И * Л

Издательство
иностранной
литературы

*

ERGEBNISSE DER MATHEMATIK
UND IHRER GRENZGEBIETE

NEUE FOLGE · HEFT 2

EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI DI TIPO ELLITTICO

DI

CARLO MIRANDA

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1955

К. МИРАНДА

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Перевод с итальянского
Т. Д. ВЕНТЦЕЛЬ

Под редакцией
О. А. ОЛЕЙНИК

[redacted]

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва · 1957

Книга представляет собой единственный в современной литературе систематический обзор теории эллиптических уравнений с частными производными. Подробно изложены наиболее важные разделы теории линейных и нелинейных эллиптических уравнений второго порядка. Библиография содержит более шестисот названий работ, опубликованных главным образом в период 1924—1953 гг.

Книга рассчитана в первую очередь на математиков, занимающихся дифференциальными уравнениями. Она доступна студентам старших курсов университетов. Частично книга может быть использована и специалистами, занимающимися приложениями теории дифференциальных уравнений, а также смежными областями математики.

Редакция литературы по математическим наукам.
Заведующий редакцией профессор А. Г. КУРОШ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Проблемы теории эллиптических уравнений привлекают в настоящее время внимание многих исследователей. Этому разделу теории дифференциальных уравнений с частными производными посвящена обширная литература. Поэтому встала важная задача систематически изложить в одной книге основные понятия, результаты, идеи и методы теории эллиптических уравнений, сделать более доступным ряд фундаментальных исследований, дать возможность легко ориентироваться в большой литературе по эллиптическим уравнениям и тем самым облегчить путь для дальнейших исследований. Монография К. Миранды в значительной мере решает эту задачу.

Вполне естественно, что не все разделы этой обширной теории представлены в книге с одинаковой полнотой. Подробно изложено, в частности, решение краевых задач для линейных уравнений второго порядка методом интегральных уравнений (работы Жиро), решение задачи Дирихле для нелинейных уравнений второго порядка методом неподвижных точек (работы Шаудера, Лере, Каччопполи). Нужно заметить, что в столь полной и доступной форме эти методы излагаются впервые. Однако некоторые функциональные методы, интенсивно развивающиеся в последние годы, изложены лишь в порядке беглого обзора литературы; в книге нет упоминания о методе конечных разностей для решения краевых задач.

Вопрос об аналитическом характере решений эллиптических уравнений более подробно, чем в книге Миранды, освещен в обзорной статье С. Н. Бернштейна и И. Г. Петровского, опубликованной в VIII томе „Успехов математических наук“ за 1940 г.

В примечаниях к русскому изданию книги К. Миранды даны некоторые пояснения, указаны работы последних лет, в которых решены задачи, отмеченные автором как нерешенные. Кроме того, по желанию автора в русском издании книги добавлено его примечание, относящееся к теореме 19, I, и изменен первоначальный текст на стр. 180. К сожалению, не удалось пополнить очень ценную библиографию, приведенную в конце книги и включающую работы, опубликованные за период с 1924 по 1953 г. К русскому изданию добавлены предметный указатель и список основных обозначений. Так как книга дает обзор различных разделов теории эллиптических уравнений и отдельные ее главы могут читаться независимо друг от друга, то эти дополнения окажут читателю известную помощь.

Богатая содержанием и прекрасно написанная книга К. Миранды несомненно принесет большую пользу читателям, интересующимся дифференциальными уравнениями.

О. А. Олейник.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В теории уравнений с частными производными изучение эллиптических уравнений занимает важное место как по значению, которое они имеют в различных вопросах математической физики, так и по полноте полученных до сих пор результатов в этой области.

Несмотря на это, даже в классических руководствах по математическому анализу эта часть теории рассматривалась и иллюстрировалась только с частных точек зрения, в то время как общие изложения теории, в том числе прекрасные изложения Лихтенштейна и Асколи, имеют характер энциклопедических статей и сделаны много лет назад.

Поэтому мне кажется, что представляет известный интерес попытка дать картину современного состояния этих исследований в монографии, которая не была бы слишком велика по объему, но содержала хотя бы конспективное изложение различных методов, применяемых при изучении эллиптических уравнений.

В настоящее время интерес исследователей, видимо, направлен в основном в сторону изучения смешанных задач, уравнений высших порядков и систем уравнений. Поэтому эта часть теории находится в состоянии непрерывного и быстрого изменения, так что, возможно, еще не наступил момент для ее систематического изложения. С другой стороны, методы, которые применяются в этих исследованиях, по крайней мере по своим основным идеям, мало отличаются от тех методов, которые широко применялись к изучению задач Дирихле, Неймана и задачи с косой производной для одного уравнения второго порядка. Поэтому мне показалось целесообразным особенно подробно остановиться на этой начальной части теории, которая в настоящее время приобрела довольно законченный вид; изучение этой части теории безусловно необходимо для всех, кто хочет изучать более современные исследования.

Поэтому особенное внимание я уделил следующим вопросам. I. Метод Жиро сведения краевых задач к интегральным уравнениям второго рода. II. Исследование краевых задач с помощью различных методов линейного функционального анализа, которые берут начало от некоторых работ Каччоппóли, Пиконе, Вейля. III. Исследования Бернштейна, Хопфа, Шаудера, Лере и Каччоппóли, основанные на априорных оценках решений линейных и нелинейных уравнений.

С другой стороны, я не останавливался более подробно, чем это требуется для того, чтобы дать библиографические указания, ни на вариационном методе, ни на так называемом методе „Kernel function“, так как первый метод изложен в классической книге Куранта — Гильберта, а второму методу посвящена недавно опубликованная исчерпывающая монография Бергмана и Шиффера.

Указанные выше вопросы излагаются в главах III, IV, V, VI. Первые три из этих глав посвящены линейным уравнениям, последняя глава — нелинейным уравнениям. Глава I имеет вступительный характер; в ней вводятся классические определения общего характера. Глава II посвящена изучению обобщенных потенциалов. Наконец, в главе VII рассматриваются различные другие вопросы, которые касаются одного уравнения второго порядка, а также уравнений высших порядков, систем уравнений и задач, зависящих от параметра. В отличие от первых шести глав, эта последняя глава имеет характер библиографического обзора. Книга заканчивается обширной библиографией, содержащей более шестисот работ, опубликованных главным образом после 1924 г. Для ссылок на библиографию применяются, как обычно, цифры, заключенные в квадратные скобки; что касается работ, вышедших до 1924 г., то либо делается ссылка на статью Лихтенштейна в Энциклопедии, либо даются подстрочные примечания.

Кроме того, я останавливался главным образом на исследовании эллиптических уравнений общего вида и не занимался почти совсем уравнениями специального вида. Поэтому многочисленные исследования, относящиеся в основном к теории гармонических функций, в том числе те, которые касаются интересной задачи о свободной границе, остались за пределами этой книги и не вошли в библиографию. Но я собрал и кратко прокомментировал библиографию, касающуюся полигармонических функций и уравнений теории упругости. Однако эта часть библиографии, без сомнения, не полна, так как в ней отсутствуют работы по математической физике. В заключение я хочу выразить глубокую благодарность издательству Шпрингера, принявшему к изданию эту книгу и прекрасно оформившему ее.

Неаполь, 28 февраля 1954 г.

Карло Миранда.

Глава I

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе мы введем некоторые обозначения, которыми будем постоянно пользоваться в дальнейшем изложении; покажем, как ставятся различные краевые задачи для линейных эллиптических уравнений второго порядка, и сформулируем для таких задач некоторые теоремы единственности, непосредственно вытекающие из свойств максимума и минимума решений.

Затем, введя понятие функции Леви, фундаментального решения и функции Грина, установим некоторые основные интегральные соотношения.

1. Точечные множества. Функции. Пусть S_m — эвклидово пространство m измерений. Будем обозначать через $x, y, \ldots$ произвольные точки пространства S_m, через $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots$ их координаты, через $r = \overline{xy}$ — расстояние между точками x и y, через $dx, dy, \ldots$ — элемент объема в пространстве S_m, через $d_x\sigma$ (или, если это не может привести к недоразумению, через $d\sigma$) — элемент площади $(m-1)$-мерной поверхности в точке x. Обозначим, наконец, через ω_m площадь единичной сферической поверхности $m-1$ измерений:

$$\omega_m = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Границу произвольного множества A точек пространства S_m будем обозначать через $\mathfrak{F}A$, а его дополнение — через $\mathfrak{C}A$. Множество $A + \mathfrak{F}A$ называется замыканием A. Множество A будем называть *областью*, если оно открыто и связно, и *замкнутой областью*, если оно совершенно, внутренне связно[1] и каждая его точка есть точка накопления для его внутренних точек.

Через $\Gamma(x, \rho)$ будем обозначать m-мерный шар с центром x и радиусом ρ, т. е. множество точек y, для которых $\overline{xy} \leqslant \rho$.

---

[1] То есть множество всех внутренних точек связно. — *Прим. ред.*

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на множестве A. Говорят, что она *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* λ *в* A, если отношение

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{\overline{xy}^{\lambda}}$$

ограничено сверху при любых x и y, принадлежащих A.

Верхнюю грань этого отношения называют (*минимальным*) *коэффициентом Гёльдера* функции $f(x)$.

Функция $f(x)$, определенная в ограниченной замкнутой области T, принадлежит классу $C^{(k)}$ $[C^{(k,\lambda)}]$, если ее производные k-го порядка в T непрерывны [удовлетворяют условию Гёльдера с показателем λ]; естественно считать, что $C^{(0)}$ $[C^{(0,\lambda)}]$ есть класс функций, непрерывных [удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем λ] в T.

Если же $f(x)$ определена на множестве C, являющемся областью или вообще множеством, замыкание которого есть замкнутая область, мы причислим эту функцию к классу $C^{(k)}$ или $C^{(k,\lambda)}$ в том случае, когда она принадлежит этому классу в каждой ограниченной замкнутой области, содержащейся в C.

Наконец, функция $f(x)$, определенная в измеримой[1] замкнутой области T, принадлежит классу $L^{(p)}$ в T, если функция $|f(x)|^p$ суммируема в T, и функция $f(x)$ принадлежит классу $L^{(\infty)}$, если она измерима и ограничена в T.

Пусть теперь замкнутая область T обладает следующим свойством: каждой точке $x \in \mathfrak{F}T$ можно поставить в соответствие m-мерный шар $\Gamma(x)$ с центром в x таким образом, чтобы часть $\mathfrak{F}T$, содержащаяся в $\Gamma(x)$, допускала по отношению к некоторой системе координат $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ с началом в точке x представление вида

$$\xi_m = \zeta(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}). \qquad (1.1)$$

Здесь функция ζ определена в некоторой области $C(x)$, где она принадлежит по крайней мере классу $C^{(1)}$, и в точке x обращается в нуль вместе со своими производными первого порядка.

При таких предположениях оказывается, что в каждой точке $x \in \mathfrak{F}T$ имеется определенная касательная гиперплоскость, а именно гиперплоскость $\xi_m = 0$, и *внешняя нормаль* n, причем ее направляющие косинусы $X_i(x)$ — непрерывные функции на $\mathfrak{F}T$.

Говорят, что такая замкнутая область принадлежит классу $A^{(k)}$ $[A^{(k,\lambda)}]$, если функция ζ, которая входит в формулу (1.1), для каждого x принадлежит $C^{(k)}$ $[C^{(k,\lambda)}]$.

---

[1] То есть имеющей конечный объем. — *Прим. перев.*

В дальнейшем для представления части $\mathfrak{F}T$ мы будем пользоваться также параметрическим представлением вида

$$x_i = x_i(t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}), \tag{1.2}$$

где функции x_i определены и непрерывны в ограниченной замкнутой области D пространства переменных $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$. Однако допустимыми параметрическими представлениями будут только такие, которые удовлетворяют следующим условиям: 1°) Функции (1.2) должны устанавливать взаимно однозначное соответствие между замкнутой областью D и соответствующей частью $\mathfrak{F}T$. 2°) Если T принадлежит классу $A^{(k)}$ $[A^{(k,\lambda)}]$, то функции x_i должны принадлежать классу $C^{(k)}$ $[C^{(k,\lambda)}]$ в D. 3°) Выполнено неравенство

$$\Omega = \left[\left\|\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right\|^2\right]^{1/2} > 0 \text{ }^{1)}.$$

4°) Направляющие косинусы внешней нормали n даются формулами

$$X_i = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial(x_{i+1}, \ldots, x_m, x_1, \ldots, x_{i-1})}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_{m-1})}.$$

Заметим, что все эти условия выполнены для представлений вида (1.1); однако условие 4°) выполняется лишь тогда, когда ось t_m направлена от T. Отметим также, что элемент площади поверхности $\mathfrak{F}T$ выражается следующим образом:

$$d\sigma = \Omega\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{m-1}.$$

В дальнейшем нам часто придется рассматривать функции $f(x)$, определенные только на $\mathfrak{F}T$.

Если каждая часть $\mathfrak{F}T$ допускает параметрическое представление вида (1.2), то функцию $f(x)$ можно рассматривать как функцию переменных t_i: $f(t_1, t_2, \ldots, t_{m-1})$. Если $f(t_1, t_2, \ldots, t_{m-1})$ принадлежит классу $C^{(k)}$ $[C^{(k,\lambda)}]$ в D, какова бы ни была рассматриваемая часть $\mathfrak{F}T$, то мы скажем, что $f(x)$ принадлежит классу $C^{(k)}$ $[C^{(k,\lambda)}]$ на $\mathfrak{F}T$.

Очевидно, что принадлежность $f(x)$ определенному классу не зависит от того, какое именно параметрическое представление рассматривается для $\mathfrak{F}T$; кроме того, принадлежность $f(x)$ классу $C^{(0,\lambda)}$ эквивалентна тому, что $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ на $\mathfrak{F}T$.

---

[1] То есть $\Omega = \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial(x_{i+1}, \ldots, x_m, x_1, \ldots, x_{i-1})}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_{m-1})}\right)^2\right]^{1/2} > 0$.—*Прим. ред.*

2. Эллиптические уравнения. Рассмотрим m^2+m+1 функций $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ $(i, k=1, 2, \ldots, m)$, определенных в области C; в дальнейшем через $\mathfrak{M}$ будем обозначать линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$\mathfrak{M} = \sum_{i, k=1}^{m} a_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c. \tag{2.1}$$

Предположим (мы это всегда будем делать, когда не оговорено противное), что $a_{ik}=a_{ki}$. Тогда $\mathfrak{M}$ называется оператором *эллиптического типа*, если квадратичная форма $\sum a_{ik}(x) \lambda_i \lambda_k$ определенная и имеет один и тот же знак для всех x из C.

Для конкретности предположим, что эта форма положительно определенная; тогда, если $A(x)$ ее дискриминант, то $A(x)>0$ для $x \in C$.

Пусть $f(x)$ — также функция, заданная в C. Мы поставим себе задачу исследовать уравнение с частными производными

$$\mathfrak{M}u = f. \tag{2.2}$$

В дальнейшем мы всегда будем обозначать производные первого и второго порядка функции u символами p_i, p_{ik}, при помощи которых уравнение (2.2) можно записать в виде

$$\sum_{i, k=1}^{m} a_{ik} p_{ik} + \sum_{i=1}^{m} b_i p_i + cu = f. \tag{2.3}$$

Мы назовем функцию $u(x)$ *регулярным решением* уравнения (2.2) в области C, если она принадлежит классу $C^{(2)}$ в C и удовлетворяет уравнению (2.2) во всех точках C.

Во многих вопросах приходится, кроме регулярных решений, рассматривать различные *обобщенные решения* уравнения (2.2). Однако этим мы займемся только в гл. IV.

3. Свойства максимума и минимума решений эллиптических уравнений. Для регулярных решений уравнения (2.2) имеют место некоторые свойства максимума и минимума, играющие фундаментальную роль при постановке и изучении краевых задач для этого уравнения.

3, I. *Если в области C выполнены условия $c \leqslant 0$, $f<0$ $[f>0]$ или $c<0$, $f \leqslant 0$ $[f \geqslant 0]$, то регулярное решение уравнения (2.2 не имеет в C точек отрицательного относительного минимума [положительного относительного максимума].*

Рассмотрим, например, точку относительного минимума; в не должно быть $p_i=0$, $\sum p_{ik} \lambda_i \lambda_k \geqslant 0$ и отсюда $\mathfrak{M}u-cu=\sum a_{ik} p_{ik} \geqslant 0$

Действительно, учитывая, что квадратичная форма $\sum a_{ik}\lambda_i\lambda_k$ всегда может быть представлена в виде суммы квадратов m линейных форм,

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\lambda_i\lambda_k = \sum_{r=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{m} g_{rs}\lambda_s\right]^2,$$

получим

$$\mathfrak{M}u - cu = \sum_{r=1}^{m}\sum_{i,k=1}^{m} p_{ik}\, g_{ri}\, g_{rk} \geqslant 0.$$

С другой стороны, если бы в этой точке было $u < 0$, то, в силу предположений теоремы, мы имели бы $\mathfrak{M}u - cu = f - cu < 0$; из полученного противоречия следует теорема.

Хопф [1] доказал более общее утверждение:

3, II. *Пусть коэффициенты уравнения* (2.2) *ограничены в* C *и дискриминант* $A(x)$ *имеет в* C *положительную нижнюю грань. Если в* C *выполнены условия* $c \leqslant 0$, $f \leqslant 0$ $[f \geqslant 0]$, *то никакое регулярное решение* $u(x)$ *уравнения* (2.2) *не может иметь в точке* $x_0 \in C$ *отрицательного относительного минимума* [*положительного относительного максимума*], *если оно не обращается в постоянную в любой содержащей* x_0 *области* C_0, *в которой* $u(x) \geqslant u(x_0)$ $[u(x) \leqslant u(x_0)]$.

Для определенности допустим, что x_0 есть точка относительного отрицательного минимума, и обозначим через I множество точек из C_0, для которых $u(x) = u(x_0)$.

Множество I замкнуто в C_0. Поэтому если мы докажем, что множество $\mathfrak{F}I \cdot C_0$ пусто, то будет доказано, что $I \equiv C_0$. Предположим, что $\mathfrak{F}I \cdot C_0$ непусто; тогда существует точка x на $\mathfrak{F}I$, принадлежащая C_0, расстояние δ которой до $\mathfrak{F}C_0$ положительно. Если x' — такая точка из $C_0 - I$, для которой $\overline{xx'} < \delta/2$, то все сферы $\Gamma(x', \rho)$ с центром x' и радиусом $\rho < \delta/2$ содержатся в C_0. Пусть r' есть верхняя грань значений ρ, для которых $\Gamma(x', \rho) \subset C_0 - I$. На $\mathfrak{F}\Gamma(x', r')$ найдется по крайней мере одна точка x_2 из I. Если обозначить через x_1 произвольную точку на радиусе $x'x_2$, отличную от x', и положить $\overline{x_1x_2} = \rho$, то

$$u(x) > u(x_0) \text{ для } x \in \Gamma(x_1, \rho) - x_2, \qquad u(x_2) = u(x_0).$$

Выберем такое $\rho_1 < \rho$, что $\Gamma(x_2, \rho_1) \subset C_0$, и, положив

$$r = \overline{xx_1}, \qquad v(x) = e^{-k\rho^2} - e^{-kr^2}, \tag{3.1}$$

возьмем k настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $\mathfrak{M}v < 0$ для $x \in \Gamma(x_2, \rho_1)$. Это, несомненно, возможно, так как $e^{kr^2}\mathfrak{M}v$ — квадратный трехчлен относительно k, в котором коэффициент при k^2 имеет в $\Gamma(x_2, \rho_1)$ отрицательную верхнюю грань, коэффициент при k ограничен и свободный член (зависящий от k)

ограничен сверху. В таком случае для $\lambda > 0$ имеем $\mathfrak{M}(u+\lambda v) < 0$ в $\Gamma(x_2, \rho_1)$, что противоречит теореме 3, I, так как для λ достаточно малых $u+\lambda v > u(x_0)$ на $\mathfrak{F}\Gamma(x_2, \rho_1)$ и, кроме того, $u(x_2)+\lambda v(x_2) = u(x_0)$, т. е. функция u имеет в $\Gamma(x_2, \rho_1)$ отрицательный относительный минимум.

Из теоремы, которая таким образом доказана от противного, легко выводится такое следствие:

3, III. *Пусть C — ограниченная область и $u(x)$ — регулярное в C решение однородного уравнения $\mathfrak{M}u = 0$, не равное тождественно постоянной и непрерывное в $C+\mathfrak{F}C$. Если $c \leqslant 0$, то во всей области C*

$$|u| < \max_{\mathfrak{F}C}|u|; \tag{3.2}$$

если же $c \equiv 0$, то во всей области C

$$\min_{\mathfrak{F}C} u < u < \max_{\mathfrak{F}C} u. \tag{3.3}$$

Другое важное свойство решений уравнения (2.2) выражается следующей теоремой Жиро[1]:

3, IV. *Пусть T — ограниченная замкнутая область, принадлежащая классу $A^{(1,\lambda)}$, и $u(x)$ — решение уравнения (2.2), непрерывное и не равное тождественно постоянной в T, регулярное в $T - \mathfrak{F}T$. Если $c \leqslant 0$, $f \leqslant 0$ $[f \geqslant 0]$, $\min_{\mathfrak{F}T} u \leqslant 0$ $[\max_{\mathfrak{F}T} u \geqslant 0]$, то для каждой точки y из $\mathfrak{F}T$, в которой функция u принимает свое минимальное [максимальное] значение, и для каждого луча l, выходящего из точки y, такого, что $\cos(ln) < 0$, существует такая положительная постоянная L, что при $x \in l$ и достаточно малых $\overline{xy}$*

$$u(x) - u(y) > L\overline{xy} \quad [< -L\overline{xy}]. \tag{3.4}$$

Мы не будем излагать доказательства Жиро ввиду его сложности и ограничимся доказательством теоремы при более сильном условии, что T принадлежит классу $A^{(2)}$. При таком предположении на внутренней нормали к $\mathfrak{F}T$ в точке минимума y можно выбрать такую точку x_1, чтобы сфера $\Gamma(x_1, \rho)$ с центром x_1 и радиусом $\rho = \overline{x_1 y}$ не имела с $\mathfrak{F}T$ общих точек, кроме y. Возьмем $\rho_1 < \rho$, и пусть D есть замкнутая область $\Gamma(x_1, \rho) \cdot \Gamma(y, \rho_1)$.

Согласно теореме 3, II, для $x \in T - \mathfrak{F}T$ справедливо неравенство $u(x) - u(y) > 0$; кроме того, функция $v(x)$, определенная формулой (3.1), обращается в нуль на $\mathfrak{F}D \cdot \mathfrak{F}\Gamma(x_1, \rho)$. Очевидно, что при достаточно малых положительных λ

$$-\lambda v(x) < u(x) - u(y) \text{ для } x \in \mathfrak{F}D. \tag{3.5}$$

---

[1] См. Жиро [16], стр. 343, и [20], стр. 50. См. также Олейник [4] и Хопф [5].

Но при достаточно большом k в D выполнено неравенство $\mathfrak{M}v < 0$, и отсюда

$$\mathfrak{M}[u(x) - u(y) + \lambda v(x)] = f(x) - c(x)u(y) + \lambda\mathfrak{M}v < 0.$$

Поэтому, в силу теоремы 3, I, неравенство (3.5) выполнено всюду в D. Отсюда следует доказываемая теорема, так как

$$-\lambda\left(\frac{dv}{dl}\right)_{x=y} = -2\lambda k\rho\, e^{-k\rho^2}\cos(ln) > 0.$$

4. Различные виды краевых задач. В конечном счете наиболее важным вопросом, который возникает в теории эллиптических уравнений, является изучение краевых задач для этих уравнений.

Пусть задана ограниченная замкнутая область T, принадлежащая классу $A^{(1)}$. Рассмотрим в каждой точке $\mathfrak{F}T$ ориентированную прямую l, направленную от T, т. е. такую, что $\cos(ln) > 0$. Пусть, кроме того, α, β, φ — три функции, определенные на $\mathfrak{F}T$, пока подчиненные единственному условию $|\alpha| + |\beta| > 0$. Если $\mathfrak{M}$ — эллиптический оператор, определенный в $T - \mathfrak{F}T$, то краевые задачи для уравнения (2.2), которыми мы будем заниматься, по крайней мере сейчас, сводятся в основном к следующему:

Найти функции $u(x)$, удовлетворяющие следующим условиям (если такие функции существуют):

a) *$u(x)$ в $T - \mathfrak{F}T$ есть регулярное решение уравнения* (2.2);

b) *$u(x)$ непрерывна в T*;

c) *$u(x)$ имеет производную по направлению l в каждой точке $\mathfrak{F}T$, в которой $\alpha \neq 0$, и во всех точках $\mathfrak{F}T$ удовлетворяет краевому условию*

$$\alpha\frac{du}{dl} + \beta u = \varphi. \tag{4.1}$$

Изучение этих задач в наиболее общих условиях оказывается очень трудным и до сих пор остается неполным; поэтому мы отметим некоторые частные случаи, особо важные для математической физики; на них в первую очередь направлено внимание ученых.

В первом частном случае предполагается, что $\alpha = 0$, $\beta = 1$; тогда краевое условие принимает особенно простой вид

$$u(x) = \varphi(x) \text{ для } x \in \mathfrak{F}T, \tag{4.2}$$

и рассматриваемая задача называется *задачей Дирихле* или *первой краевой задачей*.

Второй частный случай имеем, когда $\alpha > 0$ и направление l совпадает с направлением ν (*направлением конормали*), направляющие косинусы которого равны

$$Y_i = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}X_k, \qquad a = \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}X_k\right)^2\right]^{1/2}. \tag{4.3}$$

В таком случае рассматриваемая задача называется *задачей Неймана*, или *второй краевой задачей*. Заметим, что без уменьшения общности можно допустить, что

$$\alpha = a; \tag{4.4}$$

это мы всегда будем предполагать в дальнейшем. Тогда, если производные первого порядка функции u непрерывны также и на $\mathfrak{F}T$, формулу (4.1) можно записать в виде

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} X_k \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta u = \varphi. \tag{4.5}$$

Третий частный случай: предполагается, что $\alpha > 0$, а направлением l может быть любое направление, для которого $\cos(ln)$ имеет положительную нижнюю грань на $\mathfrak{F}T$.

Эта задача называется *задачей с косой производной* или *третьей краевой задачей*. В этом случае мы всегда можем, не уменьшая общности, предположить, что

$$\alpha = a^{(l)}, \tag{4.6}$$

приняв по определению

$$a^{(l)} = a\,\frac{\cos(n\nu)}{\cos(nl)}. \tag{4.7}$$

Если производные первого порядка функции u непрерывны и на $\mathfrak{F}T$, то формула (4.1) принимает вид

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} X_k \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta u = \varphi, \qquad \text{(4.8}$$

где функции

$$\alpha_i = a^{(l)} \cos(lx_i) - a\cos(\nu x_i) \qquad \text{(4.9}$$

удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i = 0. \qquad \text{(4.10}$$

Наконец, назовем *смешанными задачами* такие задачи, в которых функция α, не обращаясь в нуль тождественно, равна нулю на части $\mathfrak{F}T$.

В ряде случаев мы будем рассматривать также задачи, в которых направление l в некоторых точках является касательным к $\mathfrak{F}$

Рассмотренные задачи могут ставиться также для неограниченно замкнутой области T. Однако в таком случае необходимо приписать функции u определенное поведение на бесконечности. Например, можно потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{x \to \infty} u(x) = 0 \qquad \text{(4.1}$$

или

$$\overline{\lim_{x \to \infty}}\, |u(x)| < \infty. \qquad (4.12)$$

Мы будем заниматься задачами, относящимися к неограниченным областям, только в гл. VII, и поэтому в этой и в следующих главах замкнутая область T будет предполагаться ограниченной, если не оговорено противное.

5. Теоремы единственности. В дальнейшем мы будем изучать различные методы, позволяющие получать теоремы существования решений краевых задач; однако теоремы п. 2 позволяют уже сейчас установить некоторые теоремы единственности для решения этих задач.

5, I. *Если $c \leqslant 0$, то задача Дирихле имеет не более одного решения.*

Действительно, если функции u_1 и u_2 — два решения задачи Дирихле, то их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет условиям

$$\mathfrak{M}u = 0 \text{ для } x \in T - \mathfrak{F}T, \quad u = 0 \text{ для } x \in \mathfrak{F}T,$$

откуда, согласно теореме 3, III, следует, что $u \equiv 0$ в T.

5, II. *Если замкнутая область T принадлежит классу $A^{(1, \lambda)}$ и если $c \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, причем из функций c и β хотя бы одна не равна тождественно нулю, то вторая и третья краевые задачи имеют не более одного решения.*

Здесь также дело сводится к тому, чтобы показать, что любое решение уравнения $\mathfrak{M}u = 0$, которое удовлетворяет условию (4.1) при $\varphi \equiv 0$, тождественно равно нулю. Если бы функция u не была тождественно равна нулю, то, согласно теореме 3, III, она должна была бы иметь на $\mathfrak{F}T$ положительный максимум или отрицательный минимум, что невозможно. Действительно, так как хотя бы одна из функций c и β не равна тождественно нулю, функция u не постоянна. Она не может принимать в точках $\mathfrak{F}T$ положительных максимальных [отрицательных минимальных] значений, так как, согласно теореме 3, IV, в таких случаях должно быть

$$\frac{du}{dl} > 0 \quad \left[\frac{du}{dl} < 0\right]$$

и граничное условие не может быть выполнено. Подобными же рассуждениями можно доказать следующие утверждения:

5, III. *В предположениях теоремы 5, II смешанная задача имеет не более одного решения.*

5, IV. *Если замкнутая область T принадлежит классу $A^{(1,\lambda)}$ и если $c\equiv 0$, $\beta\equiv 0$, то два различных решения второй или третьей краевой задачи отличаются на постоянную.*

В связи с теоремой 5, IV заметим, что при условии $c\equiv\beta\equiv 0$, если функция u есть решение второй или третьей краевой задачи, то функция $u+k$, где k — произвольная постоянная, есть решение той же задачи.

Наконец, что касается случая неограниченных замкнутых областей, легко видеть следующее:

5, V. *Предыдущие теоремы верны также и в том случае, когда T не ограничена, если функция u удовлетворяет на бесконечности условию* (4. 11).

Эта теорема часто будет употребляться в следующем виде:

5, VI. *Пусть оператор $\mathfrak{M}$ определен во всем пространстве S_m. Пусть дана замкнутая ограниченная область T, принадлежащая классу $A^{(1,\lambda)}$, и $c(x)\leqslant 0$ для $x\in\mathfrak{C}T$. Тогда всякая функция, которая непрерывна на $\mathfrak{C}T+\mathfrak{F}T$, является регулярным решением уравнения $\mathfrak{M}u=0$ в $\mathfrak{C}T$, стремится к нулю на бесконечности и равна нулю на $\mathfrak{F}T$, будет тождественно равна нулю. Пусть l направлено от T и $\beta\leqslant 0$, и пусть хотя бы одна из функций c и β не равна тождественно нулю. Тогда заключение остается верным, если на $\mathfrak{F}T$ выполнено другое условие:*

$$a^{(l)}\frac{du}{dl}+\beta u=0.$$

Если $c\leqslant 0$ во всем пространстве S_m, то тождественно равна нулю всякая функция $u(x)$, которая стремится к нулю на бесконечности и является регулярным решением уравнения $\mathfrak{M}u=0$ в S_m.

6. Формула Грина. В этом пункте мы будем предполагать, что функции a_{ik} и функции

$$e_i=b_i-\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} \tag{6.1}$$

принадлежат классу $C^{(1)}$ в области C; при таком условии оператору $\mathfrak{M}$ можно придать вид

$$\mathfrak{M}u=\sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{m}e_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu. \tag{6.2}$$

Сопряженным оператором для оператора $\mathfrak{M}$ называется оператор

$$\mathfrak{N}v = \sum_{i,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{ik}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(e_i v) + cv, \tag{6.3}$$

который можно записать также в виде

$$\mathfrak{N}v = \sum_{i,\,k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}(a_{ik}v) - \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i v) + cv, \tag{6.4}$$

если предположить, что функции a_{ik} и b_i принадлежат соответственно классам $C^{(2)}$ и $C^{(1)}$ в области C.

Из формулы (6.3) сразу следует, что сопряженным оператором для $\mathfrak{N}v$ является оператор $\mathfrak{M}u$. Поэтому можно также сказать, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — взаимно сопряженные операторы.

Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$, то оператор $\mathfrak{M}$ называется *самосопряженным*. Необходимым и достаточным условием самосопряженности оператора $\mathfrak{M}$ является обращение в нуль всех функций e_i. Между двумя сопряженными операторами существуют некоторые интегральные соотношения, которые играют важнейшую роль в теории эллиптических уравнений. Имеем

$$v\,\mathfrak{M}u - u\,\mathfrak{N}v = \sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[a_{ik}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i} - u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right] + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(e_i uv).$$

Если функции u и v принадлежат классу $C^{(2)}$ в C и $T \subset C$ есть замкнутая область из класса $A^{(1)}$, то отсюда следует, что

$$\int_T [v\,\mathfrak{M}u - u\,\mathfrak{N}v]\,dx = \int_{\mathfrak{F}T}\left[a\left(v\frac{du}{d\nu} - u\frac{dv}{d\nu}\right) + buv\right]d\sigma, \tag{6.5}$$

где ν есть конормаль, a — функция, заданная второй из формул (4.3), а

$$b = \sum_{i=1}^{m} e_i X_i.$$

Формулу (6.5) назовем *формулой Грина*. Если T принадлежит классу $A^{(2)}$, эту формулу можно преобразовать[1]) так, чтобы в ней вместо производных от функций u и v по конормали ν появились производные от этих функций по направлениям l и λ соответственно; из этих направлений первое может быть задано произвольно, но так, чтобы оно удовлетворяло условию $\cos(ln) > 0$ и чтобы его направляющие косинусы были функциями класса $C^{(1)}$ на $\mathfrak{F}T$.

---

[1]) См. Жиро [27], стр. 371, Пиконе и Миранда [1] и Толотти [2].

Действительно, каждому произвольно заданному направлению l, удовлетворяющему названным условиям, мы можем поставить в соответствие направление λ с направляющими косинусами

$$\cos(\lambda x_k)=\frac{2a}{a^{(\lambda)}}\cos(\nu x_k)-\frac{a^{(l)}}{a^{(\lambda)}}\cos(l x_k).$$

Так как функциям α_i, определенным формулами (4.9), можно придать вид

$$\alpha_i=-a^{(\lambda)}\cos(\lambda x_i)+a\cos(\nu x_i),$$

легко убедиться, что

$$a\left(v\frac{du}{d\nu}-u\frac{dv}{d\nu}\right)=a^{(l)}v\frac{du}{dl}-a^{(\lambda)}u\frac{dv}{d\lambda}-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\frac{\partial(uv)}{\partial x_i}. \qquad (6.6)$$

Пусть S — часть $\mathfrak{F}T$, допускающая параметрическое представление (1.2) в замкнутой области D, принадлежащей классу $A^{(1)}$. Согласно формуле (4.10), можно найти $m-1$ функций $\beta_i(t_1, t_2, \ldots, t_{m-1})$, принадлежащих классу $C^{(1)}$ в D, таких, что для любой функции w

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\frac{\partial w}{\partial x_i}=\frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i\frac{\partial w}{\partial t_i}.$$

Если $\mathfrak{B}S$ есть множество точек S, соответствующее $\mathfrak{F}D$, то из формулы (6.6) следует, что

$$\int_S a\left(v\frac{du}{d\nu}-u\frac{dv}{d\nu}\right)d\sigma=\int_S\left(a^{(l)}v\frac{du}{dl}-a^{(\lambda)}u\frac{dv}{d\lambda}\right)d\sigma+\int_S b'uv\,d\sigma-$$

$$-\int_{\mathfrak{B}S}uv\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i\,dt_{i+1}\ldots dt_{m-1}dt_1\ldots dt_{i-1},$$

где функция

$$b'=\frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial\beta_i}{\partial t_i}$$

определена на $\mathfrak{F}T$ и не зависит от того, какое именно параметрическое представление взято.

Отсюда очевидным образом следует, что

$$\int_T[v\mathfrak{M}u-u\mathfrak{N}v]\,dx=\int_{\mathfrak{F}T}\left[a^{(l)}v\frac{du}{dl}-a^{(\lambda)}u\frac{dv}{d\lambda}+(b+b')uv\right]d\sigma. \qquad (6.7)$$

Мы пришли к формулам (6.5) и (6.7) при несколько стеснительных предположениях относительно функций u и v; однако, сделав очевидный предельный переход, легко убедиться, что:

6, I. *При прежних предположениях относительно замкнутой области T и направления l формулы* (6.5) *и* (6.7) *справедливы также и тогда, когда функции u и v определены только в замкнутой области T, принадлежат в T классу $C^{(1)}$ и имеют производные второго порядка, непрерывные в $T - \mathfrak{F}T$ и суммируемые в T.*

Более тщательное изучение вопроса показывает, что:

6, II. *В теореме* 6,I *предположение, сделанное относительно производных второго порядка от функций u и v, может быть заменено предположением о том, что производные первого порядка от этих функций в замкнутой области T абсолютно непрерывны по Тонелли*[1]).

Возможно также значительно снизить требования, налагаемые на замкнутую область T.

Если, например, замкнутая область T такова, что ее границу $\mathfrak{F}T$ можно разбить на конечное число гиперповерхностей, которые в каждой своей точке имеют касательную гиперплоскость, изменяющуюся от точки к точке непрерывно, то формула (6.5) остается верной. Аналогично обобщается также и формула (6.7).

Может оказаться полезным следующее замечание. Формула (6.7) верна также в том случае, когда T принадлежит только классу $A^{(1)}$, но направление l таково, что функции α_i, определенные формулами (4.9), принадлежат классу $C^{(1)}$.

7. Условия разрешимости краевых задач. Новые теоремы единственности. Из формулы Грина можно сразу вывести некоторые следствия, касающиеся краевых задач, рассмотренных в п.4.

Пусть β — произвольная функция, заданная и непрерывная на $\mathfrak{F}T$; положим

$$\mathfrak{P}u = a^{(l)}\frac{du}{dl} + \beta u, \tag{7.1}$$

$$\mathfrak{Q}v = a^{(\lambda)}\frac{dv}{d\lambda} + (\beta - b - b')\,v. \tag{7.2}$$

Операторы $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ имеют смысл в предположении, что в функции u и v на $\mathfrak{F}T$ дифференцируемы по направлениям l и λ соответственно; если же они принадлежат классу $C^{(1)}$ в T, то можно также написать

$$\mathfrak{P}u = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}X_k\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i\frac{\partial u}{\partial t_i} + \beta u\,, \tag{7.3}$$

$$\mathfrak{Q}v = \sum_{i,k=1}^{m} X_k\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ik}v) - \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial t_i}\,(\beta_i v) + \left(\beta - \sum_{k=1}^{m} b_kX_k\right)v. \tag{7.4}$$

---

[1]) См. Сакс С., Теория интеграла, ИЛ, М., 1949, стр. 252.— *Прим. ред.*

Воспользовавшись этими обозначениями, формулу (6.7) можно привести к виду

$$\int\limits_T (v\,\mathfrak{M}u - u\,\mathfrak{N}v)\,dx = \int\limits_{\mathfrak{F}T} (v\,\mathfrak{P}u - u\,\mathfrak{Q}v)\,d\sigma. \tag{7.5}$$

Заметим теперь, что в случае второй или третьей краевой задачи краевое условие для уравнения $\mathfrak{M}u = f$ всегда можно записать в виде

$$\mathfrak{P}u = \varphi. \tag{7.6}$$

Следует также отметить, что в случае второй краевой задачи функции β_i и b' равны нулю.

Назовем *сопряженной* для такой краевой задачи другую краевую задачу, которая состоит в отыскании функции v — регулярного в $T - \mathfrak{F}T$ решения уравнения

$$\mathfrak{N}v = g, \tag{7.7}$$

удовлетворяющего краевому условию

$$\mathfrak{Q}v = \psi \text{ для } x \in \mathfrak{F}T, \tag{7.8}$$

где g и ψ — функции, определенные соответственно в T и на $\mathfrak{F}T$. Назовем также *сопряженной* к задаче Дирихле для уравнения $\mathfrak{M}u = f$ задачу Дирихле для уравнения (7.7) с краевым условием

$$v = \psi \text{ для } x \in \mathfrak{F}T. \tag{7.9}$$

Легко видеть, что любая краевая задача совпадает с задачей, сопряженной к ее сопряженной. Кроме того, две взаимно сопряженные задачи всегда являются задачами одного типа, и условием, необходимым и достаточным для того, чтобы первая или вторая краевая задача совпадала со своей сопряженной, является самосопряженность оператора $\mathfrak{M}$.

Однако в случае третьей краевой задачи к этому условию надо присоединить еще одно[1]):

$$a^{(\lambda)}\beta + a^{(l)}(b' - \beta) = 0. \tag{7.10}$$

Теперь из формулы (7.5) непосредственно вытекают следующие теоремы:

7, I. *Предположим, что T принадлежит классу $A^{(1)}$, а функции f и φ непрерывны. Для того чтобы задача Дирихле для*

---

[1]) Третья краевая задача может совпадать со своей сопряженной только тогда, когда направление l совпадает с λ, т. е. когда эта задача является второй краевой задачей, а в этом случае условие (7.10) выполняется автоматически. — *Прим. ред.*

уравнения (2.2) имела решение, принадлежащее классу $C^{(1)}$ в T, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_T fv\,dx + \int\limits_{\mathfrak{S}T} \varphi a \frac{dv}{d\nu}\,d\sigma = 0, \tag{7.11}$$

где v — любое решение однородной сопряженной задачи, принадлежащее в T классу $C^{(1)}$.

7, II. *Предположим, что T принадлежит классу $A^{(1)}$ $[A^{(2)}]$, а функции f и φ непрерывны. Для того чтобы вторая [третья] краевая задача для уравнения (2.2) имела решение, принадлежащее классу $C^{(1)}$ в T, необходимо, чтобы выполнялось равенство*

$$\int\limits_T fv\,dx - \int\limits_{\mathfrak{S}T} \varphi v'_\nu\,d\sigma = 0, \tag{7.12}$$

где v — любое решение однородной сопряженной задачи, принадлежащее в T классу $C^{(1)}$.

Заметим теперь, что если в формуле (7.5) заменить u на u^2 и положить $v = 1$, то получится

$$\int\limits_T \left[u\,\mathfrak{M}u + \sum_{i,\,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right] dx = \frac{1}{2}\int\limits_T (c + c^*)\,u^2 dx + {}$$
$$+ \int\limits_{\mathfrak{S}T} u\left[\mathfrak{P}u - \left(\beta - \frac{b + b'}{2}\right) u\right] d\sigma, \tag{7.13}$$

где

$$c^* = c - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial e_i}{\partial x_i}$$

есть коэффициент при функции v в операторе $\mathfrak{N}v$.

Применив эту формулу к решению однородной задачи, легко получим следующие теоремы единственности:

7, III. *Если функции a_{ik} и e_i принадлежат классу $C^{(1)}$ в замкнутой области T класса $A^{(1)}$ и если $c + c^* \leqslant 0$, то задача Дирихле для уравнения $\mathfrak{M}u = f$ имеет не более одного решения, принадлежащего классу $C^{(1)}$ в T.*

7, IV. *Если функции a_{ik} и e_i принадлежат классу $C^{(1)}$ в замкнутой области T класса $A^{(1)}$ и если $c + c^* \leqslant 0$, $2\beta - b - b' \geqslant 0$, причем хотя бы одна из функций c и β не равна тождественно нулю, то задача Неймана для уравнения $\mathfrak{M}u = f$ имеет не более одного решения, принадлежащего классу $C^{(1)}$ в T. Это верно также и для третьей краевой задачи, если T принадлежит классу $A^{(2)}$, а направляющие косинусы направления l принадлежат классу $C^{(1)}$ на $\mathfrak{S}T$.*

8. Функции Леви. Обозначим через A_{rs} отношение алгебраического дополнения элемента a_{rs} в определителе A к самому определителю A и положим

$$H(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(m-2)\,\omega_m \sqrt{A(y)}} \left(\sum\limits_{r,s=1}^{m} A_{rs}(y)(x_r - y_r)(x_s - y_s) \right)^{\frac{2-m}{2}} & \text{для } m > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi \sqrt{A(y)}} \ln \left(\sum\limits_{r,s=1}^{m} A_{rs}(y)(x_r - y_r)(x_s - y_s) \right)^{-\frac{1}{2}} & \text{для } m = 2. \end{cases} \tag{8.1}$$

Легко проверяется тождество

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(y) \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \tag{8.2}$$

из которого следует, что $H(x, y)$ как функция от x есть решение уравнения $\mathfrak{M}u = 0$, если в нем коэффициенты a_{ik} постоянны, а b_i и c равны нулю. В общем случае большой интерес представляет изучение решений нашего уравнения, которые при $x \to y$ ведут себя подобно функции $H(x, y)$.

Прежде чем приступить к такому исследованию, мы должны ввести некоторые предварительные понятия.

Заметим, что в силу предположений, сделанных относительно квадратичной формы $\sum a_{ik}\lambda_i\lambda_k$, мы имеем

$$H = O(r^{2-m}), \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} = O(r^{1-m}), \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k} = O(r^{-m}) \tag{8.3}$$

(здесь положено $\overline{xy} = r$). Эти оценки справедливы во всякой ограниченной замкнутой области T, содержащейся в C, если, например, функции a_{ik} предполагаются непрерывными[1]).

Всякую функцию $L(x, y)$, непрерывную вместе со своими производными первого и второго порядка по x_i, когда x и y изменяются в области C и $x \neq y$, мы назовем *функцией Леви*, если она при некотором $\lambda > 0$ удовлетворяет оценкам вида

$$L - H = O(r^{\lambda+2-m}), \quad \frac{\partial(L-H)}{\partial x_i} = O(r^{\lambda+1-m}),$$
$$\frac{\partial^2(L-H)}{\partial x_i \partial x_k} = O(r^{\lambda-m}) \tag{8.4}$$

равномерно в каждой замкнутой области, содержащейся в C.

---

[1]) Через O и o мы будем обозначать символы Ландау. Если $m = 2$, то в первой из формул (8.3) надо заменить $O(r^{2-m})$ на $O\left(\ln \frac{2R}{r}\right)$, где R — диаметр замкнутой области T.

Конечно, сама функция $H(x, y)$ есть функция Леви, но, кроме того, функцией Леви является функция $H(y, x)$ при $\lambda = 1$, если коэффициенты a_{ik} принадлежат классу $C^{(2)}$ в C.

Если учесть равенство (8.2) и предположить, что коэффициенты оператора $\mathfrak{M}$ ограничены, то при $\lambda \leqslant 1$ получим

$$\mathfrak{M}L = \sum_{i,\,k=1}^{m} \left[a_{ik}(x) - a_{ik}(y)\right] \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k} + O(r^{\lambda-m}),$$

откуда при дополнительном предположении, что a_{ik} принадлежат классу $C^{(0,\lambda)}$ в C, следует, что

$$\mathfrak{M}L(x, y) = O(r^{\lambda-m}) \tag{8.5}$$

равномерно в каждой замкнутой области, содержащейся в C. Формула (8.5) справедлива, в частности, в предположениях п. 6. В этом случае имеем также

$$\mathfrak{N}L(x, y) = O(r^{\lambda-m}). \tag{8.6}$$

Если $L = H$, то в предположениях п. 6 формулы (8.5) и (8.6) справедливы и при $\lambda = 1$.

9. Формула Стокса. Примем предположения п. 6 и обозначим через $I(y, \rho)$ окрестность точки y, определенную неравенством

$$\sum_{r,s=1}^{m} A_{rs}(y)(x_r - y_r)(x_s - y_s) \leqslant \rho^2. \tag{9.1}$$

Пусть теперь $T \subset C$ есть замкнутая область, для которой верна формула (7.5). Выберем произвольную точку y из $T - \mathfrak{F}T$ и настолько малое ρ, что $I(y, \rho) \subset T - \mathfrak{F}T$, и применим формулу (7.5), принимая за область интегрирования $T - I(y, \rho) + \mathfrak{F}I$, за направление l на $\mathfrak{F}I$ — нормаль, внешнюю по отношению к $T - I$, с направляющими косинусами $X_k(x)$, и за функцию $v(x)$ — произвольную функцию Леви $L(x, y)$. Имеем

$$\int_{T-I} (L\,\mathfrak{M}u - u\,\mathfrak{N}L)\,dx = \int_{\mathfrak{F}T+\mathfrak{F}I} (L\,\mathfrak{P}u - u\,\mathfrak{Q}L)\,d\sigma. \tag{9.2}$$

Несложное вычисление показывает, что на $\mathfrak{F}I$

$$L\,\mathfrak{P}u - u\,\mathfrak{Q}L = \frac{u(y)}{\rho^m \omega_m \sqrt{A(y)}} \sum_{k=1}^{m} X_k(x)(x_k - y_k) + O(\rho^{\lambda+1-m}),$$

откуда

$$\int_{\mathfrak{F}I} (L\,\mathfrak{P}u - u\,\mathfrak{Q}L)\,d\sigma = -\frac{m\,u(y)}{\rho^m \omega_m \sqrt{A(y)}} \operatorname{mes} I + \operatorname{mes} \mathfrak{F}I \cdot O(\rho^{\lambda+1-m}).$$

Так как

$$\operatorname{mes} I = \frac{\rho^m \omega_m \sqrt{A(y)}}{m}, \quad \operatorname{mes} \mathfrak{F} I = O(\rho^{m-1}),$$

то, переходя к пределу при $\rho \to 0$ в формуле (9.2), получим

$$u(y) = \int\limits_T (u\,\mathfrak{N}L - L\,\mathfrak{M}u)\,dx + \int\limits_{\mathfrak{F}T} (L\,\mathfrak{P}u - u\,\mathfrak{Q}L)\,d\sigma. \qquad (9.3)$$

В этой формуле первый интеграл в правой части имеет смысл в силу оценок (8.3), (8.4) и (8.6).

Очевидно, что в формуле (9.2) операторы $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{Q}$ применяются к $L(x, y)$, рассматриваемой как функция от x.

Когда при подобных обстоятельствах может возникнуть сомнение относительно того, по какой переменной нужно применять оператор, мы будем приписывать эту переменную к оператору в качестве индекса. Условившись об этом, мы, например, можем в формуле (9.2) заменить операторы $\mathfrak{N}L$ и $\mathfrak{Q}L$ на $\mathfrak{N}_x L$ и $\mathfrak{Q}_x L$.

Формула (9.3), которую мы будем называть *формулой Стокса*, верна в основном при тех же предположениях относительно оператора $\mathfrak{M}$, функции u и замкнутой области T, при которых верна формула (7.5). Что касается функции $L(x, y)$, то, сохраняя требования (8.4), достаточно предположить, что она определена только в $T - y$, непрерывна там со своими производными первого порядка и имеет производные второго порядка, непрерывные в $T - \mathfrak{F}T - y$ и такие, что функция $\mathfrak{N}L$ суммируема в T для любого $y \in T - \mathfrak{F}T$.

10. Фундаментальные решения; функции Грина. Функция Леви $L(x, y)$, которая является решением уравнения $\mathfrak{M}_x L = 0$ $[\mathfrak{N}_x L = 0]$, называется *фундаментальным решением*[1] уравнения $\mathfrak{M}u = 0$ $[\mathfrak{N}v = 0]$.

Функцией Грина данной краевой задачи называется функция $F(x, y)$, которая как функция y есть фундаментальное решение сопряженного уравнения и удовлетворяет краевому условию однородной сопряженной задачи.

Так, например, функция Грина $F(x, y)$ задачи Дирихле для уравнения $\mathfrak{M}u = f$ есть функция Леви, которая как функция точки y является решением уравнений

$$\mathfrak{N}_y F(x, y) = 0 \text{ для } y \in T - \mathfrak{F}T - x, \qquad (10.1)$$

$$F(x, y) = 0 \text{ для } y \in \mathfrak{F}T,\ x \in T - \mathfrak{F}T, \qquad (10.2)$$

в то время как функция Грина второй или третьей краевой задачи для уравнения $\mathfrak{M}u = f$ есть функция Леви, которая как функция точки y удовлетворяет уравнению (10.1) и краевому условию

$$\mathfrak{Q}_y F(x, y) = 0 \text{ для } y \in \mathfrak{F}T,\ x \in T - \mathfrak{F}T. \qquad (10.3)$$

---

[1] Или же, согласно Адамару, *элементарным решением*.

Аналогично функция Грина краевой задачи для уравнения $\mathfrak{N}v=g$ есть функция Леви $\Phi(x, y)$, которая как функция точки y является решением уравнения $\mathfrak{M}_y\Phi=0$ и удовлетворяет краевому условию $\Phi=0$ в случае задачи Дирихле и $\mathfrak{P}_y\Phi=0$ в случае второй или третьей краевой задачи.

Знание функции Грина данной краевой задачи позволяет сразу написать формулу для решения этой задачи, если только эта функция Грина непрерывна вместе со своими производными первого порядка по переменным y_i в $T-x$.

Действительно, из формулы Стокса, в которой точки x и y переставлены между собой, следует, что любое решение $u(x)$ задачи Дирихле для уравнения $\mathfrak{M}u=f$, которое принадлежит классу $C^{(1)}$ в T, дается формулой

$$u(x)=-\int_T F(x, y) f(y)\, dy-\int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{Q}_y F(x, y)\, \varphi(y)\, d_y\sigma, \qquad (10.4)$$

а любое решение второй или третьей краевой задачи для того же уравнения, принадлежащее классу $C^{(1)}$ в T, дается формулой

$$u(x)=-\int_T F(x, y) f(y)\, dy+\int_{\mathfrak{F}T} F(x, y)\, \varphi(y)\, d_y\sigma. \qquad (10.5)$$

Эти формулы подсказывают способ получения теорем существования для наших краевых задач. Он заключается в следующем: сначала нужно доказать существование функции Грина, а потом проверить, что формула (10.4) или (10.5) действительно дает решение рассматриваемой краевой задачи.

Полезно отметить в связи с этим, что правые части формул (10.4) и (10.5) имеют смысл также и тогда, когда функции f и φ только непрерывны; это позволяет ожидать, что указанные формулы дают решение u рассматриваемой задачи также и тогда, когда функция u не принадлежит классу $C^{(1)}$ в T.

Однако этот путь не всегда является наиболее подходящим. Часто оказывается удобнее прямым путем прийти к теореме существования для данной краевой задачи и для ее сопряженной. Тогда, если известны также фундаментальные решения этих двух уравнений, сразу оказывается обеспеченным существование функций Грина и, следовательно, можно написать формулы (10.4) и (10.5).

Так, например, если речь идет о задаче Дирихле для уравнения $\mathfrak{M}u=f$, то можно написать

$$F(x, y)=L(y, x)+g(x, y),$$

где $L(y, x)$ как функция y является фундаментальным решением уравнения $\mathfrak{N}v=0$, а $g(x, y)$ есть регулярное решение сопряженной задачи

$$\mathfrak{N}_y g(x, y)=0, \qquad g=-L(y, x) \text{ для } y \in \mathfrak{F}T.$$

Однако надо заметить, что если даже вышеупомянутые теоремы существования допускают непосредственное построение функции Грина, это не значит, что можно сразу применять формулы (10.4) и (10.5), так как сначала надо проверить, удовлетворяют ли функции u и F тем требованиям, которые необходимы для того, чтобы можно было применять эти формулы, и которые в основном сводятся к требованию непрерывности производных первого порядка от u и F на $\mathfrak{F}T$.

Временно оставляя эти вопросы, докажем следующую хорошо известную теорему:

10, I. *Если функции Грина $F(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ двух взаимно сопряженных задач существуют и имеют производные первого порядка по переменным y_i, непрерывные в $T - x$, то*

$$F(x, y) = \Phi(y, x). \tag{10.6}$$

Действительно, рассмотрим в T две фиксированные точки x и y и применим формулу Грина к $T - (I(x, \rho) + I(y, \rho))$ и к функциям $F(x, z)$ и $\Phi(y, z)$ переменной точки z. Каков бы ни был тип краевой задачи, имеем

$$\int\limits_{\mathfrak{F}I(x,\rho)+\mathfrak{F}I(y,\rho)} [F(x, z)\,\mathfrak{P}_z\Phi(y, z) - \Phi(y, z)\,\mathfrak{Q}_z F(x, z)]\, d_z\sigma = 0.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\rho \to 0$, легко получим равенство (10.6), применяя соображения, аналогичные тем, которыми мы пользовались при выводе формулы Стокса.

Непосредственным следствием теоремы 10, I является следующая теорема:

10, II. *Если для самосопряженной задачи существует функция Грина, то она симметрична относительно точек x и y.*

Необходимо также заметить, что в предположениях теоремы 10, I функция $F(x, y)$ есть функция Леви от точки x и является решением уравнения $\mathfrak{M}_x F = 0$, которое для $x \in \mathfrak{F}T$ удовлетворяет краевому условию поставленной задачи, сделанному однородным. Поэтому функцию с такими свойствами можно рассматривать также и тогда, когда коэффициенты $\mathfrak{M}$ недостаточно гладки для того, чтобы можно было написать сопряженное уравнение. Если такая функция существует, мы ее будем во всяком случае называть *функцией Грина*. Кроме того, если для рассматриваемой задачи справедлива теорема существования, то, исходя из фундаментального решения, можно сразу построить функцию Грина в только что указанном смысле.

Однако, если нельзя проверить, что такая функция $F(x, y)$ как функция y удовлетворяет условиям (10.1) и (10.2) или (10.3), то формулы (10.4) и (10.5) нельзя применять без проверки. Но мы увидим в дальнейшем, что во многих случаях возможна непосредственная проверка этих формул.

Глава II

ФУНКЦИИ, ПРЕДСТАВЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛАМИ

В этой главе мы займемся изучением некоторых функций, представленных в виде интегралов либо по замкнутой области, либо по ее границе, для того чтобы установить, при каких условиях такие функции суммируемы или же непрерывны, дифференцируемы, удовлетворяют условию Гёльдера и т. д. Между прочим мы займемся интегралами, которые можно рассматривать как естественное обобщение обычных потенциалов: объемного, простого или двойного слоя, что показывает, насколько содержание данной главы важно для систематического построения теории эллиптических уравнений.

Наконец, мы рассмотрим задачу о построении функции, определенной в T, удовлетворяющей в $T-\mathfrak{F}T$ определенным условиям гладкости, а на $\mathfrak{F}T$ — заданным краевым условиям.

11. Композиция двух ядер. Пусть T — ограниченная замкнутая область; если не оговорено противное, мы будем предполагать, что она принадлежит классу $A^{(1,\lambda)}$. Пусть $K(x, y)$ — функция, определенная для x и y из T и непрерывная по крайней мере при $x \neq y$. Мы будем называть функцию K *ядром класса* $N^{(\alpha)}$, где $\alpha < m$, если она в T равномерно удовлетворяет условию $K = O(r^{\alpha-m})$, где $r = \overline{xy}$. Будем называть функцию K ядром класса $N^{(m)}$, если она в T равномерно удовлетворяет условию $K = O\left(\ln \frac{2R}{r}\right)$, где R — диаметр T. Наконец, мы скажем, что функция K есть ядро класса $N^{(\alpha)}$ при $\alpha > m$, если она непрерывна также и при $x = y$.

Если K есть ядро класса $N^{(\alpha)}$ и если, кроме того, при некотором $\lambda \leqslant 1$ и $\leqslant \alpha$ равномерно для всех x', x'', y из T выполняется оценка

$$K(x', y) - K(x'' y) = O(\overline{x' x''}^{\lambda} \cdot \rho^{\alpha-\lambda-m}), \qquad (11.1)$$

где ρ — расстояние от точки y до отрезка $x' x''$, то мы будем говорить, что K есть ядро класса $N^{(\alpha, \lambda)}$.

Заметим, что если $\alpha > m$ и $\lambda \leqslant \alpha - m$, то принадлежность K классу $N^{(\alpha, \lambda)}$ означает, что K удовлетворяет по x условию Гёльдера с показателем λ равномерно по отношению к y. Легко также доказать[1]), что из $\mu < \lambda$ следует $N^{(\alpha,\lambda)} \subset N^{(\alpha,\mu)}$. Это включение имеет место независимо от того, выполнены ли условия $\lambda, \mu \leqslant 1$, $\lambda, \mu \leqslant \alpha$. Кроме того, ядро класса $N^{(\alpha)}$ принадлежит также классу $N^{(\alpha,\lambda)}$, если $\partial K/\partial x_i \in N^{(\alpha-1)}$ или если

$$K(x, y) = [z(x) - z(y)]\, K_0(x, y),$$

$$z \in C^{(0,\alpha)}, \quad K_0 \in N^{(0)}, \quad \frac{\partial K_0}{\partial x_i} \in N^{(-1)}.$$

Будем называть *композицией* двух ядер K и K' в T или на $\mathfrak{F}T$ интегралы

$$U(x, y) = \int_T K(x, t)\, K'(t, y)\, dt,$$

$$V(x, y) = \int_{\mathfrak{F}T} K(x, t)\, K'(t, y)\, d_t\sigma$$

соответственно.

Конечно, такие интегралы имеют смысл только при определенных предположениях относительно K и K'. Известны следующие две классические теоремы:

11, I. *Если* $K \in N^{(\alpha)}$, $K' \in N^{(\beta)}$ *при некоторых* $\alpha, \beta > 0$, *то* $U \in N^{(\alpha+\beta)}$.

11, II. *Если* $K \in N^{(\alpha)}$, $K' \in N^{(\beta)}$ *при некоторых* $\alpha, \beta > 1$, *то* $V \in N^{(\alpha+\beta-1)}$.

Жиро[2]) доказал следующие теоремы:

11, III. *Если* $K \in N^{(\alpha,\lambda)}$, $K' \in N^{(\beta)}$ *при некоторых* $\alpha, \beta > 0$, *то* $U \in N^{(\alpha+\beta,\mu)}$, *где* $\mu \leqslant \lambda$, $\mu < \alpha$, *если* $\alpha + \beta \leqslant m$; $\mu \leqslant \lambda$, $\mu < \alpha + \beta - m$, *если* $\alpha + \beta > m$ *и* $\beta \leqslant m$; $\mu \leqslant \lambda$, $\mu < \alpha$, *если* $\beta > m$.

11, IV. *Если* $K \in N^{(\alpha,\lambda)}$, $K' \in N^{(\beta)}$ *при некоторых* $\alpha, \beta > 1$, *то* $V \in N^{(\alpha+\beta-1,\mu)}$, *где* $\mu \leqslant \lambda$, $\mu < \alpha - 1$, *если* $\alpha + \beta \leqslant m + 1$; $\mu \leqslant \lambda$, $\mu < \alpha + \beta - m - 1$, *если* $\alpha + \beta > m + 1$ *и* $\beta \leqslant m$; $\mu \leqslant \lambda$, $\mu < \alpha - 1$, *если* $\beta > m$.

12. Функции, представленные интегралами. В этом пункте мы займемся функциями типа

$$u(x) = \int_T K(x, y)\, z(y)\, dy, \qquad v(x) = \int_{\mathfrak{F}T} K(x, y)\, \zeta(y)\, d_y\sigma.$$

Мы будем изучать их при различных предположениях относительно функций z и ζ, которые заданы на T и $\mathfrak{F}T$ соответственно.

---

[1]) См. Жиро [27], гл. I, п. 1.

[2]) Там же, п. 2.

В случае, когда z или ζ ограничены, результаты, о которых мы будем говорить, изложены в классическом мемуаре Э. Э. Леви [1] и в ряде работ Жиро [1, 2, 4, 5, 15, 27], в которых он занимался, между прочим, и этими вопросами. То, что относится к случаю, когда z или ζ предполагаются только суммируемыми, можно рассматривать как простое обобщение результатов, которые в частных случаях получили разные авторы (Америо [3], Эванс и Майлз[1]; Фикера [4, 7, 8], Фридрихс[2])).

Легко доказать следующее предложение:

12, I. *Если* $z\,[\zeta] \in L^{(\infty)}$ *в* T [на $\mathfrak{F}T$] *и если* $K \in N^{(\alpha)}$ *при некотором* $\alpha > 0\,[\alpha > 1]$, *то* $u\,[v] \in C^{(0)}$ *в* T.

В качестве непосредственного следствия теоремы 11, III получаем также:

12, II. *Если* $z\,[\zeta] \in L^{(\infty)}$ *в* T [*на* $\mathfrak{F}T$] *и если* $K \in N^{(\alpha,\,\lambda)}$ *при некотором* $\alpha > 0\,[\alpha > 1]$, *то* $u\,[v] \in C^{(0,\,\mu)}$ *в* T, *где* $\mu \leqslant \lambda$, $\mu < \alpha\,[\mu < \alpha - 1]$.

Перейдем теперь к изучению свойств функций u и v в том случае, когда z и ζ предполагаются не ограниченными, а только суммируемыми в T и на $\mathfrak{F}T$ соответственно.

Так как, в силу теоремы 12, I, интеграл $\int\limits_T |K(x,\ y)|\,dx$ есть непрерывная функция от y, если только $K \in N^{(\alpha)}$, где $\alpha > 0$, то $|z(y)| \int\limits_T |K(x, y)|\,dx$, как функция от y, суммируема в T. Тогда, согласно известной теореме Тонелли[3]), функция $|K(x,\ y)\,z(y)|$ суммируема в замкнутой области $T^{(2)}$ пространства S_{2m}, которая образована парами точек $(x,\ y)$, где x и y принадлежат T. По теореме Фубини, из этого следует, что функция $\int\limits_T K(x,\ y)\,z(y)\,dy$ определена почти для всех x из T и суммируема в T. Справедлива следующая теорема, которая доказывается аналогичными рассуждениями:

12, III. *Если* $z\,[\zeta] \in L^{(1)}$ *в* T [*на* $\mathfrak{F}T$] *и если* $K \in N^{(\alpha)}$ *при некотором* $\alpha > 0$, *то* $u\,[v] \in L^{(1)}$ *в* T, *причем функция* u *определена*

---

[1]) Evans G. C., Miles E. R. C., Potential of general masses in single and double layers. The relative boundary value problems, Amer. J. Math., 53 (1931), 493—516.

Указания на предыдущие работы этих авторов есть в статьях Эванса (Evans G. C., Complements of potential theory, Amer. J. Math., 54 (1932), 213—234; 55 (1933), 29—49; 57 (1935), 623—626).

[2]) Friedrichs K. O., A theorem of Lichtenstein, Duke Math. J., 14 (1947), 67—82.

[3]) См. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной Гостехтеориздат, М.—Л., 1950, стр. 302, теорема 2.—*Прим. ред.*

почти всюду в T [*функция* v *непрерывна в* $T-\mathfrak{F}T$]. *Если* $\alpha > 1$, *то функция и* [v] *определена также на* $\mathfrak{F}T$, *за исключением множества нулевой поверхностной меры, и суммируема на* $\mathfrak{F}T$.

Из этой теоремы и теорем Фубини и Тонелли непосредственно следует теорема:

12, IV. Если $z \in L^{(1)}$ *в* T, $\zeta \in L^{(1)}$ *на* $\mathfrak{F}T$, $K \in N^{(\alpha)}$, $K' \in N^{(\beta)}$ *при некоторых* α, $\beta > 0$, *то почти для каждого* x *из* T

$$\int\limits_T K'(x,t)\; u(t)\, dt = \int\limits_T z(y)\, dy \int\limits_T K'(x,\, t)\, K(t,\, y)\, dt,$$

а для $x \in T-\mathfrak{F}T$

$$\int\limits_T K'(x,\, t)\, v(t)\, dt = \int\limits_{\mathfrak{F}T} \zeta(y)\, d_y\sigma \int\limits_T K'(x,\, t)\, K(t,\, y)\, dt.$$

Первая из этих формул справедлива всюду в T, *если* $z \in L^{(\infty)}$, *вторая справедлива всюду в* T, *если* $\zeta \in L^{(\infty)}$, $v \in L^{(\infty)}$, $\alpha+\beta > 1$. *Если* $\alpha > 1$, $\beta > 0$, *то для* $x \in T-\mathfrak{F}T$

$$\int\limits_{\mathfrak{F}T} K'(x,\, t)\, u(t)\, d_t\sigma = \int\limits_T z(y)\, dy \int\limits_{\mathfrak{F}T} K'(x,\, t)\, K(t,\, y)\, d_t\sigma,$$

$$\int\limits_{\mathfrak{F}T} K'(x,\, t)\, v(t)\, d_t\sigma = \int\limits_{\mathfrak{F}T} \zeta(y)\, d_y\sigma \int\limits_{\mathfrak{F}T} K'(x,\, t)\, K(t,\, y)\, d_t\sigma.$$

Если α, $\beta > 1$, *то последние формулы справедливы также и для* $x \in \mathfrak{F}T$, *за исключением множества точек нулевой поверхностной меры; они справедливы всюду, если* $z \in L^{(\infty)}$, $\zeta \in L^{(\infty)}$.

Установим некоторые дальнейшие свойства функций u и v в случае, когда функции z и ζ предполагаются суммируемыми с квадратом.

Имеет место теорема:

12, V. *Если* $z\,[\zeta] \in L^{(2)}$ *в* T [*на* $\mathfrak{F}T$] *и если* $K \in N^{(\alpha)}$ *при некотором* $\alpha > 0$ [$\alpha > 1$], *то* $u\,[v] \in L^{(2)}$ *в* T [*на* $\mathfrak{F}T$]. *Если* $K \in N^{(\alpha,\,\lambda)}$, *где* $\alpha > \frac{m}{2} + \lambda \left[\alpha > \frac{m+1}{2} + \lambda\right]$, *то* $u\,[v] \in C^{(0,\lambda)}$ *в* T.

Докажем теорему для функции u. Положим

$$K_1(x,\, y) = \int\limits_T |\, K(t,\, x)\, K(t,\, y)\,|\, dt,\quad K_p(x,\, y) = \int\limits_T K_{p-1}(t,\, x)\; K_{p-1}(t,\, y)\, dt$$

и выберем n так, чтобы было $2^n \alpha > m$. Тогда ядро K_n непрерывно, в силу теоремы 11, I, и поэтому функция $K_n(x,\, y)\,|\, z(x)\, z(y)\,|$ суммируема в $T^{(2)}$. Согласно теореме Тонелли, из этого следует, что функция $K_{n-1}(t,\, x)\, K_{n-1}(t,\, y)\,|\, z(x)\, z(y)\,|$ суммируема в замкнутой области $T^{(3)}$ пространства S_{3m}, которая состоит из троек точек

(t, x, y), где t, x и y принадлежат T. В силу теоремы Фубини, отсюда вытекает, что функция $\int\limits_T K_{n-1}(t, y)\,|z(y)|\,dy$ суммируема в T с квадратом и, следовательно, функция $K_{n-1}(t, y)\,|z(t)\,z(y)|$ суммируема в $T^{(2)}$. Повторяя это рассуждение, легко прийти к утверждению доказываемой теоремы. Последняя часть теоремы есть следствие неравенства Шварца.

Теперь легко доказать следующее:

12, VI. *Если* $z\,[\zeta] \in L^{(2)}$ *в* T [*на* $\mathfrak{F}T$] *и* $K \in N^{(\alpha)}$ *при некотором* $\alpha > 1$ [$\alpha > 1/2$], *то* $u\,[v] \in L^{(2)}$ *на* $\mathfrak{F}T$ [*в* T].

Если $\alpha > 1/2$, *то можно утверждать, что* $u \in L^{(1)}$ *на* $\mathfrak{F}T$.

Чтобы доказать эту теорему, например, для функции $v(x)$, достаточно заметить, что функция $\int\limits_{\mathfrak{F}T} K_1(x, y)\,|\zeta(y)|\,d_y\sigma$ суммируема с квадратом на $\mathfrak{F}T$ в силу теоремы 12, V, так как $K_1 \in N^{(\beta)}$ для $\alpha > 1/2$, где $\beta = 2\alpha > 1$. Теорема доказывается теперь применением теорем Тонелли и Фубини.

Заключим рассмотрение этих вопросов следующим замечанием, которое неявно содержится в доказательствах некоторых предыдущих теорем:

12, VII. *В предположениях теорем* 12, III, 12, V, 12, VI *существует такая константа* M, *что при* $p = 1$ *или* 2

$$\int\limits_T |u|^p\,dx \leqslant M \int\limits_T |z|^p\,dx \quad \textit{для } \alpha > 0,$$

$$\int\limits_{\mathfrak{F}T} |u|^p\,d\sigma \leqslant M \int\limits_T |z|^p\,dx \quad \textit{для } \alpha > 1.$$

Аналогичные неравенства выполнены для функций v *и* ζ.

Мы закончим этот пункт изучением некоторых свойств дифференцируемости функций u и v. Почти очевидна следующая теорема:

12, VIII. *Если* $z \in L^{(\infty)}$, $K \in N^{(\alpha)}$, $\partial K/\partial x_i \in N^{(\alpha-1)}$ *при некотором* $\alpha > 1$, *то* $u \in C^{(1)}$ *и*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int\limits_T \frac{\partial K(x, y)}{\partial x_i}\,z(y)\,dy. \tag{12.1}$$

Действительно, если Δx_i есть произвольное приращение переменной x_i и $\Delta_i u$ — соответствующее приращение функции u, то выполнено равенство

$$\Delta_i u = \int\limits_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} dx_i \int\limits_T \frac{\partial K(x, y)}{\partial x_i}\,z(y)\,dy, \tag{12.2}$$

из которого сразу следует соотношение (12.1).

Справедлива также следующая теорема:

12, IX. *Если* $z \in L^{(1)}$, $K \in N^{(\alpha)}$, $\partial K/\partial x_i \in N^{(\alpha-1)}$ *при некотором* $\alpha > 1$, *то функция* u *абсолютно непрерывна по переменной* x_i *почти для всех значений* $(m-1)$ *переменных* $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$. *При таких фиксированных значениях* $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$, *что функция* u *абсолютно непрерывна, формула* (12.1) *верна почти для всех* x_i *и функция* $\partial u/\partial x_i$ *суммируема в* T. *Если* $z \in L^{(2)}$, *то и* $\partial u/\partial x_i \in L^{(2)}$.

Действительно, в предположениях теоремы функция, находящаяся под знаком простого интеграла в формуле (12.2), суммируема в T, в силу теоремы 12, III. Согласно теореме Фубини, из этого следует, что формула (12.2) верна для почти всех точек $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$. Отсюда вытекает утверждение теоремы, причем свойства суммируемости функции $\partial u/\partial x_i$ являются очевидными следствиями теорем 12, III и 12, V.

Заметим, что если бы функция u была непрерывна, то, согласно теореме 12, IX, она была бы абсолютно непрерывна по Тонелли[1]). Если не предполагать непрерывности функции u, то можно только утверждать, что она принадлежит классу функций, который подробно изучали с различных точек зрения Морри [2] и Стампаккья [2].

Из цитированной работы Морри и одной из работ Миранды [8] можно вывести результаты, касающиеся свойств функции u, в предположении, что функция $z(y)$ обладает следующим свойством: для некоторого числа λ величина

$$\rho^{-\lambda} \int\limits_{T \cdot \Gamma(x, \rho)} |z(y)|^p \, dy$$

ограничена константой, не зависящей от x и ρ. Будем говорить, что функция z, обладающая таким свойством, принадлежит классу $L^{(p,\lambda)}$. Мы ограничимся тем, что сформулируем следующую теорему, которая получается путем обобщения результатов вышеупомянутых авторов, касающихся объемных потенциалов:

12, X. *Если* $z \in L^{(1,\lambda)}$ *и* $K \in N^{(\alpha,\lambda)}$, *где* $\alpha > 0$, $\alpha + \lambda - m > 0$, *то* $u \in C^{(0,\alpha+\lambda-m)}$. *Если, кроме того,* $\partial K/\partial x_i \in N^{(\alpha-1,\lambda)}$, *где* $\alpha > 1$, $\alpha + \lambda - m > 1$, *то* $u \in C^{(1,\alpha+\lambda-m-1)}$.

Наконец, относительно производных функции $v(x)$ заметим, что, в силу теорем 12, III и 12, VI, справедливо следующее утверждение:

12, XI. *Пусть* $K \in N^{(\alpha)}$, $\partial K/\partial x_i \in N^{(\alpha-1)}$. *Если* $\zeta \in L^{(1)}$ *и* $\alpha > 1$, *то* $\partial v/\partial x_i \in L^{(1)}$ *в* T; *если* $\zeta \in L^{(2)}$ *и* $\alpha > {}^3/_2$, *то* $\partial v/\partial x_i \in L^{(2)}$ *в* T.

---

[1]) См. примечание на стр. 21. — *Прим. ред.*

В обоих случаях функции $\partial v/\partial x_i$ непрерывны в $T - \mathfrak{F}T$ и определены формулами

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \int\limits_{\mathfrak{F}T} \frac{\partial K(x, y)}{\partial x_i} \zeta(y)\, d_y\sigma.$$

13. Обобщенные объемные потенциалы. Пусть $L(x, y)$ — функция Леви, заданная в области C, в которой функции a_{ik} принадлежат классу $C^{(0,\lambda)}$, а T — ограниченная замкнутая область класса $A^{(1,\lambda)}$, содержащаяся в C. Назовем *(обобщенным) объемным потенциалом* с плотностью z функцию

$$u(x) = \int\limits_T L(x, y)\, z(y)\, dy. \tag{13.1}$$

Так как, в силу формул (8.3) и (8.4), $L \in N^{(2)}$, $\partial L/\partial x_i \in N^{(1,\mu)}$ при любом $\mu < 1$, то в T свойства функции u и ее производных легко получаются как частные случаи теорем предыдущего пункта, а в области $C - T$ аналогичные свойства доказываются элементарно. Так, например, в силу теорем 12, I, 12, VIII и 12, II (последняя теорема применяется к интегралам, выражающим производные функции u), справедливо следующее утверждение:

13, I. *Если $z \in L^{(\infty)}$, то $u \in C^{(1,\mu)}$ в C при любом $\mu < 1$ и выполняется равенство*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int\limits_T \frac{\partial L(x, y)}{\partial x_i} z(y)\, dy. \tag{13.2}$$

Заметим также, что если $z \in L^{(\infty)}$, то для $x \in C - T$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} = \int\limits_T \frac{\partial^2 L(x, y)}{\partial x_i\, \partial x_k} z(y)\, dy. \tag{13.3}$$

Относительно вторых производных функции u в $T - \mathfrak{F}T$ имеет место следующая теорема, которая обобщает классическое свойство обычных потенциалов:

13, II. *Если $z \in C^{(0,\mu)}$, то $u \in C^{(2)}$ в $T - \mathfrak{F}T$ и для $x \in T - \mathfrak{F}T$*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} = -\frac{1}{m} A_{ik}(x)\, z(x) + \int\limits_T^{*} \frac{\partial^2 L(x, y)}{\partial x_i\, \partial x_k} z(y)\, dy, \tag{13.4}$$

где интеграл, отмеченный звездочкой, понимается в смысле главного значения, т. е. как предел интеграла по $T - I(x, \rho)$ при $\rho \to 0$. При дополнительном предположении, что производные второго порядка функции $L - H$ принадлежат классу $N^{(\lambda,\mu)}$, где $\mu < \lambda$, $u \in C^{(2,\mu)}$ в области $T - \mathfrak{F}T$.

Положим $u = u_1 + u_2$, где через u_1 и u_2 обозначены интегралы вида (13.1), которые получаются, если заменить L функциями H и $L - H$ соответственно.

Так как, по предположению,

$$L - H \in N^{(\lambda+2)}, \quad \frac{\partial (L-H)}{\partial x_i} \in N^{(\lambda+1)}, \quad \frac{\partial^2 (L-H)}{\partial x_i \partial x_k} \in N^{(\lambda)},$$

то функция u_2 имеет все свойства, которыми должна обладать функция u, и ее вторые производные вычисляются двукратным дифференцированием под знаком интеграла. Поэтому можно ограничиться изучением функции u_1.

Придавая $I(x, \rho)$ тот же смысл, что в п. 9, положим

$$\varphi_i(x, \rho) = \int\limits_{T - I(x, \rho)} \frac{\partial H(x, y)}{\partial x_i} z(y)\, dy.$$

Имеем

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = \int\limits_{T-I(x,\rho)} \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x_i \partial x_k} z(y)\, dy - \int\limits_{\mathfrak{S}I(x,\rho)} \frac{\partial H(x, y)}{\partial x_i} z(y) X_k(y)\, d_y\sigma, \tag{13.5}$$

где через $X_k(y)$ обозначены направляющие косинусы внешней нормали к $\mathfrak{S}I(x, \rho)$. Интеграл, взятый по $\mathfrak{S}I(x, \rho)$, может быть записан в виде

$$\int\limits_{\mathfrak{S}I(x,\rho)} \left[\frac{\partial H(x, y)}{\partial x_i} z(y) + \frac{\partial H(y, x)}{\partial y_i} z(x)\right] X_k(y)\, d_y\sigma -$$
$$- z(x) \int\limits_{\mathfrak{S}I(x,\rho)} \frac{\partial H(y, x)}{\partial y_i} X_k(y)\, d_y\sigma.$$

Первый из этих интегралов стремится к нулю вместе с ρ равномерно по x в каждой замкнутой области, лежащей внутри T, так как подинтегральная функция есть $O(\rho^{\lambda+1-m})$. Второй интеграл не зависит от ρ и равен $\dfrac{z(x) A_{ik}(x)}{m}$.

Так как $\lim\limits_{\rho \to 0} \varphi_i = \partial u / \partial x_i$, мы докажем равенство (13.4), если покажем, что первый интеграл в правой части формулы (13.5) стремится к определенному пределу при $\rho \to 0$ и стремление к пределу равномерно по x в любой замкнутой области, лежащей внутри T. Этот интеграл можно записать в виде

$$\int\limits_{T-I(x,\rho)} \left[\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x_i \partial x_k} z(y) - \frac{\partial^2 H(y, x)}{\partial y_i \partial y_k} z(x)\right] dy +$$
$$+ z(x) \int\limits_{\mathfrak{S}T} \frac{\partial H(y, x)}{\partial y_i} X_k(y)\, d_y\sigma + \frac{1}{m} A_{ik}(x) z(x).$$

Вышеупомянутое свойство следует из того, что в первом интеграле подинтегральная функция есть $O(\overline{xy}^{\lambda - m})$.

Из доказательства теоремы 13, II следует также формула

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i\,\partial x_k}=\int\limits_T\left[\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x_i\,\partial x_k}z(y)-\frac{\partial^2 H(y,x)}{\partial y_i\,\partial y_k}z(x)\right]dy+$$

$$+z(x)\int\limits_{\mathfrak{F}T}\frac{\partial H(y,x)}{\partial y_i}X_k(y)\,d_y\sigma. \qquad (13.6)$$

Из этой формулы легко вытекает, что $u_1 \in C^{(2,\mu)}$ в $T-\mathfrak{F}T$ при $\mu<\lambda$, так как оба интеграла в правой части в $T-\mathfrak{F}T$ принадлежат классу $C^{(0,\mu)}$. Это почти очевидно для интеграла по $\mathfrak{F}T$, а к интегралу по T нужно применить теорему 12, II, предварительно проверив, что подинтегральная функция есть ядро класса $N^{(\lambda,\mu)}$.

Таким образом, теорема полностью доказана. Заметим, что в случае $L=H$ можно установить справедливость теоремы также и для $\mu=\lambda<1$; в одном важном частном случае можно доказать, что $u\in C^{(2,\lambda)}$ во всей замкнутой области T. Доказательство можно найти в работе Жиро [15] [1].

Важным следствием формул (13.3) и (13.4) является следующее равенство:

$$\mathfrak{M}u=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_T \mathfrak{M}_x L(x,y)\,z(y)\,dy & \text{для } x\in C-T,\\ \displaystyle -z(x)+\int\limits_T \mathfrak{M}_x L(x,y)\,z(y)\,dy & \text{для } x\in T-\mathfrak{F}T,\end{cases} \qquad (13.7)$$

которое сводится к хорошо известной формуле Пуассона в случае обычных потенциалов. Подинтегральные функции в формуле (13.7) суммируемы в силу (8.5).

Заметим, наконец, что при $C\equiv T-\mathfrak{F}T$ все свойства объемных потенциалов для $x\in T$ сохраняются при условии, что функции a_{ik} удовлетворяют в T условию Гёльдера с показателем λ, функции L и $\partial L/\partial x_i$ непрерывны в $T-y$ и для них справедливы первые две из оценок (8.4), а функции $\partial^2 L/\partial x_i\,\partial x_k$ суммируемы по y в $T-I(y,\rho)$.

Посмотрим теперь, что можно сказать об объемном потенциале, когда плотность не предполагается ограниченной. Из теорем 12, IX и 12, V следует теорема

13, III. *Если* $z\in L^{(p)}$ *при* $p=1$ *или* 2, *то функция* u *абсолютно непрерывна по любой координате* x_i *почти для всех точек* $(x_1,\ldots, x_{i-1}, x_{i+1},\ldots,x_m)$ *и* $\partial u/\partial x_i\in L^{(p)}$. *Для* $p=2$, $m=2$ $[m=3]$ *функция* $u\in C^{(0,\mu)}$ *при любом* $\mu<1$ $[<{}^1/_2]$.

---

[1] Гл. IV, п. 2 и гл. XVI.

Гораздо менее очевидно доказательство следующей теоремы, которая для обычных потенциалов доказана Лихтенштейном при $m=2$ и Фридрихсом в общем случае [1]:

13, IV. *Если $z \in L^{(2)}$, то функции $\partial u/\partial x_k$ также абсолютно непрерывны по любой координате x_i почти для всех точек $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ и $\partial^2 u/\partial x_i \partial x_k \in L^{(2)}$.*

Пусть замкнутая область T содержится внутри замкнутой области T_1 класса $A^{(2)}$ и $T_1 \subset C$. Пусть последовательность многочленов $\{z_n(x)\}$ сходится в среднем в T_1 к функции, равной нулю в $T_1 - T$ и равной z в T. Положим для $x \in T_1$

$$u_n(x) = \int\limits_{T_1} L(x, y)\, z_n(y)\, dy.$$

Функции $u_n(x)$ и $\partial u_n/\partial x_i$ сходятся в среднем в T к u и $\partial u/\partial x_i$. Это следует из теорем 13, III и 12, VII. С другой стороны, из формулы (13.7) и теоремы 12, VII вытекает существование такой постоянной M, что [2]

$$\int\limits_{T_1} [\mathfrak{M} u_n]^2\, dx \leqslant M \int\limits_{T} z^2\, dx.$$

В силу результата Каччопполи [11], о котором мы будем говорить в дальнейшем (гл. V, п. 37), из последнего неравенства следует оценка вида

$$\sum_{i,k=1}^{m} \int\limits_{T} \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i\, \partial x_k}\right)^2 dx \leqslant M' \int\limits_{T} z^2\, dx,$$

а отсюда, по теореме Стампаккья [2], вытекает утверждение теоремы.

