания (1.3.4)

$$V_I = \int_0^t dx_0 :\varphi^4(\zeta_0, x_0): \tag{1.3.6}$$

и для $H_I = :\varphi^4(\zeta_0,\ x_0 = 0)$: мы получаем

$$\overline{E}_2(\zeta_0) = -\langle H_I H_0^{-1} H_I\rangle_{\Omega_0} =$$
$$= 4!\,2^{-4}(2\pi)^{-1/2}\int(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)^{-1}(\mu_1 + \ldots + \mu_4)^{-1}\left|\tilde{\zeta}_0\left(\sum \mathbf{k}_i,\ \mathbf{k}\right)\right|^2 d\mathbf{k}, \tag{1.3.7}$$

где $\mu(k) = (k^2 + m^2)^{1/2}$ и где $\tilde{\zeta}_0$ обозначает частичное преобразование Фурье $\zeta_0(\mathbf{x},\ \mathbf{k})$ по переменной $\mathbf{x}$. Подобным же образом можно получить, что

$$\Lambda_2(\zeta_0) = \langle H_I H_0^{-2} H_I\rangle_{\Omega_0}, \tag{1.3.8}$$

$$T_2(\zeta_0,\ t) = -\langle H_I H_0^{-2} e^{-tH_0} H_I\rangle_{\Omega_0}. \tag{1.3.9}$$

Мы видим, что $\overline{E}_2$ в точности совпадает с гамильтоновым вакуумным контрчленом. Так как Λ_2 не зависит от t в (1.3.5), то оно не соответствует никакому гамильтонову контрчлену, а является вкладом второго порядка в перенормировку волновой функции. Пусть $\Omega(\zeta_0)$ — основное состояние для

$$\begin{aligned} H(\zeta_0) &= H_0 + H_I(\zeta_0) + C(\zeta_0) = \\ &= H_0 + H_I(\zeta_0) - \overline{E}_2(\zeta_0) - \overline{E}_3(\zeta_0) - \overline{M}_2(\zeta_0). \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

Определим перенормировку волновой функции формулой

$$Z(\zeta_0) = |\langle\Omega_0,\ \Omega(\zeta_0)\rangle|^2 = \exp(-\Lambda(\zeta_0)),$$

откуда во втором порядке теории возмущений $\Lambda(\zeta_0) = \Lambda_2(\zeta_0)$. Заметим, наконец, что $T_2(\zeta_0,\ t)$ в (1.3.9) ограничен равномерно по $\varkappa$ при t, отделенных от нуля, и $T_2(\zeta_0, t) \to 0$ экспоненциально при $t \to \infty$.

Подобным же образом получаем, что

$$E_3(\zeta) = t\overline{E}_3(\zeta_0) + \Lambda_3(\zeta_0) + T_3(\zeta_0,\ t), \tag{1.3.11}$$

где $\overline{E}_3(\zeta_0)$ — гамильтонов контрчлен третьего порядка для вакуумной энергии $\langle H_I H_0^{-1} H_I H_0^{-1} H_I\rangle$, $\Lambda_3(\zeta_0)$—константа перенормировки волновой функции в третьем порядке и $T_3(\zeta_0,\ t) \to 0$ экспоненциально при $t \to \infty$. Соответствующее ультрафиолетовое поведение для $\overline{E}_3$ есть $O(\log\varkappa)$ и $O(1)$ для Λ_3 и T_3.

Рассмотрим теперь контрчлен перенормировки массы, который логарифмически расходится во втором порядке. В кубе Δ импульсное обрезание $\eta = \eta(k)$ имеет вид

$$\eta(k) = \prod_{i=1}^{4} \eta_i(k_i)$$

(ср. с (1.2.5)). Кроме того, $\eta_1=\eta_2=\eta_3=\eta_4$, как мы увидим в (2.7). Положим по определению

$$\delta m^2(\eta)=-4^2\cdot 6\cdot(2\pi)^{-9}\int\delta(k_2+k_3+k_4)\times \times\left(\prod_{i=2}^{4}\mu_i^{-2}\right)\eta_i(-k_i)\,\eta_i(k_i)\,dk_2\,dk_3\,dk_4 \quad (1.3.12)$$

и

$$M_2(\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{\Delta}\delta m^2(\eta):\varphi_\eta^2\,(h^2\chi_\Delta):. \quad (1.3.13)$$

В случае гамильтонова обрезания $M_2(\zeta)$ является интегралом от 0 до t, причем подынтегральное выражение при $t=0$, обозначаемое $\overline{M}_2(\zeta_0)$, является гамильтоновым контрчленом.

С таким выбором $\overline{M}_2(\zeta_0)$ перенормированный гамильтониан задается выражением (1.3.10). Таким же образом определим перенормированное действие:

$$\begin{aligned} V(\zeta)&=V_I(\zeta)+V_C(\zeta),\\ V_C(\zeta)&=-E_2(\zeta)-E_3(\zeta)-M_2(\zeta).\end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Наша оценка $\exp(-V(\zeta))$ отличается от соответствующей оценки $\exp(-tH(\zeta_0))$ числовым множителем. Учитывая введенные выше определения, имеем для достаточно больших $\varkappa$

$$\begin{aligned}\langle\Omega_0,\ e^{-tH(g,\,\varkappa)}\,\Omega_0\rangle&=\\ =\langle\Omega_0,\ e^{-V}\,\Omega_0\rangle\exp(-\Lambda_2(\zeta_0)&-\Lambda_3(\zeta_0)-T_2(\zeta_0,\ t)-T_3(\zeta_0,\ t))\leqslant\\ \leqslant\langle\Omega_0,\ e^{-V}\,\Omega_0\rangle.&\end{aligned} \quad (1.3.15)$$

В заключение отметим, что гамильтонова интерпретация $\exp(-V)$ требует, чтобы импульсное обрезание η в (1.3.4) не зависело от энергии. Для доказательства теоремы 1.1.1 нам желательно иметь равномерную оценку $\exp(-V(\zeta)_\varkappa)$, где $\varkappa$ — верхнее обрезание только по импульсам. В оставшейся части статьи удобно тем не менее рассматривать верхнее обрезание $\varkappa$ как по импульсам, так и по энергии. Индуктивное доказательство § 2—6 проходит и для различных обрезаний: $\varkappa$ — по импульсам и $\varkappa_0$ — по энергии (заметим, что обрезания (1.2.3) могут выбираться отдельно для каждой компоненты). Окончательная оценка равномерна по $\varkappa_0$ и $\varkappa$ и имеет вид

$$\exp\left(-V(\zeta)_{\varkappa_0,\ \varkappa}\right)\leqslant\exp O(tA(g)). \quad (1.3.16)$$

Кроме того, $V(\zeta_{\varkappa_0,\ \varkappa})$ при фиксированном $\varkappa$ ограничена снизу равномерно по $\varkappa_0$ ввиду стандартной виковой оценки. Это дает $\exp(-V(\zeta)_{\varkappa_0,\varkappa}) \to \exp(-V(\zeta_0)_\varkappa)$ при $\varkappa_0 \to \infty$. Поэтому (1.3.16) применяется к гамильтониану, как и требовалось: $\exp(-V(\zeta_0)_\varkappa) \leqslant \exp O(tA(g))$.

2. ПЕРЕНОРМИРОВАННЫЙ РЯД ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Для получения асимптотического разложения $\langle \exp(-tH) \rangle$ мы будем использовать два простых тождества, которые назовем *формулой возмущения* (P-формулой) и *формулой связывания* (C-формулой). При этом P-формула порождает ряд по перенормированному взаимодействию $V = V_I + V_C$, а C-формула производит сокращения расходимостей между неперенормированным взаимодействием V_I и контрчленами V_C. PC-разложение является частично перенормированным разложением. На последних этапах разложения у нас останутся некоторые несокращенные логарифмические расходимости. Они встретятся только во введенных ранее в разложение членах с сильно сходящимися множителями, которые подавляют эти расходимости.

Наше разложение определяется по индукции, поэтому мы называем его *индуктивным разложением* (*индуктивной конструкцией*). Каждый его шаг состоит из трех основных частей: высокоимпульсное PC-разложение, определяемое в этом параграфе, низкоимпульсное (виково) разложение, рассматриваемое в § 3, и комбинаторные оценки § 4 числа членов, порожденных этими разложениями. После этих трех шагов для каждого члена мы решаем либо окончить разложение, либо обратиться к высокоимпульсному разложению в следующем индуктивном шаге. Когда для данного члена разложение кончается, мы для того, чтобы его оценить, используем оценки из § 5 и 6. Каждый такой член соответствует фейнмановской диаграмме G и равен интегралу $I(G)$. Эти интегралы являются известными из теории возмущений фейнмановскими интегралами в импульсном представлении. Однако в нашем случае интегрирование ведется по ограниченной области импульсов, и, в частности, для сходимости разложения мы используем низкоимпульсное обрезание. Таким образом, мы превращаем асимптотический ряд по константе взаимодействия в сходящееся разложение. Окончательная оценка $\langle \exp(-tH) \rangle$ является сходящейся суммой верхних оценок фейнмановских интегралов.

Цель высокоимпульсного PC-разложения — уменьшить верхнее обрезание по импульсам в экспоненте V. Пусть определено семейство ζ_s обрезаний ζ, где $0 \leqslant s \leqslant 1$, причем значение верхнего обрезания по импульсам у ζ_0 меньше, чем у ζ_1.

При этом P-формула имеет вид

$$e^{-V(\zeta_l)} = e^{-V(\zeta_0)} - \int_0^1 ds \frac{d}{ds} V(\zeta_s) e^{-V(\zeta_s)}. \tag{2.1}$$

Она справедлива потому, что $V(\zeta_{s_0})$ и $V(\zeta_{s_1})$ коммутируют как функции евклидова поля. Итак, P-формула выражает $\exp(-V)$ как сумму члена с уменьшенным верхним обрезанием и члена, содержащего dV/ds. Мы будем называть dV/ds P-вершиной (вершиной возмущения). Если надо подчеркнуть, что (2.1) применяется на r-м индуктивном шаге, то будем называть dV/ds P_r-вершиной и говорить, что она вводится при P_rC_r-разложении.

Мы выполняем перенормировочные сокращения только тогда, когда V появляется как P-вершииа. Для этого мы используем C-формулу

$$A(k) e^{-V} = e^{-V} A(k) + [V, A(k)] e^{-V} \tag{2.2}$$

или ей сопряженную. Справедливость C-формулы следует из того, что V и $[V, A]$ коммутируют как функции евклидова поля. Мы будем называть $[V, A(k)]$ и $[A(k)^*, V]$ C-вершииами.

Формула возмущения (2.1) остается верной при умножении на полином R от евклидовых полей:

$$Re^{-V(\zeta_1)} = Re^{-V(\zeta_0)} - \int dsR \frac{dV(\zeta_s)}{ds} e^{-V(\zeta_s)}. \tag{2.3}$$

В C-формуле умиожение на R дает дополнительные связанные члены, но не дает новых вершин:

$$A(k) Re^{-V} = Re^{-V} A(k) + \{[A(k), R] + [V, A(k)] R\} e^{-V}. \tag{2.4}$$

Мы используем (2.4) для переброски некоторых операторов уничтожения вправо, пока не получим $A(k)\Omega_0 = 0$ плюс сумму связанных членов, а сопряженную к (2.4) формулу — для аналогичной переброски в нашем разложении некоторых операторов $A(k)^*$ влево.

В каждый момент индуктивного разложения у нас имеется верхняя оценка $\langle \exp(-V) \rangle$ в виде суммы членов. На каждом индуктивном шаге или подшаге один такой член заменяется суммой членов, каждый из которых имеет вид

$$\sup_s \left| \left\langle R(s) e^{-V(\zeta_s)} \right\rangle \right|. \tag{2.5}$$

PC-разложение состоит из конечной последовательности подшагов. На каждом подшаге добавляется единственная P-вершина, локализованная в пространственно-временном кубе Δ, и мы выполняем некоторые перенормировочные сокращения для этой вершины. Разложение задано, если у нас есть

(a) правило добавления новой P-вершины и (b) правило, когда считать разложение оконченным.

С каждым членом (2.5) связано покрытие $\mathscr{D}$ пространства-времени непересекающимися кубами Δ. Для каждого куба $\Delta \in \mathscr{D}$ определены верхнее обрезание $M_{u(\Delta)}$, нижнее обрезание $M_{l(\Delta)}$ и интенсивность $s(\Delta)$. Интенсивность принадлежит отрезку $[0, 1]$ и задает интерполяцию между верхними обрезаниями $M_{u(\Delta)}$ и $M_{u(\Delta)-1}$. При этом s-зависимое импульсное обрезание для одного хвоста[1]) равно

$$\eta_{M_l, M_u}(s, k) = s\eta_{M_l, M_u}(k) + (1-s)\,\eta_{M_l, M_{u-1}}(k), \qquad (2.6)$$

а обрезание ζ_s в $\exp(-V(\zeta_s))$ равно

$$\zeta(x, k) = \Big(\prod_i \eta_{M_{l(\Delta)}, M_{u(\Delta)}}(s(\Delta), k_i)\Big)(h\chi_\Delta)^{\sim}\Big(\sum_i k_i\Big) = \\ = \eta_s(k)(h\chi_\Delta)^{\sim}\Big(\sum k_i\Big) \qquad (2.7)$$

в кубе Δ. В начале первого индуктивного шага мы выбираем $s(\Delta) = 1$, $M_{l(\Delta)} = 0$, $M_{u(\Delta)-1} \leqslant \varkappa \leqslant M_{u(\Delta)}$. Пространственно-временное покрытие в начале первого индуктивного шага задается системой кубов

$$\{\Delta_0 + \alpha \colon \alpha \in \mathbb{Z}^3\}. \qquad (2.8)$$

Объясним теперь, в чем состоит подшаг добавления единственной P-вершины в Δ. При данных l, u, s, ζ мы применяем (2.1) с

$$s'(\Delta) \in [0, s(\Delta)] \qquad (2.9)$$

вместо s в предположении, что $s(\Delta) > 0$. Если же $s(\Delta) = 0$, то это означает, что первый член в (2.1) был отделен при предыдущем применении (2.1) в Δ. Заменим тогда $s(\Delta)$ на 1, $u(\Delta)$ на $u(\Delta) - 1$ и продолжим как и раньше.

Дадим теперь правило выполнения перенормировочных сокращений. (A) Сначала мы используем (2.4) для связывания всех хвостов новой P-вершины. (B) В большинстве случаев сокращения завершаются связыванием всех хвостов всех новых C-вершин, образованных при применении (A). Мы делаем три исключения из правила (B):

(B1) Если P-вершина в (A) является массовым контрчленом в V_C, то хвосты новых C-вершин из (A) не связываются, т. е. (B) не выполняется.

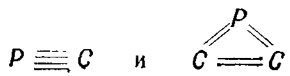
(B2) Если P-вершина в (A) трижды связана с одной новой C-вершиной и один раз с другой новой C-вершиной, то образуется массовая поддиаграмма. Для того чтобы было возможно сокращение с контрчленом в (B1), мы свя-

[1]) В оригинале: leg. — *Прим. перев.*

зываем оставшийся хвост массовой поддиаграммы, т. е. четвертый хвост первой новой C-вершины, но не связываем оставшиеся три хвоста второй новой C-вершины.

(В3) Если P-вершина связана три раза со старыми вершинами и один раз с новой C-вершиной в (А), то применяется формула (2.4) «наоборот». Мы перепишем этот член в виде суммы члена с единственным несвязанным P-хвостом и членов, у которых все четыре хвоста связаны со старыми вершинами.

Это завершает C-разложение для единственной P-вершины. Опишем теперь, какие члены следует взаимно сокращать для получения сходящегося остатка. Вакуумные диаграммы второго и третьего порядков, образованные из P-вершины и одной или двух C-вершин, полностью сокращаются с вкладами контрчленов δE_2 и δE_3, приходящимися на P-вершину, см. (1.3.3). Графически эти члены имеют вид



Переходя к перенормировке массы, объединим контрчлен в P-вершине с массовым членом, содержащимся в P-вершине, связанной три раза с новой C-вершиной; графически эти члены выглядят так:

$$-P \equiv C- + -M-.$$

Пусть эта P-вершина локализована в Δ, а C-вершина — в Δ'. Так как Δ и Δ' принадлежат одному покрытию, они не перекрываются. При $\Delta \neq \Delta'$ контрчлен равен нулю и объединенная массовая поддиаграмма имеет ядро

$$w_{\Delta,\,\Delta'}(k_1,\ k_5) = \mathrm{const} \int \alpha\beta\gamma\, dk_2\, dk_3\, dk_4.$$

При $\Delta = \Delta'$ она имеет ядро

$$w_{\Delta,\,\Delta}(k_1,\ k_5) = \mathrm{const} \int (\alpha\beta\gamma - \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma})\, dk_2\, dk_3\, dk_4. \qquad (2.10)$$

В обоих случаях

$$\alpha = \left(\frac{d}{ds}\eta_s\right)(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)\,\eta_s(k_2,\ k_3,\ k_4,\ k_5),$$

$$\beta = \bar{\beta} = (h\chi_\Delta)^\sim(-P-k_1)\,(h\chi_{\Delta'})^\sim(P+k_5),$$

$$\gamma = \left(\mu_1\mu_2^2\mu_3^2\mu_4^2\mu_5\right)^{-1},$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2}\,\frac{d}{ds}\eta_s(0,\ p_2,\ p_3,\ p_4)\,\eta_s(p_2,\ p_3,\ p_4,\ 0)\,\eta_1(k_1)\,\eta_1(k_5),$$

$$\bar{\gamma} = \left(\mu_1\mu(p_2)^2\,\mu(p_3)^2\,\mu(p_4)^2\,\mu_5\right)^{-1}$$

$$\text{и}\quad \mu_i = \mu(k_i),\quad p_i = k_i - {}^1/_3P,\quad P = k_2 + k_3 + k_4.$$

Наконец, дадим правило, когда оканчивать PC-разложение на данном индуктивном шаге. Пусть $n_r(\Delta)$ — число P-вершин, введенных на r-м индуктивном шаге и локализованных в Δ. Пусть $\mathscr{D}_e$ — множество кубов, для которых экспонента отлична от нуля. Мы разрешаем образование новой P_r-вершины в Δ, если выполняются приведенные ниже условия (a) — (c). Если не существует кубов, удовлетворяющих условиям (a) — (c), то для этого индуктивного шага PC-разложение заканчивается, а индуктивная конструкция продолжается в соответствии с § 3. Указанные условия таковы:

(a) $\Delta \in \mathscr{D}_e$, $u(\Delta) \geqslant 2$;

(b) $n_1(\Delta) \leqslant M^{\varepsilon}_{u(\Delta)}$, если $r = 1$,

$n_r(\Delta) \leqslant |\Delta|^{-\varepsilon/2}$, если $r > 1$;

(c) $\sup\limits_{\Delta' \in \mathscr{D}_e} M^{\varepsilon}_{u(\Delta')} d(\Delta, \Delta')^{-1} \leqslant c M^{\varepsilon}_{u(\Delta)}$, если $r = 1$.

Здесь $d(\Delta, \Delta') = 1 + r(\Delta, \Delta')$, а $r(\Delta, \Delta')$ — расстояние от центра Δ до центра Δ'. Константа c равна

$$c = \sum_{\alpha \in Z^3} d(\Delta_0, \Delta_0 + \alpha)^{-4}.$$

Смысл условия (c) в том, что верхнее обрезание не должно меняться слишком быстро от куба к кубу.

Пусть $\mathscr{D}_a$, $\mathscr{D}_c$ — множества кубов, для которых не выполняются (a) и (c) соответственно. Мы утверждаем, что тогда верхняя грань по $\Delta' \in \mathscr{D}_e$ в условии (c) равна верхней грани по $\Delta' \in \mathscr{D}_e \sim \mathscr{D}_c$. (Заметим, что, как видно из характера разложения, $\mathscr{D}_e \neq \mathscr{D}_c$.) Действительно, пусть $r = 1$, и предположим, что куб Δ' останавливает разложение в Δ согласно условию (c), а Δ'' останавливает разложение в Δ'. Тогда

$$d(\Delta, \Delta'') \leqslant 1 + r(\Delta, \Delta') + r(\Delta', \Delta'') \leqslant d(\Delta, \Delta')\, d(\Delta', \Delta''). \qquad (2.11)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} M^{\varepsilon}_{u(\Delta)} &\leqslant (d(\Delta, \Delta')^4 c)^{-1} M^{\varepsilon}_{u(\Delta')} \leqslant \\ &\leqslant (d(\Delta, \Delta')^4 d(\Delta', \Delta'')^4 c^2)^{-1} M^{\varepsilon}_{u(\Delta'')} \leqslant \\ &\leqslant (d(\Delta, \Delta'')^4 c)^{-1} M^{\varepsilon}_{u(\Delta'')}, \end{aligned}$$

и поэтому Δ'' также останавливает разложение в Δ. Это свойство транзитивности доказывает наше утверждение.

В конце P_1C_1-разложения каждый куб $\Delta' \in \mathscr{D}_e \sim \mathscr{D}_c$ имеет $M^{\varepsilon}_{u(\Delta')}$ вершин или же $\Delta' \in \mathscr{D}_a$. Если $\mathscr{D}_a \neq \mathscr{D}_e$, то существует

$\Delta' \in \mathscr{D}_e \sim \mathscr{D}_c$ с $M^{\varepsilon}_{u(\Delta')}$ P_1-вершинами. Мы «приписываем»

$$\frac{1}{2} M^{\varepsilon}_{u(\Delta')} (d(\Delta, \Delta')^4 c)^{-1} \geqslant \frac{1}{2} M^{\varepsilon}_{u(\Delta)} \tag{2.12}$$

вершин в Δ' к кубу Δ и $1/2$ $M^{\varepsilon}_{u(\Delta')}$ вершин в Δ' к Δ'. Тогда каждый куб $\Delta \in \mathscr{D}_e$ имеет по меньшей мере $1/2$ $M^{\varepsilon}_{u(\Delta)}$ приписанных к нему вершин, причем у каждой максимальное нижнее обрезание меньше $M_{u(\Delta)-1}$. При подсчете, который проводится в § 3 и 4, вершины, приписанные к Δ, учитываются в $n_1(\Delta)$, и мы рассматриваем эти вершины так, как если бы они были в Δ. Случай $\mathscr{D}_a = \mathscr{D}_e$ встречается только иа первом индуктивном шаге и рассматривается отдельно в § 3.

3. НИЗКОИМПУЛЬСНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

3.1. Введение. Нижняя оценка H основывается на двух разложениях. Каждое разложение оценивает член

$$\sup_s \langle R(s) e^{-V(s)} \rangle \tag{3.1.1}$$

суммой аналогичных членов, где $R(s)$ и $V(s)$ — полиномы от полей, а средиее берется по вакуумному состоянию.

Высокоимпульсное разложение (PC-разложение) было определено в § 2. После сокращения перенормировочного контрчлена мы получаем сходящийся множитель от каждого интегрирования по высокоимпульсной P-вершине в полиноме R.

Низкоимпульсное разложение, вводимое в этом параграфе, приводит к увеличению нижнего импульсного обрезания в показателе V. Это разложение состоит из двух частей. Первая часть — виковская конструкция — основана на формальной положительности $:\varphi^4:$. Избавляясь от викова упорядочения в $:\varphi^4:$, мы оцениваем сверху низкоимпульсную часть $\exp(-:\varphi^4:)$.

Сходимость виковской конструкции достигается введением в R виковых вершин (полиномов) для оценки подмножеств пространства реализаций (евклидова поля), для которых $:\varphi^4:$ сильно отрицательно. Виковская конструкция дает верхнюю оценку члена (3.1.1) и опирается на положительность. Полиномы $R(s)$ в (3.1.1) можно считать положительными, так как применима оценка «возведения в квадрат»

$$|R(s)| \leqslant 1/2 \{\delta^{-1} + \delta R(s)^2\}, \tag{3.1.2}$$

где константа δ зависит от $R(s)$. Мы отложим выбор δ до § 4 (см. случай S). Иногда удобно рассматривать постоянный член $(2\delta)^{-1}$ в (3.1.2) как диаграмму; будем называть ее *квадратичной диаграммой*. Эта диаграмма имеет вершины, но не имеет хвостов. Она имеет по одной квадратичной вершине для каждой P-вершины в $R(s)$, полученной при предыдущем возведении в квадрат. Эти квадратичные вершины служат просто для учета. Условимся для квадратичной диаграммы G считать, что $I(G)=1$, и приписывать ей константу $(2\delta)^{-1}$.

Вторая часть низкоимпульсного разложения, низкоимпульсное связывание, выполняется после завершения виковской конструкции. Это разложение уменьшает степень полинома $R(s)$. Его цель — избежать слишком частого возведения в квадрат низкоимпульсных вершин. В области малых импульсов на ранних индуктивных шагах сходимость еще не очень хорошая, а каждое применение формулы (3.1.2) увеличивает расходящиеся комбинаторные множители. Эти множители, вводимые в § 4, используются для оценки числа членов в нашем разложении.

3.2. Виковская конструкция. Для каждого пространственно-временного куба Δ' определим $l(\Delta')$ как наибольшее целое число, для которого

$$|\Delta'|\, M^2_{l(\Delta')} \leqslant 1. \tag{3.2.1}$$

Заметим, что для $|\Delta'|=1$, как и в начале индукции, $l(\Delta')=0$ и $M_{l(\Delta')}=0$. В виковской конструкции нам даны куб Δ' и обрезание ζ в показателе V в (3.1.1). При этом ζ имеет в Δ' нижнее обрезание по импульсам $M_{l(\Delta)}$. Здесь Δ — некоторый куб, содержащий Δ', поэтому $M_{l(\Delta)} \leqslant M_{l(\Delta')}$. Цель виковской конструкции — увеличить нижнее импульсное обрезание в Δ' от $M_{l(\Delta)}$ до $M_{l(\Delta')}$. Пусть ζ' — новое обрезание с требуемым нижним обрезанием по импульсам в Δ'. Определим $\delta\zeta$ и δV равенствами

$$\zeta = \zeta' + \delta\zeta,$$
$$V(\zeta) = V(\zeta') + \delta V.$$

Нашим основным неравенством будет

$$e^{-V(\zeta)} \leqslant K_1 e^{-V(\zeta')} + (1-\chi) e^{-V(\zeta)}. \tag{3.2.2}$$

Здесь K_1 — константа, не зависящая от V, ε и M_1, которую мы выберем ниже, после формулы (3.2.22), а χ — характеристическая функция подмножества пространства реализаций, для которых

$$e^{-\delta V} \leqslant K_1.$$

Для кубов Δ', которые меньше минимального размера, выполняются условия

$$|\Delta'|\,M^2_{u\,(\Delta')} \leqslant 1, \tag{3.2.3}$$

$M_{l\,(\Delta')} = M_{u\,(\Delta')}$ и $\zeta' = 0$ на Δ'. При этом

$$-O(1) = -O(|\Delta'|)\,M^2_{u\,(\Delta')} \leqslant \delta V,$$

так что $e^{-\delta V} \leqslant K_1$ на всем пространстве реализаций. Ввиду этого для кубов, удовлетворяющих (3.2.3), $\chi \equiv 1$ и экспонента полностью удалена в Δ' с помощью (3.2.2).

В остальных случаях, когда (3.2.3) не выполнено, мы оцениваем $1-\chi$ сверху некоторым полиномом. Для этого проанализируем δV, используя разложение

$$\varphi(x, t) = \varphi_1(x, t) + \varphi_2(x, t),$$

где φ_1 имеет нижнее и верхнее импульсные обрезания, равные соответственно $M_{l\,(\Delta)}$ и $M_{l\,(\Delta')}$, а φ_2 — соответственно $M_{l\,(\Delta')}$ и $M_{u\,(\Delta)}$. Оценка

$$-O(1) = -O(|\Delta'|)\,M^2_{l\,(\Delta')} \leqslant \int_{\Delta'} :\varphi_1^4:\,dx\,dt, \tag{3.2.4}$$

которая будет главной при анализе δV, объясняет, почему $M_{l\,(\Delta')} \approx |\Delta'|^{-1/2}$ выбрано в качестве промежуточного импульса между φ_1 и φ_2, а тем самым служит основанием для выбора определения (3.2.1). С другой стороны, требование, чтобы локализация φ_2 (т. е. поля в $V(\zeta')$) в Δ' была собственной, удовлетворяется при $M_{l\,(\Delta')} \geqslant |\Delta'|^{-1/3}$. Неравенство $|\Delta'|^{-1/3} \leqslant M_{l\,(\Delta')} \approx |\Delta'|^{-1/2}$ является формальным доводом в пользу виковской конструкции. Для φ^4_4-взаимодействия соответствующее неравенство помогает только частично.

Для анализа δV заменим φ_1 его средним значением $\bar\varphi_1$ плюс ошибка. А именно,

$$\bar\varphi_1 = |\Delta'|^{-1} \int_{\Delta'} \varphi_1(x, t)\,dx\,dt, \tag{3.2.5}$$

$$\delta\varphi_1(x, t) = \varphi_1(x, t) - \bar\varphi_1, \quad x, t \in \Delta'. \tag{3.2.6}$$

(Этот метод напоминает подход к некоторым вопросам инфракрасной расходимости в квантовой теории поля.) Мы оценим среднее поле $\bar\varphi_1$ классическими методами, т. е. с помощью неравенства Гёльдера, и покажем, что ошибка $\delta\varphi_1$ имеет эффективное низкоимпульсное обрезание. В § 6 мы получим множитель сходимости $b^{-3\,(1+\nu)/2}$, относящийся к каждому $\delta\varphi_1$-хвосту в R. Пусть

$$A = \left(\int_{\Delta'} \varphi_1^4\,dx\,dt\right)^{1/4} = \|\varphi_1\|_4. \tag{3.2.7}$$

Согласно неравенству Гёльдера,

$$|\bar{\varphi}_1| = |\Delta'|^{-1} \left| \int\limits_{\Delta'} \varphi_1 \, dx \, dt \right| \leqslant |\Delta'|^{-1/4} A. \tag{3.2.8}$$

Напишем разложение δV с помощью φ_1 и φ_2. В приведенных ниже формулах для простоты мы опустим пространственно-временное обрезание h и меру $dx\,dt$ при интегрировании по области Δ' пространства-времени:

$$\delta V = \delta V_I(\Delta') + \delta V_C(\Delta'), \tag{3.2.9}$$

$$\delta V_I = \int :\varphi_1^4: + 4 \int :\varphi_1^3 \varphi_2: + 6 \int :\varphi_1^2 \varphi_2^2: + 4 \int :\varphi_1 \varphi_2^3:,$$

$$\delta V_C = O(\log M_{u(\Delta')}) \left(\int :\varphi_1^2: + 2 \int :\varphi_1 \varphi_2: \right) + $$
$$+ O(\log M_{l(\Delta')}) \left(\int :\varphi_1^2: + 2 \int :\varphi_1 \varphi_2: + \int :\varphi_2^2: \right) +$$
$$+ O(|\Delta'| M_{l(\Delta')} \log M_{u(\Delta')}).$$

Положительная константа $O(\log M_{u(\Delta')})$ возникает из члена $\delta m^2 \int :\varphi^2: - \delta m^2 \int :\varphi_2^2:$, а (положительная) константа $O(\log M_{l(\Delta')})$ возникает при увеличении нижнего обрезания в члене δm^2. Изменение в контрчлене второго порядка для вакуумной энергии не превосходит $O(|\Delta'| M_l \log M_l)$; см. предложение 6.3.1. Эта же константа мажорирует изменение в контрчлене третьего порядка для вакуумной энергии, который в действительности есть $O(|\Delta'| \log M_l)$, как будет видно в § 6.

Мы требуем также, чтобы выполнялось соотношение

$$\log M_{u(\Delta')} \leqslant \varepsilon^{-1} O(\log |\Delta'|^{-1}), \tag{3.2.10}$$

которое мы докажем в п. 3.3. Кроме того,

$$-O(M_{l(\Delta')}) \leqslant :\varphi_1^2:,$$

так что по (3.2.1)

$$-O(|\Delta'|^{1/2}) \leqslant \int :\varphi_1^2:. \tag{3.2.11}$$

Применяя (3.2.10) — (3.2.11), получаем

$$\delta V_C \geqslant \varepsilon^{-1} O(\log |\Delta'|^{-1}) \left\{ \int :\varphi_1 \varphi_2: + O(1) \int :\varphi_2^2: + O(|\Delta'|^{1/2}) \right\} \geqslant$$
$$\geqslant |\Delta'|^{-1/2} \left\{ \int \varphi_1 \varphi_2 + O(1) \int :\varphi_2^2: + O(|\Delta'|^{1/2}) \right\}, \tag{3.2.12}$$

где мы воспользовались формулой

$$\int :\varphi_1 \varphi_2: = \int \varphi_1 \varphi_2 + O(|\Delta'|^{1/2})$$

и выбрали M_1 достаточно большим (в зависимости от ε). При выборе M_1 большим нужно считать $|\Delta'|$ малым, см. п.3.3. Аналогично можно убрать виково упорядочение в δV_1 относительно φ_1, что дает

$$\delta V_l \geqslant \int \varphi_1^4 + 4\int \varphi_1^3\varphi_2 + 6\int \varphi_1 :\varphi_2^2: + 4\int \varphi_1 :\varphi_2^3: + \\ + O(|\Delta'|^{-1/2})\int \varphi_1^2 + O(|\Delta'|^{-1/2})\int \varphi_1\varphi_2 + \\ + O(|\Delta'|^{-1/2})\int :\varphi_2^2: + O(1). \tag{3.2.13}$$

Подставим оценку

$$\frac{1}{2}\int \varphi_1^4 + O(|\Delta'|^{-1/2})\int :\varphi_1^2: \geqslant O(1) \tag{3.2.14}$$

и выбросим член, содержащий только φ_1^2. Тогда

$$\delta V \geqslant \frac{1}{2}\int \varphi_1^4 + 4\int \varphi_1^3\varphi_2 + 6\int \varphi_1^2 :\varphi_2^2: + \\ + 4\int \varphi_1 :\varphi_2^3: + O(|\Delta'|^{-1/2})\int \varphi_1\varphi_2 + \\ + O(|\Delta'|^{-1/2})\int :\varphi_2^2: + O(1). \tag{3.2.15}$$

Поэтому величина δV ограничена снизу посредством $^1/_2 A^4 + O(1)$ плюс перекрестные члены, содержащие упорядоченные по Вику высокоимпульсные поля и неупорядоченные низкоимпульсные поля. Чтобы выделить среднее значение низкоимпульсного поля, подставим в перекрестные члены $\varphi_1 = \bar\varphi_1 + \delta\varphi_1$. Получим, что

$$\delta V \geqslant \frac{1}{2}\{A^4 + b_3(\bar\varphi_1)^3 + b_2(\bar\varphi_1)^2 + b_1\bar\varphi_1 + b_0 + O(1)\}. \tag{3.2.16}$$

Здесь

$$b_3 = 8\int \varphi_2,$$

$$b_2 = 24\int \delta\varphi_1\varphi_2 + 12\int :\varphi_2^2:,$$

$$b_1 = 24\int (\delta\varphi_1)^2\varphi_2 + 24\int \delta\varphi_1 :\varphi_2^2: + \\ + 8\int :\varphi_2^3: + O(|\Delta'|^{-1/2})\int \varphi_2, \tag{3.2.17}$$

$$b_0 = 8\int (\delta\varphi_1)^3\varphi_2 + 12\int (\delta\varphi_1)^2 :\varphi_2^2: + 8\int \delta\varphi_1 :\varphi_2^3: + \\ + O(|\Delta'|^{-1/2})\int \delta\varphi_1\delta\varphi_2 + O(|\Delta'|^{-1/2})\int :\varphi_2^2:.$$

Каждый член в каждом b_i содержит φ_2. Используя (3.2.8), оценим (3.2.16) снизу выражением

$$\delta V \geqslant \frac{1}{2}\{A^4 - a_3A^3 - a_2A^2 - a_1A - a_0 - O(1)\}, \tag{3.2.18}$$

где

$$a_i = a_i(\Delta') = |\Delta'|^{-i/4}|b_i| \tag{3.2.19}$$

для $i=0$, 1, 2, 3. Заметим, что члены в a_i полной степени l по $\delta\varphi_1$ и φ_2 имеют коэффициент c, удовлетворяющий неравенству

$$|c| \leqslant O\left(|\Delta'|^{-1+l/4}\right). \tag{3.2.20}$$

Пусть $\sum\limits_{i=0}^{3} a_i = \sum\limits_{j=1}^{12} \alpha_j$, где каждый α_j является мономом, и пусть

$$P(\Delta') = \sum_{j=1}^{12} \alpha_j(\Delta')^l,$$

где $l = 2\left(\log_2|\Delta'|^{-1}\right)^3$.

Лемма 3.2.1. *Пусть* Δ' *такой, как в* (3.2.1). *Тогда*

$$1 - \chi(\Delta') \leqslant P(\Delta'). \tag{3.2.21}$$

Доказательство. Согласно (3.2.18), δV ограничена снизу на множестве пространства реализаций, на котором

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant 12} |\alpha_j(\Delta')| \leqslant 1, \tag{3.2.22}$$

константой K_2, не зависящей от выбора обрезаний и от куба Δ'. Положим $K_1 = \exp(-K_2)$. Далее, на дополнении к множеству (3.2.22) $|\alpha_j| > 1$ для некоторого j, поэтому

$$\{1 - \chi(\Delta')\} \leqslant \{1 - \chi(\Delta')\} P(\Delta') \leqslant P(\Delta').$$

3.3. Области локализации. Применим (3.2.2) к (3.1.1) следующим образом: выберем некоторое измельчение $\mathscr{D}_1$ покрытия $\mathscr{D}$ и будем применять оценку (3.2.2) в кубах Δ' подмножества $\mathscr{D}_1^0$ из $\mathscr{D}_1$. Мы получим некоторую сумму членов. Рассмотрим фиксированный член в этой сумме. Если мы выбрали первый член в кубе Δ_1, то нижнее обрезание в экспоненте в Δ_1 есть $M_{l(\Delta_1)}$. Для кубов Δ_1 другого типа, т. е. когда в (3.2.2) выбирается второй член, нижнее обрезание в экспоненте остается равным $M_{l(\Delta)}$, где $\Delta_1 \subset \Delta \in \mathscr{D}$. Пусть $\mathscr{D}_1'$ — множество таких кубов.

Получим новое измельчение $\mathscr{D}_2$ покрытия $\mathscr{D}_1$, разбивая кубы из $\mathscr{D}_1'$, и применим (3.2.2) к кубам из $\mathscr{D}_2 \sim \mathscr{D}_1$. Подобным же образом мы поступим с измельчениями $\mathscr{D}_3$, $\mathscr{D}_4$, ... Для данного члена этот процесс заканчивается на таком покрытии $\mathscr{D}_j$, что для каждого куба $\Delta_j \in \mathscr{D}_j$ нижнеимпульсное обрезание в Δ_j равно $M_{l(\Delta_j)}$. Для кубов Δ', меньших минимального размера (3.2.3), экспонента полностью устранена в Δ'. Таким образом, виковское разложение заканчивается после конечного числа шагов.

Мы требуем, чтобы для каждого покрытия соседние кубы имели примерно одинаковый размер. Точнее, для соседних кубов одного покрытия Δ_α, Δ_β, в которых показатель экспоненты отличен от нуля,

$$|\Delta_\alpha|/|\Delta_\beta| = \frac{1}{8},\ 1 \quad \text{или} \quad 8. \tag{3.3.1}$$

Лемма 3.3.1. *Пусть Δ — куб из покрытия $\mathscr{D}$, которое удовлетворяет условию* (3.3.1). *Пусть Δ разделен на 8 кубов, и пусть другие кубы в $\mathscr{D}$ разделены на 8 частей, если это необходимо, чтобы получить новое покрытие $\mathscr{D}'$, удовлетворяющее* (3.3.1). *Тогда число кубов в $\mathscr{D}' \sim \mathscr{D}$ удовлетворяет оценке*

$$|\mathscr{D}' \sim \mathscr{D}| \leqslant O\left(\log|\Delta|^{-1}\right).$$

Доказательство. Пусть $C(\Delta) = \mathscr{D} \sim \mathscr{D}'$ — множество кубов, которые следует разделить для получения $\mathscr{D}'$. Тогда $|\mathscr{D}' - \mathscr{D}| = 8|C(\Delta)|$. Пусть $|\Delta| = 8^{-l}$, и для $0 \leqslant i \leqslant l$ пусть $C_i(\Delta)$ — множество из 27 кубов объема 8^{-i}, образующих $3 \times 3 \times 3$-набор кубов на нашей решетке, причем Δ расположен в центральном кубе. (Положение Δ в центральном кубе Δ_c определяется тем, как Δ_c был получен при измельчении начального покрытия пространства-времени, а также способом дальнейшего измельчения Δ_c для получения Δ.) Включение

$$C(\Delta) \subset \bigcup_i C_i(\Delta)$$

проверяется так: куб Δ' объема $8^{-(l-1)}$ должен быть разделен только в том случае, если он граничит с Δ и, следовательно, принадлежит $C_{l-1}(\Delta)$. Если разделение Δ' вызывает необходимость разделения куба Δ'' объема $8^{-(l-2)}$, то Δ'' должен граничить с $C_{l-1}(\Delta)$ и, таким образом, принадлежать $C_{l-2}(\Delta)$, и т. д. Поэтому

$$|\mathscr{D}' \sim \mathscr{D}| \leqslant \sum_{i=0}^{l} 8|C_i(\Delta)| \leqslant 8 \times 27(l+1) =$$
$$= O(l) \leqslant O(-\log|\Delta|).$$

Мы строим $\mathcal{D}_1$ при помощи последовательности шагов, разделяя Δ или его подкубы на 8 частей и добавляя другие кубы с целью добиться выполнения (3.3.1) на каждом шаге. Мы выбираем для разбиения на 8 частей тот куб $\Delta' \subset \Delta \in \mathcal{D}$, который имеет максимальный объем в Δ. Это разбиение мы называем *первичным*, а то, которое приходится дополнительно делать, чтобы выполнялось условие (3.3.1), — *вторичным*. Мы продолжаем это разбиение при $r > 1$ до тех пор, пока каждый подкуб $\Delta' \subset \Delta \in \mathcal{D}$ не будет удовлетворять неравенству $|\Delta'| \leqslant \leqslant n(\Delta)^{-1/2}|\Delta|$. На первом индуктивном шаге мы используем дополнительное условие

$$|\Delta_1| \leqslant \min\{M_3^{-2}, M_{u(\Delta)}^{-\varepsilon/2}\}, \tag{3.3.2}$$

так что $l(\Delta_1) \geqslant 3$. Это устраняет экспоненту в кубах $\Delta \in \mathcal{D}_a$.

Определим множество $\mathcal{D}_1^0$ кубов из $\mathcal{D}_1$, к которым применяется (3.2.2), как множество кубов, для которых $\delta V \neq 0$ и $V(\zeta) \neq V(\zeta')$, см. (3.2.2).

Обратимся теперь к построению $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, ... По индукции предположим, что дана последовательность покрытий $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$, ..., $\mathcal{D}_l$, где $\mathcal{D}_{\alpha+1}$ является измельчением $\mathcal{D}_\alpha$, и предположим, что задан член, получающийся в результате применения (3.2.2) к подходящим кубам в $\bigcup_{\alpha=1}^{l} \mathcal{D}_\alpha$. Чтобы выполнить следующий шаг виковского разложения, определим $\mathcal{D}_l^0$ как множество кубов $\Delta_l \in \mathcal{D}_l$, к которым было применено (3.2.2), и определим $\mathcal{D}_l' \subset \mathcal{D}_l^0$ как подмножество кубов, в которых при этом применении был выбран второй член. Таким образом, $\mathcal{D}_l'$ есть в точности множество кубов Δ_l, для которых нижнее импульсное обрезание меньше $M_{l(\Delta_l)}$. Если $\mathcal{D}_l' = \varnothing$, то виково разложение для рассматриваемого члена закончено. Если $\mathcal{D}_l' \neq \varnothing$, мы разделяем каждый куб $\Delta_l \in \mathcal{D}_l'$ на 8 частей и разбиваем остальные кубы из $\mathcal{D}_l$, если это необходимо, чтобы получить (3.3.1). В результате получается новое покрытие $\mathcal{D}_{l+1}$. Затем мы применяем (3.2.2) к каждому кубу $\Delta_{l+1} \in \mathcal{D}_{l+1}$, для которого нижнее импульсное обрезание в экспоненте меньше $M_{l(\Delta_{l+1})}$. Это условие определяет $\mathcal{D}_{l+1}^0$. Для $\Delta_{l+1} \subset \Delta_l \in \mathcal{D}_l$ имеем

$$M_{l(\Delta_{l+1})} = M_{l(\Delta_l)}$$

до применения (3.2.2) к кубам из $\mathcal{D}_{l+1}$, так что (3.2.2) в действительности применяется только в случае $\Delta_{l+1} \subset \Delta \in \mathcal{D}_l'$.

Это завершает индукцию и определяет один шаг виковского разложения.

Теперь оценим множитель $1-\chi$ из (3.2.2) в члене, для которого виковское разложение завершено. Пусть $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}$ — конечная последовательность покрытий, ассоциированных с этим членом. Заметим, что $\mathscr{D}_j$ является покрытием $\mathscr{D}$ для PC-разложения следующего индуктивного шага, а также что $\mathscr{D}'_j = \varnothing$. Положим

$$\mathscr{D}^0 = \bigcup_{i=1}^{j} \mathscr{D}_i^0, \qquad \mathscr{D}' = \bigcup_{i=1}^{j-1} \mathscr{D}'_i.$$

Иначе говоря, $\mathscr{D}^0$ есть множество кубов, в которых (3.2.2) было применено, а $\mathscr{D}'$ — его подмиожество, состоящее из тех кубов, в которых был выбран второй член в (3.2.2). Пусть $\mathscr{D}^*$ — множество кубов из $\mathscr{D}'$, которые не содержат меньших кубов из $\mathscr{D}'$. Очевидно, что кубы из $\mathscr{D}^*$ не пересекаются. Для $\Delta \in \mathscr{D}' \sim \mathscr{D}^*$ мы подставляем верхнюю оценку

$$1-\chi \leqslant 1.$$

Для $\Delta \in \mathscr{D}^*$ используем (3.2.21). Для дальнейших целей необходимо сосчитать, сколько раз мы применяли разложение (3.2.2). Построим отображение кубов из $\mathscr{D}^0$ (на r-м индуктивном шаге) в множество P_r- и W_r-вершин (находящихся в соответствующем кубе). В случае $r=1$ мы строим аналогичное отображение на кубы из $\mathscr{D}_e$. Кроме того, мы отображаем кубы из $\mathscr{D}_j \sim \mathscr{D}$ в множество P_r- и W_r-вершин.

Теорема 3.3.2. *Определенное выше отображение кубов из $\mathscr{D}^0 \cup (\mathscr{D}_j \sim \mathscr{D})$ является взаимно однозначным отображением на множество вершин и отображает не более $O(1)$ кубов на каждый куб из $\mathscr{D}_e$ при $r=1$.*

Доказательство. Оценим сначала число кубов в $\mathscr{D}_1 \sim \mathscr{D}$ для $r>1$. Напомним, что определение $\mathscr{D}_1$ не допускает первичных разбиений куба Δ', объем которого меньше $|\Delta| n(\Delta)^{-1/2}$, где $\Delta \in \mathscr{D}$. Поэтому если Δ' имеет первичное разбиение и $|\Delta'| = 8^{-j}$, то

$$j \leqslant \log|\Delta|^{-1} + \frac{1}{2}\log n(\Delta)$$

и по лемме 3.3.1

$$|\mathscr{D}_1 \sim \mathscr{D}| \leqslant \sum_{\Delta \in \mathscr{D}_e} O(1)\, n(\Delta)^{1/2} \left(\log|\Delta|^{-1} + \frac{1}{2}\log n(\Delta)\right)^2.$$

Если $\Delta \in \mathscr{D}_e$, то $\Delta \notin \mathscr{D}_a$ в силу (3.3.2). Условие (b) § 2 дает $|\Delta|^{-\varepsilon} \leqslant n(\Delta)$ и, согласно (3.3.2), $|\Delta| \leqslant M_1^{-2}$ для $\Delta \in \mathscr{D}_e$. Отсюда получаем оценку

$$|\mathscr{D}_1 \sim \mathscr{D}| \leqslant \sum_{\Delta \in \mathscr{D}_e} n(\Delta)^{2/3}$$

для достаточно больших $M_1 = M_1(\varepsilon)$. При $r = 1$ имеем $|\Delta| = 1$ и $\log|\Delta|^{-1} = 0$. Поэтому проведенный выше анализ дает

$$|\mathscr{D}_1 \sim \mathscr{D}| \leqslant \sum_{\Delta \in \mathscr{D}_e} \left(\frac{1}{2} M^{\varepsilon}_{u(\Delta)} + O(1)\right),$$

где $O(1)$ зависит от M_1 и возникает из суммы по кубам из $\mathscr{D}_a$. Поэтому мы можем отобразить кубы из $\mathscr{D}_1 \sim \mathscr{D}$ в различные P_r-вершины. Исключение составляет отмеченный выше случай $r = 1$.

Сопоставим теперь каждый куб Δ из $\mathscr{D}_i \sim \mathscr{D}_{i-1}$ некоторому кубу из $\mathscr{D}^*$. Заметим, что $\mathscr{D}^0$ содержится в $\bigcup\limits_{i=1}^{j} (\mathscr{D}_i \sim \mathscr{D}_{i-1})$. Сопоставим сначала куб Δ кубу Δ' из $\mathscr{D}'_i$, первичное разбиение которого дало куб Δ. По лемме 3.3.1 кубу Δ' будет подобным образом сопоставлено не более чем $O(1)\log|\Delta'|^{-1}$ кубов Δ. Сопоставим куб Δ' наименьшему кубу Δ^* из $\mathscr{D}^*$, содержащемуся в Δ'. Каждый куб Δ^* из $\mathscr{D}^*$ содержится не более чем в $O(1)\log|\Delta^*|^{-1}$ бо́льших кубах Δ', причем любой такой куб Δ' удовлетворяет неравенству $\log|\Delta'|^{-1} \leqslant \log|\Delta^*|^{-1}$. Поэтому не более чем $O(1)(\log|\Delta^*|^{-1})^2$ кубов Δ окажутся сопоставленными данному кубу из $\mathscr{D}^*$, причем любой куб из $\mathscr{D}^0 \sim \mathscr{D}_1$ и из $\mathscr{D}_j \sim \mathscr{D}$ окажется сопоставленным некоторому кубу из $\mathscr{D}^*$. Для достаточно больших M_1 имеем $O(1) \times (\log|\Delta^*|^{-1})^2 \leqslant (\log|\Delta^*|^{-1})^3$, и теорема доказана.

Предложение 3.3.3. *Существует целое число* $n_1 = n_1(\varepsilon)$ *со следующим свойством. Пусть* Δ_1 *и* Δ_2 — *кубы, ассоциированные с рассматриваемым нами членом. Если* $|\Delta_1| < 1$ *и некоторая вершина или экспонента локализована в* Δ_2, *то*

$$|\Delta_1|^{n_1} \leqslant |\Delta_2| \{2c + 2c \operatorname{dist}(\Delta_1, \Delta_2)\}^{n_1}.$$

Доказательство. Кубы Δ_1 и Δ_2 могли быть введены на разных индуктивных шагах. Пусть Δ'_i — куб объема 1, содержащий Δ_i. По определению первого измельчания $\mathscr{D}_1$ покрытия $\mathscr{D}$

$$|\Delta_1| \leqslant {}^1/_2 M_{u(\Delta'_1)}^{-\varepsilon},$$

а по условию (c) § 2

$$M_{u\left(\Delta_1'\right)}^{-\varepsilon} \leqslant \left(M_{u\left(\Delta_2'\right)}^{-\varepsilon}\right) c d\left(\Delta_1', \Delta_2'\right)^4.$$

Из (3.2.2) и неравенства $u\left(\Delta_2\right) \leqslant u\left(\Delta_2'\right)$ следует, что

$$M_{u\left(\Delta_2'\right)} \geqslant M_{u\left(\Delta_2\right)} \geqslant \left|\Delta_2\right|^{-1/2}.$$

Так как

$$d\left(\Delta_1', \Delta_2'\right) \leqslant 1+\operatorname{dist}\left(\Delta_1, \Delta_2\right),$$

то

$$\left|\Delta_1\right|^{2/\varepsilon} \leqslant \left|\Delta_2\right|\left\{2c+2c \operatorname{dist}\left(\Delta_1, \Delta_2\right)\right\}^{8/\varepsilon},$$

и предложение доказано.

3.4. Связывание для малых импульсов.

Лемма 3.4.1. *Пусть ν зависит от ε и достаточно мало. Пусть $\mathscr{D}$ — покрытие, ассоциированное с некоторым членом в конце виковской конструкции на r-м индуктивном шаге. Тогда для $\Delta \in \mathscr{D}$ имеем $l(\Delta) \geqslant 3r$.*

Доказательство. На первом индуктивном шаге $l(\Delta) \geqslant 3$ в силу (3.2.1) и (3.3.2). Предположим, что лемма доказана для членов в конце r-го индуктивного шага. В $(r+1)$-м PC-разложении имеем $n(\Delta) \geqslant |\Delta|^{-\varepsilon}$ P_{r+1}-вершин в Δ по условию (b) § 2 и (2.12). При первом измельчении $\mathscr{D}_1$ на $(r+1)$-м индуктивном шаге Δ разбивается по меньшей мере на $n_{r+1}(\Delta)^{1/2}$ подкубов. Если Δ_1 — один из таких подкубов, то

$$\left|\Delta_1\right| \leqslant n_{r+1}(\Delta)^{-1/2}|\Delta| \leqslant|\Delta|^{1+\varepsilon/2} \leqslant M_{l(\Delta)}^{-2(1+\varepsilon/2)}.$$

Выбрав ν настолько малым, чтобы $(1+\nu)^3 \leqslant 1+\varepsilon/2$, имеем

$$M_{l(\Delta)}^{1+\varepsilon/2} \geqslant M_{3r}^{1+\varepsilon/2} \geqslant M_{3r}^{(1+\nu)^3} \geqslant M_{3(r+1)}.$$

Тогда $\left|\Delta_1\right| \leqslant M_{r+1}^{-2}$ и лемма следует из (3.2.1).

Для связываний в области низких импульсов предположим, что мы находимся на r-м индуктивном шаге, и рассмотрим несвязанное поле в $R(s)$, возникшее на i-м индуктивном шаге. Определим для этого поля новое обрезание

$$M_{r+2i-1} \tag{3.4.1}$$

для виковых вершин и

$$M_{r+2i-2} \tag{3.4.2}$$

для P- и C-вершин. Мы связываем часть этого поля ниже введенных обрезаний путем переброски оператора рождения влево, а оператора уничтожения вправо. При этом хвосты связываются в обратном индуктивном порядке, т. е. в порядке уменьшения i, причем хвосты W-вершин раньше, чем хвосты P- и C-вершин. Обрезания (3.4.1), (3.4.2) растут быстрее числа 2^{r-i+1} квадратичных вершин, но медленнее, чем нижнее обрезание экспоненты в силу леммы 3.4.1. Поэтому во время этой процедуры не возникают связывания с экспонентой. Если $V \neq 0$, то r-й индуктивный шаг окончен. Если же $V=0$, то надо связать все хвосты в полиноме R формулы (3.1.1), и тогда для данного члена разложение полностью окончено.

4. КОМБИНАТОРНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Индуктивное разложение § 2 и 3, таким образом, окончено, причем каждый индуктивный шаг дает верхнюю оценку $\langle \exp(-tH) \rangle$ в виде суммы членов вида $\sup\limits_s \langle R(s) e^{-V(s)} \rangle$. Те члены, для которых индуктивное разложение окончено, удовлетворяют условию $V(s)=0$. Для них $R(s)$ (как функция на пространстве реализаций) постоянна и является суммой элементарных интегралов $I(G)$, соответствующих фейнмановским диаграммам G. Интегралы $I(G)$ оцениваются в § 5 и 6. Здесь мы займемся комбинаторной задачей оценки числа членов в сумме по диаграммам G, и в особенности по тем, для которых $I(G)$ удовлетворяет некоторой заданной верхней оценке. Эти комбинаторные оценки вместе с оценками § 5 и 6 завершают доказательство ограниченности снизу φ_3^4-гамильтониана, т. е. теоремы 1.1.1.

Мы формулируем комбинаторные оценки настоящего параграфа в терминах комбинаторных множителей $c(G)$, см. [6]. Например,

$$\Big| \sum_G I(G) \Big| \leqslant \Big(\sum_G c(G)^{-1} \Big) \sup_G c(G) \, | I(G) | \leqslant \sup_G c(G) \, | I(G) |,$$

где комбинаторные множители $c(G)$ представляют собой положительные числа, удовлетворяющие условию $\sum c(G)^{-1} \leqslant 1$. В заключительной части каждого индуктивного шага некоторым вершинам, линиям и хвостам приписываются комбинаторные множители $c(G)$. Комбинаторные множители приписываются линиям и вершинам на каждом элементарном подшаге индуктивного разложения, а полный комбинаторный множитель для линии или вершины является произведением таких элементарных множителей. Комбинаторные множители используются в основном для подсчета числа членов, но, кроме того, в верхнюю оценку для $c(G)$ включается константа $\delta^{\pm 1}$ из формулы (3.2) и константа K_1 из (3.4).

Теорема 4.1. *Комбинаторные множители, ассоциированные с индуктивным разложением § 2 и 3, допускают следующие оценки: для данных ε, ν существуют такие n, M, L, β, что при $M_1 \geqslant M$ эти множители не превосходят*

d^n	для линии,
$L\lambda^{\beta\varepsilon}$	для P_1-вершины,
$L\|\Delta\|^{-\beta\varepsilon}$	для C-, W- или P_r-вершины, $r > 1$,
1	для квадратичной вершины,
$b^{3(1+\nu)/2}$	для W-хвоста.

Здесь β не зависит от ε и ν. Кроме того, возникает единый множитель $\exp(O(\operatorname{vol} h))$ *для всех членов разложения.*

Доказательство. Мы вводим комбинаторные множители отдельно на каждом из различных подшагов индуктивной конструкции. Здесь $\lambda \geqslant M_{u(\Delta)-1}$ — максимальное нижнее обрезание для P_1-вершины, Δ — куб локализации для вершины, d — безразмерная длина для линии, b — локализационное отношение (определения см. в п. 1.2). Так как вид оценок (за исключением множителя для W-хвоста) не меняется при их перемножении, то первые четыре оценки достаточно доказать для каждого из рассматриваемых подшагов.

Случай P. Рассмотрим сначала подшаг, состоящий в добавлении единственной P-вершины, локализованной в Δ, с помощью P-разложения (2.1). Формула (2.1) дает два члена, один с меньшим верхним импульсным обрезанием в Δ, а другой с новой P-вершиной в Δ. Мы припишем новой вершине комбинаторный множитель $c_1 = O(1)\log\lambda$, а члену с уменьшенным верхним импульсным обрезанием — множитель $c_2 = (1 - c_1^{-1})^{-1}$. Очевидно, что $c_1^{-1} + c_2^{-1} = 1$. Рассмотрим теперь отдельно c_1 и c_2. Начнем с c_1. Для P_n-вершины, $n > 1$, пусть $\Delta' \supset \Delta$ — куб первого индуктивного шага, содержащий Δ. В силу условия (b) § 2 и в силу (3.3.2)

$$M^{\varepsilon}_{u(\Delta)} \leqslant M^{\varepsilon}_{u(\Delta')} \leqslant |\Delta|^{-2}. \tag{4.1}$$

Тогда

$$\log M_{u,\Delta} \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\log\left(|\Delta|^{-1}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\log 2. \tag{4.2}$$

Для данного $\alpha > 0$ после первого виковского разложения имеем

$$(\log M_{u(\Delta)})^{\alpha} \leqslant |\Delta|^{-\varepsilon} \tag{4.3}$$

для достаточно большого M_1 (зависящего от ε и α). Тогда оценка c_1 имеет вид

$$\begin{aligned} &c_1 \leqslant O(1)\log\lambda && \text{для } P_1\text{-вершины,} \\ &c_1 \leqslant O(1)\,|\Delta|^{-\varepsilon} && \text{для } P_r\text{-вершины, } r > 1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Заметим, что для последовательности λ_j уменьшающихся обрезаний, равных M_j, имеет место формула

$$\sum c_1^{-1} = \sum_j O(1)\left(\log M_j\right)^{-1} = O(1)\left(\log M_1\right)^{-1} \sum_j (1+\nu)^{-j} \leqslant \leqslant O(1), \tag{4.5}$$

где оценка $O(1)$ равномерна по $M_1 \geqslant 2$, но расходится при $\nu \to 0$ (мы предполагаем, что $0 < \nu \leqslant 1$).

Рассмотрим теперь множитель c_2, соответствующий члену (2.1) с уменьшенным верхним обрезанием. На данном индуктивном шаге мы можем получить последовательность уменьшающихся обрезаний путем повторного применения разложения (2.1) в данном кубе Δ. Произведение c_2-множителей для такой последовательности равно

$$\prod c_2 = \prod\left(1 - c_1^{-1}\right)^{-1} \leqslant \prod\left(1 + 2c_1^{-1}\right) \leqslant \leqslant \exp\left(2\sum c_1^{-1}\right) \leqslant O(1) \tag{4.6}$$

согласно (4.5). Здесь $O(1)$ расходится при $\nu \to 0$. Произведение (4.6) является комбинаторным множителем, и мы приписываем его предшествующей P-вершине, введенной в Δ на данном индуктивном шаге. Если в Δ нет таких P-вершин, то мы приписываем комбинаторный множитель следующим образом. Предположим, что совершается r-й индуктивный шаг. Если $r = 1$, то припишем множитель $O(1)$ кубу Δ. Так как $|\Delta| = 1$, то такие множители дают вклад, не превышающий единого множителя $\exp(O(\operatorname{vol} h))$.

Если $r > 1$, то Δ принадлежит $\mathcal{D}_j$ на $(r-1)$-м индуктивном шаге. Напомним, что $\mathcal{D}_j$ является заключительным покрытием для виковской конструкции (3.4). По теореме 3.3.2 мы приписываем Δ либо P_{r-1}-, либо W_{r-1}-вершине.

Случай С. Рассмотрим теперь случай единственного связывания. Оно может произойти либо в разложении § 2 при образовании новых C-вершин и сокращении расходящихся членов, либо при низкоимпульсном связывании п. 3.4, которое уменьшает количество несвязанных хвостов.

При рассмотрении PC-разложения удобно определить для каждой C-вершины генерирующие вершины. P-вершина может связываться с экспонентой, давая C-вершину, или связываться с экспонентой, создавая сначала C'-вершину, которая уже генерирует C-вершину. Назовем P- и C'- (если она существует) вершины *генерирующими вершинами* для C. Согласно PC-разложению § 2, для каждого члена не более 16 C-вершин имеют данную P-вершину в качестве генерирующей и не более 3 C-вершин имеют данную C'-вершину в качестве генерирующей. Разделим теперь возможные шаги связывания на 7 случаев.

Случай C1. Процедура низкоимпульсного связывания § 3 определяет на каждом индуктивном шаге обрезание, ниже которого хвосты существующих вершин в конце каждого индуктивного шага обязательно связываются. Первый подслучай заключается в возможности для данного хвоста иметь импульс выше или ниже этого обрезания. Каждое такое разложение вводит комбинаторный множитель 2 для хвоста и 2^4 для вершины.

Согласно лемме 3.4.1 и формулам (3.4.1) — (3.4.2), каждая вершина с верхним обрезанием, равным M_j, полностью связывается в конце j-го индуктивного шага. Поэтому максимальный комбинаторный множитель для вершины с верхним обрезанием M_j равен 2^{4j}. Для $0 < \nu < 1$

$$j = \frac{\log \log M_j - \log \log M_1}{\log (1+\nu)} \leqslant \frac{2}{\nu} \log \log M_j. \tag{4.7}$$

Тогда

$$2^{4j} \leqslant (\log M_j)^{8\nu^{-1} \log 2}. \tag{4.8}$$

Если рассматривается P_1-вершина, то

$$2^{4j} \leqslant M_{j-1}^{\varepsilon} = \lambda^{\varepsilon} \tag{4.9}$$

для достаточно больших M_1 (зависящих от ε и ν). Мы приписываем каждой P_1-вершине комбинаторный множитель λ^{ε}.

Если рассматривается C_1-вершина, локализованная в Δ' и имеющая верхнее обрезание $M_{j'}$, мы получаем, так же как и выше, оценку $M_{j'-1}^{\varepsilon}$ для комбинаторного множителя, который мы приписываем генерирующей P_1-вершине. Пусть генерирующая P_1-вершина локализована в Δ и имеет верхнее обрезание M_j. По условию (с) § 2, примененному в случае, когда куб Δ был выбран для P_1-вершины,

$$M_{j'}^{\varepsilon} \leqslant O(1) \{1 + \operatorname{dist}(\Delta, \Delta')\}^4 M_j^{\varepsilon}. \tag{4.10}$$

Отсюда

$$2^{4j'} \leqslant O(1) \lambda^{\varepsilon} \{1 + \operatorname{dist}(\Delta, \Delta')\}^4, \tag{4.11}$$

где λ относится к генерирующей P_1-вершине. Таким образом, (4.11) не превосходит множителя

$$O(1)\,\lambda^{\varepsilon}, \tag{4.12}$$

приписанного генерирующей P_1-вершине, а также множителя d^4, приписанного каждой линии, выходящей из генерирующих P_1- и C_1-вершин.

Пусть, наконец, рассматриваемая вершина является W-, P_r- или C_r-вершиной, $r > 1$. Предположим, что эта вершина имеет верхнее обрезание M_i, локализована в Δ и $M_{u(\Delta)}$ — верхнее обрезание в кубе Δ в тот момент, когда вводится данная вершина. Так же как в (4.1) — (4.3), используя (4.7), получаем

$$2^{4i} \leqslant |\Delta|^{-\varepsilon} \tag{4.13}$$

для достаточно больших M_1 (зависящих от ε и ν). В данном случае мы приписываем комбинаторный множитель $|\Delta|^{-\varepsilon}$ вершинам W, P_r или C_r.

Следующие C-подслучаи относятся к связыванию двух хвостов для образования линии. В каждом из этих случаев мы предполагаем, что хвост вершины, локализованной в Δ и введенной на r-м индуктивном шаге, связывается с хвостом вершины, локализованной в $\Delta(\alpha)$ и введенной на $r(\alpha)$-м индуктивном шаге. Пусть связывание происходит на i-м индуктивном шаге. Для большей конкретности хвост в Δ мы будем называть Δ-хвостом или $P_r(\Delta)$-хвостом и т. д. В следующей лемме мы рассмотрим безразмерную длину d (1.2.11) для линии, возникшей при таком связывании.

Лемма 4.2. (a) *Пусть $n \geqslant 4$. Для связывания с $P_{r(\alpha)}$- или $C_{r(\alpha)}$-хвостом*

$$\sup_{\substack{r(\alpha) \leqslant r \\ \Delta,\, i}} \sum_{\Delta(\alpha)} d^{-n} \leqslant O(1). \tag{4.14}$$

(b) *Пусть n достаточно велико (в зависимости от ε). Тогда для связывания с $W_{r(\alpha)}$-хвостом, $r > r(\alpha)$, имеет место* (4.14).

(c) *Для связывания W_r-хвоста с W_r-хвостом, т. е. при $r(\alpha) = r$, имеем*

$$\sup_{\Delta,\, i,\, r} \sum_{\Delta(\alpha)} |\Delta(\alpha)|^{\varepsilon} (b_\alpha d)^{-3(1+\nu)} \leqslant O(1). \tag{4.15}$$

Доказательство. (a) В этом доказательстве положим $\Delta(\alpha) = \Delta'$, $r(\alpha) = r'$ и т. д. Так как $r' \leqslant r$, то, согласно (3.3.1), для всех кубов Δ', за исключением не более $O(1)$ этих кубов ($O(1) \leqslant 57$), в каждом покрытии имеем

$$\operatorname{dist}(\Delta, \Delta') > {}^1\!/_2 |\Delta'|^{1/3}. \tag{4.16}$$

Фиксируем r'. Согласно (3.2.1), нижнее обрезание $P_{r'}$- или $C_{r'}$-хвоста больше, чем $^1/_2|\Delta'|^{-1/2}$. В силу (1.2.11)

$$d \geqslant \frac{1}{2}|\Delta'|^{-1/6}|\Delta'|^{-1/3}\operatorname{dist}(\Delta, \Delta'). \tag{4.17}$$

Пусть $\sum^{(j)}$ — сумма по всем Δ', удовлетворяющим (4.16) и имеющим размер $|\Delta'| = 8^{-j}$. Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{\Delta'} d^{-4} &\leqslant O(1) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum^{(j)} d^{-4} \leqslant \\ &\leqslant O(1) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum^{(j)} (4^6|\Delta'|)^{2/3}\left(|\Delta'|^{-1/3}\operatorname{dist}(\Delta, \Delta')\right)^{-4} \leqslant \\ &\leqslant O(1) + O(1)\sum_{j=0}^{\infty} 8^{-2j/3} \leqslant O(1).\end{aligned} \tag{4.18}$$

Здесь мы использовали тот факт, что для кубов Δ' фиксированного размера сумма $\sum'$ по всем Δ', удовлетворяющим (4.16), удовлетворяет неравенству

$$\sum{}' |\Delta'|^{4/3}(\operatorname{dist}(\Delta, \Delta'))^{-4} \leqslant O(1)$$

с константой $O(1)$, не зависящей от Δ и $|\Delta'|$. Таким образом, константы в (4.18) не зависят от Δ, i, r, $r(\alpha)$, и доказательство утверждения (a) закончено.

(b) Для $P_r(\Delta)$- или $C_r(\Delta)$-вершин, за исключением $O(1)$ кубов Δ', имеем

$$\operatorname{dist}(\Delta, \Delta') > \frac{1}{2}|\Delta|^{1/3}. \tag{4.19}$$

Нижнее обрезание для $P_r(\Delta)$- или $C_r(\Delta)$-хвоста превосходит $^1/_2|\Delta|^{-1/2}$, и в случае, когда выполняется (4.19),

$$d > \frac{1}{2}|\Delta|^{-1/6} > \frac{1}{2}|\Delta'|^{-1/6n_1}(2cd)^{-1/6},$$

где последнее неравенство следует из предложения 3.3.3, а $n_1 = n_1(\varepsilon)$ выбрано таким же, как в формулировке леммы. Тогда если $\sum'$ означает сумму по кубам Δ', удовлетворяющим (4.19), то

$$\sum_{\Delta'} d^{-n} \leqslant O(1) + O(1)\sum{}' |\Delta'|\, d^{-n+7n_1} \leqslant O(1) \tag{4.20}$$

для $n \geqslant 4 + 7n_1(\varepsilon)$. Здесь использован тот факт, что суммирование происходит по множеству $\mathscr{D}^*$ непересекающихся кубов Δ' (не обязательно образующему покрытие).

Для $W_r(\Delta)$-хвоста, $r > r(\alpha)$, рассмотрим куб Δ'' из P_rC_r-разложения, содержащий Δ. Заметим, что Δ'' принадлежит либо тому же покрытию, что и Δ', либо более раннему покрытию, чем Δ'. Поэтому, за исключением $O(1)$ кубов, имеем, согласно предложению 3.3.3,

$$d \geqslant \frac{1}{4} |\Delta''|^{-1/6} \geqslant \frac{1}{4} |\Delta'|^{-1/6n_1} (2cd)^{-1/6},$$

и доказательство (4.20) проходит и в этом случае.

(c) Пусть $M_{j'}$ и b' — нижнее импульсное обрезание и локализационное отношение для $W_r(\Delta')$-хвоста. Тогда

$$b'd \geqslant b' \frac{1}{2} (1 + M_{j'} \operatorname{dist}(\Delta, \Delta')) \geqslant \frac{1}{2} \left(1 + |\Delta'|^{-1/3} \operatorname{dist}(\Delta, \Delta')\right).$$

Поэтому

$$\sum_{\Delta'} |\Delta'|^{\varepsilon} (b'd)^{-3(1+\nu)} \leqslant$$

$$\leqslant O(1) \sum_{\Delta'} |\Delta'|^{\varepsilon} \left(1 + |\Delta'|^{-1/3} \operatorname{dist}(\Delta, \Delta')\right)^{-3(1+\nu)} \leqslant$$

$$\leqslant O(1) \sum_{j=0}^{\infty} 8^{-\varepsilon j} \leqslant O(1).$$

Здесь мы использовали тот факт, что для кубов фиксированного размера $|\Delta'| = 8^{-j}$

$$\sum_{\Delta'} \left(1 + |\Delta'|^{-1/3} \operatorname{dist}(\Delta, \Delta')\right)^{-3(1+\nu)} \leqslant O(1)$$

с константой $O(1)$, не зависящей от Δ и Δ'. Сумма по j учитывает кубы различных размеров.

Случай C2. Второй подслучай относится к связыванию с экспонентой, в результате которого получается C_i-вершина. При этом для каждого куба $\Delta(\alpha) \in \mathscr{D}_e$ получаются два члена (один из V_l и один из массового контрчлена). Согласно лемме 4.2 (а), для фиксации куба $\Delta(\alpha)$ достаточно комбинаторного множителя $O(1)\, d^4$, приписанного связанной линии. Мы приписываем d^4 линии, а $O(1)$ — новой C-вершине.

Случай C3. Третий подслучай — связывание с $C_{r(\alpha)}$-вершиной, имеющей верхнее обрезание M_j. Согласно лемме 4.2 (а), для фиксации куба $\Delta(\alpha)$ достаточно комбинаторного множителя d^4, приписываемого связанной линии, и $O(1)$, приписанного $C_{r(\alpha)}$-вершине.

Оценим теперь число C-хвостов в $\Delta(\alpha)$. Пусть γ — генерирующая P-вершина для α, и β — генерирующая C-вершина (если она существует). Чтобы фиксировать кубы локализации $\Delta(\beta)$ и $\Delta(\gamma)$ для β и γ, достаточно комбинаторных множителей $O(1)\, d_{\alpha\beta}^4 d_{\alpha\gamma}^4$ или $O(1)\, d_{\alpha\gamma}^4$. Оценим теперь число

$n_{r(\alpha)}(\Delta(\gamma))$ P-вершин, введенных в $\Delta(\gamma)$ на $r(\alpha)$-м индуктивном шаге. Имеем

$$n_1(\Delta(\gamma)) \leqslant \lambda(\gamma)^{2\varepsilon}, \tag{4.21}$$
$$n_{r(\alpha)}(\Delta(\gamma)) \leqslant |\Delta(\gamma)|^{-\varepsilon}, \qquad r(\alpha) > 1,$$

и каждая P-вершина генерирует не более $128 = O(1)$ C-хвостов. Увеличение C-вершин при возведении в квадрат ограничено множителем $2^{i-r(\alpha)+1}$, а множитель $(1+r(\alpha)^2)$ избавляет от суммирования по $r(\alpha)$. Как и в случае $C1$, $i \leqslant j$. Таким образом,

$$(1+r(\alpha)^2)\, 2^{i-r(\alpha)+1} \leqslant 2^{i+2} \leqslant 2^{j+2}. \tag{4.22}$$

Мы приписываем множитель $O(1)\, n_{r(\alpha)}\ (\Delta(\gamma))$ из формулы (4.21) P-вершине γ, генерирующей α. Оценим (4.22) так же, как мы оценивали множитель (4.11) в случае $C1$, и, так же как и там, припишем его P-вершине, генерирующей α, и ассоциированным линиям.

Случай C4. Четвертый подслучай — связывание с $P_{r(\alpha)}$-вершиной. Согласно лемме 4.2 (a), комбинаторный множитель d^4 для линии и $O(1)$ для $P_{r(\alpha)}$-вершины фиксирует $\Delta(\alpha)$. Как и в случае $C3$, мы приходим к комбинаторному множителю для $P_{r(\alpha)}$-вершины, равному $\lambda(\alpha)^{3\varepsilon}$ при $r=1$ и равному $|\Delta(\alpha)|^{-2\varepsilon}$ при $r>1$.

Случай C5. Пятый подслучай — связывание с $W_{r(\alpha)}$-вершиной, $r(\alpha) < r$. По лемме 4.2 (b) комбинаторного множителя $O(1)\, d^n$, приписываемого линии, достаточно для фиксации $\Delta(\alpha)$. Мы оценим число $W_{r(\alpha)}$-вершин в $\Delta(\alpha)$ множителем $O(1)\left(\log|\Delta(\alpha)|^{-1}\right)^3$, возникающим при применении (3.2.21), взятым $2^{i-r(\alpha)+1}$ раз из-за возрастания числа вершин при возведении в квадрат. Как и в случае $C1$,

$$O(1)\left(\log|\Delta(\alpha)|^{-1}\right)^3 2^{i-r(\alpha)+1} \leqslant |\Delta(\alpha)|^{-\varepsilon} \tag{4.23}$$

для достаточно больших M_1, зависящих от ν и ε. Мы приписываем (4.23) W-вершине α.

Случай C6. Шестой подслучай — связывание с $W_r(\Delta(\alpha))$-хвостом. Согласно процедуре низкоимпульсного связывания, Δ-хвост должен быть $W_r(\Delta)$-хвостом; иначе говоря, при $r = r(\alpha)$ только W-хвост связывается с W. Мы хотим переупорядочить сумму по кубам так, чтобы хвосты связывались от малых кубов к большим. Для каждого W_r-хвоста введем множитель 2^{i-r+1}, фиксирующий выбор хвостов, связываемых с другими W_r-хвостами на i-м индуктивном шаге. Для хвостов, которые действительно связываются, мы имеем другой множитель 2 для различения того, связываются ли они с меньшим или с большим кубом. Сумму по всем связываниям можно теперь записать как сумму по связываниям от малых кубов к большим, т. е. $|\Delta| \leqslant |\Delta(\alpha)|$. Это в действительности итерированная сумма однократных сумм по возможным связываниям в каждом меньшем кубе. Как и в случае $C5$, мы оценим комбинаторный множитель 2^{r-i+2} числом $|\Delta|^{-\varepsilon}$ для каждой $W_r(\Delta)$-вершины.

По лемме 4.2 (с) комбинаторного множителя $O(1)|\Delta(\alpha)|^{-\varepsilon} \times \times (db_\alpha)^{3(1+\nu)}$ достаточно для фиксации суммы по кубам $\Delta(\alpha)$. Мы припишем $W_r(\Delta(\alpha))$-вершине множитель $O(1)|\Delta(\alpha)|^{-\varepsilon}$, а линии — множитель $d^{3(1+\nu)}$. Так как $|\Delta| \leqslant |\Delta(\alpha)|$, то $b_\alpha \leqslant b$. Припишем $W_r(\Delta(\alpha))$-хвосту множитель $b_\alpha^{3(1+\nu)/2}$, а $W_r(\Delta)$-хвосту — множитель $b_\alpha^{3(1+\nu)/2} \leqslant b^{3(1+\nu)/2}$.

Как и в случае $C5$, комбинаторный множитель $|\Delta(\alpha)|^{-\varepsilon}$ оценивает число $W_r(\Delta(\alpha))$-хвостов на i-м индуктивном шаге.

Случай S. Операция возведения в квадрат (3.1.2) вводит при каждом применении два члена. Мы припишем каждому из них комбинаторный множитель 2, и он сократится с $^1/_2$ в (3.1.2). Если происходит i-й индуктивный шаг, то положим

$$\delta = O(1)^N \prod_{R(s)} c, \tag{4.24}$$

где N — число P_i-вершин в $R(s)$ и где произведение берется по всем комбинаторным множителям c, приписанным вершинам, линиям или хвостам $R(s)$ перед применением (3.1.2). С таким выбором коэффициент при каждой квадратичной вершине, как только она появляется в индуктивном разложении, равен $O(1)^{-1}$. Мы выберем этот множитель $O(1)^{-1}$ достаточно малым, выбирая $O(1)$ в (4.24) достаточно большим, с тем чтобы подавить комбинаторные множители $O(1)$, приписываемые в случаях P и $W1$ квадратичным вершинам. Так как последних приписываний ограниченное число, мы можем сделать полный коэффициент при квадратичной вершине, а именно произведение $O(1)^{-1}$ на комбинаторные множители, меньшим 1. При таком выборе δ второй член в (3.1.2), умноженный на комбинаторный коэффициент, равен

$$\delta\Big(\prod_{R(s)} c\Big) R(s)^2 = O(1)^N \Big(\prod_{R(s)} c\Big)^2 R(s)^2. \tag{4.25}$$

Потому для наших оценок мы считаем комбинаторные множители вершин, линий и хвостов $R(s)$ неизменными в этом члене, за исключением увеличения на множитель $O(1)$ для каждой P_i-вершины.

Случай W1. Этот подслучай связан с применением виковой оценки (3.2.2) в Δ. Каждое применение (3.2.2) дает два члена. Чтобы поглотить константу K_1 в (3.2.2), мы оценим комбинаторный множитель для каждого такого члена константой $2K_1 = O(1)$. В соответствии с теоремой 3.2.2 мы приписываем этот множитель $O(1)$ для Δ либо P-вершине, либо W-вершине, локализованной в Δ' из $\mathscr{D} \cup \mathscr{D}^*$.

Случай W2. Рассмотрим, наконец, подслучай применения оценки (3.2.21) в кубах $\Delta^* \in \mathscr{D}^*$. Чтобы облегчить оценки § 5—6, мы выразим каждую W-вершину, вводимую посредством (3.2.21), в виде суммы вершин, импульс каждого хвоста которых принадлежит некоторому интервалу $[M_j, M_{j+1}]$. Для оценки суммы по j припишем множитель $O(1)(1+j^2)^4$ каждой W-вершине. Этот множитель не превосходит $|\Delta|^{-\varepsilon}$ согласно (4.13). α_j^l в P в (3.2.21) содержит 12 членов, что приводит к множителю $O(1) = 12$.

5. ОЦЕНКИ БОЛЬШИХ ДИАГРАММ

5.1. Основные оценки и доказательство теоремы 1.1.1. Наша оценка $\langle \exp(-tH)\rangle_0$ теперь имеет вид

$$\langle \Omega_0, e^{-tH}\Omega_0\rangle \leqslant \sup_G c(G)\,|I(G)|, \tag{5.1.1}$$

где $I(G)$ — интеграл, соответствующий вакуумной диаграмме G, появляющейся в индуктивном разложении § 2—3, и где $c(G)$ — комбинаторный коэффициент из теоремы 4.1. В этом параграфе мы получим оценки $I(G)$, сведя их к оценкам для некоторых малых поддиаграмм, имеющих от одной до четырех вершин, а оценки малых поддиаграмм мы получим в § 6.

Основным нашим результатом здесь будет оценка, которая вместе с (5.1.1) и теоремой 4.1 доказывает положительность φ_3^4-гамильтониана, а точнее — теорему 1.1.1. Пусть λ, b, d определены, как в п. 1.2. Для каждой линии пусть $s = \max\{1, M\}$, где $M = \min\{\alpha^{(l)}\}$ — нижнее импульсное обрезание для этой линии, ср. с (1.2.4). Заметим, что если $d > 1$, то $d < |r|s$, где r — вектор, соединяющий центры кубов локализации Δ, Δ', связываемых этой линией. Пусть ε, $\nu = \nu(\varepsilon)$ и $M_1 = M_1(\nu, \varepsilon)$ выбраны, как в предыдущих параграфах.

Теорема 5.1. *Для данного достаточно малого $\varepsilon_1 > 0$, данного n_1 и данных положительных ε, ν, достаточно малых и зависящих от ε_1, существуют такие константы $\alpha_1 = \alpha_1(\varepsilon_1, n_1, \varepsilon, \nu)$*

и $M_1(\varepsilon_1, \varepsilon)$, *что*

$$|I(G)| \leqslant \Big(\prod_{\text{линии}} d^{-n_1}\Big)\Big(\prod_{P_1\text{-вершины}} \lambda^{-\varepsilon_1}\Big) \times \\ \times \Big(\prod_{\text{вершины}} \alpha_1 |\Delta|^{\varepsilon_1}\Big)\Big(\prod_{W\text{-хвосты}} b^{-3(1+\nu)/2}\Big), \tag{5.1.2}$$

если только M_1 *из формулы* (1.2.6) *превосходит* $M_1(\varepsilon_1, \varepsilon)$.

Доказательство теоремы 1.1.1. Индуктивная конструкция дает оценку

$$\langle \Omega_0, \exp(-tH(g, \varkappa))\,\Omega_0\rangle \leqslant \sup_G c(G)\,|I(G)|$$

и, согласно теоремам 4.1 и 5.1,

$$\langle \Omega_0, \exp(-tH(g, \varkappa))\,\Omega_0\rangle \leqslant \exp(O(\mathrm{vol}(h))) \sup_G \Big(\prod_{\text{линии}} d^{n-n_1}\Big) \times \\ \times \Big(\prod_{P_1\text{-вершины}} \lambda^{\beta\varepsilon-\varepsilon_1}\Big)\Big(\prod_{\text{вершины}} L\alpha_1 |\Delta|^{-\beta\varepsilon+\varepsilon_1}\Big).$$

(1) Выберем ε_1 достаточно малым, а затем выберем $\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_1)$, $\nu = \nu(\varepsilon)$ достаточно малыми, а $M_1(\varepsilon_1, \varepsilon)$ достаточно большим так, чтобы имела место теорема 5.1.

(2) Выберем ε достаточно малым, так чтобы $\beta\varepsilon < \varepsilon_1$ в теореме 4.1. Это фиксирует n, L, M в теореме 4.1, а также $M_1(\varepsilon_1, \varepsilon)$ в теореме 5.1.

(3) Выберем n_1 достаточно большим так, чтобы $n < n_1$. Это фиксирует α_1 в теореме 5.1.

(4) Выберем M_1 достаточно большим так, чтобы $M_1 \geqslant M_1(\varepsilon_1, \varepsilon)$ и $M_1 \geqslant M$, как требуется выше. Кроме того, большое M_1 вынуждает λ быть большим, а $|\Delta|$ (для $r > 1$) малым. Таким образом, мы можем также потребовать, чтобы $(L\alpha_1)^{17}\lambda^{-(\varepsilon_1-\beta\varepsilon)} \leqslant 1$ для P_1-вершин, $L\alpha_1|\Delta|^{\varepsilon_1-\beta\varepsilon} \leqslant 1$ для W-, P_r-, C_r-вершин, $r > 1$. Для C_1-вершин $|\Delta| = 1$, и для каждой C_1-вершины мы приписываем $L\alpha_1$ каждой генерирующей ее P_1-вершине. В § 4 мы заметили, что каждая P-вершина является генерирующей не более чем для 16 C-вершин. Таким образом, приведенный выше выбор M_1 достаточен.

Такой выбор дает оценку $\langle \Omega_0, \exp(-tH(g, \varkappa))\,\Omega_0\rangle \leqslant \leqslant \exp(O(t)A(g))$, где при гамильтоновом обрезании $\mathrm{vol}(h) = O(t)\,A(g)$, и поэтому в силу (1.1.4)

$$-O(1)\,A(g) \leqslant E(g, \varkappa),$$

что и требовалось.

5.2. Локализационные множители. Оставшаяся часть § 5 и 6 посвящена доказательству теоремы 5.1. Сначала мы займемся локализационными множителями d^{n_1} для линии, дающими полиномиальную пространственно-временную локализацию относительно безразмерного расстояния. Заметим, что наши импульсные обрезания имеют компактный носитель, поэтому мы не можем получить экспоненциальной пространственно-временной локализации. Для сходящихся диаграмм без импульсных обрезаний наше доказательство дает локализационный множитель $\exp((1-\varepsilon)|r|)$.

Мы получим мажорирующую функцию $\bar{I}(G)$, а также константы a_1', n_1', такие, что

$$|I(G)| \leqslant \Big(\prod_{\text{линии}} \alpha_1' d^{-n_1}\Big)\bar{I}(G) \tag{5.2.1}$$

и

$$\bar{I}(G) \leqslant \Big(\prod_{\text{линии}} d^{n_1'}\Big)\Big(\prod_{P_1\text{-вершины}} \lambda^{-\varepsilon_1}\Big)\times$$
$$\times\Big(\prod_{\text{вершины}} \alpha_1' |\Delta|^{\varepsilon}\Big)\Big(\prod_{W\text{-хвосты}} b^{-3(1+\nu)/2}\Big). \tag{5.2.2}$$

Из (5.2.1) — (5.2.2) следует наша теорема, так как n_1' не зависит от выбора n_1.

Предположим, что диаграмма G содержит только P- или C-вершины. Для каждой вершины G определим $d_{\max}$ как максимальную безразмерную длину для линий, выходящих из этой вершины. Если $d_{\max} > 1$, то $d_{\max} \leqslant |r_{\max}| s_{\max}$, где $r_{\max}$ и $s_{\max}$ определены как числа r и s для линии, соответствующей $d_{\max}$. Пусть $\mathscr{L}$ — множество вершин G с $d_{\max} > 1$. Докажем, что

$$|I(G)| \leqslant \Big(\prod_{\mathscr{L}} \alpha_2 d_{\max}^{-4n}\Big)\bar{I}(G), \tag{5.2.3}$$

откуда будет следовать (5.2.1). (Мы полагаем для простоты $n_1 = n$.)

Пусть какая-то вершина из $\mathscr{L}$ локализована в Δ. Если $s_{\max} > 2|\Delta|^{-1/3}$, то разобьем Δ на кубы $\{\Delta'\}$, где

$$|\Delta'|^{-1/3} \leqslant s_{\max} \leqslant 2|\Delta'|^{-1/3}. \tag{5.2.4}$$

Запишем вершину, локализованную в Δ, как сумму вершин, локализованных в каждом Δ'. Ядро, соответствующее вершине, зависит от куба локализации посредством сохраняющего импульс множителя $(h\chi_\Delta)^\sim$. Таким образом, сумма по $O(|\Delta||\Delta'|^{-1})$ сдвигам $h\chi_{\Delta'}$ дает требуемое разбиение. Подобным образом мы получим $\prod_{\mathscr{L}} O(|\Delta||\Delta'|^{-1})$ топологически идентичных диаграмм G_α, интегралы $I(G_\alpha)$ для которых имеют одни и те же обрезания, те же s', что и для $I(G)$, но множества r' и d' для каждой G_α различны. Тогда

$$I(G)=\sum_\alpha I(G_\alpha). \qquad (5.2.5)$$

Мы нумеруем линии G индексами j, а соответствующие линии G_α — индексами (j, α). Аналогично, $r_{j,\alpha}$ будет означать вектор смещения для j-й линии в G_α и т. д. Так как каждый Δ' содержится в своем Δ, то для каждой линии имеем $d_j \leqslant d_{j,\alpha}$, а для каждой вершины $d_{\max} \leqslant d_{\max,\alpha}$. Таким образом, для каждой вершины если $d_{\max} > 1$, то $d_{\max} < |r_{\max,\alpha}| s_{\max}$ при всех α.

Ядра различных $I(G_\alpha)$ при данном $I(G)$ имеют вид

$$m_\alpha(k)=w(k)\prod_{\text{линии}} \exp(ik_j r_{j\alpha}), \qquad (5.2.6)$$

где $w(k)$ не зависит от α и от $r_{j\alpha}$. Тогда

$$I(G_\alpha)=\int m_\alpha(k)\,dk.$$

Умножение $I(G_\alpha)$ на компоненту $r_{j\alpha}^{(l)}$ вектора $r_{j\alpha}$ эквивалентно замене w на $i\partial w/\partial k_{j\alpha}^{(l)}$. Таким образом,

$$\left|\left(\prod_{\mathscr{L}} d_{\max} r_{\max,\alpha} s_{\max}\right)^{4n} I(G_\alpha)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int \left(\prod_{\text{линии}} e^{ik_j r_{j\alpha}}\right)\left(\prod_{\mathscr{L}} s_{\max}^2 \Delta_{\max}^2\right)^{4n} w(k)\,dk\right|, \qquad (5.2.7)$$

где $\Delta_{\max}^2$ — лапласиан $\sum \partial^2/\partial k_{\max}^{(l)\,2}$ для импульса $k_{\max}$, соответствующего линии, дающей $d_{\max}$.

Оценим теперь производные множителей μ^{-2}, η и $(h\chi_{\Delta'})_0^\sim$ в ядре $w(k)$, входящем в (5.2.7). При всех n_1 для пропагатора $\mu(k)^{-2}=(k^2+1)^{-1}$ имеем

$$|D_j^n\,\mu(k_j)^{-2}| \leqslant O(1)\,\mu(k_j)^{-2-|n_1|},$$

где

$$D_j^{n_1}=\prod_{l=0}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial k_j^l}\right)^{n_{1,l}}, \quad \sum_l n_{1,l}=|n_1|.$$

Эта оценка следует из представления μ^{-2} в виде интеграла Коши, причем константа ограничена величиной $O(n_1!)$. На носителе ядра w

$$\left|D_j^n\,\mu(k_j)^{-2}\right| \leqslant O\left(s_j^{-|n_1|}\right)\mu(k_j)^{-2}. \qquad (5.2.8)$$

Аналогично, на носителе w импульсное обрезание $\eta_{\alpha_j,\beta_j}(k_j)$ из класса $\mathscr{S}$ для j-й линии удовлетворяет неравенству

$$\left|D_j^{n_2}\eta_{\alpha_j,\beta_j}(k_j)\right| \leqslant O(1)\,s_j^{-|n_2|}, \qquad (5.2.9)$$

которое следует из (1.2.4) и того, что $M_1 \geqslant 1$. Константа $O(1)$ в (5.2.9) зависит от $|n_2|$, но равномерна по (α_j, β_j).

Заметим, наконец, что сохраняющий импульс множитель $(h\chi_{\Delta'})_0^{\sim}$, входящий в w, совпадает с множителем $(h\chi_{\Delta'})^{\sim}$, сдвинутым в начало координат. Для функции сравнения

$$F_\Delta(k) = \prod_{l=0}^{2}\left(1 + |\Delta|^{1/3}\, |k^{(l)}|\right)^{-1} \tag{5.2.10}$$

имеем

$$\begin{aligned}\left|D^{n_3}(h\chi_{\Delta'})^{\sim}(k)\right| &\leqslant O(1)\,|\Delta'|^{1+|n_3|/3} F_{\Delta'}(k) \leqslant \\ &\leqslant O(1)\left(s_{\max}^{-|n_3|}\right)|\Delta|\, F_\Delta(k),\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

что следует из неравенства $|\Delta'| \leqslant |\Delta|$ ввиду $|\Delta'|\, F_\Delta \leqslant \leqslant O(1)\,|\Delta|\, F_\Delta$. Объединяя (5.2.7) — (5.2.11), получаем оценку $I(G_\alpha)$, а именно

$$\begin{gathered}\left|\left(\prod_{\mathscr{L}} d_{\max}^{4n}\right) I(G_\alpha)\right| \leqslant \left[\prod_{\mathscr{L}} (r_{\max,\,\alpha},\ s_{\max})^{-4n}\right] \bar{I}(G), \\ \bar{I}(G) = \int \bar{w}(k)\, dk,\end{gathered} \tag{5.2.12}$$

где $\bar{w}$ мажорирует w и, как будет показано, $\bar{I}(G)$ удовлетворяет (5.2.2). Здесь $\bar{w}(k)$ является произведением следующих множителей: (i) множителя $\mu_i^{-2} = \mu(k_i)^{-2}$ для каждого множителя μ_i^{-2} в $w(k)$; (ii) множителя $O(1)\,|\Delta|\, F_\Delta(q)$, ограничивающего каждый множитель $(h\chi_\Delta)^{\sim}(q)$ в w; (iii) характеристической функции носителя w; (iv) констант типа несокращенных перенормировочных констант, не поглощенных комбинаторными множителями § 4. Для оценки $I(G)$ воспользуемся формулой (5.2.5) и просуммируем оценки (5.2.12) по α. Каждая линия с $d = d_{\max,\alpha} > 1$, связанная с вершиной из множества $\mathscr{L}$, локализованной в Δ', удовлетворяет оценке

$$|r_{l,\,\alpha}| > \frac{1}{2}\,|\Delta'|^{1/3} = O\left(s_{\max}^{-1}\right), \tag{5.2.13}$$

где $s_{\max}$ определяется по Δ'. Сумма по α является суммой по сдвигам отдельных вершин из $\mathscr{L}$. Для каждой такой вершины, согласно (5.2.13),

$$\sum_\alpha r_{\max,\,\alpha}^{-4n} \leqslant O\left(s_{\max}^{4n}\right)$$

и для всех вершин

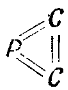
$$\sum_\alpha \prod_{\mathscr{L}} \left(r_{\max,\,\alpha}^{-4n}\right) \leqslant \prod_{\mathscr{L}} O\left(s_{\max}^{4n}\right). \tag{5.2.14}$$

Из (5.2.12) и (5.2.14) мы выводим (5.2.3) и далее (5.2.1) для диаграмм только с P- и C-вершинами.

Для диаграммы, содержащей W-вершины, мы следуем аналогичной процедуре. Дополнительная трудность возникает из-за более сложной функции $\bar{w}$, мажорирующей функцию w, что связано с более сложными ядрами для W-вершин. Отдельная W-вершина с $\mathscr{L}$-хвостами имеет ядро $(\mu_1 \ldots \mu_l)^{-1} v(k)$, где $v(k)$ задается с помощью формул (6.2.6—7) и (6.2.12). По $s_{\max}$, определенным, как выше, при условии, что $s_{\max} > 2|\Delta|^{-1/3}$, мы определим Δ' так, чтобы выполнялось (5.2.4). Заметим, что если число $s_{\max}$ для W-вершины ассоциировано с $a\,\delta\varphi_1$-хвостом, то $s_{\max} \leqslant |\Delta|^{-1/3}$, и мы положим $\Delta' = \Delta$. Представим полный сохраняющий импульс множитель $h(\chi_\Delta)^{\sim}\left(\sum_{I_1} \lambda_j k_j + \right.$ $\left. + \sum_{I_2} k_j\right)$ в виде суммы по функциям $(h\chi_{\Delta'})^{\sim}$ с тем же импульсом. Далее поступаем, как выше при доказательстве (5.2.3) и (5.2.1), используя оценку

$$\left| D^{n_3} (h\chi_\Delta)^{\sim} \right| \leqslant O(1)\, s_{\max}^{-|n_3|} |\Delta| F_\Delta$$

вместо (5.2.11), когда $s_{\max} \leqslant |\Delta|^{-1/3}$. Кроме того, в ядре $\bar{w}$ мы используем оценку (6.2.16) для $|v(k)|$ из ядра W-вершины. Таким образом, (5.2.1) доказана во всех случаях. При применении наших оценок мы включаем любой контрчлен, используемый для сокращения расходимости (в § 2), как часть оцениваемой диаграммы. Таким образом, точно сокращающиеся вакуумные члены

$P \equiv C$ и 

не появляются в разложении. Массовый член

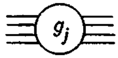
$$—P \equiv C—$$

может появиться в несокращенном или в сокращенном виде

$$—P \equiv C— + —M—,$$

где вторая диаграмма означает массовый контрчлен в V_C, P-вершину типа M_2. Сокращенная форма массового члена сходится и встречается только тогда, когда кубы локализации P- и C-вершин совпадают, см. предложение 5.3.4. Если эти кубы не совпадают, то несокращенная массовая диаграмма является сходящейся.

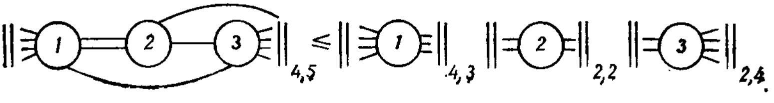
5.3. Разложение больших диаграмм. Большинство наших оценок диаграмм состоит в разложении такой диаграммы G на малые поддиаграммы $\{g_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, и в оценке $I(G)$ или $\overline{I}(G)$ в терминах $I(g_j)$ или $\overline{I}(g_j)$. Каждая поддиаграмма g_j состоит из множества вершин, множества «внутренних линий» (линий, связывающих эти вершины) и множества «внешних хвостов» (которые либо связывают g_j с другими поддиаграммами, либо являются внешними для G). Каждой линии или хвосту приписана импульсная переменная. Будем говорить, что $\{g_j\}$ является разложением G на непересекающиеся поддиаграммы, если $g_j \subset G$ и каждая вершина G принадлежит точно одной g_j. Интеграл $I(G_j)$ является функцией внешних импульсов. Мы разделим эти внешние импульсы на два множества: множество начальных (i) и множество конечных (f) импульсов, соответственно тому, связывают ли они g_{j+n} при $n < 0$ (начальные) или при $n > 0$ (конечные). Внешние к G хвосты мы объявляем начальными или конечными произвольно. (Множества (i) и (f) не следует путать с a- и a^*-хвостами в диаграммах Фридрихса.) Пусть $\|I(g)\|_{i,f}$ обозначает норму оператора $I(g)$ из L_2 по начальным переменным в L_2 по конечным переменным (по мере Лебега). На диаграммах мы обозначаем $I(g_j)$ вершиной с начальными хвостами i_j и конечными хвостами f_j, выходящими с разных сторон:

$I(g_j) = i_j \{$  $\} f_j$

Наша основная оценка для данного разложения $I(G)$:

$$\|I(G)\|_{i,f} \leqslant \prod_j \|I(g_j)\|_{i_j, f_j} \tag{5.3.1}$$

справедлива ввиду равенств $\|A \otimes I\| = \|A\|$ и $\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$. Далее, каждая норма $\|\cdot\|_{i,f}$ мажорируется нормой Гильберта — Шмидта $\|\cdot\|_{H.S.}$ и равняется ей в тех случаях, когда либо $(i) = \varnothing$, либо $(f) = \varnothing$. Иногда удобно обозначать операторные нормы $\|\cdot\|_{r,s}$, где r и s — число импульсов в (i) и (f) соответственно. На языке диаграмм, например,



(5.3.2)

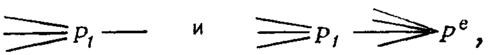
Разобьем теперь вакуумную диаграмму G на непересекающиеся поддиаграммы $\{g'_j\}$. Перенумеруем эти поддиаграммы в том порядке, в каком они возникают в индуктивной конструкции, т. е. от более ранних к более поздним поддиаграммам. Каждая поддиаграмма g'_j состоит либо

1) из единственной W-вершины, либо

2) из P-вершины и генерируемых ею новых C-вершин.

Мы назовем g'_j *исключительной*, если она состоит из единственной P-вершины, которая связывается 4 раза с более ранними поддиаграммами. Определим новое разбиение $\{g_j\}$, объединяя каждую исключительную поддиаграмму g'_j с самой поздней из связанных с ней поддиаграмм g'_j.

Назовем g_j P_r-поддиаграммой, если ее неисключительная поддиаграмма g'_l содержит P_r-вершину (случай 2 выше), и эту P-вершину назовем *главной P-вершиной*. В остальных случаях будем называть g_j W-поддиаграммой. Классифицируем теперь P_l-поддиаграммы на сходящиеся (P_C) или логарифмически расходящиеся (P_D), соответственно числу начальных хвостов у главной P-вершины; диаграммы называются P_C-диаграммами, если $l_j \leqslant 2$, и P_D-диаграммами, если $l_j = 3$. Согласно разложению § 2, единственно возможными P_D-поддиаграммами являются

 (5.3.3a, b)

где P^e обозначает исключительную P-вершину.

Лемма 5.3.1. *Пусть* ε_2 *достаточно мало, и пусть* M_1 *из* (1.2.6) *достаточно велико, причем оно зависит от* ε, ε_2. *Тогда существуют такие константы* α_2 *и* n_2, *что для* P_C-*поддиаграммы*

$$\|\bar{I}(g_j)\|_{l_j, f_j} \leqslant \lambda^{-\varepsilon_2} \Big(\prod_{\text{линии}} d^{n_2}\Big)\Big(\prod_{\text{вершины}} \alpha_2 |\Delta|^{\varepsilon_2}\Big), \qquad (5.3.4)$$

для P_D-*поддиаграммы*

$$\|\bar{I}(g_j)\|_{l_j, f_j} \leqslant (\log \lambda)^4 \Big(\prod_{\text{линии}} d^{n_2}\Big)\Big(\prod_{\text{вершины}} \alpha_2 |\Delta|^{\varepsilon_2}\Big) \qquad (5.3.5)$$

и для W- *или* P_r-*поддиаграммы* ($r > 1$)

$$\|\bar{I}(g_j)\|_{l_j, f_j} \leqslant \Big(\prod_{\text{вершины}} \alpha_2 |\Delta|^{\varepsilon_2}\Big)\Big(\prod_{W\text{-хвосты}} b^{-3(1+\nu)/2}\Big). \qquad (5.3.6)$$

Множитель λ *относится к главной вершине поддиаграммы.*

Доказательство теоремы 5.1.1. Для завершения доказательства теоремы мы установим (5.2.2). Применим (5.3.1) для оценки $\overline{I}(G)$ с помощью произведения множителей вида (5.3.4) — (5.3.6). Оценка (5.3.6) для P_r-, $r > 1$, или для W-поддиаграмм уже имеет правильный вид, как требуется в (5.2.2), в предположении что ε_1 выбрано достаточно малым. Заметим, что P_C-поддиаграммы содержат не более 53 вершин: 1 главную P_1-вершину, 16 C-вершин и 36 исключительных P-вершин. Пусть λ_1 — максимальное нижнее обрезание для исключительной $P_1(\Delta_1)$-вершины в P_C-поддиаграмме. По условию (с) § 2, примененному в момент появления главной P_1-вершины (и поэтому до введения исключительной $P_1(\Delta_1)$-вершины),

$$\lambda^{-\delta} \leqslant (cd^4)^{\delta/(1+\nu)\varepsilon} M_{u(\Delta_1)}^{-\delta/(1+\nu)} \leqslant (cd^4)^{\delta/(1+\nu)\varepsilon} \lambda_1^{-\delta}. \qquad (5.3.7)$$

Таким образом, можно оценить множитель сходимости $\lambda^{-\varepsilon_2}$ главной вершины в (5.3.4) при помощи произведения множителей $\lambda_1^{-\varepsilon_2/37}$ по одному для каждой P_1-вершины, множителей d^{n_1} для линий и $O(1)$ для вершин.

Для P_D-поддиаграмм мы переносим множители $\lambda^{-\delta}$ от ранних P_C-поддиаграмм, чтобы подавить $(\log \lambda)^4$ в (5.3.5) и получить сходимость для ее P_1-вершин. Этот метод работает в основном потому, что P_D-поддиаграмма имеет по меньшей мере 3 начальных хвоста и не более одного конечного и, следовательно, число P_D-поддиаграмм ограничено в зависимости от числа P_C-поддиаграмм. Заметим, что начальные хвосты P_D-поддиаграмм должны связываться с P_C- или P_D-поддиаграммами.

Назовем *цепью* конечную связную последовательность линий и вершин из G, выбранных так, что каждая линия соединяет две последовательные вершины, а порядок вершин в последовательности совпадает с порядком, в котором эти вершины появлялись в индуктивной конструкции. Мы будем рассматривать цепи, которые начинаются с конечного хвоста некоторой P_C-поддиаграммы, кончаются на начальном хвосте некоторой P_D-поддиаграммы, а в остальном проходят через P_D-поддиаграммы (обязательно типа (5.3.3а)). Пусть l — число линий в цепи; назовем число $\rho = 3^{-l+1}$ *весом* цепи длины l. Пусть $\sum^i$ — сумма по цепям в G с фиксированным начальным хвостом, $\sum^f$ — сумма по цепям в G с фиксированным конечным хвостом.