По вопросам, изложенным в данном пункте, можно смотреть работы Леви, Жиро и Фридрихса, упомянутые в п. 12, и работу [10] Жевре.

14. Обобщенные потенциалы простого слоя.

Пусть функция $L(x, y)$ и замкнутая область T удовлетворяют тем же условиям, что в п. 13. Мы будем называть *(обобщенным) потенциалом простого слоя с плотностью* ζ функцию

$$v(x) = \int\limits_{\mathfrak{F}T} L(x, y)\, \zeta(y)\, d_y\sigma. \tag{14.1}$$

---

[1] Friedrichs, A theorem of Lichtenstein, Duke Math. J., 14 (1947), 67—82.

[2] Предполагается, что $\int\limits_T z^2\, dx \neq 0$. — *Прим. ред.*

Если $\zeta \in L^{(1)}$, то функция v непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядка в $T - \mathfrak{F}T$ и в $C - T$. Будем обозначать через T_1 замкнутую область, содержащую T или совпадающую с ней и содержащуюся в C. Справедливы следующие теоремы:

14,I. *Если* $\zeta \in L^{(p)}$ *на* $\mathfrak{F}T$ *при* $p = 1$ *или* 2, *то как в* T_1, *так и на* $\mathfrak{F}T$ *имеем* $v \in L^{(p)}$. *Почти для всякого* $x_0 \in \mathfrak{F}T$

$$\lim_{x \to x_0} v(x) = v(x_0), \tag{14.2}$$

если только x *стремится к* x_0 *по такому направлению* l, *что* $\cos(ln) > 0$. *Для* $p = 2$, $m = 2$ $v \in C^{(0,\mu)}$ *при* $\mu < {}^1/_2$.

Первое утверждение теоремы есть непосредственное следствие теорем 12, III, 12, V и 12, VI. Чтобы доказать формулу (14.2), достаточно заметить, что если для точки $x_0 \in \mathfrak{F}T$ функция $L(x_0, y)\zeta(y) \in L^{(1)}$, то при $x \in l$ и достаточно малом $\overline{xx_0}$ справедлива оценка вида

$$|L(x, y)\zeta(y)| \leqslant \frac{M}{\cos^{m-2}(ln)} |L(x_0, y)\zeta(y)|. \tag{14.3}$$

Из этой оценки следует возможность перейти к пределу под знаком интеграла в формуле (14.1). Формулу (14.3) можно получить, учитывая, что

$$\left|\frac{L(x, y)}{L(x_0, y)}\right| < M' \left(\frac{\overline{x_0 y}}{\overline{xy}}\right)^{m-2},$$

где M' — некоторое положительное число, и что T принадлежит классу $A^{(1,\lambda)}$. Последнее утверждение доказываемой теоремы есть следствие теоремы 12, V.

Так как производные $\partial v/\partial x_i$ можно вычислять посредством дифференцирования под знаком интеграла, справедливо такое следствие теорем 12, III и 12, VI:

14, II. *Если* $\zeta \in L^{(p)}$ *при* $p = 1$ *или* 2, *то* $\partial v/\partial x_i \in L^{(p)}$ *в* T_1.

Из теоремы 12, II следует теорема

14, III. *Если* $\zeta \in L^{(\infty)}$, *то* $v \in C^{(0,\mu)}$ *в* C *при любом* $\mu < 1$.

Перейдем теперь к изучению поведения производных функции v на $\mathfrak{F}T$. Для этого, выбрав произвольным образом точку x_0 на $\mathfrak{F}T$, обозначим через $J(x_0, \rho)$ зависящую от ρ окрестность точки x_0 на $\mathfrak{F}T$, проекция которой на касающуюся $\mathfrak{F}T$ в точке x_0 гиперплоскость содержится в сфере с центром x_0 и радиусом $k\rho$ и содержит сферу с центром x_0 и радиусом $k'\rho$, где k и k' — некоторые постоянные. Докажем предварительно следующую лемму:

Лемма. *Пусть ядро* $K(x, y)$ *непрерывно при* $x, y \in C$ *и* $x \neq y$ *и обладает следующим свойством: для некоторого фиксирован-*

ного x_0 *на* $\mathfrak{F}T$ *и любой выходящей из точки* x_0 *прямой* l, *для которой* $\cos(ln)\neq 0$, *существует такая окрестность точки* x_0, *что для точек* x *и* y, *принадлежащих этой окрестности, выполняется оценка* $K=O(\overline{xx_0}^{\alpha}\cdot\overline{xy}^{-\beta})$ *при некоторых* α, $\beta\geqslant 0$, *если* $x\in l$, $y\in\mathfrak{F}T$. *Если* $\zeta\in L^{(\infty)}$ *и* $\alpha>0$, $\alpha+m>\beta+1$, *то*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in l}}\int_{\mathfrak{F}T} K(x,\ y)\,\zeta(y)\,d_y\sigma=\int_{\mathfrak{F}T} K(x_0\ y)\,\zeta(y)\,d_y\sigma.$$

Результат остается справедливым, если $\zeta\in L^{(1)}$, *при условии, что* $\alpha>0$, $\alpha+m>\beta+1$ *и*

$$\varlimsup_{\rho\to 0}\rho^{1-m}\int_{J(x_0,\ \rho)}|\zeta(y)|\,d_y\sigma<\infty, \tag{14.4}$$

или же если $\alpha>0$, $\alpha+m\geqslant\beta+1$ *и*

$$\lim_{\rho\to 0}\rho^{1-m}\int_{J(x_0,\ \rho)}|\zeta(y)|\,d_y\sigma=0. \tag{14.5}$$

Наконец, если $\zeta(x_0)=0$, $\zeta\in C^{(0,\,\mu)}$, *то результат справедлив также и для* $\alpha\geqslant 0$, $\alpha+m+\mu>\beta+1$.

Очевидно, для доказательства леммы достаточно показать, что интеграл

$$\int_{J(x_0,\ \rho)}|K(x,\ y)\,\zeta(y)|\,d_y\sigma \tag{14.6}$$

стремится к нулю при стремлении к нулю ρ и $\overline{xx_0}$. Пусть y' — проекция точки y на гиперплоскость, касательную к $\mathfrak{F}T$ в точке x_0. Если положить $\overline{xx_0}=\delta$, $\overline{x_0y'}=t$, то можно проверить, что в случае, когда T принадлежит классу $A^{(1,\,\lambda)}$, $x\in l$ и $y\in\mathfrak{F}T$, отношение $\overline{xy}/\sqrt{t^2+\delta^2}$ ограничено снизу положительным числом. Из этого следует, что если $\zeta\in L^{(\infty)}$, то интеграл (14.6) мажорируется интегралом

$$M\int_0^{k\rho}\frac{\delta^{\alpha}t^{m-2}}{(t^2+\delta^2)^{\beta/2}}\,dt,$$

где M — соответствующим образом подобранная постоянная; этот интеграл стремится к нулю вместе с δ, если $\alpha+m>\beta+1$. Таким образом, для первого случая лемма доказана. Если же $\zeta\in L^{(1)}$, то, обозначив через $S(x_0,\ \rho)$ часть $\mathfrak{F}T$, которая проектируется на касательную плоскость в сферу с центром x_0 и радиусом ρ, положим

$$Z(\rho)=\int_{S(x_0,\ \rho)}|\zeta(y)|\,d\sigma.$$

Мы предполагаем, что для $\rho < \rho_\varepsilon$ выполнено неравенство $Z < \varepsilon\rho^{m-1}$, где ε конечно, когда выполняется условие (14.4), и ε сколь угодно мало, когда выполняется условие (14.5). Тогда интеграл (14.6) мажорируется интегралом

$$M\int_0^{k\rho}\frac{\delta^\alpha Z'(t)}{(t^2+\delta^2)^{\beta/2}}\,dt.$$

Путем интегрирования по частям можно установить, что этот интеграл есть $O[\varepsilon(\delta^\gamma-\delta^\alpha\ln\delta)]$, где γ — минимум чисел α и $\alpha+m-\beta-1$. Таким образом, лемма доказана для второго и третьего случая. Аналогично проводится доказательство в четвертом случае; надо только учесть, что $Z=O(\rho^{\mu+m-1})$.

Рассмотрим теперь точку x_0 на $\mathfrak{F}T$ и две прямые l и l_1, выходящие из x_0, для которых $\cos(ln)\neq 0$, $\cos(l_1n)\neq 0$. Вычислим dv/dl для $x\in l_1$; мы хотим выяснить, имеет ли такая производная при $x\to x_0$ в общем случае два различных предела, когда x стремится к x_0 один раз по $l_1\cdot T$, другой раз по $l_1\cdot(C-T)$. Эти пределы оказываются не зависящими от l_1 и будут обозначаться соответственно через $\left(\frac{dv}{dl}\right)^-$ и $\left(\frac{dv}{dl}\right)^+$. Если $l\equiv\nu$, то справедлива следующая теорема:

14,IV. *Если* $\zeta\in L^{(1)}$, *то почти для всех точек* x_0 *на* $\mathfrak{F}T$

$$\left(\frac{dv}{d\nu}\right)^\pm=\mp\frac{\zeta(x_0)}{2a(x_0)}+\int_{\mathfrak{F}T}\frac{dL(x_0,y)}{d\nu}\zeta(y)\,d_y\sigma, \qquad (14.7)$$

где $a(x)$ — *функция, определенная формулой* (4.3). *Если* $\zeta\in C^{(0)}$, *то формула* (14.7) *верна всюду на* $\mathfrak{F}T$. *При первом предположении правая часть формулы* (14.7) *суммируема на* $\mathfrak{F}T$, *при втором предположении она непрерывна. Интеграл в правой части формулы принадлежит классу* $L^{(2)}$, *если* $\zeta\in L^{(2)}$, *и классу* $C^{(0,\mu)}$, *если* $\zeta\in C^{(0)}$ *и* $\mu<\lambda$.

Легко проверить, что для $x\in l_1$ и $y\in\mathfrak{F}T$

$$\frac{dL(x,y)}{d\nu}=A(x,y)+B(x,y),$$

где $B(x,y)\in N^{(1+\lambda)}$ и

$$a(x_0)A(x,y)=-\frac{1}{\omega_m\sqrt{A(x_0)}}\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}X_i(y)(x_i-y_i)}{\left[\sum\limits_{i,k=1}^{m}A_{ik}(x_0)(x_i-y_i)(x_k-y_k)\right]^{m/2}}.$$

Для определенности предположим, что $m>2$, и рассмотрим функцию

$$H_0(x,y)=\frac{1}{(m-2)\,\omega_m\sqrt{A(x_0)}}\left[\sum_{i,k=1}^{m}A_{ik}(x_0)(x_i-y_i)(x_k-y_k)\right]^{\frac{2-m}{2}}.$$

Как функция точки y, H_0 есть фундаментальное решение уравнения $\mathfrak{M}_0 u = 0$, где $\mathfrak{M}_0 = \sum a_{ik}(x_0)\,\partial^2/\partial x_i \partial x_k$. Кроме того, если ν_0 — конормаль в точке y, связанная с оператором $\mathfrak{M}_0$, и a_0 — функция, аналогичная функции a, но построенная для оператора $\mathfrak{M}_0$, то $a(x_0)\,A(x, y) = -a_0(y)\,dH_0/d\nu_0$. Из формулы Стокса, примененной к функциям $u = 1$ и $L = H_0$, и из формулы Грина, примененной к функциям $u(y) = 1$, $v(y) = H_0(x, y)$, где $x \in C - T$, следует соотношение

$$\int_{\mathfrak{F}T} A(x, y)\,a(x_0)\,d_y\sigma = \theta; \tag{14.8}$$

здесь $\theta = 1$ для $x \in T - \mathfrak{F}T$ и $\theta = 0$ для $x \in C - T$. Возьмем на конормали к $\mathfrak{F}T$ в точке x_0 две точки x и x', симметричные относительно x_0. Можно установить, что

$$A(x, y) + A(x', y) = A_1(x, y) + A_2(x, y),$$

где

$$A_1 = O(\overline{xx_0}^2 \cdot \overline{xy}^{\lambda-1-m}), \qquad A_2 = O(\overline{xy}^{\lambda+1-m}).$$

Так как $A(x_0, y) = O(\overline{x_0y}^{\lambda+1-m})$, то, применяя лемму, получим

$$\lim_{x\to x_0} \int_{\mathfrak{F}T} \Big[A(x, y) + A(x', y)\Big]\,a(x_0)\,d_y\sigma = 2\int_{\mathfrak{F}T} A(x_0, y)\,a(x_0)\,d_y\sigma \tag{14.9}$$

и поэтому

$$\int_{\mathfrak{F}T} A(x_0 y)\,a(x_0)\,d_y\sigma = \frac{1}{2}. \tag{14.10}$$

Для каждой точки x_0, для которой выполнено условие

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^{1-m} \int_{J(x_0,\,\rho)} |\zeta(y) - \zeta(x_0)|\,d\sigma = 0, \tag{14.11}$$

можно получить равенство

$$\lim_{x\to x_0} \int_{\mathfrak{F}T} A(x, y)\,[\zeta(y) - \zeta(x_0)]\,d_y\sigma = \int_{\mathfrak{F}T} A(x_0, y)\,\zeta(y)\,d_y\sigma - \frac{\zeta(x_0)}{2a(x_0)},$$

если заметить, что $A = O(\overline{xx_0} \cdot \overline{xy}^{-m} + \overline{xy}^{\lambda+1-m})$ для $x \in l_1$, и применить лемму.

Формула (14.11) и формула

$$\lim_{x\to x_0} \int_{\mathfrak{F}T} B(x, y)\,\zeta(y)\,d_y\sigma = \int_{\mathfrak{F}T} B(x_0, y)\,\zeta(y)\,d_y\sigma$$

справедливы почти для всех x_0 на $\mathfrak{F}T$, если $\zeta \in L^{(1)}$, и для всех x_0 на $\mathfrak{F}T$, если $\zeta \in C^{(0)}$; поэтому из тождества

$$\frac{dv}{d\nu} = \frac{\theta\zeta(x_0)}{a(x_0)} + \int\limits_{\mathfrak{F}T} A(x, y)[\zeta(y) - \zeta(x_0)]d_y\sigma + \int\limits_{\mathfrak{F}T} B(x, y)\zeta(y)\,d_y\sigma$$

немедленно следует формула (14.7). Свойства суммируемости или непрерывности функций $(dv/d\nu)^{\pm}$ являются следствиями теорем 12, III 12, I и 12, V. Условие Гёльдера для интеграла в правой части формулы (14.7) будет следовать из теоремы 12, II, если установить предварительно, что $dL(x_0, y)/d\nu \in N^{(\lambda+1, \lambda)}$ для y, $x_0 \in \mathfrak{F}T$.

Перейдем теперь к случаю, когда направление l произвольно. Справедлива следующая теорема:

14, V. *Если* $\zeta \in C^{(0, \mu)}$, *то для любого* $x_0 \in \mathfrak{F}T$

$$\left(\frac{dv}{dl}\right)^{\pm} = \mp \frac{\zeta(x_0)}{2a^{(l)}(x_0)} + \int\limits_{\mathfrak{F}T}^{*} \frac{dL(x_0, y)}{dl}\zeta(y)\,d_y\sigma, \qquad (14.12)$$

где $a^{(l)}$ — *функция, определенная формулой* (4. 7), *а интеграл, отмеченный звездочкой, понимается в смысле главного значения, т. е. как предел интеграла, взятого по* $\mathfrak{F}T - I(x_0, \rho)$.

Общий случай рассмотрен в работе Жиро [27]; мы ограничимся доказательством теоремы в случае, когда T принадлежит классу $A^{(2)}$, а направляющие косинусы l — классу $C^{(1)}$.

При таких предположениях функции

$$\alpha_{0i} = a_0{}^{(l)} \cos(lx_i) - a_0 \cos(\nu_0 x_i)$$

принадлежат классу $C^{(1)}$; здесь a_0 и $a_0{}^{(l)}$ — функции, определенные формулами (4.3) и (4.7), относящиеся к оператору $\mathfrak{M}_0$.

Легко установить, что

$$\frac{dL(x, y)}{dl} = A^{(l)}(x, y) + B^{(l)}(x, y),$$

где $B^{(l)} = O(\overline{xy}^{\lambda+1-m})$ и

$$a^{(l)}(x_0)A^{(l)}(x, y) = a(x_0)A(x, y) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{0i}(y)\frac{\partial H_0}{\partial y_i}.$$

Путем преобразований, аналогичных тем, с помощью которых была доказана формула (6.7), легко получается равенство

$$\int\limits_{\mathfrak{F}T} A^{(l)}(x, y)\,a^{(l)}(x_0)\,d_y\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{F}T} A(x, y)\,a(x_0)\,d_y\sigma + \int\limits_{\mathfrak{F}T} H_0(x, y)\,b_0'(y)\,d_y\sigma =$$

$$= \theta + \int\limits_{\mathfrak{F}T} H_0(x, y)\,b_0'(y)\,d_y\sigma,$$

где $b'_0 = \Omega^{-1} \sum \frac{\partial \beta_{0i}}{\partial t_i}$, а функции β_{0i} связаны с α_{0i} так, как β_i связаны с α_i в п. 6.

Если через $I'(x_0, \rho)$ обозначить проекцию $\mathfrak{F}T \cdot I(x_0, \rho)$ на гиперплоскость, касательную к $\mathfrak{F}T$ в точке x_0, то аналогичным образом получим

$$\int\limits_{\mathfrak{F}T - I(x_0, \rho)} A^{(l)}(x_0, y)\, a^{(l)}(x_0)\, d_y\sigma = \int\limits_{\mathfrak{F}T - I(x_0, \rho)} A(x_0, y)\, a(x_0)\, d_y\sigma +$$

$$+ \int\limits_{\mathfrak{F}T - I(x_0, \rho)} H_0(x_0, y)\, b'_0(y)\, d_y\sigma +$$

$$+ \int\limits_{\mathfrak{F}I'(x_0, \rho)} H_0(x_0, y) \sum_{i=1}^{m-1} \beta_{0i} dt_{i+1} \ldots dt_{m-1} dt_1 \ldots dt_{i-1}.$$

Последний интеграл стремится к нулю вместе с ρ, так как H_0 постоянно на $\mathfrak{F}I'$; поэтому левая часть формулы имеет предел при $\rho \to 0$, а именно

$$\int\limits_{\mathfrak{F}T}^{*} A^{(l)}(x_0, y)\, a^{(l)}(x_0) d_y\sigma = \frac{1}{2} + \int\limits_{\mathfrak{F}T} H_0(x_0, y)\, b_0{}'(y)\, d_y\sigma.$$

Далее теорема доказывается так же, как предыдущая. Надо только заметить, что главное значение интеграла в правой части формулы (14.12) безусловно существует, потому что

$$\int\limits_{\mathfrak{F}T}^{*} \frac{dL(x_0, y)}{dl} \zeta(y)\, d_y\sigma = \int\limits_{\mathfrak{F}T} A^{(l)}(x_0, y)\, [\zeta(y) - \zeta(x_0)]\, d_y\sigma +$$

$$+ \frac{\zeta(x_0)}{a^{(l)}(x_0)} \int\limits_{\mathfrak{F}T}^{*} A^{(l)}(x_0, y)\, a^{(l)}(x_0)\, d_y\sigma + \int\limits_{\mathfrak{F}T} B^{(l)}(x_0, y)\, \zeta(y)\, d_y\sigma,$$

а первый интеграл в правой части последней формулы имеет смысл в силу того, что выражение в квадратных скобках, на которое умножается $A^{(l)}$, есть $O(\overline{x_0 y}^{\mu})$.

Рассмотрим теперь оператор $\mathfrak{P}$, определенный формулой (7.1), и определим его также и для $x \neq x_0$, $x \in l_1$, полагая

$$\mathfrak{P}v(x) = a^{(l)}(x_0)\left(\frac{dv(x)}{dl}\right) + \beta(x_0)\, v(x). \qquad (14.13)$$

При $x \to x_0$ по l_1 функция $\mathfrak{P}v(x)$ стремится к двум различным пределам

$$(\mathfrak{P}v)^{\pm} = a^{(l)}(x_0)\left(\frac{dv}{dl}\right)^{\pm} + \beta(x_0)\, v(x_0),$$

когда x стремится к x_0 в $C-T$ и когда — в $T-\mathfrak{F}T$. Очевидно, справедлива теорема

14, VI. *Если* $\zeta \in C^{(0,\mu)}$, *то для всякого* $x_0 \in \mathfrak{F}T$

$$(\mathfrak{P}v)^{\pm} = \mp\frac{\zeta(x_0)}{2} + \int\limits_{\mathfrak{F}T}^{*} \mathfrak{P}_x L(x_0, y)\,\zeta(y)\,d_y\sigma. \qquad (14.14)$$

Если $l \equiv \nu$, *то формула* (14.14) *верна также и тогда, когда предполагается только, что* $\zeta \in C^{(0)}$; *при этом интеграл в правой части формулы становится обычным интегралом и является непрерывной функцией* x_0. *В предположении, что* $l \equiv \nu$ *и что* $\zeta \in L^{(p)}$, *где* $p = 1$ *или* 2, *формула* (14.14) *справедлива почти для всех* $x_0 \in \mathfrak{F}T$ *и интеграл в правой части формулы также принадлежит* $L^{(p)}$.

Полезно в явном виде записать следующую формулу, которой мы часто будем пользоваться в дальнейшем:

$$(\mathfrak{P}v)^{+} - (\mathfrak{P}v)^{-} = -\zeta(x_0). \qquad (14.15)$$

В заключение сформулируем следующую теорему:

14, VII. *Если* $\zeta \in C^{(0,\lambda)}$, *то производные функции* v *как в* $T-\mathfrak{F}T$, *так и в* $C-T$ *могут быть непрерывно продолжены соответственно на* T *и на* $C-(T-\mathfrak{F}T)$, *причем таким образом продолженные функции принадлежат классу* $C^{(0,\lambda)}$. *Если функция* β *и направляющие косинусы* l *принадлежат* $C^{(0,\lambda)}$, *то интеграл в правой части формулы* (14.14) *также принадлежит* $C^{(0,\lambda)}$. *В том частном случае, когда* $l \equiv \nu$, *этот интеграл принадлежит классу* $C^{(0,\mu)}$ *при* $\mu < \lambda$, *причем предполагается только, что* $\beta \in C^{(0,\mu)}$ *и* $\zeta \in C^{(0)}$.

Доказательство можно найти в гл. VII, п. 5 мемуара [15] Жиро. Подробности, касающиеся всего изложенного до сих пор, содержатся в работах Жиро, Амерétио, Эванса и Майлза, Фикеры, указанных в п. 12.

15. Обобщенные потенциалы двойного слоя. В этом пункте мы будем предполагать, что функции a_{ik} принадлежат классу $C^{(1,\lambda)}$ в C и что $L(x,y)$ есть функция Леви, обладающая производными $\partial L/\partial y_i$ и $\partial^2 L/\partial x_k \partial y_i$, которые непрерывны при $x \neq y$ и удовлетворяют оценкам

$$\frac{\partial(L-H)}{\partial y_i} = O(r^{2-m}), \qquad \frac{\partial^2(L-H)}{\partial x_k \partial y_i} = O(r^{1-m}). \qquad (15.1)$$

Кроме того, мы будем предполагать, что оценки (8.4) выполняются также с $\lambda = 1$ и что замкнутая область T принадлежит классу $A^{(1,\lambda)}$, где $\lambda \leqslant 1$. Пусть β — непрерывная функция, заданная на $\mathfrak{F}T$, а $l(x)$ — прямая, выходящая из произвольной точки $x \in \mathfrak{F}T$, с направляющими косинусами, которые непрерывны как функции x и удовлетворяют условию $\cos(ln) > 0$. Рассмотрим оператор $\mathfrak{Q}$, определенный формулой (7.2), и положим

$$w(x) = \int\limits_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{Q}_y L(x, y)\,\zeta(y)\,d_y\sigma. \tag{15.2}$$

Такой интеграл называется *(обобщенным) потенциалом двойного слоя с плотностью* ζ.

Так как $\mathfrak{Q}_y L(x, y) \in N^{(1)}$, то из теорем 12, III и 12, VI следует теорема

15, I. *Если* $\zeta \in L^{(p)}$, *где* $p = 1$ *или* 2, *то* $w \in L^{(p)}$ *в* T.

Изучим теперь поведение функции w при стремлении точки x к $x_0 \in \mathfrak{F}T$ вдоль такой прямой l_1, выходящей из точки x_0, для которой $\cos(l_1 n) \neq 0$. Заметим, что функция w имеет, вообще говоря, два различных предела, когда x стремится к x_0 в $T - \mathfrak{F}T$ или в $C - T$. Эти пределы, не зависящие от направления l_1, мы будем обозначать соответственно через $w^-(x_0)$ и $w^+(x_0)$.

Займемся сначала случаем, когда $l \equiv \nu$, и докажем следующую теорему:

15, II. *Если* $l \equiv \nu$, $\zeta \in L^{(p)}$, *где* $p = 1$ *или* 2, *то для почти всех* $x_0 \in \mathfrak{F}T$

$$w^{\pm}(x_0) = \pm\frac{\zeta(x_0)}{2} + \int\limits_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{Q}_y L(x_0, y)\,\zeta(y)\,d_y\sigma, \tag{15.3}$$

причем интеграл в правой части формулы как функция x_0 *принадлежит* $L^{(p)}$. *Если* $\zeta \in C^{(0)}$, *то формула* (15.3) *справедлива всюду, и вышеупомянутый интеграл принадлежит классу* $C^{(0,\mu)}$ *для любого* $\mu < 1$. *Кроме того, функция, равная* w *в* $T - \mathfrak{F}T$ [*в* $C - T$] *и* w^- [w^+] *на* $\mathfrak{F}T$, *непрерывна в* T [*в* $C - (T - \mathfrak{F}T)$].

Действительно, формула (15.3) следует из (14.7), если заметить, что для $x \in l_1$

$$\mathfrak{Q}_y L(x, y) = -\mathfrak{P}_x L(x, y) + O\left(\overline{xy}^{\lambda+1-m}\right).$$

Аналогично устанавливаются свойства интеграла в правой части формулы (15.3). Возможность непрерывного продолжения функции w на T или на $C - (T - \mathfrak{F}T)$ следует из того, что в формуле (15.3) стремление к пределу равномерно по отношению к x_0, когда x_0 изменяется на $\mathfrak{F}T$, например, если положить $l_1 \equiv n$.

Замечая, что функцию w можно записать в виде

$$w = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_{\mathfrak{F}T} L(x, y)\cos(\nu y_i)\,\zeta(y)\,d_y\sigma + \int\limits_{\mathfrak{F}T} K(x, y)\,\zeta(y)\,d_y\sigma,$$

где $K \in N^{(2,\lambda)}$, из теоремы 14, VII можно сразу вывести следующую теорему:

15, III. *Если* $\zeta \in C^{(0,\mu)}$ *при* $\mu \leqslant \lambda$, *то функция* w, *продолженная на* T *или на* $C-(T-\mathfrak{F}T)$, *как в предыдущей теореме, также принадлежит классу* $C^{(0,\mu)}$.

Совершенно аналогично доказывается теорема

15, IV. *Формула* (15.3) *справедлива также и при* $l \neq \nu$, *если только направляющие косинусы* l *и функция* ζ *принадлежат классу* $C^{(0,\mu)}$; *однако интеграл в правой части формулы* (15.3) *надо понимать в смысле главного значения, т. е. как предел интеграла, взятого по* $\mathfrak{F}T - I(x_0, \rho)$. *В тех же предположениях теорема* 15, III *остается справедливой для* $l \neq \nu$.

Заметим сначала, что из соотношения (15.3) следует формула

$$w^+(x_0) - w^-(x_0) = \zeta(x_0). \tag{15.4}$$

Наложим теперь дополнительные ограничения на функцию L с целью установить новые свойства функции w. Если $L(x, y)$ как функция y есть (фундаментальное) решение уравнения $\mathfrak{N}_y L = 0$ и если предполагается, что $l \equiv \nu$, то из формул Грина (7.5) и Стокса (9.3), примененных к тем функциям, что и в предыдущем пункте, следует, что

$$\int\limits_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{D}_y L(x, y)\, d_y\sigma = \int\limits_{\mathfrak{F}T} L(x, y)\,\beta(y)\, d_y\sigma - \int\limits_{T} L(x, y)\, c(y)\, dy - \theta, \tag{15.5}$$

где, как обычно, θ равно 1 в $T-\mathfrak{F}T$ и 0 в $C-T$.

Конечно, для того, чтобы получить эту формулу, надо наложить на коэффициенты $\mathfrak{M}$ такие условия, чтобы можно было рассматривать сопряженный оператор $\mathfrak{N}$. Однако в дальнейшем мы увидим, что существуют функции $L(x, y)$, для которых формула (15.5) справедлива даже тогда, когда оператор $\mathfrak{N}$ не имеет смысла. Не изменяя условий, ранее наложенных на функции a_{ik}, предположим дополнительно, что L есть функция Леви, для которой справедлива формула (15.5). Если через w_0 обозначить интеграл в левой части формулы (15.5), а через v_0 — первый интеграл в ее правой части, то получится

$$(\mathfrak{P}w_0)^+ - (\mathfrak{P}w_0)^- = (\mathfrak{P}v_0)^+ - (\mathfrak{P}v_0)^- + \beta(x_0),$$

и отсюда, согласно (14.15),

$$(\mathfrak{P}w_0)^+ - (\mathfrak{P}w_0)^- = 0. \tag{15.6}$$

Теперь мы можем доказать следующую теорему:

15, V. *Если для функции* L *справедлива формула* (15.5) *и* $l \equiv \nu$ *и если* $\zeta \in C^{(0, \mu)}$ *при* $\mu > 1 - \lambda$, *а* x *и* x' — *две точки, принадлежащие конормали, выходящей из* x_0, *симметричные относительно* x_0, *то*

$$\lim_{x \to x_0} [\mathfrak{P}w(x) - \mathfrak{P}w(x')] = 0, \tag{15.7}$$

где $\mathfrak{P}$ — *оператор, определенный формулой* (14.13) *Формула* (15.7) *справедлива также для* $\zeta \in C^{(0)}$, *если только* T *принадлежит классу* $A^{(2)}$ *и* $\partial^2 (L - H)/\partial x_k \partial y_i \in N^{(1, h)}$. *При этих предположениях формула* (15.7) *справедлива почти всюду на* $\mathfrak{F}T$, *если* $\zeta \in L^{(1)}$.

Действительно, мы имеем

$$\mathfrak{P}w(x) = \int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{P}_x \mathfrak{Q}_y L(x, y) [\zeta(y) - \zeta(x_0)] \, d_y \sigma + \zeta(x_0) \mathfrak{P}w_0(x).$$

Поэтому, в силу формулы (15.6), вопрос сводится к доказательству того, что

$$\lim_{x \to x_0} \int_{\mathfrak{F}T} [\mathfrak{P}_x \mathfrak{Q}_y L(x, y) - \mathfrak{P}_x \mathfrak{Q}_y L(x', y)] [\zeta(y) - \zeta(x_0)] \, d_y \sigma = 0. \tag{15.8}$$

Можно проверить, что для y, близких к x_0,

$$\mathfrak{P}_x \mathfrak{Q}_y L(x, y) - \mathfrak{P}_x \mathfrak{Q}_y L(x', y) = \sum_{\alpha = 0}^{2} K_\alpha(x, y),$$

где

$$K_2 = O\left(\overline{xy}^{1-m}\right) \text{ и } K_\alpha = O\left(\overline{xx}_0^{\alpha} \cdot \overline{xy}^{\lambda - \alpha - m}\right) \text{ при } \alpha = 0,1.$$

В таком случае, если $\zeta \in C^{(0, \mu)}$ при $\mu > 1 - \lambda$, формула (15.7) следует из леммы п. 14. Если T принадлежит классу $A^{(2)}$, то в предыдущей оценке ядер K_α можно положить $\lambda = 1$. Тогда упомянутая лемма позволяет доказать утверждение теоремы также и в том случае, когда ζ принадлежит классу $C^{(0)}$ или $L^{(1)}$, если только иметь в виду, что, в силу дополнительного предположения относительно $L - H$,

$$K_2 = O\left(\overline{xx}_0^{h} \cdot \overline{xy}^{1-h-m}\right).$$

При условии, что для функции L выполняется соотношение (15.5), справедливы следующие теоремы:

15, VI. *Если для функции* L *справедливо соотношение* (15.5) *и если* $l \equiv \nu$, $\beta \in C^{(0, \lambda)}$, $\zeta \in C^{(0, \mu)}$ *при* $\mu > 1 - \lambda$, *то интеграл в правой части формулы* (15.3) *принадлежит классу* $C^{(1, \lambda)}$ *на* $\mathfrak{F}T$.

15, VII. *Если для функции* L *справедливо соотношение* (15.5) *и если* $l \equiv \nu$, $\beta \in C^{(0, \lambda)}$, $\zeta \in C^{(1, \lambda)}$, *то функция* w, *продолженная на* T *или на* $C - (T - \mathfrak{F}T)$, *как в теореме* 15, II, *также принадлежит классу* $C^{(1, \lambda)}$.

Доказательство этих теорем можно найти в мемуаре [15] Жиро. Мы ограничимся следующим замечанием, относящимся к теореме 15, VI. Если t_i — один из параметров локального представления $\mathfrak{F}T$ в окрестности точки x_0, то можно написать формальное равенство

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\int\limits_{\mathfrak{F}T}\mathfrak{Q}_y L(x_0, y)\zeta(y)\,d_y\sigma = \int\limits_{\mathfrak{F}T}\frac{\partial}{\partial t_i}\mathfrak{Q}_y L(x_0, y)[\zeta(y)-\zeta(x_0)]\,d_y\sigma +$$

$$+\zeta(x_0)\frac{\partial}{\partial t_i}\int\limits_{\mathfrak{F}T}\mathfrak{Q}_y L(x_0, y)\,d_y\sigma,$$

где первый интеграл в правой части имеет смысл, если подинтегральная функция есть $O\left(\overline{x_0y}^{\lambda+\mu-m}\right)$. Относительно последнего члена этой формулы заметим, что, в силу (15.5),

$$\int\limits_{\mathfrak{F}T}\mathfrak{Q}_y L(x_0, y)\,d_y\sigma = \int\limits_{\mathfrak{F}T}L(x_0, y)\beta(y)\,d_y\sigma - \int\limits_{T}L(x_0, y)c(y)\,dy - \frac{1}{2},$$

и функция $\int\limits_{\mathfrak{F}T}\mathfrak{Q}_y L(x_0, y)\,d_y\sigma$ принадлежит классу $C^{(1,\lambda)}$ на $\mathfrak{F}T$, согласно теоремам 13, I и 14, VII.

По вопросам, затронутым в этом пункте, можно смотреть работы, упомянутые в конце п. 14.

16. Построение функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям. При изучении различных вопросов теории эллиптических уравнений важную роль играет решение следующей вспомогательной задачи.

Пусть заданы замкнутая область T класса $A^{(1)}$ и $p+1$ функций $u_0, u_1, \ldots, u_p$, определенных и непрерывных на $\mathfrak{F}T$. Требуется построить функцию $u(x)$, принадлежащую в $T-\mathfrak{F}T$ классу $C^{(\infty)}$[1]) и удовлетворяющую на $\mathfrak{F}T$ следующим граничным условиям:

$$u = u_0, \quad \frac{d^q u}{dn^q} = u_q \quad (q = 1, 2, \ldots, p). \tag{16.1}$$

Кроме того, интересно было бы иметь возможность изучить поведение функции $u(x)$ и ее производных при стремлении точки x к точке на $\mathfrak{F}T$.

Эта задача имеет, конечно, самые различные решения; ею занимались Э. Э. Леви в случае $m=2$ (добавление к работе [2]), Жиро [2, стр. 211, и 15, стр. 101—104], Жевре [10]. Мы дадим здесь некоторое понятие о методе Жевре, который требует меньше всего предположений, но в то же время дает наиболее точные результаты. Однако надо заметить, что Леви занимался этой задачей в случае,

---

[1]) То есть имеющую в $T-\mathfrak{F}T$ производные любого порядка.

когда функции u_q имеют некоторые особенности; этот случай не будет здесь рассматриваться.

Положим для $\mu > 0$

$$c_\mu = \pi^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{\mu-m-1}{2}\right)\right]^{-1}$$

и рассмотрим интеграл

$$I_\mu(x;\, v) = \frac{d^\mu}{c_\mu}\int\limits_{\mathfrak{F}T} \frac{v(y)}{\overline{xy}^{\mu+m-1}}\, dy,$$

где функция $v(y)$ непрерывна на $\mathfrak{F}T$, а d есть расстояние от точки x до $\mathfrak{F}T$. Рассуждения, аналогичные тем, которые применялись в пп. 14 и 15, позволяют легко доказать следующую теорему:

16, I. *Если T принадлежит классу $A^{(1+h)}$, где $\mu > h \geqslant 0$, и если $v \in C^{(h)}$, то функция, равная I_μ в $T - \mathfrak{F}T$ и равная $v(x)$ на $\mathfrak{F}T$, принадлежит классу $C^{(h)}$ в некоторой окрестности $\mathfrak{F}T$. Если T принадлежит классу $A^{(1+h,\lambda)}$, где $\mu - \lambda > h \geqslant 0$, и если $v \in C^{(h,\lambda)}$, то вышеупомянутая функция принадлежит классу $C^{(h,\lambda)}$ в некоторой окрестности $\mathfrak{F}T$.*

Пусть теперь T принадлежит классу $A^{(1)}$. Зафиксируем точку x_0 на $\mathfrak{F}T$ и обозначим через δ расстояние от произвольной точки x до гиперплоскости, касающейся $\mathfrak{F}T$ в точке x_0, причем это расстояние будем считать положительным, если точка x расположена на внутренней нормали к $\mathfrak{F}T$ в точке x_0. Положим

$$I_\mu^* = \left(\frac{\delta}{d}\right)^\mu I_\mu.$$

Очевидно, что поведение I_μ^* при стремлении x к x_0 вдоль внутренней нормали к $\mathfrak{F}T$, построенной в точке x_0, аналогично поведению I_μ, т. е. $\lim I_\mu^* = v(x_0)$. Кроме того, если дополнительно предположить, что T принадлежит классу $A^{(1,\lambda)}$ и $v \in C^{(0,\lambda)}$, то $I_\mu^* - v(x_0) = O\left(\overline{xx_0}^\lambda\right)$. Интеграл I_μ^* принадлежит классу $C^{(\infty)}$ в $T - \mathfrak{F}T$. Пусть $I_\mu^{(k)}$ — производная порядка k от этого интеграла, взятая в произвольной точке внутренней нормали к $\mathfrak{F}T$ в точке x_0. Если $k \leqslant h$, то производная $I_\mu^{(k)}$ имеет конечный предел при $x \to x_0$ при условии, что T принадлежит классу $A^{(1+h)}$, $v \in C^{(h)}$, $\mu > h$; если же $k > h$, то

$$I_\mu^{(k)} = o\left(\overline{xx_0}^{h-k}\right).$$

В случае, когда T принадлежит классу $A^{(1+h,\lambda)}$, $v \in C^{(h,\lambda)}$, $\mu > h + \lambda$, эту оценку можно заменить другой, более точной:

$$I_\mu^{(k)} = O\left(\overline{xx_0}^{\lambda+h-k}\right).$$

Справедлива следующая теорема:

16, II. *Пусть* T *принадлежит классу* $A^{(1+h)}$ $[A^{(1+h,\lambda)}]$ *при* $h \geqslant 0$, *и пусть* $u_0 = u_1 = \ldots = u_{p-1} = 0$, $u_p \in C^{(h)}$ $[C^{(h,\lambda)}]$. *Если* $\mu > h$ $[\mu > h + \lambda]$, *то функция* $u(x)$, *определенная формулой*

$$u(x) = \frac{(-d)^p}{p!} \frac{I_\mu(x; u_p)}{I_{\mu+p}(x; 1)}, \tag{16.2}$$

удовлетворяет условиям (16.1) *и принадлежит классу* $C^{(\infty)}$ *в* $T - \mathfrak{F}T$ *и классу* $C^{(p+h)}$ $[C^{(p+h,\lambda)}]$ *в* T. *Кроме того, если* $u^{(k)}$ — *производная от* u *порядка* $k > p + h$, *то в любой точке внутренней нормали к* $\mathfrak{F}T$, *построенной в произвольной точке* x_0, *для* $u^{(k)}$ *справедлива оценка*

$$u^{(k)} = o\left(\overline{xx_0}^{\,p+h-k}\right)\left[= O\left(\overline{xx_0}^{\,\lambda+p+h-k}\right)\right]. \tag{16.3}$$

Все это легко доказать, если заметить, что, каково бы ни было x_0 на $\mathfrak{F}T$, формулу (16.2) можно записать в виде

$$u(x)\, I^*_{\mu+p}(x; 1) = \frac{(-\delta)^p}{p!} I^*_\mu(x; u_p).$$

Из этой формулы легко получить выражение для производной функции u любого порядка q через производные функции I^* порядка не выше q и через производные меньшего порядка самой функции u. Ранее доказанные свойства производных функции I^* позволяют доказать утверждение теоремы.

Аналогичным образом можно доказать теорему

16, III. *Если выполнены предположения теоремы* 16, II *и если* $u_p > 0$, *то функция* (16.2) *может быть заменена функцией*

$$u(x) = \frac{(-d)^p}{p!\, I_p\left(x; \frac{1}{u_p}\right)}, \tag{16.4}$$

причем сохраняются все свойства функции $u(x)$, *упомянутые в теореме* 16, II.

Обратимся теперь к общей задаче, поставленной в начале этого пункта. Можно легко доказать следующую теорему:

16. IV. *Пусть* T *принадлежит классу* $A^{(p+h+1)}$ $[A^{(p+h+1,\lambda)}]$ *при* $h \geqslant 0$, *и пусть* $u_q \in C^{(p-q+h)}[C^{(p-q+h,\lambda)}]$ для $q = 0, 1, \ldots, p$. *Тогда существует по крайней мере одна функция* u, *принадлежащая классу* $C^{(\infty)}$ *в* $T - \mathfrak{F}T$ *и классу* $C^{(p+h)}$ $[C^{(p+h,\lambda)}]$ *в* T, *которая удовлетворяет условиям* (16.1). *Эта функция удовлетворяет также и условиям* (16.3).

Действительно, в силу теоремы 16, II, можно построить функции $U_0, U_1, \ldots, U_p$, удовлетворяющие всем условиям, которым должна удовлетворять функция u, кроме (16.1), и граничным условиям вида

$$U_q = \frac{dU_q}{dn} = \ldots = \frac{d^{q-1}U_q}{dn^{q-1}} = 0, \quad \frac{d^q U_q}{dn^q} = u_q - \sum_{i=1}^{q-1} \frac{d^q U_i}{dn^q}.$$

Если мы положим $u = \sum U_q$, то получим функцию, удовлетворяющую всем требованиям теоремы.

Заметим, что ограничения, наложенные на замкнутую область T в теореме 16, IV, в том частном случае, когда $u_0 = u_1 = \ldots = u_{p-1} = 0$, сильнее соответствующих ограничений в теореме 16, II. Поэтому может оказаться полезным следующее очевидное замечание:

16, V. *Если существует функция* $v \in C^{(p+h)}[C^{(p+h,\lambda)}]$ *в* T, *удовлетворяющая первым* q *из условий* (16. 1), *то теорема* 16, IV *справедлива при условии, что* T *принадлежит только классу* $A^{(p+h-q+1)}[A^{(p+h-q+1,\lambda)}]$, *но при этом нужно отказаться от принадлежности функции и классу* $C^{(\infty)}$ *в* $T - \mathfrak{F}T$ *и от условий* (16. 3).

На основании этого замечания мы докажем теорему

16, VI. *Пусть* T *принадлежит классу* $A^{(p+h)}[A^{(p+h,\lambda)}]$ *при* $h \geqslant 0$, *а* $u_q \in C^{(p-q+h)}[C^{(p-q+h,\lambda)}]$ *для* $q = 0, 1, \ldots, p$. *Тогда существует по крайней мере одна функция* u, *принадлежащая классу* $C^{(p+h)}[C^{(p+h,\lambda)}]$ *в* T, *которая удовлетворяет условиям* (16. 1).

Для доказательства достаточно показать, что в предположениях теоремы существует по крайней мере одна функция $u(x)$, принадлежащая классу $C^{(p+h)}[C^{(p+h,\lambda)}]$ в T, которая удовлетворяет первому из условий (16. 1).

Чтобы доказать это, в каждой точке ξ на $\mathfrak{F}T$ построим прямую $l(\xi)$ с направляющими косинусами, принадлежащими классу $C^{(p+h)}[C^{(p+h,\lambda)}]$, для которой выполнено условие $\cos(ln) > 0$. Легко видеть, что существует такая окрестность I границы $\mathfrak{F}T$, что через точку x из этой окрестности проходит одна и только одна из прямых $l(\xi)$. Если параметры t_i определяют точку ξ и $t_m = \overrightarrow{x\xi}$, то координаты точки x, лежащей на прямой $l(\xi)$, определяются формулой

$$x_i = x_i(t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}) + t_m l_i(t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}).$$

В свою очередь

$$t_r = t_r(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad t_r \in C^{(p+h)}[C^{(p+h,\lambda)}].$$

Поэтому в окрестности I функция $u(x) = u_0(\xi)$ принадлежит классу $C^{(p+h)}[C^{(p+h,\lambda)}]$. Если замкнутая область T' класса $A^{(p+h+1)}[A^{(p+h+1,\lambda)}]$ лежит внутри T, а граница T' лежит внутри I, то определенная таким образом в $T - T'$ функция $u(x)$ может быть продолжена на T' с сохранением непрерывности [условия Гёльдера с показателем λ] для ее производных порядка $p+h$; это следует из теоремы 16, IV.

Функция $u(x)$, определенная теперь во всей замкнутой области T, удовлетворяет условиям теоремы.

Интересно было бы выяснить, возможно ли в теореме 16, VI еще больше ослабить условия, налагаемые на T, а именно, считать T принадлежащей классу $A^{(h+1)}$ $[A^{(h+1,\lambda)}]$; однако этот вопрос еще не решен.

Глава III

СВЕДЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Классический метод доказательства существования решений различных краевых задач состоит в сведении решения такой задачи к решению интегрального уравнения или системы интегральных уравнений. Этот метод берет начало от работ Фредгольма, относящихся к оператору Δ, и от следующих за ними работ Гильберта, Пуанкаре, Пикара, Лихтенштейна и других авторов[1]. Он неоднократно применялся при изучении частных задач, на которых мы не можем здесь останавливаться.

В тех общих условиях, в которых мы поставили задачу, она первый раз была решена этим методом в случае $m=2$ в работах Э. Э. Леви. Затем Жевре и Жиро изучали эту задачу в общем случае при условиях, гораздо менее жестких, чем те, которые рассматривал Э. Э. Леви. Без сомнения, в этой области наиболее полными являются результаты Жиро, которые мы будем подробно излагать. Однако в конце главы мы рассмотрим в общих чертах также исследования Э. Э. Леви и Жевре.

Для удобства читателя, прежде чем переходить к изложению этих вопросов, мы напомним некоторые факты из теории интегральных уравнений.

17. Некоторые понятия из теории интегральных уравнений. Пусть T есть замкнутая область класса $A^{(1,\lambda)}$, x и y — переменные точки в T, ξ и η — переменные точки $\mathfrak{F}T$. Мы будем в основном заниматься интегральными уравнениями вида

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(x)-\mu\int\limits_T K_{11}(x,y)\varphi_1(y)\,dy-\mu\int\limits_{\mathfrak{F}T} K_{12}(x,\eta)\,\varphi_2(\eta)\,d_\eta\sigma=f_1(x),\\ &\varphi_2(\xi)-\mu\int\limits_T K_{21}(\xi,y)\,\varphi_1(y)\,dy-\mu\int\limits_{\mathfrak{F}T} K_{22}(\xi,\eta)\,\varphi_2(\eta)\,d_\eta\sigma=f_2(\xi). \end{aligned}\right\}\quad(17.1)$$

Таким образом, речь идет о системе двух интегральных уравнений второго рода с двумя неизвестными функциями, из которых первая функция, $\varphi_1(x)$, определена в T, а вторая функция, $\varphi_2(\xi)$,

---

[1] Библиография по этому вопросу, опубликованная до 1924 г., указана в работе [4] Лихтенштейна.

определена на $\mathfrak{F}T$. Однако мы не исключаем случая, когда для $i=1$ или $i=2$ ядра K_{i1} и K_{i2} обращаются в нуль и система сводится к одному интегральному уравнению с одной неизвестной функцией $\varphi_1(x)$ или $\varphi_2(\xi)$.

Предположим, что функции f_1 и f_2 непрерывны, и будем искать решения φ_1 и φ_2 в классе функций, непрерывных соответственно в T и на $\mathfrak{F}T$. Ядра K_{ij} будут пока считаться непрерывными.

Мы хотим вкратце изложить основные теоремы, которые нам надо будет применять. Для этого изменим принятые нами обозначения, чтобы записать систему (17.1) в более удобном виде.

Положим прежде всего $x=x_1$, $y=y_1$, $\xi=x_2$, $\eta=y_2$, $T=T_1$, $\mathfrak{F}T=T_2$, $dy=dT_1$, $d_\eta\sigma=dT_2$ и условимся обозначать через φ и f *векторы*, компоненты которых равны соответственно (φ_1, φ_2) и (f_1, f_2). Через K обозначим *матрицу ядер* $\| K_{ij}(x_i, y_j) \|$. Кроме того, положим

$$f*\varphi=\sum_{i=1}^{2}\int_{T_i} f_i(x_i)\,\varphi_i(x_i)\,dT_i$$

и обозначим через $K*\varphi$ вектор ψ с компонентами

$$\psi_i(x_i)=\sum_{j=1}^{2}\int_{T_j} K_{ij}(x_i, y_j)\,\varphi_j(y_j)\,dT_j,$$

а через $\varphi*K$ — вектор χ с компонентами

$$\chi_i(x_i)=\sum_{j=1}^{2}\int_{T_j} K_{ji}(y_j, x_i)\,\varphi_j(y_j)\,dT_j.$$

Таким образом мы определили *композицию* двух векторов или вектора и матрицы.

Если H — вторая матрица ядер такого же типа, как K, то *композицией* $H*K$ матриц ядер H и K называется матрица G, элементами которой являются ядра

$$G_{ij}(x_i, y_j)=\sum_{k=1}^{2}\int_{T_k} H_{ik}(x_i, z_k)\,K_{kj}(z_k, y_j)\,dT_k.$$

Очевидно, что как композиция матрицы и вектора, так и композиция двух матриц не перестановочны.

В таких обозначениях наша система может быть записана в виде

$$\varphi-\mu K*\varphi=f. \tag{17.1}$$

Вместе с ней полезно рассматривать *транспонированную систему*

$$\psi-\mu\psi*K=g, \tag{17.2}$$

где g — новый известный вектор, а ψ — новый неизвестный вектор.

Хорошо известно, что решения системы (17.1) и (17.2) даются формулами[1])

$$\varphi = f + \mu\Gamma * f, \tag{17.3}$$

$$\psi = g + \mu g * \Gamma, \tag{17.4}$$

где Γ — матрица ядер с элементами

$$\Gamma_{ij}(x_i, y_j, \mu) = \frac{D_{ij}(x_i, y_j, \mu)}{D(\mu)}, \tag{17.5}$$

а $D(\mu)$ и $D_{ij}(x_i, y_j, \mu)$ — целые функции μ, причем последняя функция непрерывна по x_i и y_j при каждом фиксированном μ. Таким образом, матрица Γ, которая называется *резольвентной матрицей* для матрицы K, мероморфна по μ; она регулярна при $\mu = 0$ и в некоторой окрестности $\mu = 0$ разлагается в степенной ряд

$$\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n K^{(n)}, \tag{17.6}$$

где матрицы $K^{(n)}$ (*итерированные матрицы*) определяются формулами

$$K^{(0)} = K, \quad K^{(n)} = K^{(n-1} * K. \tag{17.7}$$

Кроме того, для резольвентной матрицы справедливы соотношения

$$\Gamma = K + \mu K * \Gamma = K + \mu\Gamma * K. \tag{17.8}$$

Изучение формул (17.3) и (17.4) показывает, что для систем (17.1) и (17.2) могут представиться только два случая (*альтернатива Фредгольма*):

1°) μ не является полюсом Γ; тогда системы (17.1) и (17.2) при любых f и g имеют одно и только одно решение, которое дается формулами (17.3) и (17.4). В частности, однородные системы, соответствующие системам (17.1) и (17.2), имеют только нулевые решения $\varphi = 0$ и $\psi = 0$.

2°) μ является полюсом Γ; тогда однородные системы, соответствующие системам (17.1) и (17.2), имеют одинаковое (конечное) число p линейно независимых решений. Мы будем обозначать их соответственно через $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(p)}$ и $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots, \psi^{(p)}$. В таком случае необходимое и достаточное условие разрешимости системы (17.1) [(17.2)] заключается в том, чтобы функция f [g] удовлетворяла условиям

$$f * \psi^{(i)} = 0 \quad [g * \varphi^{(i)} = 0]. \tag{17.9}$$

Если эти условия выполнены и φ [ψ] есть решение системы (17.1) [(17.2)], то все решения этой системы имеют вид $\varphi + \sum c_i \varphi^{(i)}$

---

[1]) См. Привалов И. И., Интегральные уравнения, ОНТИ, М.—Л., 1935.— *Прим. ред.*

$[\psi+\sum c_i\psi^{(i)}]$, где c_i — произвольные постоянные, и все функции такого вида являются решениями.

В случае 2°) число μ называется *собственным значением кратности p* матрицы K, а векторы $\varphi^{(i)}$ и $\psi^{(i)}$ называются *собственными решениями (векторами)* однородных систем, соответствующих системам (17.1) и (17.2).

О том, существуют ли собственные значения, в общем случае ничего сказать нельзя. Однако, если выполнены условия $K_{ij}(x_i, y_j) = K_{ji}(y_j, x_j)$ (в таком случае матрица ядер K называется *симметричной* и при $f=g$ система (17.1) совпадает с системой (17.2)), можно доказать следующие утверждения:

a) Матрица ядер K имеет по крайней мере одно собственное значение.

b) Все собственные значения действительны и являются полюсами первого порядка для Г.

c) Если все собственные значения расположены в последовательность $\{\mu_n\}$, в которой каждое из них повторяется столько раз, какова его кратность, то каждому μ_n можно поставить в соответствие собственное решение $\varphi^{(n)}$ так, чтобы эти решения образовали ортонормальную систему.

d) Если f — произвольный непрерывный вектор, то

$$f*(K*f)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f*\varphi^{(n)})^2}{\mu_n}.$$

Все эти результаты различными способами обобщаются на тот случай, когда ядра K_{ij} не непрерывны. Например, хорошо известно обобщение их на случай, когда ядра измеримы и имеют смысл интегралы Лебега

$$\int_{T_i}\int_{T_j}[K_{ij}(x_i, y_j)]^2\,dT_i\,dT_j.$$

Действительно, в этом случае предыдущие результаты сохраняются при том условии, что отыскиваются решения φ_1 и φ_2, принадлежащие классу функций, суммируемых с квадратом в T и на $\mathfrak{F}T$ соответственно. Известно также, что если ядра K_{ij} не являются функциями с суммируемым квадратом, то теорема об альтернативе может оказаться неверной. Однако есть случаи, когда эта теорема и теоремы о симметричных ядрах справедливы, несмотря на то, что ядра K_{ij} не суммируемы с квадратом.

Согласно замечанию Жиро [19], справедливо, например, следующее предложение:

17,1. *Теорема об альтернативе и теоремы об уравнениях с симметричными матрицами ядер справедливы для системы* (17.1) *в предположении, что ядра K_{ij} принадлежат классам $N^{(\alpha_{ij})}$, где $\alpha_{11}>0$, $\alpha_{12}>1$, $\alpha_{21}>1$, $\alpha_{22}>1$.*

Такое обобщение возможно по существу в силу теорем 11, I, 11, II, 12, IV.

Действительно, согласно теореме 12, IV, можно утверждать, с одной стороны, что всякое решение системы (17.1) есть также решение системы

$$\varphi - \mu^{p+1} K^{(p)} * \varphi = f + \sum_{n=1}^{p} \mu^n K^{(n-1)} * f, \tag{17.10}$$

а с другой стороны, что вектор $\varphi = \rho + \sum\limits_{n=1}^{p} \mu^n K^{(n-1)} * \rho$ есть решение системы (17.1), если ρ есть решение системы

$$\rho - \mu^{p+1} K^{(p)} * \rho = f. \tag{17.11}$$

Теоремы 11, I и 11, II утверждают, что при достаточно большом p элементы матрицы $K^{(p)}$ непрерывны также и при $x_i = y_j$. Поэтому справедливость теоремы об альтернативе для системы (17.1) следует из ее справедливости для систем (17.10) и (17.11); это доказывается путем хорошо известных рассуждений, приведенных во всех руководствах по интегральным уравнениям [1].

Почти очевидным является также аналогичное обобщение теорем о системах с симметричными матрицами ядер, за исключением утверждения d), доказательство которого содержится в заметке Жиро [22].

Справедливо также утверждение:

17, II. *Теорема об альтернативе справедлива для системы* (17.1) *также при более слабом предположении, что ядра* K_{ij} *принадлежат классам* $N^{(\alpha_{ij})}$, *где* $\alpha_{11} > 0$, $\alpha_{12} > 1$, $\alpha_{21} + \alpha_{11} > 1$, $\alpha_{22} > 1$.

Действительно, если во втором уравнении системы заменить функцию φ_1 выражением, полученным для нее из первого уравнения, то получится новое уравнение, которое вместе с первым уравнением системы (17.1) составляет систему, эквивалентную (17.1). Для этой новой системы выполнены условия теоремы 17, I, а следовательно, справедлива теорема об альтернативе.

17, III. *Если ядро* K_{12} *таково, что для* $\zeta \in C^{(0)}$ *на* $\mathfrak{T}T$ *выполняется условие* $\int K_{12} \zeta \, d\tau \in L^{(\infty)}$ *в* T, *то теорема об альтернативе справедлива для системы* (17.1) *также и в том случае, когда ядра* K_{ij} *принадлежат классам* $N^{(\alpha_{ij})}$, *где* $\alpha_{11} > 0$, $\alpha_{12} + \alpha_{11} > 1$, $\alpha_{21} > 1$, $\alpha_{22} > 1$.

---

[1]. См. Привалов И. И., Интегральные уравнения, ОНТИ, М — Л., 1935; Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, ГИТТЛ, М. — Л., 1951. — *Прим. ред.*

Действительно, система (17.1) заменой неизвестной функции

$$\varphi_1(x) = \varphi_1'(x) + \mu \int\limits_{\mathfrak{S}T} K_{12}(x, \eta)\, \varphi_2(\eta)\, d_\eta \sigma$$

сводится к эквивалентной системе, которая удовлетворяет условиям теоремы 17, I. Особые предположения относительно ядра K_{12} нужны для того, чтобы оправдать изменение порядка интегрирования (см. теорему 12, V).

Полезно также сформулировать следующие теоремы, которые нам придется часто применять:

17, IV. *В предположениях теоремы* 17, I *элементы* Γ_{ij} *матрицы* Γ — *резольвенты матрицы ядер* K — *непрерывны при* $x_i \neq y_j$ *и удовлетворяют тем же требованиям, которые условия теоремы налагают на функции* K_{ij}.

17, V. *В предположениях теоремы* 17, I *резольвента* Γ *голоморфна при* $|\mu| < 1/M$, *где*

$$M = \sum_{i, j=1}^{2} \max_{T_i} \int\limits_{T_j} |K_{ij}(x_i, y_j)|\, dT_j.$$

В заключение отметим, что Жиро [20,23] доказал справедливость теоремы об альтернативе в некоторых случаях, когда отсутствует непрерывность ядер K_{ij} при $x_i \neq y_j$, и в некоторых случаях, когда замкнутая область T не ограничена. В работах [21, 22, 23] Жиро распространил теорему об альтернативе на некоторые уравнения, для которых ни одно итерированное ядро не является непрерывным.

Наконец, в целом ряде работ и заметок Жиро [27, 32, 35, 36, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 53] рассматривается случай, когда в уравнения входит интеграл, взятый в смысле главного значения. Те из этих результатов, которыми нам придется пользоваться, будут в дальнейшем точно сформулированы.

18. Метод потенциалов. Наиболее естественным способом сведения краевых задач для эллиптических уравнений к интегральным уравнениям является обобщение классического исследования задач Дирихле и Неймана для гармонических функций. Первые результаты такого рода были получены Штернбергом [1] в случае $m = 3$. Весьма интересны и, возможно, заслуживают дальнейшего развития исследования Феллера [1], который, исходя из того факта, что любой самосопряженный оператор $\mathfrak{M}u$ при $m > 2$ и $c = 0$ можно с точностью до множителя считать вторым дифференциальным параметром в некотором римановом пространстве, распространил на решения уравнения $\mathfrak{M}u = 0$ многие свойства гармонических функций, в том числе свойства потенциалов простого и двойного слоя, лежащие в основе сведения краевых задач к интегральным уравнениям. Однако самые общие и действительно окончательные результаты в этой области получил Жиро, посвятивший этому вопросу целый ряд мемуаров, в которых все три краевые задачи и другие смежные вопросы изучены наиболее полным образом и при самых слабых предположениях. В следующих пунктах мы подробно изложим исследования Жиро; здесь мы хотим дать лишь основную идею его метода, для того чтобы подчеркнуть возникающие трудности и установить некоторые предварительные результаты.

Итак, пусть $\mathfrak{M}$ — эллиптический оператор, коэффициенты которого определены в области C, где a_{ik} принадлежат классу $C^{(1,\lambda)}$, а b_i и c — классу $C^{(0,\lambda)}$.

Пусть, кроме того, T — замкнутая область класса $A^{(1,\lambda)}$, $f(x)$ — функция, удовлетворяющая в T условию Гёльдера с показателем λ, а $\varphi(x)$ — функция, непрерывная на $\mathfrak{F}T$. Если рассматривается задача Дирихле:

$$\mathfrak{M}u = f \text{ для } x \in T - \mathfrak{F}T, \quad u = \varphi \text{ для } x \in \mathfrak{F}T,$$

то можно искать решение, имеющее вид

$$u(x) = -\int\limits_T L(x, y)\, z(y)\, dy - 2 \int\limits_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{Q}_\eta L(x, \eta)\, \zeta(\eta)\, d_\eta\sigma, \tag{18.1}$$

где $L(x, y)$ — функция Леви, которая удовлетворяет условиям п. 15 и обладает производными $\partial^3 L/\partial x_h \partial x_k \partial y_i$; $\mathfrak{Q}$ — оператор, определенный формулой (7.2), причем направление l совпадает с конормалью ν, а за функцию β принята произвольная функция, например, непрерывная на $\mathfrak{F}T$; наконец, z и ζ — две неизвестные функции, причем первая должна быть непрерывной в T и класса $C^{(0,\lambda)}$ в $T - \mathfrak{F}T$, а вторая должна быть непрерывной на $\mathfrak{F}T$. Если функция u является решением поставленной задачи, то, в силу формул (13.7) и (15.3), функции z и ζ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\left.\begin{aligned} z(x) - \int\limits_T \mathfrak{M}_x L(x, y)\, z(y)\, dy - 2 \int\limits_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{M}_x \mathfrak{Q}_\eta L(x, \eta)\, \zeta(\eta)\, d_\eta\sigma = \\ = f(x), \\ \zeta(\xi) - \int\limits_T L(\xi, y)\, z(y)\, dy - 2 \int\limits_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{Q}_\eta L(\xi, \eta)\, \zeta(\eta)\, d_\eta\sigma = \varphi(\xi). \end{aligned}\right\} \tag{18.2}$$

Эта система формально является системой типа (17.1), но в общем случае порядок бесконечности ядра K_{12} при $x = \eta$ слишком высок для того, чтобы можно было применять теорию Фредгольма.

Тем не менее, если система (18.2) имеет решение (z, ζ) и функции z и ζ обладают указанными выше свойствами, то функция u, заданная формулой (18.1), дает решение нашей краевой задачи.

Если же, наоборот, система (18.2) не имеет решений, то из этого еще не следует неразрешимость краевой задачи, так как неизвестно, всякое ли решение краевой задачи имеет вид (18.1). Таким образом, вообще говоря, нельзя установить никакого соответствия между единственностью или неединственностью решений системы (18.2) и рассматриваемой краевой задачи. А именно, решение системы (18.2) может быть единственным, а краевая задача может, кроме решения (18.1), иметь решения другого вида. С другой стороны, система (18.2) может иметь несколько решений, для которых функции u, полученные из формулы (18.1), совпадают друг с другом. Устранению этих неудобств помогает то, что в выборе функции L возможен широкий произвол. Метод Жиро состоит как раз в выборе такой функции L, чтобы формула (18.1) устанавливала взаимно однозначное соответствие между решениями системы (18.2) и решениями рассматриваемой краевой задачи. Кроме того, при таком специальном выборе функции L для системы (18.2) оказывается справедливой теорема об альтернативе, откуда следует аналогичная теорема для нашей краевой задачи. Как уж было сказано, все это будет подробно изложено в следующих пунктах; сейчас мы ограничимся первоначальным изложением метода и введем некоторые понятия, которые будут нам полезны в дальнейшем.

Пусть T — ограниченная замкнутая область класса $A^{(1,\lambda)}$, содержащаяся в C, а T_1 — другая замкнутая область, обладающая теми же свойствами и содержащая T внутри себя. Положим $\mathfrak{M}_x H(x, y) = K(x, y)$ и построим итерированные ядра

$$K^{(0)}(x, y) = K(x, y), \quad K^{(n)}(x, y) = \int_{T_1} K(x, t) K^{(n-1)}(t, y)\, dt.$$

Даже в случае, когда коэффициенты a_{ij}, так же как b_i и c, принадлежат только классу $C^{(0,\lambda)}$, справедлива оценка $K = O(r^{\lambda-m})$ и, согласно теореме 11, I,

$$K^{(n)} \in N^{((n+1)\lambda)}. \tag{18.3}$$

В формуле (18.3) можно положить $\lambda = 1$, если функции a_{ik} принадлежат классу $C^{(1,\lambda)}$, что мы и предполагали раньше.

При этом предположении функции $K^{(n)}$ дифференцируемы по y_i, причем для $x, y \in T$

$$\frac{\partial K^{(n)}}{\partial y_i} \in N^{(n)}. \tag{18.4}$$

Действительно, если формула (18.4) установлена для $n = 1$, то можно по индукции доказать ее для любого n, опираясь на теоремы 12, VIII и 11, I, из которых, между прочим, следует, что при $n > 1$

$$\frac{\partial K^{(n)}}{\partial y_i} = \int_{T_1} K(x, t) \frac{\partial K^{(n-1)}(t, y)}{\partial y_i}\, dt.$$

Случай $n=1$ надо рассматривать отдельно, потому что $\partial K/\partial y_i = O(r^{-m})$ и возникают такие же трудности, как при вычислении вторых производных объемного потенциала. Заметим, что

$$\frac{\partial K(x,y)}{\partial y_i} = -\frac{\partial K(y,x)}{\partial x_i} + O(r^{\lambda-m}), \quad K(y,x)\in N^{(1,\mu)} \tag{18.5}$$

при $\mu \leqslant 1$. Рассуждения, аналогичные тем, посредством которых мы доказали формулу (13.6), позволяют установить, что

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial K^{(1)}}{\partial y_i} = \int\limits_{T_1}\left[K(x,t)\frac{\partial K(t,y)}{\partial y_i} + K(x,y)\frac{\partial K(y,t)}{\partial t_i}\right]dt - \\ - K(x,y)\int\limits_{\mathfrak{F}T_1} K(y,t)X_i(t)\,d_t\sigma.\end{aligned}\right\} \tag{18.6}$$

Отсюда, в силу оценок (18.5) и теоремы 11, I, легко следует справедливость формулы (18.4) для $n=1$.

Рассмотрим теперь для $p \geqslant 1$ ядро

$$H^{(p)}(x,y) = H(x;y) + \sum_{n=1}^{p}\int\limits_{T_1} H(x,t)K^{(n-1)}(t,y)\,dt. \tag{18.7}$$

При одном только предположении, что функции a_{ij}, b_i и c принадлежат классу $C^{(0,\lambda)}$, функции $H^{(p)}(x,y)$ являются функциями Леви в $T_1 - \mathfrak{F}T_1$ и

$$\mathfrak{M}_x H^{(p)}(x,y) = K^{(p)}(x,y). \tag{18.8}$$

Это легко проверить, опираясь на формулу (18.3), на теоремы об объемном потенциале и на теорему 11, I.

Если же a_{ik} принадлежат классу $C^{(1,\lambda)}$, то функция $H^{(p)}$ дифференцируема также и по y_i и справедливо равенство

$$\begin{aligned}\frac{\partial H^{(p)}}{\partial y_i} = \frac{\partial H}{\partial y_i} + \int\limits_{T_1}\left[H(x,t)\frac{\partial K(t,y)}{\partial y_i} + H(x,y)\frac{\partial K(y,t)}{\partial t_i}\right]dt - \\ - H(x,y)\int\limits_{\mathfrak{F}T_1} K(y,t)X_i(t)\,d_t\sigma + \sum_{n=2}^{p}\int\limits_{T_1} H(x,t)\frac{\partial K^{(n-1)}(t,y)}{\partial y_i}\,dt.\end{aligned} \tag{18.9}$$

Из формулы (18.9), применяя теоремы п.13, легко получить, что

$$\frac{\partial H^{(p)}}{\partial y_i} = \frac{\partial H}{\partial y_i} + O(r^{2-m}), \quad \frac{\partial^2 H^{(p)}}{\partial y_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial x_k} + O(r^{1-m}), \tag{18.10}$$

$$\mathfrak{M}_x \frac{\partial H^{(p)}}{\partial y_i} = \frac{\partial K^{(p)}}{\partial y_i}. \tag{18.11}$$

Теперь очевидно, что в формуле (18.1) можно положить $L = H^{(p)}$. Тогда для ядер K_{ij} системы интегральных уравнений (18.2) справедливы оценки

$$K_{11} = O(r^{p+1-m}), \quad K_{12} = O(r^{p-m}),$$
$$K_{21} = O(r^{2-m}), \quad K_{22} = O(r^{\lambda+1-m}),$$

в которых, так же как и в формулах (18.10), при $m = 2$ величина $O(r^{2-m})$ заменяется на $O\left(\ln \frac{2R}{r}\right)$, где R, как обычно, обозначает диаметр T.

При $p \geqslant 2$ эти оценки обеспечивают справедливость теоремы об альтернативе для системы (18.2). Разрешимость этой системы будет доказана, если мы покажем, что соответствующая однородная система имеет только нулевое решение.

Таким способом удается, например, доказать следующую теорему существования *в малом*:

18, I. *Если T — односвязная замкнутая область класса $A^{(1,\lambda)}$ и если T_ρ — результат подобного преобразования T с центром $x_0 \in T - \mathfrak{F}T$ и коэффициентом подобия ρ, то задача Дирихле разрешима в замкнутой области T_ρ для достаточно малых ρ.*

Так как эта теорема является частным случаем более общей теоремы 21, III, которую мы докажем в дальнейшем, то мы отсылаем тех, кто интересуется деталями прямого доказательства этой теоремы, к работе Жиро[1]).

Все, что было до сих пор сказано о задаче Дирихле, легко можно распространить на задачу Неймана. С этой целью предположим, что функции a_{ik}, b_i и c принадлежат классу $C^{(0,\lambda)}$, и вместо функции (18.1) рассмотрим функцию

$$u(x) = -\int_T L(x, y)\, z(y)\, dy + 2 \int_{\mathfrak{F}T} L(x, \eta)\, \zeta(\eta)\, d_\eta \sigma. \tag{18.12}$$

Если краевое условие имеет вид $\mathfrak{P}u = \varphi$, то мы приходим, согласно формулам (13.7) и (14.14), к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} z(x) - \int_T \mathfrak{M}_x L(x, y)\, z(y)\, dy + 2 \int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{M}_x L(x, \eta)\, \zeta(\eta)\, d_\eta \sigma &= f(x), \\ \zeta(\xi) - \int_T \mathfrak{P}_\xi L(\xi, y)\, z(y)\, dy + 2 \int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{P}_\xi L(\xi, \eta)\, \zeta(\eta)\, d_\eta \sigma &= \varphi(\xi), \end{aligned} \tag{18.13}$$

относительно которой можно провести такие же рассуждения, какие только что были проведены относительно системы (18.2). В част-

---

[1]) Жиро [2], стр. 170.

ности, если положить $L=H^{(p)}$, то посредством изучения системы (18.13) можно получить следующую теорему существования в малом:

18, II. *Пусть* T — *замкнутая область класса* $A^{(1,\lambda)}$, *возможно, многосвязная, а* T_ρ — *результат подобного преобразования* T *с центром* $x_0 \in T-\mathfrak{F}T$ *и коэффициентом подобия* ρ. *Если* ρ *достаточно мало, то в* T_ρ *задача Неймана с краевым условием*

$$a\frac{du}{d\nu}+\frac{\beta}{\rho}u=\varphi \quad (\beta>0)$$

разрешима.

Эта теорема также является частным случаем более общей теоремы (22, II), которая будет доказана в дальнейшем. Прямое доказательство, основанное на том, что было изложено выше, имеется в работах Жиро[1]).

19. Теоремы существования фундаментальных решений. Пусть $\mathfrak{M}$ — эллиптический оператор, коэффициенты которого принадлежат классу $C^{(0,\lambda)}$ в C. Пусть заданы функция Леви $L(x, y)$, ограниченная замкнутая область T, принадлежащая классу $A^{(1,\lambda)}$ и содержащаяся в C, и функция $Z(x, y)$ — ядро класса $N^{(\lambda,\mu)}$ в T. Положим

$$G(x, y)=L(x, y)+\int_T L(x, t)\,Z(t, y)\,dt. \tag{19.1}$$

Легко видеть, что, в силу теоремы 11, I и в силу свойств объемного потенциала (п.13), функция $G-L$ и ее производные по переменным x_i непрерывны для $x, y \in T-\mathfrak{F}T$ и $x \neq y$. Для них выполняются оценки

$$G-L=O(r^{2+\lambda-m}), \qquad \frac{\partial(G-L)}{\partial x_i}=O(r^{1+\lambda-m})$$

равномерно в замкнутой области T.

Из теоремы 13, II следует, что существуют также вторые производные от $G-L$, что они непрерывны для $x, y \in T-\mathfrak{F}T$ и $x \neq y$ и выражаются формулой

$$\frac{\partial^2(G-L)}{\partial x_i\,\partial x_k}=Z(x, y)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}\int_T L(x, t)\,dt+$$
$$+\int_T \frac{\partial^2 L(x, t)}{\partial x_i\,\partial x_k}[Z(t, y)-Z(x, y)]\,dt.$$

---

[1]) Жиро [4], стр. 379—384, и [15], стр. 21—29. В теореме 18, II функция β считается не зависящей от $\overline{xx_0}$.

Учитывая, что $Z(x, y) \in N^{(\lambda, \mu)}$, можно получить из этой формулы оценку

$$\frac{\partial^2 (G-L)}{\partial x_i \, \partial x_k} = O(r^{\lambda-m})$$

для любой замкнутой области, содержащейся внутри T.

Таким образом, функция G также является функцией Леви. Естественно задать вопрос, возможно ли найти такую функцию Z, чтобы функция G оказалась фундаментальным решением уравнения $\mathfrak{M}u = 0$. Для этого, в силу (13.7), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$Z(x, y) = \int_T \mathfrak{M}_x L(x, t) Z(t, y) \, dt + \mathfrak{M}_x L(x, y), \tag{19.2}$$

т. е., как видно из сопоставления формул (19.2) и (17.8), функция $Z(x, y)$ должна быть резольвентой ядра $\mathfrak{M}_x L(x, y)$. Так как $\mathfrak{M}_x L(x, y) = O(r^{\lambda-m})$, то для уравнения (19.2) справедлива теория Фредгольма. Следовательно, если единица не является собственным значением ядра $\mathfrak{M}_x L(x, y)$, то функция $Z(x, y)$ однозначно определена и, согласно теореме 17, IV, $Z(x, y) = O(r^{\lambda-m})$.

Наконец, из теоремы 11, III следует, что $Z \in N^{(\lambda, \mu)}$ при $\mu < \lambda$, если $\mathfrak{M}_x L(x, y) \in N^{(\lambda, k)}$ при $\mu \leqslant k \leqslant \lambda$. Это условие выполняется, если, например, положить $L = H$.

В том случае, когда однородное уравнение, соответствующее уравнению (19,2), имеет $p \geqslant 1$ линейно независимых решений, такие рассуждения не проходят. Функцию $G(x, y)$ надо тогда искать в виде

$$G(x, y) = L(x, y) + \int_T L(x, t) Z(t, y) \, dt + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(x) \beta_i(y),$$

где функции α_i и β_i определяются так, чтобы свободный член $\mathfrak{M}_x L(x, y) + \sum \beta_i(y) \mathfrak{M}\alpha_i(x)$ того уравнения, которым заменяется уравнение (19.2), рассматриваемый как функция x, был ортогонален ко всем решениям однородного уравнения, транспонированного к (19.2). При таком выборе α_i и β_i интегральное уравнение, которому должна удовлетворять функция Z, становится разрешимым. Таким образом, доказана следующая теорема[1]):

19, I. *Если коэффициенты эллиптического оператора $\mathfrak{M}$ принадлежат классу $C^{(0, \lambda)}$ в области C, то уравнение $\mathfrak{M}u = 0$ имеет по крайней мере одно фундаментальное решение в каждой ограниченной замкнутой области, содержащейся в C.*

Указанный способ доказательства принадлежит в основных чертах Э. Э Леви [1], который применял его при $L(x, y) = H(y, x)$;

---

[1]) По поводу теоремы 19, I см. примечание автора к русскому изданию помещенное на стр. 221. — *Прим. ред.*

такой выбор функции L требует наложения дополнительных условий на коэффициенты $\mathfrak{M}$. Возможность выбора $L(x, y) = H(x, y)$ была указана Лихтенштейном. Еще раньше Адамар доказал существование фундаментальных решений в аналитическом случае[1].

То, что функция Z есть резольвента ядра $\mathfrak{M}_x L(x, t)$, позволяет дополнить изложенную здесь теорию следующими теоремами:

19, II. *Если мера замкнутой области T достаточно мала, то фундаментальное решение можно получить, положив в формуле* (19.1)

$$Z(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} K^{(n)}(x, y),$$

где $K^{(n)}(x, y)$ — итерации ядра $K(x, y) = \mathfrak{M}_x L(x, y)$.

Действительно, это следует из теоремы 17, V, если только выполняется неравенство

$$\int_T |K(x, y)|\, dy < 1.$$

Но это неравенство выполняется при достаточно малой мере T, так как из предположения, что $K = O(r^{\lambda - m})$, следует, что указанный интеграл есть $O[(\operatorname{mes} T)^{\lambda/m}]$.

19, III. *Если в предположениях теоремы* 19, I *интегральное уравнение*

$$G(x, y) = L(x, y) + \int_T G(x, t)\, \mathfrak{M}_t L(t, y)\, dt \tag{19.3}$$

имеет единственное решение $G(x, y)$, то $G(x, y)$ есть фундаментальное решение уравнения $\mathfrak{M}u = 0$.

Действительно, так как $Z(x, y)$ есть резольвента ядра $\mathfrak{M}_x L(x, y)$, то решение уравнения (19.3) дается формулой (19.1) и поэтому является фундаментальным решением уравнения $\mathfrak{M}u = 0$.

Важное значение для дальнейшего имеет также следующая теорема:

19, IV. *Пусть коэффициенты a_{ik} принадлежат классу $C^{(1, \lambda)}$, а коэффициенты b_i и c — классу $C^{(0, \lambda)}$; пусть, кроме того, $L(x, y)$ — такая функция Леви, что производные $\partial L/\partial y_i$ существуют и являются функциями, дважды дифференцируемыми по переменным x_k, причем удовлетворяются условия* (15.1) *и условие*

$$\mathfrak{M}_x \frac{\partial L(x, y)}{\partial y_i} = -\mathfrak{M}_y \frac{\partial L(y, x)}{\partial x_i} + O(r^{\lambda - m}). \tag{19.4}$$

---

[1] В работах Лихтенштейна [4], стр. 1296, и Адамара [1] содержатся дополнительные библиографические указания по этому предмету. По поводу одного уравнения частного вида см. работу Мартина [1].

Если уравнение (19.2) *имеет единственное решение, то фундаментальное решение* $G(x, y)$, *которое определяется формулой* (19.1), *имеет производные по переменным* y_i; *функции* $\partial G/\partial y_i$ *дважды дифференцируемы по переменным* x_k, *причем для них также справедливы оценки* (15.1), *равномерные в каждой замкнутой области, содержащейся в* C.

Предположения, сделанные относительно функции $L(x, y)$, выполнены, например, если $L = H$. Для краткости мы ограничимся доказательством теоремы в этом случае. Единственная цель этого — не повторять для функции L некоторых рассуждений, проведенных для функции H в п. 18.

Как и в п. 18, положим $\mathfrak{M}_x H(x, y) = K(x, y)$ и построим итерированные ядра $K^{(n)}$, выбрав $T_1 \equiv T$.

При этом дифференциальные свойства функций $K^{(n)}$ сохранятся в любой замкнутой области, лежащей внутри T. То же самое можно сказать о функциях $H^{(p)}$, построенных для $T_1 \equiv T$. Легко видеть, что если в формуле (19.2) положить $Z = K + W$, то для W получится уравнение

$$W(x, y) = \int_T K(x, t)\, W(t, y)\, dt + K^{(1)}(x, y).$$

С учетом того, что Z есть резольвента ядра K, из этого уравнения получается

$$W(x, y) = K^{(1)}(x, y) + \int_T Z(x, t)\, K^{(1)}(t, y)\, dt.$$

Отсюда следует, что

$$G(x, y) = H^{(2)}(x, y) + \int_T \int_T H(x, s)\, Z(s, t)\, K^{(1)}(t, y)\, ds dt,$$

и утверждение теоремы легко вытекает из свойств функций $\partial H^{(2)}/\partial y_i$ и $\partial K^{(1)}/\partial y_i$, установленных в п. 18.

В заключение мы займемся некоторыми приложениями полученных результатов, причем все время будем предполагать, что выполняются условия теоремы 19, I.

Заметим, что если T_1 есть замкнутая область достаточно малой меры, принадлежащая классу $A^{(1, \lambda)}$, то для фундаментального решения $G(x, y)$, построенного согласно теореме 19, II при помощи функции $L = H$ и замкнутой области T_1, при стремлении $\operatorname{mes} T_1$ к нулю справедливо соотношение $G = H[1 + o(1)] > 0$. Поэтому также и функция

$$\omega(x) = \int_{T_1} G(x, y)\, dy$$

положительна в T_1. Из формулы (13.7) следует, что $\mathfrak{M}\omega = -1$. Если в уравнении $\mathfrak{M}u = f$ произвести замену неизвестной функции

$u = v\omega$ и затем разделить уравнение на ω, то для функции v получится уравнение, в котором коэффициент при v равен $-1/\omega$ и поэтому отрицателен.

Из сказанного непосредственно вытекает следующая теорема единственности:

19, V. *Если мера T достаточно мала, то задача Дирихле для уравнения $\mathfrak{M}u = f$ имеет не более одного решения.*

Для доказательства достаточно произвести указанную замену неизвестной функции и затем к преобразованному уравнению применить теорему 5, I.

Справедливо также следующее предложение:

19, VI. *Пусть задана замкнутая область T_1 достаточно малой меры, принадлежащая классу $A^{(1,\lambda)}$. Всегда можно найти такое число $k > 0$, чтобы вторая или третья краевая задача с граничным условием $a^{(l)}du/dl + \beta u = \varphi$, поставленная для любой замкнутой области T, содержащейся в T_1, имела не более одного решения при условии, что $\beta\cos(nl) > k$.*

Действительно, если произвести замену неизвестной функции $u = v\omega$, то для функции v получится уравнение такое же, как получалось выше, с граничным условием

$$a^{(l)}\frac{dv}{dl} + \left(a^{(l)}\frac{d\ln\omega}{dl} + \beta\right)v = \frac{\varphi}{\omega}\cdot$$

Поэтому наше утверждение следует из теоремы 5, II, если только k больше, чем $a^{(l)}\cos(n\nu)\,|d\ln\omega/dl|$.

Та же самая замена неизвестной функции позволяет доказать следующую теорему Жиро[1]:

19, VII. *Если функция $u(x)$ есть регулярное решение уравнения $\mathfrak{M}u = 0$ в $T - y$ и при $x \to y$*

$$u(x) = o(H(x,y)), \tag{19.5}$$

то $u(x)$ непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядка также при $x = y$.

Действительно, применяя в случае необходимости вышеупомянутую замену неизвестной функции, мы всегда можем добиться того, чтобы в некоторой окрестности точки y было $c < 0$.

Пусть теперь $G(x,y)$ — (положительное) фундаментальное решение уравнения $\mathfrak{M}u = 0$, построенное для шара $\Gamma(y, \rho)$ способом,

---

[1] Жиро [16], стр. 281. См. также Жиро [2], стр. 194, Жевре [4] и [12] Асколи [1].

указанным в теореме 19, II; можно проверить, что при достаточно большом M для любого достаточно малого ρ выполняется неравенство

$$\mathfrak{P}G = a\frac{dG}{d\nu} + \frac{M}{\rho}G > 0 \text{ для } x \in \mathfrak{F}\Gamma.$$

Согласно теореме 18, II, ρ можно выбрать настолько малым, что краевая задача $\mathfrak{M}u_1 = 0$ в $\Gamma - \mathfrak{F}\Gamma$, $\mathfrak{P}u_1 = \mathfrak{P}u$ на $\mathfrak{F}\Gamma$ будет иметь решение. Тогда для $\varepsilon > 0$ $[\varepsilon < 0]$ мы имеем

$$\mathfrak{M}[u - u_1 + \varepsilon G] = 0, \quad \mathfrak{P}[u - u_1 + \varepsilon G] > 0 \quad [<0].$$

Из этих условий следует, что функция $u - u_1 + \varepsilon G$ не имеет отрицательных минимумов [положительных максимумов] в $\Gamma - y$. Так как из формулы (19.5) следует, что в некоторой окрестности точки y справедливо неравенство $u - u_1 + \varepsilon G > 0$ $[<0]$, то это неравенство должно выполняться всюду в $\Gamma - y$. Отсюда следует, что $|u - u_1| < |\varepsilon| G$, и, в силу произвольности ε, $u \equiv u_1$. Теорема доказана.

Теорема, подобная только что доказанной, справедлива также для решений эллиптических уравнений, обладающих особенностями не в изолированной точке, а на множестве $p < m$ измерений. Этим вопросом мы займемся в п. 27, а здесь отметим только следующее очевидное следствие теоремы 19, VII:

19, VIII. *Разность $u(x,y)$ двух фундаментальных решений уравнения $\mathfrak{M}u = 0$, определенных в одной и той же замкнутой области T, является регулярным решением уравнения $\mathfrak{M}_x u = 0$ для $x \in T - \mathfrak{F}T$.*

20. Главные фундаментальные решения. Метод построения фундаментальных решений, изложенный в предыдущем пункте, можно было бы применить к построению функции Грина первой или второй краевой задачи в предположении, что эта функция существует. Если, например, мы хотим построить функцию Грина для задачи Дирихле, то можно действовать так же, как при доказательстве теоремы 19, I, исходя из функции $L(x,y)$, обращающейся в нуль на $\mathfrak{F}T$; в случае, когда уравнение (19.2) имеет единственное решение, функция $G(x,y)$, определенная формулой (19.1), также равна нулю при $x \in \mathfrak{F}T$ и поэтому является функцией Грина.

Той функции $L(x,y)$, из которой мы исходили, мы дадим название *квази функции Грина*. Трудность этого метода, развитого Жевре [7], состоит в построении функции $L(x,y)$, для которой условия (8.4) и (8.5) должны выполняться равномерно по $x, y \in T$. Эта трудность не возникала раньше, потому что функция L не должна была удовлетворять никаким граничным условиям и ее можно было считать непрерывной вместе с ее производными при $x \neq y$ в некоторой области C, содержащей T, что мы всюду и предполагали. Позднее Жевре [10] установил, что построение такой функции эквивалентно отысканию самого решения краевой задачи. К исследованию Жевре мы вернемся в п. 24; сейчас мы хотим выяснить, нельзя ли в предположении, что областью определения оператора $\mathfrak{M}$ является все пространство S_m, построить фундаментальное решение, также определенное во всем пространстве и удовлетворяющее некоторым условиям на бесконечности. Эта задача во многом аналогична задаче построения функции Грина, причем условие на бесконечности, заменяющее в этом случае краевое условие, является с некоторой точки зрения более простым, так как здесь не возникает трудностей при выборе исходной функции $L(x,y)$. Однако появляются другие затруднения, связанные с тем, что интегрирование производится по всему пространству. Результаты, полученные Жиро при изучении этой задачи, играют важную роль при сведении различных краевых задач к интегральным уравнениям; сейчас мы вкратце изложим эти результаты. Наиболее подробно мы остановимся на методе, примененном Жиро в работе [16], но учтем также результаты, полученные им ранее в работах [2], [5] и [15].

Назовем функцию $G(x,y)$ *главным фундаментальным решением* уравнения $\mathfrak{M}u = 0$, если она является фундаментальным решением, определенным во всем пространстве S_m, и если существуют две положительные постоянные a и R, такие, что при $r > R$

$$G = O(e^{-ar}), \quad \frac{\partial G}{\partial x_i} = O(e^{-ar}). \tag{20.1}$$

Докажем следующую теорему:

20, I. *Пусть функции a_{ik}, b_i и c ограничены в S_m и принадлежат в S_m классу $C^{(0,\lambda)}$, причем a_{ik} удовлетворяют условию Гёльдера с показателем λ равномерно в S_m. Если дискриминант A ограничен снизу положительным числом, если $c \leqslant 0$ и, кроме того, вне некоторой ограниченной области $c < -g^2$, где $g > 0$, то уравнение $\mathfrak{M}u = 0$ имеет одно главное фундаментальное решение $G(x,y)$.*

В предположении существования функции G единственность ее доказывается очень просто. Действительно, разность двух главных фундаментальных решений является, в силу теоремы 19,VII, регулярным решением уравнения $\mathfrak{M}u = 0$ во всем пространстве. Эта разность равна нулю, так как она стремится к нулю на бесконечности и лишена положительных максимумов и отрицательных минимумов в силу условия $c \leqslant 0$.

Укажем теперь основные идеи доказательства теоремы существования, причем для определенности будем считать, что $m > 2$. Рассмотрим прежде всего уравнение

$$\Delta u - k^2 u = 0. \tag{20.2}$$

Известно[1], что уравнение (20.2) имеет решения, зависящие только от $r = \overline{xy}$, вида

$$F(x, y) = k^{m-2} \varphi(kr), \tag{20.3}$$

где функция $\varphi(t)$ есть решение уравнения Бесселя

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{m-1}{t} \frac{d\varphi}{dt} - \varphi = 0.$$

Кроме того, известно, что это уравнение имеет решение, зависящее от одной произвольной постоянной, которое есть $O(t^{2-m})$ при $|t| < 1$ и $O(e^{-at})$, где $a < 1$, при $t > 1$. Следовательно, можно дать произвольной постоянной такое значение, чтобы функция $F(x, y)$ была главным фундаментальным решением уравнения (20.2).

Положим теперь

$$L(x, y) = \frac{k^{m-2}}{\sqrt{A(y)}} \varphi \left[k \left(\sum_{r,s=1}^{m} A_{rs}(y)(x_r - y_r)(x_s - y_s) \right)^{1/2} \right]. \tag{20.4}$$

Функция $L(x, y)$ есть функция Леви для оператора $\mathfrak{M}$, и для достаточно больших r справедливы оценки

$$L, \ \frac{\partial L}{\partial x_i}, \ \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} = O(e^{-ar}). \tag{20.5}$$

Эта функция является также решением уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(y) \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} - k^2 L = 0.$$

Теперь, если мы хотим найти фундаментальное решение $G_k(x, y)$ уравнения $\mathfrak{M}u - k^2 u = 0$, определенное во всем пространстве, то по аналогии с теоремой 19, III приходим к интегральному уравнению

$$G_k(x, y) = L(x, y) + \int_{S_m} G_k(x, t) K(t, y)\, dt, \tag{20.6}$$

где

$$K(x, y) = \mathfrak{M}_x L - k^2 L = \sum_{i,j=1}^{m} [a_{ij}(x) - a_{ij}(y)] \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial L}{\partial x_i} + cL.$$

---

[1] См. Э. Пикар [2] и Whittaker, Watson, Modern Analysis, гл. XVI и XVII. [Русский перевод: Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, ГТТИ, М. — Л., 1934. — *Прим. ред.*]

К уравнению (20.6) нельзя применять теорию Фредгольма, так как интеграл распространен на все пространство. Однако, в силу (20.5), мы имеем $K = O(e^{-ar})$; эта оценка позволяет построить итерированные ядра $K^{(n)}$. Отсюда следует, что если

$$\int_{Sm} |K(x, y)|\, dx < \rho < 1, \tag{20.7}$$

то уравнение (20.6) имеет решение вида

$$G_k(x, y) = L(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{Sm} L(x, t) K^{(n)}(t, y)\, dt. \tag{20.8}$$

Если в интеграле, стоящем в левой части формулы (20.7), произвести замену переменных $x_i = y_i + t_i/k$, то легко убедиться, что этот интеграл есть $O(k^{-\lambda})$ равномерно по отношению к y. Поэтому условие (20.7) выполнено при достаточно больших k, и функция G_k, заданная формулой (20.8), есть искомое фундаментальное решение.

Однако необходимо заметить, что это последнее заключение не так очевидно, как в случае теоремы 19, III; к нему приходят после трудоемкой проверки, которая необходима потому, что интеграл распространяется на неограниченную область. Проверяется также, что функция G_k удовлетворяет условиям (20.1), и таким образом доказывается, что уравнение $\mathfrak{M}u - k^2u = 0$ имеет главное фундаментальное решение по крайней мере для достаточно больших k.

Рассмотрим теперь уравнение $\mathfrak{M}u - (k - \Delta k)^2 u = 0$, где $\Delta k > 0$, и будем искать его главное фундаментальное решение $G_{k-\Delta k}$. Будем применять наш обычный метод, но положим на этот раз

$$L = G_k, \quad K = \mathfrak{M}_x L - (k - \Delta k)^2 L = \Delta k (2k - \Delta k)\, G_k.$$

Мы придем к интегральному уравнению вида (20.6), для которого условие (20.7) принимает вид

$$\Delta k (2k - \Delta k) \int_{Sm} |G_k(x, y)|\, dx < \rho < 1. \tag{20.9}$$

Это условие выполняется при достаточно малых Δk, и поэтому уравнение $\mathfrak{M}u - (k - \Delta k)^2 u = 0$ также имеет главное фундаментальное решение. За конечное число шагов описанного вида можно будет построить главное фундаментальное решение для уравнения $\mathfrak{M}u = 0$, если только удастся доказать существование такого числа ϑ, что условие (20.9) выполняется при $\Delta k < \vartheta$, каково бы ни было k. Последнее можно установить, если к предположениям, сделанным раньше, добавить предположение, что $c < 0$. Действительно, в таком случае возможно доказать, что существует положительная функция

$\Gamma(x, y)$, мажорирующая все G_k, для которой интеграл $\int\limits_{S_m} \Gamma(t, y)\,dt$ есть ограниченная функция от y.

Таким образом, теорема доказана в предположении, что $c < 0$. Для того чтобы доказать ее в общем случае, обозначим через $\chi(x)$ функцию, принадлежащую в S_m классу $C^{(0, \lambda)}$, равную нулю вне некоторой ограниченной замкнутой области T и такую, что $c-\chi<0$ в T. Согласно ранее доказанному, уравнение $\mathfrak{M}u - \chi u = 0$ имеет главное фундаментальное решение $G^*(x, y)$, которое мы можем принять за функцию L при построении решения G. При таком выборе функции L уравнение (19.3) принимает вид

$$G(x, y) = G^*(x, y) + \int\limits_T G(x, t)\chi(t)\,G^*(t, y)\,dt. \tag{20.10}$$

Из этого уравнения видно, что значения, которые функция G принимает для $y \in \mathfrak{C}T$, определяются теми значениями, которые G принимает для $y \in T$. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением уравнения (20.10) в ограниченной замкнутой области T, где оказывается применимой теория Фредгольма. Поэтому мы докажем разрешимость уравнения (20.10), если установим, что сопряженное однородное уравнение

$$v(t) = \chi(t)\int\limits_T G^*(t, y)\,v(y)\,dy \tag{20.11}$$

имеет только нулевое решение. Интеграл в правой части формулы (20.11) мы обозначим через $\omega(t)$; эта функция определена во всем пространстве, обращается в нуль на бесконечности и является регулярным решением уравнения $\mathfrak{M}\omega = 0$; так как $c \leqslant 0$, то из теоремы 5,VI следует, что $\omega = 0$; поэтому и $v = 0$.

Наша теорема полностью доказана.

Метод, примененный в последней части доказательства, можно применить к построению главного фундаментального решения также и в том случае, когда не предполагается, что $c \leqslant 0$ во всем пространстве S_m, но сохраняется условие, что $c < -g^2$ вне некоторой ограниченной области. Действительно, если функция χ выбрана так же, как выше, то мы снова должны рассматривать уравнение (20.10); однако теперь не удается доказать его разрешимость. Имеет место следующая теорема; мы ограничимся тем, что сформулируем ее.

20, II. *Пусть выполнены условия теоремы* 20, I, *за исключением условия* $c \leqslant 0$; *необходимым и достаточным условием наличия у уравнения* $\mathfrak{M}u = 0$ *главного фундаментального решения является существование и единственность решения уравнения* (20.10). *Если главное фундаментальное решение существует, то оно совпадает с функцией* $G(x, y)$, *заданной формулой* (20,10), Полезно отметить следующее свойство главных фундаментальных решений:

20, III. *В предположениях теоремы* 20, II, *если уравнение* $\mathfrak{M}u = 0$ *имеет главное фундаментальное решение, то для всякой функции* $v(x)$, *принадлежащей в* S_m *классу* $C^{(2,\lambda)}$ *и обращающейся на бесконечности в нуль вместе с* $\mathfrak{M}v$, *справедлива формула*

$$v(x) = -\int\limits_{Sm} G(x, y)\,\mathfrak{M}v(y)\,dy. \tag{20.12}$$

При $c \leqslant 0$ эта формула легко доказывается, если заметить, что разность $u(x)$ между левой и правой частями формулы (20.12) является регулярным решением уравнения $\mathfrak{M}u = 0$, обращается в нуль на бесконечности и, следовательно, равна нулю. В общем случае можно прийти к формуле (20.12), исходя из равенства

$$v(x) = -\int\limits_{Sm} G^*(x, y)\,[\mathfrak{M}v(y) - \chi(y)\,v(y)]\,dy,$$

если преобразовать это равенство с учетом формулы (20.10).

Имеет место также следующая теорема:

20, IV. *Теорема* 20, III *остается справедливой, если предположение, что* v *и* $\mathfrak{M}v$ *обращаются в нуль на бесконечности, заменяется предположением, что* v, $\mathfrak{M}v$ *и* $\partial v/\partial x_i$ *имеют порядок* $O(\rho^p)$, *где* ρ — *расстояние точки* x *от начала координат, а* p — *произвольное положительное число.*

До сих пор мы предполагали, что все коэффициенты оператора $\mathfrak{M}$ принадлежат классу $C^{(0,\lambda)}$; теперь мы хотим посмотреть, какие следствия для функции G влечет за собой усиление этого предположения. Методом, аналогичным тому, который мы применили при доказательстве теоремы 19, IV, можно установить следующее:

20, V. *Если выполнены условия теоремы* 20, I *и если, кроме того, производные* $\partial a_{ik}/\partial x_j$ *существуют, ограничены в* S_m *и удовлетворяют условию Гёльдера с показателем* λ *в каждой ограниченной замкнутой области, то существуют производные* $\partial G/\partial y_i$, *для* $x \neq y$ *они имеют непрерывные производные первого и второго порядка по переменным* x_i; *кроме того, удовлетворяются условия* (15.1) *при* $r < R$ *и условие*

$$\frac{\partial G}{\partial y_i} = O(e^{-ar}) \tag{20.13}$$

при $r > R$.

Справедлива также такая теорема:

20, VI. *Пусть выполнены условия теоремы* 20, V, *за исключением условия* $c \leqslant 0$. *Предположим, кроме того, что функции* e_i *имеют производные первого порядка, ограниченные в* S_m *и удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем* λ *в каждой ограниченной замкнутой области. Если уравнение* $\mathfrak{M}u = 0$ *имеет главное фундаментальное решение* $G(x, y)$, *то сопряженное уравнение* $\mathfrak{N}v = 0$ *также имеет единственное главное фундаментальное решение* $\Gamma(x, y)$ *и*

$$\Gamma(x, y) = G(y, x). \tag{20.14}$$

Начнем со следующего замечания. Если сопряженное уравнение имеет главное фундаментальное решение $\Gamma(x, y)$, то формула (20.14) доказывается методом, аналогичным тому, который был применен при доказательстве теоремы 10, I. А именно, достаточно применить формулу Грина к функциям $G(z, x)$ и $\Gamma(z, y)$, рассматривая их как функции переменной точки z и принимая за область интегрирования шар радиуса R, содержащий точки x и y, из которого исключены окрестности $I(x, \rho)$ и $I(y, \rho)$, и затем перейти к пределу при $R \to \infty$ и $\rho \to 0$. В общем случае мы выбираем функцию $\chi > 0$ так, чтобы уравнения $\mathfrak{M}u - \chi u = 0$ и $\mathfrak{N}v - \chi v = 0$ имели главные фундаментальные решения. Обозначим главное фундаментальное решение первого уравнения через $G^*(x, y)$; тогда решением второго уравнения будет $G^*(y, x)$. Из формулы (20.10) легко следует, что функция $G(x, y)$ дважды дифференцируема по переменным y_i и удовлетворяет уравнению $\mathfrak{N}_y G(x, y) = 0$. Так как функция $G(x, y)$ удовлетворяет условиям (20.13), то она является главным фундаментальным решением уравнения $\mathfrak{N}v = 0$. Единственность Γ следует из формулы (20.14) и из единственности G (теорема 20, II).

Закончим этот пункт следующей теоремой:

20, VII. *В предположениях теоремы* 20, V *для любой функции* $u(x)$, *принадлежащей классу* $C^{(1)}$ *в* T *и обладающей в* $T - \mathfrak{F}T$ *вторыми производными, непрерывными в* $T - \mathfrak{F}T$ *и суммируемыми в* T, *справедлива формула*

$$\theta u(x) = -\int_T G(x, y)\,\mathfrak{M}u(y)\,dy + \\ + \int_{\mathfrak{F}T} [G(x, y)\,\mathfrak{P}u(y) - u(y)\,\mathfrak{Q}_y G(x, y)]\,d_y\sigma, \tag{20.15}$$

где $\theta = 1$ *для* $x \in T - \mathfrak{F}T$ *и* $\theta = 0$ *для* $x \in \mathfrak{C}T$.

Формула (20.15) является непосредственным следствием формул Грина и Стокса, если только выполнены условия теоремы 20, VI, в силу которых можно пользоваться сопряженным оператором.

В общем случае формулу (20.15) получают следующим образом: аппроксимируют коэффициенты оператора $\mathfrak{M}$ многочленами, выписывают формулу, аналогичную (20.15), но относящуюся к аппроксимирующему оператору и его главному фундаментальному решению, а затем переходят к пределу, учитывая, что при непрерывном изменении оператора $\mathfrak{M}$ главное фундаментальное решение меняется непрерывно[1].

21. Сведение задачи Дирихле к интегральным уравнениям. В этом пункте мы изложим исследование задачи Дирихле, проделанное Жиро в работах [2], [15] и [16]. В первой из этих работ рассматривается задача Дирихле в том виде, как мы ее поставили в п. 4; две другие работы касаются задачи Дирихле в обобщенном смысле, о котором будет дано понятие в следующей главе. Однако метод, примененный в работах [15] и [16], особенно в работе [15], применим также, если оставаться в рамках обычной задачи Дирихле, причем результат получается даже при более слабых предположениях, чем в работе [2]. Поэтому в нашем изложении мы будем ближе всего придерживаться методов работ [15] и [16], внося в них упрощения и уточнения там, где это возможно или необходимо в силу того, что постановка задачи Дирихле обычная, а не обобщенная.

Итак, рассмотрим задачу Дирихле:

$$\mathfrak{M}u=f \text{ для } x\in T-\mathfrak{F}T, \quad u=\varphi \text{ для } x\in\mathfrak{F}T, \tag{21.1}$$

причем мы будем предполагать, что функция f непрерывна в T и принадлежит классу $C^{(0,\lambda)}$ в $T-\mathfrak{F}T$, что функция φ непрерывна на $\mathfrak{F}T$ и, наконец, что ограниченная замкнутая область T принадлежит классу $A^{(1,\lambda)}$. Относительно оператора $\mathfrak{M}$ мы сделаем предположения, указанные в условиях теоремы 20,V. В этих предположениях для потенциала двойного слоя, в котором за функцию $L(x, y)$ принято главное фундаментальное решение $G(x, y)$ уравнения $\mathfrak{M}u=0$, справедливы все теоремы п. 15, включая теоремы 15,VI, 15,VII и 15,VIII (последние в силу теоремы 20,VII). Аналогичное замечание можно сделать относительно объемного потенциала, построенного для функции $L=G$; для справедливости теорем, касающихся этого потенциала, достаточно, чтобы оператор $\mathfrak{M}$ удовлетворял лишь условиям теоремы 20,I. Будем теперь искать решение задачи (21.1) в виде

$$u(x)=-\int\limits_T G(x, y)f(y)\,dy-2\int\limits_{\mathfrak{F}T}\mathfrak{Q}_\eta G(x, \eta)\zeta(\eta)\,d_\eta\sigma, \tag{21.2}$$

где оператор $\mathfrak{Q}$ задается формулой (7.2), причем направление l совпадает с ν, а за β принята некоторая функция, отрицательная на $\mathfrak{F}T$ и удовлетворяющая там условию Гёльдера с показателем λ,

---

[1] См. Жиро [15], стр. 65, и [16], стр. 306.

Из формул (13.7) и (15.3) следует, что функция $u(x)$, заданная формулой (21.2), является регулярным решением уравнения $\mathfrak{M}u = f$ в $T - \mathfrak{F}T$ и удовлетворяет поставленным краевым условиям в том и только в том случае, если для $\xi \in \mathfrak{F}T$

$$\zeta(\xi) = 2\int\limits_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{Q}_\eta G(\xi, \eta)\zeta(\eta)\, d_\eta\sigma + \int\limits_T G(\xi, y) f(y)\, dy + \varphi(\xi). \qquad (21.3)$$

Это интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\zeta(\xi)$; так как $\mathfrak{Q}_\eta G(\xi, \eta) = O\left(\overline{\xi\eta}^{\lambda+1-m}\right)$, к нему применима теория Фредгольма. Поэтому разрешимость задачи Дирихле будет установлена, если мы покажем, что однородное уравнение, связанное с (21.3), имеет лишь нулевое решение. Предположим теперь, что функция ζ_0 есть решение однородного уравнения, связанного с (21.3), а u_0 — функция, полученная подстановкой ζ_0 вместо ζ и нуля вместо f в формуле (21.2). Эта функция является решением в T однородной задачи, соответствующей задаче (21.1); согласно теореме единственности 5, I, она тождественно равна нулю. Отсюда следует, что $(\mathfrak{P}u_0)^- = 0$ и, вследствие формулы (15.7), $(\mathfrak{P}u_0)^+ = 0$; формула (15.7) применима, так как, в силу теоремы 15, II, $\zeta_0 \in C^{(0,\lambda)}$. С другой стороны, в $\mathfrak{C}T$ функция u_0 является регулярным решением уравнения $\mathfrak{M}u = 0$, обращающимся в нуль на бесконечности; из теоремы 5,VI вытекает, что функция u_0 тождественно обращается в нуль в $\mathfrak{C}T$ и, следовательно, непрерывна во всем пространстве. Тогда из формулы (15.4) следует, что $\zeta_0 = 0$, что мы и хотели получить. Учитывая теорему единственности 5, I, мы можем сделать следующее заключение:

21, I. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *есть эллиптический оператор, коэффициенты которого в замкнутой области* T *класса* $A^{(1,\lambda)}$ *удовлетворяют условиям:* $a_{ik} \in C^{(1,\lambda)}$, b_i, $c \in C^{(0,\lambda)}$. *Пусть, кроме того, задана функция, непрерывная в* T *и принадлежащая классу* $C^{(0,\lambda)}$ *в* $T - \mathfrak{F}T$, *и функция* φ, *непрерывная на* $\mathfrak{F}T$. *Если* $c \leqslant 0$, *то задача Дирихле* (21.1) *имеет единственное решение, которое дается формулой* (21.2), *где* ζ *есть решение уравнения* (21.3).

Отметим, что в формулировке этой теоремы нет никаких предположений о поведении коэффициентов оператора $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{C}T$. Причина этого в том, что если коэффициенты оператора $\mathfrak{M}$ заданы в T, то их всегда можно продолжить на все пространство так, чтобы они удовлетворяли условиям теоремы 20, V. Действительно, пусть Γ — шар, внутри которого лежит замкнутая область T; положим коэффициенты оператора $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{C}\Gamma$ равными коэффициентам оператора $\Delta u - u = 0$, а затем доопределим их в $\Gamma - T$ так, чтобы сами коэффициенты и первые производные функций a_{ik} удовлетворяли условию Гёльдера с показателем λ. Так как T принадлежит классу $A^{(1,\lambda)}$, такое продолжение возможно в силу теоремы 16, VI. Определенный таким образом во всем пространстве оператор $\mathfrak{M}$ может не быть эллиптическим только на множестве I, лежащем строго внутри $\Gamma - T$; чтобы сделать его и там эллиптическим, достаточно в $\Gamma - T$ прибавить к коэффициентам a_{ii} неотрицательные функции, принадлежащие классу $C^{(1,\lambda)}$, обращающиеся в нуль вместе со своими производными на $\mathfrak{F}(\Gamma - T)$ и достаточно большие в I.

Вернемся теперь к задаче (21.1). Мы сохраним все предположения теоремы 21, I, кроме предположения, что $c \leqslant 0$. В этом случае мы также можем, не нарушая общности, считать, что оператор $\mathfrak{M}$ определен во всем пространстве и удовлетворяет условиям теоремы 20, V, за исключением условия $c \leqslant 0$. Пусть теперь χ — функция класса $C^{(0,\lambda)}$, равная нулю вне некоторой ограниченной области и такая, что $c - \chi \leqslant 0$ в S_m. При таких условиях существует главное фундаментальное решение $G^*(x, y)$ уравнения $\mathfrak{M}u - \chi u = 0$. Согласно теореме 21, I, любое решение задачи (21.1) может быть представлено в виде

$$u(x) = -\int_T G^*(x,y)\, z(y)\, dy - 2\int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{Q}_\eta G^*(x,\eta)\, \zeta(\eta)\, d_\eta\sigma, \tag{21.4}$$

где

$$\begin{aligned} z = f - \chi u = \int_T \chi(x)\, G^*(x,y)\, z(y)\, dy &+ \\ + 2\int_{\mathfrak{F}T} \chi(x)\, \mathfrak{Q}_\eta G^*(x,\eta)\, \zeta(\eta)\, d_\eta\sigma &+ f(x), \end{aligned} \tag{21.5}$$

а функция ζ есть решение уравнения

$$\zeta(\xi) = \int_T G^*(\xi,y)\, z(y)\, dy + 2\int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{Q}_\eta G^*(\xi,\eta)\, \zeta(\eta)\, d_\eta\sigma + \varphi(\xi). \tag{21.6}$$

Обратно, из формул (13.7) и (15.3) следует, что если функции z и ζ удовлетворяют уравнениям (21.5) и (21.6), то функция $u(x)$, определенная формулой (21.4), является решением задачи (21.1). Таким образом, система уравнений (21.5), (21.6) вместе с формулой (21.4) совершенно эквивалентна нашей краевой задаче. С другой стороны, как легко проверить, эта система удовлетворяет условиям теоремы 17, III, и поэтому для нее справедлива теорема об альтернативе. Здесь возможны два случая: или система имеет единственное решение, каковы бы ни были f и φ, и тогда то же самое справедливо и для задачи (21.1); или же соответствующая однородная система имеет p линейно независимых решений. В таком случае также и транспонированная система

$$\left.\begin{aligned} v(x) &= \int_T \chi(y)\, G^*(y, x)\, v(y)\, dy + \int_{\mathfrak{F}T} G^*(\eta, x)\, \omega(\eta)\, d_\eta\sigma, \\ \omega(\xi) &= 2\int_T \chi(y)\, \mathfrak{Q}_\xi G^*(y, \xi)\, v(y)\, dy + 2\int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{Q}_\xi G^*(\eta, \xi)\, \omega(\eta)\, d_\eta\sigma \end{aligned}\right\} \tag{21.7}$$

имеет p линейно независимых решений (v_i, ω_i) и условия разрешимости системы (21.5), (21.6),

$$\int_T f(x)\, v_i(x)\, dx + \int_{\mathfrak{F}T} \varphi(\xi)\, \omega_i(\xi)\, d_\xi \sigma = 0, \qquad (21.8)$$

будут условиями разрешимости задачи (21.1). Кроме того, однородная задача Дирихле в этом случае также будет иметь p линейно независимых решений. Действительно, рассуждениями, аналогичными тем, которые применялись при доказательстве теоремы 21, I, легко показать, что решение (z_0, ζ_0) однородной системы, соответствующей системе (21.5), (21.6), равно нулю, если только функция $u(x)$, которую формула (21.4) ставит в соответствие решению (z_0, ζ_0), тождественно равна нулю в T. Тем самым доказано, что однородная задача Дирихле имеет по крайней мере p линейно независимых решений; с другой стороны, очевидно, что их не может быть больше, чем p.

Итак, доказана следующая теорема:

21, II. *Пусть выполнены условия теоремы* 20, I, *за исключением условия* $c \leqslant 0$. *Для задачи Дирихле имеет место такая альтернатива. Или соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение, и тогда, каковы бы ни были* f *и* φ, *задача* (21.1) *имеет одно и только одно решение, которое выражается формулой* (21.4), *где* (z, ζ) *есть решение системы* (21.5), (21.6). *Или же соответствующая однородная задача имеет* p *линейно независимых решений* $u_1, u_2, \ldots, u_p$; *тогда система* (21.7) *также имеет* p *линейно независимых решений* (v_i, ω_i), *и задача* (21. 1) *разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия* (21.8). *Когда эти условия выполнены, задача имеет бесконечно много решений. Если функция* $\bar{u}$ *есть одно из этих решений, то все другие решения имеют вид* $\bar{u} + \sum c_i u_i$, *где* c_i — *постоянные.*

Из этой теоремы и из теоремы единственности 19, V можно получить такое очевидное следствие:

21, III. *Пусть выполнены условия теоремы* 21, II, *и пусть, кроме того, мера* T *достаточно мала. Тогда задача Дирихле имеет одно и только одно решение.*

Будем теперь предполагать, что выполнены условия теоремы 20, VI, чтобы вместе с задачей (21. 1) можно было рассматривать сопряженную задачу

$$\mathfrak{N} v = g \text{ для } x \in T - \mathfrak{F}T, \quad v = \gamma \text{ для } x \in \mathfrak{F}T. \qquad (21.9)$$

Требование, чтобы коэффициенты $\mathfrak{M}$ были определены во всем S_m, здесь также не является стеснительным, так как, даже если они определены только в T, их всегда можно продолжить на все пространство так, чтобы функции e_i удовлетворяли всем условиям теоремы 20, VI. Для этого достаточно продолжить сначала функции a_{ik} и e_i, а затем найти, как надо продолжать b_i.

Покажем теперь, что если (v, ω) есть решение системы (21.7), то функция v является решением сопряженной однородной задачи. Правая часть первого из уравнений (21.7) имеет смысл также и для $x \in \mathfrak{C}T$, поэтому функцию $v(x)$ можно считать определенной во всем пространстве. Из формулы (14.14) и из второго уравнения системы (21.7) легко следует, что

$$(\mathfrak{D}v)^- = \omega(\xi),\ (\mathfrak{D}v)^+ = 0 \text{ для } \xi \in \mathfrak{F}T. \tag{21.10}$$

Наконец из теоремы 20, VI и из (13.7) вытекает, что

$$\mathfrak{N}v = 0 \text{ для } x \in T - \mathfrak{F}T, \quad \mathfrak{N}v - \chi v = 0 \text{ для } x \in \mathfrak{C}T. \tag{21.11}$$

Если теперь функции χ и β выбраны так, что $c^* - \chi < 0$ и $\beta - b < 0$, где c^* — коэффициент при v в $\mathfrak{N}v$, то из второй формулы (21.11) и из второй формулы (21.10) получается, согласно теореме 5, VI, что $v = 0$ в $\mathfrak{C}T$. Из непрерывности функции v во всем S_m из первой формулы (21.11) следует наше утверждение.

На основании всего сказанного можно прийти к следующему утверждению:

21, IV. *Пусть выполнены условия теоремы* 21, II, *и пусть, кроме того,* $e_i \in C^{(1, \lambda)}$. *Тогда однородная задача Дирихле и сопряженная к ней задача имеют одинаковое число линейно независимых решений* (*положительное число или нуль*). *В частности в случае, когда задача* (21.1) *имеет единственное решение, каковы бы ни были свободный член и граничная функция, то же самое имеет место и для задачи* (21.9). *Если однородная задача имеет p линейно независимых решений, то условия разрешимости неоднородной задачи можно записать в виде*

$$\int_T f(x)\, v_i(x)\, dx + \int_{\mathfrak{F}T} \varphi(\xi)\, a(\xi) \frac{dv_i}{d\nu}\, d_\xi \sigma = 0, \tag{21.12}$$

где функции v_i — *решения сопряженной однородной задачи.*

Действительно, если однородная задача имеет p линейно независимых решений, а сопряженная к ней задача имеет p' линейно независимых решений, то из вышеизложенного следует, что $p \leqslant p'$. Поменяв ролями операторы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, можно получить также, что $p' \leqslant p$, т. е. $p = p'$.

В силу того, что $v = 0$ на $\mathfrak{F}T$, и в силу первой формулы (21.10), имеем $\omega = a dv/d\nu$, поэтому условия (21.8) принимают вид (21.12).

Заметим, что эти условия совпадают с ранее найденными необходимыми условиями разрешимости задачи Дирихле (7.11). Сейчас мы установили достаточность этих условий и, кроме того, доказали их необходимость, не предполагая, что функции u и v_i принадлежат классу $C^{(1)}$ в T. Последнее замечание важно по следующей причине: в то время как функции $v_i \in C^{(1, \lambda)}$, в силу теорем 13, I и 14, VII, этого нельзя утверждать относительно функции u.

Замечание о том, что решения однородной задачи принадлежат классу $C^{(1, \lambda)}$, позволяет утверждать, что в предположениях теоремы 21, IV теорема единственности 7, III применима также к решениям задачи Дирихле из класса $C^{(0)}$. Отсюда следует теорема

21, V. *В предположениях теоремы* (21, IV), *если* $c + c^* \leqslant 0$, *задача Дирихле и сопряженная к ней задача имеют одно и только одно решение.*

В заключение мы займемся исследованием функции Грина для задачи Дирихле; мы увидим, что полученные результаты позволят значительно обобщить доказанные до сих пор теоремы существования.

Пусть выполнены условия теоремы 21, IV и $c \leqslant 0$. Вспомним прежде всего, что, согласно первому определению, данному нами в п. 10, функцией Грина для задачи (21.1) называется функция Леви $F(x, y)$, удовлетворяющая условиям

$$\mathfrak{M}_y F(x, y) = 0 \text{ для } x, y \in T - \mathfrak{F}T \text{ и } x \neq y, \quad F(x, y) = 0 \text{ для } y \in \mathfrak{F}T.$$

Поэтому мы можем положить

$$F(x, y) = G(x, y) + g(x, y),$$

где функция g есть регулярное в области $T - \mathfrak{F}T$ решение уравнения $\mathfrak{M}_y g(x, y) = 0$, удовлетворяющее краевому условию $g(x, y) = -G(x, y)$ для $y \in \mathfrak{F}T$. Таким образом, g является решением сопряженной задачи Дирихле, которая обязательно имеет одно и только одно решение. Решение этой задачи можно построить методом, аналогичным тому, который был применен при решении задачи (21.1) в случае $c \leqslant 0$. Этод метод сводится к тому, что функция $\mathfrak{F}$ записывается в виде

$$F(x, y) = G(x, y) + 2 \int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{P}_\eta G(\eta, y)\, \omega(x, \eta)\, d_\eta \sigma, \tag{21.13}$$

где $\omega(x, \eta)$ для любого $x \in T - \mathfrak{F}T$ является решением интегрального уравнения

$$\omega(x, \xi) = 2 \int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{P}_\eta G(\eta, \xi)\, \omega(x, \eta)\, d_\eta \sigma + G(x, \xi). \tag{21.14}$$

Разрешимость этого уравнения легко доказать. Действительно, если функция $\omega'(\xi)$ есть решение транспонированного однородного уравнения, то функция

$$v(x) = \int_{\mathfrak{F}T} G(x, \xi)\, \omega'(\xi)\, d_\xi \sigma$$

в $\mathfrak{C}T$ удовлетворяет условиям $\mathfrak{M}v=0, (\mathfrak{P}v)^{+}=0$, откуда следует, что $v=0$ для $x \in \mathfrak{C}T$. Так как функция v непрерывна во всем пространстве, мы имеем $v=0$ в T и поэтому $(\mathfrak{P}v)^{-}=\omega'=0$.

Из теорем 15, II и 15, VII легко следует, что для каждой фиксированной точки $x \in T-\mathfrak{F}T$ $\omega(x, \xi)$ как функция ξ принадлежит классу $C^{(1, \lambda)}$ на $\mathfrak{F}T$. Тогда из теоремы 15, VIII можно получить, что $F(x, y)$ как функция y принадлежит в $T-x$ классу $C^{(1, \lambda)}$. Из того, что было установлено в п. 10, можно заключить, что всякое решение задачи (21.1), принадлежащее классу $C^{(1)}$ в T, представляется формулой

$$u(x)=-\int_{T} F(x, y) f(y)\, d y-\int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{Q}_{\eta} F(x, \eta) \varphi(\eta)\, d_{\eta} \sigma. \qquad (21.15)$$

Можно, однако, непосредственно проверить, что функция $u(x)$, определенная формулой (21.15), всегда является решением задачи (21.1). Действительно, это следует из свойств объемных потенциалов и потенциалов двойного слоя, если только предварительно установлены следующие свойства функции $F(x, y)$.

1) Функция $F(x, y)$ удовлетворяет уравнению $\mathfrak{M}_{x} F=0$ и обращается в нуль для $y \in T-\mathfrak{F}T$, $x \in \mathfrak{F}T$.

2) Функция $F(x, y)$ и ее производные первого и второго порядка по переменным x_{i} для любого фиксированного $x \in T-\mathfrak{F}T$ непрерывны по y в $T-x$. Кроме того, $F=O\left(r^{2-m}\right)$ равномерно в T.

3) Для $x \in T$ и $\eta \in \mathfrak{F}T$ равномерно выполняется соотношение

$$\mathfrak{Q}_{\eta} F(x, \eta)=2 \mathfrak{Q}_{\eta} G(x, \eta)+O\left(\overline{x\eta}^{\lambda+1-m}\right).$$

Первое из этих свойств является очевидным следствием теоремы 10, I, второе непосредственно вытекает из формул (21.13) и (21.14), и только доказательство третьего требует применения некоторого аналитического аппарата; доказательство можно найти в работах Жиро[1]).

Полезно отметить, что формулы (21.13) и (21.14) имеют смысл также и тогда, когда отбрасывается предположение о том, что функции e_{i} принадлежат классу $C^{(1, \lambda)}$. Таким образом, функцию $F(x, y)$ можно определить и в том случае, когда выполнены лишь условия теоремы 21, I, причем для функции $F(x, y)$ сохраняются свойства 1), 2) и 3). Выполнение свойства 1) доказывается непосредственно[2]), свойства 2) и 3) устанавливаются, как прежде. Наконец, полученные результаты сохраняются также, если условие $c \leqslant 0$ заменить условием, чтобы для задачи (21.1) была справедлива теорема единственности. Действительно, в этом случае можно доказать[3]), что если выполняется неравенство $c-\chi<0$, а функция

---

[1]) Жиро [16], стр. 338—340.

[2]) Там же.

[3]) Жиро [33], стр. 90.

$F^*(x,y)$ является функцией Грина, относящейся к задаче Дирихле для оператора $\mathfrak{M}u - \chi u$, то функцию Грина для задачи (21.1) можно получить, решая одно из следующих двух интегральных уравнений:

$$F(x,y) = F^*(x,y) + \int_T F^*(x,t)\,\chi(t)\,F(t,y)\,dt, \tag{21.16}$$

$$F(x,y) = F^*(x,y) + \int_T F(x,t)\,\chi(t)\,F^*(t,y)\,dt. \tag{21.17}$$

Следовательно, мы можем сделать такое заключение:

21, VI. *Если для задачи* (21.1) *в предположениях теоремы* 21, II *справедлива теорема единственности, то существует функция Грина* $F(x,y)$ *задачи* (21.1) *и любое решение этой задачи дается формулой* (21.15).

Добавим еще, что когда для задачи (21.1) теорема единственности не имеет места, все же можно построить такую функцию $F(x,y)$, что решение задачи (21.1), когда оно существует, представляется формулой (21.15). Эту функцию, которая, впрочем, определена неоднозначно, мы назовем *функцией Грина в обобщенном смысле*. Например, согласно Лихтенштейну[1], можно определить функцию $F(x,y)$, наложив на нее, кроме обычных условий при $x \to y$, условия

$$\mathfrak{M}_x F = \sum_{n=1}^{p} v_n(x)\,v_n(y) \quad \text{для } x \in T - \mathfrak{F}T,$$

$$F(x,y) = 0 \quad \text{для } x \in \mathfrak{F}T, \qquad \int_T u_n(x)\,F(x,\,y)\,dx = 0 \quad (n = 1, \ldots, p),$$

где функции u_n и v_n являются решениями, обращающимися в нуль на $\mathfrak{F}T$, уравнения $\mathfrak{M}u = 0$ и сопряженного к нему уравнения соответственно, причем системы функций u_n и v_n ортогональные и нормированные. Действительно, при определенной таким образом функции $F(x,\,y)$ функция $u(x)$, построенная согласно формуле (21.15), удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{M}u = f(x) - \sum_{n=1}^{p} v_n(x) \left[\int_T f(y)\,v_n(y)\,dy + \int_{\mathfrak{F}T} \varphi(\eta)\,a(\eta)\,\frac{dv_n}{d\nu}\,d_\eta \delta \right];$$

следовательно, функция $u(x)$ — решение задачи (21.1), если выполнены условия совместности (21.12). Она является даже единственным решением задачи, ортогональным ко всем u_n. Что касается доказательства существования функции $F(x,\,y)$, то мы отсылаем читателя к цитированной работе Лихтенштейна или к работе Жиро [42],

---

[1] Лихтенштейн [5], гл. II, § 3.

в которой рассмотрены многие другие способы определения функции $F(x, y)$.

В заключение укажем, как можно еще расширить сферу действия доказанных теорем существования. С этой целью заметим, что метод построения функции Грина, основанный, при условии $c \leqslant 0$, на уравнениях (21.13) и (21.14), пригоден также в случае, когда предполагается только, что $a_{ik} \in C^{(0, \lambda)}$. Действительно, согласно теореме 20, I, это предположение обеспечивает существование функции G, а в указанном методе функция G дифференцируется только по переменным x_i. Функция $F(x, y)$ также и в этом случае обладает свойствами 1) и 2), и лишь свойство 3) теряется, так как функцию G нельзя дифференцировать по переменным y_i. Во всяком случае из тех свойств функции F, которые остаются справедливыми следует, что функция

$$u(x) = -\int_T F(x, y) f(y)\, dy$$

является решением задачи (21.1) при $\varphi = 0$.

Если теперь мы хотим решить указанную задачу, отбросив условие $c \leqslant 0$, но по-прежнему предполагая, что $\varphi = 0$, то можно построить функцию Грина $F^*(x, y)$ для оператора $\mathfrak{M}u - \chi u$, где, как обычно, $c - \chi < 0$; поставленная краевая задача эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \int_T \chi(y) F^*(x, y) u(y)\, dy - \int_T F^*(x, y) f(y)\, dy, \qquad (21.18)$$

к которому применима теория Фредгольма.

Отсюда следует теорема

21, VII. *Если все коэффициенты оператора* $\mathfrak{M}$ *принадлежат классу* $C^{(0, \lambda)}$ *в замкнутой области* T *класса* $A^{(1, \lambda)}$ *и если, кроме того, функция* f *непрерывна в* T *и принадлежит классу* $C^{(0, \lambda)}$ *в* $T - \mathfrak{F}T$, *то для задачи* (21.1) *при* $\varphi = 0$ *справедлива теорема об альтернативе. Если* $c \leqslant 0$, *то решение существует и единственно.*

Естественно теперь спросить, имеет ли место подобный результат также и при $\varphi \neq 0$. Это связано с возможностью доказать дифференцируемость функции F^* по переменным y_i. Жиро в работе [34] указал способ достижения этой цели. Однако он ограничился тем, что дал лишь набросок метода, не входя в подробности доказательства, которое, по крайней мере на первый взгляд, кажется довольно трудоемким. Так как, с другой стороны, можно прийти к этому результату совсем иным способом, который будет изложен в гл. V (п. 36), то мы не будем останавливаться на этом вопросе.

22. Сведение задачи Неймана к интегральным уравнениям. В этом пункте мы изложим исследование задачи Неймана, проведенное Жиро в работах [5], [15] и [16]. Это исследование во многом аналогично исследованию задачи Дирихле, и поэтому наше изложение здесь будет более сжатым, чем в предыдущем пункте.

Итак, рассмотрим задачу Неймана

$$\mathfrak{M}u = f \text{ для } x \in T - \mathfrak{F}T, \qquad \mathfrak{P}u = \varphi \text{ для } x \in \mathfrak{F}T \tag{22.1}$$

и будем предполагать, что замкнутая область T принадлежит классу $A^{(1,\lambda)}$, что коэффициенты оператора $\mathfrak{M}$ принадлежат классу $C^{(0,\lambda)}$ в T, что функция β, входящая в оператор $\mathfrak{P}$, непрерывна на $\mathfrak{F}T$ и, наконец, что f и φ удовлетворяют таким же условиям, как в п. 21.

Начнем с того, что рассмотрим случай, когда $c \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ и хотя бы одна из функций c и β не обращается в нуль тождественно. Здесь мы также не нарушим общность, если предположим, что коэффициенты оператора $\mathfrak{M}$ заданы во всем пространстве S_m и удовлетворяют условиям теоремы 20, I. Пусть функция $G(x, y)$ является главным фундаментальным решением уравнения $\mathfrak{M}u = 0$. Будем искать решение задачи (22.1) в виде

$$u(x) = -\int\limits_T G(x, y) f(y)\, dy + 2\int\limits_{\mathfrak{F}T} G(x, \eta)\, \zeta(\eta)\, d_\eta\sigma, \tag{22.2}$$

где функция ζ непрерывна на $\mathfrak{F}T$. Функция (22.2) всегда удовлетворяет уравнению $\mathfrak{M}u = f$; для того, чтобы она удовлетворяла также и краевому условию, необходимо и достаточно, согласно формуле (14.14), чтобы для $\xi \in \mathfrak{F}T$ функция ζ удовлетворяла уравнению

$$\zeta(\xi) = -2\int\limits_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{P}_\xi G(\xi, \eta)\, \zeta(\eta)\, d_\eta\sigma + \int\limits_T \mathfrak{P}_\xi G(\xi, y) f(y)\, dy + \varphi(\xi). \tag{22.3}$$

Для этого интегрального уравнения справедлива теорема об альтернативе, потому что его ядро есть $O\left(\overline{\xi\eta}^{\lambda+1-m}\right)$. Так же, как в случае уравнения (21.14), но переменив ролями T и $\mathfrak{C}T$, можно доказать, что любое решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (22.3), равно нулю; отсюда следует, что уравнение (22.3) имеет одно и только одно решение.

Теперь мы хотим отказаться от предположения, что $c \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$. Рассмотрим функцию χ, принадлежащую классу $C^{(0,\lambda)}$, равную нулю вне некоторой ограниченной области и такую, что $c - \chi < 0$, и функцию ψ, непрерывную на $\mathfrak{F}T$, такую, что $\beta + \psi > 0$. Если $G^*(x, y)$ есть главное фундаментальное решение уравнения $\mathfrak{M}u - \chi u = 0$, то любое решение задачи (22.1) представляется в виде

$$u(x) = -\int\limits_T G^*(x, y)\, z(y)\, dy + 2\int\limits_{\mathfrak{F}T} G^*(x, \eta)\, \zeta(\eta)\, d_\eta\sigma, \tag{22.4}$$

где $z = f - \chi u$, а функция ζ определяется из условия $\mathfrak{P}u + \psi u = \varphi + \psi u$. Для того чтобы функция (22.4) была решением задачи (22.1), необходимо и достаточно, чтобы функции z и ζ удовлетворяли следующей системе интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} z(x) = \int_T \chi(x)\, G^*(x, y)\, z(y)\, dy \,-& \\ -2\int_{\mathfrak{F}T} \chi(x)\, G^*(x, \eta)\, \zeta(\eta)\, d_\eta\sigma + f(x),& \\ \zeta(\xi) = \int_T \mathfrak{P}_\xi G^*(\xi, y)\, z(y)\, dy \,-& \\ -2\int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{P}_\xi G^*(\xi, \eta)\, \zeta(\eta)\, d_\eta\sigma + \varphi(\xi).& \end{aligned}\right\} \tag{22.5}$$

Эта система вместе с равенством (22.4) эквивалентна задаче (22.1). Легко доказать, что всякое решение однородной системы, соответствующей системе (22.5), равно нулю, если только для него функция $u(x)$, построенная по формуле (22.4), тождественно обращается в нуль. Для системы (22.5) выполнены условия теоремы 17, II, и, следовательно, для нее справедлива теорема об альтернативе. Из эквивалентности системы (22.5) и задачи (22.1) следует, что эта теорема справедлива также и для задачи (22.1). Если однородная задача, соответствующая задаче (22.1), имеет p линейно независимых решений, то столько же линейно независимых решений (v_i, ω_i) имеет однородная транспонированная система

$$\left.\begin{aligned} v(x) = \int_T \chi(y)\, G^*(y, x)\, v(y)\, dy + \int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{P}_\eta G^*(\eta, x)\, \omega(\eta)\, d_\eta\sigma,& \\ \omega(\xi) = -2\int_T \chi(y)\, G^*(y, x)\, v(y)\, dy \,-& \\ -2\int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{P}_\eta G^*(\eta, \xi)\, \omega(\eta)\, d_\eta\sigma,& \end{aligned}\right\} \tag{22.6}$$

и условия разрешимости системы (22.5), а следовательно, и задачи (22.1) можно написать в виде

$$\int_T f(x)\, v_i(x)\, dx - \int_{\mathfrak{F}T} \varphi(\xi)\, v_i(\xi)\, d_\xi\sigma = 0, \tag{22.7}$$

так как из формулы (15.3) легко вытекает, что $\omega_i = -v_i$ на $\mathfrak{F}T$.

Подводя итог всему сказанному и учитывая теорему 5, IV, мы можем сделать следующее заключение:

22, I. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *эллиптический оператор, коэффициенты которого принадлежат классу* $C^{(0,\lambda)}$ *в замкнутой области* T

класса $A^{(1,\lambda)}$; *пусть, кроме того,* f — *функция, непрерывная в* T *и принадлежащая классу* $C^{(0,\lambda)}$ *в* $T-\mathfrak{F}T$, *а* φ — *функция, непрерывная на* $\mathfrak{F}T$. *Если функция* β, *входящая в оператор* $\mathfrak{P}$, *также непрерывна, то для задачи Неймана* (22.1) *имеет место следующая альтернатива. Или соответствующая однородная задача имеет лишь нулевое решение, и тогда при любых* f *и* φ *задача* (22.1) *имеет одно и только одно решение, которое дается формулой* (22.4), *где* (z, ζ) *есть решение системы* (22,5), *или же соответствующая однородная задача имеет* p *линейно независимых решений* $u_1, u_2, \ldots, u_p$; *тогда система* (22.6) *также имеет* p *линейно независимых решений* (v_i, ω_i) *и задача* (22.1) *разрешима в том и только в том случае, когда выполнены условия* (22.7). *Когда эти условия выполнены, задача* (22.1) *имеет бесконечно много решений. Если функция* $\bar{u}$ *есть одно из этих решений, то все другие имеют вид* $\bar{u}+\sum c_i u_i$. *Если* $c=0$, $\beta=0$, *то* $p=1$, $u_1=1$. *Если* $c\leqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, *причем хотя бы одна из функций* c *и* β *не равна тождественно нулю, то справедлива теорема существования и единственности.*

Учитывая теорему 19, VI, можно доказать следующее утверждение.

22, II. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы, и пусть, кроме того, мера* T *достаточно мала. Тогда можно найти такое число* k, *что задача Неймана для любой замкнутой области, содержащейся в* T, *имеет одно и только одно решение, если только* $\beta > k$.

Посмотрим теперь, как можно уточнить этот результат тогда, когда a_{ik}, $e_i \in C^{(1,\lambda)}$ и можно рассматривать сопряженную задачу

$$\mathfrak{R}v = g \text{ для } x \in T-\mathfrak{F}T, \quad \mathfrak{Q}v = \gamma \text{ для } x \in \mathfrak{F}T. \tag{22.8}$$

В случае, когда однородная задача, соответствующая задаче (22.1), имеет p линейно независимых решений, для соответствующих функций v_i выполняются равенства

$$\mathfrak{R}v_i - \chi v_i = 0 \text{ при } x \in \mathfrak{C}T, \quad v_i^+ = 0 \text{ на } \mathfrak{F}T.$$

Отсюда следует, что функции v_i тождественно равны нулю в $\mathfrak{C}T$, и поэтому $(\mathfrak{Q}v_i)^+ = 0$. Применяя формулу (15.7), в которой оператор $\mathfrak{Q}$ играет роль оператора $\mathfrak{P}$, можно из этого получить, что $(\mathfrak{Q}v_i)^- = 0$.

Так как в $T-\mathfrak{F}T$ мы имеем $\mathfrak{R}v_i = 0$, то функции v_i являются решениями однородной сопряженной задачи. Как и в случае задачи Дирихле, отсюда следует теорема

22, III. *Пусть выполнены условия теоремы* 22. I, *и пусть, кроме того,* a_{ik}, $e_i \in C^{(1,\lambda)}$. *Тогда однородная задача Неймана и сопряженная к ней задача имеют одинаковое число (положительное или* *нуль) линейно независимых решений. В частности, в случае, когда задача* (22.1) *имеет единственное решение, каковы бы ни были свободный член и функции, входящие в граничные условия, то же самое имеет место и для задачи* (22.8). *Если однородная задача имеет p линейно независимых решений, то условия разрешимости неоднородной задачи можно написать в виде* (22.7), *где функции v_i — решения сопряженной однородной задачи.*

Как и в случае задачи Дирихле, мы при более общих предположениях нашли условия разрешимости (22.7), уже установленные в п. 7 с помощью функции Грина. Рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при доказательстве теоремы 21, V, позволяют доказать следующую теорему:

22, IV. *Пусть выполнены условия теоремы* 22, III, *и пусть, кроме того,* $c+c^* \leqslant 0$, $2\beta-b \geqslant 0$, *причем одна из функций β и c не равна тождественно нулю. Тогда задача Неймана и сопряженная к ней задача имеют одно и только одно решение.*

Мы можем добавить, сославшись на Жиро 1), что всегда, когда для задачи (22.1) выполняется теорема единственности, решение задачи может быть представлено в виде (10.5), где $F(x, y)$ — функция Грина рассматриваемой задачи.

Если $c \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, то

$$F(x, y) = G(x, y) + 2\int\limits_{\mathfrak{F}T} G(\eta, y)\,\omega(x, \eta)\,d_\eta\sigma,$$

где ω есть решение уравнения

$$\omega(x, \xi) = -2\int\limits_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{Q}_\xi G(\eta, \xi)\,\omega(x, \eta)\,d_\eta\sigma + G(x, \xi),$$

а в общем случае функция $F(x, y)$ является решением интегральных уравнений

$$F(x, y) = F^*(x, y) + \int\limits_T F(x, t)\,\chi(t)\,F^*(t, y)\,dt - \int\limits_{\mathfrak{F}T} F(x, t)\,\psi(t)\,F^*(t, y)\,d_t\sigma,$$

$$F(x, y) = F^*(x, y) + \int\limits_T F^*(x, t)\,\chi(t)\,F(t, y)\,dt - \int\limits_{\mathfrak{F}T} F^*(x, t)\,\psi(t)\,F(l, y)\,d_t\sigma,$$

где F^* — функция Грина задачи $\mathfrak{M}u - \chi u = f$, $\mathfrak{P}u + \psi u = \varphi$, а функции χ и ψ выбраны так, как было указано выше.

---

1) Жиро: [16], стр. 324, [33], стр. 93, и [42].

Наконец, в случае, когда теорема единственности не имеет места, решение задачи, если оно существует, всегда может быть представлено в виде (10.5), если ввести соответствующую функцию Грина в обобщенном смысле.

23. Сведение задачи с косой производной к интегральным уравнениям. Если мы попытаемся исследовать третью краевую задачу тем методом, который применялся в п. 22, то мы встретим серьезные затруднения. Пусть оператор $\mathfrak{P}$ построен нами, исходя из направления l, которое, вообще говоря, не совпадает с ν, но удовлетворяет условию $\cos(ln) > 0$. Можно попытаться решить задачу, принимая за неизвестную функцию u выражение вида (22.2) или (22.4). Таким образом мы снова придем к уравнению (22.3) или к системе (22.5), но интеграл, под знаком которого стоит неизвестная функция ζ в формуле (22.3), и аналогичный интеграл, входящий во вторую из формул (22.5), понимаются здесь в смысле главного значения (теорема 14, VI), поэтому они имеют смысл только тогда, когда ζ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ.

К уравнениям, полученным таким образом, вообще говоря, не применима теория Фредгольма, потому что при применении метода итерированных ядер уже нельзя пользоваться теоремами 11, II и 12, IV. Тем не менее Жиро доказал сначала [27] для $m=2$ и $m=3$, а затем [39] и для общего случая[1]), что для тех уравнений, которые возникают при изучении нашей задачи, теорема об альтернативе все же справедлива, если только предполагать, что функции β и φ, а также направляющие косинусы направления l удовлетворяют условию Гёльдера с показателем λ. Замкнутая область T предполагается, как всегда, принадлежащей классу $A^{(1,\lambda)}$.

Мы дадим самое общее понятие о методе Жиро, ограничиваясь случаем одного уравнения (22.3), которое мы запишем, введя параметр μ, в виде

$$\zeta(\xi)=\mu\int\limits_{\mathfrak{F}T}^{*} K(\xi,\ \eta)\,\zeta(\eta)\,d_{\eta}\sigma+\varphi(\xi). \tag{23.1}$$

Наиболее сложная часть исследования Жиро состоит в доказательстве того, что для ядра K того частного вида, который нас интересует, можно построить такое ядро $H(\xi,\ \eta,\ \mu)$, что оно, как

---

[1]) Другие результаты относительно интегральных уравнений, где интегралы понимаются в смысле главного значения, содержатся в работах Жиро, цитированных в конце п. 17, а также в монографии С. Г. Михлина, Сингулярные интегральные уравнения, УМН, **3** (1948), 29—112.

и K, есть $O(\overline{\xi\eta}^{1-m})$ и, каково бы ни было действительное или комплексное число μ, выполняются равенства

$$\left.\begin{aligned} M(\xi, \eta, \mu) &= K(\xi, \eta) - H(\xi, \eta, \mu) + \\ &+ \mu \int\limits_{\mathfrak{S}T}^{*} H(\xi, \tau, \mu) K(\tau, \eta)\, d_\tau\sigma = O(\overline{\xi\eta}^{\lambda+1-m}), \\ N(\xi, \eta, \mu) &= K(\xi, \eta) - H(\xi, \eta, \mu) + \\ &+ \mu \int\limits_{\mathfrak{S}T}^{*} K(\xi, \tau) H(\tau, \eta, \mu)\, d_\tau\sigma = O(\overline{\xi\eta}^{\lambda+1-m}). \end{aligned}\right\} \qquad (23.2)$$

Интегралы, входящие в эту формулу, взяты в смысле главного значения; это касается как особенности в точке ξ, так и особенности в точке η. Кроме того, существует функция $\Phi(\xi, \mu)$, которая действительна и положительна для действительных μ и такова, что для любой функции ζ, удовлетворяющей условию Гёльдера с показателем λ, справедливо соотношение

$$\int\limits_{\mathfrak{S}T}^{*} H(\xi, \tau, \mu)\, d_\tau\sigma \int\limits_{\mathfrak{S}T}^{*} K(\tau, \eta)\, \zeta(\eta)\, d_\eta\sigma = -\zeta(\xi)\, \Phi(\xi, \mu) + \\ + \int\limits_{\mathfrak{S}T}^{*} \zeta(\eta)\, d_\eta\sigma \int\limits_{\mathfrak{S}T}^{*} H(\xi, \tau, \mu) K(\tau, \eta)\, d_\tau\sigma.$$

Эта формула выполняется с той же самой функцией Φ, если поменять ролями ядра H и K.

Теперь легко проверить, что любое решение уравнения (23.1) одновременно является решением уравнения

$$[1 + \mu^2 \Phi(\xi, \mu)]\, \zeta(\xi) = \mu \int\limits_{\mathfrak{S}T} M(\xi, \eta, \mu)\, \zeta(\eta)\, d_\eta\sigma + f(\xi, \mu), \qquad (23.3)$$

где

$$f(\xi, \mu) = \varphi(\xi) + \mu \int\limits_{\mathfrak{S}T}^{*} H(\xi, \eta, \mu)\, \varphi(\eta)\, d_\eta\sigma.$$

В силу первой из формул (23.2), для уравнения (23.3) справедлива теорема об альтернативе, если только μ не принадлежит к множеству M тех значений μ, для которых существует по крайней мере одна точка ξ, такая, что $1 + \mu^2 \Phi(\xi, \mu) = 0$. Это множество расположено на двух полупрямых мнимой оси, исходящих из двух точек, симметричных относительно начала координат. Кроме того, функции H и Φ голоморфны относительно μ, и значения μ, не принадлежащие M, для которых уравнение (23.3) неразрешимо, совпадают с нулями некоторой голоморфной функции и потому образуют конечное или счетное множество M_1. Следовательно, если μ не принадлежит $M+M_1$, то уравнение (23.1) имеет не более одного решения.

С другой стороны, если положить

$$\zeta(\xi)=\rho(\xi)+\mu\overset{*}{\int\limits_{\mathfrak{F}T}} H(\xi,\eta,\mu)\rho(\eta)\,d_\eta\sigma, \tag{23.4}$$

то уравнение (23.3) преобразуется в уравнение относительно функции ρ

$$[1+\mu^2\Phi(\xi,\mu)]\rho(\xi)=\mu\int\limits_{\mathfrak{F}T} N(\xi,\eta,\mu)\rho(\eta)\,d_\eta\sigma+\varphi(\xi). \tag{23.5}$$

Из каждого решения этого уравнения можно с помощью формулы (23.4) получить решение уравнения (23.1). Но уравнение (23.5) разрешимо, когда μ не принадлежит $M+M_2$, где M_2 — другое счетное множество; следовательно, если μ не принадлежит множеству $M+M_1+M_2$, то уравнение (23.1) имеет одно и только одно решение. Можно показать, что это решение дается формулой вида

$$\zeta(\xi)=\frac{\varphi(\xi)}{1+\mu^2\Phi(\xi,\mu)}+\mu\overset{*}{\int\limits_{\mathfrak{F}T}}\Gamma(\xi,\eta,\mu)\varphi(\eta)\,d_\eta\sigma,$$

где Γ — мероморфная функция μ в комплексной плоскости, из которой исключено множество M, причем полюсы функции Γ не зависят от ξ и η.

Наконец, более глубокое изучение резольвенты $\Gamma(\xi,\eta,\mu)$ показывает, что всегда, когда Γ имеет полюс, однородные уравнения, соответствующие уравнению (23.1) и транспонированному уравнению, имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений и что в случае, когда μ является полюсом для Γ, необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (23.1) является ортогональность функции φ ко всем решениям транспонированного однородного уравнения.

После того как на интегральные уравнения, к которым сводится третья краевая задача, распространена теория Фредгольма, исследование этих уравнений проводится совершенно так же, как в случае задачи Неймана. Таким образом мы приходим к следующим теоремам:

23, I. *В предположении, что* β, φ *и направляющие косинусы* l *удовлетворяют условиям Гёльдера на* $\mathfrak{F}T$, *теорема* 22.I *справедлива также и для третьей краевой задачи.*

23, II. *Если, кроме того, предположить, что направляющие косинусы* l *принадлежат классу* $C^{(1,\lambda)}$, *то для третьей краевой задачи справедлива также и теорема* 22, III.

При доказательстве последней теоремы возникают некоторые затруднения, связанные с тем, что формула (15.7) была установлена только для случая $l \equiv \nu$, но мы не будем на этом останавливаться. Заметим, что в случае $m = 2$ исследование, напротив, сильно упрощается, так как в этом случае при изучении уравнения (23.1) можно положить $H = K$.

Постараемся теперь выяснить в общих чертах, какие трудности встречаются при изучении третьей краевой задачи, когда отбрасывается предположение, что $\cos(ln) > 0$. Тогда следует писать краевое условие в виде

$$\mathfrak{L}u = a\cos(n\nu)\frac{du}{dl} + \beta u = \varphi.$$

Если, например, решение задачи ищется в виде (22.2), то для функции ζ получается интегральное уравнение

$$\zeta(\xi)\cos(ln) = -2\int\limits_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{L}_\xi G(\xi, \eta)\zeta(\eta)\,d_\eta\sigma + \\ + \int\limits_T \mathfrak{L}_\xi G(\xi, y) f(y)\,dy + \varphi(\xi), \tag{23.6}$$

которое уже не является уравнением второго рода, так как коэффициент при ζ может обращаться в нуль в некоторой точке или на некоторой части $\mathfrak{F}T$. Однако, если к этому уравнению можно применить метод, использованный для изучения уравнения (23. 1), то (23. 6) преобразуется в уравнение, в котором коэффициент при ζ равен $[\cos(ln) + \mu^2\Phi]$ и которое является уравнением второго рода, если $\cos(ln)$ и Φ не обращаются одновременно в нуль. Поэтому можно надеяться таким путем разрешить уравнение (23. 6). В случае $m = 2$ такое исследование провел Жиро в работе [53], выяснив, что для уравнения вида (23. 6) может представиться случай, когда однородное уравнение, соответствующее уравнению (23. 6), и транспонированное к нему уравнение имеют различное число линейно независимых решений. Однако остается справедливым утверждение, что условием разрешимости является ортогональность свободного члена к решениям однородного транспонированного уравнения. Естественным следствием этого является тот факт, что из существования решения не следует его единственность, и наоборот[1].

Хотя Жиро приходит к действительно интересным результатам, касающимся теории интегральных уравнений, он посвящает лишь несколько строк приложению этих результатов к изучению третьей краевой задачи. Он ограничивается утверждением, что таким путем можно было бы распространить на краевые задачи для эллипти-

---

[1] По этому вопросу см. также работу Михлина, цитированную в примечании к стр. 89, и работу [1] Нётера.

ческих уравнений с двумя переменными результаты, полученные Льенаром [1, 2] для аналогичных краевых задач, поставленных для гармонических функций. Льенар связал разность между числом линейно независимых решений однородной задачи и числом условий разрешимости с порядком связности замкнутой области T и с тем, как изменяется угол между направлением $l(\xi)$ и некоторым фиксированным направлением, когда точка ξ перемещается по некоторой компоненте $\mathfrak{F}T$. Было бы, без сомнения, интересно уточнить и развить это утверждение Жиро, имея в виду и возможность его распространения на случай любого m[1]. Надо принять во внимание, что, по мнению Жиро, такое исследование, по крайней мере в первом приближении, должно быть ограничено отысканием тех решений задачи, которые принадлежат классу $C^{(1)}$ в T. По этому поводу полезно вспомнить, что, согласно одному из последних результатов Фикеры [18], относящихся к гармоническим функциям, именно такого рода ограничение вызывает увеличение числа условий разрешимости задачи.

Вернемся теперь к предположению, что $\cos(ln) > 0$. В работах [46, 47, 50] Жиро дал еще и другой метод доказательства теоремы об альтернативе для третьей краевой задачи. Мы приведем здесь самый сжатый обзор этого метода.

Пусть $\beta > 0$; рассмотрим третью краевую задачу для уравнения $\mathfrak{M}u - g^2u = f$, где g — постоянная. Можно доказать, что существует такая функция Леви $L_g(x, y)$, что $\mathfrak{P}_\xi L_g(\xi, \eta)$ есть $O\left(\overline{\xi\eta}^{\lambda+1-m}\right)$ для $\xi, \eta \in \mathfrak{F}T$. Будем искать функцию u в виде (18.12), где $L = L_g$; мы придем тогда к системе интегральных уравнений, для которой справедлива теорема об альтернативе. Более того, можно показать, что при достаточно большом g число M, о котором говорится в теореме 17, V, меньше 1. Отсюда вытекает разрешимость системы, а следовательно, и теорема существования для рассматриваемой краевой задачи. Из этого следует, что каждое решение третьей краевой задачи для уравнения $\mathfrak{M}u = f$ может быть записано в виде (18.12) даже в том случае, когда условие $\beta > 0$ не выполняется; поэтому можно написать систему интегральных уравнений, совершенно эквивалентную нашей краевой задаче.

Таким путем можно доказать следующую замечательную теорему:

23, III. *Теорема* 23, I *справедлива также и в том случае, когда предполагается только непрерывность функций* β *и* φ *на* $\mathfrak{F}T$.

Конечно, самой сложной частью доказательства является построение функции $L_g(x, y)$.

---

[1] По поводу случая $m = 2$ см. также Жиро [52], Хведелидзе [1] и Иоахим и Иоганн Ниче [1].

24. Метод квази функций Грина. В этом пункте мы займемся методом сведения различных краевых задач к интегральным уравнениям, который впервые применил Леви [2] в случае $m=2$. Позднее этот метод был применен в общем случае Жевре [10]. Этот метод аналогичен так называемому методу parametrix (функции особенностей), примененному в частном случае Гильбертом [1]. Несколько лет назад его изучение возобновил Зауэр [1].

Заметим сразу, что этот метод до сих пор не дал результатов, сравнимых с результатами, которые получил Жиро, систематически применяя главные фундаментальные решения. Однако этот метод интересен именно потому, что он не требует предварительного построения фундаментального решения. Кроме того, он применим к изучению краевых задач для уравнений порядка $2r$, где $r > 1$, и, по крайней мере в случае $m=2$, является методом, который позволяет рассматривать эти краевые задачи при самых общих предположениях относительно коэффициентов уравнения (см. гл. VII, п. 55).

Мы здесь занимаемся исключительно уравнениями второго порядка. Для них этот метод отличается от метода п. 18 только определенным выбором функции $L(x, y)$. Следуя Леви, мы изложим метод для задачи Дирихле с нулевыми граничными условиями: $\varphi = 0$. Не уточняя, какие предположения делаются относительно данных задачи, допустим, что существует функция Леви $L(x, y)$, которая обращается в нуль при $x \in \mathfrak{F}T$ и такова, что объемный потенциал

$$u(x) = -\int_T L(x, y)\, z(y)\, dy \tag{24.1}$$

обладает всеми свойствами, установленными в п. 13 при более строгих ограничениях; здесь мы не считаем, что функция L определена в области C, содержащей T. Такую функцию $L(x, y)$ мы будем называть *квази функцией Грина* (см. п. 20). Если мы потребуем, чтобы функция (24.1) удовлетворяла уравнению $\mathfrak{M}u = f$, то мы получим для функции z интегральное уравнение

$$z(x) - \int_T K(x, y)\, z(y)\, dy = f(x), \tag{24.2}$$

где $K(x, y) = \mathfrak{M}_x L(x, y)$. Предположим еще, что для этого уравнения справедлива теорема об альтернативе и что все решения соответствующего однородного уравнения принадлежат классу $C^{(2)}$ в $T - \mathfrak{F}T$ и классу $C^{(1)}$ в T.

Могут представиться две возможности. Или уравнение (24.2) при любой функции $f(x)$ имеет одно и только одно решение, и тогда задача Дирихле имеет *по крайней мере* одно решение. Однако нельзя заранее утверждать, что это решение единственно, потому что не все решения задачи Дирихле должны иметь вид (24.1). Или же однородное уравнение, соответствующее уравнению (24.2), имеет p линейно независимых решений $\{z_k\}$, и столько же решений $\{v_k\}$ имеет транспонированное к нему уравнение. В таком случае заменим уравнение (24.1) другим уравнением

$$u(x) = -\int_T \left[L(x, y) - \sum_{k=1}^{p} u_k(x) z_k(y)\right] z(y)\,dy, \tag{24.3}$$

где функции u_k обращаются в нуль на $\mathfrak{S}T$ и принадлежат классу $C^{(2)}$ в T, а в остальном пока произвольны. Тогда формула (24.2) принимает вид

$$z(x) - \int_T K(x, y) z(y)\,dy + \sum_{k=1}^{p} \mathfrak{M}u_k(x) \int_T z_k(y) z(y)\,dy = f(x). \tag{24.4}$$

Это уравнение разрешимо при любой функции $f(x)$, если система линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{p} c_k \int_T v_i(x)\, \mathfrak{M}u_k(x)\,dx = \int_T f(x) v_i(x)\,dx \tag{24.5}$$

имеет определитель, отличный от нуля. Действительно, при таком предположении, если $\{c_k\}$ есть решение системы (24.5), то интегральное уравнение

$$z(x) - \int_T K(x, y) z(y)\,dy = f(x) - \sum_{k=1}^{p} c_k \mathfrak{M}u_k(x)$$

имеет одно и только одно решение $z(x)$, которое удовлетворяет условиям

$$\int_T z_k(x) z(x)\,dx = c_k,$$

и эта функция, конечно, является решением уравнения (24.4). Таким образом, если возможно так определить функции u_k, чтобы определитель системы (24.5) не обращался в нуль, то задача Дирихле и в этом случае имеет по крайней мере одно решение.

Сделаем теперь противоположное предположение. Пусть упомянутый определитель равен нулю, каковы бы ни были функции u_k. Легко видеть, что тогда должно быть

$$\int_T v_i(x)\, \mathfrak{M}u(x)\,dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

для любой функции $u(x)$, обращающейся в нуль на $\mathfrak{S}T$ и принадлежащей классу $C^{(2)}$ в T. Применяя формулу Грина, можно записать предыдущее равенство в виде

$$\int_T u(x)\, \mathfrak{N}v_i(x)\,dx + \int_{\mathfrak{S}T} a(x) v_i(x) \frac{du}{d\nu}\,d\sigma = 0,$$

откуда следует, в силу произвольности функции u, что функции v_i являются решениями сопряженной однородной задачи.

Итак, мы доказали следующее. *Если для сопряженной задачи справедлива теорема единственности, то для данной задачи справедлива теорема существования.*

Рассмотрим теперь уравнение

$$\mathfrak{M}^{(\lambda)}u = \sum_{i,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \lambda \sum_{i=1}^{m} e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \left(c + \frac{\lambda-1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial e_i}{\partial x_i}\right)u = f(x), \tag{24.6}$$

которое совпадает с уравнением $\mathfrak{M}u = f$ при $\lambda = 1$ и с уравнением $\mathfrak{N}u = f$ при $\lambda = -1$. Если для сопряженной задачи справедлива теорема единственности, то, в силу сказанного выше, можно так определить функцию $L(x, y)$, чтобы уравнение (24.2) имело единственное решение. Воспользуемся выражением (24.1) для отыскания решения уравнения (24.6), обращающегося в нуль на $\mathfrak{F}T$. Мы придем к некоторому интегральному уравнению; так как оно разрешимо при $\lambda = 1$, оно будет разрешимо для всех значений λ, за исключением, быть может, счетного множества значений этого параметра. При этом рассматриваемая краевая задача для уравнения (24.6) будет иметь решение вида

$$u(x, \lambda) = \frac{u_1(x, \lambda)}{D(\lambda)},$$

где u_1 и D — целые функции от λ. Из этого следует, что если $D(-1) \neq 0$, то задача Дирихле для уравнения $\mathfrak{N}u = f$ разрешима. Покажем, что в случае, когда $D(-1) = 0$, можно прийти к тому же заключению. Для этого достаточно доказать, что если $\lambda = -1$ является нулем порядка n для функции $D(\lambda)$, то функция u_1 имеет нуль того же порядка при $\lambda = -1$, так что функция $u(x, \lambda)$ при $\lambda = -1$ регулярна. Это доказывается очень просто. Действительно, если бы функция $u_1(x, \lambda)$ имела при $\lambda = -1$ нуль порядка $k < n$, то мы могли бы положить $u_1 = u_2(x, \lambda)(\lambda + 1)^k$ и имели бы

$$\mathfrak{M}^{(\lambda)}u_2(x, \lambda) = \frac{f(x)\,D(\lambda)}{(\lambda+1)^k},$$

откуда следует, что $\mathfrak{N}u_2(x, -1) = 0$, вопреки предположению о справедливости теоремы единственности для сопряженного уравнения. Таким образом, мы доказали следующее. *Если для сопряженной задачи справедлива теорема единственности, то теорема существования справедлива как для данной задачи, так и для сопряженной к ней задачи и решение рассматриваемой краевой задачи также является единственным.*

Последнее утверждение следует из того уже упомянутого в п. 7 обстоятельства, что если данная однородная задача имеет ненулевые решения, то неоднородная сопряженная задача не может быть разрешимой при любых свободных членах.

Все эти результаты справедливы при условии, что существует квази функция Грина $L(x, y)$, обладающая всеми свойствами, которые мы от нее потребовали. Трудности, возникающие при решении этой задачи, указаны в начале п. 20. Она была решена Э. Э. Леви только в случае, когда $m = 2$, и при условиях, что T принадлежит классу $A^{(3)}$, функции a_{ik} принадлежат классу $C^{(3)}$, функции b_i — классу $C^{(2)}$ и функция c — классу $C^{(1)}$. Кроме того, Леви предполагает, что $f \in C^{(1)}$, и рассматривает только такие решения задачи, которые принадлежат классу $C^{(2)}$ в T. Для изучения задачи Неймана можно пользоваться аналогичным методом, принимая за квази функцию Грина функцию Леви, конормальная производная которой равна нулю на $\mathfrak{F}T$.

Жевре [10], который через много лет занялся такими исследованиями, не зная работы Леви, построил квази функцию Грина для первых двух краевых задач для произвольного m, предполагая лишь, что T принадлежит классу $A^{(1, \lambda)}$, а коэффициенты оператора $\mathfrak{M}$ — классу $C^{(0, \lambda)}$. В работах [13], [14], [15], [16] он занимался также третьей краевой задачей. Однако при тех более общих предположениях, которые делал Жевре, оказывается неприменимым метод, который Леви применял для того, чтобы из существования квази функций Грина вывести теорему об альтернативе для краевой задачи. Жевре не указал, каким другим путем можно прийти к этому результату[1]. Таким образом, в этом круге идей единственными конкретными результатами оказываются результаты Леви. Эти результаты не представляют теперь особого интереса, по крайней мере в случае уравнений второго порядка, так как входят как частные случаи в теоремы 21, IV и 22, III, которые доказаны при значительно более слабых предположениях.

---

[1] В работе Жевре имеются некоторые соображения на этот счет, но они оказываются непригодными для данной цели. См., например, рецензию Жиро в Zbl. Math., 11 (1935), 403—404.

Глава IV

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Когда мы пытаемся расширить сферу действия теорем существования, доказанных в предыдущей главе, заменяя сделанные там предположения относительно данных задачи более слабыми предположениями, мы естественным образом приходим к тому, чтобы в качестве решений краевых задач допускать также и такие функции, которые лишь отчасти удовлетворяют условиям, поставленным в п. 4; некоторые из этих условий заменяются другими, менее стеснительными. Таким образом вводятся в рассмотрение *обобщенные решения* различных краевых задач. Их можно определять различными способами, смотря по тому, относительно чего мы хотим иметь наиболее общие предположения: относительно коэффициентов уравнения, относительно области или относительно краевых условий.

В этой главе мы займемся такими теоремами существования обобщенных решений, которые можно доказать, ссылаясь на теорию интегральных уравнений или пользуясь другими методами, в конечном счете основанными на теореме Хана — Банаха — Асколи. Мы примем во внимание также обобщение метода верхних и нижних функций Перрона и дадим понятие о вариационном методе. В гл. V (п. 38) будут рассмотрены другие виды обобщенных решений, изучение которых требует применения иных методов.

25. Обобщенные эллиптические операторы.

Представим квадратичную форму $\sum a_{ik}(x)\lambda_i\lambda_k$ в виде суммы квадратов m линейных форм

$$\sum_{i,\, k=1}^{m} a_{ik}\lambda_i\lambda_k = \sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{m} g_{rs}\lambda_s\right)^2 .$$

Пусть $y^{(r)}$ и $z^{(r)}$ — точки с координатами $(x_i + hg_{ri})$ и $(x_i - hg_{ri})$ соответственно. Положим

$$\mathfrak{D}u = \lim_{h\to 0}\sum_{r=1}^{m}\frac{u(y^{(r)}) + u(z^{(r)}) - 2u(x)}{h^2}. \tag{25.1}$$

Если функция $u(x)$ принадлежит классу $C^{(2)}$, то $u(y^{(r)})$ и $u(z^{(r)})$ можно разложить по формуле Тейлора, останавливаясь на втором члене, и легко видеть, что

$$\mathfrak{D}u = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Оператор $\mathfrak{D}$ может иметь смысл также и для функций, не имеющих вторых производных. Важный пример этого дает следующая теорема, доказанная в работе Жиро [16]:

25, I. *Если функции a_{ik} принадлежат классу $C^{(0,\lambda)}$ в C, функция $z(x)$ непрерывна в замкнутой области T, содержащейся в C, а $L(x, y)$, как обычно, есть функция Леви, то для объемного потенциала*

$$u(x) = \int_T L(x, y) z(y) dy$$

оператор $\mathfrak{D}u$ имеет смысл в каждой внутренней точке x замкнутой области T и выполняется равенство

$$\mathfrak{D}u = -z(x) + \int_T \mathfrak{D}_x L(x, y) z(y) dy. \tag{25.2}$$

Отсюда возникает идея — изучать эллиптические уравнения, где оператор $\mathfrak{M}$ определяется формулой

$$\mathfrak{M}u = \mathfrak{D}u + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu.$$

Можно назвать функцию *u обобщенным решением* уравнения

$$\mathfrak{M}u = f \tag{25.3}$$

в области C, если в каждой точке C первые производные функции u и оператор $\mathfrak{D}u$ непрерывны и выполняется равенство (25.3).

Можно доказать, что для обобщенных решений уравнения (25.3) сохраняются свойства максимума и минимума и вытекающие из них теоремы единственности, сформулированные в пп. 3 и 5 для регулярных решений.

Кроме того, если в изложении п. 20 предполагать, что функции b_i и c уже не обязательно удовлетворяют условию Гёльдера, а только непрерывны, то удается доказать существование главного фундаментального решения уравнения $\mathfrak{M}u = 0$, которое, однако, является обобщенным, а не регулярным решением этого уравнения.

Пусть теперь отыскиваются лишь обобщенные решения уравнения (25.3); тогда большая часть того, что было сказано в пп. 21, 22 и 23 относительно различных краевых задач для уравнения (25.3), остается неизменным при более слабых предположениях, что функции a_{ik} удовлетворяют условию Гёльдера с показателем λ, а функции

b_i, c, f непрерывны. Именно, сохраняются теоремы 21, VI, 22, I, 23, I, а теоремы 22, III и 23, II оказываются справедливыми при условии, что функции a_{ik} и e_i принадлежат классу $C^{(1)}$.

Единственная существенная трудность состоит в том, что в этих новых предположениях уже нельзя утверждать, что главные фундаментальные решения можно дифференцировать по переменным y_i. Это не вносит изменений в исследование второй и третьей краевых задач, но ограничивает изучение задачи Дирихле случаем нулёвых граничных данных, так как можно применять только метод, основанный на интегральном уравнении (21.18), и нельзя опираться на уравнения (21.3), (21.5) и (21.6).

Все вышеупомянутые результаты были установлены Жиро; результаты, относящиеся к задачам Дирихле и Неймана, — в работе [16], результаты, относящиеся к третьей краевой задаче, — в работах [27] и [39].

Подчеркнем, что способ (25.1) — не единственный способ обобщения оператора $\sum a_{ik}\,\partial^2 u/\partial x_i\,\partial x_k$.

Ряд других определений оператора $\mathfrak{D}u$, при которых остается справедливой теорема 25, I, можно найти в работах [9] и [10] Жевре, который пользовался этими определениями в своих исследованиях, желая обойтись без предположения, что функции b_i, c и f удовлетворяют условию Гёльдера.

Если мы хотим избавиться только от предположения, что функции c и f удовлетворяют условию Гёльдера, сохраняя это предположение для функций b_i и предполагая, что a_{ik} — функции класса $C^{(1,\lambda)}$, то можно прийти к этому другим путем; Жиро воспользовался им в работе [15]. Пусть функция χ такова, что функция $c-\chi$ отрицательна и удовлетворяет условию Гёльдера. Если для уравнения $\mathfrak{M}u-\chi u=0$ выполнены остальные условия теоремы 20, V, то существует главное фундаментальное решение этого уравнения $G^*(x, y)$. Если T' — произвольная замкнутая область, лежащая внутри T, и $x \in T'-\mathfrak{F}T'$, то, согласно теореме 20, VII, для любого решения u уравнения $\mathfrak{M}u=f$ справедлива формула Стокса

$$u(x)=-\int\limits_{T'} G^*(x, y)\,[f(y)-\chi(y)\,u(y)]\,dy+ \\ +\int\limits_{\mathfrak{F}T'} [G^*(x, y)\,\mathfrak{P}u(y)-u(y)\,\mathfrak{Q}_y\,G^*(x, y)]\,d_y\sigma. \qquad (25.4)$$

Тогда за обобщенное решение уравнения (25.3) можно принять любую функцию класса $C^{(1)}$, которая удовлетворяет соотношению (25.4) для всякой замкнутой области T', лежащей внутри T. Такое обобщенное решение, вообще говоря, не имеет вторых производных; но если они существуют и непрерывны, то функция $u(x)$ является регулярным решением уравнения (25.3).

Теперь исследование первой и второй краевых задач можно проводить такими же способами, как это сделано в пп. 21 и 22, ограничиваясь разысканием лишь указанных обобщенных решений. Возникнут те же самые интегральные уравнения, которые рассматривались в предыдущих пунктах, но их исследование, естественно, затруднительно. Можно получить следующий результат. При только что сформулированных предположениях относительно коэффициентов и свободного члена уравнения (25.3) остаются справедливыми теоремы 21, I, II, III и 22, I и II. Теоремы 21, IV и 22, III сохраняются, если отбросить предположение, что e_i — функции класса $C^{(1,\lambda)}$, но при условии, что обобщенным решением сопряженного уравнения $\mathfrak{N}v=g$ считается всякая функция $v(x)$, такая, что при $x \in T' - \mathfrak{F}T'$ выполняется соотношение

$$v(x) = -\int_{T'} G^*(y, x)[g(y) - \chi(y) v(y)]\, dy +$$
$$+ \int_{\mathfrak{F}T'} [G^*(y, x)\, \mathfrak{Q} v(y) - v(y)\, \mathfrak{P}_y G^*(y, x)]\, d_y\sigma$$

для произвольной замкнутой области T', лежащей внутри T.

26. Уравнения, в которых коэффициенты и свободный член имеют особенности. В этом пункте мы рассмотрим некоторые исследования Жиро, относящиеся к случаю, когда коэффициенты b_i, c и свободный член f имеют особенности на некоторых многообразиях размерности, меньшей m.

Обозначим с этой целью через $\mathfrak{U}_p$ многообразие размерности $m-p$ в пространстве S_m, обладающее следующими свойствами:

1. Многообразие $\mathfrak{U}_p$ может быть покрыто конечным числом множеств R_{pk}, каждое из которых допускает параметрическое представление вида

$$x_i = x_i(t_1, t_2, \ldots, t_{m-p}),$$

где функции x_i ограничены и непрерывны вместе со своими производными в замкнутой области D пространства S_{m-p} и таковы, что их матрица Якоби имеет ранг $m-p$. При $p=1$ предполагается, что производные функций x_i в D удовлетворяют условию Гёльдера с показателем λ.