Лемма 5.3.2. *Для любого фиксированного начального хвоста или для любого фиксированного конечного хвоста*

$$\sum\nolimits^i \rho \leqslant 2, \qquad \sum\nolimits^f \rho = 1. \qquad (5.3.8\text{i, f})$$

Доказательство. Первое неравенство очевидно, так как цепь с фиксированным начальным хвостом не может разветвляться. Таким образом, для каждого l имеется только одна такая цепь и, следовательно,

$$\sum{}^i \rho \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} 3^{-l+1} = \frac{3}{2}.$$

Пусть T — множество P_D-вершин, встречающихся в множестве цепей с фиксированным конечным хвостом. Докажем (5.3.8f) индукцией по длине l цепи. Если $l = 1$, то существует ровно одна цепь длины 1 и (5.3.8f) имеет место. Пусть $n(l)$ — число цепей длины l с фиксированным конечным хвостом. Предположим, что (5.3.8f) имеет место для цепей длины, не превосходящей k, и добавим к цепям длины k P_D-вершину. Тогда

$$\sum_{l=1}^{k} \rho(l) n(l) = 1,$$

и после добавления вершины к j цепям длины k

$$\sum_{l=1}^{k+1} \rho(l) n(l) = \sum_{l=1}^{k-1} \rho(l) n(l) + \rho(k)(n(k) - j) + 3j\rho(k+1) =$$
$$= \sum_{l=1}^{k} \rho(l) n(l) + j(3\rho(k+1) - \rho(k)).$$

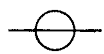
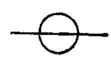
Так как $3\rho(k+1) = \rho(k)$, то лемма доказана.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 5.1. Для каждой цепи выделим множитель $\lambda^{-\rho\delta/3}$ у главной P-вершины начальной P_D-поддиаграммы в произведении (5.3.1). Согласно оценке (5.3.8i), каждая начальная P_C-поддиаграмма получит множитель, не превосходящий $\lambda^{2\delta/3}$ и полученный таким способом от различных P_D-поддиаграмм на цепях, начинающихся с этой P_C-поддиаграммы. Выберем δ достаточно малым, так чтобы $2\delta/3 < \varepsilon_2/74$; таким образом, полный множитель от начальной P_C-поддиаграммы, который должен быть приписан, равен $\lambda^{-\varepsilon_2/74}$, причем остается аналогичный множитель для главной вершины в P_C-поддиаграмме. Как и выше, в случае P_C, используем (5.3.7), чтобы превратить $\lambda^{-\rho\delta/3}$ в множитель $d^{n_2\rho}$ для каждой линии в цепи, $O(1)^\rho$ для каждой вершины в цепи и $\lambda_D^{-\rho\delta/3}$ для конечной P_D-поддиаграммы. Снова, согласно (5.3.8i), это выливается не больше чем в множитель d^{n_2} на каждую линию и $O(1)$ на каждую вершину. Из тождества (5.3.8f) следует, что поддиаграмме (5.3.3a) приписывается полный множитель $\lambda_D^{-\delta}$, а поддиаграмме (5.3.3b) — множитель $\lambda_D^{-2\delta}$.

В последнем случае $P_D = P_1 - P_1$, и мы делим $\lambda_D^{-2\delta}$ поровну между двумя P_D-вершинами, как и выше. Эта сходимость подавляет логарифмическую расходимость в (5.3.5), что завершает доказательство (5.2.2).

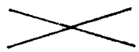
Сформулируем теперь основные предложения о малых поддиаграммах, которые используются в доказательстве леммы 5.3.1. Они будут доказаны в § 6. Пусть $M(1), \ldots, M(4)$ — верхние обрезания у хвостов P- или C-вершины, занумерованные так, что $M(1) \leqslant M(2) \leqslant \ldots$.

Предложение 5.3.3. *Пусть w — ядро типа φ^4 для P- или C-вершины в Δ. Тогда*

(a) $\Big\|$  $\Big\|_{3,1} = \Big\|$  $\Big\|_{1,1}^{1/2} \leqslant \Big\|$  $\Big\|_{H.S.}^{1/2} \leqslant$

$$\leqslant (|\Delta|^{\varepsilon_3})\,(\log M(2))^{1/2},$$

при $\varepsilon_3 \leqslant 1/4$;

(b) $\Big\|$  $\Big\|_{2,2} \leqslant O(|\Delta|^{\varepsilon_3})\,\lambda^{-\varepsilon_3}$,

при $\varepsilon_3 < 1/16$;

(c) $\Big\|$  $\Big\|_{H.S.} \leqslant O(|\Delta|^{\varepsilon_3})\,\lambda^{-\varepsilon_3}$,

при $\varepsilon_3 < 1/16$.

Предложение 5.3.4. *Несокращенная диаграмма перенормировки массы*

$$M = M(\Delta, \Delta') = \text{——}P\equiv\!\equiv\!\equiv C\text{——}$$

и массовый контрчлен

$$\delta M = \delta M(\Delta, \Delta')\,\delta_{\Delta, \Delta'}$$

(*где* $\delta_{\Delta,\Delta'} = 0$ *для* $\Delta \neq \Delta'$ *и* 1 *в противном случае*) *имеют нормы Гильберта — Шмидта, допускающие оценку* $O\left(|\Delta|^{1/4} |\Delta'|^{1/4} \times \times \log M(2)^{1/2}\right)$. *Их сумма имеет ядро w, удовлетворяющее неравенству*

$$\|w\|_{H.S.} \leqslant O\left(|\Delta'|^{\varepsilon_3} |\Delta|^{\varepsilon_3} \lambda^{-\varepsilon_3} d^{-n}\right)$$

для некоторого $\varepsilon_3 > 0$. *Здесь* d — *безразмерное расстояние от* Δ *до* Δ'.

Предложение 5.3.5. *Пусть* w — *ядро* W-*вершины, задаваемое посредством* (3.2.17), (3.2.19), *причем импульс каждого хвоста заключен в интервале* $[M_j, M_{j+1}]$. *Пусть* $\varepsilon_3 < 1/4$, *и пусть* ν *из* (1.2.6) *достаточно мало. Тогда*

$$\|w\| \leqslant O\left(|\Delta|^{\varepsilon_3}\right) \prod_{\text{хвосты}} b^{-3(1+\nu)/2}.$$

Предложение 5.3.6. *Двухвершинная диаграмма*

$$P \equiv\!\equiv W$$

связывания между P-*вершиной в* Δ *и* W-*вершиной в* Δ' *допускает оценку*

$$O\left(|\Delta|^{\varepsilon_3} |\Delta'|^{\varepsilon_3} \lambda^{-\varepsilon_3} \prod_{\text{хвосты}} b^{-3(1+\nu)/2}\right)$$

для некоторого $\varepsilon_3 > 0$ *в предположении, что* ε *и* ν *достаточно малы.*

Доказательство леммы 5.3.1. Мы перечислим всевозможные P_C-, P_D-, P_r- или W-поддиаграммы и оценим каждую из них. Рассмотрим сначала W-поддиаграмму. Она состоит из единственной W-вершины и, возможно, нескольких связанных с ней исключительных P-вершин. В случае когда имеется только одна исключительная P-вершина, связанная четыре раза с W-вершиной, используем предложение 5.3.6. В остальных случаях оценим операторную норму W-поддиаграммы нормой Гильберта — Шмидта. Если диаграмма G является объединением двух диаграмм G_1 и G_2, то как частный случай (5.3.1) получаем

$$\|I(G)\|_{H.\,S.} \leqslant \|I(G_1)\|_{H.\,S.} \|I(G_2)\|, \tag{5.3.9}$$

где норма $I(G_2)$ является нормой оператора, действующего от переменных, внутренних для G, но внешних для G_2, к переменным, внешним как для G, так и для G_2.

Как частный случай (5.3.9) мы допустим, что G_1 является W-вершиной в W-поддиаграмме, а G_2 — дополнительная поддиаграмма к исключительным P-вершинам. По построению каждая P-вершина в G_2 связывается с W-поддиаграммой G_1 и имеет хвосты, внешние к G. Тогда операторная норма $I(G_2)$ ограничена в силу (a) и (b) предложения 5.3.3. Оценивая $\|I(G_1)\|_{H.\,S.}$ с помощью предложения 5.3.5, получим

$$\|\bar{I}(g_j)\|_{H.\,S.} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\prod_{W\text{-хвосты}} \log \lambda\right) \left(\prod_{\text{вершины}} \alpha_3 |\Delta|^{\varepsilon_3}\right) \left(\prod_{W\text{-хвосты}} b^{-3(1+\nu)/2}\right). \tag{5.3.10}$$

Напомним, что после первой виковской конструкции (и поэтому для P^e-вершин в W-поддиаграмме) имеем в силу (4.2)

$$\log\lambda \leqslant \log M_{u(\Delta)} \leqslant O\left(\varepsilon^{-1}\right)\log\left(2|\Delta|^{-1}\right) \leqslant |\Delta|^{\varepsilon/2}. \quad (5.3.11)$$

Здесь $u(\Delta)$ относится к моменту введения P^e-вершины в индуктивной конструкции. Последнее неравенство имеет место для достаточно большого M_1, зависящего от ε, ε_3. Мы получаем (5.3.6) с $\varepsilon_2 < \varepsilon_3/2$, и доказательство для W-поддиаграмм закончено.

Рассмотрим теперь две P_D-поддиаграммы. Требуемая оценка для (5.3.3a) следует из предложения 5.3.3 (a). В случае (5.3.3b) операторная норма P_D-поддиаграммы является нормой Гильберта — Шмидта, причем квадрат этой нормы представляется диаграммой

$$\begin{array}{ccc} P^e & \equiv & P^e \\ | & & | \\ P_1 & \equiv & P_1 \end{array} \quad (5.3.12)$$

Разрывая диаграмму (5.3.12) по горизонтальной оси на две поддиаграммы, мы оцениваем (5.3.12) так:

$$\| \text{——} P_1 \equiv P_2 \text{——} \|_{H.S.} \| \text{——} P^e \equiv P^e \text{——} \|_{H.S.} \leqslant$$
$$\leqslant \| \text{——} P_1 \equiv \|_{H.S.} \| \equiv P^e \text{——} \|_{H.S.}, \quad (5.3.13)$$

где дважды использована оценка (5.3.1). Применим теперь предложение 5.3.3 (a). Если P^e является P_r-вершиной с $r > 1$, то оценим $\log\lambda_e$ посредством (5.3.11). Если P^e является P_1-вершиной, воспользуемся условием (c) § 2, так же как это было сделано при доказательстве оценки (5.3.7), и докажем, что $\log\lambda_e \leqslant O(1)\, d\log\lambda$, где d — длина линии P_D-поддиаграммы, соединяющей P_1 и P^e. В обоих случаях получаем (5.3.5).

Рассмотрим теперь P_C-поддиаграммы; они имеют меньше 53 вершин. Ниже мы получаем множитель сходимости $\lambda^{-\varepsilon_3}$ от главной P-вершины (обозначаемой p) и $O(1)|\Delta|^{\varepsilon_3}$ от каждой вершины, локализованной в Δ. Кроме того, некоторые не главные вершины дают ультрафиолетовую расходимость порядка $O(\log\bar{\lambda}_j)$, где $\bar{\lambda}_j$ — верхнее обрезание P- или C-вершины, занумерованной индексом j. Для P_r- или C_r-вершины, $r > 1$, имеем, как и в (5.3.11),

$$\log\bar{\lambda} \leqslant \log M^j{}_{u(\Delta)} \leqslant |\Delta|^{\varepsilon_3/2} \quad (5.3.14)$$

для достаточно больших M_1. Для $P_1(\Delta)$- или $C_1(\Delta)$-вершины по условию (c) § 2 имеем

$$\log \bar{\lambda}_j \leqslant O(1) \log (1 + \operatorname{dist}(\Delta, \Delta_l)) \log \lambda,$$

где Δ_l — куб локализации для p. Тогда ввиду (2.11) и определения (1.2.11)

$$\log \bar{\lambda}_j \leqslant \left(\prod O(1)\, d\right) \log \lambda, \tag{5.3.15}$$

где произведение берется по безразмерным расстояниям d для последовательности линий, соединяющей p с вершиной, занумерованной индексом j. Так как в P_C-поддиаграмме имеется не более 52 таких вершин, логарифмически расходящиеся оценки могут быть поглощены множителем d^{n_2}, приходящимся на одну линию, $O(1)$, приходящимся на вершину, и $\lambda^{\varepsilon_0/2}$ — на вершину p, причем множитель сходимости $\lambda^{-\varepsilon_0/2}$ мы оставляем для p.

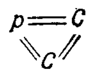
Помимо главной вершины p, наша P_C-поддиаграмма состоит из множества C-вершин, с которыми p связана (внутренние C-вершины), множества C-вершин, с которыми связаны внутренние C-вершины (внешние C-вершины), и из исключительных P-вершин, связанных с внутренними и с внешними C-вершинами. Выберем содержащуюся в g_j поддиаграмму $C(g_j)$, называемую *сердцевиной*. Если p связана два или три раза с единственной C-вершиной, то сердцевина состоит из p и этой C-вершины; в противном случае она состоит из p и двух внутренних C-вершин. (Так как g_j является P_C-поддиаграммой, то p имеет не более двух внешних хвостов и по меньшей мере два связывания.) Каждая C-вершина есть либо φ^4-вершина, либо M-вершина (вершина перенормировки массы из V_C). Мы стараемся брать в качестве C-вершин сердцевины φ^4-вершины до тех пор, пока это возможно. Среди всех сердцевин с равным числом вершин и φ^4-вершин выберем сердцевину с максимальным числом внутренних линий. Цель этих ограничений — уменьшить число подлежащих рассмотрению случаев при оценке $I(g_j)$. Заметим, что вершина p типа M не встречается одна, а является частью сокращенной массовой диаграммы.

Оценим $\| I(g_j) \|_{H.S.}$ для P_C-поддиаграммы. Применим сначала (3.5.9) для того, чтобы удалить «внешние слои» g_j, сохраняя сердцевину. Возьмем $C(g_j) < G_1$ и устраним G_2, разрешая логарифмически расходящиеся оценки нормы $\| I(G_2) \|$. Устраним сначала одну за другой P^e-вершины, а также не принадлежащие сердцевине C-вершины с внешними хвостами, оценивая их с помощью предложения 5.3.3 (a), (b) или предложения 5.3.4. Затем устраним пару $P^e - C$ или $C - C$, не являющуюся частью сердцевины. Если единственная φ^4-вершина связана с этой парой 4 раза, то включим эту вершину вместе с парой в G_2. Оценим норму Гильберта — Шмидта $I(G_2)$, используя предложение 5.3.3 (a), (c) или предложение 5.3.4, а также, возможно, (5.3.1). Это даст сходящуюся или логарифмически расходящуюся оценку. Устраним далее отдельные P^e- и C-вершины, не принадлежащие сердцевине, а также пары $P^e - C$ или $C - C$, не принадлежащие сердцевине, до тех пор, пока это возможно; согласно конструкции § 2 и определению сердцевины, ни одна P^e-вершина не связана исключительно с сердцевиной. Поэтому все P^e-вершины окажутся устраненными, а C-вершины, не принадлежащие сердцевине, связаны только с ней. В заключение устраним все C-вершины типа M, не принадлежащие сердцевине, с ядром Гильберта — Шмидта, используя предложение 5.3.4.

Существует только два возможных случая двухвершиинной сердцевины:

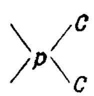
$$= p = C, \qquad — p \equiv C —, \tag{5.3.16}$$

так как вакуумная диаграмма третьего порядка



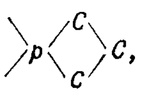
сокращается в точности и затем не появляется. Норма Гильберта — Шмидта для этих случаев оценивается с помощью предложения 5.3.3 (c) или 5.3.4.

Для трехвершинной сердцевины $C(g_l)$ должна иметь вид

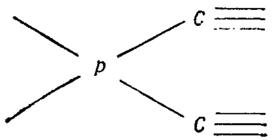


(5.3.17)

с возможными дополнительными связываниями между двумя C-вершинами. В случае когда обе C-вершины имеют тип φ^4, другая C-вершина типа φ^4 может связываться 4 раза с сердцевиной, давая диаграмму



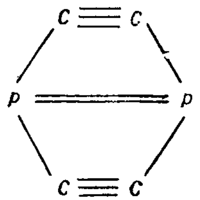
где опущены дополнительные внутренние линии. Используя предложение 5.3.3 (b), устраним p-вершину с ядром, имеющим конечную операторную норму, за исключением случая



(5.3.18)

который рассматривается ниже. Оставшаяся диаграмма состоит только из двух или трех C-вершин и является связной. Устраняя одну отдельную C-вершину с внешним хвостом от $3C$-диаграммы, мы сводим все к паре $C—C$ и получаем логарифмически расходящуюся оценку с помощью предложения 5.3.3 (a), (b).

Квадрат нормы Гильберта — Шмидта диаграммы (5.3.18) оценивается так:



$$\leqslant \| = p = p = \|_{H.S.} \; \| - c \equiv c - \|^2_{H.S.}$$

Требуемая оценка следует теперь из предложения 5.3.3 (a), (c) и из (5.3.1). Это завершает наш анализ P_C-поддиаграмм и доказывает (5.3.4).

Остались только P_r-поддиаграммы, $r > 1$. Мы поступаем с ними так же, как с P_C- или P_D-поддиаграммами, но не используем (5.3.15) для оценки логарифмических расходимостей. Так как P_r-поддиаграммы содержат $P_{r'}$- или $C_{r'}$-вершины, $r' \geqslant r$, то мы используем везде (5.3.14). Это дает оценку (5.3.6) и завершает доказательство леммы 5.3.1.

6. ОЦЕНКИ МАЛЫХ ДИАГРАММ

6.1. Оценки сверток. В этом параграфе мы докажем основные оценки для малых диаграмм. Начнем с элементарных оценок сверток, полезных также в более общих ситуациях. В п. 6.2 мы оценим норму Гильберта—Шмидта отдельной W-вершины, а в заключительном пункте проведем остальные оценки.

Предложение 6.1.1. *Пусть* $p \in \mathbb{R}^n$, $\delta + \lambda > n$,

$$\nu = \min\{\delta, \lambda, \delta + \lambda - n\}, \quad \mu(p) = (p^2 + 1)^{1/2}.$$

Тогда

$$\mu^{-\delta} * \mu^{-\lambda} \leqslant O(1) \begin{cases} \mu^{-\nu}, & \text{если} \quad \max\{\delta, \lambda\} \neq n, \\ \mu^{-\nu} \log \mu, & \text{если} \quad \max\{\delta, \lambda\} = n. \end{cases} \tag{6.1.1}$$

Предложение 6.1.2. *Пусть* $p \in \mathbb{R}^1$, $0 \leqslant \delta \neq 1$, $0 \leqslant \lambda \neq 1$, $\delta + \lambda > 1$, $\nu = \min\{\delta, \lambda, \delta + \lambda - 1\}$, $0 < a \leqslant 1$ *и* $\mu_a(p) = \mu(ap)$. *Тогда*

$$\mu_a^{-\delta} * \mu^{-\lambda} \leqslant \begin{cases} O(a^{-\delta})\, \mu^{-\nu}, & \text{если} \quad \delta < 1, \\ O(a^{-1})\, \mu^{-\nu}, & \text{если} \quad \lambda < 1 < \delta, \\ O(a^{-\nu})\, \mu^{-\nu}, & \text{если} \quad 1 < \lambda,\ 1 < \delta. \end{cases}$$

Из предложения 6.1.2 с помощью преобразования подобия получается

Следствие 6.1.3. *Пусть* $p \in \mathbb{R}^1$, $0 < a \leqslant b$, $0 \leqslant \delta \neq 1$, $0 \leqslant \lambda \neq 1$, $\delta + \lambda > 1$, $\nu = \min\{\delta, \lambda, \delta + \lambda - 1\}$.

(a) *Если* $\delta < 1$, *то* $a^\delta b^{1-\delta} \mu_a^{-\delta} * \mu_b^{-\lambda} \leqslant O(1)\, \mu_b^{-\nu}$.

(b) *Если* $\lambda < 1 < \delta$, *то* $a \mu_a^{-\delta} * \mu_b^{-\lambda} \leqslant O(1)\, \mu_b^{-\lambda}$.

(c) *Если* $1 < \lambda$, $1 < \delta$, $\nu = \min\{\delta, \lambda\}$, *то*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\nu b \mu_a^{-\delta} * \mu_b^{-\lambda} \leqslant O(1)\, \mu_b^{-\nu}.$$

Доказательство предложения 6.1.1. Достаточно ограничиться случаем $0 < \delta \leqslant \lambda$, так как при $\delta < 0$ предложение следует из того, что $\nu = \delta$ и

$$\mu(p - q)^{-\delta} \leqslant \mu(p)^{-\delta} \mu(q)^{-\delta}.$$

Рассмотрим три области интегрирования

$$\text{I:} \quad |q| \leqslant \frac{1}{2}|p|; \qquad \text{II:} \quad \frac{1}{2}|p| \leqslant |q| \leqslant 2|p|;$$

$$\text{III:} \quad 2|p| \leqslant |q|.$$

В области I $\mu(p - q) \geqslant O(1)\, \mu(p)$, так что

$$\int_{\text{I}} \mu(p-q)^{-\delta} \mu(q)^{-\lambda}\, dq \leqslant O\left(\mu(p)^{-\delta}\right) \int_{\text{I}} \mu(q)^{-\lambda}\, dq \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} O(\mu^{-\delta}), & \lambda > n, \\ O(\mu^{-\delta} \log \mu), & \lambda = n, \\ O(\mu^{-\delta + n - \lambda}), & \lambda < n. \end{cases}$$

Это и есть требуемые оценки для области I.

В области II $|q-p|\leqslant|q|+|p|\leqslant 3|p|$ и $|p|\leqslant 2|q|$, так что

$$\int_{\mathrm{II}} \mu(p-q)^{-\delta}\mu(q)^{-\lambda}\,dq \leqslant O\left(\mu(p)^{-\lambda}\right)\int_{\mathrm{II}} \mu(p-q)^{-\delta}\,dq \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} O\left(\mu(p)^{-\lambda}\right), & \delta > n, \\ O(\mu^{-\lambda}\log\mu), & \delta = n, \\ O(\mu^{-\lambda+n-\delta}), & \delta < n. \end{cases}$$

Если $\delta = n$ и $\lambda > n$, то $\mu^{-\nu}\log\mu \leqslant O(\mu^{-\nu})$. Если $\delta = n = \lambda = \nu$, то оценка $O(\mu^{-\lambda}\log\mu)$ также имеет требуемый вид.

В области III $|p-q|\geqslant {}^1/_2|q|\geqslant|p|$. Тогда

$$\int_{\mathrm{III}} \mu(p-q)^{-\delta}\mu(q)^{-\lambda}\,dq \leqslant \int_{\mathrm{III}} \mu(q)^{-\lambda-\delta}\,dq \leqslant O(1)\,\mu(p)^{-\lambda-\delta+n},$$

что завершает доказательство предложения 6.1.1.

Заметим, что

$$\mu_a(p)^{-1} \leqslant O(a^{-1})\,\mu(p)^{-1}. \tag{6.1.2}$$

Поэтому случай $\delta < 1$ следует из предложения 6.1.1. Для $1 < \lambda$, δ имеем

$$\mu_a^{-\delta} * \mu^{-\lambda} \leqslant \mu_a^{-\nu} * \mu^{-\lambda} \leqslant O(a^{-\nu})\,\mu_a^{-\nu} * \mu^{-\lambda},$$

так как $\mu^{-\delta}\leqslant\mu^{-\lambda}$. Поэтому этот случай также следует из предложения 6.1.1. Рассмотрим оставшийся случай $\lambda < 1 < \delta$. В области интегрирования I (см. выше)

$$\int_{\mathrm{I}} \mu_a(p-q)^{-\delta}\mu(q)^{-\lambda}\,dq \leqslant O(1)\,\mu_a(p)^{-\delta}\int_{\mathrm{I}} \mu(q)^{-\lambda}\,dq \leqslant$$

$$\leqslant O\left(\mu_a(p)^{-\delta}\mu(p)^{1-\lambda}\right) \leqslant O(a^{-\delta})\,\mu(p)^{-(\delta+\lambda-1)},$$

что является требуемой оценкой в области I.

В области II интеграл оценивается величиной

$$O\left(\mu(p)^{-\lambda}\right)\int_{\mathrm{II}} \mu_a(p-q)^{-\delta}\,dq \leqslant O(a^{-1})\,\mu(p)^{\lambda}$$

при $\delta > 1$, что и требовалось.

В области III имеем

$$\int_{\mathrm{III}} \mu_a(q)^{-\delta}\mu(q)^{-\lambda}\,dq \leqslant O(a^{-1})\,\mu(p)^{-\lambda}\int \mu(q)^{-\delta}\,dq \leqslant O(a^{-1})\,\mu(p)^{-\lambda},$$

что завершает доказательство предложения 6.1.2.

Предложение 6.1.4. *Пусть* $0<\delta$, $0<\lambda$, $\delta+\lambda=n$. *Тогда для* $p\in\mathbb{R}^n$

$$\int\limits_{|q|\leqslant\varkappa}\mu(p-q)^{-\delta}\mu(q)^{-\lambda}\,dq\leqslant O(\log\varkappa).$$

Доказательство. В областях I, II изложенное выше доказательство, а также предыдущие оценки дают $O(1)$, а в области III $O(\log\varkappa)$. Введем функции сравнения

$$F(k)=\prod_{l=0}^{2}\mu(k^{(l)})^{-1},$$

$$F_\Delta(k)=\prod_{l=0}^{2}\mu\left(|\Delta|^{1/3}k^{(l)}\right)^{-1},$$

где произведение берется по трем компонентам энергии и импульса в трехмерном пространстве-времени. Заметим, что

$$|\tilde{\chi}_\Delta|\leqslant O(|\Delta|)F_\Delta.$$

Кроме того, F_Δ практически принадлежит L_1 и из предложения 6.1.1 и следствия 6.1.3 вытекает

Предложение 6.1.5. (a) *Для* $\delta+\lambda>1$, $\nu=\min\{\delta,\lambda,\delta+\lambda-1\}$, $\bar\nu=\max\{\delta,\lambda\}$, $\varepsilon>0$

$$|\Delta|F_\Delta^\delta*F_\Delta^\lambda\leqslant\begin{cases}O(1)F_\Delta^\nu, & \text{если}\quad \bar\nu\neq1,\\ O(1)F_\Delta^{\nu-\varepsilon}, & \text{если}\quad \bar\nu=1.\end{cases}$$

(b) *Для* $0\leqslant\delta\neq1$, $0\leqslant\lambda\neq1$, $\delta+\lambda>1$, $\nu=\min\{\delta,\lambda,\delta+\lambda-1\}$, $|\Delta|\leqslant|\Delta'|$

$$|\Delta|^\delta|\Delta'|^{1-\delta}F_\Delta^\delta*F_{\Delta'}^\lambda\leqslant O(1)F_{\Delta'}^\nu,\quad \text{если } \delta<1,$$

$$|\Delta|F_\Delta^\delta*F_{\Delta'}^\lambda\leqslant O(1)F_{\Delta'}^\lambda,\quad \text{если } \lambda<1<\delta,$$

$$|\Delta|^\nu|\Delta'|^{1-\nu}F_\Delta^\delta*F_{\Delta'}^\lambda\leqslant O(1)F_{\Delta'}^\nu,\quad \text{если } 1<\lambda,\ 1<\delta.$$

Последнее неравенство дает также

$$|\Delta|^\nu|\Delta'|F_\Delta^\delta*F_{\Delta'}^\lambda\leqslant O(1)F^\nu,$$

если $1<\lambda$, $1<\delta$. Приведем теперь оценки интеграла от произведения трех функций F. Другие подобные неравенства можно получить с помощью предложения 6.1.5 и неравенств Гёльдера.

Следствие 6.1.6. *Пусть* $0<\varepsilon<1/2$, $0\leqslant\alpha_i<1/4$,

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\quad |\Delta|\leqslant|\Delta'|\leqslant|\Delta''|\leqslant1.$$

Тогда

$$\int F_\Delta(k+p)\,F_{\Delta''}(p)^\alpha\,F_{\Delta'}(k'-p)\,dp$$

ограничен константой $O(1)$, умноженной на любое из следующих трех выражений:

$$|\Delta|^{-3/4-\varepsilon/2}|\Delta'|^{-1/4+\varepsilon/2}F_{\Delta'}(k+k')^{(1+\varepsilon)/2}\,F_{\Delta''}(k)^{\alpha_1}F_{\Delta''}(k')^{\alpha_2},$$

$$|\Delta|^{-3/4-\varepsilon/2}|\Delta'|^{-3/4}F(k+k')^{(1+\varepsilon)/2}\,F_{\Delta''}(k)^{\alpha_1}F_{\Delta''}(k')^{\alpha_2},$$

$$|\Delta|^{-3/4-\varepsilon/2}|\Delta'|^{-3/4}|\Delta''|^{-\alpha}F(k+k')^{(1+\varepsilon)/2}\,F(k)^{\alpha_1}F(k')^{\alpha_2}.$$

Доказательство. С помощью неравенства Шварца и второго и третьего неравенств предложения 6.1.5 (b) получим

$$\begin{aligned}
&\int F_\Delta(k+p)\,F_{\Delta''}(p)^\alpha F_{\Delta'}(k'-p)\,dp\leqslant\\
&\quad\leqslant\left(\int F_\Delta(k+p)^{1+\varepsilon}F_{\Delta'}(k'-p)^{1+\varepsilon}\,dp\right)^{1/2}\times\\
&\quad\times\left(\int F_\Delta(k+p)^{1-\varepsilon}F_{\Delta''}(p)^{2\alpha}F_{\Delta'}(k'-p)^{1-\varepsilon}\,dp\right)^{1/2}\leqslant\\
&\quad\leqslant\left(\int F_\Delta(k+p)^{2(1-\varepsilon)}F_{\Delta''}(p)^{4\alpha_1}\,dp\right)^{1/4}\times\\
&\quad\times\left(\int F_{\Delta'}(k'-p)^{2(1-\varepsilon)}F_{\Delta''}(p)^{4\alpha_2}\,dp\right)^{1/4}\times\\
&\quad\times F_{\Delta'}(k+k')^{(1+\varepsilon)/2}\cdot O\left(|\Delta|^{-(1+\varepsilon)/2}|\Delta'|^{\varepsilon/2}\right)\leqslant\\
&\leqslant O\left(|\Delta|^{-3/4-\varepsilon/2}|\Delta'|^{-1/4+\varepsilon/2}\right)F_{\Delta'}(k+k')^{(1+\varepsilon)/2}F_{\Delta''}(k)^{\alpha_1}F_{\Delta''}(k')^{\alpha_2}.
\end{aligned}$$

Второе и третье неравенства следуют из первого и из оценки $|\Delta|F_\Delta\leqslant F$, справедливой при $|\Delta|\leqslant 1$.

Следствие 6.1.7. *Если предположить, что* $|\Delta'|=|\Delta''|$, *но* $-1/4+\varepsilon/2<\alpha_2<1/4$, *то справедливы оценки следствия* 6.1.6.

6.2. Оценки для W-вершины. Ядро отдельной вершины имеет вид

$$w(k_1,\ \ldots,\ k_l)=(\mu_1,\ \ldots,\ \mu_l)^{-1}\,v(k_1,\ \ldots,\ k_l), \tag{6.2.1}$$

где v включает в себя различные обрезания и локализационные множители. Для связанных вершин, возникающих из φ^4, $l=4$ и

$$v=(h\chi_\Delta)^{\check{}}\left(\sum_i k_i\right)\eta(k_1,\ \ldots,\ k_l), \tag{6.2.2}$$

где χ_Δ — характеристическая функция пространственно-временной области локализации Δ, а η — импульсное обрезание, являющееся произведением множителей (1.2.4). В случае C-вершины типа перенормировки массы $l=2$ и v включает в себя сдвиг массы

$$v = -{}^1/_2\,\delta m^2 (h\chi_\Delta)^{\sim}(k_1+k_2)\,\eta(k_1, k_2). \tag{6.2.3}$$

P-вершины, возникающие из V_I, характеризуются величинами $l=4$ и $v=h(\chi_\Delta)^{\sim}\,\delta\eta$, где $\delta\eta$ — изменение в ультрафиолетовых обрезаниях. Могут возникнуть также P-вершины типа перенормировки массы, и для них множитель $\delta m^2\eta$ в ядре C-вершины заменяется приращением $\delta(\delta m^2\eta)$.

Для виковых вершин возможно несколько типов ядер, а именно те, которые даются формулами (3.2.17) и (3.2.19). Для них $l=1$, 2, 3 или 4. Для данного l пусть I_1 обозначает множество $\delta\varphi_1$-хвостов, а I_2 — множество φ_2-хвостов, $|I_1|+|I_2|=l$. Представление каждого $\delta\varphi_1$-хвоста в виде $\delta\varphi_1=\varphi_1-\bar\varphi_1$ порождает два члена в ядре v. Таким образом, всего будет $2^{|I_1|}$ членов, причем каждый член определяется подмножеством J_1 множества I_1, соответствующим множеству хвостов, для которых выбрано $\bar\varphi_1$. Импульсы $\bar\varphi_1$-хвостов не входят в сохраняющий импульс множитель $(h\chi_\Delta)^{\sim}$ для данной вершины. Среднее значение низкоимпульсного поля φ_1 по пространственно-временному кубу Δ дает множитель $\chi_\Delta^{\sim}(k)/\chi_\Delta^{\sim}(0)$, входящий в ядро для каждого φ_1-хвоста. Поэтому функция $v(k)$ для W-вершин равна

$$v(k) = c\sum_{J_1\subset I_1}\left\{\prod_{i\in J_1}\frac{\chi_\Delta^{\sim}(k_i)}{\chi_\Delta^{\sim}(0)}\right\}(h\chi_\Delta)^{\sim}\left(\sum_{i\notin J_1}k_i\right)\eta(k), \tag{6.2.4}$$

где $c=c(l,|I_1|)$ — константы, возникающие в (3.2.19), причем в силу (3.2.20)

$$|c|\leqslant O\left(|\Delta|^{-1+l/4}\right). \tag{6.2.5}$$

Для $\lambda_i\in[0,1]$ положим

$$v_\lambda(k) = c\,(h\chi_\Delta)^{\sim}\left(\sum_{i\in I_1}\lambda_i k_i+\sum_{i\in I_2}k_i\right)\eta(k)\prod_{i\in I_1}\frac{\chi_\Delta^{\sim}((1-\lambda_i)k_i)}{\chi_\Delta^{\sim}(0)}. \tag{6.2.6}$$

Тогда (6.2.4) можно переписать в виде суммы $2^{|I_1|}$ выражений для $\lambda_i=0$ или $\lambda_i=1$:

$$v(k) = v_\lambda(k)\Big|_0^1\Big|_0^1\ldots\Big|_0^1. \tag{6.2.7}$$

Доказательство предложения 5.3.5. Оценим ядро Гильберта — Шмидта $w = w(l, |I_1|)$ для W-вершины. Для $\varepsilon > 0$ получим

$$\|w\|^2_{H.\,S.} \leqslant O\left(|\Delta|^{1/2-\varepsilon}\right) \prod_j b_j^{-3(1+\nu)}. \qquad (6.2.8)$$

Заметим, что для φ_2-хвостов локализационное отношение b_i равно 1.

Каждая импульсная переменная изменяется либо в интервале $|k^{(l)}| \in [M_i, M_{i+1}]$, где $M_i = M_{i+1}^{1/(1+\nu)}$, либо в интервале $|k^{(l)}| \in [0, M_1]$. Если $b > 1$, то $b = M_i^{-1} |\Delta|^{-1/3}$ и

$$M_{i+1} \leqslant \left(b^{-(1+\nu)} |\Delta|^{-1/3}\right) \Delta^{-\nu/3}. \qquad (6.2.9)$$

Для проверки (6.2.8) применим ограниченное число раз оценку (6.2.9). Удобно при каждом применении (6.2.9) опускать множитель $|\Delta|^{-\nu/3}$ и включить его в $|\Delta|^{-\varepsilon}$ из (6.2.8). Мы должны поэтому выбрать ν достаточно малым. Пусть $M(j)$ — верхняя точка импульсного интервала для j-й импульсной переменной (хвоста) k_j.

Разобьем множество I_1-хвостов на два непересекающихся множества

$$I_1 = I_1' \cup I_1''. \qquad (6.2.10)$$

Здесь I_1' состоит из тех хвостов, для которых $b_j > 1$ (т. е. из низкоимпульсных хвостов, удовлетворяющих неравенству $M(j)^{1/(1+\nu)} < |\Delta|^{-1/3}$), а I_1'' состоит из тех $\delta\varphi_1$-хвостов, для которых $b_j = 1$ (высокоимпульсные хвосты, удовлетворяющие неравенствам $|\Delta|^{-1/3} \leqslant \mu_j \leqslant |\Delta|^{-1/2}$). Здесь и выше мы опускаем множители $|\Delta|^{-\nu/3}$, заменяя (6.2.9) оценкой

$$M(j) \leqslant b_j^{-(1+\nu)} |\Delta|^{-1/3}, \quad j \in I_1'; \qquad b_j = 1, \quad j \in I_1''. \qquad (6.2.11)$$

Низкоимпульсные сокращения, неявно содержащиеся в (6.2.7), проявятся, если записать $v(k)$ в виде интеграла от производных $v_\lambda(k)$:

$$v(k) = \int_0^1 d\lambda_1 \ldots \int_0^1 d\lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial \lambda} \ldots \frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha} v_\lambda(k) \Big|_0^1 \ldots \Big|_0^1, \qquad (6.2.12)$$

где интегрирование распространено на $\{\lambda_j\colon j \in I_1'\}$, а вычисление — на $\{\lambda_j\colon j \in I_1''\}$. Заметим, что

$$\left|D^n (h\chi_\Delta)^\sim\right| \leqslant O\left(|\Delta|^{1+n/3}\right) F_\Delta(k), \qquad (6.2.13)$$

$$\left|D^n (h\chi_\Delta)^\sim (k)/\chi_\Delta^\sim(0)\right| \leqslant O\left(|\Delta|^{n/3}\right) F_\Delta(k). \qquad (6.2.14)$$

Положим
$$F_\lambda(k)=\left[\prod_{i\in I_1''\sim J_1''} F_\Delta(k_i)\right]F_\Delta(\xi+P), \tag{6.2.15}$$

где $J_1''\subset I_1''$ — подмножество индексов из (6.2.12), для которых λ_i, $i\in I_1''$, вычисляется при $\lambda_i=1$, и
$$\xi=\sum_{i\in I_1'}\lambda_i k_i,\quad P=\sum_{i\in I_1''\cup I_2} k_i.$$

На носителе w имеем $|\xi|\leqslant O\left(|\Delta|^{-1/3}\right)$. Импульс P приближенно сохраняется. С помощью (6.2.5) — (6.2.6) и (6.2.12) — (6.2.14) получаем, что
$$|v(k)|\leqslant\sum_{J_1''} O\left(|\Delta|^{(l/4)+(|I_1'|/3)}\right)\left(\prod_{i\in I_1'}\mu_i\right)\int_0^1 d\lambda_1\ldots\int_0^1 d\lambda_a F_\lambda(k). \tag{6.2.16}$$

Пусть $w\left(l,|I|;I_1'',J_1''\right)$ обозначает ядро для данного выбора J_1''. Опуская l, $|I_1|$ и I_1'', имеем
$$w=\sum_{J_1''}w(J_1''),\quad \|w\|_{H.S.}\leqslant\sum_{I_1'',J_1''}\|w(J_1'')\|_{H.S.}.$$

Опуская обрезания $\eta_{\alpha,\beta}(k)$, имеем
$$\|w(J_1'')\|^2_{H.S.}\leqslant O\left(|\Delta|^{(l/2)+(2|I_1'|/3)}\right)\sup_\lambda\int dk\frac{F_\lambda(k)^2}{D},$$

где $dk=dk_1\ldots dk_l$ и $D=\prod_{i\in I_1''\cup I_2}\mu_i^2$. Интегрирование по I_1'-импульсам дает множитель
$$\int_{|k_i|\leqslant M(i)} d^3k_i\leqslant O\left(M(i)^3\right)\leqslant O\left(b_i^{-3(1+\nu)}|\Delta|^{-1}\right)$$

для каждого I_1'-хвоста, где последнее неравенство следует из (6.2.11). Интегрирование по импульсам в $I_1''\sim J_1''$ дает для каждого хвоста множитель
$$\int_{|\Delta|^{-1/3}\leqslant|k_i|} F_\Delta(k_i)^2\mu_i^{-2}dk_i\leqslant O\left(|\Delta|^{2/3}\right)\int F_\Delta(k_i)^2dk_i\leqslant$$
$$\leqslant O\left(b_i^{-3/(1+\nu)}|\Delta|^{-1/3}\right).$$

Последнее неравенство получается применением предложения 6.1.5 (b), нижнего обрезания $|\Delta|^{-1/3}$ для I_1''-хвостов и того факта, что $b_i = 1$ для $i \in I_1''$. Ниже будет показано, что при $\varepsilon > 0$ интегрирование по оставшимся импульсам в D дает

$$\int\limits_{I_1'' \cup I_2} dk \sup_{\xi} \left\{ \frac{F_\Delta(\xi + P)^2}{\prod\limits_{i \in I_1'' \cup I_2} \mu_i^2} \right\} \leqslant O\left(|\Delta|^{(1/2)\{1 - |I_2| - |I_1''|\} - \varepsilon} \right). \tag{6.2.17}$$

Поэтому, используя $l = |I_1'| + |I_1''| + |I_2|$, получим, что

$$\|w(J_1'')\|^2_{H.\,S.} \leqslant O\left(|\Delta|^{(1/2) + (1/6)(|I_1''|\ |I_1''|) - \varepsilon} \right) \Big(\prod_{i \in I_1} b_i^{-3(1+\nu)} \Big) \leqslant$$
$$\leqslant O\left(|\Delta|^{(1/2) - \varepsilon} \right) \Big(\prod_i b_i^{-3(1+\nu)} \Big). \tag{6.2.18}$$

Для доказательства (6.2.17) заметим, что для всех W-вершин $|I_2| = 1$, 2 или 3, см. (3.2.17). Проверим (6.2.17) для различных значений $|J_1''| + |I_2|$. Если $|J_1''| + |I_2| = 1$, то, используя нижнее обрезание $|\Delta|^{-1/2}$ для I_2-хвоста, получим, что

$$\int\limits_{|P| > |\Delta|^{-1/2}} dP \sup_{\xi} \frac{F_\Delta(\xi + P)^2}{\mu(P)^2} \leqslant O(|\Delta|) \int dP \sup F_\Delta (\xi + P)^2 \leqslant O(1),$$

так как $|\xi| \leqslant O\left(|\Delta|^{-1/3}\right) \leqslant O\left(|P|^{2/3}\right)$ в области интегрирования. В случае $|J_1''| + |I_2| = 2$ с помощью предложения 6.1.5 (b) получаем аналогично оценку $O\left(|\Delta|^{-1/2}\right)$. Если $|J_1''| + |I_2| = 3$, то предложение 6.1.4 дает

$$\int dP \sup_{\xi} F_\Delta (\xi + P)^2 \int \frac{dk_2\, dk_3}{\mu(P - k_2 - k_3)^2 \mu(k_2)^2 \mu(k_3)^2} \leqslant$$
$$\leqslant O\left(|\Delta|^{-1} \log M_{u(\Delta)} \right).$$

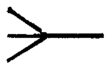
Так же как и в оценках § 5, используем $\log M_{u(\Delta)} \leqslant O\left(\log |\Delta|^{-1}\right)$, поскольку W-вершины встречаются в § 3 в малых кубах. Это дает требуемую оценку для случая $|J_1''| + |I_2| = 3$. Если $|J_1''| + |I_2| = 4$, то поступаем подобным же образом с переменными P, k_1, k_2, k_3. Здесь верхнее обрезание $M(1)$ по k_1 является наименьшим верхним обрезанием и, так как $|I_2| \neq 4$, этот импульс соответствует J_1''-хвосту с верхним обрезанием $|\Delta|^{-1/2}$. Интегрирование по k_2 и k_3 дает $O(\log M_{u(\Delta)})$, как и выше. Интеграл по k_1 оценивается величиной

$$\int\limits_{|k_1| < |\Delta|^{-1/2}} \mu(k_1)^{-2} dk_1 \leqslant O\left(|\Delta|^{-1/2} \right),$$

так что в случае $|J_1''|+|I_2|=4$ интеграл (6.2.17) мажорируется величиной $O\left(|\Delta|^{-3/2}\log|\Delta|^{-1}\right)$. Это завершает доказательство (6.2.17) и предложения 5.3.5.

6.3. Оценки других малых поддиаграмм. Следующие доказательства предложения 5.3.3 и предложения 5.3.4 в действительности дают более сильные оценки, чем сформулированные в § 5.

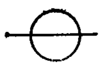
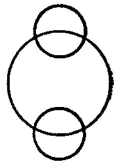
Доказательство предложения 5.3.3. (а) Положим

$A =$  $\mu^{1/4-\varepsilon}$.

Тогда имеет место оценка

$$\|A\|_{3,1}=\|A^*A\|_{1,1}^{1/2}\leqslant\|A^*A\|_{H.S.}^{1/2},$$

где

$A^*A =$  $\|A^*A\|^2_{H.S.} =$ 

Ядро A^*A ограничено величиной

$$v(k_1, k_5)=$$
$$=|\Delta|^2\int dk_2\,dk_3\,dk_4\,\frac{F_\Delta(k_1+k_2+k_3+k_4)\,F_\Delta(-k_2-k_3-k_4+k_5)}{(\mu_1\mu_5)^{(3/4)+\varepsilon}\,\mu_2^2\mu_3^2\mu_4^2}.$$

Положим $P=k_2+k_3+k_4$, где k_2 и k_3 — переменные интегрирования, причем верхнее импульсное обрезание $M(2)$ для k_2 не превосходит обрезаний для k_3 и k_4. Тогда, как следует из предложений 6.1.1 и 6.1.4,

$$\int dk_2\,dk_3\,\frac{1}{\mu_2^2\mu_3^2\mu\,(P-k_2-k_5)^2}\leqslant O(\log M(2)). \tag{6.3.1}$$

С помощью предложения 6.1.5 для $\delta>0$ получаем, что

$$v(k_1, k_5)\leqslant O(\log M(2))\,|\Delta|\,F_\Delta\,(k_1+k_2)^{1-\delta}\,(\mu_1\mu_5)^{-(3/4+\varepsilon)}.$$

Переходя к L_2-нормам, находим

$$\|v\|_2^2\leqslant O(\log^2 M(2))\,|\Delta|^2\int\frac{F_\Delta(k_1+k_5)^{2-2\delta}}{(\mu_1\mu_5)^{(3+\varepsilon)/2}}\,dk_1\,dk_5\leqslant$$
$$\leqslant O(\log^2 M(2)\,|\Delta|),$$

что доказывает неравенство

$$\| w\mu^{1/4-\varepsilon} \|_{3,1} \leqslant O\left(|\Delta|^{1/4} \log^{1/2} M(2) \right).$$

(b — c) Оценим сначала ядро $v(k_1, k_2, k_3, k_4)$ диаграммы

в которой каждая внешняя линия умножена на μ^ν, а каждая внутренняя линия — на $\mu^{2\lambda}$. Положим $K_1 = k_1 + k_2$, $K_2 = k_3 + k_4$, $P = k_5 + k_6$, и пусть $\nu < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} |v(k_1, k_2, k_3, k_4)| \leqslant\ & O(|\Delta|^2)(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)^{-1+\nu} \times \\ & \times \int dk_5\, dk_6 \frac{F_\Delta(K_1+P)\, F_\Delta(-P+K_2)}{(\mu_5\mu_6)^{2-2\lambda}} \leqslant \\ \leqslant\ & O(|\Delta|^2)(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)^{-1+\nu} \times \\ & \times \int dP \frac{F_\Delta(K_1+P)\, F_\Delta(-P+K_2)}{\mu(P)^{1-4\lambda}}. \end{aligned}$$

Согласно следствию 6.6, при $\lambda < 1/4$ последнее выражение не превосходит

$$\begin{aligned} & O(|\Delta|)(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)^{-1+\nu} F_\Delta(K_1+K_2)^{(1+\delta)/2} \times \\ & \times F(K_1)^{(1-4\lambda)/6} F(K_2)^{(1-4\lambda)/6}. \end{aligned}$$

При этом L_2-норма v оценивается так:

$$\begin{aligned} \|v\|_2^2 \leqslant\ & O(|\Delta|^2) \int dK_1\, dK_2\, dk_1\, dk_4 \times \\ & \times \frac{F_\Delta(K_1+K_2)^{1+\delta} F(K_1)^{(1-4\lambda)/3} F(K_2)^{(1-4\lambda)/3}}{[\mu_1\mu_4\mu(K_1-k_1)\,\mu(K_2-k_4)]^{2(1-\nu)}} \leqslant \\ \leqslant\ & O(|\Delta|^2) \int dK_1\, dK_2 \frac{F_\Delta(K_1-K_2)^{1-\delta} F(K_1)^{(1-4\lambda)/3} F(K_2)^{(1-4\lambda)/3}}{[\mu(K_1)\,\mu(K_2)]^{1-4\nu}} \leqslant \\ \leqslant\ & O(|\Delta|^2) \int dK_1\, dK_2 F_\Delta(K_1+K_2)^{1-\delta} [F(K_1)F(K_2)]^{2/3-4/3(\lambda+\nu)} \leqslant \\ \leqslant\ & O(|\Delta|^2) \int dK_1\, dK_2 F_\Delta(K_1+K_2)^{1+\delta} F(K_1)^{4/3-8/3(\nu+\lambda)} \leqslant O(|\Delta|) \end{aligned}$$

в предположении, что $(\lambda+\nu)$ достаточно мало, а именно $4/3 - 8/3(\lambda+\nu) > 1$, или

$$(\lambda+\nu) < 1/8.$$

7 Зак, 975

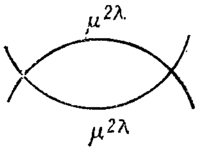
В частности, если $\lambda=\nu$ и если w — ядро P- или C-вершины, то, используя соотношения

$$\|A\|_{2,2}=\|A^*A\|_{2,2}^{1/2}\leqslant\|A^*A\|_{H.S.}^{1/2},$$

получаем, что

$$\left\|w\prod_{i=1}^{4}\mu_i^{1/16-\varepsilon}\right\|_{2,2}\leqslant O\left(|\Delta|^{1/4}\right).$$

Если $\lambda=\nu$, а w — ядро диаграммы



с P- или C-вершинами, то

$$\left\|w\left(\prod_{i=1}^{4}\mu_i^{1/16-\varepsilon}\right)\right\|_{H.S.}\leqslant O\left(|\Delta|^{1/2}\right).$$

Доказательство предложения 5.3.4. Заметим, что в обозначениях § 2 ядро диаграммы перенормировки массы равно

$$w_{\Delta,\Delta'}(k_1,k_5)=\text{const}\int(\alpha\beta\gamma-\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma)\,dk_2\,dk_3\,dk_4. \tag{6.3.2}$$

Для $\Delta=\Delta'$ это в точности совпадает с (2.10), а для $\Delta\neq\Delta'$ вклад от $\int\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma\,dk$ равен нулю, что сводит (6.3.2) к (2.9). Это следует из равенства $\chi_\Delta\chi_{\Delta'}=0$, откуда

$$\int\bar\beta_{\Delta,\Delta'}\,dP=\text{const}\left(h^2\chi_\Delta\chi_{\Delta'}\right)^{\sim}(k_5-k_1)=0.$$

Заметим, что $P=k_2+k_3+k_4$, $k_i=p_i+P$,

$$|\mu(k_i)^{-2}-\mu(p_i)^{-2}|\leqslant O(1)\,\mu(P)^{3\varepsilon}\left\{\mu(k_i)^{-2-\varepsilon}+\mu(p_i)^{-2-\varepsilon}\right\},$$

откуда при $0\leqslant\varepsilon<1/3$

$$\begin{aligned}|\gamma-\bar\gamma|\leqslant O(1)\,(\mu_1\mu_5)^{-1}\,\mu(P)^{3\varepsilon}\{(\mu(k_2)^{-2-\varepsilon}&+\\ +\mu(p_2)^{-2-\varepsilon})\,\mu(k_3)^{-2}\,\mu(k_4)^{-2}&+\\ +\mu(p_2)^{-2}\left(\mu(k_3)^{-2-\varepsilon}+\mu(p_3)^{-2-\varepsilon}\right)\mu(k_4)^{-2}&+\\ +\mu(p_2)^{-2}\,\mu(p_3)^{-2}\left(\mu(k_3)^{-2-\varepsilon}+\mu(p_3)^{-2-\varepsilon}\right)\}&.\end{aligned}$$

Кроме того, нам нужна оценка разности $(\alpha-\bar\alpha)$. P-вершина в массовой диаграмме возникает от понижения верхнего обрезания в Δ. Пусть λ — соответствующее максимальное нижнее обрезание в P-вершине из-за изменения в обрезаниях $\delta\eta = d\eta_s/ds$. Для $\delta \geqslant 0$ на носителе обрезаний

$$|\delta\eta - \delta\bar{\eta}| \leqslant O\left(|P|^{\delta} \lambda^{-\delta}\right).$$

Так как

$$(\alpha - \bar{\alpha}) = \frac{d}{ds} \prod_{\text{хвосты}} \left(\eta_s \eta_{s'} - \bar{\eta}_s \bar{\eta}_{s'}\right)\Big|_{s=s'},$$

то

$$|\alpha - \bar{\alpha}| \leqslant O\left(P^{\delta} \lambda^{-\delta}\right). \tag{6.3.3}$$

Так как $\lambda \geqslant M(2)^{1/(1+\nu)} \geqslant M(2)^{1/2}$, то

$$\begin{aligned} |\alpha - \bar{\alpha}| &\leqslant O\left(|P|^{\delta} \lambda^{-\delta/2} M(2)^{-\delta/4}\right) \leqslant \\ &\leqslant O\left(|\Delta'|^{-\delta/3} \mu\left(|\Delta|^{1/3} P\right)^{\delta} \lambda^{-\delta/2} M(2)^{-\delta/4}\right). \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

Оценим теперь ядро Гильберта — Шмидта (6.3.2). Пусть $|\Delta| \leqslant |\Delta'|$. Хотя наше ядро w антисимметрично относительно Δ и Δ', наши оценки симметричны. Поэтому

$$\begin{aligned} |w_{\Delta, \Delta'}(k_1, k_5)| \leqslant O(1) \int |\alpha - \bar{\alpha}| \bar{\beta} \bar{\gamma}\, dk_2\, dk_3\, dk_4 + \\ + O(1) \int \bar{\beta} |\gamma - \bar{\gamma}|\, dk_2\, dk_3\, dk_4 \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

ввиду $|\delta\eta| \leqslant O(1)$.