2. Многообразие $\mathfrak{U}_p$ является ограниченным множеством в S_m.

3. Каждая точка $\mathfrak{U}_p$ является внутренней по крайней мере для одного из множеств R_{pk}.

4. Многообразие $\mathfrak{U}_m$ состоит из конечного числа точек.

Таким образом определенные многообразия не обязаны быть ни ориентируемыми, ни связными и могут даже иметь кратные точки; однако, в силу свойства 3, они замкнуты и, следовательно, лишены границы. В дальнейшем мы будем обозначать через $\mathfrak{B}_p$

произвольную часть $\mathfrak{U}_p$, возможно, обладающую границей. Через $r_p(x)$ будем обозначать расстояние от произвольной точки x из S_m до множества $\mathfrak{B}_p$.

Рассмотрим эллиптический оператор $\mathfrak{M}$ и функцию f, которые удовлетворяют следующим условиям.

a) Функции a_{ik} ограничены и во всем пространстве равномерно удовлетворяют условию Гёльдера с показателем λ.

b) Функции b_i непрерывны в $S_m - \mathfrak{B}_1$ и ограничены вне некоторой ограниченной замкнутой области, содержащей $\mathfrak{B}_1$; в $S_m - \mathfrak{B}_1$ $b_i = O(r_1^{\lambda-1})$.

c) Функция c непрерывна в $S_m - (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2)$; вне некоторой ограниченной замкнутой области, содержащей $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$, она ограничена и $c < -g^2$; в $S_m - (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2)$ для нее справедлива оценка $c = O(r_1^{\lambda-1} + r_2^{\lambda-1})$.

d) В $T - \sum_{p=1}^{m} \mathfrak{B}_p$ функция f непрерывна и $f = O\left(\sum_{p=1}^{m} r_p^{\lambda-1}\right)$.

При таких предположениях для уравнения $\mathfrak{M}u = f$ можно развить теорию, аналогичную той, которая действует при отсутствии многообразий $\mathfrak{B}_p$, но в этом случае *решением* уравнения следует считать функцию u, обладающую следующими свойствами:

α) В $T - \sum_{p=3}^{m} \mathfrak{B}_p$ функция u непрерывна и $u = O\left(\sum_{p=3}^{m} r^{\lambda+2-p}\right)$.

β) Первые производные функции u непрерывны в $T - \sum_{p=2}^{m} \mathfrak{B}_p$.

γ) Уравнение удовлетворяется в обобщенном смысле[1] в $T - \sum_{p=1}^{m} \mathfrak{B}_p$.

Что касается краевых условий, то они ставятся следующим образом для различных задач.

В случае задачи Дирихле предполагается, что на $\mathfrak{F}T - \sum_{p=3}^{m} \mathfrak{B}_p$ функция φ непрерывна, $\varphi = O\left(\sum_{p=3}^{m} r_p^{\lambda+2-p}\right)$, и требуется, чтобы условие $u = \varphi$ выполнялось только на $\mathfrak{F}T - \sum_{p=3}^{m} \mathfrak{B}_p$.

В случае второй или третьей краевой задачи предполагается, что на $\mathfrak{F}T - \mathfrak{B}_2$ функция β непрерывна и $\beta = O(r_2^{\lambda-1})$; на $\mathfrak{F}T - \sum_{p=2}^{m} \mathfrak{B}_p$

---

[1] В смысле п. 25.

функция φ непрерывна и $\varphi = O\left(\sum_{p=2}^{m} r_p^{\lambda+1-p}\right)$, а условие $\mathfrak{P}u = \varphi$ должно выполняться только на $\mathfrak{F}T - \sum_{p=2}^{m} \mathfrak{B}_p$.

Поставив таким образом различные краевые задачи, можно обычными методами свести их к интегральным уравнениям и доказать теорему об альтернативе.

При рассмотрении сопряженного уравнения $\mathfrak{N}v = g$ надо наложить на коэффициенты $\mathfrak{N}$ такие же требования, как и на коэффициенты $\mathfrak{M}$.

В любой замкнутой области, содержащейся в T, в которой функции b_i, c и f удовлетворяют условию Гёльдера с показателем λ, функция u является регулярным решением уравнения.

В случае, когда $c \leqslant 0$, для задачи Дирихле и в случае, когда $c \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, причем хотя бы одна из функций c и β не равна нулю, для второй и третьей краевых задач решение существует и единственно. Единственность имеет место даже для более широкого класса функций: условие α можно заменить предположением, что функция u непрерывна и $u = o\left(\ln\frac{2R}{r_2} + \sum_{p=3}^{m} r_p^{2-p}\right)$ в $T - \sum_{p=2}^{m} \mathfrak{B}_p$, где R — диаметр T.

Но единственность в этом классе функций устанавливается методом, сильно отличающимся от тех, которые применялись в п. 5. Мы дадим идею этого метода, ограничившись задачей Дирихле.

Выберем $\gamma \leqslant 0$ таким образом, чтобы функция $c - \chi$ была непрерывна и $\leqslant 0$ в T. Можно доказать, что уравнение $\mathfrak{M}u - \gamma u = 0$ имеет главное фундаментальное решение $G^*(x, y)$, положительное и непрерывное во всем пространстве при $x \neq y$. Обозначим через $d\sigma^{(p)}$ элемент меры на многообразии $\mathfrak{B}_p$. Функция

$$w(x) = \sum_{p=2}^{m} \int_{\mathfrak{U}_p} G^*(x, y)\, d_y \sigma^{(p)} \tag{26.1}$$

положительна и непрерывна в $T - \sum_{p=2}^{m} \mathfrak{U}_p$. Кроме того, существуют две положительные постоянные a и b, такие, что

$$a < \frac{w(x)}{\ln\frac{2R}{r_2} + \sum_{p=3}^{m} r_p^{2-p}} < b, \tag{26.2}$$

где R — диаметр T. Если ε — положительная постоянная, а функция u — решение однородной задачи Дирихле, то функция $u + \varepsilon w$

положительна на $\mathfrak{F}T - \sum_{p=2}^{m} \mathfrak{U}_p$ и в точках, достаточно близких к $\sum_{p=2}^{m} \mathfrak{U}_p$; так как она является решением уравнения $\mathfrak{M}(u + \varepsilon w) = \varepsilon \chi w \leqslant 0$, она положительна всюду (теорема 3, II). Но аналогичным способом можно доказать, что $u - \varepsilon w < 0$, откуда следует, в силу произвольности ε, что $u = 0$.

Подробное изложение этих исследований выходит за рамки этой книги; мы сошлемся на работы Жиро. Первая и вторая краевые задачи разобраны в работах [20] и [33], третья краевая задача — в работах [39] и [49]; краткое изложение результатов есть также в заметках [13] и [25].

В работах [17], [31], [52] Жиро вкратце упоминает другого вида особенности у коэффициентов уравнения.

Вопросами, рассмотренными в этом пункте, занимался также Кшижанский [3]. Он предполагал, что множество точек разрыва функций f и φ замкнуто и лежит на границе области C; задача Дирихле ставилась для замкнутой области $C + \mathfrak{F}C$. Эта работа Кшижанского опирается на некоторые теоремы единственности для уравнения $\Delta u + cu = 0$, недавно установленные Пиконе [15, 16] и усиленные Лея [1] и Пини [5, 6].

27. Особые точки решений эллиптических уравнений.

Доказательство теоремы единственности в предыдущем пункте подсказывает следующее замечательное обобщение теоремы 19, VII:

27, I. *Пусть C — область диаметра R, содержащая все многообразия $\mathfrak{U}_p$, упомянутые в предыдущем пункте. Пусть $\mathfrak{M}$ — эллиптический оператор, коэффициенты которого принадлежат классу $C^{(0, \lambda)}$ в C. Тогда любая функция $u(x)$, которая в $C - \sum_{p=2}^{m} \mathfrak{B}_p$ является регулярным решением уравнения $\mathfrak{M}u = 0$ и для которой при $x \to y$ $\left(y \in \sum_{p=2}^{m} \mathfrak{B}_p\right)$ справедлива оценка*

$$u(x) = o\left(\ln \frac{2R}{r_2} + \sum_{p=3}^{m} r_p^{2-p}\right), \tag{27.1}$$

непрерывна в области C вместе со своими производными первого и второго порядка.

Как и при доказательстве теоремы 19, VII, мы можем, не нарушая общности, предполагать, что $c < 0$ в некоторой окрестности I множества $\sum \mathfrak{U}_p$. Если мера I достаточно мала, то, согласно теореме 22, II, можно найти такое число $k > 0$, что задача Неймана с $\mathfrak{P} = ad/d\nu + \beta$ ($\beta > k$) имеет единственное решение для любой замкнутой области T, содержащейся в I и принадлежащей классу $\Lambda^{(1,\lambda)}$. Выберем T так, чтобы множество $\sum \mathfrak{U}_p$ находилось внутри T, и обозначим через $\bar{u}$ решение задачи

$$\mathfrak{M}\bar{u} = 0 \text{ для } x \in T - \mathfrak{F}T, \quad \mathfrak{P}\bar{u} = \mathfrak{P}u \text{ для } x \in \mathfrak{F}T.$$

Как уже было отмечено при доказательстве теоремы 19, V, существует фундаментальное решение $G(x, y)$ уравнения $\mathfrak{M}u = 0$, которое положительно в T. Исходя из функции G, построим по формуле (26.1) функцию w и выберем β настолько большим, чтобы было $\mathfrak{P}w > 0$ на $\mathfrak{F}T$. Тогда при $\varepsilon > 0$

$$\mathfrak{M}(u - \bar{u} + \varepsilon w) = 0 \text{ для } x \in T - (\mathfrak{F}T + \textstyle\sum \mathfrak{U}_p),$$

$$\mathfrak{P}(u - \bar{u} + \varepsilon w) > 0 \text{ для } x \in \mathfrak{F}T.$$

В силу теорем 3, II и 3, IV, из этих неравенств следует, что в $T - \Sigma\mathfrak{U}_p$ функция $u - \bar{u} + \varepsilon w$ не имеет отрицательных минимумов. Согласно формулам (26.2) и (27.1), эта функция положительна в некоторой окрестности $\Sigma\mathfrak{U}_p$; из этого можно заключить, что она неотрицательна в $T - \Sigma\mathfrak{U}_p$; аналогичным образом можно доказать, что для $\varepsilon < 0$ функция $u - \bar{u} + \varepsilon w \leqslant 0$, так что окончательно $|u - \bar{u}| \leqslant |\varepsilon| w$. Так как ε произвольно, $u = \bar{u}$, что и доказывает теорему.

Другие теоремы такого типа, относящиеся к уравнению $\Delta u + cu = 0$, содержатся в работах Брело [1, 2, 3, 4, 10], Пиконе [15, 16], Лея [1], Пини [5, 6]; теоремы, относящиеся к уравнениям более общего вида, имеются в работах Асколи [2] и Кшижанского [3].

28. Обобщенные решения задачи Дирихле в смысле Винера.

Пусть $\mathfrak{M}$ — эллиптический оператор, определенный во всем пространстве, и C — ограниченная область. Хорошо известно, что задача Дирихле

$$\mathfrak{M}u = 0 \text{ для } x \in C, \quad u = \varphi \text{ для } x \in \mathfrak{F}C \tag{28.1}$$

может не иметь решения, даже в том случае, когда $\mathfrak{M}$ — оператор Лапласа. Так же, как в случае гармонических функций[1], любой функции φ, непрерывной на $\mathfrak{F}C$, можно поставить в соответствие функцию $u_\varphi(x)$, которая в области C удовлетворяет уравнению $\mathfrak{M}u = 0$ и совпадает с решением поставленной задачи Дирихле, если только это решение существует. Функция u_φ называется обобщенным решением задачи Дирихле (28.1) *в смысле Винера*. Точка $x_0 \in \mathfrak{F}C$ называется *регулярной по отношению к оператору* $\mathfrak{M}$, если

---

[1] См. Келдыш М. В., О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, Успехи мат. наук, вып. VIII (1940), стр. 171—231. — *Прим. ред.*

$\lim\limits_{x\to x_0} u_\varphi(x)=\varphi(x_0)$, какова бы ни была функция φ; в противном случае она называется *иррегулярной*.

Изучение таких обобщенных решений в некоторых частных случаях начал Брело [1, 8, 9, 10]. Пюшель [1] рассматривал самосопряженное уравнение с тремя переменными, Таутц [1] изучал уравнение с двумя переменными вида

$$\Delta u+ap_1+bp_2+cu=0. \tag{28.2}$$

В работе [2] ему удалось обобщить свои результаты: вместо решений уравнения (28.2) он рассмотрел функции класса $C^{(1)}$ в области C, удовлетворяющие уравнению

$$\int\limits_{\mathfrak{F}T}\frac{du}{dn}\,ds+\int\limits_{T}\frac{\partial u}{\partial x_1}\,dA+\frac{\partial u}{\partial x_2}\,dB+u\,dC=0,$$

где T — произвольная односвязная замкнутая область, содержащаяся в C и принадлежащая классу $A^{(2)}$, а A, B и C — вполне аддитивные функции множества, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям.

Наконец, случай уравнения с m переменными совершенно общего вида был полностью рассмотрен совсем недавно и почти одновременно Олейник [1] и Таутцем [3].

Основной результат всех этих исследований, содержащийся уже в работе Пюшеля для уравнений того частного вида, который там рассматривается, таков: *если точка $x_0\in\mathfrak{F}C$ регулярна по отношению к некоторому оператору $\mathfrak{M}$, то она регулярна по отношению к любому другому оператору.* Следовательно, все условия регулярности, как необходимые и достаточные, так и просто достаточные, установленные различными авторами для гармонических функций, без изменений применимы к краевой задаче (28.1). Так, например, любая точка $\mathfrak{F}C$, которая принадлежит сфере, не имеющей с $C+\mathfrak{F}C$ других общих точек, регулярна по отношению к любому оператору $\mathfrak{M}$.

Конечно, сформулированный выше основной результат справедлив для операторов $\mathfrak{M}$ с достаточно гладкими коэффициентами. Например, в работе Олейник, которая существенно связана с работой Пюшеля, предполагается, что $a_{ik}\in C^{(3,\lambda)}$, $b_i\in C^{(2,\lambda)}$, $c\in C^{(1)}$. В работе Таутца эта теорема получается в качестве частного случая более общей теоремы, касающейся краевой задачи в абстрактной постановке. В этой работе предполагается только, что фундаментальное решение существует, задача Дирихле разрешима для любой сферы Γ, содержащейся в C, и решение этой задачи не имеет в $\Gamma-\mathfrak{F}\Gamma$ положительных относительных максимумов. Эти условия выполняются, например, в случае, когда $a_{ik}\in C^{(1,\lambda)}$, b_i, $c\in C^{(0,\lambda)}$, $c\leqslant 0$.

Доказательство основной теоремы можно найти в указанных работах. Мы здесь ограничимся тем, что укажем, каким образом можно построить функцию u_φ.

Пусть v — произвольная функция, непрерывная в области C, а $u[v; \Gamma]$ — решение уравнения $\mathfrak{M}u=0$, совпадающее с функцией v на $\mathfrak{F}\Gamma$. Если для любой сферы Γ в $\Gamma-\mathfrak{F}\Gamma$ выполняется неравенство $v \geqslant u[v; \Gamma]$ $[v \leqslant u[v; \Gamma]]$, то функцию v мы будем называть $\mathfrak{M}$-выпуклой [$\mathfrak{M}$-вогнутой]. Рассмотрим семейство всех $\mathfrak{M}$-вогнутых в C функций, непрерывных в $C+\mathfrak{F}C$ и не превышающих φ на $\mathfrak{F}C$. Это семейство не пусто, так как ему принадлежат неположительные постоянные, не превышающие минимума φ. Для любой точки x из C существует верхняя грань $u'_\varphi(x)$ тех значений, которые принимают в этой точке функции рассматриваемого семейства. Можно доказать, что функция $u'_\varphi(x)$ в области C удовлетворяет уравнению $\mathfrak{M}u=0$. Этому же уравнению удовлетворяет функция $u''_\varphi(x)$, равная в каждой точке x нижней грани значений $\mathfrak{M}$-выпуклых функций, непрерывных в $C+\mathfrak{F}C$, больших или равных φ на $\mathfrak{F}C$. Кроме того, $u'_\varphi \leqslant u''_\varphi$. Если существует решение u задачи Дирихле (28.1), то функция u одновременно является $\mathfrak{M}$-выпуклой и $\mathfrak{M}$-вогнутой и поэтому должна быть $\leqslant u'_\varphi$ и $\geqslant u''_\varphi$, откуда следует, что $u'_\varphi=u''_\varphi=u$. Как функция u'_φ, так и функция u''_φ могут быть приняты за обобщенное решение задачи (28.1) в смысле Винера. Этим методом пользовался Таутц; ясно, что он является обобщением метода верхних и нижних функций, который Перрон[1]) применял при исследовании задачи Дирихле для гармонических функций.

Пюшель в своей работе рассматривает последовательность замкнутых областей класса $A^{(2)}$: $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ таких, что $T_n \subset T_{n+1}$, $\lim T_n = C$. Пусть Φ — произвольная функция, непрерывная в $C+\mathfrak{F}C$ и равная φ на $\mathfrak{F}C$. Положим $u_\varphi = \lim u_n(x)$, где u_n — решение задачи Дирихле $\mathfrak{M}u_n=0$ для $x \in T_n$, $u_n=\Phi$ на $\mathfrak{F}T_n$. Оказывается, что функция u_φ не зависит от выбора замкнутых областей T_n и от способа продолжения функции φ. Функция u_φ является решением уравнения $\mathfrak{M}u=0$ и может быть принята за обобщенное решение задачи (28.1).

29. Обобщенные краевые условия. В этом пункте мы выясним, как можно получить теорему существования решения задачи Дирихле, если граничные значения, которые искомая функция должна принимать на $\mathfrak{F}T$, уже не предполагаются непрерывными. Ответ на этот вопрос может быть получен с помощью методов п. 28 в случае,

---

[1]) См. Perron O., Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u=0$, Math. Z., 18 (1923), 42—54, и Brelot M., Familles de Perron et problème de Dirichlet, Acta Szeged, 9 (1939), 133—153. Свойства $\mathfrak{M}$-выпуклых функций изложены в статье Бонсаля [1]; иное применение этих же функций — у Фубини [2].

когда функция φ не обязательно непрерывна, но ограничена. Действительно, в этом случае легко построить обобщенное решение задачи Дирихле в смысле Винера, введя в качестве краевого условия требование, чтобы для любой точки $x_0 \in \mathfrak{F}C$ функция $u(x)$ при $x \to x_0$ имела такие же пределы неопределенности, какие имеет функция φ при $x \to x_0$ на $\mathfrak{F}C$. Обобщенное решение действительно удовлетворяет этому условию в каждой регулярной точке $\mathfrak{F}C$.

Однако применение этого метода не представляется возможным тогда, когда предположение об ограниченности функции φ заменяется предположением о суммируемости функции φ или некоторой ее степени. Задача, поставленная таким образом, была разрешена Чиммино [4] в случае $m=2$. Он обобщил метод, которым Каччопполи доказывал теоремы существования абелевых интегралов на римановой поверхности [10]. Этот метод не предполагает известными фундаментальные решения уравнения и не требует применения теории интегральных уравнений. Он основан на некоторых простых соображениях линейного функционального анализа. Кроме того, он имеет многие другие применения, о которых мы дадим понятие в оставшейся части этого пункта.

Итак, пусть T есть плоская замкнутая область класса $A^{(2)}$. Для определенности мы будем считать, что она односвязна. Пусть $x_1 = \psi_1(s)$, $x_2 = \psi_2(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant L)$ — параметрические уравнения границы $\mathfrak{F}T$. Предположим, что параметр s выбран так, чтобы внешняя нормаль к $\mathfrak{F}T$ имела направляющие косинусы $\psi_2'(s)$ и $-\psi_1'(s)$. Тогда для любого фиксированного t, положительного и достаточно малого, кривая, заданная параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(s, t) = \psi_1(s) - t\psi_2'(s), \\ x_2 &= x_2(s, t) = \psi_2(s) + t\psi_1'(s), \end{aligned} \tag{29.1}$$

ограничивает замкнутую область $T(t)$ класса $A^{(2)}$, лежащую внутри T. Можно даже более точно установить, что это имеет место при $t \leqslant t_0 < \max|\rho(s)|$, где $1/\rho(s)$ — алгебраическая кривизна $\mathfrak{F}T$. Это следует из того факта, что

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(s, t)} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial s}\right)^2} = 1 - \frac{t}{\rho}. \tag{29.2}$$

Из формулы (29.2) вытекает, что уравнения (29.1) определяют s и t как неявные функции переменных x_1 и x_2, по крайней мере в $T - T(t_0)$. Предположим, что функция $t = t(x_1, x_2)$, определенная таким образом в $T - T(t_0)$, продолжена на всю замкнутую область T и принадлежит там классу $C^{(2)}$; это возможно в силу теоремы 16, VI.

Пусть теперь на $\mathfrak{F}T$ задана функция $\varphi \in L^{(2)}$. Мы скажем, что функция $u(x_1, x_2)$, непрерывная в $T - \mathfrak{F}T$, *принимает в среднем на* $\mathfrak{F}T$ *значения* $\varphi(s)$, если при некоторой весовой функции $P(s, t)$, непрерывной и положительной для $0 \leqslant s \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, выполняется равенство

$$\lim_{t \to 0} \int_0^L P(s, t)\,[u(x_1(s, t), x_2(s, t)) - \varphi(s)]^2\, ds = 0. \tag{29.3}$$

Задача, которую рассматривает Чиммино, состоит в отыскании решения уравнения $\mathfrak{M}u = f$, регулярного в $T - \mathfrak{F}T$, которое на $\mathfrak{F}T$ принимает в среднем значения $\varphi(s)$.

Предположим, что коэффициенты оператора $\mathfrak{M}$ и сопряженного оператора $\mathfrak{N}$ принадлежат в T классу $C^{(2)}$, и положим

$$P(s, t) = \frac{a_{11}\psi_2'^2 + 2a_{12}\psi_1'\psi_2' + a_{22}\psi_1'^2}{1 - \frac{t}{\rho}}.$$

В рассуждениях Чиммино несущественно, что функция P имеет именно такой вид, но это позволяет значительно упростить вычисления.

Справедлива следующая теорема единственности, которая показывает, что рассматриваемая задача поставлена корректно.

29, I. *Если $c \leqslant 0$, то сформулированная выше краевая задача имеет не более одного решения.*

Действительно, имеет место тождество

$$\frac{d}{dt}\int_0^L P\,u^2\,ds = \int_0^L (\mathfrak{N}t - ct)\left(1 - \frac{t}{\rho}\right)u^2 ds + \tag{29.4}$$

$$+ \int_{T(t)} \left[cu^2 - u\,\mathfrak{M}\,u - \left(a_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} + a_{22}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right)\right] dx,$$

которое с помощью некоторых элементарных соображений получается из формулы Грина. Если бы выполнялось уравнение $\mathfrak{M}u = 0$ и функция u обращалась в нуль в среднем на $\mathfrak{F}T$, не будучи тождественным нулем, то правая часть формулы (29.4) была бы отрицательной при достаточно малом t. Поэтому интеграл от Pu^2 должен был бы при $t \to 0$ стремиться к нулю, возрастая, что невозможно, так как он положителен.

Перейдем теперь к изучению одного характеристического свойства средних значений решений уравнения $\mathfrak{M}u = f$, которое существенно используется при доказательстве теоремы существования. Это свойство средних значений является одним из бесчисленных возможных обобщений свойства Гаусса гармонических функций. Мы внесем в изложение Чиммино некоторые упрощения, которые отчасти подсказаны работами Пини[1]).

Мы начнем с введения обозначения

$$H_\rho(x, y) = \begin{cases} H(x, y)\left(1 - \dfrac{\overline{xy}^5}{\rho^5}\right)^5 & \text{для } \overline{xy} \leqslant \rho, \\ 0 & \text{для } \overline{xy} > \rho. \end{cases} \tag{29.5}$$

Функцию H_ρ можно считать определенной во всем пространстве, продолжив предварительно коэффициенты оператора $\mathfrak{M}$. Очевидно, что при $x \neq y$ она непрерывна вместе со своими производными по x_1 и x_2 вплоть до четвертого порядка. Более того, такие производные от функции $H - H_\rho$ непрерывны также и при $x = y$. Из этого следует, что H_ρ является функцией Леви. Если в $T - \mathfrak{F}T$ функция u есть регулярное решение уравнения $\mathfrak{M}u = f$, то можно получить, применяя формулу Стокса,

$$u(y) = \int\limits_T [u(x)\,\mathfrak{N}_x H_\rho(x, y) - f(x)\,H_\rho(x, y)]\,dx \tag{29.6}$$

при значениях ρ, меньших, чем расстояние $d(y)$ от точки y до $\mathfrak{F}T$. В формуле (29.6) интеграл в действительности берется лишь по сфере $\Gamma(y, \rho)$, и поэтому можно считать, что эта формула описывает свойство средних значений для решений уравнения $\mathfrak{M}u = f$.

Теперь мы покажем, что это свойство является характеристическим свойством указанных решений. Это означает следующее:

29, II. *Любая функция u из $L^{(p)}$, где $p > 1$, которая почти для всех $y \in T - \mathfrak{F}T$ при $\rho < d(y)$ удовлетворяет условию* (29.6), *где $f \in C^{(0, \lambda)}$, почти всюду в T совпадает с некоторой функцией, принадлежащей классу $C^{(2)}$ в $T - \mathfrak{F}T$ и удовлетворяющей уравнению $\mathfrak{M}u = f$.*

Обозначим через $K_\rho^{(n)}(x, y)$ n-ую итерацию ядра $K_\rho(x, y) = \mathfrak{N}_x H_\rho(x, y)$ в замкнутой области T и положим

$$H_\rho^{(p)}(x, y) = H_\rho(x, y) + \sum_{n=1}^{p} \int\limits_T H_\rho(x, t)\,K_\rho^{(n-1)}(t, y)\,dt.$$

Если $D \subset T - \mathfrak{F}T$ есть замкнутая область, расстояние которой до $\mathfrak{F}T$ равно δ, то из формулы (29.6) тремя итерациями можно получить для $y \in D$ и $\rho < \delta/3$

$$u(y) = \int\limits_T u(x) K_\rho^{(3)}(x, y)\,dx - \int\limits_T f(x)\,H_\rho^{(3)}(x, y)\,dx. \tag{29.7}$$

---

[1]) См. Пини [1, 4, 9] и Чиммино [6]. Обобщение на случай m переменных в направлении, указанном Чиммино, имеется в работах Цвирнера [2]. Другие свойства средних значений даны в работах Феллера [1], Михлина [1], Трикоми [1], Порицкого [1].

Методами п. 18 можно доказать, что ядро $K_\rho^{(3)}$ непрерывно вместе со своими первыми производными по x_1 и x_2 и при $x \neq y$ имеет вторые производные порядка $O\left(\ln \frac{2\rho}{xy}\right)$. Согласно теоремам 12, VIII и 12, IX, первый интеграл в правой части формулы (29.7) можно дважды дифференцировать под знаком интеграла. Непосредственное обобщение теоремы 12, I позволяет обнаружить, что, в силу предположения $p > 1$, вторые производные указанного интеграла непрерывны. Второй интеграл в правой части формулы (29.7) является объемным потенциалом и поэтому принадлежит классу $C^{(2,\lambda)}$ в $T - \mathfrak{F}T$. Таким образом доказано, что функция u почти всюду совпадает с функцией, принадлежащей классу $C^{(2)}$ в $T - \mathfrak{F}T$. Применяя к функции u формулу Стокса, написанную для сферы $\Gamma(y, \rho)$, и сопоставляя результат с формулой (29.6), можно получить для $y \in D$ и для любого достаточно малого ρ

$$\int\limits_{\Gamma(y,\rho)} H_\rho(x, y)\,[\mathfrak{M}u(x) - f(x)]\,dx = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{M}u = f$, так как ρ произвольно и $H_\rho > 0$.

Только что доказанная теорема позволяет легко установить следующий критерий компактности, который понадобится при доказательстве теоремы существования.

29, III. *Пусть* $\{u_n\}$ — *последовательность функций, принадлежащих классу* $C^{(2)}$ *в* $T - \mathfrak{F}T$ *и принимающих на* $\mathfrak{F}T$ *в среднем значения* $\varphi_n(s)$, *причем последовательность* $\{\varphi_n\}$ *сходится в среднем на* $\mathfrak{F}T$ *к некоторой функции* $\varphi(s)$ *с интегрируемым квадратом. Если также последовательность* $\{\mathfrak{M}u_n\}$ *сходится в среднем в* T *к некоторой функции* $f(x)$, *интегрируемой в* T *с квадратом, принадлежащей в* $T - \mathfrak{F}T$ *классу* $C^{(0,\lambda)}$, *и если* $\int\limits_T u_n^2\,dx < M$, *то из последовательности* $\{u_n\}$ *можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся в любой замкнутой области, лежащей внутри* T, *к некоторой функции* $u_0(x)$, *которая является регулярным решением уравнения* $\mathfrak{M}u = f$ *и на* $\mathfrak{F}T$ *принимает в среднем значения* $\varphi(s)$. *Выделенная последовательность в замкнутой области* T *сходится в среднем к функции* $u_0(x)$.

Действительно, формула средних значений (29.6), которая выполняется для всех u_n с $f = \mathfrak{M}u_n$, и ограничения, наложенные на интегралы от u_n^2 и $(\mathfrak{M}u_n)^2$, обеспечивают равностепенную непрерывность функций u_n в каждой замкнутой области, лежащей внутри T. Это следует из формулы (29.7) и теоремы 13, III. В таком случае из последовательности $\{u_n\}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся в любой замкнутой области, лежащей внутри T, к функции $u_0(x)$, непрерывной в $T - \mathfrak{F}T$, для которой также справедлива формула (29.6). Согласно предыдущей теореме, функция $u_0(x)$ является решением уравнения $\mathfrak{M}u = f$. По-прежнему обозначая через $\{u_n\}$ выделенную подпоследовательность, мы докажем, что функция u_0 на $\mathfrak{F}T$ принимает в среднем значения $\varphi(s)$. Для начала заметим, что если $u(x)$ есть функция, удовлетворяющая условиям, наложенным на функции u_n, то из формулы (29.4) интегрированием по t можно легко получить

$$\int_0^L P(s, t)\, u^2(s, t)\, ds \leqslant \int_0^L P(s, 0)\, u^2(s, 0)\, ds + \tag{29.8}$$
$$+ K \int_0^t d\tau \int_0^L P(s, \tau)\, u^2(s, \tau)\, ds + K \int_0^t d\tau \int_{T(\tau)} [u^2(x) + (\mathfrak{M}u(x))^2]\, dx,$$

где постоянная K не зависит от u, а $u(s, t) = u(x_1(s, t), x_2(s, t))$.

Очевидно, что для $Kt < 1$ из формулы (29.8) следует неравенство

$$(1 - Kt) \int_0^L P(s, t)\, u^2(s, t)\, ds \leqslant \int_0^L P(s, 0)\, u^2(s, 0)\, ds +$$
$$+ K \int_0^t d\tau \int_{T(\tau)} [u^2(x) + (\mathfrak{M}u(x))^2]\, dx.$$

Если в этой формуле положить $u = u_n - u_k$, то в силу сходимости в среднем функций $u_n(s, 0) = \varphi_n(s)$ и в силу ограничений наложенных на интегралы от u_n^2 и $(\mathfrak{M}u_n)^2$, возможно так определить n_ε и t_ε, чтобы для $n, k > n_\varepsilon$ и $t < t_\varepsilon$ правая часть была меньше чем $\frac{\varepsilon}{1 - Kt}$. Тогда, переходя к пределу при $n \to \infty$, для $k > n$ и $t < t_\varepsilon$ получаем

$$\int_0^L P(s, t)\, [u(s, t) - u_k(s, t)]^2\, ds \leqslant \varepsilon. \qquad (29.9$$

Фиксируем теперь $k > k_\varepsilon$ такое, что

$$\int_0^L P(s, t)\, [\varphi_k(s) - \varphi(s)]^2\, ds \leqslant \varepsilon.$$

Для $t < t_\varepsilon$ мы имеем

$$\int_0^L P(s, t)\, [u(s, t) - \varphi(s)]^2\, ds \leqslant 2\varepsilon + \int_0^L P(s, t)\, [u_k(s, t) - \varphi_k(s)]^2\, ds,$$

откуда очевидным образом следует наше утверждение.

Интегрируя формулу (29.9) по t и учитывая, что $dx=(1-t/\rho)\,ds\,dt$, можно получить оценку вида

$$\int\limits_{T(t_\varepsilon)} [u(x)-u_k(x)]^2\,dx \leqslant K\varepsilon,$$

из которой следует в силу равномерной сходимости функций u_k в $T-T(t_\varepsilon)$, что функции u_k в T сходятся к u в среднем.

Теперь мы можем доказать следующую теорему:

29, IV. *Если $f\in C^{(0,\lambda)}$ в T и $\varphi\in L^{(2)}$ на $\mathfrak{F}T$, то для того, чтобы существовало решение рассматриваемой краевой задачи, необходимо и достаточно, чтобы функции f и φ удовлетворяли соотношению*

$$\int\limits_T f(x)\,v(x)\,dx + \int\limits_{\mathfrak{F}T} a(x)\,\varphi(x)\,\frac{dv}{d\nu}\,ds = 0, \tag{29.10}$$

где $v(x)$ — любое решение однородной сопряженной задачи, непрерывное в T. В частности, если однородная сопряженная задача обладает лишь нулевым решением, то рассматриваемая краевая задача разрешима при любых f и φ.

Обозначим через Σ линейное нормированное пространство пар функций $\{f(x),\varphi(s)\}$, где $f\in L^{(2)}$ в T, а $\varphi\in L^{(2)}$ на $\mathfrak{F}T$. За норму пары $\{f,\varphi\}$ мы примем

$$\|\{f,\varphi\}\| = \Bigl[\int\limits_T f^2(x)\,dx\Bigr]^{\frac{1}{2}} + \Bigl[\int\limits_0^L P(s,0)\,\varphi^2(s)\,ds\Bigr]^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть Σ_1 — линейное многообразие пространства Σ, состоящее из пар $\{\mathfrak{M}u(x), u(x_1(s,0), x_2(s,0))\}$, где $u(x)$—функция, принадлежащая классу $C^{(2)}$ в T, и пусть $\overline{\Sigma}_1$ — замыкание Σ_1. Если $\overline{\Sigma}_1$ не исчерпывает всего пространства Σ, то, по теореме Хана—Банаха—Асколи[1]), существует линейный функционал, равный нулю на $\overline{\Sigma}_1$ и не равный тождественно нулю в Σ. Так как Σ — гильбертово пространство, это значит, что существует пара $\{v,\omega\}$ с нормой, не равной нулю, такая, что для любой пары $\{f,\varphi\}$ из Σ_1 справедливо соотношение

$$\int\limits_T vf\,dx + \int\limits_0^L P(s,0)\,\omega\varphi\,ds = 0. \tag{29.11}$$

---

[1]) См. Hahn H., Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen, J. für Math., **157** (1927), 214—229. Banach S., Sur les fonctionnelles linéaires, Studia Math., **1** (1929), 211—216, 223—239. Ascoli G., Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari, Ann. Mat. pura appl., **10** (1932), 33—81, 203—232.

Когда эта теорема применяется к изучению краевых задач, рассматриваемые пространства всегда сепарабельны. При таком предположении теорема доказывается без применения трансфинитной индукции.

Имеет место следующая

Лемма. *Если пара* $\{v, \omega\}$ *удовлетворяет условию* (29.11) *для любой пары* $\{f, \varphi\} \in \Sigma_1$, *то функция* v *почти всюду в* T *совпадает с некоторой функцией, принадлежащей классу* $C^{(2)}$ *в* $T-\mathfrak{F}T$ *и классу* $C^{(1)}$ *в* T *и удовлетворяющей условиям*

$$\mathfrak{N}v = 0 \text{ для } x \in T-\mathfrak{F}T, \qquad v = 0 \text{ для } x \in \mathfrak{F}T. \qquad (29.12)$$

Кроме того, почти всюду на $\mathfrak{F}T$

$$P(s, 0)\,\omega = a\,\frac{dv}{d\nu}. \qquad (29.13)$$

Зафиксируем точку $y \in T-\mathfrak{F}T$, возьмем $\rho < d(y)$ и положим

$$u_n(x) = \frac{\gamma_n(\tau)}{2\pi\sqrt{A(y)}}\left(1-\frac{\overline{xy}^5}{\rho^5}\right)^5 \text{ для } \overline{xy} \leqslant \rho, \quad u_n(x) = 0 \text{ для } \overline{xy} > \rho,$$

где

$$\gamma_n(\tau) = \frac{1}{2}\int_{\tau^2}^{1}[1-(1-t)^n]\,\frac{dt}{t}, \quad \tau = \left[\sum_{r,\,s=1}^{2} A_{rs}(y)(x_r-y_r)(x_s-y_s)\right]^{1/2}.$$

Так как $u_n(x)$ принадлежит классу $C^{(2)}$, то из формулы (29.11) следует, что $\int\limits_T v\,\mathfrak{M}u_n\,dx = 0$. Отсюда, применяя формулу Грина, можно получить

$$\int\limits_T \mathfrak{M}u_n(x)\,[v(x)-v(y)]\,dx = -v(y)\int\limits_T \mathfrak{M}u_n(x)\,dx =$$
$$= -v(y)\int\limits_T u_n(x)\,\mathfrak{N}1\,dx. \qquad (29.14)$$

Если в этой формуле допустим переход к пределу под знаком интеграла, то в силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = H_\rho(x, y)$, мы имеем

$$\int\limits_T \mathfrak{M}_x H_\rho(x, y)\,[v(x)-v(y)]\,dx = -v(y)\int\limits_T H_\rho(x, y)\,\mathfrak{N}1\,dx;$$

подвергая второй интеграл преобразованию с помощью формулы Стокса, получим отсюда

$$v(y) = \int\limits_T v(x)\,\mathfrak{M}_x H_\rho(x, y)\,dx. \qquad (29.15)$$

Эта формула аналогична формуле (29.6), только оператор $\mathfrak{N}$ заменен на $\mathfrak{M}$. Поэтому, если эта формула справедлива почти всюду в T, то функция v совпадает всюду, кроме множества меры нуль с некоторым регулярным решением уравнения $\mathfrak{N}v = 0$. Остаетс доказать законность предельного перехода под знаком интеграла в формуле (29.14). В отношении второго интеграла это сразу следует из неравенства $0 < u_n < H_0$.

Что же касается первого интеграла, то в силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{M}u_n = \mathfrak{M}H_\rho$ равномерно в каждой замкнутой области, не содержащей точки y, достаточно показать, что равномерно по n

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{I(y,\,\delta)} \mathfrak{M}u_n [v(x) - v(y)]\,dx = 0, \tag{29.16}$$

где $I(y, \delta)$ — окрестность точки y, определенная неравенством $\tau \leqslant \delta$.

Это справедливо почти для всех y из $T - \mathfrak{F}T$, а именно для тех y, для которых

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta^2} \int\limits_{I(y,\,\delta)} |v(x) - v(y)|\,dx = 0. \tag{29.17}$$

Действительно, легко видеть, что можно написать

$$\mathfrak{M}u_n = \alpha_0\left(\gamma_n'' + \frac{1}{\tau}\gamma_n'\right) + \alpha_1\tau\gamma_n' + \alpha_2\gamma_n,$$

где α_0, α_2 и $\tau\alpha_1$ — ограниченные функции. Положив

$$\beta_i(\tau) = \int\limits_{I(y,\,\tau)} \alpha_i [v(x) - v(y)]\,dx,$$

получим

$$\int\limits_{I(y,\,\delta)} \mathfrak{M}u_n [v(x) - v(y)]\,dx = \int\limits_0^\delta \left(\gamma_n'' + \frac{1}{\tau}\gamma_n'\right)\frac{d\beta_0}{d\tau}\,d\tau + \\ + \int\limits_0^\delta \tau\gamma_n' \frac{d\beta_1}{d\tau}\,d\tau + \int\limits_0^\delta \gamma_n \frac{d\beta_2}{d\tau}\,d\tau. \tag{29.18}$$

Выберем теперь y так, чтобы выполнялось соотношение (29.17); задав ε, можно найти такое δ_ε, чтобы для $\tau < \delta_\varepsilon$ выполнялись неравенства: $|\beta_0|$, $|\beta_2| < \varepsilon\tau^2$, $|\beta_1| < \varepsilon\tau$. Тогда, интегрируя по частям формулу (29.18) и принимая во внимание, что $\gamma_n'' + \gamma_n'/\tau$, $\tau\gamma_n'$ и γ_n — монотонные функции, для $\delta < \delta_\varepsilon$ получаем

$$\left|\int\limits_{I(y,\,\delta)} \mathfrak{M}u_n [v(x) - v(y)]\,dx\right| \leqslant \varepsilon\left[\delta^2 |\gamma_n''(\delta) + \frac{1}{\delta}\gamma_n'(\delta)| + \delta^2|\gamma_n'(\delta)| + \right. \\ \left. + \delta^2|\gamma_n(\delta)| + \int\limits_0^\delta \tau^2 \frac{d}{d\tau}\left(\gamma_n'' + \frac{1}{\tau}\gamma_n'\right)d\tau - \int\limits_0^\delta \tau\frac{d}{d\tau}(\tau\gamma_n')\,d\tau - \int\limits_0^\delta \tau^2\gamma_n' d\tau\right],$$

откуда сразу следует (29.16), так как выражение, заключенное в квадратные скобки, можно оценить независимо от δ и n.

Теперь, чтобы доказать, что v обращается в нуль на $\mathfrak{F}T$, достаточно снова применить формулу (29.11), положив $u = u_n$, а ρ взяв настолько большим, что замкнутая область T заключена внутри сферы $\Gamma(y, \rho)$. Выберем y один раз в $T - \mathfrak{F}T$ и другой раз в $\mathfrak{C}T$. Мы получим две формулы

$$\int_T v(x)\, \mathfrak{M}_x H_\rho(x, y)\, dx + \int_{\mathfrak{F}T} H_\rho(x, y)\, P(s, 0)\, \omega\, d_x s =$$

$$= \begin{cases} v(y) & \text{для } y \in T - \mathfrak{F}T, \\ 0 & \text{для } y \in \mathfrak{C}T. \end{cases}$$

Из первой формулы следует, что функция v непрерывна в T (теоремы 12, V и 14, I); сопоставление ее со второй формулой показывает, что $v = 0$ на $\mathfrak{F}T$.

Но так как любое решение задачи (29.12) принадлежит $C^{(1)}$ в T (см. п. 22), то наряду с формулой (29.11) имеет место формула Грина

$$\int_T vf\, dx + \int_{\mathfrak{F}T} a \frac{dv}{d\nu} \varphi\, ds = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности φ, следует (29.13).

Таким образом, наша лемма полностью доказана, и мы можем вернуться к доказательству теоремы существования. Заметим прежде всего, что, согласно п. 22, существует не более чем конечное число, например p, решений задачи (29.12); пусть это будут функции $v_1, v_2, \ldots, v_p$, и пусть $\{f, \varphi\}$ — точка пространства Σ, удовлетворяющая соотношению (29.10) для $v = v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Очевидно, что $\{f, \varphi\}$ принадлежит Σ_1; иначе, повторяя наши рассуждения, мы доказали бы существование еще одного решения задачи (29.12), линейно не зависящего от v_i. Поэтому существует такая последовательность $\{u_n\}$ функций, принадлежащих классу $C^{(2)}$ в T, что u_n в среднем сходятся на $\mathfrak{F}T$ к φ, а функции $\mathfrak{M}u_n$ в среднем сходятся в T к f. Если предполагается, что f — функция класса $C^{(0,\lambda)}$, то могут представиться две возможности. Или интегралы $\int_T u_n^2\, dx$ равномерно ограничены, и тогда из теоремы 29, III следует существование решения рассматриваемой краевой задачи. Или же упомянутые интегралы не являются равномерно ограниченными. Положим

$$u'_n = u_n \left[\int_T u_n^2\, dx \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Согласно той же теореме 29, III, из последовательности $\{u'_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к решению уравнения $\mathfrak{M}u = 0$, принимающему в среднем на $\mathfrak{F}T$ нулевые значения и не равному тождественно нулю. По теореме 29, III, множество таких решений однородной задачи компактно, и поэтому среди них не более чем конечное число линейно независимых; пусть это будут функции $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(q)}$. В таком случае легко доказать, что можно так определить постоянные c_{ni}, чтобы интегралы

$$\int_T \left[u_n + \sum_{i=1}^{q} c_{ni} u^{(i)} \right]^2 dx$$

были равномерно ограничены. После этого, применяя теорему 29, III к последовательности $\{u_n + \sum c_{ni} u^{(i)}\}$, мы снова можем доказать существование решения рассматриваемой краевой задачи.

Таким образом, теорема существования 29, IV доказана полностью; но если мы хотим придать ей вид, обычный для теорем об альтернативе, то мы должны еще доказать следующее:

29, V. *Число решений однородной задачи, соответствующей рассматриваемой задаче, равно числу условий разрешимости* (29.10).

Пусть положительное число χ превышает c и коэффициент c^* при функции v в операторе $\mathfrak{N}$. Согласно теоремам 29, I и 29, IV, в таком случае для любой функции f, принадлежащей классу $C^{(0,\lambda)}$ в T, существует одно и только одно решение уравнения $\mathfrak{M}u - \chi u = f$, которое на $\mathfrak{F}T$ в среднем принимает нулевые значения. Поэтому для такого решения мы можем написать $u = \mathfrak{T}(f)$, где $\mathfrak{T}$ обозначает линейное преобразование. С помощью соображений, которые применялись при доказательстве теоремы 29, III, легко доказать следующее. Преобразование $\mathfrak{T}$, которое сначала было определено для функций f класса $C^{(0,\lambda)}$, может быть расширено до преобразования, переводящего пространство $L^{(2)}$ функций, интегрируемых с квадратом в T, в подпространство пространства $L^{(2)}$, которое состоит из всех функций, принимающих в среднем на $\mathfrak{F}T$ нулевые значения и принадлежащих в $T - \mathfrak{F}T$ классу $C^{(0,\lambda)}$. Более того, преобразование $\mathfrak{T}$ оказывается *вполне непрерывным* в том смысле, что если функции последовательности $\{f_n\}$ имеют равномерно ограниченные нормы, то из последовательности $\{\mathfrak{T}(f_n)\}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в среднем. Теперь задача нахождения решения уравнения $\mathfrak{M}u = f$, которое принимает в среднем на $\mathfrak{F}T$ нулевые значения, сведена к эквивалентной задаче решения уравнения $u + \chi\mathfrak{T}(u) = \mathfrak{T}(f)$. К такому уравнению применима теорема Рисса[1]), утверждающая, что число условий разрешимости,

---

[1]) См., например, Banach S., Théorie des opérations linéaires, Monografie Mat. Warszawa, 1932, гл. X. [Есть украинский перевод: Курс функціонального аналізу, Київ, 1948. — *Прим. ред.*]

которым должна удовлетворять функция f, равно числу линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения. Таким образом, наша теорема полностью доказана. Из нее немедленно вытекает следующее утверждение:

29, VI. *Всякое решение уравнения* $\mathfrak{M}u = f$, *принимающее в среднем на* $\mathfrak{F}T$ *значения* φ, *непрерывно в* T, *если функция* φ *непрерывна на* $\mathfrak{F}T$.

Сначала докажем это утверждение для однородного случая. Если уравнение $\mathfrak{M}u = 0$ имеет q решений, непрерывных в T и равных нулю на $\mathfrak{F}T$, и q' решений, в среднем равных нулю на $\mathfrak{F}T$, и если p и p' — аналогичные числа для уравнения $\mathfrak{N}v = 0$, то, согласно теореме 29, V, $q' = p$, $p' = q$. А так как, по теореме 22, I, $p = q$, мы получаем нужное равенство: $q = q'$. После этого в неоднородном случае это утверждение доказывается с помощью теоремы 21, IV.

Можно было бы показать, что с помощью развитого в этом пункте метода получается также теорема существования для задачи, поставленной в обычной форме; добавим, что в случае, когда рассматривается задача в обыкновенной постановке, возможны различные упрощения[1]). С другой стороны, при изучении обобщенных задач можно вместо сходимости в среднем с показателем 2 рассматривать сходимость в среднем с показателем p.

По-видимому, этот метод применим как в случае $m > 2$, так и при изучении задачи Неймана. Было бы также интересно попытаться применить этот метод в случае, который уже рассматривался с другой точки зрения в п. 28, когда T — замкнутая область общего вида. Некоторые указания по всем этим вопросам для частного случая $\mathfrak{M} = \Delta$ можно извлечь из работ [4] и [5] Чиммино. Другие применения этого метода будут указаны в гл. VII (п.п. 48, 49, 55, 56).

30. Метод ортогональных проекций. Под этим названием известен способ решения обобщенных краевых задач, который впервые был применен Вейлем [1] при изучении краевых задач для гармонических функций. Несмотря на то, что этот метод заставляет иначе ставить обобщенные краевые задачи, он очень похож на метод, примененный на несколько лет раньше Каччопполи и Чиммино и изложенный в основных чертах в предыдущем пункте. Действительно, в основе метода Вейля лежит, с одной стороны, та самая лемма[2]), которой

---

[1]) См. Пини [1] и для случая $\mathfrak{M} = \Delta$ Миранда [4].

[2]) В частном случае $\mathfrak{M} = \Delta$, $\omega = 0$ эта лемма обычно называется „леммой Вейля". Это название неоправдано, так как это предложение в более общем виде имеется уже в работе [10] Каччопполи. Обобщение леммы на случай произвольного $\mathfrak{M}$, данное Чиммино [3, 4], также появилось на несколько лет раньше, чем работа Вейля. Для определенности Каччопполи и Чиммино рассматривали случай $m = 2$, а Вейль — случай $m = 3$. С другой стороны, некоторые элементы метода ортогональных проекций содержатся в исследовании Заремба [1], позднее продолженном Никодимом [2]. По этому вопросу см. также заметку [2] Гординга.

мы пользовались при доказательстве теоремы 29, IV, и, с другой стороны, как и в методе Каччопполи — Чиммино, теорема Хана — Банаха — Асколи, которая, однако, применяется не непосредственно, а через следующее свое очевидное следствие:

Если $\overline{\Sigma}_1$ — *замкнутое линейное многообразие в гильбертовом пространстве* Σ, *а* Σ_1^* — *линейное многообразие в* Σ, *ортогональное к* $\overline{\Sigma}_1$, *то каждый элемент* φ *из* Σ *однозначно определяет два элемента* $\overline{\varphi}_1 \in \overline{\Sigma}_1$ *и* $\varphi_1^* \in \Sigma_1^*$, *таких, что* $\varphi = \overline{\varphi}_1 + \varphi_1^*$.

Элементы $\overline{\varphi}_1$ и φ_1^* называются *ортогональными проекциями* элемента φ соответственно на $\overline{\Sigma}_1$ и Σ_1^*; отсюда и происходит название метода. Этот метод различным образом применялся также и к краевым задачам для уравнений и систем уравнений высших порядков. Однако в этом пункте мы ограничимся изложением основных черт этого метода и будем применять его только к изучению самосопряженных однородных эллиптических уравнений. Этот случай был рассмотрен одним из первых в работах Кодаиры [1] и Вишика [1]. Другие применения этого метода упоминаются в гл. VII. Заметим также, что наше изложение рассматриваемой задачи несколько отличается от изложения вышеупомянутых авторов, так как некоторые результаты, полученные Морри [2] и Стампаккья[1]), относящиеся к свойствам определенных классов функций, позволяют нам сделать изложение более ясным.

Итак, пусть

$$\mathfrak{M}u = \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + cu$$

самосопряженный эллиптический оператор, коэффициенты которого определены и непрерывны в замкнутой ограниченной области T, причем a_{ik} принадлежат классу $C^{(2,\lambda)}$, а c — классу $C^{(0;\lambda)}$. Пусть, кроме того, $c < 0$. Обозначим через Σ класс функций $\varphi(x)$, определенных в $T - \mathfrak{F}T$ и удовлетворяющих там следующим условиям: 1) Почти для всех значений $m - 1$ переменных $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ функция $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна по x_i. 2) $\varphi \in L^{(2)}$, $\partial\varphi/\partial x_i \in L^{(2)}$ в T. Если определить скалярное произведение двух функций φ и ψ из Σ равенством

$$(\varphi, \psi) = \int_T \left[\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - c\varphi\psi\right] dx,$$

то Σ можно рассматривать как гильбертово пространство; оно оказывается полным[2]) относительно нормы $(\varphi, \varphi)^{1/2}$. Обозначим через

---

[1]) Stampacchia G., Sopra una classe di funzioni di *n* variabili, Ricerche di Mat. Napoli, 1 (1952), 27—54.

[2]) Там же, теорема 4, III.

Σ_k линейное многообразие в Σ, состоящее из всех функций $\varphi \in \Sigma$, которые принадлежат классу $C^{(k)}$ в $T - \mathfrak{F}T$ и тождественно обращаются в нуль в некоторой окрестности границы $\mathfrak{F}T$; $\overline{\Sigma}_k$ обозначает замыкание Σ_k. Предположим, что $\varphi \in \Sigma$, и рассмотрим обобщенную задачу Дирихле, состоящую в отыскании функции $u(x)$, которая является регулярным решением уравнения $\mathfrak{M}u = 0$ в $T - \mathfrak{F}T$ и удовлетворяет *„краевому условию“*

$$u - \varphi \in \overline{\Sigma}_1. \tag{30.1}$$

Метод ортогональных проекций позволяет немедленно доказать как существование, так и единственность решения этой задачи. Действительно, пусть Σ_1^* есть линейное многообразие в Σ, ортогональное $\overline{\Sigma}_1$, а $\overline{\varphi}_1$ и $\varphi_1^* = u$ — ортогональные проекции φ на $\overline{\Sigma}_1$ и Σ_1^*. Очевидно, что функция u удовлетворяет краевому условию (30.1) и, кроме того, для нее справедливо соотношение

$$\int_T \left[\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - cu\psi\right] dx = 0,$$

если только $\psi \in \overline{\Sigma}_1$. В частности, если $\psi \in \Sigma_2$, то, производя в предыдущей формуле интегрирование по частям, можно получить

$$\int_T u\, \mathfrak{M}\psi\, dx = 0,$$

а отсюда следует, согласно лемме п. 29, которую легко обобщить на случай $m > 2$, что u почти всюду совпадает с некоторым регулярным решением уравнения $\mathfrak{M}u = 0$. Таким образом, теорема существования полностью доказана; теорема единственности следует из того факта, что всякое решение этой задачи принадлежит Σ_1^* и должно поэтому, в силу (30.1), совпадать с проекцией функции φ на Σ_1^*.

С помощью аналогичных методов можно было бы рассмотреть также неоднородное уравнение, но мы сошлемся по этому вопросу на цитированную работу Кодаиры.

Наконец, с целью сравнения результатов, полученных этим методом, с результатами предыдущего пункта полезно отметить, что данная здесь постановка краевой задачи имеет то преимущество, что она позволяет отказаться от каких бы то ни было предположений относительно регулярности границы $\mathfrak{F}T$. Однако это налагает некоторые ограничения на природу граничных данных. Действительно, заметим, что если на $\mathfrak{F}T$ задана функция φ с интегрируемым квадратом или даже непрерывная, то не всегда возможно продолжить φ на всю замкнутую область T так, чтобы она принадлежала классу Σ, независимо от условий регулярности, налагаемых на $\mathfrak{F}T$. Для такой функции φ краевая задача, рассматриваемая в этом пункте, лишена смысла, в то время как в случае, когда $\mathfrak{F}T$ удовлетворяет некоторым условиям регулярности, имеет смысл обобщенная задача в постановке Чиммино.

31. Метод уравнений Фишера — Рисса. В этом пункте мы займемся одним методом решения краевых задач, предложенным Пиконе [12]; затем этот метод развивали Америо [3, 5, 7, 8] и Фикера [5, 7, 10], получившие интересные результаты. Преимуществом этого метода является то, что он дает возможность численно находить решения краевых задач, но он интересен также с точки зрения вопросов существования решений. Кроме того, он имеет различные приложения к задачам, отличным от тех, которые нас интересуют. Некоторые из этих дальнейших применений будут указаны в гл. VII (пп. 50, 55, 56); другие приложения содержатся в работе [1] Пиконе и Фикеры, в которой этот метод излагается в абстрактной форме. Укажем также статью [16] Фикеры, в которой выяснена тесная связь, существующая между этим методом и методом Каччопполи и Чиммино, изложенным в п. 29.

Начнем с того, что напомним некоторые понятия из теории линейной аппроксимации, которыми нам придется пользоваться. Рассмотрим два вектора $\alpha \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ и $\alpha' \equiv (a'_1, a'_2, \ldots, a'_p)$, k-е компоненты которых, a_k и a'_k, являются действительными функциями с суммируемым квадратом на многообразии I_k пространства S_m. Назовем скалярным произведением векторов α и α' величину

$$(\alpha, \alpha') = \sum_{k=1}^{p} \int_{I_k} a_k a'_k \, dI_k.$$

Пусть теперь дана система линейно независимых векторов $\{\alpha^{(n)}\}$ и последовательность действительных постоянных $\{c_n\}$. Мы ставим себе целью найти такой вектор α, чтобы для любого n выполнялось равенство $(\alpha, \alpha^{(n)}) = c_n$. Обозначим через a_k компоненты вектора α, а через $a_k^{(n)}$ — компоненты вектора $\alpha^{(n)}$; тогда эти равенства запишутся в виде

$$\sum_{k=1}^{p} \int_{I_k} a_k a_k^{(n)} dI_k = c_n. \tag{31.1}$$

Эта система равенств носит название системы *интегральных уравнений Фишера — Рисса*. Применяя процесс ортогонализации Шмидта, можно однозначно определить постоянные A_{ni} таким образом, чтобы система векторов $\beta^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} A_{ni}\alpha^{(i)}$ была ортогональной, Пусть $b_k^{(n)}$ — компоненты вектора $\beta^{(n)}$. Система (31.1) эквивалентна тогда системе

$$\sum_{k=1}^{p} \int_{I_k} a_k b_k^{(n)} dI_k = \sum_{i=1}^{n} A_{ni} c_i, \tag{31.2}$$

которая, как известно, разрешима в том и только в том случае, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ni} c_i \right)^2 < \infty. \tag{31.3}$$

Если условие (31.3) выполнено, то общее решение системы (31.1) имеет вид

$$a_k = \bar{a}_k + \sum_{n=1}^{\infty} b_k^{(n)} \sum_{i=1}^{n} A_{ni} c_i, \tag{31.4}$$

где $\bar{\alpha} \equiv (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_p)$ — произвольный вектор, ортогональный всем векторам $\alpha^{(n)}$, а ряд в правой части равенства должен сходиться в среднем на I_k. В частности, если система векторов $\{\alpha^{(n)}\}$ *замкнута*, т. е. если каждый вектор, ортогональный ко всем $\alpha^{(n)}$, имеет компоненты, равные нулю почти всюду в своих областях определения, то решение системы (31.1) единственно, если оно существует, и определяется формулой (31.4) при $\bar{a}_k = 0$.

Перейдем теперь к изложению метода Пиконе и тех результатов, которые можно установить этим методом. Мы не будем сейчас уточнять условия, налагаемые на рассматриваемые функции. Пусть u — решение уравнения $\mathfrak{M}u = f$ в T, а $\{w^{(n)}\}$ — некоторая последовательность функций, также заданных в T. Из формулы Грина при каждом n получаем равенство

$$\int_T (w^{(n)} f - u\, \mathfrak{N} w^{(n)})\, dx - \int_{\mathfrak{F}T} (w^{(n)}\, \mathfrak{P} u - u\, \mathfrak{Q} w^{(n)})\, d\sigma = 0, \tag{31.5}$$

где $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ определяются формулами (7.1) и (7.2) при $l \equiv \nu$.

Метод Пиконе состоит в следующем. Из формулы (31.5) получают систему уравнений Фишера — Рисса для некоторого подходящим образом подобранного неизвестного вектора. Решение этой системы позволяет найти решение поставленной краевой задачи.

Это можно сделать различными способами; мы изложим их, ограничиваясь пока рассмотрением задачи Дирихле с краевым условием $u = \varphi$.

1-й метод. Пусть $\{z^{(n)}\}$ — последовательность функций, удовлетворяющих уравнению $\mathfrak{N} z^{(n)} = 0$. Положим в формуле (31.5) $w^{(n)} = z^{(n)}$; тогда эти уравнения перепишутся в виде

$$\int_{\mathfrak{F}T} z^{(n)}\, \mathfrak{P} u\, d\sigma = \int_T z^{(n)} f\, dx + \int_{\mathfrak{F}T} \varphi\, \mathfrak{Q} z^{(n)}\, d\sigma. \tag{31.6}$$

Уравнения (31.6) можно рассматривать как систему уравнений Фишера — Рисса для неизвестной функции (вектора с одной компонентой) $\mathfrak{P}u$. Если из этих уравнений можно найти $\mathfrak{P}u$ и если известно фундаментальное решение $G(x, y)$, то формула Стокса

$$u(x) = -\int_T G(x, y) f(y)\, dy + \int_{\mathfrak{F}T} [G(x, y)\,\mathfrak{P}u(y) - \varphi(y)\,\mathfrak{Q}_y G(x, y)]\, d_y\sigma \tag{31.7}$$

дает решение u.

2-й метод. Пусть функция $\mathfrak{P}u$ найдена, как выше, и пусть $\{w^{(n)}\}$ — последовательность функций, *не* являющихся решениями уравнения $\mathfrak{N}w^{(n)} = 0$. Формулы (31.5), записанные в виде

$$\int_T u\mathfrak{N}w^{(n)}\, dx = \int_T w^{(n)} f\, dx - \int_{\mathfrak{F}T} (w^{(n)}\mathfrak{P}u - \varphi\mathfrak{Q}w^{(n)})\, d\sigma, \tag{31.8}$$

являются системой Фишера — Рисса, по которой можно попытаться вычислять непосредственно функцию u, не прибегая к формуле (31.7).

3-й метод. Формулы (31.5), записанные в виде

$$\int_T u\,\mathfrak{N}w^{(n)}\, dx + \int_{\mathfrak{F}T} w^{(n)}\,\mathfrak{P}u\, d\sigma = \int_T w^{(n)} f\, dx + \int_{\mathfrak{F}T} \varphi\mathfrak{Q}w^{(n)}\, d\sigma, \tag{31.9}$$

можно рассматривать как систему уравнений Фишера — Рисса для неизвестного вектора, компонента u которого задана в T, а компонента $\mathfrak{P}u$ — на $\mathfrak{F}T$. Решение этой системы дает одновременно u и $\mathfrak{P}u$.

Аналогичные рассуждения, очевидно, справедливы и для задачи Неймана; этот метод легко можно приспособить также к решению смешанных задач; однако на этом мы не будем останавливаться; в гл. VII (п. 50) мы вновь коснемся этого вопроса.

Сделаем теперь следующее замечание. Хотя справедливо утверждение, что любое решение рассматриваемой краевой задачи является также решением вышеупомянутых систем Фишера — Рисса, обратное справедливо не при всяком выборе функций $z^{(n)}$ или $w^{(n)}$. В своей заметке [12], посвященной этому предмету, Пиконе как раз ставит вопрос о том, каким образом надо выбирать такие функции, чтобы системы уравнений Фишера — Рисса имели в качестве решений все решения поставленной краевой задачи и только эти решения. Первый ответ на этот вопрос для частного случая уравнений с постоянными коэффициентами содержится уже в цитированной заметке Пиконе и в работе [3] АмерFile. В более поздней работе [6] Америо подошел к изучению этого вопроса во всей его общности, Итак, пусть $\mathfrak{M}$ — эллиптический оператор, определенный в области C. Предположим, что коэффициенты a_{ik} принадлежат классу $C^{(2,\lambda)}$ в C, коэффициенты b_i принадлежат классу $C^{(1,\lambda)}$, а c — классу $C^{(0,\lambda)}$. Пусть $T \subset C$ — ограниченная замкнутая область, которую для простоты[1] мы будем считать класса $A^{(2)}$, а T_1 — другая замкнутая область, также класса $A^{(2)}$, причем T лежит внутри T_1. При таких предположениях уравнение $\mathfrak{M}u = 0$ имеет по крайней мере одно фундаментальное решение $G(x, y)$, определенное в T_1. Мы будем считать его раз и навсегда фиксированным. Пусть, кроме того, имеются операторы $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$, заданные формулами (7.1) и (7.2) при $l \equiv \nu$ и $\beta \in C^{(0)}$. Обозначим через Γ_1 класс функций $u(x)$, заданных в $T - \mathfrak{F}T$ и удовлетворяющих там следующим условиям:

a) Функция u принадлежит классу $C^{(2)}$ в $T - \mathfrak{F}T$, а функция $\mathfrak{M}u$ ограничена и принадлежит классу $C^{(0,\lambda)}$ в $T - \mathfrak{F}T$.

b) Для почти всех x_0 из $\mathfrak{F}T$ при $x \to x_0$ вдоль конормали существуют пределы

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \qquad \lim_{x \to x_0} \mathfrak{P}u = \psi(x_0), \tag{31.10}$$

причем функции $\varphi(x_0)$ и $\psi(x_0)$ суммируемы на $\mathfrak{F}T$[2].

c) Выполняется равенство

$$\begin{aligned} \theta u(x) = &-\int_T G(x, y)\,\mathfrak{M}u(y)\,dy + \\ &+ \int_{\mathfrak{F}T} [\psi(y)\,G(x, y) - \varphi(y)\,\mathfrak{Q}_y\,G(x, y)]\,d_y\sigma, \end{aligned} \tag{31.11}$$

где $\theta = 1$ для $x \in T - \mathfrak{F}T$ и $\theta = 0$ для $x \in T_1 - T$.

Обозначим через $\Gamma^{(2)}$ подкласс класса $\Gamma^{(1)}$, состоящий из всех функций $u(x)$, для которых $\varphi, \psi \in L^{(2)}$, а через $\Gamma^{(C)}$ — подкласс класса $\Gamma^{(1)}$, состоящий из функций, для которых $\varphi, \psi \in C^{(0)}$, а соотношения (31.10) выполняются всюду на $\mathfrak{F}T$.

Основой всего дальнейшего является следующая теорема Америо:

31, I. *Пусть ограниченная функция* f *класса* $C^{(0,\lambda)}$ *задана в* $T - \mathfrak{F}T$, а $\varphi, \psi \in L^{(1)}$ на $\mathfrak{F}T$. *Если для* $x \in T_1 - T$ *выполняется соотношение*

$$\begin{aligned} &-\int_T G(x, y) f(y)\,dy + \\ &+ \int_{\mathfrak{F}T} [\psi(y)\,G(x, y) - \varphi(y)\,\mathfrak{Q}_y\,G(x, y)]\,d_y\sigma = 0, \end{aligned} \tag{31.12}$$

---

[1] В работе Америо рассматривается замкнутая область весьма общего вида, граница которой при некоторых условиях может нметь даже особые точки, составляющие множество нулевой поверхностной меры.

[2] Относительно смысла оператора $\mathfrak{P}u$ для $x \neq x_0$ см. формулу (14.13).

то функция $u(x)$, определенная в $T - \mathfrak{F}T$ формулой

$$u(x) = -\int_T G(x, y) f(y)\, dy + \\ + \int_{\mathfrak{F}T} [\psi(y) G(x, y) - \varphi(y) \mathfrak{Q}_y G(x, y)]\, d_y\sigma, \qquad (31.13)$$

принадлежит классу $\Gamma^{(1)}$, для нее выполняются соотношения (31.10) *и имеет место равенство $\mathfrak{M}u = f$. Если же $\varphi, \psi \in C^{(0)}$, то $u \in \Gamma^{(C)}$.*

Очевидно, что выполняется соотношение $\mathfrak{M}u = f$; поэтому достаточно установить равенства (31.10), что очень просто. Действительно, если мы обозначим через $u(x)$ правую часть равенства (31.13) также и для $x \in T_1 - T$, то получим, согласно (31.12), $u(x) = 0$ и $T_1 - T$: Пусть теперь x_0 — точка на $\mathfrak{F}T$, а $x \in T$, $x' \in T_1 - T$ — две точки, лежащие на конормали, проведенной в точке x_0, и симметричные относительно x_0. Можно написать

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \lim_{x \to x_0} (u(x) - u(x')),$$

$$\lim_{x \to x_0} \mathfrak{P}u(x) = \lim_{x \to x_0} (\mathfrak{P}u(x) - \mathfrak{P}u(x')),$$

и тогда первая из формул (31.10) следует из теорем 13, I, 14, II и 15, II, а вторая — из теорем 13, I, 14,VI и 15, VI[1]).

Пусть $\{v^{(n)}\}$ — последовательность функций, заданных и непрерывных в $T_1 - (T - \mathfrak{F}T)$. Умножая равенство (31.12) на $v^{(n)}$ и интегрируя по $T_1 - T$, получим уравнения

$$\int_{\mathfrak{F}T} z^{(n)} \psi\, d\sigma = \int_T z^{(n)} f\, dx + \int_{\mathfrak{F}T} \varphi\, \mathfrak{Q} z^{(n)}\, d\sigma, \qquad (31.14)$$

где

$$z^{(n)}(y) = \int_{T_1 - T} G(x, y)\, v^{(n)}(x)\, dx. \qquad (31.15)$$

Отсюда следует теорема

31, II. *Если последовательность $\{v^{(n)}\}$ замкнута в $T_1 - (T - \mathfrak{F}T)$ и если $\varphi, \psi \in L^{(2)}$, то выполнение равенств* (31.14) *с функциями $z^{(n)}$, заданными формулами* (31.15), *является необходимым и достаточным условием для того, чтобы было справедливо соотноше-*

---

[1]) Идея предпослать доказательству этой теоремы исчерпывающую теорию обобщенных потенциалов принадлежит Фикере [5], который полностью развил эту теорию в случае $\mathfrak{M} = \Delta$, $m = 3$. Надо, однако, отметить, что некоторые элементы указанной теории содержатся уже в работе [6] Америо, в которой автор дает прямое доказательство теоремы 31, I.

ние (31.12). *Результат сохраняется также и для* φ, $\psi \in L^{(1)}$, *если только любая суммируемая в* $T_1 - (T - \mathfrak{F}T)$ *функция, ортогональная всем* $v^{(n)}$, *равна нулю почти всюду.*

Действительно, достаточно заметить, что если φ, $\psi \in L^{(p)}$ при $p = 1$ или 2, то также и левая часть равенства (31.12) суммируема с p-й степенью в $T_1 - (T - \mathfrak{F}T)$, в силу теорем 14, I и 15, I.

Поэтому, если мы хотим решить краевую задачу, состоящую в отыскании решения уравнения $\mathfrak{M}u = f$, принадлежащего классу $\Gamma^{(2)}$ и удовлетворяющего одному из условий (31.10), то мы можем определить из равенств (31.14), рассматриваемых как система уравнений Фишера—Рисса, ту из функций φ или ψ, которая является неизвестной, и применить затем формулу (31.13). Согласно теоремам 31, I и 31, II, таким путем получаются все решения рассматриваемой краевой задачи и только эти решения. Так как формулы (31.14) отличаются от формул (31.6) только формальной заменой $\mathfrak{P}u$ на ψ, а с другой стороны, функции $z^{(n)}$, заданные формулами (31.15), очевидно, являются в $T - \mathfrak{F}T$ регулярными решениями уравнения $\mathfrak{N}z^{(n)} = 0$, то все вышеизложенное является применением 1-го метода Пиконе к решению обобщенных задач Дирихле и Неймана.

Однако с точки зрения численного решения уравнений этот метод имеет серьезный недостаток, так как он требует, чтобы было известно фундаментальное решение. Сейчас мы увидим, как можно применять 3-й метод, даже не зная предварительно $G(x, y)$.

Начнем со следующего замечания:

31, III. *Если* u — *решение уравнения* $\mathfrak{M}u = f$, *принадлежащее классу* $\Gamma^{(1)}$, *а* v — *функция класса* $C^{(2)}$ *в* T, *то справедлива формула Грина*

$$\int_T [u\,\mathfrak{N}v - fv]\,dx = \int_{\mathfrak{F}T} [\varphi\,\mathfrak{Q}v - v\psi]\,d\sigma. \tag{31.16}$$

Действительно, так как, согласно теореме 16, VI, можно считать функцию v заданной в T_1 и принадлежащей там классу $C^{(2)}$, формулу (31.16) можно проверить, подставив вместо функции v ее выражение, полученное из формулы Стокса, написанной для замкнутой области T_1, переменив порядок интегрирования и приняв во внимание формулы (31.12) и (31.13).

Теперь можно доказать следующее.

31, IV. *Пусть функции* φ, $\psi \in L^{(1)}$, *а функция* f *непрерывна в* T *и принадлежит классу* $C^{(0,\lambda)}$ *в* $T - \mathfrak{F}T$. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы функция* $u(x) \in L^{(1)}$ *в* T *совпадала почти всюду на* $T - \mathfrak{F}T$ *с функцией класса* $\Gamma^{(1)}$, *удовлетворяющей соотношениям* (31.12) *и* (31.13), *является выполнение равенства* (31.16) *для всех функций* $v = w^{(n)}$, где $\{w^{(n)}\}$ — *последователь-*

ность одночленов $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_m^{r_m}$ *с целыми неотрицательными показателями* $r_1, r_2, \dots, r_m$.

Необходимость условия следует из предыдущей теоремы. Докажем, что условие является достаточным. Для доказательства заметим, что если формула (31.16) справедлива для $v = w^{(n)}$, то мы будем иметь для $x \in T_1$

$$\int\limits_T [u(y)\mathfrak{N}_y P_n(x, y) - f(y) P_n(x, y)]\, dy =$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{F}T} [\varphi(y)\mathfrak{Q}_y P_n(x, y) - \psi(y) P_n(x, y)]\, d_y\sigma, \qquad (31.17)$$

где

$$P_n(x, y) = \left(\frac{n}{\pi R^2}\right)^{\frac{m}{2}} \int\limits_{T_1} G(x, t) \prod_{i=1}^{m} \left[1 - \frac{(t_i - y_i)^2}{R^2}\right]^n dt$$

есть n-й полином Стильтьеса для функции $G(x, y)$, а R обозначает диаметр T_1. Хорошо известно, что эти полиномы и их первые и вторые производные по переменным y_i равномерно сходятся к $G(x, y)$ и соответствующим производным в любой замкнутой области, не содержащей точки x. Переходя к пределу в формуле (31.17) при $n \to \infty$ и $x \in T_1 - T$, мы сразу получим (31.12).

Такой же предельный переход в случае $x \in T - \mathfrak{F}T$ позволяет установить, что формула (31.13) справедлива при условии, что

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{-m} \int\limits_{\Gamma(x;\, \rho)} |u(y) - u(x)|\, dy = 0$$

почти для всех x из T. Это доказывается с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые применялись в п. 29 при доказательстве того, что предельный переход в формуле (29.14) дает (29.15). При этом важен тот факт, установленный Америо, что функции $P_n(x, y)$ и $\mathfrak{N}_y P_n(x, y)$ имеют порядок $O(r^{2-m})$ и $O(r^{-m})$ соответственно, причем оценки равномерны относительно x и y в T, а также относительно n.

Из доказанного следует, что если в качестве $w^{(n)}$ взять функции, упомянутые в теореме 31, IV, то система уравнений Фишера — Рисса, которая рассматривается в 3-м методе Пиконе, имеет в качестве решений все такие векторы $(u, \mathfrak{P}u)$, для которых u является решением обобщенной задачи Дирихле, и только такие векторы. Ту же систему можно применять для решения задачи Неймана, считая неизвестным вектор (u, φ). Наконец, теми же функциями $\{w^{(n)}\}$ можно пользоваться при применении второго метода. Действительно, из теоремы 31, IV немедленно следует теорема

31, V. *Если* $\{w^{(n)}\}$ — *последовательность одночленов, упомянутых в теореме* 31, IV, *то последовательность* $\{\mathfrak{N}w^{(n)}\}$ *замкнута.*

Америо доказал также, что аналогичные результаты можно получить, принимая за функции $w^{(n)}$ вместо одночленов $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_m^{r_m}$ функции вида $e^{2\pi i\,\Sigma r_k x_k/T_k}$. В таком виде этот метод оказывается связанным с методом преобразования Лапласа с конечным отрезком интегрирования. К этому кругу идей относятся две работы Гиццетти [1,4], в которых рассматривается уравнение $\Delta u - \lambda^2 u = f$, а также первые результаты Пиконе [12] и Америо [3] для уравнений с постоянными коэффициентами.

Исследованиями Америо, результаты которых мы до сих пор излагали, установлена эквивалентность решения краевых задач и решения системы уравнений Фишера — Рисса. Поэтому любую теорему существования или единственности, относящуюся к некоторой обобщенной краевой задаче, можно превратить в аналогичную теорему для системы уравнений Фишера — Рисса. В частности, каждая теорема единственности порождает теорему о замкнутости системы функций или векторов. Наоборот, в случае, когда теорема единственности не имеет места, отыскание решений однородной краевой задачи превращается в отыскание функций (или векторов), ортогональных всем функциям (или векторам) данной системы. Мы не будем заниматься этим последним вопросом и отошлем читателя к работе [7] Америо; но мы хотим установить, при каких условиях для обобщенных краевых задач имеют место теоремы существования и единственности решений. То, что будет здесь сказано, является простым обобщением результатов, полученных по этому вопросу Фикерой [5] в частном случае $\mathfrak{M} = \Delta$, $m = 3$.

Имеет место следующая теорема:

31, VI. *Всегда, когда теорема единственности имеет место для обычной задачи Дирихле или Неймана, она справедлива также и для обобщенной краевой задачи.*

Предположим, например, что u есть решение обобщенной однородной задачи Дирихле. Из формулы (31.12), в которой $f = \varphi = 0$, можно заключить, учитывая теорему 14, VI, что почти для всех x на $\mathfrak{F}T$ выполняется равенство

$$\frac{1}{2}\psi(x) = \int\limits_{\mathfrak{F}T} \psi(y)\,\mathfrak{P}_x G(x, y)\, d_y\sigma.$$

Методом итераций можно установить, что функция ψ удовлетворяет интегральному уравнению с непрерывным ядром и, следовательно, сама также непрерывна. Тогда функция u, согласно теореме 31, I, принадлежит классу $\Gamma^{(C)}$. Она равна нулю, так как является решением обычной задачи Дирихле.

Относительно существования решения обобщенной задачи Дирихле мы ничего не можем сказать. Действительно, решение уравнения $\mathfrak{M}u = f$, удовлетворяющее первому из условий (31.10), вообще говоря, не имеет производной по направлению конормали и поэтому не принадлежит классу $\Gamma^{(1)}$; это может случиться и тогда, когда функция φ непрерывна или даже удовлетворяет условию Гёльдера. С другой стороны, известно (см. гл. V, п. 35 и Жиро [20]), что и случае, когда φ принадлежит классу $C^{(1,\lambda)}$ на $\mathfrak{F}T$, конормальная производная существует; но тогда сама функция u принадлежит классу $C^{(1,\lambda)}$ в T. Следовательно, в этом случае метод Пиконе безусловно применим; но было бы интересно установить, каковы минимальные условия, которые надо наложить на функцию φ для того, чтобы конормальная производная существовала почти всюду.

Что касается задачи Неймана, то можно доказать следующую теорему.

31, VII. *Если $\psi \in L^{(2)}$, то необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы существовало решение обобщенной задачи Неймана, являются те же самые условия разрешимости, которым должны удовлетворять функции f и ψ в случае обычной задачи. В частности, если соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение, то задача Неймана разрешима при любых f и ψ.*

Действительно, если отыскивается решение уравнения $\mathfrak{M}u = f$, удовлетворяющее второму условию (31.10), то, как и в п. 22, для функции u можно написать выражение

$$u = -\int_T G^*(x, y)\, z(y)\, dy + 2\int_{\mathfrak{F}T} G^*(x, y)\, \zeta(y)\, d_y\sigma, \qquad (31.18)$$

где G^* является главным фундаментальным решением уравнения $\mathfrak{M}u - \chi u = 0$, для которого $c - \chi < 0$. На этот раз предполагается, что функция z принадлежит классу $C^{(0,\lambda)}$ в $T - \mathfrak{F}T$ и классу $L^{(2)}$ в T, а функция ζ — классу $L^{(2)}$ на $\mathfrak{F}T$. Опираясь, как обычно, на формулы (13.7) и (14.14), а также на теорему 14, V, можно получить систему интегральных уравнений (22.5), в которой функция φ заменена на ψ. Теперь эта система должна удовлетворяться только почти всюду, но это не вносит никаких изменений в ее исследование[1]). Поэтому наша теорема будет полностью доказана, если мы покажем, что функции f, ψ и функция φ, почти всюду на $\mathfrak{F}T$ совпадающая с правой частью равенства (31.18), удовлетворяют равенству (31.12), так как этим будет доказана принадлежность

---

[1]) Действительно, произведя в системе (22.5) нужное число итераций, мы придем к системе с непрерывной матрицей и свободными членами, интегрируемыми с квадратом. Ее решение (z, ζ) удовлетворяет всем требованиям, наложенным на эти функции.

функции u классу $\Gamma^{(2)}$. Из формулы Стокса легко получается следующее тождество:

$$G(x, y) = \int_T G(x, t)\chi(t)G^*(t, y)\,dt + \\ + \int_{\mathfrak{F}T} [G^*(t, y)\mathfrak{Q}_t G(x, t) - G(x, t)\mathfrak{P}_t G^*(t, y)]\,d_t\sigma,$$

справедливое при $x \in T_1 - T$ и $y \in T$. Отсюда следует, что для $x \in T_1 - T$ и $y \in \mathfrak{F}T$

$$\frac{1}{2}G(x, y) = \int_T G(x, t)\chi(t)G^*(t, y)\,dt + \\ + \int_{\mathfrak{F}T} [G^*(t, y)\mathfrak{Q}_t G(x, t) - G(x, t)\mathfrak{P}_t G^*(t, y)]\,d_t\sigma.$$

Умножим первую из этих формул на $z(y)$ и проинтегрируем по T по переменной точке y; вторую формулу умножим на $2\zeta(y)$ и проинтегрируем по $\mathfrak{F}T$ по y. Произведем почленное вычитание; учитывая формулы (22.5) и выражение для функции φ, легко получить равенство (31.12).

В дополнение к только что доказанной теореме можно заметить следующее. Так как произвольную функцию класса $\Gamma^{(2)}$ можно представить в виде (31.18), то из теорем 13, III и 14, II вытекает теорема

31, VIII. *Любая функция класса* $\Gamma^{(2)}$ *обладает первыми производными, суммируемыми в* T *с квадратом.*

К этому можно добавить следующее:

31, IX. *Для любой функции* u, *принадлежащей* $\Gamma^{(2)}$ *в* T, *имеет место формула*

$$\int_T \left[u\mathfrak{M}u + \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right]dx = \\ = \frac{1}{2}\int_T (c + c^*)\,u^2\,dx + \int_{\mathfrak{F}T} \varphi\left[\psi - \left(\beta - \frac{b}{2}\right)\varphi\right]d\sigma. \quad (31.19)$$

В случае, когда $u \in C^{(1)}$, формула (31.19) сводится к (7.13). В общем случае можно, не нарушая общности, считать, что $c = 0$, $\beta > 0$. Тогда в равенстве (31.18) можно положить $G = G^*$, $z = f$. Функцию ζ мы будем аппроксимировать в среднем последовательностью функций $\{\zeta_n\}$, удовлетворяющих условию Гёльдера. Обозначим через u_n функцию, которая получается из формулы (31,18), если в ней заменить ζ на ζ_n. Согласно теореме 12, VII, производные функций u_n в T сходятся в среднем к производным функции u, и последовательности $\{u_n\}$ и $\{\mathfrak{P}u_n\}$ в среднем сходятся на $\mathfrak{F}T$ к φ и ψ. Так как формула (31.19) верна для функций u_n, предельный переход доказывает наше утверждение.

32. Вариационный метод. Хорошо известно, что всякое эллиптическое самосопряженное уравнение

$$\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + cu = f \tag{32.1}$$

является уравнением Эйлера для кратного интеграла

$$\int_T \left[\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} - cu^2 + 2uf\right] dx. \tag{32.2}$$

Эллиптичность уравнения (32.1) влечет за собой положительную определенность интеграла (32.2) в смысле вариационного исчисления. Поэтому ясно, каким образом отыскание решений уравнения (32.1), удовлетворяющих краевому условию

$$u = \varphi \text{ для } x \in \mathfrak{F}T, \tag{32.3}$$

связано с отысканием минимума интеграла (32.2) в некотором классе функций, удовлетворяющих условию (32.3). Связь между этими задачами подсказывает другой метод доказательства теоремы существования для задачи Дирихле. Этот метод состоит в том, что сначала доказывается существование минимума интеграла (32.2) в некотором классе функций, удовлетворяющих условию (32.3), а затем устанавливается, что минимизирующая функция есть решение уравнения (32.1).

Первые применения этого метода восходят к Гауссу, лорду Кельвину и Риману; хорошо известны критические возражения Вейерштрасса.

В начале этого столетия одна работа Гильберта по этому вопросу положила начало новым исследованиям, относящимся прежде всего к задаче Дирихле для гармонических функций. Среди этих исследований необходимо упомянуть работы Б. Леви, Фубини, Заремба и особенно классический мемуар Лебега. Затем вопрос был рассмотрен во всей его общности Курантом, который посвятил ему между 1912 и 1931 гг. целый ряд работ; позднейшие из них указаны в нашей библиографии под номерами [2, 3, 4]. Курант собрал воедино результаты своих исследований в гл. VII второго тома своего известного труда[1], поэтому было бы излишне

---

[1] Курант и Гильберт [1].

подробно излагать здесь его работы. Мы ограничимся упоминанием о том, что полученная им теорема существования относится к обобщенной задаче. Изучение этой задачи позднее продолжили другие авторы, пользуясь методом ортогональных проекций (см. п. 30). Другие теоремы касаются второй краевой задачи, которая также рассматривается в обобщенном смысле. Изложение Куранта целиком относится к случаю $m=2$; однако обобщение на случай $m=3$ оказывается простым. Не так обстоит дело в случае произвольного m. По поводу этого последнего случая см. Михлин [1, 3].