Используя (6.3.4), оценим первый член величиной

$$O(|\Delta||\Delta'|) \lambda^{-\delta/2} M(2)^{-\delta/4} \int dP\, dp_2\, dp_3 \times \\ \times \frac{F_{\Delta}(k_1 + P) F_{\Delta'}(P)^{-\delta} |\Delta'|^{-\delta/3} F_{\Delta'}(-P + k_5)}{\mu_1 \mu_5 \mu(p_2)^2 \mu(p_3)^2 \mu(p_4)^2}.$$

Используя $p_4 = -(p_2 + p_3 + 2P)$ и (6.3.1), получим оценку последнего выражения

$$\begin{aligned} O&\left(|\Delta||\Delta'|^{1-\delta/3}\right) \lambda^{-\delta/2} M(2)^{-\delta/4} \log M(2) (\mu_1 \mu_5)^{-1} \times \\ &\times \int dP F_{\Delta}(k_1 + P) F_{\Delta'}(P)^{-\delta} F_{\Delta'}(-P + k_5) \leqslant \\ &\leqslant O\left(|\Delta|^{1/4 - \varepsilon/2} |\Delta'|^{1/4 - \delta/3}\right) \lambda^{-\delta/2} F(k_1 + k_5)^{(1+\varepsilon)/2} \times \\ &\times F(k_5)^{-\delta} (\mu_1 \mu_5)^{-1}. \end{aligned} \tag{6.3.6}$$

Последнее неравенство получается из следствия 6.1.7 для $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -\delta$. В (6.3.6) мы подавляем логарифмическую расходимость M_l посредством $M_l^{-\delta/4}$, что дает сходящийся множитель $\lambda^{-\delta/2}$.

7*

L_2-норма (6.3.5), умноженная на $(\mu_1\mu_5)^{1/4-\nu}$, оценивается выражением

$$O\left(|\Delta|^{1/4-\varepsilon/2}|\Delta'|^{1/4-\delta/3}\right)\lambda^{-\delta/2}\times$$
$$\times\left[\int F(k_1+k_5)^{1+\varepsilon}(\mu_1\mu_5)^{3/2+6\delta-2\nu}\,dk_1\,dk_5\right]^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant O\left(|\Delta|^{1/4-\varepsilon/2}|\Delta'|^{1/4-\delta/3}\right)\lambda^{-\delta/2}$$

для достаточно малых $\delta(\nu)$.

Используя (6.3.2) — (6.3.3), получим аналогичную оценку для второго члена (6.3.5). Поэтому для данного $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что

$$\left\|(\mu_1\mu_5)^{1/4-\varepsilon}w_{\Delta,\Delta'}\right\|_2\leqslant O\left(|\Delta|^{1/8}|\Delta'|^{1/8}\lambda^{-\delta}\right). \qquad (6.3.7)$$

Доказательство предложения 5.3.6. Пусть сначала $|\Delta|\leqslant\leqslant|\Delta'|$. С помощью неравенства Шварца получаем

$$|P \equiv W|^2\leqslant P\equiv P\ W\equiv W\leqslant$$
$$\leqslant\left(O|\Delta|M(1)M(2)^{3\varepsilon_1}\lambda^{-2\varepsilon_1}|\Delta'|^{1/2-\varepsilon}\right)\prod_i b_i^{-3(1+\nu)},$$

где мы использовали предложения 5.3.3 и 5.3.5. Так как W-вершина имеет по меньшей мере один $\delta\varphi_l$-хвост, причем с верхним обрезанием $O\left(|\Delta'|^{-1/2}\right)$, то $M(1)\leqslant O\left(|\Delta'|^{-1/2}\right)$. Как и в доказательстве предложения 5.3.5, существует такое ε_2, что $M(2)^{3\varepsilon_1}\leqslant O\left(|\Delta'|^{-\varepsilon_2}\right)$. Поэтому для достаточно малого ε_1 и $|\Delta|\leqslant|\Delta'|$ существует такое $\varepsilon_3>0$, что

$$|P\equiv W|^2\leqslant O\left(|\Delta|^{2\varepsilon_3}|\Delta'|^{2\varepsilon_3}\right)\lambda^{-2\varepsilon_1}\prod_i b_i^{-3(1+\nu)}.$$

В случае $|\Delta'|\leqslant|\Delta|$ мы модифицируем приведенное доказательство следующим образом. Ядро P-вершины содержит множитель $(h\chi_\Delta)^\sim(P)$, где P — полный импульс. В оценке нормы Гильберта — Шмидта P-вершины мы используем только $\left[(h\chi_\Delta)^\sim\right]^{(1+\varepsilon_3)/2}$. Поэтому можно без изменения этой оценки включить множитель $\left[(h\chi_\Delta)^\sim(P)\right]^{(1-\varepsilon_3)/2}$ в ядро W-вершины. Если следовать доказательству предложения 5.3.5 с так измененным ядром, это даст оценку

$$\left\|(h\chi_\Delta)^\sim(P)^{(1-2\varepsilon_3)}w_W\right\|^2_{H.S.}\leqslant O\left(|\Delta|^{-1+2\varepsilon_3}|\Delta'|^{3/2-\varepsilon-2\varepsilon_3}\right)\prod_i b_i^{-3(1+\nu)}.$$

Поэтому

$$|P\equiv W|^2\leqslant O\left(|\Delta|^{2\varepsilon_3}|\Delta'|^{3/2-\varepsilon-2\varepsilon_3}M(1)\,M(2)^{3\varepsilon_1}\lambda^{-2\varepsilon_1}\right)\prod_i b_i^{-3(1+\nu)}$$

и для достаточно малых ε, ε_1 и δ, как и выше,

$$|P \equiv W|^2 \leqslant O\left(|\Delta|^{2\varepsilon_3}|\Delta'|^{2\varepsilon_3}\lambda^{-2\varepsilon_1}\right)\prod_i b_i^{-3(1+\nu)}.$$

Предложение 6.3.1. *Приращения* $\delta E_2(\Delta)$ *и* $\delta E_3(\Delta)$ *во втором и третьем контрчленах* δV *из* (3.2.9) *ограничены величиной*

$$O\left(|\Delta|^{1-\delta}M(1)\log M(2)\right) \leqslant O(1).$$

Доказательство. Вакуумная энергия второго порядка $E_2(\Delta)$ является суммой $E_2(\Delta, \Delta')$ по Δ', где $E_2(\Delta, \Delta') = -{}^1/_2\langle V_I(\Delta)V_I(\Delta')\rangle$ и где Δ' пробегает покрытие $\mathcal{D}_e$. Как и в (5.2.1), получаем

$$|E_2(\Delta, \Delta')| \leqslant O(1)\left(\prod_{i=1}^{4} d_i^{-n}\right)I,$$

где

$$\bar{I} = |\Delta||\Delta'|\int \frac{F_\Delta(P)F_{\Delta'}(P)\,dP\,dk_1\,dk_2\,dk_3}{\mu(P-k_1-k_2-k_3)^2\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2}.$$

Согласно (6.3.1) и предложению 6.1.5(b),

$$\bar{I} \leqslant |\Delta||\Delta'|\,O(\log M(2))\int F_\Delta(P)F_{\Delta'}(P)\mu_1^{-2}\,dk_1\,dP \leqslant$$
$$\leqslant O(M(1)\log M(2))|\Delta|^{1-\delta}.$$

В течение виковского разложения (3.2.9) для δV выполнены неравенства $M(1) \leqslant O\left(|\Delta|^{-1/2}\right)$, см. (3.2.1), и $\log M(2) \leqslant |\Delta|^{-\varepsilon}$, см. (5.3.14). Следовательно, $\bar{I} \leqslant O(1)$ и суммирование по d^{-4} дает требуемую оценку $\delta E_2(\Delta)$, см. лемму 4.2(a).

Оценка $\delta E_3(\Delta)$ проводится аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eckmann J.-P., *Commun. math. Phys.*, **25** (1972), 1.
2. Eckmann J.-P., Osterwalder K., *Helv. Phys. Acta*, **44** (1971), 864.
3. Fabrey J., *Commun. math. Phys.*, **19** (1970), 1.
4. Glimm J., *Commun. math. Phys.*, **10** (1968), 1.
5. Glimm J., Jaffe A., *Ann. Math.*, **91** (1970), 362.
6. Glimm J., Jaffe A., *J. Math. Phys.*, **13** (1972), 1568.
7. Glimm J., Jaffe A., Field Theory Models, In: Statistical Mechanics and Quantum Field Theory (Dewitt C. and Stora R., eds.), 1970, Les Houches Lectures, Gordon and Breach, New York, 1971.
8. Glimm J., Jaffe A., Boson Field Models, In: Mathematics of Contemporary Physics (Streater R., ed.), Academic Press, New York, 1972.
9. Hepp K., Théorie de la Renormalization, Springer-Verlag, Berlin, 1969. [Русский перевод: Хепп К., Теория перенормировок, «Наука», М., 1974.]
10. Nelson E., Quantum Fields and Markoff Fields, Proceedings of Summer Institute of Partial Differential Equations, Berkeley, 1971, Amer. Math. Soc., Providence, 1973.
11. Symanzik K., Euclidean Quantum Field Theory, In: Local Quantum Theory (Jost R., ed.), 1968 Varenna Lectures, Academic Press, 1969.

КЛАССИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В РАЗМЕРНОСТЯХ ОДИН И ДВА: ДВУХКОМПОНЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ ЮКАВЫ И КУЛОНА[1])

Ю. Фрёлих

Department of Mathematics, Princeton University,
Princeton, N. J., USA

Резюме. Для двухкомпонентных классических и квантовых систем частиц с зарядом $\pm\varepsilon$, попарно взаимодействующих между собой по закону Юкавы или Кулона, мы оцениваем каноническую и большую каноническую статистические суммы в конечном объеме и доказываем устойчивость и существование термодинамического предела для давления. В кулоновском случае мы предполагаем, что система электрически нейтральна. Для классических двумерных систем существует критическая температура T_c, начиная с которой система испытывает коллапс. Для классической системы Юкавы корреляционные функции существуют при любой активности и общая структура чистых фаз может быть полностью проанализирована.

1. ВВЕДЕНИЕ

а. Постановка задачи; связь с евклидовой теорией поля. В этой работе мы строим термодинамический предел давления для систем классических точечных частиц с зарядом $\pm\varepsilon$ в двумерном пространстве, связанных парным потенциалом Юкавы или Кулона (или потенциалом, который можно «мажорировать» ими). Те же результаты для аналогичных одномерных систем [6] и для соответствующих одномерных и двумерных квантовых систем получаются отсюда как довольно простые следствия, если использовать некоторые оценки и технику работы [19] для изучения квантовых систем.

Двумерные классические системы, которые мы рассматриваем, *не являются* H-устойчивыми [26], *классическая* функция Гамильтона не ограничена снизу, и поэтому не следует удивляться тому, что существует критическая температура T_c, зависящая от силы взаимодействия, т. е. от заряда ε, ниже которой в этих классических системах происходит коллапс. Это связано с отсутствием при температурах ниже T_c достаточно сильного центробежного барьера. Отметим также, что в одномерном и двумерном случаях кулоновский потенциал является чрезвычайно дальнодействующим (он пропорциона-

---

[1]) Jürg Fröhlich, Classical and Quantum Statistical Mechanics in One and Two Dimensions: Two-Component Yukawa — and Coulomb Systems, *Communications in Mathematical Physics*, **47** (1976), 233—268.

лен соответственно r и $\log r$, где r — расстояние между двумя зарядами). Таким образом, он не убывает с расстоянием. Если полный заряд равен 0, то возникает экранирование, и кулоновские силы перестают быть дальнодействующими. Вот почему в этой работе мы рассматриваем только нейтральные кулоновские системы. Результаты о *классической кулоновской системе в конечном объеме* были получены ранее в работе [4]. Оценки из нее существенно используются в этой статье.

Наш подход к решению поставленных проблем состоит в том, что мы рассматриваем систему классических точечных частиц с зарядом $\pm\varepsilon$ в двумерном пространстве, взаимодействующих по закону Юкавы или Кулона, как специальную модель [6, 1] евклидовой теории поля (ЕТП; см. [7, 28], где изложена теория нейтрального скалярного бозонного поля *в двумерном пространстве-времени*). (Настоящая работа в действительности навеяна исследованиями двумерной модели квантового поля.) Такой подход позволяет нам сочетать оценки из статистической механики с оценками из евклидовой теории поля. Например, применением методов ЕТП получается оценка зависимости большой статистической суммы от объема.

Обозначим через s размерность пространства, а через d — размерность пространства-времени. Сокращение КСМ мы используем для «классической статистической механики точечных частиц, связанных парным взаимодействием». Значительное внимание привлекли недавно следующие изоморфизмы (читатель, не интересующийся квантовой теорией поля или не знакомый с нею, может не обращать внимания на то, что ниже написано под литерами C, $\widetilde{C}$, и даже на то, что написано под B, $\widetilde{B}$):

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & \\ \begin{pmatrix}\text{КСМ, потенциал}\\ \text{Кулона, } s=2\end{pmatrix} & \overset{I_1}{\cong} & \begin{pmatrix} \Box\Phi(x, t) = \\ = \dfrac{z}{\sqrt{\beta}\,\varepsilon} : \sin\sqrt{\beta}\,\varepsilon\Phi(x, t):, \\ d=2 \end{pmatrix} & \overset{I_2}{\cong} & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} C \\ \overset{I_2}{\cong} \begin{pmatrix}\text{массивная модель Тирринга}\\ \text{(+ взаимодействие Юкавы),}\\ d=2\end{pmatrix}. \end{array}$$

Здесь $\Box$ — двумерный даламбертиан, Φ — нейтральное скалярное квантовое поле с голой массой 0, z — константа связи, $0<\beta\varepsilon^2<4\pi$, а : : обозначает виково упорядочение. Изоморфизм I_1 отождествляет β с величиной, обратной температуре,

ε с зарядом, z с активностью; на языке КСМ : : соответствует отбрасыванию самодействия частиц. Изоморфизм I_1 позволяет мощную технику ЕТП применить к A, и наоборот.

Массивная модель Тирринга (+ взаимодействие Юкавы) описана в [2], где приведены ссылки и на другие относящиеся к этой модели работы (см. также [18, 20]). Доказательство существования этой модели получено в работах [8, 9]. Это фермионная модель (+ бозоны) с ток-токовым взаимодействием (+ взаимодействие Юкавы). Изоморфизм I_2 был открыт Коулманом [2]. Результаты, доказанные в настоящей работе для A, оказались существенными для доказательства существования полевых теорий, определенных в B и C [8].

КСМ с потенциалом Юкавы изоморфна следующим моделям квантовых полей:

$$\overset{\tilde{A}}{\begin{pmatrix}\text{КСМ, потенциал}\\ \text{Юкавы,}\\ s=2\end{pmatrix}} \overset{\tilde{I}_1}{\cong} \overset{\tilde{B}}{\begin{pmatrix}(\Box + m^2)\,\Phi(x, t) = \\ = \dfrac{z}{\sqrt{\beta}\,\varepsilon} : \sin\sqrt{\beta}\,\varepsilon\Phi(x, t):, \\ d=2\end{pmatrix}} \overset{\tilde{I}_2}{\cong}$$

$$\overset{\tilde{C}}{\overset{\tilde{I}_2}{\cong}\begin{pmatrix}\text{массивная КЭД} + \\ \text{взаимодействие Тирринга,}\\ d=2\end{pmatrix}}.$$

Здесь Φ — нейтральное скалярное квантовое поле с голой массой $m > 0$. Изоморфизм $\tilde{I}_1$ производит те же отождествления между $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, что и изоморфизм I_1 между A и B, если заменить потенциал Кулона потенциалом Юкавы.

Массивная квантовая электродинамика (КЭД) в двумерном пространстве-времени есть чисто фермионная модель квантового поля с одномерным кулоновским потенциалом, описывающим самодействие зарядовой плотности. Взаимодействие Тирринга есть ток-токовое взаимодействие. Конструкцию изоморфизма $\tilde{I}_2$ можно по существу свести к конструкции I_2 (см. [2]), соединенной с механизмом Швингера [27], как это проделано в [9]. Довольно легким и приятным занятием могут быть поиски еще многих изоморфизмов, подобных I_2, $\tilde{I}_2$, в одномерных теоретико-полевых моделях физики твердого тела; см. [18, 20]. В работе [9] мы предлагаем некоторую «машину», порождающую такие изоморфизмы.

Критическая температура T_c, при которой и ниже которой классические системы A и $\tilde{A}$ коллапсируют, задается формулой

$$T_c = \frac{\varepsilon^2}{4\pi k} \quad \text{или} \quad \beta\varepsilon^2 = 4\pi,$$

где k — постоянная Больцмана. Можно интерпретировать этот коллапс как окончательное образование пар противоположно заряженных частиц. После подходящей перенормировки средней удельной энергии частиц система при температуре T_c и ниже совпадает со свободным классическим газом нейтральных частиц (т. е. пар противоположных зарядов) и T_c служит ее критической точкой.

Этой коллапсной катастрофе соответствует тот факт, что при $\beta\varepsilon^2 \geqslant 4\pi$ полевые модели, описанные в B, $\tilde{B}$, C и $\tilde{C}$, уже не существуют, по крайней мере без ультрафиолетовых перенормировок; см. [8, 9].

Классические корреляционные функции для классической системы, определенной в $\tilde{A}$ (и евклидовы функции Грина (функции Швингера) теорий поля, определенных в $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$), могут быть построены для малых значений $|z/m^2|$ или для произвольных *вещественных* z, если $\beta\varepsilon^2 < 16/\pi$. Они аналитичны по z в некоторой окрестности $z = 0$, что доказывает отсутствие фазовых переходов при малой активности. Трансляционно-инвариантные (относительно пространственных сдвигов) *корреляционные функции чистых фаз* являются евклидово-инвариантными и обладают кластерным свойством даже в многофазной области.

b. Физика двумерной кулоновской системы. Статистическая механика двумерной кулоновской системы представляет собой теорию бесконечно длинных параллельных заряженных нитей — или проводящих нитей с током $\pm\varepsilon$[1]) — в термодинамическом равновесии. Такие системы, в разумном приближении, существуют в природе. Например, реальную плазму в сильном магнитном поле в термодинамическом равновесии приближенно можно описать как двумерную нейтральную кулоновскую систему в большом каноническом ансамбле; см. [4]. Мы ожидаем, что в такой системе происходит дебаевское экранирование, так что классические функции Урселла будут, по-видимому, убывать экспоненциально с увеличением расстояния между любой парой их аргументов. На языке теории поля отсюда будет следовать,

[1]) Или, например, вихрей.

что спектр энергии-импульса в теориях поля B, C содержит массовую щель. Классическая нейтральная кулоновская система обладает простым *автомодельным поведением*, которое мы используем для того, чтобы строго вывести явные выражения для давления и для корреляционной длины как функций активности z и получить полное доказательство уравнения состояния

$$p=\frac{\rho}{\beta}\left(1-\frac{\beta\varepsilon^2}{8\pi}\right),$$

найденного ранее в [21] (здесь ρ — плотность). Из наших результатов следует *отсутствие фазовых переходов* в классическом нейтральном кулоновском газе при любой температуре $T>T_c$ и произвольной плотности газа.

Квантовая теория реальной плазмы, находящейся в сильном магнитном поле, в термодинамическом равновесии приближенно описываемой двумерным нейтральным квантовым кулоновским газом в большом каноническом ансамбле, по-видимому, должна давать фазовый переход при температуре $T\approx T_c$ и должна приводить к интересным явлениям, таким, как конденсация пар ниже T_c.

Благодарности. Я признателен Э. Либу и Э. Зайлеру за многочисленные плодотворные дискуссии во время моей работы над этой статьей и за их полезные замечания. Я благодарен также Э. Либу и А. Вайтману за участие и поддержку.

2. ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ КЛАССИЧЕСКОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКОЙ И ЕВКЛИДОВОЙ ТЕОРИЕЙ ПОЛЯ

В этом разделе мы объясним основное соотношение между КСМ и евклидовой теорией поля (ЕТП), используемое в этой работе. Более подробные сведения о ЕТП содержатся в [7, 28]. Мы покажем, как из оценок в ЕТП получить оценки в КСМ, и наоборот. Более ранние обсуждения исследуемых ниже взаимосвязей КСМ — ЕТП, содержатся в работах [6, 1].

а. Основные определения и оценки КСМ. В дальнейшем K используется для обозначения любой постоянной; ее значение может меняться от оценки к оценке. Класс потенциалов $V(x, y)$, который мы рассматриваем в этом разделе, определяется следующим образом.

Определение 2.1. Пусть S_R — шар в $\mathbb{R}^s$ радиуса $R\leqslant\infty$ с центром в начале координат. Мы предположим, что $V(x, y)$ — ядро некоторого положительного оператора V в пространстве $L^2(S_R,\ d^sx)$ и что $V(x,\ y)$ непрерывно по x и y и

$$\sup_{x,\ y \in S_R} |V(x,\ y)| \leqslant K. \tag{2.1}$$

В частности, мы рассмотрим случай, когда $s=2$, $R=\infty$ и $V(x,\ y)$ задается формулой

$$V(x,\ y)=V_{\varkappa,\, m}(x-y)=$$
$$=\int d^2x'd^2y'h_\varkappa(x-x')\,h_\varkappa(y-y')\,C_m(x'-y'), \tag{2.2}$$

где $C_m(x-y)$ — ядро оператора $(-\Delta+m^2)^{-1}$, Δ — двумерный лапласиан, $m>0$ и $h_\varkappa$ — положительная непрерывная функция (распределение заряда частицы), такая, что

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp} h_\varkappa \subseteq \left\{x \,\middle|\, |x| \leqslant \frac{1}{\varkappa}\right\}, \quad h_\varkappa(x)=h_\varkappa(-x), \\ &\int h_\varkappa(x)\,d^2x=1 \quad \text{и} \quad h_\varkappa(x)\to\delta(x) \quad \text{при} \quad \varkappa\to\infty. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь δ — двумерная δ-функция, а сходимость в (2.3) понимается как слабая сходимость функционалов на $C(S_R)$ (пространстве непрерывных функций, определенных на S_R, $R \leqslant \infty$).

В § 3 мы изучим потенциалы $V_{\varkappa,\, m}$ и покажем, что можно перейти к пределу при $\varkappa\to\infty$ (соответствующему переходу от частиц с распределением заряда $h_\varkappa$ к точечным частицам). В § 4 мы исследуем случай $m=0$.

Определение 2.2. Пусть $X^n=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ и $Y^n=(y_1,\ \ldots,\ y_n)$ — точки в $\mathbb{R}^{sn}$ (конфигурации частиц). Пусть $dX^n=\prod_{i=1}^{n} d^sx_i$ и т. д. Мы полагаем

$$U_V(X^n,\ Y^n)=\varepsilon^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\{V(x_i,\ x_j)+V(y_i,\ y_j)\}-$$
$$-\varepsilon^2\sum_{i,\ j=1}^{n} V(x_i,\ y_j). \tag{2.4}$$

Пусть g — некоторая положительная функция из $L^1(S_R,\ d^sx)$; введем обозначение

$$g(X^n)=\prod_{i=1}^{n} g(x_i). \tag{2.5}$$

Мы полагаем

$$\rho_n(x)=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon\{\delta(x-x_j)-\delta(x-y_j)\}. \tag{2.6}$$

В дальнейшем мы будем считать $\beta \equiv \frac{1}{kT} = 1$, чего всегда можно добиться, переопределив заряд ε.

Классическая каноническая статистическая сумма для n положительно и n отрицательно заряженных частиц с парным потенциалом V и внешним полем, равным $\log g(X^n) + \log g(Y^n)$, определяется формулой

$$Z_n(V, g) \equiv \int dX^n\, dY^n\, g(X^n)\, g(Y^n)\, e^{-U_V(X^n, Y^n)} =$$
$$= \int dX^n\, dY^n\, g(X^n)\, g(Y^n)\, e^{-\int dx\,dy\,\rho_n(x) V(x,y) \rho_n(y)} \times$$
$$\times e^{\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} \{V(x_i, x_i) + V(y_i, y_i)\}}. \tag{2.7}$$

Обычно полагают $g(x) = \chi_\Lambda(x)$, где χ_Λ — индикатор некоторого (открытого) множества $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$, объем которого обозначается $|\Lambda|$. (Здесь мы дали слегка более общее определение статистической суммы; в работах [8, 9] объяснено, зачем это нужно.)

Лемма 2.1. *Предположим, что для произвольной незнакопостоянной меры* ρ, *такой, что* $\int dx\, \rho(x) = 0$ (*т. е. полного заряда* 0) *и* $\operatorname{supp} \rho \subseteq S_R$, *выполнено неравенство*

$$\int dx\, dy\, \rho(x)\, V(x, y)\, \rho(y) \geqslant \int dx\, dy\, \rho(x) W(x, y)\, \rho(y) \tag{2.8}$$

и $\sup_{x \in S_R} \{V(x, x) - W(x, x)\} \leqslant K$, *где* V *и* W — *два потенциала. Тогда*

$$Z_n(V, g) \leqslant e^{2nK\varepsilon^2} Z_n(W, g). \tag{2.9}$$

Доказательство. Имеем

$$Z_n(V, g) = \int dX^n\, dY^n\, g(X^n)\, g(Y^n)\, e^{-U_W(X^n, Y^n)} \times$$
$$\times e^{-\int dx\,dy\,\rho_n(x)(V-W)(x,y)\rho_n(y)} \times$$
$$\times e^{\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} \{V(x_i, x_i) - W(x_i, x_i) + V(y_i, y_i) - W(y_i, y_i)\}} \leqslant$$
$$\leqslant e^{2nK\varepsilon^2} \int dX^n\, dY^n\, g(X^n)\, g(Y^n)\, e^{-U_W(X^n, Y^n)}, \tag{2.10}$$

так как $\sup_{x \in S_R} \{V(x, x) - W(x, x)\} \leqslant K$ и в силу (2.8). ∎

Замечание. Так как в условии (2.8) из леммы 2.1 фигурируют только заряды $\rho(x)$, обладающие свойством $\int dx\, \rho(x) = 0$

(т. е. преобразование Фурье $\tilde{\rho}(0) = 0$; этим свойством обладает, в частности, заряд ρ_n), то (2.8) может выполняться и в том случае, когда оператор V не является положительным. Именно поэтому лемма 2.1 позволяет нам оценить сверху кулоновскую статистическую сумму через юкавскую статистическую сумму, хотя двумерный кулоновский потенциал *не является* ядром положительного оператора; см. § 4. (Этим замечанием я обязан Э. Зайлеру.)

Определение 2.3. Большая каноническая статистическая сумма $Z(V, zg)$ для *нейтральной* системы определяется формулой

$$Z(V, zg) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n!)^2} Z_n(V, g). \tag{2.11}$$

Известно, что ряд в правой части (2.11) абсолютно сходится для всех z, если потенциал V удовлетворяет условиям определения 2.1, а g принадлежит $L^1(S_R, d^s x)$. Эта сходимость вытекает, по существу, из той же самой оценки, что и (2.10) (для $W = 0$). Подробности можно найти, например, в книге [26]. В п. с мы докажем оценку с противоположным знаком неравенства по сравнению с оценкой, доказанной в лемме 2.1. А именно, для $V \geqslant W \geqslant 0$

$$Z(W, g) \leqslant Z(V, 2g). \tag{2.12}$$

b. Формализм ЕТП. Не теряя общности, можно предположить, что для оператора V

$$\ker V = \{0\}. \tag{2.13}$$

(Если это не так, то всегда можно перейти к соответствующему факторпространству.) Пусть

$$\mathcal{S} = \begin{cases} C^{\infty}_{0,\,\text{вещ.}}(S_R) & \text{для } R < \infty, \\ \mathcal{S}_{\text{вещ.}}(\mathbb{R}^s) & \text{для } R = \infty, \end{cases}$$

где $\mathcal{S}_{\text{вещ.}}(\mathbb{R}^s)$ — вещественное пространство Шварца быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^s$. Обозначим через $\mathcal{S}'$ топологически сопряженное к $\mathcal{S}$ пространство. Функции из $\mathcal{S}$ обозначаются через $f, g, h, \ldots$, обобщенные функции из $\mathcal{S}'$ — через Φ.

Через Σ обозначим σ-алгебру на $\mathcal{S}'$, порожденную всеми борелевскими цилиндрами; см., например, [14].

Определим функционал J_V на $\mathcal{S}$ формулой

$$J_V(f) = e^{-\frac{1}{2}(f, Vf)}. \tag{2.14}$$

Функционал J_V нормирован, т. е. $J_V(0)=1$, непрерывен на $\mathcal{S}$ и положительно определен [14, 22]. По теореме Минлоса [22] он является преобразованием Фурье некоторой вероятностной меры $d\mu_V$ на $(\mathcal{S}', \Sigma)$, т. е.

$$J_V(f) = \int_{\mathcal{S}'} d\mu_V(\Phi)\, e^{i\Phi(f)}.$$

Мера $d\mu_V$ является гауссовской мерой на $(\mathcal{S}', \Sigma)$ со средним 0 и ковариационным оператором V.

Для интеграла $d\mu_V$-интегрируемой функции F на $\mathcal{S}'$ по мере $d\mu_V$ мы используем в дальнейшем обозначение

$$\langle F\rangle_V \equiv \int_{\mathcal{S}'} d\mu_V(\Phi)\, F(\Phi). \tag{2.15}$$

Виковская нормальная форма экспоненты задается, по определению, формулой

$$:e^{i\Phi(f)}:_V \equiv e^{i\Phi(f)} \langle e^{i\Phi(f)}\rangle_V^{-1} = e^{i\Phi(f)} e^{1/2(f,\, Vf)}. \tag{2.16}$$

Лемма 2.2. *Для любых $f_1, \ldots, f_n$ из $\mathcal{S}$*

$$\left\langle \prod_{j=1}^{n} :e^{i\Phi(f_j)}:_V \right\rangle_V = \exp\Big[-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (f_i,\ Vf_j)\Big] \geqslant 0.$$

Если последовательность $\{f_j^l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к $\varepsilon_j\delta(x-x_j)$ при $l\to\infty$ для каждого $j=1, \ldots, n$ как последовательность функционалов на $C(S_R)$, то

$$\lim_{l\to\infty} \left\langle \prod_{j=1}^{n} :e^{i\Phi(f_j^l)}:_V \right\rangle_V \equiv \left\langle \prod_{j=1}^{n} :e^{i\varepsilon_j\Phi(x_j)}:_V \right\rangle_V =$$
$$= \exp\Big[-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \varepsilon_i\varepsilon_j V(x_i,\ x_j)\Big] \geqslant 0. \tag{2.17}$$

Доказательство. Первая часть есть одна из форм теоремы Вика и следует прямо из (2.16) и (2.14); (2.17) следует из определения 2.1 (имеется в виду ограниченность и непрерывность $V(x,\ y)$) и из первой части леммы; см. также [1]. ∎

Определение 2.4. Положим

$$\chi_V^{\pm}(g) \equiv \int d^s x\, g(x) :e^{\pm i\varepsilon\Phi}:_V(x),$$
$$:\cos\varepsilon\Phi:_V(g) \equiv {}^1/_2 \{\chi_V^{+}(g) + \chi_V^{-}(g)\}.$$

В силу (2.7) и леммы 2.2

$$Z_n(V,\ g) = \langle (\chi_V^{+}(g))^n (\chi_V^{-}(g))^n \rangle_V. \tag{2.18}$$

Для полного заряда q мы определим

$$Z^q_{2n+q}(V, g) = \left\langle \left(\chi^+_V(g)\right)^{n+q} \left(\chi^-_V(g)\right)^n \right\rangle_V. \tag{2.19}$$

Очевидно, что

$$0 \leqslant Z^{2q}_{2n}(V, g) \leqslant \left\langle \left|\chi^+_V(g)\right|^{n+q} \left|\chi^-_V(g)\right|^{n-q} \right\rangle_V = \\ = \left\langle (\chi^+_V(g))^n (\chi^-_V(g))^n \right\rangle_V = Z_n(V, g). \tag{2.20}$$

Используя определение 2.4, мы находим, что

$$\frac{1}{n!}\langle :\cos \varepsilon\Phi:_V (g)^n\rangle_V = 2^{-n} \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{q!\,(n-q)!} \left\langle \left(\chi^+_V(g)\right)^q \left(\chi^-_V(g)\right)^{n-q} \right\rangle_V = \\ = 2^{-n} \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{q!\,(n-q)!} Z^{2q-n}_n(V, g). \tag{2.21}$$

В силу (2.20) и (2.21)

$$\frac{1}{(2n)!}\langle :\cos \varepsilon\Phi:_V (g)^{2n}\rangle_V \leqslant \frac{1}{(2n)!} Z_n(V, g) < \frac{1}{(n!)^2} Z_n(V, g). \tag{2.22}$$

С другой стороны, все слагаемые в правой части (2.21) положительны по лемме 2.2. Следовательно,

$$\frac{1}{(n!)^2} Z_n(V, g) \leqslant \frac{2^{2n}}{(2n)!}\langle :\cos \varepsilon\Phi:_V (g)^{2n}\rangle_V. \tag{2.23}$$

Определение 2.4 и формула (2.21) приводят нас к следующему определению.

Определение 2.5. Большая каноническая статистическая сумма для системы, связанной с тепловым резервуаром и с резервуаром заряженных частиц, определяется формулой

$$\Xi(V, zg) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\langle :\cos \varepsilon\Phi:_V (g)^n\rangle_V \equiv \\ \equiv \langle \exp\{:\cos \varepsilon\Phi:_V (zg)\}\rangle_V \tag{2.24}$$

(z — активность). Понятно, что

$$|\Xi(V, zg)| \leqslant \Xi(V, |z|g) \leqslant 2\Xi_{\mathrm{ch}}(V, |z|g) \equiv \\ \equiv 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{(2n)!}\langle :\cos \varepsilon\Phi:_V (g)^{2n}\rangle_V, \tag{2.25}$$

и сходимость ряда в правой части (2.25) для произвольного $|z|$ следует из (2.22) и (2.11). Соотношения и неравенства (2.18) — (2.25) приводят к следующей теореме.

Теорема 2.3. (1) $Z_{2n}^{2q}(V, g) \leqslant Z_n(V, g)$;
(2) $Z(V, g) \leqslant \Xi_{\mathrm{ch}}(V, 2g)$;
(3) $\Xi_{\mathrm{ch}}(V, g) \leqslant Z(V, g)$;
(4) *для положительных* g

$$\Xi(V, g) \leqslant 2\Xi_{\mathrm{ch}}(V, g) \leqslant 2\Xi(V, g).$$

Замечание. Статистическая сумма $\Xi(V, g)$ играет важную роль в построении моделей теории поля, описанных во введении как B, $\widetilde{B}$, C и $\widetilde{C}$, если потенциал V выбран в виде $V(x, y) = C_m(x - y)$; см. [8, 9].

с. Оценки ЕТП (обусловленность). Дальнейшее есть частный случай результата, полученного Гуэррой, Розеном и Саймоном [16] и названного «обусловленностью».

Теорема 2.4. *Пусть* $V \geqslant W \geqslant 0$. *Тогда для вещественной функции* g

(1) $\Xi(V, \pm g) \geqslant \Xi(W, \pm g)$;

(2) $Z(V, g) \geqslant \Xi_{\mathrm{ch}}(V, g) \geqslant \Xi_{\mathrm{ch}}(W, g) \geqslant Z(W, {}^1/_2 g)$;

(3) $$\sum_{q=-n}^{n} \frac{1}{(n+q)!\,(n-q)!} Z_{2n}^{2q}(V, \pm g) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{q=-n}^{n} \frac{1}{(n+q)!\,(n-q)!} Z_{2n}^{2q}(W, \pm g).$$

Доказательство. Понятно, что (2) следует из (1) в силу теоремы 2.3, (2) и (3). Идея доказательства (1) и (3) такова: заметим, что

$$\begin{aligned}\Xi(V, g) &= \langle \exp\{:\cos \varepsilon\Phi :_V (g)\}\rangle_V = \\ &= \langle \exp\{:\cos \varepsilon(\Phi_1 + \Phi_2) :_{V-W, W}(g)\}\rangle_{V-W, W}\end{aligned} \tag{2.26}$$

и

$$\begin{aligned}\sum_{q=-n}^{n} &\frac{1}{(n+q)!\,(n-q)!} Z_{2n}^{2q}(V, g) = \\ &= \frac{2^{2n}}{(2n)!} \langle \{:\cos \varepsilon(\Phi_1 + \Phi_2) :_{V-W, W}(g)\}^{2n}\rangle_{V-W, W},\end{aligned} \tag{2.26'}$$

где Φ_1 и Φ_2 — два *независимых* гауссовских случайных поля с ковариационными операторами $V - W$ и W соответственно. Тогда $\Phi_1 + \Phi_2$ — гауссовское случайное поле с ковариацией V.

Неравенство Иенсена дает:

$$\langle \exp \{ : \cos \varepsilon (\Phi_1 + \Phi_2) :_{V-W,W} (g) \} \rangle_{V-W,W} \geqslant$$

$$\geqslant \left\langle \exp \left\{ \int_{\mathscr{S}'} d\mu_{V-W} (\Phi_1) : \cos \varepsilon (\Phi_1 + \Phi_2) :_{V-W,W} (g) \right\} \right\rangle_W =$$

$$= \langle \exp \{ : \cos \varepsilon \Phi_2 :_W (g) \} \rangle_W,$$

что доказывает (1). Аналогично доказывается (3). Подробности см. в [16, 28]. ∎

Замечание. Отметим, что знаки неравенств (2) и (3) из теоремы 2.4 направлены противоположно знаку неравенства (2.9) в лемме 2.1, которое означает, что

$$Z(V, g) \leqslant Z(W, e^{K\varepsilon^2} g), \tag{2.27}$$

где $K = \sup\limits_{x \in S_R} \{V(x, x) - W(x, x)\}$.

d. Расцепление соседних кубов. Пусть $R = \infty$, т. е. $S_R = \mathbb{R}^s$. Через χ_B будем обозначать индикатор области B в $\mathbb{R}^s$.

Покроем $\mathbb{R}^s$ единичными кубами Δ_n с центрами в точках $n = (n^1, \ldots, n^s) \in \mathbb{Z}^s$ и гранями, параллельными координатным плоскостям $x^j = 0$, $j = 1, \ldots, s$.

Затем разобьем каждый куб Δ_n на 2^s равных непересекающихся кубов $\Delta_n^1, \ldots, \Delta_n^{2^s}$ с объемом $|\Delta_n^j| = 2^{-s}$ каждый. Ясно, что

$$: \cos \varepsilon \Phi :_V (g) = \sum_{j=1}^{2^s} \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} : \cos \varepsilon \Phi :_V \left(g \chi_{\Delta_n^j} \right).$$

В силу неравенства Гёльдера

$$\Xi(V, g) = \langle \exp \{ : \cos \varepsilon \Phi :_V (g) \} \rangle_V \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=1}^{2^s} \left\langle \exp \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} : \cos \varepsilon \Phi :_V \left(2^s g \chi_{\Delta_n^j} \right) \right\} \right\rangle_V^{2^{-s}} =$$

$$= \prod_{j=1}^{2^s} \Xi \left(V, \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} 2^s g \chi_{\Delta_n^j} \right)^{2^{-s}}. \tag{2.28}$$

По теореме 2.3

$$Z(V, g) \leqslant \Xi_{\mathrm{ch}} (V, 2g) \leqslant \Xi (V, 2g) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=1}^{2^s} \Xi \left(V, \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} 2^{s+1} g \chi_{\Delta_n^j} \right)^{2^{-s}} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \prod_{j=1}^{2^s} Z \left(V, \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} 2^{s+1} g \chi_{\Delta_n^j} \right)^{2^{-s}}. \tag{2.29}$$

Эти простые неравенства и осуществляют расцепление взаимодействия между соседними кубами. Мы применим их в п. e и f для того, чтобы доказать устойчивость.

e. Сильно расцепляющие гауссовские меры. Для произвольного куба B в $\mathbb{R}^s$ обозначим через Σ_B минимальную σ-алгебру в $\mathscr{S}'$, такую, что все функции $\{e^{i\Phi(f)} \mid f \in \mathscr{S},\ \operatorname{supp} f \subseteq B\}$ измеримы относительно Σ_B.

Определение 2.6. Гауссовская мера $d\mu_V$ называется *сильно расцепляющей*, если существует такое $p = p(V) \in [1, \infty)$, что для произвольных $\Sigma_{\Delta_n^j}$-измеримых функций $F_{n,j}$, $n \in Z^s$,

$$\left| \left\langle \prod_{n \in Z^s} F_{n,j} \right\rangle_V \right| \leqslant \prod_{n \in Z^s} \langle | F_{n,j} |^p \rangle_V^{1/p} \tag{2.30}$$

при каждом $j = 1, \ldots, 2^s$.

Если потенциал $V \geqslant 0$ удовлетворяет определению 2.1 и обладает тем свойством, что гауссовская мера $d\mu_V$ является сильно расцепляющей, то, применяя (2.28) и (2.30), получаем, что

$$\Xi(V, g) \leqslant \prod_{j=1}^{2^s} \left\langle \prod_{n \in Z^s} \exp\left\{ :\cos \varepsilon\Phi:_V \left(2^s g \chi_{\Delta_n^j}\right)\right\} \right\rangle_V^{2^{-s}} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=1}^{2^s} \prod_{n \in Z^s} \Xi\left(V, 2^s p g \chi_{\Delta_n^j}\right)^{2^{-s} p^{-1}}, \tag{2.31}$$

где мы использовали тот очевидный факт, что для $g \in L^1(S_R, d^s x)$ функция $\exp\left\{ :\cos \varepsilon\Phi:_V \left(2^s g \chi_{\Delta_n^j}\right)\right\}$ на $\mathscr{S}'$ является $d\mu_V$-интегрируемой и $\Sigma_{\Delta_n^j}$-измеримой, как это следует из (2.24), (2.25), (2.11).

В силу теоремы 2.3 и (2.29) имеем

$$Z(V, g) \leqslant \prod_{j=1}^{2^s} \prod_{n \in Z^s} \left(2Z\left(V, 2^{s+1} p g \chi_{\Delta_n^j}\right)\right)^{2^{-s} p^{-1}}. \tag{2.32}$$

Если потенциал V трансляционно-инвариантен ($R = \infty$), $g = \lambda \cdot \chi_\Lambda$ для некоторой открытой области $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$, $|\Lambda|$ — полный объем кубов Δ_n, задевающих Λ, и

$$Z\left(V, \lambda \chi_{\Delta_0^1}\right) \leqslant K_\lambda < \infty \tag{2.33}$$

для произвольного положительного λ, то для $\bar{K}_\lambda = \frac{1}{2^s p} \log 2K_{2^s p \lambda}$ получаем, что

$$\Xi(V, \lambda \chi_\Lambda) \leqslant e^{\bar{K}_\lambda |\Lambda|}.$$

Для комплексных z имеем

$$|\Xi(V, zg)| \leqslant \Xi(V, \operatorname{Re} zg),$$

так что

$$\left|\Xi\left(V, z\chi_\Lambda\right)\right| \leqslant e^{\overline{K}\operatorname{Re} z |\Lambda|}, \tag{2.34}$$

а по (2.32)

$$\left|Z\left(V, z\chi_\Lambda\right)\right| \leqslant Z\left(V, |z|\chi_\Lambda\right) \leqslant e^{\overline{K}_2 |z| |\Lambda|}. \tag{2.35}$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.5. *Если V трансляционно-инвариантен и $d\mu_V$ является сильно расцепляющей, то оценка* (2.33) *для конечного объема влечет за собой оценки* (2.34), (2.35), *выражающие свойство термодинамической устойчивости.*

f. Применение к потенциалу Юкавы. Положим

$$V(x, y) = V_{\varkappa, m}(x - y) =$$
$$= \int d^s x' d^s y' h_\varkappa(x' - x)\, C_m(x' - y')\, h_\varkappa(y' - y), \tag{2.36}$$

где $C_m(x - y)$ — ядро оператора $(-\Delta + m^2)^{-1}$. Пусть $\Phi_\varkappa \equiv \equiv h_\varkappa * \Phi$. Полезно иметь в виду следующее уравнение:

$$\langle F(\Phi)\rangle_{V_{\varkappa, m}} = \langle F(\Phi_\varkappa)\rangle_{C_m}. \tag{2.37}$$

Чтобы доказать (2.37), нам надо только показать, что

$$J_{V_{\varkappa, m}}(f) \equiv \left\langle e^{i\Phi(f)}\right\rangle_{V_{\varkappa, m}} = \left\langle e^{i\Phi_\varkappa(f)}\right\rangle_{C_m} = J_{C_m}(h_\varkappa * f),$$

но это равенство прямо следует из (2.36) и (2.14).

Теорема 2.6. *Предположим, что m положительно и что $\varkappa \geqslant 4$, т. е. $\operatorname{supp} h_\varkappa \subseteq \{x \mid |x| \leqslant {}^1/_4\}$. В этом случае $d\mu_{V_{\varkappa, m}}$ является сильно расцепляющей гауссовской мерой с $p = = p(V_{\varkappa, m}) \leqslant p(m) \in (2, \infty)$, где $p(m)$ не зависит от $\varkappa$. Таким образом, применима теорема* 2.5.

Доказательство. Нельсон показал, что $d\mu_{C_m}$ обладает *марковским свойством* [23] и является *гиперсжимающей* [23, 24] ($d\mu_{C_m}$ является марковской, поскольку обратный оператор к C_m, т. е. $-\Delta + m^2$, есть *локальный* оператор, см. [23], и гиперсжимающей, поскольку $m > 0$, см. [23, 24, 28]). Обозначим через $\overline{\Delta}{}_n^j$ множество точек $x \in \mathbb{R}^s$, находящихся на расстоянии, меньшем или равном 1/4, от Δ_n^j. Для фиксированного j множества $\overline{\Delta}{}_n^j$, $\overline{\Delta}{}_{n'}^j$ не пересекаются при $n \neq n'$.

Применив уравнение (2.37), мы замечаем, что нам надо доказать расцепляющую оценку (2.30) для

$$\left|\left\langle \prod_{n \in Z^s} \exp\left\{ :\cos \varepsilon\Phi_{\varkappa}:_{C_m}\left(zg\chi_{\Delta_n^l}\right)\right\}\right\rangle_{C_m}\right|. \tag{2.38}$$

Очевидно, случайная величина $\exp\left\{ :\cos \varepsilon\Phi_{\varkappa}:_{C_m}\left(zg\chi_{\Delta_n^l}\right)\right\}$ является $\Sigma_{\bar{\Delta}_n^l}$-измеримой. Поэтому марковское свойство и гиперсжимаемость $d\mu_{C_m}$ влекут за собой расцепляющую оценку (2.30) для (2.38). Простое доказательство того, что

$$\left.\begin{array}{l}\text{марковское свойство} + \\ + \text{ гиперсжимаемость}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{(2.38) удовлетворяет (2.30),}$$

принадлежит Гуэрре, Розену и Саймону и называется оценкой «клетчатой доски». Подробное изложение содержится в [16, 28][1]). ∎

Замечания. Теоремы 2.6 и 2.5 показывают, что мы получим доказательство устойчивости для системы КСМ с потенциалом Юкавы в размерности два, коль скоро докажем устойчивость в конечном объеме, т. е. неравенство (2.33). Тогда из леммы 2.1 и из (2.27) следует в силу простых соображений (см. § 4), что нейтральная кулоновская система КСМ в размерности два тоже *устойчива.* Эти результаты служат фундаментом для построеиия теорий поля B, $\tilde{B}$, C и $\tilde{C}$, поскольку в действительности *нет никакой* разницы между КСМ систем A, $\tilde{A}$ в большом каноническом ансамбле и теориями поля B, $\tilde{B}$ соответственно в евклидовой формулировке, см. [8, 9].

3. СЕРДЦЕВИНА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА: УСТОЙЧИВОСТЬ В КОНЕЧНОМ ОБЪЕМЕ

В этом разделе мы покажем, что при $\beta\varepsilon^2 < 4\pi$ (или $\varepsilon^2 < 4\pi$, если мы положим $\beta = 1$) система КСМ с потенциалом Юкавы *устойчива.* Потенциал Юкавы задается формулой

$$V(x, y) = C_m(x - y) \quad \text{при} \quad m > 0.$$

Удобно сначала рассмотреть КСМ для регуляризованного потенциала Юкавы $V_{\varkappa, m}$ (см. (2.36)), где обрезающая функ-

---

[1]) Конкретный вид случайных величин (2.38), конечно, не существен для доказательства расцепляющей оценки. — *Прим. перев.*

ция $h_\varkappa$ удовлетворяет определению 2.1, (2.3), и получить оценки, равномерные по $\varkappa$. В силу результатов § 2, e и f, нам надо лишь доказать, что $Z(V_{\varkappa, m}, \lambda\chi_\Delta)$ *ограничена равномерно* по $\varkappa$ для произвольного фиксированного положительного λ и квадрата Δ с объемом $1/4$.

Стратегия доказательства заключается в том, чтобы свести эту проблему к проблеме, решенной Дейчем и Лаво в [4] для кулоновской системы, т. е. оценить сверху статистическую сумму с потенциалом Юкавы статистической суммой с кулоноподобным потенциалом, которую можно оценить явно. Это удается сделать с помощью обусловленности (теорема 2.4). Разумеется, мы должны заменить кулоновский потенциал потенциалом, который является ядром положительного оператора. Удобно иметь дело с большой канонической статистической суммой $\Xi(V_{\varkappa, m}, g)$.

а. Сведение к кулоноподобным потенциалам. Пусть $\Delta_{1/2}$, Δ_1 — квадраты объема соответственно $1/4$ и 1 со сторонами, параллельными координатным осям, и оба с центром в точке $(1, 0)$, а $S = S_2$ — круг радиуса 2 с центром в начале координат. Через Δ_S обозначим оператор Лапласа в $L^2(S, d^2x)$ с нулевыми условиями Дирихле на ∂S. Наконец, через $C_m^S(x, y)$ обозначим ядро оператора $(-\Delta_S + m^2)^{-1}$. Отметим, что оператор $-\Delta_S$ *строго положителен* (поскольку на ∂S заданы *нулевые условия Дирихле*) и, следовательно, $(-\Delta_S)^{-1}$ — ограниченный положительный оператор с ядром $C_0^S(x, y)$: $C_0^S \in \in \bigcap_{p<\infty} L^p(S \times S, d^2x \times d^2x)$. Для любых x и y из Δ_1 и $m > 0$

$$0 \leqslant [C_m - C_m^S](x, y) \leqslant K. \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *Пусть F есть Σ_{Δ_1}-измеримая функция на $\mathcal{S}'$. Тогда*

$$|\langle F\rangle_{C_m}| \leqslant \langle |F|^r\rangle_{C_m^S}^{1/r}$$

для некоторого числа $r = r(m, d)$, конечного при $m > 0$ и $d > 0$, где d — расстояние между Δ_1 и ∂S.

Эта лемма доказана в [16]. См. также [28, теоремы I. 23, VII. 2]. Относительно общего исследования свойств гауссовских мер на $\mathcal{S}'$ см. [28, 10]. Мы полагаем

$$V_{\varkappa, m}^S(x, y) = \int d^2x'\, d^2y'\, h_\varkappa(x - x')\, h_\varkappa(y - y')\, C_m^S(x', y') =$$
$$= [(h_\varkappa \otimes h_\varkappa) * C_m^S](x, y)$$

и

$$w_\varkappa(x) = e^{(-\varepsilon^2/2)\left[V_{\varkappa, m} - V^S_{\varkappa, m}\right](x, x)} \chi_{\Delta_1}(x),$$
$$w(x) = e^{(-\varepsilon^2/2)\left[C_m - C^S_m\right](x, x)} \chi_{\Delta_1}(x). \tag{3.2}$$

Заметим, что $w_\varkappa \to w$ по $\|\cdot\|_\infty$-норме при $\varkappa \to \infty$.

Пусть g — положительная функция из $L^1(\Delta_{1/2}, d^2x)$. Тогда из леммы 3.1 вытекает такое

Следствие 3.2.

$$\Xi(V_{\varkappa, m}, g) = \langle \exp\{:\cos \varepsilon\Phi_\varkappa:_{C_m}(g)\}\rangle_{C_m} \leqslant$$
$$\leqslant \left\langle \exp\left\{:\cos \varepsilon\Phi_\varkappa:_{C^S_m}(r \cdot w_\varkappa \cdot g)\right\}\right\rangle^{1/r}_{C^S_m} = \tag{3.3}$$
$$= \Xi\left(V^S_{\varkappa, m}, r \cdot w_\varkappa \cdot g\right)^{1/r} \leqslant \tag{3.4}$$
$$\leqslant \Xi\left(V^S_{\varkappa, 0}, r \cdot w_\varkappa \cdot g\right)^{1/r} \leqslant \tag{3.5}$$
$$\leqslant \left(2Z\left(V^S_{\varkappa, 0}, r \cdot w_\varkappa \cdot g\right)\right)^{1/r}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Первое уравнение следует из (2.37). По определению (2.16) виковской нормальной формы и в силу (3.2)

$$:e^{\pm i\varepsilon\Phi_\varkappa}:_{C_m}(g) = :e^{\pm i\varepsilon\Phi_\varkappa}:_{C^S_m}(w_\varkappa g)$$

для таких g, что $\operatorname{supp} g \subseteq \Delta_{1/2}$, откуда

$$\exp\left\{:\cos \varepsilon\Phi_\varkappa:_{C_m}(g)\right\} = \exp\left\{:\cos \varepsilon\Phi_\varkappa:_{C^S_m}(w_\varkappa g)\right\}.$$

Это уравнение и лемма 3.1 доказывают (3.3); (3.4) следует из определения Ξ; (3.5) следует из неравенства $(-\Delta_S)^{-1} \geqslant (-\Delta_S + m^2)^{-1} \geqslant 0$ в силу неравенства обусловленности, см. теорему 2.4, (1). Наконец, (3.6) следует из теоремы 2.3, (3) и (4). ∎

Теперь нам осталось оценить $Z\left(V^S_{\varkappa, 0}, r w_\varkappa g\right)$ *равномерно* по $\varkappa$ и как следствие вывести, что

$$Z(V_{\varkappa, m}, g) \to Z(C_m, g) \quad \text{при} \quad \varkappa \to \infty,$$

и другие предельные соотношения при $\varkappa \to \infty$.

b. Явное представление функции Грина $C^S_0(x, y)$. Пусть $x = (x^1, x^2)$ и $y = (y^1, y^2)$ — точки из $\mathbb{R}^2$. Положим $z = x^1 + ix^2$ и $w = y^1 + iy^2$. Обозначим через $\hat{z}$ образ z при инверсии относительно окружности ∂S, т. е.

$$\hat{z} = 4/\bar{z}; \qquad \text{если} \quad z \in \partial S, \quad \text{то} \quad z = \hat{z}. \tag{3.7}$$

Лемма 3.3.

$$C_0^S(x, y) \equiv C_0^S(z, w) \equiv G^S(z, w) =$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\{\ln|z-w| + \ln|\hat{z}-\hat{w}| - \ln|\hat{z}-w| - \ln|z-\hat{w}|\}. \quad (3.8)$$

Доказательство. Для того чтобы показать, что функция $G^S(z, w)$, определенная формулой (3.8), есть функция Грина для $-\Delta_S$, мы должны показать, что (i) $G^S(z, w)=0$ для z или w на ∂S и (ii) $-\Delta_{S,z}G(z, w)=\delta(z-w)$ для $w \notin \partial S$, где

$$-\Delta_{S,z} = -\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2}$$

с нулевыми условиями Дирихле на ∂S. Очевидно, для z или w на ∂S правая часть (3.8) обращается в 0 в силу (3.7), так что имеем (i). После тривиального преобразования получим

$$G^S(z, w) = -\frac{1}{2\pi}\{\ln|z-w| - \ln|4 - z\bar{w}| + \ln 4\}.$$

Если $w \notin \partial S$, то $-\ln|4-z\bar{w}| + \ln 4$ — *гармоническая* функция в области S; $-\frac{1}{2\pi}\ln|z-w|$ — двумерный кулоновский потенциал, так что в силу классической формулы Грина

$$-\Delta_{S,z}G^S(z, w) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{S,z}\ln|z-w| = \delta(z-w),$$

т. е. верно (ii). ∎

Теперь все готово для оценки $Z\left(V^S_{\varkappa,0}, rw_\varkappa g\right)$. Пусть $f_\varkappa \equiv \equiv rw_\varkappa g$, $f_\varkappa(X^n) \equiv \prod_{j=1}^n f_\varkappa(x_j)$ и $h_\varkappa^{\otimes n} \otimes h_\varkappa^{\otimes n}(X^n, Y^n) \equiv \prod_{j=1}^n h_\varkappa(x_j)h_\varkappa(y_j)$. Тогда

$$Z_n\left(V^S_{\varkappa,0}, rw_\varkappa g\right) = \int dX^n\, dY^n f_\varkappa(X^n)\, f_\varkappa(Y^n)\, e^{-U_{V^S_{\varkappa,0}}(X^n, Y^n)} =$$
$$= \int dX^n\, dY^n f_\varkappa(X^n)\, f_\varkappa(Y^n)\, e^{-\left[\left(h_\varkappa^{\otimes n} \otimes h_\varkappa^{\otimes n}\right) * U_{C_0^S}\right](X^n, Y^n)} \leqslant$$
$$\leqslant \int dX^n\, dY^n \left(h_\varkappa^{\otimes n} * f_\varkappa\right)(X^n)\left(h_\varkappa^{\otimes n} * f_\varkappa\right)(Y^n)\, e^{-U_{C_0^S}(X^n, Y^n)} \quad (3.9)$$

в силу неравенства Иенсена.

Определение 3.1.

$$z_j = \begin{cases} x_j^1 + ix_j^2, & j = 1, \ldots, n, \\ \dfrac{4}{y_{j-n}^1 - iy_{j-n}^2}, & j = n+1, \ldots, 2n; \end{cases}$$

$$w_j = \begin{cases} y_j^1 + iy_j^2, & j = 1, \ldots, n, \\ \dfrac{4}{x_{j-n}^1 - ix_{j-n}^2}, & j = n+1, \ldots, 2n. \end{cases}$$

Отметим, что $\hat{z}_j = w_{j+n}$ и $\hat{w}_j = z_{j+n}$ для $j = 1, \ldots, n$.

Мы полагаем $Z^n = (z_1, \ldots, z_n)$, $dZ^n = dX^n$, $W^n = (w_1, \ldots, w_n)$ и т. д.

Наконец, определим

$$H_\varkappa(g \mid Z^n, W^n) = \left(h_\varkappa^{\otimes n} * f_\varkappa\right)(Z^n)\left(h_\varkappa^{\otimes n} * f_\varkappa\right)(W^n)$$

и заметим, что

$$H_\varkappa(g \mid Z^n, W^n) \to (rwg)(Z^n)(rwg)(W^n) \quad \text{при} \quad \varkappa \to \infty. \tag{3.10}$$

Положим $\alpha \equiv \varepsilon^2/4\pi$ ($= \beta\varepsilon^2/4\pi$ для $\beta = 1$). Тогда в силу определения 2.2, (2.4) и (3.8)

$$e^{-U_{C_0^S}(z^n, w^n)} = \frac{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 2n} |z_i - z_j|^\alpha |w_i - w_j|^\alpha}{\prod\limits_{i, j=1}^{2n} |z_i - w_j|^\alpha} \cdot \prod_{j=1}^{n} |z_j - w_{j+n}|^\alpha |w_j - z_{j+n}|^\alpha, \tag{3.11}$$

где наличие второго множителя в правой части (3.11) объясняется тем фактом, что, согласно (3.8) и определению системы КСМ с парным потенциалом, заряженная частица в точке z_j *не взаимодействует* со своим образом (при инверсии относительно ∂S) в точке $\hat{z}_j = w_{j+n}$.

По предположению $\operatorname{supp} g \subseteq \Delta_{1/2}$. Следовательно (согласно определению 2.1, (2.3) и по определению $f_\varkappa(Z^n)$ и $H_\varkappa(g \mid Z^n, W^n)$),

$$\operatorname{supp} H_\varkappa\left(g \mid Z^n, W^n\right) \subseteq \Delta_1^{\times 2n} \quad \text{при} \quad \varkappa \geqslant 4.$$

Отметим, что Δ_1 *не содержит начала координат* и что поэтому максимальное расстояние между точками из Δ_1 и из его образа $\hat{\Delta}_1$ (при инверсии относительно ∂S) *ограничено.*

Следовательно,

$$\prod_{j=1}^{n} |z_j - w_{j+n}|^{\alpha} |w_j - z_{j+n}|^{\alpha} \leqslant K_1^n \tag{3.12}$$

на $\operatorname{supp} H_\varkappa(g\,|\,\cdot)$ при некоторой конечной константе K_1.

с. Основная оценка. По лемме Коши (см. [4] и приведенные там ссылки)

$$\frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 2n} |z_i - z_j|^{\alpha} |w_i - w_j|^{\alpha}}{\prod\limits_{i,\,j=1}^{2n} |z_i - w_j|^{\alpha}} = \left|\det\left[\frac{1}{z_i - w_j}\right]\right|^{\alpha}, \tag{3.13}$$

где $\left[\frac{1}{z_i - w_j}\right]$ обозначает $2n \times 2n$-матрицу с матричными элементами $\frac{1}{z_i - w_j}$. Уравнения (3.13) и (3.11), (3.12) позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 3.4. *Предположим, что* $\alpha < 1$ (*т. е.* $\beta e^2/4\pi < 1$). *Пусть* $p \geqslant 1$ — *произвольное вещественное число, такое, что* $\alpha p < 1$, *пусть* $p' = p/(p-1)$ *и* g — *функция из* $L^{p'}(\Delta_{1/2}, d^2x)$. *Тогда*

$$|Z_n(V^S_{\varkappa,0},\ rw_\varkappa g)| \leqslant ((2n)!)^{1/p} K_p^n \|g\|_{p'}^{2n} \tag{3.14}$$

равномерно по $\varkappa \geqslant 4$.

Доказательство. Пусть $H \in L^{p'}(\Delta_1^{\times 2n}, dZ^n dW^n)$. Тогда, согласно (3.12) и неравенству Гёльдера,

$$\left|\int dZ^n dW^n H(Z^n, W^n) \left|\det\left[\frac{1}{z_i - w_j}\right]\right| \left|\prod_{j=1}^{n} |z_j - w_{j+n}|^{\alpha} |w_j - z_{j+n}|^{\alpha}\right|^{\alpha}\right| \leqslant$$

$$\leqslant K_1^n \|H\|_{p'} \left[\int\limits_{\Delta_1^{\times 2n}} dZ^n dW^n \left|\det\left[\frac{1}{z_i - w_j}\right]\right|^{\alpha p}\right]^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant K_1^n \|H\|_{p'} \left[\sum_{\pi \in \gamma_{2n}} \int\limits_{\Delta_1^{\times 2n}} dZ^n dW^n \prod_{j=1}^{2n} \frac{1}{|z_j - w_{\pi(j)}|^{\alpha p}}\right]^{1/p}. \tag{3.15}$$

Так как $\alpha p < 1$, то $\prod\limits_{j=1}^{2n} \frac{1}{|z_j - w_{\pi(j)}|^{\alpha p}}$ интегрируемо на $\Delta_1^{\times 2n}$ (по мере Лебега $dZ^n dW^n$) и

$$\int\limits_{\Delta_1^{\times 2n}} dZ^n dW^n \prod_{j=1}^{2n} \frac{1}{|z_j - w_{\pi(j)}|^{\alpha p}} \leqslant K_2(p)^n \tag{3.16}$$

для некоторой константы $K_2(p)$, конечной при $\alpha p<1$ и не зависящей от подстановки $\pi\in\gamma_{2n}$. Следовательно,

$$\left|\int dZ^n dW^n H(Z^n, W^n)\left|\det\left[\frac{1}{z_i-w_j}\right]\right|\prod_{j=1}^{n}|z_j-w_{j+n}|^{\alpha}|w_j-z_{j+n}|^{\alpha}\right|\leqslant$$
$$\leqslant (K_1K_2(p))^n\|H\|_{p'}((2n)!)^{1/p}.$$

Для $H(Z^n, W^n)=r^{2n}(h_\varkappa^{\otimes n}*w_\varkappa g)(Z^n)(h_\varkappa^{\otimes n}*w_\varkappa g)(W^n)$ имеем при $p'<\infty$ $(p'=p/(p-1))$

$$\|H\|_{p'}\leqslant r^{2n}\|\tilde h_\varkappa\cdot(w_\varkappa g)^\sim\|_p^{2n}\leqslant$$
$$\leqslant r^{2n}\|(w_\varkappa g)^\sim\|_p^{2n}\leqslant r^{2n}\|w_\varkappa g\|_{p'}^{2n}\leqslant r^{2n}K_3^n\|g\|_{p'}^{2n}$$

в силу неравенства Хаусдорфа — Юнга и того, что $|\tilde h_\varkappa(k)|\leqslant\leqslant\int h_\varkappa(x)\,dx=1$ и $\|w_\varkappa\|_\infty\leqslant\sqrt{K_3}$ для некоторой конечной константы K_3; см. (3.1) и (3.2).

Если положить $K_p\equiv r^2K_1K_2(p)K_3$, то (3.14) следует из (3.9), (3.15) и (3.16). ∎

Соединяя теорему 3.4 со следствием 3.2, мы получаем такое

Следствие 3.5. (Устойчивость в большом каноническом ансамбле.) *Пусть* $\alpha<p\alpha<1$, $m>0$ *и* $\varkappa\geqslant4$.

(1) *Предположим, что* $g\in L^{p'}(\Delta, d^2x)$ *для некоторого* $p'>1/(1-\alpha)$ (*т. е.* $p\alpha<1$) *для некоторого квадрата* Δ *конечного объема. Тогда* $\{\Xi(V_{\varkappa,m}, zg)\}_{\varkappa<\infty}$ *и* $\{Z(V_{\varkappa,m}, zg)\}_{\varkappa<\infty}$ *суть семейства целых функций от* z, *ограниченных по модулю величиной* $K_pe^{\overline{K}_p|z|^{p/(p-1)}}$ *равномерно по* $\varkappa$ *для некоторых постоянных* K_p, $\overline{K}_p$, *конечных при* $\alpha<p\alpha<1$.

(2) *Предположим, что* Λ — *открытое множество в* $\mathbb{R}^2$, *обладающее тем свойством, что полный объем объединения единичных квадратов из фиксированного покрытия* Λ *ограничен некоторой константой, умноженной на объем* $|\Lambda|$. *Тогда*

$$|\Xi(V_{\varkappa,m}, z\chi_\Lambda)|\leqslant K_pe^{\overline{K}_p|\mathrm{Re}\,z|^{p/(p-1)}|\Lambda|}$$

и

$$|Z(V_{\varkappa,m}, z\chi_\Lambda)|\leqslant K_pe^{\overline{K}_p|z|^{p/(p-1)}|\Lambda|}$$

равномерно по $\varkappa$ *для некоторых постоянных* K_p, $\overline{K}_p$, *конечных при* $\alpha<p\alpha<1$.

Доказательство. Первая часть вытекает непосредственно из следствия 3.2 и неравенства (3.14); сопоставляя (1) с теоремами 2.5 и 2.6, получаем (2).

Следствие 3.6. (Устойчивость в каноническом ансамбле.) *Пусть* $\alpha < p\alpha < 1$ *и* $\varkappa \geqslant 4$. *Положим* $\rho \equiv n/|\Lambda|$. *Тогда*

$$\left|Z_n\left(V_{\varkappa, m}, z\chi_\Lambda\right)\right| \leqslant K_p^n |z|^{2n} \left(\rho^{(1-p)/p}\right)^{2n} (n!)^2 \tag{3.17}$$

и

$$\left|\left\langle\left\{:\cos\varepsilon\Phi_\varkappa:_{C_m}(z\chi_\Lambda)\right\}^n\right\rangle_{C_m}\right| \leqslant K_p^n |z|^{2n} \left(\rho^{(1-p)/p}\right)^n n! \tag{3.18}$$

равномерно по $\varkappa$ *для всех* $\rho > 0$. *Здесь* K_p *суть константы, конечные при* $\alpha < p\alpha < 1$.

Доказательство. В силу предложения 3.5 $Z\left(V_{\varkappa, m}, z\chi_\Lambda\right)$ есть целая функция от z, ограниченная по модулю величиной $K_p e^{\overline{K}_p |z|^{p/(p-1)} |\Lambda|}$. В плоскости комплексного переменного z выберем контур Γ — окружность радиуса $\rho^{(p-1)/p}$ с центром в начале координат и применим интегральную формулу Коши по контуру Γ для того, чтобы вычислить $2n$-ю производную от $Z\left(V_{\varkappa, m}, z\chi_\Lambda\right)$ в точке $z=0$; отсюда получается (3.17), и те же самые рассуждения, примененные к $\Xi\left(V_{\varkappa, m}, z\chi_\Lambda\right)$, дают (3.18).

Теорема 3.7. (Снятие обрезания.) *Пусть* $\alpha < p\alpha < 1$ *и* $m > 0$.

(1) *Предположим, что* $g \in L^{p'}\left(\Delta, d^2x\right)$ *для некоторого* $p' > 1/(1-\alpha)$ (*т. е* $p\alpha < 1$) *и некоторого квадрата* Δ *конечного объема. Тогда*

$$\lim_{\varkappa\to\infty} Z_n(V_{\varkappa, m}, g) = Z_n(C_m, g), \tag{3.19}$$

$$\lim_{\varkappa\to\infty} \left\langle\left\{:\cos\varepsilon\Phi_\varkappa:_{C_m}(g)\right\}^n\right\rangle_{C_m} = \left\langle\left\{:\cos\varepsilon\Phi:_{C_m}(g)\right\}^n\right\rangle_{C_m}, \tag{3.20}$$

$$\lim_{\varkappa\to\infty} \Xi(V_{\varkappa, m}, zg) = \Xi(C_m, zg) \text{ и т. д.} \tag{3.21}$$

(2) *Оценки из следствий 3.5 и 3.6 сохранятся, если заменить в них* $\Xi(V_{\varkappa, m}, \cdot)$ *на* $\Xi(C_m, \cdot)$, $Z_n(V_{\varkappa, m}, \cdot)$ *на* $Z_n(C_m, \cdot)$ *и т. д.*

Доказательство. В предположениях теоремы 3.7 функции

$$g\left(X^n\right) g\left(Y^n\right) e^{-U_{C_m}(X^n, Y^n)} \quad \text{и} \quad e^{-pU_{C_m}(X^n, Y^n)} \tag{3.22}$$

интегрируемы (по мере Лебега $dX^n\, dY^n$) для всех p, таких, что $p\alpha < 1$. $\Big($Отметим, что $C_m(x) \sim -\frac{1}{4\pi}\ln(m^2|x^2|)$ при $x \to 0.\Big)$

См. также [4]. Теперь мы покажем, что

$$g(X^n)\,g(Y^n)\,e^{-U_{V_{\varkappa,m}}(X^n,Y^n)} \to g(X^n)\,g(Y^n)\,e^{-U_{C_m}(X^n,Y^n)} \tag{3.23}$$

при $\varkappa \to \infty$ в $L^1(\Delta^{\times 2n}, dX^n\,dY^n)$. В силу неравенства Гёльдера это следует из предельного соотношения

$$e^{-U_{V_{\varkappa,m}}(X^n,Y^n)} \to e^{-U_{C_m}(X^n,Y^n)} \quad \text{при} \quad \varkappa \to \infty \tag{3.24}$$

в $L^p(\Delta^{\times 2n}, dX^n\,dY^n)$. Нам надо лишь показать, что

$$I_\varkappa \equiv \int_{\Delta^{\times 2n}} dX^n dY^n \left| e^{-pU_{V_{\varkappa,m}}(X^n,Y^n)} - e^{-pU_{C_m}(X^n,Y^n)} \right| \to 0$$

при $\varkappa \to \infty$ [1]).

Далее

$$I_\varkappa \leqslant \int_{\Delta^{\times 2n}} dX^n dY^n \int_0^1 ds\, e^{-(spU_{V_{\varkappa,m}} + (1-s)\,pU_{C_m})(X^n,Y^n)} \times$$
$$\times\, p\left|(U_{V_{\varkappa,m}} - U_{C_m})(X^n,Y^n)\right| \leqslant$$
$$\leqslant p \sup_{s\in[0,1]} \int_{\Delta^{\times 2n}} dX^n\,dY^n\, e^{-(spU_{V_{\varkappa,m}} + (1-s)\,pU_{C_m})(X^n,Y^n)} \times$$
$$\times \left|(U_{V_{\varkappa,m}} - U_{C_m})(X^n,\,Y^n)\right| \leqslant$$
$$\leqslant p \sup_{s\in[0,1]} \left\| e^{-pU_{V_{\varkappa,m}}} \right\|_{1+\delta}^{s} \left\| e^{-pU_{C_m}} \right\|_{1+\delta}^{1-s} \left\| U_{V_{\varkappa,m}} - U_{C_m} \right\|_{(1+\delta)/\delta} \tag{3.25}$$

в силу неравенства Гёльдера, где $\delta > 0$ выбрано так, чтобы $p\alpha(1+\delta) < 1$, что возможно, ибо $p\alpha < 1$. Первый и второй множители в правой части (3.25) ограничены равномерно по $\varkappa < \infty$ и $s \in [0, 1]$ в силу неравенства Иенсена (см. (3.9) и (3.22)), так как $p\alpha(1+\delta) < 1$, а третий множитель, как легко видеть, стремится к 0 при $\varkappa \to \infty$. Этим доказано (3.19); (3.20) доказывается таким же образом. Наконец, (3.21) следует из равномерных оценок следствия 3.5, (1), и из (3.20). Этим завершается доказательство утверждения (1). Очевидно, (2) вытекает из (1) и следствий 3.5, 3.6. ∎

Теперь все готово для доказательства существования термодинамического предела давления (в большом каноническом ансамбле).

---

[1]) В силу элементарного неравенства $|a-b|^p \leqslant |a^p - b^p|$ при $a > 0$, $b > 0$, $p > 1$ из сходимости $I_\varkappa$ к нулю следует сходимость (3.24) в L^p. — *Прим. перев.*

d. Существование термодинамического предела.

Теорема 3.8. (Термодинамический предел давления.) *Пусть* $\alpha < 1$, *т. е.* $\beta e^2 < 4\pi$ (*и мы положим, как и выше,* $\beta = 1/kT = 1$) *и* $m > 0$, *и пусть* $\Lambda_{l \times t}$ — *произвольный прямоугольник со сторонами длиной* l *и* t. *Тогда для всех вещественных* z *предел*

$$\lim_{\substack{l \to \infty \\ t \to \infty}} \frac{1}{lt} \log \Xi \left(C_m,\ z\chi_{\Lambda_{l \times t}}\right) = p(C_m,\ z)$$

существует и является выпуклой функцией от z.

Доказательство. В силу теоремы 3.7 и марковского свойства гауссовской меры $d\mu_{C_m}$ (см. § 2, f, теорема 2.6; [23]) существуют гильбертово пространство $\mathscr{H}$ со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)$, вектор $\Omega_0 \in \mathscr{H}$ и (для вещественных z) трансфер-матрица $e^{-tH_l(z)}$, порожденная плотно определенным самосопряженным ограниченным снизу оператором $H_l(z)$ в $\mathscr{H}$, такие, что

$$\begin{aligned}\left(\Omega_0,\ e^{-tH_l(z)}\Omega_0\right) = \Xi\left(C_m,\ z\chi_{\Lambda_{l \times t}}\right) = \\ = \Xi\left(C_m,\ z\chi_{\Lambda_{t \times l}}\right) = \left(\Omega_0,\ e^{-lH_t(z)}\Omega_0\right).\end{aligned} \tag{3.26}$$

Эти уравнения впервые были доказаны Нельсоном [24] в теории хорошо известных $P(\varphi)_2$-моделей. Доказательство см. также в [28, гл. 5]. В силу теоремы 3.7 эти результаты тривиально обобщаются на рассматриваемый нами случай.

По спектральной теореме

$$\left(\Omega_0,\ e^{-tH_l(z)}\Omega_0\right) = \int e^{-t\lambda}\, d\rho_{l,\,z}(\lambda)$$

для некоторой вероятностной меры $\rho_{l,\,z}$, сосредоточенной на $[a, \infty)$, где $a = \inf \operatorname{spec} H_l(z) > -\infty$.

Пусть $0 < p < 1$. Тогда в силу неравенства Гёльдера

$$\int e^{-pt\lambda}\, d\rho_{l,\,z}(\lambda) \leqslant \left(\int e^{-t\lambda}\, d\rho_{l,\,z}(\lambda)\right)^p.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{ptl} \log\left(\Omega_0,\ e^{-ptH_l(z)}\Omega_0\right) \leqslant \frac{1}{tl} \log\left(\Omega_0,\ e^{-tH_l(z)}\Omega_0\right) \tag{3.27}$$

(в силу монотонности логарифма). Это неравенство показывает, что $\frac{1}{tl} \log \Xi\left(C_m,\ z\chi_{\Lambda_{l \times t}}\right)$ монотонно возрастает с ростом t. Согласно (3.26), t и l равноправны, так что имеется и монотонность по l.

Таким образом, величина $\frac{1}{tl}\log\Xi\left(C_m,\ z\chi_{\Lambda_{l\times t}}\right)$ монотонно возрастает по t и по l и в силу теоремы 3.7, (2), ограничена равномерно по t и l. Этим доказано существование предела $p(C_m,\ z)$.

Замечание. Эти рассуждения являются точным повторением рассуждений Гуэрры [15] для нашей ситуации.

Теперь мы докажем выпуклость. Для $0<\lambda<1$

$$\Xi\left(C_m,\ \lambda z\chi_\Lambda\right)=\left\langle\exp\left\{:\cos\varepsilon\Phi:_{C_m}\left(\lambda z\chi_\Lambda\right)\right\}\right\rangle_{C_m}\leqslant$$

$$\leqslant\left\langle\exp\left\{:\cos\varepsilon\Phi:_{C_m}\left(z\chi_\Lambda\right)\right\}\right\rangle_{C_m}^{\lambda}=\Xi\left(C_m,\ z\chi_\Lambda\right)^{\lambda}$$

в силу неравенства Гёльдера, примененного к $\langle\cdot\rangle_{C_m}=$ $=\int_{\mathscr{S}'}\cdot\, d\mu_{C_m}(\Phi)$. Следовательно, $p\left(C_m,\ \lambda z\right)\leqslant\lambda p\left(C_m,\ z\right)$.

Далее мы применим неравенство Гёльдера к интегралу от $e^{\left\{:\cos\varepsilon\Phi:_{C_m}\left(\lambda\left(z-z_0\right)\chi_\Lambda\right)\right\}}$ по мере

$$\Xi\left(C_m,\ z_0\chi_\Lambda\right)^{-1}e^{\left\{:\cos\varepsilon\Phi:_{C_m}\left(z_0\chi_\Lambda\right)\right\}}\,d\mu_{C_m}(\Phi)$$

и получим, что

$$p\left(C_m,\ (1-\lambda)z_0+\lambda z\right)\leqslant(1-\lambda)\,p\left(C_m,\ z_0\right)+\lambda p\left(C_m,\ z\right)$$

для $\lambda\in[0,\ 1]$, что и доказывает выпуклость; см. также [28, гл. 6].

Замечание. Для доказательства существования термодинамического предела свободной энергии (в каноническом ансамбле), основанного на оценках устойчивости из следствия 3.6 и теоремы 3.7, следует обратиться к стандартным методам; см., например, [26, гл. 3] и содержащиеся там ссылки.

После этого доказательство того, что канонический и большой канонический ансамбли для нашей системы КСМ *эквивалентны* в смысле [26, § 3.4], будет несложным упражнением, которое мы предоставляем читателю. Доказательство следует из рассуждений, подобных использованным в [26, 3.4.5], и опирается на следствие 3.6.

Теорема 3.9. (Термодинамический предел корреляционных функций.) *Пусть* $\alpha<4/\pi^2$ (*т. е.* $\beta\varepsilon^2<16/\pi$) *и* $m>0$. *Пусть* z — *произвольное вещественное число,* n — *натуральное число,* $e_j=$ $=\pm1$, $j=1,\ \ldots,\ n$ *и* $Q^n=\left(x_1,\ e_1,\ \ldots,\ x_n,\ e_n\right)$. *Тогда*

(1) *Классические корреляционные функции в большом каноническом ансамбле в сосуде* $\Lambda\subset\mathbb{R}^2$ *можно представить*

формулой

$$\rho_\Lambda^z(Q^n) = z^n \Xi(C_m, z\chi_\Lambda)^{-1} \cdot \left\langle \prod_{j=1}^{n} :e^{ie_j\varepsilon\Phi}:_{C_m}(x_j)\, e^{:\cos\varepsilon\Phi:_{C_m}(z\chi_\Lambda)} \right\rangle_{C_m}.$$

(2) *Пусть* $\{\Lambda_i\}_{i\in I}$ — *возрастающее семейство открытых областей в* $\mathbb{R}^2$. *Тогда предел*

$$\lim_{\Lambda_l\to\mathbb{R}^2} \rho_{\Lambda_l}^z(Q^n) \equiv \rho^z(Q^n)$$

существует в смысле слабой сходимости мер на $\mathbb{R}^{2n}$ [1]). *Корреляционные функции* $\rho^z(Q^n)$ *евклидово-инвариантны.*

(3) *Существуют хаусдорфово измеримое пространство* (X, Σ) *и регулярная борелевская вероятностная мера* $d\mu$ *на* (X, Σ), *такие, что*

$$\rho^z(Q^n) = \int_X d\mu(\chi)\, \rho_\chi^z(Q^n) \quad \text{для всех} \quad n$$

и меры ρ_χ^z *являются корреляционными функциями чистых фаз (множества из* Σ *соответствуют измеримым множествам чистых фаз). Для* μ*-почти всех* $\chi \in X$ *корреляционные функции* $\rho_\chi^z(Q^n)$ *евклидово-инвариантны и обладают кластерным свойством (в частности, равновесное состояние, определяемое набором* $\{\rho_\chi^z(Q^n)\}_{n=0}^{\infty}$, *эргодично относительно действия группы трансляций). В предположении, что существуют по меньшей мере две чистые фазы, нарушение симметрии* $\Phi \to -\Phi$ *происходит для множества* Δ *чистых фаз положительной* μ*-меры и означает, что в чистой фазе* $\chi \in \Delta$ *отдельная частица с зарядом* $\pm\varepsilon$ *имеет ненулевую постоянную потенциальную энергию.*

Доказательство. (1) следует из леммы 2.2 и из [26, § 4.2].

Доказательство утверждения (2) основано на том, что система КСМ с парным потенциалом Юкавы эквивалентна обобщенной ферромагнитной модели Изинга с взаимодействием ближайших соседей [16; 28, гл. VIII]; поэтому чтобы доказать сходимость при $\Lambda \to \mathbb{R}^2$, применяется второе неравенство Гриффитса [13, 16]. Полное доказательство проводится по образцу доказательства аналогичного результата в квантовой теории поля $P(\varphi)_2$, предложенного Нельсоном

---

[1]) То есть $\int \rho_\Lambda^z(Q^n) f(Q^n)\, dQ^n \to \int \rho^z(Q^n) f(Q^n)\, dQ^n$ при $\Lambda \to \mathbb{R}^2$ для любой непрерывной финитной функции $f(Q^n)$. — *Прим. ред.*

[16, 25]. Требуются некоторые добавочные технические леммы, для того чтобы получить равномерные оценки корреляционных функций ρ^z_Λ; это необходимо для замены случайных величин $:e^{ie_j\varepsilon\Phi}:$ полем Φ с тем, чтобы можно было применить рассуждения Нельсона. Полное доказательство утверждения (2) читатель найдет в работе [8].

(3) следует из (2), если применить изоморфизм $\tilde{I}_1$ и общую теорему о разложении на чистые фазы, доказанную в [10, 11]. ∎

Замечания. 1) Очевидно, что при $\beta\varepsilon^2 \geqslant 4\pi$ функция $e^{-\beta U_{C_m}(X^n, Y^n)}$ не интегрируема по мере Лебега $dX^n\, dY^n$ (это тривиально проверяется при $n=1$); $\Xi(C_m, z\chi_\Lambda) = \infty$ для $z \neq 0$, $\Lambda \neq 0$ и корреляционные функции $\rho^z_\Lambda(Q^n)$ не существуют. Это и есть катастрофа коллапса (образование пар), описанная во введении.

Более жесткое условие $\beta\varepsilon^2 < 16/\pi$, требуемое в теореме 3.9 вместо условия $\beta\varepsilon^2 < 4\pi$, входившего во все предыдущие результаты § 3, возникает, по всей видимости, из-за некоторой грубости оценок; см. [8].

2) Для $\beta\varepsilon^2 < 4\pi$ и $m > 0$ корреляционные функции $\rho^z(Q^n)$ *аналитичны* по z при $|z/m^2| < r_{\beta\varepsilon^2}$ (где $r_{\beta\varepsilon^2} > 0$ при $\beta\varepsilon^2 < 4\pi$) и обладают экспоненциальным кластерным свойством (интервал $0 < z < m^2 r_{\beta\varepsilon^2}$ содержится, таким образом, в однофазной области). В дополнение к химическому потенциалу для числа частиц $(-\log z)$ можно ввести химический потенциал μ для заряда. Если $|z/m^2|$ и $e^{-\mu}$ малы, то корреляционные функции по-прежнему существуют и обладают экспоненциальным кластерным свойством. Эти результаты основаны на применении кластерного разложения Глимма—Джаффе—Спенсера; см. по этому поводу их статью в [7] и приведенные там ссылки. Доказательства этих результатов содержатся в [9].

3) Применяя изоморфизмы $\tilde{I}_1$ и $\tilde{I}_2$, описанные во введении, к утверждениям теоремы 3.9, можно установить существование и пуанкаре-ковариантность квантовых теорий поля (поля, подчиняющегося квантованному уравнению sin-Гордона с ненулевой массой, и квантовой электродинамики + взаимодействие Тирринга в двумерном пространстве-времени), указанных в $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ ДЛЯ КУЛОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

В этом разделе мы установим для двухкомпонентных *нейтральных* систем КСМ с парным кулоновским потенциалом все результаты § 3, за одним исключением: точный аналог теоремы 3.9 может быть доказан только в предположении, что в классической нейтральной кулоновской системе *дебаевское экранирование* приводит в термодинамическом пределе к конечному радиусу корреляций, т. е. в системе нет дальнего порядка. (Без этого предположения еще можно доказать существование корреляционных функций в термодинамическом пределе, но их единственность остается открытой проблемой; см. [8].) Применяя изоморфизмы I_1, I_2, описанные во введении, к нашим результатам из § 4, можно установить существование и пуанкаре-ковариантность теорий поля, определенных в B и C: квантованного уравнения sin-Гордона и массивной модели Тирринга (в вакуумном секторе); см. [8].

а. Аппроксимация и мажорирование кулоновской системы КСМ с помощью системы КСМ с потенциалом Юкавы. Мы полагаем

$$V_m(x-y) \equiv C_m(x-y) + \frac{1}{4\pi}\ln(cm^2), \tag{4.1}$$

где c — некоторая числовая константа, и

$$V_0(x-y) \equiv -\frac{1}{4\pi}\ln|x-y|^2 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}. \tag{4.2}$$

Легко показать, что при подходящем c

$$\lim_{x\to 0}\left[V_{m_1}(x) - V_{m_2}(x)\right] = 0; \tag{4.3}$$

этот факт хорошо известен; см., например, [2, формула (2.7)].

Лемма 4.1. *Пусть* $\beta = 1$, $\varepsilon^2 < 4\pi$ *и* $\varepsilon^2 < p\varepsilon^2 < 4\pi$, *а* g — *положительная функция из* $L^{p'}(\Delta, d^2x)$ *для некоторого квадрата* Δ *конечного объема. Тогда для всех* m, $0 < m \leqslant 1$,

$$Z_n(V_m, g) \leqslant Z_n(V_1, g) = c^{n\varepsilon^2/4\pi} Z_n(C_1, g). \tag{4.4}$$

Доказательство. Следуя лемме 2.1, запишем

$$Z_n(V_m, g) = \int dX^n dY^n g(X^n)\, g(Y^n)\, e^{-U_{V_m}(X^n, Y^n)} =$$
$$= \int dX^n dY^n g(X^n)\, g(Y^n)\, e^{-U_{V_1}(X^n, Y^n)} \times$$
$$\times e^{-\int d^2x\, d^2y\, \rho_n(x)\,(V_m - V_1)(x-y)\,\rho_n(y)}, \tag{4.5}$$

где $\rho_n(x)=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon\{\delta(x-x_j)-\delta(x-y_j)\}$ и, согласно (4.3), константа, появляющаяся в лемме 2.1, (2.9) равна 0. Существование интеграла $\int dx\,dy\,\rho_n(x)(V_m-V_1)(x-y)\rho_n(y)$ очевидно. Поскольку $\int_\Delta dx\,\rho_n(x)=0$ (нейтральность), то

$$\int d^2x d^2y \rho_n(x)(V_m-V_1)(x-y)\rho_n(y)=$$
$$=\int d^2x d^2y\,\rho_n(x)(C_m-C_1)(x-y)\rho_n(y)=$$
$$=\int d^2k\,|\tilde{\rho}_n(k)|^2\left(\frac{1}{k^2+m^2}-\frac{1}{k^2+1}\right)\geqslant 0. \tag{4.6}$$

Утверждение леммы следует из (4.5) и (4.6). ∎

Лемма 4.2. *Пусть* $e_j=\pm 1$, $j=1, \ldots, n$. *В условиях леммы* 4.1

$$(1)\ \lim_{m\to 0}\left\langle\prod_{j=1}^{n}:e^{ie_j\varepsilon\Phi}:_{C_1}(x_j)\right\rangle_{C_m}=$$
$$=\lim_{m\to 0} m^{n\varepsilon^2/2\pi}\left\langle\prod_{j=1}^{n}:e^{ie_j2\Phi}:_{C_m}(x_j)\right\rangle_{C_m}=$$
$$=\begin{cases}0, & \text{*если*}\ \sum_{j=1}^{n}e_j\neq 0\ (\text{*в частности, если n нечетно*}),\\ e^{-U(Q^n)}, & \text{*если*}\ \sum_{j=1}^{n}e_j=0,\end{cases}$$

где $Q^n=(x_1, e_1, \ldots, x_n, e_n)$ *и* $U(Q^n)=\frac{\varepsilon^2}{2\pi}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}e_ie_j\ln\frac{1}{|x_i-x_j|}$.

$$(2)\ \lim_{m\to 0}\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q}Z_n^{2q-n}(V_m, g)=$$
$$=2^n\lim_{m\to 0}\langle\{:\cos\varepsilon\Phi:_{V_1}(g)\}^n\rangle_{V_m}=$$
$$=\begin{cases}0, \ \text{*если n нечетно*},\\ \binom{n}{n/2}Z_{n/2}(V_0, g), \ \text{*если n четно, и в этом случае*}\\ Z_{n/2}(V_0, g)=\lim_{m\to 0}Z_{n/2}(V_m, g).\end{cases}$$

(3) $Z_n(V_0, g)\leqslant Z_n(V_1, g)$.

Доказательство. Часть (1) этой леммы хорошо известна из теории свободного безмассового квантового поля Клейна — Гордона в двумерном пространстве-времени. Она обсуждается, например, в [29, 2]. Доказательство получается прямо из леммы 2.2, (2.17), (2.16) и из (4.1), (4.2). Часть (2) немедленно следует из формул (2.21), (2.18) и из леммы 4.2, (1). Наконец, (3) следует из (2) и леммы 4.1. ∎

Следствие 4.3.

$$\lim_{m\to 0} \Xi(V_m, 2zg) = Z(V_0, zg) \equiv \Xi(V_0, 2zg).$$

Доказательство. Это соотношение вытекает из леммы 4.2, (2), (4.4) и леммы 4.2, (3), а также из оценок, установленных в следствии 3.5 и теореме 3.7, которые позволяют заключить, что разложение $\Xi(V_1, 2zg)$ в степенной ряд по z сходится абсолютно для всех $z \in \mathbb{C}$. ∎

Теорема 4.4. (Устойчивость классической кулоновской системы.) *В условиях леммы* 4.1 *и следствия* 3.5, (2),

$$|\Xi(V_0, z\chi_\Lambda)| \leqslant K_p e^{\overline{K}_p\,|\operatorname{Re} z|^{p/(p-1)}\,|\Lambda|},$$

$$|Z_n(V_0, z\chi_\Lambda)| \leqslant K_p^n |z|^{2n} \left(\frac{n}{|\Lambda|}\right)^{\frac{1-p}{p}n} (n!)^2,$$

где K_p, $\overline{K}_p$ *— константы, конечные при* $\varepsilon^2 < p\varepsilon^2 < 4\pi$.

Доказательство. Теорема вытекает из леммы 4.2, (2) и (3), следствия 4.3 и оценок, доказанных в следствиях 3.5, 3.6 и теореме 3.7. ∎

b. Существование термодинамического предела.

Теорема 4.5. (Термодинамический предел давления.) *Пусть* $\varepsilon^2 < 4\pi$ *и* $\{\Lambda_{l\times t}\}$ *— семейство прямоугольников, такое же, как в теореме* 3.8. *Тогда для всех вещественных* z *предел*

$$\lim_{\substack{l\to\infty \\ t\to\infty}} \frac{1}{lt} \log \Xi\left(V_0, z\chi_{\Lambda_{l\times t}}\right) \equiv p(V_0, z)$$

существует и является выпуклой функцией z.

Доказательство. Эта теорема представляет собой аналог теоремы 3.8 и вытекает из теоремы 4.4, следствия 4.3 и рассуждений, использованных в доказательстве теоремы 3.8 (и доказывающих монотонность по l и t). ∎

Замечание. Прямое доказательство существования термодинамического предела свободной энергии (в каноническом ансамбле) можно получить, используя технику работы [19], которая применима к рассматриваемому здесь случаю. Имеет место и эквивалентность канонического и большого канонического ансамблей (см. также (4.16) ниже).

Определение. Пусть $\rho_m^z(Q^n)$ — классические корреляционные функции в термодинамическом пределе (в большом каноническом ансамбле) для системы частиц с потенциалом Юкавы V_m. Здесь $Q^n = (x_1, e_1, \ldots, x_n, e_n)$; $e_j = \pm 1$ для $j = 1, \ldots, n$. (Эти корреляционные функции были построены в теореме 3.9 для всех $m > 0$, произвольного вещественного z и $\varepsilon^2 < 16/\pi$.)

Пусть z — положительное число. Положим

$$\xi(m, z)^{-1} = \lim_{|x|\to\infty}\left[-\frac{1}{|x|}\log\left\{\rho_m^z(x, 1, 0, -1) - \rho_m^z(0, 1)^2\right\}\right];$$

$\xi(m, z)$ — корреляционный радиус. Исходя из корреляционных неравенств [16] можно показать, что $\xi(m, z)$ возрастает, когда m убывает; см. [8].

Теорема 4.6. (Существование корреляционных функций для $m = 0$.) *Пусть $\varepsilon^2 < 16/\pi$. Предположим, что*

$$\xi(0, z) \equiv \sup \xi(m, z) < \infty. \tag{4.7}$$

Тогда для всех натуральных n предел

$$\lim_{m\to 0}\rho_m^z(Q^n) \equiv \rho_0^z(Q^n)$$

существует в смысле сходимости мер на $\mathbb{R}^{2n}$; меры $\{\rho_0^z(Q^n)\}_{n=0}^{\infty}$ евклидово-инвариантны и обладают экспоненциальным кластерным свойством (с показателем экспоненты $\xi(0, z)^{-1}$).

Замечания. Эта теорема следует из корреляционных неравенств [16, 8] типа второго неравенства Гриффитса и из равномерных по m оценок мер $\left\{\rho_m^z(Q^n)\right\}_{m>0}$. Она доказана в [8], где приведены две эквивалентные конструкции корреляционных функций $\rho_0^z(Q^n)$, одна из которых описана выше. Дебаевское экранирование и изоморфизм между классическим нейтральным кулоновским газом и массивной моделью Тирринга наводит на мысль, что $\xi(0, z)$ конечно для некоторых значениий z (см. [3]). Если это так, то $\xi(0, z) < \infty$ для всех $z \neq 0$, как мы покажем ниже. (Поскольку z определяет среднюю плотность ρ и $\sqrt[3]{\rho^{-1}}$ имеет размерность длины, то предположение о том, что $\xi(0, z) < \infty$, не лишено смысла.)

Более слабая форма теоремы 4.6, которая *не опирается* на предположение (4.7), доказана в [8]. В этом случае, однако, неизвестна единственность $\rho_0^z(Q^n)$.

Теперь мы используем автомодельное поведение канонической статистической суммы классического нейтрального кулоновского газа для того, чтобы получить явные выражения для давления p и корреляционного радиуса ξ как функций активности z и строго вывести хорошо известное уравнение состояния [21, 17]

$$p=\frac{\rho}{\beta}\left(1-\frac{\beta\varepsilon^2}{8\pi}\right). \tag{4.8}$$

Положим $\alpha\equiv\frac{\beta\varepsilon^2}{4\pi}$ (и положим, кроме того, $\beta=1$). Пусть $p(\alpha,z)\equiv p(V_0,z)|_{\varepsilon^2=4\pi\alpha}$. Сначала мы докажем, что давление $p(\alpha,z)$ в большом каноническом ансамбле имеет вид

$$p(\alpha,z)=F(\alpha)\,z^{2/(2-\alpha)}.$$

Согласно теореме 4.5,

$$p(\alpha,z)=\lim_{\substack{l\to\infty\\ t\to\infty}}\frac{1}{lt}\log\Xi\left(\alpha,z\chi_{\Lambda_{l\times t}}\right), \tag{4.9}$$

где $\Xi\left(\alpha,z\chi_{\Lambda_{l\times t}}\right)\equiv\Xi\left(V_0,z\chi_{\Lambda_{l\times t}}\right)\Big|_{\varepsilon^2=4\pi\alpha}$ — большая каноническая статистическая сумма для прямоугольника со сторонами длиной l и t. Из теоремы 4.5 нам известно, что $p(\alpha,z)$ — *неотрицательная выпуклая функция* z.

По определению

$$\Xi\left(\alpha,z\chi_{\Lambda_{l\times t}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(n!)^2}Z_n\left(\alpha,\chi_{\Lambda_{l\times t}}\right),$$

$$Z_n\left(\alpha,\chi_{\Lambda_{l\times t}}\right)=$$

$$=\int\limits_{(\Lambda_{l\times t})^{\times 2n}}\prod_{l=1}^{2n}d^2x_l d^2y_l\,\frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_i-x_j|^{2\alpha}|y_i-y_j|^{2\alpha}}{\prod\limits_{i,j=1}^{n}|x_i-y_j|^{2\alpha}}. \tag{4.10}$$

Теперь мы произведем замену переменных: положим $l=\lambda l_0$, $t=\lambda t_0$ и

$$x_i\mapsto\bar{x}_i=\lambda^{-1}x_i,\quad d^2x_i\mapsto\lambda^2d^2\bar{x}_i,$$

$$y_i\mapsto\bar{y}_i=\lambda^{-1}y_i,\quad d^2y_i\mapsto\lambda^2d^2\bar{y}_i,\quad \Lambda_{\lambda l_0\times\lambda t_0}\mapsto\Lambda_{l_0\times t_0}.$$

Тогда, согласно (4.10),

$$Z_n\left(\alpha,\chi_{\Lambda_{\lambda l_0\times\lambda t_0}}\right)=\lambda^{(2-\alpha)2n}Z_n\left(\alpha,\chi_{\Lambda_{l_0\times t_0}}\right) \tag{4.11}$$

и, следовательно,

$$\Xi\left(\alpha,\ z\chi_{\Lambda_{\lambda l_0 \times \lambda t_0}}\right) = \Xi\left(\alpha,\ \lambda^{2-\alpha} z\chi_{\Lambda_{l_0 \times t_0}}\right). \tag{4.12}$$

В силу (4.9) и (4.12)

$$\begin{aligned}\lambda^2 p(\alpha, z) &= \lambda^2 \lim_{\substack{l_0\to\infty \\ t_0\to\infty}} \frac{1}{\lambda l_0 \lambda t_0} \log \Xi\left(\alpha,\ z\chi_{\Lambda_{\lambda l_0 \times \lambda t_0}}\right) = \\ &= \lim_{\substack{l_0\to\infty \\ t_0\to\infty}} \frac{1}{l_0 t_0} \log \Xi\left(\alpha,\ \lambda^{2-\alpha} z\chi_{\Lambda_{l_0 \times t_0}}\right) = \\ &= p\left(\alpha,\ \lambda^{2-\alpha} z\right). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Неотрицательность и выпуклость $p(\alpha, z)$ как функции z вместе с (4.13) позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 4.7. (1) $p(\alpha, z) = F(\alpha) z^{2/(2-\alpha)}$ *для некоторой положительной функции* $F(\alpha)$, *конечной при* $\alpha < 1$. *Вводя переменную* $\mu = \ln z$ (*химический потенциал*), *запишем*

$$p(\alpha, e^{\mu}) \equiv \tilde{p}(\alpha, \mu) = F(\alpha) e^{2\mu/(2-\alpha)}.$$

(2) *При* $\alpha < 1$ *в нейтральном классическом кулоновском газе не происходит фазовых переходов ни при каком значении плотности* ρ *газа на* $(0, \infty)$.

Доказательство. (1) мы уже доказали, (2) прямо следует из (1). Для удобства читателя мы вычислим преобразование Лежандра функции $\tilde{p}(\alpha, \mu)$ относительно переменного μ, т. е. *свободную энергию* $f(\alpha, \rho)$ как функцию плотности газа ρ. Имеем

$$\rho \equiv \frac{\partial \tilde{p}(\alpha, \mu)}{\partial \mu} = \frac{2}{2-\alpha} F(\alpha) e^{2\mu/(2-\alpha)},$$

т. е.

$$\begin{aligned}\mu(\rho) &= \frac{2-\alpha}{2} \ln\left[\frac{(2-\alpha)\rho}{2F(\alpha)}\right], \\ f(\alpha, \rho) &\equiv \mu(\rho)\rho - \tilde{p}(\alpha, \mu(\rho)) = \\ &= \frac{2-\alpha}{2} \rho\left[\ln\left[\frac{(2-\alpha)\rho}{2F(\alpha)}\right] - 1\right]. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Поскольку $F(\alpha)$ положительно, то функция $f(\alpha, \rho)$ *аналитична* относительно ρ на $(0, \infty)$, что и означает отсутствие фазовых переходов в этом интервале. ■

Отметим, что

$$\tilde{p}(\alpha, \mu(\rho)) = \rho\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \rho\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{8\pi}\right). \tag{4.15}$$

Это *уравнение состояния* классического нейтрального кулоновского газа. Оно было ранее получено в работах [21, 17], в которых, однако, равенство (4.9) предполагалось, но оставалось недоказанным. Теорема 4.7, (1), показывает, что для кулоновского газа разложение давления $p(\alpha, z)$ по степеням z невозможно (легко видеть, что явные выражения для коэффициентов такого разложения содержат инфракрасные расходимости).

Далее мы хотим вывести явное выражение для корреляционного радиуса $\xi(m, z)$ при $m=0$. Пусть α фиксировано. В дальнейшем мы должны будем предположить, что существует некоторое $z_0 \neq 0$, такое, что

$$\sup_{m>0} \xi(m, z_0)\big|_{\varepsilon^2=4\pi\alpha} < \infty. \tag{4.16}$$

Удобно изменить обозначения:

$$\begin{gathered}\xi(\alpha, z) \equiv \xi(m, z)\big|_{m=0,\ \varepsilon^2=4\pi\alpha}, \\ u_1^z \equiv \rho_{m=0}^z(x, 1) = \rho_{m=0}^z(0, \pm 1), \\ u_2^z \equiv \rho_{m=0}^z(x, 1, 0, -1) - (u_1^z)^2.\end{gathered} \tag{4.17}$$

Используя небольшое обобщение соотношений автомодельности (4.13), доказанное в предположении (4.16) в [8], можно показать, что

$$\lambda^{2\alpha} u_2^{\lambda^{\alpha-2} z_0}(x) = u_2^{z_0}(\lambda^{-1}x). \tag{4.18}$$

Подобные явные уравнения автомодельности («Каллана — Симанзика») могут быть получены для n-точечных функций Урселла $u_n^z(x_1, \ldots, x_{n-1})$ при всех n; см. [8]. В этой работе мы их не используем. Известно (см., например, [8]), что

$$\xi(\alpha, z_0)^{-1} = \lim_{|x|\to\infty} -\frac{1}{|x|}\log u_2^{z_0}(x). \tag{4.19}$$

Таким образом, в силу (4.18)

$$\begin{aligned}\xi(\lambda^{\alpha-2}z_0, \alpha)^{-1} &= \lim_{|x|\to\infty}\left[-\frac{1}{|x|}\log u_2^{\lambda^{\alpha-2}z_0}(x)\right] = \\ &= \lim_{|x|\to\infty}\left[-\frac{1}{|x|}\log\left[\lambda^{2\alpha}u_2^{\lambda^{\alpha-2}z_0}(x)\right]\right] = \\ &= \lambda^{-1}\lim_{|x|\to\infty}\left[-\frac{1}{\lambda^{-1}|x|}\log u_2^{z_0}(\lambda^{-1}x)\right] = \lambda^{-1}\xi(\alpha, z_0)^{-1}\end{aligned}$$

для произвольного $\lambda > 0$. Поэтому

$$\xi(\lambda z_0, \alpha) = G(\alpha)(\lambda z_0)^{1/(\alpha-2)} \quad \text{или} \quad \xi(z, \alpha) = G(\alpha)\, z^{1/(\alpha-2)} \tag{4.20}$$

для некоторой измеримой функции G от α.