Надо еще заметить, что факт совпадения решения краевой задачи с решением некоторой вариационной задачи подсказывает различные способы численного решения этой задачи. Эти способы основаны на построении минимизирующих последовательностей функций для интеграла (32.2), выбранных таким образом, чтобы они сходились к функции, дающей интегралу минимальное значение. Такова, например, основа хорошо известного метода Ритца, а также других похожих на него методов, основанных на принципе наименьших квадратов.

Из самых последних исследований по этому вопросу назовем (в хронологическом порядке) работы Пиконе [3], Трефтца [1], Кравчука [1], Канторовича [1], Гиццетти [3], Фаэдо [1], Тополянского [1], Фикеры [12], Ильина [2], Харрика [1], Гросберга [1], Купермана [1].

К эллиптическим уравнениям, возникающим при решении задач вариационного исчисления, вообще говоря, применим так называемый алгоритм „Kernel Function". Мы ограничимся упоминанием работ Бергмана и Шиффера [1, 2, 3, 4, 5] и Гарабедяна [1]; более полные указания можно найти в книгах Бергмана [14] и Бергмана и Шиффера [7], посвященных этой теории. По этому вопросу можно также смотреть работу [17] Фикеры.

Глава V

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Имея в виду изучение краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений, необходимо более глубоко изучить решения линейных уравнений и установить для них возможно более тонкие оценки. Другими словами, надо оценить максимумы модулей и коэффициенты Гёльдера решения задачи и его производных через исходные данные задачи и установить, какова будет гладкость решения при определенных предположениях относительно гладкости исходных данных задачи. Важность таких исследований отмечал Жиро еще в своих первых работах [2, 5], в которых ему удалось несколько продвинуть изучение этого вопроса, опираясь на доказанные им теоремы существования и применяя представление решений в виде потенциалов.

Хопфу, Шаудеру и Каччопполи принадлежит заслуга разработки метода, посредством которого можно получить „априорные“ оценки решений задачи Дирихле, т. е. такие формулы, которые применимы к *любому возможному* решению задачи, но справедливы также и в предположениях, из которых *не* вытекает существование решения. Такие формулы могут быть положены в основу нового метода доказательства теорем существования (Шаудер, Каччопполи), достоинство которого заключается в том, что он не требует предварительного построения фундаментального решения и позволяет вместо теории интегральных уравнений применять некоторые простые теоремы функционального анализа.

Первая работа, написанная в этом круге идей, принадлежит Хопфу [3]; ему удалось доказать, что вторые производные решений эллиптических уравнений внутри области существования этих решений удовлетворяют условию Гёльдера с показателем λ, если такому условию удовлетворяют коэффициенты уравнений. Вообще, если коэффициенты уравнения принадлежат классу $C^{(k,\lambda)}$, то решения принадлежат классу $C^{(k+2,\lambda)}$ внутри их области существования. Позднее Шаудер [9, 10, 12] доказал, что если функции a_{ik} удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $h>\lambda$, то любое регулярное решение уравнения, определенное в $T\in A^{(2,\lambda)}$ и принадлежащее классу $C^{(2,\lambda)}$ на $\mathfrak{F}T$, принадлежит классу $C^{(2,\lambda)}$ всюду в T.

Позднее Шаудера, но независимо от его работ Каччопполи [7] пришел к тому же результату при менее стеснительном условии

$h=\lambda$; кроме того, Каччополи уточнил, каким образом константы, входящие в оценки, зависят от исходных данных задачи.

Наконец, Шаудер [15] вернулся к этому вопросу и улучшил результаты Каччополи. Некоторые результаты Каччополи примерно в то же время были установлены также Жиро [20]; но Жиро применял теорему существования решения задачи Неймана в малом.

В нашем изложении мы будем в основном следовать Шаудеру и Каччополи, но дадим весь материал в несколько переработанном виде, для того чтобы более точно сформулировать некоторые дополнительные результаты, которые лишь мимоходом упомянуты этими авторами. В конце этой главы мы вкратце изложим некоторые более современные исследования Каччополи [11], Миранды [8], Ниренберга [1] и Морри [3] и рассмотрим некоторые обобщенные задачи, которыми занимались Шаудер [13] и Стампаккья [1].

Все, что содержится в этой главе, относится исключительно к задаче Дирихле. Необходимо отметить, что аналогичное изучение других краевых задач было бы очень интересно. По этому вопросу не известно никаких результатов, за исключением утверждения Шаудера [16], что его методы можно обобщить в этом направлении.

33. Оценки последовательных производных функций $u(x)$ и их коэффициентов Гёльдера. Пусть функция $u(x)$ задана в замкнутой области T и принадлежит там классу $C^{(n,\lambda)}$. Рассмотрим сумму максимумов модулей всех производных порядка $k(\leqslant n)$ от функции u и сумму коэффициентов Гёльдера (взятых для показателя λ) этих производных; обозначим их через $U_k(T)$ и $U_{k,\lambda}(T)$ соответственно. По аналогии через $U_0(T)$ и $U_{0,\lambda}(T)$ будем обозначать максимум модуля и коэффициент Гёльдера функции u в T.

В случае, когда нам придется рассматривать несколько функций, мы будем обозначать функции малыми буквами, а величины, аналогичные U_k и $U_{k,\lambda}$, — соответствующими большими буквами, снабженными индексами k или (k, λ). Указание на зависимость от области T будет опускаться там, где от этого не возникнет недоразумений. Цель этого пункта — установить некоторые неравенства, связывающие U_k и $U_{k,\lambda}$ при различных индексах, и неравенства для других аналогичных величин, которые мы введем ниже. Хотя эти соотношения элементарны, они будут лежать в основе тех исследований, которые мы собираемся провести в ближайших пунктах.

Предположим, что T принадлежит классу $A^{(1,\lambda)}$ и имеет диаметр R. Справедливо следующее утверждение, доказательство которого мы для краткости опустим:

А) *Существуют два числа θ и L, зависящие только от T и такие, что:* 1) *любые две точки x и y из T можно соединить регулярной кривой длины, меньшей $L\overline{xy}$, лежащей в T;* 2) *какова бы ни была сфера $\Gamma(x, \delta)$ с центром в $x \in T$ и радиусом $\delta \leqslant R$, для* *любого* i *в* $T \cdot \Gamma(x, \delta)$ *содержится отрезок* $x^{(i)}y^{(i)}$ *длины* $\theta\delta$, *параллельный оси* x_i.

Теперь мы можем доказать следующее:

33, I. *Для всех функций* $u(x)$, *принадлежащих классу* $C^{(1)}$ *в* T, *равномерно выполняется оценка*

$$U_{0,\lambda} = O(U_1^\lambda U_0^{1-\lambda}). \tag{33.1}$$

Действительно, пусть δ — фиксированное число на **интервале** $(0, R)$, а ω — колебание функции u в T. Мы имеем

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{\overline{xy}^\lambda} \leqslant \begin{cases} LU_1\delta^{1-\lambda} & \text{для } \overline{xy} \leqslant \delta, \\ \omega\delta^{-\lambda} & \text{для } \overline{xy} > \delta. \end{cases} \tag{33.2}$$

Отсюда следует, что $U_{0,\lambda} \leqslant \min \varphi(\delta)$, где $\varphi(\delta)$ — наибольшая из величин, стоящих в правой части формулы (33.2).

Но учитывая, что $\omega \leqslant RLU_1$, легко видеть, что $\min \varphi(\delta) = L^\lambda U_1^\lambda \omega^{1-\lambda}$; так как $\omega \leqslant 2U_0$, отсюда сразу следует формула (33.1).

33, II. *Для всех функций, принадлежащих классу* $C^{(1,\lambda)}$ *в* T, *равномерно выполняется оценка*

$$U_1 = O\left(U_{1,\lambda}^{\frac{1}{1+\lambda}} U_0^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} + U_0 R^{-1}\right). \tag{33.3}$$

Действительно, пусть в точке x_0 величина $|p_i|$ $(p_i = \partial u/\partial x_j)$ принимает свое наибольшее значение P_i, и пусть, для определенности, $p_i(x_0) = P_i$. Для $\overline{xx_0} \leqslant \delta$ мы имеем $P_i - \delta^\lambda U_{1,\lambda} \leqslant p_i(x)$. В таком случае или $P_i < \delta^\lambda U_{1,\lambda}$, или для точек $x^{(i)}$ и $y^{(i)}$, о которых говорится в замечании А), выполняется неравенство

$$\frac{|u(x^{(i)}) - u(y^{(i)})|}{\theta\delta} \geqslant P_i - \delta^\lambda U_{1,\lambda}.$$

Из этих двух неравенств следует, что

$$U_1 \leqslant m\delta^\lambda U_{1,\lambda} + \frac{2m}{\theta\delta} U_0.$$

Отсюда легко получить формулу (33.3), подбирая δ таким образом, чтобы правая часть неравенства принимала наименьшее возможное значение, а затем оценивая этот минимум.

Прежде чем двигаться дальше, мы сформулируем несколько очевидных замечаний, к которым нам придется постоянно обращаться.

В) *Если* $\alpha, \beta > \varepsilon > 0$ и $a, b > 0$, *то*

$$(a+b)^\alpha = O(a^\alpha + b^\alpha), \quad a^\alpha b^\beta = O(a^{\alpha-\varepsilon}b^{\beta+\varepsilon} + a^{\alpha+\varepsilon}b^{\beta-\varepsilon}),$$

Если для чисел $0 < \alpha_i < 1$, a, b, $a_i > 0$ *выполняется оценка*

$$a = O\left(\sum a_i a^{\alpha_i} + b\right),$$

то

$$a = O\left(\sum a_i^{\frac{1}{1-\alpha_i}} + b\right).$$

Докажем теперь следующее:

33, III. *Для всех функций, принадлежащих классу* $C^{(n)}$ *в* T, *и для всех* $k < n$ *равномерно выполняются оценки*

$$U_k = O\left(U_n^{\frac{k}{n}} U_0^{\frac{n-k}{n}} + U_0 R^{-k}\right), \tag{33.4}$$

$$U_{k,\lambda} = O\left(U_n^{\frac{k+\lambda}{n}} U_0^{\frac{n-k-\lambda}{n}} + U_0 R^{-(k+\lambda)}\right). \tag{33.5}$$

Тем же методом, которым мы доказали формулу (33.3), можно установить, что формула (33.4) верна при $n = 2$ и $k = 1$. Отсюда следует, что для любого p

$$U_p = O\left(U_{p+1}^{\frac{1}{2}} U_{p-1}^{\frac{1}{2}} + U_{p-1} R^{-1}\right). \tag{33.6}$$

Чтобы доказать формулу (33.4) в общем случае, предположим, что она выполняется для $n = p$, $k < p$, и докажем ее справедливость для $n = p + 1$, $k < p + 1$. Из формул (33.6) и (33.4), написанных для $n = p$, $k = p - 1$, следует, в силу В), что

$$U_p = O\left(U_{p+1}^{\frac{1}{2}} U_p^{\frac{p-1}{2p}} U_0^{\frac{1}{2p}} + U_{p+1}^{\frac{1}{2}} U_0^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1-p}{2}} + U_p^{\frac{p-1}{p}} U_0^{\frac{1}{p}} R^{-1} + U_0 R^{-p}\right),$$

а отсюда, несколько раз применяя В), легко получить, что

$$U_p = O\left(U_{p+1}^{\frac{p}{p+1}} U_0^{\frac{1}{p+1}} + U_0 R^{-p}\right). \tag{33.7}$$

Таким образом, формула (33.4) установлена для $n = p + 1$, $k = p$. Напишем формулу (33.4) для $n = p + 1$, $k < p$ и будем оценивать величину U_p, входящую в формулу, согласно (33.7); мы придем к формуле (33.4) для $n = p + 1$, $k < p$. Далее, из (33.1) следует, что

$$U_{k,\lambda} = O\left(U_{k+1}^{\lambda} U_{k-1}^{1-\lambda}\right);$$

отсюда легко получить (33.5), учитывая (33.4).

33, IV. *Для всех функций, принадлежащих классу* $C^{(n,\lambda)}$ *в* T, *равномерно выполняются оценки*

$$U_k = O\left(U_{n,\lambda}^{\frac{k}{n+\lambda}} U_0^{\frac{n+\lambda-k}{n+\lambda}} + U_0 R^{-k}\right), \quad k \leqslant n, \tag{33.8}$$

$$U_{k,\lambda} = O\left(U_{n,\lambda}^{\frac{k+\lambda}{n+\lambda}} U_0^{\frac{n-k}{n+\lambda}} + U_0 R^{-(k+\lambda)}\right), \quad k < n. \tag{33.9}$$

Из формулы (33.4), написанной для $k = n - 1$, с учетом того, что, согласно (33.3), имеет место формула

$$U_n = O\left(U_{n,\lambda}^{\frac{1}{1+\lambda}} U_{n-1}^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} + U_{n-1} R^{-1}\right), \tag{33.10}$$

можно получить

$$U_{n-1} = O\left(U_{n,\lambda}^{\frac{n-1}{n(1+\lambda)}} U_{n-1}^{\frac{\lambda(n-1)}{n(1+\lambda)}} U_0^{\frac{1}{n}} + U_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} U_0^{\frac{1}{n}} R^{\frac{1-n}{n}} + U_0 R^{1-n}\right).$$

В силу В), отсюда следует формула (33.8) для $k = n - 1$.

Как только получена оценка для U_{n-1}, из (33.10) следует (33.8) также и для $k = n$. Подставляя выражение, полученное для U_n, в формулу (33.4), мы приходим к (33.8) также для $k < n - 1$. Формула (33.9) следует из (33.5) и из формулы (33.8), написанной для $k = n$.

Наконец, очевидно следующее утверждение:

33, V. *Для каждого семейства замкнутых областей* T *класса* $A^{(1,\lambda)}$, *в котором числа* L *и* $1/\theta$ *ограничены, оценки, о которых говорилось в предыдущих теоремах, выполняются равномерно относительно* T.

Пусть теперь заданы замкнутое множество N, входящее в $\mathfrak{F}T$, и расстояние $4d(x)$ от произвольной точки x из $T - N$ до N. Для любого фиксированного числа ν, $0 < \nu < 4$, семейство, составленное из замкнутых областей $T \cdot \Gamma(x_0, \nu d(x_0))$, где x_0 изменяется в $T - N$, удовлетворяет условиям теоремы 33, V. Следовательно, если $U_k^{(\nu)}$ и $U_{k,\lambda}^{(\nu)}$ являются значениями U_k и $U_{k,\lambda}$ для замкнутой области $T \cdot \Gamma(x_0, \nu d(x_0))$, то эти величины удовлетворяют всем ранее установленным соотношениям, причем оценки равномерны по x_0. Отсюда легко следует теорема

33, VI. *Для* $\mathfrak{U}_k^{(\nu)}$ *и* $\mathfrak{U}_{k,\lambda}^{(\nu)}$ — *верхних пределов величин* $(\nu d)^k U_k^{(\nu)}$ *и* $(\nu d)^{k+\lambda} U_{k,\lambda}^{(\nu)}$ *соответственно — выполняются соотношения*

$$\mathfrak{U}_{0,\lambda}^{(\nu)} = O\left([\mathfrak{U}_1^{(\nu)}]^{\lambda} U_0^{1-\lambda}\right), \tag{33.11}$$

$$\begin{gathered} \mathfrak{U}_k^{(\nu)} = O\left([\mathfrak{U}_n^{(\nu)}]^{\frac{k}{n}} U_0^{\frac{n-k}{n}} + U_0\right), \\ \mathfrak{U}_{k,\lambda}^{(\nu)} = O\left([\mathfrak{U}_n^{(\nu)}]^{\frac{k+\lambda}{n}} U_0^{\frac{n-k-\lambda}{n}} + U_0\right), \end{gathered} \tag{33.12}$$

$$\begin{gathered} \mathfrak{U}_k^{(\nu)} = O\left([\mathfrak{U}_{n,\lambda}^{(\nu)}]^{\frac{k}{n+\lambda}} U_0^{\frac{n+\lambda-k}{n+\lambda}} + U_0\right), \\ \mathfrak{U}_{k+\lambda}^{(\nu)} = O\left([\mathfrak{U}_{n,\lambda}^{(\nu)}]^{\frac{k+\lambda}{n+\lambda}} U_0^{\frac{n-k}{n+\lambda}} + U_0\right). \end{gathered} \tag{33.13}$$

Затем нетрудно доказать следующее:

33, VII. *Для любой замкнутой области* $D \subset T - N$, *расстояние которой до* N *равно* δ, *выполняются неравенства, где* $\nu < 4$:

$$U_k(D) \leqslant (\nu\delta)^{-k} \mathfrak{U}_k^{(\nu)}, \tag{33.14}$$

$$U_{k,\lambda}(D) \leqslant (\nu\delta)^{-(k+\lambda)} [\mathfrak{U}_{k,\lambda}^{(\nu)} + 2\mathfrak{U}_k^{(\nu)}]. \tag{33.15}$$

Из этой теоремы сразу следует теорема

33, VIII. *Если* $\nu \leqslant \mu < 4$, *то*

$$\mathfrak{U}_k^{(\mu)} = O\left[\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^k \mathfrak{U}_k^{(\nu)}\right], \quad \mathfrak{U}_{k,\lambda}^{(\mu)} = O\left[\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{k+\lambda} \left(\mathfrak{U}_{k,\lambda}^{(\nu)} + \mathfrak{U}_k^{(\nu)}\right)\right] \tag{33.16}$$

равномерно относительно ν.

Наконец, очевидно следующее:

33, IX. *Если множество* N *пусто, то предыдущие результаты остаются справедливыми, когда* $d(x)$ — *постоянная. В частности, формулы* (33.14) *и* (33.15) *выполняются также и для* $D \equiv T$, $\delta = d$.

34. Оценка решений уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть дана замкнутая область T класса $A^{(n,\lambda)}$, где $n \geqslant 2$. Через Ξ обозначим часть $\mathfrak{F}T$, допускающую в некоторой системе декартовых координат параметрическое представление вида (1.1). Для всякой функции $\varphi(x)$, определенной в Ξ и принадлежащей там классу $C^{(n,\lambda)}$, мы можем при $k \leqslant n$ определить величины $\Phi_k(\Xi)$ и $\Phi_{k,\lambda}(\Xi)$, имеющие тот же смысл, что в предыдущем пункте, рассматривая φ как функцию переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$.

Пусть теперь $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_p$ — части $\mathfrak{F}T$ вышеупомянутого вида, такие, что каждая точка $\mathfrak{F}T$ является внутренней точкой по крайней мере одной из этих частей; пусть X есть множество точек из $\mathfrak{F}T$, открытое в $\mathfrak{F}T$, а $\varphi(x)$ — функция класса $C^{(n,\lambda)}$, заданная на замыкании $\overline{X}$ множества X.

Положим

$$\Theta_k[\varphi; \overline{X}] = \sum_{i=1}^{p} \Phi_k[\overline{X} \cdot \Xi_i], \quad \Theta_{k,\lambda}[\varphi; \overline{X}] = \sum_{i=1}^{p} \Phi_{k,\lambda}[\overline{X} \cdot \Xi_i].$$

В дальнейшем мы будем считать фиксированным множество X и через N будем обозначать замыкание множества $\mathfrak{F}T - \overline{X}$; $4d(x)$, как и раньше, будет обозначать расстояние от произвольной точки x из $T - N$ до N.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ — эллиптический оператор с постоянными коэффициентами, содержащий только вторые производные, а $f(x)$ — функция, принадлежащая классу $C^{(n,\lambda)}$ в $T - N$. Выберем произвольную точку $x_0 \in T - N$ и положительное число $\sigma < \sigma_0 < 1$. Мы ставим себе целью получить некоторые оценки для функций $u(x)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}u &= f \text{ для } x \in T \cdot \Gamma(x_0, 2\sigma d(x_0)), \\ u &= \varphi \text{ для } x \in \overline{X} \cdot \Gamma(x_0, 2\sigma d(x_0)). \end{aligned}\right\} \tag{34.1}$$

Выберем σ_0 таким образом, чтобы множество $\overline{X} \cdot \Gamma(x_0, 2\sigma d(x_0))$ было связным и лежащим внутри по крайней мере одного из множеств Ξ_i. Тогда справедлива следующая теорема:

34, I. *Для любой функции $u(x)$, удовлетворяющей условиям* (34.1) *при $n \geqslant 2$, справедлива оценка*

$$\begin{aligned} U^{(\sigma)}_{n,\lambda} = O(\rho^{2-n-\lambda} F^{(3\sigma)}_0 + F^{(3\sigma)}_{n-2,\lambda} + \rho^{-\lambda} U^{(2\sigma)}_n + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} U^{(2\sigma)}_k + \Theta_{n,\lambda}[\varphi; \overline{X}]), \end{aligned} \tag{34.2}$$

где $\rho = \sigma d(x_0)$. Для всякого семейства эллиптических операторов $\mathfrak{M}$, в котором ограничены $1/A$ и максимум модулей коэффициентов a_{ik}, оценка (34.2) *выполняется равномерно относительно $\mathfrak{M}$.*

Заметим прежде всего, что формулу (34.2) достаточно доказать в предположении, что $\mathfrak{M} = \Delta$, так как с помощью замены переменных всегда можно прийти к этому случаю. Предположим сначала, что $f = 0$. Хорошо известно, что в этом случае $U^{(\sigma)}_{n+1} = O\left(\rho^{-(n+1)} U^{(2\sigma)}_0\right)$ при условии, что $\Gamma(x_0, 3\rho/2)$ находится внутри T. Отсюда легко следует, что

$$U^{(\sigma)}_{n,\lambda} = O\left(\rho^{-(n+\lambda)} U^{(2\sigma)}_0\right). \tag{34.3}$$

В случае, когда множества $\overline{X}$ и $\Gamma(x_0, 3\rho/2)$ имеют общие точки, рассмотрим функцию $v(x')$, которая получается из $u(x)$ посредством замены переменных

$$x_i' = \frac{x_i - x_{0i}}{\rho}. \qquad (34.4)$$

Эта замена переменных переводит сферы $\Gamma(x_0, \rho)$ и $\Gamma(x_0, 2\rho)$ в сферы Γ_1' и Γ_2', радиусы которых равны соответственно 1 и 2; множество $\overline{X}\cdot\Gamma(x_0, 2\rho)$ переходит в поверхность, которая задается уравнением

$$\xi_m' = \frac{1}{\rho}\zeta(\rho\xi_1', \ldots, \rho\xi_{m-1}') = \zeta'(\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_{m-1}'),$$

причем производные различных порядков от функции ζ' можно оценить независимо от ρ; наконец, функция φ перейдет в функцию ψ, которую можно рассматривать на X' как функцию переменных $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_{m-1}'$.

В силу некоторых результатов Келлога [1][1]) относительно поведения производных гармонических функций на границе области, для функции v справедлива оценка вида

$$V_{n,\lambda}(\Gamma_1') = O\left(V_0(\Gamma_2') + \sum_{k=1}^{n}\left[\Psi_k(X') + \Psi_{k,\lambda}(X')\right]\right).$$

С другой стороны, так как множество X' отстоит от центра сферы Γ_2' меньше чем на 3/2, проекция этого множества на гиперплоскость $\xi_m' = 0$ обязана содержать сферу радиуса τ, причем для величины τ можно найти нижнюю границу, зависящую от вторых производных функций ζ', т. е. от кривизны $\mathfrak{F}T$. Как видно из п. 33, все величины Ψ_k и $\Psi_{k,\lambda}$ можно оценить в зависимости от V_0 и одной лишь величины $\Psi_{n,\lambda}$. Поэтому полученную выше оценку можно заменить другой, более простой:

$$V_{n,\lambda}(\Gamma_1') = O\left(V_0(\Gamma_2') + \Psi_{n,\lambda}(X')\right);$$

отсюда, возвращаясь к переменным x_i, получаем

$$U_{n,\lambda}^{(\sigma)} = O\left(\rho^{-(n+\lambda)}U_0^{(2\sigma)} + \Phi_{n,\lambda}^{(2\sigma)}\right), \qquad (34.5)$$

где для простоты положено

$$\Phi_{n,\lambda}^{(2\sigma)} = \Phi_{n,\lambda}(\overline{X}\cdot\Gamma(x_0, 2\rho)).$$

Очевидно, что формула (34.5) справедлива всегда, так как в случае, когда применима формула (34.3), ее можно заменить на (34.5).

---

[1]) См. также Шаудер [5, 6] и Чезари [2] для случая прямоугольной области.

Обозначим теперь через $p(x)$ гармонический полином степени $n-1$, который является суммой тех членов ряда Тейлора, написанного для функции $u(x)$ в точке x_0, степень которых меньше n.

Применим формулу (34.5) к функции $z=u-p$, причем будем обозначать через ω значения этой функции на $\overline{X}\cdot\Gamma(x_0, 2\rho)$, и примем во внимание, что

$$Z_{n,\lambda}^{(\sigma)}=U_{n,\lambda}^{'(\sigma)}, \quad Z_0^{(2\sigma)}=O\left(\rho^n U_n^{(2\sigma)}\right), \quad \Omega_{n,\lambda}^{(2\sigma)}=O\left(\Phi_{n,\lambda}^{(2\sigma)}+\sum_{k=1}^{n-1} U_k^{(2\sigma)}\right).$$

Мы получим формулу

$$U_{n,\lambda}^{(\sigma)}=O\left(\rho^{-\lambda}U_n^{(2\sigma)}+\sum_{k=1}^{n-1} U_k^{(2\sigma)}+\Phi_{n,\lambda}^{(2\sigma)}\right), \qquad (34.6)$$

из которой легко следует (34.2).

Итак, теорема доказана для гармонических функций. Можно перейти к исследованию случая, когда u является решением неоднородного уравнения $\Delta u=f$.

Положим (предполагая для простоты, что $m>2$)

$$w(x)=-\frac{1}{(m-2)\,\omega_m}\int\limits_{T\cdot\Gamma(x_0,\,3\rho)} f(y)\,\overline{xy}^{\,2-m}\,dy, \quad \overline{\varphi}\doteq\varphi-w \quad \text{для} \quad x\in\overline{X};$$

можно считать, что $u=w+\overline{u}$, где $\overline{u}$ — гармоническая функция в $T\cdot\Gamma(x_0, 2\rho)$, равная $\overline{\varphi}$ на $\overline{X}$. Применяя замену переменных (34.4) и пользуясь известными свойствами ньютонова потенциала, легко установить для $k\leqslant n$ оценки

$$W_k^{'(2\sigma)}=O\left(\rho^{2-k}F_0^{(3\sigma)}+k(k-1)\rho^{n-k+\lambda}F_{n-2,\lambda}^{(3\sigma)}\right),$$

$$W_{k,\lambda}^{'(2\sigma)}=O\left(\rho^{2-k-\lambda}F_0^{(3\sigma)}+k(k-1)\rho^{n-k}F_{n-2,\lambda}^{(3\sigma)}\right).$$

Функцию $\overline{u}$ можно оценить по формуле (34.6). Если учесть, что

$$\overline{U}_k^{(2\sigma)}=O\left(U_k^{(2\sigma)}+W_k^{(2\sigma)}\right), \quad \overline{\Phi}_{n,\lambda}^{(2\sigma)}=O\left(\Phi_{n,\lambda}^{(2\sigma)}+\sum_{k=1}^{n} W_{k,\lambda}^{(2\sigma)}\right),$$

то легко вывести формулу (34.2) и в общем случае. К полученному результату можно добавить следующее очевидное замечание:

34, II. *Формула* (34.2) *справедлива также и в том случае, когда множество* $\overline{X}$ *совпадает с* $\mathfrak{F}T$, *причем* $d(x)$ *можно тогда считать постоянной. Если же* $\overline{X}$ *пусто и* $4d(x_0)$ *обозначает расстояние от произвольной точки* x_0 *из* $T-\mathfrak{F}T$ *до* $\mathfrak{F}T$, *то справедлива формула*

$$U_{n,\lambda}^{(\sigma)}=O\left(\rho^{2-n-\lambda}F_0^{(3\sigma)}+F_{n-2,\lambda}^{(3\sigma)}+\rho^{-\lambda}U_n^{(2\sigma)}\right). \qquad (34.7)$$

35. Оценки решений общих уравнений. В этом пункте мы установим различные оценки для решений задачи Дирихле

$$\mathfrak{M}u = f \text{ для } x \in T - \mathfrak{F}T, \quad u = \varphi \text{ для } x \in \mathfrak{F}T \tag{35.1}$$

в предположении, что $\mathfrak{M}$ — эллиптический оператор общего вида. Сначала мы будем рассматривать только такие решения задачи Дирихле, которые принадлежат классу $C^{(n,\lambda)}$ в T при $n \geqslant 2$, и будем предполагать, что коэффициенты и свободный член уравнения принадлежат классу $C^{(n-2,\lambda)}$ в T. Функцию φ будем считать принадлежащей классу $C^{(n,\lambda)}$ на $\mathfrak{F}T$, а замкнутую область T — принадлежащей $A^{(n,\lambda)}$. Для функций u, f, φ и коэффициента c мы будем пользоваться обозначениями, введенными в предыдущих пунктах, а именно обозначениями $U_k = U_k(T)$, $U_k^{(\sigma)}$, $\mathfrak{U}_k^{(\sigma)}$ и т. д. Обозначим через $A_k(T)$ и $A_{k,\lambda}(T)$ соответственно сумму максимумов модулей и сумму коэффициентов Гёльдера для всех производных порядка $k (\geqslant 0)$ от коэффициентов a_{ij} в замкнутой области T. Величины $B_k(T)$ и $B_{k,\lambda}(T)$ будут иметь тот же смысл для коэффициентов b_i. Пока мы будем писать просто A_k вместо $A_k(T)$ и $A_{k,\lambda}$ вместо $A_{k,\lambda}(T)$ и т. п. Наконец, через $\overline{A}$ обозначим (положительный) минимум определителя A.

Докажем следующую теорему:

35, I. *В указанных предположениях для всякого решения задачи* (35.1) *при* $n \geqslant 2$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} U_{n,\lambda} = O((A_{n-2,\lambda}+1)(F_0+U_2+B_0U_1+C_0U_0)+ \\ +(B_{n-2,\lambda}+1)U_1+C_{n-2,\lambda}U_0+F_{n-2,\lambda}+\Theta_{n,\lambda}[\varphi; \mathfrak{F}T]). \end{aligned} \tag{35.2}$$

Для всякого семейства эллиптических операторов $\mathfrak{M}$, *в котором ограничены величины* A_0 *и* $1/\overline{A}$, *оценка равномерна относительно* $\mathfrak{M}$.

Действительно, выберем произвольную точку x_0 из $T - \mathfrak{F}T$ и запишем уравнение $\mathfrak{M}u = f$ в виде[1])

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \\ &= f(x) - \sum_{i,j=1}^{m}(a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0))\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - cu. \end{aligned} \tag{35.3}$$

Положим $4d(x_0) = 1$. В силу теоремы 34, II, можно оценить $U_{n,\lambda}^{(\sigma)}$ по формуле (34.2), если только заменить свободный член в уравнении (34.1) правой частью формулы (35.3) и положить $X = \mathfrak{F}T$. Таким

---

[1]) Этот прием постоянно применяют Хопф, Шаудер и Каччопполи. Он первый раз встречается в работе Корна, опубликованной в 1914 г. в „Schwarz — Festschrift“.

образом удается установить, что существует число K, зависящее только от n, λ, T и от верхних граней A_0 и $1/\overline{A}$, такое, что

$$\begin{aligned}U_{n,\lambda}^{(\sigma)} \leqslant K \Big[& (\rho^{2-n-\lambda}\big(F_0^{(3\sigma)} + A_{0,\lambda}\rho^{\lambda}U_2^{(3\sigma)} + B_0U_1^{(3\sigma)} + C_0U_0^{(3\sigma)}\big) + F_{n-2,\lambda}^{(3\sigma)} + \\ & + A_{0,\lambda}\big(\rho^{\lambda}U_{n,\lambda}^{(3\sigma)} + U_n^{(3\sigma)}\big) + \sum_{k=2}^{n-1}\big(A_{n-k,\lambda}U_k^{(3\sigma)} + A_{n-k}U_{k,\lambda}^{(3\sigma)}\big) + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1}\big(B_{n-k-1,\lambda}U_k^{(3\sigma)} + B_{n-k-1}U_{k,\lambda}^{(3\sigma)}\big) + \\ & + \sum_{k=0}^{n-2}\big(C_{n-k-2,\lambda}U_k^{(3\sigma)} + C_{n-k-2}U_{k,\lambda}^{(3\sigma)}\big) + \\ & + \rho^{-\lambda}U_n^{(2\sigma)} + \sum_{k=1}^{n-1} U_k^{(2\sigma)} + \Theta_{n,\lambda}[\varphi; \mathfrak{F}T]\Big]. \qquad (35.4)\end{aligned}$$

Согласно теореме 33, VIII, мы имеем

$$\rho^{n+\lambda}U_{n,\lambda}^{(3\sigma)} \leqslant K_1\left[\mathfrak{U}_{n,\lambda}^{(\sigma)} + \rho^n U_n(T)\right].$$

Поэтому формула (35.4), умноженная на $\rho^{n+\lambda}$, может быть записана в таком сокращенном виде:

$$\rho^{n+\lambda}U_{n,\lambda}^{(\sigma)} \leqslant KK_1A_{0,\lambda}\rho^{\lambda}\mathfrak{U}_{n,\lambda}^{(\sigma)} + \rho^{n+\lambda}H(\sigma).$$

Отсюда следует, что если σ_1 есть верхняя грань чисел σ, меньших σ_0 и таких, что $KK_1A_{0,\lambda}\rho^{\lambda} < 1/4$, и если точка x_0 выбрана так, что $(\sigma_1 d)^{n+\lambda}U_{n,\lambda}^{(\sigma_1)} > \mathfrak{U}_{n,\lambda}^{(\sigma_1)}/2$, то выполняется неравенство $\mathfrak{U}_{n,\lambda}^{(\sigma_1)} \leqslant$ $\leqslant 2(\sigma_1 d)^{n+\lambda}H(\sigma_1)$. Согласно теоремам 33, VII и 33, IX, из него получается неравенство

$$U_{n,\lambda}(T) = O\left(H(\sigma_1) + (\sigma_1 d)^{-\lambda}U_n(T)\right).$$

Если учесть, что при $\sigma = \sigma_1$ не только $A_{0,\lambda}\rho^{\lambda} = O(1)$, но и $\rho^{-\lambda} = O(A_{0,\lambda} + 1)$ и что величины $U_k^{(3\sigma)}$ и $U_{k,\lambda}^{(3\sigma)}$ можно оценить через величины $U_k = U_k(T)$ и $U_{k,\lambda} = U_{k,\lambda}(T)$, то из последнего неравенства легко получить формулу

$$\begin{aligned}U_{n,\lambda} = O\Bigg[& \left(A_{0,\lambda}^{\frac{n-2+\lambda}{\lambda}} + 1\right)(F_0 + U_2 + B_0U_1 + C_0U_0) + F_{n-2,\lambda} + \\ & + (A_{0,\lambda} + 1)U_n + \sum_{k=2}^{n-1}(A_{n-k,\lambda}U_k + A_{n-k}U_{k,\lambda}) + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1}[(B_{n-k-1,\lambda} + 1)U_k + B_{n-k-1}U_{k,\lambda}] + \\ & + \sum_{k=0}^{n-2}(C_{n-k-2,\lambda}U_k + C_{n-k-2}U_{k,\lambda}) + \Theta_{n,\lambda}[\varphi; \mathfrak{F}T]\Bigg]. \qquad (35.5)\end{aligned}$$

Чтобы получить (35.2), остается исключить из правой части формулы (35.5) величины U_k при $k > 2$ и все $U_{k,\lambda}$.

Этого можно добиться следующим приемом. Пусть, например, нужно исключить U_n; из теоремы 33, IV следует, что в формуле (33.5) член $(A_{0,\lambda}+1)U_n$ можно заменить выражением

$$(A_{0,\lambda}+1)\left(U_{n,\lambda}^{\frac{n-2}{n-2+\lambda}}U_2^{\frac{\lambda}{n-2+\lambda}}+U_2\right),$$

а оно в свою очередь оценивается, в силу предложения В) п. 33, величиной

$$\left(A_{0,\lambda}^{\frac{n-2+\lambda}{\lambda}}+1\right)U_2,$$

которая, согласно теореме 33, IV, имеет порядок $O[(A_{n-2,\lambda}+1)U_2]$.

Аналогично можно преобразовать все члены первой суммы; члены второй и третьей суммы преобразуются так же, только величина U_2 заменяется величинами U_1 и U_0 соответственно. Таким образом, наша теорема полностью доказана. Прием, с помощью которого мы переходили от формулы (35.5) к (35.2), можно использовать также для того, чтобы исключить из правой части формулы (35.2) члены, содержащие U_2 и U_1.

Таким образом легко получить следующую теорему:

35, II. *Пусть выполнены условия теоремы* 35, I *и величины* A_0 *и* $1/\bar{A}$ *ограничены. Для любого решения задачи* (35.1) *при* $n \geqslant 2$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}U_{n,\lambda} = O[(A_{n-2,\lambda}+1)(F_0+B_0U_1+C_0U_0)+\\ +(A_{n-2,\lambda}^{\frac{n-1+\lambda}{n-2+\lambda}}+B_{n-2,\lambda}+1)U_1+C_{n-2,\lambda}U_0+\\ +F_{n-2,\lambda}+\Theta_{n,\lambda}[\varphi;\mathfrak{F}T]),\end{aligned} \qquad (35.6)$$

$$\begin{aligned}U_{n,\lambda} = O[(A_{n-2,\lambda}+1)F_0+F_{n-2,\lambda}+\Theta_{n,\lambda}[\varphi;\mathfrak{F}T]+\\ +([(A_{n-2,\lambda}+1)B_0]^{\frac{n+\lambda}{n-1+\lambda}}+\\ +(A_{n-2,\lambda}+1)C_0+A_{n-2,\lambda}^{\frac{n+\lambda}{n-2+\lambda}}+B_{n-2,\lambda}^{\frac{n+\lambda}{n-1+\lambda}}+C_{n-2,\lambda}+1)U_0].\end{aligned} \qquad (35.7)$$

В силу теоремы 33, IV, из этой теоремы легко сделать такой вывод:

35, III. *Если выполнены условия предыдущей теоремы и если, кроме того, функции* a_{ij} *принадлежат классу* $C^{(n-1,\lambda)}$, *то для* $n \geqslant 2$ *мы имеем*

$$\begin{aligned}U_{n,\lambda} = O[(A_{n-2,\lambda}+1)(F_0+B_0U_1+C_0U_0)+\\ +(A_{n-1,\lambda}+B_{n-2,\lambda}+1)U_1+C_{n-2,\lambda}U_0+\\ +F_{n-2,\lambda}+\Theta_{n,\lambda}[\varphi;\mathfrak{F}T]].\end{aligned} \qquad (35.8)$$

Если же a_{ij} *принадлежат классу* $C^{(n,\lambda)}$, *а* b_i — *классу* $C^{(n-1,\lambda)}$, *то для* $n \geqslant 2$ *имеем*

$$U_{n,\lambda} = O\,[(A_{n-2,\lambda}+1)\,F_0 + F_{n-2,\lambda} + \Theta_{n,\lambda}[\varphi;\,\mathfrak{F}T] + \\ + \left((A_{n,\lambda}+1)\,B_0^{\frac{n+\lambda}{n-1+\lambda}} + 1\right) + (A_{n-2,\lambda}+1)\,C_0 + \\ + B_{n-1,\lambda} + C_{n-2,\lambda})\,U_0]. \qquad (35.9)$$

До сих пор мы рассматривали такие решения задачи (35.1), которые принадлежат классу $C^{(n,\lambda)}$ в T. Пусть теперь задано открытое множество X на $\mathfrak{F}T$, и пусть $\overline{X}$ — замыкание этого множества. Положим $N = \mathfrak{F}T - \overline{X}$ и рассмотрим решение $u(x)$ задачи (35.1), непрерывное в T и принадлежащее классу $C^{(n,\lambda)}$ в $T - N$. Для такого решения справедлива формула, аналогичная (35.4), но с заменой $\Theta_{n,\lambda}[\varphi;\,\mathfrak{F}T]$ на $\Theta_{n,\lambda}[\varphi;\,\overline{X}]$; в ней через $4d(x_0)$ обозначено расстояние от x_0 до N. Умножим эту формулу на $(\sigma d)^{n+\lambda}$ и будем рассуждать так же, как при доказательстве теорем 35, I и II. Получится ряд оценок, аналогичных оценкам (35.2), (35.6) и (35.7), в которых, однако, величины U_k и $U_{k,\lambda}$ заменены величинами $\mathfrak{U}_k^{(\sigma)}$ и $\mathfrak{U}_{k,\lambda}^{(\sigma)}$, где σ достаточно мало. Учитывая также теорему 33, VII, можно сформулировать следующую теорему:

35, IV. *Пусть* D — *замкнутая область, содержащаяся в* $T - N$, *расстояние которой до* N *равно* δ. *В предположении, что величины* A_0, B_0, C_0, $A_{n-2,\lambda}$, $B_{n-2,\lambda}$, $C_{n-2,\lambda}$ *и* $1/A$ *ограничены, для любого решения* $u(x)$ *задачи* (35.1), *непрерывного в* T *и принадлежащего классу* $C^{(n,\lambda)}$ *в* $T - N$, *при* $n \geqslant 2$ *справедлива оценка*

$$\delta^{n+\lambda}U_{n,\lambda}(D) = O\,(F_0 + F_{n-2,\lambda} + U_0(T) + \Theta_{n,\lambda}[\varphi;\,\overline{X}]). \qquad (35.10)$$

Для любого решения $u(x)$ *задачи* (35.1), *непрерывного в* T *и принадлежащего классу* $C^{(n,\lambda)}$ *в* $T - \mathfrak{F}T$, *при* $n \geqslant 2$ *имеет место оценка*

$$\delta^{n+\lambda}U_{n,\lambda}(D) = O\,(F_0 + F_{n-2,\lambda} + U_0(T)), \qquad (35.11)$$

где δ *на этот раз обозначает расстояние (положительное) от* D *до* $\mathfrak{F}T$.

Можно было бы установить еще другие оценки, предполагая, что коэффициенты и свободный член уравнения принадлежат классу $C^{(n-2,\lambda)}$ только в $T - \mathfrak{F}T$ и при стремлении x к $\mathfrak{F}T$ возрастают не слишком быстро. В этом круге вопросов мы рассмотрим лишь один случай, довольно простой, но особенно интересный, так как он встречается при изучении нелинейных уравнений.

Пусть $4d(x_0)$, — как обычно, расстояние от произвольной точки x_0 из $T - N$ до N. Обозначим через $\mathfrak{N}_\mu^{(\sigma)}[u]$ и $\mathfrak{H}_\mu^{(\sigma)}[u]$, или, проще, через $\mathfrak{N}_\mu^{(\sigma)}$ и $\mathfrak{H}_\mu^{(\sigma)}$, верхние грани значений функций $(\sigma d)^\mu U_2^{(\sigma)}$ и $(\sigma d)^{\mu+\lambda}U_{2,\lambda}^{(\sigma)}$ при изменении x_0 в $T - N$; здесь μ — неотрицательное число, не превышающее единицы. Кроме того, мы обозначим через $\mathfrak{B}_0^{(\sigma)}$ и $\mathfrak{B}_{0,\lambda}^{(\sigma)}$ верхние грани значений функций $(\sigma d)^{\mu}B_0^{(\sigma)}$, $(\sigma d)^{\mu+\lambda}B_{0,\lambda}^{(\sigma)}$, где $B_0^{(\sigma)}=$ $=B_0(T\cdot\Gamma(x_0,\sigma d))$, $B_{0,\lambda}^{(\sigma)}=B_{0,\lambda}(T\cdot\Gamma(x_0,\sigma d))$; аналогичным образом определим величины $\mathfrak{C}_0^{(\sigma)}$, $\mathfrak{C}_{0,\lambda}^{(\sigma)}$, $\mathfrak{F}_0^{(\sigma)}$, $\mathfrak{F}_{0,\lambda}^{(\sigma)}$; но через $\mathfrak{A}_{k,\lambda}^{(\sigma)}$ обозначим верхнюю грань значений $(\sigma d)^{k+\lambda}A_{k,\lambda}^{(\sigma)}$. Имеет место следующая теорема:

35, V. *Если коэффициенты оператора $\mathfrak{M}$ и функция f принадлежат классу $C^{(0,\lambda)}$ в T, то для любого решения уравнения $\mathfrak{M}u=f$, принадлежащего классу $C^{(2,\lambda)}$, справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_{\mu}^{(3)}=O\,\Big[&\big(\mathfrak{A}_{0,\lambda}^{(3)}+1\big)\big(\mathfrak{F}_0^{(3)}+\mathfrak{R}_{\mu}^{(3)}+\mathfrak{B}_0^{(3)}U_1+\mathfrak{C}_0^{(3)}U_0\big)+\\&+\mathfrak{B}_0^{(3)}\big(\mathfrak{R}_{\mu}^{(3)}\big)^{\lambda}U_1^{1-\lambda}+\mathfrak{F}_{0,\lambda}^{(3)}+\big(\mathfrak{B}_{0,\lambda}^{(3)}+\mathfrak{C}_0^{(3)}+1\big)U_1+\\&+\big(\mathfrak{C}_{0,\lambda}^{(3)}+1\big)U_0+\Theta_{2,\lambda}[\varphi;\bar{X}]\Big].\end{aligned}\tag{35.12}$$

Для всякого семейства эллиптических операторов, в котором ограничены величины A_0 и $1/\bar{A}$, оценка (35.12) *выполняется равномерно относительно $\mathfrak{M}$.* В *частности, при* $\mu=0$

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_0^{(3)}=O\,\Big[&\big(\mathfrak{A}_{0,\lambda}^{(3)}+1\big)(F_0+U_2+B_0U_1+C_0U_0)+\\&+B_0U_2^{\lambda}U_1^{1-\lambda}+\mathfrak{F}_{0,\lambda}^{(3)}+\big(\mathfrak{B}_{0,\lambda}^{(3)}+C_0+1\big)U_1+\\&+\big(\mathfrak{C}_{0,\lambda}^{(3)}+1\big)U_0+\Theta_{2,\lambda}[\varphi;\bar{X}]\Big],\end{aligned}\tag{35.13}$$

а если a_{ik} принадлежат классу $C^{(1,\lambda)}$, то для $\mu=1$

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_1^{(3)}=O\,\Big[&\big(\mathfrak{A}_{0,\lambda}^{(3)}+1\big)\big(\mathfrak{F}_0^{(3)}+\mathfrak{B}_0^{(3)}U_1+\mathfrak{C}_0^{(3)}U_0\big)+\mathfrak{F}_{0,\lambda}^{(3)}+\\&+\big(\mathfrak{A}_{1,\lambda}^{(3)}+\mathfrak{B}_{0,\lambda}^{(3)}+[\mathfrak{B}_0^{(3)}]^{1+\lambda}+\mathfrak{C}_0^{(3)}+1\big)U_1+\\&+\big(\mathfrak{C}_{0,\lambda}^{(3)}+1\big)U_0+\Theta_{2,\lambda}[\varphi;\bar{X}]\Big].\end{aligned}\tag{35.14}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущих теорем. Мы исходим из формулы, аналогичной формуле (35,4), написанной для $n=2$. Согласно теореме 33, I, величины $U_{1,\lambda}^{(3\sigma)}$, $U_{0,\lambda}^{(3\sigma)}$ в этой формуле мажорируются величинами $(U_2^{(3)})^{\lambda}U_1^{1-\lambda}$, $\sigma^{1-\lambda}U_1$ соответственно. Умножая формулу на $(\sigma d)^{\mu+\lambda}$ и оценивая правую часть, легко получить соотношение

$$\begin{aligned}(\sigma d)^{\mu+\lambda}U_{2,\lambda}^{(\sigma)}=O\,[&\sigma^{\lambda}\mathfrak{A}_{0,\lambda}^{(3)}\mathfrak{H}_{\mu}^{(\sigma)}+\sigma^{\mu}(\mathfrak{F}_0^{(3)}+\mathfrak{R}_{\mu}^{(3)}+\mathfrak{B}_0^{(3)}U_1+\mathfrak{C}_0^{(3)}U_0)+\\&+\sigma^{\mu+\lambda}(\mathfrak{A}_{0,\lambda}^{(3)}\mathfrak{R}_{\mu}^{(3)}+\mathfrak{B}_0^{(3)}(\mathfrak{R}_{\mu}^{(3)})^{\lambda}U_1^{1-\lambda}+\mathfrak{F}_{0,\lambda}^{(3)}+(\mathfrak{B}_{0,\lambda}^{(3)}+\mathfrak{C}_0^{(3)}+1)U_1+\\&+(\mathfrak{C}_{0,\lambda}^{(3)}+1)U_0+\Theta_{2,\lambda}[\varphi,\bar{X}])].\end{aligned}$$

Если σ — достаточно малое число, но такое, что всегда $\sigma^{\lambda}\mathfrak{A}_{0,\lambda}^{(3)}=O(1)$, $\sigma^{-\lambda}=O(\mathfrak{A}_{0,\lambda}^{(3)}+1)$, то отсюда можно получить оценку для $\mathfrak{H}_{\mu}^{(\sigma)}$, из которой получается (35.12) с учетом того, что

$$\mathfrak{H}_{\mu}^{(3)}=O\,[\sigma^{-(\mu+\lambda)}\mathfrak{H}_{\mu}^{(\sigma)}+\sigma^{-\lambda}\mathfrak{R}_{\mu}^{(3)}].$$

Формула (35.13) получается из (35.12) при $\mu = 0$, так как в этом случае $\mathfrak{R}_0^{(3)} \leqslant U_2$, $\mathfrak{B}_0^{(3)} \leqslant B_0$ и т. д. Наконец, оценку (35.14) можно получить из (35.12), положив $\mu = 1$, если заметить, что

$$\mathfrak{R}_1^{(3)} = O\left(\left[\mathfrak{H}_1^{(3)}\right]^{\frac{1}{1+\lambda}} U_1^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} + U_1\right),$$

а затем применить предложение B) п. 33, принимая во внимание, что

$$\mathfrak{A}_{0,\lambda}^{(3)} = O\left(\left[\mathfrak{A}_{1,\lambda}^{(3)}\right]^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} + 1\right).$$

Вернемся теперь к формулам (35.9), (35.10) и (35.11). Полезно отметить, что если величина U_0 оценена, то из этих формул получаются оценки для всех U_k и $U_{k,\lambda}$, относящихся к T или D, при $k \leqslant n$. Действительно, если только U_0 и $U_{n,\lambda}$ оценены, то для того, чтобы получить оценки U_n и величин U_k и $U_{k,\lambda}$ при $k < n$, можно применить теоремы 33, IV, 33, V и 33, VI. Однако интересно было бы углубить эти исследования с целью получения более тонких оценок для $U_{0,\lambda}$ и $U_{1,\lambda}$. Представляется возможным получить оценку для $U_{k,\lambda}$ при $k \leqslant 1$, содержащую только величины U_0, F_0, $\Theta_{k,\lambda}[\varphi; \mathfrak{F}T]$, как это имеет место для уравнения с постоянными коэффициентами, не содержащего членов с u и $\partial u/\partial x_i$. Более точные сведения об этом содержатся в п. 39; здесь мы только укажем, что можно дать положительный ответ на этот вопрос, пользуясь теоремой существования для задачи Неймана и представлением решения в виде потенциалов. По этому поводу можно смотреть работу Жиро [20].

Что касается априорных оценок величины U_0, то можно заметить следующее:

35, VI. *Если существует положительная функция* $\omega(x)$ *класса* $C^{(2)}$ *в* T, *такая, что* $\mathfrak{M}\omega < 0$, *то для любого решения* $u(x)$ *задачи* (35.1), *непрерывного в* T *и принадлежащего классу* $C^{(2)}$ *в* $T - \mathfrak{F}T$, *имеет место оценка*

$$U_0 = O(F_0 + \Phi_0), \tag{35.15}$$

где Φ_0 — *максимум модуля* φ *на* $\mathfrak{F}T$. *В частности, оценка* (35.15) *справедлива при* $c \leqslant 0$. *В этом случае она равномерна относительно* $\mathfrak{M}$ *в пределах любого семейства эллиптических операторов, для которого величины* A_0, B_0, C_0 *и* $1/\overline{A}$ *ограничены.*

При $c < 0$ теорема очевидна, так как в этом случае в любой точке из $T - \mathfrak{F}T$, в которой функция u принимает наибольшее положительное [наименьшее отрицательное] значение, выполняется неравенство $cu \geqslant f$ $[cu \leqslant f]$, откуда $|u| \leqslant F_0/\min|c|$. В общем случае мы полагаем $u = v\omega$ и получаем уравнение для функции v; к этому уравнению можно применить прежние рассуждения, так как в нем коэффициент, аналогичный c, равен $\mathfrak{M}\omega$ и, следовательно, отрицателен. Наконец, в случае $c \leqslant 0$ результат остается справедливым. В самом деле, если $\Gamma(x_0, \rho)$ — сфера, содержащая внутри себя T, причем ее центр x_0 находится вне T, то можно положить $\omega = e^{k\rho^2} - e^{kr^2}$, где $r = \overline{xx_0}$.

Действительно, функция ω положительна в T, а с другой стороны, легко видеть (см. п. 3), что если величины A_0, B_0, C_0 и $1/\bar{A}$ ограничены, то можно найти такое k_0, что при $k > k_0$ $\mathfrak{M}\omega < -1$.

Этот результат частично принадлежит Бернштейну [2]. Однако он был значительно уточнен Пиконе [1,10], который установил много аналогичных оценок для решений второй и третьей краевых задач[1]).

Возможно, что формула (35.15) остается справедливой также и в том случае, когда не предполагается ничего, кроме единственности решения задачи (35.1). Это можно установить путем сведения задачи к интегральному уравнению (п. 21), но только тогда, когда коэффициенты уравнения удовлетворяют условию Гёльдера, а граничная функция φ равна нулю. Если $\varphi \neq 0$, это можно доказать при дополнительном предположении, что a_{ik} принадлежат классу $C^{(1,\lambda)}$. Поэтому было бы интересно провести исследования в этом направлении и получить общий результат элементарными методами.

Наконец, заметим следующее:

35, VII. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *эллиптический оператор, заданный в области* C, *и пусть его коэффициенты, а также величина* $1/\bar{A}$, *ограничены в* C. *Существует такое число* ρ, *что оценка* (35.15) *равномерна относительно* T *в пределах семейства замкнутых областей, содержащихся в* C *и имеющих диаметр, меньший* ρ.

Действительно, пусть x_0 — любая точка из T. Положим $\omega = 2\rho^2 - \overline{xx_0}^2$; тогда $\omega > 0$ в T и

$$\mathfrak{M}\omega = -2\sum_{i=1}^{m} a_{ii} + O(\rho B_0 + \rho^2 C_0),$$

так что $\mathfrak{M}\omega < 0$ при достаточно малом ρ. Тогда наше утверждение следует из предыдущей теоремы.

36. Метод продолжения для доказательства теоремы существования решения задачи Дирихле. В этом пункте мы дадим новое доказательство теоремы существования для задачи Дирихле, следуя Шаудеру [12] и Каччопполи [7]. С одной стороны, это доказательство опирается на оценки, установленные в п. 35, с дру-

---

[1]) См. также Пиконе [11], гл. VII, п. 5 и Пуччи [1, 2].

гой — на методы, которые можно рассматривать как обобщение метода аналитического продолжения.

Пусть $\mathfrak{L}$ — множество всех операторов $\mathfrak{M}$, коэффициенты которых в замкнутой области T класса $A^{(n,\lambda)}$ принадлежат классу $C^{(n-2,\lambda)}$. Определим норму элемента $\mathfrak{M}$ равенством

$$\|\mathfrak{M}\| = A_0 + B_0 + C_0 + A_{n-2,\lambda} + B_{n-2,\lambda} + C_{n-2,\lambda}; \qquad (36.1)$$

тогда $\mathfrak{L}$ будет полным линейным нормированным пространством. Множество всех эллиптических операторов будет выпуклым подмножеством в $\mathfrak{L}$; обозначим его через E. Наконец, через $E_0 \subset E$ обозначим другое выпуклое подмножество в $\mathfrak{L}$, составленное из эллиптических операторов, для которых $c \leqslant 0$. Кроме того, через $\Sigma_{n,\lambda}$ обозначим пространство функций u класса $C^{(n,\lambda)}$ в T, полное в норме

$$\|u\| = U_0 + U_{n,\lambda}, \qquad (36.2)$$

а через $\Sigma'_{n,\lambda}$ — пространство пар функций $\{f, \varphi\}$, где $f \in C^{(n-2,\lambda)}$ в T, а $\varphi \in C^{(n,\lambda)}$ на $\mathfrak{F}T$, причем норму элемента $\{f, \varphi\}$ пространства $\Sigma'_{n,\lambda}$ определим равенством

$$\|\{f, \varphi\}\| = F_0 + F_{n-2,\lambda} + \Phi_0 + \Theta_{n,\lambda}[\varphi; \mathfrak{F}T]. \qquad (36.3)$$

Пусть $\overset{*}{E}_0$ — множество таких элементов из E_0, для которых задача (35.1) имеет одно и только одно решение $u \in \Sigma_{n,\lambda}$ для любой пары $\{f, \varphi\} \in \Sigma'_{n,\lambda}$. Так как множество $\overset{*}{E}_0$ содержит элемент $\mathfrak{M} = \Delta$, то оно не пусто. Поэтому, если мы покажем, что $\overset{*}{E}_0$ в E_0 одновременно замкнуто и открыто, мы докажем, что $\overset{*}{E}_0 \equiv E_0$, т. е. что задача Дирихле разрешима, каков бы ни был оператор $\mathfrak{M}$, если только $c \leqslant 0$.

Для любого $\mathfrak{M} \in E_0^*$ введем обозначение

$$u = \mathfrak{T}[\{f, \varphi\}; \mathfrak{M}], \qquad (36.4)$$

где u — решение задачи (35.1), и заметим, что, согласно теоремам 35, II и 35,V, существует такая постоянная $K(\mathfrak{M})$, что

$$\|\mathfrak{T}[\{f, \varphi\}; \mathfrak{M}]\| \leqslant K(\mathfrak{M}) \|\{f, \varphi\}\|, \qquad (36.5)$$

причем постоянную K можно оценить через верхнюю грань величин $\|\mathfrak{M}\|$ и $1/\bar{A}$. Отсюда следует, что если $\{\mathfrak{M}_k\}$ — последовательность точек из $\overset{*}{E}_0$, сходящаяся к точке $\mathfrak{M}$ из E_0, то функции $\mathfrak{T}[\{f, \varphi\}; \mathfrak{M}_k]$ равностепенно непрерывны вместе со своими производными порядка n, причем коэффициенты Гёльдера этих производных равномерно ограничены. Из такой последовательности можно выбрать подпоследовательность функций, которые вместе со своими производными порядка $k \leqslant n$ сходятся соответственно к функции $u \in \Sigma_{n,\lambda}$ и производным этой функции. Очевидно, что эта функция является решением задачи (35.1); поэтому доказано, что

$\mathfrak{M} \in E_0^*$, а следовательно, E_0^* замкнуто в E_0. Докажем теперь, что E_0^* открыто, т. е. покажем, что если $\mathfrak{M} \in E_0^*$, то и $\mathfrak{M} + \mathfrak{M}' \in E_0^*$ при условии, что норма $\|\mathfrak{M}'\|$ достаточно мала. Очевидно, что решение задачи Дирихле для уравнения $\mathfrak{M}u + \mathfrak{M}'u = f$ эквивалентно решению функционального уравнения

$$u = \mathfrak{T}[\{f, \varphi\}; \mathfrak{M}] + \mathfrak{S}[u], \tag{36.6}$$

где

$$\mathfrak{S}[u] = -\mathfrak{T}[\{\mathfrak{M}'u, 0\}; \mathfrak{M}].$$

Но в силу оценки (36.5),

$$\|\mathfrak{S}[u]\| = O(\|\mathfrak{M}'\| \cdot \|u\|),$$

а поэтому при достаточно малой норме $\|\mathfrak{M}'\|$

$$\|\mathfrak{S}[u]\| < h\|u\|,$$

где $h < 1$. Таким образом, функциональное преобразование $v = \mathfrak{S}[u]$ является *сжатием*, откуда легко следует, что функциональное уравнение (36.6) можно решать методом последовательных приближений[1]. Таким образом, мы полностью доказали следующую теорему:

36, I. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *эллиптический оператор с коэффициентами класса* $C^{(n-2,\lambda)}$ *в* T, *причем* $n \geqslant 2$. *Если* $f \in C^{(n-2,\lambda)}$, $\varphi \in C^{(n,\lambda)}$ *и* $c \leqslant 0$, *то задача Дирихле имеет одно (и только одно) решение класса* $C^{(n,\lambda)}$ *в* T.

Но, кроме того, справедливо следующее:

36, II. *Если условие* $c \leqslant 0$ *не выполнено, то для задачи Дирихле, поставленной в теореме* 36, I, *остается справедливой теорема об альтернативе.*

Действительно, положим $\mathfrak{M}_0 u = \mathfrak{M}u - cu$. Тогда решение задачи Дирихле сразу сводится к решению линейного функционального уравнения

$$u = \mathfrak{T}[\{f, \varphi\}; \mathfrak{M}_0] - \mathfrak{T}[\{cu, 0\}; \mathfrak{M}_0]; \tag{36.7}$$

это уравнение является уравнением типа Рисса, если $u \in \Sigma_{n-2,\lambda}$, так как преобразование

$$v = \mathfrak{T}[\{cu, 0\}; \mathfrak{M}_0]$$

вполне непрерывно в $\Sigma_{n-2,\lambda}$ в силу оценки

$$V_0 + V_{n,\lambda} = O(U_0 + U_{n-2,\lambda}).$$

Эта оценка непосредственно следует из (36.5).

---

[1] См. Cacciopoli R. [1] и Miranda C., Problemi di esistenza in analisi funzionale, Quaderni Sc. N. Sup. Pisa (1949), гл. II, п. 6

Поэтому теорема об альтернативе вытекает из упомянутых уже выше результатов Рисса[1]).

Можно добавить еще следующее:

36, III. *В предположениях теоремы* 36, II *любое решение однородной задачи Дирихле, принадлежащее классу* $C^{(2,\lambda)}$, *обязательно принадлежит классу* $C^{(n,\lambda)}$.

Действительно, предположим, что однородная задача имеет p решений, принадлежащих классу $C^{(2,\lambda)}$, из которых только $q<p$ принадлежит классу $C^{(n,\lambda)}$. При таком предположении из теории Рисса следовало бы, что существует p линейно независимых линейных функционалов $X_i[\{f, \varphi\}]$, заданных на $\{f, \varphi\}\in\Sigma'_{2,\lambda}$, и q линейных функционалов $Y_j[\{f, \varphi\}]$, заданных на $\{f, \varphi\}\in\Sigma'_{n,\lambda}$, таких, что задача (35.1) разрешима тогда и только тогда, когда

$$X_i[\{f, \varphi\}]=0, \quad i=1, 2, \ldots, p, \tag{36.8}$$

а для $\{f, \varphi\}\in\Sigma'_{n,\lambda}$ решение существует тогда и только тогда, когда

$$Y_j[\{f, \varphi\}]=0, \quad j=1, 2, \ldots, q. \tag{36.9}$$

В таком случае при $\{f, \varphi\}\in\Sigma'_{n,\lambda}$ равенства (36.8) должны были бы быть следствиями (36.9), что невозможно, если $p>q$, так как тогда функционалы X_i были бы линейно зависимы в $\Sigma'_{n,\lambda}$, а следовательно, вопреки предположению, и в $\Sigma'_{2,\lambda}$, потому что $\Sigma'_{n,\lambda}$ плотно в $\Sigma'_{2,\lambda}$.

Наконец, докажем такое утверждение:

36, IV. *Если выполнены предположения теоремы* 36, II *и, кроме того, для любого решения задачи* (35.1), *принадлежащего классу* $C^{(n,\lambda)}$, *справедлива оценка* (35.15) (*в частности, если выполнены условия теоремы* 35, VI), *то задача* (35.1) *имеет по крайней мере одно решение, даже если относительно функции* φ *предполагается только, что она непрерывна на* $\mathfrak{F}T$ *и принадлежит классу* $C^{(n,\lambda)}$ *на множестве* $\overline{X}$ — *замыкании некоторого открытого множества* X *на* $\mathfrak{F}T$. *В этом случае решение непрерывно в* T *и принадлежит классу* $C^{(n,\lambda)}$ *в* $(T-\mathfrak{F}T)+X$. *Результат остается справедливым и тогда, когда* X *пусто. В предположениях теоремы* 35, VI *упомянутое решение единственно.*

Действительно, при указанных предположениях всякое решение соответствующей однородной задачи, принадлежащее классу $C^{(n,\lambda)}$, тождественно равно нулю и поэтому задача (35.1) имеет одно и только одно решение из класса $C^{(n,\lambda)}$, если $\varphi\in C^{(n,\lambda)}$. Для функции φ,

---

[1]) См. примечание [1]) на стр. 117.

удовлетворяющей условиям теоремы, можно построить приближающуюся к ней последовательность $\{\varphi_k\}$, где функции φ_k принадлежат классу $C^{(n,\lambda)}$ и таковы, что на любом множестве X_1, лежащем внутри X, величина $\Theta_{n,\lambda}[\varphi_k; \overline{X}_1]$ остается ограниченной. Пусть u_k — решение уравнения $\mathfrak{M}u = f$, принимающее на $\mathfrak{F}T$ значения φ_k. В силу оценки (35.15) и теоремы 35, IV, n-е производные функции u_k в каждой замкнутой области D, лежащей внутри $(T - \mathfrak{F}T) + \overline{X}$, имеют равномерно ограниченные коэффициенты Гёльдера. Этим доказано, что из последовательности функций u_k можно извлечь подпоследовательность функций, равномерно сходящихся в D вместе с производными, порядок которых не выше n. А отсюда следует, что функция u принадлежит классу $C^{(n,\lambda)}$ в $(T - \mathfrak{F}T) + X$ и удовлетворяет уравнению $\mathfrak{M}u = f$. Далее, в предположениях теоремы 35, VI это решение единственно, так как формула (35.15) справедлива даже для таких решений уравнения, которые принадлежат только классу $C^{(0)}$ в T. В связи с только что доказанной теоремой было бы интересно установить, влечет ли за собой наличие оценки (35.15) для решений, принадлежащих классу $C^{(n,\lambda)}$ в T, справедливость такой же оценки также и для решений класса $C^{(0)}$. Если бы это было так, можно было бы утверждать, что решение, существование которого утверждает теорема 36, IV, всегда единственно. Сферу действия такой теоремы можно было бы еще расширить, доказав справедливость высказанного в конце п. 35 предположения о том, что формула (35.15) справедлива всегда, когда для решения задачи Дирихле справедлива теорема единственности.

Сделаем следующее замечание, не имеющее отношения к последним рассуждениям. Из теоремы 36, IV непосредственно следует такая теорема Хопфа [3]:

36, V. *Пусть $\mathfrak{M}$ — эллиптический оператор, коэффициенты которого принадлежат классу $C^{(n-2,\lambda)}$ в T, $n \geqslant 2$. Пусть также $f \in C^{(n-2,\lambda)}$. Тогда любое решение уравнения $\mathfrak{M}u = f$, принадлежащее классу $C^{(2)}$ в $T - \mathfrak{F}T$, принадлежит в $T - \mathfrak{F}T$ также классу $C^{(n,\lambda)}$.*

Действительно, для любого $x_0 \in T - \mathfrak{F}T$ можно найти (теорема 35, VII) сферу Γ с центром в x_0, такую, что для любого решения уравнения, непрерывного в Γ, выполняется по отношению к Γ оценка (35.15). Согласно предыдущей теореме, в Γ существует тогда решение уравнения, совпадающее с u на $\mathfrak{F}\Gamma$ и принадлежащее классу $C^{(n,\lambda)}$ в $\Gamma - \mathfrak{F}\Gamma$. А в силу (35.15), это решение должно совпадать с u всюду в Γ. Это и доказывает теорему.

В заключение полезно сопоставить эти результаты с результатами, полученными Жиро с помощью метода интегральных уравнений. Прежде всего заметим, что преимуществами только что изложенного метода являются бо́льшая простота и возможность установить принадлежность решения классу $C^{(n,\lambda)}$, где $n > 2$, при некоторых предположениях относительно исходных данных задачи. Однако к этим же результатам можно было бы прийти и с помощью метода интегральных уравнений, правда, за счет значительных усложнений. Другим преимуществом метода продолжения является то, что он позволяет доказать существование решения задачи Дирихле с непрерывной граничной функцией в случае, когда предполагается только, что коэффициенты оператора $\mathfrak{M}$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем λ. Действительно, при столь общих предположениях методом Жиро удалось полностью изучить лишь тот случай, когда краевое условие однородно[1]. С другой стороны, метод интегральных уравнений позволяет провести все исследование в предположении, что T принадлежит классу $A^{(1,\lambda)}$, тогда как метод продолжения требует, чтобы замкнутая область T принадлежала по крайней мере классу $A^{(2,\lambda)}$. Кроме того, с помощью метода интегральных уравнений можно уточнить характер условий разрешимости, которым должны удовлетворять f и φ в том случае, когда однородная задача имеет ненулевые решения. Применяя метод продолжения, можно только утверждать, что эти условия имеют вид (36.8), но ничего нельзя сказать относительно вида функционалов X_i.

37. Интегральные оценки. Наряду с оценками п. 35 при изучении многих вопросов могут оказаться полезными другие оценки, в которые входят интегралы от квадратов рассматриваемых функций. Шаудер [13] указывал на возможность установления таких оценок при $m=2$ с помощью метода, очень похожего на тот, который мы применяли в п. 35; исходным пунктом снова должны служить соответствующие оценки для решений уравнений с постоянными коэффициентами, полученные много лет назад Лихтенштейном. Когда была опубликована заметка Шаудера, результаты Лихтенштейна не были еще распространены на случай $m>2$. Совсем недавно теорема Лихтенштейна была обобщена на случай $m>2$ в работах Фридрихса[2]; нет сомнения, что метод Шаудера теперь можно применить и к общему случаю. Результаты такого же типа, но даже для случая $m=2$ более общие и более точные, получил несколько лет назад Каччопполи [11].

Метод Каччопполи имеет элементарный характер и не требует предварительного изучения уравнений с постоянными коэффициентами. Для краткости ограничимся формулировкой этих результатов[3].

---

[1] По поводу изучения методом Жиро случая $\varphi \neq 0$ см. библиографию, указанную в конце п. 21; в работе Жиро [20] рассмотрен также случай, когда $\varphi \in C^{(1,\lambda)}$.

[2] См. примечание [1] к стр. 31.

[3] См. также Ладыженская [1]. [Подробное изложение этих результатов содержится в ее книге „Смешанная задача для гиперболического уравнения“, Гостехиздат, 1953, гл. II. — *Прим. ред.*]

Введем сначала некоторые обозначения, которые будем употреблять наряду с обозначениями, введенными в предыдущих пунктах. Для функций u и f положим

$$U^{(0)}(T)=\left[\int\limits_T u^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}},\quad F^{(0)}(T)=\left[\int\limits_T f^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}};$$

кроме того, через $U^{(k)}(T)$ обозначим сумму квадратных корней интегралов по T от квадратов всех производных порядка k функции u. Если же φ — функция, заданная на $\mathfrak{F}T$, а Ξ — часть $\mathfrak{F}T$, допускающая в декартовых координатах представление вида (1.1), то аналогичным образом мы можем ввести величины $\Phi^{(k)}(\Xi)$ (интегрирование производится по переменным ξ_i) и положить

$$\Theta^{(k)}[\varphi;\overline{X}]=\sum_{i=1}^{p}\Phi^{(k)}(\overline{X}\cdot\Xi_i),$$

где $\overline{X}$ и Ξ_i определяются так же, как в п. 34.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему:

37, I. *Пусть коэффициенты оператора* $\mathfrak{M}$ *и функция* f *непрерывны в замкнутой области* T *класса* $A^{(2)}$. *Если* φ *принадлежит классу* $C^{(2)}$ *на* $\mathfrak{F}T$, *то для любого решения* $u(x)$ *задачи* (35.1), *принадлежащего классу* $C^{(2)}$ *в* T, *при* $k=1,2$ *выполняются оценки*

$$U^{(k)}(T)=O\left(U^{(0)}(T)+F^{(0)}(T)+\Phi^{(0)}(\mathfrak{F}T)+\Theta^{(k)}[\varphi;\mathfrak{F}T]\right). \tag{37.1}$$

Кроме того, для любой замкнутой области $D\subset T$, *расстояние которой до* $\mathfrak{F}T$ *равно положительному числу* δ, *справедлива оценка*

$$\delta^{(k)}U^{(k)}(D)=O\left(U^{(0)}(T)+\delta^2F^{(0)}(T)\right). \tag{37.2}$$

Указанные оценки равномерны относительно $\mathfrak{M}$ *в пределах любого семейства эллиптических операторов, у которых равномерно ограничены функции* a_{ik} *и величины* A_0, B_0, C_0, $1/\overline{A}$.

Для случая, когда D имеет с $\mathfrak{F}T$ общие точки, справедливы другие оценки такого же вида. Мы не будем останавливаться на этом вопросе. Заметим, что было бы очень интересно исключить из правых частей последних формул величину $U^{(0)}(T)$, заменив ее через $\Phi^{(0)}$ или, может быть, через $\Phi_0=\max|\varphi|$. Так как $U^{(0)}=O(U_0)$, то в предположениях теоремы 35, VI можно произвести такое исключение при помощи формулы (35.15), но с условием, что в оценку войдет также член F_0; например, формула (37.1) примет вид

$$U^{(k)}(T)=O\left(\Phi_0+F_0+\Theta^{(k)}[\varphi;\mathfrak{F}T]\right). \tag{37.3}$$

В некоторых приложениях этой формулы оказывается неудобным то, что член $F^{(0)}$ заменен на F_0. Следующая теорема указывает, как при некоторых дополнительных предположениях можно преодолеть эту трудность:

37,II. *Пусть функции* a_{ij} *принадлежат классу* $C^{(2,\lambda)}$, *функции* b_i — *классу* $C^{(1,\lambda)}$, *функция* c — *классу* $C^{(0,\lambda)}$ *в замкнутой области* T *класса* $A^{(2)}$. *Если* $c \leqslant 0$, *то для любого решения* $u(x)$ *задачи* (35.1), *принадлежащего классу* $C^{(2)}$ *в* T, *справедлива оценка*

$$U^{(0)}(T) = O(\Phi^{(0)} + F^{(0)}(T)). \tag{37.4}$$

Оценка (37.4) *равномерна относительно* $\mathfrak{M}$ *в пределах любого семейства эллиптических операторов, для которых величины* A_0, B_0, C_0, $A_{2,\lambda}$, $B_{1,\lambda}$, $C_{0,\lambda}$ и $1/\overline{A}$ *ограничены*[1]).

В случаях $m = 2$ и $m = 3$ справедлива также следующая теорема:

37, III. *Пусть функции* a_{ij} *принадлежат классу* $C^{(2)}$, *функции* b_i — *классу* $C^{(1)}$, *а функция* c — *классу* $C^{(0)}$ *в замкнутой области* T *класса* $A^{(2)}$. *Если* $c \leqslant 0$ и $m = 2, 3$, *то для любого решения* $u(x)$ *задачи* (35.1), *принадлежащего классу* $C^{(2)}$ *в* T, *справедлива оценка*

$$U_0(T) = O(\Phi_0 + F^{(0)}(T)). \tag{37.5}$$

Оценка (37.5) *равномерна относительно* $\mathfrak{M}$ *в пределах любого семейства эллиптических операторов, для которых величины* A_0, B_0, C_0, A_2, B_1 *и* $1/\overline{A}$ *ограничены.*

Естественно, было бы интересно узнать, можно ли установить формулы (37.4) и (37.5) при менее строгих ограничениях на коэффициенты оператора $\mathfrak{M}$; этот вопрос еще остается открытым. Надо, однако, заметить, что невозможно распространить оценку (37.5) на $m > 3$. Наконец, справедливо следующее утверждение:

37, IV. *В предположениях теоремы* 37, III *справедлива также оценка*

$$U_{0,\lambda}(T) = O(\Phi_0 + \Theta^{(2)}[\varphi; \mathfrak{F}T] + F^{(0)}(T)), \tag{37.6}$$

где $\lambda < 1$, *если* $m = 2$, *и* $\lambda < 1/2$, *если* $m = 3$.

Укажем еще следующее:

37, V. *Пусть* $m = 2$. *Если замкнутая область* T *выпуклая, а коэффициенты* b_1, b_2, c *равны нулю, то оценки* (37.1) *справедливы также при изменении оператора* $\mathfrak{M}$ *в пределах семейства эллиптических операторов, для которых величины* $\overline{A}_0$ *и* $1/\overline{A}$ *ограничены.*

---

[1]) В случае однородного уравнения ($F^{(0)} = 0$) формула (37.4) была впервые установлена Фикерой [12, 14]. Однако результат Фикеры не имеет характера априорной оценки, так как доказательство опирается на существование функции Грина.

Другими словами, справедливость оценок (37.1) и их равномерность в рассматриваемом частном случае уже не связываются с равностепенной непрерывностью семейства функций a_{ij}. Доказательство этой теоремы содержится в старой работе Бернштейна [2, стр. 97], на много лет опередившей исследования Шаудера и Каччопполи.

Закончим этот пункт следующим замечанием. Было бы очень интересно, имея в виду различные приложения, установить аналогичные оценки, в которые вместо интегралов от квадратов различных функций входили бы интегралы от их p-х степеней при $p \gg 1$ или даже только при $p > 1$. Этой задачей до сих пор никто не занимался; она очень трудна, по крайней мере на первый взгляд[1].

38. Уравнения с непрерывными коэффициентами или со свободным членом, обладающим суммируемым квадратом. Получая свои оценки интегрального типа, Шаудер [13] стремился доказать теорему существования решения задачи Дирихле для уравнения с непрерывными коэффициентами. В цитируемой работе он, действительно, формулирует соответствующую теорему, но дает лишь весьма неясные указания относительно ее доказательства. Эта теорема, если ее несколько обобщить и распространить на случай $m = 3$, формулируется следующим образом:

38, I. *Предположим, что замкнутая область T принадлежит классу $A^{(2)}$, функция φ — классу $C^{(2)}$, функции a_{ij} — классу $C^{(0)}$, а функции b_i, c и f — классу $L^{(\infty)}$. Тогда, если $c \leqslant 0$, то для $m = 2, 3$ задача* (35.1) *имеет по крайней мере одно решение, принадлежащее классу $C^{(0)}$ в T.*

Это решение, так же как и его первые производные, абсолютно непрерывно по каждой переменной x_i в отдельности почти для всех точек $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ и удовлетворяет уравнению $\mathfrak{M}u = f$ почти всюду в T.

Вот одно из возможных доказательств. Пусть дана последовательность задач Дирихле

$$\mathfrak{M}^{(n)} u_n = f_n \text{ для } x \in T - \mathfrak{F}T, \quad u_n = \varphi_n \text{ для } x \in \mathfrak{F}T,$$

и пусть данные этих задач принадлежат классу $C^{(3)}$ и аппроксимируют данные задачи (35.1). Аппроксимация понимается в смысле равномерной сходимости для функций a_{ij} и φ и в смысле сходимости почти всюду для функций b_i, c, f; кроме того, предполагается, что функции, служащие приближениями для b_i, c, f, а также величины $\Theta^{(2)}[\varphi_n; \mathfrak{F}T]$ равномерно ограничены. В силу предполо-

---

[1] См. по этому поводу: Кошелев А. И., Об ограниченности в L_p производных решений эллиптических дифференциальных уравнений, Мат. Сб., 38 (80):3 (1956), стр. 359—372. — *Прим. ред.*

жения, что $c \leqslant 0$, указанные задачи Дирихле имеют решения, принадлежащие классу $C^{(2,\lambda)}$, причем эти решения равномерно ограничены. Кроме того, в силу оценок (37.1), интегралы от квадратов первых и вторых производных функций u_n также равномерно ограничены; согласно недавно доказанной теореме Греко[1]), этого достаточно для того, чтобы последовательность функций u_n была равностепенно непрерывной. Значит, из последовательности u_n можно извлечь подпоследовательность, которая равномерно сходится к функции $u(x)$, непрерывной в T и равной φ на $\mathfrak{F}T$. Далее, уже много раз цитированные[2]) работы Морри [2] и Стампаккья [2] обеспечивают справедливость высказанных утверждений относительно абсолютной непрерывности функции u и ее производных. Выбирая, если нужно, еще одну подпоследовательность функций u_n, можно показать, что производные функции u также являются пределами соответствующих производных функций u_n; для первых производных сходимость понимается как сходимость в среднем, а для вторых производных — как слабая сходимость. Из этого легко следует, что функция u является искомым решением задачи (35.1).

Теперь естественно задать вопрос, справедлива ли эта теорема в случае $m > 3$. Приведенное доказательство не проходит при $m > 3$, так как равномерная ограниченность величин $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ для всех функций некоторого семейства уже не влечет за собой равностепенную непрерывность этих функций. Однако возможно, что новые оценки (теорема 39, IV), недавно опубликованные К. Б. Морри [3], позволят прийти к цели другим путем и даже доказать, что решения принадлежат классу $C^{(1,\lambda)}$. Менее вероятной кажется возможность замены предположения об ограниченности функции f предположением, что она имеет интегрируемый квадрат, так как, вообще говоря, невозможно оценить U_0 в зависимости от $F^{(0)}$.

Однако при некоторых частных предположениях можно дать положительный ответ на этот вопрос. Справедлива следующая теорема Стампаккья [1]:

38, II. *Пусть замкнутая область T принадлежит классу $A^{(2)}$, функции φ и a_{ij} — классу $C^{(2)}$, функции b_i — классу $C^{(1)}$, функция c — классу $L^{(\infty)}$, функция f — классу $L^{(2)}$. Тогда при $m = 2,3$ и $c \leqslant 0$ задача* (35.1) *имеет по крайней мере одно решение в смысле теоремы* 38, I.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы, с той разницей, что здесь равномерная ограниченность и

---

[1]) Greco D., Criteri di compattezza per insiemi di funzioni in n variabili indipendenti, Ricerche di Mat. Napoli, 1 (1952), 124—144. [См. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950, стр. 91. — *Прим. ред.*]

[2]) См. примечание[1]) на стр. 119.

равностепенная непрерывность функций u_n обеспечиваются теоремами 37, III и 37, IV.

39. Оценки первых производных от решений. В этом пункте мы хотим указать на некоторые оценки для первых производных от решений эллиптических уравнений.

Для уравнения частного вида

$$\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}+f_i\right)=0, \tag{39.1}$$

где *не* предполагается, что $a_{ik}=a_{ki}$, такого рода оценки недавно установил Миранда [8], имея в виду некоторые применения, которые будут указаны в гл. VII (п. 53). Метод получения этих оценок близок к методам, применявшимся в п. 35, а также к тем методам, которыми пользовался Каччопполи [11] при доказательстве теорем п. 37. Прежде всего доказана следующая теорема (через F_0 и $F_{0\lambda}$ соответственно обозначены максимум модулей и наибольший из коэффициентов Гёльдера функций f_i):

39, I. *Пусть замкнутая область T принадлежит классу $A^{(2,\lambda)}$, функция φ — классу $C^{(1,\lambda)}$, где $^1/_2<\lambda<1$, а функции a_{ik} и f_i — классу $C^{(1,\lambda)}$. Для любого решения $u(x)$ уравнения* (39.1), *равного φ на $\mathfrak{F}T$, справедлива оценка*

$$U_0+U_{1,\lambda}=O(F_0+F_{0,\lambda}+\Phi_0+\Theta_{1,\lambda}[\varphi;\mathfrak{F}T]), \tag{39.2}$$

причем эта оценка равномерна относительно $\mathfrak{M}$ в пределах любого семейства эллиптических операторов, для которых величины A_0, $A_{0,\lambda}$ и $1/\overline{A}$ ограничены.

Мы не будем здесь останавливаться на других оценках такого же типа, относящихся к замкнутой области D, лежащей внутри T. Подчеркнем только, что эта теорема интересна потому, что, хотя и предполагается, что функции a_{ik} и f_i принадлежат классу $C^{(1,\lambda)}$, максимумы модулей и коэффициенты Гёльдера производных от этих функций не входят в оценку (39.2).

Обозначим теперь через $U^{(1,\mu)}$ и $F^{(0,\mu)}$ соответственно суммы верхних граней значений, которые принимают величины

$$\left[\rho^{-\mu}\int\limits_{T\cdot\Gamma(x_0,\rho)}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \left[\rho^{-\mu}\int\limits_{T\cdot\Gamma(x_0,\rho)} f_i^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

при изменении ρ и $x_0\in T$. Имеет место следующая теорема:

39, II. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и $\mu=n+2\lambda-2$. Тогда справедлива оценка*

$$U_0+U_{0,\lambda}+U^{(1,\mu)}=O\left(F^{(0,\mu)}+\Phi_0+\Phi_{0,\lambda}\right). \tag{39.3}$$

Эта оценка равномерна относительно $\mathfrak{M}$ *в пределах любого семейства эллиптических операторов, для которых функции* a_{ik} *равностепенно непрерывны, а величины* A_0 *и* $1/\overline{A}$ *равномерно ограничены.*

Относительно того, что в этой теореме наиболее интересно, можно сделать такое же замечание, как и к предыдущей теореме.

В случае $m=2$ интересный результат был совсем недавно получен Ниренбергом [1]. Теорема, относящаяся к уравнению

$$\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}=f, \tag{39.4}$$

формулируется следующим образом:

39, III. *Пусть фиксирована верхняя грань для величин* A_0, F_0 *и* $1/\overline{A}$; *тогда можно найти такие функции* $\alpha(K_1, K_2)$ *и* $\beta(K_1, K_2)$, *что для любого регулярного решения уравнения* (39.4), *удовлетворяющего неравенствам* $U_1(T)\leqslant K_1$, $\Theta_2[u;\ \mathfrak{F}T]\leqslant K_2$, *выполняется также неравенство*

$$U_{1,\alpha}(T)\leqslant\beta. \tag{39.5}$$

Аналогичная оценка справедлива для каждой замкнутой области D, *лежащей внутри* T. *В этом случае* α *и* β *зависят только от* K_1 *и от расстояния* δ *между* D *и* $\mathfrak{F}T$.