Заметим, что $G(\alpha = 0) = 0$. Из непрерывности G в точке $\alpha = 0$ следовало бы, что величина $\xi(z, \alpha)$ конечна для всех $z \neq 0$, если α достаточно мало. Из теоремы типа Ли — Янга относительно параметра α следовало бы, что $\xi(z, \alpha)$ конечно для всех $z \neq 0$ и всех, за исключением не более чем счетного множества, $\alpha \in [0, 1)$. Мы пока не в состоянии доказать ни одного из этих предположений (в доказательстве может потребоваться нечто вроде «разложения вблизи $z = \infty$»). Уравнение (4.20) согласуется с нашим предположением о дебаевском экранировании и уточняет его.

c. Образование пар при $T \searrow T_c$. Здесь мы построим перенормированный предел давления при $\alpha \nearrow 1$ (т. е. $T \searrow T_c$), используя некоторые предварительные оценки из [4]. Пусть Δ — квадрат в $\mathbb{R}^2$ площади 1/4.

Мы полагаем $z(\alpha) \equiv Z_1(\alpha, \chi_\Delta)^{-1/2}$.

Лемма 4.8. *Существует конечная константа $c_1 \geqslant 1$, такая, что*

$$\limsup_{\alpha \nearrow 1} p(\alpha, z(\alpha) z) = c_1 z^2. \tag{4.21}$$

Доказательство. (1) В силу автомодельности (теорема 4.7) достаточно доказать (4.21) для малых $|z|$; затем оно распространяется на произвольные z в силу теоремы 4.7, (1).

(2) Итак, мы должны только доказать, что

$$\left|\Xi(\alpha, z(\alpha) z\chi_\Lambda)\right| < K e^{\bar{K}|\Lambda|} \tag{4.22}$$

для всех $\alpha < 1$ и достаточно малых z с константами K и $\bar{K}$, *не зависящими* от α. Согласно лемме 4.2, (3),

$$\Xi(\alpha, z(\alpha) z\chi_\Lambda) \leqslant \Xi(V_1, z(\alpha) z\chi_\Lambda)\big|_{\varepsilon^2 = 4\pi\alpha} =$$
$$= \Xi(C_1, z(\alpha) c^{\alpha/2} z\chi_\Lambda)\big|_{\varepsilon^2 = 4\pi\alpha},$$

где c — константа, определенная в (4.1).

В силу теоремы 2.5 и следствия 3.2

$$\Xi(C_1, z(\alpha) c^{\alpha/2} z\chi_\Lambda)\big|_{\varepsilon^2 = 4\pi\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{\Delta \cap \Lambda \neq \varnothing} \left[\Xi(C_1, z(\alpha) p c^{\alpha/2} z\chi_\Delta)\big|_{\varepsilon^2 = 4\pi\alpha}\right]^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \left[\Xi(C_0^S, z(\alpha) r p c^{\alpha/2} z w \chi_{\Delta_{1/2}})\big|_{\varepsilon^2 = 4\pi\alpha}\right]^{\frac{K \cdot |\Lambda|}{p \cdot r}} \leqslant$$
$$\leqslant \left[\Xi(C_0^S, z(\alpha) \bar{z} \chi_{\Delta_{1/2}})\big|_{\varepsilon^2 = 4\pi\alpha}\right]^{\frac{K \cdot |\Lambda|}{p \cdot r}},$$

где $\Lambda_{1/2}$ — квадрат, введенный в § 3, а, C_0^S определено в § 3, b, и

$$\bar{z} = rp\,|z|\max(c^{1/2}, 1)\sup_{x \in \Delta_{1/2}} |w(x)|.$$

Таким образом, нам осталось оценить $\Xi\left(C_0^S, z(\alpha)\bar{z}\chi_{\Delta_{1/2}}\right)\Big|_{e^2=4\pi\alpha}$ равномерно по всем $\alpha < 1$.

(3) Чтобы получить последнюю оценку, как мы увидим, достаточно доказать, что

$$z(\alpha)^{2n} Z_n\left(C_0^S, \chi_{\Delta_{1/2}}\right)\Big|_{e^2=4\pi\alpha} \leqslant K_1^n (n!)^2 \tag{4.23}$$

при всех $\alpha < 1$ с константой K_1, *не зависящей* от α. Для доказательства оценки (4.23) мы воспользуемся (3.8) и (3.11) — (3.13) и получим (наши обозначения те же, что и в теореме 3.4):

$$\int_{\Delta_{1/2}^{\times 2n}} dZ^n\, dW^n \left|\det\left[\frac{1}{z_i - w_j}\right]\right|^\alpha \prod_{j=1} |z_j - w_{j+n}|^\alpha |w_j - z_{j+n}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant K_2^n \int_{\Delta_{1/2}^{\times 2n}} dZ^n\, dW^n \left|\sum_{\pi \in \gamma_{2n}} \prod_{i=1}^{2n} \left|\frac{1}{z_i - w_{\pi(i)}}\right|\right|^\alpha \leqslant$$

$$\leqslant K_2^n \left[\sum_{\pi \in \gamma_{2n}} \int_{\Delta_{1/2}^{\times 2n}} dZ^n\, dW^n \prod_{i=1}^{2n} \frac{1}{|z_i - w_{\pi(i)}|^\alpha}\right] \leqslant$$

$$\leqslant K_3^n (2n!) \int_{\Delta_{1/2}^{\times 2n}} dZ^n\, dW^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z_i - w_i|^\alpha |z_{i+n} - w_{i+n}|^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant (n!)^2 K_1^n z(\alpha)^{-2n},$$

что доказывает (4.23). Близкие оценки имеются в работе [4, § 3]. Отсюда

$$1 \leqslant \Xi\left(C_0^S, z(\alpha)\bar{z}\chi_{\Delta_{1/2}}\right)\Big|_{e^2=4\pi\alpha} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \bar{z}^{2n} z(\alpha)^{2n} Z_n\left(C_0^S, \chi_{\Delta_{1/2}}\right)\Big|_{e^2=4\pi\alpha} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(K_1 \bar{z}^2\right)^n. \tag{4.24}$$

Ряд в правой части (4.24) сходится при достаточно малом $|z|$. Этим завершается доказательство (4.22); (1) и следующий результат, который показывает, что $c_1 \geqslant 1$, дают лемму 4.8. ∎

Теорема 4.9. $\liminf\limits_{\alpha\nearrow 1} p(\alpha, z(\alpha)z) = z^2$.

Доказательство. Положим $\Delta_\lambda \equiv \{x \mid x/\lambda \in \Delta_{1/2}\}$.

1) $\liminf\limits_{\alpha\nearrow 1} p(\alpha, z(\alpha)z) = \liminf\limits_{\alpha\nearrow 1} \lim\limits_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda^2} \log \Xi\left(\alpha, z(\alpha) z\chi_{\Delta_\lambda}\right)$.

Ясно, что

$$\inf_{1>\beta\geqslant\alpha} \frac{1}{\lambda^2} \log \Xi\left(\beta, z(\beta) z\chi_{\Delta_\lambda}\right)$$

есть возрастающая (точнее, неубывающая) функция α (тривиально) и λ (в силу теорем 4.5 и 3.8). Поэтому

$$\liminf_{\alpha\nearrow 1}\left[\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda^2} \log \Xi\left(\alpha, z(\alpha) z\chi_{\Delta_\lambda}\right)\right] = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda^2}\left[\liminf_{\alpha\nearrow 1} \log \Xi\left(\alpha, z(\alpha) z\chi_{\Delta_\lambda}\right)\right]. \quad (4.25)$$

2) Из (доказательства) теоремы 4.7 мы получаем, что

$$\Xi\left(\alpha, z(\alpha) z\chi_{\Delta_\lambda}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n} z(\alpha)^{2n}}{(n!)^2} Z_n\left(\alpha, \chi_{\Delta_\lambda}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n!)^2} \lambda^{(2-\alpha)2n} z(\alpha)^{2n} Z_n\left(\alpha, \chi_{\Delta_{1/2}}\right).$$

3) Достаточно доказать теорему 4.9 для малых z. Поэтому мы можем взять z настолько малым, чтобы были применимы оценки (4.22) и (4.24). Тогда остается показать, что

$$\lim_{\alpha\nearrow 1} z(\alpha)^{2n} Z_n\left(\alpha, \chi_{\Delta_{1/2}}\right) = n!.$$

Это доказано в [4, § 3]. Таким образом,

$$\lim_{\alpha\nearrow 1} \Xi\left(\alpha, z(\alpha) z\chi_{\Delta_\lambda}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 z^2)^n}{n!} = e^{\lambda^2 z^2}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\lambda^2} \lim_{\alpha\nearrow 1} \log \Xi\left(\alpha, z(\alpha) z\chi_{\Delta_\lambda}\right) = z^2,$$

что завершает доказательство теоремы 4.9.

Интерпретация. Лемма 4.8 и теорема 4.9 показывают, что при $\alpha \nearrow 1$, т. е. $T \searrow T_c$, вклад взаимодействий между противоположно заряженными частицами, объединенными попарно, становится преобладающим. Это интерпретируется как процесс образования пар [4]. Эта интерпретация является строгой, если константа c_1 в лемме 4.8 равна 1 (доказательство потребовало бы дополнительных оценок). Физически корректная величина давления классического кулоновского газа при $T < T_c$ равна тогда $p(\alpha, z) = z^2$ (с точностью до вклада от кинетической энергии пар частиц); T_c приобретает тогда смысл критической температуры.

Процедура перенормировки для классического нейтрального кулоновского газа, описанная в лемме 4.8 и теореме 4.9, является, конечно, довольно искусственной. В действительности эти результаты позволяют думать, что

классическое описание (кулоновского газа) пригодно только при $T \gg T_c$;

при $T \gtrsim T_c$ становятся существенными квантовые эффекты;

квантовый кулоновский газ, по-видимому, претерпевает фазовый переход, связанный с образоваиием пар при температуре $T \approx T_c$ (строгое доказательство этого не получено).

Очевидно, лемму 4.8 и теорему 4.9 можно распространить на классический газ Юкавы ($m > 0$) (по крайней мере для достаточно малых $|z|$). Кроме того, методы и результаты § 3 и 4, a и b, могут быть перенесены на одномерный случай.

Наши результаты из § 4, b и c, в особенности теорема 4.7, (1), и (4.15), позволяют высказать несколько интересных гипотез о теориях поля, описанных во введении как B и C:

При $1 < \varepsilon^2/4\pi < 2$ теории поля B и C, вероятно, перенормируемы; см. также [2]. Из теоремы 4.7, (1), следует, что они *не* сверхперенормируемы. Известно, что при $\varepsilon^2 = 4\pi$ они сверхперенормируемы и эквивалентны свободному полю Дирака с массой z; см. [2]. Дальнейшее обсуждение см. в [8, 9].

5. УСТОЙЧИВОСТЬ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ ЮКАВЫ И КУЛОНА

С точки зрения физики, этот раздел, возможно, является самым интересным; при этом он и самый короткий. Мы докажем, что квантовая система, состоящая из бесконечного числа нерелятивистских фермионов с произвольным спином и с зарядом $\pm\varepsilon$, попарно взаимодействующих между собой по закону Юкавы или Кулона, *устойчива*. Термодинамический предел свободной энергии или давления можно тогда построить стандартным образом; в кулоновском случае используются мощные методы Либа и Лебовица [19].

Основная идея доказательства устойчивости следующая: используя неравенство Голдена — Томпсона ($\mathrm{Tr}\,(e^{A+B}) \leqslant \mathrm{Tr}\,(e^A e^B)$) и статистику Ферми (которая вместе с неравенством Адамара для определителей дает гиббсовский множитель $1/(n!)^2$), мы сводим оценки устойчивости для квантовых систем к оценкам устойчивости для классических систем, установленным в § 3 и 4.

Должно быть, не очень трудно доказать устойчивость и для квантовых систем, в которых один тип заряженных частиц подчиняется статистике Ферми, а остальные частицы имеют произвольную статистику. Это можно сделать, видоизменяя методы Федербуша [12] и Дайсона и Ленарда [5], развитые для проблемы устойчивости вещества в трехмерном пространстве. Хорошо известно, что достаточно доказать устойчивость для потенциала Юкавы. Разность потенциала Кулона и потенциала Юкавы является H-устойчивым взаимодействием в смысле [26]. Это доказывается рассуждениями, подобными тем, которые были использованы при доказательстве лемм 2.1 и 4.2.

Определения и предварительные результаты. Пусть Λ — открытая область (например, прямоугольник) в $\mathbb{R}^2$. Мы определим гильбертово пространство для k положительно заряженных и n отрицательно заряженных частиц в объеме Λ как

$$\mathscr{H}_\Lambda(k, n) = (\mathbb{C}^l \otimes L^2(\Lambda, d^2x))^{\otimes_a k} \otimes (\mathbb{C}^l \otimes L^2(\Lambda, d^2x))^{\otimes_a n}, \quad (5.1)$$

где $\mathbb{C}^l \otimes L^2(\Lambda, d^2x)$ — одночастичное пространство, ассоциированное с Λ ($\mathbb{C}^l$ соответствует внутренним, т. е. спиновым, степеням свободы), и $\otimes_a$ обозначает антисимметричное тензорное произведение, требуемое статистикой Ферми. Кинетическая энергия задается как

$$H^0_{\Lambda, \mu}(k, n) = -\left\{ \sum_{j=1}^{k} \frac{\Delta_{x_j, \Lambda}}{2M} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{y_i, \Lambda}}{2M} \right\} + (k+n)\mu, \quad (5.2)$$

где M—масса частицы, $\mu \geqslant 0$ — химический потенциал, а $\Delta_{\cdot, \Lambda}$ — двумерный лапласиан с некоторыми самосопряженными граничными условиями на $\partial\Lambda$. Для определенности мы выберем нулевые условия Дирихле на $\partial\Lambda$; вместо этого можно было бы без каких-либо затруднений использовать периодические граничные условия или условия Неймана. Потенциальная энергия задается как

$$U^{(k,n)}_{\varepsilon^2 V_m}(X^k, Y^n) = \varepsilon^2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} V_m(x_i - x_j) + \\ + \varepsilon^2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} V_m(y_i - y_j) - \varepsilon^2 \sum_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, n}} V_m(x_i - y_j), \quad (5.3)$$

где $m \geqslant 0$, а V_m определено в (4.1). Если $m = 0$, то мы требуем нейтральности ($k = n$). Полный гамильтониан равен

$$H^\varepsilon_{\Lambda, \mu}(k, n) = H^0_{\Lambda, \mu}(k, n) + U^{(k, n)}_{\varepsilon^2 V_m}. \quad (5.4)$$

Стандартным путем доказывается, что $H^{\varepsilon}_{\Lambda,\mu}(k, n)$ — плотно определенный самосопряженный и ограниченный снизу оператор на $\mathscr{H}_\Lambda(k, n)$ и $e^{-\beta H^{\varepsilon}_{\Lambda,\mu}(k, n)}$ — ядерный оператор.

Гильбертово пространство и гамильтониан для произвольного числа частиц в области Λ задаются соответственно как

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_\Lambda &= \bigoplus_{k,\, n=0}^{\infty} \mathscr{H}_\Lambda(k, n),\\ H^{\varepsilon}_{\Lambda,\mu} &= \bigoplus_{k,\, n=0}^{\infty} H^{\varepsilon}_{\Lambda,\mu}(k, n).\end{aligned} \tag{5.5}$$

В целях математической строгости (до некоторой степени излишней) мы введем также регуляризованный гамильтониан $H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu}$

$$H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu} = \bigoplus_{k,\, n=0}^{\infty} H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu}(k, n),$$

где

$$H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu}(k, n) = H^{0}_{\Lambda,\mu}(k, n) + U^{(k,n)}_{\varepsilon^2 V_{m,\varkappa}}, \tag{5.6}$$

а

$$V_{m,\varkappa}(x-y) = \int d^2x'\, d^2y' h_\varkappa(x-x')\, V_m(x'-y')\, h_\varkappa(y'-y)$$

и $h_\varkappa$ — обрезающая функция, определенная в (2.3).

Потенциал $U_{\varepsilon^2 V_{m,\varkappa}}$ ограничен и *устойчив*, т. е.

$$U^{(k,n)}_{\varepsilon^2 V_{m,\varkappa}}(X^k, Y^n) \geqslant (n+k) B_\varkappa \tag{5.7}$$

для некоторого $B_\varkappa > -\infty$. Наша цель — доказать, что

$$H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu} \geqslant -K(\varepsilon, \mu)\,|\Lambda| \tag{5.8}$$

для некоторой конечной константы $K(\varepsilon, \mu)$ равномерно по $\varkappa$ и $m \geqslant 0$. Обозначим через Tr^f след в пространстве $\mathscr{H}_\Lambda(k, n)$, или $\mathscr{H}_\Lambda$ (индекс f указывает на статистику Ферми).

Лемма 5.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *Для данного ε существует некоторое положительное β_0, такое, что*

$$\mathrm{Tr}^f\left(e^{-\beta_0 H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu}}\right) \leqslant e^{K_1(\varepsilon,\mu)\,|\Lambda|} \tag{5.9}$$

равномерно по $\varkappa$ и $m \geqslant 0$.

(b) *Для произвольных ε и β*

$$\mathrm{Tr}^f\left(e^{-\beta H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu}}\right) \leqslant e^{K_2(\varepsilon,\beta,\mu)\,|\Lambda|} \tag{5.10}$$

равномерно по $\varkappa$ и $m \geqslant 0$.

(c) *Для произвольного* ε

$$H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu} \geqslant -K(\varepsilon,\mu)\,|\Lambda| \tag{5.11}$$

равномерно по $\varkappa$ *и* $m \geqslant 0$.

Доказательство. Мы покажем, что (a) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a).

Очевидно, что (a) есть частный случай (b), поэтому (b) $\Rightarrow$ (a) тривиально. Для того чтобы доказать (a) $\Rightarrow$ (c), отметим, что

$$\mathrm{Tr}^f\left(e^{-\beta_0 H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu}}\right) \geqslant e^{-\beta_0 E^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu}},$$

где $E^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu} \equiv \inf\operatorname{spec}\left(H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu}\right)$ — энергия основного состояния $H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu}$. Логарифмируя и применяя (5.9), получаем

$$E^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu} \geqslant -\frac{1}{\beta_0} K_1(\varepsilon,\mu)\,|\Lambda|, \text{ т. е.}$$

$$H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu} \geqslant -K(\varepsilon,\mu)\,|\Lambda|, \quad \text{где} \quad K(\varepsilon,\mu) \equiv \frac{1}{\beta_0} K_1(\varepsilon,\mu).$$

Этим доказано (c).

Чтобы доказать (c) $\Rightarrow$ (b), разложим $H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu}$:

$$H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu} = {}^2/_3 H^0_{\Lambda,\mu} + {}^1/_3 H^{\sqrt{3}\,\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu}.$$

Применяя неравенство Голдена — Томпсона, получаем

$$\mathrm{Tr}^f\left(e^{-\beta H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu}}\right) \leqslant e^{-\frac{\beta}{3} E^{\sqrt{3}\,\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu}}\, \mathrm{Tr}^f\left(e^{-{}^2/_3 \beta H^0_{\Lambda,\mu}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant e^{\beta\,|\Lambda|\,\left({}^1/_3 K(\sqrt{3}\,\varepsilon,\mu) + 3c_\beta e^{\mu}\right)},$$

где c_β — некоторая константа, определенная ниже. Вместо неравенства Голдена — Томпсона мы могли бы также использовать формулу Троттера для произведения и неравенство Гёльдера для следа. ∎

Теперь мы хотим доказать (a), сведя это неравенство к оценкам § 3 и 4.

Теорема 5.2. *Для* $\beta\varepsilon^2 < 4\pi$

$$\mathrm{Tr}^f\left(e^{-\beta H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu}}\right) \leqslant \Xi\left(\beta\varepsilon^2, V_{m,\varkappa}, c_\beta e^{\mu} \chi_\Lambda\right),$$

где Ξ — *классическая статистическая сумма большого канонического ансамбля, которую мы оценивали в* § 3 *и* 4, e^{μ} — *активность и*

$$c_\beta = l \int e^{-\beta p^2/2M} d^2 p = 2M\pi l \beta^{-1},$$

l — *число внутренних степеней свободы. (Отметим, что* Ξ *зависит от* $\beta\varepsilon^2$. *В обозначениях* § 3 *и* 4 *эта зависимость была опущена.)*

Доказательство. Обозначим через $P_\beta^\Lambda(x, y)$ ядро оператора $e^{-\beta(-\Delta_\Lambda/2M)}$. В силу неравенства Голдена — Томпсона

$$\operatorname{Tr}^f\left(e^{-\beta H_{\Lambda,\mu}^{\varepsilon,\varkappa}}\right) \leqslant \operatorname{Tr}^f\left(e^{-\beta H_{\Lambda,\mu}^0} e^{-\beta U_{\varepsilon^2 V_{m,\varkappa}}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k,n=0}^{\infty} \operatorname{Tr}^f\left(e^{-\beta H_{\Lambda,\mu}^{0\,(k,n)}} e^{-\beta U_{\varepsilon^2 V_{m,\varkappa}}^{(k,n)}}\right) =$$

$$= \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{(le^{\mu})^{(k+n)}}{k!\,n!} \int\limits_{\Lambda\times k} dX^k \int\limits_{\Lambda\times n} dY^n \det\left(P_\beta^\Lambda(x_i, x_j)\right) \times$$

$$\times \det\left(P_\beta^\Lambda(y_i, y_j)\right) e^{-\beta U_{\varepsilon^2 V_{m,\varkappa}}^{(k,n)}(X^k, Y^n)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{(le^{\mu})^{(k+n)}}{k!\,n!} \int\limits_{\Lambda\times k} dX^k \int\limits_{\Lambda\times n} dY^n \prod_{i=1}^{k} P_\beta^\Lambda(x_i, x_i) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} P_\beta^\Lambda(y_j, y_j) e^{-\beta U_{\varepsilon^2 V_{m,\varkappa}}^{(k,n)}(X^k, Y^n)},$$

где мы воспользовались неравенством Адамара для определителей положительно определенных матриц[1]).

Так как мы рассматриваем лапласиан Δ_Λ с нулевыми условиями Дирихле на $\partial\Lambda$, то

$$P_\beta^\Lambda(x, x) < \int e^{-\beta p^2/2M} d^2p = 2M\pi\beta^{-1}.$$

(Подобные, но несколько худшие оценки, не зависящие от Λ, имеют место также для периодических граничных условий и условий Неймана.) Следовательно,

$$\operatorname{Tr}^f\left(e^{-\beta H_{\Lambda,\mu}^{\varepsilon,\varkappa}}\right) \leqslant \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{\left(c_\beta e^{\mu}\right)^{(k+n)}}{k!\,n!} \times$$

$$\times \int\limits_{\Lambda\times k} dX^k \int\limits_{\Lambda\times n} dY^n e^{-\beta U_{\varepsilon^2 V_{m,\varkappa}}^{(k,n)}(X^k, Y^n)} \leqslant$$

$$\leqslant \Xi\left(\beta\varepsilon^2, V_{m,\varkappa}, c_\beta e^{\mu}\chi_\Lambda\right).$$

Наше доказательство охватывает случай $m = 0$, причем тогда слагаемые с $k \neq n$ обращаются в 0 в силу леммы 4.2

[1]) Я благодарен Э. Либу за предложение применить неравенство Адамара, которое существенно упростило дело.

и следствия 4.3. Равномерные оценки Ξ для $m>0$ даны в следствии 3.5, а для $m=0$ — в теореме 4.4. ∎

Следствие 5.3. (a) $\operatorname{Tr}^f\left(e^{-\beta H^\varepsilon_{\Lambda,\mu}}\right)\leqslant e^{K_2(\varepsilon,\beta,\mu)|\Lambda|}$.

(b) *Существует предел*

$$\lim_{\Lambda\to R^2}\frac{1}{|\Lambda|}\log\operatorname{Tr}^f\left(e^{-\beta H^\varepsilon_{\Lambda,\mu}}\right)\equiv p(\beta,\alpha,z);$$

здесь $z\equiv e^\mu$, $\alpha\equiv\beta\varepsilon^2/4\pi$.

Доказательство. (a) Достаточно доказать (a) для потенциала V_m с $m>0$, поскольку для $m=0$ и $k=n$ (нейтральность)

$$U^{(n,n)}_{\varepsilon^2 V_0}>U^{(n,n)}_{\varepsilon^2 V_m}.$$

Легко видеть, что на некотором плотном множестве в $\mathscr{H}_\Lambda$

$$\text{s-}\lim_{\varkappa\to\infty}H^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu}=H^\varepsilon_{\Lambda,\mu}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varkappa\to\infty}E^{\varepsilon,\varkappa}_{\Lambda,\mu}\leqslant E^\varepsilon_{\Lambda,\mu}\equiv\inf\operatorname{spec}\left(H^\varepsilon_{\Lambda,\mu}\right),$$

т. е.

$$H^\varepsilon_{\Lambda,\mu}\geqslant E^\varepsilon_{\Lambda,\mu}\geqslant-K(\varepsilon,\mu)|\Lambda| \tag{5.12}$$

в силу леммы 5.1 ((a)$\Rightarrow$(c)), теоремы 5.2, следствия 3.5 (и теоремы 4.4). Для фиксированного $m>0$, произвольных конечных k и n, ограниченной области Λ и произвольного $\lambda>0$

$$\left\|U^{(k,n)}_{3\varepsilon^2V_m}\left(\lambda H^0_{\Lambda,\mu}(k,n)+K_\lambda\right)^{-1}\right\|\leqslant\frac{k+n}{2}(k+n+1)\,3\varepsilon^2\times$$
$$\times\int d^2p\left[(p^2+m^2)^{-1}+\frac{1}{4\pi}|\ln(cm^2)|\,\delta^{(2)}(p)\right](\lambda p^2/2M+K_\lambda)^{-1}<1, \tag{5.13}$$

если мы выбрали K_λ достаточно большим. Хорошо известно, что эта оценка влечет за собой равенство

$$e^{-\beta H^\varepsilon_{\Lambda,\mu}(k,n)}=\text{s-}\lim_{N\to\infty}\left(e^{-\frac{2\beta}{3N}H^0_{\Lambda,\mu}(k,n)-\frac{\beta}{3N}H^{\sqrt{3}\,\varepsilon}_{\Lambda,\mu}(k,n)}\right)^N. \tag{5.14}$$

Легко показать, что это равенство и неравенство Гёльдера для Tr^f дают

$$\operatorname{Tr}^f\left(e^{-\beta H^\varepsilon_{\Lambda,\mu}(k,n)}\right)\leqslant\left\|e^{-\frac{\beta}{3}H^{\sqrt{3}\,\varepsilon}_{\Lambda,\mu}(k,n)}\right\|\operatorname{Tr}^f\left(e^{-\frac{2\beta}{3}H^0_{\Lambda,\mu}(k,n)}\right). \tag{5.15}$$

В силу (5.12)

$$\left\|e^{-\frac{\beta}{3}H^{\sqrt{3}\,\varepsilon}_{\Lambda,\mu}(k,n)}\right\|\leqslant\left\|e^{-\frac{\beta}{3}H^{\sqrt{3}\,\varepsilon}_{\Lambda,\mu}}\right\|\leqslant e^{\frac{\beta}{3}K(\sqrt{3}\,\varepsilon,\mu)|\Lambda|}.$$

Суммируя (5.15) по всем k и n, мы получаем, таким образом,

$$\mathrm{Tr}^f\left(e^{-\beta H^{\varepsilon}_{\Lambda,\mu}}\right) < e^{\beta|\Lambda|\left(\frac{1}{3}K(\sqrt{3}\,\varepsilon,\,\mu)+3c_\beta e^{\mu}\right)},$$

что завершает доказательство (a).

(b) Чтобы доказать (b), следует воспользоваться методами работ [26] и [19], которые применимы в нашем случае с незначительными изменениями. ∎

Замечания. 1) Используя оценки (5.13) и равенство (5.14), можно дать прямое доказательство неравенства Голдена — Томпсона в предельном случае $\varkappa = \infty$ для $m \geqslant 0$:

$$\mathrm{Tr}^f\left(e^{-\beta H^{\varepsilon}_{\Lambda,\mu}{}^{(k,n)}}\right) \leqslant \mathrm{Tr}^f\left(e^{-\beta H^{0}_{\Lambda,\mu}{}^{(k,n)}}\, e^{-\beta U^{(k,n)}_{\varepsilon^2 V_m}}\right).$$

Пусть теперь $m = 0$ и $k = n$. Так как Λ — ограниченное множество, то

$$|V_0(x, y) - V_1(x, y)| < K_\Lambda \quad \text{при всех} \quad x, y \in \Lambda,$$

т. е.

$$\|(V_0 - V_1) \restriction L^2(\Lambda, d^2x)\| < K_\Lambda,$$

для некоторой конечной константы K_Λ.

Следовательно, оценка (5.13), а значит, и (5.14) распространяется на случай $m = 0$, $k = n$, давая прямое доказательство неравенства Голдена — Томпсона для $\varkappa = \infty$, $m = 0$, $k = n$.

Пусть $\beta\varepsilon^2 < 4\pi$. Применяя неравенство Голдена — Томпсона и повторяя рассуждения из доказательства теоремы 5.2, мы получаем (используя следствие 3.5 и теорему 4.4)

$$\mathrm{Tr}^f\left(e^{-\beta H^{\varepsilon}_{\Lambda,\mu}}\right) \leqslant \Xi\left(\beta\varepsilon^2,\, V_m,\, c_\beta e^{\mu}\chi_\Lambda\right) \tag{5.16}$$

для произвольного $m \geqslant 0$.

Обозначим через $p_{\text{кл}}$ давление классического газа (включая вклад от кинетической энергии), а через $p_{\text{кв}}$ давление квантового ферми-газа. Логарифмируя (5.16), получаем

$$p_{\text{кл}} \geqslant p_{\text{кв}}\,[1]. \tag{5.17}$$

2) При $m > 0$, $\beta\varepsilon^2 < 4\pi$ и больших μ можно, по-видимому, довольно простым применением кластерного разложения Глимма — Джаффе — Спенсера [7] с модификациями, принадлежащими Федербушу [12], построить евклидовы (температурно-упорядоченные) функции Грина для квантового газа

[1]) Я благодарен И. Хербсту, указавшему мне на неравенство (5.17) в несколько другой ситуации.

Юкавы. Если это так, то применением теоремы, доказанной в [11] (и приведенных там ссылках), получается следующая

Квазитеорема. При $m > 0$, $\beta\varepsilon^2 < 4\pi$ и достаточно большом μ евклидовы функции Грина для двухкомпонентного квантового газа Юкавы со статистикой Ферми существуют, голоморфны относительно разностей временны́х переменных в трубчатой области (см. [11] и приведенные там ссылки), а их граничные значения в вещественной области этих переменных являются обобщенными функциями умеренного роста и удовлетворяют условиям КМШ.

Возможно, это утверждение будет доказано в следующей публикации.

3) Довольно ясно, что двухкомпонентный квантовый кулоновский газ также обладает свойствами автомодельности. Используя очевидные свойства автомодельности лапласиана и существование термодинамического предела (следствие 5.3, (b)), мы можем доказать, так же как в § 4, (c), что

$$\lambda^2 p(\beta, \alpha, z) = p(\lambda^{-2}\beta, \alpha, \lambda^{2-\alpha}z),$$

откуда

$$p(\beta, \alpha, z) = z^{2/(2-\alpha)} F(\alpha, \beta z^{2/(2-\alpha)}). \tag{5.18}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Albeverio S., Höegh-Krohn R., *Commun. math. Phys.*, **30** (1973), 171.
2. Coleman S., *Phys. Rev. D*, **11** (1975), 2088.
3. Dashen R., Hasslacher B., Neveu A., *Phys. Rev. D*, **11** (1975), 3424.
4. Deutsch C., Lavaud M., *Phys. Rev. A*, **9** (1974), 2598.
5. Dyson F., Lenard A., *J. Math. Phys.*, **8** (1967), 423; *J. Math. Phys.*, **9** (1968), 698.
6. Edwards S., Lenard A., *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 778.
7. Constructive Quantum Field Theory (Velo G., Wightman A., eds.), Lecture Notes in Physics, 25, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg — New York, 1973. [Частичный русский перевод в сб. Конструктивная теория поля, «Мир», М., 1977.]
8. Fröhlich J., *Phys. Rev. Lett.*, **34** (1975), 833; In: Renormalization Theory (Erice Lectures, 1975) (Velo G., Wightman A. S., eds.), Dordrecht — Boston, 1976, p. 371.
9. Fröhlich J., Seiler E., *Helv. Phys. Acta*, **49** (1976), 889.
10. Fröhlich J., *Adv. Math.*, **23** (1977), 119—180.
11. Fröhlich J., *Ann. Phys.*, **97** (1976), 1; *Helv. Phys. Acta*, **48** (1975), 355.
12. Federbusch P., *J. Math. Phys.*, **16** (1975), 347; **16** (1975), 706.
13. Ginibre J., *Commun. math. Phys.*, **16** (1970), 310.
14. Glimm J., Jaffe A., In: Mathematics of Contemporary Physics (Streater R. F., ed.), Academic Press, London — New York, 1972, p. 77. [Русский перевод в сб. [7], стр. 99—168.]
15. Guerra F., *Phys. Rev. Lett.*, **28** (1972), 1213.
16. Guerra F., Rosen L., Simon B., *Ann. Math.*, **101** (1975), 111—259.
17. Knorr G., *Phys. Lett.*, **28A** (1968), 166.
18. Lieb E., Mattis D., *J. Math. Phys.*, **6** (1965), 304.
19. Lieb E., Lebowitz J., *Adv. Math.*, **9** (1972), 316.

20. Luther A., Emery V. J., *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974), 589.
21. May R., *Phys. Lett.*, **25A** (1967), 282.
22. Минлос Р. А., Труды Моск. матем. общ-ва, **8** (1959), 471.
23. Nelson E., *J. Funct. Anal.*, **12** (1973), 211.
24. Nelson E., In: Partial Differential Equations (Spencer D., ed.), Symp. Pure Math., 23, A. M. S. Publications, 1973, p. 413.
25. Нельсон Э., сб. [7], стр. 74—98.
26. Ruelle D., Statistical Mechanics — Rigorous results, Benjamin, New York, 1969. [Русский перевод: Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, «Мир», М., 1971.]
27. Schwinger J., *Phys. Rev.*, **128** (1962), 2425.
28. Simon B., The $P(\varphi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974 [Русский перевод: Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, «Мир», М., 1976.]
29. Wightman A. S., In: Cargèse Lectures in Theoretical Physics, Gordon and Breach, New York — London — Paris, 1967.

БОЗОННОЕ КВАНТОВОЕ ПОЛЕ КАК ФЕРРОМАГНЕТИК ИЗИНГА — НЕДАВНИЕ ДОСТИЖЕНИЯ [1])

Б. Саймон

Physics and Mathematics Departments, Princeton University, Princeton, N. J.

Одним из основных новых методов конструктивной теории поля, использование которого стало возможным после «евклидовой революции» 1971—1973 гг., стала аппроксимация скалярного поля с помощью моделей Изинга и возникающие в связи с этим корреляционные неравенства. Этот подход в последние годы развивался чрезвычайно активно, и наша цель — рассказать о некоторых достижениях в данном направлении. Хотя мы и скажем несколько слов об основных идеях изинговской аппроксимации, мы предполагаем, что читатель знаком с ними либо по оригинальным работам [17, 32], либо по обзорам учебного характера [30, 31, 35].

§ 1. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ

Основу изинговской методики составляют две аппроксимации: решеточная аппроксимация [17] и классическая аппроксимация Изинга [32]. Вместо того чтобы приводить точные технические результаты, мы переформулируем оригинальные результаты в виде двух метатеорем. «Обобщенный моделью Изинга» мы называем конечный набор случайных величин («спинов»), совместное распределение вероятностей которых имеет вид

$$\exp\Big(\sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j\Big)\, d\nu_1(x_1)\, \ldots\, d\nu_n(x_n),$$

где ν_i — меры на $\mathbb{R}$. «Классической моделью Изинга» мы называем модель, в которой каждый «спин» принимает только

---

[1]) Barry Simon, Bose Quantum Field Theory as an Ising Ferromagnet: Recent Developments, International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics (edited by H. Araki), Lecture Notes in Physics, v. 39, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1975.

При частичной финансовой поддержке U.S.N.S.F. по контракту GP-39048 и AFOSR по контракту F 44620-71-C-0108. Статья любезно прислана автором для перевода на русский язык. Печатается с разрешения изд-ва Springer.

два значения ± 1. Если все коэффициенты $a_{ij} \geqslant 0$, то модель называется «ферромагнетиком».

Метатеорема 1 («решеточная аппроксимация»). *Всякая $P(\varphi)_2$-модель евклидова поля является пределом обобщенных ферромагнетиков Изинга; если полином P четный, то все меры ν_i также четны.*

Метатеорема 2 («классическая аппроксимация Изинга»). *Всякая $P(\varphi)_2$-модель евклидова поля с полиномом $P(X)$ вида $aX^4 + bX^2 - \mu X$ является пределом классических ферромагнетиков Изинга, причем $d\nu_i(x_i) = D_i \exp(c_i \mu x_i)[\delta(x_i + 1) + \delta(x_i - 1)]$, где D_i, c_i — некоторые положительные константы.*

Замечания. 1. В оригинальных работах отмечалось, что эти теоремы можно *формально* распространить на случай трехмерного и четырехмерного пространства-времени (что касается случая размерности три, см. ниже).

2. Классическая аппроксимация Изинга производится в два этапа. Сначала нужно перейти к решеточной аппроксимации, а затем аппроксимировать ее спины классическими спинами Изинга. Вторая часть этой программы проходит в трехмерном и четырехмерном случае и неформально, поэтому для того, чтобы отбросить слово «формально» в замечании 1, нужно лишь изучить вопрос о сходимости решеточной аппроксимации.

3. Мы не проявили большой заботы о точности в употреблении выше слова «предел». Важно лишь то, что евклидовы поля являются пределами положительных линейных комбинаций спинов — пределами в таком смысле, который позволяет непосредственно распространить любое полилинейное неравенство («корреляционное неравенство») для спиновых систем на теорию поля.

За последние годы вышеизложенный формализм был распространен на новые области.

Теорема 1.1 (Парк [26]). *Решеточная аппроксимация модели $(\varphi^4)_3$ в конечном объеме со свободными граничными условиями сходится.*

Теорема 1.2 (Денлоп и Ньюман [6]). *Двумерная модель $(\varphi_1^2 + \ldots + \varphi_n^2)^2$ представляет собой предел ферромагнитных спиновых систем, в которых спины принимают значения на $(n-1)$-мерной сфере (т. е. плоский ротатор при $n=2$, классическая модель Гейзенберга при $n=3$).*

Теорема 1.3 (Гуэрра, Розен и Саймон [19]). *Решеточная аппроксимация $P(\varphi)_2$-модели сходится в конечном объеме* *с периодическими граничными условиями или же с граничными условиями Неймана.*

Замечания. 1. До сих пор результат Парка не нашел приложений. Это положение изменится лишь с доказательством существования поля $(\varphi^4)_3$ в бесконечном объеме (см. доклад Остервальдера на этой конференции). Было бы полезно перенести результат Парка на случай граничных условий Дирихле.

2. Денлоп и Ньюман [1]) доказали также теоремы Ли—Янга для ротаторов при $n = 2$, 3 (активно изучается случай произвольного $n \geqslant 0$ [X. Малер (H. Mahler), личное сообщение]); тем самым установлена аналитичность давления для некоторых многокомпонентных моделей теории поля.

3. В случае решеточной аппроксимации с периодическими граничными условиями спины в противоположных точках границы, конечно, взаимодействуют. В случае граничных условий Неймана из величины взаимодействия ближайших спинов q и q', один из которых находится внутри, а другой — вне области, выбрасывается член $2^{-1}(q - q')^2$ (для сравнения, в случае граничных условий Дирихле выбрасывается только член $-qq'$).

4. Решеточная модель Неймана была также рассмотрена Бейкером [2] (соответствующие граничные условия он, к сожалению, называет «свободными»).

5. Корреляционные неравенства между периодическими состояниями и состояниями Дирихле использовались Гуэррой, Розеном и Саймоном [18] (см. § 5 ниже).

§ 2. НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Многие недавние приложения корреляционных неравенств к теории поля основаны на неравенствах, полученных за последние полтора года; в свою очередь, многие из этих неравенств получены авторами, интересующимися приложениями к теории поля. Вот три новых класса неравенств.

Теорема 2.1 (Лебовиц [21]). *В классическом ферромагнетике Изинга с положительным внешним магнитным полем* (*т. е.* $d\nu_i = D_i e^{+\mu_i x_i}[\delta(x_i + 1) + \delta(x_i - 1)]$) *для любых конеч-*

[1]) Перевод этой статьи помещен в настоящем сб., стр. 255—274. — *Прим. ред.*

ных множеств A и B

$$\sum_{C \subset A;\ D \subset B} (-1)^{|C|+|D|} T(C, D;\ A \setminus C,\ B \setminus D) \geqslant 0,$$

$$\sum_{C \subset A;\ D \subset B} (-1)^{|C|} T(C, D;\ A \setminus C,\ B \setminus D) \leqslant 0,$$

где

$$T(C, D;\ E,\ F) = \langle S^{C \Delta D} \rangle \langle S^{E \Delta F} \rangle - \langle S^{C} \rangle \langle S^{D} \rangle \langle S^{E} \rangle \langle S^{F} \rangle,$$

$$S^C = \prod_{i \in C} S_i.$$

Теорема 2.2 (Ньюман [23]). *Пусть Λ — произвольное конечное множество и $\mathscr{P}$ — некоторое семейство разбиений Λ на два непересекающихся подмножества Λ_1, Λ_2, такое, что всякое разбиение множества Λ на пары (или, если число точек Λ нечетно, на пары плюс одно одноточечное множество) является измельчением некоторого разбиения $\{\Lambda_1, \Lambda_2\} \in \mathscr{P}$. Тогда для всякого классического ферромагнетика Изинга с положительным внешним полем*

$$\langle \sigma^{\Lambda} \rangle \leqslant \sum_{\{\Lambda_1,\ \Lambda_2\} \in \mathscr{P}} \langle \sigma^{\Lambda_1} \rangle \langle \sigma^{\Lambda_2} \rangle.$$

Теорема 2.3 (Картье [4], Перкус [27], Сильвестер [34]). *Определим функцию u_n равенством*

$$u_n(i_1, \ldots, i_n) = \frac{\partial^n}{\partial \mu_1 \ldots \partial \mu_n} \langle \exp(\mu_1 \sigma_{i_1} + \ldots + \mu_n \sigma_{i_n}) \rangle \big|_{\mu_i = 0}.$$

Тогда для любого классического ферромагнетика Изинга с нулевым внешним полем

$$u_6(i_1, \ldots, i_6) \geqslant 0.$$

Замечания. 1. Неравенства Лебовица обычно записывают в «переменных Перкуса», и в такой форме они выглядят проще.

2. Довольно сложное условие на семейство $\mathscr{P}$ в неравенстве Ньюмана является не только достаточным для справедливости этого неравенства, но также и необходимым в том смысле, что если $\mathscr{P}$ не удовлетворяет сформулированным условиям, то существуют ферромагнетики Изинга, для которых неравенство не выполнено.

3. Введение «спина-болвана» позволяет доказывать неравенство Ньюмана лишь для нулевого поля и для множества Λ четной мощности. Ньюман доказал эти неравенства с помощью разложения на графы.

4. Если мощность Λ четна, то из неравенства Ньюмана следует по индукции [23], что

$$\langle \sigma^{\Lambda} \rangle \leqslant \sum \langle \sigma^{i_1 j_1} \rangle \ldots \langle \sigma^{i_n j_n} \rangle,$$

где суммирование проводится по всем способам разбиеиия множества Λ на n пар (аналогичное неравенство получается для нечетной мощности с помощью введения спина-болвана). Ранее Глимм и Джаффе [13] вывели из неравенства Лебовица аналогичное неравенство, но с множителем порядка $n!$ перед суммой.

5. Из неравенств ГКШ следует, что в положительном поле $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \geqslant 0$, а из неравенств ГХШ — что $u_3 \leqslant 0$; из неравенства Лебовица вытекает, что $u_4 \leqslant 0$ при нулевом значении поля. Предполагается, что при нулевом поле $u_{2n}(-1)^{n+1} \geqslant 0$.

6. До сих пор не известно никаких приложений неравенства $u_6 \geqslant 0$. Как заметил Фельдман [7], из справедливости при нулевом поле общего неравенства $u_{2n}(-1)^{n+1} \geqslant 0$ следовало бы наличие массовой щели. Этот результат получен теперь Спенсером из других соображений (см. § 5).

7. Указанные неравенства справедливы для φ^4-моделей евклидовых полей (а первые два — и для $(\varphi^4 - \mu\varphi)$-моделей), если спин σ_i заменить на $\varphi(x_i)$.

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ СОСТОЯНИЙ

Большинство недавних приложений аппроксимации Изинга в теории поля представляет собой продолжение тенденций, заложенных еще в ее самых ранних приложениях (Гуэрра, Розен и Саймон [17], Саймон и Гриффитс [32], работа Нельсона в сборнике [35], Саймон [28, 29]), которые в свою очередь следовали тенденциям, выработанным при применении корреляционных неравенств в статистической механике.

Одним из первых применений неравенств Гриффитса явилось данное им самим доказательство существования корреляционных функций спиновых систем в бесконечном объеме. Нельсон применил эту идею для построения $P(\varphi)_2$-модели в бесконечном объеме для полинома P вида (четный полином) $- \mu X$ (граничные условия полу-дирихле). Глимм и Джаффе [13] недавно объединили технику корреляционных неравенств с техникой кластерного разложения (см. работу Глимма, Джаффе и Спенсера в сб. [35]) с целью построения для таких полиномов P полей в бесконечном объеме («слабо взаимодействующие граничные условия») и доказали совпадение полученных состояний с состоянием Нельсона. Одно из преимуществ этой конструкции состоит в том, что она обеспечивает получение $:\varphi^j:$-оценок ($j \leqslant \deg P$) для состояния Нельсона. Эти оценки использовались Глиммом и Джаффе [11] и Фрёлихом [9].

§ 4. ОЦЕНКИ С ПОМОЩЬЮ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИИ

Один из первых результатов, полученных в теории поля с использованием методов моделей Изинга (Саймон [28]), состоит в том, что массовая щель определяется скоростью убывания усеченной двухточечной функции Швингера. Ньюман [23] нашел новое доказательство этого факта для четных φ^4-моделей. Действительно, его неравенства (теорема 2.2) при $\Lambda = \{1, \ldots, n; 1', \ldots, m'\}$, где $m+n$ четно, содержат неравенство

$$(1 \ldots n\ 1' \ldots m') \leqslant (1 \ldots n)(1' \ldots m') + \sum_{i,j} (ij')(1 \ldots \hat{i} \ldots n\ 1' \ldots \hat{j}' \ldots m'), \qquad (*)$$

откуда и следует требуемое убывание.

Глимм и Джаффе [13] показали, что двухточечная функция определяет больше, чем одну только скорость убывания. Индуктивно используя неравенство Лебовица, они получили оценки функции $S_n \equiv \langle \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \rangle$, которые включают в себя следующий результат.

Теорема 4.1 (Глимм и Джаффе [13]). *Для любой* ($\varphi^4 - \mu\varphi$)-*модели и для всех положительных функций* $f_1, \ldots, f_n$

$$0 \leqslant S_n(f_1, \ldots, f_n) \leqslant 2^{n-1}(n-1)!\, \|f_1\| \ldots \|f_n\|,$$

где

$$\|f\| = S_2(f, f)^{1/2}.$$

Замечания. 1. Полагая $|||f||| = S_2(|f|, |f|)^{1/2}$, получаем

$$|S_n(f_1, \ldots, f_n)| \leqslant 2^{n-1}(n-1)!\, |||f_1||| \ldots |||f_n|||.$$

2. Константу $2^n(n-1)!$ в этих оценках можно заменить на $[(n+1)/2]!$ (см. теорему 4.3 ниже).

3. Оценка в замечании 1 — именно того вида, который требуется для возможности восстановления поля в области Минковского при использовании (пересмотренных) аксиом Остервальдера — Шрадера [25] [1]).

4. Такие же оценки справедливы формально и в размерности четыре. Они были бы полезны, если бы функция S_2 являлась обобщенной функцией на диагонали (т. е. L^1-функцией). Рассмотрение рядов теории возмущений позволяет надеяться на справедливость этих оценок не только на формальном уровне.

Ньюман [23, 24] обобщил теорему 4.1 в двух различных направлениях.

---

[1]) Перевод см. в настоящем сборнике, стр. 9 — 45. — *Прим. ред.*

Теорема 4.2 (Ньюман [24]). *Для любой* $(\varphi^4 + a\varphi^2 - \mu\varphi)$-*модели* $(\mu \geqslant 0)$ *и для любой положительной основной функции* f

$$\left\langle e^{\varphi(f)}\right\rangle \leqslant \exp\left[S_1(f) + \frac{1}{2} S_2^T(f, f)\right],$$

где

$$S_2^T(x, y) = S_2(x, y) - S_1(x) S_1(y).$$

Теорема 4.3 (Ньюман [23]). *Для любой четной* φ^4-*модели*

$$0 \leqslant S_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) \leqslant \sum_{\text{пары}} S_2(x_{i_1}, x_{j_1}) \ldots S_2(x_{i_n}, x_{j_n}).$$

Замечания. 1. Краткость и простота доказательства теоремы 4.2 кажутся удивительными, если учесть тонкость ее результата. Пусть $F(\mu) = \ln\langle e^{\mu\varphi(f)}\rangle$. Из неравенства ГХШ сразу следует, что $d^3F/d\mu^3 \leqslant 0$ при всех $\mu > 0$! Так как $F(0) = 0$, $F'(0) = S_1(f)$, $F''(0) = S_2^T(f, f)$, мы непосредственно получаем, что

$$F(\mu) \leqslant \mu S_1(f) + \frac{1}{2}\mu^2 S_2^T(f, f).$$

2. Теорема 4.3 представляет собой в точности перевод одного из неравенств Ньюмана на язык теории поля (см. замечание 4 в § 2). Имеются также неравенства для $(\varphi^4 - \mu\varphi)$-моделей.

3. Теорема 4.3 допускает формулировку, звучащую довольно драматически: функции Швингера любой φ^4-модели ограничены сверху функциями Швингера обобщенно свободного поля с теми же двухточечными функциями.

4. Теорема 4.3 является непосредственным усилением теоремы 4.1 и улучшает константу, стоящую перед произведением норм. Из теоремы 4.2 можно извлечь оценки функции $S_n(f)$ с помощью следующих двух замечаний. Во-первых, из неравенств ГКШ и неравенства $|\langle A\rangle| \leqslant \langle |A|\rangle$ следует, что функция $G(\mu) \equiv \langle e^{\mu\varphi(f)}\rangle$ удовлетворяет неравенству $|G(\mu)| \leqslant G(|\mu|)$. Во-вторых, оценки Коши для целой функции $G(\mu)$ дают оценки для производных $G^{(m)}(0)$.

5. (Это наблюдение сделано независимо автором и Ю. Фрёлихом.) Теорема 4.2 в одном отношении является очень важным усилением теоремы 4.1. Именно, если функция S_2^T имеет даже очень слабые свойства убывания (а такое убывание ожидается, если $\mu > 0$, см. § 5 ниже; нужно отметить также, что φ-оценки при некотором $\mu > 0$ влекут за собой в силу неравенств ГКШ φ-оценки при $\mu = 0$), то из теоремы 4.2 следует, что

$$\left\langle \exp\left(\varphi\left(h \otimes \chi_{(0, T)}\right)\right)\right\rangle \leqslant \exp(cT)$$

по крайней мере при некоторых слабых дополнительных предположениях о регулярности функции S_2^T на диагонали. С точностью до технических деталей это утверждение совпадает с основным результатом Фрёлиха [8] (дополнительное обсуждение этого результата см. у Саймона [30]) о том, что такие оценки влекут за собой φ-оценки в смысле Глимма — Джаффе [11].

§ 5. МАССОВАЯ ЩЕЛЬ И СПЕКТР

Групповые разложения и уравнения Бёте — Сальпетера оказались мощными средствами исследования массового спектра в моделях со слабым взаимодействием (и большим химическим потенциалом) (см. доклад Глимма на этой конференции). В случае сильных взаимодействий единственным методом исследования до сих пор остаются корреляционные неравенства, причем с их помощью удается получить гораздо меньше, чем известно в случае слабых взаимодействий. В последнее время по этим вопросам была получена новая информация:

Теорема 5.1 (Гуэрра, Розен и Саймон [18]). *Всякая $(a\varphi^4 + b\varphi^2 - \mu\varphi)_2$-модель с $\mu \neq 0$ обладает массовой щелью (т. е. точка 0 является изолированным простым собственным значением гамильтониана).*

Теорема 5.2 (Спенсер [33]). *Во всякой четной $(\varphi^4)_2$-модели первое четное возбужденное состояние обладает энергией, по крайней мере вдвое большей, чем первое возбужденное состояние.*

Замечания. 1. Эти теоремы служат усилением результатов, полученных ранее с помощью корреляционных неравенств, а именно результатов Саймона [29] и Глимма, Джаффе и Спенсера [35] соответственно.

2. Доказательство теоремы 5.1 следует идеям Лебовица и Пенроуза [22], которые они применяли для модели Изинга. Основные трудности, связанные с граничными условиями, носят технический характер.

3. Четным состоянием мы называем состояние, получаемое из вакуума применением четного числа операторов поля. На более физическом языке теорема 5.2 утверждает, что в $(\varphi^4)_2$-модели отсутствуют положительные четные «G-связанные» состояния (по крайней мере ниже двухчастичного порога).

4. В доказательстве Спенсера теоремы 5.2 используются неравенства Лебовица и еще один очень тонкий прием. Ньюман [23] нашел простое доказательство, использующее

его неравенство (*), приведенное в § 4. А именно, в случае когда m и n — четные числа, сумма в соотношении (*) убывает как $\exp(-2m_f t)$, если индексы со штрихом и без штриха разделены евклидовым временны́м промежутком t (m_f — физическая масса модели).

§ 6. ИЗМЕНЕНИЯ «КОНСТАНТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ»

Значительный интерес представляет также вопрос о монотонности и гладкости физических параметров (массы, вершинных функций в специальных точках и др.) как функций голых «констант взаимодействия» (голой массы, голой константы взаимодействия и др.). Первые приложения корреляционных неравенств, принадлежащие Гуэрре, Розену и Саймону [17], включают в себя утверждение такого типа, в одной из своих форм звучащее так: физическая масса в $P(\varphi)_2$-модели с $P(X)=a_{2m}X^{2m}+\ldots+a_2X^2$ (полином P четный) монотонно возрастает с ростом коэффициэнта a_2 (коэффициенты $a_{2m}, \ldots, a_4, m_0$ фиксированы). Глимм и Джаффе в серии статей [12, 14—16] (о дополнительных результатах по критическим индексам см. Гуэрра, Розен и Саймон [18]) доказали большое число подобных оценок, а также оценок критических показателей. Приведем один пример.

Теорема 6.1 (Глимм и Джаффе [12]). *Пусть числа m_0 и λ фиксированы, а $m(\sigma)$ обозначает физическую массу в $\left(\lambda\varphi^4+\frac{1}{2}\sigma\varphi^2\right)_2$-модели. Тогда при $\sigma>\sigma_c$ (критическое значение, при котором исчезает массовая щель в четной модели) функция $m(\sigma)$ удовлетворяет условию Липшица и при $\sigma>\sigma'>\sigma_c$*

$$m(\sigma)^2-m(\sigma')^2\leqslant(\sigma-\sigma').$$

Замечания. 1. Если бы функция $m(\sigma)$ была дифференцируема, то из приведенных выше результатов Гуэрры — Розена — Саймона следовало бы, что $dm^2/d\sigma\geqslant 0$, а из результатов Глимма и Джаффе — что $dm^2/d\sigma\leqslant 1$.

2. Если $m(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to\sigma_c$ (близкий результат анонсирован Бейкером [3]), то $m(\sigma)\leqslant(\sigma-\sigma_c)^{1/2}$.

§ 7. МОДЕЛЬ $:\cos\varphi:_2$

Я хочу еще вкратце остановиться на одной недавней работе Фрёлиха [10]; хотя она не отвечает теме моего сообщения или сообщения Глимма, я считаю необходимым упомянуть о ней на этой конференции. Фрёлих построил $:\cos\varphi:_2$-

модель (проквантованное уравнение sin-Гордона (с массой)), а точнее, модель $\int_0^\alpha d\nu(\alpha)\,[:\cos(\alpha\varphi+\eta(\alpha)):]$, где η — функция, ν — знакопеременная мера и $\alpha<\sqrt{4\pi}$ в случае конечного объема и слабого взаимодействия, $\alpha<4/\sqrt{\pi}$ в случае сильного взаимодействия. Появление нового зверя в зоопарке двумерных моделей теории поля (и притом, зверя, который неперенормируем в размерностях три и выше!) само по себе вряд ли может служить причиной для большого волнения. Но эта модель обладает одним в высшей степени поразительным свойством: *для достаточно малых констант взаимодействия фейнмановские ряды для всех функций Швингера сходятся*! (Это заведомо не так для $(\varphi^4)_2$-модели (Джаффе [20]).)

Замечания. 1. *Если уже доказано существование модели*, то интуитивно причина, по которой ряды сходятся, чрезвычайно проста. С помощью сдвига поля можно установить эквивалентность моделей $:\cos\varphi:_2$ и $:\sin\varphi:_2$. Но модели $\lambda:\sin\varphi:_2$ и $-\lambda:\sin\varphi:_2$ одинаково хороши в силу ковариантности относительно преобразования $\varphi\to-\varphi$.

2. Основным шагом является изучение среднего $\langle\exp(-\lambda U_\Lambda)\rangle$ для конечных областей Λ и $\lambda\in\mathbb{R}$, поскольку затем для доказательства аналитичности функций Швингера можно применить технику кластерного разложения.

3. Фрёлих применил идею Альбеверио — Хег-Крона [1] об эквивалентности таких моделей некоторым моделям статистической механики. Разумно используя результаты Гуэрры, Розена и Саймона [17], он свел изучение $\langle\exp(-\lambda U_\Lambda)\rangle$ к изучению чисто кулоновской двумерной системы[1]) (в конечном объеме и с мнимым зарядом) и затем воспользовался методами Дёйча и Лаво [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Albeverio S., Hoegh Krohn R., *Commun. math. Phys.*, **30** (1973), 171—200.
2. Baker G., *J. Math. Phys.*, **16** (1975), 1324—1346.
3. Baker G., Brookhaven preprint on correlation lengths in Ising models, 1974.
4. Cartier P., in preparation.
5. Deutsch C., Lavaud M., *Phys. Rev.*, **A9** (1974), 2598.
6. Dunlop F., Newman C., *Commun. math. Phys.*, **44** (1975), 223—235. [Русский перевод в настоящем сб., стр. 255—274.]
7. Feldman J, *Canad. J. Phys.*, **52** (1974), 1583.

[1]) См. статью Фрёлиха в этом сборнике. — *Прим. ред.*

8. Fröhlich J., *Helv. Phys. Acta*, **47** (1974), 265—306.
9. Fröhich J., *Ann. Inst. H. Poincaré*, **A21** (1974—1975), 271—317.
10. Fröhlich J., manuscript in preparation.
11. Glimm J., Jaffe A., *J. Math. Phys.*, **13** (1972), 1568.
12. Glimm J., Jaffe A., *Phys. Rev., D*, **10** (1974), 536.
13. Glimm J., Jaffe A., *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974), 440.
14. Glimm J., Jaffe A., *Ann. Inst. H. Poincaré*, **A22** (1975), 109—122.
15. Glimm J., Jaffe A., *Ann. Inst. H. Poincaré*, **A22** (1975), 97—107.
16. Glimm J., Jaffe A., *Commun. math. Phys.*, **44** (1975), 293—320.
17. Guerra F., Rosen L., Simon B., *Ann. Math.*, **101** (1975), 111—189, 191—259.
18. Guerra F., Rosen L., Simon B., *Commun. math. Phys.*, **41** (1975), 19—32.
19. Guerra F., Rosen L., Simon B., in preparation.
20. Jaffe A., *Commun. math. Phys.*, **1** (1965), 127.
21. Lebowitz J., *Commun. math. Phys.*, **35** (1974), 87.
22. Lebowitz J., Penrose S., *Commun. math. Phys.*, **39** (1974), 165.
23. Newman C., *J. Math. Phys.*, **16**, № 9 (1975).
24. Newman C., Preprint in preparation on random variables of type $\mathscr{L}$.
25. Osterwalder K., Schrader R., *Commun. math. Phys.*, **42** (1975), 281—305.
26. Park Y., *J. Math. Phys.*, **16** (1975), 1065—1075.
27. Percus J., *Commun. math. Phys.*, **40** (1975), 283—308.
28. Simon B., *Commun. math. Phys.*, **31** (1973), 127.
29. Simon B., *Ann. Math.*, **101** (1975), 260—268.
30. Simon B., The $P(\varphi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974. [Русский перевод: Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, «Мир», М., 1976.]
31. Simon B., Proceed. Int. Congr. Math., Vancouver, B. C., 1974.
32. Simon B., Griffiths R., *Commun. math. Phys.*, **33** (1973), 145.
33. Spencer T., *Commun. math. Phys.*, **39** (1974), 77—79.
34. Sylvester G., *Commun. math. Phys.*, **42** (1975), 209—220. [Русский перевод в сб. Гиббсовские состояния в статистической физике, «Мир», М., 1978, стр. 69—88.]
35. Constructive Quantum Field Theory (Velo G., Wightman A. S., eds.), Lecture Notes in Physics, 5, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberrg — New York, 1973. [Частичный русский перевод в сб. Конструктивная теория поля, «Мир», М., 1977.]

МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ ПОЛЯ И КЛАССИЧЕСКИЕ РОТАТОРЫ[1])

Ф. Денлоп
Inst. des Hautes Etudes Scientifiques,
Bures-sur-Yvette, France

Ч. Ньюман[2])
Dept. of Mathematics, Indiana University, Bloomington,
Indiana, USA

Резюме. Показано, что D-компонентное евклидово квантовое поле $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^D)$ с взаимодействием $\lambda|\varphi|^4 + \beta|\varphi|^2$ можно получить как предел (ферромагнитных) моделей классических ротаторов; тем самым обобщается результат Саймона и Гриффитса, относящийся к случаю $D = 1$. Показано, что для таких моделей евклидова поля верна теорема Ли и Янга при $D = 2$ или 3 и второе неравенство Гриффитса при $D = 2$, приведено полное доказательство теоремы Ли и Янга для плоских ротаторов и для классических моделей Гейзенберга. В качестве применения второго неравенства Гриффитса при $D = 2$ найдено интересное соотношение между «продольной» и «поперечной» парными корреляциями.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим многокомпонентное скалярное поле $\varphi(x, t) = (\varphi^1(x, t), \ldots, \varphi^D(x, t))$ в d-мерном пространстве-времени с гамильтонианом

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D} \left((\pi^i)^2 + |\nabla\varphi^i|^2 + m_0^2 (\varphi^i)^2 \right) + \tilde{Q}\left(\sum_{i=1}^{D} (\varphi^i)^2 \right) + \sum_{i=1}^{D} A^i \varphi^i \right] dx, \quad (1.1)$$

где $\pi = d\varphi/\partial t$, $\tilde{Q}$ — полином с положительным старшим коэффициентом и $\mathbf{A}(x, t)$ — внешнее поле, взаимодействующее с φ. Проблема построения соответствующего квантового поля значительно упростилась в последние годы благодаря введению вероятностных методов евклидовой теории поля (см., например, статьи в [1]); в частности, стало ясно, что соответствующее евклидово поле тесно связано (посредством

---

[1]) François Dunlop, Charles M. Newman, Multicomponent Field Theories and Classical Rotators *Communications in Mathematical Physics*, **44** (1975), 223—235

[2]) Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Национального научного фонда по контракту NSFMPS 74-04870.

«решеточной аппроксимации») с определенными моделями ферромагнетиков из классической статистической механики [2].

Рассматриваемые нами модели представляют собой семейства случайных D-мерных векторов («спинов») $\{\mathbf{S}_j = (S_j^1, \ldots, S_j^D)\colon j=1, \ldots, N\}$ с совместным распределением вероятностей на $(\mathbb{R}^D)^N$ вида

$$\frac{1}{Z}\exp\left(\sum_{j=1}^{N} \mathrm{a}_j\cdot \mathrm{s}_j + \sum_{j,k=1}^{N}\sum_{i=1}^{D} J_{jk}^i s_j^i s_k^i\right)\prod_{j=1}^{N}\rho_j(\mathrm{s}_j), \tag{1.2}$$

где

$$Z = Z(\{\mathrm{a}_j\}, \{J_{jk}^i\}) = \int\limits_{(\mathbb{R}^D)^N}\exp\left(\sum_j \mathrm{a}_j\cdot \mathrm{s}_j + \sum_{j,k,i} J_{jk}^i s_j^i s_k^i\right)\prod_j d\rho_j(\mathrm{s}_j), \tag{1.3}$$

а ρ_j при каждом j — конечная положительиая мера на $\mathbb{R}^D$. Если такая модель возникает при аппроксимации евклидовой теории поля, заданной формулой (1.1), то коэффициенты J_{jk}^i неотрицательны (при $j \neq k$) и не зависят от i, а меры ρ_j задаются плотностями

$$\frac{d\rho_j(\mathrm{s})}{d\mathrm{s}} = \exp(-Q_j(|\mathrm{s}|^2)), \tag{1.4}$$

где Q_j — полином, который получается из $\tilde{Q}$ добавлением слагаемых, возникающих из квадратичиой части (1.1), и контрчленов, нужных для перенормировки. Отметим, в частности, что для моделей $|\varphi|^4$ (т. е. для квадратичного полинома $\tilde{Q}$) при $d < 5$ теория возмущений подсказывает, что каждый полином Q_j также должен быть квадратичным.

Результаты статистической механики первоначально применялись к моделям квантовой теории поля в случае $D=1$ ([1, 2]). Некоторые результаты, такие, как неравенства Гриффитса — Келли — Шермана, доказаны непосредственно (при $D=1$) для моделей, заданных формулами (1.2) — (1.4) *с произвольными* Q_j; другие результаты, такие, как теорема Ли и Янга, требуют дальнейших аппроксимаций и применимы не к произвольным Q_j: Саймон и Гриффитс [3] показали (при $D=1$), что в случае *квадратичного* Q_j модель (1.2) можно получить как некоторый предел моделей Изинга со спином $^1/_2$ $(\rho_j(s) = (\delta(s-1)+\delta(s+1))/2\ \forall j)$, и, следовательно, на такие φ^4-модели распространяется «классическая» теорема Ли и Янга.

В § 2 этой работы мы обобщим результат Саймона — Гриффитса на случай $D > 1$, показав, что модели $|\varphi|^4$ можно получить как пределы моделей классических ротаторов ($\rho_j(\mathbf{s}) = \delta(|\mathbf{s}|^2 - 1)$ $\forall j$). Наше доказательство основано на многомерной центральной предельной теореме для больших уклонений [4] и не зависит от D (для $D > 1$). Хотя и существует непосредственное доказательство нашей предельной теоремы, нам тем не менее представляется более естественным рассматривать ее в общем контексте центральных предельных теорем теории вероятностей; действительно, с этой точки зрения результат Саймона и Гриффитса предстает как следствие классических результатов Хинчина о распределении больших уклонений для числа исходов независимых испытаний Бернулли [5]. Дополнительным преимуществом этого подхода является то, что из него весьма любопытным образом возникают аналоги вершинных функций евклидовой теории поля (см. замечание 2 после теоремы 5).

Раздел 3 посвящен теореме Ли и Янга ($D = 2$ или 3). Мы начинаем с результатов Судзуки и Фишера, относящихся к квантовой модели Гейзенберга [6], и проведенного Либом анализа классического предела квантовых спиновых систем [7]; отсюда вытекает доказательство теоремы Ли и Янга для случая классической модели Гейзенберга с любой анизотропией, близкое тому, которое ранее было намечено Харрисом [8]. Случай плоского ротатора получается отсюда с помощью добавления бесконечного изотропного в плоскости взаимодействия спина с самим собой, а модель $|\varphi|^4$ ($D = 2$ или 3) — с помощью нашей аппроксимации классическими ротаторами. В работе [9] были анонсированы теоремы Ли и Янга для модели плоских ротаторов и для классических моделей Гейзенберга, но доказательства не появились, а сформулированные в [9] предположения представляются слишком слабыми.

В § 4 мы получаем корреляционные неравенства (при $D = 2$) с помощью методов Жинибра [10]; из этих неравенств вместе с полученной нами теоремой Ли и Янга вытекает убывание корреляций (стремление к нулю усеченной двухточечной функции Швингера) для моделей $|\varphi|^4$ при ненулевом внешнем поле. Мы также доказываем, что в моделях общего вида двухкомпонентных (т. е. плоских) ротаторов с нарушающим симметрию полем, направленным вдоль первой компоненты спина, справедлива оценка

$$E(S_j^2 S_k^2) = O\left(\left[E(S_j^1 S_k^1) - E(S_j^1) E(S_k^1)\right]^{1/2}\right). \tag{1.5}$$

Эта оценка показывает, что «продольный» корреляционный радиус составляет не меньше половины «поперечного» корреляционного радиуса, или (что для теорий поля эквивалентно) «продольная» массовая щель в спектре не больше удвоенной «поперечной» массовой щели. Объяснение этого обстоятельства на языке голдстоуновской теории приведено в конце § 4; мы обращаем внимание на то, что в $\pi - \sigma$-модели со спонтанно нарушенной $O(2)$-симметрией (φ^1 и φ^2 обозначают соответственно поля σ и π) наши результаты *не противоречат* возможности существования пиона нулевой массы и *резонанса* σ ненулевой массы. В заключение упомянем о том, что оценку (1.5) можно использовать для сравнения продольной и поперечной восприимчивости; это было недавно проделано Лебовицем и Пенроузом [11], которые показали, что в предположении существования спонтанной намагниченности в двухкомпонентной модели [1]) продольная восприимчивость равна бесконечности ниже критической температуры в случае трех- или четырехмерного пространства [2]).

2. ПОЛЯ $|\varphi|^4$ КАК КЛАССИЧЕСКИЕ РОТАТОРЫ

Основным техническим результатом этого раздела является следующая теорема, которая обобщает теорему 1 из [3].

Теорема 1. *Пусть* $\{\mathbf{Y}_k\colon k=1, 2, \ldots\}$ — *независимые случайные векторы, равномерно распределенные на поверхности единичной сферы в* $\mathbb{R}^D$; *тогда для любой непрерывной комплекснозначной функции* $F(\mathbf{y})$, *определенной на* $\mathbb{R}^D$ *и ограниченной по модулю величиной* $K\exp(c\,|\mathbf{y}|^2)$ *при некоторых* K *и* c, *верно соотношение*

$$A_n E\left(F(\mathbf{Y}(n))\exp(b_n\,|\mathbf{Y}(n)|^2)\right) \to \int_{\mathbb{R}^D} F(\mathbf{y})\exp(-\lambda\,|\mathbf{y}|^4)\,d\mathbf{y} \qquad (2.1)$$

при $n\to\infty$, *где* $\mathbf{Y}(n) = (\mathbf{Y}_1 + \ldots + \mathbf{Y}_n)/n^{3/4}$, $A_n = (2\pi/Dn^{1/2})^{D/2}$, $b_n = n^{1/2}D/2$ *и* $\lambda = D^2/(4D+8)$.

Доказательство этой теоремы приведено ниже (после теоремы 5) для случая $D > 1$ и основано главным образом на результатах Рихтера о больших уклонениях в центральной предельной теореме (теоремы 3 и 5 нашей работы). Мы не включаем доказательство для случая $D = 1$, которое может быть получено аналогичным путем из классических результатов Хинчина [5] для сумм бернуллиевских случай-

[1]) Это было доказано позже в работе Фрёлиха, Саймона и Спенсера [24]. — *Прим. перев.*

[2]) Аналогичный результат в теории поля следует из теоремы Голдстоуна.

ных величин, поскольку это доказательство уже приводилось Саймоном и Гриффитсом [3] (кстати, только при $D=1$ и нужно требовать непрерывности F). Прежде чем сформулировать результаты Рихтера, мы приведем следствие из теоремы 1, которое вместе с методом Гриффитса «заменяющих спинов» [1]) [12] будет использовано для того, чтобы получить теорему Ли и Янга для моделей $|\varphi|^4$ (см. теорему 10).

Теорема 2. *Предположим, что* $\{\mathbf{S}_j\colon j=1, \ldots, N\}$ — *случайные D-мерные векторы, совместное распределение которых определено формулами* (1.2), (1.3), (1.4) *с* $Q_j(s^2)=\lambda_j s^4+\beta_j s^2$ $(\lambda_j>0, \beta_j\in\mathbb{R})$, *и пусть* $\{\mathbf{Y}_{j,k}\colon j=1, \ldots, N;\ k=1, 2, \ldots\}$ — *независимые случайные векторы, равномерно распределенные на поверхности единичной сферы в* $\mathbb{R}^D$. *Тогда (для* $j=1, \ldots, N$; $n=1, 2, \ldots$) *существуют константы* $\tilde{A}_n>0$, $c_j>0$ *и* $b_{j,n}\to+\infty$ *при* $n\to\infty$, *такие, что для любой непрерывной комплекснозначной функции* $F(\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_N)$, *определенной на* $(\mathbb{R}^D)^N$ *и ограниченной по модулю величиной* $K\exp(c(|\mathbf{s}_1|^2+\ldots+|\mathbf{s}_N|^2))$ *при некоторых* K *и* c, *выполнено соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{A}_n E\Big(F(\mathbf{Y}_1(n), \ldots, \mathbf{Y}_n(n))\exp\Big(\sum_j \mathbf{a}_j\cdot\mathbf{Y}_j(n)+ + \sum_{j,k,i}\left(J^i_{jk}+b_{j,n}\delta_{jk}\right)Y^i_j(n)Y^i_k(n)\Big)\Big)=E\left(F\left(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_N\right)\right), \qquad (2.2)$$

где $\mathbf{Y}_j(n)=c_j(\mathbf{Y}_{j,1}+\ldots+\mathbf{Y}_{j,n})/n^{3/4}$ *и* δ_{jk} — *символ Кронекера.*

Доказательство. Эта теорема следует прямо из теоремы 1, если положить $c_j=(\lambda/\lambda_j)^{1/4}$ и $b_{j,n}=b_n(\lambda_j/\lambda)^{1/2}-\beta_j$.

Следующие три теоремы сформулированы не в самом общем виде. Через $\{\mathbf{Y}_k\colon k=1, 2, \ldots\}$ мы обозначим в дальнейшем независимые одинаково распределенные D-мерные случайные векторы, распределение которых сферически симметрично и нетривиально ($\neq\delta(\mathbf{y})$); будем также предполагать, что

$$\exp(G(\mathbf{a}))\equiv E(\exp(\mathbf{a}\cdot\mathbf{Y}_1))<\infty \quad \forall\mathbf{a}\in\mathbb{R}^D.$$

Мы определим $\Gamma(\mathbf{y})$ для $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^D$ (см. [12]) как

$$\Gamma(\mathbf{y})=\inf_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^D}(-\mathbf{a}\cdot\mathbf{y}+G(\mathbf{a})). \qquad (2.3)$$

Функция $\Gamma(\mathbf{y})$ неположительна и может принимать значение $-\infty$, но (при малых $|\mathbf{y}|$) она разлагается в сходящийся ряд

---

[1]) В оригинале: analogue spins. — *Прим. перев.*

Тейлора

$$\Gamma(\mathbf{y}) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} |\mathbf{y}|^{2m}/(2m)!, \tag{2.4}$$

который можно связать с рядом Тейлора для G

$$G(\mathbf{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} u_{2m} |\mathbf{a}|^{2m}/(2m)!, \tag{2.5}$$

получив, например,

$$\gamma_2 = -1/u_2, \qquad \gamma_4 = u_4/(u_2)^4. \tag{2.6}$$

Следующая теорема принадлежит Рихтеру [13]; она будет использована в доказательстве теоремы 1 для того, чтобы оценить хвост распределения $\mathbf{Y}(n)$.

Теорема 3. *Для $y > 0$ и любого* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^D$

$$\Pr[(\mathbf{Y}_1 + \ldots + \mathbf{Y}_n) \cdot \mathbf{a} \geqslant y] \leqslant \exp(n\Gamma(y\mathbf{a}/n|\mathbf{a}|^2)). \tag{2.7}$$

Доказательство. Мы положим $Y = (\mathbf{Y}_1 + \ldots + \mathbf{Y}_n) \cdot \mathbf{a}$ и перепишем неравенство Чебышева

$$\Pr[\exp(rY) \geqslant e^{w} E(\exp(rY))] \leqslant e^{-w} \tag{2.8}$$

в виде

$$\Pr[Y \geqslant (w + nG(r\mathbf{a}))/r] \leqslant e^{-w} \tag{2.9}$$

при $r > 0$. Положим в (2.9) $w = ry - nG(r\mathbf{a})$ и затем выберем r так, чтобы максимизировать w, откуда

$$\Pr[Y \geqslant y] \leqslant \exp(n \inf_{r>0} [-ry/n + G(r\mathbf{a})]). \tag{2.10}$$

Теперь из сферической симметрии следует, что (2.3) можно представить как

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \inf_{r>0} (-r\alpha|\mathbf{x}|^2 + G(r\alpha\mathbf{x})) \tag{2.11}$$

для любого $\alpha > 0$; положив $\mathbf{x} = y\mathbf{a}/n|\mathbf{a}|^2$ и $\alpha = y/n|\mathbf{x}|^2 = n|\mathbf{a}|^2/y$, мы получаем (2.7) из (2.10), что и требовалось доказать.

Для того чтобы проверить, что условия следующей теоремы выполняются для модели классических ротаторов, мы вычислим характеристическую функцию случайного вектора $\mathbf{Y}_1$, равномерно распределенного на поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^D$:

$$E(\exp(i\mathbf{a} \cdot \mathbf{Y}_1)) = \mathrm{const} \cdot |\mathbf{a}|^{1-D/2} J_{D/2-1}(|\mathbf{a}|) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\, D(D+2) \ldots (D+2k-2)} (|a|^2/2)^k, \tag{2.12}$$

где J_p — обычная функция Бесселя порядка p. Из (2.12) легко следует, что $u_2 = 1/D$, $\gamma_2 = -D$, $u_4 = -6/(D^3 + 2D^2)$, $\gamma_4 = -6D^2/(D+2)$, а также, что

$$E(\exp(\mathbf{a}\cdot\mathbf{Y}_1)) < \exp(u_2|\mathbf{a}|^2/2) \quad \text{при } |\mathbf{a}| \neq 0. \tag{2.13}$$

Теорема 4. *Если распределение случайного вектора* $\mathbf{Y}_1$ *удовлетворяет* (2.13), *то* $\Gamma(\mathbf{y}) < \gamma_2|\mathbf{y}|^2/2$ *при* $|\mathbf{y}| \neq 0$; *если к тому же* $\mathbf{Y}_1$ *ограничен (т. е.* $\Pr[|\mathbf{Y}_1| > K_1] = 0$ *при некотором* K_1) *и* $\gamma_4 < 0$, *то существует такое* $\gamma > 0$, *что*

$$\Gamma(\mathbf{y}) \leqslant (\gamma_2|\mathbf{y}|^2/2) - \gamma|\mathbf{y}|^4 \tag{2.14}$$

при любом $\mathbf{y}$, *и, следовательно, существует такое* $C > 0$, *что при* $y > 1$

$$\Pr[|\mathbf{Y}_1 + \ldots + \mathbf{Y}_n| \geqslant y] \leqslant \\ \leqslant C y^{(D-1)/2} \exp\{(\gamma_2 y^2/2n) - (\gamma y^4/n^3)\}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Если $\mathbf{Y}_1$ удовлетворяет (2.13), то $G(\mathbf{a}) < u_2|\mathbf{a}|^2/2$ при $|\mathbf{a}| \neq 0$, так что

$$\Gamma(\mathbf{y}) < \inf_{\mathbf{a}}(-\mathbf{a}\cdot\mathbf{y} + u_2|\mathbf{a}|^2/2) = -|\mathbf{y}|^2/2u_2 = \gamma_2|\mathbf{y}|^2/2 \tag{2.16}$$

при $|\mathbf{y}| \neq 0$. Предположим теперь, что $\mathbf{Y}_1$ ограничено, K_0 — существенная верхняя грань $|\mathbf{Y}_1|$, и введем обозначение $h(\mathbf{y}) = (\Gamma(\mathbf{y}) - \gamma_2|\mathbf{y}|^2/2)/|\mathbf{y}|^4$ при $|\mathbf{y}| \neq 0$. Поскольку $G(\mathbf{a}) \leqslant K_0|\mathbf{a}|$, а $G(\mathbf{a})/|\mathbf{a}| \to K_0$ при $|\mathbf{a}| \to \infty$, то, как легко видеть, $\Gamma(\mathbf{y}) = -\infty$ при $|\mathbf{y}| > K_0$ и $\Gamma(\mathbf{y})$ непрерывна при $|\mathbf{y}| < K_0$; отсюда следует, что функция $h(\mathbf{y})$ отделена от нуля при $|\mathbf{y}| \in [\varepsilon, \infty)$ для любого $\varepsilon > 0$. Теперь мы можем получить (2.14), заметив, что, поскольку $\gamma_4 < 0$, $h(\mathbf{y})$ отделена от нуля на $(0, \varepsilon)$ при малых ε в силу (2.4), так что γ можно положить равным $-\sup\{h(\mathbf{y})\colon |\mathbf{y}| \neq 0\}$.

Остается только доказать (2.15). Мы используем (2.7), (2.14) и непосредственно проверяемый геометрический факт, состоящий в том, что существует константа C_1 (зависящая только от D), для которой (при любом $y > 1$) существуют единичные векторы $\{\mathbf{v}_i\colon i = 1, \ldots, M \leqslant C_1 y^{(D-1)/2}\}$, обладающие свойством $\{\mathbf{y}\colon |\mathbf{y}| \geqslant y\} \subset \bigcup_i \{\mathbf{y}\colon \mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_i \geqslant y - 1\}$. Следовательно,

$$\Pr[|\mathbf{Y}_1 + \ldots + \mathbf{Y}_n| \geqslant y] \leqslant \\ \leqslant C_1 y^{(D-1)/2} \exp\{(\gamma_2 (y-1)^2/2n) - (\gamma (y-1)^4/n^3)\}; \tag{2.17}$$

поскольку $|\mathbf{Y}_1 + \ldots + \mathbf{Y}_n| \leqslant K_0 n$ с вероятностью 1, то можно считать, что $y \leqslant K_0 n$, и тогда (2.15) следует из (2.17).

Следующая теорема также принадлежит Рихтеру [4]; мы не приводим ее полного доказательства, использующего метод перевала, а даем только его краткий набросок (в замечании 1 к этой теореме). Чтобы показать, что условия теоремы выполняются для модели классических ротаторов (при $D > 1$), мы заметим, что для случайного вектора $\mathbf{Y}_1$, равномерно распределенного на поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^D$, из (2.12) следует, что $|E(\exp(i\mathbf{a}\cdot\mathbf{Y}_1))| = O(1/|\mathbf{a}|^{(D-1)/2})$ для больших $|\mathbf{a}|$, так что $E(\exp i(\mathbf{a}\cdot\mathbf{Y}_1 + \ldots + \mathbf{a}\cdot\mathbf{Y}_n))$ является суммируемой функцией от $\mathbf{a}$ при $n > 2D/(D-1)$; отсюда получаем с помощью обратного преобразования Фурье, что распределение случайной величины $\mathbf{Y}_1 + \ldots + \mathbf{Y}_n$ имеет ограниченную плотность при $n > 2D/(D-1)$.

Теорема 5. *Если существует такое n_0, что при $n > n_0$ распределение случайной величины $\mathbf{Y}_1 + \ldots + \mathbf{Y}_n$ абсолютно непрерывно относительно лебеговой меры в $\mathbb{R}^D$ и задается ограниченной плотностью $f_n(\mathbf{y})$, то для $\sqrt{n} < |\mathbf{y}| = o(n)$ при достаточно большом n*

$$f_n(\mathbf{y}) = \frac{\exp(n\Gamma(\mathbf{y}/n))}{(2\pi n u_2)^{D/2}}(1 + O(|\mathbf{y}|/n)). \qquad (2.18)$$

Замечание 1. Преобразование Фурье $f_n(\mathbf{y})$ равно $(2\pi)^{-D/2} \times \exp(nG(i\mathbf{b}))$, так что, производя обратное преобразование Фурье и изменяя контур интегрирования, мы получаем

$$f_n(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-D}\int \exp[-(\mathbf{a}_0 + i\mathbf{b})\cdot\mathbf{y} + nG(\mathbf{a}_0 + i\mathbf{b})]\,d\mathbf{b}. \qquad (2.19)$$

Рихтер выбрал $\mathbf{a}_0$ так, чтобы контур проходил через точку перевала, а затем оценил интеграл асимптотически при больших n; значение экспоненты в точке перевала, которое дает главную часть асимптотики, можно вычислить как минимум вдоль «перевального гребня», который равен

$$\exp\left[\inf_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^D}(-\mathbf{a}\cdot\mathbf{y} + nG(\mathbf{a}))\right] = \exp[n\Gamma(\mathbf{y}/n)]. \qquad (2.20)$$

Другой вариант теоремы 5, объясняющий связь функции Γ с энтропией, см. в [14, § А. 4].

Замечание 2. Функция Γ — конечномерный аналог производящей функции для вершинных функций в евклидовой квантовой теории поля, про которую известно, что она существует для определенных $P(\varphi)_2$-моделей [15]. В этих случаях применим вариант теоремы 3 (например, с $n = 1$), связывающей хвост распределения для значения поля в моделях $P(\varphi)_2$ с вершинными функциями; для полей φ^4 первое утверждение теоремы 4 также применимо, поскольку показано, что аналог оценки (2.13) следует из теоремы Ли и Янга [16]. Было бы чрезвычайно интересно получить какое-нибудь обобщение теоремы 5, применимое к суммам независимых евклидовых полей; такой результат мог бы быть новым полезным орудием изучения вершинных функций.

Доказательство теоремы 1 (при $D>1$). Обозначим через $\tilde{f}_n(\mathbf{y}) \equiv n^{3D/4} f_4(n^{3/4}\mathbf{y})$ плотность распределения $\mathbf{Y}(n)$, так что левая часть (2.1) равна

$$A_n \int\limits_{\mathbb{R}^D} F(\mathbf{y}) \exp(b_n |\mathbf{y}|^2) \tilde{f}_n(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = I_1(n) + I_2(n) + I_3(n), \qquad (2.21)$$

где I_1, I_2, I_3 получаются ограничением интегрирования в левой части (2.21) на области $\{|\mathbf{y}| \leqslant n^{-1/4}\}$, $\{n^{-1/4} < |\mathbf{y}| < \alpha_n\}$, $\{|\mathbf{y}| \geqslant \alpha_n\}$ соответственно; по причинам, которые станут ясны из дальнейшего, мы выберем α_n так, чтобы $(\alpha_n)^4/\log n \to \infty$, а $\alpha_n/n^{1/12} \to 0$.

Из предполагаемой в теореме оценки функции F следует, что при $n \to \infty$

$$|I_1(n)| \leqslant A_n K \int\limits_{|\mathbf{y}| \leqslant n^{-1/4}} \exp((c+b_n)|\mathbf{y}|^2) \tilde{f}_n(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \leqslant$$
$$\leqslant (\mathrm{const}/n^{D/4}) \int\limits_{\mathbb{R}^D} \exp(cn^{-1/2} + 1/2D) \tilde{f}_n(\mathbf{y})\, dy \to 0. \qquad (2.22)$$

Подобным образом, имеем

$$|I_3(n)| \leqslant -(\mathrm{const}/n^{D/4}) \int\limits_{\alpha_n}^{\infty} \exp((c+b_n) y^2)\, dH(y), \qquad (2.23)$$

где $H(y) = \Pr[|\mathbf{Y}(n)| > y]$; интегрируя по частям и имея в виду, что $H(y) = 0$ при $y > n^{1/4}$, получаем

$$|I_3(n)| \leqslant (\mathrm{const}/n^{D/4}) \Big(\exp((c+b_n)\alpha_n^2) H(\alpha_n) +$$
$$+ 2(c+b_n) \int\limits_{\alpha_n}^{\infty} y \exp((c+b_n) y^2) H(y)\, dy\Big). \qquad (2.24)$$

Поскольку $-b_n = n^{1/2}\gamma_2/2$, из (2.15) и из того, что $H(y) = 0$ при $y > n^{1/4}$, имеем следующее неравенство:

$$H(y) \leqslant C y^{(D-1)/2} n^{3(D-1)/8} \exp(-b_n y^2 - \gamma y^4) \leqslant$$
$$\leqslant C n^{(D-1)/2} \exp(-b_n y^2 - \gamma y^4). \qquad (2.25)$$

Таким образом, из (2.24) следует, что

$$|I_3(n)| =$$
$$= O\left(n^{(D-2)/4}\exp\left(c\alpha_n^2 - \gamma\alpha_n^4\right) + n^{D/4}\int_{\alpha_n}^{\infty} y\exp(cy^2 - \gamma y^4)\,dy\right) =$$
$$= O\left(n^{D/4}\exp\left(-\gamma\alpha_n^4/2\right)\right) \to 0 \qquad (2.26)$$

при $n \to \infty$.

Остается показать, что $I_2(n)$ стремится к правой части (2.1); именно здесь используется теорема 5. Сначала мы сократим масштаб $\mathbf{y}$ в (2.18) в $n^{1/4}$ раз, а затем используем (2.4) для того, чтобы показать, что при $n^{-1/4} < |\mathbf{y}| < \alpha_n = o(n^{1/12}) = o(n^{1/4})$

$$\tilde{f}_n(y) = (n^{1/2}/2\pi u_2)^{D/2}\exp\{(n^{1/2}\gamma_2|\mathbf{y}|^2/2) + (\gamma_4|\mathbf{y}|^4/4!) +$$
$$+ O(|\mathbf{y}|^6/n^{1/2})\}(1 + O(|\mathbf{y}|/n^{1/4})) =$$
$$= (1 + o(1))(A_n)^{-1}\exp(-b_n|\mathbf{y}|^2 - \lambda|\mathbf{y}|^4). \qquad (2.27)$$

Отсюда следует, что при $n \to \infty$

$$I_2(n) = (1 + o(1))\int_{n^{-1/4}<|\mathbf{y}|<\alpha_n} F(\mathbf{y})\,e^{-\lambda|\mathbf{y}|^4}\,d\mathbf{y} \to$$
$$\to \int_{R^D} F(\mathbf{y})\,e^{-\lambda|\mathbf{y}|^4}\,d\mathbf{y}, \qquad (2.28)$$

чем завершается доказательство теоремы 1.

Замечание 3. Из приведенного доказательства ясно, что заключения теоремы 1 остаются верными и для случайных векторов $\mathbf{Y}_j$, отличных от классических ротаторов (с соответствующими изменениями A_n, b_n, λ), если только для них выполнены условия теорем 4 и 5. Это обстоятельство придает моделям $|\varphi|^4$ некоторого рода универсальность, которую, вероятно, стоит исследовать более подробно.

3. НУЛИ СТАТИСТИЧЕСКИХ СУММ

Основная задача этого раздела — доказать теорему Ли и Янга для моделей $|\varphi|^4$ и классических ротаторов при $D = 2$ или 3. Мы приводим полное доказательство для классических ротаторов, поскольку, как отмечалось во введении, нынешнее положение дел с теоремой Ли и Янга для этих моделей не совсем ясно.

Мы определяем статистическую сумму для классической модели Гейзенберга как

$$Z^C\left(\{\mathbf{a}_j\},\ \{J^i_{jk}\}\right)=E\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{N}\mathbf{a}_j\cdot\mathbf{Y}_j+\sum_{j,\,k=1}^{N}\ \sum_{i=1}^{3}J^i_{jk}Y^i_jY^i_k\right)\right), \qquad (3.1)$$

где $\{\mathbf{Y}_j\colon j=1,\ \ldots,\ N\}$ — независимые трехмерные случайные векторы, равномерно распределенные на поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^3$. Наше исследование нулей Z^C основано на следующей теореме Судзуки и Фишера [6], касающейся статистической суммы Z^Q квантовой модели Гейзенберга со спином $\mathcal{J}$ ($\mathcal{J}={}^1/_2,\ 1,\ {}^3/_2,\ \ldots$). Определим Z^Q как

$$Z^Q\left(\{\mathbf{a}_j\},\ \{J^i_{jk}\},\ \mathcal{J}\right)=$$

$$=(2\mathcal{J}+1)^{-N}\operatorname{Tr}\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{N}\mathbf{a}_j\cdot\boldsymbol{\sigma}_j+\sum_{j,\,k=1}^{N}\ \sum_{i=1}^{3}J^i_{jk}\sigma^i_j\sigma^i_k\right)\right), \qquad (3.2)$$

где $\{\boldsymbol{\sigma}_j=\left(\sigma^1_j,\ \sigma^2_j,\ \sigma^3_j\right)\colon j=1,\ \ldots,\ N\}$ — стандартные квантово-механические операторы спина, удовлетворяющие равенствам $[\boldsymbol{\sigma}_j,\ \boldsymbol{\sigma}_k]=0$ при $j\neq k$, $[\sigma^1_j,\ \sigma^2_j]=i\sigma^3_j$ (и аналогичным равенствам, получающимся с помощью циклических перестановок) и $(\sigma^1_j)^2+(\sigma^2_j)^2+(\sigma^3_j)^2=\mathcal{J}(\mathcal{J}+1)$; эти операторы действуют на тензорном произведении $\bigotimes_{j=1}^{N}\mathbb{C}^{2\mathcal{J}+1}$ обычным образом [7] [1]).

Теорема 6. *Если* $\left|J^2_{jk}\right|\leqslant J^1_{jk}$, $\left|J^3_{jk}\right|\leqslant J^1_{jk}$ *и* $\mathbf{a}_j=(a_j,\ 0,\ 0)$ *с* $a_j\geqslant 0$ *при всех* $j,\ k$, *то при любом* $\mathcal{J}$ *статистическая сумма*

$$Z^Q(z)\equiv Z^Q\left(\{z\mathbf{a}_j\},\ \{J^i_{jk}\},\ \mathcal{J}\right) \qquad (3.3)$$

— целая функция z, *все нули которой чисто мнимые.*

Доказательство. По существу, эта теорема доказана Судзуки и Фишером в [6]; мы лишь отметим здесь, что в их доказательстве допускается, что $J^i_{kk}\neq 0$, поскольку они

---

[1]) Более точно: каждая тройка операторов $\left(\sigma^1_j,\ \sigma^2_j,\ \sigma^3_j\right)$, $j=1,\ \ldots,\ N$, первоначально задается в $(2\mathcal{J}+1)$-мерном пространстве $\mathbb{C}^{2\mathcal{J}+1}$ и служит тройкой инфинитезимальных операторов действующего в этом пространстве неприводимого представления веса $\mathcal{J}$ группы унитарных унимодулярных матриц 2-го порядка. При этом вся совокупность операторов $\left\{\sigma^i_j\colon i=1,2,3;\ j=1,\ \ldots,\ N\right\}$ естественно определяется уже в тензорном произведении N экземпляров $(2\mathcal{J}+1)$-мерного пространства так, что каждая тройка $\left\{\sigma^i_j\colon i=1,\ 2,\ 3\right\}$ нетривиально действует в j-м множителе, $j=1,\ \ldots,\ N$. — *Прим. ред.*

сводят общий случай спина $\mathcal{J}$ к случаю $\mathcal{J} = 1/2$, когда $(\sigma^1)^2 = (\sigma^2)^2 = (\sigma^3)^2 = 1/4$.

Следующая теорема принадлежит Либу [7].

Теорема 7. *При любых* $\{\mathrm{a}_j\}$, $\{J^i_{jk}\}$

$$\underline{A} Z^C(\{\mathcal{J}\mathrm{a}_j\}, \{\underline{J}^i_{jk}\}) \leqslant Z^Q(\{\mathrm{a}_j\}, \{J^i_{jk}\}, \mathcal{J}) \leqslant$$
$$\leqslant \bar{A} Z^C(\{(\mathcal{J}+1)\mathrm{a}_j\}, \{\bar{J}^i_{jk}\}), \tag{3.4}$$

где

$$\underline{J}^i_{jk} = (\mathcal{J}^2 - \mathcal{J}\delta_{jk}/2) J^i_{jk}, \tag{3.5}$$

$$\bar{J}^i_{jk} = ((\mathcal{J}+1)^2 + (\mathcal{J}+1)\delta_{jk}/2) J^i_{jk}, \tag{3.6}$$

$$\underline{A} = \exp\Big(\sum_{k,\,i} \mathcal{J} J^i_{kk}/2\Big), \tag{3.7}$$

$$\bar{A} = \exp\Big(-\sum_{k,\,i} (\mathcal{J}+1) J^i_{kk}/2\Big). \tag{3.8}$$

Следовательно,

$$Z^C(\{\mathrm{a}_j\}, \{J^i_{jk}\}) = \lim_{\mathcal{J}\to\infty} Z^Q(\{\mathrm{a}_j/\mathcal{J}\}, \{J^i_{jk}/\mathcal{J}^2\}, \mathcal{J}). \tag{3.9}$$

Доказательство. Эти результаты все содержатся в [7]; мы привели формулировку неравенств Либа для того, чтобы было понятно, что соотношение (3.9) верно и при $J^i_{kk} \neq 0$.

Теперь мы можем доказать теорему Ли и Янга для классических моделей Гейзенберга.

Теорема 8. *Если* $|J^2_{jk}| \leqslant J^1_{jk}$, $|J^3_{jk}| \leqslant J^1_{jk}$ *и* $\mathrm{a}_j = (a_j, 0, 0)$ *с* $a_j \geqslant 0$ *при всех* j, k, *то*

$$Z^C(z) \equiv Z^C(\{z\mathrm{a}_j\}, \{J^i_{jk}\}) \tag{3.10}$$

— целая функция z, *все нули которой чисто мнимые.*

Доказательство. Определим $Z^Q_{\mathcal{J}}(z)$ как правую часть (3.3) с $\mathrm{a}_j/\mathcal{J}$ вместо a_j и $J^i_{jk}/\mathcal{J}^2$ вместо J^i_{jk} при всех j, k, i. Тогда $Z^Q_{\mathcal{J}}(z) \to Z^C(z)$ при $\mathcal{J} \to \infty$ равномерно на компактных множествах *вещественных* z в силу теоремы 7. Кроме того, нормированный след [в (3.2)] матрицы ограничен матричной нормой, а $\|\sigma^i_j/\mathcal{J}\| \leqslant 1$, так что $Z^Q_{\mathcal{J}}(z)$ равномерно ограничено на компактных множествах *комплексных* z (более изящное рассуждение в действительности показывает, что $|Z^Q_{\mathcal{J}}(z)| \leqslant Z^Q_{\mathcal{J}}(\mathrm{Re}\, z)$; это следует из того факта, что $|\mathrm{Tr}(\exp(A + iB))| \leqslant \mathrm{Tr}(\exp(A))$ для самосопряженных A и B). Из теоремы Витали о сходимости аналитических функций следует тогда, что $Z^Q_{\mathcal{J}}(z) \to Z^C(z)$ при $\mathcal{J} \to \infty$ равномерно на компактных множествах *комплексных* z. Теорема 6 вместе с теоремой Гурвица [17, стр. 205] показывают тогда, что все нули $Z^C(z)$ чисто мнимые, что и требовалось доказать.

В качестве следствия теоремы 8 мы докажем теорему Ли и Янга для плоских ротаторов.

Теорема 9. *Пусть* $\{\mathbf{X}_j\colon j=1, \ldots, N\}$ — *независимые двумерные случайные векторы, равномерно распределенные на единичной окружности в* $\mathbb{R}^2$, *и*

$$Z(z) = E\left(\exp\left(z \sum_{j=1}^{N} a_j X_j^1 + \sum_{j,\,k=1}^{N} \sum_{i=1}^{2} J_{jk}^i X_j^i X_k^i\right)\right) \tag{3.11}$$

с $a_j \geqslant 0$ *и* $|J_{jk}^2| \leqslant J_{jk}^1$ *при всех* j, k; *тогда* $Z(z)$ — *целая функция* z, *все нули которой чисто мнимые.*

Доказательство. При данных $\{a_j\}$, $\{J_{jk}^1\}$, $\{J_{jk}^2\}$ мы определим

$$Z_n(z) = B_n Z^C(\{z\mathbf{a}_j\}, \{J_{jk}^i(n)\}), \tag{3.12}$$

где $\mathbf{a}_j = (a_j, 0, 0)$, $J_{jk}^i(n) = J_{jk}^i + n\delta_{jk}$ $(i=1, 2)$, $J_{jk}^3(n) = 0$ и

$$B_n = \left(E\left[\exp\left\{n \sum_{j=1}^{N} ((Y_j^1)^2 + (Y_j^2)^2)\right\}\right]\right)^{-1}, \tag{3.13}$$

а $\{\mathbf{Y}_j\}$ — независимые трехмерные ротаторы. Поскольку $(Y_j^1)^2 + (\tilde{Y}_j^2)^2 = 1 - (Y_j^3)^2$, мы можем воспользоваться тем обстоятельством, что для подходящих $\tilde{B}_n$

$$\tilde{B}_n \exp(-n(y_3)^2)\delta(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1) \to \delta(y_1^2 + y_2^2 - 1)\delta(y_3), \tag{3.14}$$

и заключить, что $Z_n \to Z$ равномерно на компактных подмножествах комплексной плоскости. В силу теоремы 8 Z_n имеет только чисто мнимые нули, так что по теореме Гурвица и Z имеет только чисто мнимые нули; этим завершается доказательство.

Последний результат этого раздела — теорема Ли и Янга для моделей $|\varphi|^4$ $(D=2$ или $3)$.

Теорема 10. *Пусть* $Z(z) = Z(\{z\mathbf{a}_j\}, \{J_{jk}^i\})$ *определена формулами* (1.3) *и* (1.4) *с* $Q_j(s^2) = \lambda_j s^4 + \beta_j s^2$ $(\lambda_j > 0,\ \beta_j \in \mathbb{R})$ *при* $D=2$ *или* 3. *Предположим, что* $a_j^1 \geqslant 0$, $a_j^i = 0$ $(i \neq 1)$, $J_{jk}^1 \geqslant |J_{jk}^i|$ $(i \neq 1,\ j \neq k)$ *и* $J_{kk}^1 \geqslant J_{kk}^i$ $(i \neq 1)$; *тогда* $Z(z)$ — *целая функция, все нули которой чисто мнимые.*

Доказательство. Эта теорема автоматически следует из теорем 2, 8 и 9 в силу стандартных соображений.

Замечание 4. Мы смогли получить теоремы о нулях статистической суммы (теоремы 8, 9, 10) для неквантовых спиновых моделей только в случае, когда размерность спинов $D \leqslant 3$. Причина такого ограничения состоит в том, что наши доказательства все основаны на результате Судзуки и Фишера для квантовой модели ($D=3$) (теорема 6). Есть основания надеяться, что аналогичная теорема Ли и Янга верна для случая любой размерности спина; в частности, уравнение (2.12) показывает, что для отдельного D-мерного классического ротатора $\mathbf{Y}$ функция $E(\exp(z\mathbf{Y}))$ имеет только чисто мнимые нули, а потому из результатов [18] следует теорема Ли и Янга в ослабленном варианте (а именно, при дополнительном предположении, что $J^i_{jk}=0$ для $i \neq 1$). Для того чтобы получить более сильный результат в случае $D>3$, кажется разумным, имея в виду, что теорема Судзуки — Фишера сама основана на аппроксимации с помощью классических спинов 1/2, найти прямую аппроксимацию с помощью классических спинов 1/2 модели D-мерных классических ротаторов (или моделей $|\varphi|^4$); такой результат имел бы то дополнительное преимущество, что сделал бы ненужной большую часть материала этого раздела.

4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Первая теорема этого раздела представляет собой вариант первого неравенства Гриффитса, Келли и Шермана, приспособленный к ферромагнетикам со спином размерности D; ее доказательство легко получается с помощью методов, развитых в [19, 10, 2]. Для вектора $\mathbf{a}$ мы будем писать $\mathbf{a} \geqslant 0$, если $a^i \geqslant 0$ для всех координат i, и будем обозначать $(S^1)^{n^1} \ldots (S^D)^{n^D}$ через $\mathbf{S}^{\mathbf{n}}$ с мультииндексом $\mathbf{n}=(n^1, \ldots, n^D)$; будем называть $\rho(\mathbf{s})$ зеркально-симметричным, если при каждом k оно инвариантно относительно отражения $(s^1, \ldots, s^k, \ldots, s^D) \to (s^1, \ldots, -s^k, \ldots, s^D)$.

Теорема 11. *Предположим, что* $\{\mathbf{S}_j\colon j=1, \ldots, N\}$ — *случайные D-мерные векторы, совместное распределение вероятностей которых задано формулами* (1.2) *и* (1.3), *и каждое из* ρ_j *зеркально-симметрично и удовлетворяет оценке* $\int \exp(b|\mathbf{s}|^2) \times \times d\rho_j(\mathbf{s}) < \infty$ *для всех* $b>0$. *Тогда если* $\mathrm{a}_j \geqslant 0$ *и* $J^i_{jk} \geqslant 0$ *при всех* j, k, i $(j \neq k)$, *то для любых мультииндексов* $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_N$

$$E\left(\mathbf{S}_1^{\mathbf{n}_1} \ldots \mathbf{S}_N^{\mathbf{n}_N}\right) \geqslant 0. \tag{4.1}$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любого набора $\{\mathbf{n}_j\}$

$$\int \mathbf{s}_1^{\mathbf{n}_1} \ldots \mathbf{s}_N^{\mathbf{n}_N} \exp\left(\sum_{j,\,i} a_j^i s_j^i + \sum_{j,\,k,\,i} J_{jk}^i s_j^i s_k^i\right) \prod_{j=1}^{N} d\rho_j(\mathbf{s}_j) \geqslant 0. \quad (4.2)$$

Не теряя общности, можно считать, что $J_{kk}^i = 0$, поскольку эти члены всегда можно включить в ρ_k. Разлагая экспоненту в (4.2) в ряд, мы получаем разложение (4.2) в ряд по степеням $\{a_j^i, J_{jk}^i\}$, каждый коэффициент которого есть произведение сомножителей вида

$$\int_{R^D} \mathbf{s}_j^{\mathbf{m}_j} d\rho_j(\mathbf{s}_j) \quad (4.3)$$

для какого-то набора мультииндексов $\mathbf{m}_j$. Поскольку a_j^i, $J_{jk}^i \geqslant 0$, нам надо только показать, что выражение (4.3) неотрицательно; последнее очевидно, поскольку из зеркальной симметрии ρ_j следует, что если хоть одна из компонент m_j^i мультииндекса $\mathbf{m}_j$ нечетна, то интеграл (4.3) обращается в нуль.

В отличие от предыдущей теоремы второе неравенство Гриффитса не обобщено на случай многокомпонентных ферромагнетиков общего вида; неизвестно даже, удовлетворяет ли классическая модель Гейзенберга (классический ротатор при $D = 3$) какому-нибудь неравенству подобного типа [1]). Однако в случае $D = 2$ результаты Жинибра для плоских ротаторов можно распространить на модели $Q(|\varphi|^2)$. Мы сформулируем сначала две леммы, в основном соответствующие примерам, приведенным Жинибром в его общей формулировке неравенств Гриффитса (подробности см. в [10]).