Исходной точкой доказательства служит замечание Бернштейна, использованное им в доказательстве теоремы 37, V, о том, что для решений уравнения (39.4) справедлива оценка вида

$$p_{11}^2+2p_{12}^2+p_{22}^2\leqslant c_1\left(p_{12}^2-p_{11}p_{22}\right)+c_2.$$

Отсюда после некоторых преобразований следует, что

$$\int\limits_{T\cdot\Gamma(x_0,\,\rho)} \overline{xx_0}^{\,-2\alpha}\left(p_{11}^2+2p_{12}^2+p_{22}^2\right)dx\leqslant M,$$

где α и M зависят от K_1 и K_2. Применяя неравенство Шварца, легко получить, что

$$\int\limits_{T\cdot\Gamma(x_0,\,\rho)} \left[p_{11}^2+2p_{12}^2+p_{22}^2\right]^{\frac{1}{2}}dx=O\left(\rho^{1+\alpha}\right),$$

и тогда формула (39.5) становится следствием одного результата Морри [2].

Наконец, относительно уравнения общего вида $\mathfrak{M}u=f$ при произвольном m мы заметим, что недавно Морри [3] высказал следующее утверждение:

39, IV. *Для любого решения* $u(x)$ *уравнения* $\mathfrak{M}u = f$ *и для любой замкнутой области* D, *лежащей внутри* T, *справедлива оценка*

$$U_{1,\lambda}(D) = O(U^{(0)} + F^{(\,,\,\mu)}),$$

где $\mu = n + 2\lambda - 2$. *Оценка равномерна относительно* $\mathfrak{M}$ *в пределах любого семейства эллиптических операторов, для которых функции* a_{ik} *равностепенно непрерывны, а величины* A_0, B_0, C_0 *и* $1/\overline{A}$ *равномерно ограничены.*

Другие результаты Морри относятся к уравнению

$$\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k} + a'_i u + f_i\right) + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f.$$

Глава VI

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Оставляя в стороне некоторые работы Пуанкаре, Пикара и Ле Руа, относящиеся к уравнениям частного вида, можно считать, что начало современной теории нелинейных эллиптических уравнений относится к 1900 г. Действительно, в этом году на интернациональном конгрессе в Париже Гильберт высказал предположение о том, что любое решение аналитического эллиптического уравнения аналитично.

Предположение Гильберта явилось источником для многочисленных исследований различных авторов. Через несколько лет появились важные работы С. Н. Бернштейна, который не только доказал [1] теорему Гильберта для уравнений с двумя переменными, но и перешел от этих исследований к глубокому изучению задачи Дирихле для нелинейных уравнений [2, 3, 4]. Основная идея Бернштейна, доминирующая во всей его теории, состоит в том, что возможность установить соответствующие априорные оценки для любого решения такой задачи обеспечивает существование этого решения.

Бернштейн получил эти результаты с помощью метода, который является соединением метода последовательных приближений с методом аналитического продолжения. Этот метод чрезвычайно трудоемок и позволяет прийти к нужным заключениям, лишь допустив ряд неестественных качественных ограничений. Это объясняет, почему исследования Бернштейна не имели непосредственных продолжений, так что еще в 1924 г. Лихтенштейн [4] имел основание писать: „Es wäre sehr zu begrüssen, wenn diese wichtigen Untersuchungen vereinfacht und übersichtlicher dargestellt werden könnten“ [1]. Прошло еще несколько лет, прежде чем между 1932 и 1937 гг. Шаудеру, Лере и Каччопполи удалось выяснить истинную природу результатов Бернштейна, существенно упростить их изложение и указать естественную область их действия. Основными средствами исследования для этих авторов были, с одной стороны, общая теория функциональных уравнений в абстрактных пространствах, а с другой — целый ряд новых оценок. В этой главе мы как раз ставим

---

[1] „Было бы очень приятно, если бы эти важные исследования были сделаны более простыми и обозримыми“. — *Прим. перев.*

себе целью изложить эти более современные исследования, отсылая интересующихся более старой литературой к уже цитированной монографии Лихтенштейна. Мы также укажем вкратце на дальнейшее развитие исследований, касающихся вопросов аналитичности, и на некоторые результаты, относящиеся к уравнениям в параметрической форме и к задачам частного вида.

40. Общие свойства решений. Пусть F — функция точки x пространства S_m и переменных p_{ik}, p_i, u, заданная и непрерывная вместе со своими первыми производными при $x \in T$ и при любых значениях остальных переменных. Решение $u(x)$ уравнения

$$F(p_{ik}, p_i, u, x) = 0 \tag{40.1}$$

называется *эллиптическим в T*, если квадратичная форма

$$\sum F_{p_{ik}}(p_{ik}(x), p_i(x), u(x), x)\,\lambda_i\lambda_k$$

является определенной, например положительной, для всех $x \in T$. Если квадратичная форма $\Sigma F_{p_{ik}}\lambda_i\lambda_k$ — определенная (положительная) при любых значениях переменных p_{ik}, p_i, u и при любых $x \in T$, то само уравнение (40.1) называется *эллиптическим*. Мы всегда будем предполагать, что выполняется это последнее условие. Кроме того, мы часто будем рассматривать уравнения вида

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}p_{ik} + 2\sum_{i=1}^{m} b_i p_i = f, \tag{40.2}$$

где a_{ik}, b_i, f — функции переменных p_j, u, x_j. Уравнения вида (40.2) называются *квазилинейными*.

Решения нелинейных эллиптических уравнений обладают различными свойствами максимума и минимума, аналогичными соответствующим свойствам решений линейных уравнений. Подробное изложение этих вопросов можно найти в работе Хопфа [1]. Мы ограничимся доказательством следующей теоремы:

40, I. *Пусть $F'_u \leqslant 0$; тогда разность $u - \bar{u}$ двух решений уравнения* (40.1) *не может иметь положительного максимума или отрицательного минимума в точке $x \in T - \mathfrak{F}T$, если она не является постоянной в окрестности этой точки.*

Доказательство очевидно. Действительно, положим

$$G(p_{ik}, p_i, u, x, t) =$$
$$= F(\bar{p}_{ik} + t(p_{ik} - \bar{p}_{ik}), \bar{p}_i + t(p_i - \bar{p}_i), \bar{u} + t(u - \bar{u}), x).$$

Тогда функция $v = u - \bar{u}$ есть решение уравнения

$$\sum_{i,k=1}^{m} \frac{d^2v}{\partial x_i \partial x_k} \int_0^1 G_{p_{ik}} \frac{dt}{t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial v}{\partial x_i} \int_0^1 G_{p_i} \frac{dt}{t} + v \int_0^1 G_u \frac{dt}{t} = 0, \tag{40.3}$$

и наше утверждение непосредственно следует из теоремы 3, II.

Большое значение имеет также следующая теорема Хопфа [3]:

40, II. *Пусть функция F непрерывна вместе со своими производными до порядка n включительно* $(n \geqslant 1)$, *причем производные порядка n удовлетворяют условию Липшица по переменным p_{ik}, и по переменным p_i, u, x_i — условию Гёльдера с показателем λ. Тогда любое решение уравнения* (40.1), *принадлежащее классу $C^{(2,\lambda)}$ в $T - \mathfrak{F}T$, принадлежит классу $C^{(n+2,\lambda)}$ в $T - \mathfrak{F}T$.*

Действительно, возьмем замкнутую область $D \subset T$, находящуюся на положительном расстоянии δ от $\mathfrak{F}T$, и положим для $x \in D$

$$x^{(h)} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_m),$$

$$v(x, h) = u(x^{(h)}) - u(x), \quad q_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad q_{ik} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k},$$

$$G(p_{ik}, p_i, u, x, t, h) = F(p_{ik} + tq_{ik}, p_i + tq_i, u + tv, x^{(th)});$$

здесь j фиксировано и $h < \delta/2$.

Очевидно, что функция $w(x, h) = v(x, h)/h$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_k} \int_0^1 G_{p_{ik}} dt + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial w}{\partial x_i} \int_0^1 G_{p_i} dt + w \int_0^1 G_u dt + \int_0^1 G_{x_j} dt = 0, \tag{40.4}$$

а отсюда непосредственно вытекает теорема. Действительно, достаточно доказать, что если $u \in C^{(k,\lambda)}$ при $2 \leqslant k \leqslant n+1$, то она обладает производными порядка $k+1$, удовлетворяющими условию Гёльдера с показателем λ. Но в предположении, что $u \in C^{(k,\lambda)}$, коэффициенты уравнения (40.4) принадлежат классу $C^{(k-2,\lambda)}$, а коэффициенты Гёльдера их производных порядка $k-2$ можно оценить независимо от h. Тогда, согласно теореме 35, IV, в любой замкнутой области, лежащей внутри D, можно установить аналогичную оценку для коэффициентов Гёльдера производных k-го порядка от функции $w(x, h)$. Отсюда следует, что и функция

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} w(x, h)$$

принадлежит классу $C^{(k,\lambda)}$, что доказывает теорему.

Далее, для квазилинейных уравнений, применяя теорему 36, V, легко установить следующее:

40, III. *Если функции* a_{ik}, b_i, f *непрерывны вместе со своими производными до порядка* $n (\geqslant 0)$, *а их* n*-е производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем* λ *по переменным* p_j, u, x_j, *то любое решение уравнения* (40.2), *принадлежащее классу* $C^{(2)}$ *в* $T - \mathfrak{F}T$, *принадлежит в* $T - \mathfrak{F}T$ *классу* $C^{(n+2, \lambda)}$.

Для случая двух переменных теорема 40, II была следующим образом улучшена Каччопполи [8]:

40, IV. *Пусть функция* F *непрерывна вместе со своими производными до порядка* $n (\geqslant 4)$. *Тогда, если* $m = 2$, *то любое решение уравнения* (40.1), *принадлежащее классу* $C^{(2)}$ *в* $T - \mathfrak{F}T$, *принадлежит в* $T - \mathfrak{F}T$ *классу* $C^{(n+1, \lambda)}$ *при всяком* $\lambda < 1$.

Прямое доказательство этой теоремы очень интересно и будет изложено ниже (п. 44). Однако эту теорему можно более просто получить из теоремы Хопфа (40,II) и из следующего результата Ниренберга [1], полученного совсем недавно:

40, V. *Если относительно функции* F *предполагается только, что она непрерывна вместе со своими первыми производными, и если* $m = 2$, *то любое решение уравнения* (40.1), *принадлежащее классу* $C^{(2)}$ *в* $T - \mathfrak{F}T$, *принадлежит в* $T - \mathfrak{F}T$ классу $C^{(2, \alpha)}$, *по крайней мере при достаточно малых* α.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 40,II; надо только учесть, что, воспользовавшись теоремой 39, III, можно оценить независимо от h коэффициенты Гёльдера первых производных от функции $w(x, h)$ при достаточно малых α.

Из теорем 40, II и V непосредственно вытекает следующее утверждение:

40, VI. *Пусть выполнены предположения теоремы* 40, II, *и пусть* $m = 2$; *тогда всякое решение уравнения* (40.1), *принадлежащее классу* $C^{(2)}$, *принадлежит классу* $C^{(n+2, \lambda)}$.

Сделаем еще одно замечание:

40, VII. *Если даже уравнение* (40.1) *не является уравнением эллиптического типа, теоремы* 40, II, III, IV *остаются справедливыми для любого эллиптического решения этого уравнения.*

Что касается теоремы 40, IV, то это будет следовать из того доказательства этой теоремы, которое мы дадим ниже. Что же касается теоремы 40, II, то достаточно заметить, что ее доказательство опирается только на эллиптичность уравнения (40.3). А это уравнение, очевидно, является эллиптическим, если только u есть эллиптическое решение уравнения (40.1), а h достаточно мало.

Добавим, наконец, что недавно Морри [3] сообщил, что он распространил теорему 40, IV на случай $m > 2$, предполагая только непрерывность функции F и ее первых производных.

41. Функциональные уравнения в абстрактных пространствах[1]. В этом пункте мы напомним некоторые понятия, относящиеся к функциональным уравнениям в абстрактном пространстве, которые служат основой при изучении задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений. Началом этих исследований является одна заметка Биркгофа и Келлога[2], написанная в 1922 г., и заметка П. Леви[3], относящаяся к 1920 г. Первая из этих заметок касается обобщения на случай абстрактного пространства *теоремы о неподвижной точке* Брауэра. Этот вопрос позднее был глубоко изучен Шаудером [1, 2, 4] и другими авторами[4]. Полученные результаты, хотя они и оказались очень полезными в других областях, нашли мало применений в теории эллиптических уравнений, где требуются более тонкие теоремы. Однако эти результаты послужили исходной точкой для дальнейших исследований, которые проводили сначала сам Шаудер [3, 7], а затем Лере и Шаудер [1]. Эти исследования привели к созданию одного из методов, который может служить основой при изучении задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений. Другой метод, который можно некоторым образом связать с заметкой П. Леви, развил Каччопполи [3, 4, 9]. Все эти работы были опубликованы между 1927 и 1937 гг. Первой из них была работа [3] Шаудера, которая относится к 1927 г.; затем последовали работа Шаудера [7] и заметки [3, 4] Каччопполи в 1932 г.; статья Лере и Шаудера в 1934 г.; в 1937 г. — последняя работа [9] Каччопполи. Из соображений удобства мы начнем изложение с работ [3, 4] Каччопполи. В этих работах было показано, каким образом некоторые классические методы, а именно метод последовательных приближений и метод аналитического продолжения, которые многими авторами применялись для доказательства теорем существования и единственности, можно свести к немногим общим принципам. При этом абстрактная формулировка этих принципов упрощает и приводит в систему применение указанных методов к отдельным задачам.

Пусть Σ и Σ' — два полных линейных нормированных пространства, и пусть

$$\sigma' = \mathfrak{T}(\sigma) \tag{41.1}$$

---

[1] Более подробное изложение этого пункта можно найти в работе Миранды, цитированной в примечании [1] к стр. 150.

[2] Birkhoff G. D., Kellog O. D., Invariant points in functions space, Trans. Amer. Math. Soc., 23 (1922), 96—115.

[3] Levy P., Sur les fonctions de lignes implicites, Bull. Soc. Math. de France, 48 (1920), 13—27.

[4] См. Каччопполи [1, 2].

— непрерывное преобразование, которое каждой точке σ из Σ ставит в соответствие точку σ' из Σ'. Мы скажем, что преобразование $\mathfrak{T}$ обратимо по отношению к двум множествам A и A' соответственно из Σ и Σ', если оно устанавливает взаимно однозначное соответствие между этими множествами. В частности, $\mathfrak{T}$ называется *локально обратимым* в окрестности двух соответствующих друг другу точек σ_0 и σ_0', если оно обратимо по отношению к некоторым двум окрестностям этих точек; оно называется *полностью обратимым*, если оно устанавливает взаимно однозначное соответствие между Σ и Σ'. Справедлива следующая теорема:

41, I. *Преобразование $\mathfrak{T}$ полностью обратимо, если выполняются следующие два условия:* А) *преобразование $\mathfrak{T}$ локально обратимо в окрестности любой пары соответствующих друг другу точек;* В) *всякое множество из Σ, которое при преобразовании $\mathfrak{T}$ переходит в компактное множество в Σ', компактно.*

Эта теорема утверждает, что если равенство (41.1) рассматривается как уравнение относительно σ, то при высказанных здесь предположениях для него имеет место теорема существования и единственности решения. Заметим, что существование решения очевидно, так как, в силу условий А) и В), образ Σ одновременно замкнут и открыт в Σ', т. е. совпадает с Σ'. Более тонко доказательство единственности, которое мы здесь не приводим. Область действия этой теоремы значительно расширяется благодаря следующим дополнениям:

41, II. *Пусть условия* А) *и* В) *выполняются только тогда, когда σ' принадлежит некоторому замкнутому и связному подмножеству Σ_1' пространства Σ', и пусть* С) *по крайней мере одна точка из Σ_1' является образом только одной точки из Σ. Тогда любая точка из Σ_1' есть образ только одной точки из Σ.*

41, III. *Пусть преобразование $\mathfrak{T}$ непрерывно зависит от параметра α, значения которого также являются элементами некоторого полного линейного нормированного пространства S, и пусть выполняются следующие условия:* А_1) *для всякого фиксированного значения α, принадлежащего некоторому связному и компактному подмножеству S_1 пространства S, преобразование $\mathfrak{T}$ является локально обратимым в окрестности любой пары соответствующих друг другу точек;* В_1) *всякое множество пространства Σ компактно, если при каждом α из S_1 преобразование $\mathfrak{T}$ переводит его в компактное множество пространства Σ';* С_1) *для некоторого частного значения $\alpha \in S_1$ существует по крайней мере одна точка из Σ', которая является образом только одной точки из Σ. Тогда преобразование $\mathfrak{T}$ полностью обратимо для всякого фиксированного $\alpha \in S_1$. Если эти же условия выполняются только* *для* $\sigma' \in \Sigma_1'$, *где* Σ'_1 *— замкнутое и связное множество, то всякая точка* σ' *из* Σ_1' *является образом только одной точки из* Σ.

С помощью таких теорем доказательство существования и единственности решения рассматриваемого функционального уравнения сводится к проверке того, выполнены ли условия этих теорем. Обычно проверка выполнения условий В) или В_1) требует, чтобы существовала некоторая априорная оценка возможных решений уравнения. Проверка условия Λ) требует изучения локальных свойств преобразования; часто эту проверку можно провести, применяя следующую теорему Гильдебрандта и Гревза[1]:

41, IV. *Пусть преобразование* $\mathfrak{T}$ *непрерывно дифференцируемо на каждом ограниченном множестве; обозначим через* $\mathfrak{D}(\sigma, \delta\sigma)$ *его дифференциал*[2]). *Если линейное преобразование* $\delta\sigma' = \mathfrak{D}(\sigma_0, \delta\sigma)$ *полностью обратимо, то преобразование* $\mathfrak{T}$ *локально обратимо в окрестности точек* σ_0 *и* $\sigma_0' = \mathfrak{T}(\sigma_0)$.

Теперь очевидно, что те теоремы существования, к которым можно прийти, применяя вышеизложенные общие принципы, обязательно связаны также и с теоремой единственности. Поэтому интересно расширить область применения этих методов, с тем чтобы их можно было применять и к изучению уравнения, решение которого не обязательно единственное. Можно заметить, что если преобразование удовлетворяет одному только условию В), то множество Σ_0 тех точек из Σ, которые имеют один и тот же образ σ_0', есть компакт. Ясно, что в таком случае для доказательства одной лишь теоремы существования свойство А), сформулированное в теореме 41, I, можно заменить следующим свойством:

А'). *Для каждой точки* $\sigma_0' \in \Sigma'$, *которая является образом компакта* Σ_0 *из пространства* Σ, *можно найти окрестность, все точки которой являются образами по крайней мере одной точки из некоторой окрестности множества* Σ_0.

Таким образом, дело заключается в том, чтобы найти условия, аналогичные условиям теоремы 41, IV, которые обеспечивали бы выполнение условия А'). Это удалось сделать Каччопполи [9] при следующих предположениях. Потребуем прежде всего, чтобы Σ и Σ' погружались в два гильбертовых пространства $\overline{\Sigma}$ и $\overline{\Sigma}'$ так, чтобы для любого линейного многообразия из $\overline{\Sigma}$ или $\overline{\Sigma}'$ можно было определить ортогональное дополнение. Пусть σ_0 и $\sigma_0' = \mathfrak{T}(\sigma_0)$ — две соответствующие друг другу точки; мы назовем точку σ_0' — образ точки

---

[1] Hildebrandt T. H., Graves L. M., Implicit functions and their differentials in general Analysis, Trans. Amer. Math. Soc., **29** (1927), 127—153.

[2] См. Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, Гостехтеориздат, М.—Л., 1951, стр. 300. — *Прим. ред.*

σ_0 — *регулярной* или *критической* точкой обратного преобразования $\mathfrak{T}^{-1}$, в зависимости от того, является ли преобразование $\mathfrak{D}(\sigma_0, \delta\sigma)$ полностью обратимым или нет. Далее, критическая точка называется *обыкновенной*, если преобразование $\delta\sigma' = \mathfrak{D}(\sigma_0, \delta\sigma)$ обратимо по отношению к двум линейным многообразиям пространств Σ и Σ', ортогональные дополнения которых имеют одинаковое конечное число измерений.

Справедлива следующая теорема:

41, V. *Пусть преобразование $\mathfrak{T}$ обладает только обыкновенными критическими точками и удовлетворяет условию* B). *Пусть, кроме того, выполнено следующее условие*: C′) *существует по крайней мере одна точка σ'_0 из Σ', которая является образом конечного нечетного числа точек из Σ, причем по отношению к каждой из этих точек σ'_0 является регулярной точкой преобразования $\mathfrak{T}^{-1}$. Тогда всякая точка из Σ' является образом по крайней мере одной точки из Σ.* •

Центральный пункт довольно сложного доказательства этой теоремы по существу состоит в следующем. Если σ'_0 есть обыкновенная критическая точка, которая является образом компактного множества Σ_0 пространства Σ, то преобразование некоторой окрестности точки σ'_0 в некоторую окрестность Σ_0, обратное по отношению к $\mathfrak{T}$, можно свести к линейному преобразованию двух конечномерных пространств S_n и S'_n. Тогда можно определить топологический порядок χ точки σ'_0 по отношению к некоторому многообразию пространства S'_n таким образом, что в случае, когда этот порядок отличен от нуля, выполняется условие A′). Теорема следует тогда из того факта, что при условии B) можно доказать, что χ остается постоянным при изменении σ'_0; поэтому оно отлично от нуля, если оно отлично от нуля в каком-нибудь частном случае. Так как в случае, когда Σ_0 сводится к изолированной точке, а σ'_0 — регулярная точка преобразования $\mathfrak{T}^{-1}$, χ принимает значения ± 1, то благодаря условию C′) χ не равно нулю, по крайней мере в одном частном случае.

Конечно, высказанная сейчас теорема может быть дополнена такими же замечаниями, как и теоремы 41, II и 41, III, но мы не будем на этом останавливаться. Мы сейчас изложим другой метод, с помощью которого также можно получить теоремы существования в том случае, когда решение не обязательно единственно. Этот метод содержится в работе Лере и Шаудера [1]; эти авторы на несколько лет раньше Каччопполи [9] доказали следующую теорему:

41, VI. *Пусть $\mathfrak{S}(\sigma, \alpha)$ — преобразование пространства Σ в себя, непрерывно зависящее от параметра α и вполне непрерывное от-*

носительно σ *при каждом фиксированном* α. *Если преобразование* $\sigma' = \mathfrak{T}(\sigma, \alpha) = \sigma - \mathfrak{S}(\sigma, \alpha)$ *удовлетворяет условию* C′) *теоремы* 41, V *по крайней мере при одном значении* α *и если* B′) *все решения уравнения*

$$\sigma = \mathfrak{S}(\sigma, \alpha) \tag{41.2}$$

заключены для всех α *в ограниченном множестве пространства* Σ, *то указанное уравнение имеет по крайней мере одно решение для каждого значения* α.

Доказательство этой теоремы также требует применения соображений из области топологии. Действительно, доказательство опирается на обобщение понятия топологической степени отображения на преобразования вида $\sigma' = \sigma - \mathfrak{S}(\sigma, \alpha)$. В самом деле, рассмотрим указанное преобразование при некотором фиксированном α. Пусть σ изменяется в пределах некоторой ограниченной замкнутой области Σ_1 пространства Σ; тогда каждой точке σ_0 из Σ, не принадлежащей образу $\mathfrak{F}\Sigma_1$, можно поставить в соответствие число $\Phi(\sigma_0, \Sigma_1)$, которое называется *топологической степенью* отображения в точке σ_0 и обладает следующими свойствами:

1) $\Phi(\sigma_0, \Sigma_1)$ есть аддитивная функция Σ_1. 2) Если $\Phi(\sigma_0, \Sigma_1) \neq 0$, то точка σ_0 принадлежит образу множества $\Sigma_1 - \mathfrak{F}\Sigma_1$. 3) $\Phi(\sigma_0, \Sigma_1)$ не изменяется при непрерывном изменении σ_0, Σ_1 и α до тех пор, пока σ_0 не достигает образа $\mathfrak{F}\Sigma_1$.

Справедливость теоремы следует из того факта, что при условии B′) в пространстве Σ существует сфера Σ_1 настолько большого радиуса, что нулевой элемент ω пространства Σ не принадлежит образу $\mathfrak{F}\Sigma_1$ ни при каком значении α. Поэтому топологическая степень отображения в точке ω не меняется при изменении α и не равна нулю, если она не равна нулю при каком-нибудь частном значении α. Если выполнено условие C′), то легко доказать, что это так; поэтому при любом α точка ω принадлежит образу $\Sigma_1 - \mathfrak{F}\Sigma_1$, а следовательно, уравнение (41.1) имеет решение, каково бы ни было α. Следствием только что высказанной теоремы, хотя и не совсем очевидным, является следующее утверждение:

41, VII. *Если преобразование* $\sigma' = \sigma - \mathfrak{S}(\sigma)$, *где* $\mathfrak{S}$ *полностью обратимо, устанавливает взаимно однозначное соответствие между ограниченной замкнутой областью* Σ_1 *и ее образом* Σ_1', *то* Σ_1' *также является замкнутой областью и внутренние точки* Σ_1 *переходят во внутренние точки* Σ_1'. *В частности, если для уравнения* $\sigma' = \sigma - \mathfrak{S}(\sigma)$, *где неизвестным является* σ, *справедлива теорема единственности, то рассматриваемое преобразование локально обратимо в окрестности любой пары соответствующих друг другу точек.*

Эта теорема распространяет на преобразования в абстрактных пространствах так называемое свойство *сохранения* (*замкнутой*) *области*. Она была доказана в указанной выше форме Лере [1]. При предположениях более жестких, но все же пригодных для применения к эллиптическим уравнениям, эту теорему еще раньше прямым методом доказал Шаудер [3,7]. Несколько иной результат, связанный с содержанием этого пункта, содержится в работе Кронина [1].

42. Задача Дирихле для уравнений с m переменными. Пусть указана ограниченная замкнутая область T. Задача Дирихле для эллиптического уравнения (40.1) состоит в отыскании решения этого уравнения, непрерывного в T, принадлежащего классу $C^{(2)}$ в $T-\mathfrak{F}T$ и удовлетворяющего краевому условию

$$u(x)=\varphi(x) \text{ для } x\in\mathfrak{F}T. \qquad (42.1)$$

При рассмотрении этой задачи предполагается, что функция F непрерывна вместе со всеми своими производными вплоть до порядка $n\geqslant 2$ и что замкнутая область T принадлежит классу $A^{(n,\lambda)}$, а относительно функции φ предполагается, по крайней мере сначала, что она принадлежит классу $C^{(n,\lambda)}$.

Обозначим через Σ линейное пространство, элементами σ которого являются функции $u(x)$, принадлежащие классу $C^{(n,\lambda)}$ в T, с нормой

$$\|\sigma\|=U_0(T)+U_{n,\lambda}(T);$$

это пространство является полным. Через Σ' обозначим пространство пар $\sigma'\equiv\{f,\varphi\}$, где $f\in C^{(n-2,\lambda)}$ в T, а $\varphi\in C^{(n,\lambda)}$ на $\mathfrak{F}T$, причем норма σ' определяется формулой

$$\|\sigma'\|=F_0(T)+F_{n-2,\lambda}(T)+\Phi_0(\mathfrak{F}T)+\Theta_{n,\lambda}[\varphi;\mathfrak{F}T].$$

Между Σ и Σ' можно установить соответствие $\sigma'=\mathfrak{T}(\sigma)$, сопоставив каждой точке $\sigma\equiv u(x)$ из Σ элемент σ' из Σ', который определяется следующим образом:

$$\varphi=u \text{ для } x\in\mathfrak{F}T,\quad f=F(p_{ik},p_i,u,x) \text{ для } x\in T.$$

Теорема существования решения задачи Дирихле будет доказана, если мы покажем, что преобразование $\mathfrak{T}$ является обратимым по отношению к соответствующим образом подобранному многообразию Σ_1 в Σ и многообразию Σ_1' в Σ', которое определяется уравнением $f=0$. Но преобразование $\mathfrak{T}$ непрерывно дифференцируемо, причем

$$\mathfrak{D}(\sigma,\delta\sigma)\equiv\left\{\sum_{i,k=1}^{m}F_{p_{ik}}\frac{\partial^2\delta\sigma}{\partial x_i\,\partial x_k}+\sum_{i=1}^{m}F_{p_i}\frac{\partial\delta\sigma}{\partial x_i}+F_u\delta\sigma,\ \delta\sigma\right\};$$

следовательно, согласно теореме 41, IV, преобразование $\mathfrak{T}$ является локально обратимым, если задача Дирихле для неизвестной функции $\delta\sigma$

$$\sum_{i,k=1}^{m} F_{p_{ik}} \frac{\partial^2 \delta\sigma}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} F_{p_i} \frac{\partial \delta\sigma}{\partial x_i} + F_u \delta\sigma = \delta f, \tag{42.2}$$

$$\delta\sigma = \delta\varphi \text{ для } x \in \mathfrak{F}T$$

разрешима *неограниченно*, т. е. разрешима при любых δf и $\delta\varphi$. Заметим, что линейное уравнение (42.2) является эллиптическим в силу эллиптичности уравнения (40.1). Уравнение (42.2) обычно называют *уравнением в вариациях*, соответствующим уравнению (40.1). Из теоремы 41, II непосредственно вытекает следующее утверждение:

42, I. *Какова бы ни была функция* $\varphi \in C^{(n, \lambda)}$, *где* $n \geqslant 2$, *решение задачи Дирихле для уравнения* (40.1) *существует и единственно, если выполнены следующие условия:* α) *Для произвольного решения уравнения* (40.1), *принадлежащего классу* $C^{(n, \lambda)}$, *задача Дирихле для соответствующего уравнения в вариациях неограниченно разрешима.* β) *Нормы всех решений уравнения* (40.1) *можно оценить через величину* $\Phi_0 + \Theta_{n, \lambda}[\varphi; \mathfrak{F}T]$. γ) *Для некоторой функции* φ *решение задачи существует и единственно.*

Действительно, достаточно показать, что при условии β) всякое семейство решений уравнения (40.1), граничные значения которых образуют сходящуюся последовательность, компактно. Но это очевидно. В самом деле, если выполнено условие β), то указанное семейство содержит по крайней мере одну последовательность функций $\{u_k\}$, равномерно сходящуюся, вместе с последовательностями производных порядка, не превышающего n, к функции $u(x)$, принадлежащей классу $C^{(n, \lambda)}$, которая также является решением уравнения (40.1). Положим $u - u_k = v$; функции v удовлетворяют линейным уравнениям вида (40.3), причем коэффициенты этих уравнений обладают производными $(n-2)$-го порядка, удовлетворяющими условию Гёльдера с показателем λ и с равномерно ограниченными константами. Тогда, согласно теореме 35, I, справедлива оценка вида

$$V_{n, \lambda} \leqslant K(V_2 + V_1 + V_0 + \Theta_{n, \lambda}[v; \mathfrak{F}T]), \tag{42.3}$$

откуда и следует утверждение, которое мы хотим доказать:

$$\lim_{k \to \infty} \|u - u_k\| = 0.$$

Заметим теперь, что в указанных предположениях для задачи Дирихле, поставленной для уравнения (42.2), справедлива теорема об альтернативе 36, II. Поэтому в случае, когда эта задача не является неограниченно неразрешимой, соответствующая однородная задача имеет конечное число линейно независимых решений, а сама задача разрешима при условии, что выполняются условия разрешимости, число которых равно числу решений однородной задачи. Отсюда легко следует, что всякая критическая точка преобразования $\mathfrak{T}^{-1}$ является обыкновенной. Тогда, применяя теорему 41, V, можно получить следующий результат:

42, II. *Задача Дирихле для уравнения* (40.1) *при произвольном* $\varphi \in C^{(n, \lambda)}$ *имеет по крайней мере одно решение, принадлежащее классу* $C^{(n, \lambda)}$, *если из условий предыдущей теоремы выполнено одно только условие* β) *и, кроме того,* γ') *для некоторой функции* φ *задача имеет конечное нечетное число решений, причем задача Дирихле для уравнения в вариациях, соответствующего каждому из этих решений, неограниченно разрешима.*

Наконец, из теоремы 41, III и из аналогичного обобщения теоремы 41, V следует такое утверждение:

42, III. *Если уравнение* (40.1) *непрерывно зависит от параметра* α, *то теоремы* 42, I *и* II *справедливы для любого* α *в предположении, что условия* γ) *или* γ') *выполняются по крайней мере для одного значения* α, *а остальные условия выполняются также и при изменении* α.

Теперь надо заметить, что теоремы 42, II и III можно доказывать, применяя теорему 41, VI вместо теоремы 41, V. Первое доказательство указанных теорем, данное Лере и Шаудером [1], было проведено именно таким образом. Мы подробно изложим это доказательство только в предположении, что рассматриваемое уравнение квазилинейно, т. е. имеет вид (40.2). В этом случае предыдущие теоремы можно уточнить следующим образом:

42, IV. *Если рассматриваемое уравнение квазилинейно, то теоремы* 42, I, II *и* III *справедливы и тогда, когда условие* β) *заменяется другим условием*: β') *Если функция* $u(x)$ *изменяется в пределах семейства решений рассматриваемого уравнения, то величину* $U_0 + U_{n-1, \lambda}$ *можно оценить через* $\Phi_0 + \Theta_{n, \lambda}[\varphi; \mathfrak{T}T]$.

Заметим сначала, что эта теорема становится почти очевидной, если применить к ее доказательству метод, которому мы следовали выше. Действительно, в предположении, что величины $U_0 + U_{n-1, \lambda}$ ограничены, уравнение (40.2) можно рассматривать как линейное уравнение, коэффициенты которого изменяются в пределах семейства функций, обладающих производными $(n-2)$-го порядка, удовлетворяющими условию Гёльдера с показателем λ и с равномерно ограниченными константами. Согласно теореме 35, II, отсюда следует, что величины $U_{n, \lambda}$ также ограничены, так что условие β') влечет за собой условие β), что доказывает теорему.

Столь же простым является метод Лере и Шаудера, который можно применить для обобщения теорем 42, II и III. На этот раз через Σ

обозначим пространство, элементами σ которого являются функции $u(x)$, принадлежащие в T классу $C^{(n-1,\lambda)}$, с нормой

$$\|\sigma\| = U_0 + U_{n-1,\lambda}.$$

Далее, для любого элемента $\sigma = u$ пространства Σ положим

$$\bar{a}_{hk}[\sigma] = a_{hk}(p_i, u, x), \quad \bar{f}[\sigma] = f(p_i, u, x) - 2\sum_{k=1}^{m} b_k(p_i, u, x)\, p_k,$$

и пусть $\sigma' = u'$ — решение задачи Дирихле

$$\sum_{h,k=1}^{m} \bar{a}_{hk}[\sigma] \frac{\partial^2 u'}{\partial x_h\, \partial x_k} = \bar{f}[\sigma], \quad u' = \varphi \text{ для } x \in \mathfrak{F}T.$$

Очевидно, можно написать $\sigma' = \mathfrak{S}(\sigma)$, где преобразование $\mathfrak{S}$ вполне непрерывно, потому что любое ограниченное множество из Σ преобразованием $\mathfrak{S}$ переводится в семейство функций u', для которых величины $U_0' + U_{n,\lambda}'$ ограничены. Ясно, что такая оценка обеспечивает компактность этого семейства в Σ. Затем применяется теорема 41, VI, что сразу доказывает наше утверждение, если в качестве параметра α рассматривать функцию φ — краевое условие задачи.

Наконец, напомним, что, применяя теорему 41, VII, Шаудер [7, 8, 11] доказал следующее:

42, V. *Теорема* 42, I *справедлива также и тогда, когда условие* α) *заменяется предположением о том, что решение задачи Дирихле для более общего уравнения* $F = f(x)$ *единственно.*

Не ясно, эквивалентна ли эта теорема теореме 42, I; однако надо отметить, что в одном частном случае такая эквивалентность имеет место. Таким случаем является тот случай, когда предполагается, что $F_u' \leqslant 0$, потому что это предположение обеспечивает как неограниченную разрешимость уравнения в вариациях (теорема 36, I), так и единственность решения задачи Дирихле для уравнения $F = f(x)$, что является очевидным следствием теоремы 40, I.

Изложенные до сих пор результаты — это все, что удалось получить, применяя те принципы функционального анализа, которые изложены в п. 41. Можно, однако, получить некоторые дальнейшие результаты, находя все менее жесткие условия, при которых оказываются выполненными предположения β) или β') предыдущих теорем.

Наиболее значительные результаты в этом круге идей относятся к уравнениям с двумя переменными и будут изложены в п. 43.

Для случая произвольного m наиболее общими из известных теорем являются следующие теоремы, полученные Каччопполи [6]:

42, VI. *Теоремы* 42, I, II, III *и* V *справедливы также и тогда, когда предположение* β) *заменяется следующим предположением:*

δ) *Все решения уравнения* (40.1), *а также их первые и вторые производные равномерно ограничены и равностепенно непрерывны при изменении* φ *в пределах любого семейства функций, для которого величина* $\Phi_0 + \Theta_{n,\lambda}[\varphi; \mathfrak{F}T]$ *ограничена.*

Очевидно, достаточно доказать, что для любой последовательности решений уравнения (40.1), такой, что граничные значения решений образуют сходящуюся последовательность в Σ', условие β) является следствием δ). Если бы это было не так, то можно было бы найти последовательность таких решений $\{u_k\}$ уравнения (40.1), которые сходятся равномерно в T вместе со своими производными порядка не выше двух и удовлетворяют условию $\|u_k\| \geqslant 2\|u_{k-1}\|$. С другой стороны, функции $v = u_k - u_{k-1}$ удовлетворяют линейному однородному уравнению вида (40.3). Для коэффициентов этого уравнения те величины, которые в п. 35 обозначались через $A_{n-2,\lambda}$, $B_{n-2,\lambda}$, $C_{n-2,\lambda}$, в силу теоремы 33, IV, мажорируются некоторой линейной функцией от $\|u_k\|$, а величины A_0, B_0, C_0 равномерно ограничены. Тогда, применяя теорему 35, I, мы могли бы получить неравенство вида

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_k\| \leqslant \|u_k - u_{k-1}\| \leqslant \\ \leqslant K[\|u_k\| + 1] \cdot [V_2 + V_1 + V_0 + \Theta_{n,\lambda}[v; \mathfrak{F}T]],\end{aligned} \tag{42.4}$$

которое явно неверно, так как величина в квадратных скобках бесконечно мала при $k \to \infty$.

Теорему 42, IV, относящуюся к квазилинейным уравнениям, можно усилить следующим образом:

42, VII. *Для квазилинейного уравнения* (40. 2) *теоремы* 42, I, II, III, V *справедливы также и тогда, когда предположение* β) *заменяется следующим предположением:* δ′) *Все решения уравнения* (40.2) *и их первые производные равностепенно непрерывны и равномерно ограничены относительно* φ *в пределах любого семейства функций, для которого величина* $\Phi_0 + \Theta_{n,\lambda}[\varphi; \mathfrak{F}T]$ *ограничена.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. Последовательность $\{u_k\}$ должна сходиться вместе со своими первыми производными. Так как коэффициенты при $\partial^2 v/\partial x_i \partial x_j$ в уравнении (40.3) зависят только от v и $\partial v/\partial x_h$, то, в силу той же теоремы 33, IV, возможно мажорировать величины $A_{n-1,\lambda}$, $B_{n-2,\lambda}$, $C_{n-2,\lambda}$, $(A_{n-2,\lambda} + 1) \cdot (B_0 + C_0 + 1)$ посредством линейной функции от $\|u_k\|$, а величина A_0 остается ограниченной. Тогда, применяя теорему 35, III, мы приходим к неравенству, аналогичному (42.4), в последней скобке которого, однако, не содержится величина V_2. Этого достаточно, чтобы завершить доказательство, как это сделано выше.

Кроме того, справедлива следующая теорема:

42, VIII. *Если коэффициенты* a_{ij}, b_i, f *уравнения* (40.2) *зависят только от* u *и* x *и если, кроме того, коэффициенты* a_{ij} *обладают непрерывными производными порядка* $n \geqslant 3$, *то вместо предположения* δ') *предыдущей теоремы можно потребовать, чтобы только сами решения уравнения были равностепенно непрерывны и равномерно ограничены. Если коэффициенты* a_{ij} *зависят только от* x, *то достаточно предположить лишь равномерную ограниченность решений* u.

Доказательство аналогично доказательству предыдущих теорем. Надо только учитывать, что в этих новых предположениях опять согласно теореме 33, IV, можно мажорировать величины $A_{n,\lambda}$, $B_{n-1,\lambda}$, $C_{n-2,\lambda}$, $(A_{n-2,\lambda}+1)C_0$ посредством линейной функции от $\|u_k\|$, а величины A_0 и B_0 равномерно ограничены. При помощи формулы (35.9) из (42.4) можно исключить также член с V_1. Это позволяет получить утверждение теоремы при одном только предположении, что последовательность функций u_k равномерно сходится. Далее, в случае, когда функции a_{ij} не зависят от u, оценка $\|u\|$ может быть получена применением формулы (35.9) непосредственно к уравнению (40.2), с учетом того, что в этом случае $A_{0,\lambda}$ и $A_{n,\lambda}$ ограничены, $C_{0,\lambda}$ обращается в нуль, а величины $B_{n-1,\lambda}$ и $F_{n-2,\lambda}$ можно мажорировать некоторой линейной функцией от $\|u\|^{\frac{n-1+\lambda}{n+\lambda}}$. Таким образом, для любого семейства равномерно ограниченных решений уравнения (40.2) мы получаем неравенство вида

$$\|u\| \leqslant K\left[\|u\|^{\frac{n-1+\lambda}{n+\lambda}}+1\right]\cdot[U_0+\Theta_{n,\lambda}[\varphi;\mathfrak{F}T]],$$

которое достаточно для того, чтобы получить оценку $\|u\|$.

В качестве примера заметим, что для уравнения вида

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}+\alpha\sum_{i=1}^{m} b_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=\alpha f(x,u),$$

где α — неотрицательный параметр и $uf(x,u)>0$ при $|u|>M$, выполняется оценка $U_0 \leqslant M+\Phi_0$. В силу теорем 42, III, IV и VIII, из этого вытекает, что такое уравнение имеет по крайней мере одно решение, каковы бы ни были φ и $\alpha>0$. Действительно, достаточно заметить, что при $\alpha=0$ и любой функции φ выполняется условие γ').

В том частном случае, когда коэффициенты b_i не зависят от u и функция f'_u неотрицательна, указанное решение единственно.

В заключение этого пункта мы докажем некоторые дополнения к предыдущим теоремам. Эти дополнения могут оказаться очень полезными при исследовании разрешимости задачи Дирихле с граничными данными, принадлежащими только классу $C^{(2)}$ или $C^{(1)}$. Интересные приложения этих теорем будут указаны в следующем пункте.

42, IX. *Если* $\{u_k\}$ — *последовательность решений уравнения* (40.1), *принадлежащих классу* $C^{(2,\lambda)}$, *равномерно сходящаяся в* T *вместе с последовательностями* $\{\partial u_k/\partial x_i\}$ *и* $\{\partial^2 u_k/\partial x_i \partial x_j\}$, *то предел этой последовательности принадлежит классу* $C^{(2,\lambda)}$ в $T-\mathfrak{F}T$. *Для квазилинейного уравнения вида* (40.2) *утверждение теоремы остается справедливым, если предполагается лишь равномерная сходимость последовательностей* $\{u_k\}$ *и* $\{\partial u_k/\partial x_i\}$. *В этом случае предельная функция также является решением уравнения.*

Очевидно, достаточно доказать, что вторые производные функций u_k удовлетворяют условию Гёльдера с показателем λ и равномерно относительно k ограниченными константами в любой замкнутой области, лежащей внутри T. Для этого достаточно оценить сверху величины $\mathfrak{H}_\mu^{(3)}[u_k]$, определенные в п. 35. В общем случае такую оценку можно получить, повторяя с незначительными изменениями доказательство теоремы 42, VI и применяя затем уже не теорему 35, I, а теорему 35, V. Таким образом, в предположении, что утверждение теоремы неверно, легко можно установить неравенство

$$\mathfrak{H}_0^{(3)}[u_k] \leqslant K\left[\mathfrak{H}_0^{(3)}[u_k]+1\right]\left[V_2+V_1+V_0\right],$$

из абсурдности которого следует теорема. В случае квазилинейного уравнения можно действовать так же, но вместо предыдущего неравенства получается столь же абсурдное неравенство

$$\mathfrak{H}_1^{(3)}[u_k] \leqslant K\left[\mathfrak{H}_1^{(3)}[u_k]+1\right]\left[V_1+V_0\right].$$

43. Задача Дирихле для уравнений с двумя переменными. В случае $m=2$ теоремы предыдущего пункта могут быть значительно усилены, в предположении, что то число n, которое встречается в условиях, относящихся к функции F и области T, не меньше 4 для уравнения общего вида и не меньше 3 для квазилинейного уравнения. Справедливо следующее утверждение:

43, I. *Теоремы* 42, I, II, III *и* V *имеют место также и тогда, когда предположение* β) *заменяется следующим предположением:* ϑ) *все решения уравнения* (40.1), *принадлежащие классу* $C^{(n,\lambda)}$, *вместе со своими производными первого и второго порядка равномерно ограничены относительно* φ *в пределах любого семейства функций, для которого величина* $\Phi_0+\Theta_{(n,\lambda)}[\varphi;\ \mathfrak{F}T]$ *ограничена. Для квазилинейного уравнения* (40.2) *достаточно предположить, что заранее известна равномерная ограниченность решений и их первых производных.*

По существу достаточно показать, что условие ϑ) влечет за собой условие β) или, в случае квазилинейного уравнения, β'). Но такое утверждение уже доказано в работе [2] Бернштейна, правда, только для решений, аналитических в $T-\mathfrak{F}T$ и обладающих производными сколь угодно высокого порядка на $\mathfrak{F}T$. Затем Шаудер [8,11] показал, что, применяя самые новые результаты, полученные для линейных уравнений, удается так видоизменить метод Бернштейна, что с помощью этого метода можно доказать вышеупомянутое утверждение именно в той форме, которая нужна для доказательства теоремы 43, I. Наконец, Каччопполи доказал теорему 43, I новым методом, который значительно проще метода Бернштейна и Шаудера и открывает пути для новых исследований. Действительно, Лере [3] значительно обобщил теорему 43, I, удачным образом комбинируя методы Каччопполи и Бернштейна. Лере выделил обширный класс эллиптических уравнений, более широкий, чем класс квазилинейных уравнений, такой, что теорема существования решения справедлива для уравнений этого класса при одном только предположении, что можно заранее установить ограниченность решений и их первых производных.

В другой работе [4] Лере сделал попытку выделить класс уравнений, для которых действительно можно получить указанную априорную оценку. Однако даже формулировки результатов Лере слишком сложны для того, чтобы их можно было привести здесь. Поэтому мы ограничимся изложением доказательства теоремы 43, I, данного Каччопполи, и укажем некоторые обобщения и приложения этой теоремы, даннные тем же автором, а также некоторые другие результаты Шаудера и Ниренберга[1]).

Для начала рассмотрим случай квазилинейного уравнения.

Исходной точкой является следующее замечание: все сводится к доказательству того, что если u, p_1 и p_2 равномерно ограничены, то они также и равностепенно непрерывны. Основным средством для доказательства этого свойства равностепенной непрерывности является следующее обобщение классической теоремы Лебега[2]):

Пусть $\{f\}$ — *семейство равномерно ограниченных функций двух переменных, обладающих равномерно ограниченными интегралами Дирихле в замкнутой области* T. *Если существуют две функции* $z_1(t, x_1, x_2)$ *и* $z_2(t, x_1, x_2)$, *возрастающие по переменной* t,

---

[1]) Возможность замены условия β) в формулировке теоремы 43, I условием ϑ) в том случае, когда предположение α) заменяется предположением о том, что $F'_u<0$, была доказана также Симоновым [1] посредством совсем других приемов, в основе которых лежит метод верхних и нижних функций Перрона; это позволяет несколько ослабить требования, наложенные на функцию F.

[2]) Доказательство аналогично доказательству теоремы Лебега, причем требование, наложенное на функции z_1 и z_2, заменяет требование монотонности функций $\{f\}$, которое рассматривал Лебег. См. также Лере [3].

такие, что $z_1(f(x_1, x_2), x_1, x_2)$ *и* $z_2(f(x_1, x_2), x_1, x_2)$ *не имеют соответственно максимумов и минимумов, какова бы ни была функция* f *из* $\{f\}$, *то функции семейства* $\{f\}$ *равностепенно непрерывны во всякой замкнутой области, лежащей внутри* T. *Они равностепенно непрерывны также и в* T, *если только они равностепенно непрерывны на* $\mathfrak{F}T$.

Рассмотрим, например, функцию p_1 и напишем уравнение, которому она удовлетворяет. Это уравнение получается из уравнения (40.2) дифференцированием по x_1, причем величину p_{22} исключают, пользуясь самим уравнением (40.2).

Указанное уравнение имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x_i\,\partial x_j}=f_1, \tag{43.1}$$

где f_1 — полином второй степени относительно первых производных функций p_1. Умножим уравнение на e^{kp_1} (где k — постоянная, которая будет определена позже) и произведем интегрирование по лежащему внутри T кругу Γ радиуса ρ. Произведя интегрирование по частям, получим

$$\int_{\mathfrak{F}\Gamma} e^{kp_1}\left[\left(a_{11}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+a_{12}\frac{\partial p_1}{\partial x_2}\right)dx_2-\left(a_{12}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+a_{22}\frac{\partial p_1}{\partial x_2}\right)dx_1\right]-$$

$$-k\iint_{\Gamma} e^{kp_1}\left[\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial p_1}{\partial x_i}\,\frac{\partial p_1}{\partial x_j}+\frac{1}{k}f_2\right]dx_1dx_2=0, \tag{43.2}$$

где f_2 так же, как f_1, — полином второй степени относительно первых производных функции p_1 с ограниченными коэффициентами. Введем теперь в Γ систему полярных координат (ρ, θ) и положим

$$\psi(\rho)=\left[\rho\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2}\right)^2\right]d\theta\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{43.3}$$

Из формулы (43.2), написанной для достаточно большого k, получается оценка вида

$$\sqrt{2\pi\rho}\,\psi(\rho)-\alpha\int_0^{\rho}\psi^2(t)\,dt+\beta>0. \tag{43.4}$$

Справедлива следующая лемма[1]:

---

[1] Эту лемму первый раз применил Каччопполи в заметке [8]. Она лежит также в основе исследований Каччопполи, относящихся к интегральным оценкам решений линейных уравнений, что мы указывали в п. 37. Доказательство можно найти в статьях Лере [3] и Каччопполи [11].

Если при $0 < \rho \leqslant r$ *для функции* $\psi(\rho)$ *выполняется неравенство*

$$\omega(\rho)\psi(\rho) - \alpha\int\limits_0^\rho \psi^2(t)\,dt + \beta(\rho) \geqslant 0,$$

где α — *положительная постоянная, а* $\omega(\rho)$, $\beta(\rho)$ — *неотрицательные функции, причем функция* β *неубывающая, то имеет место оценка*

$$\int\limits_0^\rho \psi^2(t)\,dt \leqslant \frac{\beta(r)}{\alpha} + \frac{\int\limits_0^r \omega^2(t)\,dt}{\alpha^2(r-\rho)^2}.$$

Поэтому при $r = 2\rho$ из формулы (43.4) следует, что

$$\int\limits_0^\rho \psi^2(t)\,dt \leqslant \frac{\beta}{\alpha} + \frac{4\pi}{\alpha^2}.$$

Очевидно, что это неравенство позволяет оценить интеграл Дирихле для функции p_1 в любой замкнутой области, лежащей внутри T.

С другой стороны, положив

$$z_1 = e^{kp_1} + k_1(x_1^2 + x_2^2), \quad z_2 = -e^{-kp_1} - k_1(x_1^2 + x_2^2), \tag{43.5}$$

легко проверить, что для достаточно больших k и k_1

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_i \partial x_j} > 0, \quad \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial^2 z_2}{\partial x_i \partial x_j} < 0; \tag{43.6}$$

поэтому функции z_1 и z_2, а также те функции, которые получаются из них путем добавления линейной функции, лишены соответственно относительных максимумов и минимумов. Так как z_1 и z_2 — возрастающие функции относительно p_1, то все условия вышеупомянутого критерия равностепенной непрерывности выполнены. Следовательно, функции p_1 равностепенно непрерывны во всякой замкнутой области, лежащей внутри T.

Однако, чтобы закончить доказательство теоремы, надо еще показать, что функции p_1 равностепенно непрерывны во всей замкнутой области T; для этого достаточно установить равномерную ограниченность вторых производных p_{ij} на $\mathfrak{F}T$. Действительно, из этого следует, с одной стороны, равностепенная непрерывность функций p_1 на $\mathfrak{F}T$, а с другой стороны, это позволяет оценить интеграл Дирихле функций p_1 всюду в T. Для последней оценки достаточно провести те же рассуждения, что проводились выше, но не предполагая при этом, что круг Γ лежит внутри T; криволинейный интеграл, входящий в формулу (43.2), берется только по той части $\mathfrak{F}\Gamma$, которая содержится в T; оставшаяся часть интеграла, взятого по $\mathfrak{F}(T \cdot \Gamma)$, заранее оценена.

Для получения указанной оценки функций p_{ij} на границе можно применить следующий метод, несколько напоминающий другой метод Бернштейна. Предположим для простоты, что T — круг, отнесенный к системе полярных координат (ρ, θ). Заметим, что если величина $\Theta_3[\varphi; \mathfrak{F}T]$ не превышает Θ, то на $\mathfrak{F}T$ ограничены первые и вторые производные от $p_1' = \frac{\partial u}{\partial \theta}$ по θ, а следовательно, ограничены также первые и вторые производные функций z_1' и z_2' по θ, где функции z_1' и z_2' построены по функции p_1' так же, как функции z_1 и z_2 по p_1. Функции z_1' и z_2' будем рассматривать в кольце $\frac{R}{2} \leqslant \rho \leqslant R$ и постоянную k_1 выберем так, чтобы, кроме условий вида (43.6), выполнялись условия: $\max z_1'$ при $\rho = \frac{R}{2}$ меньше $\min z$ при $\rho = R$ и $\min z_2'$ при $\rho = \frac{R}{2}$ больше $\max z_2'$ при $\rho = R$. Последние условия будут выполняться, если k_1 достаточно велико. Из ограниченности первых и вторых производных z_1' и z_2' по θ на $\mathfrak{F}T$ легко следует, что можно найти такое число $H > 0$, зависящее от Θ что любая плоскость, обладающая наклоном, большим, чем H [меньшим, чем $-H$], проходящая через касательную к кривой $\rho = R$ $z = z_2'(\rho, \theta)$ $[z = z_1'(\rho, \theta)]$, пересекает цилиндрическую поверхность $\rho = R$ ниже [выше] указанной кривой, а следовательно, в силу выбора k_1 ниже [выше] кривой $\rho = \frac{R}{2}$, $z = z_2'(\rho, \theta)$ $[z = z_1'(\rho, \theta)]$ В силу условий вида (43.6) для функций z_1' и z_2' из этого следует что вся поверхность $z = z_2'(\rho, \theta)$ $[z = z_1'[\rho, \theta)]$ находится при $\frac{R}{2} \leqslant \rho \leqslant R$ выше [ниже] указанной плоскости, т. е. что на $\mathfrak{F}T$

$$\frac{\partial z_2'}{\partial \rho} < H, \quad \frac{\partial z_1'}{\partial \rho} > -H.$$

Из полученных неравенств имеем оценку для $\frac{\partial p_1'}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho\, \partial \theta}$. Отсюда учитывая, что производная $\frac{\partial p_1'}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ на $\mathfrak{F}T$ ограничена по предположению и что $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}$ можно оценить на $\mathfrak{F}T$, выразив эту производную из уравнения, которому удовлетворяет u, получим требуемую оценку p_{11}, p_{12}, p_{22} на $\mathfrak{F}T$. Таким образом, теорема полностью доказана для квазилинейных уравнений. В общем случае такой ж метод можно применить для доказательства равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности вторых производных p_{ij} Конечно, надо будет рассматривать уравнения, которым удовлетворяют эти производные, для того чтобы оценить их интеграл Дирихле, а также оценить третьи производные на границе, но уж не через $\Theta_3[\varphi; \mathfrak{F}T]$, а через $\Theta_4[\varphi; \mathfrak{F}T]$.

Сейчас мы перейдем к вопросу о том, как могут быть ослаблены предположения относительно граничных данных. Справедлива следующая теорема:

43, II. *Пусть задача Дирихле для уравнения* (40.1) [(40.2)] *имеет решение, принадлежащее классу* $C^{(4,\lambda)}$ $[C^{(3,\lambda)}]$, *какова бы ни была функция* φ *класса* $C^{(4,\lambda)}$ $[C^{(3,\lambda)}]$. *Если решения уравнений и их вторые* [*первые*] *производные можно оценить через*

$$\Phi_0+\Theta_4[\varphi;\ \mathfrak{F}T] \quad [\Phi_0+\Theta_3[\varphi;\ \mathfrak{F}T]],$$

то задача разрешима также и тогда, когда граничные данные принадлежат классу $C^{(4)}$ $[C^{(3)}]$, *причем решения принадлежат классу* $C^{(3,\lambda)}$ $[C^{(2,\lambda)}]$.

Рассмотрим, например, случай квазилинейного уравнения (40.2). Пусть φ — произвольная функция, принадлежащая классу $C^{(3)}$ на $\mathfrak{F}T$, а $\{\varphi_k\}$ — последовательность функций класса $C^{(3,\lambda)}$, равномерно сходящихся к φ, причем последовательность φ_k''' равномерно сходится к φ'''. По предположению, задача Дирихле с граничными данными φ_k имеет решение u_k, принадлежащее классу $C^{(3,\lambda)}$, и решения u_k равномерно ограничены вместе со своими первыми производными. Кроме того, как это видно из доказательства теоремы 43, I, в случае, когда величины $\Theta_3[\varphi_k;\ \mathfrak{F}T]$ ограничены, известны также модули непрерывности для производных функций u_k. С другой стороны, из равностепенной непрерывности первых производных функций u_k следует (согласно теореме 42, VII), что вторые производные этих функций имеют равномерно ограниченные коэффициенты Гёльдера. А из этого следует теорема, так как решение нашей задачи, соответствующее краевым значениям φ и принадлежащее классу $C^{(2,\lambda)}$, получится как предел подпоследовательности, выделенной из последовательности функций $\{u_k\}$.

Более того, справедливы следующие утверждения:

43, III. *Пусть задача Дирихле для уравнения* (40.1) *имеет решение, принадлежащее классу* $C^{(4,\lambda)}$, *какова бы ни была функция* φ *класса* $C^{(4,\lambda)}$. *Если можно оценить через верхнюю грань величины* $\Phi_0+\Theta_2[\varphi;\ \mathfrak{F}T]$ *решения и их первые производные в* T, *а также их вторые производные в любой замкнутой области, лежащей внутри* T, *то задача разрешима также для граничных данных класса* $C^{(2)}$, *причем решения принадлежат классу* $C^{(2,\lambda)}$ *в* $T-\mathfrak{F}T$.

43, IV. *Пусть задача Дирихле для квазилинейного уравнения* (40.2) *имеет решение, принадлежащее классу* $C^{(3,\lambda)}$, *какова бы ни была функция* φ *класса* $C^{(3,\lambda)}$. *Если в случае ограниченности величин* $\Phi_0+\Theta_1[\varphi;\ \mathfrak{F}T]$ *решения уравнения равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в* T, *а их первые производные равномерно ограничены во всякой замкнутой области,* *лежащей внутри T, то задача разрешима также для граничных данных класса $C^{(1)}$, причем решения принадлежат классу $C^{(2,\lambda)}$ в $T - \mathfrak{F}T$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 43, II, но в этом случае метод, который применялся для доказательства теоремы 43, I, позволяет установить равностепенную непрерывность вторых производных от функций u_k (в случае квазилинейного уравнения — первых производных) только в любой замкнутой области, лежащей внутри T. Но, согласно теореме 42, IX, этого достаточно для того, чтобы оценить коэффициенты Гёльдера для вторых производных от u_k во всякой замкнутой области, лежащей внутри T. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Полученные до сих пор результаты имеют важное применение к квазилинейному уравнению

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \alpha f, \tag{43.7}$$

где α — действительный параметр, а функции a_{ij} и f не зависят от u, ограничены вместе со своими первыми производными при $(x_1, x_2) \in T$ и при любых p_1 и p_2 и таковы, что нижняя грань величины $A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ положительна. Кроме того, предполагается, что T принадлежит классу $A^{(3,\lambda)}$, а функции a_{ij} и f обладают непрерывными производными третьего порядка.

При $\alpha = 0$ и $\varphi = 0$ задача Дирихле для уравнения (43.7) имеет единственное решение $u = 0$. Кроме того, так как функции a_{ij} и f не зависят от u, уравнение в вариациях, построенное для любого решения уравнения (43.7), не имеет члена с δu, так что для этого уравнения задача Дирихле разрешима неограниченно. Поэтому, в силу теорем 42, I и III и 43, I, задача Дирихле для уравнения (43.7) при всех $\varphi \in C^{(3,\lambda)}$ имеет одно и только одно решение, принадлежащее классу $C^{(3,\lambda)}$, если только все решения уравнения и их первые производные можно оценить через верхнюю грань величины $|\alpha| + \Phi_0 + \Theta_{3,\lambda}[\varphi; \mathfrak{F}T]$. По поводу этой оценки заметим, что верхнюю грань функции u, согласно теореме 35, VI, можно оценить даже через $|\alpha| + \Phi_0$. Далее, предположим, что замкнутая область T односвязна, и преобразуем ее в круг Γ на плоскости y_1, y_2. При этом мы воспользуемся заменой переменных, переводящей уравнение (43.7) в уравнение аналогичного вида, правая часть которого является линейной функцией от $\partial u/\partial y_1$ и $\partial u/\partial y_2$ с ограниченными коэффициентами. Рассмотрим функции

$$u_1 = e^{ku} + k_1(y_1^2 + y_2^2), \quad u_2 = -e^{-ku} - k_1(y_1^2 + y_2^2) \tag{43.8}$$

и повторим рассуждения, которые применялись при доказательстве теоремы 43, I для получения оценки функций p_{ij} на $\mathfrak{F}T$. Таким путем удается оценить функции $\partial u/\partial y_1$ и $\partial u/\partial y_2$ на $\mathfrak{F}\Gamma$, а следовательно, и функции p_1 и p_2 на $\mathfrak{F}T$ через величину $|\alpha|+\Phi_0+\Theta_2[\varphi;\ \mathfrak{F}T]$. Наконец, введем функции z_1 и z_2, определенные формулами (43.5), и аналогичные функции z'_1 и z'_2, где p_1 заменено на p_2. Легко видеть, что функции z_1 и z'_1 [z_2 и z'_2] принимают свое наибольшее [наименьшее] значение только в точках $\mathfrak{F}T$. В таком случае для z_1 и z'_1 [z_2 и z'_2] можно получить оценку сверху [снизу] через величину $|\alpha|+\Phi_0+\Theta_2[\varphi;\ \mathfrak{F}T]$, откуда следует, что функции p_1 и p_2 можно оценить во всей замкнутой области T через эту же величину. А этого достаточно для того, чтобы доказать разрешимость задачи Дирихле для граничных данных класса $C^{(3,\lambda)}$. Кроме того, так как функции p_1 и p_2 оцениваются через $\Theta_2[\varphi;\ \mathfrak{F}T]$, а не через $\Theta_{3,\lambda}[\varphi;\ \mathfrak{F}T]$, то, согласно теореме 43, II, решение задачи Дирихле, принадлежащее классу $C^{(2,\lambda)}$, существует также и тогда, когда φ принадлежит только классу $C^{(3)}$.

Теперь мы хотим показать, что решение задачи, принадлежащее классу $C^{(2,\lambda)}$ в $T-\mathfrak{F}T$, существует даже для φ, принадлежащих классу $C^{(1)}$. Мы придем к этому результату, если покажем, что выполняются предположения теоремы 43, IV. Сначала докажем, что в замкнутой области D, содержащейся в T и находящейся от $\mathfrak{F}T$ на положительном расстоянии δ, можно оценить $\sqrt{p_1^2+p_2^2}$ через верхнюю грань величины $|\alpha|+\Phi_0+\Theta_1[\varphi;\ \mathfrak{F}T]$.

Пусть $\bar{x}\equiv(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2)$ — точка D, в которой $\sqrt{p_1^2+p_2^2}$ принимает свое наибольшее значение. Преобразуем T в круг Γ радиуса 2 с центром в начале координат, лежащий в плоскости $y_1\ y_2$, так, чтобы точка $\bar{x}$ перешла в точку $\bar{y}\equiv(1,\ 0)$. Кроме того, выберем преобразование координат таким образом, чтобы направление градиента u в точке $\bar{x}$ и перпендикулярное ему направление перешли в направления осей y_1 и y_2. Функция $u(x_1,x_2)$ перейдет в функцию $u(y_1,\ y_2)$; очевидно, что для получения оценки $\sqrt{p_1^2+p_2^2}$ достаточно оценить $|u_{y_1}(1,\ 0)|$.

Для этого мы снова рассмотрим функции u_1 и u_2, определенные формулами (43.8), и выберем k и k_1 настолько большими, чтобы было

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_i\,\partial y_j}>0,\qquad \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial^2 u_2}{\partial y_i\,\partial y_j}<0. \tag{43.9}$$

Займемся первой из этих функций; обозначим через S поверхность, заданную уравнением $z=u_1(y_1,\ y_2)$, через S_1 — ту часть S, которая проектируется в круг радиуса 1, концентрический Γ, через C — границу S и через P — ту точку S, которая проектируется в $\bar{y}$. Пусть M — такая постоянная, что всякая плоскость, проходящая через точку S_1 и обладающая наклоном, по модулю превосходящим M, пересекает C только в двух точках. Постоянная M

может быть определена, если известна верхняя грань величин $\Phi_0+\Theta_1[\varphi;\ \mathfrak{F}T]$; можно, кроме того, предполагать, что $M>2U$ где U — максимум $|u_1|$ в Γ.

Можно утверждать, что

$$\frac{\partial u_1(1,0)}{\partial y_1}\geqslant -M. \qquad (43.10$$

Действительно, если бы выполнялось обратное неравенство, т возможны были бы два случая. Могло бы быть

$$\frac{\partial^2 u_1(1,0)}{\partial y_1^2}<0,$$

и тогда, в силу первой из формул (43.9), точка P была бы гиперболической точкой поверхности S. Так как плоскость π, касающаяс поверхности S в точке P, пересекается с C только в двух точках то пересечение π и S содержит замкнутую кривую, ограничивающую часть поверхности S, которая целиком лежит выше плоскости π А это невозможно, так как, в силу первой из формул (43.9), всяка функция, полученная из u_1 добавлением линейной функции, не имее максимумов. Невозможно также и неравенство

$$\frac{\partial^2 u_1(1,0)}{\partial y_1^2}\geqslant 0.$$

Действительно, обозначим через $(a, 1)$ наибольший интервал оси y_1 с правым концом в точке 1, на котором выполнено неравенств $\partial^2 u_1/\partial y_1^2\geqslant 0$; на этом интервале

$$\frac{\partial u_1(y_1,0)}{\partial y_1}<-M,\quad u_1(1,0)-u_1(a,0)<-M(1-a),$$

откуда $1-a<2U/M<1$. Поэтому в некоторой точке оси y_1 лежащей левее a, снова должны были бы выполняться неравенств $\partial u/\partial y_1<-M$, $\partial^2 u/\partial y_1^2<0$; этот случай можно исключить так, ка это сделано выше. Таким образом, неравенство (43.10) доказано Аналогично можно установить, что

$$\frac{\partial u_2(1,0)}{\partial y_1}<M. \qquad (43.11$$

Формулы (43.10) и (43.11) дают требуемую оценку для $|u_{y_1}(1,0)|$ а следовательно, и для $\sqrt{p_1^2+p_2^2}$.

Осталось только доказать равностепенную непрерывность функций u в T. Так как функции u равностепенно непрерывны на $\mathfrak{F}T$ в силу ограниченности величины $\Theta_1[\varphi;\ \mathfrak{F}T]$, и имеют первые производные, равномерно ограниченные в каждой замкнутой области лежащей внутри T, то достаточно показать, что, каковы бы ни был точка $\bar{x}\in\mathfrak{F}T$ и число $\varepsilon>0$, можно найти такое число $\delta(\varepsilon)$, чтоб в части области T, заключенной в круге радиуса $\delta(\varepsilon)$ с центром в точке $\bar{x}$, колебание функции u было меньше ε. Для простоты преобразуем T в круг Γ на плоскости $y_1 y_2$ с центром в точке $(1, 0)$ и с радиусом 1 таким образом, чтобы точка $\bar{x}$ перешла в начало координат O. Предположим, что наше утверждение несправедливо; тогда должно существовать число σ такое, что для любого $\delta > 0$ можно найти функцию u, для которой по крайней мере в одной точке y_δ из Γ с абсциссой $y_1 < \delta$ выполняется неравенство $u(y_1, y_2) - u(0, 0) > \sigma$ или $u(y_1, y_2) - u(0, 0) < -\sigma$. Чтобы исключить первое неравенство, предположим, что оно выполняется. Рассмотрим снова функцию u_1, заданную формулой (43.8), выберем обычным способом постоянные k и k_1, возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем ρ такое, чтобы в точках $\mathfrak{F}\Gamma$ с абсциссами, меньшими ρ, для всех u_1 выполнялось неравенство $u_1(y_1, y_2) - u_1(0, 0) < \varepsilon$. Это можно сделать в силу равностепенной непрерывности функций u на $\mathfrak{F}\Gamma$. Обозначим через U_1 (положительный) максимум функции $u_1 - u_1(0, 0)$ и положим

$$v = u_1(y_1, y_2) - (U_1 + \varepsilon)\frac{y_1}{\rho} - u_1(0, 0);$$

мы предполагаем, что $\varepsilon < U_1$. Какова бы ни была функция u, на $\mathfrak{F}\Gamma$ должно быть $v < \varepsilon$; но это приводит к противоречию, так как для некоторой функции v в точке y_δ выполняется неравенство

$$v > (e^{k\sigma} - 1)\, e^{ku(\bar{x})} - (U_1 + \varepsilon)\frac{\delta}{\rho}.$$

Правая часть неравенства несомненно больше ε, если только выбранное ε меньше $(e^{k\sigma} - 1)\, e^{ku(\bar{x})}$ и если число δ достаточно мало. Противоречие заключается в том, что в этом случае функция v должна иметь максимум внутри Γ, что исключено в силу (43.9). Вводя в рассмотрение функцию u_2, аналогичным образом можно доказать, что второе неравенство также невозможно. Таким образом, наше утверждение полностью доказано. Подводя итоги, сформулируем следующую теорему:

43, V. *Пусть функции* a_{ij} *и* f *не зависят от* u *и непрерывны вместе со своими третьими производными, а величина* $A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ *имеет положительную нижнюю грань. Если замкнутая область* T *односвязна и принадлежит классу* $A^{(4, \lambda)}$, *то задача Дирихле для уравнения* (43.7) *имеет одно и только одно решение, принадлежащее классу* $C^{(2, \lambda)}$ *в* $T - \mathfrak{F}T$, *каковы бы ни были* α *и* $\varphi \in C^{(1)}$. *Это решение принадлежит классу* $C^{(2, \lambda)}$ *в* T, *если* $\varphi \in C^{(3)}$, *и классу* $C^{(3, \lambda)}$ *в* T, *если* $\varphi \in C^{(3, \lambda)}$.

В связи с этой теоремой надо еще заметить, что в случае, когда $\varphi \in C^{(3, \lambda)}$, единственность решения следует из теорем 42, I и III, но теорема единственности справедлива во всяком случае, так как разность v двух решений удовлетворяет уравнению вида (40.3), в котором нет члена с v; поэтому функция v равна нулю в T, если она равна нулю на $\mathfrak{F}T$.

Можно задать вопрос, сохраняется ли доказанная теорема также и в том случае, когда функции a_{ij} и f зависят от u. По этому поводу можно заметить, что мы два раза пользовались независимостью функций a_{ij} и f от u: во-первых, при доказательстве неограниченной разрешимости задачи Дирихле для уравнения в вариациях; во-вторых, при получении оценки для p_1 и p_2 во всей замкнутой области T, когда φ принадлежит классу $C^{(3)}$. Что касается первого пункта, то от указанного предположения легко можно было бы отказаться, если бы мы стремились доказать лишь существование, а не единственность решения задачи. Действительно, так как при $\alpha = 0$ и $\varphi = 0$ задача Дирихле для уравнения в вариациях, построенного для решения $u = 0$, является неограниченно разрешимой, доказательство можно было бы провести, опираясь на теорему 42, II, а не на теорему 42, I. Что же касается второго пункта, то представляется возможным, что тот метод, который применялся для оценки p_1 и p_2 в $T - \mathfrak{F}T$ в предположении, что φ принадлежит классу $C^{(1)}$, может быть приспособлен для оценки функций p_1 и p_2 во всей замкнутой области T в предположении, что φ принадлежит классу $C^{(2,\lambda)}$, также и в том случае, когда функции a_{ij} и f зависят от u. Однако такое видоизменение метода нетривиально и заслуживает глубокого изучения. Укажем еще, что рассматриваемому вопросу посвящена также краткая заметка Шаудера [14], в которой доказывается, что задача Дирихле для уравнения (43.7) имеет *обобщенное* решение такого же типа, как обобщенные решения линейных уравнений, введенные в п. 38. Задача решается в самых общих предположениях; функции a_{ij} и f могут зависеть также от u и предполагаются только непрерывными и ограниченными. Метод доказательства аналогичен тому методу, который Лере и Шаудер применяли для доказательства теоремы 42, IV; только здесь преобразование $\sigma' = \mathfrak{S}(\sigma)$ рассматривается в пространстве Σ, элементами которого являются функции, непрерывные в T, абсолютно непрерывные относительно каждой из переменных x_1 и x_2 в отдельности для почти всех значений x_2 и x_1 соответственно и обладающие первыми производными с интегрируемыми квадратами, причем норма $\sigma = u$ определяется равенством

$$\|\sigma\| = U_0 + U^{(1)}.$$

Предположим, что замкнутая область T односвязна и принадлежит классу $A^{(2)}$; тогда мы не нарушим общности, считая T кругом. Пусть известна верхняя грань величины $\Theta_2[\varphi; \mathfrak{F}T]$; теорема 37, V позволяет тогда оценить независимо от $\|\sigma\|$ интегралы от квадратов вторых производных функции $u' = \sigma'$. Из этого легко следует, что преобразование $\mathfrak{S}$ вполне непрерывно и переводит в себя всякую сферу достаточно большого радиуса в пространстве Σ. Тогда можно применить теорему Брауэра, которую Шаудер [4] обобщил на функциональные пространства; согласно этой теореме, существует по крайней мере одна неподвижная точка преобразования, т. е. решение уравнения $\sigma = \mathfrak{S}(\sigma)$. Таким образом, получается следующая теорема:

43, VI. *Пусть функции* a_{ij} *и* f *непрерывны и ограничены, а величина* $A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ *имеет положительную нижнюю грань. Если замкнутая область* T *односвязна и принадлежит классу* $A^{(2)}$, *то задача Дирихле для уравнения* (43.7) *имеет для всех* $\varphi \in C^{(2)}$ *по крайней мере одно решение, принадлежащее классу* $C^{(0,\, ^1\!/_2)}$, *причем это решение, так же как его первые производные, абсолютно непрерывно по каждой из переменных* x_1 *и* x_2 *в отдельности почти при всех значениях* x_2 *и* x_1. *Это решение обладает первыми и вторыми производными с интегрируемым квадратом и удовлетворяет уравнению почти всюду в* T.

Добавим еще, что, согласно Шаудеру, задача разрешима также и тогда, когда функция φ предполагается просто непрерывной; однако это утверждение не доказано.

В заключение этого пункта мы еще рассмотрим вопрос о том, что можно сказать относительно уравнения (43.7), если отказаться от предположения, что функции a_{ij} ограничены вместе со своими первыми производными. Это предположение существенно использовалось при получении априорных оценок для функции u, p_1 и p_2 в T через $\Phi_0 + \Theta_2[\varphi;\ \mathfrak{F}T]$, и от него нельзя отказаться, не налагая дополнительных ограничений на уравнение и область T. Интересным случаем является случай уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0; \qquad (43.12)$$

оно рассматривается в замкнутой области T класса $A^{(3,\lambda)}$, граница которой в каждой точке имеет положительную кривизну. В этих предположениях, действительно, можно оценить максимум $|u|$ через Φ_0, а максимум $\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ — через максимум наклона соприкасающейся плоскости для кривой $u = \varphi(x)$, $x \in \mathfrak{F}T$, т. е., в аналитическом выражении, через $\Theta_2[\varphi;\ \mathfrak{F}T]$. Это возможно в силу того, что интегральные поверхности уравнения (43.12), вообще говоря, состоят из гиперболических точек; поэтому плоскость, касающаяся в некоторой точке такой поверхности, пересекает край поверхности по крайней мере в четырех точках[1]). Как только получена такая оценка, которая справедлива также и тогда, когда функции a_{ij} зависят от u, исследование задачи Дирихле для уравнения (43.12) проводится аналогично тому, как доказывалась теорема 43, V. Таким образом можно прийти к результату, который, если не считать уточнений качественного типа, внесенных Лере и Шаудером [1] и Каччопполи [8], принадлежит Бернштейну:

43, VII. *Пусть функции* a_{ij} *имеют непрерывные третьи производные, а замкнутая область* T *принадлежит классу* $A^{(3,\lambda)}$ *и обладает границей с положительной кривизной. Задача Дирихле для уравнения* (43.12) *имеет при любых* φ *из класса* $C^{(2)}$ *по крайней мере одно решение, принадлежащее классу* $C^{(2,\lambda)}$ *в* $T - \mathfrak{F}T$. *Это решение единственно, если функции* a_{ij} *не зависят от* u; *оно принадлежит классу* $C^{(2,\lambda)}$ *в* T, *если* $\varphi \in C^{(3)}$, *и классу* $C^{(3,\lambda)}$ *в* T, *если* $\varphi \in C^{(3,\lambda)}$.

В последнее время эта теорема была значительно улучшена Ниренбергом [1], который доказал следующее:

43, VIII. *Теорема* 43, VII *справедлива и тогда, когда функции* a_{ij} *удовлетворяют в каждой ограниченной области* D *пространства* $x_1x_2up_1p_2$ *условию Гёльдера с произвольным показателем* α, *который может меняться при изменении* D. *В этом случае решение принадлежит в* $T - \mathfrak{F}T$ *классу* $C^{(2,\lambda)}$ *только при достаточно малых* λ.

Для доказательства этой теоремы Ниренберг пользуется методом, который в его изложении похож на метод, примененный Шаудером при доказательстве теоремы 43, VI. Как и в случае, рассмотренном Шаудером, утверждение теоремы получается путем применения одной только теоремы о неподвижной точке. Естественно, что в случае теоремы 43, VIII в тех функциональных пространствах, которые приходится рассматривать, вводится другая метрика и необходимые априорные оценки основаны на существенном применении теоремы 39, III. Результат, промежуточный между двумя последними теоремами, раньше Ниренберга получил Морри [1].

Заметим, что в число уравнений вида (43.12) входит, в частности, уравнение минимальных поверхностей; однако непосредственное изучение этого уравнения позволяет ослабить предположения относительно T и φ. По поводу рассматриваемых здесь вопросов

---

[1]) Это замечание содержится уже в статье [2] С. Н. Бернштейна. Затем оно углублялось и обобщалось многими авторами в связи с исследованиями в области вариационного исчисления. По этому поводу см. статьи Радо (Rado T., Geometrische Betrachtungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme, Acta Szeged (1924—1926), 228—253); Неймана (J. von Neumann, Über einen Hilfssatz der Variationsrechnung, Abh. Math. Sem. Hamburg, 8 (1931), 28—31); Шаудера [11].

для уравнений эллиптического типа можно обратиться к работам Бернштейна [2, 3, 4, 5], Мюнтца [1], Цвирнера [1]. Исследование эллиптических уравнений методами вариационного исчисления можно найти в монографии [2] Радо и в недавно опубликованной книге Куранта [5].

44. Эллиптические уравнения в аналитической области. Во введении к этой главе мы уже указывали на то важное значение, которое имели в развитии современной теории эллиптических уравнений исследования, имеющие целью прямое доказательство аналитичности решений аналитических эллиптических уравнений. Теперь мы вкратце изложим результаты этих исследований.

Начал изучать этот вопрос Пикар[1]. Его исследования касаются линейных уравнений, для которых он доказал следующую фундаментальную теорему:

44, I. *Всякое решение линейного эллиптического уравнения с аналитическими коэффициентами, принадлежащее классу* $C^{(2)}$, *аналитично.*

Эти исследования Пикара, которые в основном проведены до сообщения Гильберта на Парижском конгрессе, опираются на следующий метод. Пусть u — решение уравнения, принадлежащее классу $C^{(2)}$, а T — замкнутая. область, лежащая внутри области определения функции u. Рассмотрим задачу Дирихле, состоящую в отыскании такого решения v рассматриваемого уравнения, которое совпадает с u на $\mathfrak{F}T$. Если замкнутая область T достаточно мала, то функция v может быть построена методом последовательных приближений; этот метод позволяет установить аналитичность функции. Далее, теорема единственности позволяет утверждать, что $u = v$ и, следовательно, функция u — аналитическая.

К такому же результату спустя несколько лет пришел Э. Э. Леви [1], пользуясь совсем другим методом, который в основном состоит в следующем: сначала устанавливают аналитичность фундаментальных решений, а затем доказывают аналитичность всех решений, пользуясь формулой Стокса. Эта формула в несколько видоизмененном виде дает также аналитическое продолжение функции u в комплексную область.

Исследования как Пикара, так и Леви касаются случая $m = 2$; однако, по-видимому, по крайней мере метод Леви можно применять и при $m > 2$. Во всяком случае, теорема верна и для произвольного m; она является частным случаем теорем, относящихся к нелинейным уравнениям. Для нелинейных уравнений вопрос оказывается гораздо более трудным, и все существующие его изложения чрезвычайно сложны, одни в большей, другие в меньшей степени.

---

[1] Библиографию см. в работе Лихтенштейна [4].

Первые исследования по этому вопросу принадлежат Бернштейну [1], который в 1904 г. впервые доказал, что *любое решение аналитического уравнения с двумя переменными, принадлежащее классу* $C^{(3)}$, *аналитично*. К этому результату Бернштейн много раз возвращался [3, 6, 8], уточняя и упрощая его доказательство. Результат установлен с помощью метода, который, по крайней мере в своей исходной точке, в известном смысле опирается на тот метод, который Пикар применял для линейных уравнений. В работе 1926 г. Радо [1] было окончательно приведено в систему доказательство Бернштейна.

Другие доказательства теоремы Бернштейна были даны в 1918 г. Жевре [1] и в 1929 г. Г. Леви [1, 2]. Доказательство Жевре, которое сам автор упростил [2] в 1926 г., основано на мажорировании разложения решения в ряд Тейлора; метод Леви основан на продолжении решения в комплексную область; это продолжение получается путем исследования задачи Коши для некоторой системы уравнений с частными производными первого порядка¹).

Метод Г. Леви, однако, требует, чтобы рассматривались решения, принадлежащие классу $C^{(4)}$. По этому поводу заметим, что если только доказана аналитичность решений, принадлежащих классу $C^{(k)}$, где $k \geqslant 3$, то теорема 40, II позволяет сделать вывод, что аналитичны также решения, принадлежащие классу $C^{(2,\lambda)}$.

Как из теоремы Бернштейна и Жевре, так и из более слабой теоремы Г. Леви следует, по крайней мере в случае $m = 2$, такое утверждение:

44, II. *Если F — аналитическая функция своих аргументов, то любое эллиптическое решение уравнения* (40.1), *принадлежащее классу* $C^{(2,\lambda)}$, *аналитично.*

Аналогичное следствие можно получить из теоремы 40, III.

44, III. *Если коэффициенты квазилинейного уравнения* (40.2) *аналитичны, то любое эллиптическое решение уравнения, принадлежащее классу* $C^{(2)}$, *аналитично.*

Надо, однако, заметить, что теоремы 40, II и 40, III, на которые опираются эти последние расширения результатов Бернштейна, Жевре и Г. Леви, были доказаны Э. Хопфом только в 1930 г., т. е. позднее исследований вышеупомянутых авторов²). Работа [3] Э. Хопфа, в которой содержится этот результат, содержит также доказательство теорем 44, II и III для случая произвольного m. Метод, которым пользуется Хопф, в какой-то мере связан с мето-

---

¹) Прекрасное изложение результата Леви имеется также в приложении к работе Адамара [2], приведенной в библиографии.

²) На самом деле намек на возможность ослабления предположений теорем в том направлении, как это сделано в теоремах 44, II и III, содержится уже в заметке Жевре [5] (относительно первой из этих теорем) и в работе Жиро [1] (относительно второй теоремы).

дом, примененным Э. Э. Леви к изучению линейных уравнений. Он опирается на замечание, состоящее в том, что любое эллиптическое решение u уравнения (40.1) вместе с некоторыми его производными, взятыми в качестве дополнительных неизвестных функций, удовлетворяет системе нелинейных уравнений, решения которых можно продолжить в комплексную область с помощью метода последовательных приближений. Далее можно доказать, применяя теорему Морера, что эти решения — голоморфные функции тех комплексных переменных, от которых они зависят. Отсюда следует аналитичность функции u в действительной области.

Другое доказательство теорем 44, II и III было дано Жиро [5] одновременно с Хопфом; Жиро применял метод, аналогичный методу Пикара; за несколько лет до этого Жиро [1] получил для случая произвольного m теорему аналитичности, которая является такой же широкой, как теорема, установленная Бернштейном и Жевре для частного случая $m=2$.

Естественно теперь задать вопрос, возможно ли и в общем случае доказать аналитичность решений, принадлежащих классу $C^{(2)}$, аналогично тому, как это доказано для квазилинейных уравнений. Положительный ответ на этот вопрос дал Каччопполи [8] для случая $m=2$. Справедлива теорема

44, IV. *Если* $m=2$ *и* F — *аналитическая функция всех своих аргументов, то любое эллиптическое решение уравнения* (40.1), *принадлежащее классу* $C^{(2)}$, *аналитично.*

Действительно, это сразу следует из теоремы 40, IV, согласно которой при $m=2$ любое эллиптическое решение уравнения (40.1), принадлежащее классу $C^{(2)}$, принадлежит также классу $C^{(2,\lambda)}$. Мы можем теперь доказать теорему 40, IV, опираясь на результаты п. 43. Такое доказательство в одном пункте слегка отличается от доказательства Каччопполи, так как некоторые оценки можно получить только внутри T, а не всюду в T.

Итак, пусть $u(x)$ — эллиптическое решение уравнения (40.1), принадлежащее классу $C^{(2)}$ в $T-\mathfrak{F}T$. Зафиксируем в $T-\mathfrak{F}T$ произвольную точку $\bar{x}\equiv(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ и обозначим через P точку пространства $(x_1, x_2, u, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}, p_{22})$, координаты которой определяются точкой $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ и значениями функции u и ее производных в этой точке. Мы можем, очевидно, построить функцию F_1, совпадающую с F в окрестности точки P, обращающуюся в $p_{11}+p_{22}$ при достаточно больших значениях величины $|u|+|p_1|+|p_2|+$ $+|p_{11}|+|p_{12}|+|p_{22}|$, обладающую непрерывными четвертыми производными и такую, что уравнение $F_1=0$ — эллиптическое. Рассмотрим более общее уравнение

$$\alpha F_1+(1-\alpha)(p_{11}+p_{22})=0. \tag{44.1}$$

Так как производные функции F_1 ограничены, то, в силу теоремы 35, VII, можно найти такое число ρ_0, что задача Дирихле для уравнения в вариациях, соответствующего уравнению (44.1), и для произвольного круга Γ радиуса $\rho < \rho_0$ неограниченно разрешима. Так как при $\alpha = 0$ и $\varphi = 0$ задача Дирихле для уравнения (44.1) имеет единственное решение $u = 0$, то, по теореме 43, I, эта задача разрешима и для $\alpha = 1$ и произвольной функции φ класса $C^{(4,\lambda)}$, если только можно во всем круге Γ получить априорные оценки решений u уравнения (44.1) и их первых и вторых производных через величины $|\alpha| + \Phi_0 + \Theta_4[\varphi;\ \mathfrak{F}\Gamma]$. Но такие оценки действительно возможны. В самом деле, u, p_1 и p_2 ограничены, так как величина $p_{11} + p_{22}$ ограничена; оценка производных p_{ij} на $\mathfrak{F}\Gamma$, как и при доказательстве теоремы 43, I, получается путем рассмотрения уравнений, которым удовлетворяют p_1 и p_2, и функций z_1 и z_2; наконец, оценку функций p_{ij} в $\Gamma - \mathfrak{F}\Gamma$ можно получить, рассматривая уравнения, которым удовлетворяют p_{ij}. В силу этих уравнений, функции

$$z_1^{(i,j)} = e^{kp_{ij}} + k_1(x_1^2 + x_2^2), \qquad z_2^{(i,j)} = -e^{-kp_{ij}} - k_1(x_1^2 + x_2^2)$$

при достаточно больших k и k_1 не имеют относительных максимумов и минимумов соответственно. Таким образом удается доказать, что задача Дирихле для уравнения (44.1) разрешима при любой функции $\varphi \in C^{(4,\lambda)}$. Но с другой стороны, применяя рассуждения, аналогичные тем, которые употреблялись при доказательстве теоремы 43, V, к уравнениям, которым удовлетворяют p_1 и p_2, легко доказать, что в любой замкнутой области, лежащей внутри Γ, функции p_{ij} можно оценить через $|\alpha| + \Phi_0 + \Theta_2[\varphi;\ \mathfrak{F}\Gamma]$. Тогда из теоремы 43, III следует, что задача Дирихле для уравнения (44.1) разрешима также и при $\varphi \in C^{(2)}$, причем решения принадлежат классу $C^{(2,\lambda)}$ в $\Gamma - \mathfrak{F}\Gamma$. Такое решение единственно; действительно, разность двух решений v удовлетворяет уравнению вида (40.3); это уравнение имеет ограниченные коэффициенты, и, согласно теореме 35, VII, можно выбрать ρ_0 столь малым, чтобы функция v обращалась в нуль в Γ, если она обращается в нуль на $\mathfrak{F}\Gamma$.

Возьмем теперь круг Γ с центром в точке $\bar{x}$ и рассмотрим решение u уравнения $F_1 = 0$, равное $\bar{u}$ на $\mathfrak{F}\Gamma$. Это решение принадлежит классу $C^{(2,\lambda)}$ в $\Gamma - \mathfrak{F}\Gamma$. Так как при достаточно малых ρ функция $\bar{u}$ также удовлетворяет в Γ уравнению $F_1 = 0$, то мы имеем $\bar{u} = u$, и следовательно, $\bar{u}$ также принадлежит классу $C^{(2,\lambda)}$ в $\Gamma - \mathfrak{F}\Gamma$. Таким образом, теоремы 40, IV и 44, IV полностью доказаны. Отметим, что доказательство теоремы 44, IV может также опираться на теорему 40, V, как это заметил Ниренберг [1], и что обобщение теоремы 40, IV на случай произвольного m, высказанное Морри [3], позволяет аналогичным образом обобщить теорему 44, IV.

Мы закончим этот пункт упоминанием двух других вопросов, которые встречаются в теории аналитических уравнений. Первый из них — вопрос аналитического продолжения эллиптических решений аналитического уравнения второго порядка через аналитический кусок гиперповерхности S, на котором оно принимает аналитические значения. Жиро [1,5] доказал следующую теорему:

44, V. *Если уравнение линейное, то такое аналитическое продолжение возможно даже тогда, когда решение предполагается только непрерывным в замкнутой области* T, *граница которой содержит* S, *и регулярным в* $T - \mathfrak{F}T$. *В случае нелинейного уравнения результат остается справедливым, если дополнительно предположить, что решение принадлежит в* T *классу* $C^{(4)}$. *Для квазилинейных уравнений достаточно предполагать, что решение принадлежит классу* $C^{(3)}$.

Согласно Жевре [2], принадлежность классу $C^{(3)}$ достаточна и для уравнения общего типа при $m = 2$.

Второй вопрос касается задачи Коши; мы будем рассматривать только случай $m = 2$. В силу теоремы Коши — Ковалевской, эта задача разрешима в случае, когда уравнение, кривая, на которой заданы начальные данные, и сами эти данные аналитичны; решение единственно по крайней мере в классе аналитических функций. В классе неаналитических функций в эллиптическом случае задача поставлена некорректно. Действительно, как заметил Адамар [1], задача, вообще говоря, не имеет решения, и в случае, когда решение существует, оно не зависит непрерывным образом от начальных данных. Однако естественно задать вопрос, имеет ли место для поставленной задачи теорема единственности в классе неаналитических функций. Г. Леви [3] доказал следующую теорему:

44, VI. *Теорема единственности решения задачи Коши для эллиптического уравнения справедлива также и тогда, когда предполагается, что уравнение аналитично, кривая, на которой заданы начальные данные, принадлежит классу* $C^{(2)}$, *а решение отыскивается в классе* $C^{(4)}$.

Затем Карлеман [1] доказал, что даже предположение об аналитичности уравнения может быть снято. Для случая $m > 2$ нет никаких результатов такого рода [1]).

---

[1]) Укажем в связи с этим на недавно опубликованные работы М. М. Лаврентьева в ДАН СССР, **106**, № 3 (1956) и **112**, № 2 (1957) и Е. М. Ландиса в ДАН СССР, **107**, № 5 (1956). — *Прим. ред.*

45. Уравнения в параметрической форме. Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v, D, D', D'') = 0, \tag{45.1}$$

где функции

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{45.2}$$

принадлежат классу $C^{(2)}$ в круге Γ плоскости uv, а D, D', D'' — коэффициенты второй дифференциальной квадратичной формы поверхности S, заданной параметрическими уравнениями (45.2).

Предположим, что левая часть уравнения (45.1) инвариантна по отношению к любой замене переменных u и v; тогда уравнение (45.1) можно назвать *уравнением с частными производными в параметрической форме*.

Это уравнение называется уравнением *эллиптического типа*, если $4F_D F_{D''} - F_{D'}^2 > 0$. Очевидно, что простейшей задачей, которая может быть поставлена для такого уравнения, является задача отыскания интегральной поверхности S, которая должна быть *регулярной* ($EG - F^2 > 0$) и иметь границей заданный контур C.

Первый вопрос, возникающий при изучении этой задачи, заключается в следующем. Пусть задана интегральная поверхность S_0 уравнения (45.1) с границей C_0. Существуют ли интегральные поверхности этого уравнения, которые ограничены кривыми C, в некотором смысле близкими к C_0? По этому поводу Миранда [2] доказал, что эта задача решается в положительном смысле, если только задача Дирихле для уравнения в вариациях, соответствующего уравнению (45.1), неограниченно разрешима. Это уравнение в вариациях является обычным уравнением эллиптического типа с одной неизвестной функцией η; оно получается из уравнения (45.1), если рассмотреть бесконечно малую деформацию поверхности S в направлении нормали. Каччопполи [9] изучал вопрос о существовании решения в целом, применяя к некоторым нелинейным абстрактным пространствам соответствующие обобщения своей теории обращения функциональных преобразований (п. 41). Он пришел к следующему результату:

45, I. *Уравнение* (45. 1) *имеет по крайней мере одну интегральную поверхность, ограниченную произвольной кривой из непрерывного семейства* Γ, *если выполнены следующие предположения:* 1°) *для некоторой кривой из* Γ *существует конечное нечетное число решений, таких, что задача Дирихле для соответствующих уравнений в вариациях неограниченно разрешима*; 2°) *интегральные поверхности, ограниченные кривыми, составляющими компактное множество в* Γ, *имеют равномерно ограниченные площади и равностепенно непрерывные кривизны* (*или, в случае, когда уравнение* (45.1) *линейно относительно* D, D' *и* D'', *равностепенно непрерывные нормали*).

Конечно, компактность в Г рассматривается по отношению к некоторой метрике, такой, что в ней кривизна контуров удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ. На основании этой теоремы Каччопполи указал также путь исследования задачи Плато с целью доказать следующую теорему:

45, II. *Какова бы ни была замкнутая незаузленная кривая C с кривизной, удовлетворяющей условию Гёльдера с показателем* λ, *существует по крайней мере одна регулярная минимальная поверхность типа кругового диска, ограниченная контуром C.*

Полезно отметить, что новизна этой теоремы по сравнению со всеми прочими исследованиями задачи Плато [1] заключается в том, что минимальная поверхность, существование которой утверждает теорема, регулярна в смысле классической дифференциальной геометрии. Однако, как замечает и сам Каччопполи, его доказательство нельзя еще считать полностью завершенным.

Заметим еще, что для уравнения (45.1) можно также ставить задачу отыскания замкнутой интегральной поверхности заданного топологического типа. Среди задач такого типа, возможно, самой простой является задача Минковского, состоящая в отыскании замкнутой поверхности сферического типа, гауссова кривизна которой в каждой точке равна заданной *положительной* функции f от направляющих косинусов нормали к поверхности. Доказательство теоремы существования и единственности решения этой задачи дал Миранда [3], применяя метод, похожий на вышеизложенный, и предполагая, что функция f принадлежит классу $C^{(2,\lambda)}$. До этого Г. Леви [6] доказал эту теорему для аналитического случая.

Совсем недавно Ниренберг [2] повторил результат Миранды, пользуясь методом, который является комбинацией методов Г. Леви и Миранды. Применяя этот метод и теорему 40, V, Ниренберг в основном провел доказательство теоремы существования при более слабом предположении, что функция f принадлежит классу $C^{(2)}$. Ниренберг высказал сомнение в том, что результаты Каччопполи, на которые опирается исследование Миранды, достаточно строго доказаны. Аналогичной критике подверглась работа Каччопполи, относящаяся к проблеме Г. Вейля, опубликованная в т. 4 (1940) Commentationes Pontificiae Academiae Scientiarum. По мнению автора, эти сомнения, к тому же неуточненные, не обоснованы, хотя заметки [6] и [8] Каччопполи, к которым они, очевидно, относятся, очень трудны для чтения в силу их чрезвычайно сжатого изложения. Во всяком случае, можно надеяться, что изложение содержания этих заметок, данное в пп. 42 и 43, будет способствовать облегчению понимания всех их неясных мест.

---

[1] Библиографию, касающуюся задачи Плато, см. в работах Радо [2] и Куранта [5].

46. Задача Неймана. Задачу Неймана для нелинейных эллиптических уравнений рассматривал Жиро [14, 15], правда, только в частных случаях. Действительно, Жиро рассматривает уравнение вида (40. 2), где функции b_i равны нулю, а функции a_{ik} зависят только от u и x; с этим уравнением связывается краевое условие вида

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} X_i \frac{\partial u}{\partial x_k} + \psi(u, x) = 0.$$

Предполагается, что функции a_{ik}, f, ψ зависят также от параметра α, и доказывается, что задача имеет решения при всех α, если выполнены следующие предположения: 1°) *задача разрешима для некоторого значения* α; 2°) *соответствующее уравнение в вариациях неограниченно разрешимо*; 3°) *можно получить априорную оценку для функции* u *и ее первых производных.* Мы не будем перечислять предположений качественного характера, необходимых для того, чтобы теорема была справедлива; укажем только, что метод, который Жиро применял для доказательства, хотя он и не требует применения понятий функционального анализа, аналогичен тому методу, который мы применяли, чтобы установить теорему 42, I.

Другие результаты, относящиеся к задаче Неймана, но касающиеся уравнений более частного вида, принадлежат Франклю и Келдышу [1], Нокамори [1], Иоахиму и Иоганну Ниче [2, 3].

47. Уравнения частного вида. Вернемся к изучению задачи Дирихле и изложим некоторые исследования, относящиеся к уравнению

$$\Delta u = f(x, u, p_i). \tag{47.1}$$

Это — простейшее из нелинейных уравнений эллиптического типа; оно было, начиная с первых работ Пикара и Бернштейна, пробным камнем для различных методов, которые предлагались для исследования более общих уравнений. Отметим работу Шаудера [1], который рассматривал задачу Дирихле для уравнения (47.1), применяя теорему Брауэра о неподвижной точке; работу Каччопполи [4], который показал, каким образом для уравнения (47.1) можно улучшить общие теоремы п. 42; работу Немыцкого [1], который доказал теорему существования задачи Дирихле для замкнутых областей достаточно малой меры; работу Соловьева [1], который также рассматривал случай достаточно малых областей; работы Хаммерштейна [1], Лихтенштейна [5] и Иглиша [1], которые применяли к исследованию уравнения (47.1) теорию нелинейных интегральных уравнений; работы Розенблатта [1, 2, 8, 10], который применял к изучению уравнения (47.1) метод последовательных приближений; работы Бергмана и Шиффера [3], которые рассматривали уравнение (47.1) в том случае, когда функция f не зависит от p_i и может быть разложена в ряд по степеням *u*; более старую литературу можно найти в монографии [4] Лихтенштейна.

Другое уравнение частного типа, которое стало предметом многих исследований, — это так называемое уравнение Монжа — Ампера для двух переменных; в этом уравнении F является линейной функцией от p_{ij} и величины $p_{11}p_{22} - p_{12}^2$. Этому вопросу посвящены работы Реллиха [2], Г. Леви [5], Жиллиса [1], Погорелова [2], Хартмана и Винтнера [1]. Обобщение на случай многих переменных рассматривал Жиллис [2, 3, 4].

Глава VII

ДРУГИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ. УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В этой главе мы хотим кратко изложить различные вопросы, касающиеся эллиптических уравнений второго порядка, а также уравнений высших порядков и систем уравнений, которые мы до сих пор оставляли в стороне. Многие из этих вопросов очень важны; многие относятся к таким областям теории, разработка которых в настоящее время едва лишь начата. Характер этой книги не позволяет дать здесь подробное и систематическое изложение этих исследований. Поэтому мы ограничимся тем, что укажем те области, к которым относятся эти исследования, и там, где это возможно, дадим некоторые указания относительно применяемых методов. При этом мы не будем подробно излагать ни формулировок теорем, ни их доказательств. Иначе говоря, в этой главе мы дадим только некоторую классификацию тех библиографических материалов, собранных в конце книги, которые еще не упоминались.

48. Эллиптические уравнения на многообразиях. Пусть $\mathfrak{B}$ — замкнутое и ориентируемое риманово многообразие m измерений, и пусть

$$\sum_{i,\, k=1}^{m} g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

— его основная квадратичная форма. Если a^{ik} и b^i — два контравариантных тензора, причем первый из них — симметрический, а c — скаляр, то для любой из функций, принадлежащих классу $C^{(2)}$ на $\mathfrak{B}$, определен дифференциальный оператор второго порядка

$$\mathfrak{M}u = \sum_{i,\, k=1}^{m} a^{ik} D_k \frac{\partial u}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{m} b^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + cu, \qquad (48.1)$$

где D_k — символ ковариантной производной Кристоффеля. Пусть f — скаляр; уравнение

$$\mathfrak{M}u = f \qquad (48.2)$$

называется уравнением эллиптического типа, если квадратичная форма $\sum a^{ik}\lambda_i\lambda_k$ положительно определенная. Для такого уравнения можно ставить краевые задачи, аналогичные тем, которые рассматривались в эвклидовом пространстве. А именно, пусть задана замкнутая область T на $\mathfrak{V}$; будем искать решение уравнения (48.2), регулярное в $T-\mathfrak{F}T$ и удовлетворяющее на $\mathfrak{F}T$ некоторым краевым условиям; эти условия могут быть первого, второго или третьего типа.

Другая задача, в некотором смысле более простая, — это так называемая задача Пикара, состоящая в отыскании решения уравнения (48.2), регулярного на всем многообразии $\mathfrak{V}$. Если оставить в стороне некоторые старые работы Пикара[1] и Гильберта [1], относящиеся к некоторым частным случаям, а также исследования различных авторов, касающиеся теорем существования абелевых интегралов на римановой поверхности, то первое систематическое изложение этих проблем дано Жиро, который распространил на уравнение (48.2) значительную часть полученных им результатов для уравнений в эвклидовых пространствах (см. гл. III). Основная часть этих обобщений содержится в работе [26], некоторые дополнительные результаты — в работах [33, 39, 48].

Аналогичные задачи можно ставить также и тогда, когда $\mathfrak{V}$ — замкнутое многообразие с определенной на нем топологией, т. е. когда не предполагается, что на $\mathfrak{V}$ определена метрика. К этому кругу идей относится задача Пикара, которую Чиммино [3] рассматривал для случая $m=2$, применяя метод, похожий на тот, который описан в п. 29, но применение этого метода здесь упрощается благодаря отсутствию краевых условий.

Укажем еще одну работу Никодима [1], относящуюся к случаю двумерного многообразия с локально-эвклидовой метрикой, и работы Асколи [2] и Роте [1], касающиеся многообразий постоянной кривизны.

Эти исследования связаны с изучением так называемой *инвариантной формы* эллиптических уравнений; по этому вопросу, кроме работы Феллера [1], которую мы уже упоминали в п. 18, можно смотреть приложение I к книге [1] Адамара и работу Томаса и Титта [1].

49. Краевые задачи для неограниченных областей. Как уже было указано в конце п. 4, краевые задачи для эллиптических уравнений могут ставиться также в случае неограниченных областей, с тем условием, чтобы искомая функция имела определенное поведение на бесконечности. Наиболее простым является случай неограниченной замкнутой области T с ограниченной границей. В этом случае, если оператор $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям теоремы 20, I и имеет главное фундаментальное решение и если свободный член f

---

[1] Picard É., Sur une équation aux dérivées partielles du second ordre relative à une surface fermée, correspondant à un équilibre calorifique, Ann. Éc. N. Sup., 26 (1909), 9—17.

уравнения стремится к нулю на бесконечности, при исследовании различных краевых задач не возникает новых трудностей. Действительно, можно применить методы Жиро, изложенные в пп. 21, 22, 23, и свести задачу к одному интегральному уравнению на $\mathfrak{F}T$; изучение этого уравнения позволяет легко получить теорему существования. Если же выполнены все предположения теоремы 20, I, кроме предположения, что $c \leqslant 0$, то уже нельзя непосредственно применять метод Жиро, так как задача сводится к системе интегральных уравнений с двумя неизвестными функциями, одна из которых задана в неограниченной области T. Однако Жиро [33] доказал, что, несмотря на это, теоремы Фредгольма остаются справедливыми, так что обычным образом можно прийти к теореме об альтернативе. Можно даже провести эти доказательства, налагая менее жесткие требования, чем вышеуказанные, на поведение функций u и f на бесконечности. Для этого достаточно вспомнить, что если T совпадает со всем пространством и если на функцию u наложено только условие на бесконечности, а оператор $\mathfrak{M}$ имеет главное фундаментальное решение, то решение задачи дается формулой (20.12) не только в предположениях теоремы 20, III, но также и в более широких предположениях теоремы 20, IV.

Кроме упомянутого выше метода, Жиро [33] предложил еще и другой метод изучения указанной проблемы. Этот метод в основном состоит в преобразовании всего пространства в сферическую гиперповерхность посредством замены независимых переменных, так что проблема сводится к задаче типа тех, которые рассматривались в п. 48. Этот метод позволяет значительно дополнить прежние результаты, так как он применим при предположениях, существенно отличных от предположений теорем 20, I и II. К числу уравнений, которые можно изучать таким образом, принадлежит, например, уравнение $\Delta u = f$, для которого не годились предыдущие методы, так как для него не выполнено предположение, что $c \leqslant -g^2$ (вне некоторой ограниченной области). Кроме того, в случае $m = 2$ этот метод позволяет требовать, чтобы на бесконечности функция u была ограничена (а не стремилась к нулю).

Другим довольно естественным методом изучения этих задач является аппроксимация искомых решений посредством решений обычных краевых задач для последовательности ограниченных областей, сумма которых есть T. Этот метод обладает двумя преимуществами: он применим также и тогда, когда граница T неограничена, и позволяет рассматривать функции u с поведением весьма общего вида на бесконечности; этот метод применяли Америо [1] и Кшижанский [1,4].

Наконец, Пини [3], применяя метод п. 29, изучал краевую задачу для уравнения с двумя переменными, в которой условие на бесконечности должно было выполняться в смысле сходимости в среднем.

Для уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ Магнус [1, 2], Вейль [4, 5] и Мюллер [1] рассматривали задачу об отыскании комплексного решения, которое на $\mathfrak{F}T$ удовлетворяет условию типа Дирихле, а при $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \infty$ — условию

$$\lim \rho \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + iu \right) = 0.$$

Другие работы касаются в основном вопросов единственности и принадлежат Реллиху [2], Симоде и Нагумо [1], Иосиде [1], Аткинсону [1]. Нелинейный случай рассматривается в работах Бернштейна [7], Гилбарга [1], Хопфа [6].

50. Смешанные задачи. Согласно определению, данному в п. 4, смешанными задачами называются такие краевые задачи, в которых на части S_1 границы $\mathfrak{F}T$ задаются значения неизвестной функции u, а на остальной части S_2 — значения оператора $\mathfrak{P}u$, причем предполагается, что $l \equiv \nu$. В случае, когда S_1 и S_2 не имеют общих точек, исследование таких задач не представляет особых трудностей. Представив функцию u в виде суммы объемного потенциала, потенциала двойного слоя на S_1 и потенциала простого слоя на S_2, Жиро [14, 15] исследовал эти задачи таким же образом, как и другие краевые задачи гл. III. Исследование становится гораздо более трудным, когда S_1 и S_2 имеют общие точки. Эта задача, при таких более общих условиях, была впервые рассмотрена Жиро [26], который искал решения этой задачи, непрерывные всюду в T. Метод Жиро, который мы не можем здесь излагать, состоит в сведении смешанной задачи к задаче Неймана, которая рассматривается на некотором римановом многообразии $\mathfrak{V}$; затем применяются обычные методы (см. п. 48). Однако для того, чтобы этот метод был применим, требуется, чтобы в точках, общих для S_1 и S_2, нормаль к S_1 и конормаль к S_2 были ортогональны; кроме того, в этих точках значения, заданные для u и $\mathfrak{P}u$, должны удовлетворять условиям согласования.

Другой метод, который очень полезен при изучении смешанных задач, — это метод Пиконе преобразования краевых задач в системы уравнений Фишера — Рисса.

Свойства таких преобразований исследовал Америо [6], используя метод, аналогичный тому, который он применял при изучении задач Дирихле и Неймана (п. 31). Затем Фикера [10] доказал, что теорему существования можно получить путем исследования указанных систем уравнений Фишера — Рисса, написанных с помощью соответствующего фундаментального решения, по крайней мере для самосопряженного уравнения при $c < 0$, $\beta = 0$. Эта теорема справедлива без всяких стеснительных ограничений на поведение $\mathfrak{F}T$ или на граничные данные в точках $S_1 \cdot S_2$. Однако решение Фикеры не является непрерывным в T, хотя и принадлежит классу $\Gamma^{(2)}$ (в смысле п. 31), и удовлетворяет краевому условию на S_2 только почти всюду. Далее, в том же классе функций указанное решение единственно, как это можно доказать, например, с помощью теоремы 31, IX. Надо заметить, что в более широком классе функций, непрерывных в $T - S_2$ и обладающих первыми производными, интегрируемыми с квадратом в T, теорема единственности уже неверна; пример, доказывающий это, был построен де Джорджи [1].

В том частном случае, когда $\mathfrak{M} = \Delta$, Фикера [18] доказал также, что решение не может принадлежать классу $C^{(1)}$ в T, если только граничные данные не удовлетворяют некоторым условиям количественного характера.

Другие интересные результаты, относящиеся к смешанной задаче и касающиеся также того случая, когда на S_2 задано условие с косой производной, недавно были высказаны Вишиком [12].

Наконец, укажем некоторые работы Гиццетти [5, 6], относящиеся к частному случаю уравнения с постоянными коэффициентами.

51. Обратные задачи. Мы будем называть *обратными задачами* теории эллиптических уравнений все задачи такого типа: задано семейство функций; ищется эллиптическое уравнение, которое имеет в качестве решений все функции заданного семейства. Конечно, семейство должно содержать вместе с каждой парой функций u_1 и u_2 все их линейные комбинации. Первый результат в этом круге идей принадлежит Джону [1], который доказал, что если все функции семейства монотонны и принадлежат классу $C^{(2)}$, то существует эллиптический оператор $\mathfrak{M}$, не содержащий члена с u, такой, что все функции семейства являются решениями уравнения $\mathfrak{M}u = 0$. Почти одновременно Айзенштат [1] доказала, что если $f = \mathfrak{T}(u)$ — линейное функциональное преобразование, которое каждой функции u, принадлежащей классу $C^{(2)}$ в T, ставит в соответствие функцию f класса $C^{(0)}$ таким образом, что функция f неположительна во всякой точке, где u имеет неотрицательный максимум, то это преобразование обязательно имеет вид $f = \mathfrak{M}u$, где $\mathfrak{M}$ — эллиптический оператор с неположительным коэффициентом c.

Наконец, недавно Таутц [4] нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы для линейного функционального преобразования $u = \mathfrak{T}(\varphi)$, которое каждой непрерывной функции φ на $\mathfrak{F}T$ ставит в соответствие функцию u, непрерывную в T и равную φ на $\mathfrak{F}T$, существовал эллиптический оператор $\mathfrak{M}$, такой, чтобы для любого φ выполнялось равенство $\mathfrak{M}[\mathfrak{T}(\varphi)] = 0$.

К этим исследованиям примыкают некоторые работы Вишика [4, 6, 7, 10, 11], в которых автор ищет наиболее общий вид таких краевых условий, чтобы для эллиптического уравнения с этими краевыми условиями была справедлива теорема существования и единственности или теорема об альтернативе. Полученные результаты позволили Вишику выделить и изучить новые виды краевых задач, отличные от классических. По этому поводу можно смотреть также его работу [9].

52. Вырожденные эллиптические уравнения. Линейное эллиптическое уравнение называется вырожденным, если в некоторой части области его определения квадратичная форма $\Sigma a_{ik}\lambda_i\lambda_k$ является не положительно определенной, а полуопределенной. Изучение таких уравнений интересно прежде всего с точки зрения теории параболических уравнений или уравнений смешанного типа и поэтому выходит за пределы этой книги. Оставаясь в области эллиптических уравнений, мы ограничимся упоминанием двух работ Келдыша [2] и Олейник [7], которые касаются некоторых уравнений, вырождающихся на границе области.

Другие работы Левинсона [1], Олейник [2, 5, 6], Каменомостской [1] касаются поведения решений эллиптического уравнения при стремлении к нулю коэффициентов при вторых производных.

53. Эллиптические системы первого порядка. Система двух линейных уравнений первого порядка с неизвестными функциями u и v, зависящими от двух независимых переменных x_1 и x_2,

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}+b_{11}\frac{\partial v}{\partial x_1}+b_{12}\frac{\partial v}{\partial x_2}=c_{11}u+c_{12}v+f_1,\\ a_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}+b_{21}\frac{\partial v}{\partial x_1}+b_{22}\frac{\partial v}{\partial x_2}=c_{21}u+c_{22}v+f_2,\end{aligned}\right\} \qquad (53.1)$$

где a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, f_i — функции от x_1 и x_2, называется эллиптической, если квадратичная форма

$$\begin{vmatrix} a_{12} & b_{12}\\ a_{22} & b_{22}\end{vmatrix}\lambda_1^2-\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12}\\ a_{21} & b_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12} & b_{11}\\ a_{22} & b_{21}\end{vmatrix}\right\}\lambda_1\lambda_2+\begin{vmatrix} a_{11} & b_{11}\\ a_{21} & b_{21}\end{vmatrix}\lambda_2^2$$

определенная[1]). Легко установить, что для такой системы можно ставить краевые задачи, аналогичные тем, которые рассматривались для одного уравнения второго порядка. Так, например, пусть рассматривается система

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_2}=a_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}+f_1,\\ -\frac{\partial v}{\partial x_1}=a_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}+f_2.\end{aligned}\right\} \qquad (53.2)$$

Легко видеть, что если функции a_{ij} и f_i принадлежат классу $C^{(1,\lambda)}$, то можно исключить функцию v и получить эллиптическое уравнение

---

[1]) См. Курант и Гильберт [1], т. II, гл. V, § 2.

второго порядка с одной неизвестной функцией u. Краевое условие вида

$$u = \varphi \text{ для } x \in \mathfrak{F}T \tag{53.3}$$

определяет функцию u, и тогда функция v также оказывается определенной с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Поэтому естественно задать вопрос, справедлив ли этот результат в общем случае, т. е. когда не предполагается, что функции a_{ij} и f_i дифференцируемы, так что невозможно исключить функцию v, как это было сделано выше. Вопросы такого рода интересны с точки зрения различных приложений к теории конформных отображений и к вариационному исчислению; наиболее полные результаты получены Лихтенштейном [1], Э. Хопфом [2], Морри [1]. В частности, Морри доказал теорему существования (для обобщенных решений) в предположении, что функции a_{ij} и f_i измеримы и ограничены; в следующей работе [2] он распространил полученные результаты на случай некоторых систем с $2N$ неизвестными функциями. При этом применялись самые разные методы — от теории потенциала и конформных отображений до вариационного исчисления и теории Рисса линейных функциональных уравнений.

Другая задача, которая ставится для системы (53.2), — найти решение $u = u(x_1, x_2)$, $v = v(x_1, x_2)$, которое переводит замкнутую область T плоскости x_1x_2 в заданную замкнутую область D плоскости uv. Интересные результаты по этому вопросу содержатся в работах Лихтенштейна и Морри. В более общей постановке, даже для нелинейных систем, задачу исследовал Лаврентьев [1, 2, 3] в связи со своей теорией квазиконформных отображений. По этому вопросу можно также смотреть работы Шабата [1] и Шапиро [1]. В заметке [1] Адельсона — Вельского и Кронрода на решения системы (53.2) распространяется свойство максимума модуля.

Другой частный случай системы [53.1] — это система вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_2} &= c_{11}u + c_{12}v + f_1, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} &= c_{21}u + c_{22}v + f_2; \end{aligned}\right\} \tag{53.4}$$

для нее можно рассматривать краевое условие (53.3), как это сделано в работе [1] Гильберта, или более общее условие

$$au + bv = \varphi \text{ для } x \in \mathfrak{F}T, \tag{53.5}$$

где a и b — функции, заданные на $\mathfrak{F}T$. Что касается этой второй краевой задачи, то некоторые результаты содержатся уже в старой работе Гурвица [1] и в работе Нётера [1]. Недавно были получены новые интересные результаты, относящиеся как к системе

(53.4), так и к более общей системе (53.1)[1]; мы назовем работы Хаака и Хельвига [1], Хаака [1, 2], Хельвига [1, 2] Иоахима Ниче [1], Иоахима и Иоганна Ниче [1], Усманова [1, 2]. Нелинейный случай рассматривали Беккерт [1], Хельвиг [3], Иоахим Ниче [2]; системам с более чем двумя неизвестными функциями посвящена работа Беккерта [2]. Во всех этих работах основным методом является сведéние рассматриваемых краевых задач к интегральным уравнениям второго рода.

Перейдем теперь к случаю многих независимых переменных. Наиболее естественным обобщением системы (53.2) является система с $\frac{m^2-m+2}{2}$ неизвестными функциями

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}\frac{\partial v}{\partial x_k}+f_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m); \tag{53.6}$$

u_{ik} — компоненты двумерного кососимметрического тензора ($u_{ik}=-u_{ki}$). Для такой системы исключение функций u_{ik} также приводит к уравнению второго порядка с одной неизвестной функцией v; это уравнение оказывается эллиптическим, если квадратичная форма $\sum a_{ik}\lambda_i\lambda_k$ определенная. Поэтому если к системе (53.6) добавляется краевое условие (53.3), то функция v определяется однозначно, а функции u_{ik} — с точностью до добавления коэффициентов замкнутой дифференциальной формы порядка $n-2$. По этому поводу Миранда [8] доказал, что теорема существования (для обобщенных решений) справедлива и тогда, когда функции a_{ik} предполагаются непрерывными, функция φ принадлежит классу $C^{(0,\lambda)}$, а функции f_i — классу $L^{(2,\mu)}$, где $\mu-n+2\geqslant 2\lambda>1$. Далее, обобщенное решение является решением в обычном смысле и принадлежит классу $C^{(1,\lambda)}$, если функции a_{ik} и f_i принадлежат классу $C^{(0,\lambda)}$. Эти результаты можно получить, аппроксимируя функции a_{ik} и f_i полиномами; в таком случае задача решается посредством указанного исключения функций u_{ik}, а затем производится предельный переход, законность которого доказывается с помощью оценок п. 39. Некоторые обобщения этих результатов и интересные их применения к вопросам вариационного исчисления содержатся в работе [3] Стампаккья.

Другие результаты, относящиеся к некоторым системам с более чем двумя неизвестными функциями, зависящими от трех независимых переменных, принадлежат Шапиро [2].

---

[1] Наиболее полное исследование задачи (53.5) для системы (53.4) проведено в работе И. Н. Векуа, Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек, Мат. сб., **31** (73):2 (1952), стр. 217—314. В этой же работе изучены свойства решений системы (53.4). — *Прим. ред.*

Укажем также на ряд работ Берса и Гельбарта [1, 2, 3] и Берса [1, 2, 3], касающихся систем

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1(x_1)\frac{\partial u}{\partial x_1} &= \tau_1(x_2)\frac{\partial v}{\partial x_2}, \\ \sigma_2(x_1)\frac{\partial u}{\partial x_2} &= -\tau_2(x_2)\frac{\partial v}{\partial x_1}, \end{aligned} \qquad \sigma_1\sigma_2\tau_1\tau_2 > 0. \right\}$$

Целью этих работ является доказательство того, что комплексные функции $f(z) = u + iv$ комплексного аргумента $z = x_1 + ix_2$ обладают многими свойствами, близкими к свойствам голоморфных функций. Так, например, для этих функций можно в некотором обобщенном смысле определить понятия *производной*, *интеграла*, *разложения в степенной ряд* и т. д. Некоторые обобщения этих исследований можно найти в работах Петровского [3]1) и Дуглиса [1].

Напомним, наконец, что Карлеман [1, 5] рассматривал задачу Коши для некоторых систем первого порядка с двумя независимыми переменными. Он доказал теорему единственности решения даже в неаналитическом случае. Этот результат был недавно обобщен Дуглисом [2].

54. Канонические формы эллиптического уравнения. Изучение систем вида (53.2) тесно связано с задачей о приведении эллиптического уравнения с двумя независимыми переменными к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} + \beta_1\frac{\partial u}{\partial y_1} + \beta_2\frac{\partial u}{\partial y_2} + \gamma u = \psi. \tag{54.1}$$

Действительно, напишем эллиптическое уравнение в обычных обозначениях и произведем замену переменных

$$y_1 = y_1(x_1, x_2), \quad y_2 = y_2(x_1, x_2). \tag{54.2}$$

Легко видеть, что для того, чтобы преобразованное уравнение с точностью до множителя имело вид (54.1), необходимо и достаточно, чтобы y_1 и y_2 удовлетворяли эллиптической системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} &= -\sqrt{A}\left(a_{11}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + a_{12}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right), \\ -\frac{\partial y_1}{\partial x_1} &= -\sqrt{A}\left(a_{12}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + a_{22}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right). \end{aligned}\right\}$$

Эта система, несомненно, имеет решения, но трудность состоит в отыскании решения (y_1, y_2) такого, чтобы формулы (54.2) устанавливали взаимно однозначное соответствие между замкнутой обла-

---

1) В этой работе, носящей обзорный характер, ставится ряд задач, связанных с изучением указанной системы. — *Прим. ред.*

стью T плоскости x_1x_2 и замкнутой областью D плоскости y_1y_2. Лихтенштейн [4], доказал, что такое решение существует, если функции a_{ik} принадлежат классу $C^{(1,\lambda)}$.

Далее, если рассматриваемое эллиптическое уравнение самосопряженное, то уравнение (54.1) также оказывается самосопряженным с точностью до множителя. Поэтому это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(p\frac{\partial u}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y_2}\left(p\frac{\partial u}{\partial y_2}\right)+qu=\psi. \tag{54.3}$$

В случае m переменных приведение к канонической форме, вообще говоря, невозможно. Имеется только замечание Бьянки[1]), что, по крайней мере для достаточно малой области, всегда можно привести эллиптическое уравнение к виду

$$\sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+qu=\psi,$$

умножая его на некоторый множитель; однако при этом не выполняется условие $\alpha_{ik}=\alpha_{ki}$. Пользуясь результатами Миранды [8], упомянутыми в предыдущем пункте, может быть, удастся доказать, что такое преобразование возможно и в большой области.

Наконец, задача о приведении к каноническому виду ставится также и для систем первого порядка вида (53.1). Хельвиг [2] получил некоторые результаты относительно приведения такой системы к виду, отличному от (53.4), пользуясь одновременным преобразованием независимых переменных и неизвестных функций и линейным преобразованием уравнений.

55. Уравнения высших порядков. Линейный дифференциальный оператор порядка $2r$ с m переменными можно записать в виде

$$\mathfrak{M}=\sum_{k=0}^{2r}f_k\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_m}\right), \tag{55.1}$$

где f_k — однородные многочлены степени k, коэффициенты которых — функции точки x. Такой оператор называется оператором *эллиптического типа*, если форма f_{2r} — определенная. Как и в случае $r=1$, можно ввести сопряженный оператор $\mathfrak{N}$ и связать операторы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ посредством интегральной формулы типа формулы Грина:

$$\int_T(v\,\mathfrak{M}u-u\,\mathfrak{N}v)\,dx=\int_{\mathfrak{F}T}\mathfrak{L}(u,v)\,d\sigma, \tag{55.2}$$

---

[1]) Bianchi L., Sulle equazioni lineari a derivate parziali del 2° ordine, Rend. Acc. Lincei, 5 (1889), 35—44.

где $\mathfrak{L}(u, v)$ — билинейное выражение от u, v и их производных порядков, меньших $2r$. Очевидно, что в случае, когда известно *фундаментальное решение* уравнения $\mathfrak{M}u = 0$, из этой формулы можно получить многочисленные следствия, аналогичные тем, которые были получены при $r = 1$. Под фундаментальным решением здесь надо понимать функцию $G(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению $\mathfrak{M}_x G(x, y) = 0$ как функция x, ограничена и непрерывна вместе со своими производными порядка $2r$ по переменным x_i, когда y изменяется в пределах области C, а x — в пределах $C - y$, и такова, что ее производные порядка $2r - 1$ имеют порядок $O(\overline{xy}^{1-m})$. Заметим сразу, что построение таких фундаментальных решений представляет значительные трудности даже в наиболее простом случае, когда оператор $\mathfrak{M}$ имеет постоянные коэффициенты и содержит только производные наивысшего порядка. В самом деле, тогда как в случае двух переменных удается еще получить простое выражение для фундаментального решения, это уже невозможно при $m > 2$; в этом случае надо прибегать к некоторым выражениям, содержащим определенные интегралы. В упомянутом частном случае наиболее интересные результаты принадлежат Сомильяне[1] для $m = 2$, Фредгольму[2] для $m = 3$, Герглотцу [1] для $m = 3$ и $m = 4$, Бюро [1, 2, 3, 4] для $m < 2r$ и для любых четных m. К рассматриваемому вопросу близки также некоторые недавние работы Бохнера [1, 2].

Заметим, что если найдено фундаментальное решение для уравнения с постоянными коэффициентами, то для решения вопроса в общем случае естественно применить метод, аналогичный тому, который применялся в п. 19. Однако такое исследование было доведено до конца только в случае $m = 2$ в работе Э. Э. Леви [1], в предположении, что коэффициенты полинома f_{2r} принадлежат классу $C^{(2r-1)}$, а коэффициенты полиномов f_k при $k < 2r$ принадлежат классу $C^{(1)}$. Кроме того, Э. Э. Леви предполагает, что корни уравнения $f_{2r}(\alpha, 1) = 0$ как функции x принадлежат классу $C^{(2r+1)}$ и кратность их остается постоянной.

В случае $m > 2$ известен единственный результат, недавно установленный Джоном [4, 5] с помощью совсем иного метода. Этот метод опирается на предварительное построение такой функции $G(x, y)$, что для всякой функции v, принадлежащей классу $C^{(2r)}$ в T, для которой справедлива формула (55.2), выполняется формула Стокса

$$v(y) = \int_T G(x, y)\,\mathfrak{M}v(x)\,dx + \int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{L}(G(x, y), v(x))\,d_x\sigma.$$

---

[1] Somigliana C., Sui sistemi simmetrici di equazioni a derivate parziali, Ann. Mat. pura appl., 22 (1894), 143—156.

[2] Fredholm I., Sur l'intégrale fondamentale d'une équation différentielle elliptique à coefficients constants, Rend. Circ. Mat. Palermo, 25 (1908), 346—351.

Доказывается, что такая функция $G(x, y)$ существует и что ее можно найти с помощью квадратур, которые применяются к решению соответствующей задачи Коши для уравнения $\mathfrak{M}u = 0$, с начальными данными, заданными на переменной гиперплоскости. Далее проверяется, что функция $G(x, y)$ обладает всеми свойствами фундаментального решения. Указанный метод проходит в случае, когда коэффициенты оператора $\mathfrak{M}$ аналитичны, а область T достаточно мала; это последнее требование может быть снято в некоторых частных случаях.

Пользуясь этим результатом, Джон доказал также аналитичность решений уравнения $\mathfrak{M}u = 0$ и изучил их поведение в окрестности изолированной особой точки; что касается этого последнего вопроса, то он получил обобщение теорем 19, VII и VIII [1]. Относительно аналитичности решений аналитических уравнений напомним, что в случае $m = 2$ это уже было доказано Э. Э. Леви [1] даже для неоднородного уравнения.

Перейдем теперь к изучению краевой задачи, которая получается, когда к уравнению $\mathfrak{M}u = f$ добавляются граничные условия

$$u = \varphi_0, \quad \frac{du}{dn} = \varphi_1, \ldots, \frac{d^{r-1}u}{dn^{r-1}} = \varphi_{r-1}. \tag{55.3}$$

Исследование этой очень трудной задачи до сих пор не завершено, по крайней мере в случае, когда ищется решение, удовлетворяющее краевым условиям в обычном смысле, т. е. принадлежащее классу $C^{(r-1)}$ в T. Действительно, теорема об альтернативе для рассматриваемой задачи и сопряженной с ней задачи до сих пор доказана только в случае двух переменных. Этот результат принадлежит Э. Э. Леви [2], который получил его в предположении, что форма f_{2r} удовлетворяет условиям, уже упомянутым в связи с вопросом о существовании фундаментального решения, и что остальные формы f_k имеют коэффициенты класса $C^{(k+1)}$. Доказательство проходит в основном по методу п. 24 и является чрезвычайно трудоемким и очень сложным для чтения.

После работы Э. Э. Леви прошло сорок лет, в течение которых по этому вопросу не было получено никаких новых результатов общего характера. И только недавно метод ортогональных проекций Вейля дал новый толчок этим исследованиям, которым посвящены работы Вишика [3], Гординга [1, 3, 5, 6], Браудера [1, 3, 5]. В результате эти авторы полностью доказали теорему об альтернативе не только для рассматриваемой краевой задачи, но также и для задач с другими граничными условиями. Однако они рассматривали обобщенные краевые задачи, в которых краевые

---

[1] Изложение результатов Джона по этим вопросам содержится в недавно вышедшей его книге: John F., Plane Waves and Spherical Means applied to Partial Differential Equations, Interscience Publishers, New York, London, 1955. Ее перевод готовится в Издательстве иностранной литературы. — *Прим. ред.*

условия должны удовлетворяться в смысле, аналогичном указанному в п. 30 для случая $r = 1$. В случае $m = 2$ Браудеру [3] удалось рассмотреть также и обычную задачу; при этом предположения, касающиеся гладкости коэффициентов, более сильные, чем предположения Э. Э. Леви, но снимается требование, чтобы корни уравнения $f_{2r}(\alpha, 1) = 0$ имели постоянную кратность. Случай уравнения четвертого порядка рассматривали также Берг и Лакс [1].

Во всех этих исследованиях постоянно применяется понятие обобщенной производной данного порядка (в слабом или сильном смысле). Вопросы, связанные с этим понятием, а также вопросы о соотношениях между обобщенными и обычными производными рассматриваются в работах Соболева [5] [1]), Фридрихса [2, 3, 5], Шварца [1], Джона [6].

Заметим также, что если эллиптическое уравнение порядка $2r$ рассматривается на замкнутом многообразии с заданной на нем топологией, то можно поставить задачу об определении решения, регулярного на всем многообразии. В случае $m = 2$ Пини [4, 9] доказал теорему об альтернативе для этой задачи, обобщив метод, который применял Чиммино в случае $r = 1$ [см. п. 48]. До этого Цвирнер [3] изучал этот вопрос в одном частном случае.

Наконец, надо отметить, что вопрос о единственности решения до сих пор изучался мало.

Кроме этих исследований общего характера, надо упомянуть многие работы, посвященные уравнениям частного вида. Бо́льшая часть этих работ относится к уравнению

$$\Delta_{2r} u = f, \tag{55.4}$$

где через Δ_{2r} обозначена r-я степень оператора $\Delta = \Delta_2$. Мы укажем некоторые работы Николеску [2, 3, 4, 6, 8], Пиконе [6, 8], Привалова [1], относящиеся к изучению свойств средних значений *r-гипергармонических* (или *полигармонических*) функций, т. е. решений уравнения $\Delta_{2r} u = 0$. Эти исследования позволили установить замечательные критерии сходимости рядов таких функций.

Аналогичные, но менее точные результаты получены также для решений более общего уравнения $\sum a_k \Delta_{2k} u = 0$, где a_k — постоянные. По этому вопросу можно смотреть работы Николеску [1], Робера [1, 2], Германеску [1, 2].

В других работах, в которых продолжаются старые исследования Альманси [2]) и Боджо [3]), рассматривается задача о выражении

---

[1]) См. книгу С. Л. Соболева, указанную в примечании [1]) на стр. 157. — *Прим. ред.*

[2]) Almansi E., Sull'integrazione dell'equazione $\Delta^{2n} = 0$, Ann. Mat. pura appl., **2** (1899), 1—51.

[3]) Boggio T., Sulla deformazione delle piastre elastiche soggette al calore, Atti Acc. Sc. Torino, **40** (1904—1905), 219—240. Integrazione dell' equazione $\Delta_2\Delta_2 = 0$ in una corona circolare e in uno strato sferico, Atti Ist. Veneto, **59** (1899—1900), 497—508.

гипергармонических функций через гармонические. К этому кругу идей относятся работы Николеску [7, 8, 9], Пиконе [6], Колуччи [1, 2], Фикеры [1, 2, 3], Толотти [3]; последняя из этих работ содержит наиболее общие результаты.

Многие работы касаются краевой задачи (55.3), (55.4), которая сначала рассматривается в круговой области, а затем в произвольной области T.

Случай круговой (или сферической) области, уже рассмотренный ранее Лауричелой[1]) и Адамаром[2]) для $m=2$ и $r=2$, Вольтеррой[3]) для $m=3$, $r=2$ и Боджо[4]) в общем случае, стал предметом новых исследований Пиконе [6] для $m=2$, 3, $r=2$, Шрёдера [1] для $m=3$, $r=2$, Бремеркампа [8] и Бремеркампа и Боттема [1] для $m=2$, 3 и произвольного r. Бремеркамп [9] рассматривал также случай области, ограниченной эллипсом, для произвольного r, а Гиццетти [2] рассматривал для $r=2$ плоскую область, имеющую вид полосы.

Случай произвольной области исследовался самыми разнообразными методами.

Первый метод — это сведение задачи к интегральным уравнениям второго рода; этот метод, по крайней мере до сих пор, применялся исключительно к случаю двух переменных. К классическим работам Адамара[5]), Лауричеллы[6]) и Корна[7]), относящимся к уравнению $\Delta_4 u=0$, позднее присоединились две работы Мусхелишвили [1] и Америо [2], относящиеся к тому же уравнению, а также работы Бремеркампа [4, 5], Векуа [7] и Каландия [1, 2, 4], относящиеся к уравнению (55.4) с произвольным r. Можар [1], Бремеркамп [3, 7], Векуа [9] рассматривали также уравнения четвертого порядка более общего вида, но такие, в которых члены с производными высшего порядка сводятся к $\Delta_4 u$.

Далее, с помощью вариационных методов интересные результаты получили Фридрихс [1] для $m=2$, $r=2$, Фикера [15] для $r=2$

---

[1]) Lauricella G., Integrazione dell'equazione $\Delta^2(\Delta^2)=0$, Atti Acc. Sc. Torino, **31** (1895—1896), 1010—1018.

[2]) Hadamard J., Sur l'équilibre des plaques elastiques circulaires libres ou appuyées et celui de la sphère isotrope, Ann. Éc. N. Sup., **18** (1901), 313—342.

[3]) Volterra V., Osservazioni sulla nota precedente del Prof. Lauricella e sopra una nota di analogo argomento dell'Ing. Almansi, Atti Acc. Sc. Torino, **31** (1895—1896), 1018—1021.

[4]) Boggio T., Sulle funzioni di Green di ordine m, Rend. Circ. Mat. Palermo, **20** (1905), 97—135.

[5]) Hadamard J., Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées, Mém. Acad. Sc. Paris, **33** (1908), 9—22.

[6]) Lauricella G., Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées, Acta Math., **32** (1909), 201—256.

[7]) Korn A., Sur l'équilibre des plaques élastiques encastrées, Ann. Ec. N. Sup., **25** (1908), 529—583.

и произвольного m, Соболев [1, 2, 4] для общего случая[1]). В работе Соболева надо отметить некоторые элементы метода ортогональных проекций, а в работе Фикеры — конструктивный метод решения. Результаты Фикеры затем были распространены Виолой [1] на общий случай.

Третий метод, исключительно удобный для получения численных оценок решения, — это метод сведения задачи к интегральным уравнениям Фишера—Рисса, предложенный Пиконе. Изучение этого метода в общем случае начал Америо [4]; затем оно было дополнено Фикерой [4, 8, 13] в случае $r=2$. Недавно к этому вопросу вернулся Пиконе [17] и выяснил, что этот метод позволяет внутри области получить приближение не только для решения, но и для его производных.

Наконец, Миранда [6] дал новое доказательство теоремы существования для случая $r=2$, $m=2$, пользуясь методами, аналогичными методам п. 29, но измененными таким образом, чтобы можно было рассматривать обычные, а не обобщенные решения задачи. Это исследование интересно, с одной стороны, тем, что таким образом получается теорема существования при минимальных требованиях на граничные данные (функция φ_0 должна быть класса $C^{(1)}$, а φ_1 — класса $C^{(0)}$; с другой стороны, получаются интересные оценки решения и его первых производных, на которые опирается доказательство теоремы существования.

Этот результат Миранды и результат Шрёдера, относящийся к поведению производных бигармонической функции на границе, являются единственными примерами априорных оценок точечного характера для решений уравнений порядка выше второго. Некоторые оценки интегрального типа были получены Пиконе [4], Диасом и Гринбергом [2], Пэйном и Вейнбергом [1].

Наконец, что касается нелинейных уравнений высших порядков, то до сих пор получено очень мало результатов. Можно указать только некоторые исследования Розенблатта [5, 6, 7, 9], относящиеся к уравнениям вида

$$\Delta_{2r}u=f\left(x_1,\ x_2,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial^{2r-2}u}{\partial x_2^{2r-2}}\right),$$

и интересную работу Стампаккья [2], в которой с помощью прямых методов вариационного исчисления доказывается теорема существования решения краевой задачи, поставленной для уравнения Эйлера, соответствующего m-кратному интегралу вида

$$\int\limits_T f(x,\ u,\ \Delta u)\,dx;$$

---

[1]) См. также Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950. — *Прим. ред.*

здесь оператор Δ, по крайней мере при $m=2$, может быть заменен произвольным эллиптическим оператором.

Наконец, Пахале [1, 2] рассматривал для бигармонических функций некоторые краевые задачи с нелинейным условием на границе.

56. Системы уравнений. Систему p линейных уравнений порядка $2r$ с p неизвестными функциями от m независимых переменных можно записать в виде

$$(-1)^m \sum_{(k)} A^{(k_1, \ldots, k_{2r})}(x) \frac{\partial^{2r} u}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_{2r}}} + \mathfrak{D} u = f(x), \qquad (56.1)$$

где u — неизвестный вектор с p компонентами, $A^{(k_1, \ldots, k_{2r})}$ — квадратные матрицы порядка p, f — известный вектор, $\mathfrak{D}$ — дифференциальный оператор порядка, меньшего $2r$, а сумма берется по всем значениям индексов $k_1, \ldots, k_{2r}$ от 0 до m. Согласно Петровскому, такая система называется *эллиптической*, если определитель матрицы

$$\sum_{(k)} A^{(k_1, \ldots, k_{2r})} \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_{2r}}$$

отличен от нуля при $\xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 \neq 0$; согласно Вишику, такая система называется *сильно эллиптической*, если квадратичная форма, коэффициенты которой равны элементам указанной матрицы, является положительно определенной при любых действительных значениях ξ_i, не равных нулю одновременно.

Исследований, относящихся к эллиптическим системам, довольно мало. Отметим прежде всего работу Петровского [1, 2], касающуюся также и нелинейных систем, в которой среди других результатов доказывается, что всякое решение аналитической системы, принадлежащее классу $C^{(3m+4r+6)}$, аналитично.

Затем упомянем некоторые заметки Лопатинского [1, 2, 3], посвященные теоремам существования фундаментальных решений[1]. Эти теоремы применяются в работе Вольперта [1], в которой задача Дирихле для эллиптической системы с двумя переменными сводится к сингулярным интегральным уравнениям. Но из такого сведения не следует теорема об альтернативе, и Бицадзе [3] доказал с помощью примера, что однородная эллиптическая система второго порядка может иметь бесконечное число линейно независимых решений, равных нулю на границе области.

Для сильно эллиптических систем имеется гораздо больше результатов.

Наиболее простым случаем является система уравнений второго порядка, таких, что i-е уравнение содержит вторые производные

---

[1] Некоторые системы частного вида рассматриваются в работе Сомильяны, указанной в примечании 1 к стр. 208, в работе [1] Э. Э. Леви и заметке [1] Конфорто.

только от i-й неизвестной функции. При этих условиях как задачу Дирихле, так и более общие краевые задачи можно исследовать методами гл. III или близкими к ним методами; по этому вопросу можно смотреть работы Жевре [8, 10], Жиро [10, 11], Бицадзе [2].

Шаудер [12] отмечал также, что к исследованию таких систем легко можно было бы применить метод гл. V, основанный на априорных оценках решений.

Что же касается систем второго порядка, не удовлетворяющих этому дополнительному условию, то можно упомянуть работу [2] Морри, посвященную, наряду с другими вопросами, изучению некоторых самосопряженных систем с двумя переменными весьма общего вида; работу Фикеры [10], где рассматривается смешанная задача для самосопряженных систем с m переменными; некоторые работы Пини [4, 7, 8, 9], касающиеся задачи Дирихле для самосопряженных систем с двумя переменными и задач на замкнутой поверхности для систем второго порядка общего вида; наконец, работу Шапиро [3], относящуюся к системам с тремя переменными и постоянными коэффициентами.

Переходя к системам высших порядков, укажем краткую заметку Жевре [11], касающуюся некоторых возможных приложений квази функций Грина (п. 24), две работы Симонова [2, 3] относительно систем с постоянными коэффициентами с m переменными, для которых граничные условия задаются на гиперплоскости, и работу Пиконе [13], в которой заложены основы применения к системам уравнений метода сведѐния краевых задач к системам уравнений Фишера—Рисса (см. п. 31).

Но в конечном счете наиболее важной работой, в которой впервые эта теория была приведена в систему, является работа [8] Вишика, краткому изложению которой посвящена заметка [5]. Вишик рассматривает краевые задачи, которые получаются путем присоединения к сильно эллиптической системе граничных условий типа (55.3) вполне общего вида для каждой неизвестной функции, и, применяя метод ортогональных проекций, доказывает, что если краевые условия понимаются в некотором обобщенном смысле, то для этой задачи и для сопряжѐнной к ней справедлива теорема об альтернативе. Недавно Вишик [12] опубликовал аналогичные результаты для краевых условий смешанного типа.

Другие важные результаты, касающиеся эллиптических и сильно эллиптических систем второго порядка, были опубликованы Морри в краткой заметке [3], посвященной изучению дифференциальных свойств и получению априорных оценок решений. Эти результаты примерно такие же, как изложенные в пп. 35, 37 и 39 результаты для случая одного уравнения; они позволяют также обобщить на нелинейные системы теоремы п. 40.

Упомянутые до сих пор исследования касаются более или менее широких классов эллиптических систем. Теперь мы укажем некоторые важные результаты, касающиеся систем специального вида. Первая система, которая является предметом многих исследований, — это система уравнений теории упругости. В математической физике для этой системы ставятся три основные задачи, которые отличаются друг от друга видом краевых условий. В первой задаче на границе области задаются смещения, во второй задаче — усилия, а в третьей (смешанной задаче) — на части границы задаются усилия, а на оставшейся части — смещения.

Первую и вторую задачу рассматривал Корн[1]) в двух работах, относящихся к 1907—1908 гг., которые стали теперь классическими. Первую задачу решали также Лауричелла[2]) и Лихтенштейн [2] путем сведения к системе интегральных уравнений; к этой задаче недавно обратились Фридрихс [4] и Пини [2]. Оба эти автора рассматривают краевые условия в обобщенном смысле, аналогичном смыслу п. 30 и п. 29 соответственно. Фридрихс пользуется вариационным методом, а Пини—методом, аналогичным методу п. 29. Наконец, смешанную задачу впервые и полностью изучил Фикера [11], который позднее [19] сделал интересное замечание о том, что для непрерывности смещений и компонент напряжения во всей замкнутой области необходимо, чтобы граничные данные задачи удовлетворяли количественным условиям интегрального типа. В своей работе Фикера дает новое изложение первой и второй краевых задач для замкнутой области, граница которой может иметь особые точки, а также дает метод вычисления решений. Фикера в основном следует методу Пиконе сведения различных задач к системам интегральных уравнений Фишера—Рисса. К этому кругу идей относятся также другие работы Пиконе [13, 14, 17] и работа Фикеры [6]. Исследованию смешанной задачи посвящена заметка Эйдуса [2], а плоским задачам теории упругости — некоторые работы Мусхелишвили [7]. Собреро [2, 3, 5], Фикеры [9].

Другие работы относительно уравнений теории упругости касаются приближения и оценки решений и принадлежат Бергману [1], Соболеву [3], Гриоли [1, 2], Синджу и Прагеру [1], Синджу [2, 3], Диасу и Гринбергу [1], Акваро [1], Слободянскому [1], Вашицу [1].

Вторая система специального вида — это система, возникающая в теории гармонических дифференциальных форм. Систематическое изучение этой теории, которой еще раньше занимался Вольтерра[3]),

---

[1]) Korn A., Sur les équations de l'élasticité, Ann. Éc. N. Sup., 24 (1907), 9—75. Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas où les efforts sont donnés à la surface, Ann. Fac. Sc. Toulouse, 10 (1908), 165—269.

[2]) Lauricella G., Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla Fisica-Matematica, Nuovo Cimento, 13 (1907), 104—118, 155—174, 237—262, 501—518.

[3]) Volterra V., Theory of functionals, Blackie, London, 1930.

начал Ходж [1, 2, 3], который применял метод интегральных уравнений, и продолжили Вейль [2, 3], де Рам и Бидаль [1], де Рам [1,2], Кодаира [2, 3], Шварц [1] с помощью различных методов, в основном связанных с методом ортогональных проекций. Более подробная библиография содержится в книгах Ходжа [4] и де Рама и Кодаиры [1], посвященных этому вопросу. После выхода этих книг были еще опубликованы работы Хоснера [1] и Миранды [9].

57. Связь с теорией функций комплексного переменного. Рассмотрим линейное однородное эллиптическое уравнение с двумя переменными вида

$$\Delta u+\beta_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\beta_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\gamma u=0. \qquad (57.1)$$

Положим

$$z=x_1+ix_2, \quad \bar{z}=x_1-ix_2, \quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-i\frac{\partial}{\partial x_2}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+i\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

Тогда уравнение (57.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}}+a\frac{\partial u}{\partial z}+\bar{a}\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}+cu=0. \qquad (57.2)$$

Бергман доказал, что если a и c — целые функции, то существует целая функция $e(z, \bar{z}, t)$, зависящая только от a и c и такая, что функция

$$\Phi(z, \bar{z})=\int_{-1}^{1} e(z, \bar{z}, t)f\left(\frac{z(1-t^2)}{2}\right)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (57.3)$$

является комплексным решением уравнения (57.2), какова бы ни была голоморфная функция f. Кроме того, любому действительному решению $u(z, \bar{z})$ уравнения (57.2), регулярному в начале координат, можно поставить в соответствие другое решение $v(z, \bar{z})$ таким образом, чтобы функция $u+iv$ имела вид (57.3) с функцией f, регулярной в начале координат. Таким образом, можно выделить класс комплексных решений уравнения (57.3), который является образом класса голоморфных функций при функциональном преобразовании (57.3). Бергман посвятил целый ряд работ[1]) изучению преобразования (57.3) и других преобразований аналогичного вида. Он ставил себе целью выяснить, какие свойства голоморфных функций сохраняются для тех решений уравнения (57.2), которые получаются из них с помощью указанного преобразования. Особенно подробно автор останавливается на изучении особенностей решений уравнения (57.2) и

---

[1]) Все работы, упомянутые в библиографии, кроме [1], [10], [13] и [15].

приближений к этим решениям. Другие работы Бергмана [10, 13] посвящены аналогичным исследованиям для некоторых уравнений четвертого порядка и уравнений с тремя переменными. Близкими по идеям являются некоторые работы Векуа [1, 2, 4, 5, 6], Харазова [1], Бицадзе [1], Нильсена [1, 2], Эйхлера [1, 2], Митчелла [1], Нильсена и Рамсея [1], Мардена [1], Темлякова [1], Г. Леви [4], касающиеся уравнений как второго, так и высших порядков. Заметим также, что при изучении уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами может оказаться полезным введение некоторых гиперкомплексных переменных; некоторые исследования в этом направлении для уравнений четвертого порядка провели Собреро [1, 2, 3, 4, 5], Сато [1], Мацумото [1], Диас [1].

Наконец, применение комплексных переменных может оказаться полезным и при исследовании краевых задач. К работам, где комплексные переменные с успехом применяются к изучению краевых задач, относятся работы Мусхелишвили [1], Америо [2], Векуа [7, 9], Каландия [1, 2, 4], уже упомянутые в п. 55 в связи с уравнением (55.4). Мы можем присоединить сюда заметку Халилова [1], относящуюся к краевым задачам для уравнений второго порядка в случае, когда в граничные условия входят производные старшего порядка, и некоторые работы Векуа [2, 3], также касающиеся уравнений второго порядка. По поводу работ Векуа можно смотреть также его книгу [12].

58. Задачи, зависящие от параметра. Пусть $\mathfrak{M}$ — эллиптический оператор, а $F(x, y)$ — его функция Грина, относящаяся к первой или второй краевой задаче (предполагается, что она существует). Если λ — параметр, то определение решений уравнения

$$\mathfrak{M}u + \lambda k(x) u = 0, \tag{58.1}$$

удовлетворяющих однородному краевому условию, сводится, очевидно, к изучению интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda \int_T F(x, y) k(y) u(y) dy. \tag{58.2}$$

Те значения λ (*собственные значения*), для которых рассматриваемая однородная краевая задача имеет ненулевое решение, составляют счетное множество. Каждому собственному значению соответствует конечное число (*ранг*) линейно назависимых решений задачи (*собственных функций*). Множество собственных значений, расположенных так, чтобы их модули не убывали, и повторенных столько раз, каков их ранг, называется *спектром* рассматриваемой краевой задачи.

Если оператор $\mathfrak{M}$ — самосопряженный, то функция $F(x, y)$ симметрична; если, кроме того, $k > 0$, то уравнение (58.2) легко может быть преобразовано в уравнение с симметрическим ядром. Тогда спектр $\{\lambda_n\}$ действителен и не пуст и каждому λ_n можно поставить в соответствие собственную функцию u_n таким образом, чтобы система $\{u_n\}$ была ортонормальной.

Теперь можно поставить различные вопросы:

1) Выяснить, возможно ли разложить произвольную функцию в ряд по собственным функциям. 2) Изучить зависимость собственных значений от области. 3) Получить асимптотическую оценку λ_n для больших значений n. 4) Получить асимптотическую оценку для функций u_n.

Если же функция k не всюду положительна, то встает также вопрос 5) о существовании собственных значений.

Самые старые работы, относящиеся к этому кругу идей, касаются почти исключительно самосопряженного оператора $\mathfrak{M}$ с двумя переменными, который имеет вид левой части формулы (54.3). Среди известных результатов стóит особо отметить, ввиду их фундаментального характера, результаты Лихтенштейна, относящиеся к вопросам 1) и 5), а также результаты Вейля и Куранта, относящиеся к вопросам 2) и 3). Эти работы являются завершением целого ряда работ, принадлежащих также и другим авторам. Библиографию работ, вышедших до 1924 г., можно найти в монографии Лихтенштейна [4]; мы укажем только, что в этих более старых работах, кроме метода интегральных уравнений, применялись также методы вариационного исчисления, причем использовался тот факт, что собственные значения можно определить как экстремальные значения некоторых функционалов. По поводу этих вариационных методов можно смотреть книгу [1] Куранта и Гильберта[1]).

После появления монографии Лихтенштейна некоторые фундаментальные работы Карлемана дали новый толчок развитию исследований, относящихся к собственным значениям. Действительно, в работах [3] и [4] Карлеман применяет новый метод, основанный, с одной стороны, на оценке резольвентного ядра уравнения (58.2) для больших значений λ, а с другой стороны, на применении тауберовых теорем, позволяющих по свойствам резольвентного ядра делать заключения относительно свойств собственных значений и собственных функций; исходным пунктом здесь служит разложение резольвентного ядра в ряд по собственным функциям. Эти методы оказались чрезвычайно плодотворными, так как с их помощью удалось не только получить снова и уточнить результаты Вейля и Куранта, относящиеся к вопросу 3), но и получить первый ответ на вопрос 4), который до работ Карлемана оставался нерешенным[2]). Наконец, метод Карлемана позволяет подойти к изучению этих задач и в том случае, когда

---

[1]) Т. I, гл. VI и т. II, гл. VII.

[2]) Некоторые новые исследования по этим вопросам содержатся в обзорной статье Плейеля [13].

оператор $\mathfrak{M}$ несамосопряженный. Исследования Карлемана были затем успешно продолжены Плейелем, который особенно подробно занимался [4,14] случаем $\mathfrak{M}=\Delta+k$, а также тем случаем, когда функция k меняет знак [10]. Этот последний вопрос Плейель [5,6] рассматривал также с помощью вариационных методов. Затем этими задачами на римановых многообразиях занимались Плейель и Минакшисундарам [1].

В основу целого ряда исследований легла также работа [2] Карлемана, относящаяся к уравнению Шрёдингера. Как известно, для этого уравнения ставится задача о собственных значениях в неограниченной области, что существенно меняет характер задачи. Действительно, интегральное уравнение (58.2) имеет тогда сингулярное ядро, так что его спектр может не быть точечным. Поэтому при изучении вопроса 1) надо иметь в виду, что в представление произвольной функции через собственные функции вместо рядов должны войти интегралы Стильтьеса.

Здесь надо упомянуть работы Тшицинского [1, 2, 3], Плейеля [7, 8, 9], Браунелла [1], Ильина [1], Повзнера [1, 2] [1]. Некоторые случаи, когда область не ограничена, а спектр, тем не менее, точечный, рассмотрены в работах Реллиха [3] и Молчанова [1].

К уравнениям второго порядка относятся также работы Хаммерштейна [2], Титчмарша [2, 4], Гельфанда [1], Фишеля [1], касающиеся разложения в ряды по собственным функциям, работа Эйдуса, касающаяся зависимости собственных функций от области, работы Гепперта [1, 2] и Кралля [1], касающиеся систем вида

$$\mathfrak{M}u+\lambda v=0,\quad \mathfrak{N}v+\lambda u=0,$$

и, наконец, недавно опубликованная работа Гарабедяна и Шиффера [1], где изучаются минимумы (в зависимости от изменения области) некоторых функционалов, которые выражаются через собственные значения краевой задачи. Перейдем теперь к аналогичным задачам для уравнений высших порядков и систем уравнений и прежде всего укажем некоторые работы, касающиеся задач частного вида. Это работы Куранта [1], Фридрихса [1], Вейнштейна [1, 2, 3], Плейеля [1, 2, 4, 11, 12], относящиеся к различным краевым задачам для уравнения

$$\Delta_4 u+\lambda u=0,$$

а также работы Плейеля [3, 4] и Фридрихса [4], относящиеся к задачам о собственных значениях для уравнений теории упругости.

---

[1] См. также недавно опубликованную работу И. М. Гельфанда и А. Г. Костюченко, Разложение по собственным функциям дифференциальных и других операторов, ДАН СССР, **103**, № 3 (1955), 349—352. — *Прим. ред.*

Что же касается уравнений и систем уравнений общего вида, то большое количество результатов получили Вишик [3, 8], Гординг [3, 4, 6, 7], Браудер [2, 4], Морри [2, 3], применяя метод ортогональных проекций. Некоторые из этих результатов относятся также и к несамосопряженным задачам и связаны с недавно опубликованной работой Келдыша [1], посвященной этому вопросу.

Укажем, наконец, что Роте [2, 3] изучал асимптотическое поведение решений некоторых неоднородных задач при больших значениях параметра.

ПРИМЕЧАНИЕ АВТОРА к стр. 65

Доказательство теоремы 19,I принадлежит Э. Э. Леви, и многие другие математики считали его верным. Проф. О. А. Олейник указала мне, что это доказательство неполно. Действительно, существование функций α_i не очевидно. Из рассуждений, приведенных Леви в другой работе (см. Э. Э. Леви [2], стр. 12), следует, что для существования функций α_i необходимо и достаточно выполнение следующего условия: для любого нетривиального решения $\zeta(x)$ однородного уравнения, транспонированного по отношению к (19.2), не должно тождественно по α выполняться равенство

$$\int_T \zeta(x)\,\mathfrak{M}\alpha(x)\,dx = 0. \qquad (*)$$

Другими словами, достаточно доказать, что система функций $\mathfrak{M}\alpha$ полна в гильбертовом пространстве функций в T. Это становится очевидным, если предположить заранее существование фундаментального решения, но прямое доказательство представляется затруднительным. По существу теорема существования фундаментального решения и теорема полноты системы функций $\mathfrak{M}\alpha$ эквивалентны.

По этому поводу полезно сделать следующие замечания.

Во-первых, надо заметить, что теорема 19,I не употребляется нигде в дальнейшем, за исключением п. 31, все утверждения которого справедливы, если предполагать существование фундаментального решения. В частности, все результаты пп. 21 и 22 остаются в силе. Из этого следует, что фундаментальное решение существует всегда, когда заранее известна теорема единственности для задачи Дирихле или для задачи Неймана. Действительно, если справедлива теорема единственности, то (см. пп. 21 и 22) справедлива также теорема существования, откуда следует, что существует по крайней мере одно решение уравнения $\mathfrak{M}\alpha = \zeta$, так что равенство (*) не может выполняться при всех α.

Во-вторых, при условии, что существует сопряженный оператор, можно доказать, например, с помощью методов п. 29, что функция ζ, удовлетворяющая условию (*) для всех α, является решением уравнения $\mathfrak{N}\zeta = 0$ и обращается в нуль на $\mathfrak{F}T$ вместе со своей производной по конормали. Таким образом, существование функции ζ исключено, если известна теорема единственности (хотя бы в малой области) решения задачи Коши для уравнения $\mathfrak{N}\zeta = 0$. К сожалению, эта теорема доказана только для случая $m = 2$ (см. Карлеман [5]) и при любом m в аналитическом случае.

Поэтому только в этих двух случаях, а также в случае, указанном выше, теорему 19,I можно считать полностью доказанной.

Однако очень вероятно, что теорема справедлива и в общем случае, так как из противоположного утверждения можно получить очень странные следствия. Например, если бы существовало решение уравнения $\mathfrak{N}\zeta = 0$, обращающееся в нуль на $\mathfrak{F}T$ вместе со своей производной по конормали, то условия (22.7) разрешимости задачи Дирихле для уравнения $\mathfrak{M}u = f$ налагали бы ограничения только на функцию f, откуда следовала бы разрешимость задачи Дирихле для однородного уравнения $\mathfrak{M}u = 0$ с произвольными граничными данными при отсутствии единственности¹).

---

¹) В работе Е. М. Ландиса (ДАН СССР, **107**, № 5 (1956), 640—643), которая, по-видимому, еще не известна автору, теорема единственности решения задачи Коши доказана для уравнения $\mathfrak{N}\zeta = 0$ при любом m в предположении, что коэффициенты a_{ik} имеют непрерывные производные второго порядка, а b_i — непрерывные производные первого порядка. Поэтому теорема 19.I, как это следует из рассуждений автора, справедлива и в этом случае.

По поводу теоремы 19,I см. также работу Ю. И. Любич, О фундаментальных решениях линейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, Матем. сборник, 39 (81), № 1 (1956), 23—36.— *Прим. ред.*

БИБЛИОГРАФИЯ

Адамар (Hadamard J.)

[1] Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Ed. Hermann, Paris (1932). [2] Équations aux dérivées partielles, L'Enseign. Math., **35** (1936), 5—42.

Адельсон-Вельский Г. М. и Кронрод А. С.

[1] О принципе максимума для решений системы уравнений в частных производных эллиптического типа, ДАН СССР, **49** (1945), 539.

Айзенштат Н. Д.

[1] Об одном типе аддитивного оператора, Ученые записки МГУ, **15** (1939), 95.

Акваро (Aquaro G.)

[1] Un teorema di media per le equazioni della elasticità, Rivista di Mat. Parma, **1** (1950), 419—424.

Америо (Amerio L.)

[1] Teoremi di esistenza per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico nei domini illimitati, Rend. Acc. d'Italia, **4** (1943), 287—298. [2] Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_4 u = 0$ in due variabili, Rend. Ist. Lombardo, **77** (1943—1944), 377—419. [3] Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ in un dominio di connessione qualsiasi, Rend. Ist. Lombardo, **78** (1944—1945), 1—24. [4] Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_{2k} u = f$, Ann. Mat. pura appl., **24** (1945), 119—138. [5] Sull'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico, Acta Pont. Ac. Sc., **9** (1945), 213—228. [6] Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico, Am. J. of Math., **69** (1947), 447—489. [7] Sul calcolo delle autosoluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico, Rend. Acc. Lincei, **1** (1946), 352—359, 505—509. [8] Su un metodo di integrazione delle equazioni differenziali lineari a derivate parziali, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, **18** (1947), 114—123.

Асколи (Ascoli G.)

[1] Sull'unicità della soluzione nel problema di Dirichlet, Rend. Acc. Lincei, **8** (1928), 348—351. [2] Sull'equazione di Laplace nello spazio iperbolico, Math. Z., **31** (1929), 45—96. [3] Le equazioni a derivate parziali del tipo ellittico, Rend. Sem. Mat. Milano, **9** (1935), 15—32.

Асколи, Бургатти и Жиро (Ascoli G., Burgatti P., Giraud G.)

[1] Equazioni alle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico, Pubbl. Sc. N. Sup. Pisa, 1936.

Аткинсон (Atkinson F. V.)

[1] On a theorem of K. Yosida, Proc. Japan. Acad., **28** (1952), 327—329.

Беккерт (Beckert H.)

[1] Die Abhängigkeit der Lösungen quasi linearer elliptischer Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen von einem Parameter, Math. Nach., **5** (1951), 111—121. [2] Über lineare elliptische Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen, Math. Nach., 5 (1951), 173—208.

Берг и Лакс (Berg P., Lax P.)

[1]) Fourth order operators, Rend. Sem. Mat. Torino, **11** (1952), 343—358.

Бергман (Bergman S.)

[1] Über die Bestimmung der elastischen Spannungen und Verschiebungen in einem konvexen Körper, Math. Ann., **98** (1927), 248—263. [2] Sur un lien entre la théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques et celle des fonctions d'une variable complexe, C. R. Acad. Sc. Paris, **205** (1937), 1198—1200. [3] Sur un lien entre la théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques et celle des fonctions analytiques d'une variable, C. R. Acad. Sc. Paris, **205** (1937), 1360—1362. [4] Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen, ДАН СССР, **15** (1937), 227—230. [5] Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen, Мат. сб., **2** (1937), 1169—1197. [6] Boundary values of functions satisfying a linear partial differential equation of elliptic type, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, **26** (1940), 668—671. [7] The approximation of functions satisfying a linear partial differential equation, Duke Math. J., **6** (1940), 537—561. [8] Linear operators in the theory of partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., **53** (1943), 130—155. [9] The determination of some properties of a function satisfying a partial differential equation from its series development, Bull. Amer. Math. Soc., **50** (1944), 535—546. [10] Solutions of linear partial differential equations of the fourth order, Duke Math. J., **11** (1944), 617—649. [11] Certain classes of analytic functions of two real variables and their properties, Trans. Amer. Math. Soc., **57** (1945), 299—331. [12] A class of non linear partial differential equations and their properties, Bull. Amer. Math. Soc., **51** (1945), 545—554. [13] Classes of solutions of linear partial differential equations in three variables, Duke Math. J., **13** (1946), 419—458. [14] Functions satisfying certain partial differential equations and their representation, Duke Math. J., **14** (1947), 349—366. [15] The kernel function and conformal mapping, Math. Survey n. 5 publ. by Amer. Math. Soc., 1950. [16] On solutions with algebraic character of linear partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., **68** (1950), 461—507. [17] The coefficient problem in the theory of linear partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., **73** (1952), 1—34.

Бергман и Шиффер (Bergman S., Schiffer M.)

[1] A representation of Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations of second order, Duke Math. J. **14** (1947), 609—638. [2] On Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations, Bull. Amer. Math. Soc., **53** (1947), 1141—1151. [3] Kernel functions in the theory of partial differential equations of elliptic type, Duke Math. J., **15** (1948), 535—566. [4] Various kernels in the theory of partial differential equations, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, **36** (1950), 559—563. [5] Some linear operators in the theory of partial differential equations, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, **36** (1950), 742—746. [6] A majorant method for non linear partial differential equations, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, **37** (1951), 744—749. [7] Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics, Academic Press Inc. New York, 1953.

Бернштейн С. Н.

[1] Sur la nature analytique des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre, Math. Ann., **59** (1904), 20—76. [2] Sur la généralisation du problème de Dirichlet, Math. Ann., **62** (1906), 253—271, **69** (1910), 82—136. [3] Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными 2-го порядка эллиптического типа, Сообщ. Харьковского математического общества, вторая серия, **XI**, № 6 (1910). [4] Sur les équations du calcul des variations, Ann. Éc. N. Sup., **29** (1912), 431—485. [5] Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du type elliptique. Math. Ann., **95** (1926), 585—594, **96** (1927) 633—647. [6] Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du type elliptique. Extrait d'une correspondance avec M. Radò, Math. Z., **25** (1926), 505—513. [7] Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, Math. Z., **26** (1927), 551—558. [8] Démonstration du théorème de M. Hilbert sur la nature analytique des solutions des équations du type elliptique sans l'emploi des séries normales, Math. Z., **28** (1928), 330—348.

Берс (Bers L.)

[1] Partial differential equations and generalized analytic functions, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, **36** (1950), 130—136; **37** (1951), 42—47. [2] The expansion theorem for sigma monogenic functions, Amer. J. Math., **72** (1950), 705—712. [3] Univalent solution of linear elliptic systems, Commun. pure appl. Math., **6** (1953), 513—526.

Берс и Гельбарт (Bers L., Gelbart A.)

[1] On a class of functions defined by partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., **56** (1944), 67—93. [2] On generalized Laplace transformations, Annals of Math., **48** (1947), 342—357. [3] On a class of differential equations in mechanics of continua, Quart. appl. Math., **1** (1943), 168—188.

Бицадзе А. В.

[1] Об общем представлении решений линейных эллиптических дифференциальных уравнений, Сообщ. АН Груз. ССР, **IV** (1943), 619. [2] Граничные задачи для систем линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа, Сообщ. АН Груз. ССР, **V**, № 8 (1944). [3] О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными, УМН, **III**, 6 (28) (1948), 211.

Бонончини (Bononcini V. E.)

[1] Sul problema di Dirichlet in domini rettangolari, Atti Sem. Mat. Modena, 5 (1950—1951), 154—164.

Бонсаль (Bonsall F. F.)

[1] On generalized subharmonic functions, Proc. Cambridge Philos. Soc., **46** (1950), 387—395.

Бохнер (Bochner S.)

[1] Partial differential equations and analytic continuations, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, **38** (1952), 227—230. [2] Zeta functions and Green's functions for linear partial differential operators of elliptic type with constant coefficients, Ann. of Math., **57** (1953), 32—56.

Браудер (Browder F. E.)

[1] The Dirichlet problem for linear elliptic equations of arbitrary even order with variables coefficients, Proc. Nat. Acad. USA, **38** (1952), 230—235. [2] The Dirichlet and vibrations problems for linear elliptic differential equations of arbitrary order, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, **38** (1952), 741—747. [3] Assumption of boundary values and the Green's function in the Dirichlet problem for the general elliptic equation, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, **39** (1953), 179—184. [4] On the eigenfunctions and eigenvalues of the general elliptic differential operator, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, **39** (1953), 433—439. [5] Linear parabolic differential equations of arbitrary order; general boundary-value problems for elliptic equations, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, **39** (1953), 185—190.

Браунелл (Brownell F. H.)

[1] Spectrum of the static potential Schrödinger equation over E_n, Ann. **of** Math., **54** (1951), 554—594.

Брело (Brelot M.)

[1] Sopra il problema di Dirichlet generalizzato relativo al dominio limitato più generale e all' equazione: $\Delta u = cu + f (c \geqslant 0)$, Rend. Ist. Lombardo, **63** (1930), 917—941. [2] Sur l'équation $u = cu$, $c > 0$, quand c admet des points singuliers; et une équation de Fredholm correspondante à noyau singulier, Rend. Circ. Mat. Palermo, **55** (1931), 21—49. [3] Étude de l'équation de la chaleur $\Delta u = cu$, $c \geqslant 0$, au voisinage d'un point singulier du coefficient, Ann. Éc. N. Sup., **48** (1931), 153—246. [4] Étude des intégrales bornées de l'équation $\Delta u = cu$ $(c \geqslant 0)$ au voisinage de singularités de c formant un ensemble de capacité nulle, Bull. Sc. Mat., **55** (1931), 281—296. [5]Über die Singularitäten der Potentialfunktionen und der Integrale der Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, Sitzber. Berl. Math. Ges., **31** (1932), 46—54. [6] Quelques propriétés générales des intégrales bornées de $\Delta u = cu$, sur un domaine borné ouvert où c est continu, Bull. Sc. Math., **56** (1932), 105—117. [7] Sur un théorème de non existence relatif à l'équation $\Delta u = cu$. Bull. Sc. Mat., **56** (1932), 389—395. [8] Sur l'allure à la frontière de la solution du problème de Dirichlet généralisé relatif à l'équation $\Delta u = cu + f$, $c \geqslant 0$, $| f |$ borné, Rend. Ist. Lombardo, **65** (1932), 119—128. [9] Sur l'allure à la frontière des intégrales bornées de $\Delta u = cu$ $(c \geqslant 0)$, Rend. Ist. Lombardo, **65** (1932), 433—448. [10] Einige neuere Untersuchungen über das Dirichletsche Problem, Jber. Deut. Math. Vereinig., 42 (1932), 111—119. [11] Sur le principe des singularités positives et la notion de source pour l'équation $\Delta u = cu$, Ann. Univ. Lyon Sect. A., **11** (1948), 9—19.

Бремеркамп (Bremerkamp H.)

[1] Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre du type elliptique, Proc. R. Acad. Amsterdam, **34** (1931), 390—398. [2] Sur l'unicité des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du quatrième ordre, Proc. Nederl. Akad. Wetensch., **45** (1942), 546—552. [3] Sur l'existence et la construction des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du quatrième ordre, Proc. Nederl. Akad. Wetensch., **45** (1942), 675—680. [4] On the uniqueness of the solutions of $\Delta^k u = 0$, Indag. Math., **7** (1945), 27—33. [5] On the existence of a solution of $\Delta^k u = 0$ which together with its $k - 1$ first normal derivatives takes given values at the points of a given closed curve, Indag. Math., 8 (1946), 82—90, 171—187. [6] On the solutions of the equation $\Delta\Delta u = 0$ which satisfy certain boundary conditions, Indag. Math., 8 (1946), 188—199. [7] On the partial differential equations occurring in the elastic plate, Nieuw Arch. Wiskunde, **22** (1946), 189—199. [8] Construction of the solution of $\Delta^k u = 0$ satisfying given boundary conditions on a circle or a sphere, Nieuw Arch. Wiskunde, **22** (1948), 293—299. [9] Con-

struction of the solution of $\Delta^k u = 0$ in the case that the boundary is an ellipse, Nieuw Arch. Wiskunde, **22** (1948), 300—305.

Бремеркамп и Боттема (Bremerkamp H., Bottema O.)