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{F}$ — множество полиномов от* $\{\cos(m_1\theta_1 + \ldots + m_N\theta_N): m_i \in \mathbb{Z}\}$ *с неотрицательными коэффициентами. Тогда для любого конечного набора* $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *элементов* $\mathcal{F}$

$$\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{N} d\theta_j\, d\theta_j' \prod_{i=1}^{n} \left(f_i(\theta_1, \ldots, \theta_N) \pm f_i(\theta_1', \ldots, \theta_N')\right) \geqslant 0 \quad (4.4)$$

при любом выборе знаков + и —.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{G}$ — множество полиномов с неотрицательными коэффициентами от* $\left\{\prod_{j=1}^{N} h_j(r_j)\right.$: *каждая $h_j(r)$ — неотрица-*

---

[1]) Впоследствии этот вопрос был решен в работе Денлопа [25]. — *Прим. перев.*

тельная, неубывающая на $[0, \infty)$ *и растущая на* ∞ *не быстрее, чем* $O(\exp(br^2))$ *при некотором* $b > 0$, *функция*$\}$. *Тогда для любых положительных мер* $\nu_j(r)$ $(j = 1, \ldots, N)$, *таких, что* $\int_0^\infty \exp(br^2)\, d\nu_j(r) < \infty$ *при всех* b *и* j, *и любого конечного набора* $\{g_1, \ldots, g_n\}$ *элементов* $\mathcal{G}$

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{N} d\nu_j(r_j)\, d\nu_j(r'_j) \prod_{i=1}^{n} (g_i(r_1, \ldots, r_N) \pm \\ \pm g_i(r'_1, \ldots, r'_N)) \geqslant 0 \qquad (4.5)$$

при любом выборе знаков $+$ *и* $-$.

Замечание 5. В [10] аналог леммы 1 для случая группы $\mathbb{Z}_2$ (спин $^1/_2$) и лемма 2 использованы для того, чтобы доказать неравенства ГКШ для случая одномерных непрерывных спинов. Мы применим тот же метод к случаю $D = 2$.

Мы определим $\mathcal{Q}$ как семейство функций на $(\mathbb{R}^2)^N$, которые (в полярных координатах) являются полиномами от функций из $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ с неотрицательными коэффициентами.

Теорема 12. *Предположим, что* $\{\mathbf{S}_j\colon j = 1, \ldots, N\}$ — *случайные двумерные векторы, совместное распределение которых задано формулами* (1.2) *и* (1.3), *причем каждое* $d\rho_j(\mathbf{s}) = d\rho_j(\theta, r) = d\theta_j\, d\nu_j(r)$ *и* $\int \exp(b\,|\mathbf{s}\,|^2)\, d\rho_j(\mathbf{s}) < \infty$ *для всех* b *и* j. *Тогда если* $\mathbf{a}_j = (a_j, 0) \geqslant 0$, $|J^2_{jk}| \leqslant J^1_{jk}$ $(j \neq k)$ *и* $J^2_{kk} \leqslant J^1_{kk}$ *при всех* j, k, *то для любых* F, $G \in \mathcal{Q}$

$$E(F(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_N)) \geqslant 0, \qquad (4.6)$$

$$E(F(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_N)\, G(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_N)) \geqslant \\ \geqslant E(F(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_N))\, E(G(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_N)). \qquad (4.7)$$

Доказательство. Сначала заметим, что, включив подходящий множитель в $\nu_k(r)$, можно, не теряя общности, считать, что $|J^2_{kk}| \leqslant J^1_{kk}$. Затем убедимся, что при произвольных j, k

$$J^1_{jk} s^1_j s^1_k + J^2_{jk} s^2_j s^2_k = r_j r_k \{(J^1_{jk} - |J^2_{jk}|) \cos\theta_j \cos\theta_k + \\ + |J^2_{jk}| \cos(\theta_j - \varepsilon_{jk}\theta_k)\} \in \mathcal{Q}, \qquad (4.8)$$

где $\varepsilon_{jk} = \operatorname{sgn}(J^2_{jk})$. Далее, $\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{s}_j = a_j s^1_j = a_j r_j \cos\theta_j \in \mathcal{Q}$. Теперь теорема следует из [10, предложение 3].

Замечание 6. При любых $n_1, \ldots, n_N$ имеем $\prod_{j=1}^{N} (s_j^1)^{n_j} \in Q$; но $\prod_{j=1}^{N} (\mathrm{s}_j)^{n_j}$, вообще говоря, не принадлежит Q. Хотя теорема 12 дает только монотонность средних от функций из Q при расширении сосуда, тем не менее она обеспечивает существование однозначного термодинамического предела для всех средних [1]) (т. е. предела, не зависящего от формы допредельных сосудов, хотя и зависящего, возможно, от граничных условий). Отметим, что некоторые новые корреляционные неравенства, близкие к теореме 12, были недавно получены в работах [20, 21].

Замечание 7. Важным применением теоремы Ли и Янга и неравенств ГКШ при $D=1$ является доказательство того, что усеченная двухточечная функция Швингера для моделей $\lambda\varphi^4 + \beta\varphi^2 - a\varphi$ $(a \neq 0)$ стремится к нулю [22, § IX. 4], откуда следует единственность вакуума в этих моделях. Те же самые методы, соединенные с теоремами 10 и 12, можно использовать в случае $D=2$ и доказать для моделей $\lambda((\varphi^1)^2 + (\varphi^2)^2)^2 + \beta((\varphi^1)^2 + (\varphi^2)^2) - a\varphi^1$ $(a \neq 0)$, что $E(\varphi^1(x)\varphi^1(x')) - E(\varphi^1(x))E(\varphi^1(x')) \to 0$ при $|x - x'| \to \infty$. Для такой модели из симметрии $\varphi^2 \to -\varphi^2$ следует, что $E(\varphi^1(x)\varphi^2(x')) = 0 = E(\varphi^2(x))$, и, таким образом, кроме выписанной выше остается исследовать только еще одну ненулевую двухточечную функцию $E(\varphi^2(x)\varphi^2(x')) - E(\varphi^2(x))E(\varphi^2(x')) = E(\varphi^2(x)\varphi^2(x'))$. Следующая теорема показывает, что эта «поперечная» двухточечная функция убывает не медленнее, чем квадратный корень из «продольной» усеченной двуточечной функции.

Теорема 13. *Пусть* $\{\mathrm{S}_j\colon j=1,\ldots, N\}$ — *случайные двумерные векторы, удовлетворяющие условиям теоремы* 12. *Тогда*

$$[E(S_j^2 S_k^2)]^2 \leqslant [E(S_j^1 S_k^1) - E(S_j^1)E(S_k^1)][E(S_j^1 S_k^1) + E(S_j^1)E(S_k^1)]. \tag{4.9}$$

Доказательство. Следуя [10], мы применим метод Жинибра — Перкуса, состоящий в добавлении независимой системы спинов $\{\mathrm{S}'_j\colon j=1, \ldots, N\}$, распределенной одинаково с исходной системой. Используя полярные координаты, мы

---

[1]) Это видно на примере функции $S_j^2 S_k^2 = \frac{1}{2} r_j r_k (\cos(\theta_j - \theta_k) - \cos(\theta_j + \theta_k))$.

получаем по теореме 12, что

$$E\left(r_j r_j' \cos\left(\theta_j + \theta_j'\right) r_k r_k' \cos\left(\theta_k - \theta_k'\right)\right) \geqslant$$
$$\geqslant E\left(r_j r_j' \cos\left(\theta_j + \theta_j'\right)\right) E\left(r_k r_k' \cos\left(\theta_k - \theta_k'\right)\right). \quad (4.10)$$

Раскладывая косинусы сумм и разностей, используя независимость двух систем и тот факт, что (в силу симметрии $S_j^2 \to -S_j^2$ или $\theta_j \to -\theta_j$ при всех j)

$$E\left(S_j^2\right) = E\left(S_k^2\right) = E\left(S_j^1 S_k^2\right) = E\left(S_j^2 S_k^1\right) = 0 \quad (4.11)$$

при всех j, k, мы получаем неравенство

$$\left[E\left(S_j^1 S_k^1\right)\right]^2 - \left[E\left(S_j^2 S_k^2\right)\right]^2 \geqslant \left[E\left(S_j^1\right)\right]^2 \left[E\left(S_k^1\right)\right]^2, \quad (4.12)$$

из которого следует (4.9).

Если «продольная» усеченная двухточечная функция убывает экспоненциально, то из теоремы 13 следует, что «поперечная» двухточечная функция также убывает экспоненциально и ее корреляционный радиус не превосходит удвоенного «продольного» корреляционного радиуса; для двухкомпонентных моделей теории поля это означает, что «поперечная» массовая щель не меньше половины «продольной» массовой щели (в присутствии ненулевого внешнего поля, выделяющего продольное и поперечное направления).

Чтобы сопоставить эти неравенства для масс с голдстоуновской картиной нарушения симметрии, мы рассмотрим $\pi - \sigma$-модель со спонтанно нарушенной $O(2)$-симметрией, для которой φ^1 и φ^2 из (1.1) обозначают соответственно поля σ и π. Спонтанное нарушение симметрии соответствует выбору чистой фазы (при нулевом внешнем поле) в евклидовом мире, такой, что $E(\varphi^1) = M > 0$, а $E(\varphi^2) = 0$; пион должен быть, таким образом, голдстоуновским бозоном этой модели. Для простоты мы рассмотрим модель $(\varphi \cdot \varphi)^2$ с эффективным потенциалом

$$V(\varphi) = A(\varphi \cdot \varphi)^2 - B(\varphi \cdot \varphi) \quad (4.13)$$

при $A, B > 0$. Тогда $V(\varphi^1, 0)$ имеет минимум в точке $\varphi^1 = (B/2A)^{1/2}$, которая задает, таким образом, голдстоуновское значение M. Выбрав M таким, мы положим $\theta = \varphi - (M, 0)$ и перепишем V в виде

$$\tilde{V}(\theta) \equiv V(\theta + (M, 0)) = \tilde{V}_0(\theta) + \tilde{V}_1(\theta), \quad (4.14)$$

где

$$\tilde{V}_0(\theta) = 4M^2 A\left[\theta^1\right]^2 + \mathrm{const} \quad (4.15)$$

и

$$\widetilde{V}_1(\theta) = 4AM\theta^1[\theta^2]^2 + 4AM[\theta^1]^3 + A(\theta\cdot\theta)^2. \qquad (4.16)$$

Теперь в простейшем варианте схемы Голдстоуна мы выбрасываем $\widetilde{V}_1$ и, основываясь на том, что коэффициент при $[\theta^2]^2$ в $\widetilde{V}_0$ равен нулю, заключаем, что пион имеет массу нуль, в то время как «частица σ-поля» имеет положительную массу. Такое толкование находится, кажется, в прямом противоречии с теоремой 13, из которой следует, что если массовая щель поля π равна нулю, то и массовая щель поля σ равна нулю. Для того чтобы устранить противоречие, а также отметить, что оценка с квадратным корнем, даваемая теоремой 13, является оптимальной [1]), мы приведем исследование, принадлежащее Коулману [23] и основанное на рассмотрении $\widetilde{V}_1$.

Дело в том, что слагаемое $4AM\theta^1[\theta^2]^2$ в $\widetilde{V}_1$ связывает поля θ^1 и θ^2 таким образом, что то, что мы раньше рассматривали как σ-частицу с положительной массой, теперь заменяется на *σ-резонанс* (с положительной массой). Поскольку состояние, получающееся применением θ^1 к вакууму, связано с состоянием, получающимся применением $[\theta^2]^2$ к вакууму, этот σ-резонанс должен распадаться на два (безмассовых) пиона; это вместе с тем обстоятельством, что σ-резонанс не может превратиться в один пион из-за симметрии $\theta^2 \to -\theta^2$ (G-четность), указывает на то, что квадратный корень в теореме 13 дает точное соотношение между поперечной (π) и продольной (σ) двухточечными функциями. Отметим, что в модели Поттса с 4 состояниями (классический «ротатор» с дискретными значениями $\theta_i = 2k\pi/4$ ($k = 0, 1, 2, 3$)) скорости убывания поперечных и продольных корреляций совпадают; это можно показать, исходя из представления этой модели через суммы и разности двух одинаковых моделей Изинга со спином $^1/_2$. Напротив, голдстоуновская схема предсказывает, что для (непрерывных) ротаторов с любым $D \geqslant 2$ должно выполняться соотношение с квадратным корнем, как и в теореме 13.

Благодарности. Один из авторов (Ф. Д.) благодарен проф. Барри Саймону и проф Генри Эпштейну за полезные обсуждения и поддержку; другой автор (Ч. Н.) признателен проф. Джеймсу Глимму за радушный прием в Курантовском институте.

---

[1]) В некотором диапазоне значений константы связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Constructive Quantum Field Theory, Lecture Notes in Physics, **25**, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1973. [Частичный русский перевод в сб.: Конструктивная теория поля, «Мир», М., 1977.]
2. Guerra F., Rosen L., Simon B., *Ann. Math.*, **101** (1975), 111—259.
3. Simon B., Griffiths R. B., *Commun. math. Phys.*, **33** (1973), 145—164.
4. Рихтер В., *Теор. вероятн. и ее примен.*, **3**, № 1 (1958), 107—114.
5. Хинчин А. Я., *Math. Ann.*, **101** (1929), 745—752.
6. Suzuki M., Fisher M., *J. Math. Phys.*, **12** (1971), 235—246.
7. Lieb E. H., *Commun. math. Phys.*, **31** (1973), 327—340.
8. Harris A. B., *Phys. Lett.*, **33A** (1970), 161—162.
9. Kunz H., *Phys. Lett.*, **32A** (1970), 311—312.
10. Ginibre J., *Commun. math. Phys.*, **16** (1970), 310—328.
11. Lebowitz J., Penrose O., *Phys. Rev. Lett.*, **35** (1975), 549—555.
12. Griffiths R. B., *J. Math. Phys.*, **10** (1969), 1559—1565.
13. Рихтер В., Вестник ЛГУ, серия матем., № 1, вып. 1 (1959), 24—29.
14. Lanford O. E., In: Statistical Mechanics and Mathematical Problems (Lenard A., ed.), Lecture Notes in Physics, **20**, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1973.
15. Glimm J., Jaffe A., *Ann. Inst. H. Poincaré*, **A21** (1974), 1—26.
16. Newman C. M., *Commun. math. Phys.*, **41** (1975), 1—9. [Русский перевод в настоящем сб., стр. 275—287.
17. Hille E., Analytic function theory, v. 2, Ginn, New York, 1962.
18. Newman C. M., *Comm. Pure Appl. Math.*, **27** (1974), 143—159.
19. Kelly D. G., Sherman S., *J. Math. Phys.*, **9** (1968), 466—484.
20. Monroe J. L., *J. Math. Phys.*, **16**, № 9 (1975).
21. Schrader R., не опубликовано.
22. Simon B., The $P(\varphi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974. [Русский перевод: Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, «Мир», М., 1976.]
23. Coleman S., не опубликовано.
24*. Fröhlich J., Simon B., Spencer T., *Commun. math. Phys.*, **50** (1976), 79. [Русский перевод в сб. Гиббсовские состояния в статистической физике, «Мир», М., 1978, стр. 9—34.]
25*. Dunlop F., *Commun. math. Phys.*, **49** (1976), 247.

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ИЗИНГА И ПОЛЕВЫХ ТЕОРИЙ, ДЛЯ КОТОРЫХ ВЕРНА ТЕОРЕМА ЛИ И ЯНГА [1])

Ч. Ньюман

Department of Mathematics, Indiana University, Bloomington, Indiana, USA

Резюме. Получена серия неравенств для статистической суммы, моментов (корреляций) и семиинвариантов (функций Урселла) как следствие теоремы Ли и Янга В частности, найдены оценки n-точечных функций Швингера *четных* моделей поля φ^4 с помощью двухточечной функции, не менее сильные, чем аналогичные оценки в случае гауссовских полей; этим усиливаются недавние результаты Глимма и Джаффе и показывается, что из перенормируемости двухточечной функции с помощью контрчленов четвертой степени следует существование теории поля φ^4, для которой производящая функция моментов является целой функцией с экспоненциальным порядком, не превосходящим двух Отмечается также, что если *какая-нибудь* (четная) функция Швингера тождественно равна нулю, то получающаяся теория поля есть обобщенно свободное поле.

1. ТЕОРЕМА ЛИ И ЯНГА

Мы рассматриваем набор случайных величин (спинов) $\{X_j\colon j=1, \ldots, N\}$, производящая функция моментов которых имеет вид

$$\boldsymbol{E}\left(\exp\left(\sum_j z_j X_j\right)\right) = \frac{\int \exp\left(\sum_j \left(z_j x_j + \sum_{j,k} J_{jk} x_j x_k\right) \prod_j d\rho_j(x_j)\right)}{\int \exp\left(\sum J_{jk} x_j x_k\right) \prod_j d\rho_j(x_j)}, \tag{1.1}$$

где $J_{jk} \geqslant 0$, а каждое ρ_j — четное распределение вероятностей, для которого $\int \exp(bx^2)\, d\rho_j(x) < \infty$ при всех вещественных b. Выражение (1.1) представляет собой (нормированную) статистическую сумму для обобщенной модели Изинга (с парным ферромагнитным взаимодействием), возникающей при реше-

---

[1]) Charles M. Newman, Inequalities for Ising Models and Field Theories which obey the Lee-Yang Theorem, *Communications in Mathematical Physics*, 41 (1975), 1—9. При частичной финансовой поддержке Фонда Университета штата Индиана и Национального научного фонда по контракту NSF-GP-24003.

точной аппроксимации четных моделей $P(\varphi)$ евклидовой теории поля [1]. Модель Изинга со спином 1/2 получается из (1.1), если для каждого j положить $\rho_j(x) = (\delta(x_j - 1) + \delta(x_j + 1))/2$.

Приведем наиболее общую формулировку теоремы Ли и Янга, применимую как к моделям со спином $n/2$, так и к случаю моделей, определяемых мерами ρ_j с плотностями $d\rho_j/dx = C_j \exp(-a_j x^4 - b_j x^2)$ (что, как показано в [2, 3, 4], соответствует, в частности, четной теории поля φ^4).

Теорема 1. *Если при каждом j нули функции $\int \exp(zx)\, d\rho_j(x)$ чисто мнимые, то при любом выборе $\lambda_j \geqslant 0$ нули функции $\boldsymbol{E}\left(\exp\left(z \sum \lambda_j X_j\right)\right)$ также чисто мнимые.*

Теорема Ли и Янга широко использовалась и в статистической механике и в квантовой теории поля (см., например, [5, 6]) для исследования фазовых переходов; в данной работе она используется для того, чтобы получить корреляционные неравенства и связанные с ними результаты, которые в применении к теории поля служат для доказательства существования, а также изучения вопроса о тривиальности (или нетривиальности) моделей φ^4. Отметим, что теория возмущений предсказывает применимость наших результатов (а именно, теоремы 10) для полей в пространстве-времени размерности не больше четырех.

Назовем набор случайных величин $\{X_j\}$, определенный в соответствии с формулой (1.1), моделью Изинга типа Ли и Янга, если каждое распределение ρ_j удовлетворяет условиям теоремы 1. Будем говорить, что этот набор $\{X_j\}$ типа поля φ^4, если при каждом j плотность меры ρ_j равна $d\rho_j/dx = C_j \exp(-a_j x^4 - b_j x^2)$ с $a_j > 0$. Остальная часть этой работы относится только к моделям типа Ли и Янга: в § 2 изучаются случайные величины сами по себе, в § 3 — их наборы типа модели Изинга, а в § 4 — случайные поля (евклидовы квантовые поля).

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ ТИПА $\mathscr{L}$

Будем говорить, что X — случайная величина типа $\mathscr{L}$, если $|\boldsymbol{E}(\exp(zX))| \leqslant C \exp(C'|z|^2)$ для некоторых C и C' при всех комплексных z, и функция $\boldsymbol{E}(\exp(zX))$ четна и имеет только чисто мнимые нули. Теорема 1 показывает, что для модели Изинга типа Ли и Янга комбинация $X(\vec{\lambda}) \equiv \sum \lambda_j X_j$ есть случайная величина типа $\mathscr{L}$, если все $\lambda_j \geqslant 0$ (или, по симметрии, если все $\lambda_j \leqslant 0$).

Моменты s_n и семиинварианты (кумулянты) u_n случайной величины X определяются обычным образом:

$$\boldsymbol{E}(\exp(zX)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} z^n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n!} z^n\right). \qquad (2.1)$$

Следующее предложение является основой всех наших результатов.

Предложение 2. *Если X типа $\mathscr{L}$, то*

$$\boldsymbol{E}(\exp(zX)) = \exp(bz^2) \prod_j \left(1 + \left(\frac{z}{\alpha_j}\right)^2\right) \qquad (2.2)$$

при некоторых $b \geqslant 0$ и $0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$, таких, что $\sum \left(\frac{1}{\alpha_j}\right)^2 < \infty$; здесь набор $\{\alpha_j\}$ может быть пустым, конечным или бесконечным.

Доказательство. Это утверждение, за исключением того, что $b \geqslant 0$, немедленно следует из теоремы Адамара о факторизации [7, теоремы 2.7.1 и 2.10.1], как в [3]. Чтобы убедиться, что $b \geqslant 0$, заметим, что, как следует из (2.2), для любого $\varepsilon > 0$ и вещественного r при достаточно большом $|r|$ выполняется неравенство $\boldsymbol{E}(\exp(rX)) \leqslant \exp((b+\varepsilon) r^2)$; значит, если $b < 0$, то $\boldsymbol{E}(\exp(rX)) \to 0$ при $r \to \pm\infty$, что невозможно ни для какой случайной величины X. ∎

Следующие теоремы являются чрезвычайно простыми следствиями предложения 2; сначала мы обобщим результаты, относящиеся к семиинвариантам (функциям Урселла), впервые сформулированные в [3, 4].

Теорема 3. *Если X типа $\mathscr{L}$, то $u_{2m-1} = 0$ и $(-1)^{m-1} u_{2m} \geqslant 0$ при $m = 1, 2, \ldots$. Если $u_{2m} = 0$ для какого-нибудь $m = 1, 2, \ldots$, то $u_n = 0$ для всех $n > 2$ и X — гауссовская величина.*

Доказательство. Воспользовавшись (2.1), (2.2) и разложением $\log(1 + w^2) = w^2 - {}^1/_2 w^4 + {}^1/_3 w^6 - \ldots$ при $w = z/\alpha_j$, получим, что $u_{2m-1} = 0$,

$$s_2 = u_2 = 2\left(b + \sum_i \left(\frac{1}{\alpha_j}\right)^2\right) \qquad (2.3)$$

и при $m \geqslant 2$

$$u_{2m} = (-1)^{m-1} \frac{(2m)!}{m} \sum_j \left(\frac{1}{\alpha_j}\right)^{2m}. \qquad (2.4)$$

Таким образом, $(-1)^{m-1} u_{2m} \geqslant 0$; кроме того, равенство $u_{2m} = 0$ означает, что $\{\alpha_j\}$ пусто, так что $\boldsymbol{E}(\exp(zX)) = \exp(bz^2)$. ∎

Замечание 1. Вторую часть теоремы 3 можно рассматривать как усиленный вариант (для распределений класса $\mathscr{L}$) теоремы Марцинкевича (см., например, [8]), которая (грубо говоря) утверждает, что если для некоторого n_0 $u_n=0$ при *всех* $n \geqslant n_0$, то X — гауссовская величина.

Теорема 4. *Если X — случайная величина типа $\mathscr{L}$, то для любого $k=0, 1, 2, \ldots$ и вещественного r*

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{4k} \frac{u_n}{n!} r^n\right) \leqslant \boldsymbol{E}(\exp rX) \leqslant \exp\left(\sum_{n=1}^{4k+2} \frac{u_n}{n!} r^n\right); \tag{2.5}$$

кроме того, для комплексных z

$$|\boldsymbol{E}(\exp zX)| \leqslant \exp\left({}^1/_2 s_2 (\operatorname{Re} z)^2\right). \tag{2.6}$$

Доказательство. Эта теорема немедленно следует из (2.1) — (2.4) и того простого факта, что для $a \geqslant 0$

$$\sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^{m-1}}{m} a^m \leqslant \log(1+a) \leqslant \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{(-1)^{m+1}}{m} a^m \tag{2.7}$$

при любом $k=0, 1, 2, \ldots$. Неравенство же (2.7) легче всего доказать, если заметить, что

$$\log(1+a) = \int_0^a \frac{1}{1+x}\, dx$$

и

$$\sum_{m=1}^{j} \frac{(-1)^{m-1}}{m} a^m = \int_0^a \frac{1+(-1)^{j+1} x^j}{1+x}\, dx. \blacksquare$$

Теорема 5. *Если X — случайная величина типа $\mathscr{L}$, то для $m=1, 2, \ldots$ имеем $s_{2m-1}=0=u_{2m-1}$ и*

$$0 \leqslant s_{2m} \leqslant \frac{(2m)!}{2^m m!} (s_2)^m \text{ [1]}, \tag{2.8}$$

$$0 \leqslant (-1)^{m-1} u_{2m} \leqslant \frac{(2m)!}{2^m m} (s_2)^m. \tag{2.9}$$

Доказательство. Сразу заметим, что (2.9) легко следует из (2.3), (2.4) и того факта, что

$$\sum \left(\frac{1}{\alpha_j}\right)^{2m} \leqslant \left(\sum \left(\frac{1}{\alpha_j}\right)^2\right)^m \leqslant \left(\frac{s_2}{2}\right)^m.$$

---

[1]) В частном случае, когда X — линейная комбинация независимых бернуллиевских (спин $^1/_2$) случайных величин, эта оценка известна как неравенство Хинчина (см. [20, гл. 5]).

Для того чтобы доказать (2.8), заметим, что, поскольку каждый коэффициент ряда Тейлора функции $\left(1+\left(\frac{r}{\alpha_j}\right)^2\right)$ ограничен сверху соответствующим коэффициентом ряда Тейлора функции $\exp\left((r/\alpha_j)^2\right)$, из (2.1) и (2.2) следует, что каждый момент величины X ограничен сверху соответствующим моментом (гауссовской) случайной величины с производящей функцией моментов

$$\exp\left(\left(b+\sum\left(\frac{1}{\alpha_j}\right)^2\right)z^2\right).$$

Поскольку $2m$-й момент этой гауссовской величины равен, конечно, $\frac{(2m)!}{m!}\left(b+\sum\left(1/\alpha_j\right)^2\right)^m$, отсюда с помощью равенства (2.3) приходим к требуемому результату.

Замечание 2. Для гауссовской случайной величины X верхняя оценка в формуле (2.8) (при всех m) и нижняя оценка в формуле (2.9) (при $m\geqslant 2$) обращаются в равенства. С другой стороны, если X не тождественный нуль, то ни нижняя оценка (2.8) (ни при каком m), ни верхняя оценка (2.9) (ни при каком $m\geqslant 2$) не могут обратиться в равенство; это тривиально в случае (2.8), а в случае (2.9) следует из того факта, что равенство в верхней оценке может достигаться только при $\boldsymbol{E}(\exp(zX))=1+(z/\alpha)^2$, а эта функция не является производящей функцией моментов ни для какой случайной величины.

Чтобы упростить формулировку следующей теоремы, мы определим для $m=1, 2, \ldots$ величины $v_{2m}=(-1)^{m-1}\frac{m}{(2m)!}u_{2m}$; таким образом, $v_2=b+\sum(1/\alpha_j)^2$, а при $m>1$

$$v_{2m}=\sum(1/\alpha_j)^{2m}.$$

Теорема 6. *Предположим, что X — случайная величина типа $\mathscr{L}$. Тогда для любых четных целых чисел $n, n_1, \ldots, n_k$, таких, что $n=\beta_1 n_1+\ldots+\beta_k n_k$, где $\beta_j\geqslant 0$ при всех j и $\beta_1+\ldots+\beta_k\geqslant 1$,*

$$v_n\leqslant\prod_{j=1}^{k}\left(v_{n_j}\right)^{\beta_j}. \qquad (2.10)$$

В частности,

$$v_n\leqslant v_{n_1}\cdot v_{n_2}, \quad \text{для} \quad n=n_1+n_2, \qquad (2.11)$$

а для $n_1<n<n_2$ при $\beta=\frac{n_2-n}{n_2-n_1}$

$$v_n\leqslant\left(v_{n_1}\right)^{\beta}\left(v_{n_2}\right)^{1-\beta}. \qquad (2.12)$$

Доказательство. Если $b=0$, то из неравенства Гёльдера непосредственно следует, что $\prod (v_{n_j})^{\beta_j} \geqslant \left(\sum \left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^{n'}\right)^p$, где $p=\sum \beta_j$ и $n'=n/p$. Из неравенства

$$\left(\sum |y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \sum |y_i|,$$

если положить $y_i=(1/\alpha_i)^{n'}$, следует (2.10). Если $b \neq 0$, положим $v_n(M)=M\left(\sqrt{b/M}\right)^n+\sum(1/\alpha_j)^n$ и заметим, что $v_n(M)\to v_n$ при $M\to\infty$ для $n=2, 4, \ldots$. Так как из приведенного выше доказательства (для случая $b=0$) требуемые неравенства следуют и для $v_n(M)$ (при целых M), то доказательство теоремы завершается предельным переходом при $M\to\infty$. ∎

Теорема 7. *Пусть* $\pm i\alpha_1$ — *ближайшие к началу координат нули функции* $\boldsymbol{E}(\exp(zX))$, *где* X — *случайная величина типа* $\mathscr{L}$. *Тогда при* $m' > m \geqslant 1$

$$\alpha_1 \leqslant \left(\frac{m\,(2m')!}{m'\,(2m)!}\,\frac{(-1)^{m-1}u_{2m}}{(-1)^{m'-1}u_{2m'}}\right)^{1/(2m'-2m)}. \tag{2.13}$$

В частности,

$$\alpha_1^2 \leqslant \frac{6s_2}{|u_4|}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Поскольку $\alpha_1 \leqslant \alpha_j$, то

$$\sum\left(\frac{1}{\alpha_j}\right)^{2m'} \leqslant \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{(2m'-2m)} \sum\left(\frac{1}{\alpha_j}\right)^{2m},$$

что вместе с (2.3) и (2.4) дает (2.13). ∎

3. ИЗИНГОВСКИЕ МОДЕЛИ ТИПА ЛИ И ЯНГА

Теперь мы вернемся к обобщенным моделям Изинга $\{X_j\}$, удовлетворяющим условиям теоремы 1. Корреляции S_n и функции Урселла U_n являются симметрическими n-линейными функциями на пространстве $\mathbb{C}^N$, которые можно определить следующим образом:

$$\boldsymbol{E}\left(\exp\left(X\left(\vec{z}\right)\right)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}S_n\left(\vec{z}, \ldots, \vec{z}\right)=$$
$$=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}U_n\left(\vec{z}, \ldots, \vec{z}\right)\right), \tag{3.1}$$

где $\vec{z}=(z_1, \ldots, z_N)$. Мы введем также (более привычные) n-точечные корреляционные функции $S_n(j_1, \ldots, j_n)$, которые определяются из формулы

$$S_n(\vec{z}, \ldots, \vec{z}) \equiv \sum_{j_1, \ldots, j_n=1}^{N} S_n(j_1, \ldots, j_n) z_{j_1} \ldots z_{j_n}; \qquad (3.2)$$

аналогичные функции вводятся для семиинвариантов U_n. Поскольку $X(\vec{\lambda})$ — случайная величина типа $\mathscr{L}$ для $\vec{\lambda} \geqslant 0$ (или для $\vec{\lambda} \leqslant 0$), то все результаты § 2 применимы к изинговским моделям типа Ли и Янга; далее мы расширим и обобщим некоторые из них.

Теорема 8. *Для любого* $\vec{\lambda} \geqslant 0$ *имеем* $(-1)^{m-1} U_{2m}(\vec{\lambda}, \ldots \ldots, \vec{\lambda}) \geqslant 0$. *Если* $U_{2m}(j_1, \ldots, j_{2m}) \equiv 0$ *для какого-нибудь* $m = 1, 2, \ldots,$ *то* $\{X_j\}$ — *гауссовское семейство случайных величин, т. е. их совместное распределение является гауссовским.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы и тот факт, что из равенства $U_{2m} \equiv 0$ при некотором m следует гауссовость $X(\vec{\lambda})$ при $\vec{\lambda} \geqslant 0$, немедленно вытекают из теоремы 3. Для того чтобы показать, что совместное распределение семейства величин $\{X_j\}$ гауссовское, заметим, что при $\vec{\lambda} \geqslant 0$ функция $\boldsymbol{E}(\exp(X(\vec{\lambda})))$ имеет вид $\exp(\sum B_{ij}\lambda_i\lambda_j)$ [1]), а поскольку это есть целая функция вектора $\vec{\lambda}$, она имеет такой вид при всех $\vec{\lambda}$, что завершает доказательство [2]). ∎

Прежде чем сформулировать следующую теорему, отметим, что для широкого класса обобщенных моделей Изинга (включающего модели со спином $n/2$ и модели типа φ^4) показано, что $U_4(j_1, \ldots, j_4) \leqslant 0$ при всех $j_1, \ldots, j_4$ [9], и высказана гипотеза [4, 10], что вообще $(-1)^{m-1} U_{2m}(j_1, \ldots, j_{2m}) \geqslant 0$. Исходя из методов и результатов теорем 3, 5 и 6, можно также выдвинуть ряд других подобных гипотез для моделей Изинга, например: при любом выборе целых чисел $1 \leqslant m_1 <$

---

[1]) Так как $X(\vec{\lambda})$ — гауссовская величина, дисперсию которой можно записать в виде $2\sum B_{ij}\lambda_i\lambda_j$. — *Прим. перев.*

[2]) То есть при $\lambda = it$, где $t \in \mathbb{R}^n$, мы получаем, что характеристическая функции совместного распределения $\{X_j\}$ равна $\exp\left(-\sum B_{ij}t_it_j\right)$, что и требовалось. — *Прим. ред.*

$< m_2 < \ldots < m_k$ и $n_1, \ldots, n_k \geqslant 1$ для $m = \sum n_i m_i$, $n = \sum n_i$

$$0 \leqslant S_{2m}(1, \ldots, 2m) \leqslant \sum{}' S(\Lambda_1) \ldots S(\Lambda_n) \qquad (3.3)$$

и

$$0 \leqslant (-1)^{m-1} U_{2m}(1, \ldots, 2m) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(-1)^{m-n} \prod_{i=1}^{k} (m_i)^{n_i} (n_i)!}{m} \sum{}' U(\Lambda_1) \ldots U(\Lambda_n), \qquad (3.4)$$

где $\sum{}'$ обозначает сумму по всем $(2m)!\Big/\left(\prod_{i=1}^{k} ((2m_i)!)^{n_i} n_i!\right)$ неупорядоченным разбиениям множества $\{1, \ldots, 2m\}$ на n непересекающихся множеств $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$, в точности n_i из которых содержат по $2m_i$ элементов, и где $S(\{j_1, \ldots, j_r\}) = S_r(j_1, \ldots, j_r)$ (и аналогично для U). Неравенство (3.6) следующей теоремы есть ослабленный вариант (3.3) для случая $n_1 = m$, $m_1 = 1$, $k = 1$.

Теорема 9. *При* $\vec{z}, \vec{z}^1, \ldots, \vec{z}^{2m} \in \mathbb{C}^N$

$$\left|\boldsymbol{E}\left(\exp\left(X(\vec{z})\right)\right)\right| \leqslant \left|\boldsymbol{E}\left(\exp\left(X\left(\left|\operatorname{Re}\vec{z}\right|\right)\right)\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left({}^1/{}_2 S_2\left(\left|\operatorname{Re}\vec{z}\right|, \left|\operatorname{Re}\vec{z}\right|\right)\right), \qquad (3.5)$$

а

$$\left|S_{2m}\left(\vec{z}^1, \ldots, \vec{z}^{2m}\right)\right| \leqslant \frac{(2m)!}{2^m m!} \prod_{j=1}^{2m} \left(S_2\left(\left|\vec{z}^j\right|, \left|\vec{z}^j\right|\right)\right)^{1/2}, \qquad (3.6)$$

где $\left|\vec{z}\right| = \left(|z_1|, \ldots, |z_N|\right)$ *и* $\left|\operatorname{Re}\vec{z}\right| = \left(|\operatorname{Re} z_1|, \ldots, |\operatorname{Re} z_N|\right)$.

Доказательство. Первое неравенство Гриффитса [11, 12] утверждает, что $S_n(j_1, \ldots, j_n) \geqslant 0$ при всех $j_1, \ldots, j_n$, откуда ясно, что $\left|S_n\left(\vec{z}^1, \ldots, \vec{z}^n\right)\right| \leqslant S_n\left(\left|\vec{z}^1\right|, \ldots, \left|\vec{z}^n\right|\right)$ и $\boldsymbol{E}\left(\exp\left(X(\operatorname{Re}\vec{z})\right)\right) \leqslant \boldsymbol{E}\left(\exp\left(X\left(\left|\operatorname{Re}\vec{z}\right|\right)\right)\right)$. Теперь теорема следует из теорем 4 и 5 и того факта[1]), что при вещественных $\vec{\lambda}^j$

$$\left|S_{2m}\left(\vec{\lambda}^1, \ldots, \vec{\lambda}^{2m}\right)\right| \leqslant \prod_{j=1}^{2m} \left(S_{2m}\left(\vec{\lambda}^j, \ldots, \vec{\lambda}^j\right)\right)^{1/2m}. \qquad (3.7)$$

---

[1]) Предложенnем использовать (3.7) для вывода (3.6) я обязан Б. Саймону.

Неравенство (3.7) можно получить, исходя из равенства

$$\left| S_{2m}\left(\vec{\lambda}^1, \ldots, \vec{\lambda}^{2m}\right)\right| = \left| \boldsymbol{E}\left(\prod_{j=1}^{2m} X\left(\vec{\lambda}^j\right)\right)\right|. \tag{3.8}$$

Используя неравенство Гёльдера, оценим сверху правую часть (3.8) произведением

$$\left\{\boldsymbol{E}\left(X\left(\vec{\lambda}^1\right)^{2m}\right)\right\}^{1/2m} \left\{\boldsymbol{E}\left(\prod_{j=2}^{2m} \left| X\left(\vec{\lambda}^j\right)\right|^{2m/(2m-1)}\right)\right\}^{(2m-1)/2m}, \tag{3.9}$$

а затем снова применим неравенство Гёльдера ко второму сомножителю (3.9) еще $(2m-2)$ раз[1]).

4. СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ ТИПА ЛИ И ЯНГА

Чтобы объяснить значение теоремы 9 для построения теорий поля φ^4, мы воспроизведем результаты работы [13]. Мы определим решеточное поле типа Ли и Янга как случайное поле $\varphi(f)$, параметризованное функциями f из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространства Шварца быстро убывающих основных C^∞-функций и такое, что $\varphi(f) = \sum_{i=1}^{N} f(y_i) X_i$ при некотором фиксированном выборе $y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}^d$, где $\{X_i\}$ — изинговская модель типа Ли и Янга.

Функции Швингера S_n и усеченные функции Швингера U_n случайного поля являются симметрическими обобщенными функциями умеренного роста на $(\mathbb{R}^d)^n$ и определяются обычным образом:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\exp(\varphi(f))) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n(f, \ldots, f) = \\ &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} U_n(f, \ldots, f)\right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Теорема 10. *Если $\{\varphi_k\}$ — бесконечная последовательность решеточных полей типа Ли и Янга и*

$$|\boldsymbol{E}(\varphi_k(f)\varphi_k(g))| \leqslant \|f\| \|g\| \tag{4.2}$$

для некоторой фиксированной $\mathcal{S}$-нормы $\|\cdot\|$, то $\|\cdot\|$ может быть выбрана в виде

$$\|f\| = C \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \left| \left(1 + |y|^2\right)^r f(y)\right| \tag{4.3}$$

[1]) Или сразу применим к правой части (3.8) неравенство Гёльдера для $2m$ сомножителей. — *Прим. перев.*

при некоторых C и r. Кроме того, существуют подпоследовательность $k_j \to \infty$ и случайное поле φ, параметризованное функциями f из F — банахова пространства непрерывных функций с конечной нормой $\|\cdot\|$, такие, что

$$\boldsymbol{E}(\exp(\varphi(f))) = \lim_{j\to\infty} \boldsymbol{E}\left(\exp\left(\varphi_{k_j}(f)\right)\right) \tag{4.4}$$

и

$$S_n(f_1, \ldots, f_n) \equiv \boldsymbol{E}(\varphi(f_1)\ldots\varphi(f_n)) = \lim_{j\to\infty} \boldsymbol{E}\left(\varphi_{k_j}(f_1)\ldots\varphi_{k_j}(f_n)\right) \tag{4.5}$$

при любых $f, f_1, \ldots, f_n \in F$. Функционал $\boldsymbol{E}(\exp(\varphi(f)))$ является четным целым функционалом на F, причем

$$|\boldsymbol{E}(\exp(\varphi(f)))| \leqslant \exp(^1/_2 S_2(|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Re} f|)) \leqslant \exp(^1/_2\|f\|^2) \tag{4.6}$$

и

$$|S_{2m}(f_1, \ldots, f_{2m})| \leqslant \frac{(2m)!}{2^m m!}\prod_{j=1}^{2m}(S_2(|f_j|, |f_j|))^{1/2} \leqslant \frac{(2m)!}{2^m m!}\prod_{j=1}^{2m}\|f_j\|. \tag{4.7}$$

Если $f \geqslant 0$, то $\varphi(f)$ — случайная величина типа $\mathscr{L}$, так что применимы теоремы 2—7; в частности, если U_{2m} тождественно обращается в нуль при каком-нибудь $m = 1, 2, \ldots$, то φ — гауссовское случайное поле.

Доказательство. То, что норму $\|\cdot\|$ можно выбрать в виде (4.3), доказано в [13, предложение 2], и это доказательство основано на первом неравенстве Гриффитса, из которого видно, что S_2 (или $S_2^{(k)}$) — положительная мера на $(\mathbb{R}^d)^2$. Мы определим аналитические функционалы, следуя [14, приложение], и заметим, что при каждом k функционал $\boldsymbol{E}(\exp(\varphi_k(f)))$ является целым на F и в силу (3.5) и (4.2) равномерно ограничен относительно k на ограниченных множествах в пространстве F. В силу предложения А3 из [14, приложение] функционал $\mathscr{E}(f)$, определенный правой частью (4.4), существует и является целым, если подпоследовательность k_j выбрана так, что правая часть (4.4) сходится на плотном подмножестве из F; поскольку пространство F сепарабельно, этого всегда можно добиться с помощью обычного диагонального процесса. Из предложения А3 из [14] следует также, что верно и (4.5), если левую часть заменить (формально) на соответствующую n-ю производную $\mathscr{E}(f)$.

Таким образом, соотношения (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) будут доказаны, если мы убедимся, что $\mathscr{E}(f) = \boldsymbol{E}(\exp(\varphi(f)))$ для некоторого случайного поля φ. Но в силу теоремы Минлоса [15, гл. 4] существует вероятностная мера μ на $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, такая, что $\mathscr{E}(f) = \int \exp(T(f))\,d\mu(T)$ для $f \in \mathscr{S}$, и, значит, для $f \in \mathscr{S}$ мы можем определить случайное поле $\varphi(f) = T(f)$ на вероятностном пространстве $(\mathscr{S}', \mu)$; из (4.6) и (4.7) следует, что если $f_j \to f$ в F для $f_j \in \mathscr{S}$, то $\varphi(f_j)$ сходится (в $L^p(\mathscr{S}', \mu)$ для любого p, $1 \leqslant p < \infty$) к некоторой случайной величине, которую мы назовем $\varphi(f)$, причем $\boldsymbol{E}(\exp(\varphi(f))) = \mathscr{E}(f)$.

Для того чтобы показать, что $\varphi(f)$ типа $\mathscr{L}$ при $f \geqslant 0$, мы заметим лишь, что $\varphi_{k_j}(f)$ типа $\mathscr{L}$ при всех j и что $\boldsymbol{E}\left(\exp\left(z\varphi_{k_j}(f)\right)\right)$ сходится равномерно относительно z на любом компакте из $\mathbb{C}$, так что, в силу теоремы Гурвица, $\boldsymbol{E}(\exp(z\varphi(f)))$ как функция z имеет только чисто мнимые нули (и нужный экспоненциальный порядок в силу (4.6)). Последнее утверждение теоремы относительно U_{2m} следует непосредственно из теоремы 3, из того факта, что любую функцию $f \in F$ можно представить как разность двух неотрицательных функций из F, а также из рассуждений в доказательстве теоремы 8. ∎

Замечание 3. Если φ_k суть решеточные приближения четной теории поля φ^4 [1], то, как и в [13], функции Швингера поля φ удовлетворяют аксиомам Остервальдера — Шрадера [16], за исключением, быть может, аксиом евклидовой ковариантности и кластерного свойства. Особо мы хотим подчеркнуть, что если дополнительно предположить трансляционную инвариантность, то из (4.7) и первого неравенства Гриффитса следует, что функции Швингера (выраженные через разности переменных) удовлетворяют аксиоме $(\check{E}0')$ из [16, стр. 60 русского перевода].

Замечание 4. То обстоятельство, что обращение в нуль U_{2m} при каком-то *одном* m означает, что φ — обобщенно свободное поле, можно сравнить с результатом Робинсона [17], который, применив теорему Марцинкевича (см. выше замечание 1), вывел, что верно то же самое, если предположить, что *все* усеченные вакуумные средние (т. е. семиинварианты) достаточно высокого порядка обращаются в нуль.

Наша последняя теорема относится к моделям типа φ^4, про которые известно, что $U_4(y_1, y_2, y_3, y_4) \leqslant 0$ [9; 18, стр. 203].

В этом случае равенство $\int U_4 dy_1 dy_2 dy_3 dy_4 = 0$ влечет за собой $U_4 \equiv 0$, и тогда из теоремы 10 следует, что φ — обобщенно свободное (т. е. гауссовское) поле; мы сформулируем это более наглядно в следующей ниже теореме 11.

Если φ трансляционно-инвариантно и $\chi = \int S_2(y_1, y_2)\,dy_1 < < \infty$, то мы определим (размерную) физическую константу связи g_0 как

$$g_0 = \chi^{-4} \int U_4(y_1, y_2, y_3, y_4)\,dy_1\,dy_2\,dy_3 \tag{4.8}$$

(безразмерная физическая константа связи есть $g \equiv g_0/m^{d-4}$, где d — размерность пространства-времени и $m \geqslant 0$ — физическая масса) [19]. Теперь мы получаем из теоремы 10 интуитивно понятное утверждение о том, что физическая константа связи обращается в нуль только для (обобщенно) свободного поля.

Теорема 11. *Предположим, что φ — трансляционно-инвариантное случайное поле, получающееся как предел (в смысле теоремы 10) четных решеточных полей типа φ^4. Если $\chi < \infty$ и $g_0 = 0$ (или если $\chi^4 m^{d-4} < \infty$ и $g = 0$), то φ — обобщенно свободное (т. е. гауссовское) поле.*

Замечание при корректуре. Небольшое изменение в доказательстве теоремы 4 позволяет показать, что намагниченность как функция внешнего поля, $\boldsymbol{E}(X \exp rX)/\boldsymbol{E}(\exp rX)$, заключена между последовательными частными суммами своего ряда Тейлора, так же как в формуле (2.5). Обобщеиия некоторых результатов этой статьи на модели с положительным внешиим полем содержатся в работе автора [21]. Наконец, упомянем о том, что автор получил доказательство (3.3) и близких иеравенств, используя комбииаторную технику Келли и Шермана [12] [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Guerra F., Rosen L., Simon B., *Ann. Math.*, **101** (1975), 111—259.
2. Simon B., Griffiths R. B., *Commun. math. Phys.*, 33 (1973), 145—164.
3. Newman C. M., *Comm. Pure Appl. Math.*, **27** (1974), 143—159.
4. Newman C. M., Nondiscrete spins and the Lee-Yang theorem, In: Constructive Quantum Field Theory (Velo G., Wightman A. S., eds.), Lecture Notes in Physics, **25**, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1973.
5. Ruelle D., Statistical Mechanics — rigorous results, Benjamin, New York, 1969. [Русский перевод: Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, «Мир», М., 1971.]
6. Simon B., The $P(\varphi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974. [Русский перевод: Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, «Мир», М., 1976.]

---

[1]) См. [22, 23]. — *Прим. перев.*

7. Boas R. P., Entire functions, Academic Press, New York, 1954.
8. Линник Ю. В., Разложения вероятностных законов, Изд-во ЛГУ, Л., 1960.
9. Lebowitz J., *Commun. math. Phys.*, 35 (1974), 87—92.
10. Feldman J., *Canad. J. Phys.*, 52 (1974), 1583—1587.
11. Griffiths R. B., *J. Math. Phys.*, 8 (1967), 484—489.
12. Kelly D. G., Sherman S., *J. Math. Phys.*, **9** (1968), 466—484.
13. Glimm J., Jaffe A., *Phys. Rev. Lett.*, 33 (1974), 440—442.
14. Glimm J., Jaffe A., *Ann. Inst. H. Poincaré*, **A21** (1974), 1—26.
15. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Обобщенные функции, вып. 4. (Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства), Физматгиз, М., 1961.
16. Остервальдер К., в сб. Конструктивная теория поля, «Мир», М., 1977, стр. 48—73.
17. Robinson D. W., *Commun. math. Phys.*, **1** (1965), 89—94.
18. Глимм Дж., Джаффе А., Спенсер Т., в сб. Конструктивная теория поля, «Мир», М., 1977, стр. 168—258.
19. Glimm J., Jaffe A., Ann. Inst. H. Poincaré, **A22** (1975), 97—107.
20. Zygmund A., Trigonometrical series, new ed., v. 1, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959. [Русский перевод: Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1, «Мир», М., 1965.]
21*. Newman C. M., *J. Math. Phys.*, **16**, № 9 (1975).
22*. Newman C. M., *Zeit. Wahrsch.*, 33 (1975), 75—93.
23*. Sylvester G. S., *Commun. math. Phys.*, 42 (1975), 209—220. [Русский перевод в сб. Гиббсовские состояния в статистической физике, «Мир», М., 1978, стр. 69—88.]

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода 5

К. Остервальдер, Р. Шрадер. АКСИОМЫ ДЛЯ ЕВКЛИДОВЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА, II *Перевод Л. Е. Филипповой* 9

Дж. Глимм, А. Джаффе, Т. Спенсер. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В МОДЕЛЯХ φ_2^4 КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ *Перевод Ю. М. Сухова* . . . 46

Дж. Глимм, А. Джаффе, Т. Спенсер. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД, СВЯЗАННОЕ С ПРИБЛИЖЕНИЕМ СРЕДНЕГО ПОЛЯ. I. ОПИСАНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ. *Перевод Ю. М. Сухова* 65

Дж. Глимм, А. Джаффе, Т. Спенсер. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД, СВЯЗАННОЕ С ПРИБЛИЖЕНИЕМ СРЕДНЕГО ПОЛЯ. II. СХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЯ. *Перевод Ю. М. Сухова* 88

Дж. Глимм, А. Джаффе. ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ ГАМИЛЬТОНИАНА ПОЛЯ φ_3^4. *Перевод В. А. Малышева* 132

Ю. Фрёлих. КЛАССИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В РАЗМЕРНОСТЯХ ОДИН И ДВА: ДВУХКОМПОНЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ ЮКАВЫ И КУЛОНА. *Перевод С. А. Пирогова* 198

Б. Саймон. БОЗОННОЕ КВАНТОВОЕ ПОЛЕ КАК ФЕРРОМАГНЕТИК ИЗИНГА—НЕДАВНИЕ ДОСТИЖЕНИЯ. *Перевод С. Б. Шлосмана* . 244

Ф. Деллоп, Ч. Ньюман. МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ ПОЛЯ И КЛАССИЧЕСКИЕ РОТАТОРЫ. *Перевод С. А. Пирогова* 255

Ч. Ньюман. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ИЗИНГА И ПОЛЕВЫХ ТЕОРИЙ, ДЛЯ КОТОРЫХ ВЕРНА ТЕОРЕМА ЛИ И ЯНГА. *Перевод С. А. Пирогова* 275

ЕВКЛИДОВА КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ. МАРКОВСКИЙ ПОДХОД

Ст. научный редактор Н. И. Плужникова. Мл. научный редактор Л. С. Суркова
Художник А. В. Шипов. Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Н. Б. Панфилова. Корректор Н. А. Гиря

ИБ № 1370

Сдано в набор 31.01.78. Подписано к печати 31.07.78. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 2. Латинская гарнитура. Высокая печать. Объем: 9 бум. л., 18 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 16,84. Тираж 5400 экз. Зак. 975. Цена 1 р. 50 к. Изд. № 1/9723

Издательство «Мир», Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

1р. 50 к.

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

В 1976 г. вышли в свет:

1. Ф. Гриффитс, Дж. Кинг. ТЕОРИЯ НЕВАНЛИННЫ И ГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ.
2. ВЫЧИСЛЕНИЯ В АЛГЕБРЕ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ.
3. Л. Заде. ПОНЯТИЕ ЛИНГВИСТИЧЕСКОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ПРИНЯТИЮ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ.

В 1977 г. вышли в свет:

4. ГЛАДКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ.
5. Л. Ниренберг. ЛЕКЦИИ ПО НЕЛИНЕЙНОМУ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ.
6. КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ.
7. К. Престон. ГИББСОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ НА СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВАХ.

В 1978 г. выходят:

8. Д. Орнстейн. ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ, СЛУЧАЙНОСТЬ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ.
9. М. Гусман. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В R^n.
10. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. ВЫБОРОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯ.
11. ГИББСОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ.

ИЗДАТЕЛЬСТВО "МИР" МОСКВА