[1] On the solutions of the equation $\Delta^\nu u = 0$ which satisfy certain boundary conditions, Indag. Math., 8 (1946), 279—298.

Брийуэн (Brillouin M.)

[1] Équations linéaires aux dérivées partielles dans le plan. Domaines à connexion multiple. Construction des intégrales pour des conditions données aux frontières, C. R. Acad. Sc. Paris, **196** (1933), 307—310.

Брусс (Brousse P.)

[1] Sur un problème de Dirichlet singulier, C. R. Acad. Sc. Paris, **236** (1953), 1731—1732.

Булиган (Bouligand G.)

[1] Sur certaines équations du type elliptique à coefficients singuliers, Bull. Acad. R. Belg., **18** (1932), 840—857. [2] Sur les ensembles impropres dans le problème de Dirichlet pour une équation elliptique à coefficients singuliers, Bull. Ac. R. Belg., **17** (1931), 40—42. [3] Sur quelques cas singuliers du problème de Dirichlet, Bull. Ac. R. Belg., **19** (1933), 301—317.

Булиган, Жиро, Делан (Bouligand G., Giraud G., Delens P.)

[1] Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel, Ed. Hermann, Paris, 1936.

Бюро (Bureau F.)

[1] Sur les solutions élémentaires des équations linéaires aux dérivées partielles totalement elliptiques, C. R. Acad. Sc. Paris, **202** (1936), 454—456. [2] Essai sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, Mém. Acad. R. Belg. Coll. in 8°, **15** (1936), 1—111. [3] Les solutions élémentaires des équations linéaires aux dérivées partielles, Mém. Acad. R. Belg. Coll. in 8°, **15** (1936). 1—37. [4] Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, Bull. Acad. R. Belg., **22** (1936), 156—174.

Вассерман (Wassermann G. D.)

[1] On perturbation problems associated with finite boundaries, Proc. Cambridge Phil. Soc., **44** (1948), 251—262. [2] A note on boundary perturbations, Quart. J. Mech. appl. Math. Oxford, **1** (1948), 145—148.

Вашицу (Washizu K.)

[1] Bounds for solutions of boundary value problems in elasticity, J. Math. Phys., **32** (1953), 117—128.

Вейль Г. (Weyl H.)

[1] The method of orthogonal projection in potential theory, Duke Math. J., **7** (1940), 411—444. [2] On Hodge's theory of harmonic integrals, Ann. of Math., **44** (1943), 1—6. [3] Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe, Comm. Math. Helvetici, **20** (1947), 110—116. [4] Radiation capacity, Proc. Nat. Acad. USA, **37** (1951), 832—836. [5] Kapazität von Strahlungsfeldern, Math. Z., **55** (1952), 187—198.

Вейнштейн (Weinstein A.)

[1] Etude des spectres des équations aux dérivées partielles de la théorie des plaques élastiques, Mémorial Sc. Math., 88 (1937). [2] Sur la théorie unitaire des valeurs propres des membranes et des plaques encastrées,

C. R. Acad. Sc. Paris, **210** (1940), 161—163. [3] Les vibrations et le calcul des variations, Portugaliae Math., **2** (1941), 36—55. [4] On the decomposition of a Hilbert space by its harmonic subspace, Amer. J. Math., **63** (1941), 615—618.

Вейнштейн и Аронштейн (Weinstein A., Aronszajn N.)

[1] On the unified theory of eigenvalues of plates and membranes, Amer. J. of Math., **64** (1942), 623—643.

Вейнштейн и Дженкинс (Weinstein A., Jenkins J. A.)

[1] On a boundary value problem for a clamped plate, Trans. R. Soc. Canada, **40** (1946), 59—67.

Векуа И. Н.

[1] Общее представление решений дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, линейных относительно оператора Лапласа, Труды Тбил. мат. инст., **II** (1937), 227. [2] Об общем представлении решений дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, ДАН СССР, **17** (1937), 291. [3] Граничные задачи теорем линейных эллиптических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными, Сообщ. АН Груз. ССР, **1** (1940), 29. [4] Комплексное представление решений эллиптических дифференциальных уравнений и его применения к граничным задачам, Труды Тбил. мат. инст., **VII** (1940), 161. [5] Allgemeine Darstellung der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet., Сообщ. Груз. филиала АН СССР, **I**, 5 (1940), 329. [6] Об аппроксимации решений эллиптических дифференциальных уравнений, Сообщ. АН Груз. ССР, **III** (1942), 97. [7] Решение основной краевой задачи для уравнения $\Delta^{m+1} u = 0$, Сообщ. АН Груз. ССР, **III** (1942), 213. [8] Замечания об общем представлении решений дифференциальных уравнений эллиптического типа, Сообщ. АН Груз. ССР, **IV**, 5 (1943), 391. [9] О метагармонических функциях, Труды Тбил. мат. инст., **XII** (1943), 105. [10] Об одном интегральном представлении решений дифференциальных уравнений, Сообщ. АН Груз. ССР, **IV**, 9 (1943), 847. [11] Об одном новом представлении решений дифференциальных уравнений, Сообщ. АН Груз. ССР, **IV**, 10 (1943), 947. [12] Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., ГТТИ, 1948. [13] Об одном представлении решений дифференциальных уравнений эллиптического типа, Сообщ. АН Груз. ССР, **11**, 3 (1950), 137.

Винтнер (Wintner A.)

[1] On the Hölder restrictions in the theory of partial differential equations, Amer. J. of Math., **72** (1950), 731—738.

Виола (Viola T.)

[1] Sull'esistenza del minimo assoluto di taluni integrali multipli, connessi con i problemi al contorno per le funzioni iperarmoniche, Ann. Sc. N. Sup. Pisa, **6** (1952), 109—145.

Вишик М. И.

[1] Метод ортогональных проекций для самосопряженных дифференциальных уравнений, ДАН СССР, **56**, 2 (1947), 115. [2] Методы ортогональных проекций для общих линейных самосопряженных эллиптических дифференциальных уравнений, ДАН СССР, **58**, 6 (1947), 957. [3] Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений, Мат. сб., **25**, 2 (1949), 189. [4] О линейных краевых задачах для дифференциальных уравнений. ДАН СССР, **65**, 6 (1949), 785,

[5] О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, ДАН СССР, **74**, 5 (1950), 881. [6] Об общем виде линейных краевых задач для эллиптического дифференциального уравнения, ДАН СССР, **77**, 3 (1951), 373. [7] О некоторых краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений, ДАН СССР, **77**, 4 (1951), 553. [8] О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Мат. сб., **29**, 3 (1951), 615. [9] Об устойчивости решений краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений (относительно изменения коэффициентов и правых частей), ДАН СССР, **88**, 5 (1951), 717. [10] Об общем виде разрешимых краевых задач для однородного и неоднородного эллиптического дифференциального уравнения, ДАН СССР, **82**, 2 (1952), 181. [11] Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений, Труды Моск. мат. общ., **1** (1952), 187. [12] О краевых задачах для систем эллиптических дифференциальных уравнений и об устойчивости их решений, ДАН СССР, **86**, 4 (1952), 645.

Вольперт А. И.

[1] Задача Дирихле для эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка на плоскости, ДАН СССР, **79**, 2 (1951), 185.

Гагаев Б. М.

[1] О функциях, удовлетворяющих эллиптическому уравнению, ДАН СССР, **XVIII** (1938), 393.

Гарабедян (Garabedian P.)

[1] A partial differential equation arising in conformal mapping, Pacific J. Math., **1** (1951), 485—524.

Гарабедян и Шиффер (Garabedian P., Schiffer M.)

[1] Variational problems in the theory of elliptic partial differential equations, J. rat. Mech. Anal., **2** (1953), 137—171.

Гельфанд И. М.

[1] Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами, ДАН СССР, **73**, 6 (1950), 1117.

Гепперт (Geppert H.)

[1] Über die Eigenwertprobleme bei nicht selbstadjungierten elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Ann., **95** (1926), 519—543. [2] Über Randwertprobleme bei linearen elliptischen Differentialgleichungen, Math. Ann., **98** (1928), 264—272.

Герглотц (Herglotz G.)

[1] Über die Integration linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, Ber. Sächs. Akad. Leipzig, 78 (1926), 93—126, 287—318.

Германеску М. (Ghermanesco M.)

[1] Sur les fonctions n-métaharmoniques de p variables, Rend. Acc. Lincei, **14** (1931), 252—259. [2] Sur les fonctions n-métaharmoniques, Rend. Acc. Lincei, **14** (1931), 415—421. [3] Sur certains systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles du type elliptique, C. R. Acad. Sc. Paris, **194** (1932), 430—432. [4] Sur l'analyticité des solutions d'une certaine équation aux dérivées partielles, non linéaire, Rend. Acc. Lincei, **17** (1933), 507—514.

Гилбарг (Gilbarg D.)

[1] The Phragmén-Lindelöf theorem for elliptic partial differential equations, J. rat. Mech. Anal., **1** (1952), 411—417.

Гильберт (Hilbert D.)

[1] Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 2. Auflage, Teubner, Leipzig, 1924.

Гиццетти (Ghizzetti A.)

[1] Sul metodo della trasformata parziale di Laplace a intervallo d'integrazione finito, Rend. Mat. Roma, **6** (1947), 1—47. [2] Ricerche analitiche sul problema dell'equilibrio di una piastra indefinita a forma di striscia, incastrata lungo i due lati, Rend. Mat. Roma, **6** (1947), 145—187. [3] Un'osservazione sul metodo di Ritz ed applicazione al calcolo della frequenza fondamentale di una membrana circolare con foro circolare eccentrico, Rend. Acc. Lincei, 2 (1947), 559—564. [4] Applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace per l'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = F$ in n variabili, Rend. Sem. Mat. Padova, **17** (1948), 39—74. [5] Su un particolare problema misto per una equazione di tipo ellittico a coefficienti costanti, Rend. Acc. Lincei, 5 (1948), 344—348. [6] Flow in a not homogeneous and anisotropic medium, Ann. Soc. Polon. Math., **22** (1949), 195—200.

Гординг (Gårding L.)

[1] Le problème de Dirichlet pour les équations aux dérivées partielles elliptiques homogènes à coefficients constants, C. R. Acad. Sc. Paris, **230** (1950), 1030—1032. [2] On a lemma by H. Weyl, Proc. Roy. Physiog. Lund., **20** (1950), 250—253. [3] Dirichlet's problem and vibration problem for linear elliptic partial differential equations with constant coefficients, Proc. Symp. on Spectral Theory and Differential Problems Oklahoma College (1951), 291—299. [4] The asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of a general vibration problem, Proc. R. Physiog. Soc. Lund, **21** (1951), n. 11. [5] Le problème de Dirichlet pour les équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires dans des domaines bornés, C. R. Acad. Sc. Paris, **233** (1951), 1554—1556. [6] Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, Math. Scandinavica, **1** (1953), 55—72. [7] On the asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators, Math. Scandinavica, **1** (1953), 237—255.

Гриоли (Grioli G.)

[1] Struttura della funzione di Airy nei sistemi molteplicemente connessi, Giorn. Mat. Battaglini, **77** (1947—1948), 119—144. [2] Proprietà di media ed equilibrio elastico, Atti 4° Congr. U. M. It. Taormina, **1** (1951), 68—77.

Гросберг Ю. И.

[1] О применении метода Б. Г. Галеркина к задачам с неоднородными краевыми условиями, ДАН СССР, **85**, 3 (1952), 473.

Гурвиц (Hurwitz W. A.)

[1] Randwertprobleme bei Systemen von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Diss., Göttingen, 1910.

Де Джорджи (De Giorgi E.)

[1] Osservazioni relative a teoremi di unicità per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo ellittico con condizioni al contorno di tipo misto, Ricerche di Mat. Napoli, **2** (1953), 183—191.

Денфер (Denffer H. von)

[1] Über die Bernsteinsche Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, Schr. Math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin, **2** (1935), 237—276.

Де Рам (De Rham G.)

[1] Sur la théorie des formes différentielles harmoniques, Ann. Univ. Grenoble, 22 (1946), 135—152. [2] Remarque au sujet de la théorie des formes différentielles harmoniques, Ann. Univ. Grenoble, **23** (1948), 55—56.

Де Рам и Бидаль (De Rham G., Bidal P.)

[1] Les formes différentielles harmoniques, Comm. Math. Helvetici, **19** (1946), 1—49.

Де Рам и Кодаира (De Rham G., Kodaira K.)

[1] Harmonic integrals, Mimeographed Notes, Institute of Adv. Study, Princeton, 1950.

Джон (John F.)

[1] A note on the maximum principle for elliptic differential equations, Bull. Amer. Math. Soc., **44** (1938), 268—271. [2] Linear partial differential equations with analytic coefficients. Proc. Nat. Acad. USA. **29** (1943), 98—104. [3] On linear partial differential equations with analytic coefficients, Commun. pure appl. Math., 2 (1949), 209—253. [4] The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients, Commun. pure appl. Math., **3** (1950), 273—304. [5] General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations, Proc. Symp. Spectral Th. and Diff. Probl. Oklahoma College (1951), 113—175. [6] Derivatives of continuous weak solutions of linear elliptic equations, Commun. pure appl. Math., **6** (1953), 327—335.

Диас (Diaz J. B.)

[1] On a class of partial differential equations of even order, Amer. J. Math., **68** (1946), 611—659.

Диас и Гринберг (Diaz J. B., Greenberg H. J.)

[1] Upper and lower bounds for the solution of the first boundary value problem of elasticity, Quart, appl. Math., **6** (1948), 326—331. [2] Upper and lower bounds for the solution of the first biharmonic boundary value problem, J. Math. Physics, **27** (1948), 153—201.

Дрэгану М. (Drăganu M.)

[1] Несколько формул в проблемах с косой производной, АН Рум. Нар. Респ., Научный Вестник, серия мат., физ. и хим., **II**, № 7 (1950).

Дуглис (Douglis A)

[1] A function-theoretic approach to elliptic systems of equation in two variables, Commun. pure appl. Math., **6** (1953), 259—289. [2] Uniqueness in Cauchy problems for elliptic systems of equations, Commun. pure appl. Math., **6** (1953), 291—298.

Жевре (Gevrey M.)

[1] Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles, Ann. Éc. N. Sup., **35** (1918), 127—190. [2] Démonstration du théorème de Picard — Bernstein par la méthode des contours successifs; prolongement analytique, Bull. Sc. Math., **50** (1926), 113—128. [3] Résolution des problèmes aux limites sans fonctions de Green, C. R. Acad. Sc. Paris, **182** (1926), 36—38. [4] Sur certaines propriétés des fonctions harmoniques et leur extension aux équations aux dérivées partielles, C. R. Acad. Sc. Paris, **183** (1926), 544—546. [5] Nature analytique et prolongement des solutions des équations non linéaires du type elliptique et parabolique, C. R. Acad. Sc. Paris, **182** (1926), 754—756. [6] Hypothèses concernant la résolution des

problèmes aux limites du type elliptique, C. R. Acad. Sc. Paris, **188** (1929), 1652—1655. [7] Détermination et emploi des fonctions de Green dans les problèmes aux limites relatifs aux équations linéaires du type elliptique, J. de Math., **9** (1930), 1—80. [8] Détermination des intégrales des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique, C. R. Acad. Sc. Paris, **193** (1931), 693—695. [9] De quelques questions concernant les types elliptique et parabolique: usage de la médiation périphérique ou spatiale; unicité des solutions des systèmes d'équations, C. R. Acad. Sc. Paris, **197** (1933), 296—298. [10] Les quasi fonctions de Green et les systèmes d'équations aux dérivées partielles du type elliptique, Ann. Éc. N. Sup., **52** (1935), 39—108. [11] Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques imaginaires multiples, C. R. Acad. Sc. Paris, **203** (1936), 604—606. [12] Sur une généralisation du principe des singularités positives de M. Picard, C. R. Acad. Sc. Paris, **211** (1940), 581—584. [13] Sur le problème de la dérivée oblique relatif aux équations linéaires aux dérivées partielles ou intégrodifférentielles du type elliptique canonique à deux variables, C. R. Acad. Sc. Paris, **213** (1941), 635—637. [14] Sur un procédé de résolution dans le plan du problème aux limites linéaire le plus général relatif aux équations intégrodifférentielles du type elliptique, C. R. Acad. Sc. Paris, **214** (1942), 206—208. [15] Sur les problèmes aux limites comportant une dérivée oblique et concernant le type elliptique à m variables, C. R. Acad. Sc. Paris, **214** (1942) 854—855. [16] Sur le cas irrégulier du problème de la dérivée oblique lorsque le nombre des variables est supérieur à deux, C. R. Acad. Sc. Paris, **225** (1947), 1251—1253.

Жиллис (Gillis P. P.)

[1] Intégrales doubles du calcul des variations, Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., **36** (1950), 403—412. [2] Équations de Monge — Ampère à quatre variables indépendantes, Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., **36** (1950), 474—484. [3] Équations de Monge—Ampère à six variables indépendantes, Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., **37** (1951), 229—240. [4] Sur certaines équations de Monge—Ampère du calcul des variations, Bull. Soc. Math. Belgique (1952), 38—50.

Жиро (Giraud G.)

[1] Sur le problème de Dirichlet généralisé; équations non linéaires à m variables, Ann. Éc. N. Sup., **43** (1926), 1—128. [2] Sur le problème de Dirichlet généralisé (deuxième mémoire), Ann. Éc. N. Sup., **46** (1929), 131—245. [3] Sur les équations du type elliptique et la méthode des approximations successives, J. de Math., 8 (1929), 269—300. [4] Sur les équations aux dérivées partielles du type elliptique, Bull. Sc. Math., **53** (1929), 367—395. [5] Sur différentes questions relatives aux équations du type elliptique, Ann. Éc. N. Sup., **47** (1930), 197—266. [6] Sur certains problèmes aux limites concernant les équations du type elliptique, C. R. Acad. Sc. Paris, **190** (1930), 613—614. [7] Sur les intégrales principales de Cauchy et sur leur application à certains problèmes relatifs aux équations du type elliptique, C. R. Acad. Sc. Paris, **191** (1930), 244—246. [8] Sur les équations intégro-différentielles jointes à des conditions intégro-différentielles à la frontière, C. R. Acad. Sc. Paris, **191** (1930), 478—480. [9] Extension des résultats concernant certains problèmes de données à la frontière, C. R. Ac. Sc. Paris, **191** (1930), 1110—1112. [10] Sur certains problèmes concernant des systèmes d'équations du type elliptique, C. R. Ac. Sc. Paris, **192** (1931), 471—473. [11] Détermination des tenseurs par des équations aux dérivées partielles jointes à des conditions à la frontière, C. R. Ac. Sc. Paris, **192** (1931), 1338—1340. [12] Extension de la notion de solution élémentaire principale et applications, C. R. Ac. Sc. Paris, **193** (1931), 353—355. [13] Problèmes des valeurs à la frontière dans le cas de données

discontinues, C. R. Ac. Sc. Paris, **193** (1931), 818—820. [14] Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes, Bull. Ac. Polon. Sc. (1931), 421—437. [15] Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes, Ann. Éc. N. Sup., **49** (1932), 1—104, 245—308. [16] Généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptique, Bull. Sc. Math., **56** (1932), 248—272, 281—312, 316—352. [17] Sur certains cas de données discontinues relatifs aux problèmes de valeurs à la frontière, C. R. Ac. Sc. Paris, **194** (1932), 1142—1145. [18] Sur une extension de la théorie des équations intégrales de Fredholm, avec application, C. R. Ac. Sc. Paris, **195** (1932), 454—456. [19] Sur quelques problèmes de Dirichlet et de Neumann, J. de Math., **11** (1932), 389—416. [20] Problèmes de valeurs à la frontière relatifs à certaines données discontinues, Bull. Soc. Math. de France, **61** (1933), 1—54. [21] Validité de la théorie de Fredholm pour certains noyaux non bornés, Bull. Sc. Math., **57** (1933), 327—334. [22] Sur certaines équations de Fredholm à noyau non borné, Bull. Sc. Math., **57** (1933), 390—401. [23] Validité de la théorie de Fredholm pour certains noyaux non bornés, C. R. Acad. Sc. Paris, **196** (1933), 595—597. [24] Sur certains problèmes mixtes, relatifs aux équations linéaires du type elliptique, C. R. Ac. Sc. Paris, **198** (1934), 40—42. [25] Sur une nouvelle généralisation des questions relatives aux équations du type elliptique, C. R. Ac. Sc. Paris, **198** (1934), 885—887. [26] Problèmes mixtes et problèmes sur de variétés closes, relativement aux équations linéaires du type elliptique, Ann. Soc. Polon. de Math., **12** (1933), 35—54. [27] Équations à intégrales principales. Étude suivie d'une application, Ann. Éc. N. Sup., **51** (1934), 251—372. [28] Équations linéaires ou non aux dérivées partielles du type elliptique, C. R. Ac. Sc. Paris, **199** (1934), 1001—1003. [29] Sur certaines opérations du type elliptique, C. R. Ac. Sc. Paris, **200** (1935), 1651—1653. [30]. Sur la fonction de Green d'un domaine borné de l'espace euclidien à trois dimensions, C. R. Ac. Sc. Paris, **201** (1935), 22—24. [31] Problèmes des types de Dirichlet et de Neumann dans certains cas où les données sont discontinues, C. R. Ac. Sc. Paris, **201** (1935), 925—928. [32] Sur une catégorie d'équations fonctionnelles, Ann. Éc. N. Sup., **52** (1935), 109—130. [33] Nouvelle généralisation des problèmes relatifs aux opérations du type elliptique, Ann. Soc. Polon. de Math., **14** (1935), 74—115. [34] Existence de certaines dérivées des fonctions de Green; conséquence pour les problèmes du type de Dirichlet, C. R. Ac. Sc. Paris, **202** (1936), 380—382. [35] Sur une classe générale d'équations à intégrales principales, C. R. Ac. Sc. Paris, **202** (1936), 2124—2126. [36] Complément à un résultat sur les équations à intégrales principales, C. R. Ac. Sc. Paris, **203** (1936), 292—294. [37] Sur une propriété de certains potentiels logarithmiques généralisés, Bull. Ac. Polon. Sc. (1936), 211. [38] Sur une généralisation des potentiels logarithmiques de double couche, Bull. Ac. Polon. Sc. (1936), 315—317. [39] Equations à intégrales principales d'ordre quelconque, Ann. Éc. N. Sup., **53** (1936), 1—40. [40] Sur un type d'équation à intégrales principales, J. de Math., **15** (1936), 192—205. [41] Sur certaines équations à intégrales principales, Ann. Éc. N. Sup., **54** (1937), 293—294. [42] Définitions élargies des noyaux résolvants de Fredholm et des fonctions de Green, Bull. Sc. Math., **61** (1937), 172—192. [43] Équations et systèmes d'équations où figurent des valeurs principales d'integrales, C. R. Ac. Sc. Paris, **204** (1937), 628—630. [44] Sur une nouvelle catégorie d'équations où figurent des valeurs principales d'intégrales, C. R. Ac. Sc. Paris, **205** (1937), 765—768. [45] Nouvelles propriétés de certaines équations où figurent des valeurs principales d'intégrales C. R. Ac. Sc. Paris, **205** (1937), 1024—1025. [46] Nouvelle méthode pour traiter certains problèmes relatifs aux équations du type elliptique, C. R. Ac. Sc. Paris, **205** (1937), 1340—1343. [47] Nouvelle extension d'un type de pr blèmes relatifs aux équations du type elliptique, C. R. Ac. Sc. Paris, **206** (1938), 1157—1160. [48] Généralisation d'un type de problèmes relatifs aux équations aux dérivées partielles du type elliptique, Ann. Sc. N. Sup. Pisa, **7** (1938), 25—71. [49] Sur les dérivées des fonctions qui répondent à un problème du type de Dirichlet, C. R. Ac. Sc. Paris, **207** (1938), 956—958. [50] Nouvelle méthode pour traiter certains problèmes relatifs aux équations du type elliptique, J. de Math., **18** (1939), 111—143. [51] Sur une nouvelle extension de la théorie des équations du type elliptique, C. R. Ac. Sc. Paris, **207** (1938), 1351—1354. [52] Sur un type de problèmes relatifs aux équations du type elliptique à deux variables indépendantes, C. R. Ac. Sc. Paris, **208** (1939), 1462—1465. [53] Sur une classe d'équations linéaires où figurent des valeurs principales d'intégrales simples, Ann. Éc. N. Sup., **56** (1939), 119—172.

Заремба (Zaremba S.)

[1] Sur un problème toujours possible comprenant, à titre de cas particuliers, le problème de Dirichlet et celui de Neumann, J. Math. pures appl., **6** (1927), 127—163.

Зауэр (Sauer L.)

[1] Parametrixmethode zur Lösung von Randwertproblemen, Math. Ann., **118** (1942), 385—440; **119** (1943), 67—130.

Иглиш (Iglisch R.)

[1] Reelle Lösungsfelder der elliptischen Differentialgleichung $\Delta u = F(u)$ und nichtlinearer Integralgleichungen, Math. Ann., **101** (1929), 98—119.

Ильин В. А.

[1] О сходимости вариационных процессов, ДАН СССР, **81**, 2 (1951), 137. [2] О сходимости билинейных рядов из собственных функций, ДАН СССР, **74**, 4 (1950), 653.

Иноуэ (Inoue M.)

[1] On the resolution of $\Delta u = cu + \varphi$ by iteration of averaging process, J. Inst. Polytechn. Osaka Univ., **1** (1950), 83—91.

Иосида (Yosida K.)

[1] A theorem of Liouville's type for meson equation, Proc. Japan Acad., **27** (1951), 214—215.

Каландия А. И.

[1] Решение основной граничной задачи для уравнения $\Delta^n u = 0$ в двусвязной области, Труды Тбил. мат. инст., **17** (1949), 163. (Груз.; русск. резюме.) [2] Решение основной N-гармонической задачи в случае бесконечной области, Труды Тбил. мат. инст., **17** (1949), 169. [3] Замечание о единственности решения основной граничной задачи для одного класса эллиптических уравнений, Сообщ. АН Груз. ССР, **12**, 6 (1951), 321. [4] Основная n-гармоническая задача для многосвязных областей, Изв. АН СССР, сер. мат., **15**, 2 (1951), 185.

Калкин (Calkin J. W.)

[1] Abstract self-adjoint boundary conditions. Proc. Nat. Acad. Sc. USA, **24** (1938), 38—42.

Каменомостская С. Л.

[1] Об уравнениях эллиптического и параболического типа с малым параметром при старших производных, Мат. сб., **31**, 3 (1952), 703.

Канторович Л. В.

[1] О сходимости вариационных процессов, ДАН СССР, **30**, 2 (1941), 107. [2] О сходимости метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, ДАН СССР, **30** (1941), 579.

Капулад (Capoulade J.)

[1] Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique à coefficients singuliers Mathematica Clui, 8 (1934), 139—184. [2] Sur les arcs frontières rendus impropres par les singularités des coefficients dans le problème de Dirichlet pour les équations du second ordre et du type elliptique à deux variables, Rend. Acc. Lincei, **15** (1932), 844—849.

Карлеман (Carleman T.)

[1] Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables C. R. Ac. Sc. Paris, **197** (1933), 471—474. [2] Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrödinger, Ark. Mat. Astr. Fys., **24** Bn. 11 (1934), 1—7. [3] Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes. 8. Skand. Mat. Kongress, 1935, S. 34—44. [4] Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen, Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig, **88** (1936), 119—132. [5] Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, Ark. Mat. Astr. Fys., **26** B n. 17 (1939), 1—9.

Каччополи (Caccioppoli R.)

[1] Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale, Rend. Acc. Lincei, **11** (1930), 794—799. [2] Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi di valori ai limiti, Rend. Acc. Lincei, **13** (1931), 498—502. [3] Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un teorema di esistenza e di unicità e alcune sue applicazioni, Rend. Sem. Mat. Padova, **3** (1932), 1—15. [4] Un principio d'inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alle equazioni a derivate parziali, Rend. Acc. Lincei, **16** (1932), 390—395, 484—489. [5] Problemi non lineari in analisi funzionale, Rend. Sem. Roma, **1** (1931—1932), 13—22. [6] Sulle equazioni ellittiche non lineari a derivate parziali, Rend. Acc. Lincei, **18** (1933), 103—106. [7] Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con n variabili indipendenti, Rend. Acc. Lincei, **19** (1934), 83—89. [8] Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti e sui problemi regolari del calcolo delle variazioni, Rend. Acc. Lincei, 22 (1935), 305—310, 376—379. [9] Sulle corrispondenze funzionali inverse diramate: teoria generale e applicazioni ad alcune equazioni non lineari e al problema di Plateau, Rend. Acc. Lincei, 24 (1936), 258—263, 416—421. [10] Sui teoremi di esistenza di Riemann, Ann. Sc. N. Sup. Pisa, **6** (1937), 177—187. [11] Limitazioni integrali per le soluzioni di un'equazione lineare ellittica a derivate parziali, Giorn. Mat. Battaglini, **80** (1950—1951), 186—212.

Келдыш М. В.

[1] О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, **77**, 1 (1951), 11. [2] О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области, ДАН СССР, **77**, 2 (1951), 181.

Келлог (Kellog O. D.)

[1] On the derivatives of harmonic functions on the boundary, Trans. Amer. Math. Soc., **33** (1931), 486—510.

Кодаира (Kodaira K.)

[1] Über die Rand- und Eigenwertprobleme der linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Proc. Imp. Acad. Tokyo, **20** (1944), 262—268. [2] Über die harmonischen Tensorfelder in Riemannschen Mannigfaltigkeiten, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **20** (1944), 186—198, 257—261, 353—358. [3] Harmonic fields in Riemannian manifolds (Generalized potential theory), Ann. of Math., **50** (1949), 587—665.

Коллатц (Collatz L.)

[1] Konvergenz des Differenzenverfahrens bei Eigenwertproblemen partieller Differentialgleichungen, Deutsche Mat., **3** (1938), 200—212.

Колуччи (Colucci A.)

[1] Teoremi e problemi sulle funzioni iperarmoniche trattati col metodo degli operatori lineari, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, **7** (1937), 48—54. [2] Sulla rappresentazione delle funzioni iperarmoniche a mezzo di armoniche, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, **7** (1937), 55—62.

Конфорто (Conforto F.)

[1] Sopra un sistema lineare di equazioni a derivate parziali che si integra con il metodo delle soluzioni fondamentali, Rend. Acc. Lincei, **17** (1933), 701—706.

Корал (Coral M.)

[1] A generalization of a property of harmonic functions, Bull. Amer. Math. Soc., **44** (1938), 587—592.

Корнхаузер и Стэкголд (Kornhauser E. T., Stakgold I.)

[1] A variational theorem for $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ and its application, J. Math. Physics, **31** (1952), 45—54.

Кравчук М.

[1] О существовании и о приближенной оценке решений некоторых уравнений с частными производными, I, Записки физ.-мат. отд. Всеукраинской Акад. Наук, Киев, **5** (1930), 49—60 (по-украински). [2] О существовании и о приближенной оценке решений некоторых уравнений с частными производными, II, Бюлл. Укр. Акад. Наук, **1** (1931), 45—89 (по-украински).

Кралль (Krall H. L.)

[1] On some asymptotic relations for the characteristic values of the elliptic differential equations, Amer. J. Math., **57** (1935), 907—917.

Кронин (Cronin J.)

[1] The existence of multiple solitions of elliptic differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., **68** (1950), 105—131.

Куперман (Cooperman Ph.)

[1] On extension of the method of Trefftz for finding local bounds on the solutions of boundary value problems, and on their derivatives, Quart. appl. Math., **10** (1953), 359—373.

Купрадзе В. Д

[1] О граничных задачах для установившихся колебаний упругих тел, УМН, **5** (1950), 190—193.

Курант (Courant R.)

. [1] Über die Schwingungen eingespannter Platten, Math. Z., **15** (1922) 195—200. [2] Über direkte Methoden der Variationsrechnung und verwandte Fragen, Math. Ann., **97** (1927), 711—736. [3] Über die Anwendung der Variationsrechnung in der Theorie der Eigenschwingungen und über neue Klassen von Funktionalgleichungen, Acta Math., **49** (1926), 1—68. [4] Neue Bemerkungen zum Dirichletschen Prinzip, J. für Math., **165** (1931), 247—256. [5] Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, Interscience Publishers, New York, 1950.

Курант и Гильберт (Courant R., Hilbert D.)

[1] Методы математической физики, тт. I и II, М.—Л., 1951.

Кшижанский М. (Krzyzański M.)

[1] Sur le problème de Dirichlet pour l'equation linéaire du type elliptique dans un domaine non borné, Rend. Acc. Lincei, **4** (1948), 408—416. [2] Un problème aux limites relatif aux équations du type elliptique, Colloq. Math., **2** (1949), 71—72. [3] Sur les solutions de l'équation linéaire du type elliptique discontinues sur la frontière du domaine de leur existence, Studia Math., **11** (1950), 95—125. [4] Sur le second problème aux limites pour les équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique et parabolique dans un domaine non borné, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, **5** (1952), 1—21.

Лаврентьев М. А.

[1] Квази-конформные отображения и их производные системы, ДАН СССР, 52, 4 (1946), 287. [2] Общая задача теории квази-конформных отображений плоских областей, Мат. сб., **21**, 2 (1947), 285. [3] Основная теорема теории квази-конформных отображений плоских областей. Изв. АН СССР, сер. мат., **12**, 6 (1948), 513.

Ладыженская О. А.

[1] О замыкании эллиптического оператора, ДАН СССР, **79**, 5 (1951), 723.

Леви Э. Э. (Levi E. E.)

[1] Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali, Rend. Circ. Mat. Palermo, **24** (1907), 275—317. [2] I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali, Mem. Soc. It· dei XL, **16** (1909), 1—112.

Леви Г. (Lewy H.)

[1] Über den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen, Gött. Nach. (1927), 178—186. [2] Neuer Beweis des analytischen Charakters der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen, Math. Ann., **101** (1929), 609—619; **107** (1934), 804. [3] Eindeutigkeit der Lösung des Anfangsproblems einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei Veränderlichen, Math. Ann., **104** (1931), 325—339. [4] Sur une nouvelle formule dans les équations linéaires elliptiques et une application au problème de Cauchy, C. R. Ac. Sc. Paris, **97** (1933), 112—113. [5] A priori limitations for solutions of Monge — Ampère equations, Trans. Amer. Math. Soc., **37** (1935), 417—434; **41** (1937), 365—374. [6] On differential geometry in the large (Minkowski's problem), Trans. Amer. Math. Soc., **43** (1938), 258—270.

Левинсон (Levinson N.)

[1] The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε, Ann. of Math., **51** (1950). 428—445.

Лере (Leray J.)

[1] Topologie des espaces abstraits de M. Banach, C. R. Acad. Sc. Paris, **200** (1935), 1082—1984. [2] Les problèmes non linéaires, Enseignement Math., **35** (1936), 139—149. [3] Majoration des dérivées secondes des solutions d'un problème de Dirichlet, J. Math. pures et appl., **17** (1938), 89—104. [4] Discussion d'un problème de Dirichlet, J. Math. pures et appl., **18** (1939), 249—284.

Лере и Шаудер (Leray J., Schauder J.)

[1] Topologie et équations fonctionnelles, Ann. Ec. N. Sup., **51** (1934), 45—78. [Русский перевод: Топология и функциональные уравнения, УМН, **I**, 3—4 (13—14) (1946), 71. — *Прим. ред.*]

Лея (Leja E.)

[1] Remarques sur le travail précédent de M. Mauro Picone, Ann. Soc. Polon. Math., **21** (1949), 170—172.

Лихтенштейн (Lichtenstein L.)

[1] Zur Theorie der konformen Abbildung. Konforme Abbildung nichtanalytischer singularitätenfreier Flächenstücke auf ebene Gebiete, Bull. Acad. Sc. Cracovie (1916), 192—217. [2] Über die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie, Math. Zeitsch., 20 (1924), 21—28. [3] Neue Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, Math. Z., **20** (1924), 194—212. [4] Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, Encykl. Math. Wiss.,Bd. II, 3. Heft, 8 (1924), 1277—1334. [5] Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen, Springer, Berlin, 1931. [6] Neuere Untersuchungen in des Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, Bull. int. Acad. Polon. Sc. (1931), 571—598.

Лопатинский Я. Б.

[1] Фундаментальная система решений системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа, ДАН СССР, **71**, 3 (1950), 433. [2] Нормальные фундаментальные решения системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа, ДАН СССР, **78**, 5 (1951), 865. [3] Поведение решений линейной эллиптической системы в окрестности изолированной особой точки, ДАН СССР, **79**, 5 (1951), 727.

Льенар (Liénard A.)

[1] Problème plan de la dérivée oblique dans la théorie du potentiel, J. École Polytech., **144** (1938), 35—158, 76—226. [2] Nouveau mémoire sur le problème de la dérivée oblique dans la théorie du potentiel, J. École Polytech., **145** (1939), 55—84, 85—137.

Магнус (Magnus W.)

[1] Über Eindeutigkeitsfragen bei einer Randwertaufgabe von $\Delta u + k^2 u = 0$, Jber. Deutsch. Math. Verein., **52** (1942), 177—188. [2] Fragen der Eindeutigkeit und des Verhaltens im Unendlichen für Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$, Abh. Mat. Sem. Hamburg, **16** (1949), 77—94.

Марден (Marden M.)

[1] A recurrance formule for the solutions of certain linear partial differential equations, Bull. Amer. Math. Soc., **50** (1944), 208—217.

Мартин (Martin M. H.)

[1] The fundamental solution of $\Delta\psi + e(y)\psi_y = 0$, Duke Math. J., **18** (1951), 845—858.

Мацумото (Matsumoto T.)

[1] On certain hypercomplex numbers, Jap. J. Math., **19** (1947), 441—482.

Микеладзе Ш. Е.

[1] Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными, М.—Л., Изд. АН СССР, 1936. [2] К вопросу численного интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными при помощи сеток, Сообщ. АН Груз. ССР, **I**, 4 (1940), 249. [3] О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типа, Изв. АН СССР, **5** (1941), 57.

Миранда (Miranda C.)

[1] Proficui legami tra i metodi di sommazione delle serie e i problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari alle derivate parziali di tipo ellittico, Rend. Acc. Lincei, **17** (1933), 622—627. [2] Sull'esistenza e sull' unicità di una superficie di assegnato bordo verificante un'equazione a derivate parziali di forma parametrica, Mem. Acc. d'Italia, **6** (1935), 1023—1045. [3] Su un problema di Minkowski, Rend. Sem. Mat. Roma, **3** (1939), 96—108. [4] Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche, Rend. Acc. Lincei, **3** (1947), 55—59. [5] Sull'approssimazione delle funzioni armoniche, Rend. Acc. Lincei, **5** (1948), 530—533. [6] Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche di due variabili, Giorn. Mat. Battaglini, 78 (1948—1949), 97—118. [7] Sulle proprietà di minimo e di massimo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali lineari del secondo ordine di tipo ellittico, Rend. Acc. Lincei, 8 (1951), 117—120. [8] Sui sistemi di tipo ellittico lineari a derivate parziali del primo ordine, in n variabili indipendenti, Mem. Acc. Lincei, **3** (1952), 85—121. [9] Sull'integrazione delle forme differenziali esterne, Ricerche di Mat. Napoli, 2 (1953), 151—182.

Митчелл (Mitchell J.)

[1] Some properties of solutions of partial differential equations given by their series development, Duke Math. J., **13** (1946), 87—104.

Михлин С. Г.

[1] Об уравнениях эллиптического типа, ДАН СССР, **77**, 3 (1951), 377. [2] Об алгоритме Шварца, ДАН СССР, **77**, 4 (1951), 569. [3] Прямые методы математической физики, М.—Л., ГТТИ, 1950.

Можар

[1] Доказательство существования решения бигармонического уравнения в частных производных, Зап. техн. отд. Всеукраинской Акад. Наук, Киев, **3** (1931), 97—102 (по-украински).

Молчанов А. М.

[1] Критерий дискретности спектра дифференциального уравнения второго порядка, ДАН СССР, **83**, 1 (1952), 17.

Морри (Morrey C. B.)

[1] On the solutions of quasi linear elliptic partial differential equations Trans. Am. Math. Soc., **43** (1938), 126—166. [2] Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics, Un. of California Publ., **1** (1943), 1—130. [3] Second order elliptic systems of differential equations, Proc. Nat. Acad. USA, **39** (1953), 201—206.

Мусхелишвили Н. И.

[1] Recherches sur les problèmes aux limites relatifs à l'équation biharmonique et aux équations de l'élasticité à deux dimensions, Math. Ann., **107** (1933), 282—312.

Мышкис А. Д.

[1] О переходе от обычной первой краевой задачи к видоизмененной. Мат. сб., **31**, 1 (1952), 128.

Мюллер (Muller C.)

[1] Zur Methode der Strahlungskapazität von H. Weyl, Math. Z., **56** (1952), 80—83.

Мюнтц (Müntz Ch. H.)

[1] Die Lösung dez Plateauschen Problems über konvexen Bereichen, Math. Ann., **94** (1925), 53—96.

Немыцкий В. В.

[1] Решение уравнений эллиптического типа для «малых» областей, Мат. сб. **1** (43), 4 (1936), 501.

Нётер Ф. (Noether F.)

[1] Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Math. Ann., 82 (1920), 42—63.

Никодим (Nikodym O.)

[1] Sur l'existence du potentiel uniforme sur une surface de Riemann, Bull. Soc. Math. France, **61** (1933), 220—245. [2] Sur un théorème de M. S. Zaremba concernant les fonctions harmoniques, J. Math. pures et appl., **12** (1933), 95—109.

Николеску (Nicolesco M.)

[1] Sulle funzioni metaarmoniche in *n* variabili, Rend Acc. Lincei, **12** (1930), 553—558. [2] Extension du théorème de Gauss aux fonctions harmoniques d'ordre *p*, C. R. Acad. Sc. Paris, **191** (1930), 515—517. [3] Sur les fonctions harmoniques d'ordre *p*, Bull. Soc. Math. France, **59** (1931), 75—87. [4] Sur les fonctions de *n* variables harmoniques d'ordre *p*, Bull. Soc. Math. France, **60** (1932), 129—151. [5] Deux remarques sur l'unicité de la solution du problème de Dirichlet pour les équations différentielles linéaires du second ordre, Bull. Sc. Math., **58** (1934), 207—211. [6] Recherches sur les fonctions polyharmoniques, Ann. Éc. N. Sup., 52 (1935), 183—220. [7] Sur l'unicité de la représentation des fonctions harmoniques d'ordre *p* au moyen des fonctions harmoniques d'ordre un, Bull. Math. Soc. Roumaine Sc., **37** (1935), 83—87. [8] Les fonctions polyharmoniques, Ed. Hermann, Paris, 1936. [9] Nouvelles recherches sur les fonctions polyharmoniques, Disquisitiones Math. Phys., **1** (1940), 43—74.

Нильсен (Nielsen K. L.)

[1] Some properties of functions satisfying partial differential equations of elliptic type, Duke Math. J., **11** (1944), 121—137. [2] On the Bergman operators for linear partial differential equations, Bull. Am. Math. Soc., **50** (1944), 195—201.

Нильсен и Рамсей (Nielsen K. L., Ramsay B. P.)

[1] On particular solutions of linear partial differential equations, Bull. Amer. Math. Soc., **49** (1943), 156—162.

Ниренберг (Nirenberg L.)

[1] On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity, Commun. pure appl. Math., 6 (1953), 103—156. [2] The Weyl and Minkowsky problems in differential geometry in the large, Commun. pure appl. Math., 6 (1953), 337—394.

Ниче Иоахим (Nitsche Joachim)

[1] Das erste Randwertproblem eines linearen elliptischen Differentialgleichungssystems, Math. Nach., 7 (1952), 31—33. [2] Beiträge zum Randwertproblem quasi linearer elliptischer Differentialgleichungssysteme, Math. Nach., 7 (1952), 35—54.

Ниче Иоганн и Ниче Иоахим (Nitsche Johannes, Nitsche Joachim)

[1] Allgemeine Randwertprobleme für Systeme elliptischer Differentialgleichungen; die Zurückführung auf eine von F. Noether untersuchte Klasse singulärer Integralgleichungen, Rend. Circ. Mat. Palermo, 2 (1953), 40—45. [2] Das zweite Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. Arch. der Math., 3 (1952), 460—464. [3] Bemerkungen zum zweiten Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta\varphi = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$, Math. Ann., **126** (1953), 69—74.

Нокамори К. (Nokamori K.)

[1] On a nonlinear boundary problem for the equation $\Delta u + cu = f(x, y)$, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 5 (1951), 1—7.

Олейник О. А.

[1] О задаче Дирихле для уравнений эллиптического типа, Мат. сб., **24** (1949), 3—14. [2] О второй краевой задаче для уравнения эллиптического типа с малым параметром при старших производных, ДАН СССР, **79**, 5 (1951), 735. [3] Об эллиптических уравнениях второго порядка, Успехи мат. наук, 7, вып. 3 (1952), 106—107. [4] О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа, Мат. сб., **30**, 3 (1952), 695. [5] О краевых задачах для уравнений с малым параметром при старших производных, ДАН СССР, **85**, 3 (1952), 493. [6] Об уравнениях эллиптического типа с малым параметром при старших производных, Мат. сб., **31**, 1 (1952), 104. [7] Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области, ДАН СССР, 87, 6 (1952), 885.

Пахале (Pachale H.)

[1] Über eir ebenes nichtlineares biharmonisches Randwertproblem, Math. Nach., 7 (1952), 187—212. [2] Über ein räumliches nichtlineares biharmonisches Randwertproblem, Math. Nach., 8 (1952), 79—91.

Пейн и Вейнбергер (Payne L. E., Weinberger H. F.)

[1] Upper and lower bounds for harmonic functions, Dirichlet integrals and biharmonic functions, Inst. for Fluid Dynamics and Appl. Math. Univ. of Maryland Technical Note BN-21.

Петровский И. Г.

[1] О системах дифференциальных уравнений, все решения которых аналитичны, ДАН СССР, **17** (1937), 339. [2] Об аналитичности решений систем уравнений с частными производными, Мат. сб., 5, 1 (1939), 3. [3] О некоторых проблемах теорий уравнений с частными производными, УМН, I, 3—4 (13—14) (1946), 44.

Пикар (Picard É.)

[1] Lecons sur quelques types simples d'equations aux dérivées partielles, Gauthier Villars, Paris, 1927. [2] Leçons sur quelques équations fonctionnelles, Gauthier Villars, Paris, 1928. [3] Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles. Gauthier Villars, Paris, 1930.

Пиконе (Picone M.)

[1] Maggiorazione degli integrali delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine ellittico-paraboliche, Rend. Acc. Lincei, **5** (1927), 138—143. [2] Sulle funzioni metaarmoniche, Rend. Acc. Lincei, **5** (1927), 90—95. [3] Sul metodo delle minime potenze ponderate e sul metodo di Ritz per il calcolo approssimato nei problemi della fisica matematica, Rend. Circ. Mat. Palermo, **52** (1928), 225—253. [4] Particolare formula di maggiorazione per le soluzioni di una classica equazione alle derivate parziali del 4° ordine della Fisica matematica, Rend. Acc. Lincei, **10** (1929), 16—20. [5] Formule risolutive e condizioni di compatibilità per alcuni problemi di propagazione, Mem. Acc. d'Italia, **5** (1934), 715—749. [6] Nuovi indirizzi di ricerca nella teoria e nel calcolo delle soluzioni di talune equazioni lineari alle derivate parziali della Fisica matematica, Ann. Sc. N. Sup. Pisa, **5** (1936), 213—288. [77] Alcuni teoremi di convergenza nella sommazione delle serie multiple e applicazioni al problema di Dirichlet, Scritti offerti a L. Berzolari, 1936. [8] Sulla convergenza delle successioni di funzioni iperarmoniche. Bull. Math. Soc. Roumaine des Sc., 38 (1936), 105—112. [9] Vedute unitarie sul calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali della Fisica matematica, Atti 1° Convegno Mat. Appl. Roma, 1936. [10] Nuove formule di maggiorazione per gli integrali delle equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine ellittico-paraboliche, Rend. Acc. Lincei, **28** (1938), 331—338. [11] Appunti di Analisi superiore, Ed. Rondinella Napoli, 1940, I. edizione. [12] Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuova applicazione della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti, Atti Acc. Sc. Torino, **75** (1939—1940), 413—426. [13] Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali, Rend. Acc. Lincei, **2** (1947), 365—371, 485—492, 717—725. [14] Esistenza e calcolo della soluzione di un certo problema al contorno per il sistema di equazioni dell'elasticità, Rend. Acc. Lincei, **3** (1947), 427—435. [15] Intorno alla teoria di una classica equazione a derivate parziali della Fisica matematica, Ann. Soc. Polon. Math., **21** (1948), 161—169. [16] Sur la théorie d'une équation aux dérivées partielles classique de la physique mathématique, C. R. Acad. Sc. Paris, **226** (1948), 1945—1947. [17] Exposition d'une méthode d'intégration numérique des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles, mise en oeuvre à l'Institut National pour les Applications du Calcul. Résultats obtenus et résultats que l'on pourrait atteindre, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, **37** (1953), 239—264.

Пиконе и Миранда (Picone M., Miranda C.)

[1] La formula di Green per i problemi con arbitraria derivata obliqua, Rend. Acc. Lincei, **29** (1939), 160—165.

Пиконе и Фикера (Picone M., Fichera C.)

[1] Neue funktionalanalytische Grundlagen für die Existenzprobleme und Lösungsmethoden von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen, Monatsh. für Math., **54** (1950), 188—209.

Пини (Pini B.)

[1] Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico, Rend. Acc. Lincei, **11** (1951), 325—333. [2] Sul primo problema di valori al contorno della teoria dell'elasticità, Rend. Sem. Mat. Padova, **21** (1952), 345—369. [3] Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico ne domini non limitati, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, **19** (1952), 157—170. [4] Sulle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine $2n$ di tipo ellittico e sui sistemi ellittici di equazioni lineari del secondo ordine sopra una superficie chiusa, Rend. di Mat. e. delle sue appl., **11** (1952), 1—20, [5] Osservazioni su un teorema di M. Picone relativo all'equazione $\Delta u + cu = 0$, Boll. Un. Mat. It., **8** (1953), 19—25. [6] Sulle singolarità delle soluzioni della equazione $\Delta u + cu = 0$, Rend. Acc. Lincei, **14** (1953), 21—26. [7] Sui sistemi di equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine dei tipi ellittico e parabolico, Rend. Sem. Mat. Padova, **22** (1953), 265—280. [8] Osservazioni sulle soluzioni dei sistemi di equazioni a derivate parziali lineari di tipo ellittico, Rend. Sem. Mat. Padova, **22** (1953), 366—379. [9] Precisazioni a un ragionamento contenuto in una mia nota sulle equazioni a derivate parziali di tipo ellittico, Ricerche di Mat. Napoli, **3** (1954), 3—12.

Плейель (Pleijel A.)

[1] Sur les propriétés asymptotiques des fonctions propres des plaques vibrantes, C. R. Acad. Sc. Paris. **208** (1939), 1549—1551. [2] Sur les propriétés asymptotiques des fonctions et valeurs propres des plaques vibrantes, C. R. Acad. Sc. Paris, **209** (1939), 717—718. [3] Proopriétés asymptotiques des fonctions fondamentales du problème des vibrations dans un corps élastique, Ark. Mat. Astr. Fys., **26** A n. 19 (1939), 1—9. [4] Propriétés asymptotiques des fonctions et valeurs propres de certains problèmes de vibrations, Ark. Mat. Astr. Fys., **27** A n. 13 (1940), 1—100. [5] Quelques problèmes de vibrations et les méthodes directes du calcul des variations, Ark. Mat. Astr. Fys., **29** A n. 23 (1943), 1—17. [6] Sur la distribution des valeurs propres des problèmes régis par l'équation $\Delta u + \lambda k(x, y) u = 0$, Ark. Mat. Astr. Fys., **29** B n. 7 (1943), 1—8. [7] Le problème spectral de certaines équations aux dérivées partielles, Ark. Mat. Astr. Fys., **30** A n. 21 (1944), 1—47. [8] Sur les opérateurs différentielles de type ellitique, Ark. Mat. Astr. Fys., **32** A n. 14 (1946), 1—14. [9] On Hilbert-Schmidt's theorem in the theory of partial differential equations, Proc. Roy. Physiog. Soc. Lund, **17** n. 2 (1946), 1—11. [10] Asymptotic relations for the eigenfunctions of certain boundary problems of polar type, Amer. J. Math., **70** (1948), 892—907. [11] On the eigenvalues of elastic plates, Comm. Pure Appl. Math., **3** (1950), 1—10. [12] On Green's function for elastic plates with clamped, supported and free edges, Proc. Symp. Spectral Th. and Diff. Probl. Oklahoma College, 1951, pp. 413—437. [13] Green's functions and asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions, Proc. Symp. Spectral Th. and Diff. Probl. Oklahoma College, 1951, pp. 439—454. [14] Sur les valeurs et les fonctions propres des membranes vibrantes, Comm. Sem. Math. Univ. Lund (1952), 173—180.

Плейель и Минакшисундарам (Pleijel A., Minakshisundaram S.)

[1] Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator op Riemannian manifolds, Canadian J. Math. **1** (1949), 242—256.

Повзнер А. Я.

[1] О дифференцировании спектральной функции уравнения Шредингера, ДАН СССР, **79**, 2 (1951), 193. [2] О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$, Мат. сб., **32**, 1 (1953). 109.

Погорелов А. В.

[1] Априорные оценки для производных регулярного решения уравнения в частных производных эллиптического типа, УМН, **4**, 4 (1949), 179. [2] Регулярность выпуклой поверхности с данной гауссовой кривизной, Мат. сб., **31**, 1 (1952), 88.

Полиа (Pólya G.)

[1] Remarks on the foregoing paper, J. Math. Physics, **31** (1952), 55—57.

Порицкий (Poritsky H.)

[1] Generalizations of the Gauss law on the spherical mean, Trans. Amer. Math. Soc., **43** (1938), 199—225.

Привалов И. И.

[1] Sur la théorie générale des fonctions polyharmoniques, C. R. Acad. Sc. Paris, **204** (1937), 328—330.

Пуччи (Pucci C.)

[1] Alcune limitazioni per gli integrali delle equazioni differenziali a derivate parziali, lineari, del secondo ordine di tipo ellittico-parabolico, Rend. Acc. Lincei, **11** (1951), 334—339. [2] Maggiorazione della soluzione di un problema al contorno, di tipo misto, relativo a una equazione a derivate parziali, lineare, del secondo ordine, Rend. Acc. Lincei, **13** (1952), 360—366. [3] Bounds for solutions of Laplace's equation satisfying mixed conditions, J. Rational Mech. Anal., **2** (1953), 299—302.

Пюшель (Püschel W.)

[1] Die erste Randwertaufgabe der allgemeinen selbstadjungierten elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung im Raum für beliebige Gebiete, Math. Z., **34** (1932), 535—553.

Радо (Radó T.)

[1] Das Hilbertsche Theorem über den analytischen Charakter der Lösungen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Z., **25** (1926), 514—589. [2] On the problem of Plateau, Ergeb. der Math., **2**. J. Springer, Berlin, 1933.

Реллих (Rellich F.)

[1] Zur ersten Randwertaufgabe bei Monge-Ampère Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, Math. Ann., **107** (1932), 505—513, 804. [2] Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten, Jber. Deutsch. Math. Ver., **53** (1943), 57—65. [3] Das Eigenwertproblem von $\Delta u + \lambda u$ in Halbröhren, Studies Essayes pres. to R. Courant, 1948, SS. 329—344.

Робер (Robert J. P.)

[1] Médiation et fonctions métaharmoniques, C. R. Acad. Sc Paris, **192** (1931), 326—328. [2] Sur quelques propriétés des fonctions n-métaharmoniques, C. R. Acad. Sc. Paris, **192** (1931), 1146—1148.

Розенблатт (Rosenblatt A.)

[1] Sur les théorèmes de Picard dans la théorie des équations aux dérivées partielles du type elliptique, Ann. Éc. N. Sup., **50** (1933), 197—215. [2] Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre non linéaires du type elliptique, Rend. Acc. Lincei, **17** (1933), 443—448. [3] Sur l'équation biharmonique à deux variables indépendantes, C. R. Acad. Sc. Paris, **198** (1934), 320—322. [4] Sur l'équation biharmonique non linéaire à deux variables indépendantes dans un domaine général, C. R. Acad. Sc. Paris, **198** (1934),

1110—1112. [5] Sur l'application de la méthode des approximations successives de M. Picard à l'étude de certaines équations non linéaires du quatrième ordre, Bull. Sc. Math., **58** (1934), 117—136, 151—168. [6] Sopra le equazioni m-armoniche non lineari a due variabili intipendenti, Rend. Acc. Lincei, **19** (1934), 212—219, 306—310. [7] Sur les équations biharmoniques non linéaires à deux variables indépendantes, Bull. Sc. Math., **58** (1934), 248—264. [8] Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre du type elliptique non linéaires, Ann. Mat. pura appl., **13** (1935), 191—208. [9] Sull'equazione biarmonica non lineare a due variabili indipendenti in un'area generale semplicemente connessa, Ann. Mat. pura appl., **14** (1935), 17—39. [10] Sur les équations linéaires du second ordre du type elliptique à trois variables indépendantes, Bull. Sc. Math., **59** (1935), 274—288.

Ромберг В.

[1] Метод для одновременного приближенного определения собственного значения и собственной функции, ДАН СССР, **14** (1937), 65—68.

Роте (Rothe E.)

[1] Über lineare elliptische Differentialgleichungen, deren zugeordnete Massbestimmung von konstanter Krümmung ist, Math. Ann. **105** (1931), 672—693. [2] Über asymptotische Entwicklung bei Randwertaufgaben elliptischer partieller Differentialgleichungen, Math. Ann., **108** (1933), 578—594. [3] Über asymptotische Entwicklungen bei Randwertaufgaben der Gleichung $\Delta\Delta u + \lambda u = \lambda^k \psi$, Math. Ann., **109** (1933), 267—272.

Сато (Satoh T.)

[1] A new method for plane stress problems, Jap, J. Math., **19** (1948), 233—262.

Симода и Нагумо (Simoda S., Nagumo M.)

[1] Sur la solution bornée de l'équation aux dérivées partielles du type elliptique, Proc. Japan Acad., **27** (1951), 334—339.

Симонов Н.

[1] Über die erste Randwertaufgabe der nichtlinearen elliptischen Gleichung, Bull. Math. Univ. Moscou Série Inter., **2** (1939), 1—18. [2] Solution of some boundary problems for elliptical systems of linear equations, ДАН СССР, **44** (1944), 259—261. [3] Решение первой краевой задачи для линейных эллиптических систем любого порядка, Ученые Записки МГУ, Мат., **1** (1946), 53—84.

Синдж (Synge J. L.)

[1] The method of the hypercircle in function-space for boundary value problems, Proc. Roy. Soc. London, A **191** (1947), 447—467. [2] The method of the hypercircle in elasticity when body forces are present, Quart. Appl. Math., **6** (1948), 15—19. [3] Upper and lower bounds for the solution of problems in elasticity, Proc. Roy. Irish Acad., A **53** (1950), 41—64.

Синдж и Прагер (Synge J. L., Prager W.)

[1] Approximation in elasticity based on the concept of function space, Quart. Appl. Math. **5** (1947), 241—269.

Слободянский М. Г.

[1] Оценки погрешности приближенного решения в линейных задачах, сводящихся к вариационным, и их применение к определению двусторонних приближений в статических задачах теории упругости, Прикл. мат. мех., **XVI**, 4 (1952), 449.

Смолицкий Х. Л.

[1] Оценки производных фундаментальных функций, ДАН СССР, **74**, 2 (1950), 205.

Соболев С. Л.

[1] Основная краевая задача для полигармонического уравнения в области с вырожденным контуром, ДАН СССР, **III** (XII) (1936), 311. [2] О прямом методе решения полигармонических уравнений, ДАН СССР, **V** (XIII) (1936), 339. [3] Алгорифм Шварца в теории упругости, ДАН СССР, **IV** (XIII) (1936), 235. [4] Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений, Мат. сб., н. с., 2 : 3 (1937), 465. [5] Об одной теореме функционального анализа, Мат. сб., **4** (46) (1938), 471.

Собреро (Sobrero L.)

[1] Di una nuova variabile ipercomplessa, Rend. Acc. Lincei. **19** (1934), 77—82, 135—140, 479—483. [2] Nuovo metodo per lo studio dei problemi di elasticità con applicazione al problema della piastra forata, Ricerche d'Ingegneria, 2 (1934), 255—264. [3] Theorie der ebenen Elastizität unter Benutzung eines Systems hyperkomplexer Zahlen, Hamburg Math. Einzelschriften 17, B. G. Teubner, 1934. [4] Algebra delle funzioni ipercomplesse e sue applicazioni alla teoria matematica dell'elasticità, Mem Acc. d'Italia, **6**, (1934), 1—64. [5] La riflessione analitica delle funzioni biarmoniche attorno a un cerchio ed alcuni problemi di elasticità piana, Ann. Mat. pura e appl., **14** (1935), 139—148.

Соловьев П. В.

[1] Решение уравнений эллиптического и параболического типа для малых областей, Мат. сб., **5** (47); 3 (1939), 473.

Стампаккья (Stampacchia G.)

[1] Problema di Dirichlet e proprietà qualitative della soluzione, Giorn. Mat. Battaglini, **80** (1950—1951), 226—237. [2] Problemi al contorno per equazioni di tipo ellittico a derivate parziali e questioni di calcolo delle variazioni connesse, Ann. Mat. pura e appl., **33** (1952), 211—238. [3] Sistemi di equazioni di tipo ellittico a derivate parziali del primo ordine e proprietà delle estremali degli integrali multipli, Ricerche di Mat. Napoli, **1** (1952), 200—226.

Стефани (Stefani V.)

[1] Sull'integrazione di taluni problemi al contorno relativi al Δw e al $\Delta\Delta w$, Rend. Sem. Mat. Roma, **2** (1938), 224—244.

Стин (Steen S. W. P.)

[1] The application of quadratic forms in an infinity of variables to boundary problems in partial differential equations, Proc. Cambridge Phil. Soc., **28** (1932), 33—34. [2] The spectrum of the selfadjoint partial differential equation in any domain, Proc. Cambridge Phil. Soc., **29** (1932), 23—44.

Таутц (Tautz G.)

[1] Reguläre Randpunkte beim verallgemeinerten Dirichletschen Probleme, Math. Z., **39** (1935), 532—559. [2] Zur Theorie der elliptischen Differentialgleichungen, Math. Ann., **117** (1941), 694—726; **118** (1943), 733—770. [3] Zur Theorie der ersten Randwertaufgaben, Math. Nach., **2** (1949), 279—303. [4] Zum Umkehrungsproblem bei elliptischen Differentialgleichungen, Arch. der Math., **3** (1952), 232—250, 361—365.

Темляков А. (Temliakoff A.)

[1] Sur la croissance des fonctions satisfaisant aux équations linéaires aux dérivées partielles et du second ordre, C. R. Acad. Sc. Paris, **200** (1935), 799—801.

Титчмарш (Titchmarsh E. C.)

[1] On the discreteness of the spectrum associated with certain differential equations, Ann. Mat. pura appl., **28** (1949), 141—147. [2] Eigenfunctions expansions for a finite two-dimensional region, Quart. J. Math., **20** (1949), 238—253. [3] Some theorems on perturbation theory, Proc. Roy. Soc. London, s. A **201** (1950), 473—479. [4] Eigenfunctions expansions associated with partial differential equations, Proc. London, Math. Soc., **1** (1951), 1—27.

Толотти (Tolotti C.)

[1] Sul problema di Cauchy, Rend. Acc. Lincei, **29** (1939), 119—125. [2] La formula di Green per i problemi al contorno con derivata obliqua in spazi curvi quali si vogliano, Rend. Acc. Lincei, **29** (1939), 285—293. [3] Sulla struttura delle funzioni iperarmoniche in più variabili indipendenti, Giorn. Mat. Bettaglini, **77** (1947—1948), 61—117.

Томас и Титт (Thomas T. Y., Titt E. W.)

[1] On the elementary solution of the general linear differential equation of the second order with analytic coefficients, J. de Math., **18** (1939), 217—248.

Тополянский Д. Б.

[1] О применении вариационных методов при приближенном решении краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптического типа, Прикл. мат. мех., **13**, 3 (1949), 317. [2] Об оценке обобщенного интеграла Дирихле в плоской задаче теории упругости и в трехмерной краевой задаче, Прикл. мат. мех., **14**, 4 (1950), 423.

Трефтц (Trefftz E.)

[1] Konvergenz und Fehlerabschätzung beim Ritzschen Verfahren, Math. Ann., **100** (1928), 503—521.

Трикоми (Tricomi F.)

[1] Un teorema di media per certe equazioni di tipo ellittico, Rend. Sem. Mat. Padova, **22** (1953), 350—353.

Тшицинский (Trjitzinsky W. J.)

[1] Analytic theory of singular elliptic differential equations, Ann. of Math., **43** (1942), 1—45. [2] Сингулярные эллиптические и гиперболические уравнения в частных производных, Мат. сб., **20** (62): 3 (1947), 365. [3] Singular elliptic-parabolic partial differential equations, Ann. Soc. Polon. Math., 22 (1949), 43—96.

Уорд (Ward, G. N.)

[1] On the integration of some vector differential equations, Quart. J. Mech. Appl. Math., **5** (1952), 432—440.

Усманов Н. К.

[1] Граничные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка эллиптического типа, Труды института физики и математики АН Латв. ССР, вып. 1 (1950), 41—100. [2] К граничным задачам функций, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка эллиптического типа, Труды института физики и математики АН Латв. ССР, вып. 2 (1950), стр. 59—100.

Фаэдо (Faedo S.)

[1] Sul metodo di Ritz e su quelli fondati sul principio dei minimi quadrati per la risoluzione approssimata dei problemi della fisica matematica, Rend. Mat. Roma, **6** (1947), 73—94.

Феллер (Feller W.)

[1] Über die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, Math. Ann., **102** (1930), 633—649. Русский перевод напечатан в УМН, **VIII** (1940), 232—245.

Фикера (Fichera G).

[1] Sviluppi in serie e teoremi di decomposizione in somma per le funzioni iperarmoniche, Rend. Circ. Mat. Palermo, **63** (1941), 41—64. [2] Decomposizione al modo di Poincaré delle funcioni bi-iperarmoniche in due variabili, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, **11** (1940—1941), 134—149. [3] Un teorema generale sulla struttura delle funzioni iperarmoniche, Rend. Acc. d'Italia, **3** (1942), 511—523. [4] Teoremi di completezza connessi all'integrazione dell'equazione $_4u = f$, Giornale Mat. Battaglini, **77** (1947—1948), 184—199. [5] Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni, Ann. Mat. pura e appl., **27** (1948), 1—28. [6] Sull'equilibrio di un corpo elastico isotropo e omogeneo, Rend. Sem. Mat. Padova, **17** (1948), 9—28. [7] Applicazione della teoria del potenziale di superficie ad alcuni problemi di analisi funzionale lineare, Giornale Mat. Battaglini, **78** (1948—1949), 71—80. [8] Teorema di esistenza per il problema bi-iperarmonico, Rend. Acc. Lincei, **5** (1948), 319—324. [9] Sui problemi analitici della elasticità piana, Rend. Sem. Mat. Cagliari, **18** (1948), 1—22. [10] Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno misti relativi alle equazioni e ai sistemi di equazioni del s condo ordine di tipo ellittico autoaggiunti, Ann. Sc. N. Sup. Pisa, **15** (1946), 75—100. [11] Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico, Ann. Sc. N. Sup. Piza, **4** (1950), 35—99. [12] Sulla maggiorazione dell'errore di approssimazione nei metodi di integrazione numerica delle equazioni a derivate parziali della fisica matematica, Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, **17** (1950), 138—145. [13] On some general integration methods employed in connection with linear differential equations, J. of Math. and Phys., **29** (1950), 59—68. [14] Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all' I. N. A. C. Mem. Acc. Lincei, **3** (1950), 1—80. [15] Esistenza del minimo in un classico problema di calcolo delle variazioni, Rend. Acc. Lincei, **11** (1951), 34—39. [16] Interpretazione ed estensione funzionale di recenti metodi di integrazione delle equazioni differenziali lineari, Atti IV Congresso Un. Mat. It. Taormina, **1** (1951), 45—67. [17] Sulla «Kernel function», Boll. Un. Mat. It., **7** (1952), 4—15. [18] Sul problema della derivata oblique e sul problema misto per l'equazione di Laplace, Boll. Un. Mat. It., **7** (1952), 367—377. [19] Condizioni perchè sia compatibile il problema principale della statica elastica, Rend. Acc. Lincei, **14** (1953), 397—400.

Фишель (Fishel B.)

[1] On two papers of Titchmarsh concerning eigenfunction expansions for partial differential operators of elliptic type, J. London Math. Soc., **27** (1952), 496—502.

Франкль Ф. И. и Келдыш М В.

[1] Внешняя задача Неймана для нелинейных эллиптических уравнений и ее приложение к теории крыла в сжимаемом газе, ДАН СССР, **4** (1934), 561—601.

Фридрихс (Friedrichs K. O.)

[1] Die Randwert- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten (Anwendung der direkten Methoden der Variationsrechnung), Math. Ann., **98** (1928), 205—247. [2] On differential operators in Hilbert spaces, Amer. J. of Math., **61** (1939), 523—544. [3] The identity of weak and strong extensions of differential operators, Trans. Amer. Math. Soc., **55** (1944), 132—151. [4] On the boundary value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality, Ann. of Math., **48** (1947), 441—471. [5] On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations, Commun. pure appl. Math., **6** (1953), 299—326.

Фубини (Fubini G.)

[1] Un teorema sulle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico che generalizza un teorema dell'Hartogs e uno del Severi, Rend. Acc. Lincei, **15** (1932), 499—501. [2] Sopra una nuova classe di problemi al contorno, Rend. Circ. Mat. Palermo, **61** (1937), 304—313.

Хаак (Haack W.)

[1] Allgemeine Randwertprobleme für Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, Math. Nachr., **7** (1952), 1—30. [2] Randwertprobleme höherer Charakteristik für ein System zwei elliptischen Differentialgleichungen, Math. Nachr., **8** (1952), 123—132.

Хаак, Хельвиг (Haack W., Hellwig G.)

[1] Die Überführung des Randwertproblems für Systeme elliptischer Differentialgleichungen auf Fredholmsche Integralgleichungen, Math. Nachr., **4** (1950—1951), 408—418.

Халилов З. И.

[1] Краевые задачи для эллиптических уравнений, Изв. АН СССР, сер. мат., **11** (1947), 345—362.

Хаммерштейн (Hammerstein A.)

[1] Nichtlineare Integralgleichungen mit Anwendungen, Acta Math., **54** (1930), 117—176. [2] Über die Entwicklung gegebener Funktionen nach Eigenfunktionen von Randwertaufgaben, Math. Z., **27** (1927), 269—311.

Харазов Д. Ф.

[1] Общее представление решений эллиптических дифференциальных уравнений выше второго порядка в многосвязных областях, Сообщ. АН Груз. ССР, **II** (1941), 799.

Харрик И. Ю.

[1] Об одной проблеме конструктивной теории функций, связанной с исследованием сходимости вариационных процессов, ДАН, **80**, 1 (1951), 25.

Хартман, Винтнер (Hartmann Ph., Wintner A.)

[1] On elliptic Monge — Ampère equations, Amer. J. of Math., **75** (1953), 611—620.

Хведелидзе Б. В.

[1] Задача Пуанкаре для линейного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа, Труды Тбил. мат. инст., **XII** (1943), 47. (Русск. рез., стр. 71.)

Хельвиг (Hellwig G.)

[1]. Bemerkunden zu der Satzgruppe von Hilbert über Systeme elliptischer Differentialgleichungen, Math. Z., **55** (1952), 276—283. [2] Das Randwertproblem eines linearen elliptischen Systems, Math. Z., **56** (1952), 388—408.

[3] Randwertprobleme nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit Anwendungen auf die Verbiegung von elliptisch gekrümmten Flächenstücken, Math. Nachr., **8** (1952), 13—30.

Ходж (Hodge W. V. D.)

[1] A Dirichlet problem for harmonic functionals, with applications to analytic varieties, Proc. London Math. Soc., **36** (1932), 257—303. [2] Harmonic functionals in a Riemannian Space, Proc. London Math. Soc., **38** (1933), 72—93. [3] The existence theorem for harmonic integrals, Proc. London Math. Soc., **41** (1936), 484—496. [4] The theory and applications of harmonic integrals, Cambridge University Press, 2 ed., 1952.

Хопф (Hopf E.)

[1] Elementare Betrachtungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, Sitzungb. Preuss. Akad. Wiss., **19** (1927), 147—152. [2] Zum analytischen Charakter der Lösungen regulärer zweidimensionaler Variationsprobleme, Math. Z., **30** (1929), 404—413. [3] Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter, der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Z., **34** (1931), 194—233. [4] Kleine Bemerkung zur Theorie der elliptischen Differentialgleichungen, J. für Math., **165** (1931), 50—51. [5] A remark on linear elliptic differential equations of second order, Proc. Amer. Math. Soc., **3** (1952), 791—793. [6] Remarks on the preceding paper by D. Gilbarg, J. rat. Mech. Anal., **1** (1952), 419—424.

Хорних (Hornich H.)

[1] Zur Lösbarkeit von gewissen elliptischen Differentialgleichungen, J. für Math., **189** (1952), 204—206.

Хоснер (Hausner M.)

[1] Dirichlet's principle and generalized boundary values, Ann. of Math., **57** (1953), 475—489.

Цвирнер (Zwirner G.)

[1] Sull'equazione a derivate parziali delle superficie minime, Rend. Sem. Mat. Padova, **4** (1933), 140—154. [2] Su una proprieta di media relativa alle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine con un numero qualsiasi di variabili, Rend. Sem. Mat. Padova, **12** (1941), 22—29. [3] Su una particolare classe di equazioni alle derivate parziali del quarto ordine sopra una superficie chiusa, Rend. Sem. Mat. Padova, **17** (1948), 139—159.

Чезари (Cesari L.)

[1] Sul problema di Dirichlet, Rend. Circ. Mat. Palermo, **60** (1936), 185—212. [2] Sulla biregolaritá della funzioni armoniche in domini rettangolari, Rend. Circ. Mat. Palermo, **61** (1937), 225—268.

Чиммино (Cimmino G.)

[1] Sulle equazioni lineari ellittiche autoaggiunte alle derivate parziali di ordine superiore al secondo, Mem. Acc. d'Italia, **1** (1930), 59—69. [2] Teoremi di confronto fra equazioni o sistemi di equazioni differenziali lineari del secondo ordine, Rend. Sem. Mat. Roma, **1** (1936), 31—52. [3] Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa, Ann. Sc. N. Sup. Pisa, **7** (1938), 73—96. [4] Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet, Rend. Circ. Mat. Palermo, **61** (1938), 177—221. [5] Sul problema generalizzato di Dirichlet per l'equazione di Poisson, Rend. Sem. Met. Padova, **11** (1940), 28—89. [6] Nuove pro-

prietá caratteristiche per le soluzioni delle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine, Atti 2° Congresso Unione Matematica Italiana, 1940, pp. 198—204. [7] Inversione delle corrispondenze funzionali lineari ed equazioni differenziali, Rivista di Mat. Univ. Parma, **1** (1950), 105—116.

Шабат Б. В.

[1] Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных, Мат. сб., **17** (59), (1945), 193.

Шапиро З. Я

[1] О существовании квазиконформных отображений, ДАН СССР, **30**, 8 (1941), 685. [2] Об эллиптических системах уравнений с частными производными, ДАН СССР, **46**, 4 (1945), 146. [3] Первая краевая задача для эллиптической системы дифференциальных уравнений, Мат. сб., 28 (1951), 55.

Шаудер (Schauder J.)

[1] Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math. Z., **26** (1927), 47—65. [2] Bemerkungen zu meiner Arbeit «Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen», Math Z., **26** (1927), 417—431. [3] Invarianz des Gebietes in Funktionalräumen, Studia Math., **1** (1929), 123—139. [4] Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Math., **2** (1930), 170—179. [5] Potentialtheoretische Untersuchungen, Math. Z., **33** (1931), 602—640. [6] Bemerkung zu meiner Arbeit «Potentialtheoretische Untersuchungen», Math. Z., **35** (1932), 536—538. [7] Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischen Typus, Math. Ann., **106** (1932), 661—721. [8] Sur le problème de Dirichlet généralisé pour les équations non linéaires du type elliptique, C. R. Ac. Sc. Paris, **195** (1932), 201—203. [9] Sur les équations aux dérivées partielles du type elliptique, C. R. Ac. Sc. Paris, **195** (1932), 1365—1367. [10] Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique, C. R. Ac. Sc. Paris, **196** (1933), 89—90. [11] Über das Dirichletsche Problem im Grossen für nichtlineare elliptische Differentialgleichungen, Math. Z., **37** (1933), 623—634, 768. [12] Über lineure elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Z., **38** (1934), 257—282. [13] Sur les équations linéaires du type elliptique à coefficients continus, C. R. Ac. Sc. Paris, **199** (1934), 1366—1368. [14] Sur les équations quasi linéaires du type elliptique à coefficients continus, C. R. Ac. Sc. Paris, **199** (1934), 1566—1568. [15] Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen, Studia Math., **5** (1934), 34—42. [16] Équations du type elliptique, problèmes linéaires, L'enseignement math., **35** (1936), 126—139.

Шваббе (Schwabbe F.)

[1] Untersuchungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischen Typus, Dissertation, Leipzig, 1934.

Шварц (Schwartz L.)

[1] Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1950.

Шрёдер (Schröder K.)

[1] Zur Theorie der Randwertaufgaben der Differentialgleichungen $\Delta\Delta u = 0$, Math. Z., **48** (1943), 553—675. [2] Über die Ableitungen biharmonischer Funktionen am Rande, Math. Z., **49** (1943), 110—147.

Штернберг (Sternberg W.)

[1] Über die lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen, Math. Z., **21** (1924), 286—311.

Эйдус Д. М.

[1] О решении краевых задач методом конечных разностей, ДАН СССР, **83**, 2 (1952), 194. [2] О непрерывной зависимости собственных функций от области, ДАН СССР, **83**, 3 (1952), 365. [3] О смешанной задаче теории упругости, ДАН СССР, **76**, 2 (1951), 181.

Эйхлер М. (Eichler M.)

[1] Allgemeine Integration linearer partieller Differentialgleichungen von elliptischen Typ bei zwei Grundvariablen, Abh. Math. Sem. Hansische Univ., **15** (1947), 179—210. [2] On the differential equation $u_{xx}+u_{yy}+N(x)u=0$. Trans. Amer. Math. Soc., **65** (1949), 259—278.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Альтернатива Фредгольма 56, 78—80, 85—88, 90, 91, 150, 171
Априорные оценки 133

Вполне непрерывное преобразование 117

Главное фундаментальное решение 70

Задача Дирихле (первая краевая задача) 5, 59, 76, 94, 102, 103, 131
— Неймана (вторая краевая задача) 16, 59, 63, 85, 102
— с косой производной (третья краевая задача) 16, 89, 102
— смешанная 16
Замкнутая область 9

Интегральные уравнения Фишера — Рисса 121
Итерированные матрицы 56

Квази функция Грина 69, 94
Квазилинейное уравнение 162
Композиция двух векторов 55
— вектора и матрицы 55
— двух ядер 30
Конормаль 15

$\mathfrak{M}$-выпуклые ($\mathfrak{M}$-вогнутые) функции 107

Неограниченная разрешимость 171

Область 9
Обобщенное решение 12, 98, 99, 102
— — в смысле Винера 105
Обратные задачи 202
Оператор эллиптического типа 10
Ортогональная проекция 119
Отображение локально обратимое 166
— полностью обратимое 166

Полигармонические функции 210
Потенциал двойного слоя 45, 46
— объемный 35, 64
— простого слоя 38

Регулярное решение 12
Резольвентная матрица 56

Самосопряженный оператор 19
Сильно эллиптическая система 213
Симметричная матрица ядер 57
Собственное значение 57, 217
— решение (собственная функция) 57, 217
Сопряженная краевая задача 22
Сопряженный оператор 19
Спектр 217

Топологическая степень отображения 169
Точка иррегулярная 106
— критическая 168
— — обыкновенная 168
— регулярная (относительно оператора) 105
— — (относительно преобразования) 168
Транспонированная система 55

Уравнение в вариациях 171
— — параметрической форме 194
Условие Гёльдера 10

Формула Грина 19
— Стокса 26
Фундаментальное решение 26, 64, 65, 69
Функция Грина 26, 28, 69, 81
— — в обобщенном смысле 83
— Леви 24, 64, 65

Элементарное решение 26
Эллиптическая система 213
Эллиптическое решение 162
— уравнение 162

Ядро класса $N^{(\alpha)}$ 29

УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

S_m 9
x, y 9
$r = \overline{xy}$ 9
ω_m 9
$A, \mathfrak{F}A, \mathfrak{C}A$ 9
$\Gamma(x, \rho)$ 9
$C^{(k)}$ 10
$C^{(k, \lambda)}$ 10
T 10
$X_i^{(x)}$ 10
$A^{(k)}$ 10
$A^{(k, \lambda)}$ 10
Ω 11
$\mathfrak{M}$ 12
a_{ik} 12
b_i 12
c 12
f 12
p_i 12
p_{ik} 12
α, β, φ 15
ν 15
Y_i 15
a 15
$a^{(l)}$ 16
α_i 16.
e_i 18
$\mathfrak{N}$ 19
b 19
β_i 20
b' 20
$\mathfrak{P}$ 21
$\mathfrak{Q}$ 21
g, ψ 22
c^* 23
A_{rs} 24
A 24
$H(x, y)$ 24
$L(x, y)$ 24
$I(x, \rho)$ 25
$N^{(\alpha)}$ 29
$N^{(\alpha, \lambda)}$ 29
$H^{(p)}(x, y)$ 62
U_k 134
$U_{k, \lambda}$ 134
$d(x)$ 137
$U_k^{(\nu)}$ 137
$U_{k, \lambda}^{(\nu)}$ 137
$\mathfrak{U}_k^{(\nu)}$ 138
$\mathfrak{U}_{k, \lambda}^{(\nu)}$ 138
Θ_k 139
$\Theta_{k, \lambda}$ 139
A_k 142
$A_{k, \lambda}$ 142
$\overline{A}$ 142
$\mathfrak{R}_\mu^{(\sigma)}$ 145
$\mathfrak{H}_\mu^{(\sigma)}$ 145
$U^{(k)}$ 154
$\Theta^{(k)}$ 154

ОГЛАВЛЕНИЕ

стр.

Предисловие редактора перевода 5

Предисловие автора 7

Глава I. **Краевые задачи для линейных уравнений** 9
1. Точечные множества; функции 9
2. Эллиптические уравнения 12
3. Свойства максимума и минимума решений эллиптических уравнений 12
4. Различные виды краевых задач 15
5. Теоремы единственности 17
6. Формула Грина 18
7. Условия разрешимости краевых задач. Новые теоремы единственности 21
8. Функции Леви 24
9. Формула Стокса 25
10. Фундаментальные решения; функции Грина 26

Глава II. **Функции, представленные интегралами** 29
11. Композиция двух ядер 29
12. Функции, представленные интегралами 30
13. Обобщенные объемные потенциалы 35
14. Обобщенные потенциалы простого слоя 38
15. Обобщенные потенциалы двойного слоя 45
16. Построение функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям 49

Глава III. **Сведение краевых задач к интегральным уравнениям** 51
17. Некоторые понятия из теории интегральных уравнений . . . 54
18. Метод потенциалов 59
19. Теоремы существования фундаментальных решений 64
20. Главные фундаментальные решения 69
21. Сведение задачи Дирихле к интегральным уравнениям . . . 70
22. Сведение задачи Неймана к интегральным уравнениям . . . 85
23. Сведение задачи с косой производной к интегральным уравнениям 89
24. Метод квази функций Грина 94

Глава IV. **Обобщенные решения краевых задач** 98
25. Обобщенные эллиптические операторы 98
26. Уравнения, в которых коэффициенты и свободный член имеют особенности 101
27. Особые точки решений эллиптических уравнений 104
28. Обобщенные решения задачи Дирихле в смысле Винера 105
29. Обобщенные краевые условия 107
30. Метод ортогональных проекций . . . . [illegible]
31. Метод уравнений Фишера — Рисса . . . . [illegible]
32. Вариационный метод . . . . [illegible]

Глава V. **Априорные оценки решений задачи Дирихле** [illegible]
33. Оценки последовательных производных функций [illegible] коэффициентов Гёльдера . . . . [illegible]

34. Оценка решений уравнений с постоянными коэффициентами 138
35. Оценки решений общих уравнений 142
36. Метод продолжения для доказательства теоремы существования решения задачи Дирихле 148
37. Интегральные оценки 153
38. Уравнения с непрерывными коэффициентами или со свободным членом, обладающим суммируемым квадратом 156
39. Оценки первых производных от решений 158

Глава VI. **Нелинейные уравнения** 161
40. Общие свойства решений 162
41. Функциональные уравнения в абстрактных пространствах . . 165
42. Задача Дирихле для уравнений с m переменными 170
43. Задача Дирихле для уравнений с двумя переменными 176
44. Эллиптические уравнения в аналитической области 189
45. Уравнения в параметрической форме 194
46. Задача Неймана 196
47. Уравнения частного вида 196

Глава VII. **Другие исследования по эллиптическим уравнениям. Уравнения высшего порядка. Системы уравнений** . . 198
48. Эллиптические уравнения на многообразиях 198
49. Краевые задачи для неограниченных областей 199
50. Смешанные задачи 201
51. Обратные задачи 202
52. Вырожденные эллиптические уравнения 203
53. Эллиптические системы первого порядка 203
54. Канонические формы эллиптического уравнения 206
55. Уравнения высших порядков 207
56. Системы уравнений 213
57. Связь с теорией функций комплексного переменного 216
58. Задачи, зависящие от параметра 217

Примечание автора к стр. 65 221
Библиография 223
Предметный указатель 253
Указатель основных обозначений 254

К. Миранда

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Редактор *М. С. АГРАНОВИЧ*
Художник *Н. М. Лобанов.* Технический редактор *А. Н. Никифорова*

Сдано в производство 4/I 1957 г. Подписано к печати 20/IV 1957 г.
Бумага $60\times92^{1}/_{16}$=8 бум. л. Печ. л. 16. Уч.-изд. л. 16,7. Изд. № 1/3142.
Цена 13 р. 70 к. Зак. № 1758.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, Ново-Алексеевская, 52.

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности
4-я тип. им. Евг. Соколовой. Ленинград, Измайловский пр., 29.